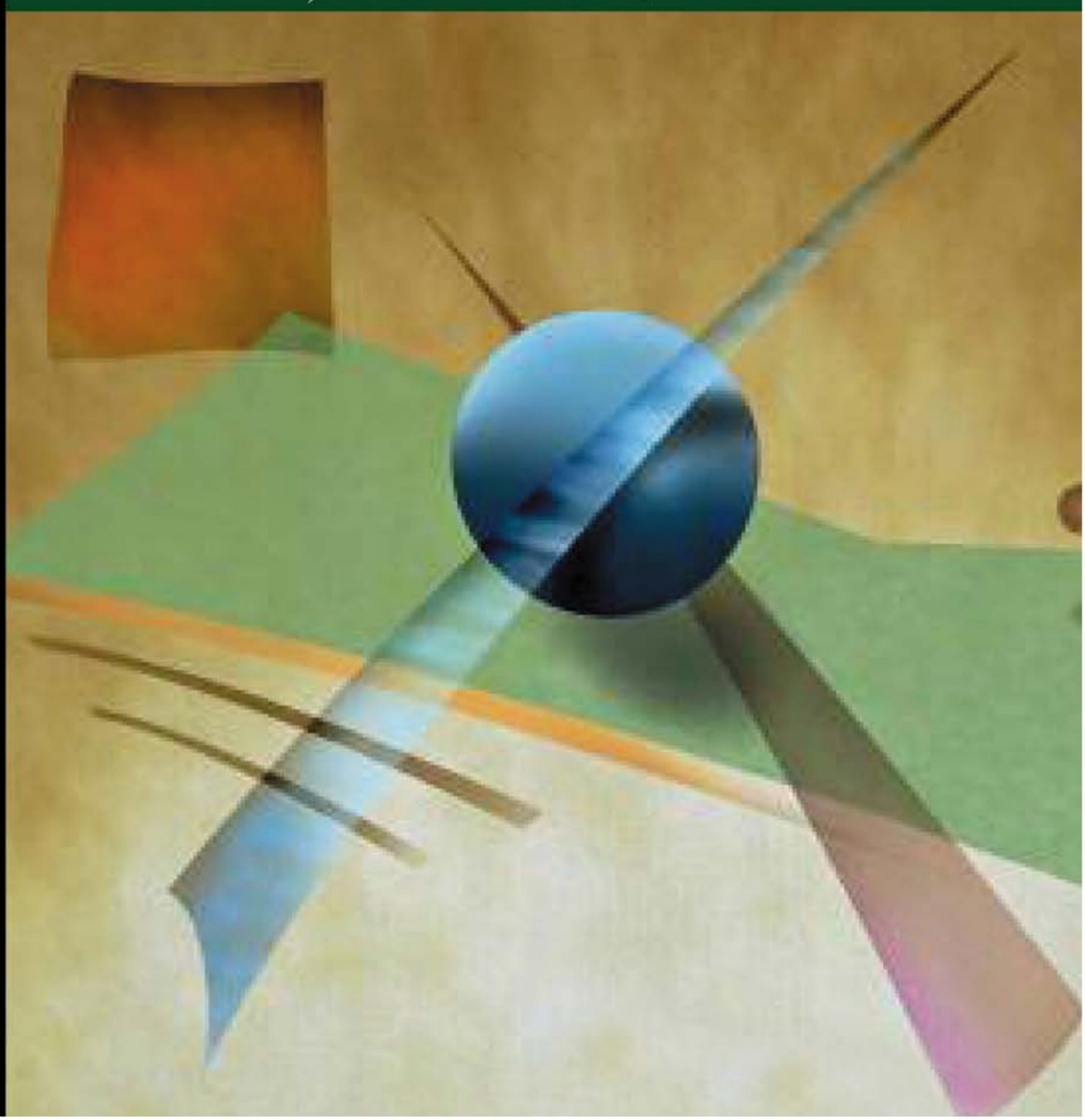
Machine Translated by Google

FACTS ON FILE SCIENCE LIBRARY

ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS

JAMES TANTON, PH.D.



Machine Translated by Google

ENCYCLOPÉDIE DE

Mathématiques

James Tanton, Ph.D.

Facts On File, Inc.

Machine Translated by Google

Encyclopédie des mathématiques

Copyright © 2005 par James Tanton, Ph.D.

Tous les droits sont réservés. Aucune partie de ce livre ne peut être reproduite ou utilisée sous quelque forme ou par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris la photocopie, l'enregistrement ou par tout système de stockage ou de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'éditeur. Pour plus d'informations, contactez :

Faits enregistrés, Inc.
132 West 31st Street New
York NY 10001

Données de catalogage avant publication de la Bibliothèque du Congrès

Tanton, James Stuart, 1966–
Encyclopédie des mathématiques/James Tanton. p. cm.

Comprend des références bibliographiques et un index.
ISBN 0-8160-5124-0 1.
Mathématiques—Encyclopédie. I. Titre.
QA5.T34 2005
510′.3—dc22 2004016785

Les livres Facts On File sont disponibles à des remises spéciales lorsqu'ils sont achetés en gros pour les entreprises, les associations, les institutions ou les promotions des ventes. Veuillez appeler notre service des ventes spéciales à New York au (212) 967-8800 ou au (800) 322-8755.

Vous pouvez trouver Facts On File sur le World Wide Web à l'adresse http://www.factsonfile.com

Conception du texte par Joan M.
Toro Conception de la couverture par
Cathy Rincon Illustrations par Richard Garratt

Imprimé aux États-Unis d'Amérique

VB Ermitage 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Ce livre est imprimé sur du papier sans acide.

Machine Translated by Google

CONTENU

Remerciements
v

Introductionvi

Entrées de A à Z 1

Essais de fonctionnalités :

"Histoire des équations et de l'algèbre" 9

"Histoire du calcul" 57

« Historique des fonctions
» 208

« Histoire de la Géométrie
» 226

« Histoire des probabilités et des statistiques
» 414

« Histoire de la trigonométrie »
510

Annexes :

Annexe I
Chronologie
539

Machine Translated by Google

Annexe II
Bibliographie et ressources Web 546

Annexe III
Associations
551

Indice
552

Machine Translated by Google

REMERCIEMENTS

Mes remerciements à James Elkins pour la lecture d'une partie substantielle du manuscrit, pour ses précieux commentaires et pour avoir façonné mes idées dans écrire un certain nombre d'entrées spécifiques. Merci également à Frank K. Darmstadt, rédacteur en chef de Facts On File, pour sa patience et ses encouragements, et à Jodie Rhodes, agent littéraire, pour m'avoir encouragé à poursuivre ce projet. Je tiens également à remercier Tucker McElroy et John Tabak d'avoir pris le temps de donner des conseils sur la recherche d'archives de photographies historiques, et le personnel de The Image Works pour leur travail de recherche de photographies et l'autorisation de les utiliser. Mais surtout, grâce à Lindy et Turner pour leur amour et leur soutien, toujours.

Machine Translated by Google

INTRODUCTION

Les mathématiques sont souvent présentées comme un vaste ensemble de faits disparates à assimiler (mémoriser !) et à n'utiliser qu'en vue d'applications très spécifiques. Pourtant, le développement des mathématiques a été un voyage qui a engagé l'esprit humain pendant des milliers d'années, offrant joie, jeu et invention créative. Le théorème de Pythagore, par exemple, bien que probablement d'abord développé pour des besoins pratiques, a fourni un grand intérêt intellectuel aux érudits babyloniens de 2000 avant notre ère , qui recherchaient des nombres à plusieurs chiffres extraordinairement grands satisfaisant la célèbre relation $ab^2 + {}^2 = c$. Les anciens érudits chinois prenaient plaisir à disposer les nombres dans des grilles carrées pour créer les premiers "carrés magiques", et les érudits de la Renaissance en Europe cherchaient à trouver une formule pour les nombres premiers, même si aucune application pratique n'était à l'esprit. Chacune de ces idées a suscité de nouvelles questions et de nouveaux développements en mathématiques - l'étude générale des équations diophantiennes, des carrés semi-magiques et des carrés latins, et la cryptographie à clé publique, par exemple - encore une fois, avec ou sans application pratique à l'esprit. La plupart des concepts présentés aux étudiants aujourd'hui ont une place historique et un contexte conceptuel riche et significatif. Le but de l'Encyclopédie des mathématiques de Facts On File est d'unir des idées disparates et de fournir un sens et un contexte.

Grâce au format encyclopédique, tous les lecteurs peuvent trouver rapidement des réponses simples aux questions qui semblent troubler les élèves et les enseignants :

• Pourquoi le produit de deux nombres négatifs est-il positif ? •
Qu'est-ce que π, et pourquoi la valeur de ce nombre est-elle la même pour tous les cercles ? • Quelle est la valeur de π pour une forme différente d'un
cercle ? • Chaque nombre est-il
une fraction ? • Pourquoi l'algorithme de division
longue fonctionne-t-il ? • Pourquoi diviser par une fraction revient-il à multiplier par son inverse ? • Quelle est la
valeur de i^i ? • Quelle est la quatrième dimension ?

Machine Translated by Google

Ce texte va également plus loin et présente des preuves pour de nombreux résultats discuté. Par exemple, le lecteur peut trouver, sous les entrées pertinentes, un preuve du théorème fondamental de l'algèbre, une preuve de la loi de Descartes signes, une preuve que chaque nombre a une factorisation première unique, une preuve de la formule de Bretschneider (généralisant la célèbre formule de Brahmagupta), et une dérivation de la formule de Heron. Un tel matériel est rarement présenté dans manuels de mathématiques standard. Dans les cas où la méthode de preuve dépasse le cadre du texte, une discussion sur les méthodes derrière la preuve est au moins offert. (Par exemple, un argument est présenté montrer comment une formule similaire à la formule de Stirling peut être obtenue, et la discussion du théorème de Cayley-Hamilton montre que toute matrice satisfait au moins une équation polynomiale.) Cette encyclopédie vise à être satisfaisant pour ceux à tous les niveaux d'intérêt. Chaque entrée contient des références croisées à d'autres éléments, offrant la possibilité d'explorer davantage le contexte et des idées connexes. Le lecteur est invité à parcourir.

En tant que chercheur, auteur et enseignant en mathématiques, j'ai toujours efforcé de partager avec mes élèves le sentiment de joie et d'enthousiasme que j'éprouve à penser et à faire des mathématiques. Rassembler, organiser, et décrivant les concepts qu'un élève du secondaire ou un étudiant débutant au niveau collégial est susceptible de rencontrer dans le programme typique de mathématiques, bien qu'il s'agisse d'une poursuite intimidante, s'est avérée extrêmement satisfaisante. je ont eu l'opportunité de transmettre à travers l'écriture de ce texte, espérons-le avec succès, un sentiment continu de joie et de plaisir dans ce que les mathématiques peuvent offrir.

Malheureusement, les mathématiques souffrent de la perception enracinée que le primaire et l'enseignement secondaire de la matière devrait consister presque exclusivement d'une acquisition d'un ensemble de compétences qui s'avéreront utiles aux étudiants en leurs carrières ultérieures. Avec la pression pour des tests standardisés dans le public système scolaire, cet état d'esprit n'en est que renforcé, et je crains personnellement que la joie d'une profonde compréhension du sujet et le sens du jeu avec le les idées qu'il contient diminuent. Par exemple, il peut sembler excitant que nous peut produire des étudiants qui peuvent calculer 584 × 379 en un éclair, mais je suis triste à l'idée qu'un tel étudiant n'est pas encouragé à se demander pourquoi nous sommes sûrs que 379 × 584 produira la même réponse. Pour les étudiants qui pourraient être naturellement enclins à s'arrêter pour réfléchir à cela, je m'inquiète également sur la réponse qu'un éducateur donnerait à la réception d'une telle requête. Est tout enseignant capable de fournir à un élève un exemple de système d'arithmétique pour lequel il n'est plus possible de supposer que a×b et b×a sont toujours le même et conduire un étudiant à travers un chemin de découverte créative dans l'étude d'un tel système ? (Comme les physiciens et les mathématiciens l'ont découvert, de tels systèmes existent.) En explorant des questions fondamentales qui défient les hypothèses de base, on découvre une compréhension plus profonde des concepts. et trouve un niveau de jeu créatif bien plus satisfaisant que la performance du calcul par cœur. Les élèves encouragés à penser de cette façon ont appris à s'adapter, non seulement à comprendre et à appliquer les principes de un concept au sujet traité, mais aussi d'appliquer ces fondements et habitudes d'esprit aux nouvelles situations qui peuvent survenir. Après tout, avec le courant

Machine Translated by Google

progrès de la technologie dans notre société aujourd'hui, nous ne pouvons pas être sûrs que les compétences par cœur que nous jugeons utiles aujourd'hui seront pertinentes pour les situations et environnements auxquels les étudiants seront confrontés dans leur future carrière. Nous devons enseigner nos étudiants à réfléchir, à être flexibles et à avoir la confiance nécessaire pour s'adapter à de nouveaux contextes et à de nouvelles situations. J'espère que ce texte, dans certains petites manières, donne une idée de l'aspect créatif de la pensée mathématique et encourage en effet doucement le lecteur à réfléchir profondément sur des concepts, même familiers.

Encyclopedia of Mathematics contient plus de 800 entrées arrangées par ordre alphabétique. Le but des notes historiques, des articles spécifiques à la culture et des portraits biographiques inclus en tant qu'entrées, en plus de fournir un contexte historique, est de donner un sens à la joie que procurent les mathématiques. amené les gens dans le passé. Le fond de ce texte contient une chronologie énumérant les principales réalisations tout au long du développement historique de mathématiques, une liste des organismes mathématiques actuels intéressant les étudiants et les enseignants, et une bibliographie.

Machine Translated by Google

UN

AAA/AAS/ASA/SAS/SSS De nombreux arguments et preuves présentés dans l'étude de la GÉOMÉTRIE reposent sur l'identification de triangles similaires. Le théorème SECANT , par exemple, illustre cela. Heureusement, il existe un certain nombre de tests géométriques utiles pour déterminer si oui ou non deux triangles différents sont similaires ou congruents.
Les noms de ces règles sont des acronymes, la lettre A représentant le mot angle et la lettre S le mot côté. Nous énumérons ici les règles avec une indication de leurs preuves en utilisant la LOI DES SINS et la LOI DES COSINS :

un. La règle AAA : Si les trois angles intérieurs d'un triangle correspondent aux trois angles intérieurs d'un second triangle, alors les deux triangles sont similaires.

La loi des sinus garantit que les paires de côtés correspondants des triangles ont des longueurs dans le même rapport. Notez également que la somme des angles intérieurs de tout triangle est de 180 °, il suffit de vérifier que deux paires correspondantes d'angles intérieurs des triangles correspondent.

b. Les règles AAS et ASA : si deux angles intérieurs et la longueur d'un côté d'un triangle correspondent aux angles intérieurs correspondants et à la longueur du côté d'un deuxième triangle, alors les deux triangles sont congruents.

Selon la règle AAA, les deux triangles sont similaires. Puisqu'une paire de longueurs de côté correspondantes correspond, les deux triangles sont similaires avec un facteur d'échelle un et sont donc congruents. (Notez que deux triangles rectangles partageant une hypoténuse commune et contenant un angle aigu commun sont congruents : les trois angles intérieurs correspondent, et les règles AAS et ASA s'appliquent. Ceci est parfois appelé le "critère de congruence HA" pour les triangles rectangles.)

c. La règle SAS : Si deux triangles ont deux côtés de longueurs correspondantes avec angle inclus correspondant, alors les deux triangles sont congruents.

La loi des cosinus garantit que les troisièmes côtés de chaque triangle sont les mêmes et que tous les angles restants dans les triangles correspondent. Selon les règles AAS et ASA, les triangles sont donc congruents. Comme application de cette règle, nous prouvons le théorème du triangle isocèle d'EUCLID :

> Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.
>
> Supposons que ABC soit un triangle dont les côtés AB et AC sont égaux en longueur. Considérez ce triangle comme représentant deux triangles : l'un indiquant BAC et l'autre CAB. Ces deux triangles ont deux longueurs de côté correspondantes avec des angles inclus correspondants, et donc, selon la règle SAS, sont congruents. En particulier, tous les angles correspondants sont égaux. Ainsi, l'angle au sommet B du premier triangle a la même mesure que l'angle correspondant du deuxième triangle, à savoir l'angle au sommet C.

Ce résultat apparaît comme la Proposition 5 du Livre I du célèbre ouvrage d'Euclide LES ÉLÉMENTS.

d. La règle SSS : si les trois longueurs de côté d'un triangle correspondent aux trois longueurs de côté d'un deuxième triangle, alors les deux triangles sont congruents.

Machine Translated by Google

La loi des sinus garantit que les trois angles intérieurs correspondent, et donc la règle SAS s'applique.

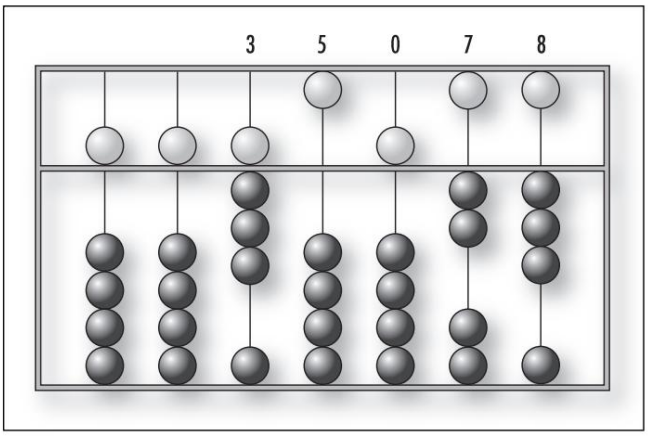
La GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE considère la règle SAS comme un AXIOME, c'est-à-dire une hypothèse de base qui ne nécessite pas de preuve. Il est alors possible de justifier la validité des règles restantes en utilisant uniquement cette règle, et de justifier également la loi des sinus. (Le fait que le sinus d'un angle soit le même pour tous les triangles rectangles contenant cet angle dépend du fait que SAS est vrai.)

Voir aussi FIGURES CONGRUENTES ; CHIFFRES SIMILAIRES.

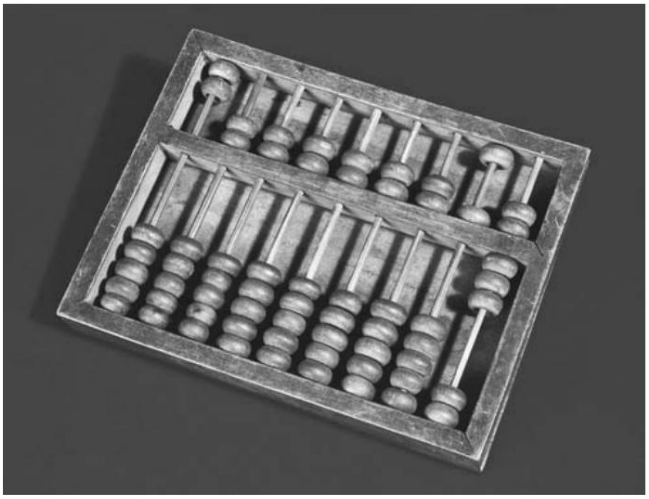
Abacus Toute planche à compter avec des perles disposées dans des rainures parallèles ou enfilées sur des tiges parallèles. En règle générale, chaque perle représente une unité de comptage et chaque rainure une valeur de position. Ces dispositifs simples peuvent être des aides puissantes pour effectuer des calculs arithmétiques.

Les doigts de chaque main fournissent le « jeu de perles » le plus simple pour le comptage manuel, et le sable à ses pieds un endroit évident pour écrire les résultats. Il n'est donc pas surprenant que toutes les cultures connues depuis l'Antiquité aient développé, indépendamment, une certaine forme de tableau de comptage pour faciliter les calculs arithmétiques complexes. Les premières planches étaient de simples tablettes d'argile cuites au soleil, recouvertes d'une fine couche de sable fin dans laquelle des symboles et des marques étaient tracés. Les Grecs utilisaient des plateaux en marbre, et les Romains des plateaux en bronze, et les deux enregistraient des unités de comptage avec des cailloux ou des perles.

Les Romains ont été les premiers à fournir des rainures pour représenter des valeurs de position fixes, une innovation qui s'est avérée extrêmement utile. Les conseils de ce type est resté le stan



Un boulier simple



Un boulier chinois d'avant 1600. Notez que deux perles, chacune représentant cinq unités, sont placées dans chaque colonne au-dessus de la barre.
(Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/ The Image Works)

ard outil des marchands et hommes d'affaires européens jusqu'à la Renaissance.

L'origine du mot boulier remonte au mot arabe abq pour « poussière » ou « sable fin ». Les Grecs utilisaient le mot abax pour "bac à sable", et les Romains ont adopté le mot abaque.

La forme de l'abaque que nous connaissons aujourd'hui a été développée au 11ème siècle en Chine et, plus tard, au 14ème siècle au Japon. (Là, l'appareil s'appelait un soroban.) Il a des perles enfilées sur des fils montés dans un cadre en bois, avec cinq perles par fil qui peuvent être poussées vers le haut ou vers le bas. Quatre perles sont utilisées pour compter les unités de un à quatre, et la cinquième perle, peinte d'une couleur différente ou séparée par une barre, représente un groupe de cinq. Cela permet de représenter tous les chiffres de zéro à neuf. Chaque fil lui-même représente une puissance différente de dix. Le diagramme de gauche représente le nombre 35 078.

L'addition est effectuée en glissant les perles vers le haut ("portant des chiffres" au besoin lorsque des valeurs supérieures à 10 se produisent sur un seul fil), et la soustraction en glissant les perles vers le bas. La multiplication et la division peuvent être calculées comme des additions et des soustractions répétées. Les historiens ont découvert que les érudits chinois et japonais ont également mis au point des techniques efficaces pour calculer les racines carrées et cubiques à l'aide du boulier.

L'abaque est toujours l'outil populaire de choix dans de nombreux pays asiatiques, préféré même à l'électronique.

Machine Translated by Google

calculatrices. C'est un dispositif pédagogique utile pour initier les jeunes enfants à la notion de valeur de position et aux opérations de l'arithmétique de base.

Voir aussi BASE D'UN SYSTÈME NUMÉRIQUE ; NAPIER'S OS.

Abel, Niels Henrik (1802–1829) Algèbre norvégienne Né le 5 août 1802, Niels Abel aurait pu être l'un des grands mathématiciens du XIXe siècle s'il n'était pas mort de la tuberculose à l'âge de 26 ans. mathématiques pour mettre fin à trois siècles de recherche d'une SOLUTION PAR RADICAUX de l'équation quintique. Ses travaux théoriques dans les domaines de la THÉORIE DES GROUPES et de l'ALGÈBRE ont ouvert la voie à des recherches importantes et continues dans ces domaines.

La courte vie d'Abel a été dominée par la pauvreté, principalement en raison des graves difficultés économiques que sa patrie de Norvège a endurées après les guerres napoléoniennes, exacerbées par des circonstances familiales difficiles. Un instituteur, heureusement, a reconnu le talent d'Abel pour les mathématiques en tant que jeune étudiant et lui a présenté les travaux de LEONHARD EULER, JOSEPH-LOUIS LAGRANGE et d'autres grands mathématiciens. Il a également aidé à amasser des fonds pour qu'Abel aille à l'université et poursuive ses études. Abel est entré à l'Université de Christiania dans la ville de Christiania (aujourd'hui Oslo), en Norvège, en 1821.

Au cours de sa dernière année d'études, Abel a commencé à travailler sur la résolution d'équations quintiques (équations polynomiales du cinquième degré) par radicaux. Bien que les érudits connaissaient depuis longtemps les formules générales pour résoudre les ÉQUATIONS QUADRATIQUES, cubiques et QUARTIQUES en utilisant rien de plus que des opérations arithmétiques de base sur les COEFFICIENTS qui apparaissent dans l'équation, personne n'avait encore trouvé de formule similaire pour résoudre les quintiques. En 1822, Abel croyait en avoir produit un. Il a partagé les détails de sa méthode avec le mathématicien danois Ferdinand Degen dans l'espoir de faire publier le travail par la Royal Society of Copenhagen. Degen a eu du mal à suivre la logique derrière l'approche d'Abel et a demandé une illustration numérique de sa méthode. En essayant de produire un exemple numérique, Abel a trouvé une erreur dans son article qui l'a finalement amené à comprendre la raison pour laquelle les solutions générales aux équations du cinquième degré et plus sont impossibles. Abel publia cette découverte phénoménale en 1825 dans une brochure auto-publiée « Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré » (Mémoire sur l'impossibilité des solutions algébriques aux équations générales du cinquième degré), qu'il a présenté plus tard sous la forme d'une série de sept articles dans le tout nouveau Journal for Pure and Applied Mathematics (communément appelé Crelle 's Journal pour ses Fondateur allemand August Leopold Crelle).

Au début, la réaction à ce travail fut lente, mais à mesure que la réputation de la revue grandissait, de plus en plus d'érudits remarquèrent l'article et la nouvelle de l'accomplissement d'Abel commença à se répandre dans toute l'Europe. Quelques années plus tard, Abel a été honoré d'une chaire de professeur à l'Université de Berlin. Malheureusement, Abel avait contracté la tuberculose à cette époque et il mourut le 6 avril 1829, quelques jours avant de recevoir la lettre de notification.

En 1830, l'Académie de Paris décerne à Abel, à titre posthume, le Grand Prix pour son œuvre exceptionnelle. Bien qu'Abel n'ait pas écrit en termes des concepts modernes de la théorie des groupes, les mathématiciens appellent les groupes sat isfiant la PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE « groupes abéliens » en son honneur. En 2002, à l'occasion du bicentenaire de sa naissance, l'Académie norvégienne des sciences et des lettres a créé un nouveau prix de mathématiques, le prix Abel, similaire au prix Nobel, décerné chaque année.

La recherche dans le domaine de l'algèbre commutative se poursuit aujourd'hui en utilisant l'approche développée par Abel au cours de sa courte vie. Son influence sur le développement de ABSTRACT ALGEBRA est vraiment significative.

convergence absolue SERIE A $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ contenant on dit que les termes positifs et négatifs convergent absolument si la série correspondante avec tous les termes rendu positif, $\sum_{1n=}^{\infty} \left| \quad \right|$, converge. Par exemple, la série an $-\frac{1}{2} + -\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{1}{32} \quad$ converge absolument parce que la série correspondante $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \quad$ converge. (Voir SÉRIE CONVERGENTE.) Le « test de convergence absolue » se lit comme suit :

Si $\sum_{1n=}^{\infty} |u_n|$ converge, alors la série originale $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge également.

Il peut être prouvé comme suit :

Machine Translated by Google

Soit pn = |an| – un . Alors chaque valeur pn est soit nul ou égal à 2 |an| , selon que an est positif ou négatif. En particulier nous avons que $0 \le p_n \le 2|a_n|$.

En conséquence, $0 \le \sum_{n=1}^{\infty} p_n \le 2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et ainsi, par le TEST DE COMPARAISON, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ converge. Conséquemment il en va de même $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + p_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} p_n$.

Ce test ne couvre cependant pas tous les cas. Il est encore possible qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ contenant du positif et les termes négatifs peuvent converger même si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ ne fait pas. Par exemple, l'alternance HARMONIQUE SÉRIE $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ converge, pourtant $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$ ne fait pas. Une série qui converge « à condition que les signes négatifs rester présent », c'est-à-dire celui pour lequel $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge mais $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ n'est pas, est appelé "condition alliée convergente. Manipulation conditionnellement convergente série peut conduire à toutes sortes de paradoxes. Par exemple, l'argument suivant « prouve » que 1 = 2 :

Partez du constat que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 \approx 0.69 \ldots .$$

(Cela découle de l'étude de l'harmonique série ou de MERCATOR'S EXPANSION.) En conséquence :

$$2 = 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - \cdots = \left(2 - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{6}\right) + \cdots$$

Collecter des termes avec un dénominateur commun donne :

$$2 = 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - \cdots = 1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{6}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots = 1 + \ln 2$$

et donc 2 = 1.

Des paradoxes comme ceux-ci montrent qu'il n'est pas permis pour réarranger l'ordre des termes d'une série conditionnellement convergente. Les mathématiciens ont montré, cependant, que le réarrangement des termes d'une convergence absolue série est valide.

Voir aussi VALEUR ABSOLUE.

valeur absolue (module) En gros, la la valeur absolue d'un NOMBRE RÉEL est la "version positive de ce nombre". Les barres verticales sont utilisées pour indiquer la valeur absolue d'un nombre. Par exemple, la valeur absolue de moins trois est |–3| = 3, et l'absolu la valeur de quatre est |4| = 4. La valeur absolue d'un réel le numéro a est généralement envisagé de trois manières :

1. |a| est égal à a lui-même si a est positif ou nul, et est égal à –a s'il est négatif. (Par exemple, |–3| = –(–3) = 3 et |3| = 3.)
2. |a| est égal à la racine carrée positive de a^2. (Par exemple, $|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}$.)
3. |a| est la distance entre les points a et 0 sur la droite des nombres réels. (Par exemple, |–3| = 3 = |3| puisque -3 et 3 sont à trois unités de l'origine.) Plus généralement, si a et b sont deux points sur la droite numérique, puis la distance qui les sépare sur la droite numérique est donnée par |a – b|. (Par exemple, les points 4 et –7 sont |4–(–7)| = |4 + 7| = 11 unités à part.)

En examinant chacun des cas avec a et b positifs ou négatifs, on peut vérifier que la valeur absolue fonction satisfait les propriétés suivantes :

i. $|a + b| \le |a| + |b|$
ii. $|a – b| \le |a| + |b|$
iii. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Connaître la valeur absolue d'une quantité détermine la valeur de cette quantité au signe près. Par exemple, l'équation |x+2| = 5 nous dit que soit x + 2 = 5

Machine Translated by Google

ou x + 2 = –5, et donc x est égal à 3 ou –7. Alternativement, on peut lire l'équation comme |x – (–2)| = 5, en l'interprétant comme signifiant que x est un point à une distance de cinq unités de –2. Cinq unités vers la gauche signifient que x est le point –7 ; cinq unités vers la droite signifie que x vaut 3.

La notion de valeur absolue n'a été explicitée qu'au milieu des années 1800. KARL WEIERSTRASS, en 1841, a été le premier à suggérer une notation pour cela - les deux barres verticales que nous utilisons aujourd'hui. Les choses sont actuellement un peu confuses, cependant, car les mathématiciens utilisent aujourd'hui également cette notation pour la longueur d'un VECTEUR et pour le MODULE d'un NOMBRE COMPLEXE.

algèbre abstraite La recherche en mathématiques pures est motivée par une question fondamentale : qu'est-ce qui fait que les mathématiques fonctionnent comme elles le font ? Par exemple, pour un mathématicien, la question « Qu'est-ce que 263 × 178 (ou de manière équivalente, 178 × 263) ? présente peu d'intérêt. Une question bien plus importante serait : « Pourquoi les réponses à 263 × 178 et 178 × 263 devraient-elles être les mêmes ?

Le sujet de l'algèbre abstraite tente d'identifier les caractéristiques clés qui font que l'ALGÈBRE et l'ARITHMÉTIQUE fonctionnent comme elles le font. Par exemple, les mathématiciens ont montré que l'opération d' addition satisfait cinq principes de base, et que tous les autres résultats sur la nature de l'addition en découlent.

1. Clôture : La somme de deux nombres est à nouveau un nombre.
2. Associativité : Pour tous les nombres a, b et c, nous avons : (a + b) + c = a + (b + c).
3. Élément zéro : Il existe un nombre, noté « 0 », de sorte que : a + 0 = a = 0 + a pour tous les nombres a.
4. Inverse : Pour chaque nombre a, il existe un autre nombre, noté « –a » , de sorte que : a + (–a) = 0 = (–a) + a.
5. Commutativité : Pour tous les nombres a et b nous avons : a + b = b + a.

Après avoir identifié ces cinq propriétés, les mathématiciens recherchent d'autres systèmes mathématiques qui peuvent satisfaire les mêmes cinq relations. Tout fait connu au sujet de l'addition sera par conséquent également vrai dans le nouveau système. C'est une approche puissante des choses.
Cela évite d'avoir à prouver à nouveau des THÉORÈMES et des faits sur un nouveau système si l'on peut le reconnaître comme un système familier déguisé. Par exemple, MULTIPLICATION satisfait essentiellement les mêmes cinq AXIOMES que ci-dessus, et donc pour tout fait sur l'addition, il y a un fait correspondant sur la multiplication. L'ensemble des symétries d'une géométrie La figure satisfait également ces cinq axiomes, et ainsi tous les résultats connus sur l'addition se transfèrent immédiatement en déclarations intéressantes sur la géométrie. Tout système qui satisfait ces cinq axiomes de base est appelé un "groupe abélien", ou simplement un GROUPE si le cinquième axiome échoue. LA THÉORIE DES GROUPES est l'étude de tous les résultats qui découlent de ces cinq axiomes de base sans référence à un système mathématique particulier.

L'étude des RING et des FIELD considère des systèmes mathématiques qui permettent deux opérations fondamentales (typiquement appelées addition et multiplication).
La prise en compte de l'opération supplémentaire de multiplication scalaire conduit à une étude des ESPACES VECTORIELS.

La théorie des structures algébriques est très développée. L'étude des espaces vectoriels, par exemple, est si étendue que le sujet est considéré comme un domaine des mathématiques à part entière et s'appelle l' ALGÈBRE LINÉAIRE.

Accélération Voir VITESSE.

science actuarielle L'étude statistique de l'espérance de vie, de la maladie, de la retraite et des accidents s'appelle la science actuarielle. Les experts dans le domaine sont appelés actuaires et sont employés par les compagnies d'assurance et les fonds de pension pour calculer les risques et les relier aux primes à facturer. Mathématicien et astronome britannique, Edmund Halley (1656-1742) a été le premier à analyser correctement les rentes et est aujourd'hui considéré comme le fondateur du domaine.

Voir aussi TABLES DE VIE.

angle aigu Un ANGLE compris entre zéro et 90° est appelé un angle aigu. Un triangle à angle aigu est un triangle dont les angles sont tous aigus. Selon la LOI DES COSINS, un triangle dont les côtés sont a, b et c et les angles correspondants A, B, C opposés à ces côtés satisfait :

$$\text{Cos}C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

L'angle C n'est aigu que si cosC > 0, c'est-à-dire que si $a^2 + b^2 > c^2$. Ainsi un triangle a, b, c est aigu si et seulement si les trois inégalités suivantes sont vraies :

Machine Translated by Google

$$a^2 + b^2 > c^2$$
$$b^2 + c^2 > a^2$$
$$a^2 + c^2 > b^2$$

Voir aussi ANGLE OBTUSE ; PÉRIGON ; DE PYTHAGORE THÉORÈME; TRIANGLE.

addition Processus consistant à trouver la somme de deux nombres s'appelle l'addition. Dans l' ARITH METIC élémentaire des nombres entiers, l'addition peut être considérée comme le processus d'accumulation d'ensembles d'objets. Par exemple, si un ensemble de trois pommes est combiné avec un ensemble de cinq pommes, le résultat est un ensemble de huit pommes. Nous écrire : 3 + 5 = 8.

Deux nombres additionnés s'appellent ajoute. Par exemple, dans l'équation 17 + 33 = 50, les nombres 17 et 33 sont les additions, et le nombre 50 est leur somme. L'addition peut également être considérée comme le processus d'augmentation d'un nombre (un addend) de un autre (appelé, dans ce contexte, un augende). Ainsi quand 17 est augmenté de 33 unités, le résultat est 50.

Le PLACE-VALUE SYSTEM que nous utilisons aujourd'hui pour écrire nombres simplifie le processus d'ajout de grands nombres entiers. Par exemple, en additionnant 253 et 589, on obtient 2 + 5 = 7 unités de 100, 5 + 8 = 13 unités de 10, et 3 + 9 = 12 unités de 1. Donc, dans un certain sens, il est raisonnable d'écrire la réponse à ce problème d'addition simplement comme 7 | 13 | 12 en utilisant une barre verticale pour séparer les unités de puissances de 10. Puisque 13 unités de 10 équivaut à une unité de 100 et trois unités de 10, cela équivaut à 8 | 3 | 12. Notant, également, que 12 unités d'un 12 équivaut à une unité de 10 et deux unités simples, cela peut être réécrit dix comme 8 | 4 | 2. Nous avons donc : 253 + 589 = 842.

Ce dernier processus de modification des chiffres en puissances à un seul chiffre de 10 (c'est-à-dire, dans notre exemple, le processus de réécriture de 7 | 13 | 12 en 8 | 4 | 2) est appelé "portant des chiffres". Les élèves des écoles sont généralement enseigné un algorithme qui a un chiffre de retenue au début de le processus de résolution d'un problème d'addition plutôt que de quitter ce travail comme étape finale. L'une ou l'autre méthode est valable. (Le terme "porter un chiffre" remonte à la l'époque de l' ABACUS, où les perles sur tiges représentaient compte de puissances de 10 et la personne devait se déplacer— "porter" - compteurs d'une tige à l'autre, le cas échéant le nombre était supérieur à un seul chiffre.)

Le processus d'addition peut être étendu aux NOMBRES NÉGA TIFS (donnant une opération appelée SUBTRAC TION), l'ajout de FRACTIONS (complété par les aide au calcul des DÉNOMINATEURS COMMUNS), REAL NOMBRES, NOMBRES COMPLEXES, VECTEURS et MATRICE ajout. Le nombre ZERO est une IDENTITE additive ELEMENT dans la théorie de l'arithmétique. On a ça + 0 = a = 0 + a pour tout nombre a.

La somme de deux fonctions à valeurs réelles f et g est la fonction f + g dont la valeur à toute entrée x est la somme de les sorties de f et g à cette valeur d'entrée : (f + g)(x) = f(x) + g(x). Par exemple, si f(x) = x^2 + 2x et g(x) = 5x + 7, alors (f + g)(x) = $x^2 + 2x + 5x + 7 = x^2 + 7x + 7$.

Une fonction avec la propriété que f(x + y) = f(x) + f(y) pour toutes les entrées x et y est appelé "additif". Pour exemple, f(x) = 2x est additif.

Les formules d'addition en TRIGONOMÉTRIE affirment :

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

On pense que le symbole + utilisé pour désigner l'addition est sont dérivés d'un raccourci populaire pour le latin mot et signifiant « et » et était largement utilisé par les spécialistes des mathématiques à la fin du XVe siècle. Le symbole est apparu pour la première fois en version imprimée dans Johannes Widman's 1489 livre Behennde unnd hüpsche Rechnung auf tombé Kauffmannschaften (Calculs soignés et pratiques pour tous commerçants).

Voir aussi ASSOCIATIF ; CASTING OUT NEUF ; PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE ; PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE ; MULTIPLICATION; ADDITION.

géométrie affine L'étude de ces propriétés de figures géométriques qui restent inchangées par un AFFINE La TRANSFORMATION est appelée géométrie affine. Par exemple, puisqu'une transformation affine préserve lignes et RATIOs des distances entre les POINTS, les notions de droites PARALLÈLES , de POINTS MILIEUX de segments de LIGNE , et la tangence sont des concepts valables en géométrie affine. Le la notion de CERCLE, cependant, ne l'est pas. (Un cercle peut être transformée en une ELLIPSE via une transformation affine. L'équidistance des points du cercle à partir du le centre du cercle n'a pas besoin d'être conservé.)

La géométrie affine a été étudiée pour la première fois par le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783). Seuls les postulats

Machine Translated by Google

1, 2 et 5 des POSTULATS D'EUCLIDE restent valables dans géométrie affine.

transformation affine Toute application du PLAN à lui-même qui transforme les LIGNES droites en lignes droites et préserve les RATIOs des distances entre les POINTS (donc que le milieu d'un segment de ligne, par exemple, reste le point médian après la transformation) s'appelle une transformation affine. On peut prouver que tout affine la transformation doit être une TRANSFORMATION LINÉAIRE suivi d'une traduction. Ainsi une transformation affine T est complètement spécifiée par une MATRICE A et une VECTEUR b tel que T(x) = Ax + b pour tout vecteur x représentant un point du plan.

Une transformation affine T satisfait la relation :

$$T(sx + ty) = sT(x) + tT(y)$$

pour deux vecteurs x et y et deux nombres réels s et t tels que s + t = 1. Ceci est parfois pris comme la définition de ce que signifie une transformation en être affine.

Les transformations affines ne préservent généralement pas les longueurs des segments de ligne ni la mesure de ANGLES entre les segments. Il est possible de transformer un CERCLE en une ELLIPSE, par exemple, via une affine transformation.

Voir aussi GEOMETRIE AFFINE.

Agnesi, Maria Gaëtana (1718–1799) Italien Calcu lus Née le 16 mai 1718, dans une riche famille de soyeux marchands, Maria Agnesi est surtout connue pour sa texte explicatif influent décrivant les méthodes et techniques du CALCULUS nouvellement inventé. Écrit avec tant de clarté et de précision, Istituzioni analitiche (institutions analytiques) a obtenu son international notoriété. Agnesi est considérée comme la première femme grande mathématicienne des temps modernes, et elle a la distinction d'être la première femme à recevoir un diplôme universitaire. professeur de mathématiques dans une faculté universitaire.

Agnesi a démontré des talents académiques remarquables en tant que jeune enfant. À 13 ans, elle avait maîtrisé de nombreux langues et avait publié des traductions de essais. Bien que peu d'attention ait été accordée à l'éducation des femmes au début du XVIIIe siècle, Le père d'Agnesi a encouragé son développement intellectuel ment, lui a fourni des tuteurs de la plus haute qualité et lui a fourni des forums pour montrer ses talents à l'italien société. En préparation de ces événements, Agnesi avait préparé des discours sur une grande variété de sujets scientifiques et de philosophie, qu'elle a publié sous la forme d'un recueil de 190 essais à 20 ans.

Après la mort de sa mère, Agnesi a entrepris la tâche d'instruire ses jeunes frères dans le domaine des mathématiques. En 1738, elle commença à préparer un manuel pour leur utilisation, et a trouvé le sujet si passionnant qu'elle a consacré toute son attention intellectuelle aux mathématiques. Dix ans plus tard, son célèbre un texte en deux volumes Istituzioni analitiche a été publié.

Le travail a été le premier aperçu complet de le sujet du calcul. Bien que conçu pour les jeunes étudiants qui commencent leurs études sur le sujet, Agnesi travail a été reconnu comme fournissant jusque-là inaperçu liens entre les différentes approches de SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) et GOTTFRIED WIL HELM LEIBNIZ (1646–1716), coinventeurs indépendants du sujet. Sa pièce a également fourni, pour la première temps, des explications claires sur des problèmes auparavant déroutants dans le sujet. Son texte rassemblait et expliquait le travail d'autres contributeurs au sujet de plusieurs pays différents, une tâche sans doute facilitée par ses compétences en traduction. Ses talents, pas seulement comme exposant écrivain, mais aussi grand érudit en mathématiques, étaient apparent. Les mathématiciens de l'époque l'ont reconnue texte comme une contribution significative au développement ultérieur du sujet du calcul. En 1750, Agnesi était nommé titulaire de la chaire de mathématiques de l'Université de Bologne en reconnaissance de sa grande réussite. Curieusement, elle n'a jamais officiellement accepté ou rejeté la poste de professeur. On sait qu'elle n'a jamais visité le ville de Bologne, même si son nom apparaît sur les registres universitaires depuis 45 ans.

Après la mort de son père en 1752, Agnesi puise dans les mathématiques et consacre sa vie à des œuvres caritatives, aidant les malades et les pauvres. En 1783, elle a été nommée directrice d'un hospice pour femmes, où elle resta le reste de sa vie. Ayant donné tout son argent et possessions, Agnesi mourut le 9 janvier 1799, sans argent propre et a été enterrée dans un pauvre grave. La ville de Milan, où elle avait vécu toute sa vie vie, honore aujourd'hui publiquement sa tombe.

John Colson, professeur lucasien de mathématiques à Cambridge, a publié une traduction anglaise d' Isti tuzioni analitiche en 1801. Il a dit qu'il voulait

Machine Translated by Google

donner à la jeunesse britannique la même opportunité de bénéficier de ce texte remarquable que les jeunes érudits italiens avaient pu bénéficier.

Alembert, Jean Le Rond d' (1717–1783) Français Équations différentielles, Analyse, Philosophie Né le 17 novembre 1717 à Paris, France, le savant Jean le Rond d'Alembert est surtout connu pour son traité de 1743 Traité de dynamique (Traité de dynamique), dans lequel il a tenté de développer une base mathématique solide pour l'étude de la mécanique. D'Alembert a été le pionnier de l'étude des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES partielles et de leur utilisation en physique. Il est également connu pour son travail sur les cordes vibrantes.

Après avoir brièvement étudié la théologie et la médecine au Collège janséniste des Quatre Nations, d'Alembert a fait des mathématiques son choix d'études universitaires.



Jean Le Rond d'Alembert, éminent mathématicien du XVIIIe siècle, a été le pionnier de l'étude des équations différentielles et de leur application à la mécanique. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de Topham/The Image Works)

Il est diplômé du Collège en 1735 pour ensuite s'intéresser à la mécanique des fluides. En 1740, il a présenté une série de conférences sur le sujet aux membres de l'Académie des sciences de Paris, ce qui lui a valu d'être reconnu comme un mathématicien compétent et admis en tant que membre de l'académie. Il est resté dans l'institution pendant toute sa carrière.

D'Alembert en est venu à croire que le sujet de la mécanique devrait être basé sur des principes logiques, pas nécessairement physiques, et que sa base est fondamentalement mathématique. Dans son traité de 1743 Traité de dynamique, il tente d'affiner l'œuvre de SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) et de clarifier les fondements du sujet. L'année suivante, d'Alembert publie un deuxième ouvrage, Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides , qui applique ses résultats à l'étude du mouvement des fluides et introduit quelques premiers résultats sur l'étude. d'équations aux dérivées partielles. Il approfondit ces résultats au cours des années suivantes. En 1747, d'Alembert soumit un article «Réflex ions sur la cause générale des vents» (Réflexions sur la cause générale du mouvement de l'air) en vue du prix scientifique annuel offert par l'Académie prussienne.

Il a effectivement gagné.

Dans le même temps, d'Alembert a également commencé à travailler comme écrivain et éditeur scientifique pour le célèbre français Ency clopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers (Encyclopédie et dictionnaire des rationales des sciences, des arts et des professions) , prenant en charge la rédaction de la majorité des entrées mathématiques. Le premier volume de l'ouvrage en 28 volumes a été publié en 1751.

D'Alembert a publié plusieurs nouveaux résultats et idées mathématiques dans cet ouvrage épique. Par exemple, dans le tome 4, sous le différentiel d'entrée, il a suggéré, pour la première fois, que les principes de CALCULUS devraient être basés sur la notion de LIMITE. Il est allé jusqu'à envisager de définir la dérivée d'une fonction comme la limite d'un RATIO d'incréments. Il a également décrit le nouveau test de ratio lors de la discussion sur la SÉRIE CONVERGENTE.

Les intérêts de D'Alembert se sont tournés vers la littérature et la philosophie, et le travail administratif, dans la dernière partie de sa vie. Il est élu secrétaire perpétuel de l'Académie française en 1772. Il meurt 11 ans plus tard, le 29 octobre 1783.

Ses travaux en mathématiques ont ouvert la voie au bon développement de la notion de limite en calcul, ainsi qu'au

Machine Translated by Google

comme avancement du domaine des équations aux dérivées partielles. En mécanique, il est honoré d'un principe de mouvement qui porte son nom, une généralisation de la troisième loi du mouvement de Sir Isaac Newton.

Voir aussi CALCUL DIFFÉRENTIEL.

algèbre La branche des mathématiques concernée par les propriétés générales des nombres et les généralisations découlant de ces propriétés s'appelle l'algèbre. Souvent, des symboles sont utilisés pour représenter des nombres génériques, distinguant ainsi le sujet de l'étude de l'ARITHMÉTIQUE. Par exemple, l'équation 2 × (5 + 7) = 2 × 5 + 2 × 7 est un (vrai) énoncé arithmétique sur un ensemble spécifique de nombres, alors que l'équation x × (y + z) = x × y + x × z est une déclaration générale décrivant une propriété satisfaite par trois nombres quelconques . C'est un énoncé en algèbre.

Une grande partie de l'algèbre élémentaire consiste en des méthodes de manipulation d'équations pour les mettre sous une forme plus pratique ou pour déterminer (c'est-à-dire résoudre) les valeurs admissibles des variables qui apparaissent. Pour + instance, la réécriture ^{2} 6x + 9 = 25 comme (x + 3)2 = 25 de x permet une solution facile pour x : soit x + 3 = 5, donnant x = 2, soit x + 3 = –5, donnant x = –8.

Le mot algèbre vient du terme arabe al-jabr w'al-muqa¯bala (signifiant « restauration et réduction ») utilisé par le grand MUHAMMAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– I (ca. 780–850) dans ses écrits sur le sujet.

Histoire des équations et de l'algèbre

Trouver des solutions aux équations est une poursuite qui remonte aux anciens Égyptiens et Babyloniens et peut être retracée à travers les mathématiques des premiers Grecs. Le PAPYRUS RHIND, datant d'environ 1650 avant notre ère, par exemple, contient un problème de lecture :

> Une quantité; son quatrième lui est ajouté. Cela devient quinze. Quelle est la quantité ?

Il est conseillé aux lecteurs de résoudre des problèmes comme ceux-ci par une méthode de "fausse position", où l'on devine (pose) une solution, susceptible d'être fausse, et ajuste la supposition en fonction du résultat obtenu. Dans cet exemple, pour simplifier la division, on peut supposer que la quantité est quatre. Prendre 4 et y ajouter son quatrième donne cependant seulement 4 + 1 = 5, soit un tiers de la réponse souhaitée de 15. Multiplier l'estimation par un facteur de trois donne la solution du problème, à savoir 4 × 3, qui est 12.

Bien que la méthode de la fausse position ne fonctionne que pour les ÉQUATIONS LINÉAIRES de la forme ax = b, elle peut néanmoins être un outil efficace. En fait, plusieurs des problèmes présentés dans le papyrus Rhind sont assez compliqués et sont résolus relativement rapidement grâce à cette technique.

Des tablettes d'argile datant de 1700 avant notre ère indiquent que les mathématiciens babyloniens étaient capables de résoudre certaines équations QUADRATIQUE par la méthode de COMPLÉTER LE CARRÉ. Ils n'avaient cependant pas de méthode générale de résolution et ne travaillaient qu'avec un ensemble d'exemples spécifiques parfaitement élaborés. Tout autre problème qui se posait était correspondait à un exemple précédemment résolu, et sa solution a été trouvée en ajustant les nombres de manière appropriée.

Une grande partie des connaissances accumulées par les anciennes civilisations d'Égypte et de Babylone a été transmise aux Grecs. Ils ont pris les choses dans une direction différente et ont commencé à examiner géométriquement tous les problèmes en interprétant les nombres comme des longueurs de segments de droite et les produits de deux nombres comme des aires de régions rectangulaires. Les adeptes de PYTHAGORE de la période 540 à 250 avant notre ère, par exemple, ont donné des preuves géométriques de la PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE et de la formule DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS , par exemple, à peu près de la même manière géométrique que nous utilisons aujourd'hui pour expliquer la méthode de CROCHET EN EXPANSION ETS. Cependant , les Grecs avaient beaucoup de mal à résoudre les équations cubiques, car leur pratique de traiter les problèmes géométriquement conduisait à des constructions tridimensionnelles compliquées pour faire face au produit de trois quantités.

À ce stade, aucun symbole n'était utilisé dans les problèmes algébriques, et toutes les questions et solutions étaient écrites en mots (et illustrées par des diagrammes). Cependant, au troisième siècle, DIOPHANTE D' ALEXANDRIE a introduit l'idée d'abréger l'énoncé d'une équation en remplaçant les quantités et les opérations fréquemment utilisées par des symboles comme une sorte de raccourci. Cette nouvelle focalisation sur les symboles a eu pour effet subtil de détourner la pensée grecque de la géométrie.
Malheureusement, l'idée d'utiliser réellement les symboles pour résoudre des équations a été ignorée jusqu'au XVIe siècle.

Les écoles de pensée babylonienne et grecque ont également influencé le développement des mathématiques dans l'Inde ancienne. Le savant BRAHMAGUPTA (ca. 598–665) a donné des solutions à

(continue)

Machine Translated by Google

Histoire des équations et de l'algèbre (suite)

équations quadratiques et décrit des méthodes générales pour résoudre des systèmes d'équations contenant plusieurs variables. (Il avait également une compréhension claire des nombres négatifs et était à l'aise de travailler avec zéro comme quantité numérique valide.)
Le savant Bh– askara (vers 1114–1185) a utilisé des lettres pour représenter des quantités inconnues et, en travaillant avec des équations quadratiques, a suggéré que tous les nombres positifs ont deux racines carrées et que les nombres négatifs n'ont pas de racines (significatives).

Une étape importante vers le développement de l'algèbre moderne s'est produite à Bagdad, en Irak, en l'an 825 lorsque le mathématicien arabe MUHAMMAD IBN M – US– A AL-KHW–ARIZM– I (vers 780–850) a publié sa célèbre pièce Hisab al -jabr w'al muqa¯ bala (Calcul par restauration et réduction). Cet ouvrage représente le premier exposé clair et complet sur l'art de résoudre des équations linéaires par une nouvelle pratique consistant à effectuer la même opération des deux côtés d'une équation. Par exemple, l'expression x – 3 = 7 peut être « restaurée » à x = 10 en ajoutant trois aux deux côtés de l'expression, et l'équation 5x = 10 peut être « réduite » à x = 2 en divisant les deux côtés de la équation par cinq. Al-Khw– arizm– ı a également montré comment résoudre des équations quadratiques via des techniques similaires. Ses descriptions, cependant, n'utilisaient aucun symbole et, comme les anciens Grecs, al-Khw– arizm– ı écrivait tout avec des mots. Néanmoins, le traité d'al-Khw–arizm–ı a été extrêmement influent, et sa nouvelle approche de la résolution d'équations a ouvert la voie à la pensée algébrique moderne. En fait, c'est du mot al-jabr dans le titre de son livre que notre mot algèbre est dérivé.

Les travaux d' Al-Khw– arizm– ı ont été traduits en latin par le mathématicien italien FIBONACCI (vers 1175–1250), et ses méthodes efficaces de résolution d'équations se sont rapidement répandues dans toute l'Europe au cours du XIIIe siècle. Fibonacci a traduit le mot shai utilisé par al-Khw– arizm– ı pour « la chose inconnue » dans le terme latin res. Il a également utilisé le mot italien cosa pour «chose», et l'art de l'algèbre est devenu connu en Europe sous le nom de «l'art cossique».

En 1545, GIROLAMO CARDANO (1501-1576) publia Ars magna (Le grand art), qui comprenait des solutions aux ÉQUATIONS cubiques et QUARTIQUES, ainsi que d'autres découvertes mathématiques. À la fin du XVIIe siècle, les mathématiciens étaient à l'aise pour effectuer le même type de manipulations symboliques que nous pratiquons aujourd'hui et étaient prêts à accepter des nombres négatifs et des quantités irrationnelles comme solutions aux équations. Le mathématicien français FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603) a introduit un système efficace pour dénoter les puissances des variables et a été le premier à utiliser des lettres comme coefficients avant les variables, comme dans « ax2 + bx + c », par exemple.
(Viète a également introduit les signes "+" et "-", bien qu'il n'ait jamais utilisé de signe d'égalité.) RENÈ DESCARTES (1596-1650) a introduit la convention de dénoter des quantités inconnues par les dernières lettres de l'alphabet, x, y et z, et des quantités connues par les premières, a, b, c. (Cette convention est maintenant complètement enracinée ; quand on voit, par exemple, une équation de la forme ax + b = 0, on suppose sans conteste que c'est pour « x » qu'il faut résoudre.)

Le mathématicien allemand CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) a prouvé le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE en 1797, qui stipule que chaque équation POLYNOMIALE de degré n a au moins une et au plus n racines (éventuellement complexes).

Son travail, cependant, ne fournit pas de méthodes réelles pour trouver ces racines.

Les érudits de la Renaissance SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526) et NICCOLÒ TARTAGLIA (vers 1500-1557) savaient tous deux résoudre des équations cubiques, et dans son traité de 1545 Ars magna, Cardano publia la solution de l'équation quartique découverte par son assistant. LUDOVICO FERRARI (1522-1565). Pendant les siècles qui ont suivi, les mathématiciens ont tenté de trouver une méthode arithmétique générale pour résoudre toutes les équations quintiques (cinquième degré). LEONHARD EULER (1707-1783) soupçonnait que la tâche pourrait être impossible. Entre les années 1803 et 1813, le mathématicien italien Paolo Ruffini (1765-1822) a publié un certain nombre de résultats algébriques qui suggéraient fortement la même chose, et quelques années plus tard, le mathématicien norvégien NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) a prouvé qu'en effet , il n'y a pas de formule générale qui résout toutes les équations quintiques en un nombre fini d'opérations arithmétiques. Bien sûr, certaines équations de degré cinq peuvent être résolues algébriquement. (Équation de la forme x solutions x = 5√a. –) En 1831, le mathématicien français ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) a complètement classé les équations qui peuvent être ainsi résolues, développant des travaux qui ont donné naissance à une toute nouvelle branche des mathématiques aujourd'hui appelée THÉORIE DES GROUPES. ^{5} – a = 0, par exemple, ont

Au XIXe siècle, les mathématiciens ont commencé à utiliser des variables pour représenter des quantités autres que des nombres réels. Par exemple, le mathématicien anglais GEORGE BOOLE (1815-1864) a inventé une logique symbolique algébrique dans laquelle les variables représentaient des ensembles, et le savant irlandais SIR WILLIAM ROWAN HAMIL TON (1805-1865) a inventé des systèmes algébriques dans lesquels les variables représentaient des VECTEURS ou des QUATERNIONS.

Avec ces nouveaux systèmes, des caractéristiques importantes de l'algèbre ont changé. Hamilton, par exemple, a découvert que la multiplication n'était plus commutative dans ses systèmes : un produit a × b ne donnerait pas nécessairement le même résultat que b × a. Cela a motivé les mathématiciens à développer des AXIOM abstraits pour expliquer le fonctionnement de différents systèmes algébriques. Ainsi est né le sujet de l'ALGÈBRE ABSTRAITE . La mathématicienne allemande AMALIE NOETHER (1883–1935), qui a fait d'importantes découvertes sur la nature des algèbres non commutatives, a contribué de manière exceptionnelle à ce domaine.

Voir aussi ASSOCIATIF ; MATHÉMATIQUES BABYLONIENNES ; ANNULATION ; PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE ; MATHÉMATIQUES ÉGYPTIENNES ; CHAMP; MATHÉMATIQUES GRECQUES ; MATHÉMATIQUES INDIENNES ; ALGÈBRE LINÉAIRE; ANNEAU.

Machine Translated by Google

Dans les temps modernes, le sujet de l'algèbre s'est élargi pour inclure l'ALGÈBRE ABSTRAITE, l'ORY DU GROUPE et l'étude de systèmes de numération alternatifs tels que l'ARITHMÉTIQUE MODULAIRE. L'ALGÈBRE BOOLÉEN examine l'algèbre des inférences logiques, l'algèbre matricielle l'arithmétique des opérations MATRICE et l'algèbre vectorielle la mécanique des opérations VECTEUR et

ESPACES VECTEURS.

Une structure algébrique est tout ensemble équipé d'une ou plusieurs opérations (généralement des OPÉRATIONS BINAIRES) satisfaisant une liste de règles spécifiées. Par exemple, tout groupe, RING, FIELD ou espace vectoriel est une structure algébrique. En mathématiques avancées, un espace vectoriel qui est aussi un champ est appelé une « algèbre ».

Voir aussi CROCHETS ; PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE ; DIS PROPRIÉTÉ TRIBUTIVE ; SUPPORTS D'EXTENSION ; FONDA THÉORÈME MENTAL D'ALGÈBRE ; HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET DE L'ALGÈBRE (essai); ORDRE DE FONCTIONNEMENT.

nombre algébrique Un nombre est dit algébrique s'il est la racine d'un POLYNOME à coefficients entiers.
Par exemple, (1/2) (5 + √ —13) est algébrique puisque c'est une solution de l'équation x – 5x + 3 = 0. Tous les NOMBRES RATIONNELS sont algébriques (puisqu'une fraction a/b est la solution de l'équation bx – a = 0), et tout carré, cube, √ —a est racines supérieures des entiers sont algébriques $\sqrt[n]{a}$ et les (puisque la solution de $x^n - a = 0$).

À première vue, il semble que tous les nombres soient algébriques, mais ce n'est pas le cas. En 1844, le mathématicien français JOSEPH LIOUVILLE fit la surprenante découverte que le nombre suivant, aujourd'hui appelé « constante de Liouville », ne peut être la solution d'aucune équation polynomiale entière :

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000000000000000000100 \quad \ldots$$

Les nombres qui ne sont pas algébriques sont appelés "transcendentaux".

En 1873, le mathématicien français Charles Hermite (1822-1901) prouva que le nombre e est transcendantal et, neuf ans plus tard, en 1882, le mathématicien allemand CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN établit que π est transcendantal. En 1935, le mathématicien russe Aleksandr Gelfond (1906-1968) a prouvé que tout nombre b est transcendantal si a et b sont tous deux algés de la forme a

braique, avec a différent de 0 ou 1, et b irrationnel.
(Ainsi, par exemple, $2^{\sqrt{3}}$ est transcendantal.)

Le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918) a montré que l'ensemble des nombres algébriques est COMPTABLE. Comme l'ensemble des nombres réels est indénombrable, cela signifie que la plupart des nombres sont transcendantaux La probabilité qu'un nombre réel choisi au hasard soit algébrique est nulle. Bien qu'il ait été prouvé en 1929 que π est transcendant, personne à ce jour ne sait si π^e est algébrique. ou non π

Par analogie avec les nombres algébriques, une FONCTION y = f(x) est dite « algébrique » si elle peut être définie par une relation de la forme

$$p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + p_1(x)y + p_0(x) = 0$$

où les fonctions pi (x) sont des polynômes en x. Par exemple, la fonction y = √ —x est une fonction algébrique, puisqu'elle est définie par l'équation y fonction scendentale $2^x = 0$. Un tran est une fonction qui n'est pas algébrique.
Les mathématiciens ont montré que les fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles sont transcendantes.

Voir aussi CARDINALITE.

algorithme Un algorithme est un ensemble spécifique d'instructions permettant d'exécuter une procédure ou de résoudre un problème mathématique. Les synonymes incluent « méthode », « procédure » et « technique ». Un exemple d'algorithme est la méthode courante de DIVISION LONGUE.
Un autre est l' ALGORITHME EUCLIDEEN pour trouver le PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN de deux entiers positifs.
Le mot algorithme est une déformation de « al-Khw– arizm– ı », le nom d'un mathématicien persan (vers 820) qui a écrit un texte influent sur les méthodes algébriques.

Voir aussi BASE D'UN SYSTÈME NUMÉRIQUE ; MOHAMED IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı.

série alternée Une SÉRIE dont les termes sont alternativement positifs et négatifs est appelée série alternée. Pour exemple, la GREGORY SERIES $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$ est une série alternée, comme l'est la série (divergente) : 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +… Les séries alternées ont la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad u_n > 0$$

, avec chaque ai positif nombre.

Machine Translated by Google

En 1705, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ remarqua que de nombreuses séries alternées convergentes, comme la série de Grégoire, ont des termes ai qui décroissent et tendent vers zéro :

je. a1 ≥ a2 ≥ a3 ≥…
ii. un → 0

Il réussit à prouver que toute série alternée satisfaisant à ces deux conditions converge bien, et aujourd'hui ce résultat est appelé le « test des séries alternées ».
(On peut voir que le test est valide si l'on effectue physiquement des pas de plus en plus petits d'avant en arrière : a1 pied en avant, a2 pieds en arrière, a3 pieds en avant, etc.
Ce mouvement commence à "se concentrer" sur un seul emplacement limite.) Nous voyons, par exemple, que la série

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

converge. Malheureusement, le test des séries alternées ne nous donne aucune indication sur ce que pourrait être la valeur de la somme. Généralement, trouver la valeur limite représente une quantité de travail considérable, si possible. Les valeurs de nombreuses séries alternées "simples" ne sont pas connues aujourd'hui. (On peut montrer, cependant, que la série ci-dessus converge vers $\pi^2/12$. Voir SÉRIE CONVERGENTE.)

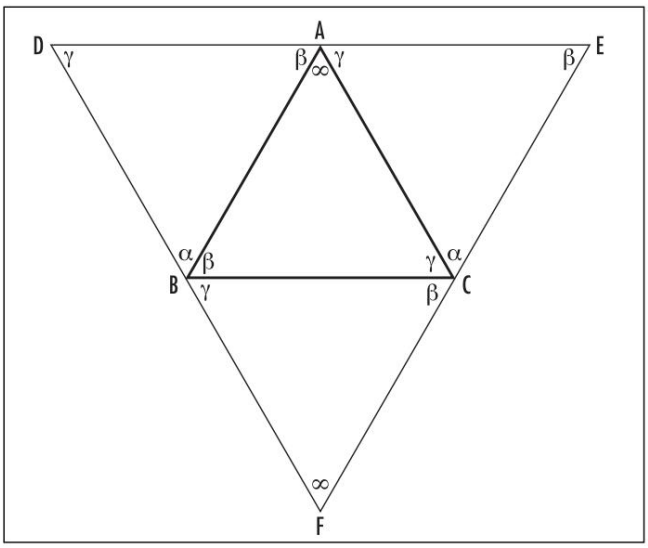
Voir aussi FONCTION ZETA.

altitude Un segment de ligne indiquant la hauteur d'une figure géométrique à deux ou trois dimensions telle qu'un POLYGONE, un POLYÈDRE, un CYLINDRE ou un CÔNE est appelé une altitude de la figure. Une altitude rencontre la base de la figure à ANGLE DROIT.

Tout TRIANGLE a trois altitudes distinctes. Chacun est un segment de LIGNE émanant d'un sommet du triangle rencontrant le bord opposé à un angle de 90°. La LOI DES SINS montre que les longueurs ha , hb et hc des trois hauteurs d'un triangle ABC satisfont :

ha = c péché β = b péché γ
hb = un péché γ = c péché α
hc = b péché α = un péché β

où a, b et c sont les longueurs des côtés du triangle, et α, β et γ sont les angles aux sommets A, B et C, respectivement. Ici ha est l'altitude rencontrant le côté de la longueur a à 90°. De même, hb et hc sont les altitudes rencontrant les côtés de longueur b et c, respectivement. Il découle aussi de cette loi que la relation suivante est vraie :



Prouver que les altitudes sont concurrentes

$$hahbhc = \frac{(abc)^3}{3r^8}$$

où r est le rayon du cercle contenant les points A, B et C.

Les trois hauteurs d'un triangle se rejoignent toujours en un point commun appelé orthocentre du triangle.
Étonnamment, ce fait fondamental n'a pas été remarqué par le géomètre EUCLIDE (vers 300 avant notre ère). La réclamation peut être prouvée comme suit:

Étant donné un triangle ABC, tracez trois lignes, une passant par chaque sommet et parallèle au côté opposé à ce sommet. Cela crée un plus grand triangle DEF.

Par le POSTULAT PARALLÈLE, les angles alternés sur des lignes parallèles sont égaux. Cela nous permet d'établir que tous les angles du diagramme ont les valeurs indiquées. Par conséquent, le triangle DAB est semblable au triangle ABC et, en fait, lui est congru puisqu'il partage le côté commun AB. Nous avons que DA est de la même longueur que BC. De la même manière, nous pouvons montrer que AE a également la même longueur que BC, et donc A est le milieu du côté DE du grand triangle. De même, B est le milieu du côté DF et C le milieu du côté EF. L'étude des points EQUIDISTANTS établit que

Machine Translated by Google

les bissectrices perpendiculaires de tout triangle sont CONCURRENTES, c'est-à-dire se rencontrent en un point. Or les bissectrices perpendiculaires du triangle DEF sont précisément les hauteurs du triangle ABC.

On peut aussi montrer que les trois altitudes d'un tri l'angle satisfait :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{R}$$

où R est le rayon du plus grand cercle situé à l'intérieur du triangle.

Voir aussi LIGNE EULER.

nombres amicaux (nombres amis) Deux nombres entiers a et b sont dits amicaux si la somme des FACTEURS de a, à l'exclusion de a lui-même, est égale à b, et la somme des facteurs de b, à l'exclusion de b lui-même, est égale à a. Par exemple, les nombres 220 et 284 sont amicaux :

284 a les facteurs 1, 2, 4, 71 et 142, et leur somme est 220

220 a les facteurs 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110, et leur somme est 284

Le couple (220, 284) est le plus petit couple amiable. Pendant de nombreux siècles, on a cru que cette paire était la seule paire de nombres amicaux. En 1636, cependant, PIERRE DE FERMAT découvre une deuxième paire, (17296, 18416), et en 1638, RENÉ DESCARTES découvre la paire (9363584, 9437056). Ces deux paires étaient également connues des mathématiciens arabes, peut-être à une date antérieure.

En 1750, LEONHARD EULER avait rassemblé 60 autres paires amicales. En 1866, Nicolò Paganini, 16 ans, trouva la petite paire (1184, 1210) manquée par tous les érudits des siècles précédents. Aujourd'hui, plus de 5 000 paires amicales différentes sont connues. La plus grande paire connue a des nombres de 4 829 chiffres chacun.

Voir aussi NOMBRE PARFAIT.

analyse Tout sujet en mathématiques qui utilise la notion de LIMITE dans son étude est appelé analyse. CAL CULUS relève de cette rubrique, ainsi que la sommation des SÉRIES infinies et l'étude des NOMBRES RÉELS.

Le mathématicien grec PAPPUS D' ALEXANDRIE (env. 320 CE) appelé le processus de découverte d'une preuve ou d'un solution à un problème "analyse". Il a écrit quelque peu vaguement sur "une méthode d'analyse" dans sa collection de textes de géométrie, qui a laissé les mathématiciens des siècles plus tard se demander s'il y avait une méthode secrète cachée derrière toute la géométrie grecque.

Le grand RENÉ DESCARTES (1596-1650) développa une puissante méthode d'utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie. Son approche est devenue connue sous le nom de géométrie analytique.

Voir aussi THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRE; CARTÉSIEN COORDONNÉES.

théorie analytique des nombres La branche de la théorie analytique des nombres qui utilise la notion de LIMITE pour étudier les propriétés des nombres est appelée théorie analytique des nombres. Cette branche des mathématiques traite généralement du comportement « moyen » des nombres. Par exemple, pour répondre :

En moyenne, combien de facteurs au carré un nombre possède-t-il ?

on constate que tous les nombres ont 1 comme facteur, un quart de tous les nombres ont 4 comme facteur, un neuvième ont le facteur 9, un seizième le facteur 16, et ainsi de suite. Ainsi, en moyenne, un certain nombre possède

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

facteurs au carré. Ce pair mathématiquement précis.

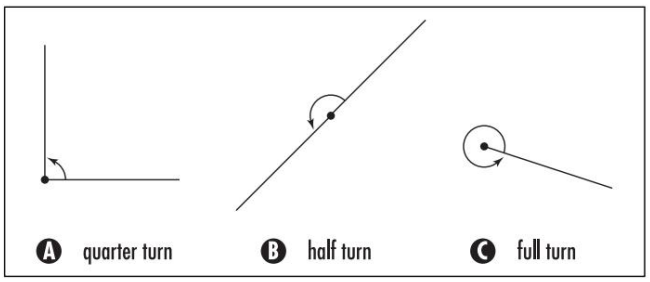
Voir aussi ANALYSE ; FONCTION ZETA.

angle Etant donné la configuration de deux LIGNES, segments de ligne ou RAYONS qui se croisent, la quantité de ROTATION autour du point d'intersection nécessaire pour faire coïncider une ligne avec l'autre est appelée l'angle entre les lignes. En termes simples, un angle est une mesure d'une "quantité de rotation". Dans tout diagramme représentant un angle, les longueurs des lignes tracées sont sans importance.

Par exemple, un angle correspondant à un huitième de tour complet peut être représenté par des rayons de longueur 2 pouces, 20 pouces ou 200 pouces.

L'image d'un phare avec un faisceau lumineux en rotation aide à clarifier le concept d'angle : chaque rayon ou segment de ligne d'un diagramme représente la position de départ ou d'arrivée du faisceau lumineux après une rotation donnée. Par exemple, les angles correspondant à un quart de tour, un demi-tour et un tour complet apparaissent comme suit :

Machine Translated by Google



Quelques angles simples

Les mathématiciens trouvent parfois pratique de considérer un angle mesuré dans le sens antihoraire comme positif et un angle mesuré dans le sens horaire comme négatif.

Les érudits babyloniens des temps anciens savaient que l'année est composée de 365 jours mais ont choisi d'opérer avec un calendrier pratique composé de 12 mois de 30 jours. Ainsi, le nombre 360 a été associé à la notion de cycle complet. Aujourd'hui, en revenant aux Babyloniens, les angles sont mesurés en unités de degrés, dans lesquels une rotation complète correspond à 360 degrés (écrit 360°). Ainsi un demi-tour correspond à 180°, et un quart de tour à 90°. Un seul degré correspond à 1/360 de tour.

Chaque degré est divisé en 60 unités plus petites appelées minutes, désignées par une apostrophe, et chaque minute est divisée en 60 unités plus petites appelées secondes, désignées par deux apostrophes. Ainsi, par exemple, 15°46′23″ représente un angle de 15 degrés, 46 minutes et 23 secondes.

Les mathématiciens préfèrent utiliser une unité de mesure d'angle indépendante des circonstances dans lesquelles nous vivons sur Terre, c'est-à-dire une unité naturelle aux mathématiques. L'unité de mesure choisie est appelée radian.

En travaillant avec le CERCLE le plus simple possible, à savoir un cercle de rayon un, les mathématiciens associent la mesure d'un tour complet à la distance autour de ce cercle, à savoir 2π, la circonférence du cercle. Ainsi, une rotation complète équivaut à 2π radian. Un demi-tour est mesuré comme la moitié de cela, à savoir, π radian, et un quart de tour comme $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ radian.

Pour convertir entre les mesures en degrés et en radians, on note simplement que 360 degrés correspond à 2π radian. (Ainsi un degré équivaut $\frac{2\pi}{360} \approx 0.017$ radian, et un radian est égal $\frac{360}{2\pi} \approx 57.3^{\circ}$.)

Une unité de mesure appelée «gradian» est parfois utilisée dans l'arpentage. Dans ce système, un tour complet est considéré comme 400 degrés (et, par conséquent, un quart de tour est divisé en exactement 100 parties). Ce système est rarement utilisé en mathématiques, voire pas du tout.

Les angles sont classés selon leur mesure :

• Un angle de zéro degré est appelé un angle nul. • Un angle compris entre 0° et 90° est dit aigu. • Un angle de 90° est appelé un angle droit. (C'est l'angle formé quand on fait un virage parfait à droite.) • Un angle compris entre 90° et 180° est dit obtus. • Un angle de 180° est appelé un angle droit. • Un angle entre 180° et 360° s'appelle un réflexe angle.
• Un angle de 360° s'appelle un PERIGON ou un angle rond.

Deux angles sont dits congrus s'ils ont même mesure. Si deux angles ont des mesures totalisant un angle droit, alors ils sont dits complémentaires, et deux angles sont supplémentaires si leurs mesures totalisent un angle droit. Des noms spéciaux sont également donnés aux angles qui apparaissent dans un diagramme impliquant une TRANSVERSALE.

L'angle d'élévation d'un point P au-dessus du sol par rapport à un observateur à la position Q au sol est défini comme étant l'angle entre la ligne reliant Q à P et la ligne reliant Q au point au sol directement au-dessous de P Si P se trouve sous le niveau du sol, alors un angle de dépression est calculé de manière similaire .

L'angle entre deux VECTEURS est calculé via le DOT PRODUCT. En utilisant la TRIGONOMÉTRIE on montre que l'angle A entre deux droites dans le plan des pentes m1 et m2 , respectivement, est donné par :

$$\tan A = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

(Cela s'ensuit en notant que l'angle que fait la première ligne avec l' axe des x est tan–1(m1) et l'angle de la deuxième ligne est tan–1(m2). Ainsi, l'angle que nous recherchons est A = tan–1 (m1) – tan–1(m2) L'identité trigonométrique tan(α– β) = $\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$ établit maintenant le résultat.) α β

conséquent, si m1m2 = –1, les droites sont PERPENDI CULAIRES. L'angle entre deux courbes qui se croisent dans un plan est défini comme étant l'angle entre les lignes TANGENTES aux courbes au point d'intersection.

Le lien entre la mesure d'un angle et la longueur des arcs d'un cercle unité pour définir la mesure en radian peut être étendu pour associer une mesure d'"angle" à

Machine Translated by Google

régions sur une unité SPHERE. UN ANGLE SOLIDE d'une région est simplement la mesure de la SURFACE de cette région projetée sur une sphère unitaire. Les unités d'angle solide sont appelées stéradians. La surface totale de la sphère est de 4π stéradian.

Voir aussi MATHÉMATIQUES BABYLONIENNES ; DIÈDRE ; PENTE; TRIANGLE; TRISECTION D'UN ANGLE.

trisection d'angle Voir TRISECTION D'UN ANGLE.

annulus (pluriel, annuli) Un anneau est la région entre deux cercles CONCENTRIQUES dans un plan. L' AIRE de l'anneau est la différence des aires des deux cercles.

Si un cycliste parcourt un cercle parfait, la région entre les traces faites par les roues avant et arrière est un anneau. Si le vélo mesure r pieds de long (axel à axel), alors, étonnamment, la surface de cet anneau est de πr 2 pieds carrés, quelle que soit la taille du cercle tracé par le cycliste.

antidifférenciation (intégration) Le processus de recherche d'une fonction avec une fonction donnée comme DÉRIVÉE est appelé antidifférenciation. Par exemple, x^2 est un primitive de 2x, puisque $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. La MOYENNE LE THÉORÈME DES VALEURS montre que deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que par une constante. Ainsi toutes les primitives de 2x, par exemple, sont des fonctions de la forme $x^2 + C$

La primitive d'une fonction f(x) est notée $\int f(x)dx$ et est appelée l'intégrale indéfinie de f. Elle est définie à une constante près, et nous écrivons donc, par exemple, $\int 2x\,dx = x^2 + C$. (La constante C est appelée « constante d'intégration ».) La notation suggère délibérément une intégrale définie de une fonction, $\int_a^b f(x)dx$, pour l'aire sous la courbe y = f(x) sur l' INTERVALLE [a,b]. Le THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL montre que les deux notions sont intimement liées.

Voir aussi CALCUL INTÉGRAL.

antilogarithme Voir LOGARITHME.

points antipodaux (antipodes) Deux points sur un Les sphères aux extrémités opposées d'un diamètre sont dites antipodes. Par exemple, les pôles nord et sud sont des points antipodaux sur la TERRE, comme le sont deux points ÉQUIDISTANTS de l'équateur, avec des longitudes différant de 180°.

Le célèbre théorème de Borsuk-Ulam, d'abord conjecturé par Stanislaw Ulam puis prouvé par Karol Borsuk en 1933, stipule :

> Soit f une fonction continue qui attribue deux valeurs numériques à chaque point de la surface d'une sphère. Alors il doit exister deux points antipodaux auxquels sont assignés précisément le même couple de valeurs.

Une interprétation amusante dit :

> À tout instant, il existe deux points antipodaux à la surface de la Terre ayant exactement la même température et la même pression atmosphérique.

Bien que la preuve de ce théorème soit difficile, une version unidimensionnelle du résultat suit comme une conséquence facile du THÉORÈME DE VALEUR INTERMÉDIAIRE .

sommet (pluriel, sommets) Le point au sommet d'un POLY GON ou d'un POLYÈDRE, tel que le sommet d'un triangle opposé à sa BASE ou le sommet d'une pyramide, est appelé le sommet de la figure. La distance entre la base de la figure et son sommet s'appelle la hauteur de la figure.

Apollonios de Perga (vers 262-190 av. J.-C.) Géométrie grecque Né à Perga, Ionie grecque, aujourd'hui Antalya, Turquie, Apollonius a travaillé pendant l'âge d'or des mathématiques grecques et a été appelé à travers l'histoire le Grand Géomètre. Son œuvre célèbre, The Conics, écrite en huit volumes, a grandement influencé le développement des mathématiques. (Les noms ELLIPSE, PARABOLE et HYPERBOLE pour les trois SECTIONS CONIQUES, par exemple, auraient été inventés par Apollonius.) Des copies des quatre premiers volumes de cet ouvrage, écrits en grec original, survivent aujourd'hui. Des traductions en arabe des sept premiers volumes existent également.

On sait peu de choses sur la vie d'Apollonius à part ce qui peut être glané à partir de commentaires fortuits faits dans les préfaces de ses livres. En tant que jeune homme, on sait qu'il s'est rendu à Alexandrie pour étudier avec les disciples d' Euclide, qui l'ont ensuite initié au sujet des coniques.

Machine Translated by Google

Le premier volume de The Conics passe simplement en revue le matériel élémentaire sur le sujet et présente principalement résultats déjà connus d'Euclide. Tomes deux et trois présentent des résultats originaux concernant les ASYMPTOTEs aux hyperboles et la construction de droites TANGENTES pour coniques. Alors qu'Euclide a démontré un moyen, pour exemple, de construire un cercle passant par n'importe trois points donnés, Apollonius a démontré des techniques pour construire des cercles tangents à trois droites quelconques, ou pour trois cercles quelconques, ou trois objets quelconques, qu'ils soient une combinaison de points, de lignes ou de cercles. Tomes quatre, cinq, six, et sept de ses célèbres travaux sont très innovants et contiennent des résultats originaux explorant les problèmes de courbure, la construction de lignes normales et la construction de courbes d'accompagnement des coniques. Apollonios a également appliqué la théorie des coniques pour résoudre des problèmes pratiques problèmes. Il a inventé, par exemple, un très précis cadran solaire, appelé hémicyclium, avec des lignes horaires tracées à la surface d'une section conique.

Apollonius a également joué un rôle fondamental dans la développement de l'astronomie mathématique grecque. Il a proposé une analyse mathématique complète de l'épicyclisme mouvement (c'est-à-dire le mouvement composé de cercles roulant le long des cercles) comme un moyen d'aider à expliquer les mouvement rétrograde des planètes à travers le ciel qui avait dérouté les savants de son temps.

Le travail d'Apollonius a été extraordinairement influent, et son texte sur les coniques a été considéré comme une pièce de référence standard pour les chercheurs européens du Renaissance. JOHANNES KEPLER, RENÉ DESCARTES, et SIR ISSAC NEWTON ont chacun fait référence au Coniques dans leurs études.

Voir aussi CIRCUMCERCLE ; CYCLOÏDE.

Cercle d'Apollonius Soient A et B deux points du plan et soit k une constante. Alors l'ensemble de tous les points P dont la distance à A est k fois sa distance à B est un CERCLE. Tout cercle obtenu de cette manière est appelé comme l'un des cercles d'Apollonius. Notez que lorsque k = 1, le cercle est "dégénéré", c'est-à-dire l'ensemble de tous les points ÉQUIDISTANTE de A et B est une droite. Quand k devient grand, le cercle d'Apollonius se rapproche d'un cercle de rayon 1.

Pour voir que le lieu des points décrit de cette façon est bien un cercle, définissons A comme origine (0,0), B comme le point (k + 1, 0) sur l' axe des x, et P un point général de coordonnées (x,y). La DISTANCE POUR MULA donne alors une équation de la forme $\sqrt{x^2+y^2} = k\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Cela équivaut à $\left(x-\frac{k^2}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{k^2-1}\right)^2$, qui est bien l'equation d'un cercle, un de rayon $\frac{k}{k^2-1}$. APOLLONIUS D' PERGA a cependant utilisé des techniques purement géométriques pour établir sa demande.

Théorème d'Apollonius Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle et une médiane de longueur m divise le troisième côté en deux longueurs égales c/2 et c/2, puis la relation suivante tient :

$$a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{c^2}{2}$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème d'Apollonius. Ça peut être prouvé à l'aide de deux applications de la LOI DE COSINES comme suit:

> Soit B l' ANGLE entre les côtés de longueur a et c. Alors $m^2 = a^2 + (c/2)^2 - ac\cos(B)$ et $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$. Résolution de $ac\cos(B)$ dans la première équation et la substitution dans la seconde donne le résultat.
>
> Voir aussi MÉDIANE D'UN TRIANGLE.

apothème (rayon court) Tout segment de ligne à partir du centre d'un POLYGONE régulier jusqu'au milieu de l'un des ses côtés s'appellent un apothème. Si le polygone régulier a n côtés, chacun une unité de longueur, puis un exercice de La TRIGONOMÉTRIE montre que chaque apothème de la figure a de la longueur $r = \frac{1}{2\tan\frac{180}{n}}$.

Un analogue de PI (π) pour un polygone régulier est le RATIO de son PÉRIMÈTRE au double de la longueur de son apothème. Pour un polygone régulier à n côtés, ce rapport a valeur n tan(180/n). La SQUEEZE RULE montre que cette la quantité se rapproche de la valeur π lorsque n devient grand.

Voir aussi LONG RAYON.

Machine Translated by Google

mathématiques appliquées L'étude et l'utilisation des techniques mathématiques pour résoudre des problèmes pratiques sont appelées mathématiques appliquées. Le domaine comprend diverses branches, notamment les STATISTIQUES, les PROBABILITÉS, la mécanique, la physique mathématique et les sujets qui en découlent, mais la distinction avec les MATHÉMATIQUES PURES peut ne pas être nette. Par exemple, l'étude générale des VECTEURS et des ESPACES VECTEURS peut être considérée comme une étude abstraite ou pratique si l'on a plus tard à l'esprit d'utiliser cette théorie pour analyser les diagrammes de force en mécanique.

De nombreuses universités de recherche possèdent aujourd'hui deux départements de mathématiques, l'un considéré comme pur et l'autre appliqué. Les étudiants peuvent obtenir des diplômes supérieurs dans l'un ou l'autre domaine.

approximation Une réponse numérique à un problème qui n'est pas exacte mais qui suffit à tous les usages pratiques s'appelle une approximation. Par exemple, le fait de noter que 210 est d'environ 1 000 nous permet d'estimer rapidement la valeur de 2100 = (210) 10 comme 1030. Les élèves sont souvent encouragés à utiliser la fraction 22/7 comme valeur approximative de π.

Les mathématiciens utilisent la notation "≈" pour désigner environ égal à. Ainsi, par exemple, π ≈ 22/7.

Les physiciens et les ingénieurs se rapprochent souvent des fonctions par leur SÉRIE TAYLOR avec l'ordre supérieur termes abandonnés. Par exemple, $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, à moins pour les petites valeurs de x. La théorie du CALCUL INTÉGRAL commence par approximer les aires sous les courbes comme des sommes d'aires de rectangles.

Voir aussi ERREUR ; FACTORIEL ; DIFFÉRENCE NUMÉRIQUE TIATION ; INTÉGRATION NUMÉRIQUE.

Mathématiques arabes Les historiens des mathématiques d'aujourd'hui sont reconnaissants aux savants arabes du passé pour avoir préservé, traduit et honoré les grands travaux mathématiques indiens, grecs et islamiques des savants avant eux, et pour leurs propres contributions significatives au développement des mathématiques. À la fin du VIIIe siècle, la grande bibliothèque d'Alexandrie étant détruite, le calife al-Ma'mûn créa une Maison de la Sagesse à Bagdad, en Irak, qui devint le prochain centre d'apprentissage et de recherche, ainsi que le dépositaire de textes académiques importants. De nombreux savants ont été employés par le calife pour traduire le mathematicales du passé et développer davantage les idées qu'elles contenaient. Au fur et à mesure que l'empire islamique s'est développé au cours des sept siècles suivants, la culture de la poursuite intellectuelle s'est également répandue. De nombreux érudits de l'Europe du XIIe siècle, et plus tard, ont visité les bibliothèques islamiques d'Espagne pour lire les textes des universitaires arabes et avancées qui s'étaient produites en Orient pendant les âges sombres de l'Occident. Une quantité importante de matériel mathématique a été transmise à l'Europe par ces moyens.

L'un des premiers textes grecs traduits à la Maison de la Sagesse fut le célèbre traité d'Euclide , LES ÉLÉMENTS. Ce travail a eu un impact énorme sur les érudits arabes de l'époque, et nombre d'entre eux, lorsqu'ils ont mené leurs propres recherches, ont formulé des théorèmes et prouvé des résultats précisément dans le style d'Euclide.

Les membres de la Maison de la Sagesse ont également traduit les œuvres d' ARCHIMÈDE DE SYRACUSE, DIOPHANTE D' ALEXANDRIE, MÉNÉLAS D' ALEXANDRIE, et d'autres, et donc ils étaient certainement familiers avec toutes les grandes avancées grecques dans les sujets de GÉOMÉTRIE, THÉORIE DES NOMBRE, mécanique et analyse. Ils ont également traduit les travaux des érudits indiens, ARYABHATA et BH _

_

ASKARA, par exemple, et connaissaient la théorie de la TRIGONOMÉTRIE, les méthodes en astronomie et d'autres sujets en géométrie et en théorie des nombres. Tout érudit arabe qui visitait la Maison de la Sagesse disposait, pour l'essentiel, de l'ensemble des connaissances mathématiques humaines à sa disposition dans sa propre langue.

Le mathématicien arabe MUHAMMAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı (environ 800) a écrit un certain nombre de textes originaux qui ont été extrêmement influents. Son premier article décrivait simplement le système décimal de valeur de position qu'il avait appris de sources indiennes. Trois cents ans plus tard, une fois traduit en latin, cet ouvrage est devenu la principale source pour les Européens qui voulaient apprendre le nouveau système d'écriture et de manipulation des nombres. Mais le plus important était l'article d'al-Khw–arizm– ı, Hisab al-jabr w'al-muq¯abala (Calcul par restauration et réduction), d'où est issu le thème de l'« algèbre » (« al-jabr »). . Al-Khw– arizm– ı a eu la chance de disposer de toutes les sources de connaissances mathématiques. Il a commencé à voir que les notions alors disparates de « nombre » et de « grandeur géométrique » pouvaient être unifiées en un tout en développant le concept d'objets algébriques. Cela représentait une rupture significative avec la pensée grecque, dans laquelle les mathématiques sont synonymes de géométrie.

La perspicacité d' Al-Khw-arizm- ı a fourni un moyen d'étudier à la fois l'arithmétique et la géométrie dans un cadre unique, et

Machine Translated by Google

ses méthodes d'algèbre ont ouvert la voie à des développements significatifs en mathématiques d'une portée beaucoup plus large que jamais envisagé auparavant.

Le mathématicien al-Mahani (vers 820) a développé des approches raffinées pour réduire les problèmes géométriques à des problèmes algébriques. Il a montré, en particulier, que le fameux problème de DUPLICATION DU CUBE est essentiellement un problème algébrique. D'autres chercheurs ont apporté de la rigueur au sujet en prouvant que certaines méthodes algébriques populaires, mais compliquées, étaient valides. Ces érudits étaient à l'aise avec la manipulation des POLYNOMES et ont développé des règles pour travailler avec les EXPOSANTS. Ils ont résolu des équations linéaires et QUADRATIQUE , ainsi que divers SYSTÈMES D'ÉQUATIONS. Étonnamment, personne de l'époque n'a pensé à simplifier les choses en utilisant des symboles pour représenter des quantités : toutes les équations et toutes les manipulations étaient décrites en mots à chaque fois qu'elles étaient employées.

Avec les équations quadratiques bien comprises, le savant OMAR KHAYYAM (vers 1048-1131) a tenté de développer des méthodes de résolution des équations de degré trois.
Bien qu'il ait été incapable de développer des méthodes algébriques générales pour cette tâche, il a trouvé des techniques géométriques ingénieuses pour résoudre certains types de cubiques à l'aide des SECTIONS CONIQUES. Il était conscient que de telles équations pouvaient avoir plus d'une solution.

En théorie des nombres, Thabit ibn Qurra (ca. 836–901) a trouvé une belle méthode pour générer des NOMBRES AMICABLES. Cette technique a ensuite été utilisée par al-Farisi (vers 1260–1320) pour obtenir la paire 17 296 et 18 416, qui est aujourd'hui généralement attribuée à LEONHARD EULER (1707–1783). Dans ses écrits, Omar Khayyam s'est référé à des textes arabes antérieurs, aujourd'hui perdus, qui traitent de l'équivalent du TRIANGLE de PASCAL et de ses liens avec le THÉORÈME BINOMIAL. Le mathématicien al-Haytham (vers 965-1040) a tenté de classer tous même PARFAIT

Nombres.

Profitant de la facilité du système indien de représentation décimale de la valeur de position, les érudits arabes ont également fait de grands progrès dans les calculs numériques.
Le grand érudit du XIVe siècle JAMSHID AL-KASHI a développé des méthodes efficaces pour extraire la nième racine d'un nombre et évalué π à un nombre significatif de décimales. Les chercheurs de l'époque ont également développé des méthodes efficaces pour calculer des tables trigonométriques et des techniques pour effectuer des calculs très précis à des fins d'astronomie.

Sur une note théorique, les chercheurs ont également avancé la compréhension générale de la trigonométrie et exploré problèmes de géométrie sphérique. Ils ont également étudié les fondements philosophiques de la géométrie, en se concentrant, en particulier, sur le rôle que joue le fameux PARALLEL POSTU LATE dans la théorie. Omar Khayyam, par exemple, a tenté de prouver le postulat parallèle - en échouant, bien sûr - mais a accidentellement prouvé des résultats sur des figures dans des géométries non euclidiennes en cours de route. Le mathématicien Ibrahim ibn Sinan (908-946) a également introduit une méthode « d'intégration » pour calculer les volumes et les surfaces suivant une approche plus générale que celle développée par Archimède de Syracuse (vers 287-212 avant notre ère). Il a également appliqué sa démarche à l'étude des SECTIONS CONIQUES et à l'optique.

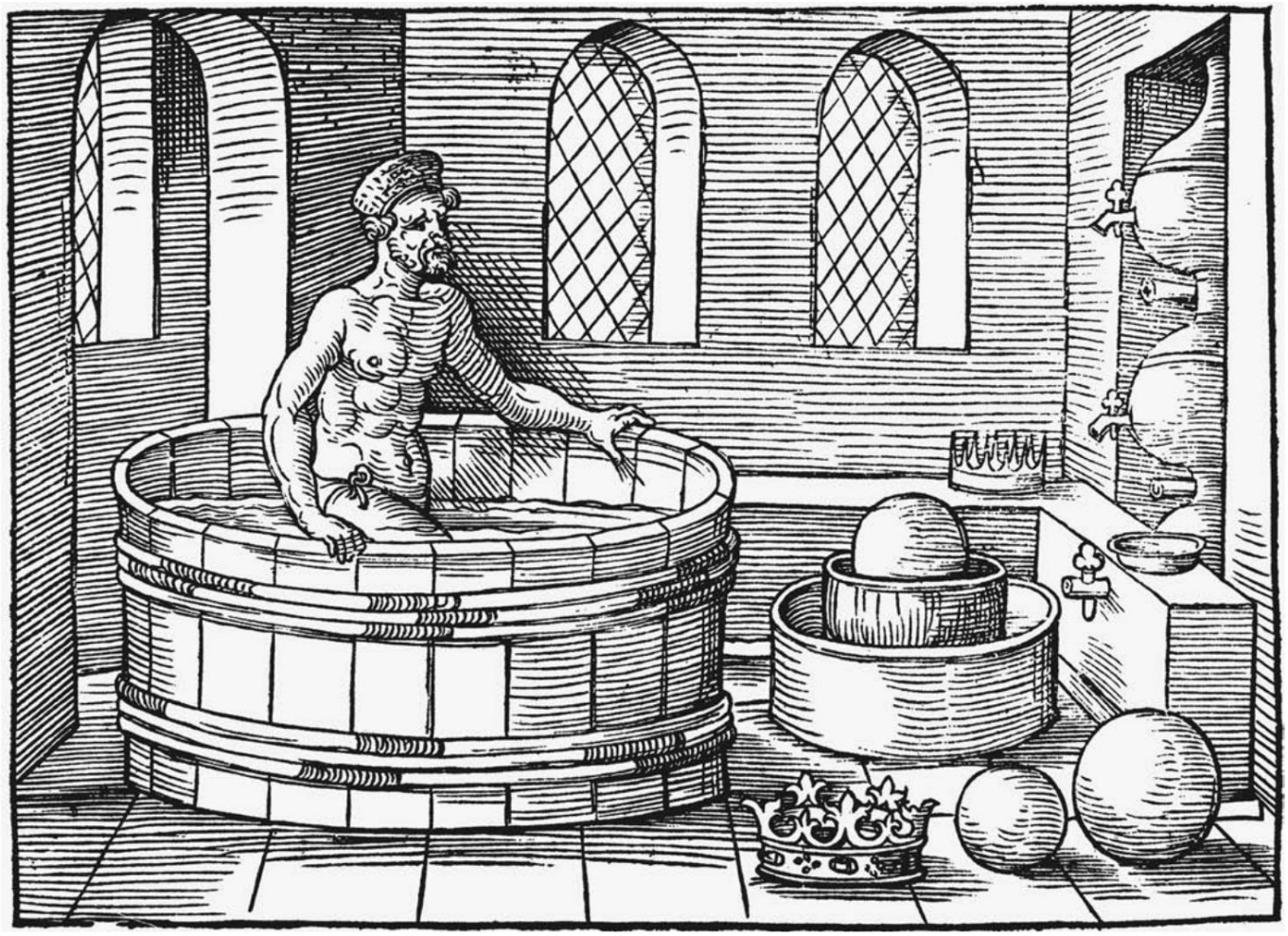
Voir aussi BASE D'UN SYSTÈME NUMÉRIQUE ; HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET DE L'ALGÈBRE (essai); HISTOIRE DE GEOME TRY (essai); HISTOIRE DE LA TRIGONOMÉTRIE (essai).

arc La partie d'une courbe continue entre deux points donnés sur la courbe est appelée un arc de courbe. En particulier, deux points sur un CERCLE déterminent deux arcs. Si la circonférence du cercle est divisée par eux en deux parties inégales, la plus petite partie est généralement appelée l'arc mineur du cercle et la plus grande l'arc majeur.

Spirale d'Archimède Voir SPIRALE D' ARCHIMÈDE.

Archimède de Syracuse (287-212 av. J.-C.) Géométrie grecque , mécanique Né dans la colonie grecque de Syracuse en Sicile, Archimède est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il a apporté des contributions considérables aux domaines de la GÉOMÉTRIE plane et solide, de l'hydrostatique et de la mécanique. Dans ses ouvrages Mesure d'un cercle et Quadrature de la Para bole, Archimède a résolu des problèmes difficiles de mensu ration en géométrie plane en inventant une technique précoce de CALCUL INTÉGRAL, qu'il a appelée la «méthode d'épuisement». Cela lui a permis de calculer les aires et les longueurs de certaines figures courbes. Plus tard, dans ses travaux sur la sphère et le cylindre et sur les conoïdes et les sphéroïdes, il a appliqué cette technique pour calculer également le volume et la surface de la sphère et d'autres objets solides. Dans son ouvrage très original Sur les corps flottants, Archimède a développé les mathématiques de l'hydrostatique et de l'équilibre, ainsi que la LOI DU LEVIER, la notion de gravité spécifique et les techniques de calcul du CENTRE DE GRAVITÉ d'un objet.

Machine Translated by Google



Une gravure sur bois de 1547 illustrant la réalisation d'Archimède qu'une cuve d'eau peut être utilisée pour calculer les volumes et les densités de figures solides (Photo gracieuseté de ARPL/Topham/The Image Works)

variété de corps. En mathématiques, Archimède a également développé des méthodes pour résoudre des équations cubiques, approximer des racines carrées, additionner des SÉRIES et, dans The Sand Reckoning, a développé une notation pour représenter des nombres extrêmement grands.

Sauf pour prendre le temps d'étudier à l'école d'EUCLIDE à Alexandrie, Archimède a passé toute sa vie sur le lieu de sa naissance. Il était un ami de confiance du monarque de la région, Hiero, et de son fils Gelon, et s'est rapidement forgé une réputation de brillant scientifique capable de résoudre les problèmes les plus épineux du roi. Une histoire célèbre affirme qu'un jour, le roi ordonna à un orfèvre de lui fabriquer une couronne et lui fournit la quantité exacte de métal pour la fabriquer. En recevant la couronne nouvellement forgée, Hiero soupçonna le forgeron de mal faire, substituant de l'argent moins cher à l'or, même si la couronne avait le poids correct. Cependant, il n'a pas pu prouver que ses soupçons étaient fondés et a donc amené le problème à Archimède. On dit qu'en se baignant et en observant l'eau déplacée par son corps, Archimède réalisa et prouva que le poids d'un objet en suspension dans un liquide décroît proportionnellement au poids du liquide qu'il déplace. Ce principe, aujourd'hui connu sous le nom de principe d'Archimède, a fourni à Archimède les moyens de prouver en effet que la couronne n'était pas en or massif. (On dit aussi qu'Archimède était tellement excité en faisant cette découverte qu'il a couru nu dans les rues en criant "Eureka ! Eureka !")

Archimède aurait également dit : "Donnez-moi un endroit où me tenir et je déplacerai la Terre". Étonné

Machine Translated by Google

par la réclamation, le roi Hiero lui a demandé de le prouver. Archimède avait, à cette époque, découvert les principes des leviers et des poulies, et entreprit de construire un dispositif mécanique qui lui permettait, à lui seul, de lancer du port un navire trop grand et trop lourd pour un grand groupe d'hommes. à déloger.

Surnommé un maître de l'invention, Archimède a également conçu un dispositif de pompage de l'eau, maintenant connu sous le nom de vis d'Archimède et encore utilisé dans de nombreuses régions du monde aujourd'hui, ainsi que de nombreuses machines de guerre innovantes qui ont été utilisées dans la défense de la Sicile pendant le pas rares invasions romaines. (Ces dispositifs comprenaient des miroirs paraboliques pour focaliser les rayons du soleil afin de brûler les navires qui avançaient depuis le rivage, des dispositifs de catapulte et des canons à ressort.) Mais malgré la renommée qu'il a reçue pour ses inventions mécaniques, Archimède croyait que les mathématiques pures étaient la seule poursuite valable. . Ses réalisations en mathématiques étaient considérables.



Archimède de Syracuse, considéré comme l'un des plus grands scientifiques de tous les temps, a été le pionnier des travaux sur la géométrie plane et solide, la mécanique et l'hydrostatique. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

En délimitant un cercle entre deux polygones réguliers et en calculant le rapport du périmètre au diamètre de chacun, Archimède a trouvé l'une des premières estimations de la valeur de π, en la délimitant entre les valeurs 3 10/71 et 3 1/7. (Cette dernière estimation, généralement écrite sous la forme 22/7, est encore largement utilisée aujourd'hui.) Archimède s'est rendu compte qu'en utilisant des polygones avec des nombres de côtés de plus en plus élevés, on obtiendrait des approximations de mieux en mieux, et qu'en "épuisant" toutes les possibilités finies, le vrai la valeur de π serait obtenue. Archimède a également utilisé cette méthode d'épuisement pour démontrer que la longueur de tout segment d'une parabole est 4/3 fois l'aire du triangle de même base et de même hauteur.

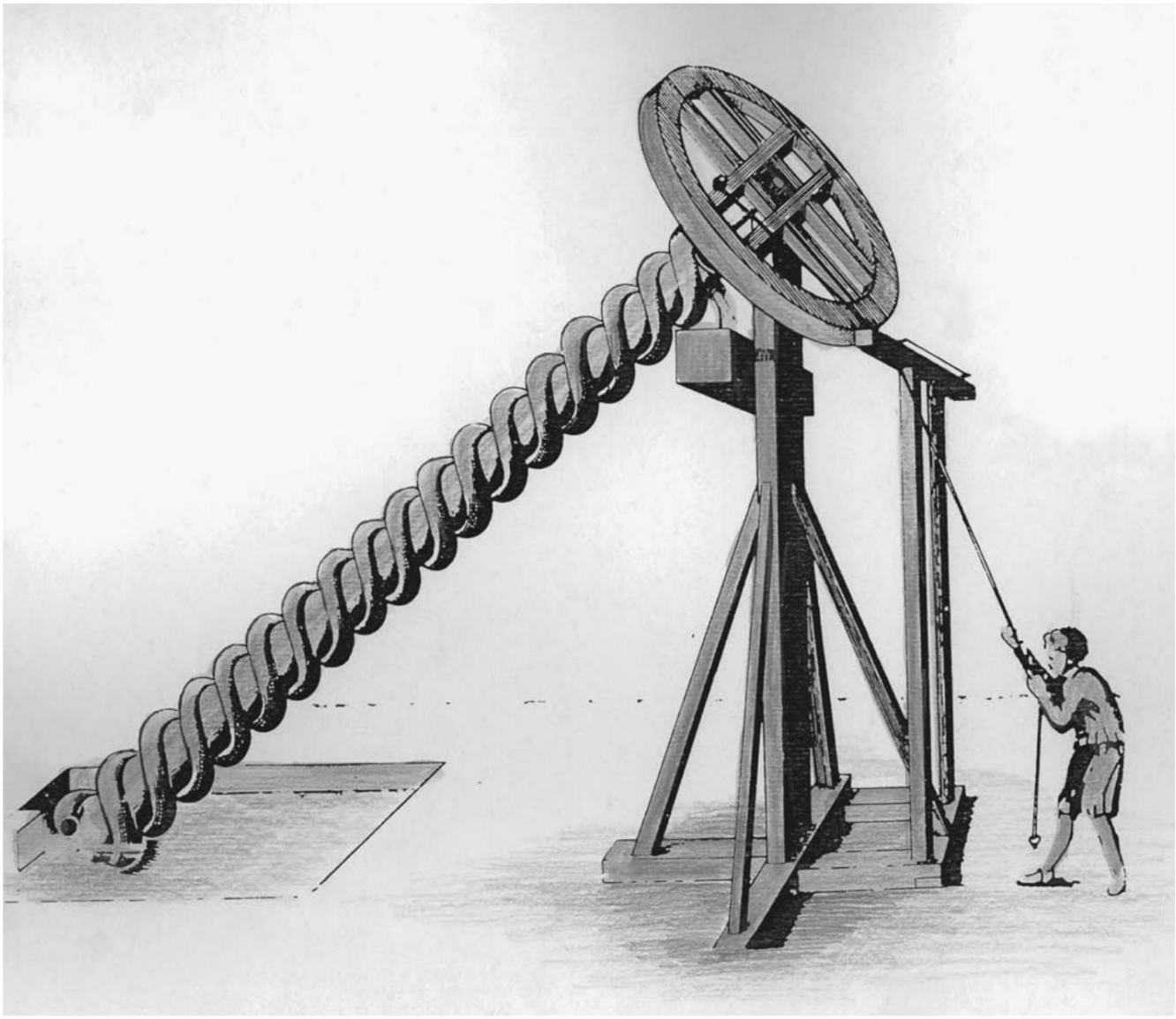
En comparant les aires de section transversale des tranches parallèles d'une sphère avec les tranches d'un cylindre qui enferme la sphère, Archimède a démontré que le volume d'une sphère est 2/3 celui du cylindre. Le volume de la sphère suit alors : $V = (2/3)(2\times \pi r^2)(4/3)\pi r^3$ = . (Ici r est le rayon de la sphère.) Archimède considérait cela comme sa plus grande réussite mathématique, et en son honneur, les figures d'un cylindre et d'une sphère inscrite ont été dessinées sur sa pierre tombale.

Archimède a également calculé la surface d'une sphère comme quatre fois la surface d'un cercle de même rayon de la sphère. Il refait cela via une méthode d'épuisement, en imaginant la sphère ainsi approximée par un revêtement de minuscules triangles plats. En traçant des lignes reliant chaque sommet d'un triangle au centre de la sphère, le volume de la figure est ainsi divisé en un ensemble de pyramides triangulaires. Chaque pyramide a un volume égal au tiers de sa base multiplié par sa hauteur (essentiellement le rayon de la sphère), et la somme de toutes les aires de base représente la surface de la sphère. De la formule du volume de la sphère, la formule de sa surface suit.

On ne saurait exagérer l'influence d'Archimède sur le développement des mathématiques, de la mécanique et des sciences. Ses calculs des surfaces et des volumes de figures courbes ont fourni des informations sur le développement du calcul au XVIIe siècle. Sa compréhension de la géométrie euclidienne lui a permis de formuler plusieurs axiomes qui ont encore affiné les fondements logiques du sujet, et ses travaux sur les fluides et la mécanique ont fondé le domaine de l'hydrostatique. Les érudits et les nobles de son temps ont reconnu l'importance théorique et pratique de son travail. Malheureusement, Archimède est mort inutilement en l'an 212 avant notre ère.

Lors de la conquête de Syracuse par les Romains, il est

Machine Translated by Google



Une gravure du XIXe siècle de la vis à eau d'Archimède, un dispositif de pompage de l'eau (Photo publiée avec l'aimable autorisation de AAAC/Topham/The Image Works)

a dit qu'un soldat romain est tombé sur Archimède con
se concentrant sur des figures géométriques qu'il avait dessinées dans le sable. Ne sachant pas qui était l'érudit ni ce qu'il faisait, le soldat l'a simplement tué.

Archytas de Tarente (env. 428–350 av. J.-C.) Géométrie grecque , philosophie Le savant grec Archytas de Tarente fut le premier à apporter une solution au problème classique de l'Antiquité. En réduisant le défi à celui de construire certains ratios et proportions, Archytas a développé une construction géométrique qui impliquait la rotation de demi-cercles selon certains angles dans un espace tridimensionnel pour produire une longueur essentiellement équivalente à la construction de la racine cubique de deux. (La création d'un segment de cette longueur est la principale pierre d'achoppement pour résoudre le problème.) Bien que sa solution innovante soit certainement correcte, elle utilise des outils au-delà de ce qui est permis avec la règle et le compas seuls. Dans le développement de sa solution, Archytas a identifié une nouvelle moyenne entre les nombres, qu'il a appelée la MOYENNE HARMONIQUE.

Machine Translated by Google

Archytas vivait dans le sud de l'Italie à l'époque de contrôle grec. La région, alors appelée Magna Graecia, comprenait la ville de Tarente, qui abritait membres de la secte pythagoricienne. Comme les Pythagore ans, Archytas croyait que les mathématiques fournissaient la chemin vers la compréhension de toutes choses. Cependant, beaucoup à le dégoût des Pythagoriciens, Archytas appliqua son compétences mathématiques pour résoudre des problèmes pratiques. Il est parfois appelé le fondateur de la mécanique et aurait inventé plusieurs dispositifs mécaniques innovants, dont un oiseau mécanique et un hochet enfant innovant.

Seuls des fragments de l'œuvre originale d'Archytas survivent aujourd'hui, et nous apprenons de ses mathématiques aujourd'hui principalement à travers les écrits des érudits ultérieurs. De nombreux résultats établis par Archytas apparaissent dans le célèbre texte d'EUCLID LES ÉLÉMENTS, par exemple.

longueur d'arc Pour mesurer la longueur d'un chemin courbe, on pourrait simplement poser une longueur de ficelle le long du chemin, tirez-le droit et mesurez sa longueur. Cela détermine la longueur de l'arc du chemin. En mathématiques, si la courbe de question est continue et est donnée par une formule y = f(x), pour a < x < b disons, alors le CALCUL INTÉGRAL peut être utilisé pour trouver la longueur de l'arc de la courbe. Pour l'établir, d'abord choisir un certain nombre de points (x1 , y1),…,(xn , yn) le long de la courbe et additionner les longueurs des segments de droite entre eux. En utilisant la FORMULE DE DISTANCE, cela donne une valeur approchée pour la longueur s de la courbe :

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

La réécriture donne :

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

Le THÉORÈME DE LA VALEUR MOYENNE montre que pour chaque i il y a une valeur ci comprise entre xi–1 et xi telle que $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$, et donc la longueur de la courbe est bien approchée par la formule:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

Bien sûr, en prenant de plus en plus de points le long de la courbe donne des approximations de mieux en mieux. A la limite, alors, la vraie longueur de la courbe est donnée par la formule :

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

C'est précisément la formule de l'intégrale de fonction $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ sur le domaine en question. Ainsi nous avons :

La longueur de l'arc d'une courbe continue y = f(x) sur l'intervalle [a,b] est donné par $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

Alternativement, si la courbe continue est donnée par un ensemble de ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES x = x(t) et y = y(t), pour a < t < disons b , puis en choisissant une collection de points le long de la courbe, donnée par t1 ,…,tn disons, faisant une approximation de la longueur de la courbe, et en prenant une limite donne la formule :

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

De la même manière, on peut montrer que si le continu courbe est donnée en COORDONNÉES POLAIRES par des formules et x = r(θ)cos(θ) et y = r(θ)sin(θ), pour a < θ < b, alors le la longueur de l'arc de la courbe est donnée par :

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

La présence de signes racine carrée dans les intégrandes rend souvent ces intégrales très difficiles, voire impossibles, à résoudre. En pratique, il faut utiliser des techniques numériques pour approximer de telles intégrales.

Voir aussi INTÉGRATION NUMÉRIQUE.

aire En gros, l'aire d'une figure géométrique est la quantité d'espace qu'il occupe. Une telle définition

Machine Translated by Google

fait appel à la compréhension intuitive. En général, cependant, il est très difficile d'expliquer précisément ce que nous entendons par "espace" et la "quantité" de celui-ci occupé. C'est un problème sérieux. (Voir Banach-Tarski para dox à la page suivante.)

Comme point de départ, il semble raisonnable de dire, cependant, qu'un carré 1 × 1 devrait avoir une "aire" un. Nous appelons cela une unité de surface de base. Comme quatre de ces unités de base s'emboîtent parfaitement dans un carré de côté deux, sans chevauchement, on dit alors qu'un carré 2 × 2 a une aire quatre. De même, un carré 3 × 3 a une aire neuf, un carré 4 × 4 une aire 16, et ainsi de suite.

Un rectangle 3 × 6 contient 18 carrés d'unités de base et a donc une aire de 18. En général, un rectangle qui mesure l unités de long et w unités de large, avec à la fois l et w nombres entiers, a une aire l × w :

aire d'un rectangle = longueur × largeur

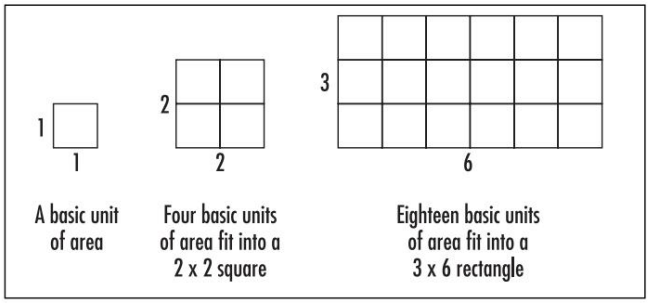
C'est une formule fondamentale. Pour asseoir la notion d'aire sur des bases solides, nous utilisons cette formule comme loi de définition : l'aire de tout rectangle doit être le produit de sa longueur par sa largeur.

Bien qu'il soit impossible de faire rentrer un nombre entier d'unités de carré dans un rectangle de 5 3/4 unités de long et √—7 unités de large, par exemple, nous déclarons néanmoins que l'aire d'un tel rectangle est le produit de ces deux nombres. (Cela concorde avec notre idée intuitive selon laquelle, à l'aide de ciseaux, environ 5 3/4 × √—7 ≈ 15,213 carrés unitaires tiendront dans ce rectangle.)

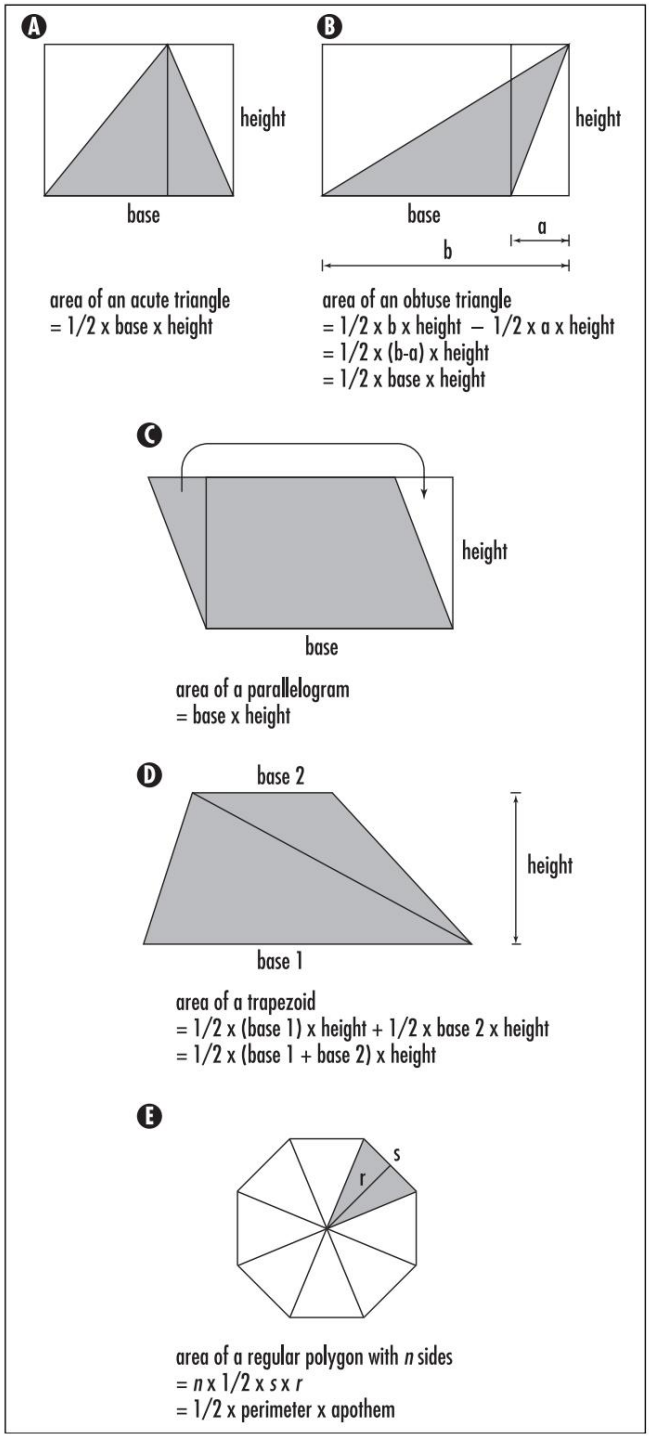
De cette loi découlent les aires d'autres formes géométriques. Par exemple, le schéma suivant montre que l'aire d'un TRIANGLE aigu est la moitié de l'aire du rectangle qui l'entoure. Cela conduit à la formule :

aire d'un triangle = $^1/_2$ × base × hauteur

Cette formule vaut également pour les triangles obtus.



Zone



Les zones de formes de base

En réarrangeant des morceaux d'un PARALLELOGRAMME, on voit que son aire est donnée par la formule :

aire d'un parallélogramme = base × hauteur

Machine Translated by Google

En général, nous pouvons calculer l'aire de n'importe quel POLYGONE comme la somme des aires des triangles qui le subdivisent. Par exemple, l'aire d'un TRAPÈZE est la somme des aires de deux triangles, et l'aire d'un POLYGONE régulier à n côtés est la somme des aires de n triangles.

Figures courbes Il est également possible de calculer l'aire des figures courbes. Par exemple, en découpant un cercle en morceaux en forme de coin et en réarrangeant ces tranches, nous voyons que l'aire d'un cercle est proche d'être l'aire d'un rectangle de longueur la moitié de la circonférence et de largeur r, le rayon du cercle .

Si l'on travaille avec des pièces en coin de plus en plus fines, l'approximation se rapprochera mieux de celle d'un vrai rectangle. On en déduit que l'aire d'un cercle est bien celle de ce rectangle idéal :

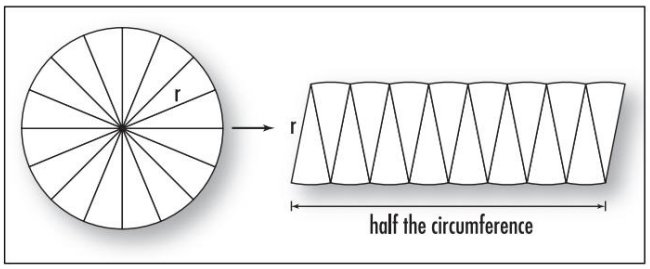
$$\text{aire d'un cercle} = {}^{1}/_{2} \times \text{circonférence} \times r$$

(Comparez cela avec la formule de l'aire d'un polygone régulier.) Comme PI (π) est défini comme le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, la circonférence

$\pi = \frac{\text{circonférence}}{2r}$, l'aire d'un cercle peut donc être écrit : aire = ${}^{1}/_{2} \times 2\pi r \times r$. Cela conduit au fameux formule :

$$\text{aire d'un cercle} = \pi r^{2}$$

Les méthodes de CALCUL INTÉGRAL nous permettent de calculer des aires d'autres formes courbes. L'approche est analogue : approximez la forme comme une union de rectangles, additionnez les aires des pièces rectangulaires et prenez la LIMITE des réponses obtenues au fur et à mesure que vous travaillez avec des approximations de plus en plus fines.



Établir l'aire d'un cercle

Difficultés théoriques En partant du principe qu'une forme fondamentale, dans notre cas un rectangle, est affirmée avoir une « aire » donnée par une certaine formule, une théorie générale de l'aire pour d'autres formes géométriques suit. On peut appliquer une telle approche pour développer une théorie de mesure pour mesurer la taille d'autres ensembles d'objets, comme la notion de surface de solides tridimensionnels, ou une théorie de VOLUME .
On peut également développer un certain nombre d'applications exotiques.

Bien que notre définition de l'aire d'un rectangle soit motivée par l'intuition, la formule que nous avons développée est, dans un certain sens, arbitraire. Définir l'aire d'un rectangle comme donnée par une formule différente pourrait en effet produire une théorie de l'aire différente, mais cohérente.

En 1924, STEFAN BANACH et Alfred Tarski stupéfièrent la communauté mathématique en présentant une preuve mathématiquement solide de l'affirmation suivante :

> Il est théoriquement possible de découper une boule solide en neuf morceaux, et en les réassemblant, sans jamais étirer ni déformer les morceaux, former DEUX boules solides, chacune ayant exactement la même taille et la même forme que l'originale.

Ce résultat est connu sous le nom de paradoxe de Banach-Tarski, et son énoncé - prouvé comme un fait mathématique - est odieux à notre compréhension de la façon dont l'aire et le volume devraient se comporter : le volume d'une quantité finie de matière ne devrait pas doubler après le réarrangement de ses morceaux. ! Que notre compréhension intuitive de l'aire conduise finalement à un résultat aussi perturbant était considéré comme très perturbant.

Ce que les mathématiciens ont réalisé, c'est que la "zone" n'est pas un concept bien défini : chaque forme dans un plan ne peut pas se voir attribuer une zone (et chaque solide dans un espace tridimensionnel ne peut pas non plus se voir attribuer un volume). Il existe certains ensembles non mesurables dont parler de leur aire n'a pas de sens. Les neuf pièces utilisées dans le paradoxe Banach-Tarski s'avèrent être de tels ensembles non mesurables, et donc parler de leur volume est invalide. (Ce sont des formes extrêmement irrégulières, de nature FRACTALE , et impossibles à découper physiquement.) En particulier, interpréter la construction finale comme "deux boules de volume égal" n'est pas autorisé.

Notre simple compréhension intuitive de la zone fonctionne bien dans toutes les applications pratiques. Par exemple, le matériel présenté dans un programme typique d'études secondaires et collégiales est solide. Cependant, le paradoxe de Banach-Tarski souligne qu'il faut être extrêmement prudent

Machine Translated by Google

en explorant plus en détail les subtilités théoriques de la surface et du volume.

Voir aussi ÉCHELLE.

Argand, Jean Robert (1768–1822) Suisse Théorie des nombres complexes Né le 8 juillet 1768 à Genève, en Suisse, le mathématicien amateur Jean Argand est connu aujourd'hui pour sa célèbre interprétation géométrique des NOMBRES COMPLEXES. Un DIAGRAMME D'ARGAND utilise deux axes perpendiculaires, l'un représentant une ligne de nombres réels, le second une ligne de nombres purement complexes, pour représenter les nombres complexes sous forme de points dans un plan.

On ne sait pas très bien qu'Argand, en fait, n'a pas été le premier à considérer et à publier cette approche géométrique des nombres complexes. L'arpenteur Casper Wessel (1745-1818) a soumis la même idée à l'Académie royale du Danemark en 1797, mais son travail est passé inaperçu par la communauté des mathématiques. Au tournant du siècle, Argand a commencé indépendamment à interpréter géométriquement le nombre complexe i comme une rotation de 90 °. Il expose la commodité et la fécondité de cette idée dans un petit livre, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, qu'il publie en privé, à son ses propres frais, en 1806. Il n'a jamais écrit son nom dans la pièce, et il était donc impossible d'identifier l'auteur.

Par hasard, le mathématicien français Jacques Français est tombé sur la petite publication et a écrit sur les détails du travail dans un article de 1813, "Un mémoire sur la représentation géométrique des nombres imaginaires", publié dans les Annales de Mathématiques . Il a demandé que l'auteur inconnu des idées se manifeste et reçoive le crédit pour le travail. Argand se fait connaître en soumettant son propre article à la même revue, présentant une approche légèrement modifiée et améliorée de ses méthodes. Bien que les historiens aient depuis découvert que les mathématiciens JOHN WALLIS (1616-1703) et CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) considéraient chacun leurs propres interprétations géométriques des nombres complexes, Argand est généralement considéré comme le découvreur de cette approche.

Argand a été le premier à développer la notion de MODULE d'un nombre complexe. Il convient également de noter qu'Argand a également présenté une preuve essentiellement complète du THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE dans sa pièce de 1806, mais a reçu peu de crédit pour cette réalisation. Argand a été le premier à énoncer et à prouver le théorème en toute généralité, permettant à tous les nombres impliqués, y compris les coefficients du polynôme, d'être des nombres complexes.

Argand est décédé le 13 août 1822 à Paris, France. Bien qu'il ne soit pas considéré comme l'un des mathématiciens les plus remarquables de son temps, le travail d'Argand a certainement façonné notre compréhension de la théorie des nombres complexes. Le diagramme d'Argand est une construction familière à tous les élèves avancés en mathématiques du secondaire.

Diagramme d'Argand (plan complexe) Voir COMPLEXE NOMBRES.

argument Au quatrième siècle avant notre ère, le philosophe grec ARISTOTE a étudié attentivement la structure du raisonnement. Il a conclu que tout argument, c'est-à-dire une ligne de pensée raisonnée, consiste essentiellement en deux parties fondamentales : une série de PREMISE suivie d'une conclusion. Par exemple:

Si aujourd'hui c'est mardi, alors je dois être en Belgique.
Je ne suis pas en Belgique.
Donc aujourd'hui n'est pas mardi.

est un argument contenant deux prémisses (les deux premières lignes) et une conclusion. Un argument est valide si la conclusion est vraie lorsque les prémisses sont supposées vraies.

Tout argument a la forme générale :

Si [prémisse 1 ET prémisse 2 ET prémisse 3 ET…], alors [Conclusion]

Utilisation de la logique symbolique de la LOGIQUE FORMELLE et de la VÉRITÉ TABLES, l'exemple ci-dessus a la forme générale :

$$p \rightarrow q$$
$$\neg q$$
$$\text{Donc } \neg p$$

L'argument peut ainsi se résumer : $((p \rightarrow q)\ (\neg q)) \rightarrow (\neg p)$.

On peut vérifier à l'aide d'une table de vérité que cet énoncé est une tautologie, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un énoncé vrai quelles que soient les valeurs de vérité des énoncés composants p et q . (En particulier, elle est vraie lorsque les deux prémisses ont la valeur de vérité T.) Ainsi, l'argument présenté ci-dessus est bien un argument valide.

Machine Translated by Google

Un argument qui ne conduit pas à une tautologie dans la logique symbolique n'est pas valide. Par exemple,

Si un oiseau est un corbeau, alors il est noir.
Cet oiseau est noir.
C'est donc un corbeau.

est un argument invalide : ((p → q) q) → p n'est pas une tautologie. (Officieusement, on peut affirmer qu'un oiseau noir a besoin pas être un corbeau.)

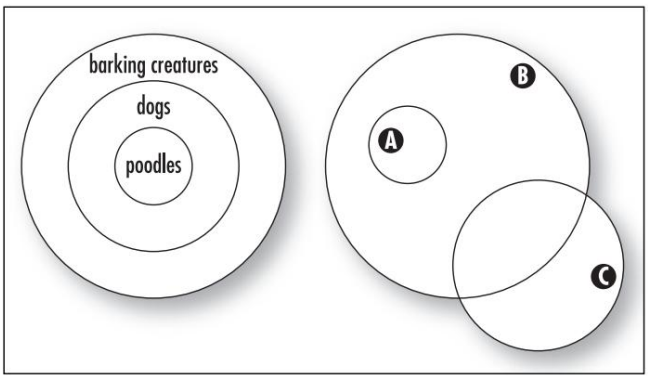
Le tableau suivant contient les formulaires standard de argument couramment utilisé, ainsi que certains arguments non valides arguments couramment utilisés par erreur.

Arguments valides	Arguments invalides
Raisonnement direct (modus ponens)	Sophisme de la Converse
p → q	p → q
	q
p donc q	donc p
Erreur de raisonnement contrapositif de l'inverse (mode tollens)	
p → q	p → q
¬q	¬p
donc ¬p	donc ¬q
Raisonnement disjonctif	Utilisation abusive du raisonnement disjonctif
p q p q	p q p q
¬p ¬qp q	
donc q donc p	donc ¬q donc ¬p
Raisonnement transitif	
p → q	
q → r	
donc p → r	

Au milieu des années 1700, LEONHARD EULER a inventé un manière élégante de déterminer la validité des syllogismes, qui c'est-à-dire des arguments dont les prémisses contiennent les mots all, certains, ou pas. Par exemple,

Tous les caniches sont des chiens.
Tous les chiens aboient.
Par conséquent, tous les caniches aboient.

est un syllogisme, et Euler décrirait un tel argument comme un diagramme de trois cercles, chacun représentant un ensemble mentionné dans l'un des locaux. La validité de l'argument saute alors aux yeux :



Diagrammes d'Euler

Un argument de la structure suivante, par exemple, peut être démontré comme invalide en disposant des cercles comme montré:

Tous les A sont des B.
Certains B sont des C.
Par conséquent, certains A sont des C.

Tout diagramme utilisé pour analyser la validité d'un argument est appelé un diagramme d'Euler.

Voir aussi RAISONNEMENT DEDUCTIF/INDUCTIF ; QUANTIFICATEUR.

Aristote (384-322 avant notre ère) Logique grecque , philosophie, Physique, Médecine Né à Stagirus, en Macédoine, Aris totle est connu en mathématiques pour son travail systématique étude de la logique déductive. En posant les fondements de la LOGIQUE FORMELLE, Aristote a identifié les LOIS fondamentales de la PENSÉE, les lois du raisonnement, et les principes fondamentaux qui sont au cœur de toute ARGUMENT mathématique . Son travail dans ce domaine donc ont profondément affecté les attitudes et les approches de la pensée scientifique que la culture intellectuelle occidentale en tant que ensemble est souvent qualifié d'aristotélicien.

A 17 ans, Aristote rejoint l'Académie de PLATON en Athènes et y resta pendant 20 ans. Il travaillait étroitement avec Platon, et aussi EUDOXUS, neveu de Platon. Équivalent d'une université de recherche moderne, le L'Académie a réuni des universitaires de toutes les disciplines et a fourni un environnement culturellement riche qui a encouragé l'apprentissage et favorisé l'avancement des connaissances. En raison de la politique intérieure, cependant, Aristote a décidé quitter l'Académie après la mort de Platon en 347 avant notre ère

Machine Translated by Google

Après avoir donné des leçons particulières à l'héritier du roi Philippe II, le futur Alexandre le Grand, pendant plusieurs années, Aristote retourna à Athènes en 335 av. J.-C. pour fonder sa propre école, le Lycée. Il voulait que l'école soit aussi aussi large que possible, explorant un large éventail de sujets mais avec une prééminence donnée à l'étude du monde naturel. Alors qu'il était au Lycée, Aristote écrivit 22 textes couvrant une gamme étonnante de sujets : logique, physique, astronomie, météorologie, théologie, métaphysique, éthique, rhétorique, poétique, etc. Il a fondé une théorie de la cinématique, une étude de l'espace, du temps et mouvement, et il a établi des principes de physique qui restée incontestée pendant deux millénaires.

En ce qui concerne les mathématiques, on se souvient d'Aristote pour ses écrits en logique, un sujet qu'il a identifié comme la base de toute pensée scientifique. Il invente le syllogisme, une forme d'argumentation qui se décline en trois parties : une prémisse majeure, une prémisse mineure et une conclusion. Bien qu'il s'agisse d'une notion simple pour nous aujourd'hui, cette Le travail a représenté une première étape fondamentale vers la compréhension de la structure du raisonnement. Il a présenté la ligne de pensée suivante comme exemple de syllogisme :

Chaque Grec est une personne.
Chaque personne est mortelle.
Donc tout Grec est mortel.

Aristote a reconnu que toute ligne de raisonnement suivant cette forme est logiquement valide en vertu de sa structure, pas son contenu. Ainsi l'argument :

Chaque planète est faite de fromage.
Chaque automobile est une planète.
Par conséquent, chaque automobile est faite de fromage.

par exemple, est un argument valable, même si la validité des prémisses peut être remise en question. Supprimer le contenu de la structure était une réalisation sophistiquée.

Aristote appelait son domaine de la logique « analytique » et décrit ses travaux sur le sujet dans son livre Prior and Analytique postérieure. Il voulait démontrer l'efficacité du raisonnement logique dans la compréhension de la science.

Aristote a également abordé des sujets de la philosophie de mathématiques. Il a soutenu, par exemple, qu'un inconnaissable tel que "l'infini" n'existe qu'en tant que potentialité, et jamais sous forme de formulaire rempli. Bien que, par exemple, à partir de n'importe quel ensemble fini de nombres premiers, on peut toujours en construire un de plus, parler de l'ensemble des nombres premiers comme d'un concept unique, soutenait-il, n'a pas de sens. (Aujourd'hui, nous disons qu'Aristote a accepté le "potentiellement infini » mais a rejeté « l'infini réel ».)

Il est rapporté qu'Aristote marchait souvent à travers les jardins du Lycée tout en donnant une conférence, forçant ses élèves à suivre. Ses élèves sont devenus connu sous le nom de péripatéticien, le mot péripatétique signifiant « adonné à la marche ». Copies de la conférence d'Aristote les notes prises par les péripatéticiens étaient considérées comme de précieux documents savants à part entière et ont ont été traduits, copiés et distribués à travers le globe à travers les siècles.

Les troubles politiques ont forcé Aristote à quitter Athènes de nouveau en 322 av. J.-C. Il mourut peu après à l'âge de 62 d'une plainte d'estomac non identifiée.

L'analyse d'Aristote de la pensée critique littéralement façonné et défini la nature de la pensée logique que nous exercer aujourd'hui dans n'importe quelle poursuite académique. On ne peut exagérer la profondeur de l'influence d'Aristote. Par identifier les modes de pensée valables et clarifier les principes du raisonnement logique, Aristote a fourni les outils nécessaires à un raisonnement sensé et à une réflexion systématique astucieuse. Ce sont des compétences aujourd'hui considérées comme fondamentales pour les objectifs de base de tous les niveaux d'éducation.

Voir aussi CARDINALITE ; RAISONNEMENT DÉDUCTIF/INDUCTIF ; PARADOXE.

arithmétique Branche des mathématiques concernée par calculs utilisant des nombres s'appelle l'arithmétique. Ce peut impliquer un certain nombre de sujets spécifiques - l'étude de les opérations sur les nombres, telles que l'ADDITION, la MULTIPLICATION, la SOUSTRACTION, la DIVISION et les RACINES CARRÉES, nécessaire pour résoudre des problèmes numériques; les méthodes nécessaires pour changer les nombres d'un formulaire à l'autre (comme la conversion de fractions en décimales et vice versa); ou l'étude abstraite des SYSTÈMES DE NOMBRE, NOMBRE THÉORIE, et les opérations générales sur les ensembles telles que définies par THÉORIE DES GROUPES et ARITHMÉTIQUE MODULAIRE, par exemple.

Le mot arithmétique vient du grec arithmetiké, construit à partir de arithmós signifiant « nombre » et techné signifiant « science ». Au temps de Grèce antique, le terme arithmétique ne faisait référence qu'à travail théorique sur les nombres, avec le mot logistique utilisé pour décrire les calculs pratiques de tous les jours utilisé en entreprise. Aujourd'hui, le terme arithmétique est utilisé dans les deux contextes. (Le mot logistique est aujourd'hui un terme principalement militaire.)

Voir aussi BASE D'UN SYSTÈME NUMÉRIQUE ; FONDAMENTAL THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE ; ORDRE DE FONCTIONNEMENT.

Machine Translated by Google

inégalité moyenne arithmétique-géométrique Voir MEAN.

moyenne arithmétique Voir MEAN.

séquence arithmétique (progression arithmétique) UNE SÉQUENCE de nombres dans laquelle chaque terme, à l'exception du premier, diffère du précédent d'une quantité constante est appelée une séquence arithmétique. La différence constante entre les termes s'appelle la différence commune. Par exemple, la séquence 4, 7, 10, 13, … est arithmétique avec une différence commune 3. Une séquence arithmétique peut être considérée comme « linéaire », la différence commune étant la PENTE de la relation linéaire.

Une suite arithmétique de premier terme a et de différence commune d a la forme :

une, une + d, une + 2d, une + 3d, …

Le nième terme an de la suite est donné par an = a + (n – 1)d. (Ainsi, le 104ème terme de la suite arithmétique 4,7,10,13,…, par exemple, est a104 = 4 + [103 × 3] = 313.)

La somme des termes d'une suite arithmétique est appelée suite arithmétique :

une + (une + d) + (une + 2d) + (une + 3d)+…

La valeur d'une telle somme est toujours infinie sauf si la suite arithmétique considérée est la suite nulle constante : 0,0,0,0,…

La somme d'une séquence arithmétique finie peut être facilement calculée en écrivant la somme à la fois vers l'avant et vers l'arrière et en additionnant par colonne. Considérons, par exemple, la somme 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31. Appelons la réponse à ce problème S. Alors :

4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 = S
31 + 28 + 25 + 22 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4 = S

et l'ajout de colonnes donne :

35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 = 2S

Autrement dit, 2S = 10 × 35 = 350, et donc S = 175. En général, cette méthode montre que la somme de n nombres équidistants en progression arithmétique, a + b + + y + z, est n fois la moyenne de le premier et le dernier terme de la somme :

$$S = n \times \frac{a + z}{2}$$

On dit que CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), jeune étudiant, étonna son professeur de mathématiques en calculant la somme des nombres 1 à 100 en quelques secondes en utilisant cette méthode. (Nous avons 1 + 2 1 + 100 + 100 = 100 × 2 Voir + … SÉQUENCE aussi = 5 050.)

GÉOMÉTRIQUE ; SÉRIE.

série arithmétique Voir SEQUENCE ARITHMETIQUE.

tableau Un arrangement ordonné de nombres ou de symboles s'appelle un tableau. Par exemple, un VECTEUR est un tableau à une dimension : c'est une liste ordonnée de nombres. Chaque nombre de la liste est appelé une composante du vecteur. Une MATRICE est un tableau à deux dimensions : c'est une collection de nombres disposés dans une grille finie. (Les composants d'un tel tableau sont identifiés par leurs positions de ligne et de colonne.) Deux tableaux sont considérés comme identiques uniquement s'ils ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et que toutes les entrées correspondantes sont égales. On peut également définir des tableaux à trois dimensions et plus.

En informatique, un tableau est appelé un identifiant et l'emplacement d'une entrée est donné par un indice. Par exemple, pour un tableau à deux dimensions étiqueté A, l'entrée de la deuxième ligne, troisième colonne est notée A23.
Un tableau à n dimensions utilise n indices.

– ryabhata (env. 476–550 CE) Trigonométrie indienne , théorie des nombres, astronomie Né à Kusumapura, aujourd'hui Patna, Inde, A– ryabhata (parfois appelé ryabhata I pour le distinguer du mathématicien A du même nom qui vécut 400 ans plus tard) fut le premier mathématicien indien de renom dont nous connaissons le nom et dont nous pouvons étudier les écrits. Dans la section Ganita (Calcul) de son traité d'astronomie ryabhatiya, il a fait des progrès fondamentaux dans l' A théorie de la TRIGONOMÉTRIE en développant des techniques sophistiquées pour trouver et tabuler des longueurs de demi-accords dans des cercles. Cela équivaut à tabuler les valeurs de la fonction sinus. A– ryabhata a également calculé la valeur de π à quatre décimales (π ≈ 62 832/20 000 = 3,1416) et a développé des règles pour extraire le carré et

Machine Translated by Google

racines cubiques, pour additionner des SÉRIES ARITHMÉTIQUES et trouver des SOMMES DE PUISSANCES.

En tant que traité astronomique, A ryabhatiya est écrit comme une série de 118 versets résumant toutes les mathématiques hindoues et les pratiques astronomiques connues à cette époque. Un certain nombre de sections sont purement mathématiques dans leur contexte et couvrent les sujets de l'ARITHMÉTIQUE, de l'ESSAI DE TRIGONOME et de la GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE, ainsi que les théories des FRACTIONS CONTINUES, des équations QUADRATIQUE et de la SOMMATION. A– ryabhata a également décrit des méthodes pour trouver des solutions entières à des équations linéaires de la forme par = ax + c en utilisant un algorithme essentiellement équivalent à l' ALGORITHME EUCLIDIEN.

Les historiens ne savent pas comment A– ryabhata a obtenu son estimation très précise de π. Ils savent cependant qu'A-ryabhata savait qu'il s'agit d'un nombre irrationnel, un fait que les mathématiciens n'ont pu prouver qu'en 1775, plus de deux millénaires plus tard. Dans les applications pratiques, cependant, A– ryabhata a préféré utiliser $\sqrt{10} \approx 3{,}1622$ comme approximation de π.

Les érudits de l'époque ne considéraient pas le sinus comme un rapport des longueurs latérales d'un triangle, mais plutôt la longueur physique d'une demi-corde d'un cercle. Bien sûr, des cercles de rayons différents donnent des longueurs différentes pour les demi-cordes correspondantes, mais on peut ajuster les chiffres en utilisant la proportionnalité. Travaillant avec un cercle de rayon 3 438, ryabhata a construit une table de sinus pour chaque angle A de 1° à 90°. (Il a choisi le nombre 3 438 pour que la circonférence du cercle soit proche de 21 600 = 360 × 60, ce qui fait qu'une unité de longueur de la circonférence correspond à une minute d'angle.) Ainsi, dans son tableau, sinus de 90° est enregistré comme 3 438, et le sinus de 30°, par exemple, comme 1 719.

En ce qui concerne l'astronomie, A ryabhatiya présente un traitement systématique de la position et des mouvements des planètes. A– ryabhata a calculé la circonférence de la Terre à 24 835 milles (ce qui est étonnamment précis) et a décrit les orbites des planètes comme des ELLIPSES.
Les érudits européens n'arriveront à la même conclusion qu'à la Renaissance.

associative UNE OPÉRATION BINAIRE est dite associative si elle est indépendante de l'ensemble des termes auxquels elle s'applique. Plus précisément, une opération * est associative si :

une * (b * c) = (a * b) * c

pour toutes les valeurs de a, b et c. Par exemple, en arithmétique ordinaire, les opérations d'addition et de multiplication sont associatives, mais la soustraction et la division ne le sont pas. Par exemple, 6 + (3 + 2) et (6 + 3) + 2 sont égaux en valeur, mais 6 – (3 – 2) et (6 – 3) – 2 ne le sont pas. (Le premier est égal à 6 - 1 = 5, et le second est 3 - 2 = 1.) Dans l'analyse VECTOR , l'addition de vecteurs est associative, mais l'opération consistant à prendre le PRODUIT CROISÉ ne l'est pas.

De la relation de base a * (b * c) = (a * b) * c, il s'ensuit que tous les regroupements possibles d'un nombre fini de termes fixes entre parenthèses sont équivalents. (Utilisez un argument INDUCTION sur le nombre d'éléments présents.) Par exemple, que (a * b) * (c * d) est égal à (a * (b * c)) * d peut être établi avec deux applications de la relation fondamentale comme suit : (a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d = (a * (b * c)) * d. En conséquence, si la propriété associative est vérifiée pour un ensemble donné, les parenthèses peuvent être omises lors de l'écriture des produits : on peut simplement écrire a * b * c * d, par exemple, sans se soucier de la confusion.

Ces considérations s'effondrent cependant si l'expression considérée contient un nombre infini de termes. Par exemple, nous avons :

$$0 = 0 + 0 + 0 + \cdots$$
$$= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

S'il est permis de regrouper des termes, alors on pourrait écrire :

$$0 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + = 1 + 0 \cdots$$
$$+ 0 + 0 + \cdots$$
$$= 1$$

Cette absurdité montre qu'il faut être extrêmement prudent lorsqu'on applique la loi associative à des sommes infinies.

Voir aussi PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE ; DISTRIBUTIF PROPRIÉTÉ; ANNEAU.

asymptote Une ligne droite vers laquelle le graphique d'une fonction s'approche, mais n'atteint jamais, s'appelle une asymptote pour le graphique. Le nom vient du mot grec asymptotos pour « ne pas tomber ensemble » (a : « pas » ; sym : « ensemble » ; ptotos : « tomber »). Par exemple, la fonction y = 1/x a pour asymptotes les droites x = 0 et y = 0 : y devient infiniment petit, mais n'atteint jamais zéro, à mesure que x devient grand, et vice versa. La fonction y = (x + 2)/(x – 3) a la droite verticale x = 3

Machine Translated by Google

comme asymptote : les valeurs de la fonction deviennent infiniment grandes lorsque x s'approche de la valeur 3 par la droite, et infiniment grandes et négatives lorsque x s'approche de la valeur 3 par la gauche.

Une fonction y = f(x) admet une asymptote horizontale y = L si limx→∞ f(x) = L ou limx→–∞ f(x) = L. Par exemple, la fonction $y = \frac{3x_{-}^{2}}{2\,1 + + xx}$ a une asympte horizontale fourre-tout y = 3, puisque $\lim_{\infty x\to} \frac{3x_{-}^{2}}{2\,1xx + +} = \lim_{\infty x\to} \frac{3}{1\,1 + + \frac{1}{2xx}}$ $= \frac{3}{100 + +} = 3$.

Une asymptote n'a pas besoin d'être horizontale ou verticale, cependant. Par exemple, la fonction $y = \frac{3\,2\,2 + ++ xxx}{2\,1 + x}$ $1 = ++ x \frac{1}{}$ s'approche de la ligne y = x + 1 lorsque x 2 1 + x devient grand, donc y = x + 1 est une « asymptote oblique » pour la courbe.

Si une HYPERBOLA est donnée par l'équation $\frac{2x_{-}}{un^{2}}\,2\,y\,\frac{}{b} = 1\,2$, puis la manipulation donne l'équation $\frac{b}{un}^{2} - \frac{y}{X}^{2}\,b\,\frac{=}{2x_{-}}^{2}$. Le membre de droite tend vers zéro lorsque x devient grand, ce qui montre que la courbe a des asymptotes obliques données par $\frac{b}{un}^{2} - \frac{y}{X}^{2} = 0$, c'est-à-dire par les lignes $y = \frac{b}{xa}$ et $y = -\frac{b}{xa}$.

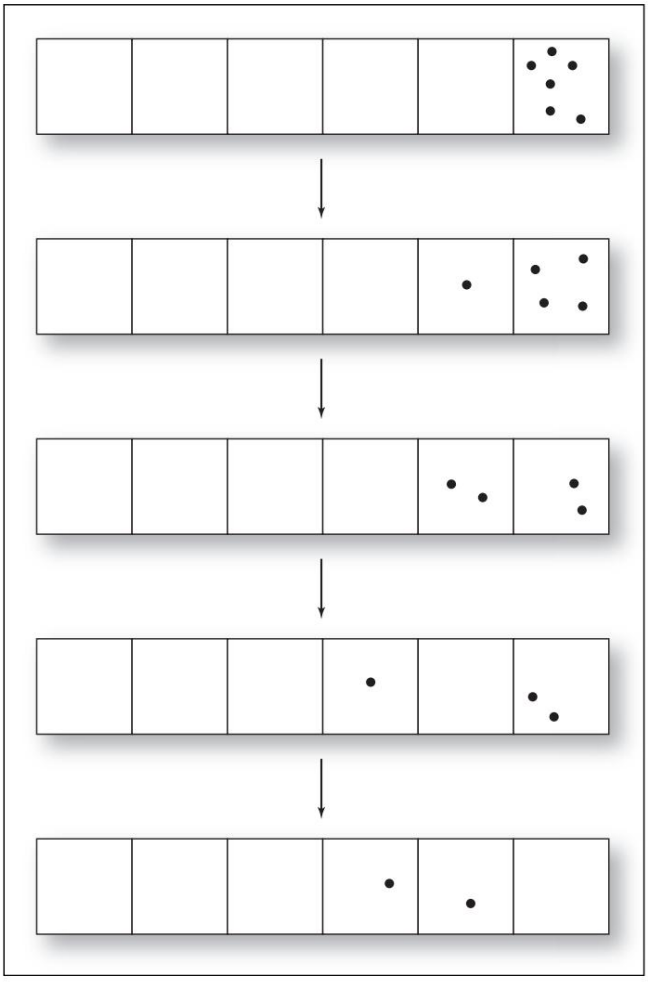
En élargissant la définition, on pourrait dire que courbe $y = \frac{3\,1 + x}{X}\,2 = + x\,\frac{1}{X}$ a la parabole $y = x^{2}$ comme une asymptote.

automate (pluriel, automates) Une machine abstraite utilisée pour analyser ou modéliser des problèmes mathématiques est appelée un automate. Un exemple simple d'automate est une « machine à base de nombres », qui consiste en une rangée de cases s'étendant à l'infini vers la gauche. On place dans cette machine un nombre fini de sous dans la case la plus à droite. La machine redistribue alors les centimes selon une règle prédéfinie.

Une machine « 1 ← 2 », par exemple, remplace une paire de centimes dans une boîte par un seul centime dans la boîte une place à gauche. Ainsi, par exemple, six sous placés dans la machine 1 ← 2 « tirent » quatre fois pour donner une distribution finale qui peut être lue comme « 1 1 0 ». Ce résultat est le nombre six écrit sous la forme d'un NOMBRE BINAIRE, et cette machine convertit tous les nombres en leurs représentations en base deux.

Une machine 1 ← 3 donne des représentations en base trois, et une machine 1 ← 10 donne les représentations ordinaires en base dix. Le processus de DIVISION LONGUE peut être expliqué à l'aide de cette machine.

Des variations sur cette idée peuvent conduire à des études mathématiques intéressantes. Considérons, par exemple, une machine 2 ← 3. Cette machine remplace trois sous dans une boîte par deux sous dans la boîte une place à gauche. Dans un certain sens, il s'agit d'une "machine de base un an et demi". Par exemple, placer 10 sous dans cette machine donne



Un automate en action

Machine Translated by Google

la représentation « 2 1 0 1 », et il est vrai que

$$2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{3} + 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2} + 0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1} + 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 10.$$

Voir aussi BASE D'UN SYSTÈME NUMÉRIQUE.

axiome (postulat) Un énoncé dont la vérité est jugée évidente ou à accepter sans preuve s'appelle un axiome. Le nom vient du mot grec axioma pour «valeur» ou «qualité». Le nom alternatif "postulat" vient de postulatum, latin pour "une chose demandée".

L'une des grandes réalisations du grand géomètre grec EUCLIDE et de ses contemporains d'environ 300 avant notre ère a été de reconnaître que tous les énoncés mathématiques ne peuvent pas être prouvés : certains termes restent indéfinis et les règles de base (postulats) concernant leurs relations doivent simplement être accepté comme vrai. Il faut développer une théorie mathématique avec un "big bang", pour ainsi dire, en énumérant simplement un ensemble de départ d'hypothèses.
À partir de là, en utilisant les lois de base du raisonnement, on établit et prouve d'autres déclarations, ou THEO REMs, sur le système.

Par exemple, dans une étude systématique de la GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE, les termes point, ligne et plan ne sont pas définis, et on commence une étude systématique du sujet en étudiant une liste d'axiomes de base qui nous dit comment ces quantités sont censées être interdépendantes. (Un axiome de la géométrie euclidienne, par exemple, affirme qu'entre deux points quelconques on peut tracer une ligne.) Tous les résultats présentés dans un texte typique de lycée sur la géométrie, par exemple, sont les conséquences logiques de seulement cinq hypothèses principales.

En THÉORIE DES ENSEMBLES, les termes ensemble et élément d'un ensemble ne sont pas définis. Cependant, des règles sont données qui définissent l'égalité de deux ensembles, qui garantissent l'existence de certains ensembles, et établissent les moyens de construire de nouveaux ensembles à partir d'anciens. Dans LA THÉORIE DES NOMBRE, LES POS TULATS DE PEANO fournissent une base logique à la théorie des nombres et à l'arithmétique.

Un énoncé dans un système mathématique qui semble vrai, mais qui n'a pas encore été prouvé, s'appelle une conjecture.
Voir aussi RAISONNEMENT DEDUCTIF/INDUCTIF ; ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO.

axiome du choix Formulé pour la première fois par le mathématicien allemand ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871–1953), l'axiome du choix est un principe de base de la THÉORIE DES ENSEMBLES qui stipule qu'à partir de toute collection C d'ensembles non vides, il est possible de construire un ensemble S qui contient un élément de chacun des ensembles de C. L'ensemble S est appelé un « ensemble de choix » pour C. Par exemple, si C représente les trois ensembles {1,2,3}, {2,4,6, 8,…}, et {5}, alors S = {1,6,5} est un ensemble de choix pour C. Il en va de même pour l'ensemble S = {2,
L'axiome du choix a été considéré comme contre-intuitif lorsqu'il est interprété à un niveau pratique : bien qu'il soit possible de sélectionner un élément dans chacun d'une collection finie d'ensembles en un temps fini, il est physiquement impossible d'accomplir le même exploit lorsque présenté avec une collection infinie de sets. L'existence d'un ensemble de choix n'est pas "constructive", pour ainsi dire, et l'utilisation de l'axiome est considérée par les mathématiciens, encore aujourd'hui, avec méfiance. En 1938, le mathématicien autrichien KURT GÖDEL prouva cependant qu'aucune contradiction ne surgirait jamais lorsque l'axiome du choix est utilisé en conjonction avec d'autres axiomes standards de la théorie des ensembles.
Zermelo a formulé l'axiome pour prouver que tout ensemble ordonné peut être bien ordonné. L'axiome du choix prouve également (et est en fait équivalent à) la loi de la trichotomie, qui stipule que pour toute paire de NOMBRES RÉELS a et b, précisément l'une des conditions suivantes est vraie :

i. a > b
ii. a < b
iii. un = b

Bien que cette affirmation, à un certain niveau, semble évidente, sa validité est fondamentale pour le fonctionnement des nombres réels et doit donc être correctement comprise.
Voir aussi ENSEMBLE BIEN ORDONNÉ.

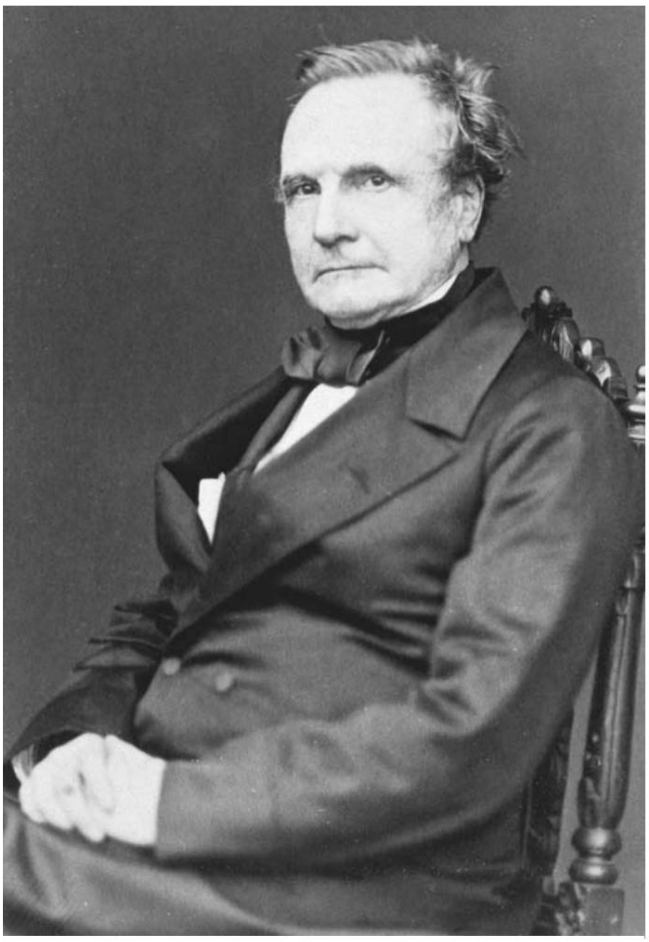
Machine Translated by Google

B

Babbage, Charles (1791–1871) Calcul britannique
Né le 26 décembre 1791 à Londres, Angleterre,
Charles Babbage est surtout connu pour son travail sur
la conception et la fabrication d'un calculateur mécanique,
l'ancêtre d'un ordinateur. Après avoir d'abord construit un
"machine à différence", Babbage a consacré le reste
de sa vie à la construction d'un « esprit analytique » supérieur
moteur » capable d'effectuer toutes les opérations mathématiques.
Son travail vers cet objectif a jeté les bases
de la conception informatique utilisée aujourd'hui. En partie à cause du manque de
financement, cependant, la machine n'a jamais été achevée.

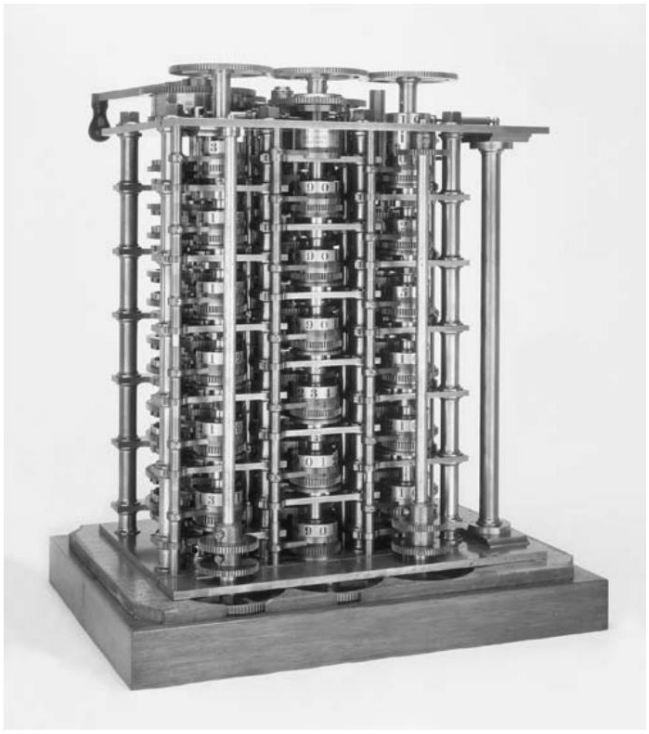
Babbage est entré au Trinity College de Cambridge en
1810. Alors qu'il était étudiant, lui et un camarade de premier cycle
co-auteur de Differential and Integral Calculus, un mémoire influent
sur l'histoire du calcul. Après avoir été transféré au Peterhouse
College, Babbage a reçu son
baccalauréat en mathématiques en 1814 pour ensuite commencer
une carrière dans la recherche mathématique. Babbage a publié un
nombre d'articles influents sur le thème de la fonction
équations et a été honoré d'être élu au ROYAL
SOCIÉTÉ en 1816. En 1827, il devint professeur lucasien de
mathématiques à Cambridge.

Une grande partie du travail théorique de Babbage reposait sur
consulter des tables de logarithmes et trigonométriques
les fonctions. Conscient de l'imprécision des calculs humains,
Babbage s'est intéressé au problème de
utiliser un dispositif mécanique pour effectuer des calculs
complexes. En 1819, il commença à travailler sur un petit « moteur
à différence », qu'il termina trois ans plus tard.
Il annonça son invention à la communauté scientifique dans un
article de 1822, « Note on the Application of



Charles Babbage, éminent mathématicien du XIXe siècle,
est surtout connu pour sa conception et sa fabrication d'un
ordinateur. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/
Topham-HIP/L'image fonctionne)

Machine Translated by Google



Charles Babbage a terminé les travaux sur son « moteur de différence », premier ordinateur mécanique sophistiqué au monde, en 1822. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/ Topham HIP/The Image Works)

Machines pour le calcul des données astronomiques et Tables mathématiques.

Même si la machine était capable d'effectuer calculs relativement simples, mais très précis (en utilisant la méthode des DIFFERENCES FINIES pour calculer valeurs des fonctions POLYNOMIALES), son invention a été bien reçu et a été compris comme une première étape vers une nouvelle ère dans les capacités de calcul. Bab bage a reçu une médaille d'or de l'Astronomical Society et a reçu une bourse du Chancelier de l'Échiquier pour construire un moteur de différence plus grand et plus complexe.

En 1801, Joseph-Marie Jacquard invente un métier à tisser capable de tisser des motifs complexes en utilisant un ensemble d'instructions figurant sur des cartes perforées avec des trous. Deux décennies plus tard, Babbage a décidé de suivre le même idée et concevoir une machine à vapeur qui accepterait des instructions et des données de poinçonné cartes. Avec l'aide de la fille de Lord Byron, LADY AUGUSTA ADA LOVELACE, Babbage s'est mis au travail sur la création d'un dispositif de calcul sophistiqué. En 1832 il a publié un livre, Sur l'économie des machines et manufactures, offrant une discussion théorique sur le sujet. Ceci pourrait être considéré comme le premier publié travailler dans le domaine de la RECHERCHE OPÉRATIONNELLE.

Malheureusement, en raison de contraintes financières et technologiques difficultés, la machine n'a jamais été achevée. (Le la technologie de la métallurgie du milieu des années 1800 n'était pas capable d'atteindre les niveaux de précision de la machine de Babbage demandé.) L'appareil dans son état inachevé est conservé aujourd'hui au Science Museum de Londres.

Bien qu'il n'ait jamais réalisé son rêve de construire une ordinateur opérationnel, mécanique, ses concepts de conception se sont avérés corrects depuis. Il n'est pas exagéré de dire que les ordinateurs modernes construits sur La conception théorique de Babbage a révolutionné presque tous les aspects de la vie au XXe siècle.

Babbage est décédé à Londres, en Angleterre, en octobre 18, 1871.

Mathématiques babyloniennes Les Babyloniens de 2000 BCE a vécu en Mésopotamie, la plaine fertile entre le l'Euphrate et le Tigre dans l'actuel Irak. Nous sommes heureusement que les peuples de cette région ont conservé de vastes les archives de leur société – et leurs mathématiques – sur tablettes d'argile cuites au soleil. Un grand nombre de ces les comprimés survivent aujourd'hui. Les Babyloniens utilisaient un simple stylet pour faire des marques dans l'argile et développèrent une forme de écriture basée sur des symboles cunéiformes (en forme de coin).

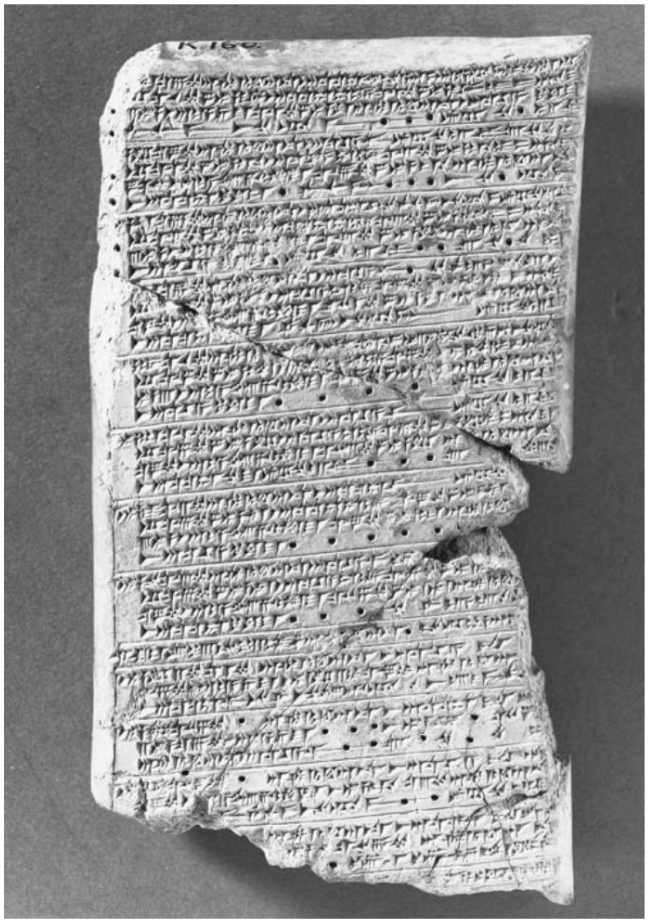
L'activité mathématique des Babyloniens semble avoir été motivés, au début, par les besoins pratiques quotidiens de la gestion de leur société. Beaucoup de problèmes décrites dans les premières tablettes concernent le calcul le nombre de travailleurs nécessaires pour construire l'irrigation canaux et la charge totale des salaires, par exemple. Mais de nombreux problèmes décrits dans des textes ultérieurs n'ont pas d'application pratique apparente et indiquent clairement un intérêt à poursuivre les mathématiques pour elles-mêmes.

Les Babyloniens n'utilisaient que deux symboles pour représenter les nombres : le symbole pour représenter une unité et le symbole pour représenter un groupe de dix. Un système additif simple a été utilisé pour représenter les nombres de 1 à 59. Par exemple, le cluster représente  "32." Un SYSTÈME DE PLACE-VALEUR en base 60 a ensuite été utilisé pour représentent des nombres supérieurs à 59. Par exemple, le nombre 40 992, ce qui équivaut à 11 × 602 + 23 × 60 + 12, . Des espaces a été écrit:  ont été insérés entre des groupes de symboles.

Machine Translated by Google

Les historiens ne savent pas pourquoi les Babyloniens ont choisi de travailler avec un système SEXAGESIMAL . Une théorie populaire suggère que ce système de numération est basé sur l'observation qu'il y a 365 jours dans l'année.
Lorsqu'il est arrondi à la valeur la plus pratique (très divisible) de 360, nous obtenons un multiple de 60. Des vestiges de ce système de numération demeurent avec nous aujourd'hui. Par exemple, nous utilisons le nombre 360 pour le nombre de degrés dans un cercle, et nous comptons 60 secondes dans une minute et 60 minutes par heure.

Il y avait deux points de confusion possibles avec le système numérique babylonien. Sans symbole pour zéro, il n'est pas clair si le chiffre envoie 61 (comme une unité de 60 plus une représenter seule unité), 3601 (comme une unité de 602 plus une seule unité), ou même 216 060, par exemple. De plus, les Babyloniens étaient à l'aise avec



Une tablette cunéiforme du VIIe siècle du nord de l'Irak enregistre des observations de la planète Vénus. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du British Museum/Topham-HIP/The Image Works)

fractions et utilisé des puissances négatives de 60 pour les représenter (tout comme nous utilisons des puissances négatives de 10 pour écrire des fractions en notation décimale). Mais sans notation pour l'équivalent d'un point décimal, le symbole pourrait également être interprété comme signifiant 1 + (1/60), ou (1/60) + (1/602) , ou même 60 + (1/604) , par exemple. Comme les Babyloniens n'ont jamais développé de méthode pour résoudre une telle ambiguïté, nous supposons alors qu'elle n'a jamais été considérée comme un problème pour les érudits de l'époque. (Les historiens suggèrent que le contexte du texte a toujours rendu l'interprétation du chiffre apparente.)

Les Babyloniens ont compilé de vastes tables de puissances des nombres et leurs réciproques, qu'ils ont utilisées de manière ingénieuse pour effectuer des calculs arithmétiques.
(Par exemple, une tablette datée de 2000 avant notre ère répertorie tous les carrés des nombres de un à 59, et tous les cubes des nombres de un à 32.) Pour calculer le produit de deux nombres a et b, les érudits babyloniens com mis leur somme et leur différence, lu les carrés de ces nombres sur une table, et divisé leur différence par quatre. (En notation moderne, cela correspond au calcul : ab = (1/4) [(a + b) nombre a par b, les érudits ont calculé le produit de a et l'inverse 1/b (enregistré dans un tableau) : ab = un × (1/b). ^{2} – (a – b) ^{2}].) Pour diviser un

La même table d'inverses a également fourni les moyens de résoudre les ÉQUATIONS LINÉAIRES : bx = a. (Multiplier a par l'inverse de b.)

Les problèmes de géométrie et de calcul d'aire conduisent souvent à la nécessité de résoudre des équations QUADRATIQUE .
Par exemple, un problème d'une tablette demande la largeur d'un rectangle dont l'aire est de 60 et dont la longueur est de sept unités plus longue que la largeur. En notation moderne, cela revient à résoudre l'équation x(x + 7) = x + 7x = 60. Le scribe qui a écrit la tablette^2 propose alors une solution équivalente à la fameuse formule quadratique : $x = \sqrt{(7/2)2 + 60} - (7/2) = 5$. (Les racines carrées ont été com

mis en examinant une table de carrés.)

Les problèmes de volume conduisent à des équations cubiques, et les Babyloniens étaient habiles à résoudre des équations spéciales de la forme : ax3 + bx2 = c. (Ils les ont résolus en fixant n = (ax)/b, d'où l'équation peut être = ca2 /b 3 . En examinant un tableau de 3 réécrit comme n $^{2 + n}$ valeurs pour n $^{3\ 2 + n}$, la solution peut être déduite.)

Il est clair que les érudits babyloniens connaissaient le THÉORÈME DE PYTHAGORE , bien qu'ils n'aient écrit aucune preuve générale du résultat. Par exemple, une tablette maintenant hébergée au British Museum, fournit le problème et la solution suivants :

Machine Translated by Google

Si la largeur d'un rectangle est de quatre unités et la longueur de sa diagonale est de cinq unités, quelle est sa largeur ?

Quatre fois quatre font 16 et cinq fois cinq font 25. Soustrayez 16 de 25 et il en reste neuf.

Combien de temps est égal à neuf ? Trois fois trois font neuf. La largeur est de trois.

Les Babyloniens ont utilisé le théorème de Pythagore pour calculer la longueur diagonale d'un carré, et ils ont trouvé une approximation de la racine carrée de deux décimales précises à cinq décimales. (On pense qu'ils ont utilisé une méthode analogue à la MÉTHODE DE HERON pour ce faire.) Les érudits babyloniens étaient également intéressés par l'approximation des aires et des volumes de diverses formes communes en utilisant des techniques qui invoquaient souvent le théorème de Pythagore.

Le plus remarquable est une tablette qui répertorie 15 grands TRIPLES PYTHAGORIENS. Comme il n'y a aucun besoin pratique apparent d'énumérer ces triplets, cela suggère fortement que les Babyloniens appréciaient effectivement les mathématiques pour elles-mêmes.

Voir aussi VALEUR DE BASE D'UN SYSTÈME DE NOMBRE.

Banach, Stefan (1892–1945) Analyse polonaise , Topol ogie Né le 30 mars 1892 à Cracovie, aujourd'hui en Pologne, Stefan Banach est connu pour son travail fondateur en ANALYSE et pour avoir généralisé la notion d' ESPACE VECTORIEL à une théorie générale d'un espace de fonctions. Ce travail fondamental permet aux mathématiciens d'aujourd'hui de développer une théorie des SÉRIES DE FOURIER, en quelque sorte, dans des cadres très abstraits. On se souvient également de Banach pour son travail menant au célèbre paradoxe Banach-Tarski qui surgit dans l'étude de la SURFACE et du volume.

Banach a commencé sa carrière universitaire avec un diplôme universitaire en ingénierie de l'Université technique de Lvov. Ses plans académiques ont cependant été interrompus avec l'avènement de la Première Guerre mondiale. Pendant ce temps, Banach a été contraint de travailler à la construction de routes, bien qu'il ait réussi à trouver le temps d'enseigner également dans les écoles locales de Cracovie pendant cette période. Peu de temps après la guerre, Banach a rejoint un groupe de discussion sur les mathématiques à Lvov et a rapidement impressionné les mathématiciens par ses capacités à résoudre des problèmes mathématiques. Moins d'une semaine après avoir rejoint le groupe, Banach avait rédigé un document de recherche co-écrit sur le thème de la théorie de la mesure, une théorie qui généralise le concept de zone. Banach a continué à produire des résultats importants dans ce domaine à un rythme extrêmement rapide par la suite.

Banach s'est vu offrir une chaire de lecture à l'Université technique de Lvov en 1920 et s'est rapidement mis à travailler sur une thèse de doctorat. Bien qu'il n'ait aucun diplôme universitaire officiel en mathématiques, Banach a obtenu un doctorat en 1922 de l'Université Jan Kazimierz de Lvov.

Les contributions de Banach aux mathématiques ont été importantes. Ses travaux généralisés sur les séries de Fourier ont fondé une branche des mathématiques aujourd'hui appelée analyse fonctionnelle. Il a des liens avec les domaines de la théorie de la mesure, de l'intégration et de la THÉORIE DES ENSEMBLES. Lui et son collègue Alfred Tarski ont présenté leur célèbre résultat paradoxal en 1926 dans leur article "Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent". Son article de 1932, "Théorie des opérations linéaires", qui développe la notion d' ESPACE VECTORIEL normé (c'est-à-dire un espace vectoriel avec une notion de longueur attachée à ses vecteurs), est considéré comme son ouvrage le plus influent. . En plus de mener des recherches en mathématiques, Banach a également écrit des textes d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie pour les élèves du secondaire.

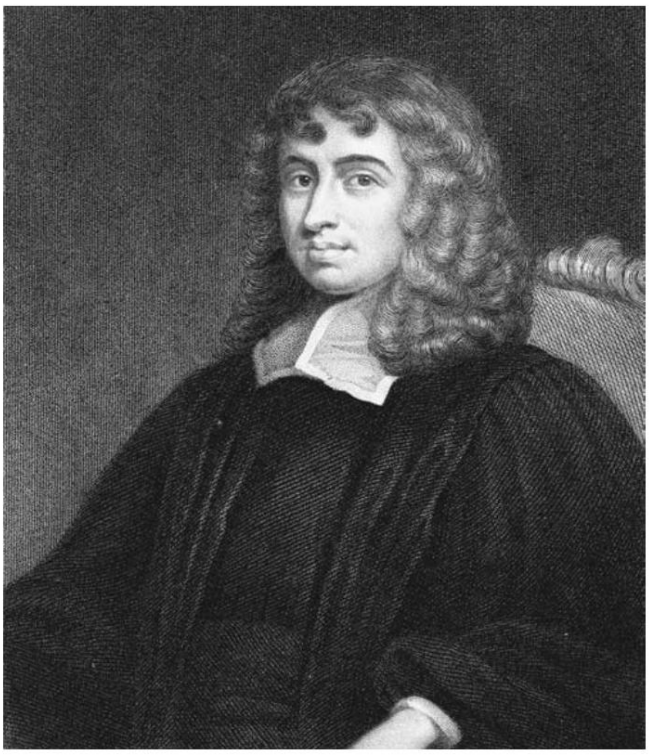
En 1939, Banach fut élu président de la Société mathématique polonaise. Banach a été autorisé à conserver son poste universitaire pendant l'occupation soviétique plus tard cette année-là, mais les conditions ont changé avec l'invasion nazie de 1941. De nombreux universitaires polonais ont été assassinés, mais Banach a survécu, bien qu'il ait été contraint de travailler dans un laboratoire allemand de maladies infectieuses, chargé de nourrir et d'entretenir des colonies de poux. Il y resta jusqu'en juin 1944, mais il tomba gravement malade au moment où les troupes soviétiques reprirent Lvov. Banach est mort d'un cancer du poumon le 31 août 1945.

Le nom de Banach reste attaché au type d'espace vectoriel qu'il a inventé, et les recherches dans ce domaine de l'analyse fonctionnelle se poursuivent aujourd'hui. La théorie a de profondes applications en physique théorique, notamment en mécanique quantique.

diagramme à barres (histogramme) Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

Barrow, Isaac (1630–1677) British Calculus, Theol ogy Né à Londres, Angleterre (la date de naissance exacte est

Machine Translated by Google



Isaac Barrow, un mathématicien du 17ème siècle, est connu principalement pour l'inspiration qu'il a fourni aux autres dans le développement de la théorie du calcul. Il a peut-être été le premier érudit à reconnaître et à comprendre la signification du théorème fondamental du calcul. (Photo gracieuseté de ARPL/Topham/ The Image Works)

inconnu) Isaac Barrow est connu en mathématiques pour son recueil de notes de cours Lectiones geometri cae (Conférences géométriques), publié en 1670, dans lequel il décrit une méthode pour trouver des tangentes à des courbes similaire à celle utilisée aujourd'hui dans CALCUL DIFFÉRENTIEL. Barrow a peut-être aussi été le premier à se rendre compte que le problème de trouver des tangentes aux courbes est le problème inverse de trouver des aires sous les courbes. (C'est LE THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL.) Les conférences sur lesquelles ses notes étaient basées étaient extrêmement influentes. Ils ont fourni à SIR ISAAC NEWTON, qui a assisté aux conférences et eu de nombreuses discussions privées avec Barrow, un point de départ pour son développement de CALCULUS.

Barrow est diplômé du Trinity College, Cam bridge, avec une maîtrise en 1652, mais n'était pas satisfait du niveau d'enseignement des mathématiques qu'il avait reçu. Après avoir quitté le collège, Barrow lui a appris la GÉOMÉTRIE et a publié une édition simplifiée de LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE en 1655. Il devint professeur de géométrie au Gresham College de Londres en 1662 et fut élu l'un des 150 premiers boursiers de la nouvelle ROYAL SOCIETY en 1663. Il retourna à Cambridge la même année pour occuper le poste. de la chaire Lucasian de mathématiques, au Trinity College, et a travaillé dur pour améliorer les normes de l'enseignement des mathématiques et l'intérêt pour la recherche mathématique à Cambridge. Dans ce but, Barrow a donné une série de conférences sur les thèmes de l'optique, de la géométrie, de la THÉORIE DES NOMBRE et de la nature du temps et de l'espace. Ses discussions sur la géométrie se sont avérées très novatrices et d'une importance fondamentale pour la nouvelle perspective qu'elles offraient. Newton a conseillé à Barrow de publier les notes.

En 1669, Barrow a démissionné de la chaire lucasienne pour permettre à Newton de prendre le relais, et il n'a fait aucun autre travail mathématique. Il mourut à Londres, en Angleterre, le 4 mai 1677, d'une fièvre maligne. L'influence de Barrow sur les mathématiques modernes est oblique. Son effet sur le développement du sujet réside principalement dans l'inspiration qu'il a fournie aux autres.

base d'un logarithme Voir LOGARITHME.

base d'une exponentielle Voir EXPOSANT ; EXPOSER FONCTION TIAL.

base d'un système numérique (base, échelle d'un système numérique) Le nombre de symboles différents utilisés, peut-être en combinaison, pour représenter tous les nombres est appelé la base du système numérique utilisé. Par exemple, nous utilisons aujourd'hui les dix symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 pour désigner tous les nombres, en utilisant la position de ces chiffres dans une combinaison donnée pour désigner grandes valeurs. Ainsi, nous utilisons un système de numération en base 10 (également appelé système de représentation décimale). Nous utilisons également un système de valeur de position pour donner un sens à l'utilisation répétée de symboles. Lorsque nous écrivons 8 407, par exemple, nous entendons huit quantités de 1 000 (103), quatre quantités de 100 (102) et sept unités simple Le placement de chaque CHIFFRE est donc important : le nombre de places à partir de la droite où se trouve un chiffre détermine la puissance de 10 considérée. Ainsi, les nombres 8, 80, 800 et 8 000, par exemple, représentent tous des quantités différentes. (Le système des CHIFFRES ROMAINS, par exemple, n'est pas un système de valeur de position.)

Machine Translated by Google

Pour tout nombre entier positif b, on peut créer un système de notation de la valeur de position de cette base comme suit :

Ecrire un nombre donné n sous la forme d'une somme des puissances de b : $1\ n = akb^{k} + ak–1\ b\ k– + \cdots + a2b^{2} + a1b + a0$ avec chaque nombre ai satisfaisant $0 \le ai < b$. Alors la représentation en base b de n est le chiffre k quantité ak ak–1…a2a1a0 . Une telle représentation utilise uniquement les symboles 0, 1, 2,…, b – 1.

Par exemple, pour écrire le nombre 18 en base quatre— en utilisant les symboles 0, 1, 2 et 3 - observez que $18 = 1 \times 4^{2} + 0 \times 4 + 2 \times 1$, donnant la représentation en base 4 : 102. Dans le sens inverse, si 5 142 est la représentation en base 6 d'un nombre n, alors n est le nombre $5 \times 6^{3} + 1 \times 6^{2} + 4 \times 6 + 2 \times 1 = 1\,142$.

On peut aussi faire usage des puissances négatives du quantité de base b. Par exemple, en utilisant un point décimal pour puissances positives et négatives séparées de dix, le nombre 312,407, par exemple, représente la quantité : $3 \times 102 + 1 \times 10 + 2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{\text{dix}} + 0 \times \frac{1}{102} + 7 \times \frac{1}{103}$. En base 4, le nombre 33,22 est la quantité $3 \times 4 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4^{2}} = 15 + \frac{2}{4} + \frac{2}{16}$, qui est de 15,625 en base 10.

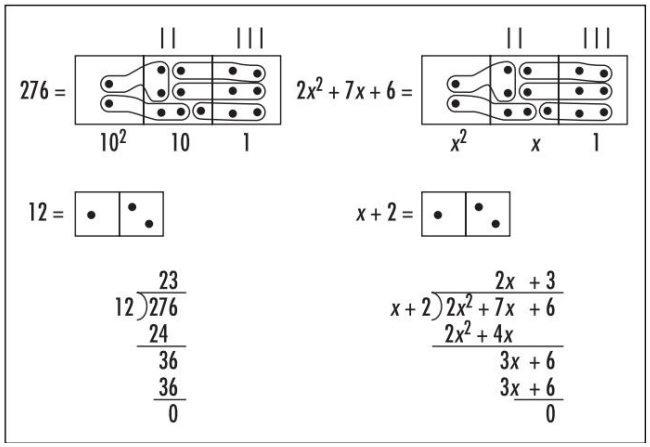
Le tableau suivant donne les noms des systèmes de numération des valeurs de position qui utilisent différentes valeurs de base b. Les Babyloniens des temps anciens utilisaient un sexagésimal système, et les Mayas du premier millénaire utilisaient un système proche d'être purement vigésimal.

base b	système de numération
2	Binaire
3	Ternaire
4	Quaternaire
5	Quinaire
6	Sénaire
7	Septénaire
8	Octale
9	Nonaire
10	Décimal
11	Undénaire
12	Duodécimal
16	Hexadécimal
20	Vigésimal
60	Sexagésimal

La représentation des nombres peut être bien représentée à l'aide d'un simple AUTOMATE appelée machine à base de nombres. Commençant par une rangée de cases s'étendant à l'infini vers la gauche, on place dans case la plus à droite un nombre fini de centimes. L'automate redistribue alors les sous selon un préréglage règle. Une machine « 1 ← 2 », par exemple, remplace une paire de centimes dans une boîte avec un seul centime dans la boîte une place à gauche. Ainsi, par exemple, six sous placé dans la machine 1 ← 2 "feu" quatre fois pour donner une distribution finale qui peut être lue comme "1 1 0". Ce résultat est le nombre six écrit sous la forme d'un NOMBRE BINAIRE et cette machine convertit tous les nombres en leur représentations en base deux. (Le diagramme dans l'entrée pour automate illustre cela.) Une machine 1 ← 3 donne représentations de base trois, et une machine 1 ← 10 donne les représentations ordinaires en base dix.

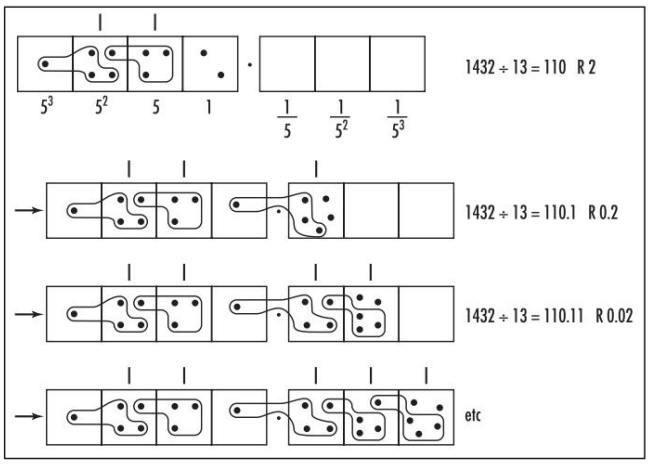
Division longue

Le processus de division longue en ARITHMÉTIQUE peut être expliqué à l'aide d'une machine à base de nombres. Comme un exemple, utilisons la machine 1 ← 10 pour diviser le nombre 276 par 12. Constatant que 276 sous placés dans la machine 1 ← 10 donne un diagramme avec deux centimes en position 100, sept centimes en position 10 et six centimes en position des unités, et que 12 pennies apparaît comme un penny dans une boîte avec deux pennies dans la boîte à sa droite, pour diviser 276 par 12, un doit simplement chercher des « groupes de 12 » dans le diagramme de 276 centimes et compter le nombre de groupes que l'on trouve.



Division longue base dix

Machine Translated by Google



Division longue base cinq

Remarquez que nous trouvons deux groupes de 12 aux dizaines position (c'est-à-dire deux groupes de 120) et trois groupes de 12 à la position des unités. Ainsi : 276 ÷ 12 = 23. Le l'algorithme standard enseigné aux écoliers n'est rien plus qu'un système d'enregistrement pour ce processus de recherche de groupes de douze. Remarquez aussi qu'il n'est pas nécessaire connaître le type de machine, c'est-à-dire la base de la système de numération dans lequel on travaille pour calculer un problème de division longue. Si nous écrivons simplement le nombre de base comme x, et travailler avec une machine $1 \leftarrow x$, alors le même calcul fournit une méthode pour diviser des polynômes. Dans notre exemple, nous voyons que :

$$(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$$

Ainsi, la division de polynômes peut être considérée comme un calcul de la division longue. Il y a une difficulté technique à cela : un polynôme peut avoir des coefficients négatifs, et chaque coefficient négatif correspondrait à un nombre négatif de sous dans une cellule. Si l'on est disposé à accepter de telles quantités, alors la base numérique le modèle de la machine continue de fonctionner. (Remarque, dans ce modèle étendu, que l'on peut insérer dans n'importe quelle cellule un nombre égal de centimes positifs et négatifs sans changer le système. En effet, il pourrait être nécessaire de faites ceci afin de trouver les groupes de sous désirés.)

Le processus de division longue pourrait produire non zéro reste. Par exemple, en base 5, en divisant 1432 par 13 donne la réponse 110 avec un reste de 2 unités. (En base 10, cela donne : 242 ÷ 8 = 30 avec un reste de 2.) Si l'on est prêt à travailler avec des puissances de cinq, et « éteindre » un groupe de cinq centimes, on peut continuer le long processus de division pour calculer, en base 5, que 1432 ÷ 13 = 110,1111…

Voir aussi MATHÉMATIQUES BABYLONIENNES ; NOMBRES BINAIRES ; CHIFFRE; MATHÉMATIQUES MAYA; MULTIPLI EMBARQUÉ CATION; ZÉRO.

base d'un polygone/polyèdre La base d'un triangle, ou de tout POLYGONE, est le côté le plus bas de la figure, généralement dessiné comme un bord horizontal parallèle au bas de la page. Bien entendu d'autres arêtes peuvent être considérées comme la base si l'on réoriente la figure. Le socle d'un Le POLYÈDRE, tel qu'un cube ou une pyramide, est la FACE la plus basse de la figure. C'est le visage sur lequel la figure tiendrait s'il était placé sur une table.

Le point culminant d'une figure géométrique opposée la base est appelée le SOMMEIL de la figure, et la distance de la base au sommet est appelée la hauteur de la figure.

base Voir LINÉAIREMENT DÉPENDANT ET INDÉPENDANT.

Bayes, Rev. Thomas (1702–1761) Anglais Probabilité, Théologie Né à Londres, Angleterre, (l'exact date de sa naissance n'est pas connue), on se souvient surtout du théologien et mathématicien, le révérend Thomas Bayes pour son article influent « An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances », publié à titre posthume en 1763, qui énonce les principes fondamentaux de Théorie des PROBABILITÉS . Bayes a développé des techniques et des approches innovantes dans la théorie de l'inférence statistique, dont beaucoup ont été jugées controversées à l'époque. temps. Son essai a suscité bien d'autres recherches dans le domaine et était profondément influent. Le travail aussi contient le célèbre théorème qui porte aujourd'hui son nom.

Un ministre ordonné qui a servi la communauté de Tunbridge Wells, Kent, Angleterre, Bayes a également poursuivi mathématiques comme un intérêt extérieur. En ce qui concerne les historiens peut déterminer, il n'a publié que deux ouvrages au cours de sa durée de vie. L'un était un essai théologique de 1731 intitulé « La bienveillance divine, ou une tentative de prouver que le Fin principale de la Providence divine et du gouvernement est le bonheur de ses créatures. L'autre était un morceau mathématique qu'il a publié anonymement dans 1736, « Introduction à la doctrine des fluxions, et une

Machine Translated by Google

Défense des mathématiciens contre les objections de l'auteur de L'analyste », défendant la logique fondements de la nouvelle invention de SIR ISAAC NEWTON CALCUL. Malgré le manque apparent de travaux mathématiques publiés, Bayes a néanmoins été élu membre de la prestigieuse ROYAL SOCIETY académique en 1742.

Bayes se retira du ministère en 1752 mais est resté à Tunbridge Wells jusqu'à sa mort en avril 17, 1761. Son ami, Richard Price, a découvert le article désormais célèbre sur la théorie des probabilités parmi ses effets personnels et l'a soumis pour publication. Une seconde article, "Une lettre sur les séries asymptotique de Bayes à John Canton », un sur les séries asymptotique, a également été publié après la mort de Bayes. L'approche théorique de la statistique inférentielle proposée par Bayes reste un outil actif domaine de la recherche aujourd'hui.

Voir aussi THÉORÈME DE BAYES ; STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

Théorème de Bayes Dans son article de 1763, publié à titre posthume, REV. THOMAS BAYES a établi un résultat fondamental amusant, maintenant appelé théorème de Bayes, selon lequel exprime la PROBABILITÉ CONDITIONNELLE P(A|B) d'un l'événement A se produit étant donné que l'événement B a déjà s'est produit en termes de probabilité conditionnelle inverse P(B|A). Précisément:

$$P(A|B) = P(B|A)\,P(A)\,/\,P(B)$$

Cette formule se démontre facilement en notant que

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \quad \text{et} \quad P(B|A) = P(A \cap B)/P(A).$$

Plus généralement, supposons que B1 , B2 ,..., Bn sont mutuellement ensemble exclusif et exhaustif d'événements, c'est-à-dire un ensemble événements sans chevauchement couvrant l'ensemble de l'ÉCHANTILLON ESPACE. Supposons aussi qu'on nous ait dit que un autre événement A s'est produit. Alors la probabilité que l'événement Bi s'est également produit est donné par :

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Pour illustrer : supposons que le sac 1 contient cinq boules rouges et deux boules blanches, et le sac 2 contient sept boules rouges et quatre boules blanches. Si un sac est sélectionné au hasard et une boule choisie parmi elle se trouve être rouge, quel est le probabilité qu'il provienne du sac 1 ?

Soit A l'événement « une boule rouge est choisie » et B1 et B2 les événements "une balle est sélectionnée dans le sac 1 / sac 2", respectivement. Alors P(B1) = 1/2 = P(B2), P(A|B1) = 5/7, et P(A|B2) = 7/11. Ainsi la probabilité que nous recherchons, P(B1|A), est donnée par :

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{7} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{11} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{55}{104}$$

relèvement L' ANGLE entre la route d'un navire et la direction du nord s'appelle le relèvement du navire. Le l'angle est mesuré en degrés dans le sens des aiguilles d'une montre du nord et est généralement exprimé sous la forme d'un nombre à trois chiffres nombre. Par exemple, un navire se dirigeant directement vers l'est a un relèvement de 090 degrés, et un cap sud-ouest a un relèvement de 225 degrés.

Le mot « palier » est également utilisé pour la mesure de angle par rapport au nord auquel un objet est aperçu. Pour exemple, un membre d'équipage à bord d'un navire apercevant un phare directement à l'ouest dira que le phare a portant 270 degrés.

Famille Bernoulli Aucune famille dans l'histoire des mathématiques n'a produit autant de mathématiciens renommés que la famille Bernoulli de Bâle, en Suisse. La famille disque commence avec deux frères, Jacob Bernoulli et Johann (Jean) Bernoulli, respectivement cinquième et dixième enfants de Nicolas Bernoulli (1623-1708).

Jacob (27 décembre 1654-16 août 1705) est noté pour son travail sur CALCUL et PROBABILITÉ la théorie, étant l'un des premiers mathématiciens à bien comprendre l'utilité et la puissance de l'œuvre nouvellement publiée du grand WILHELM GOTTFRIED LEIB NIZ (1646-1716). Jacob a appliqué le calcul au étude des courbes, notamment à la spirale logarithmique et le BRACHISTOCHRONE, et a été le premier à utiliser COORDONNÉES POLAIRES en 1691. Il a également écrit le premier texte axé sur la théorie des probabilités Ars con jectandi (L'art de la conjecture), qui a été publié

Machine Translated by Google

à titre posthume en 1713. Les NOMBRES DE BERNOULLI apparaissent également, pour la première fois, dans ce texte. Jacob a occupé la chaire de mathématiques à l'Université de Bâle de 1687 jusqu'à sa mort.

Johann (17 juillet 1667 - 1er janvier 1748) est également connu pour ses travaux sur le calcul. Reconnu comme un expert dans le domaine, Johann fut embauché par le noble français MARQUIS DE GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE L'HÔPITAL (1661-1704) pour lui expliquer la nouvelle théorie, d'abord par le biais de séances de tutorat formelles à Paris, puis par correspondance lorsque Johann retourna plus tard à Bâle. L'Hôpital a publié le contenu des lettres dans un manuel de 1696 Analyse des infiniment petits (Analyse avec des quantités infiniment petites), mais a donné peu de reconnaissance à Johann. La fameuse règle qui porte désormais son nom, LA RÈGLE DE L'HÔPITAL , est due à Johann. Johann a succédé à son frère à la chaire de l'Université de Bâle.

Les deux frères, Jacob et Johann, travaillaient sur des problèmes similaires, et entretenaient chacun un échange d'idées presque constant avec Leibniz. Cependant, la relation entre les deux frères et sœurs n'était pas amicale et ils se critiquaient souvent publiquement le travail de l'autre.

Nicolaus (I) Bernoulli (21 octobre 1687 - 29 novembre 1759), neveu de Jacob et Johann, a également acquis une certaine renommée en mathématiques. Il a travaillé sur des problèmes de GÉOMÉTRIE, d'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, de SÉRIES infinies et de probabilités. Il a occupé la chaire de mathématiques à l'Université de Padoue, autrefois occupée par GALILEO GALILEI (1564-1642).

Johann Bernoulli avait trois fils, tous eux-mêmes devenus d'éminents mathématiciens :

Nicolaus (II) Bernoulli (6 février 1695 – 31 juillet 1726) a écrit sur les courbes, les équations différentielles et la théorie des probabilités. Il mourut – par noyade en nageant – seulement huit mois après avoir accepté une nomination prestigieuse à l'Académie de St. Petersberg.

Daniel Bernoulli (8 février 1700-17 mars 1782), le plus célèbre des trois fils, est connu pour son texte de 1738 Hydrodynamica (Hydrodynamique), qui a jeté les bases de la discipline moderne de l'hydrodynamique. (Le père de Daniel, Johann, jaloux du succès de son fils, publia son propre texte sur l'hydrodynamique en 1739 mais y plaça la date de publication de 1732 et accusa son fils de plagiat.) Daniel travailla également sur les mathématiques des cordes vibrantes, la cinétique théorie des gaz, théorie des probabilités et équations aux dérivées partielles. Il a reçu pas moins de 10 fois le Grand Prix de l'Académie de Paris.

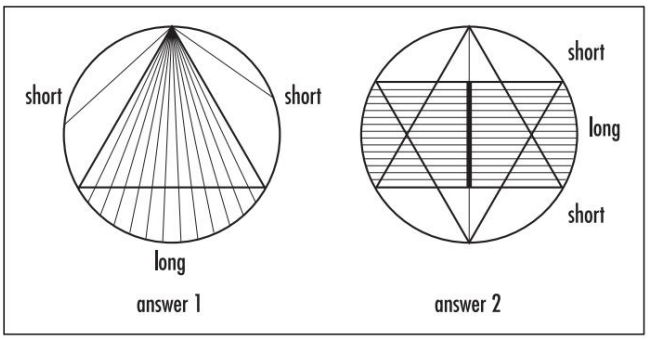
Johann (II) Bernoulli (28 mai 1710 - 17 juillet 1790) a étudié les mathématiques du flux de chaleur et de la lumière. Il reçoit quatre fois le Grand Prix de l'Académie de Paris et succède à son père à la chaire de l'Université de Bâle en 1743.

Johann (II) Bernoulli eut trois fils, dont deux, Johann (III) Bernoulli (4 novembre 1744 - 13 juillet 1807) et Jacob (II) Bernoulli (17 octobre 1759 - 15 août 1789), travaillèrent en mathématiques . Johann (III) a étudié l'astronomie et les probabilités, et a écrit sur les décimales récurrentes et la théorie des équations. Il était professeur de mathématiques à l'Université de Berlin à l'âge de 19 ans. Jacob (II) Bernoulli a écrit des ouvrages sur les mathématiques de l'élasticité, de l'hydrostatique et de la balistique. Il a été professeur de mathématiques à l'Académie de Saint-Pétersbourg, mais, comme son oncle, s'est noyé à l'âge de 29 ans alors qu'il nageait dans la rivière Neva.

Les membres de la famille Bernoulli ont eu un effet profond sur le développement précoce de la théorie des probabilités, du calcul et du domaine de la mécanique du continuum. De nombreux concepts (tels que les nombres de Bernoulli, une distribution de probabilité, une équation différentielle particulière) sont nommés en leur honneur.

Nombres de Bernoulli Voir SOMMES DES POUVOIRS.

Paradoxe de Bertrand mathématicien français Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) a lancé le défi suivant :



Répondre au paradoxe de Bertrand

Machine Translated by Google

Imaginez un TRIANGLE équilatéral dessiné à l'intérieur d'un CERCLE. Trouvez la PROBABILITÉ qu'un ACCORD choisi au hasard soit plus long que la longueur du côté du triangle.

Il y a deux réponses possible:

1. Une fois qu'un accord est dessiné, nous pouvons toujours faire pivoter l'image du cercle de sorte qu'une extrémité de l'accord sélectionné soit placée en haut du cercle. Il est alors clair que la longueur de la corde sera supérieure à la longueur du côté du triangle si l'autre extrémité se situe dans le tiers médian du périmètre du cercle. Les chances que cela se produise sont de 1/3, fournissant la réponse au problème.
2. En faisant pivoter l'image du cercle et de la corde sélectionnée, on peut également supposer que la corde choisie est horizontale. Si la corde croise la ligne continue indiquée, elle sera alors plus longue que la longueur du côté du triangle. On observe que ce trait plein est la moitié de la longueur du diamètre. Ainsi, les chances qu'une corde soit plus longue que la longueur latérale du triangle sont de 1/2.

Étonnamment, les deux lignes de raisonnement sont mathématiquement correctes. Il y a là un PARADOXE : la réponse ne peut pas être simultanément 1/3 et 1/2.

Le problème ici réside dans la définition de ce que nous entendons par "choisir un accord au hasard". Il existe de nombreuses manières différentes de le faire : on peut faire tourner une bouteille au centre du cercle pour sélectionner des points sur le périmètre à connecter avec un accord, ou on peut faire rouler un balai sur un cercle dessiné sur le sol, ou peut-être même laissez tomber un fil d'une hauteur au-dessus du cercle et voyez où il atterrit. Chaque approche du « hasard » pourrait (et en fait conduit) à sa propre réponse distincte. Ce paradoxe montre qu'il faut prendre un soin extrême pour poser des problèmes significatifs en théorie des probabilités. Il est très difficile de donner une définition précise du « hasard ».

Bh–askara II (Bhaskaracharya) (1114–1185) Algèbre indienne, arithmétique Né à Vijayapura, en Inde, Bh–as kara (souvent appelé Bh–askara II pour le distinguer du mathématicien du septième siècle du même nom) est considéré comme le mathématicien indien le plus éminent du XIIe siècle. Il révisa et continua les études du grand BRAHMAGUPTA, apportant des corrections et combler les lacunes de son travail, et a atteint un niveau de maîtrise de l'ARITHMÉTIQUE et de l'ALGÈBRE qui n'a pas été égalé par un érudit européen pendant plusieurs siècles à venir. Bh-askara a écrit deux traités mathématiques influents: Lilavati (La belle), sur le thème de l'arithmétique, et le Bijaganita (Arithmétique des graines) sur l'algèbre.

Bh–askara dirigeait l'observatoire astronomique d'Ujjain, le centre de recherche mathématique le plus important du pays à l'époque. Bien qu'une grande partie des mathématiques indiennes ait été motivée par des problèmes et des défis en astronomie, les écrits de Bh-askara montrent un vif intérêt pour le développement des mathématiques pour leur propre bien. Par exemple, le texte Lilavati, composé de 13 chapitres, commence par des discussions approfondies sur l'arithmétique et la géométrie avant de passer aux sujets des SÉQUENCES et des SÉRIES, des fractions, de l'INTÉRÊT, de la géométrie plane et solide, des cadrans solaires, des PERMUTATIONS et des COMBINAISONS, et des ÉQUATIONS DIOPHANTINES . (comme on les appelle aujourd'hui). Par exemple, Bh-askara montre que l'équation 195x = 221y + 65 (qu'il a exprimée uniquement en mots) a une infinité de solutions entières positives, commençant par x = 6, y = 5, et x = 23, y = 20, et alors x = 40 et y = 35. (Les valeurs x augmentent par pas de 17 et les valeurs y par pas de 15.)

Dans sa pièce Bijaganita, Bh–askara développe l'arithmétique des NOMBRES NÉGATIFS, résout des équations quadratiques d'une ou peut-être plusieurs inconnues et développe des méthodes d'extraction des RACINES CARRÉES et CUBE des quantités. Il poursuit les discussions de Brahmagupta sur la nature et les propriétés du nombre ZÉRO et l'utilisation des nombres négatifs en arithmétique. (Il a noté le négatif d'un nombre en plaçant un point au-dessus du chiffre.) Bh-askara souligne correctement qu'une quantité divisée par zéro ne produit pas zéro (comme Brahmagupta l'a affirmé) et a suggéré à la place que a/0 devrait être considéré comme infini dans valeur. Bh–askara résout des équations compliquées à plusieurs inconnues et développe des formules qui l'ont conduit au bord de la découverte de la célèbre formule QUADRATIQUE .

Bh-askara a également écrit un certain nombre de textes importants en astronomie mathématique et a fait des progrès significatifs dans le développement de la TRIGONOMÉTRIE, amenant le sujet au-delà du niveau d'un simple outil de calcul pour les astronomes. Bh–askara a découvert, par exemple, les fameuses formules d'addition du sinus :

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

Machine Translated by Google

Cependant, comme c'était la tradition à l'époque, Bh-askara n'a pas expliqué comment il avait obtenu ses résultats. On suppose que les astronomes et mathématiciens indiens ont jugé nécessaire de dissimuler leurs méthodes concernant les preuves et les dérivations comme des "secrets commerciaux" de l'art.

Les réalisations de Bh-askara ont été vénérées pendant de nombreux siècles. En 1817, HJ Colebrook a fourni des traductions anglaises de Lilavati et de Bijaganita dans son texte Algebra with Arithmetic and Mensuration.

Biais Une erreur systématique dans une étude statistique s'appelle un biais. Si l'échantillon de l'étude est important, les erreurs produites par le hasard ont tendance à s'annuler, mais pas celles dues à un biais. Par exemple, une enquête sur les habitudes d'achat de la population générale menée dans un centre commercial est susceptible d'être biaisée en faveur des personnes qui achètent principalement dans les centres commerciaux, omettant les résultats des personnes qui achètent à domicile via des catalogues et des services en ligne. Ceci est similaire à un dé chargé, qui est biaisé pour produire un résultat particulier avec une probabilité supérieure à un sixième.

Étonnamment, les centimes américains sont biaisés. Si vous équilibrez délicatement 30 sous sur le bord et heurtez la surface sur laquelle ils se tiennent, la plupart tomberont tête haute.
Si, d'un autre côté, vous faites tourner 30 sous et que vous les laissez tous s'arrêter naturellement, alors la plupart tomberont pile.

Voir aussi POPULATION ET ÉCHANTILLON.

biconditionnel En LOGIQUE FORMELLE, un énoncé de la forme « p si, et seulement si, q » est appelé un énoncé biconditionnel. Par exemple, "Un triangle est équilatéral si, et seulement si, il est équiangulaire" est un énoncé biconditionnel. Une déclaration biconditionnelle est souvent abrégée en p ssi q et est écrite en symboles comme p ↔ q. Il est équivalent à l'énoncé composé « p implique q, et q implique p » composé de deux énoncés CONDITIONNELS .

Les valeurs de vérité de p et q doivent correspondre pour que l'énoncé biconditionnel dans son ensemble soit vrai. Il a donc la TABLE DE VÉRITÉ suivante :

pqp ↔q
TTT
T FF
F TF
F FT

Les deux énoncés p et q sont dits logiquement équivalents si l'énoncé biconditionnel p ↔ q est vrai.

Voir aussi ARGUMENT.

bijection Voir FONCTION.

bimodal Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

nombres binaires (nombres de base 2) Tout nombre entier peut être écrit comme une somme de nombres distincts de la liste des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … (Soustraire simplement la plus grande puissance de 2 de moins par rapport au nombre donné et répétez le processus pour le reste obtenu.) Par exemple, nous avons :

$$89 = 64 + 25 = 64 + 16 + 9 = 64 + 16 + 8 + 1$$

Aucune puissance de 2 n'apparaîtra deux fois, car deux copies de la même puissance de 2 s'additionnent à la puissance suivante dans la liste. De plus, la somme des puissances de 2 produites pour un nombre donné est unique. En utilisant le symbole 1 pour indiquer qu'une puissance particulière de 2 est utilisée et 0 pour indiquer qu'elle ne l'est pas, on peut alors coder n'importe quel nombre donné comme une séquence de 0 et de 1 selon les puissances de 2 qui apparaissent dans sa présentation. Par exemple, pour le nombre 89, le nombre 64 est utilisé, mais 32 ne l'est pas. Le chiffre 16 apparaît, ainsi que le 8, mais pas le 4 ni le 2. Enfin, le chiffre 1 est également utilisé. Nous écrivons:

$$89 = 1011001_2$$

(Il est d'usage de travailler avec la grande puissance de 2 à gauche.) Comme autres exemples, on voit que le code 10001011 correspond au nombre 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 439, et le code 10111 au nombre 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 23. Les nombres représentés selon cette méthode sont appelés nombres binaires. Ces représentations correspondent précisément aux représentations faites en choisissant 2 comme BASE D'UN SYSTÈME DE NOMBRE.

Si l'on introduit une virgule décimale dans le système et que l'on interprète les positions à droite de la virgule comme des puissances négatives de 2, alors les quantités fractionnaires peuvent aussi être représentées en notation binaire. Par exemple, $0{,}1012$ représente la quantité $2^{-1} + 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, et $0.010101\ldots_2$ la quantité $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$, qui,

Machine Translated by Google

selon la formule GEOMETRIC SERIES , est le

1 fraction . 3

Toute fraction DYADIC a un développement décimal binaire fini. Comme le montre l'étude de ces fractions, le code binaire d'une dyadique peut être intelligemment interprété comme des instructions pour plier une bande de papier afin de produire une marque de pli à l'emplacement de cette fraction dyadique. Le processus de MULTIPLICATION RUSSE utilise également des nombres binaires d'une manière ingénieuse.

Les nombres binaires sont utilisés dans les ordinateurs car les deux chiffres 0 et 1 peuvent être représentés par deux états alternatifs d'un composant (par exemple, « allumé » ou « éteint », ou la présence ou l'absence d'une région magnétisée).

Il convient de mentionner que les puissances de 2 résolvent le fameux « problème des cinq pierres » :

> Une femme possède cinq pierres et une simple balance à deux bras. Elle prétend qu'avec une combinaison de ses pierres, elle peut égaler le poids de n'importe quelle pierre que vous lui tendez et ainsi déterminer son poids. Elle le fait sous réserve que votre pierre pèse un nombre entier de livres et pas plus de 31 livres.
>
> Quels sont les poids de ses cinq pierres ?

Comme chaque nombre de 1 à 31 peut être représenté comme une somme des nombres 1, 2, 4, 8 et 16, la femme a des pierres de poids correspondant à ces cinq premières puissances de 2.

opération binaire Une règle qui affecte à chaque paire d'éléments d'un ensemble un autre élément de ce même ensemble est appelée opération binaire. Par exemple, l'addition de deux nombres est une opération binaire sur l'ensemble des nombres réels, tout comme le produit des deux nombres et la somme des deux nombres au carré. "Union" est une opération binaire sur des ensembles, tout comme "intersection", et CROSS PRODUCT est une opération binaire sur l'ensemble des vecteurs dans trois espaces. Cependant, l'opération de DOT PRODUCT n'est pas une opération binaire sur l'ensemble des vecteurs ; les résultats de cette opération sont des nombres, pas d'autres vecteurs.

Si l'ensemble considéré est noté S, alors une opération binaire sur S peut être considérée comme une FONCTION f de l'ensemble des paires d'éléments de l'ensemble, noté S × S, vers l'ensemble S : $f : S \times S \to S$

Voir aussi FONCTIONNEMENT ; OPÉRATION UNAIRE.

binôme Toute expression algébrique composée de deux termes, comme 2x + y ou a + 1, est appelée un binôme.

Voir aussi MONOMIAL ; POLYNÔME; TRINÔME.

coefficient binomial Voir THÉORÈME BINÔMIAL.

distribution binomiale La distribution qui se produit lorsque l'on considère la question

> Quelle est la probabilité d'obtenir précisément k succès en n passages d'une expérience ?

est appelée distribution binomiale. Ici, nous supposons que l'expérience n'a que deux résultats possibles - "succès ou échec" ou "pile ou face", par exemple - et que la probabilité que l'un ou l'autre se produise ne change pas lorsque l'expérience est répétée. La distribution binomiale elle-même est un tableau de valeurs fournissant les réponses à cette question pour différentes valeurs de k, de k = 0 (aucun succès) à k = n (tous les succès).

Pour illustrer : la chance de lancer une « tête » sur une pièce équitable est de 50 %. Supposons que nous choisissions de lancer la pièce 10 fois. Observez que la probabilité d'atteindre une séquence spécifique de résultats (trois faces, suivies de deux faces, puis une face et quatre faces, pour exemple) est $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}$ (total de 10 fois) $= \left(\frac{1}{2}\right)^{dix} = \frac{1}{1024}$. Dans particulier, la probabilité de ne voir aucun pile (tout pile) est également de 1/1024, tout comme la chance de voir 10 piles d'affilée.

Il y a 10 places pour qu'une seule tête apparaisse parmi 10 lancers, donc les chances de voir précisément une tête sur 10 lancers est $10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{dix} = \frac{dix}{1024}$, à propos 1 pour cent. Selon la théorie des COMBINAISONS, il y a $\binom{dix}{2} = \frac{dix\,!}{2\,8\,!} = 45$ façons pour deux têtes de apparaissent parmi 10 places, et donc la probabilité de voir précisément deux têtes parmi les 10 lancers est $\binom{dix}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{dix} = \frac{45}{1024}$, environ 4,4 pour cent.

En continuant ainsi, nous obtenons la distribution binomiale pour lancer 10 fois une pièce équitable :

Machine Translated by Google

Nombre de têtes	Probabilité	
0	$\binom{10}{0} \times \frac{1}{2} \approx 0{,}1\%$	$\frac{1}{1024}$
1	$\binom{10}{1} \times \frac{1}{2} \approx 1{,}0\%$	$\frac{10}{1024}$
2	$\binom{10}{2} \times \frac{1}{2} \approx 4{,}4\%$	$\frac{45}{1024}$
3	$\binom{10}{3} \times \frac{1}{2} \approx 11{,}7\%$	$\frac{120}{1024}$
4	$\binom{10}{4} \times \frac{1}{2} \approx 20{,}5\%$	$\frac{210}{1024}$
5	$\binom{10}{5} \times \frac{1}{2} \approx 24{,}6\%$	$\frac{252}{1024}$
6	$\binom{10}{6} \times \frac{1}{2} \approx 20{,}5\%$	$\frac{210}{1024}$
7	$\binom{10}{7} \times \frac{1}{2} \approx 11{,}7\%$	$\frac{120}{1024}$
8	$\binom{10}{8} \times \frac{1}{2} \approx 4{,}4\%$	$\frac{45}{1024}$
9	$\binom{10}{9} \times \frac{1}{2} \approx 1{,}0\%$	$\frac{10}{1024}$
10	$\binom{10}{10} \times \frac{1}{2} \approx 0{,}1\%$	$\frac{1}{1024}$

Si la pièce est biaisée - disons que les chances de tomber face ne sont plus que de 1/3 - alors une distribution binomiale différente serait obtenue. Par exemple, la probabilité d'atteindre précisément huit faces sur 10 lancers est maintenant seulement $\binom{10}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0{,}003$, environ 0,3 pour cent.

En général, si p désigne la probabilité de succès, et q = 1 – p est la probabilité d'échec, alors la distribution binomiale est donnée par la formule $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, la probabilité d'atteindre précisément k réussit en n passages de l'expérience. Cette quantité est le ke terme de la formule de développement binomial du THÉORÈME BINÔMIAL :

$$(p+q)^n = \binom{n}{0}p^0q^n + \binom{n}{1}p^1q^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}p^nq^0$$

Ceci explique le nom de la distribution.

La distribution binomiale a une valeur moyenne (EXPECTED VALUE) $\mu = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, qui est égal à np. (Pour voir ça, différencier la formule $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec par rapport à p.) L'écart type est $\sigma = \sqrt{npq}$. (Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIF.)

La distribution de Poisson II

est difficile de calculer la distribution binomiale si n est très grand. Les mathématiciens ont montré que la distribution binomiale peut être bien approchée par la DISTRIBUTION NORMALE pour de grandes valeurs de n, à condition que la valeur p ne soit ni extrêmement petite ni proche de un. Pour ces valeurs gênantes de p, SIMÉON-DENIS POISSON a montré en 1837 que les valeurs $\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$ avec $\mu = np$, pour k = 0, 1, 2, … — fournit une séquence de valeurs proches des valeurs que l'on attendrait de la distribution binomiale. La distribution fournie par ces valeurs approximatives est appelée une distribution de Poisson.

La distribution géométrique

Alternativement, on peut se demander : quelle est la probabilité que le premier succès d'une série d'expériences se produise au nième essai ? Si p est la probabilité de succès et q = 1 – p est la probabilité d'échec, alors on obtient un premier succès à la nième expérience en obtenant d'abord n – 1 échecs puis un succès. La probabilité que cela se produise est : $P(n) = pq^{n-1}$. La distribution donnée par cette séquence de valeurs de probabilité (pour n = 1, 2, 3, …) est appelée la distribution géométrique. Il a une moyenne $\mu = 1/p$ et un écart type $\sigma = \sqrt{q}/p$. La distribution géométrique est un exemple particulier de la distribution de Pascal, qui recherche la probabilité $P_k(n)$ que le kième succès se produise au nième essai.

Voir aussi HISTOIRE DES PROBABILITÉS ET DES STATISTIQUES (essai).

théorème binomial (développement binomial) Les identi 2 et $(x + a) + 3x$ $2\ 2 = x$ 2a + liens $(x + a)^3 + 2xa + a$

Machine Translated by Google

$3xa2 + a^3$ sont utilisés en ALGEBRE élémentaire . Ce sont deux cas particuliers du théorème binomial général qui affirme, pour tout entier positif n, que nous avons :

$$(xa+)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k = x^n + \binom{n}{1} xa^{n-1} + \binom{n}{2} xa^{n-2} 2 \text{ fois} + \cdots + \binom{n}{n-1} xa^{1+n-1} + a^n$$

Ici chaque numéro $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est un COMBINATEUR COEFFICIENT, également appelé coefficient binomial.

Le théorème binomial est prouvé en examinant le processus d' EXPANSION DES CROCHETS, en considérant la quantité (x + a) n comme un produit de n facteurs : (x + a) (x + a)… (x + a). Pour développer les parenthèses, il faut sélectionner une entrée dans chaque jeu de parenthèses ("x" ou "a"), multiplier tous les éléments sélectionnés et additionner tous les résultats possibles. Par exemple, il existe une façon d'obtenir le terme x^n : sélectionnez x dans chaque ensemble de parenthèses. Il existe n manières de créer un terme de la forme $x^{n-1}a$: sélectionnez a dans un seul jeu de parenthèses, et x dans le ensembles restants. En général il y a $\binom{n}{k}$ façons de sélectionner $x^{n-k}a^k$ comme et n – k xs. Ainsi, dans l'expansion, il y aura $\binom{n}{k}$ termes de la forme $x^{n-k}a^k$.

Les coefficients combinatoires sont les entrées de LE TRIANGLE DE PASCAL . Le théorème du binôme appliqué à (1 + 1)n explique pourquoi les éléments de chaque ligne du triangle de Pascal s'additionnent à une puissance de deux :

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

L'application du théorème à (1 – 1)n explique pourquoi la somme alternée des entrées est nulle :

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \pm \cdots - \binom{n}{n}$$

L'application du théorème à (10 + 1)n explique pourquoi les premières lignes du triangle de Pascal ressemblent aux puissances de 11 :

$$11^2 = (10 + 1)^2 = 100 + 2 \times 10 + 1$$
$$11^3 = (10 + 1)^3 = 1\,000 + 3 \times 100 + 3 \times 10 + 1\,114$$
$$= (10 + 1)^4 = 10\,000 + 4 \times 1\,000 + 6 \times 100 + 4 \times 10 + 1$$

(La correspondance resterait valable si nous ne portions pas de chiffres lors du calcul des puissances supérieures de 11.)

Le théorème binomial peut être utilisé pour approximer les puissances élevées des décimales. Par exemple, pour estimer (2.01)10 on observe :

$$2{,}0110 = (2 + 0{,}01)^{10}$$
$$= 210 + 10 \times 2\,9 \times 0{,}01 + 28 + 45 \times 2\,8 \times 0{,}012 + \cdots$$
$$\approx 1024 + 10 \times 512 \times 0{,}01 + 45 \times 256 \times 0{,}00001$$
$$= 1024 + 51{,}2 + 1{,}152$$
$$\approx 1076$$

En 1665, SIR ISAAC NEWTON, co-inventeur du CALCU LUS, découvrit qu'il est possible de développer des quantités de la forme (x + a) r où r n'est pas égal à un nombre entier. Cela conduit au théorème binomial généralisé :

Si r est un nombre réel arbitraire, et |x| < |a|, alors:

$$(x+a)^r = x^r + rax^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2!}xa^{r-2}2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}xa^{r-3}3 + \cdots$$

La formule est établie en calculant la SÉRIE DE TAYLOR de f(x) = (x + a) r à x = 0. En 1826, le mathématicien norvégien NIELS ABEL a prouvé que la série converge pour la plage indiquée. Remarquez que si r est un entier positif, alors le théorème se réduit au théorème binomial ordinaire. (En particulier, à partir de la n + 1ème place, tous les termes de la somme infinie sont nuls.)

Les coefficients combinatoires $\binom{n}{k}$ survenant dans le théorème binomial sont parfois appelés coefficients binomiaux. Les coefficients combinatoires généralisés apparaissent dans les développements de grandeurs du type (x + y + z) n et , Par exemple.
(x + y + z + w) n Voir aussi COMBINAISON.

méthode de bissection (recherche de ligne dichotomique, recherche de ligne binaire) Souvent, il faut trouver une solution à une

Machine Translated by Google

équation de la forme f(x) = 0 même s'il n'y a pas de moyen algébrique clair pour le faire. (Par exemple, il n'y a $\sqrt{x}\sqrt{x+2}$ aucune technique pour résoudre – 5 = 0. La méthode de bissection générale utile $+\sqrt{x+3}$ fournit les moyens de trouver, au moins, des solutions approximatives à de telles équations. La méthode est basée sur le fait que si deux valeurs de fonction f(a) et f(b) d'une FONCTION CONTINUE ont des signes opposés, alors, d'après le THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES, une RACINE de l'équation f(x) = 0 se situe entre a et b. procède comme suit :

1. Trouver deux valeurs a et b (a < b) telles que f(a) et f(b) soient de signes opposés.
2. Fixez m = (a + b)/2, le milieu de l'intervalle, et calculez f(m).
3. Si f(m) = 0, nous avons trouvé un zéro. Sinon, si f(a) et f(m) sont de signes opposés, alors le zéro de f est compris entre a et m ; répétez les étapes 1 et 2 en utilisant ces nouvelles valeurs. Si, au contraire, f(m) et f(b) sont de signes opposés, alors le zéro de f est compris entre m et b ; répétez les étapes 1 et 2 en utilisant ces nouvelles valeurs. Dans les deux cas, un nouvel intervalle contenant le zéro a été construit qui est la moitié de la longueur de l'intervalle d'origine.
4. L'application répétée de cette procédure permet d'atteindre un zéro pour la fonction.

résoudre l'équation f(x) = – 5 = 0, par exemple, notez que $\sqrt{x}\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}$ Pour f(1) = – 0,268 < 0 et f(2) = 0,650 > 0. Un zéro car la fonction est donc comprise entre 1 et 2. Posons m = 1,5. Puisque f(1,5) = 0,217 > 0 on en déduit qu'en fait, le zéro est compris entre 1 et 1,5. Définissez maintenant m = 1,25 pour voir que le zéro se situe entre 1,25 et 1,5.

On peut trouver l'emplacement d'un zéro avec n'importe quel degré de précision souhaité en utilisant cette méthode. Par exemple, répéter cette procédure pour l'exemple ci-dessus six fois de plus montre que l'emplacement du zéro se situe dans l'intervalle [1.269,1.273]. Cela montre qu'à trois chiffres significatifs la valeur du zéro est 1,27.

La méthode de bissection ne parviendra pas à localiser une racine si le graphique de la fonction touche l' axe des x à cet endroit sans le croiser. Des méthodes alternatives, telles que la MÉTHODE DE NEW TON , peuvent être employées pour localiser ces racines.

bissectrice Toute ligne, plan ou courbe qui divise un angle, un segment de ligne ou un objet géométrique en deux parties égales s'appelle une bissectrice. Par exemple, l'équateur est une courbe qui coupe en deux la surface de la TERRE. Une ligne droite qui divise un angle en deux s'appelle une bissectrice d'angle, et toute ligne passant par le POINT MILIEU d'un segment de droite est une bissectrice de segment. Si une bissectrice fait un angle droit avec le segment, on l'appelle une bissectrice perpendiculaire.

Bolyai, János (1802–1860) Géométrie hongroise Né le 15 décembre 1802 à Kolozsvár, Hongrie, aujourd'hui Cluj, Roumanie, János Bolyai est connu pour sa découverte en 1823 de la GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE, dont il publia un récit en 1832. Son travail était indépendant du travail de NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856), qui a publié un compte rendu de la GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE en 1829.

Bolyai a appris les mathématiques par son père Farkas Bolyai, lui-même un mathématicien accompli, et avait maîtrisé CALCUL et la mécanique à l'âge de 13 ans. À 16 ans, il est entré au Royal Engineering College de Vienne et a rejoint le corps du génie de l'armée après avoir obtenu son diplôme quatre ans plus tard. .

Comme beaucoup d'érudits à travers les siècles, Farkas Bolyai avait travaillé, sans succès, sur le défi d'établir le POSTULAT PARALLÈLE comme conséquence logique des quatre autres POSTULATS D'EUCLIDE . Il a conseillé à son fils d'éviter de travailler sur ce problème. Heureusement, János Bolyai n'en a pas tenu compte et s'est sérieusement penché sur la question alors qu'il était officier dans l'armée. Au cours des années 1820 et 1823, Bolyai a préparé un long traité décrivant les détails d'une théorie nouvelle et cohérente de la géométrie pour laquelle le postulat parallèle ne tient pas, réglant ainsi une fois pour toutes le problème qui avait troublé les savants depuis l'époque d'Euclide : le postulat parallèle ne peut pas être prouvé comme une conséquence des postulats restants d'Euclide.

Dans le système de géométrie hyperbolique de Bolyai, il est toujours vrai que, pour tout point P dans le plan, il existe un nombre infini de lignes distinctes passant par ce point, toutes PARALLÈLES à une ligne donnée non passant par P. (En géométrie ordinaire, où le parallèle postulat est vrai, il n'y a qu'une, et une seule, ligne passant par un point donné P parallèle à une direction donnée. C'est l'AXIOME DE PLAYFAIR .) Dans sa nouvelle géométrie, les angles dans les triangles totalisent moins de 180 °, et le rapport des circonférence d'un cercle à son diamètre est supérieur à π.

Machine Translated by Google

Juste avant de publier son travail, Bolyai a appris que le grand CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) avait déjà anticipé une grande partie de cette théorie, même s'il n'avait publié aucun document à ce sujet. Bolyai a décidé de retarder la sortie de son travail. En 1832, il n'a imprimé les détails de sa nouvelle théorie que sous forme de 24 pages annexe à un essai que son père préparait. Plus tard dans 1848, Bolyai découvrit que Lobachevsky avait publié un ouvrage similaire en 1829. Bolyai n'a jamais publié la version complète de son traité original. Son court article de 24 pages a été pratiquement oublié jusqu'à ce que Richard Blatzer a parlé du travail de Bolyai et de Lobachevsky dans son texte de 1867 Elemente der Mathematik (Éléments de mathématiques). À ce moment-là, la pièce de Bolyai a été reconnu comme le premier compte rendu clair des mathématiques d'un nouveau type de géométrie. Il est aujourd'hui considéré comme ayant indépendamment fondé le sujet.

Bolyai est décédé le 27 janvier 1860 à Marosvásárhely, Hongrie (aujourd'hui Tirgu-Mures, Roumanie). En 1945 le L'Université de Cluj a honoré Bolyai en incluant son nom dans son titre. Elle est aujourd'hui connue sous le nom d'université Babes-Bolyai de Cluj.

Bolzano, Bernard Placidus (1781–1848) Tchèque Analyse, Philosophie, Théologie Né le 5 octobre, 1781, à Prague, on se souvient de Bernard Bolzano comme le premier mathématicien à offrir une description rigoureuse de ce que l'on entend par une FONCTION CONTINUE. Le connexe théorème, le THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES , est parfois nommé en son honneur.

Bolzano a étudié la philosophie et les mathématiques à l'Université de Prague et a obtenu un doctorat en mathématiques en 1804. Il a également complété trois ans d'études théologiques en même temps et a été ordonné un prêtre catholique deux jours après avoir reçu son doctorat. Choisir de poursuivre une carrière dans l'enseignement, Bolzano a accepté un poste de chaire de philosophie et religion à l'université plus tard cette année-là.

En 1810, Bolzano a commencé à travailler sur la compréhension de la les fondements des mathématiques et, en particulier, les fondements logiques du calcul nouvellement découvert. Il trouvèrent la notion d'un INFINITESIMAL gênante et tenté de donner une nouvelle base au sujet gratuitement à partir de cette notion. Dans son article de 1817 "Rein Analytis cher Beweis" (Preuve analytique pure), Bolzano a exploré le concept de LIMITE, anticipant les fondamentaux approche d' AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY proposait quatre ans plus tard - et a prouvé la fameuse valeur intermédiaire théorème. Bolzano a également été le premier à fournir un exemple de fonction continue en tout point mais différentiable en aucun point.

Bolzano a également anticipé une grande partie du travail de GEORG CAN TOR sur l'infini. Dans son article de 1850 "Para doxien des Unendlichen" (Paradoxes de l'infini), publié par un étudiant deux ans après sa mort, Bolzano a examiné la nature des ensembles infinis et la paradoxes qui en découlent. Cette pièce contient le première utilisation du mot « set » dans un contexte mathématique.

Bolzano est décédé le 18 décembre 1848 à Prague, Bohême (aujourd'hui la République tchèque). Son œuvre a pavé le moyen de fournir des fondements rigoureux à la sujet de calcul. En particulier, Bolzano a identifié pour pour la première fois dans « Rein Analytischer Beweis » la « propriété de complétude » des nombres réels.

Bombelli, Rafael (1526–1572) Algèbre italienne à Bologne, Italie, en 1526 (le jour et le mois de sa date de naissance ne sont pas connues), le savant Rafael Bombelli est connu pour son livre très influent de 1572, L'Alge bra (Algèbre). Dans ce travail, Bombelli a publié des règles pour la solution aux QUADRATIQUE, CUBIQUE et QUARTIQUE EQUATIONS, et fut l'un des premiers mathématiciens à accepter les NOMBRES COMPLEXES comme solutions d'équations.

Bombelli a commencé sa carrière comme ingénieur spécialisé en hydraulique et a travaillé sur de nombreux projets transformer les marais salants en terres utilisables. Ayant lu le grand Ars magna (Le grand art) de GIROLAMO CAR DANO (1501-1576), Bombelli décida d'écrire une algèbre texte qui rendrait les méthodes qui y sont développées accessible à un public général et être d'intérêt et utiliser pour les géomètres et les ingénieurs. Il avait l'intention d'écrire un pièce en cinq volumes mais n'a réussi à publier que trois volumes avant sa mort en 1572.

Bombelli a noté que la méthode de résolution de Cardano les équations cubiques conduisent souvent à des solutions qui, coup d'œil, paraissent peu éclairants. Par exemple, l'examen de l'équation $x^3 = 15x + 4$ conduit à la solution :

$$\sqrt[3]{2 + 121\sqrt{2 + 121}}\, x = \sqrt{+ + -\sqrt{}}$$

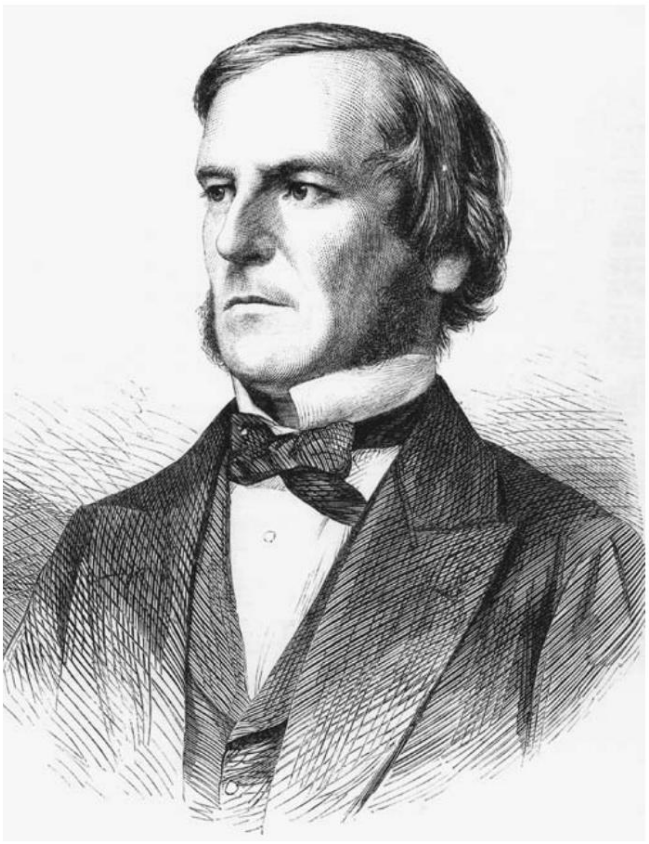
Bien que les chercheurs de l'époque aient rejeté de telles quantités (en raison de l'apparition de la racine carrée d'une quantité négative) Bombelli a fait valoir que de tels résultats

Machine Translated by Google

ne doivent pas être ignorés et, de plus, qu'ils conduisent à de vraies solutions. Après avoir développé l'algèbre des nombres complexes, Bombelli a pu montrer que la réponse présentée ci-dessus, par exemple, n'est que le nombre x = 4 déguisé. Bombelli a poursuivi en montrant qu'en fait, toute équation de la forme $x = ax + b$, avec a et b positifs, a une solution réelle, justifiant ainsi la méthode des nombres complexes.

En plus de développer l'arithmétique complexe, Bombelli a développé l'algèbre de base des NOMBRES NÉGATIFS. En particulier, il a fourni un argument géométrique pour aider à expliquer pourquoi un nombre négatif multiplié par lui-même doit être positif - une notion qui cause encore des difficultés à de nombreuses personnes aujourd'hui.

Bombelli mourut en 1572. (La date exacte de sa mort n'est pas connue.) GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716), codécouvreur de CALCULUS, apprit lui-même les mathématiques à partir de L'Algèbre de Bombelli et décrivit le savant comme "un maître exceptionnel de l'analyse analytique". art."



George Boole, un éminent mathématicien du 19ème siècle, a établi le domaine de la logique mathématique. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de Topham/The Image Works)

Boole, George (1815–1864) Logique britannique Né le 2 novembre 1815 dans le Lincolnshire, en Angleterre, l'algébriste George Boole est connu pour ses travaux très novateurs dans le domaine de la logique. Dans son article pionnier, An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability, publié en 1854, Boole établit l'efficacité de la manipulation symbolique comme moyen de représenter et d'effectuer des opérations de raisonnement. Boole est considéré comme le fondateur du domaine de la logique symbolique.

Boole n'a reçu aucune éducation formelle en mathématiques. Jeune homme, il lit les œuvres de JOSEPH-LOUIS LAGRANGE et de PIERRE-SIMON LAPLACE et, à 20 ans, commence à publier des résultats originaux. Ses premiers travaux dans le domaine des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES lui ont valu l'attention nationale en tant que chercheur compétent. En 1845, Boole reçut une médaille d'or de la ROYAL SOCI ETY de Londres, la société universitaire la plus prestigieuse d'Angleterre. Quatre ans plus tard, en 1849, il fut nommé directeur du département de mathématiques au Queens College de Cork, en Irlande, bien qu'il n'ait pas de diplôme universitaire. Boole est resté dans ce collège pour le reste de sa vie, se consacrant à l'enseignement et à la recherche.

Boole a commencé à travailler dans la logique mathématique avant de déménager en Irlande. À l'époque, la logique était considérée comme un sujet qui n'intéressait que les philosophes, mais en 1847, dans son pamphlet The Mathematical Analysis of Logique, Boole a soutenu avec succès que le sujet a du mérite dans l'art du raisonnement mathématique. En utilisant des symboles pour représenter des énoncés, Boole a développé une « algèbre de la logique » dont les règles et les manipulations valides correspondaient aux processus de raisonnement. Ainsi, les arguments mathématiques et les lignes de pensée pourraient eux-mêmes être réduits à de simples manipulations algébriques. Par exemple, si le symbole x est utilisé pour représenter "tout sauf les terflies", alors 1 - x représente tout ce qui n'est pas une mouche papillon. Si y représente la couleur bleue, alors xy est l'ensemble de tous les objets qui sont à la fois papillons et bleus, c'est-à-dire tous les papillons bleus. L'expression $(1 – x)(1 – y)$ représente tous les papillons non bleus.

Algébriquement, la quantité $(1 – x)(1 – y)$ est égale à $1 – x – y + xy$. On pourrait soutenir que le PRINCIPE D'INCLUSION EXCLUSION est en jeu ici, en disant que l'ensemble des non-papillons non bleus est l'ensemble de tous les objets qui ne sont ni papillons, ni bleus, avec un ajustement

Machine Translated by Google

pour tenir compte du fait que l'ensemble des mouches papillon bleues a été exclu deux fois. Ces ajustements, cependant, sont maladroits. Boole a inventé un nouveau système de « algèbre » qui évite de telles modifications. Les axiomes il obéit diffèrent de ceux de l'arithmétique ordinaire.

L'algèbre inventée par Boole s'est avérée d'une importance fondamentale. Il a donné aux ingénieurs du XXe siècle des moyens pour demander aux machines de suivre les commandes et a depuis été largement utilisé dans toutes les conceptions informatiques et la théorie des réseaux électriques. Dans un sens réel, Boole a été le premier informaticien au monde, malgré fait que les ordinateurs n'ont pas été inventés avant un autre siècle. Boole est mort subitement en 1864 à la 49 ans d'une pneumonie. (La date exacte de son la mort n'est pas connue.)

Algèbre booléenne Au milieu des années 1800 GEORGE BOOLE développé un système de manipulations algébriques adapté pour l'étude de la LOGIQUE FORMELLE et de la THÉORIE DES ENSEMBLES, maintenant appelée algèbre booléenne. Il supposait que l'on recevait un ensemble d'éléments, que nous noterons x, y, z, dont on …, sur peut effectuer deux opérations, aujourd'hui appelées Somme booléenne, x + y, et produit booléen, x · y. Ces les opérations doivent satisfaire aux règles suivantes :

1. Les opérations sont COMMUTATIVES, c'est-à-dire que pour tous les éléments x et y nous avons x + y = y + x et x · y = y · x.
2. Il existe deux éléments spéciaux, notés "0" et "1", qui, pour tous les éléments x, satisfont x + 0 = x et x · 1 = x.
3. Pour chaque élément x , il existe un élément inverse "-x" qui satisfait x + (–x) = 1 et x · (–x) = 0.
4. Les lois DISTRIBUTIVES suivantes s'appliquent à tous les éléments de l'ensemble : x · (y + z) = (x · y) + (x · z) et x + (y · z) = (x + y) · (x + z).

On peut voir que les opérations booléennes " sont + " et " . ” très différentes de l'addition et de la multiplication de l'arithmétique ordinaire et ne peut donc pas être interprété comme tel. Cependant, en considérant l'addition booléenne comme le "union de deux ensembles" et produit booléen comme "l'intersection de deux ensembles", 0 étant l'ensemble vide et 1 l'ensemble universel, nous voyons que les quatre axiomes tiennent, faisant de la THÉORIE DES ENSEMBLES une algèbre booléenne. De même, le La LOGIQUE FORMELLE du calcul propositionnel est un booléen l'algèbre si l'on interprète l'addition comme la DISJONCTION de deux déclarations ("ou") et le produit comme leur CONJONCTION ("et").

D'autres règles pour l'algèbre booléenne découlent de la quatre axiomes présentés ci-dessus. Par exemple, on peut montrer que deux lois ASSOCIATIVES sont vraies : x + (y + z) = (x + y) + z et x · (y · z) = (x · y) · z.

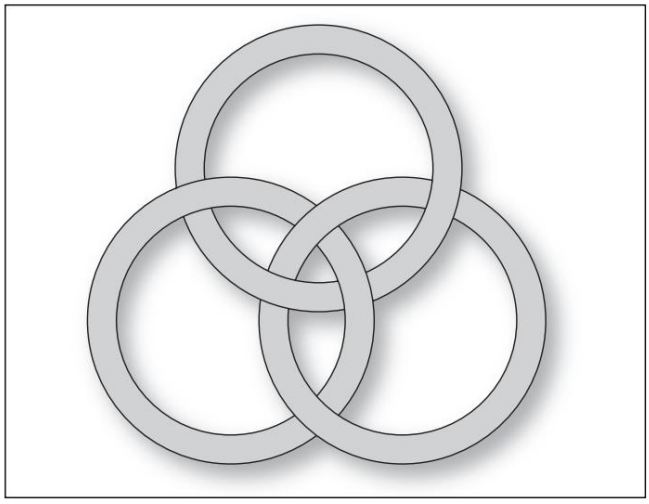
Voir aussi les LOIS DE DE MORGAN .

Anneaux de Borromée Le terme fait référence à un ensemble de trois anneaux liés ensemble comme un ensemble, mais avec la propriété que si un seul anneau est coupé, les trois anneaux se séparent. Le dessin de trois de ces anneaux est apparu sur le manteau d'armes de la noble famille italienne, Borromeo-Arese. (Cardinal Carlo Borromeo a été canonisé en 1610, et le cardinal Federico Borromeo ont fondé la galerie d'art am brosian à Milan, en Italie.) Le curieux propriété du dessin a attiré l'attention de mathématiciens.

C'est un exercice amusant d'arranger quatre anneaux tels que, en tant qu'ensemble, ils sont inextricablement liés, mais couper un seul anneau libérerait les quatre. Étonnamment, cet exploit peut être accompli avec n'importe quel nombre d'anneaux.

Voir aussi THÉORIE DES NŒUDS.

bornée Une fonction est bornée si elle prend des valeurs no supérieur à un certain nombre M et non inférieur à certains seconde valeur L. Par exemple, la fonction f(x) = sin x est borné entre les valeurs –1 et 1. On appelle M an borne supérieure pour la fonction et L une borne inférieure.



Anneaux de Borromée

Machine Translated by Google

Une fonction est bornée au-dessus si la fonction possède une borne supérieure (mais pas nécessairement une borne inférieure), et bornée en dessous si elle possède une borne inférieure (mais pas nécessairement une borne supérieure). Par exemple, $f(x) = x^2$ est limité en dessous par la valeur L = 0, puisque toutes les valeurs de sortie de cette fonction sont supérieures ou égales à zéro. Le THÉORÈME DES VALEURS EXTRÊMES garantit que toute FONCTION CONTINUE définie sur un INTERVALLE fermé est bornée.

Un ensemble de nombres est délimité au-dessus si chaque nombre de l'ensemble est inférieur ou égal à une valeur M, délimité en dessous si chaque nombre de l'ensemble est supérieur ou égal à une valeur L, et délimité s'il est à la fois délimité au-dessus et délimité en dessous. Par exemple, l'ensemble S = {0,6, 0,66, 0,666, …} est borné en bas par 0,6 et borné en haut par 1. La plus petite borne supérieure possible pour un ensemble est appelée la plus petite borne supérieure, et la plus grande borne inférieure, la plus grande borne inférieure.

L'ensemble S a 2/3 comme plus petite borne supérieure et 0,6 comme plus grande borne inférieure.

Les nombres réels ont la propriété que tout sous-ensemble S d'entre eux qui est délimité au-dessus possède une plus petite borne supérieure, et, de même, tout sous-ensemble qui est délimité en dessous possède une plus grande borne inférieure.
Il s'agit d'une propriété clé qui montre qu'aucun nombre ne "manque" sur la droite des nombres réels. (Voir DEDEKIND CUT.) Ce n'est pas vrai de l'ensemble des nombres rationnels, par exemple. L'ensemble de tous les rationnels dont le carré est inférieur à 2, par exemple, est borné au-dessus, par 3/2 par exemple, mais ne possède pas de moindre borne supérieure dans l'ensemble des rationnels : la racine carrée de deux est "absente" de l'ensemble de rationnels.

Une suite est bornée si, en tant qu'ensemble de nombres, elle est bornée. Une figure géométrique dans le plan est bornée si elle peut être enfermée dans un rectangle d'aire finie. Par exemple, un CERCLE est délimité mais un DEMI-PLAN ne l'est pas.

Bourbaki, Nicolas Prenant le nom d'un jeune officier napoléonien, un groupe de mathématiciens français des années 1930 adopte le pseudonyme de Nicolas Bourbaki pour publier une série de livres, tous sous le titre Éléments de mathématiques , qui tentent de présenter un compte rendu complet, définitif et tout à fait rigoureux de toutes les connaissances mathématiques modernes.

Ce projet se poursuit aujourd'hui. Les contributeurs au travail restent anonymes et changent au fil des ans. À ce jour, plus de 40 volumes d'ouvrages ont été produits.

La matière présentée à travers Bourbaki est austère et abstraite. Le but des travaux fondateurs était de développer l'ensemble des mathématiques sur les axiomes de SET THE ORY et de maintenir l'approche axiomatique au fur et à mesure de l'introduction de nouveaux concepts.

L'ouvrage, dépourvu de contexte narratif et motivationnel, est difficile à lire et ne convient pas pour être utilisé comme manuel. Au cours des années 1950 et 1960, cependant, il n'y avait souvent pas de textes de niveau universitaire dans les nouveaux domaines en développement, et les volumes de Bourbaki étaient les seules sources de référence. Il est peu probable qu'aujourd'hui un étudiant diplômé en mathématiques consulte l'ouvrage de Bourbaki.

brachistochrone Voir CYCLOÏDE.

crochets Toute paire de symboles, comme les parenthèses ( ) ou les accolades { }, qui sont utilisés dans une expression arithmétique ou algébrique pour indiquer que la quantité entre eux doit être évaluée en premier, ou traitée comme une seule unité dans l'évaluation de le tout, sont appelés parenthèses. Par exemple, dans l'expression (2 + 3) × 4, les parenthèses indiquent que nous devons d'abord calculer 2 + 3 = 5, puis multiplier ce résultat par 4. Dans les expressions compliquées, plusieurs types de parenthèses peuvent être utilisés. dans la même équation. Par exemple, l'expression $3\{2 + 8[2(x + 3) – 5(x – 2)]\}$ est un peu plus facile à lire que $3(2 + 8(2(x + 3) – 5(x – 2)))$.

Avant l'avènement de l'imprimerie au XVe siècle, le VINCULUM servait à indiquer l'ordre des opérations. L'algébriste italien RAFAEL BOMBELLI (1526-1572) fut l'un des premiers savants à utiliser des parenthèses dans une équation algébrique imprimée, mais ce n'est qu'au début des années 1700, grâce principalement à l'influence de LEONHARD EULER, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ et des membres de la FAMILLE BERNOULLI, que leur utilisation en mathématiques est devenue la norme.

Les crochets angulaires <> ne sont généralement utilisés que pour lister les composants d'un VECTEUR ou d'une SEQUENCE finie. Les choses sont un peu déroutantes, car dans la théorie de la mécanique quantique, les crochets angulaires sont utilisés pour indiquer le produit scalaire de deux vecteurs (et non les vecteurs eux-mêmes). Le crochet gauche "<" est appelé un "soutien-gorge" et le crochet droit ">" un "ket".

En THÉORIE DES ENSEMBLES, les accolades { } sont utilisées pour lister les éléments d'un ensemble. Parfois, les éléments d'une séquence sont répertoriés à l'intérieur d'un ensemble d'accolades.

Machine Translated by Google

Si x est un nombre réel, alors les crochets x ,
x et {x} sont utilisés pour désigner le sol, le plafond et
valeurs de la partie fractionnaire, respectivement, de x.

Les crochets [ ] et les parenthèses ( ) sont placés à
les extrémités d'un INTERVALLE sur la droite des nombres réels
pour indiquer si les extrémités de cet intervalle doivent être
incluses ou non.

Voir aussi SUPPORTS EXPANSIBLES ; SOL/PLAFOND/
FONCTIONS DE PARTIE FRACTIONNELLE ; ORDRE DE FONCTIONNEMENT.

Brahmagupta (vers 598–665) Arithmétique indienne, géométrie,
astronomie Né à Ujjain, en Inde, le savant Brah magupta est
reconnu comme l'un des
mathématiciens du VIIe siècle. Son fameux 628
le texte Brahmasphutasiddhanta (L'ouverture de l'univers) sur le
thème de l'astronomie comprend des
résultats mathématiques comme sa formule célèbre pour le
AIRE d'un QUADRILATERAL cyclique, la solution entière de
certaines équations algébriques, et les méthodes de résolution de
équations simultanées. Ce travail est aussi historiquement
significatif en tant que première utilisation systématique documentée de
ZÉRO et quantités négatives comme nombres valides dans
ARITHMÉTIQUE.

Brahmagupta était à la tête de l'observatoire astronomique
d'Ujjain, le principal centre mathématique de
l'Inde ancienne et s'intéressa vivement au développement de
l'observation et du calcul astronomiques. Le
10 premiers des 25 chapitres de Brahmasphutasiddhanta
se rapportent uniquement à l'astronomie, discutant de la longitude de
les planètes, les éclipses lunaires et solaires, et le moment de
alignements planétaires. Bien que riche en calcul mathématique
et en technique, c'est le reste de l'ouvrage
qui offre un aperçu de la portée considérable de Brahmagupta
compréhension des mathématiques à un niveau abstrait.

Brahmagupta poursuit en décrivant le SYSTÈME DE VALEUR
DE PLACE décimal utilisé en Inde à son époque pour représenter
chiffres et les méthodes pour faire de l'arithmétique dans ce
système. (Par exemple, il décrit une méthode de "longue
multiplication » essentiellement équivalente à l'approche que nous
utiliser aujourd'hui.) Brahmagupta autorise le zéro comme nombre valide
dans tous ses calculs, et lui donne en fait l'explicite
état d'un nombre en le définissant comme le résultat de la
soustraction d'une quantité à lui-même. (Jusqu'alors, zéro agissait comme
rien de plus qu'un espace réservé pour distinguer 203 de
23, par exemple.) Il explique également les propriétés
arithmétiques de zéro - que l'ajout de zéro à un nombre laisse cela
nombre inchangé et multipliant n'importe quel nombre par zéro
produit zéro, par exemple. Brahmagupta a également détaillé
l'arithmétique des nombres négatifs (qu'il appelait
«dette») et a suggéré, pour la première fois, qu'ils pourraient
en effet être des solutions valables à certains problèmes.

Brahmagupta explore ensuite les problèmes d' ALGÈBRE.
Il développe quelques notations algébriques de base puis
présente une série de méthodes pour résoudre une variété
d'équations linéaires et quadratiques. Par exemple, il a conçu
une technique ingénieuse pour trouver des solutions entières à
équations de la forme ax2 + c = y 2. (Par exemple, Brah
magupta a correctement affirmé que x = 226 153 980 et y
= 1 766 319 049 sont les plus petites solutions entières positives
de 61x + 1 = y 2.) Brahmagupta présente également le
fameuses formules SOMMES DE PUISSANCES :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ainsi que des algorithmes de calcul de racines carrées.

Malheureusement, comme c'était la pratique d'écrire au
fois, Brahmagupta n'a jamais donné aucune explication sur la
façon dont ses solutions ou formules ont été trouvées.
Aucune preuve n'a jamais été offerte.

Dans les sections finales de Brahmasphutasiddhanta,
Brahmagupta présente sa célèbre formule pour la région
d'un quadrilatère cyclique uniquement en termes de longueurs
de ses côtés. Curieusement, Brahmagupta n'affirme pas
que la formule n'est vraie que pour les quadrilatères
inscrit dans un CERCLE.

Dans un deuxième ouvrage, Khandakhadyaka, écrit en
665, Brahmagupta aborde d'autres sujets d'astronomie. D'un
intérêt particulier pour les mathématiciens, Brah magupta
présente ici une méthode ingénieuse pour
calculer les valeurs des sinus.

Les méthodes et les découvertes de Brahmagupta étaient
extrêmement influent. Pratiquement tous les textes traitant de
l'astronomie indienne décrivent ou utilisent un aspect
de son travail.

Voir aussi LA FORMULE DE BRAHMAGUPTA .

La formule de Brahmagupta Le mathématicien et astronome
indien du VIIe siècle BRAHMAGUPTA a dérivé une formule pour
l' AIRE d'un QUADRILATERAL inscrit dans un

Machine Translated by Google

CERCLE uniquement en termes de longueurs de ses quatre côtés. Sa formule se lit comme suit :

$$\text{aire} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

où a, b, c et d sont les quatre côtés et $s = \frac{abcd+}{2}$ est le demi-périmètre de la figure.

Si p et q sont les longueurs des deux diagonales de la figure, alors le THÉORÈME DE PTOLÉMÉE affirme que pq = ac + bd. La formule de Brahmagupta découle de la FORMULE DE BRETSCHNEIDER pour l'aire d'un quadrilatère :

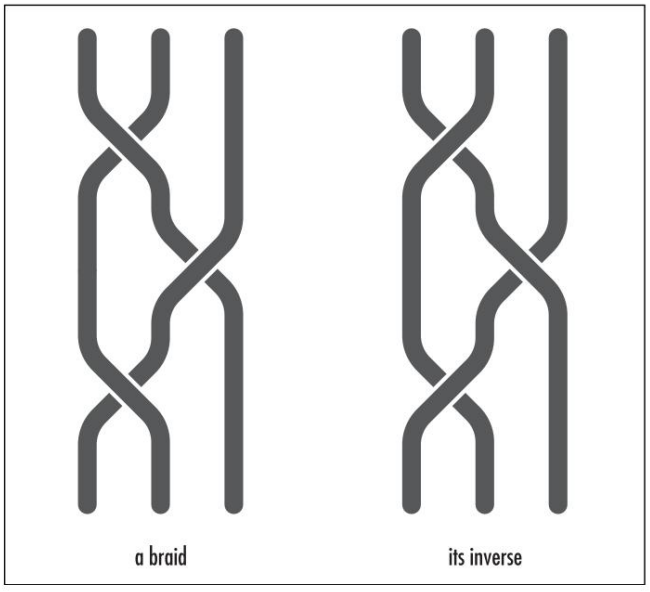
$$\text{aire} = \frac{1}{4}\sqrt{4 2 () \quad 2\,2 - + \quad 2\,22 \quad)}$$

en substituant dans cette valeur pq.

Si l'un des côtés du quadrilatère a une longueur nulle, c'est-à-dire que la figure est un TRIANGLE, alors la formule de Brah magupta se réduit à la FORMULE DE HERON .

Voir aussi POLYGONE CYCLIQUE.

tresse Un certain nombre de cordes tressées ensemble s'appelle une tresse. La théorie des tresses examine le nombre de façons (essentiellement distinctes) de tresser un nombre fixe de cordes, initialement tenues en parallèle. On peut combiner deux tresses sur un nombre fixe de cordes par répétition



Une tresse et son inverse

dessin du motif de la deuxième tresse à l'extrémité de la première tresse. Si, après avoir terminé cette manœuvre, le fait de secouer physiquement le système de cordes installe les brins à l'état non tressé, alors nous disons que les deux tresses sont des «tresses inversées». Par exemple, les deux tresses représentées sur le schéma sont des tresses inverses.

Si une tresse se compose de n cordes, alors le symbole σi est utilisé pour enregistrer l'acte de commutation de la ième pour l'acte de la (i + 1)ième corde (pour $1 \le i \le n$ corde sur –1 – 1) et σi de commutation des deux mêmes cordes mais dans le sens opposé. Une tresse générale est alors décrite comme une chaîne de ces symboles (appelée « mot »). Par exemple, les deux tresses montrées dans le schéma ci-dessous, à gauche, sont représentées par les mots σ1σ2 –1σ1 et σ1 –1σ2σ1 –1, respectivement. Une tresse sans croisements (c'est-à-dire dans laquelle aucune chaîne ne se croise) est notée « 1 », et le processus de combinaison des tresses correspond précisément au processus de concaténation des mots. Deux tresses sont des tresses inverses si, après avoir effectué les manipulations symboliques suggérées, leur mot concaténé résultant est 1. Par exemple, dans notre exemple, nous avons : σ1σ2 –1σ1σ1 – = deux 1σ2σ1 –1 = σ1σ2 –1σ2σ1 –1 –1 = 1 . Il est possible que mots différents puissent σ1σ1 représenter la même tresse physique. (Par exemple, sur trois cordes, les tresses σ1σ2σ1 et σ2σ1σ2 sont physiquement équivalentes.)

Chaque ensemble de tresses sur un nombre fixe de cordes forme un GROUPE appelé groupe de tresses. Le mathématicien Autrichien Emil Artin (1898-1962) a été le premier à étudier ces groupes et à résoudre le problème de déterminer précisément quand deux mots différents représentent la même tresse.

La formule de Bretschneider Le mathématicien allemand Carl Anton Bretschneider (1808-1878) a écrit une formule pour l'AIRE d' un QUADRILATERAL uniquement en termes de longueurs de ses quatre côtés et de la valeur de ses quatre angles internes. Si, en lisant dans le sens des aiguilles d'une montre autour de la figure, les longueurs des côtés du quadrilatère sont a, b, c et d, et les angles entre les arêtes sont A, B, C et D (l'angle entre les arêtes d et a étant A), alors Bretschneider a établi que l'aire K du quadrilatère est donnée par :

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2(\theta)}$$

Ici $s = \frac{abc+++}{2}$ est le demi-périmètre de la figure et θ est la moyenne de deux angles opposés quelconques dans le

Machine Translated by Google

chiffre: $\theta = \frac{B D+}{\quad}$ ou $\frac{Un}{C+}$. (Puisque l'intérieur θ = 2 angles d'un quadrilatère somme à 360 degrés, chaque quantité donne la même valeur pour le cosinus.)

De nombreux textes en mathématiques énoncent le résultat de Bretschneider sans preuve. Bien que détaillée algébriquement, la dérivation du résultat est relativement simple.
On commence par remarquer que l'aire K est la somme des aires des triangles ABC et ADC. Nous avons:

$$K \text{ ab } B \text{ cd } D \sin 2 + \frac{1}{2} \text{ péché}$$

Multiplier par quatre et élever au carré donne :

$$16K2 = 4a\ 2b\ 2 \sin 2B + 4c\ 2d\ 2 \sin 2D + 8abcd \sin B \sin D$$

Appelons cette équation (i). L'application de la LOI DES COSINS à chacun des deux triangles donne la relation :

$$un^2 + b\ 2 - 2ab \cos B = c^2 + d\ 2 - 2cd \cos D$$

qui peut être réécrit :

$$un^2 + b\ 2\ 2 - c - d\ 2 = 2ab \cos B - 2cd \cos D$$

Appelez cette équation (ii). A noter également qu'à l'aide de cette seconde équation :

$$4(s - c)(s - d) = (a + b - c + d)(a + b + c - d) + b\ 2 + 2 = un\ 2ab + 2cd - j\ 2$$
$$= 2ab \cos B - 2cd \cos D + 2ab + 2cd = 2ab(1 + \cos B) + 2cd(1 - \cos D)$$

De la même manière:

$$4(s - a)(s - b) = (-a + b + c + d)(a - b + c + d) = 2ab(1 - \cos B) + 2cd(1 + \cos D)$$

La multiplication de ces deux équations donne :

$$16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) = 4a\ 2b\ 2 (1 - \cos 2 B) + 4c\ 2d\ 2 (1 - \cos 2 D) + 4abcd((1 + \cos B)(1 + \cos D) + (1 - \cos B)(1 - \cos D)) = 4a\ 2b\ 2 \sin 2 B + 4c\ 2d\ 2 \sin 2 D + 8abcd(1 + \cos B \cos D)$$

et le remplacement dans l'équation (i) produit :

$$16K2 = 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - 8abcd (\cos B \cos D - \sin B \sin D + 1)$$

Les identités suivantes issues de la trigonométrie :

$$\cos B \cos D - \sin B \sin D = \cos(B + D)$$

et

$$2 \cos^2 \frac{X}{2} = 1 + \cos X$$

donne maintenant :

$$2\ 16K = \sqrt{\quad} sasbscd\ 16 ( )( )( ) \quad 16 abc \quad 2 \cos \frac{B+D}{2}$$

ce qui donne directement le fameux résultat.

Si, en outre, les angles opposés du quadrilatère totalisent 180 degrés (auquel cas le quadrilatère est un POLYGONE CYCLIQUE), alors la formule de Bretschneider se réduit à la FORMULE DE BRAHMAGUPTA pour l'aire d'un quadrilatère cyclique :

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Si l'un des côtés a une longueur nulle, disons d = 0, alors le quadrilatère est un triangle et nous avons HERON'S FORMULE pour l'aire d'un triangle :

$$K = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Ceci est valable, puisque tout triangle peut s'inscrire dans un cercle et donc est bien un polygone cyclique.

Briggs, Henry (1561–1630) Logarithmes britanniques Né en février 1561 (la date de naissance exacte n'est pas connue) dans le Yorkshire, en Angleterre, le savant Henry Briggs est connu pour le développement des logarithmes en base 10, révisant l'approche adoptée par l'inventeur des logarithmes, JOHN NAPIER (1550-1617). Aujourd'hui, ces logarithmes courants sont parfois appelés logarithmes briggsiens. En 1617, après avoir consulté Napier, Briggs publia les valeurs logarithmiques des 1 000 premiers nombres et, en 1624, dans son célèbre texte The Arithmetic of Log arithms, les valeurs logarithmiques de 30 000 autres nombres, tous corrects à 14 décimales près.

Machine Translated by Google

Briggs est diplômé du St. John's College of Cam bridge University en 1581 avec une maîtrise et a été nommé maître de conférences dans la même institution 11 ans plus tard en 1592 pour pratiquer à la fois la médecine et les mathématiques. Quatre ans plus tard, Briggs devint le premier professeur de géométrie au Gresham College de Londres, lorsqu'il développa également un vif intérêt pour l'astronomie.

À peu près à cette époque, Napier venait de développer sa théorie des logarithmes en tant que dispositif mathématique visant spécifiquement à aider les astronomes dans les calculs arithmétiques difficiles. Briggs a lu le texte de Napier sur le sujet en 1614 et, avec une vive excitation, s'est arrangé pour rendre visite au savant écossais à l'été 1615. Les deux hommes ont convenu que la théorie des logarithmes serait en effet grandement simplifiée dans un système de base 10, et deux des années plus tard, Briggs a publié ses premières tables de valeurs logarithmiques dans Logarithmorum chilias prima (logarithmes des nombres de 1 à 1 000). Plus tard, dans son célèbre article de 1624, Briggs a publié des valeurs logarithmiques pour les nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. (L'écart de 70 000 numéros a été comblé trois ans plus tard par les deux universitaires néerlandais, Adriaan Vlacq et Ezechiel de Decker.)

Briggs a été nommé président de la géométrie à l'Université d'Oxford en 1619. Il est resté à Oxford poursuivant des intérêts dans l'astronomie et la géométrie classique jusqu'à sa mort le 26 janvier 1630. Dans sa conférence inaugurale au Gresham College, ISAAC BARROW (1630-1677) a exprimé sa gratitude sur nom de tous les mathématiciens pour le travail remarquable que Briggs avait accompli à travers l'étude des logarithmes.

Brouncker, Lord William (ca. 1620–1684) Calculus britannique William Brouncker est surtout connu pour son travail dans le développement précoce de CALCULUS et aussi comme l'un des premiers mathématiciens en Grande-Bretagne à utiliser FRACTIONS CONTINUES.

On sait très peu de choses sur les débuts de Brouncker, y compris l'année exacte de sa naissance, par exemple, et sa nationalité. Les archives montrent cependant qu'il est entré à l'Université d'Oxford à l'âge de 16 ans pour étudier les mathématiques, les langues et la médecine. Il obtint un doctorat en médecine en 1647, poursuivant tout au long de sa vie les mathématiques et leurs applications à la musique, à la mécanique et à la physique expérimentale comme un intérêt extérieur.

Brouncker avait des opinions royalistes et a pris une part active à l'agitation politique de l'époque en Angleterre. Avec la restauration de la monarchie en 1660 et l'élection du roi Charles II au trône, Brouncker est nommé chancelier de la reine Anne et gardien du grand sceau. Brouncker a également été nommé président de la nouvelle ROYAL SOCIETY de Londres en 1662.

En mathématiques, Brouncker a étudié les SÉRIES infinies et a fait un certain nombre de découvertes remarquables. Il a conçu une méthode de série pour calculer les LOGARITHMES et une surprenante expression de fraction continue pour π :

$$\frac{4}{\pi} 1 = + \cfrac{2\,1}{2 + \cfrac{2\,3}{2 + \cfrac{2\,5}{2 \quad +L}}}$$

Brouncker a utilisé cette formule pour calculer correctement la valeur de π à la 10ème décimale. Le grand mathématicien anglais JOHN WALLIS publia plus tard ces résultats au nom de Brouncker.

Brouncker a également étudié les ÉQUATIONS DIOPHANTINES et a trouvé une méthode générale pour résoudre les équations de la forme $nx^2 + 1 = y$ LEONHARD EULER appela plus tard cette équation "l'équation de Pell", d'après le mathématicien anglais John Pell (1611-1684), sans se rendre compte qu'il s'agissait de Brouncker. , pas Pell, qui l'avait étudié si intensément.
Le nom de Pell, malheureusement, reste attaché à cette équation à ce jour.

Brouncker est décédé le 5 avril 1684 à Londres, en Angleterre. Il n'a jamais été reconnu comme un grand mathématicien car il avait tendance à se concentrer sur la résolution de problèmes posés par d'autres plutôt que de forger des voies originales dans la recherche en mathématiques.

force brute La méthode d'établissement de la validité d'une réclamation en vérifiant individuellement chaque instance de la réclamation est appelée force brute. Les mathématiciens préfèrent de loin concevoir des arguments et des principes généraux pour démontrer la validité d'une affirmation, plutôt que de recourir à cette méthode. Certaines affirmations, cependant, ne semblent se prêter qu'à la technique de la force brute. Par exemple, l'énigme de nommage des nombres suivante ne peut être résolue que par la force brute :

> Pensez à un nombre entre un et 100.
> Comptez le nombre de lettres de son nom pour obtenir un deuxième chiffre. Comptez le nombre de lettres dans le nom du deuxième nombre à

Machine Translated by Google

obtenir un troisième numéro. Continuez ainsi jusqu'à
la chaîne de nombres ainsi obtenue se termine
sur un nombre qui se répète. Ce nombre qui se répète,
dans tous les cas, est le nombre quatre.

Comme tout nombre compris entre 1 et 100 peut s'écrire en 12 lettres ou moins, le deuxième chiffre obtenu sera se situent entre trois et 12. On vérifie, par la force brute, que chacun de ces nombres mène finalement au nombre quatre.

À l'heure actuelle, la méthode de la force brute est la seule technique connue garantissant une solution optimale au fameux PROBLÈME DU VOYAGEUR VENDEUR .

Ce problème est d'une importance pratique significative. Malheureusement, même avec les ordinateurs les plus rapides de aujourd'hui, l'approche de la force brute ne peut pas être effectuée dans n'importe quel laps de temps possible.

Le célèbre THÉORÈME DES QUATRE COULEURS a été résolu en années 1970 en réduisant le problème à un fini, mais extraordinairement grand, nombre de cas individuels qui ont été vérifiés sur un ordinateur par la force brute.

Voir aussi CONJECTURE DE GOLDBACH .

Problème d'aiguille de Buffon (problème de Buffon-Laplace)

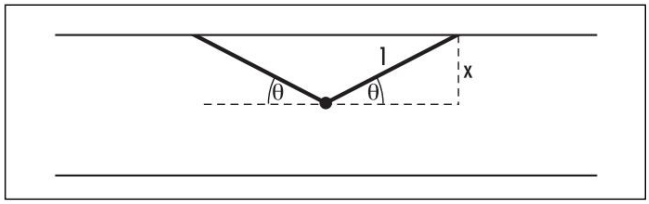
En 1733, le naturaliste français Georges Buffon proposa le problème suivant, maintenant connu sous le nom de problème de l'aiguille de Buffon :

Une aiguille d'un pouce de long est lancée au hasard
sur un sol fait de planches d'un pouce de large.

Quelle est la probabilité que l'aiguille atterrisse
traverser une des fissures?

On peut répondre à l'énigme comme suit :

Supposons que l'aiguille atterrit avec l'extrémité la plus basse a distance x d'une fissure. Notez que $0 \le x \le 1$.



Résoudre le problème de l'aiguille de Buffon

Dans le diagramme, nous voyons que si l'aiguille atterrit dans un angle comme indiqué par l'un ou l'autre des secteurs étiquetés θ, alors il ne tombera pas à travers la fissure supérieure, mais il le fera si au lieu de cela, il atterrit dans le secteur d'angle $\pi - 2\theta$. Ainsi, le probabilité que l'aiguille tombe à travers la fissure, étant donné qu'il atterrit à une distance x unités en dessous d'une fissure, est $P_x = \frac{\pi - \theta - \theta}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}\cos^{-1} x$. En sommant, c'est-à-dire en intégrant, sur toutes les valeurs possibles de x nous donne la probabilité totale P que nous recherchons :

$$P = \int_0^1 P_x\,dx = \int_0^1 1 - \frac{2}{\pi}\cos^{-1} x\,dx = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos^{-1} x\,dx$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\left[x\cos^{-1} x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + 1$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

En principe, ce problème fournit une solution expérimentale méthode de calcul du PI : lancez simplement une aiguille sur le sol un grand nombre de fois, disons 10 000, et comptez le proportion qui atterrit à travers une fissure. Cette proportion doit être très proche de la valeur $\frac{2}{\pi}$. En pratique, cependant, cela s'avère être une approche très fastidieuse.

Voir aussi MÉTHODE DE MONTE CARLO.

Machine Translated by Google

C

calcul (calcul infinitésimal) La branche des mathématiques qui traite de la notion de la croissance et du changement s'appellent le calcul. Il est basé sur le concept d' INFINITESIMAUX, des quantités extrêmement petites, et sur le concept d'une LIMITE, des quantités qui peuvent être approché de plus en plus près mais jamais atteint. En traitant les changements continus comme s'ils consistaient en des incréments infiniment petits, DIFFERENTIAL CAL CULUS peut être utilisé, par exemple, pour trouver la VITESSE d'un objet en mouvement à un instant donné. INTÉGRAL CALCULUS représente le processus inverse, trouvant le résultat final agrégé si le changement continu est déjà connu. Par exemple, en intégrant l'instantané vitesse d'un objet sur une période de temps donnée, on trouve la distance totale parcourue par l'objet pendant ce temps.

Le mot calcul vient du mot latin calx pour "caillou", qui à son tour est dérivé du grec mot chalis pour "calcaire". Petites perles ou pierres disposés sur une planche à compter ou sur un boulier étaient souvent utilisé pour faciliter les calculs mathématiques, et le le mot calcul en est venu à désigner toute activité mathématique. Aujourd'hui, cependant, le mot est utilisé presque exclusivement pour désigner l'étude du changement continu.

Voir aussi HISTOIRE DU CALCULUS (essai).

annulation En ARITHMÉTIQUE, le processus de division le numérateur et le dénominateur d'une FRACTION par un facteur commun pour produire une fraction plus simple est appelé annulation. Par exemple, la fraction 18/12, qui est (6 × 3)/(6 × 2), peut être simplifié à 3/2 en annulant "6" de la fraction.

Une activité amusante en mathématiques cherche fractions qui restent inchangées par l'action de "Annulation anormale." Par exemple, supprimer le chiffre 6 de chacun des numérateur et dénominateur de la fraction 65/26 produit le nombre 5/2. Avec curiosité, 65/26 équivaut à cinq moitiés. Autres fractions avec ce 98 8 la propriété comprend : $\frac{64}{16}\frac{4}{1}$, $\frac{}{49}\frac{}{4}$, et $\frac{95}{19}\frac{5}{1}$. De Bien sûr, supprimer des chiffres de cette manière est une opération mathématique invalide, et les égalités obtenues ici sont purement fortuite.

En ALGEBRE, le mot annulation est utilisé dans deux paramètres. Semblable au processus d'annulation pour les fractions, on peut simplifier une expression rationnelle de la forme xy/xz en annulant le facteur x des deux numérateur et dénominateur. Cela donne xy/xz comme égal à y/z. Ainsi, par exemple, l'expression $\frac{xx^2 + + 3\ 2}{xx^2 +}$ $= \frac{(xx+ +2 \quad)}{xx(\ + 1)}$ se simplifie en $\frac{x + 2}{x + 1}$.

Le processus de suppression de deux quantités égales de une équation par soustraction est aussi appelée annulation. Par exemple, dans l'équation x + 2y = 5 + 2y, le terme 2y peut être annulé pour laisser x = 5.

Les deux actions s'inscrivent dans le cadre d'un accord général loi d'annulation. Dans un cadre abstrait, on dit qu'un OPER ATION BINAIRE "*" satisfait une telle loi si chaque fois que a*x = b*x tient, a = b suit. Pour l'opération d'addition, cela donne :

a + x = b + x implique a = b

Machine Translated by Google

Histoire du calcul

L'étude du calcul commence par l'étude du mouvement, un sujet qui fascine et embrouille les chercheurs depuis l'époque de antiquité. Le premier travail enregistré à noter dans cette direction remonte aux érudits grecs PYTHAGORE (vers 569-475 avant notre ère) et ZENO D' ELEA (vers 500 avant notre ère), et leurs partisans, qui ont avancé la notion d'un INFINITESIMAL comme un possi ble signifie pour expliquer la nature du changement physique.
Le mouvement pourrait donc être compris comme l'effet global d'une collection de changements infiniment petits. Zénon, cependant, était très conscient des difficultés fondamentales de cette approche et de son hypothèse selon laquelle l'espace et le temps sont par conséquent chacun continus et donc infiniment divisibles.
Grâce à une série d'arguments logiques ingénieux, Zeno a estimé que cela ne pouvait pas être le cas. Dans le même temps, Zénon a présenté un raisonnement convaincant pour montrer que la position inverse, à savoir que l'espace est composé d'unités fondamentales indivisibles, ne peut pas non plus tenir. Les problèmes contradictoires proposés par Zeno n'ont pas été correctement résolus pendant plus de deux millénaires.

Le concept de l'infinitésimal est également apparu dans l'étude grecque antique de la surface et du volume. Les érudits des écoles de PLATON (428-348 avant notre ère) et d' EUDOXE DE CNIDE (vers 370 avant notre ère) ont développé une "méthode d'épuisement", qui tentait de calculer l'aire ou le volume d'une figure courbe en la confinant entre deux quantités connues , qui peuvent tous deux être amenés à ressembler à l'objet désiré avec n'importe quel degré de précision prescrit. Par exemple, on peut encadrer un cercle entre deux n-gones, un inscrit et un circonscrit. Comme on peut facilement calculer l'aire d'un n-gone régulier, la formule de l'aire d'un cercle suit en prenant des valeurs de plus en plus grandes de n. (Voir AIRE.) La figure d'un n-gone régulier lorsque n croît ne diffère de celle d'un vrai cercle que d'une quantité infinitésimale. ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (287-212 avant notre ère) a appliqué cette méthode pour calculer l'aire d'une section d'une PARABOLE, et 600 ans plus tard, PAPPUS D' ALEXANDRIE (vers 300-350 CE) a calculé le volume d'un SOLIDE DE RÉVOLUTION via cette technique . Bien qu'ils aient réussi à calculer les aires et les volumes d'une collection choisie d'objets géométriques, les chercheurs n'avaient pas de techniques générales permettant le développement d'une théorie générale de l'aire et du volume. Chaque calcul individuel pour un seul exemple spécifique a été salué comme une grande réussite en soi.

La résurgence de la recherche scientifique au milieu des années 1600 a conduit les chercheurs européens à pousser la méthode d'épuisement au-delà du point où Archimède et Pappus l'avaient laissée. JOHANNES KEPLER (1571-1630) a étendu l'utilisation des infinitésimaux pour résoudre les problèmes d'OPTIMISATION . (Il a également développé de nouvelles méthodes mathématiques pour calculer le volume des tonneaux de vin.) D'autres ont travaillé sur le problème de la recherche de tangentes aux courbes, un problème pratique important. dans le meulage des lentilles, et le problème de trouver des zones de figures irrégulières. En 1635, le mathématicien italien BONAVEN TURA CAVALIERI a écrit le premier manuel sur ce que nous aimerions appeler les méthodes d'intégration. Il a décrit une « méthode des indivisibles » générale utile pour calculer les volumes. Le principe aujourd'hui s'appelle le PRINCIPE DE CAVALIERI .

Le mathématicien français Gilles Personne de Roberval (1602-1675) fut le premier à lier l'étude du mouvement à la géométrie. Il s'est rendu compte que la ligne tangente à une courbe géométrique pouvait être interprétée comme la direction instantanée du mouvement d'un point se déplaçant le long de cette courbe. Le philosophe et mathématicien RENÉ DESCARTES (1596-1650) a développé des techniques générales pour trouver la formule de la tangente à une courbe en un point donné. Cette technique a ensuite été reprise par PIERRE DE FERMAT (1601-1665), qui a utilisé l'étude des tangentes pour résoudre des problèmes de maxima et de minima de la même manière que nous résolvons de tels problèmes aujourd'hui. En tant que domaine d'étude distinct, Fermat a également développé des techniques de calcul intégral pour trouver des aires entre les courbes et les longueurs d'arcs de courbes, qui ont ensuite été développées plus tard par BLAISE PASCAL (1623–62) et les mathématiciens anglais JOHN WALLIS (1616–1703) et ISAAC BARROW (1630-1677).

Dans le même temps, des universitaires, dont Wallis, ont commencé à étudier les SERIES et les PRODUITS INFINIES. Le mathématicien écossais JAMES GREGORY (1638-1675) a développé des techniques pour exprimer les fonctions trigonométriques sous forme de sommes infinies, découvrant ainsi la SÉRIE TAYLOR 40 ans avant que BROOK TAYLOR (1685-1731) ne développe indépendamment les mêmes résultats.

Au milieu des années 1600, certainement, tous les éléments de calcul étaient en place. Pourtant, les chercheurs de l'époque ne se rendaient pas compte que tous les problèmes variés étudiés appartenaient à un tout unifié, à savoir que les techniques utilisées pour résoudre des problèmes tangents pouvaient être utilisées pour résoudre des problèmes d'aire, et vice versa. Une percée fondamentale a eu lieu dans les années 1670 lorsque, indépendamment, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) d'Allemagne et SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) d'Angleterre ont découvert une relation inverse entre le « problème de tangente » et le « problème d'aire ». La découverte du THÉORÈME FUN DAMENTAL DE CALCUL a réuni les sujets disparates étudiés, a fourni une perspective magnifique et naturelle sur le sujet dans son ensemble et a permis aux chercheurs de faire des progrès significatifs dans la résolution de problèmes géométriques et physiques avec un succès spectaculaire. Malgré le contenu des connaissances établies jusque-là, c'est la découverte du théorème fondamental du calcul qui représente la découverte du calcul.

Newton a abordé le calcul à travers un concept d '«entités fluides». Il a appelé toute quantité étudiée un "fluent" et son taux de changement une FLUXION. Les dossiers montrent que

(continue)

Machine Translated by Google

Histoire du calcul (suite)

il avait développé ces idées dès 1665, mais il ne publia un compte rendu de sa théorie qu'en 1704. Malheureusement, son style d'écriture et son choix de notation rendirent également sa version du calcul accessible à un public restreint. Leib niz, d'autre part, a fait un usage explicite d'un infinitésimal dans son développement de la théorie. Il appela le changement infinitésimal d'une quantité xa DIFFÉRENTIEL, noté dx. Leibniz a inventé un beau système de notation pour le sujet qui a rendu la lecture et le travail avec son compte rendu de la théorie immédiatement accessibles à un large public. (Beaucoup de symboles que nous utilisons aujourd'hui dans le calcul différentiel et intégral sont dus à Leibniz.) Leibniz a formulé son approche au milieu des années 1670 et a publié son exposé sur le sujet en 1684.

Bien que l'on sache maintenant que Newton et Leibniz avaient fait leurs découvertes indépendamment, les choses à l'époque n'étaient pas claires et une âpre dispute s'éleva sur la priorité de la découverte du calcul. En 1712, la ROYAL SOCIETY d'Angleterre forma un comité spécial pour statuer sur la question.

L'application des techniques aux problèmes du monde réel est devenue le thème principal des mathématiques du XVIIIe siècle. Le célèbre texte de Newton de 1687, Principia, a ouvert la voie avec son analyse des lois du mouvement et de la mécanique du système solaire. Les frères suisses Jakob Bernoulli (1654–1705) et Johann Bernoulli (1667–1748) de la célèbre FAMILLE BERNOULLI, champions de Leibniz dans la célèbre dispute, ont étudié le calcul nouvellement inventé et ont été les premiers à donner des conférences publiques sur le sujet. Johann Bernoulli fut engagé pour enseigner le calcul différentiel au noble français GUILLAUME FRANÇOIS DE L' HOPITAL (1661-1704) par correspondance écrite. En 1696, L'Hopital publie alors le contenu des lettres de Johann avec son propre nom comme auteur. La mathématicienne italienne MARIE GAETANA AGNESI (1718-1799) a écrit le premier manuel complet traitant à la fois du calcul différentiel et intégral en 1755.

Le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707–1783) et les mathématiciens français JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) et PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827) ont joué un rôle de premier plan dans le développement de la théorie des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Euler a également beaucoup écrit sur le sujet du calcul, montrant comment la théorie peut être appliquée à une vaste gamme de problèmes mathématiques purs et appliqués. Pourtant, malgré le succès évident du calcul, certains érudits du XVIIIe siècle ont remis en question la validité et la justesse du sujet.

Le critique le plus acerbe de l'œuvre de Newton et de Leibniz fut l'évêque anglican de Coyne, George Berkeley (1685–1753). Dans son essai cinglant, « The Analyst », Berkeley a démontré, de façon convaincante, que la notion newtonienne de fluxion et le concept leibnizien d'un infinitésimal sont mal définis, et que les fondements du sujet sont par conséquent incertains. (Certains historiens suggèrent que les critiques véhémentes de Berkeley étaient motivées par un dédain personnel pour l'athéisme apparent du type de mathématicien qui soutient que la science est certaine et que la théologie est basée sur la spéculation). pied solide. Des progrès significatifs n'ont été réalisés qu'au XIXe siècle, lorsque le mathématicien français AUGUSTINE LOUIS CAUCHY (1789-1857) a proposé de remplacer la notion d'infinitésimal par celle de LIMITE. Le mathématicien allemand KARL WEIERSTRASS (1815-1897) a développé cette idée et a été le premier à donner des définitions absolument claires et précises à tous les concepts utilisés en calcul, dénuées de tout mystère ou de toute dépendance à l'intuition géométrique. Les travaux du mathématicien allemand RICHARD DEDEKIND (1831–1916) a mis en évidence le rôle que jouent les propriétés du système de nombres réels pour assurer la validité de l' INTER THÉORÈME DE VALEUR MÉDIATE et THÉORÈME DE VALEUR EXTRÊME et tout les résultats essentiels qui en découlent.

Initialement, le calcul infinitésimal était considéré comme une théorie se rapportant uniquement au changement continu et aux FONCTIONS CONTINUES. Le mathématicien allemand BERNHARD RIEMANN (1826–1866) a été le premier à considérer et à discuter attentivement de l'intégration des fonctions discontinues. Sa définition d'une intégrale est celle généralement présentée dans les manuels aujourd'hui. À la fin du XIXe siècle, le mathématicien français HENRI LÉON LEBESGUE (1875-1941) renverse littéralement l'approche de Riemann et développe un concept d'intégration qui peut être appliqué à une classe de fonctions et une classe de paramètres beaucoup plus larges. Dans la construction d'une intégrale de Riemann, on commence par subdiviser la plage d'entrées, l'axe des x, en petits intervalles et on ajoute des zones de rectangles au-dessus de ces intervalles de hauteurs donnés par la fonction. Cela revient à compter la valeur d'une poche pleine de pièces en retirant une pièce à la fois et en ajoutant les résultats au fur et à mesure. Lebesgue a suggéré, d'autre part, de subdiviser la plage de sorties, l'axe des y, en petits intervalles et de mesurer la taille des ensembles sur l'axe des x pour lesquels la fonction donne la sortie souhaitée sur l'axe des y. Cela revient à compter des pièces en collectant d'abord tous les sous et en déterminant leur nombre, tous les nickels et en vérifiant la taille de cette collection, et ainsi de suite. Pour ce faire, Lebesgue a dû développer une « théorie de la mesure » générale pour déterminer la taille des ensembles compliqués.

Sa nouvelle théorie s'est avérée d'une importance fondamentale et elle a maintenant des applications profondes dans un large éventail de sujets mathématiques. Il s'est avéré particulièrement important pour le bon développement de la théorie des PROBABILITÉS .

Voir aussi CALCUL ; CALCULS DIFFÉRENTIELS; GRAPHIQUE D'UN FONCTION; CALCUL INTÉGRAL; VOLUME.

Machine Translated by Google

et pour la multiplication, en supposant que x n'est pas nul :

a × x = b × x implique a = b

La loi d'annulation s'applique à tout système mathématique qui satisfait à la définition d'être un GROUPE.
Avec l'existence garantie d'éléments inverses, nous avons a*x = b*x donne a*x*x – 1 = b*x*x – 1, qui est l'énoncé a = b. Elle est valable en ARITHMETIQUE MODULAIRE dans le contexte suivant :

ax ≡ bx (mod N) implique a ≡ b (mod N),
seulement si x et N sont COPRIME

Cela s'ensuit puisque l'énoncé ax ≡ bx (mod N) n'est valable que si x (a - b) est un multiple de N. Si x et N ne partagent aucun facteur premier, alors il doit être vrai que le terme a - b contient tous les facteurs premiers de N et donc est un multiple de N. Par conséquent, a ≡ b(mod N). Le fait que 4 × 2 soit congru à 9 × 2 modulo 10, sans que 4 et 9 soient congruents modulo 10, montre que la loi d'annulation n'a pas besoin d'être vérifiée si x et N partagent un facteur commun.

Voir aussi ASSOCIATIF ; PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE ; PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE.

Cantor, Georg (1845–1918) Allemand Théorie des ensembles Né le 3 mars 1845 à Saint-Pétersbourg, mais élevé à Wies Baden et à Francfort, en Allemagne, le mathématicien Georg Cantor est connu pour ses travaux approfondis sur la théorie des ensembles et la CARDINALITÉ . Des années 1874 à 1895, Cantor a développé une explication claire et complète de la nature des ensembles infinis. Avec son célèbre ARGUMENT DIAGONAL, par exemple, il a montré que l'ensemble des nombres rationnels est DÉNUMÉRABLE et que l'ensemble des nombres réels ne l'est pas, établissant ainsi pour la première fois qu'il existe plus d'un type d'ensemble infini. Le travail de Cantor était controversé et était considéré avec suspicion. Son importance n'était pas bien comprise à son époque.

Cantor a terminé une thèse sur NOMBRE L'ORY en 1867 à l'Université de Berlin. Après avoir travaillé comme instituteur pendant une courte période, Cantor obtint un diplôme d'habilitation en 1869 pour ensuite accepter un poste à l'Université de Halle en 1869. Il travailla sur la théorie des SÉRIES trigonométriques, mais ses études nécessitèrent bientôt une compréhension claire de la Nombres irrationnels. Ce besoin a orienté Cantor vers l'étude des ensembles généraux et des nombres.

En 1873, Cantor a prouvé que l'ensemble de tous les rationnels et l'ensemble des NOMBRES ALGÉBRIQUES sont tous deux COMPTABLES, mais que l'ensemble des nombres réels ne l'est pas. Vingt ans plus tôt, le mathématicien français JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) avait établi l'existence des NOMBRES TRANSCENDANTAUX (en présentant des exemples précis de tels nombres), mais Cantor avait réussi à montrer, d'un seul coup, qu'en fait presque tous les nombres sont transcendantaux.

Après s'être lancé dans une étude de l'infini, Cantor a avancé et a commencé à étudier la nature de l'espace et de la dimension. En 1874, il demanda si les points d'un carré unitaire pouvaient être mis en correspondance univoque avec les points de l'intervalle unitaire [0,1]. Trois ans plus tard, Cantor a été surpris par sa propre découverte que cela est en effet possible. Son article de 1877 détaillant le résultat a été accueilli avec suspicion et sa publication a d'abord été refusée. L'ami et collègue de Cantor, le notable JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831-1916), intervient et demande instamment que l'ouvrage soit imprimé. Cantor a continué à travailler sur les ensembles transfinis pendant encore 18 ans. Il a formulé la fameuse HYPOTHÈSE DU CONTINUUM ESIS et était frustré de ne pas pouvoir la prouver.

Cantor a souffert d'épisodes de dépression et de maladie mentale tout au long de sa vie. Pendant les périodes de malaise, il se détourne des mathématiques et écrit des pièces sur la philosophie et la littérature. (Il est connu pour avoir écrit des essais affirmant que Francis Bacon était le véritable auteur des pièces de Shakespeare.)

Cantor est mort d'une crise cardiaque le 6 janvier 1918, alors qu'il était dans un établissement psychiatrique à Halle, en Allemagne. Même si le travail de Cantor a ébranlé les fondements mêmes des mathématiques établies de son temps, ses idées ont maintenant été acceptées dans la pensée dominante. Les premiers aspects de son travail sur la THÉORIE DES ENSEMBLES sont enseignés dans les écoles élémentaires.

capital Voir INTÉRÊTS.

Cardano, Girolamo (Jérôme Cardan) (1501-1576)
Algèbre italienne Né le 24 septembre 1501 à Pavie, en Italie, le savant Girolamo Cardano est connu comme le premier à publier des solutions à la fois à l' ÉQUATION CUBIQUE générale et à l' ÉQUATION QUARTIQUE dans son traité de 1545 Ars magna (Le grand art). Même si ces résultats sont dus à SCIPIONE DEL FERRO

Machine Translated by Google

(1465-1526), NICCOLÒ TARTAGLIA (1499-1557), et à son assistant LUDOVICO FERRARI (1522-1565), Car dano a unifié les méthodes générales. Il était un mathématicien exceptionnel de l'époque dans les domaines de l'ALGÈBRE, de la TRIGONOMÉTRIE et des PROBABILITÉS.

À l'âge de 19 ans, Cardano entre à l'Université de Pavie pour étudier la médecine mais est rapidement transféré à l'Université de Padoue pour terminer ses études. Il a excellé dans ses études et s'est forgé une réputation de grand débatteur. Il obtient un doctorat en médecine en 1526.

Cardano a créé un petit cabinet médical dans le village de Sacco, mais cela n'a pas du tout réussi. Il obtient un poste de maître de conférences en mathématiques à la Fondation Piatti de Milan, où il s'intéresse aux mathématiques tout en continuant à soigner une petite clientèle de patients.

En 1537, Cardano publie deux textes mathématiques sur les thèmes de l'arithmétique et de la mensuration, marquant le début d'une carrière littéraire prolifique. Il a écrit sur des sujets aussi divers que la théologie, la philosophie et la médecine en plus des mathématiques.

En 1539, Cardano apprit qu'un mathématicien italien du nom de Tartaglia savait comment résoudre des équations cubiques, un sujet d'intérêt pour Cardano puisque lui et Ferrari, son assistant, avaient découvert des méthodes pour résoudre les quartiques, si la méthode des cubiques était claire.
Tartaglia a révélé ses méthodes à Cardano sous la stricte promesse que les détails soient gardés secrets. (À l'époque, les érudits de la Renaissance, tels que Tartaglia, étaient souvent soutenus par de riches mécènes et devaient prouver leur valeur dans des défis et des débats publics. Garder les méthodes secrètes était donc d'une importance capitale.) Lorsque Cardano apprit plus tard qu'un autre érudit du nom de del Ferro avait découvert des méthodes identiques à celles de Tartaglia des décennies plus tôt, Cardano ne se sentit plus obligé de garder la solution secrète et publia tous les détails dans sa célèbre pièce de 1545 Ars magna (Le grand art). Tartaglia a été outré par cet acte, et une dispute amère entre les deux hommes s'ensuivit.

Bien que Cardano attribue à juste titre Ferrari et Tartaglia comme les premiers chercheurs à résoudre l'équation cubique, il convient de noter que Cardano a correctement identifié les approches générales qui ont unifié les méthodes précédentes. Cardano a également reconnu que les solutions impliqueraient souvent des NOMBRES COMPLEXES et a été le premier chercheur à faire des pas vers la compréhension de ces quantités. Il mourut le 21 septembre 1576 à Rome.

Voir aussi RAFAËL BOMBELLI.

Formule de Cardano (formule de Cardano-Tartaglia) Voir ÉQUATION CUBIQUE.

cardinalité Dans l'usage courant, les nombres cardinaux sont les nombres comptés 1, 2, 3, … Ces nombres représentent les tailles d' ensembles FINIS d'objets. (Contrairement aux NOMBRES ORDINAL, cependant, les nombres cardinaux ne tiennent pas compte de l'ordre dans lequel les éléments apparaissent dans un ensemble donné.)

À la fin des années 1800, le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918) a étendu la notion de cardinalité pour inclure un examen significatif de la taille des ensembles infinis. Il a défini deux ensembles comme étant de la même cardinalité si leurs membres peuvent être appariés précisément dans une correspondance biunivoque. Autrement dit, chaque élément du premier ensemble peut être mis en correspondance avec un élément du deuxième ensemble, et vice versa. Par exemple, l'ensemble des personnes {Jane, Lashana, Kabeer} est de même cardinalité que l'ensemble des chiens {Rover, Fido, Spot}, puisqu'on peut tirer des laisses entre les propriétaires et les chiens de sorte que chaque propriétaire se voit attribuer une seule laisse. chien, et chaque chien est tenu en laisse par un seul propriétaire. Chacun de ces ensembles est dit de cardinalité 3. (Les deux ensembles sont de même cardinalité que l'ensemble {1, 2, 3}.) Deux ensembles de même cardinalité sont dits équipotents (équipollent, équinumérable, ou, simplement, équivalent).

L'ensemble de tous les nombres comptés {1, 2, 3, …} est équipotent avec l'ensemble de tous les entiers {…, –2, –1, 0, 1, 2, …}. Cela peut être vu en organisant chaque ensemble de nombres dans une liste et en faisant correspondre les éléments en fonction de leur position dans la liste :

123456…
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
0 –1 1 –2 2 –3 …

Cette procédure montre que deux ensembles dont les éléments peuvent être listés sont équipotents. Un tel ensemble est dit DENUMERABLE, et Cantor dénote la cardinalité de tout ensemble dénombrable $\aleph_0$, prononcé « aleph nul ». Le premier ARGUMENT DIAGONAL de Cantor montre que l'ensemble de tous les nombres comptés, l'ensemble des entiers et l'ensemble de tous les nombres rationnels sont chacun des ensembles dénombrables et ont donc chacun une cardinalité $\aleph_0$. Les mathématiciens ont montré que l'ensemble de tous les NOMBRES ALGEBRIQUES est également dénombrable.

Cependant, tous les ensembles infinis ne sont pas dénombrables, comme le montre le deuxième argument diagonal de Cantor. Pour

Machine Translated by Google

Par exemple, il n'est pas possible de placer l'ensemble de tous les nombres réels dans une liste, et donc, dans un sens bien défini, l'ensemble des nombres réels est "plus infini" que l'ensemble des nombres à compter ou des rationnels. Cantor a noté la cardinalité de l'ensemble des nombres réels c, pour "contin uum". Nous avons:

$$0 < c$$

En général, la cardinalité d'un ensemble A est dite inférieure à la cardinalité d'un autre ensemble B s'il est possible de faire correspondre chaque élément de A avec un élément unique de B, mais pas l'inverse. (Ainsi A est équipotent avec un sous-ensemble propre de B mais pas équipotent avec B lui-même.) Par exemple, la cardinalité de {Jane, Lashana, Kabeer}, que nous notons 3, est inférieure à la cardinalité de l'ensemble {Rover , Fido, Spot, Tess, Rue, Tucker, Jet}, que nous notons 7. Bien que nous puissions associer les propriétaires à des chiens distincts, nous ne pouvons pas associer les chiens à des propriétaires distincts.

Un ensemble infini a la propriété d'être équipotent avec un sous-ensemble propre de lui-même. (Ceci est généralement considéré comme la définition de ce que cela signifie pour un ensemble d'être infini.) Par exemple, puisque l'ensemble des entiers est équipotent avec le sous-ensemble des nombres à compter, l'ensemble des entiers est bien un ensemble infini. Le graphique de la fonction tangente y = tan x entre le point sur l' $\pi x = -\frac{}{2}$ et $\pi x = -\frac{}{2}$ montre que chaque axe des y correspond à un point unique sur Ainsi, l'ensemble l' axe des abscisses dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}$, et vice versa. de tous les points sur l'ensemble de la droite numérique (l' axe des y) a la même cardinalité que le ensemble de tous les points juste dans un intervalle fini. L'ensemble de tous les nombres réels est en effet un ensemble infini.

L'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble A est appelé « ensemble puissance » de A, noté P(A). Par exemple, l'ensemble de puissance de {a,b,c,} est l'ensemble de huit éléments : {Ø,{a}, {b},{c},{a,b},{a,c},{ b,c},A}. (En général, l'ensemble de puissance d'un ensemble à n éléments a 2n éléments.) Dans un certain sens, l'ensemble de puissance de l'ensemble de tous les nombres comptés A = {1,2,3,…} correspond précisément à l'ensemble de tous nombres réels compris entre zéro et un. Cela peut être vu comme suit :

> Étant donné un sous-ensemble B de nombres à compter, soit x le nombre réel écrit sous forme décimale en base deux dont le kième chiffre est 1 si k appartient à B, et 0 sinon. (Ainsi, par exemple, le sous-ensemble de nombres de comptage impairs donne le nombre réel x = .1010101… .) Et inversement, étant donné un nombre réel x compris entre zéro et un, créez un sous-ensemble B de nombres comptés comme dicté par le placement des 1 dans son développement binaire. (Ainsi, par exemple, le nombre réel x = .010000… correspond au sous-ensemble {2}.)

(Il y a une difficulté technique avec cette correspondance. Les nombres 0,01000… et 0,001111…, par exemple, représentent le même nombre réel, mais correspondent à différents sous-ensembles des nombres comptés.
Les mathématiciens ont montré que cette difficulté peut être contournée.) Nous avons :

$$P(N) = R$$

où N désigne l'ensemble des nombres naturels et R l'ensemble des nombres réels.

La cardinalité des nombres comptés est 0 , et l'argument ci-dessus montre que la cardinalité de son ensemble de puissance est c. Cela suggère, comme pour les ensembles finis, que l'ensemble de puissance d'un ensemble est toujours de cardinalité "plus grande" que l'ensemble d'origine. Cantor a utilisé l'argument suivant pour prouver que c'est bien le cas :

> Soit A un ensemble et considérons son ensemble puissance P(A). Puisque tout élément a de A donne lieu à l'élément {a} de P(A), on peut certainement apparier les éléments A avec des éléments distincts de P(A). Nous montrons maintenant, cependant, qu'il n'est pas possible d'inverser le processus et d'apparier les éléments de P(A) avec des éléments distincts de A.
>
> Supposons, au contraire, que nous ayons spécifié une manière d'associer à chaque sous-ensemble de A un élément distinct de A. Par exemple, le sous-ensemble {a,b,c} pourrait être mis en correspondance avec l'élément a, et le sous-ensemble { a,c,e,g,…} avec b. Notez que le premier sous-ensemble contient l'élément a avec lequel il est mis en correspondance, mais que le second sous-ensemble ne contient pas l'élément b avec lequel il est mis en correspondance.
>
> Soit U l'ensemble de tous les éléments de A qui sont utilisés dans la correspondance ci-dessus, mais qui ne sont pas des éléments des sous-ensembles auxquels ils sont affectés. (Par exemple, b ci-dessus est un élément de U, mais a ne l'est pas.) Le sous-ensemble U doit se voir attribuer un élément de A, appelez-le u. Demandez maintenant : êtes -vous membre de U ? L'ensemble U ne peut pas contenir u par la définition même de U.
>
> Mais dans ce cas, u satisfait la définition d'être dans U. Donc, en n'étant pas dans U, u doit

Machine Translated by Google

être en U, et en étant en U, u ne peut pas être en U.
Cette absurdité montre qu'il ne peut y avoir de correspondance significative qui assigne des éléments distincts de A à des sous-ensembles de A après tout.

Etant donné un ensemble infini A, Cantor avait ainsi montré que les ensembles P(A), P(P(A)), P(P(P(A))), … forment une chaîne sans fin d'ensembles infinis de plus en plus grands. Ainsi, dans un sens très précis, il existe une infinité de types différents d'infini. A l'autre extrémité du spectre, l'étude des ensembles dénombrables montre que tout ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable. Ainsi, de tous les ensembles infinis, les ensembles dénombrables sont le « plus petit » type d'ensembles infinis. L' HYPOTHÈSE DU CONTINU demande s'il existe ou non un ensemble infini dont la cardinalité se situe quelque part entre celle de N et P(N) = R.

On pourrait supposer que P(R), l'ensemble puissance de ensemble de tous les points sur la droite des nombres réels, , l'ensemble est R2 de tous les points du plan, ou, de manière équivalente, que l'ensemble de puissance de l'ensemble de tous les points dans l'intervalle unitaire [0,1] est l'ensemble de tous les points à l'intérieur de l'intervalle carré unitaire [0,1] × [0,1]. Étonnamment, ce n'est pas le cas : il y a autant de points dans le carré unitaire qu'il y en a dans un intervalle unitaire. Cela se voit comme suit :

Associer à chaque point (x,y) avec 0 ≤ x ≤ 1 et 0 ≤ y ≤ 1, chacun écrit sous la forme d'un développement décimal infini, x = 0.x1x2x3… et y = 0.y1y2y3…, le nombre réel r = 0 .x1y1x2y2x3y3… dans l'intervalle [0,1], et, inversement, faire correspondre chaque nombre réel r = 0.r1 r2 r3 r4 r5 r6… au point (0.r1 r3 r5…, 0.r2 r4 r6…) dans le carré unité.

(Encore une fois, il y a une difficulté technique causée par ces nombres réels qui ont deux représentations décimales différentes. Par exemple, un demi peut être écrit à la fois comme 0,5000… et 0,4999… Les mathématiciens ont montré que cette difficulté peut être évitée.) Il s'avère que P(R) correspond à l'ensemble de toutes les fonctions réelles possibles y = f(x).

Voir aussi INFINITY ; COURBE DE PEANO .

cardioïde La courbe en forme de cœur tracée par un point sur la circonférence d'un cercle alors qu'il roule autour d'un autre cercle de taille égale est appelée cardioïde. En COORDONNÉES POLAIRES, la cardioïde est donnée par une équation de la forme r = a(1–cosθ) où a est le rayon commun des cercles, et en COORDONNÉES CARTÉSIENNES par

$2(x^2+y^2)+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$

). L' ÉQUA PARAMÉTRIQUE courbe sont x = acosθ(1 + cosθ) et y = asinθ(1 + cosθ). La courbe a une aire une fois et demie l'aire de l'un ou l'autre des cercles générateurs et un périmètre huit fois le rayon.

La cardioïde a d'abord été largement étudiée par le mathématicien italien Johann Castillon, qui a également inventé son nom en 1741.

Voir aussi CYCLOÏDE.

Coordonnées cartésiennes (coordonnées orthogonales, coordonnées angulaires rectilignes) L'une des plus grandes percées dans le développement des mathématiques s'est produite lorsque la géométrie et l'algèbre ont été unies grâce à l'invention du système de coordonnées cartésiennes. Attribuées au mathématicien et philosophe français du XVIIe siècle RENÉ DESCARTES (dont le nom latinisé se lit Carte sius), les coordonnées cartésiennes permettent de représenter chaque point du plan par une paire de nombres.

On commence par sélectionner un point fixe O dans le plan, appelé l'origine, et en traçant à travers lui deux droites numériques perpendiculaires, appelées axes, une horizontale et une verticale, et toutes deux avec le point O à la position zéro sur la ligne. C'est devenu la convention de placer le côté positif de la droite numérique horizontale à droite de O, et le côté positif de la droite numérique verticale au-dessus de O, et d'appeler l'axe horizontal l' axe des x, et l'axe vertical l' axe y. Les coordonnées cartésiennes d'un point P dans le plan sont une paire de nombres (x,y) qui décrit alors l'emplacement de ce point comme suit :

La coordonnée x, ou "abscisse", est la distance horizontale du point à partir de O le long de l'axe horizontal. (Une distance positive représente un point à droite de l'axe vertical ; une distance négative un à gauche.) La coordonnée y, ou « ordonnée », est la distance verticale du point à partir de O le long de l'axe vertical. (Une distance positive représente un point situé au-dessus de l'axe horizontal et une distance négative un point situé en dessous.)

Par exemple, si le coin inférieur gauche de cette page est l'origine d'un système de coordonnées cartésien, avec les axes x et y marqués en unités de pouces, alors le point avec les coordonnées (4, 1) se trouve à quatre pouces à droite du bord gauche de la page, et un pouce au-dessus du bas de la page.

Machine Translated by Google

En étendant cette idée aux trois dimensions, les points dans l'espace peuvent être spécifiés par un triplet de nombres (x, y, z) représentant les distances le long de trois droites numériques mutuellement perpendiculaires. Les axes de coordonnées sont généralement appelés axes x, y et z. Ils se coupent en un point O, appelé l'origine, qui est nul sur les trois droites numériques. Les axes peuvent être orientés pour former un système gaucher ou droitier.

Géométrie des coordonnées

L'avènement d'un système de coordonnées a permis aux mathématiciens, pour la première fois, d'apporter la puissance de l'algèbre à l'étude de la géométrie. Par exemple, les lignes droites sont représentées comme des ensembles de points (x,y) qui satisfont les équations de la forme y = mx + b. Multiplier la PENTE m d'une ligne avec la pente d'une autre permet de déterminer rapidement si ces deux lignes sont perpendiculaires ou non, par exemple. (Le produit des pentes de deux droites perpendiculaires est –1.)

La mathématicienne française NICOLE ORESME (1323-1382) a été la première à décrire une manière de représenter graphiquement la relation entre une variable indépendante et une variable dépendante, et donc la première à faire des pas vers l'union de la géométrie et de l'algèbre. La construction explicite de ce que nous appellerions un système de coordonnées est apparue pour la première fois avec les travaux du juriste et mathématicien amateur français PIERRE DE FERMAT (1601-1665). En partant d'une ligne de référence horizontale pour représenter une variable indépendante x, Fermat représenterait graphiquement la relation d'une seconde variable y avec celle-ci comme un segment de ligne, maintenu à un angle fixe par rapport à la ligne de référence, dont la longueur varierait en fonction de la variable y lorsqu'elle glisse le long de l' axe des x. Cependant, Fermat ne pensait pas en termes d'identification d'un deuxième axe, ni n'exigeait que le segment de droite représentant y soit perpendiculaire à l' axe des x.

Dans son célèbre texte de 1637 La géométrie (Géométrie), René Descartes décrit indépendamment des méthodes similaires pour représenter graphiquement les relations algébriques. Parce que les travaux de Fermat n'ont été publiés qu'après sa mort, la découverte de la géométrie des coordonnées a été attribuée à Descartes.

Parce que Fermat et Descartes ont interprété la variable inconnue y dans une relation algébrique comme une longueur physique, les deux chercheurs n'ont jamais considéré que les coordonnées positives. Le mathématicien anglais JOHN WALLIS (1616-1703) fut le premier à introduire la possibilité de coordonnées négatives. L'idée de fixer une seconde fixe l'axe des y, perpendiculaire à l' axe des x n'était pas populaire jusqu'au milieu des années 1700. C'était une idée qui semblait évoluer progressivement. SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) est considéré comme l'initiateur des COORDONNÉES POLAIRES.

Voir aussi COORDONNÉES ; GRAPHIQUE D'UNE FONCTION.

Produit cartésien (produit vectoriel, produit direct externe, ensemble de produits, produit direct d'ensemble) Étant donné deux ensembles A et B, leur produit cartésien, noté A × B, est l'ensemble de toutes les paires ordonnées (a,b), où a A et b B. Par exemple, si A = {1,2,3} et B = {α,β}, alors :

UNE × B = { (1,α), (2,α), (3,α), (1,β), (2,β), (3,β) }

Ceci est différent de l'ensemble B × A.

Si les ensembles A et B sont tous deux finis, avec respectivement n et m éléments, alors A × B est un ensemble fini avec nm éléments. Le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845–1918) a montré que si A et B sont tous deux des ensembles dénombrables infinis , alors leur produit cartésien A × B est à nouveau dénombrable.

Le produit cartésien de trois ensembles A, B et C, noté A × B × C, est défini comme l'ensemble de tous les triplets ordonnés (a,b,c), avec a A, b B et c C Le produit cartésien de toute collection finie d'ensembles est défini de manière similaire. Toute SEQUENCE peut être considérée comme un élément du produit cartésien d'un nombre dénombrable d'ensembles.

Si deux ensembles A et B ont une structure particulière (ils peuvent tous deux être des GROUPES ou des ESPACES VECTEURS, par exemple), alors il est généralement possible de donner au produit cartésien A × B la même structure. Par exemple, si A et B sont des groupes avec des opérations de groupe * et •, respectivement, alors A × B a la structure d'un groupe avec une opération de groupe donnée par :

$$(a1 , b1) \cdot (a2 , b2) = (a1 * a2 , b1 \bullet b2)$$

Le quadrigroupe de Klein est le produit cartésien du groupe de deux éléments Z2 = {0,1} avec lui-même. (L'opération de groupe pour Z2 est ajoutée dans le mod 2 MODULAR ARITHMETIC.)

Voir aussi THÉORIE DES ENSEMBLES.

éliminer les neuf Les RÈGLES DE DIVISIBILITÉ montrent que le reste d'un nombre, lorsqu'il est divisé par 9, est la somme de ses chiffres. Par exemple, 59 432 641 laisse un

Machine Translated by Google

reste de 5 + 9 + 4 + 3 + 2 + 6 + 4 + 1 = 34 lorsqu'il est divisé par 9, ce qui correspond à un reste de 3 + 4 = 7. Tout ensemble de chiffres dont la somme est égale à 9, comme le 5 et les 4 en première et troisième positions du nombre ci-dessus peuvent être ignorés lors de ce calcul, car ils ne contribueront pas au reste.

La méthode de "rejeter les neufs" est le processus de suppression de groupes de chiffres totalisant 9. La somme des chiffres qui survivent est le reste que le nombre donne lors de la division par 9. Par exemple, 59 432 641 → 932 641 → 934 → 34 montre, encore une fois, que ce nombre laisse un reste de 3 + 4 = 7 lorsqu'il est divisé par 9.

Cette méthode est souvent utilisée pour vérifier le travail arithmétique. Par exemple, nous pouvons déterminer rapidement que 563 × 128 ne peut pas être égal à 72 364. Lors de la division par 9, 563 laisse un reste de 5, 128 un reste de 2, et ainsi leur produit laisse un reste de 5 × 2 = 10, qui est 1. Pourtant 72 364 a un reste de 4.

De longues listes d'additions, de soustractions et de multiplications peuvent être rapidement vérifiées de cette façon. Bien sûr, des erreurs peuvent toujours être présentes si, par hasard, les restes correspondent. Par exemple, rejeter les neufs ne détectera pas que 632 × 723 = 459 636 est incorrect.

Catalan, Eugène Charles (1814–1894) Belge Théorie des nombres Né le 30 mai 1814, le mathématicien Eugène Catalan est surtout connu pour ses travaux sur la THÉORIE DES NOMBRES et pour la célèbre suite de nombres qui porte son nom. En 1844, Catalan a conjecturé que 8 et 9 sont les deux seuls entiers consécutifs qui sont tous deux des puissances non triviales (8 = 23 et 9 = 32). L'établissement de cette affirmation, aujourd'hui connue sous le nom de CONJECTURE CATALAN, a bloqué les mathématiciens pendant plus d'un siècle. Il n'a été résolu que récemment.

La carrière universitaire de Catalan a été mouvementée. Après être entré à l'École polytechnique en 1833, il en fut expulsé l'année suivante pour s'être engagé dans une activité politique radicale. Il reçut plus tard la permission de revenir pour terminer ses études et, en 1838, on lui proposa un poste de chargé de cours à l'institution, qu'il accepta.
Sa conduite politique, cependant, a entravé sa capacité à progresser au-delà de ce poste d'entrée de gamme.

Catalan a travaillé dans le domaine des FRACTIONS CONTINUES et s'est fait connaître en publiant une solution simplifiée au « problème de la division polygonale » de LEONHARD EULER . Ce défi demande le nombre de façons de diviser un polygone régulier en triangles en utilisant des diagonales non sécantes. Sans être le premier à résoudre le problème (en fait, le problème a d'abord été énoncé et résolu par le mathématicien hongrois du XVIIIe siècle JA Segner, puis étudié par Euler), le catalan a utilisé une approche particulièrement élégante. Son article de 1838 sur le sujet, "Note sur une équation aux différences finies" (Note sur une équation aux différences finies), était très influent en raison de la méthode qu'il détaillait. La séquence de nombres qui se pose dans l'étude du problème est aujourd'hui appelée les NOMBRES CATALAN. Ils restent son héritage permanent.

Catalan est décédé le 14 février 1894 à Liège, en Belgique.

Conjecture catalane Dans sa lettre de 1844 au Journal de Crelle, EUGÈNE CHARLES CATALAN conjecture que les entiers 8 et 9 sont les deux seuls entiers consécutifs qui sont tous les deux des puissances (8 = 23 et 9 = 32). Il n'a pas été en mesure de prouver son affirmation, et établir la véracité ou la fausseté de la conjecture est devenu un problème ouvert de longue date. En avril 2002, le mathématicien amateur Preda Mihailescu a annoncé à la communauté des mathématiques qu'il avait terminé une preuve démontrant que l'affirmation de Catalan était vraie. Auparavant, Mihailescu avait prouvé une série de résultats connexes, tout en travaillant dans une société suisse d'empreintes digitales et en explorant les mathématiques comme un intérêt extérieur. Les mathématiciens sont actuellement en train de revoir sa dernière étape du travail.

Nombres catalans En 1838, EUGÈNE CHARLES CATA LAN étudie le problème de trouver le nombre de manières différentes d'arranger n paires de parenthèses. Par exemple, il y a une façon d'arranger un ensemble : ( ), deux façons d'arranger deux paires : ( ) ( ) et (( )), et cinq façons d'arranger trois paires : ((( ))), (( ) ( )), (( )) ( ), ( ) (( )), et ( ) ( ) ( ). Existe-t-il une formule générale pour le nombre de façons d'arranger n paires de parenthèses ? Ce puzzle est aujourd'hui connu sous le nom de "problème de Catalan". Comme Catalan l'a montré, la solution est donnée par la formule :

$$C_n = \frac{2\,6\,10 \quad L \quad -4\,2)\,n}{((1)\,!\,n +}$$

donnant la séquence de nombres C1 = 1, C2 = 2, C3 = 5, Il C4 = 14, C5 = 42, …, maintenant appelés les nombres catalans. est commode de poser C0 = 1. Quelques manipulations algébriques

Machine Translated by Google

montre que les nombres catalans peuvent également être exprimés en termes de COEFFICIENTS BINÔMES :

$$C_n = \frac{2^n 135\,2\,1)\cdot \quad n}{((1)! + n}$$

$$= \frac{246\,2\,135\,2\,1)n)}{n!} \cdot \frac{\quad n}{((1)! + n}$$

$$= \frac{1}{1n+} \cdot \frac{(2n}{)!!!nn}$$

$$= \frac{1}{1n+} \cdot \frac{2n}{n}$$

Ainsi, les nombres catalans peuvent être trouvés dans le TRIANGLE DE PASCAL comme l'entrée du milieu de chaque rangée alternative divisée par un de plus que le numéro de rangée, considérant le sommet du triangle comme la rangée zéro.

On peut montrer que les nombres catalans satisfont la relation :

$$C0 = 1$$
$$Cn = C0Cn–1 + C1Cn–2 + \quad \cdots + Cn–1C0$$

Les nombres catalans apparaissent comme la solution d'un nombre surprenant de problèmes mathématiques différents. Nous n'énumérons ici que quelques exemples.

1. Problème de division d'un polygone d'Euler : Combien y a-t-il de manières de diviser un polygone à (n + 2) côtés en n triangles en utilisant les diagonales non sécantes du polygone ?

Un polygone à trois côtés, c'est-à-dire un triangle, est déjà subdivisé de manière appropriée. Il existe une solution au problème, à savoir ne rien faire. Un carré peut être subdivisé en deux triangles de deux manières différentes. On peut vérifier qu'un pentagone peut être ainsi subdivisé de cinq manières différentes. En général, la solution à cette énigme est le nième nombre catalan.

2. Exposants échelonnés : combien de façons peut-on interpréter un exposant échelonné ?

Par exemple, 32 n'a qu'une seule interprétation : cela signifie 3 × 3 = 9. L'expression 23 s'interprète de ^{4}, cependant, peut être entre deux façons : (23) ^{4} 2(34) = 4096 ou = 241785163922925834941235 2. En général, un exposant en échelle avec (n + 1) termes peut être interprété Cn différentes manières. (Ce problème est équivalent au puzzle original des parenthèses de Catalan.)

3. Poignées de main à travers une table : De combien de façons différentes n paires de personnes assises à une table circulaire peuvent-elles se serrer la main simultanément ? Aucune paire de poignées de main ne peut se croiser.

Deux personnes assises à une table ne peuvent se serrer la main que dans un sens. Quatre personnes peuvent accomplir l'exploit de deux manières seulement. (Les poignées de main diagonales se croisent.) En général, n paires de personnes peuvent se serrer la main de différentes manières, car on peut interpréter deux poignées de main comme une paire de parenthèses.

4. Montée d'escaliers : en partant du bas d'un escalier, de combien de manières peut-on monter n marches et descendre n marches, dans n'importe quel ordre ? (Vous reviendrez nécessairement au pied des marches à la fin de la marche.)

Il y a une façon de faire deux pas : un pas vers le haut suivi d'un pas vers le bas, et deux façons de faire quatre pas : deux vers le haut, deux vers le bas ou un vers le haut, un vers le bas, répétés deux fois. En général, il existe Cn façons d'accomplir cette tâche. (En considérant une parenthèse gauche comme une « étape vers le haut » et une parenthèse droite comme une « étape vers le bas », nous pouvons voir que ce puzzle est également équivalent au problème original de Catalan.)

5. Problème de sommation : Sélectionnez n nombres dans l'ensemble {1,2,3,…,2n} afin que leur somme soit un multiple de n + 1. Est-ce possible ? Si oui, de combien de manières différentes ?

Considérons le cas n = 3, par exemple. Il existe cinq façons de sélectionner trois nombres dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} avec une somme divisible par quatre : 1 + 2 + 5 = 8 ; 1 + 3 + 4 = 8 ; 1 + 5 + 6 = 12 ; 2 + 4 + 6 = 12 ; 3 + 4 + 5 = 12. En général, ces énigmes peuvent toujours être résolues, et il y a Cn façons de les faire.

Voir aussi CONJECTURE CATALAN.

caténaire La forme de la courbe formée par un câble souple uniforme suspendu librement entre deux points, tel qu'un câble électrique entre deux poteaux télégraphiques, est appelée caténaire. GALILEO GALILEI (1564–1642) pensait que cette courbe était une PARABOLE, mais le savant allemand Joachim Jungius (1587–1657) prouva plus tard que cela ne pouvait pas être le cas. Jacques Bernoulli (1654-1705) du célèbre

Machine Translated by Google

La FAMILLE BERNOULLI a été la première à écrire la formule de la caténaire. A constantes près, il est donné par :

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Il s'agit de la fonction cosinus hyperbolique de l'ensemble des FONCTIONS HYPERBOLIQUES. Ingénieurs, dans la conception de ponts suspendus tels que le Golden Gate Bridge à San Francisco, font largement usage de cette fonction dans leur travail. Le nom caténaire vient du mot latin catena pour "chaîne".

Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857) Français Analyse, Calcul, Théorie des nombres Né le 21 août 1789, le savant français Augustin-Louis Cauchy est considéré comme l'un des mathématiciens les plus importants de



Augustin-Louis Cauchy, éminent mathématicien du XIXe siècle, a été le premier à utiliser la notion de « limite », telle qu'elle connu, pour développer un modèle solide de continuité et de convergence dans la théorie du calcul. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de la Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Son temps. Avec 789 articles mathématiques et sept manuels influents à son actif, Cauchy a apporté des contributions significatives à l'étude de la THÉORIE DES NOMBRE, ANALYSE, THÉORIE DES GROUPES, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, et PROBABILITÉ. Dans son célèbre texte de 1821, Cours d'ana lyse , Cauchy est le premier à donner un sens exact et rigoureux des termes dérivés . et intégrale telle qu'utilisée dans CALCULUS par le développement de la notion de LIMITE. Cauchy aussi correctement définit les termes de continuité et de convergence. Son insistance sur l'absolue nécessité de rigueur et de clarté dans tout les mathématiques ont eu un effet durable et ont fixé les normes de rigueur exigée aujourd'hui de toute recherche mathématique.

Après avoir été diplômé de l'École Polytechnique en 1807, licencié en mathématiques, Cauchy poursuit une carrière d'ingénieur. Considéré comme prometteur praticien en la matière, Cauchy est affecté à la projet du canal de l'Ourcq et à 21 ans a réussi à recevoir une commission de haut rang à Cherbourg en tant que Ingénieur Militaire.

Malgré sa vie professionnelle bien remplie, Cauchy a continué à s'intéresser aux mathématiques. En 1811, il prouva un résultat sur la géométrie des polyèdres, qu'il a soumis pour publication. Il a reçu de nombreux éloges pour cet accomplissement et a décidé de changer de carrière et poursuivre des recherches en mathématiques à plein temps. Un an plus tard il revient à Paris et commence à chercher une faculté poste dans une institution universitaire. Cauchy était enfin obtient un poste de professeur adjoint à l'École polytechnique en 1815.

Pendant tout ce temps, Cauchy a continué à produire et à publier des résultats mathématiques. La même année que sa nomination, Cauchy remporte le Grand Prix de l'Académie Royale des Sciences pour ses remarquables découvertes mathématiques sur la théorie des ondes. Cette reconnaissance lui a valu une certaine notoriété dans la communauté scientifique, mais la vraie renommée est venue à Cauchy quand, un an plus tard, il a résolu un problème exceptionnel posé par PIERRE DE FER MAT (1601-1665) sur les propriétés des NOMBRES FIGURÉS. Cauchy avait maintenant prouvé qu'il était un expert dans un nombre étonnamment élevé de domaines disparates.

Cauchy a publié un nombre incroyable d'articles durant cette première période de sa vie, au rythme d'autant comme deux par semaine. Il était si prolifique que les éditeurs de la revue française Comptes Rendu a imposé un quota lui. En réponse, Cauchy a persuadé un membre de la famille, qui travaillaient dans le domaine de l'édition, pour créer une nouvelle journal qui ne contenait que des papiers de lui !

Machine Translated by Google

L'idée maîtresse d'une grande partie du travail de Cauchy était de rendre les mathématiques rigoureuses et précises. Il a tenu à apporter clarté, précision et rigueur dans tous les cours qu'il a enseignés et dans ses travaux publiés. Son célèbre texte de 1821 était en fait un livre de cours pour les étudiants développé avec l'intention de "faire le calcul de la bonne manière". Il est juste de dire que Cauchy a influencé tout le cours de la recherche mathématique en soulignant et en exigeant la nécessité d'une clarté et d'un soin absolus dans le développement d'idées nouvelles (et même déjà établies). On raconte que le grand mathématicien PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827), après avoir assisté à une conférence donnée par Cauchy sur l'importance de la convergence d'une série infinie, courut rapidement chez lui vérifier la convergence de toutes les séries infinies qu'il avait utilisées. dans son texte populaire déjà publié Mécanique céleste sur la mécanique céleste.

En 1826, Cauchy publie des travaux fondateurs dans le domaine de la théorie des nombres et, en 1829, il définit, pour la première fois, la notion de fonction complexe d'une variable complexe.

Cauchy quitte Paris et la politique brassicole du régime royal en 1830. À son retour un an plus tard, il refuse de prêter serment d'allégeance au nouveau régime et perd par conséquent son poste universitaire. Ce n'est qu'au renversement de Louis Philippe en 1848 que Cauchy retrouve sa position universitaire. Même si le rythme de publication de Cauchy a considérablement ralenti pendant cette période difficile, il a accompli d'importants travaux sur la théorie des équations différentielles et des applications à la physique mathématique au cours de cette période.

Cauchy a laissé une marque permanente sur le développement du calcul avec son travail sur le raffinement de la base logique du sujet et a grandement influencé l'étude des fonctions complexes. Un certain nombre de concepts fondamentaux dans le domaine de l'analyse sont nommés en son honneur, y compris une paire d'équations connues sous le nom d'équations de Cauchy-Riemann qui déterminent si une fonction complexe est différentiable ou non. Cauchy est mort à Sceaux, près de Paris, France, le 22 mai 1857. Ses œuvres complètes, Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy (Les œuvres complètes d'Augustin Cauchy), rassemblées sous les auspices de l'Académie des Sciences, ont été publiées au fil des ans. 1882 à 1970 dans un total de 27 volumes.

Cavalieri, Bonaventura Francesco (1598–1647) Géométrie italienne Né à Milan, Italie, en 1598 (sa date de naissance exacte n'est pas connue), mathématicien et disciple de GALILEO, Bonaventura Cavalieri est surtout connu pour son ouvrage de 1635 Geometria indivisibilibus continuorum (Une nouvelle géométrie des indivisibles continus) dans lequel il a introduit sa célèbre « méthode des indivisibles » pour déterminer les aires et les volumes des figures courbes.
Ce travail est considéré comme un précurseur de toute la théorie du CALCUL INTÉGRAL.

Alors qu'il était encore un garçon, Cavalieri a rejoint l'ordre religieux Jesuati à Milan. En 1616, il est transféré au monastère de Pise, où il rencontre Galilée et développe un intérêt pour les mathématiques. Même si Cavalieri a enseigné la théologie pendant de nombreuses années et est devenu diacre dans l'ordre, il a activement recherché un emploi de mathématicien. En 1629, il obtient un poste de chaire de mathématiques à Bologne.

A cette époque, Cavalieri avait développé sa méthode des indivisibles. Basée sur la méthode d'épuisement d'ARCHIMÈDE et sur la théorie de l'infiniment petit de JOHANNES KEPLER , la technique de Cavalieri a fourni un moyen de calculer rapidement l'aire et les volumes de certaines figures géométriques auparavant jugées trop difficiles à analyser. Le célèbre ouvrage de 1635 de Cavalieri décrivant ces méthodes n'a cependant pas été bien accueilli et a été largement attaqué pour son manque de rigueur.
En réponse, Cavalieri a publié un article révisé, Exercitationes geometryae sex, qui a résolu avec succès toutes les préoccupations. Cette deuxième pièce a été reconnue comme un chef-d'œuvre et considérée comme un texte d'étude nécessaire pour tous les savants du XVIIe siècle.

Cavalieri a également étudié et écrit de manière approfondie sur les sujets des LOGARITHMES, des SECTIONS CONIQUES, de TRIGONOME TRY, de l'optique et de l'astronomie. Il a développé une règle générale pour calculer la distance focale des lentilles et a décrit les principes et la conception d'un télescope à réflexion.

Cavalieri est décédé le 30 novembre 1647 à Bologne, en Italie. Son nom apparaît dans tous les manuels de géométrie du lycée d'aujourd'hui pour le principe qu'il a conçu.

Voir aussi PRINCIPE DE CAVALIERI .

Principe de Cavalieri mathématicien italien BONAVEN TURA CAVALIERI (1598-1647) a identifié un principe général aujourd'hui connu sous le nom de principe de Cavalieri :

> Des solides de hauteur égale ont des volumes égaux si des sections faites par des plans parallèles aux bases à la même distance de ces bases ont des aires égales.

Machine Translated by Google

Il est basé sur l'idée que le volume d'un jeu de cartes, par exemple, ne change pas même si le jeu est biaisé. Un examen attentif de VOLUME explique pourquoi le principe de Cavalieri est vrai.

Cayley, Arthur (1821–1895) British Matrix theory, Geometry, Abstract algebra, Analysis Né le 16 août 1821 à Richmond, en Angleterre, Arthur Cayley est connu comme un écrivain prolifique, ayant produit 967 articles en tout, couvrant presque tous les aspects des mathématiques modernes. Son travail le plus important, Memoir on the Theory of Matrices (1858) a établi le nouveau domaine des matrices et de l'algèbre MATRICE . Cayley a étudié les groupes abstraits et a été le premier à étudier la géométrie dans un espace à n dimensions avec n un nombre supérieur à trois.

Cayley a démontré une grande aptitude pour les mathématiques dans son enfance. Un instituteur a reconnu son talent et a encouragé le père de Cayley à lui permettre de poursuivre des études en mathématiques plutôt que de quitter l'école et d'entrer dans le commerce de détail familial. Cayley a fréquenté le Trinity College de Cambridge et a obtenu son diplôme en 1842. Incapable de trouver un poste universitaire en mathématiques, Cayley a obtenu un diplôme en droit et a pratiqué le droit pendant 14 ans. Pendant ce temps, cependant, Cayley a activement étudié les mathématiques et publié plus de 250 articles de recherche. En 1863, il est finalement nommé professeur de mathématiques à Cambridge.

En 1854, alors qu'il travaillait comme avocat, Cayley écrivit "Sur la théorie des groupes en fonction du symbolique = 1" et l'équation θ n d'autres articles importants dans lesquels définissait, pour la première fois, la notion de GROUPE abstrait. À cette époque, les seuls groupes connus étaient les groupes PER MUTATION , mais Cayley réalisa que les principes mathématiques sous-jacents à ces structures s'appliquaient également aux matrices, aux systèmes numériques et aux transformations géométriques. Ce travail a permis à Cayley de commencer à analyser la géométrie de l'espace de dimension supérieure. Ceci, à son tour, associé à son algèbre matricielle nouvellement développée, a fourni la base de la théorie de la mécanique quantique, telle que développée par Werner Heisenberg en 1925.

Cayley fut élu président de la British Association for the Advancement of Science en 1883. De 1889 à 1895, toute la production mathématique de Cayley fut rassemblée en un seul ouvrage en 13 volumes, The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley . Ce projet a été supervisé par Cayley lui-même jusqu'à sa mort le 26 janvier 1895, date à laquelle seulement sept vol umes avaient été produits. Les six volumes restants ont été édités par AR Forsyth.

Voir aussi THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON .

Théorème de Cayley-Hamilton Le mathématicien anglais ARTHUR CAYLEY (1821-1895) et le mathématicien irlandais SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) ont noté que toute MATRICE carrée satisfait une équation polynomiale. Pour voir cela, notez d'abord que l'ensemble de toutes les matrices carrées n × n avec des entrées réelles forme un ESPACE VECTORIEL sur les nombres réels. Par exemple, l'ensemble des matrices carrées 2 × 2 est un espace vectoriel à quatre dimensions avec des éléments de base :

$$\begin{matrix} dix & 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ dix & \end{matrix} \quad , \text{ et } \quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

et toute matrice 2 × 2 $UN = \begin{matrix} un & B \\ CD \end{matrix}$ est bien un linéaire combinaison de ces quatre matrices linéairement indépendantes :

$$A = \begin{matrix} un & B \\ abcd & \\ CD & \end{matrix} = a \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} + b \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} + c \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} + d \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

En général, l'ensemble de toutes les matrices carrées n × n n^2 est un espace vectoriel à 2 dimensions. En particulier alors, pour toute matrice A n × n , le n doit $n^2 + 1$ matrices I, A, A^2 , A^3 , …, A^{n^2} être linéairement dépendant, c'est-à-dire qu'il existe une combinaison linéaire de ces éléments qui donne la matrice nulle :

$$c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$$

pour certains nombres c_0 , …, c_{n^2} . Ceci montre:

> Toute matrice carrée n × n satisfait une équation polynomiale de degré au plus n^2.

Cayley et Hamilton sont allés plus loin et ont prouvé que toute matrice carrée satisfait son propre « polynôme caractéristique » :

> Soit A une matrice carrée n × n et définissons x comme une variable. Soustrayez x de chaque entrée diagonale de A et calculez le DÉTERMINANT de la matrice résultante. Cela donne un polynôme en x

Machine Translated by Google

de degré n. Alors la matrice A satisfait cette équation polynomiale particulière.

Par exemple, considérons la matrice 2 × 2 $A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix}$.

Alors le « polynôme caractéristique » de cette matrice est :

$$\det \begin{matrix} 2-x & 1 \\ 3 & 4-x \end{matrix} = (2-x)(4-x) - 3 = x^2 - 6x + 5$$

On vérifie maintenant que

$$A^2 - 6A + 5 = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix}^2 - 6 \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} + 5 \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{matrix} - \begin{matrix} 12 & 6 \\ 18 & 24 \end{matrix} + \begin{matrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

est bien la matrice nulle.

Voir aussi MATRICE D'IDENTITÉ ; DÉPENDANCE LINÉAIRE ET INDÉPENDANT.

fonction plafond Voir SOL/PLAFOND/ PARTIE FRACTIONNELLE LES FONCTIONS.

centre de gravité (point d'équilibre) L'endroit où le poids de l'objet maintenu dans l'espace peut être considéré comme agissant est appelé centre de gravité de l'objet.
Par exemple, une tige uniforme s'équilibre à son point médian, et cela est considéré comme son centre de gravité. Une plaque angulaire rectangulaire plate faite d'un matériau uniforme maintenue parallèlement aux balances au sol en son centre. Ce point est le centre de gravité de la figure.

LA LOI DU LEVIER D' ARCHIMÈDE trouve le point d'équilibre P d'un système de deux masses m1 et m2 maintenues dans l'espace. Le système à deux masses peut alors être considéré comme une seule masse m1 + m2 située en P.

Le centre de gravité d'un système de trois masses dans l'espace peut être trouvé en trouvant le point d'équilibre de seulement deux masses, en utilisant la loi du levier d'ARCHIMÈDE , puis en appliquant la loi une seconde fois pour trouver le centre de gravité de ce point d'équilibre et la troisième masse. Cette procédure peut, bien sûr, être étendue pour trouver le centre de gravité de toute collection finie de masses. (Un emplacement calculé de cette manière est techniquement le centre de gravité du système. Si la force de gravité est supposée être uniforme, alors le centre de gravité coïncide avec le centre de gravité du système.)

Ce principe peut être étendu pour localiser le centre de gravité de figures arbitraires dans le plan (considérées comme des objets plats et uniformément denses tenus parallèlement au sol). Si la figure est composée d'une collection finie de rectangles collés ensemble, on localise le centre de chaque rectangle, la masse de chaque rectangle, puis on considère le système comme une collection de masses individuelles à différents endroits. L'application de la loi d'Archimède du levier comme ci-dessus localise le centre de gravité de la figure. Si une figure ne peut être approchée que comme une union de rectangles, on peut trouver l'emplacement approximatif du centre de gravité via ce principe, puis améliorer l'approximation en prenant le résultat LIMITE de l'utilisation de rectangles de plus en plus fins dans les approximations . Cette approche donnera une formule INTEGRAL pour l'emplacement du centre de gravité.

Voir aussi THÉORÈME DE CEVA ; SOLIDE DE RÉVOLUTION.

théorème de la limite centrale Au début des années 1700, des scientifiques d'un large éventail de domaines ont commencé à remarquer l'apparition récurrente de la DISTRIBUTION NORMALE dans leurs études et leurs expériences. Toute mesure qui représente une valeur moyenne d'un échantillon, ou une valeur agrégée d'une série de résultats, a tendance à suivre cette distribution classique en forme de cloche. Les travaux du MARQUIS DE PIERRE-SIMON LAPLACE en 1818 et d'Aleksandr Mikhailovich Lyapunov en 1901, et d'autres, ont conduit à l'établissement du théorème de la limite centrale :

> Si une expérience implique le calcul répété de la valeur moyenne de N mesures (un ensemble différent de N mesures à chaque fois), alors l'ensemble des valeurs moyennes obtenues suit de très près une distribution normale, même si les expériences originales ne le font pas. Plus la valeur de N est grande, meilleure est l'approximation d'une courbe normale.

On peut aller plus loin et dire que si les expériences originales ont une moyenne μ et un écart type σ, alors la collection de valeurs moyennes a aussi une moyenne μ, mais

Machine Translated by Google

écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Par exemple, une usine peut produire des ampoules emballées dans de grands cartons d'expédition, 100 par carton. Même si la durée de vie d'un individu les ampoules peuvent varier énormément suite à aucun reconnaissable distribution des valeurs, le théorème central limite affirme que la durée de vie moyenne des ampoules par carton est donnée par une distribution normale. Étant donné que la taille d'un individu est l'effet global du taux de croissance d'un grand nombre de cellules individuelles, la distribution des hauteurs de les hommes et les femmes est essentiellement normale, de même que la distribution des hauteurs de presque tout ce qui pousse — chats, érables des arbres ou des carottes, par exemple.

Une autre version du théorème de la limite centrale est utile lorsqu'on essaie de déterminer quelle proportion p pour cent de l'ensemble de la population possède une certaine propriété (comme "A le groupe sanguin AB" ou "Va voter Republi peut novembre prochain"). Comme il est impossible d'examiner chaque individu sur le globe, ou interrogez chaque individu dans le pays, on peut examiner un échantillon d'individus et calculer le pourcentage dans cet échantillon avec le propriété recherchée. Le théorème de la limite centrale affirme également :

> Si de nombreux échantillons différents de N individus sont examinés, puis la distribution des pourcentages de ces échantillons possédant un suit de très près une distribution normale (et plus la valeur de N est grande, meilleure est l'approximation d'une courbe normale).
> Cette distribution a pour moyenne p, le vrai pourcentage de la population avec cette propriété, et
> écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{p(100-p)}{N}}$.

Les deux versions du théorème de la limite centrale permettent aux statisticiens de faire des inférences et des prédictions basées sur des données statistiques.

Voir aussi GEORGE PÓLYA ; STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

Théorème de Ceva Soient P, Q et R , respectivement, points sur les côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC. (Il est permis d'étendre un ou plusieurs côtés de la triangle.) Ensuite, les lignes reliant P à A, Q à B, et R à C sont CONCURRENTS si et seulement si :

$$\frac{BP}{PC}\,\frac{QC}{AQ}=1\frac{RA}{RB}$$

Ici BP, par exemple, représente la distance entre points B et P, et le rapport est considéré comme positif $\frac{BP}{PC}$ si la direction de B à P est la même que la direction de P à C, et négative si elles sont opposées directions.

Ce résultat est dû au mathématicien italien Giovanni Ceva (1647-1734). Cela équivaut à l'affirmation que l'opération consistant à trouver le CENTRE DE GRAVITÉ du point masses est ASSOCIATIVE. Par exemple, étant donné trois masses aux emplacements A, B et C dans un plan, on pourrait localiser le centre de masse de l'ensemble du système en calculant d'abord le centre de masse de seulement deux points, puis calculez le centre de masse de ce résultat avec le troisième point. Ceva a prouvé que le même résultat final est produit sans importe quels deux points sont choisis initialement.

Le théorème de Ceva peut être prouvé mathématiquement par faisant un usage répété du THÉORÈME DE MÉNÉLAS .

règle de chaîne (fonction d'une règle de fonction) Si y = f(u) est une fonction d'une quantité u, qui à son tour est une fonction d'une autre quantité x, u = g(x) disons, alors y lui-même peut être pensé comme une fonction de x comme une COMPOSITION de fonctions : y = f(g(x)). La règle de la chaîne stipule que le taux de variation de y par rapport à la quantité x est donnée par la formule:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

Cela peut aussi s'écrire : $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$. Pour exemple, pour différencier $y = (x^2 + 2)^{100}$, on peut écrire $y = u^{100}$, où $u = x^2 + 2$ et donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(u^{100}) = \frac{d}{du}(u^{100})\,\frac{du}{dx} = 100u^{99}\cdot 2x$$

$$= 200x(x^2+1)^{99}$$

La règle de la chaîne peut être prouvée en utilisant la définition formelle d'une dérivée en tant que LIMITE :

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x))g'(x)$$

Machine Translated by Google

Intuitivement, le concept est facile à saisir si nous considérons les dérivés comme des taux de variation. Par exemple, si y change a fois aussi vite que u, et u change b fois aussi vite que x, alors on s'attend à ce que y change ab fois plus vite que x.

La règle de la chaîne s'étend aux fonctions de plus d'une variable. Par exemple, si z = f(x, y) est une fonction de deux variables avec chacune de x et y une fonction de t, alors on peut montrer que la dérivée totale de z par rapport à t est donnée par :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dt}{dt}$$

Voir aussi DERIVEE PARTIELLE.

changement de variable Voir INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION.

chaos Une situation dans laquelle un SYSTÈME DYNAMIQUE peut sembler aléatoire et imprévisible est appelée chaos.
Plus précisément, les mathématiciens définissent un système dynamique comme étant chaotique si l'ensemble de tous les points d'équilibre du système forme une FRACTALE.

Le terme chaos a été introduit par le mathématicien américain James Yorke et le mathématicien chinois Tien-Yien Li dans leur article fondateur de 1975 sur les itérations de fonctions sur la droite des nombres réels.

polynôme caractéristique Voir CAYLEY-HAMILTON THÉORÈME.

Chebyshev, Pafnuty Lvovich (Tchebyshev) (1821– 1894) Russe Théorie des nombres, analyse, statistique Né le 16 mai 1821 à Okatova, en Russie, Pafnuty Chebyshev est connu pour ses importantes contributions à la théorie des nombres, à l'analyse et aux probabilités . et le développement de statistiques inférentielles. En 1850, il a prouvé une conjecture posée par le mathématicien français Joseph-Louis François Bertrand (1822-1900) déclarant que pour toute valeur n > 3, il y a au moins un PRIME entre n et 2n - 2. Chebyshev est également connu pour avoir fondé un influente école de mathématiques à Saint-Pétersbourg.

Chebyshev est entré à l'Université de Moscou en 1837 et a obtenu quatre ans plus tard un diplôme de premier cycle en mathématiques. Conduit par un sans vergogne

Désireux d'obtenir une reconnaissance internationale, Cheby shev s'est plongé dans le travail mathématique. Il obtient une maîtrise en 1846 dans la même institution, tout en publiant des résultats sur la théorie et les méthodes d'intégration, la convergence des TAYLOR SERIES et le développement de l'analyse. Chebyshev a également examiné les principes de la théorie des probabilités et a développé de nouvelles idées qui prouvent les principaux résultats de la théorie d'une manière élémentaire, mais rigoureuse. En particulier, Chebyshev a pu offrir une preuve élégante de la LOI faible de SIMÉON-DENIS POISSON DE GRANDS NOMBRE.

En 1849, Tchebychev écrivit une thèse sur la théorie de l'ARITHMÉTIQUE MODULAIRE, ce qui lui valut un doctorat en mathématiques de l'Université de Moscou, ainsi qu'un prix de l'Académie russe des sciences en reconnaissance de son originalité et de son importance. Dans son étude des nombres premiers, Chebyshev a non seulement établi la conjecture de Bertrand, mais a également fait des pas significatifs vers la démonstration du fameux NOMBRE PREMIER. THÉORÈME.

Chebyshev a été élu professeur titulaire de mathématiques à l'Université de Saint-Pétersbourg en 1850 et, à cette époque, avait en effet acquis une renommée internationale. Il a beaucoup voyagé à travers l'Europe et a collaboré avec de nombreux universitaires sur des projets de recherche sur des sujets aussi divers que la mécanique, la physique, les inventions mécaniques et la construction de machines à calculer, ainsi que des travaux continus en mathématiques.
Il a reçu de nombreux honneurs tout au long de sa vie, y compris l'adhésion à l'Académie des sciences de Berlin en 1871, l'Académie de Bologne en 1873, la ROYAL SOCIETY de Londres en 1877, l'Académie royale italienne en 1880, et l'Académie suédoise des sciences en 1893. Chaque université russe l'a élu à un poste de professeur honoraire, et Chebyshev a même été nommé membre honoraire de l'Académie d'artillerie de Saint-Pétersbourg, ainsi que de la Légion d'honneur française. Il mourut le 8 décembre 1894 à St. Pétersbourg, Russie.

Un certain nombre de résultats et de concepts sont aujourd'hui nommés en l'honneur de Chebyshev. Par exemple, en analyse, les «polynômes de Chebyshev» fournissent une base pour l' ESPACE VECTORIEL des FONCTIONS CONTINUES et ont des applications importantes à la théorie de l'approximation. En statistique et en théorie des probabilités, le THÉORÈME DE CHEBYSHEV fournit une « loi faible des grands nombres ».

Voir aussi STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

Machine Translated by Google

Théorème de Chebyshev (inégalité de Chebyshev) Ce résultat, dû au mathématicien russe PAFNUTY LVOVICH CHEBYSHEV (1821–94), peut être considéré comme une extension de la règle 68-95-99,7 pour la DISTRIBUTION NORMALE à une règle applicable à toutes les distributions. Elle indique que si une DISTRIBUTION arbitraire a une moyenne μ et un écart type σ, alors la probabilité qu'une mesure prise au hasard ait une valeur différente de μ de plus de k écarts types est au plus de 1/k2 . Cela montre que si la valeur σ est petite, alors toutes les valeurs DATA prises dans une expérience sont susceptibles d'être étroitement regroupées autour de la valeur μ.

Les fabricants exploitent ce résultat. Par exemple, supposons qu'une entreprise produise des tuyaux d'un diamètre moyen de 9,57 mm, avec un écart type de 0,02 mm. Si les normes du fabricant ne toléreront pas un tuyau à plus de quatre écarts-types de la moyenne (0,08 mm), le théorème de Chebyshev implique qu'en moyenne environ 1/16, soit 6,25 %, des tuyaux produits par jour seront inutilisables.

La LOI DES GRANDS NOMBRES suit en conséquence séquence du théorème de Chebyshev.

Voir aussi STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

poulet Voir LE DILEMME DU PRISONNIER .

Ch'in Chiu-shao (Qin Jiushao) (1202-1261) Chine Algèbre Né à Szechwan (aujourd'hui Sichuan), en Chine, on se souvient du mathématicien et fabricant de calendriers Ch'in Chiu-shao pour son texte de 1243 Shushu jiuzhang (traité mathématique en neuf sections), qui contient, parmi de nombreuses méthodes, une technique efficace de multiplication itérative pour évaluer des équations polynomiales de degré arbitraire. (En notation moderne, cette technique équivaut à remplacer un polynôme tel que $4x^3 - 50x + 9$, par exemple, par sa forme équivalente en une série de parenthèses imbriquées : $((4x + 7)x^2 - 50)x + 9$. Dans cet exemple, seules trois multiplications sont nécessaires pour évaluer la forme emboîtée du polynôme par rapport aux six impliquées par la première forme de l'expression (en pratique, cette technique permet un gain de temps considérable). 500 ans plus tard en Occident indépendamment par le mathématicien italien Paolo Ruffini (1765–1822) et le savant anglais William George Horner (1786–1837).

Ch'in Chiu-shao a également étendu cette méthode pour trouver des solutions aux équations polynomiales.

Son texte est également noté pour son développement de MODU LAR ARITHMETIC. En particulier, Ch'in Chiu-shao a prouvé le résultat célèbre suivant, aujourd'hui connu sous le nom de théorème des restes chinois :

> Si un ensemble d'entiers mi sont coprime deux à deux , alors tout ensemble d'équations de la forme $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ a une solution unique modulo le produit de tous les mi .

Par exemple, ce résultat établit qu'il n'y a essentiellement qu'un seul entier x qui laisse des restes de 1, 11 et 6, respectivement, lorsqu'il est divisé par 5, 13 et 16 (à savoir, 726, plus ou moins tout multiple de 5 × 13 × 16 = 1040).

Après avoir servi dans l'armée pendant 14 ans, Ch'in Chiu shao entre au service du gouvernement en 1233 pour finalement devenir gouverneur de la province de Qiongzhou. Sa pièce de 1243 Shushu jiuzhang était sa seule œuvre mathématique.

Mathématiques chinoises Malheureusement, on sait très peu de choses sur les premières mathématiques chinoises. Avant l'invention du papier vers 1000 de notre ère, les Chinois écrivaient sur de l'écorce ou du bambou, des matériaux bien plus périssables que les tablettes d'argile ou le papyrus. Pour aggraver les choses, juste après l'unification impériale de la Chine vers 215 avant notre ère, l'empereur Shi Huang-ti de la dynastie Ch'ih a ordonné que tous les livres des périodes antérieures soient brûlés, ainsi que l'enterrement vivant de tous les érudits qui protestaient. Seuls les documents jugés «utiles», tels que les documents officiels et les textes sur la médecine, la divination et l'agriculture étaient exemptés. Par conséquent, très peu de choses ont survécu au-delà de cette période, bien que certains chercheurs aient tenté de reconstituer des matériaux perdus à partir de mémoire.

L'art des mathématiques a été défini par les anciens érudits chinois comme suan chu, l'art du calcul.
Souvent, les mathématiques étudiées étaient de nature extrêmement pratique, couvrant un large éventail d'applications, y compris l'ingénierie, le contrôle des inondations et l'architecture, ainsi que l'astronomie et la divination. Les praticiens de l'art étaient des scientifiques capables. Les archives montrent, par exemple, que les Chinois avaient inventé des sismographes pour mesurer les tremblements de terre en l'an 1000 de notre ère et utilisé des boussoles fabriquées avec des aiguilles magnétiques un siècle plus tard.

Les preuves de l'activité mathématique en Chine remontent au 14ème siècle avant notre ère. Des carapaces de tortues et des os de bovins portant des marques de pointage indiquent que le

Machine Translated by Google

les gens de l'ancienne dynastie Shang avaient développé une
système de notation en base 10 utilisant la valeur de position. Ce
établit que les Chinois ont été l'une des premières civilisations à inventer
un système de REPRÉSENTATION DÉCIMALE
essentiellement équivalent à celui que nous utilisons aujourd'hui. Comme les autres
civilisations de l'époque, cependant, les Chinois n'avaient pas
a développé une notation pour zéro et a donc écrit, par exemple, les
nombres 43 et 403 de la même manière, à savoir comme
“|||| ||| », s'appuyant sur le contexte pour distinguer les deux.

La plus importante mathématique chinoise ancienne
le texte est Jiuzhang suanshu (Neuf chapitres sur l'art mathématique)
datant de la période de la dynastie Han
(206 avant notre ère à 220 de notre ère). L'auteur de l'ouvrage est
inconnu, mais on pense qu'il s'agit d'un résumé de tous
connaissances mathématiques possédées en Chine jusqu'au
troisième siècle de notre ère, et pourrait bien avoir été le résultat de
plusieurs auteurs contribuant au même ouvrage. Le
texte est une présentation de 246 problèmes remplis de
des solutions et des recettes générales pour résoudre les problèmes d'un
type similaire. Le travail est généralement très pratique dans
nature, avec trois chapitres consacrés aux questions foncières
l'arpentage et l'ingénierie, et trois aux problèmes de
fiscalité et administration bureaucratique. Mais le texte
décrit des techniques mathématiques sophistiquées de
un caractère abstrait, et il pose de nombreux problèmes d'un
saveur récréative. Le document a donc aussi clairement
montre que les érudits de l'époque s'intéressaient aussi à l'étude des
mathématiques pour le plaisir en soi.

Jiuzhang suanshu n'est clairement pas écrit pour les débutants dans
l'art des mathématiques : de nombreuses notions de base en arithmétique
les processus sont supposés connus. Un autre texte du
même période, Chou pei suan ching (Arithmétique classique de
le gnomon et les chemins circulaires du ciel),
décrit les principes mathématiques de base tels que le travail avec des
fractions (et l'établissement de dénominateurs communs), les méthodes
d'extraction des racines carrées, ainsi que
principes et éléments de base de la géométrie, et étonnamment, ce qui
semble être une preuve de ce que nous appelons aujourd'hui
THÉORÈME DE PYTHAGORE . A tout le moins, les Chinois
de cette période connaissait le théorème des triangles rectangles avec
côtés de longueur 3, 4 et 5 comme le diagramme de hsuan thu - quatre
copies d'un triangle rectangle 3–4–5 disposé dans un
carré—apparaît dans le texte. Bien que ce schéma dans
elle-même ne constitue pas une « preuve » de l'orème de Pythagore,
l'idée incarnée dans le schéma peut néanmoins être facilement
développée pour établir une idée générale.
preuve du résultat. Pour cette raison, on croit que
les Chinois avaient indépendamment établi le même
fameux résultat. Ceci est certainement vérifié dans le texte de
Jiuzhang suanshu, autant de problèmes posés dans la pièce
compter sur le lecteur qui utilise le théorème.

De nombreux érudits du IIe au XVe siècle ont écrit des
commentaires sur l'œuvre Jiuzhang suan shu et ont étendu bon nombre
des résultats qui y sont présentés.
Les plus célèbres d'entre eux sont peut-être les commentaires de Liu
Hui qui, en 263 de notre ère, offrit des
preuves des formules des volumes d'un carré
pyramide et un tétraèdre présenté dans Jiuzhang suan shu, ainsi que
développé une valeur plus précise pour π
que présenté dans le texte. Liu Hui a continué plus tard à
écrit Haidao suanjing (Manuel mathématique des îles de la mer), dans
lequel il a résolu des problèmes liés à l'arpentage et à la cartographie
d'objets inaccessibles à l'aide d'une méthode raffinée.
méthode des « doubles différences » issues de paires de
triangles semblables. Cela prolongeait le travail des proportions présenté
dans Jiuzhang suanshu. Liu Hui aussi
a affirmé que le matériel de Jiuzhang suanshu date
remonte à 1100 avant notre ère, mais a ajouté que le texte réel était
pas écrit avant 100 avant notre ère Les historiens d'aujourd'hui diffèrent
sur le sérieux de prendre sa demande.

Le texte Jiuzhang suanshu contient également des recettes de
l'extraction des racines carrées et cubiques, et les méthodes de
résolution de systèmes d'équations linéaires utilisant des techniques très
similaires aux méthodes d' ALGÈBRE LINÉAIRE que nous utilisons aujourd'hui.
Le commentaire de Liu Hui justifie bon nombre des
règles présentées. Bien qu'il ne s'agisse pas de preuves formelles basées sur
axiomes, il est juste de décrire les justifications de Liu Hui comme
preuves informelles valables. Il semble que les mathématiciens pour
les siècles qui suivirent se contentèrent d'arguments et de justifications
informelles simples, et d'aucune
la rigueur a été jugée nécessaire.

Les chercheurs chinois ont également apporté d'importantes
contributions à l'étude de COMBINATORICS, NUMBER THEORY,
et ALGÈBRE. Mathématicien CH'IN CHIU-SHAO (env.
1200 CE) a développé des méthodes inventives pour évaluer
expressions polynomiales et résolution d'équations polynomiales. Il a
également établi le fameux « Chinese stay der theorem » de la théorie
des nombres. Le travail de LI YE de
la même période établit aussi une algèbre des polynômes. Bien que les
mathématiciens chinois de l'époque
connaissaient les nombres négatifs, ils ignoraient les solutions négatives
aux équations, les jugeant absurdes.

Le célèbre texte Su-yuan yu-chien (Le précieux
miroir des quatre éléments) écrit par le savant CHU
SHIH-CHIEH (ca. 1300 CE) contient un schéma de ce que
est devenu connu en Occident sous le nom de TRIANGLE DE PASCAL .

Machine Translated by Google

Ce texte a été écrit 300 ans avant la naissance du mathématicien français BLAISE PASCAL . (Certains historiens croient que ce travail remonte en fait 200 ans plus tôt à la écrits du mathématicien Jia Xian.) Les érudits de cette époque utilisait régulièrement le triangle pour approximer les nièmes racines de nombres utilisant l'équivalent du THÉORÈME BINÔMIAL d'aujourd'hui. Ils ont préféré leurs méthodes procédurales de extraire des racines carrées pour résoudre des équations QUADRATIQUE , plutôt que d'utiliser la formule quadratique générale.

Peu après JOHN NAPIER (1550-1617) de l'Ouest publia un récit de sa nouvelle aide au calcul, le NAPIER'S BONES, les Chinois ont développé un analogue système de tiges de bambou graduées pouvant être utilisées pour calculer rapidement de longues multiplications et divisions. Il On ne sait pas si les Chinois ont inventé ce système de manière indépendante, ou si l'idée a peut-être été portée à par des missionnaires jésuites du XVIIe siècle. Avec l' ABACUS développé en Chine 500 ans plus tôt, le les tiges de calcul ont permis d'améliorer les calculs arithmétiques, particulièrement utiles pour les calculs précis nécessaires en astronomie.

Le premier érudit ZU CHONGZHI (environ 500 CE) a calculé le volume d'une sphère par un principe identique à celle de BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647).

Voir aussi CARRÉ MAGIQUE.

test du chi carré Le test du chi carré est un test (voir STATISTIQUES : INFERENTIEL) utilisé pour déterminer si oui ou non deux caractéristiques d'une population sont indépendant ou associé d'une manière ou d'une autre. Par exemple, imaginez une étude sociale recherchant une éventuelle corrélation entre le type de lait que les gens préfèrent sur leur céréales et le nombre de piercings qu'ils possèdent. Cinq cents personnes ont été interrogées et les résultats obtenus sont affichés dans un TABLEAU DE CONTINGENCE.

	Non piercings	Un ou deux piercings	Plus de deux piercings	
Lait écrémé	47	33	22	102
Lait 2%	40	80	44	164
Lait Entier	113	37	84	234
	200	150	150	500

Observez, dans cette étude, que 102/500 = 0,204 de la les participants sont des utilisateurs de lait écrémé. Si choix de lait n'a aucun rapport avec les piercings corporels, nous aimerions attendez-vous alors à ce qu'environ 0,204 des 200 personnes sans piercing utilisent du lait écrémé. Nous avons observé une valeur de 47 (le fréquence observée) mais attendez-vous à une valeur de 0,204 × 200 = 40,8 (la fréquence attendue). De même, l'attendu la valeur pour les utilisateurs de lait écrémé avec plus de deux perçages est de 0,204 × 150 = 30,6 et pour les utilisateurs de lait entier avec un ou deux piercings : (234/500) × 150 = 70,2. Dans de cette façon, nous calculons toutes les fréquences attendues, ici indiqué entre parenthèses :

	Non piercings	Un ou deux piercings	Plus de deux piercings	
Lait écrémé	47 (40,8)	33 (30,6)	22 (30,6)	102
Lait 2%	40 (65,6)	80 (49,2)	44 (49,2)	164
Lait entier	113 (52,9)	37 (70,2)	84 (70,2)	234
	200	150	150	500

En désignant les fréquences observées par la lettre o et les fréquences attendues par e, nous calculons la statistique du chi carré, χ^2, comme:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o - e)^2}{e}$$

où la somme est sur toutes les entrées de la table. (Dans le 1800, il était d'usage de convertir toutes les différences en un valeur positive en utilisant la fonction d'élévation au carré plutôt que la fonction VALEUR ABSOLUE . De cette façon, les techniques de calcul pourrait être facilement appliqué - il est simple de différencier la fonction carrée, par exemple.)

Une grande valeur pour χ^2 indique qu'il y a beaucoup écart entre les valeurs observées et attendues, suggérant que les deux caractéristiques de la population ne sont pas indépendant, c'est-à-dire qu'il existe une CORRELATION. Un petit χ^2 indique qu'il n'y a pas de corrélation.

Notre exemple particulier donne la valeur :

$$\chi^2 = \frac{(47 - 40.8)^2}{40.8} + \frac{(33 - 30.6)^2}{30.6} + \frac{(22 - 30.6)^2}{30.6}$$
$$+ \frac{(40 - 65.6)^2}{65.6} + \frac{(80 - 49.2)^2}{49.2} + \frac{(44 - 49.2)^2}{49.2}$$
$$+ \frac{(113 - 52.9)^2}{52.9} + \frac{(37 - 70.2)^2}{70.2} + \frac{(84 - 70.2)^2}{70.2}$$
$$= 120.1$$

Machine Translated by Google

La distribution chi carré est une DISTRIBUTION représentant les valeurs auxquelles on s'attendrait χ^2 adopter donné l'hypothèse que les deux caractéristiques étudiées sont indépendant. Il y a une distribution pour chaque table de dimensions données. Les textes statistiques présentent généralement des listes de valeurs pour cette statistique. Il s'avère que le χ^2 valeur en cet exemple est extraordinairement élevé, suggérant que cette étude indique une forte corrélation entre le lait choix et piercings corporels. Le test du chi carré fait ne donne aucune information sur la nature de la corrélation détectée, mais seulement sur le fait qu'elle semble exister. Plus loin l'examen des données par d'autres méthodes peut donner les coordonnées de l'association.

Voir aussi KARL PEARSON.

corde Si A et B sont deux points d'une courbe, alors un segment de droite reliant A à B est appelé un accord à la courbe. Ce n'est pas à confondre avec l' ARC de la courbe reliant A à B.

Les THÉORÈMES DU CERCLE montrent que tout accord d'un cercle est bissecté par un rayon perpendiculaire à il. LE PARADOXE DE BERTRAND montre que le fait de sélectionner au hasard des accords d'un cercle peut conduire à des difficultés philosophiques.

Voir aussi CERCLE.

Chu Shih-Chieh (Zhu Shijie) (vers 1270-1330) Algèbre chinoise Souvent considéré comme l'un des plus grands mathématiciens chinois, on se souvient de Chu Shih-Chieh pour son texte influent de 1303 Su-yuan yu-chien (Précieux miroir des quatre éléments). Il contient un schéma de LE TRIANGLE DE PASCAL , comme il est devenu connu dans le West, représentant l'une des premières apparitions de la figure de l'histoire des mathématiques. Dans le travail, Chu Shih-Chieh utilise le triangle pour décrire un général méthode d'extraction des racines des équations. Il présente également un système de notation des polynômes à quatre inconnues, qu'il appelle les quatre éléments, à savoir, le céleste, le terrestre, le matériel et l'humain— et fournit des techniques efficaces pour manipuler eux pour résoudre des problèmes.

Sa section sur les DIFFÉRENCES FINIES donne des formules pour les sommes des n premiers termes de chaque diagonale de triangle de Pascal (par exemple, que $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, et que $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}$ équivaut à $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$), et fournit également des informations générales techniques de sommation de séries arbitraires. Il fournit également des méthodes pour résoudre des équations via un processus de approximations successives.

De nombreux historiens affirment que le travail impressionnant de Chu Shih-Chieh représente l'apogée des mathématiques chinoises anciennes, notant que relativement peu de progrès ont été réalisés pour longtemps après la publication de cet article. Quatre années avant la libération de Su-yuan yu-chien, Chu Shih-Chieh écrit un texte mathématique destiné à aider les débutants en l'objet. On sait très peu de choses sur sa vie personnelle.

cercle L'ensemble de tous les points d'un plan à une distance fixe r à partir d'un point donné O forme une courbe fermée dans la plan appelé cercle. La longueur r est appelée le rayon de le cercle, et le point O son centre. Si le point central a COORDONNEES CARTESIENNES 0 = (a,b), alors la FORMULE DE DISTANCE montre que tout point (x,y) sur le cercle satisfait l'équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Si le point (x,y) de ce cercle fait un angle θ avec une ligne horizontale passant par le centre du cercle, puis nous avons:

$$x = a + r\cos\theta$$

$$y = b + r\sin\theta$$

Ce sont les ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES d'un cercle de rayon r et centre (a,b).

Le DIAMÈTRE d'un cercle est la distance maximale entre deux points du cercle. Il est égal au double de rayon du cercle. Un cercle est une figure de CONSTANTE LARGEUR.

La longueur de la courbe fermée pour former un cercle est appelé la circonférence du cercle. Chercheurs depuis l'époque de l'antiquité ont observé que le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est la même pour tous les cercles. Cette valeur constante est appelée PI, notée π. Nous avons:

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

Que tous les cercles donnent la même valeur pour π n'est pas immédiatement évident. Ceci est une propriété d' EUCLIDEAN GÉOMÉTRIE de l'avion, et une étude minutieuse de l'ÉCHELLE explique pourquoi cela doit être vrai. (La valeur de π varie

Machine Translated by Google

de 2 à 3,141592… pour différents cercles tracés sur la surface d'une SPHÈRE, par exemple, puisque le diamètre d'un cercle doit être mesuré comme la longueur d'une ligne courbe sur la surface.)

Si C est la circonférence d'un cercle planaire et D = 2r est son diamètre, alors, par définition, π = C/D.
Cela donne une formule pour la circonférence d'un cercle:

$$C = 2\pi r$$

Une étude de AREA montre également que l'aire A d'un cercle est donnée par :

$$A = \pi r^2$$

Il n'est pas immédiat que la valeur π apparaisse également dans cette formule.

Une étude de l'ÉQUIDISTANCE montre qu'il est toujours possible de tracer un cercle passant par trois points donnés dans un plan (tant que les points ne se trouvent pas en ligne droite), ou, de manière équivalente, il est toujours possible de tracer un CIRCUMCERCLE pour n'importe quel TRIANGLE donné . APOLLONIUS DE PERGE (vers 262-190 avant notre ère) a développé des méthodes générales pour construire un cercle TANGENT à trois objets quelconques dans le plan, qu'il s'agisse de points, de lignes ou d'autres cercles.

Toute droite reliant deux points d'un cercle est appelée ACCORD du cercle. Il divise le cercle en deux régions, chacune appelée un segment. Une corde de longueur maximale passe par le centre d'un cercle et est également appelée diamètre du cercle. (Ainsi, le mot diamètre est utilisé indifféremment pour un tel segment de ligne et pour la valeur numérique de la longueur de ce segment de ligne.)

Un rayon d'un cercle est un segment de droite reliant le centre du cercle à un point du cercle. Deux rayons différents déterminent une région en forme de coin à l'intérieur du cercle appelée secteur. Si l'angle entre les deux rayons est θ, donné en MESURE RADIAN, alors l'aire de ce segment est $\frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta$. La longueur de l' ARC de le cercle entre ces deux rayons est $\frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi r = r\theta$.

Deux points quelconques P = (a1 ,b1) et Q = (a2 ,b2) dans le plan déterminent un cercle avec le segment de droite reliant P à Q comme diamètre. L'équation de ce cercle est donnée par :

$$(x - a1)(x - a2) + (y - b1)(y - b2) = 0$$

Le THÉORÈME DE LA COURBE DE JORDAN établit qu'un cercle divise le plan en deux régions : une à l'intérieur et une dehors. (Cette affirmation apparemment évidente n'est pas vraie pour les cercles tracés sur un TORUS, par exemple.) Deux cercles qui se coupent divisent le plan en quatre régions ; trois cercles sécants peuvent être agencés pour diviser le plan en huit régions ; et quatre cercles se coupant mutuellement peuvent diviser le plan en 14 régions. En général, le nombre maximal de régions dans lesquelles n cercles sécants divisent le plan est donné par la formule : $n^2 - n + 2$.

La région formée à l'intersection de deux inter sectionner des cercles de même rayon s'appelle une lentille.

Il existe un certain nombre de THÉORÈMES DE CERCLE décrivant les propriétés géométriques des cercles. Un cercle est une SECTION CONIQUE. Elle peut être considérée comme une ELLIPSE dont les deux foyers coïncident.

Si l'on permet l'utilisation de NOMBRES COMPLEXES, on peut dire que deux cercles quelconques dans le plan se coupent. Par exemple, les deux cercles de rayon un centrés sur les points (0,0) et (4,0), respectivement, donnés par les équations $x^2 + y^2 = 1$ et $(x-4)^2 + y^2 = 1$ se coupent aux points $(2, i\sqrt{3})$ et $(2, -i\sqrt{3})$.

L'analogue tridimensionnel d'un cercle est une SPHÈRE : le lieu de tous les points équidistants d'un point fixe O dans un espace tridimensionnel. Dans une dimension, l'analogue d'un cercle est n'importe quelle paire de points sur une droite numérique. (Deux points sur une droite numérique sont équidistants de leur POINT MILIEU.)

Le théorème du milieu affirme que tous les milieux des segments de droite reliant un point fixe P dans le plan à des points sur un cercle C forment un cercle de la moitié du rayon de C.

Voir aussi CERCLE D'APOLLONIUS ; LA FORMULE DE BRAHMAGUPTA ; POLYGONE CYCLIQUE ; SÉQUENCE DE FAREY ; CERCLE À NEUF POINTS ; CERCLE UNITAIRE ; DIAGRAMME DE VENN.

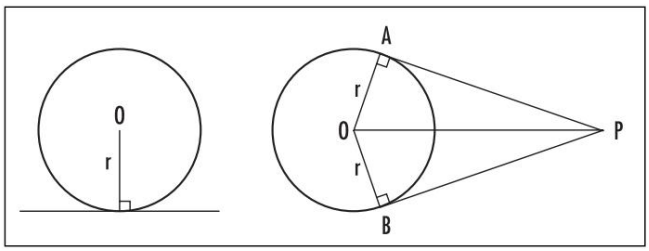
Théorèmes du cercle Un CERCLE est défini comme l'ensemble des points d'un plan situés à une distance fixe r, appelée rayon, d'un point fixe O, appelé centre. Cette définition simple comporte un certain nombre d'éléments géométriques significatifs.
conséquences:

1. Théorèmes de tangente

Le point de contact d'une droite TANGENTE avec un cercle est le point de cette droite le plus proche du point central O. En conséquence du THÉORÈME DE PYTHAGORE , la droite reliant le point de contact à O fait un angle de 90° à la tangente. Cela prouve:

La tangente à un cercle est PERPENDICULAIRE au rayon au point de contact.

Machine Translated by Google



Théorèmes de tangente

Ceci est illustré dans le schéma ci-dessus, à gauche.

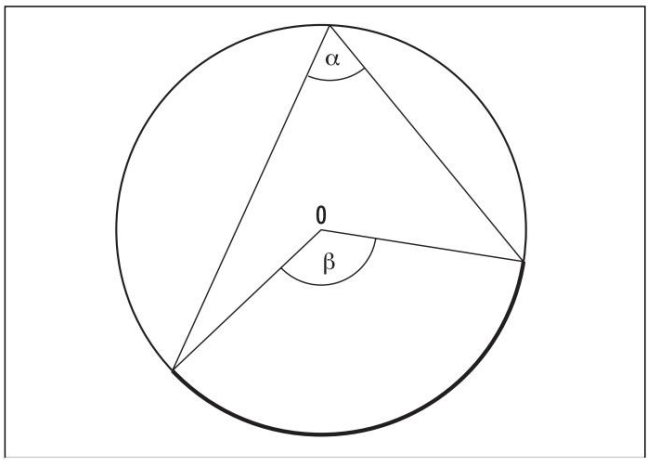
Le diagramme ci-dessus à droite montre que deux tangentes passant par un point commun P à l'extérieur du cercle produisent des segments de droite PA et PB de longueur égale. Cela découle du fait que les deux triangles produits sont tous deux des triangles rectangles de même hauteur avec une hypoténuse commune, et sont donc congruents. Ainsi:

> Si PA et PB sont tangents à un cercle aux points A et B, respectivement, alors PA et PB ont la même longueur.

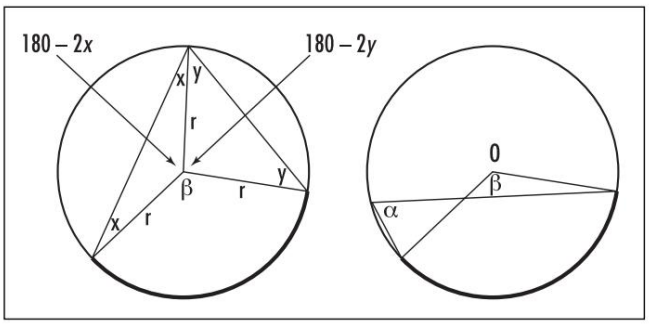
2. Théorèmes de l'angle inscrit Dans le schéma ci-dessous, à gauche, les angles α (l'angle périphérique) et β (l'angle central) sont sous-tendus par le même ARC. Ainsi nous avons :

> Pour les angles sous-tendus par le même arc, l'angle central est toujours le double de celui de l'angle périphérique.

Ceci est prouvé en traçant un rayon du centre O au point où se trouve l'angle α pour créer deux



Angles centraux et périphériques



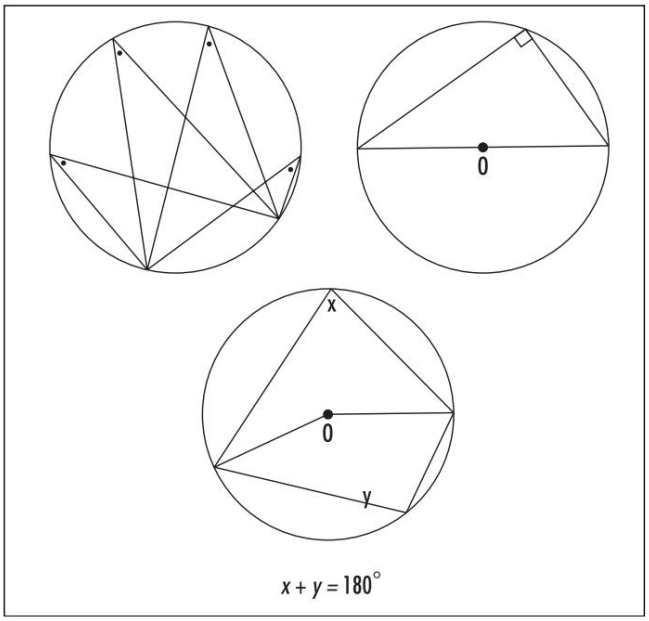
Prouver le théorème angle central / angle périphérique

triangles isocèles. En suivant le côté gauche du schéma suivant, et en notant que les angles intérieurs d'un triangle totalisent 180°, on a donc x + y = α et (180 – 2x) + (180 – 2y) + β = 360, d'où il résulte que β = 2α. Une modification de cet argument montre que le résultat est toujours vrai même si l'angle périphérique est situé comme indiqué sur le côté droit du diagramme, ou si l'arc considéré est supérieur à la moitié du PÉRIMÈTRE du cercle .

Les trois résultats suivants suivent (voir schéma ci-dessous, à droite):

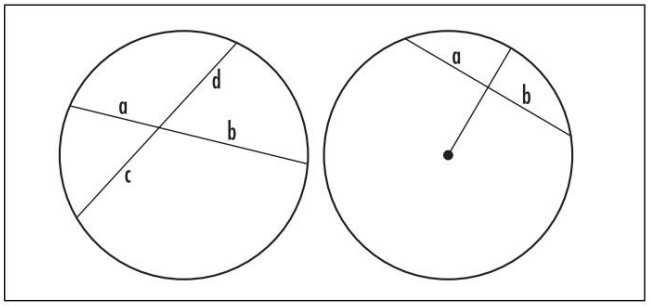
je. Tous les angles inscrits dans un cercle sous-tendu par le même arc sont égaux,

ii. Tous les angles inscrits par un diamètre sont droits angles. (C'est ce qu'on appelle le théorème de Thales.)



Conséquences du théorème angle central / angle périphérique

Machine Translated by Google



Théorèmes d'accord

iii. Angles opposés dans un QUADRILATERAL cyclique somme à 180°.

3. Théorème à deux accords

Dans le schéma ci-dessus, nous avons : ab = cd.

Ceci est prouvé en connectant les extrémités de les cordes pour créer deux triangles. Les théorèmes des angles inscrits montrent que ces deux triangles sont similaire par la règle AAA. Par conséquent, a/c = d/b.

4. Théorème rayon-accord

Dans la partie droite du diagramme, nous voyons que :

Le rayon d'un cercle coupe en deux une corde (qui c'est-à-dire que nous avons a = b) si et seulement si le rayon est perpendiculaire à la corde.

Ceci est prouvé en dessinant deux rayons aux extrémités de la corde pour produire un grand triangle isocèle. Si le rayon central est à 90° de la corde, cela produit deux triangles rectangles congruents, donc a = b. Inversement, si on nous dit a = b, alors la LOI DES COSINS, appliqué à chaque angle de base du triangle isocèle, montre que le rayon central intercepte la corde en un angle de 90°.

Voir aussi AAA/AAS/ASA/SAS/SSS ; CHIFFRES CONGRUENTS ; POLYGONE CYCLIQUE ; THÉORÈME DE PTOLÉMÉE ; SÉCANTE; SIMI LAR CHIFFRES.

cercle circonscrit Un cercle qui passe par les trois sommets du triangle est appelé un cercle circonscrit pour le triangle. Que trois points distincts du plan déterminent un cercle unique a été prouvé pour la première fois par EUCLIDE dans son traité, LES ÉLÉMENTS, Livre III. Euclide a également présenté une méthode générale pour construire réellement le cercle circonscrit de un triangle. (Ce résultat a ensuite été généralisé par APOLLO NIUS DE PERGE, qui a montré comment construire un cercle tangente à trois points, lignes ou cercles quelconques dans le plan.)

Le centre du cercle circonscrit d'un triangle s'appelle son centre circonscrit. Clairement, c'est un point EQUIDISTANT de les trois sommets, et donc il doit se trouver sur chaque ligne de points équidistants de deux sommets quelconques. Le centre circonscrit d'un triangle peut donc être trouvé en traçant le bissectrices perpendiculaires des côtés du triangle et localiser où ces trois lignes se rencontrent.

Par la LOI DES SINES, le rayon du cercle circonscrit d'un triangle est donné par $r = \frac{a}{2\sin(A)}$, où a est une longueur de côté du triangle et A est l'angle opposé ce côté choisi. Si les deux côtés restants du triangle ont des longueurs b et c, alors l'aire du triangle peut s'écrire : . Par HERON'S $\text{aire} = \frac{1}{2} bc \sin(A)$ FORMULA, cette surface peut également être calculée via $\text{aire} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \frac{a+b+c}{2}$. Équation ces deux équations, en résolvant sin(A) et en substituant dans la formule ci-dessus produit une formule pour le rayon du cercle circonscrit d'un triangle uniquement en termes de ses longueurs de côté :

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Le cercle circonscrit d'un POLYGONE régulier est ce cercle qui passe par tous les sommets du polygone. Le rayon du cercle circonscrit d'un carré, par exemple, de côté x est $r = x/\sqrt{2}$.

Voir aussi CONCURRENT ; LONG RAYON ; TRIANGLE.

circonscrire/inscrire Si A et B sont deux géométries figures, avec A à l'intérieur de B, dessinées de manière à ce que les deux figures ont des points communs mais n'ont pas d'arêtes qui croix, alors on dit que le chiffre A est inscrit dans B, ou, alternativement, cette figure B est circonscrite à A. Par exemple, un polygone situé à l'intérieur d'un cercle avec tous ses sommets de ce cercle sont dits inscrits dans le cercle, et un cercle à l'intérieur d'un polygone touchant chaque côté de le polygone est inscrit dans le polygone. Un cercle qui passe par les trois sommets d'un triangle circonscrit à ce triangle, et le plus petit carré qui entoure un cercle circonscrit ce cercle.

Voir aussi CIRCUMCERCLE ; ENCERCLE.

maths de l'horloge Voir ARITHMÉTIQUE MODULAIRE.

Machine Translated by Google

propriété de fermeture UNE OPÉRATION BINAIRE sur un ensemble S est dite fermée si la combinaison de deux éléments de cet ensemble donne un autre membre de cet ensemble. Par exemple, l'ensemble des entiers positifs est fermé par addition, puisque la somme de deux entiers positifs est elle-même un entier positif. Cet ensemble est également fermé par multiplication (le produit de deux nombres entiers positifs est un entier positif), mais pas par soustraction : si n et m sont des nombres entiers positifs, alors n – m pourrait être nul ou négatif et donc ne plus être dans ensemble de nombres entiers positifs. (Par exemple, 3 – 7 = –4.)

Pour un exemple plus inhabituel, considérons l'ensemble S de tous les nombres entiers qui peuvent être exprimés comme la somme de deux NOMBRES CARRÉS. Nous avons S = {0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 20, 25,…}. (Par exemple, 0 = $0^2 + 0^2$, $5 = 1^2 + 2^2$, $20 = 2^2 + 4^2$, et $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$.) Étonnamment, cet ensemble est fermé par multiplication. Par exemple, 5 et 8 appartiennent tous deux à S, tout comme 5 × 8 = 40. (Nous avons $40 = 2^2 + 6^2$.) De plus, 10 et 13 appartiennent à S, tout comme 130. (Nous avons $130 = 3^2 + 11^2$.) Cette observation générale découle de l'identité algébrique que si $N = a^2 + b^2$ et $M = c^2 + d^2$; alors $N \times M = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

Cet ensemble S est également fermé par exponentiation : si N et M sont chacun une somme de deux carrés, alors NM l'est aussi. Par exemple, $513 = (12\,625)^2 + (31\,250)^2$.

Voir aussi CARRÉ.

coefficient Un multiplicateur numérique ou constant des variables dans un terme d'une expression algébrique est appelé le coefficient de ce terme. Par exemple, considérons l'équation $5x^3 - 2x + 7 = 0$, où x est le 3 est 5, le coefficient de la variable x , le coefficient x^2 est zéro. Dans l'équation 3 cos y de x est –2 et le coefficient de $-4xy^2 = 7$, les coefficients de cos y et xy^2 sont 3 et –4, respectivement.

Parfois, la valeur d'un coefficient n'est pas connue et un symbole est utilisé à sa place. Par exemple, dans l'expression $ax^2 + bx + c$ avec x la variable, les nombres a et b sont des coefficients (et c est un terme constant).
Bien que les valeurs de a, b et c ne soient pas spécifiées, il est entendu que leurs valeurs ne changent pas même lorsque la valeur de x varie.

Dans un contexte plus général, le terme coefficient est utilisé pour tout nombre qui sert de mesure d'une propriété ou d'une caractéristique d'un ensemble de données ou d'une propriété physique. Par exemple, un COEFFICIENT DE CORRELATION dans Les STATISTIQUES donnent une mesure de la mesure dans laquelle deux ensembles de données sont interdépendants, tandis que le coefficient de chaleur en physique donne une mesure de la capacité d'un matériau à conduire la chaleur.

Voir aussi COEFFICIENT BINOME ; COMBINÉ COEFFICIENT RIAL ; CONSTANT; COEFFICIENT PRINCIPAL; POLYNÔME.

Conjecture de Collatz (problème de cartographie "3n + 1")
Considérez le processus suivant :

> Sélectionnez un entier positif. S'il est impair, triplez-le et ajoutez-en un ; sinon, divisez le nombre par deux. Effectuez maintenant à nouveau la même opération sur le résultat. Répétez ce processus indéfiniment pour produire une séquence de nombres.

Le chiffre 7, par exemple, donne la séquence :

> 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1,…

Notez que cette séquence tombe finalement dans un cycle 4-2-1.

En 1937, le mathématicien allemand Lothar Collatz a conjecturé que, quel que soit l'entier de départ sélectionné, toutes les séquences conduisent au même cycle 4-2-1. Collatz n'a pas été en mesure de prouver cette affirmation, mais il n'a pas non plus été en mesure de trouver un exemple de numéro de départ qui ne se comporte pas de cette façon. À ce jour, personne ne sait si la conjecture de Collatz est vraie ou non. Tous les nombres entiers jusqu'à 2,702 × 1016 ont été vérifiés.

Comme première étape vers la compréhension de ce problème, les mathématiciens ont prouvé que 4-2-1 est le seul cycle de taille raisonnable qui pourrait éventuellement apparaître ; il a été établi que tout autre cycle qui pourrait apparaître serait long d'au moins 275 000 numéros.

colinéaire Tout nombre de points est dit colinéaire s'ils se trouvent tous sur la même ligne droite. Deux points sont toujours alignés. Trois points dans un plan A = (a1 ,a2), B = (b1 ,b2) et C = (c1 ,c2) ne sont colinéaires que si les lignes reliant les points A et B et les points reliant A et C ont pour même PENTE. Cela signifie que la relation suivante doit être vérifiée :

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1}$$

Machine Translated by Google

Trois points A, B et C dans un espace tridimensionnel sont colinéaires si le triangle qu'ils forment a une aire nulle. De manière équivalente, les trois points sont colinéaires si →AB et →AC sont VECTEURS →AB × →AC vaut nuls, et l'angle entre les CROISÉ du vecteur nul. par conséquent le PRODUIT

La colinéarité des points dans un plan est un sujet qui intéresse les géomètres. Au milieu des années 1700, LEONHARD EULER a découvert que plusieurs points intéressants construits à partir de triangles sont colinéaires, ce qui a donné sa fameuse LIGNE EULER. En 1893, le mathématicien britannique James Sylvester (1814-1897) a posé la question de savoir s'il est possible d'organiser trois points ou plus dans un plan, pas tous sur une ligne, de sorte que toute ligne reliant deux des points de la collection passe par un troisième point également. Quarante ans plus tard, Tibor Gallai (1912-1992) a prouvé qu'un tel arrangement n'existait pas.

Deux plans distincts ou plus sont dits colinéaires s'ils se coupent en une ligne droite commune. Dans ce cas, les vecteurs normaux à chaque plan sont tous situés dans un plan perpendiculaire à la ligne commune. Ainsi, on peut déterminer si oui ou non une collection de plans est colinéaire en notant si oui ou non les produits croisés de paires de vecteurs normaux sont tous parallèles.

Voir aussi GRADIENT ; NORMALE A UN PLAN.

combinaison (sélection, disposition non ordonnée) Tout ensemble d'éléments sélectionnés à partir d'un ensemble d'éléments donné sans tenir compte de leur ordre est appelé une combinaison. La répétition des choix n'est pas autorisée. Par exemple, il existe six combinaisons distinctes de deux lettres sélectionnées dans la séquence A, B, C, D, à savoir : AB, AC, AD, BC, BD et CD. (La sélection BA, par exemple, est considérée comme la même que AB, et le choix AA n'est pas autorisé.)

Le nombre de combinaisons de k éléments sélectionnés d'un ensemble de n objets distincts est noté $\binom{n}{k}$. Le nombre $\binom{4}{2}$, par exemple, est égal à six. La quantité $\binom{n}{k}$ est appelé un coefficient combinatoire et se lit comme "n choisissez k." Compte tenu de leur apparition dans le THÉORÈME BINÔMIAL, ces nombres sont également appelés coefficients binomiaux.

On développe une formule pour $\binom{n}{k}$ en comptant les nombre de façons d'arranger n objets distincts dans une rangée. Il y a, bien sûr, n! différentes manières de le faire. (Voir FACTORIAL.) Alternativement, nous pouvons imaginer sélectionner les k objets à disposer dans le premières k positions le long de la ligne (il y a $\binom{n}{k}$ façons pour ce faire), en ordonnant ces k éléments (il y a k ! différentes manières de le faire), puis en organisant les n – k objets restants pour la dernière partie de la rangée (il y a (n – k) ! différentes façons pour y parvenir). Ce donne $\binom{n}{k}(k!)(n-k)!$ – différentes manières d'arranger n objets dans une rangée. Comme cette quantité doit être égale à n!, on a la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ pour la combinatoire coefficient.

Il convient de définir 0 ! comme égal à un. De cette manière, la formule qui vient d'être établie vaut même pour k = n. (Il n'y a qu'une façon de sélectionner n objets parmi une collection de n éléments, et donc $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!}$ devrait être égal un.) Il s'ensuit alors que $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1$. (Il y a juste une manière de ne sélectionner aucun objet.) Les mathématiciens définissent $\binom{n}{k}$ vaut zéro si k est négatif ou supérieur à n.

Les coefficients combinatoires apparaissent comme les entrées du TRIANGLE DE PASCAL . Ils satisfont également un certain nombre d'identités. Nous n'en énumérons que quatre, que nous formulerons en termes de processus de sélection de k étudiants pour faire partie d'un comité parmi une classe de n étudiants.

1. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(Sélectionner k étudiants pour faire partie d'un comité équivaut à sélectionner n - k étudiants pour ne pas faire partie du comité.)

2. $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

(Tout comité formé comprend ou exclut un étudiant en particulier John, par exemple. Si John doit faire partie du comité, il faut alors sélectionner k - 1 étudiants de plus

Machine Translated by Google

parmi les n – 1 étudiants restants. Si John ne doit pas faire partie du comité, il faut sélectionner k étudiants dans le groupe de n - 1 étudiants qui exclut John.)

$$3.\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

(Il y a $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$ éventuels comités de n'importe quelle taille. Mais ce nombre peut aussi être calculé en décidant, élève par élève, de mettre ou non cet élève dans le comité. Comme il y a deux possibilités pour chaque élève, in ou out, il y a 2n comités possibles. Ces décomptes doivent être les mêmes.)

$$4.\ \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

(Supposons que, dans le comité, un étudiant doit être choisi comme président. Dans un comité de taille k , il y a k choix possibles pour la chaise. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ compte le nombre total de comités possibles, de toute taille, avec un étudiant choisi comme président. Mais cette quantité peut également être calculée en sélectionnant d'abord un étudiant pour être président - il y a n choix pour cela - puis en décidant, étudiant par étudiant, parmi les n - 1 étudiants restants si cet étudiant devrait faire partie du comité. Cela donne n2 n–1 possibilités.)

La propriété 1 explique pourquoi le triangle de Pascal est symétrique. La propriété 2 montre que chaque entrée dans le triangle de Pascal est la somme des deux entrées au-dessus, et la propriété 3 montre que la somme de toutes les entrées dans n'importe quelle ligne du triangle de Pascal est une puissance de deux.

En 1778, LEONHARD EULER utilise la notation $\overline{\binom{n}{k}}$ pour les coefficients combinatoires qui, trois ans plus tard, il a modifié en $\binom{n}{k}$. Au 19e siècle, les maths les maticiens ont commencé à suivre la notation originale d'Euler, abandonnant le VINCULUM dans le but de faciliter la composition. De nombreux manuels utilisent la C_k^n ou C_n^k, aujourd'hui la notation ou même C(n,k), pour coefficient combinatoire $\binom{n}{k}$ nCk ,

Coefficients généralisés

Le coefficient combinatoire généralisé $\binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_r}$, où k1 ,k2 ,…,kr sont des entiers non négatifs sommant à n, est défini comme étant le nombre de façons dont on peut sélectionner, parmi n éléments, k1 objets à mettre dans un conteneur, k2 objets à mettre dans un deuxième conteneur, et ainsi de suite, jusqu'à kr objets pour aller dans un rième conteneur. (Remarquez que $\binom{n}{k, n-k}$ est le coefficient combinatoire ordinaire.)

En imitant l'argument présenté ci-dessus, notez que l'on peut organiser n éléments dans une rangée en sélectionnant d'abord quels éléments k1 doivent aller dans la première partie de la ligne et en les ordonnant, quels éléments k2 doivent aller dans la partie suivante de la ligne Cela montre que $n! = \binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_r} k_1! k_2! \cdots k_r!$, donnant la formule:

$$\binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_r} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_r!}$$

Les coefficients combinatoires généralisés montrent, exemple, qu'il existe $\binom{7}{1132} = \frac{7!}{1!\,1!\,3!\,2!} = 420$ pour des façons de réarranger les lettres FROMAGES : Parmi les sept emplacements pour les lettres, il faut choisir quel emplacement est attribué à la lettre C, lequel à la lettre H, dont trois à la lettre E, et dont deux pour la lettre S.

Les coefficients combinatoires généralisés apparaissent également dans les généralisations du THÉORÈME BINÔMIAL. Par exemple, nous avons le théorème du trinôme :

$$(x+y+z)^n = \sum \binom{n}{k_1 k_2 k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$$

où la somme est prise sur tous les triplets k1 ,k2 ,k3 qui totalisent n. La preuve est analogue à celle du théorème du binôme ordinaire.

Choix multiples

La quantité $\binom{4}{2}$, lire comme "n multi-choisissez k", compte le nombre de façons de sélectionner k objets d'une collection

Machine Translated by Google

de n éléments, où l'ordre n'est pas important, mais la répétition est autorisée. Par exemple, il y a 10 façons de sélectionner deux objets parmi l'ensemble A, B, C et D, à savoir : AB, AC, AD, BC, BD, CD et AA, BB, CC, et JJ. Ainsi $\binom{4}{2} = 10$. On peut montrer qu'un multi

choisir le coefficient est égal à un co combinatoire ordinaire efficace:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

coefficient combinatoire Voir COMBINAISON.

combinatoire (analyse combinatoire) La branche des mathématiques concernée par la théorie et les pratiques du comptage des éléments d'ensembles et la construction d'arrangements spécifiés d'objets, ainsi que l'étude des COMBINAISONS et des PERMUTATIONS, est appelée combinatoire. La THÉORIE DES GRAPHES est également considérée comme un aspect de la combinatoire.

La technique du « double comptage », c'est-à-dire compter le même ensemble d'objets de deux manières différentes, est une pratique courante en combinatoire utilisée pour obtenir des résultats intéressants. Par exemple, compter les points dans un tableau carré n × n le long des diagonales plutôt qu'à travers les lignes donne la formule surprenante :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots 2 + 3 + 2 + 1 = n^2$$

Compter le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de n éléments, soit en additionnant le nombre de sous-ensembles contenant, tour à tour, 0, 1, 2, jusqu'à n éléments, soit en notant que chaque sous-ensemble est décidé en faisant n choix entre deux options - que chaque élément soit ou non à son tour dans le sous-ensemble - donnent la formule :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

LE THÉORÈME D'EULER peut être considéré comme un résultat en géométrie combinatoire.

Voir aussi DISCRET ; NUMÉROS CHIFFRÉS.

commensurable Deux quantités ayant une mesure commune, ce qui signifie qu'elles peuvent être mesurées en termes de les nombres entiers d'une unité commune, sont dits comme commensurables. Par exemple, les quantités d'un mois et d'une semaine sont commensurables car elles peuvent toutes deux être mesurées en termes de nombre entier de jours. En GEOM ETRY, deux segments de droite sont dits commensurables s'il existe un autre segment dont la mesure rentre uniformément, sans reste, dans les mesures de chaque segment.

Par exemple, des segments de longueurs 20 et 12 po sont commensurables car ils peuvent chacun être divisés en longueurs égales de 1 (ou 2 ou 4) po. En général, deux segments de longueurs a et b unités sont commensurables si le rapport a /b est un NOMBRE RATIONNEL. Comme $\sqrt{1}$ longueur et $\sqrt{2}$ est irrationnel, des segments de et la diagonale d'un carré unité) sont incommensurables.

Une étude de l' ALGORITHME EUCLIDIEN montre que si l'on donne deux segments de ligne commensurables de longueurs a et b, par exemple, la soustraction répétée de la longueur la plus courte de la plus longue pour produire une nouvelle paire de longueurs produit finalement deux segments de ligne de longueur égale. Cette mesure finale partagée est la plus grande longueur qui se divise également entre les deux segments d'origine. (Si a et b sont des mesures de nombres entiers, alors la longueur de la mesure finale est le PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN de a et b.) Si, d'autre part, on peut démontrer que le processus d'effacement répété du segment de ligne le plus court de le plus long continuera indéfiniment sans jamais produire deux segments de ligne égaux en longueur, alors les deux segments originaux ne peuvent pas être commensurables. Vers 425 av. J.-C. , le mathématicien grec THÉODORE DE CYRÈNE utilisa précisément cette observation pour prouver l'irrationalité de $\sqrt{2}$. En THÉORIE DES NOMBRE, deux nombres réels a et b sont dits commensurables si leur rapport est rationnel. Pour Par exemple, les nombres $\sqrt{48}$ et $\sqrt{3/2}$ sont commensu rables. Personne à ce jour ne sait si π et e sont commensurables ou non. Les nombres $\log_5(3)$ et $\log_5(7)$ sont incommensurables. (Si $\log_5 7 = \frac{p}{q}$ pour un tout nombres p et q, alors $7^q = 3^p$ chaque , ce qui est absurde puisque puissance de 7 est 1 de plus qu'un multiple de 3.)

dénominateur commun On dit que deux fractions ou plus ont un dénominateur commun si le dénominateur de chaque fraction est le même. Par exemple, le fractions et ont un dénominateur commun de $\frac{5}{12}$ $\frac{3}{12}$ 12. Il est simple d'ajouter et de soustraire

Machine Translated by Google

fractions avec un dénominateur commun. Par exemple, 5 8 3 et 12 12
12 + 3 12 = 5 12 − 2 12 =

Il est possible de réécrire les termes d'une collection arbitraire de fractions afin qu'elles partagent toutes un dénominateur commun 1 5 . Par exemple, la réécriture et comme 3 15 2 5

6 et , respectivement, montrent que les deux fractions ont 15 un

dénominateur commun 15. En fait, tout COMMUN MULTIPLE de 3 et 5 sert de dénominateur commun 10 30

de et 1 3 Par exemple, nous avons = et = 30 1 3 2 5 12 ,

45 5 Le PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE .

des dénominateurs d'une collection de fractions est appelé le plus petit dénominateur commun des fractions. Par exemple, le plus petit

dénominateur commun de et est 15, et le moins 3 2 5

3 dénominateur commun de 8 , 3 4 5 et vaut 24. On additionne 6

et soustrait des fractions arbitraires en réécrivant ces fractions en termes de dénominateur commun.

facteur commun (diviseur commun) Un nombre qui divise exactement deux entiers ou plus est appelé facteur commun de ces entiers. Par exemple, les nombres 20, 30 et 50 ont 2 comme facteur commun, ainsi que 1, 5 et 10 comme facteurs communs. Il arrive toujours que le plus grand facteur commun que possède un ensemble d'entiers soit un multiple de tout autre facteur commun. Dans notre exemple, 10 est un multiple de chacun de 1, 2 et 5. La valeur 1 est toujours un diviseur commun de tout ensemble d'entiers.

Le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE montre que tout nombre peut être exprimé de manière unique comme un produit de facteurs PREMIER . Tout facteur commun de deux ou plusieurs nombres entiers est un produit de nombres premiers communs à tous ces nombres entiers, et le plus grand facteur commun est le produit de tous les nombres premiers en commun, avec répétition autorisée. (Cela explique pourquoi le plus grand facteur commun est un multiple de tout autre facteur commun.) Si les nombres entiers n'ont pas de nombres premiers en commun, alors leur plus grand facteur commun est un.

Voir aussi PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN ; RELATIVEMENT PRIME.

multiple commun Un nombre qui est un multiple de deux ou plusieurs autres nombres est appelé un multiple commun de ces chiffres. Par exemple, 60 est un multiple commun de 5, 6 et 10. Le plus petit nombre qui est un multiple commun d'un ensemble donné de nombres est appelé leur PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE. Dans notre exemple, 30 est le plus petit multiple commun de 5, 6 et 10. Chaque multiple commun est un multiple du multiple le plus petit commun.

Le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE montre que tout nombre peut être exprimé de manière unique comme un produit de facteurs PREMIER . Tout multiple commun de deux entiers ou plus est le produit, à tout le moins, de tous les nombres premiers qui apparaissent dans les factorisations des entiers donnés, avec les répétitions nécessaires, avec peut-être des facteurs supplémentaires. En l'absence de facteurs supplémentaires présents, on obtient le plus petit multiple commun.

propriété commutative UNE OPÉRATION BINAIRE est dite commutative si elle est indépendante de l'ordre des termes auxquels elle s'applique. Plus précisément, une opération * est commutative si :

$$a*b = b*a$$

pour toutes les valeurs de a et b. Par exemple, en arithmétique ordinaire, les opérations d'addition et de multiplication sont commutatives, mais la soustraction et la division ne le sont pas. Par exemple, 2 + 3 et 3 + 2 sont égaux en valeur, mais 2 - 3 et 3 - 2 ne le sont pas.

Si une opération est à la fois commutative et ASSOCIATIVE, alors tous les produits d'un même ensemble d'éléments sont égaux. Par exemple, la quantité a*(b*c) est égale à (a*c)*b et b*(c*a). Dans ce cas, il est permis d'écrire simplement a*b*c, avec des termes dans n'importe quel ordre, sans souci de confusion.

En THÉORIE DES ENSEMBLES, l'union et l'intersection de deux ensembles sont des opérations commutatives. Dans l'analyse VECTOR , l'addition et le PRODUIT DOT de deux vecteurs sont des opérations commutatives, mais l' opération CROSS PRODUCT ne l'est pas. La multiplication d'une MATRICE par une autre n'est pas, en général, commutative.

Les opérations géométriques ne sont généralement pas commutatives. Par exemple, une réflexion suivie d'une rotation ne produit généralement pas le même résultat que d'effectuer d'abord la rotation puis d'appliquer la réflexion. On pourrait dire aussi que les opérations de chaussage et de chaussage ne sont pas commutatives.

Un GROUPE est dit commutatif, ou abélien, si l'opération du groupe est commutative.

Voir aussi NIELS HENRIK ABEL ; SUPPORT DISTRIBUTIF ERTY ; ANNEAU.

Machine Translated by Google

test de comparaison Voir SERIE CONVERGENTE.

compléter le carré Une quantité QUADRATIQUE de la forme $x^2 + 2bx$ peut être considérée, géométriquement, comme la formule de l'aire d'un carré incomplet.

L'ajout du terme b^2 complète l'image d'un carré $(x + b) \times (x + b)$. Nous avons:

$$x^2 + 2bx + b^2 = (x + b)^2$$

Ce processus de complétion du carré fournit une technique utile pour résoudre des équations quadratiques. Par exemple, considérons que l'équation $x^2 + 6x + 5 = 21$. Com complétant le carré de la partie $x^2 + 6x$ nécessite l'ajout du terme constant 9. Nous pouvons y parvenir en ajoutant 4 aux deux côtés de l'équation. On obtient:

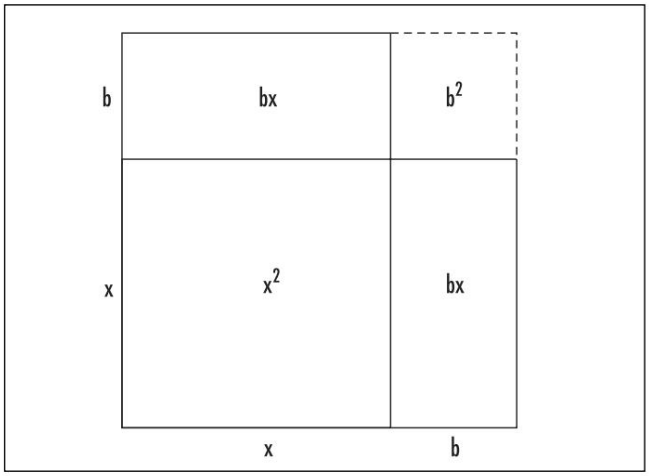
$$x^2 + 6x + 5 + 4 = 21 + 4x$$
$$x^2 + 6x + 9 = 25x$$
$$(x + 3)^2 = 25$$

d'où il suit que $x + 3$ est égal à 5 ou –5, c'est-à-dire que x est égal à 2 ou –8.

Le processus de complétion du carré génère une formule générale pour résoudre toutes les équations quadratiques.
Nous avons:

Les solutions d'une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, sont données par :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Compléter le carré

Cette formule est connue sous le nom de formule quadratique. Pour voir pourquoi c'est correct, divisez l'équation donnée par a et ajoutez un terme pour compléter le carré de la résultante $x^2 + \frac{b}{a}x$ portion $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Nous avons :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Par exemple, pour résoudre $x^2 + 6x + 5 = 21$, soustrayez 21 de $x^2 + 6x$ – les deux côtés de l'équation pour obtenir $x^2 + 6x - 16 = 0$. Par formule quadratique :

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(-16)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = 2 \text{ ou } -8$$

La formule quadratique montre que les deux racines r1 et r2 d'une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ (ou la simple racine double si le DISCRIMINANT $b^2 - 4ac$ est égal à zéro) satisfont montre que toute équation quadratique $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ et $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$. Ça aussi peut être résolue si l'on est disposés à autoriser les NOMBRES COMPLEXES comme solutions. (On peut être amené à prendre la racine carrée d'une quantité négative.)

Il existe des formules analogues pour résoudre les ÉQUATIONS CUBIQUES $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ et les ÉQUATIONS QUARTIQUES $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ en fonction des coefficients qui apparaissent dans les équations. L'algébriste NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) a montré qu'il ne peut y avoir de formules analogues pour résoudre les équations du cinquième degré et plus.

Voir aussi FACTORISATION ; THÉORÈME FONDAMENTAL D'ARITHMÉTIQUE ; HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET DE L'ALGÈBRE (essai); SOLUTION PAR LES RADICAUX.

Machine Translated by Google

nombres complexes Il n'y a pas de nombre réel x avec la propriété que $x^2 = -1$. En introduisant un nombre « imaginaire » i comme solution de cette équation, on obtient une multitude de nouveaux nombres de la forme a + ib avec a et b réels. Ces nouveaux nombres forment le système des nombres complexes. Il est d'usage d'utiliser la variable z pour désigner un nombre complexe arbitraire : z = a + ib. Si b = 0, alors z est un nombre réel. Ainsi l'ensemble des nombres complexes inclut l'ensemble des nombres réels. Si a = 0 de sorte que z est de la forme z = ib, alors z est dit purement imaginaire. En général, si z = a + ib, alors a est appelé la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z.

On écrit : Re(z) = a et Im(z) = b.

Le nombre i est généralement considéré comme la racine carrée de moins un : $i = \sqrt{-1}$. (Il faut être prudent car il y a, en fait, deux racines carrées de cette quantité, à savoir i et -i.) Les racines des autres quanti négatifs les liens suivent : $\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = \pm 3i$ et $\sqrt{-30} = \pm i\sqrt{30}$, par exemple.

L'ensemble de tous les nombres complexes est noté C. L'arithmétique peut être effectuée sur les nombres complexes en suivant les règles habituelles de l'algèbre et en remplaçant i par -1 chaque fois qu'il apparaît. Par exemple, nous avons :

$$(2 + 3i) + (4 - je) = 6 + 2i$$
$$(2 + 3i) - (4 - je) = -2 + 4i$$
$$(2 + 3i)(4 - je) = 8 + 12i - 2i - 3i^2 = 8 + 10i + 3 = 11 + 10i$$

Le QUOTIENT de deux nombres complexes peut être calculé par le processus de RATIONALISER LE DÉNOMINATEUR:

$$\frac{2 + 3je}{4 - je} = \frac{2 + 3je}{4 - je} \cdot \frac{4 + je}{4 + je} = \frac{(2 + 3je)(4 + je)}{(4 - je)(4 + je)} = \frac{5 + 14je}{4^2 - je^2} = \frac{5 + 14je}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}je$$

On peut montrer qu'avec ces propriétés arithmétiques, l'ensemble des nombres complexes constitue un CHAMP mathématique .

Au début du 18ème siècle, le mathématicien français ABRAHAM DE MOIVRE a remarqué une similitude frappante entre la multiplication complexe et l' ADDITION pour les mulae des fonctions sinus et cosinus de TRIGONOM ETRY. Étant donné que:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

et:

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

on obtient la formule compacte :

$$(\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) = \cos(x + y) + i\sin(x + y)$$

Cette observation a servi de base au célèbre pour mula qui porte désormais son nom :

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Quelques années plus tard, LEONHARD EULER (1707-1783) va plus loin et utilise les techniques du calcul pour établir sa formule extraordinaire :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

d'où découle aisément la FORMULE DE DE MOIVRE . (Utilisez $(e^{ix})^n = e^{inx}$.) De plus, ce résultat montre que la formule de de Moivre est également valable pour les valeurs non entières de n.

Que les fonctions cosinus et sinus apparaissent comme les parties réelles et imaginaires d'une FONCTION EXPONENTIELLE simple montre que toute la trigonométrie peut être grandement simplifiée en reformulant les choses en termes de nombres complexes. Bien que certains puissent affirmer que les nombres complexes n'existent pas dans le monde réel, les mathématiques du système de nombres complexes se sont avérées très puissantes et ont offert un aperçu approfondi du fonctionnement du monde physique. Les ingénieurs et les physiciens formulent une grande partie de leur travail en termes de théorie des nombres complexes. (Les ingénieurs préfèrent utiliser le symbole j au lieu de i.)

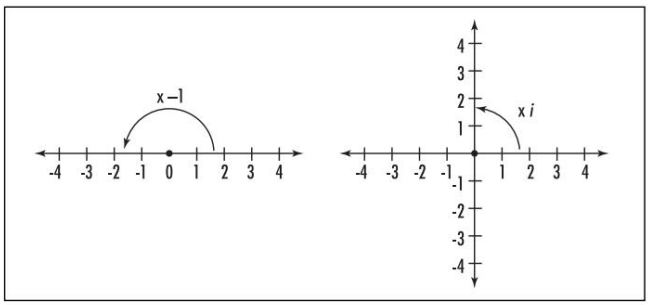
C'est une surprise d'apprendre que l'introduction d'un seul nouveau nombre i comme solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ fournit tout ce qui est nécessaire pour résoudre complètement toute équation POLYNOMIALE $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.

Le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE affirme qu'une équation polynomiale de degré n a précisément n racines (comptées avec multiplicité) dans le système de nombres complexes.

Il est possible d'élever un nombre réel à une puissance complexe pour obtenir un résultat réel. Par exemple, par la FORMULE D'EULER , on a :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + je \cdot 0 = -1$$

Machine Translated by Google



Multiplier par –1 et multiplier par i

Aussi, notant que $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$, on voit ça aussi possible d'élever un nombre complexe à une puissance complexe pour obtenir un résultat réel :

$$\text{soit } e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

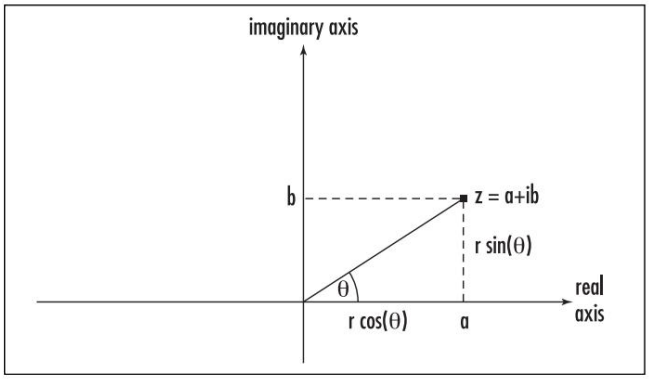
(Techniquement, puisque i peut également être exprimé comme $e^{ki(\frac{\pi}{2}+2\pi)}$ pour tout nombre entier k, il existe des valeurs (réelles) infiniment différentes pour la quantité i^i)

La géométrie des nombres complexes

Multiplier les entrées de la LIGNE NUMÉRIQUE réelle par –1 a pour effet de faire tourner la ligne autour du point 0 d'un angle de 180°. Il est naturel de se demander : par quel nombre la multiplication crée-t-elle une rotation de 90° autour du point zéro ?

Appelez le numéro désiré x. La multiplication par x aurait deux fois, c'est-à-dire multiplier par $x \times x = x^2$ l'effet, d'effectuer deux rotations de 90°, à savoir, un rotation de 180°. Ainsi la multiplication par x a le même effet que la multiplication par –1, et le nombre x recherché doit donc satisfaire l'équation $x^2 = –1$.

Cela montre que x = i et qu'il est naturel d'interpréter les nombres purement imaginaires de la forme ib comme membres d'une droite numérique verticale.



Coordonnées polaires d'un nombre complexe

Ce modèle fournit une correspondance naturelle entre les nombres complexes et les points du plan. L'axe horizontal est appelé l'axe réel, l'axe vertical l'axe imaginaire, et un nombre complexe arbitraire z = a + ib apparaît comme le point de coordonnées (a,b) sur le plan.

Cette représentation des nombres complexes sous forme de points sur un plan s'appelle un diagramme d'Argand en l'honneur de JEAN ROBERT ARGAND (1768-1822) qui, avec l'arpenteur Casper Wessel (1745-1818), a d'abord conçu de représenter les nombres complexes de cette manière. Le plan de tous les nombres complexes est aussi appelé plan complexe.

L'angle θ que fait un nombre complexe z = a + ib avec l'axe réel positif est appelé l'argument du nombre complexe, et la distance r du nombre complexe à l'origine est appelée son module (ou, simplement, sa valeur absolue), noté |z|. LE THÉORÈME DE PYTHAGORE et la FORMULE DE DISTANCE montrent que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En utilisant la trigonométrie, nous voyons que les valeurs a et b peuvent être exprimées en termes de r et θ d'une manière proche des COORDONNÉES POLAIRES. Nous avons:

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

A l'aide de la formule d'Euler, cela montre que tout nombre complexe z peut être exprimé sous forme polaire :

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

Il en résulte, par exemple, que le produit de $i\theta_1$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ a deux nombres complexes $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ module $r_1 r_2$ et argument $\theta_1 + \theta_2$:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Il est commode de définir le conjugué d'un nombre complexe z = a + ib comme étant le nombre $\bar{z} = a - ib$. Nous avons:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Machine Translated by Google

et, sous forme polaire, si $z = re^{i\theta}$, alors $-z = re^{-i\theta}$. Prenant le conjugué d'un nombre complexe a pour géométrie effet de refléter ce nombre sur l'axe réel.

Histoire des nombres complexes
Le premier Européen à utiliser sérieusement la place racine des quantités négatives était GIROLAMO CARDANO (1501-1576) d'Italie dans le développement de ses solutions aux ÉQUATIONS CUBIQUES. Il a noté que les quantités qui naquit dans son œuvre, telle une expression de la forme $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2 + 1}} + \sqrt[3]{- - \sqrt{}}$ par exemple, pourrait être manipulée algébriquement pour donner une vraie solution aux équations. (Nous avons = 4.) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2 + 1}} + \sqrt[3]{- - \sqrt{}}$ Néanmoins, il ne considérait une telle manipulation que comme un artifice commode sans signification pratique significative. Philosophe français RENÉ DESCARTES (1596-1650) convenu et inventé le terme imaginaire pour les racines des quantités négatives.

Au XVIIIe siècle, les mathématiciens ont continué travailler avec des racines imaginaires, malgré le scepticisme général quant à leur signification. Euler a introduit le symbole i pour $\sqrt{-1}$, et Argand et Wessel ont présenté leur modèle géométrique pour les nombres complexes, qui a été plus tard popularisé par CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). Sa preuve du théorème fondamental de l'algèbre a convaincu les mathématiciens de l'importance et de la validité du système des nombres complexes.

Le mathématicien irlandais SIR WILLIAM ROWAN HAMIL TON (1805-1865) est crédité d'avoir franchi la dernière étape vers démystifier la signification du système des nombres complexes. Il a étendu la notion de nombres complexes comme résultant de rotations de 90° en montrant que toute rotation dans un espace tridimensionnel peut naturellement et facilement être représenté en termes de nombres complexes. Il a aussi a noté que les nombres complexes ne sont rien de plus que paires ordonnées de nombres avec un moyen pour en les additionnant et en les multipliant. (On a (a,b) + (c,d) = (a + c,b + d) et (a,b)·(c,d) = (ac – bd,ad + bc).) Dans Le travail d'Hamilton, le numéro que je suis devenu rien de plus que le point (0,1).

Voir aussi NOMBRES NÉGATIFS ; STÉRÉOGRAPHIQUE PROJECTION.

composite Utilisé dans tout contexte où il est possible de parler de la multiplication de deux quantités, le terme composite signifie "avoir des facteurs appropriés". Pour l'examen ple, le nombre 12, qui équivaut à 3 × 4, est un COMPOSITE NOMBRE, et $y = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x + 3)$ est un polynôme composé (à ne pas confondre avec la COMPO SITION de deux polynômes).

Une quantité qui n'est pas composée est appelée irré ductile, ou, dans le contexte de la théorie des nombres, PRIME.

nombre composé Un nombre entier avec plus de deux facteurs positifs est appelé un nombre composé. Pour exemple, le nombre 12 a six facteurs positifs, et donc est composite, mais 7, avec seulement deux facteurs positifs, est non composite. Le numéro 1, avec un seul point positif facteur, n'est pas non plus composite. Nombres supérieurs à un qui ne sont pas composites sont appelés PRIME.

La séquence 8, 9, 10 est le plus petit ensemble de trois nombres composés consécutifs, et 24, 25, 26, 27, 28 est le plus petit ensemble de cinq composites consécutifs. C'est toujours possible de trouver des chaînes arbitrairement longues de nombres composés. Par exemple, en utilisant la fonction FAC TORIAL , nous voyons que la chaîne

$$(n+1)! + 2, (n + 1)! + 3, \ldots, (n + 1)! + (n + 1)$$

représente n entiers consécutifs, tous composés. (Cela montre, par exemple, qu'il y a des trous arbitrairement grands dans la liste des nombres premiers.)

Voir aussi FACTEUR.

composition (fonction d'une fonction) Si les sorties d'une fonction f sont des entrées valides pour une deuxième fonction g, alors la composition de g avec f, notée g° f, est la fonction qui prend une entrée x pour f et renvoie la sortie de l'alimentation de f(x) dans g :

$$(g^\circ f)(x) = g(f(x))$$

Par exemple, si l'alimentation de 3 dans f renvoie 5, et l'alimentation de 5 dans g renvoie 2, alors (g° f)(3) = 2. Si, alternativement, 1 $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2 + \overline{x}$, alors

$$\begin{aligned}(g^\circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 1) \\ &= 2 + \frac{1}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Typiquement g° f n'est pas le même que f°g. Dans notre dernier exemple, par exemple,

Machine Translated by Google

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{1}{x}$$

$$f(g(x)) = f(2 + x) = \frac{1}{2 + x} + 1$$

qui est une fonction différente. Comme autre exemple, si M est la fonction qui attribue à chaque personne du monde sa mère biologique, et F est la fonction analogue du père biologique, alors (M°F)(John) représente la grand-mère paternelle de John, alors que (F° M)(John) est le grand-père maternel de John.

La notation g° f est un peu déroutante, car elle doit être lue à l'envers. La fonction f est appelée « fonction centrale » et doit être appliquée en premier, la « fonction externe » g étant appliquée en second. La composition de trois fonctions f, g et h s'écrit h° f°g (ici h est la fonction externe), et la composition répétée d'une fonction f avec elle-même s'écrit f (n). Ainsi, par exemple, f (4) désigne la composition f° f° f° f. Un ensemble de compositions répétées est appelé un SYSTEME DYNAMIQUE.

Les mathématiciens ont montré que la composition de deux FONCTIONS CONTINUES est elle-même continue.

Précisément, si f est continue en x = a, et g est continue en x = f(a), alors g° f est continue x = a.

La composition de deux fonctions différentiables est différentiable. La RÈGLE DE CHAÎNE montre que la DÉRIVÉE de g° f est donnée par $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

intérêts composés Voir INTÉRÊTS.

instruction composée Voir TABLE DE VÉRITÉ.

ordinateur Un dispositif électronique permettant d'effectuer automatiquement soit des opérations arithmétiques sur des DONNÉES , soit des séquences de manipulations sur des ensembles de symboles (comme requis pour l'ALGÈBRE et la THÉORIE DES ENSEMBLES, par exemple), le tout selon un ensemble précis d'instructions prédéterminées, est appelé un ordinateur. L'ordinateur le plus largement utilisé et le plus polyvalent utilisé aujourd'hui est l'ordinateur numérique dans lequel les données sont représentées sous forme de séquences d'impulsions électroniques discrètes. Étant donné que chaque impulsion peut être « on » ou « off », il est naturel de penser à séquences de 0 et de 1 dans le travail en théorie informatique et, par conséquent, de travailler avec le système des NOMBRES BINAIRES pour représenter les données.

Un ordinateur numérique comporte un certain nombre de parties distinctes :

1. Un périphérique d'entrée, tel qu'un clavier, pour entrer un ensemble d'instructions (programme) et de données.
2. Une unité centrale de traitement (CPU) qui code les informations sous forme binaire et exécute les instructions. (Cette unité se compose d'une série de cartes de circuits électroniques sur lesquelles sont intégrés un grand nombre de "portes logiques", apparentées aux configurations CONJUNCTION et DISJUNCTION .)
3. Unités de mémoire, telles que disques et bandes magnétiques.
4. Un périphérique de sortie pour afficher les résultats, tel qu'un moniteur ou une imprimante.

L'étude de l'informatique se prête généralement aux capacités théoriques des machines informatiques définies en termes de programmes, et non aux propriétés physiques des ordinateurs réels. Le PROBLÈME D'ARRÊT et la question d'être NP COMPLET, par exemple, sont des sujets de préoccupation pour les scientifiques dans ce domaine.

Voir aussi BOULIER ; CHARLES BABBAGE; CHIFFRE.

concave/convexe Une courbe ou une surface qui se courbe vers l'intérieur, comme la circonférence d'un cercle vue de l'intérieur, ou le creux d'un bol, par exemple, est appelée concave. Une courbe ou une surface qui s'incurve vers l'extérieur, comme la limite d'un cercle vue de l'extérieur du cercle, ou la surface d'une sphère, est appelée convexe.

Une forme géométrique dans le plan ou un solide tridimensionnel est appelée convexe si la limite de la forme est une courbe ou une surface convexe. Par exemple, les triangles, les carrés et tout POLYGONE régulier sont des figures convexes. Les cubes et les sphères sont des solides convexes. Toute forme non convexe est dite concave. Un QUADRILATERAL deltoïde, par exemple, est un polygone concave.

Un polygone est convexe si chacun de ses angles intérieurs a une valeur inférieure à 180°. De manière équivalente, un polygone est convexe si la figure se trouve entièrement d'un côté de toute ligne contenant un côté du polygone. Un POLYÈDRE est convexe s'il se trouve entièrement d'un côté de n'importe quel plan qui contient l'une de ses faces.

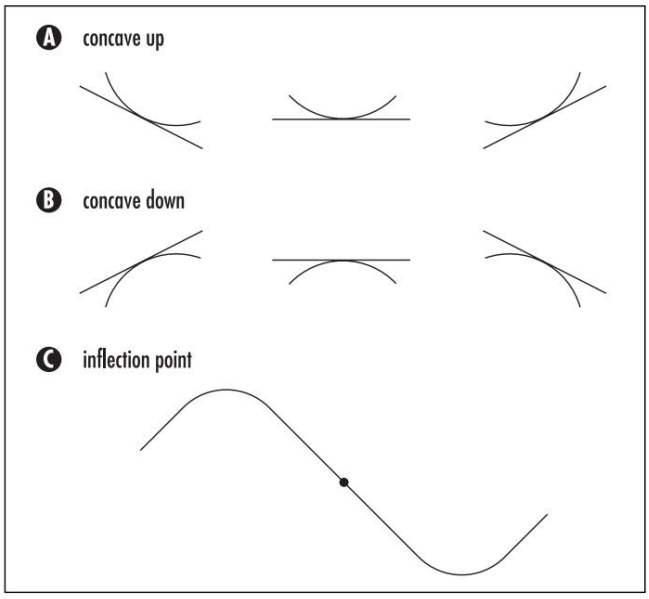
Une figure convexe peut également être caractérisée par la propriété que, pour deux points quelconques à l'intérieur de la figure, le segment de droite qui les relie se trouve également complètement à l'intérieur de la figure.

Machine Translated by Google

concave vers le haut/concave vers le bas Le graphique d'une fonction y = f(x) peut être décrit comme concave vers le haut sur un intervalle si, sur cet intervalle, la pente de la tangente à la courbe augmente à mesure que l'on se déplace de gauche à droite.
En supposant que la fonction est deux fois différentiable, cela signifie que la DÉRIVÉE f′(x) est une fonction strictement croissante et, par conséquent, la dérivée double vérifie f″(x)>0. (Voir AUGMENTATION/ DIMINUTION.) Par exemple, la dérivée double de f(x) = x f″(x) = 2>0, et la parabole y = x est concave vers le ^{2} est toujours positif, haut. Un graphe concave vers le haut a également la propriété que tout ACCORD joignant deux points sur le graphe se trouve entièrement au-dessus du graphe.

Le graphique d'une fonction y = f(x) est concave sur un intervalle si, sur cet intervalle, la pente de la tangente à la courbe diminue à mesure que l'on se déplace de gauche à droite. En supposant que la fonction est deux fois différentiable, cela signifie que f′(x) est une fonction strictement décroissante et, par conséquent, f″(x)<0 pour tous les points de l'intervalle. A titre d'exemple, puisque la dérivée double de 3 n'est négative que pour des valeurs négatives de x (f″(x) = x f(x) = x 3 is = 6x<0 pour x<0), on a que la courbe cubique y concave vers le bas a la propriété que tout accord joignant deux concave vers le bas uniquement à gauche de l'axe y. Un graphe points sur le graphe se trouve entièrement sous le graphe.

Un point auquel la concavité du graphique change est appelé un point d'inflexion ou un point d'inflec



Concavité

tion. (Orthographe alternative : inflexion.) Si x = a est un point d'inflexion pour une courbe f(x) différentiable deux fois , alors la dérivée double f″(x) est positive d'un côté de x = a et négative de la autre côté. Ce doit être le cas alors que f″(a) = 0. L'inverse n'a pas besoin d'être vrai, comment par exemple, satisfait jamais. La fonction concavité de la courbe ne change ^{4}, f(x) = x f″(0) = 0, mais la pas à x = 0.

Une étude de la concavité d'un graphique peut aider à localiser et à classer les maxima et minima locaux de la courbe.

Voir aussi GRAPHIQUE D'UNE FONCTION ; MAXIMUM/ LE MINIMUM.

concentrique/excentrique Deux cercles ou deux sphères sont dits concentriques s'ils ont le même centre. Deux figures non concentriques sont dites excentriques. La région entre deux cercles concentriques est appelée un ANNULE.

concurrent Tout nombre de lignes est dit concurrent s'ils passent tous par un point commun. De nombreuses lignes intéressantes construites à partir de triangles sont concordantes. Deux droites a1x + b1y = c1 et a2x + b2y = c2 dans le plan cartésien sont concourantes si a1b2 – a2b1 ≠ 0.
Voir aussi TRIANGLE.

conditionnel (hypothétique) Dans la LOGIQUE FORMELLE, un énoncé de la forme « Si … alors… » est connu sous le nom de conditionnel ou d'implication. Par exemple, "Si un polygone a trois côtés, alors c'est un triangle" est une condition déclaration.

Une instruction conditionnelle a deux composants : Si p, alors q. L'énoncé p est appelé l'antécédent (hypothèse ou prémisse) et l'énoncé q le conséquent (ou conclusion). Une instruction conditionnelle peut être écrite de différentes manières, mais équivalentes :

Si p, alors q.
p implique q.
q si p.
p seulement
si q. p est suffisant pour
q. q est nécessaire pour p.

Il est noté en symboles par : p→q.

Machine Translated by Google

La TABLE DE VÉRITÉ du conditionnel est motivée par intuition. Considérez, par exemple, l'énoncé :

Si Peter regarde un film d'horreur, alors il mange Popcorn.

La déclaration est certainement vraie si nous observons Peter regarder un film d'horreur et manger du pop-corn au même temps (c'est-à-dire si l'antécédent et le conséquent sont les deux vrais), mais faux si l'antécédent est vrai mais que le conséquent est faux (c'est-à-dire que Pierre regarde un film d'horreur mais sans manger de pop-corn). Cela justifie les deux premiers lignes de la table de vérité ci-dessous.

Les deux dernières lignes sont une question de convention. Si Peter ne regarde pas un film d'horreur, c'est-à-dire que si le l'antécédent est faux, alors l'instruction conditionnelle en tant que l'ensemble est discutable. La LOGIQUE FORMELLE, cependant, nous oblige à attribuer une valeur de vérité à chaque énoncé. En regardant un film d'amour et manger (ou ne pas manger) du pop-corn fait n'implique pas que l'instruction conditionnelle est un mensonge, nous allons devant et attribuer une valeur de vérité "vrai" aux deux derniers lignes du tableau :

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Cette convention conduit cependant à des difficultés. Considérez, par exemple, l'énoncé suivant :

Si toute cette phrase est vraie, alors la lune est fait de fromage.

Ici, l'antécédent p est l'énoncé : "toute la phrase ci-dessus est vraie". La conséquence est : « la lune est fait de fromage. Remarquez que p est vrai ou faux selon que l'énoncé entier p→q est vrai ou FAUX. Il n'y a qu'une ligne dans la table de vérité pour laquelle p et p→q ont la même valeur de vérité, à savoir la première un. Il doit donc être vrai que p, q et p→q sont chacun vrai. En particulier, q est vrai. Logiquement, alors, le la lune doit en effet être faite de fromage.

Voir aussi ARGUMENT ; BICONDITIONNEL ; CONDITION-NÉCESSAIRE ET SUFFISANT ; AUTO-RÉFÉRENCE.

convergence conditionnelle Voir ABSOLUTE CONVER GENCE.

probabilité conditionnelle La probabilité d'un ÉVÉNEMENT survenu compte tenu de la connaissance qu'un autre événement a déjà eu lieu est appelée probabilité conditionnelle.

Par exemple, supposons que deux cartes soient tirées de un jeu et nous souhaitons déterminer la probabilité que la deuxième carte tirée est rouge. Connaissance du premier la couleur de la carte affectera nos calculs de probabilité. Précisément:

je. Si la première carte est noire, alors la probabilité que la la seconde est rouge est 26/51 (il y a 26 cartons rouges parmi les 51 cartes restantes),

ii. Si la première carte est rouge, alors la probabilité que le seconde est également cette couleur est maintenant seulement 25/51.

(Si nous n'avons aucune connaissance de la couleur de la première carte, alors les chances que la deuxième carte soit rouge sont $1/2$.)

Si A et B sont deux événements, alors la notation A|B est utilisé pour désigner l'événement : "A se produit étant donné que l'événement B s'est déjà produit. » La notation P(A|B) désigne la probabilité que A se produise uniquement parmi les expériences dans lesquelles B s'est déjà produit. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus :

$$P(\text{la deuxième carte est rouge} \mid \text{la première carte est noire}) = \frac{26}{51}$$

$$P(\text{la deuxième carte est rouge} \mid \text{la première carte est noire}) = \frac{25}{51}$$

Si, dans de nombreuses exécutions d'une expérience, l'événement B se produit b fois, et les événements A et B se produisent simultanément a fois, alors la proportion de fois où l'événement A s'est produit quand B est arrivé est a/b. Cela motive la formule mathématique de la probabilité conditionnelle :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Par exemple, supposons qu'on nous dise qu'une carte tirée d'un pont est rouge. Pour déterminer la probabilité que cette carte est aussi un as on observe :

$$P(\text{as} \mid \text{rouge}) = \frac{P(\text{as et rouge})}{P(\text{rouge})} = \frac{P(\text{as rouge})}{P(\text{rouge})} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{13}$$

Machine Translated by Google

Autrement dit, la probabilité qu'un carton rouge soit un as est de 1/13. Bien sûr, compter le nombre de fois où "as" apparaît parmi les cartons rouges donne également P(as | rouge) = 2/26 = 1/13.

La probabilité conditionnelle est utile pour analyser des problèmes plus complexes tels que le fameux DEUX PUZZLE DE CARTES.

Si deux événements A et B sont des ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS, alors les probabilités satisfont la relation P(A∩B) = P(A) × P(B). Cela montre que P(A | B) = P(A), c'est-à-dire que la probabilité que l'événement A se produise effectivement n'est pas modifiée par l'information indiquant si B s'est produit ou non.

Voir aussi THÉORÈME DE BAYES .

condition - nécessaire et suffisante En logique, une condition est une proposition ou un énoncé p qui doit être vrai pour qu'une autre proposition q soit vraie. Si q ne peut pas être vrai sans p, alors nous appelons p une condition nécessaire. Si la validité de p garantit que q est vrai, alors nous appelons p une condition suffisante. Par exemple, pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il faut qu'il possède deux côtés parallèles, mais cette condition n'est pas suffisante. (Un trapèze, par exemple, a deux côtés parallèles mais n'est pas un rectangle.) Pour qu'un nombre soit pair, il suffit que le nombre se termine par un quatre, mais cette condition n'est pas nécessaire.

Si p est une condition suffisante pour q, alors la CONDITIONNELLE (implication) p→q est vérifiée. Les mathématiciens écrivent généralement : q est vrai si p est vrai. Si p est une condition nécessaire pour q, alors l'implication q→p est vérifiée. Les mathématiciens écrivent généralement : q n'est vrai que si p est vrai.

Si le BICONDITIONNEL est vrai : p↔q, alors p est nécessaire et suffisant pour q. Par exemple, pour qu'un nombre soit divisible par 10, il faut et il suffit que le nombre se termine par un zéro. Une telle déclaration s'écrit généralement : p si, et seulement si, q ou, de manière compacte, comme "p si et si q".

Voir aussi LOGIQUE FORMELLE ; TABLE DE VÉRITÉ.

cône Dans l'espace à trois dimensions, un cône est la surface formée par un ensemble infini de droites tracées de la manière suivante : chaque droite passe par un point d'une courbe fixe fermée inscrite dans un plan, appelée directrice du cône, et par un point donné fixe au-dessus du plan, appelé sommet du cône. Les lignes tracées sont appelées les génératrices du cône.

Dans les travaux élémentaires, la directrice est généralement considérée comme un cercle de sorte que les cônes produits sont circulaires cônes. Un cône circulaire est "droit" si son sommet se trouve directement au-dessus du centre du cercle, et "oblique" sinon. Les points sur la surface d'un cône circulaire droit satisfont une équation de la forme $x^2 + z^2 = a^2 y^2$, pour certains constante A.

Techniquement, les génératrices d'un cône sont supposées s'étendre indéfiniment dans les deux sens. Ainsi, un cône quelconque est constitué de deux surfaces identiques se rencontrant au sommet. Chaque surface est appelée nappe ou demi-cône. Cependant, si le contexte est clair, le mot cône désigne souvent une seule nappe, ou juste la partie d'une nappe entre le sommet et le plan de la directrice. L'objet dans ce dernier cas est parfois appelé un cône fini. Il est délimité et renferme un volume fini.

Pour un cône fini, la région plane délimitée par la directrice est appelée la base du cône et le sommet est appelé le sommet du cône. La distance verticale du sommet à la base est appelée la hauteur du cône, et le volume V d'un cône fini est donné par V = Ah, où h est la hauteur du cône et A l'aire de sa base. (Voir VOLUME.) Ainsi : $V = \frac{1}{3}Ah$

Le volume d'un cône est égal au tiers du volume du CYLINDRE qui le contient.

ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 av. J.-C.) a établi que le volume d'une SPHÈRE correspond aux deux tiers du volume du cylindre qui la contient. (En dessinant un cône dans ce cylindre, Archimède a établi que l'aire de chaque tranche horizontale d'une sphère est égale à l'aire de l' ANNULUS entre le cône et le cylindre à la même hauteur correspondante.) La formule du volume d'une sphère suit facilement .

Voir aussi SECTIONS CONIQUES.

application conforme (transformation équiangulaire, transformation isogonale) Toute transformation géométrique qui ne modifie pas les angles d'intersection entre deux lignes ou courbes est appelée application conforme. Par exemple, dans GEOMETRY, les réflexions, les translations, les rotations, les dilatations et les inversions préservent toutes les angles entre les lignes et les courbes et sont donc des applications conformes. LA PROJECTION DE MERCATOR de la Terre sur un cyclinder préserve tous les angles du globe et est donc une projection conforme.

Voir aussi TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE.

Machine Translated by Google

congruence Deux nombres a et b sont dits congruents modulo N, pour un entier positif N, si a et b laissent le même reste lorsqu'ils sont divisés par N. On écrit : a ≡ b (mod N). Par exemple, puisque 16 et 21 sont tous les deux 1 de plus qu'un multiple de 5, nous avons 16 ≡ 21(mod5). Aussi 14 ≡ 8(mod3) et 28 ≡ 0(mod7).

On peut interpréter de manière équivalente l'énoncé a ≡ b(modN) comme signifiant : "la différence a - b est divisible par N". Puisque –2 et 16, par exemple, diffèrent d'un multiple de 9, nous avons –2 ≡ 16(mod9). Deux nombres qui ne sont pas congrus modulo N sont dits incongrus modulo N.

On peut additionner, soustraire et multiplier deux congruences de même module N de la même manière qu'on additionne, soustrait et multiplie des quantités ordinaires.
Par exemple, en notant que 14 ≡ 4(mod10) et 23 ≡ 3(mod10), on a bien :

$$14 + 23 \equiv 4 + 3 (\mathrm{mod}10)$$
$$14 - 23 \equiv 4 - 3 (\mathrm{mod}10)$$
$$14 \times 23 \equiv 4 \times 3 (\mathrm{mod}10)$$

Malheureusement, le processus de division n'est pas préservé sous la congruence. Par exemple, 14 ÷ 2 n'est pas congruent avec 4 ÷ 2 modulo 10. Une étude approfondie de l'ARITHMÉTIQUE MODULAIRE explique dans quelles circonstances la division est permise.

L'arithmétique de la congruence apparaît naturellement dans tout phénomène cyclique. Par exemple, trouver le jour de la semaine pour une date donnée nécessite de travailler avec des congruences modulo 7, et l'arithmétique pour compter les heures qui passent fonctionne avec des congruences modulo 24 ou modulo 12. (Cela conduit à l'étude de CLOCK MATH .)

Certaines RÈGLES DE DIVISIBILITÉ peuvent être expliquées par des congruences. Par exemple, puisque 10 ≡ 1 (mod9), toute puissance de 10 est également congruente à 1 modulo 9 : 10n ≡ 1 n = 1 (mod9). Par conséquent, tout nombre est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres. Par exemple,

$$486 = 4 \times 102 + 8 \times 10 + 6 \times 1$$
$$\equiv 4 \times 1 + 8 \times 1 + 6 \times 1 (\mathrm{mod}9) = 4 + 8 + 6 (\mathrm{mod}9)$$

Puisque 4 + 8 + 6 est un multiple de 9, il s'ensuit que 486 est divisible par 9.

Voir aussi CASTING OUT NINES; JOURS DE LA SEMAINE FORMULE.

figures congruentes Deux figures géométriques sont congruentes si elles ont la même forme et la même taille. Plus précisément, deux POLYGONES sont congruents si, sous une certaine correspondance entre les côtés et les sommets, les longueurs des côtés correspondants sont égales et les angles intérieurs correspondants sont égaux. Deux carrés différents avec la même longueur de côté, par exemple, sont des figures congruentes.

A noter que deux figures planes peuvent être congruentes sans être identiques : une figure peut être l'image miroir de l'autre. Deux figures sont dites directement congruentes si l'une peut être amenée en coïncidence avec l'autre par rotation et translation de la figure dans le plan et congruentes opposées si l'on doit également appliquer une réflexion. Deux carrés identiques, par exemple, sont directement congruents, peu importe où ils se trouvent sur le plan. Deux triangles scalènes avec des longueurs de côté correspondantes peuvent ou non être directement congruents. Il existe un certain nombre de tests géométriques pour déterminer si oui ou non deux triangles sont congruents comme indiqué par les règles AAA/AAS/ASA/SAS/SSS .

Dans l'espace tridimensionnel, deux solides sont directement congruents s'ils sont identiques. Si chacun est l'image miroir de l'autre, ils sont opposés congruents.

Le terme congruent est parfois appliqué à d'autres constructions géométriques pour signifier "le même". Par exemple, deux segments de droite sont congrus s'ils ont la même longueur, ou deux ANGLE sont congrus s'ils ont la même longueur. mesure.

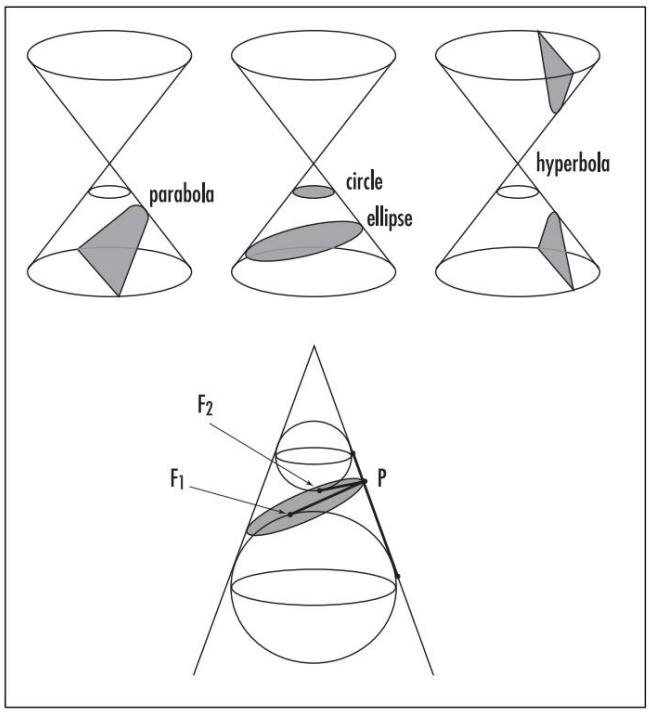
Voir aussi CHIFFRES SIMILAIRES.

sections coniques Trancher un CÔNE circulaire droit avec un plan qui ne passe pas par le sommet du cône produit des courbes appelées sections coniques, ou simplement coniques. Si le plan de coupe est parallèle à une ligne droite qui génère le cône, alors la conique résultante est une PARABOLE. Sinon, si le plan de coupe passe par une seule nappe du cône, la courbe produite est soit un CERCLE , soit une ELLIPSE, soit une HYPERBOLE si le plan de coupe coupe les deux nappes.

Si nous considérons le cône comme des rayons lumineux émanant d'une source lumineuse maintenue au sommet, alors l'ombre projetée par un anneau circulaire sur une feuille de carton sera une section conique ; la conique particulière produite dépend de l'angle auquel la carte est tenue. L'anneau ouvert au sommet d'un abat-jour, par exemple, projette une ombre hyperbolique sur le mur. De la même manière, les ombres projetées par des boules pleines sont des sections coniques.

Machine Translated by Google

Les érudits grecs de l'Antiquité ont été les premiers à étudier les sections coniques. Sans applications pratiques à l'esprit, les mathématiciens ont poursuivi le sujet uniquement pour sa beauté et ses récompenses intellectuelles. Vers 225 avant notre ère APOLLONIUS DE PERGE a écrit une série de huit livres, intitulée The Conics, dans laquelle il a étudié en profondeur ces courbes. Il a introduit les noms de parabole, d'ellipse et d'hyperbole. ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (env.
287-212 avant notre ère) a également écrit sur ces courbes. Près de 2 000 ans plus tard, les scientifiques ont commencé à trouver des applications des sections coniques aux problèmes du monde réel. En 1604, GALILEO GALILEI découvrit que les objets lancés en l'air suivent des trajectoires paraboliques (si la résistance de l'air peut être négligée), et en 1609 l'astronome JOHANNES KEPLER découvrit que l'orbite de Mars est une ellipse. Il conjectura que tous les corps planétaires avaient des orbites elliptiques, ce que, 60 ans plus tard, ISAAC NEWTON put prouver en utilisant sa nouvelle loi de la gravitation. Ce siècle, les scientifiques ont découvert que la trajectoire d'une particule alpha dans le champ électrique d'un noyau atomique est une hyperbole.



Les sections coniques

Les sections coniques ne peuvent être décrites que par les propriétés qu'elles possèdent en tant que courbes dans un plan. Nous voyons cela en dessinant des sphères tangentes intérieurement au cône et tangentes au plan de coupe définissant la courbe. Par exemple, étant donnée une ellipse, si deux sphères internes sont tangentes au plan aux points F1 et F2 , alors pour tout point P de l'ellipse, sa distance à F1 est la même que sa distance au cercle de tangence de la sphère inférieure, et sa distance à F2 est la même que sa distance au cercle de tangence de la sphère supérieure. Par conséquent, la somme de ses distances de F1 et F2 est égale à la distance fixe entre les deux sphères mesurée le long du côté du cône. Cette propriété peut être utilisée pour définir une ellipse :

> Une ellipse est l'ensemble de tous les points du plan dont les distances à deux points donnés, F1 et F2 , ont une somme constante.

En traçant des sphères, une dans chaque nappe du cône et tangentes au plan de coupe d'une hyperbole, on peut montrer de façon analogue :

> Une hyperbole est l'ensemble de tous les points du plan dont les distances à deux points donnés, F1 et F2 , ont une différence constante.

Pour une parabole, on dessine une seule sphère tangente au plan de coupe de la parabole et considère le point F où la sphère touche le plan, et la ligne L d'intersection du plan de coupe avec le plan du cercle le long duquel la sphère est tangente au cône. Nous avons:

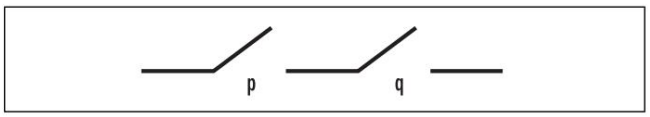
> Une parabole est l'ensemble de tous les points du plan situés à la même distance d'un point F du plan et d'une droite donnée L.

Les sections coniques ont des propriétés de réflexion remarquables.
Voir aussi PROJECTION.

conjonction (instruction "et") En LOGIQUE FORMELLE, une instruction composée de la forme "p et q" est connue sous le nom de conjonction. Par exemple, "Un triangle a trois côtés et un carré a quatre côtés" est une conjonction. Une conjonction est notée en symboles par p q.

Pour qu'une conjonction dans son ensemble soit considérée comme vraie, chaque composante (ou conjointe) p et q doit elle-même être vraie. Ainsi une conjonction a la TABLE DE VÉRITÉ suivante :

Machine Translated by Google



Circuit de conjonction

p qp	q	
TTT		
T FF		
F TF		
FFF		

Une conjonction peut être modélisée via un circuit en série. Si T désigne le flux de courant, alors le courant se déplace à travers le circuit dans son ensemble si, et seulement si, les deux interrupteurs p et q permettent le flux de courant (c'est-à-dire qu'ils sont fermés).

Voir aussi DISJONCTION.

Connecté Informellement, un objet géométrique est « connecté » s'il vient d'un seul tenant. Par exemple, une région du plan est connectée si, pour deux points quelconques de cette région, on peut tracer une ligne continue qui relie les deux points et reste dans la région. Par exemple, un DEMI-PLAN est connecté. L'ensemble de tous les nombres réels sur la droite numérique différents de zéro n'est pas connecté.

Une surface assise dans un espace tridimensionnel, comme une SPHÈRE ou un TORUS, est connectée si deux points quelconques de la surface peuvent être connectés par un chemin continu qui reste sur la surface. Un GRAPH est connexe si, pour deux sommets quelconques, il existe un chemin contigu d'arêtes qui les relie.

La connectivité d'un objet géométrique est le nombre de coupes nécessaires pour briser la forme en deux morceaux. Par exemple, un cercle (intérieur et circonférence) et une sphère solide ont chacun une connectivité. Un ANNULUS et un tore ont chacun une connectivité deux.

cohérent Un ensemble d'équations est dit cohérent s'il existe un ensemble de valeurs qui satisfait toutes les équations. Par exemple, les équations x + y = 7 et x + 2y = 11 sont cohérentes, puisqu'elles sont satisfaites par x = 3 et y = 4. Par contre, les équations x + y = 1 et x + y = 2 sont incohérentes.

En LOGIQUE FORMELLE, un système mathématique est dit cohérent s'il est impossible de prouver qu'un énoncé est à la fois vrai et non vrai. Autrement dit, un système est cohérent s'il est exempt de CONTRADICTION.
Les mathématiciens ont prouvé, par exemple, que l'arithmétique est un système logique cohérent.

Voir aussi ARGUMENT ; L'INCOMPÉTITUDE DE GÖDEL THÉORÈMES ; LOIS DE LA PENSÉE ; LINÉAIRE SIMULTANÉ ÉQUATIONS.

constante Le mot constante est utilisé dans un certain nombre de contextes mathématiques. Dans une expression algébrique, toute valeur numérique qui y apparaît est appelée une constante. Par exemple, dans l'équation y = 2x + 5 avec les variables x et y, les nombres 2 et 5 sont des constantes. Ces nombres peuvent être appelés constantes absolues car leurs valeurs ne changent jamais. Dans les applications générales, cependant, les constantes peuvent être considérées comme prenant l'une quelconque d'un certain nombre de valeurs. Par exemple, dans l'équation générale d'une droite y = mx + b , les quantités m et b sont considérées comme des constantes même si elles peuvent adopter des valeurs différentes pour différentes applications spécifiques.

Une grandeur spécifique invariante dont la valeur est déterminée a priori, telle que π ou e, est aussi appelée constante. En physique, toute grandeur physique dont la valeur est fixée par les lois de la nature, comme la vitesse de la lumière c, ou la constante gravitationnelle universelle G, est appelée constante.

Le terme constant dans un POLYNOME est le terme qui n'implique aucune puissance de la variable. Par exemple, les polynômes x - 5x + 7 et 2z ont des termes constants 7 $^{5} - 3z^{2} + z^{3}$ et 0, respectivement.

Une fonction constante est toute fonction f qui produit la même valeur de sortie, a par exemple, quelle que soit la valeur d'entrée fournie : f(x) = a pour toutes les valeurs x. Le graphique d'une fonction constante est une ligne horizontale. Il est surprenant, par exemple, de découvrir que la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{x - 10}$$

définie pour tout nombre positif x, est une fonction constante. La formule renvoie toujours la valeur 10, quelle que soit la valeur choisie pour l'entrée x .

constante d'intégration La VALEUR MOYENNE THEO REM montre que deux primitives quelconques d'un

Machine Translated by Google

fonction ne diffèrent que par une constante. Par exemple, toute primitive de la fonction f(x) = 2x doit être de la forme x + C pour une constante C, appelée constante d'intégration. Une primitive est généralement exprimée sous la forme d'une INDEFINITE INTEGRAL. Dans notre exemple, nous avons ∫2xdx = x Il faut être prudent 2 + C

lorsqu'on travaille avec une constante arbitraire d'intégration. Par exemple, considérez

calcul de l'intégrale $\int \frac{1}{x} dx$ via la méthode d' INTEGRA

1 1 TION PAR PARTIES. Posons u = et v′ = 1 (de sorte que u′ = $\frac{}{2x}$ – et v = x) pour obtenir :

$$\int \frac{1}{x} 1\, dx = \frac{}{x} \cdot x - \int \frac{}{2x} x\, dx$$

$$1 = + \int \frac{1}{x} dx$$

Soustraire l'intégrale considérée suggère l'absurdité : 0 = 1. Bien sûr, cet argument ne tient pas compte des constantes d'intégration qui devraient apparaître.

Voir aussi ANTIDIFFÉRENCIATION ; CALCUL INTÉGRAL.

largeur constante Une roue circulaire a la propriété d'avoir une hauteur constante lorsqu'elle roule sur le sol.
Alternativement, on pourrait dire que la largeur de la courbe est la même quelle que soit la direction dans laquelle on oriente la figure pour la mesurer. Toute forme possédant cette propriété est appelée une courbe de largeur constante. Le soi-disant triangle de Reuleaux, construit en dessinant des arcs de cercles le long de chaque côté d'un triangle équilatéral (avec le sommet opposé comme centre de chaque arc de cercle) est un autre exemple d'une telle courbe. Les roues de cette forme roulent également sur le sol avec une hauteur constante.

On peut construire des roues de hauteur constante à l'aide d'un ordinateur. On part des ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES d'un cercle de rayon 1 et de centre (0,0) données par x(t) = 0 + cos(t) et y(t) = 0 + sin(t), pour 0 ≤ t < 360°.
Certes, la distance entre deux points quelconques sur ce cercle qui sont séparés par un angle de 180° est toujours de 2. En modifiant légèrement l'emplacement du centre du cercle, nous pouvons conserver cette propriété de distance, tant que nous nous assurons que le centre revient au même endroit tous les 180°. Ainsi, par exemple, les équations :

$$X(t) = \frac{1}{10} 2 \sin(\ ) \cos(\ ) t + t$$

$$Y(t) = -1 2 \cos(\ ) \sin(\ ) t - 8 t$$

sont les équations paramétriques d'une autre courbe avec la même propriété de largeur constante. (Les coefficients fractionnaires ont été choisis pour s'assurer que le chiffre résultant est CONVEXE.)

Le mathématicien français Joseph Barbier (1839-1889) a prouvé que toutes les courbes de largeur constante d ont le même périmètre, π d. On sait aussi que, pour une largeur donnée, le triangle de Reuleaux est la courbe de largeur constante de plus petite aire.

constructible Une figure géométrique est dite constructible si elle ne peut être tracée qu'avec les outils d'une règle (c'est-à-dire d'une règle sans repères) et d'un compas. La règle permet de tracer des segments de ligne entre des points (mais pas de mesurer les longueurs de ces segments), et la boussole permet de tracer des cercles avec un point donné comme centre et un segment de ligne donné à partir de ce point comme rayon.

Les érudits grecs de l'Antiquité ont été les premiers à explorer la question de savoir quelles constructions géométriques pouvaient être produites à l'aide de ces seuls outils primitifs.
Le géomètre EUCLIDE (vers 300 avant notre ère) a explicitement énoncé ces limitations dans son célèbre texte LES ÉLÉMENTS. Malgré le fait que son exercice n'ait pas de véritable application pratique (il est beaucoup plus facile de dessiner des figures avec des règles pour mesurer des longueurs et des rapporteurs pour mesurer des angles), le problème de la constructibilité capta la fascination des savants pendant les deux millénaires qui suivirent. Cela illustre le pouvoir de la curiosité intellectuelle seule pour la motivation de l'investigation mathématique. Aujourd'hui, les élèves des lycées doivent encore étudier les questions de constructibilité.

La boussole utilisée par les Grecs était différente de celle que nous utilisons aujourd'hui ; il ne resterait pas ouvert à un angle fixe lorsqu'il serait soulevé de la page et s'effondrerait.
Ainsi, il n'était pas directement possible de tracer plusieurs cercles de même rayon, par exemple, simplement en amenant la boussole à différentes positions sur la page. Cependant, dans son ouvrage The Elements, Euclid a démontré comment accomplir cet exploit avec la boussole pliable grecque.
Cela montre que toute construction qui peut être réalisée avec un compas moderne peut également être réalisée avec un compas pliable. Pour cette raison, on suppose aujourd'hui que la boussole utilisée est moderne.

Un nombre surprenant de constructions peuvent être réalisées à l'aide d'une règle et d'un compas seuls. Nous n'énumérons ici que quelques démonstrations.

Machine Translated by Google

1. Copier un segment de droite AB donné sur une droite L donnée

   Placez la boussole avec la pointe à une extrémité du segment de ligne et la pointe du crayon à l'autre, réglant ainsi la boussole sur la longueur du segment de ligne. Étiquetez un point A′ sur la ligne L, placez la pointe de la boussole en A′ et utilisez-la pour marquer un point B′ sur la ligne. Le segment A'B' est congru au segment AB.

2. Tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée L passant par un point donné P sur L.

   Réglez la boussole à un rayon arbitraire et, avec la pointe de la boussole placée sur le point P, marquez deux points A et B sur la ligne L équidistante de P.
   Dessinez maintenant deux cercles de même rayon, l'un avec le centre en A et l'autre avec le centre en B. Ces cercles se coupent en deux positions X et Y. Ces points X et Y sont à la même distance de chacun de X et Y, et ainsi , comme le prouve l'étude d' EQUIDISTANCE , la droite passant par X et Y (et P) est la médiatrice perpendiculaire du segment de droite AB. En particulier, il s'agit d'une droite passant par P perpendiculaire à L.

3. Construire la bissectrice perpendiculaire d'une droite donnée segment AB.

   La construction décrite en 2 ci-dessus accomplit cet exploit.

4. Tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée L passant par un point donné P non sur L.

   Réglez la boussole avec sa pointe sur P et tracez un grand cercle qui coupe la ligne L en deux points A et B. Suivez maintenant la procédure pour 2.

5. Dessinez un triangle équilatéral.

   Les points A, B et X décrits en 2 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

6. Copiez un triangle arbitraire à une position différente sur la page.

   Supposons que le triangle donné ait des sommets étiquetés A, B et C. Réglez la boussole avec le point sur A et la pointe sur B. Choisissez arbitrairement un point A ′ ailleurs sur la page et utilisez la boussole pour dessiner un cercle de centre A ′ et rayon égal à la longueur du segment AB. Étiquetez un point arbitraire sur ce cercle B′. À l'aide du compas, tracez un deuxième cercle de centre A′, mais cette fois de rayon égal à la longueur de AC. Il faut maintenant sélectionner un point C′ approprié sur ce deuxième cercle. Tracez un troisième cercle de centre B′ de rayon égal à la longueur de BC. Étiquetez un point d'intersection entre les deux derniers cercles C '. Alors A′B′C′ est une copie conforme du triangle d'origine.

7. Copiez un angle donné à un emplacement différent sur la page.

   Considérez simplement l'angle comme faisant partie d'un triangle et suivez les instructions de la partie 6.

8. Construire une droite parallèle à une droite donnée L passant par point P pas sur L.

   Tracez une ligne arbitraire passant par P qui coupe la ligne L. Copiez l'angle que font ces deux lignes à la position P et tracez une troisième ligne passant par P à cet angle. Cela produit un diagramme d'une TRANSVERSALE croisant une paire de lignes possédant des angles correspondants égaux. Par l'inverse du POSTULAT PARALLÈLE, les deux droites sont parallèles.

9. Construire une ligne qui divise précisément un angle donné à moitié.

   Dessinez un cercle de rayon arbitraire dont le centre est au sommet de l'angle. Supposons que ce cercle coupe les rayons des angles aux positions A et B. Dessinez maintenant deux cercles de même rayon centrés sur chacun de ces deux points.
   Soit P un point d'intersection des deux cercles. Alors la droite reliant le sommet de l'angle à P est une bissectrice d'angle.

   (Le principe de similarité SSS montre que les deux triangles produits dans la construction sont congruents, démontrant alors que l'angle d'origine est bien divisé en deux mesures égales.)

10. Dessinez un carré parfait.

    Dessinez un segment de ligne arbitraire. Ce sera le premier côté du carré. Étiquetez ses extrémités A et B. À l'aide de la partie 2, construisez une droite passant par B perpendiculaire au segment de droite. Utilisez un cercle centré autour de B de rayon égal à AB pour trouver un point C sur cette ligne perpendiculaire de sorte que BC soit de la même longueur que AC. Cela fournit le deuxième côté du carré. Répétez cette procédure pour construire les deux côtés restants du carré.

Tous les exploits géométriques ne peuvent pas être accomplis avec une règle et un compas seuls. Par exemple, bien qu'il soit possible de construire également un pentagone régulier et un

Machine Translated by Google

hexagone régulier avec ces outils primitifs, la construction d'un heptagone régulier (un polygone à sept côtés) est impossible. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) a prouvé qu'un n-gone régulier est constructible si, et seulement si, n est un nombre de la forme 2k p1p2…pn , avec chaque pi + 1 (tel que 3, 5, 17, $_s$ un PRIME distinct de la forme 2^{2^n} 257 , et 65 537.) Bien que l'on puisse bissecter un angle avec une règle et un compas, le problème de la TRI SECTION D'UN ANGLE est insoluble. Les deux problèmes classiques de QUADRATURE DU CERCLE et DE DUPLICATION DU CUBE ne peuvent pas non plus être résolus.

Nombres constructibles Un nombre réel r est dit constructible si, étant donné un segment de droite sur une page réputée de longueur unitaire, il est possible d'en construire un segment de droite de longueur r en utilisant uniquement les outils d'une règle et d'un compas. . Par exemple, le chiffre 2 est constructible.
(Étant donné un segment de ligne AB de longueur un, utilisez la règle pour prolonger la longueur de la ligne. Tracez un cercle de rayon égal à la longueur de AB, centré autour de B, pour couper la ligne en un nouveau point C. Ensuite, la longueur de AC est 2.) Tout nombre entier positif est constructible.

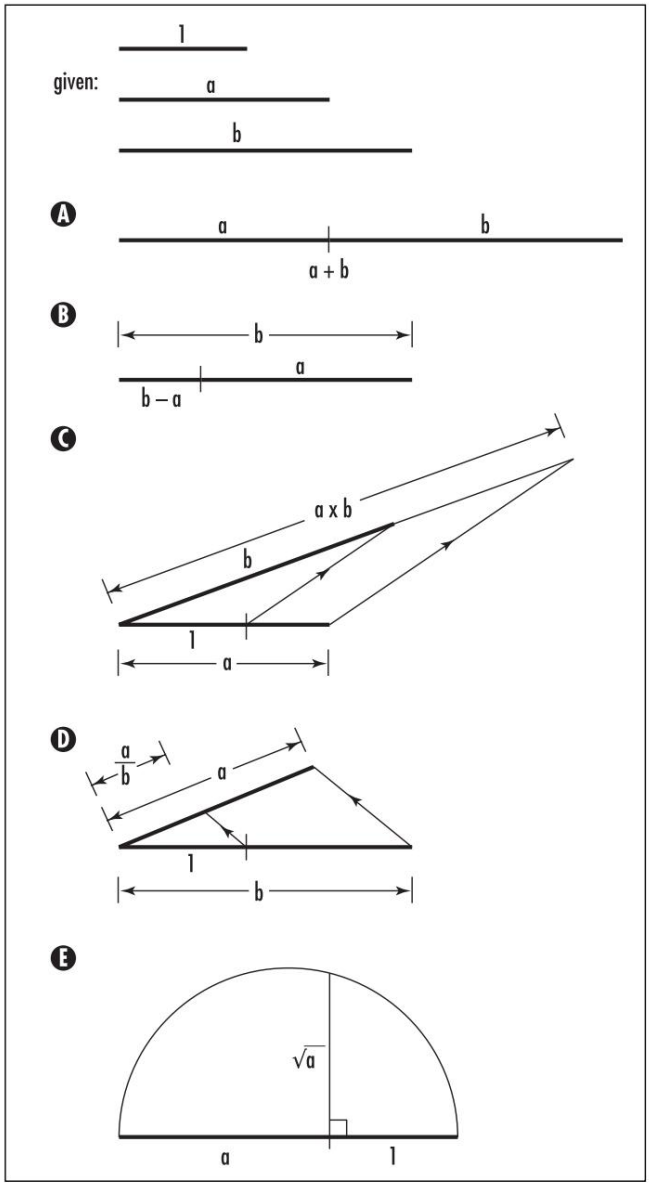
Supposons que a et b soient deux nombres constructibles avec b > a. (C'est-à-dire que, étant donné un segment de ligne de longueur 1, nous pouvons également produire des segments de ligne de longueurs a et b.) Alors ce qui suit est vrai :

Les nombres a + b, b – a, a × b, $\frac{a}{b}$, et $\sqrt{a}$ sont constructibles.

Le schéma de droite indique comment construire ces quantités.

(Dans les troisième et quatrième diagrammes, tracez des lignes parallèles aux lignes reliant les extrémités des deux segments de longueurs a et b. L'examen de triangles similaires montre que les segments indiqués sont bien de longueurs a × b et a/b, respectivement. Pour le cinquième diagramme, ajouter des lignes pour produire un grand triangle rectangle dans le cercle avec le diamètre de longueur a + 1 comme hypoténuse. L'application du THEO REM de PYTHAGORE montre que le segment indiqué est bien de longueur $\sqrt{a}$.)

Il s'ensuit maintenant que tout nombre rationnel est constructible comme l'est tout nombre qui peut être obtenu à partir des rationnels par l'application d'un nombre fini d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et d'équations au carré.



Construire la somme, la différence, le produit, le quotient et les racines de a et b

racines. (Par exemple, le nombre $\frac{7}{\sqrt{3}}\sqrt{2\,13\,2\sqrt{2+\sqrt{}}}\Big/\sqrt{\sqrt{\sqrt{3+\sqrt{5}}}}$ est constructible.) Les mathématiciens ont prouvé que ce sont les seuls types de nombres réels qui sont constructibles. Les mathématiciens ont également prouvé que tout nombre constructible est un NOMBRE ALGEBRIQUE. Comme π, par exemple, n'est pas algébrique, il n'est pas constructible. Voir aussi AAA/AAS/ASA/SAS/SSS.

Machine Translated by Google

tableau de contingence Un tableau indiquant le nombre de unités d'un échantillon ayant certaines combinaisons de attributs s'appelle un tableau de contingence. Par exemple, un projet de recherche marketing enregistre la couleur des cheveux de hommes et femmes participants et présente les résultats dans un tableau de contingence :

Couleur de cheveux

	Noir	Blond Brun		Rouge
Homme	25	23	8	2
Femme	18	16	14	5

Le TEST DU KHI CARRÉ peut être utilisé pour rechercher des corrélations entre les attributs affichés dans ces tableaux.

fraction continue Un nombre qui est un entier plus une fraction dont le dénominateur est lui-même un entier plus une fraction - et continué ainsi - s'appelle un fraction continue. Par exemple,

$$\frac{1402}{457} = 3 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{5}}}}$$

et

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

sont des représentations en fraction continue des quantités 1 402/457 et $\sqrt{2}$ (comme nous l'établirons ci-dessous). Le première fraction continue s'arrête après un nombre fini de étapes, et la seconde continue indéfiniment. Une suite fraction est dite sous forme standard si, comme dans le deuxième exemple, tous les numérateurs sont égaux à un, et tous les entiers impliqués sont positifs.

Tout nombre réel positif x peut s'écrire sous la forme d'un fraction continue sous forme standard. Si x désigne le le plus grand entier inférieur ou égal à x, et {x} le frac partie finale de x telle que donnée par la PARTIE FRACTIONNELLE FONCTION, puis :

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{\frac{1}{\{x\}}}$$

Comme la quantité 1/{x} elle-même est un nombre réel positif supérieur à un, on peut, de la même manière, l'écrire sous la forme un entier plus une autre fraction avec un numérateur d'unité. L'application répétée de cette procédure produit une fraction continue sous forme standard.

Par exemple, si $x = \frac{1\,402}{457}$, alors on peut écrire

$$x = 3 + \frac{31}{457} = 3 + \frac{1}{\frac{457}{31}}, \text{ et } \frac{457}{31} = 14 + \frac{23}{31} = 14 + \frac{1}{\frac{31}{23}},$$

et ainsi de suite. Cela produit la forme standard suite fraction:

$$\frac{1,402}{457} = [3; 14, 1, 2, 1, 7] = 3 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}$$

Il n'est pas difficile de montrer que si x = a/b est une fraction, alors 1/{x} est une nouvelle fraction de dénominateur plus petit que b. Application répétée de cette procédure doit finalement produire une fraction continue avec dénominateur égal à un, de sorte que la procédure se termine. Cela montre que tous les nombres rationnels (c'est-à-dire égal à une fraction) ont une fraction continue représentations qui s'arrêtent après un nombre fini de pas. (Et, inversement, toute fraction continue de ce type "se démêle" pour produire une quantité qui est rationnelle.) Par conséquent:

> Toutes les quantités avec des représentations de fractions continues infiniment longues sont irrationnelles.

Par exemple, on peut vérifier que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ et la substitution de cette formule en elle-même donne la suite représentation fractionnaire présentée ci-dessus :

Machine Translated by Google

$$\sqrt{2}\ 1\ 1 = + = + 1 + 2 + \qquad \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} \quad 1 = + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1\ 2 + \sqrt{}}}}$$

$$1 = = + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + }}}}$$

Que ce processus ne se termine pas prouve que $\sqrt{2}$ est n'est pas une fraction. De manière similaire, on établit :

$$\sqrt{3}\ 1 + = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + }}}} = [,,]\ 1\ 1\ 2$$

$$\sqrt{5}\ 2 = + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + }}}} = [,]\ 2\ 4$$

et $\sqrt{6}$ = [2,—2,4], montrant que ces quantités sont aussi irrationnel. Le nombre e a aussi une suite infinie représentation fractionnaire : e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1, 1,10,…], tout comme le juste milieu $= \frac{1\ 5\sqrt{+}}{2} = [,,]\ 1\ 1\ 1$.

Les mathématiciens ont prouvé que la suite finie les fractions sous forme standard ont une propriété curieuse :

> L'inversion de l'ordre des nombres entiers qui apparaissent dans une fraction continue finie produit une nouvelle fraction avec le même numérateur que la quantité originale.

Par exemple, comme nous l'avons vu, [3,14,1,2,1,7] = 1,402/457, et on calcule que :

$$[,14,3]\ 7 = 1\ 2\ 1 \qquad \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1\ 14\ + 3}}}}$$

est égal à la fraction 1 402/181.

Les fractions continues ont été systématiquement étudiées par LEONHARD EULER (1707-1783), et il a été le premier à les introduire formellement dans un texte écrit. JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813) a prolongé une grande partie de l'œuvre d'Euler. Les fractions continues se sont avérées très utiles pour résoudre une large sélection d' ÉQUATIONS DIOPHANTINES. Ils fournissent également d'excellentes approximations rationnelles des nombres irrationnels. Par exemple, en terminant la représentation en fraction continue pour $\sqrt{2}$ après un nombre fini d'étapes donne une bonne approximation ments à la racine carrée de 2 :

$$1\ 1 + 2 = \frac{1\ 3\ 1}{,,} \quad 1 \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{17}{12} \quad \frac{41}{29} \quad \frac{99}{70} \quad \frac{239}{169}$$

Cette séquence particulière de fractions, générée par la formule $\frac{un}{bab} \rightarrow \frac{ab + 2}{\text{dès le}}$, a été utilisé par Théon de Smyrne comme premier siècle de notre ère Il détient des propriétés mystérieuses. Par exemple, un terme sur deux de la suite correspond à un TRIPLE DE PYTHAGORE :

$$\frac{7}{5} = \frac{3\ 4 +}{5} \text{ et } 345 \qquad 222 + =$$

$$\frac{41}{29} = \frac{20\ 21 +}{29} \text{ et } 20\ 21\ 29 + =$$

$$\frac{239}{169} = \frac{119\ 120 +}{169} \text{ et } 119\ 120\ 169 + =$$

et tout autre terme, en arrondissant le numérateur et le dénominateur chacun à la moitié, donne FIGURATE NOMBRES qui sont à la fois carrés et triangulaires :

$$\frac{3}{2\ 1} \rightarrow \text{ et } \quad TS = 1 \quad 1$$

$$\frac{17}{12\ 6} \rightarrow \text{ et } \quad TS = 6 \quad 36$$

$$\frac{99}{70\ 35} \rightarrow \frac{49}{} \text{ et } \quad TS = 35 \quad 1,225$$

Machine Translated by Google

Démêler les expansions en fraction continue d'autres
des nombres irrationnels peuvent donner des découvertes analogues.

fonction continue De manière informelle, on dit qu'une fonction
être continue si on peut tracer son graphe sans jamais
soulevant le crayon de la page. Cela signifie que le
le graphique de la fonction se compose d'une seule ligne courbe
sans lacunes, sauts ou trous.

Plus précisément, une fonction est continue en un point
x = a, si la fonction est définie au point a, et le
La LIMITE de f(x) lorsque x tend vers a est égale à la valeur de la
fonction à un :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(Si, par exemple, une fonction a des valeurs f(0,9) = 1,9,
f(0,99) = 1,99, f(0,999) = 1,999, et ainsi de suite, puis un
serait très surpris d'apprendre que f(1) est égal à 18.
La fonction ne serait pas considérée comme continue à x =
1.) Une fonction qui n'est pas continue en un point est dite
être discontinu, ou avoir une discontinuité, à ce moment-là
indiquer. Une fonction continue en tout point de
son domaine est dit continu.

Les mathématiciens ont prouvé que :

je. La somme de deux fonctions continues est continue.

ii. Le produit de deux fonctions continues est continu.

iii. Le quotient de deux fonctions continues est continu en
chaque point où le dénominateur est
pas nul.

iv. La COMPOSITION de deux fonctions continues est
continu.

Comme le graphe linéaire f(x) = x est continu, il découle des
propriétés i et ii que toute fonction POLYNOMIALE p(x) = anx n+…
+a1x + a0 est continue. Par propriété
iii, toute FONCTION RATIONNELLE est continue en tout point
où le dénominateur n'est pas nul. Les fonctions sin x
et cos x de TRIGONOMETRY sont tous deux continus.

La fonction tangente, tan x = $\frac{\text{péché } x}{\text{parce que } x}$, est continue

en tout point autre que $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$, le
endroits où le cosinus est nul.

Il est possible de supprimer une discontinuité d'une fonction
en x = a si la limite limx→a f(x) existe. Par exemple, le
fonction f(x) = $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ n'est pas défini en x = 1, puisque
la quantité $\frac{0}{0}$ n'a aucun sens. Néanmoins, l'algèbre
montre que la limite de cette fonction lorsque x tend vers
la valeur 1 existe :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim x + 1 = 2$$

(La division par la quantité x – 1 est valable dans ce
calcul puisque, pour des valeurs de x proches mais non égales
à, 1, la quantité x – 1 n'est pas nulle.) Par conséquent, si
nous déclarons que la valeur de la fonction est 2 à x = 1 :

$$\text{effet} = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si x est différent de 1} \\ 2 & \text{si x est égal à 1} \end{cases}$$

nous avons maintenant une fonction continue. Une discontinuité
en x = a pour une fonction f est dite amovible si
limx→a f(x) existe.

La question de la continuité est fondamentale à la fondation
de CALCULUS. Une étude du THÉORÈME DES VALEURS
INTERMÉDIAIRES et de ses conséquences l'illustre.

hypothèse du continuum Une étude de DENUMERABLE
sets montre que tout ensemble infini contient un sous-
ensemble dénombrable. Ainsi, dans un sens bien défini, dénombrable
les ensembles sont les "plus petits" types d'ensembles infinis.
L' ARGUMENT DIAGONAL du second type montre que l'ensemble
des nombres réels n'est pas dénombrable, c'est-à-dire, dans un
sens significatif, la CARDINALITE des nombres réels,
notée c, est « plus grande » que la cardinalité des ensembles
dénombrables, qui est notée $\aleph_0$. Nous avons:

$$\aleph_0 < c$$

Mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845–
1918), père de l'arithmétique cardinale, a conjecturé que
il n'y a pas de type d'ensemble infini "plus grand" qu'un infini
ensemble d'objets dénombrables, mais « plus petit » que le
continuum des nombres réels. (Autrement dit, il n'y a pas de
nombre cardinal strictement entre $\aleph_0$ et c.) Cette conjecture
connue sous le nom d'hypothèse du continu. Ça peut être
formulé de manière équivalente comme suit :

Tout sous-ensemble infini de nombres réels peut soit
être mis en correspondance univoque avec le

Machine Translated by Google

ensemble de nombres naturels, ou peut être mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble des nombres réels.

Malgré ses efforts, Cantor n'a pas été en mesure d'établir si son hypothèse de continuum était vraie ou non. En 1940, le mathématicien autrichien KURT GÖDEL a prouvé que l'hypothèse du continu ne peut pas être prouvée fausse. Malheureusement, comme le montrent les théorèmes d'incomplétude de GÖDEL , cela ne signifie pas que l'hypothèse du continuum est vraie : il existe en mathématiques des énoncés indécidables, c'est-à-dire qui ne peuvent être prouvés vrais et faux. On soupçonnait que l'hypothèse du continuum pouvait être un tel énoncé indécidable. Vingt-trois ans plus tard, en 1963, le logicien américain Paul Cohen parvient à prouver que c'est bien le cas. Par conséquent, on peut soit considérer l'hypothèse du continu comme vraie ou comme fausse, un choix arbitraire, et être certain de ne jamais se heurter à une contradiction mathématique en conséquence.

intégrale de contour (intégrale curviligne, intégrale de ligne) Si C est une courbe dans le plan xy et z = f(x,y) est une fonction de deux variables, alors on peut tenter de calculer la surface AREA (un côté) d'un « mur » qui suit la courbe C et a « hauteur » la hauteur de la fonction au-dessus de la courbe. L'intégrale qui la calcule, appelée intégrale de contour et notée ∫c f ds, est construite en sélectionnant un grand nombre de points p0 , p1 ,…,pn le long de la courbe C et en approximant la surface considérée par un ensemble de sections rectangulaires . Le ième rectangle peut être pris comme ayant pour longueur de base la distance entre les points pi et pi+1, que nous notons di , et la hauteur f(pi). La superficie est donc approximée par la somme au fur et $\sum_{i=0}^{n-1} f(p_i)\,d_i$. Prendre la limite à mesure que nous prenons des approximations de plus en plus fines définit l'intégrale de contour souhaitée.

Si la courbe C est définie par des équations paramétriques : x = x(t) et y = y(t) pour un paramètre t, a ≤ t ≤ b, alors cette procédure donne l'intégrale de contour sous la forme :

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

En physique et en calcul VECTOR avancé , on envisage aussi d'intégrer, par exemple, le travail effectué en déplaçant une particule le long d'une courbe C à travers un CHAMP DE VECTEURS (champ de force). De telles considérations conduisent à d'autres types d'intégrales, également appelées intégrales de ligne.

courbe de niveau Une ligne sur une carte qui joint des points d'égale hauteur s'appelle une courbe de niveau. Les lignes de contour sont généralement tracées pour des intervalles de hauteur égaux. Cela donne aux lecteurs de cartes expérimentés une image mentale claire de la topographie tridimensionnelle du terrain : des courbes de niveau rapprochées, par exemple, indiquent que la pente du terrain est raide.

En mathématiques, les lignes de contour sont utilisées pour représenter les formes de surfaces situées dans un espace tridimensionnel. Par exemple, tous les points de même hauteur z = c sur la surface $z = x^2 + y^2$ satisfaisant l'équation $x^2 + y^2 = c$ se trouvent donc sur un cercle de rayon $\sqrt{c}$. Cela conduit à une carte de contour pour le graphique de la fonction f(x,y) = $x^2 + y^2$ consistant en des ensembles de cercles concentriques autour de l'origine.
La surface décrite est un PARABOLOÏDE dont le sommet est à l'origine.

contradiction Dans la LOGIQUE FORMELLE, toute déclaration qui produit une TABLE DE VÉRITÉ avec des entrées finales toutes fausses est appelée une contradiction. Par exemple, l'énoncé (¬p) p est une contradiction. À partir de toute contradiction, il est possible de prouver que tout énoncé en mathématiques est vrai. Par exemple, on peut vérifier que l'énoncé composé (¬p) p → q est une tautologie. Par conséquent, en mathématiques, si l'on peut prouver qu'un énoncé p et sa négation ¬p sont tous les deux vrais, alors puisque (¬p) p et (¬p) p → q sont valides, quel que soit l'énoncé q représenté, q est également vrai par inférence. Toute contradiction apparaissant en mathématiques prouverait, par exemple, que 1 = 2, et que tout nombre irrationnel est une fraction. Les mathématiciens espèrent sincèrement que les mathématiques sont exemptes de contradiction.

Voir aussi COHÉRENT.

contrapositif Le contrapositif d'un énoncé CONDITIONNEL « p implique q » est l'énoncé : « non q implique non p ». C'est la déclaration obtenue en échangeant l'antécédent avec le conséquent et en annulant chacun. Par exemple, la contraposée de l'énoncé « Si c'est un caniche, alors c'est un chien », est « Si ce n'est pas un chien, alors ce n'est pas un caniche ». La contraposée d'un énoncé est un

Machine Translated by Google

forme logiquement équivalente de l'instruction, et peut donc être utilisée à tout moment à sa place. (On montre que p → q et (¬q) → (¬p) ont des TABLES DE VÉRITÉ identiques.)

En mathématiques, il est parfois commode de prouver la forme contrapositive d'un théorème plutôt que de prouver l'assertion directement. Cette approche est appelée raisonnement contra positif (ou modus tollens), et la preuve présentée est une preuve par contraposition. Par exemple, le théorème : si n2 est impair, alors n est impair, est mieux prouvé en supposant que n est pair (c'est-à-dire n = 2k pour un entier k) puis en montrant que n est également pair.

La contraposée d'un conditionnel "p implique q" ne doit pas être confondue avec l'inverse de l'énoncé : "non p implique non q". Cette variation n'est pas une forme logiquement équivalente du conditionnel original.

Voir aussi ARGUMENT ; CONVERSER; PREUVE.

intégrale impropre convergente Voir IMPROPER INTÉGRAL.

suite convergente Une SEQUENCE de nombres est dite a1 ,a2 ,a3 ,… convergente si les termes de la la suite devient arbitrairement proche, mais n'atteint jamais nécessairement, une valeur finie particulière L. Par exemple, les nombres de la suite 0,9, 0,99, 0,999,… tendent vers la valeur 1. On appelle 1 la LIMITE de cette séquence.

Toute suite qui converge est appelée suite convergente. Si une suite {an } converge vers la limite L, on écrit limn→∞an = L, ou, alternativement, an → L comme n → ∞, qui se lit comme « an tend vers L lorsque n devient grand ». 1 3 Par exemple, la séquence , 2 4 $-\ -\ ,\frac{7}{8},\frac{15}{16}$ a une limite ($\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$), et la suite $1,-\ ,\ ,-\ ,\ ,\ldots\ 1\frac{3}{2}-\ \ \frac{}{1}\frac{}{4}\frac{}{1}\frac{}{5}$ a pour limite zéro ($\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}0\to$ comme n → ∞). Le les notions de limite et de convergence peuvent être rendues mathématiquement précises avec une « définition ε –N » d'une limite. (Voir LIMITE.)

Une suite qui ne converge pas est dite divergente. Une séquence divergente pourrait avoir des termes qui croissent en taille sans borne (1,4,9,16,25,…, par exemple), des termes qui oscillent sans converger vers une limite $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}(\ ,-\ ,\ ,-\frac{5}{6},-\ ,\ldots,$ par exemple), ou des termes qui osciller sans borne (1,2,1,3,1,4,1,5,1,6,1,7,1,…, par exemple).

Voir aussi DIVERGENT ; PRODUIT INFINI ; SÉRIE.

série convergente Une SÉRIE infinie $\sum_{n=1}^{\infty}2_n=++aaa1\ a3+\ldots$ est dite converger vers une valeur L si la suite de SOMMES PARTIELLES, Sn = a1 + a2+…+an , tend vers la valeur L dans la LIMITE lorsque n→∞. Pour illustrer, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1\ 2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \ \frac{1}{}\ \ \ldots$ a des sommes partielles :

$$S_1=\frac{1}{2}$$

$$S=++=\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\ \frac{3}{}$$

$$S=++=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\ \frac{7}{8}$$

$$S_n=1-\frac{1}{2^n}$$

qui s'approchent de la valeur 1 lorsque n croît. En ce sens nous dire que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ converge vers 1, et on écrit :

$$\frac{1}{}++\frac{1}{4}+=L\ 1\frac{1}{2}\frac{1}{8}\ 16$$

Si la limite des sommes partielles n'existe pas, alors la série est dite divergente. Par exemple, la série … diverge parce que les oscillent entre 1 et 0 sommes partielles 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – et ne se stabilisent jamais à une valeur particulière. La série 1 + 2 + 3 + 4 + … diverge parce que les sommes partielles deviennent arbitrairement grandes. Le série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge pour la même raison, ce qui peut être vu comme suit :

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Machine Translated by Google

$$= \frac{n}{\sqrt{n}}$$
$$= \sqrt{n}$$

et donc Sn → ∞ quand n croît.

Il existe plusieurs tests pour déterminer si ou non une série donnée converge.

Le test du nième terme

Si une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, alors ce doit être le cas où limn→∞ an = 0. Par conséquent, si la les termes an de la série ne tendent pas vers zéro, alors la série doit diverger.

Pour voir pourquoi cela est vrai, notez que Sn = a1 + a2+…+an–1 + an = Sn–1 + an . Si les sommes partielles convergent vers L, alors on doit avoir que limn→∞ an = limn→∞(Sn – Sn–1) = L – L = 0.
Ce test montre, par exemple, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$ diverge parce que les termes de la série ne deviennent pas petits.

Le test de comparaison

Ce test ne s'applique qu'aux séries à termes positifs.

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes positifs converge si chaque terme a de la série est inférieur ou égal aux termes d'une autre série avec positif termes déjà connus convergent.

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes positifs diverge si chaque terme a de la série est supérieur ou égal aux termes d'une autre série avec des termes positifs déjà connus pour diverger.

Par exemple, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge parce que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, une série que l'on connait déjà converge. Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n+7}}{\sqrt{n}}$ diverge puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n+7}}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, dont nous savons qu'elles divergent.

Le test du rapport

Ce test ne s'applique qu'aux séries à termes positifs.

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ avec tous les termes positifs :

je. converge si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et est égal à une valeur inférieure à 1

ii. diverge si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et est égal à une valeur supérieure à 1

Si la limite en question est effectivement égale à 1, alors rien ne peut être conclu de ce test.

Ce test a été développé pour la première fois par le mathématicien français AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857). Il est prouvé dans textes CALCULUS en faisant une comparaison intelligente à une SÉRIE GÉOMÉTRIQUE. (En bref, si pour tous les $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le < r\ 1$, termes alors a2 ≤ ra1 , a3 ≤ ra2 ≤ r 2a1 , a4 ≤ ra3 ≤ r 3a1 , etc., et + a2 + a3 + a4 +… ≤ a1 (1 + r + r ^{2} + r 3+…), donc a1 converge.) Considérons, par exemple, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n}$.
Ici le nième terme est donné par $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{3^n}$, et nous avons:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$$

$= \frac{1}{3} = 1 < 1$. Par le test du rapport, cette série converge.

Le test racine

Ce test ne s'applique qu'aux séries à termes positifs.

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ avec tous les termes positifs :

je. converge si $\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n}$ existe et est égal à une valeur inférieure à 1

ii. diverge si $\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n}$ existe et est égal à une valeur supérieure à 1

Si la limite en question est effectivement égale à 1, alors rien ne peut être conclu de ce test.

Machine Translated by Google

La preuve de ce test repose sur une comparaison astucieuse à une série géométrique. (Si, pour tous les termes, $\sqrt[n]{a_n} \le r$ pour une certaine valeur r, alors $a_n \le r^n$ et une comparaison peut être fait.) Ce test est souvent utilisé si la série contient termes comportant des exposants. Par exemple, considérez le série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 + \frac{1}{n})^n}$. Ici le nième terme de la série est donné par $a_n = \frac{1}{(2 + \frac{1}{n})^n}$, et nous avons: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$. Par le test racine, la série doit converger.

Le test intégral

Ce test ne s'applique qu'aux séries à termes positifs.

Supposons les termes d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sont donnés par une formule $a_n = f(n)$, où la fonction f(x) est continue, positive et décroissante pour $x \ge 1$:

i. Si l'INTEGRALE INCORRECTE $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii. Si l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Cela peut être prouvé géométriquement en traçant des rectangles de largeur 1 juste au-dessus et juste en dessous du graphique de $y = f(x)$ pour $x \ge 1$, puis en comparant la surface totale de tous les rectangles avec l'aire sous la courbe.

Pour illustrer le test, considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Depuis $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$ converge, on a que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. En général, on peut établir de cette manière, le test de la série p.

Le test de la série p

Une suite du formulaire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ avec p un réel nombre converge si $p > 1$ et diverge si $p \le 1$.

Une suite du formulaire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est appelée une série p.

Test de convergence absolue

Supposer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série à la fois positive et termes négatifs. Si la série correspondante $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ avec tous les termes rendus positifs converge, puis la série originale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge également.

On peut utiliser n'importe lequel des six premiers tests décrits ci-dessus pour déterminer si oui ou non $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Le la validité du test de convergence absolue est établie dans la discussion sur la CONVERGENCE ABSOLUE.

Puisque nous avons établi, par exemple, que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ converge, l'absolu test de convergence nous assure maintenant que la série de variantes $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \cdots$ aussi converge (comme toute autre variation impliquant le insertion de signes négatifs).

Le test de convergence absolue ne couvre pas tous cas. Il est encore possible qu'une série avec des valeurs négatives conditions, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pourrait converger même si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge. Ce phénomène est appelé CONDITIONNEL CONVERGENCE.

Test en série alternée

Si les termes d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ signe alternatif et satisfaire

i. $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \cdots$

ii. $a_n \to 0$

alors la série converge.

(Voir SÉRIE ALTERNÉE.) Ce test montre, par exemple, que la SÉRIE HARMONIQUE alternée $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ converge même si la

Machine Translated by Google

la série correspondante avec tous les termes positifs ne le fait pas.

Il est possible de multiplier des séries convergentes par des constantes, et d'additionner et de soustraire deux séries convergentes. Précisément, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent tous les deux, et k est un nombre, alors :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} ka_n\right) = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Ces propriétés peuvent être utilisées pour évaluer de nouvelles sommes infinies. Par exemple, en 1740 LEONHARD EULER a montré qu'une valeur particulière de la FONCTION ZETA est donnée par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$. Il s'ensuit alors que la forme alternée de cette série vaut :

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \cdots = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

Voir aussi SÉRIE ARITHMÉTIQUE ; SÉRIE GÉOMÉTRIQUE; SÉRIE PUISSANCE.

inverse (implication inverse) L'inverse d'un énoncé CONDITIONNEL "p implique q" est l'énoncé : "q implique p". C'est l'énoncé obtenu en inversant les rôles de l'antécédent et du conséquent. L'inverse d'un énoncé conditionnel peut être vrai ou non. Par exemple, l'inverse de l'énoncé vrai, "Si un triangle a trois côtés égaux, alors il a trois angles égaux », est valide — un triangle avec trois angles égaux a en effet trois côtés égaux — alors que l'inverse de l'énoncé, « Si n est divisible par 6, alors n est divisible par 2 », est faux — un nombre pair doit ne pas être divisible par 6.

Voir aussi ARGUMENT ; CONTRAPOSITIF.

convexe Voir CONCAVE/CONVEXE.

coordonnées Un ensemble de nombres utilisé pour localiser un point sur une droite numérique, dans un plan ou dans l'espace sont appelés les coordonnées de ce point. Par exemple, les coordonnées des points sur une droite numérique pourraient être données par leurs distances à partir d'un point fixe O (appelé l'origine), les points sur un côté spécifié de O étant considérés comme étant à une distance positive de O, et les points sur le côté opposé de O à une distance négative de O.

Une façon d'attribuer des coordonnées aux points du plan consiste à établir un point fixe O dans le plan (appelé à nouveau l'origine) et deux lignes de référence (appelées axes) qui passent par O. Chaque axe est divisé en un côté positif et un côté négatif par O. Étant donné un point P du plan, on trace des droites passant par P parallèles à chacun des axes. Les distances le long desquelles ces nouvelles lignes coupent les axes spécifient l'emplacement du point P.

Lorsque les axes sont tracés à angle droit, le système est appelé système de coordonnées cartésiennes ou système de coordonnées angulaires rectilignes. Les axes sont généralement appelés les axes x et y, et la paire de nombres (x, y) spécifiant l'emplacement d'un point P (en tant qu'unités x le long d'un axe et unités y le long du second) est appelée le CARTESIEN COORDONNÉES de P. Dans l'espace tridimensionnel, l'emplacement des points peut être spécifié via trois axes mutuellement perpendiculaires (ou obliques) passant par un point commun O.

L'idée d'attribuer des ensembles de nombres à des points pour spécifier des emplacements est ancienne. Au troisième siècle avant notre ère, les érudits grecs APOLLONIUS DE PERGE et ARCHIMÈDE DE SYRACUSE avaient utilisé la longitude, la latitude et l'altitude pour définir la position d'un point à la surface de la Terre. Les géomètres romains et grecs ont étiqueté les cartes avec des lignes de grille, afin de spécifier les emplacements via des numéros de lignes et de colonnes.

Voir aussi COORDONNÉES CYLINDRIQUES ; DIMENSION; TERRE; COORDONNÉES POLAIRES; DROITIER/GAUCHE SYSTÈME À MAIN ; COORDONNÉES SPHÉRIQUES.

Machine Translated by Google

coplanaire Voir PLAN.

coprime Un autre nom pour RELATIVELY PRIME.

corrélation Voir COEFFICIENT DE CORRELATION ; DISPERSION DIAGRAMME.

coefficient de corrélation Toute valeur numérique utilisée pour indiquer dans quelle mesure deux variables d'une étude sont associé est appelé un coefficient de corrélation. Par exemple, une étude médicale pourrait enregistrer la taille et la chaussure taille des participants adultes soupçonnant qu'il pourrait y avoir une relation entre ces deux caractéristiques. Si deux variables sont telles que lorsque l'une change, alors l'autre le fait de manière connexe (généralement, plus un individu est grand, plus sa pointure est grande en moyenne, par exemple) puis les deux variables sont dites corrélées. UNE DISPERSION DIAGRAM est utilisé pour détecter d'éventuelles corrélations. Si la les points du diagramme de dispersion ont tendance à suivre une ligne droite ligne, alors les deux variables sont linéairement corrélées.

KARL PEARSON (1857-1936) a développé une mesure pour détecter spécifiquement les relations linéaires. Si les DONNÉES les valeurs d'une étude sont représentées sous forme de paires de valeurs, $(x1, y1), \ldots, (xN, yN)$, définissons d'abord :

$$S_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(xx_i - \bar{x})^2 \qquad \sum_{i=1}^{N}\frac{X_i^2}{N} - \bar{X}^2$$

$$S_{aa} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(aa_i - \bar{y})^2 \qquad \sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2}{N} - \bar{y}^2$$

et

$$S_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad \sum_{i=1}^{N}\frac{xy_i}{N} - \bar{x}\bar{y}$$

Ici $\bar{x}$ est la MOYENNE des valeurs x et $\bar{y}$ la moyenne de les valeurs y. Les quantités Sxx et Syy sont appelées les VARIANCEs et Sxy la COVARIANCE des deux variables. Ensuite, le coefficient de corrélation de Pearson, noté $R2$, est donné par:

$$R^2 = \frac{(S_{xy})^2}{SS_{xx}\,SS_{aa}}$$

Cette grandeur ne prend que des valeurs comprises entre 0 et 1. A la valeur de R2 = 1 indique une relation linéaire parfaite entre les deux variables, les points du diagramme de dispersion associé étant précisément alignés sur une droite. Une valeur R2 = 0 indique qu'il n'y a pas de relation entre les deux variables. (En particulier, la covariance des deux variables est nulle.) Toutes ces affirmations peuvent prouver par une étude des MOINDRES CARRÉS MÉTHODE. Une valeur R2 proche de 1, disons 0,9 ou plus, indique qu'une corrélation linéaire est très probable.

Voir également CORRÉLATION DE RANG ; RÉGRESSION; STATIS TIC : DESCRIPTIF.

dénombrable Tout ensemble, fini ou infini, dont les éléments peut être placé dans une liste est dit dénombrable. Plus précisément, un ensemble S est dénombrable s'il existe un bijectif correspondance entre les éléments de S et un sous-ensemble des NOMBRES NATURELS (c'est-à-dire qu'il est possible de associer chaque élément de S à un nombre naturel unique). Par exemple, l'ensemble {couteau, fourchette, cuillère} est dénombrable car ses éléments peuvent être mis en correspondance avec les éléments du sous-ensemble {1, 2, 3} des nombres naturels : liste couteau comme premier, fourchette comme deuxième et cuillère comme troisième, pour exemple. L'ensemble de tous les entiers est dénombrable, car ses éléments peuvent être placés dans la liste :

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

L'ensemble de tous les mots anglais qui existent aujourd'hui et pourraient être utile dans le futur est dénombrable : listez toutes les lettres de la alphabet (mots à une lettre possibles), puis, dans l'ordre alphabétique, toutes les combinaisons d'une paire de lettres (les mots à deux lettres), suivis de toutes les combinaisons possibles de trois lettres, et ainsi de suite, pour produire une liste bien définie de toutes les chaînes de lettres possibles.

L' ARGUMENT DIAGONAL du premier type montre que l'ensemble de tous les NOMBRES RATIONNELS est dénombrable. Le L'argument diagonal du deuxième type, cependant, établit que l'ensemble des NOMBRES RÉELS ne l'est pas. Dans un certain sens alors, l'ensemble des réels est un ensemble infini "plus grand" que l'ensemble des rationnels.

Un ensemble est dit DENUMERABLE s'il est infini et dénombrable. Les choses sont un peu confuses, cependant, pour certains auteurs utiliseront indifféremment les termes dénombrables et dénombrables pour les ensembles finis et infinis.

La CARDINALITE d'un ensemble dénombrable infini est noté $\aleph_0$. Un ensemble dénombrable qui n'est pas infini est dit être FINI.

Machine Translated by Google

contre-exemple Un exemple qui démontre qu'une affirmation faite n'est pas vraie ou, à tout le moins, pas toujours vraie est appelé un contre-exemple. Par exemple, bien que $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ soit vrai pour $a = 1$ et $b = 0$, cette identité est fausse en général, comme le montre le contre-exemple $a = 9$ et $b = 16$. On peut donc dire que la revendication

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$ est invalide

déclaration.

Au milieu des années 1800, le mathématicien français Alphonse de Polignac (1817-1890) a affirmé :

> Tout nombre impair peut être écrit comme la somme d'une puissance de deux et d'un nombre PRIME .

Par exemple, le nombre 17 peut être écrit comme $17 = 22 + 13$, 37 comme $37 = 23 + 29$ et 1 065 comme $1\,065 = 210 + 41$.
De Polignac a affirmé avoir vérifié son affirmation pour tous les nombres impairs jusqu'à 3 millions, et par conséquent a été convaincu que son affirmation était vraie. Malheureusement non, car le nombre 127 fournit un contre-exemple à cette affirmation, car aucune des différences suivantes n'est première :

$$127 - 2 = 125 = 5 \times 25$$
$$127 - 4 = 123 = 3 \times 41$$
$$127 - 8 = 119 = 7 \times 17$$
$$127 - 16 = 111 = 3 \times 37$$
$$127 - 32 = 95 = 5 \times 19$$
$$127 - 64 = 63 = 3 \times 21$$

(Nous n'avons pas besoin d'aller plus loin, puisque la prochaine puissance de deux, 128, est supérieure à 127.) De Polignac a négligé ce simple contre-exemple.

Aucun contre-exemple n'a encore été trouvé aux fameuses CONJECTURES DE GOLDBACH et COLLATZ CONJECTURE.

covariance Si une étude scientifique enregistre des informations numériques sur deux caractéristiques des individus ou des événements examinés (telles que la taille et la pointure des adultes participants, ou les précipitations saisonnières et le rendement des cultures d'une année à l'autre), alors les DONNÉES obtenues à partir de l' étude sont correctement enregistrés sous forme de paires de valeurs. Si une étude compte N participants, avec des paires de données $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$, alors la covariance de l'échantillon est la quantité :

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N}$$

où $\bar{x}$ est la valeur moyenne de x et $\bar{y}$ la valeur moyenne de y.
Un exercice d'algèbre montre que cette formule peut aussi s'écrire :

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}$$

La covariance est utilisée pour calculer les COEFFICIENTS DE CORRELATION et les lignes de RÉGRESSION comme pour la MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS, par exemple. Le coefficient de corrélation de Pearson montre que deux variables de covariance nulle sont indépendantes, c'est-à-dire que la valeur d'une variable n'a aucun effet sur la valeur de l'autre.

Voir aussi STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

Cramer, Gabriel (1704–1752) Algèbre suisse, géométrie, théorie des probabilités Né le 31 juillet 1704 à Genève, en Suisse, le savant Gabriel Cramer est connu pour son texte de 1750 Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. l'analyse des courbes algébriques), dans laquelle il classe certains types de courbes algébriques et présente une méthode efficace, aujourd'hui appelée RÈGLE DE CRAMER , pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Cramer n'a jamais prétendu avoir découvert la règle. Il a en fait été établi des décennies plus tôt par le mathématicien écossais COLIN MACLAURIN (1698-1746).

Cramer a obtenu un doctorat à l'âge de 18 ans après avoir terminé une thèse sur la théorie du son, et deux ans plus tard, il a obtenu un poste conjoint en tant que chaire de mathématiques à l'Académie de Clavin à Genève. Après avoir partagé le poste pendant 10 ans avec le jeune mathématicien Giovanni Ludovico Calandrini (senior to lui d'un an seulement), Cramer a finalement obtenu la présidence complète.

Le poste complet a donné à Cramer de nombreuses opportunités de voyager et de collaborer avec d'autres mathématiciens à travers l'Europe, tels que LEONHARD EULER, Johann Bernoulli et Daniel Bernoulli de la célèbre FAMILLE BERNOULLI, et ABRAHAM DE MOIVRE.

Cramer a écrit de nombreux articles en mathématiques couvrant des sujets aussi divers que la géométrie et l'algèbre, l'histoire des mathématiques et une analyse mathématique des dates auxquelles Pâques tombe.

Son texte de 1750 Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques était l'œuvre la plus célèbre de Cramer.
Commencer le premier chapitre par une discussion sur les types de

Machine Translated by Google

courbes qu'il considère, Cramer présente des techniques efficaces pour tracer leurs graphiques. Dans le deuxième chapitre, il discute du rôle des transformations géométriques comme moyen de simplifier les équations en courbes (semblable à l'approche actuelle utilisant la notion d' AXES PRINCIPAUX). Cela conduit à sa fameuse classification des courbes dans le troisième chapitre. Ici, Cramer discute également du problème de trouver l'équation d'une courbe de degré deux ax2 + bxy + cy2 + dx + ey = 0 qui passe par cinq points précédemment spécifiés dans le plan. La substitution dans les valeurs de ces points conduit à cinq équations linéaires dans les cinq inconnues a, b, c, d et e. Pour résoudre le problème, Cramer renvoie alors le lecteur à un appendice du texte, et c'est là qu'apparaît sa fameuse règle de résolution des systèmes d'équations. Cramer ne prétendait pas à l'originalité du résultat et était peut-être bien conscient que Colin Maclaurin avait le premier établi le fameux théorème. (Cramer a cité le travail de Colin Maclaurin dans de nombreuses notes de bas de page tout au long de son texte, suggérant qu'il travaillait en étroite collaboration avec les écrits de Maclaurin.)

Cramer a également servi dans le gouvernement local pendant de nombreuses années, offrant une opinion d'expert sur les questions d'artillerie et de défense, les fouilles et sur la reconstruction et la préservation des bâtiments. Il est décédé le 4 janvier 1752 à Bagnols-sur-Cèze, France. Bien que Cramer n'ait pas inventé la règle qui porte son nom, il mérite d'être reconnu pour avoir développé une notation supérieure pour la règle qui a clarifié son utilisation.

Règle de Cramer Découverte par le mathématicien écossais COLIN MACLAURIN (1698–1746), mais publiée pour la première fois par le mathématicien suisse GABRIEL CRAMER (1704–52), la règle de Cramer utilise la fonction DÉTERMINANT pour trouver une solution à un ensemble d' ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES.

Un exemple illustre le mieux le processus.

Considérons l'ensemble d'équations :

$$2x + 3y + z = 3$$
$$x - 2y + 2z = 11$$
$$3x + y - 2z = -6$$

Définissez A comme la matrice des coefficients :

$$\text{UNE} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice n'est pas nul : det(A) = 35.

Une propriété standard des déterminants affirme que si les éléments de la première colonne sont multipliés par la valeur x, alors le déterminant change de la fac TEUR A.

$$\det \begin{bmatrix} 2x & 3 & 1 \\ x & -2 & 2 \\ 3x & 1 & -2 \end{bmatrix} = x \det(A)$$

Ajouter un multiple d'une autre colonne à la première ne change pas la valeur du déterminant. On ajoutera y fois la deuxième colonne, et z fois la troisième à cette première colonne :

$$\det \begin{bmatrix} 2 + 3y + z & 3 & 1 \\ x - 2y + 2z & -2 & 2 \\ 3 + y - 2z & 1 & -2 \end{bmatrix} = x \det(A)$$

Mais bien entendu cette première colonne est égale à la colonne des valeurs des équations simultanées :

$$\det(A_x) = \det \begin{bmatrix} 3 + 3y + z & 3 & 1 \\ 11 - 2y + 2z & -2 & 2 \\ -6 + y - 2z & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 11 & -2 & 2 \\ -6 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 35$$

Cela nous indique que la valeur de x que nous recherchons est :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{35}{35} = 1$$

De la même manière, la valeur y se trouve comme le rapport du déterminant de la matrice A avec la deuxième colonne remplacée par la colonne des valeurs des équations simultanées et le déterminant de A :

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 2 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{-70}{35} = -2$$

Machine Translated by Google

et z est un rapport similaire de déterminants :

$$z = \frac{\det \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{matrix}}{\det(A)} = \frac{-35}{-35} = 1$$

Dans une situation générale, la règle de Cramer stipule :

Si A est la matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires, alors la valeur de la ième variable xi dans ce système d'équations est :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

à condition que le déterminant de A ne soit pas nul.
Ici Ai est la matrice A avec la ième colonne remplacée par la colonne des valeurs de l'ensemble d'équations.

Notez que la règle de Cramer montre qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution à un système d'équations pour lequel le déterminant de la matrice des coefficients est non nul.

Dans l'étude des déterminants, la règle de Cramer est utilisée pour prouver qu'une matrice A est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul.

chemin critique Supposons qu'on nous donne une séquence de tâches qui doivent être accomplies pour mener à bien un grand projet, comme la construction d'une maison ou la publication d'une encyclopédie, et supposons que ces tâches ont les propriétés suivantes :

1. Il existe un ordre de priorité pour certaines tâches.
2. Certaines tâches peuvent être effectuées simultanément.
3. La durée de chaque tâche est connue.

Ensuite, le chemin critique pour le projet est la chaîne de tâches la plus longue (dans le temps) qui doit être accomplie dans l'ordre spécifié. Le chemin critique limite donc le temps minimum nécessaire pour terminer l'ensemble du projet.

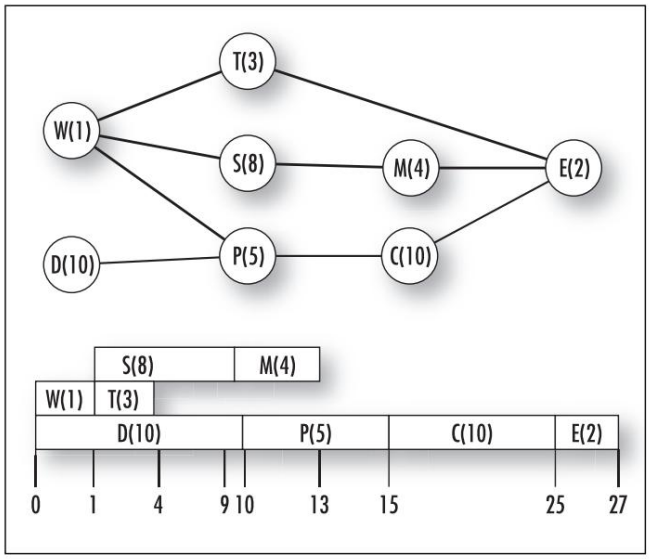
Par exemple, considérez le projet de préparer des hamburgers et de la salade pour un repas du soir. Le tableau suivant décrit les tâches qui doivent être effectuées, leurs tâches préalables et leur durée.

TÂCHE	Temps nécessaire pour terminer la condition préalable (en minutes)	Tâches
W : se laver les mains	1	Aucun
D : décongeler un hamburger	dix	Aucun
P : façonner la viande en galettes	5	L, D
C : cuisiner des hamburgers	dix	P
S : laver et trancher les salades	8	O
M : salade mixte	4	S
T : table dressée	3	O
E : servir le repas	2	C, M, T

Le diagramme du haut ci-dessous fournit un schéma utile de l'ordre des tâches. (Leurs temps sont écrits entre parenthèses.) On en déduit que la chaîne la plus longue, c'est-à-dire le chemin critique du projet, est la séquence DPCE nécessitant 27 min pour s'accomplir. Que toutes les tâches de cet exemple peuvent en effet être accomplies en exactement 27 min est démontré dans le deuxième diagramme. En général, il n'y a aucune garantie que le temps dicté par le chemin critique soit réellement atteignable.

Les ordinateurs sont utilisés pour rechercher des chemins critiques dans des projets complexes.

Voir aussi RECHERCHE OPÉRATIONNELLE.



Diagrammes de tâches

Machine Translated by Google

produit croisé (produit vectoriel) De nombreux problèmes de géométrie tridimensionnelle obligent les physiciens et les mathématiciens à trouver un VECTEUR perpendiculaire à chacun des deux vecteurs donnés a et b. Le produit croisé, noté a × b, est conçu pour être un tel vecteur.

On commence par positionner les deux vecteurs a et b au même point de l'espace. Ces vecteurs définissent un plan dans l'espace, et on voit qu'il y a deux directions possibles pour qu'un troisième vecteur pointe de façon à être perpendiculaire à ce plan. Les mathématiciens se sont mis d'accord sur la convention de suivre la « règle de la main droite » pour déterminer la direction à choisir :

> Prenez votre main droite et pointez vos doigts dans la direction indiquée par le premier vecteur a. Orientez maintenant votre main, les doigts toujours pointés dans cette direction, de manière à ce que votre paume soit tournée vers le côté du plan contenant le vecteur b. (Si vous courbez vos doigts, ils tourneront par conséquent du plus petit angle qui va de a à b.) La direction dans laquelle votre pouce pointe maintenant est la direction que prendra le vecteur a × b.

Ainsi, a × b sera un vecteur qui pointe dans une direction tandis que b × a pointe dans la direction opposée. (En fait : b × a = –a × b.)

Les mathématiciens se sont installés sur un deuxième conven définition de la grandeur de a × b :

> La grandeur de a × b est l'aire de l' ALLÉLOGRAMME PAR défini par les vecteurs a et b.

Si θ est le plus petit angle entre a et b, alors le parallélogramme défini par les deux vecteurs a pour côtés |a| et |b|. Prendre |a| comme base, la hauteur du parallélogramme est alors donnée par |b|·sinθ, et par conséquent la SURFACE du parallélogramme est |a|·|b|·sinθ. Ainsi :

> a × b est défini comme étant le vecteur de grandeur |a| ·|b|·sinθ avec une direction donnée par la règle de la main droite.

Par exemple, si i = <1,0,0> est le vecteur unitaire pointant dans la direction de l' axe des x, et j = <0,1,0> le vecteur unitaire dans la direction de l' axe des y, alors i × j est un vecteur pointant dans la direction de l' axe z, de longueur égale à l'aire du carré unité défini par i et j, soit 1. Ainsi :

je × j = <0,0,1> = k

Si deux vecteurs a et b sont parallèles, alors l'angle entre eux est nul et a × b = 0.

Il existe une méthode alternative pour calculer les produits croisés. Si a est donné par a = <a1 ,a2 ,a3> = a1 i + a2 j + a3k et b est donné par b = <b1 ,b2 ,b3> = b1 i + b2 j + b3k, alors on peut vérifier que le PRODUIT scalaire du vecteur :

(a2b3 – a3b2)i + (a3b1 – a1b3)j + (a1b2 – a2b1)k

avec chacun de a et b égal à zéro. Ainsi, ce nouveau vecteur est perpendiculaire à la fois à a et à b. Les mathématiciens ont montré qu'il a aussi une direction donnée par la règle de droite et une grandeur égale au parallélogramme défini par a et b. Ainsi ce nouveau vecteur est bien le produit croisé de a et b :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

où, pour l'égalité finale, nous avons écrit la formule en fonction du DÉTERMINANT d'une matrice 3 × 3.

(Pour prouver que ce nouveau vecteur correspond bien à la quantité a × b, faites pivoter le système de vecteurs a, b et a × b de sorte que a pointe dans la direction de l'axe x et b se trouve dans le plan xy . Alors , pour le système tourné nous avons : a1 = |a|, a2 = 0, a3 = 0, b1 = |b|cosθ, b2 = |b|sinθ, b3 = 0. On peut maintenant facilement vérifier que la formule ci-dessus donne un vecteur de la longueur requise |a|·|b|·sinθ pointant dans la bonne direction. On soutient alors que la formule continue de tenir lorsque le système de trois vecteurs est ramené à sa position d'origine.) Ainsi, par exemple, si a = <1,4,2> et b = <3,0,1>, alors a × b = <4·1 – 2·0, 2.3 – 1·1, 1·0 – 4·3> = <4,5, – 12>. Selon la FORMULE DE DISTANCE, ce vecteur a $\sqrt{4}$ 2 = $\sqrt{}$ 185, qui doit être l'aire du parallélogramme formé par a et b.

En deux dimensions, le déterminant $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$ = donne un vecteur de même longueur que a = <a1 ,a2> et perpendiculaire à celui-ci. Dans un espace à quatre dimensions, on peut toujours trouver un quatrième vecteur perpendiculaire à chacun des trois vecteurs donnés.

Voir aussi ORTHOGONAL ; PRODUIT VECTORIEL TRIPLE ; ÉQUATION VECTORIELLE D'UN PLAN.

Machine Translated by Google

cryptographie La pratique consistant à modifier la forme d'un message par des codes et des chiffres pour dissimuler sa signification à ceux qui l'interceptent, mais pas à ceux qui le reçoivent, s'appelle la cryptographie. Si les lettres de l'alphabet et les signes de ponctuation sont remplacés par des chiffres, les mathématiques peuvent être utilisées pour créer des codes efficaces.

En 1977, trois mathématiciens, Ron Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, ont développé une méthode de cryptographie à clé publique dans laquelle la méthode de codage d'un message peut être publique pour tous sans compromettre la sécurité du message. La méthode de cryptage RSA, telle qu'elle est connue aujourd'hui, est basée sur les mathématiques de l' ARITHMÉTIQUE MODULAIRE et s'appuie sur le fait qu'il est extraordinairement difficile de trouver les deux facteurs qui produisent un grand produit donné. Il s'agit de la principale méthode de cryptage utilisée aujourd'hui par les institutions financières pour transmettre des informations sensibles à travers le monde.

La méthode de chiffrement RSA est basée sur le résultat suivant de l'arithmétique modulaire :

Supposons que p et q soient des nombres PRIME distincts . Si n est un nombre sans facteur p ni q , $(p–1)(q–1)$ alors $n \equiv 1 \pmod{pq}$. De plus, on a $m(p–1)(q–1)+1 \equiv n \pmod{pq}$ pour deux nombres entiers naturels n et m, même si n est un multiple de p ou q.

(Nous prouvons ce résultat à la fin de cette entrée.) On procède comme suit :

1. Encodez votre message sous la forme d'une chaîne M de nombres.
2. Choisissez deux grands nombres premiers p et q tels que leur produit N = pq soit plus grand que M. Soit k = (p – 1)(q – 1) et choisissons un nombre e sans facteur commun à k.

   Les nombres N et e peuvent être rendus publics.
3. Élevez le nombre M à la puissance eth, modulo N.

   Cela donne le message codé M' :

$$M' \equiv Moi \pmod{N}$$

4. Puisque le PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN de k et e est

   Premièrement, l' ALGORITHME EUCLIDIEN montre que nous pouvons trouver les nombres d et m tels que 1 = de – mk. En particulier il existe un nombre d tel que $ed \equiv 1 \pmod{k}$.

   Gardez le numéro d secret.
5. Pour décoder le message, élevez M′ à la dième puissance.

   Par le résultat indiqué ci-dessus, cela renvoie bien le message d'origine M :

$$M'^{d} = Med = Mkm+1 = Mm(p–1)(q–1)+1 \equiv M \pmod{N}$$

Si l'on travaille avec de très grands nombres premiers, disons des nombres premiers à 10 000 chiffres, il est pratiquement impossible de factoriser le nombre public N et de trouver k et d. Ainsi, le système RSA est extrêmement sécurisé. (Cette utilisation de grands nombres premiers explique également l'excitation actuelle suscitée par la découverte de nombres premiers de plus en plus grands.) D'un autre côté, multiplier et élever de grands nombres à des puissances est facile à faire pour les ordinateurs, et donc la méthode RSA est également très facile implémenter.

Preuve du résultat

Supposons d'abord que n n'est pas un multiple de p et considérons les nombres 1,2,…,p – 1. Multipliez chacun par n. Si, pour deux nombres x et y de la liste, on a $nx \equiv ny \pmod{p}$, alors $n(x – y)$ est un multiple de p. Cela ne peut arriver que si x et y sont le même nombre. Ainsi, à des multiples de p près, les produits $n·1, n·2, \ldots, n·(p – 1)$ sont distincts et doivent donc représenter un réarrangement de la liste d'origine, modulo p. Par conséquent, $n·1·n·2·\ldots·n(p – 1) \equiv p–1$ dans la gauche $1·2·\ldots·(p – 1) \pmod{p}$, et le facteur n doit être congru à 1 modulo p : $np–1 \equiv 1 \pmod{p}$. De même, on a $n^{q–1} \equiv 1 \pmod{q}$ si n n'est pas un multiple de q. Il résulte de ces deux résultats que si n n'est pas un multiple de p ou de q, alors :

$$n^{(p–1)(q–1)} = (n\,p–1)\,q–1 \equiv 1 \pmod{p}$$
$$n^{(p–1)(q–1)} = (n\,q–1)\,p–1 \equiv 1 \pmod{q}$$

qui montre que n et q, et $(p–1)(q–1) – 1$ est divisible à la fois par p ce donc par pq. Cela prouve la première affirmation $m(p–1)(q–1)+1$ faite. La seconde suit en notant que $n·(n^{p–1}) \equiv n \pmod{p}$ est un énoncé vrai même si $n^{m(q–1)}$ est $m(p–1)(q–1)+1$ un multiple de p, et $n \equiv n \pmod{q}$ est aussi $n^{m(p–1)(q–1)+1} – n$ est vrai pour toutes les valeurs de n. Toute quantité n est donc toujours divisible à la fois par p et q.

cube (hexaèdre) Le troisième SOLIDE PLATONIQUE, le cube, est la figure solide délimitée par six faces carrées identiques qui se rejoignent à angle droit. Il a huit sommets et 12 arêtes. Parce que le VOLUME d'un cube de côté , tout nombre élevé à la troisième puissance a est donné par a^3 est parfois appelé un cube. Les « nombres cubes » sont les cubes des nombres comptés : 0, 1, 8, 27, 64, 125,…

Il est possible de subdiviser un gros cube en 27 petits cubes avec six coupes planes. Ce nombre de coupes n'est pas améliorable même s'il est permis de

Machine Translated by Google

"empiler" des morceaux du cube pendant le processus de tranchage afin pour couper plusieurs morceaux à la fois. (Pour voir ça, considérez le cube le plus interne parmi les 27 petits cubes. Il a six faces planes, dont chacune doit être coupée. Comme aucune coupe plane unique ne tranchera deux de ces faces, un minimum de six coupes est en effet nécessaire pour former les 27 petites cubes.) Il est cependant possible de découper un gros cube en 4 × 4 × 4 = 64 petits cubes en moins de neuf tranches si « empiler » est autorisé (six suffiront). Neuf tranches suffit de découper un cube en 5 × 5 × 5 = 125 plus petit cubes. En général, le nombre minimum de tranches nécessaire pour subdiviser un grand cube en $n \times n \times n = n^3$ petits cubes est donné par la formule :

$$3 \log_2 n$$

en utilisant la FONCTION PLAFOND.

L'analogue à quatre dimensions d'un cube est un HYPERCUBE.

Voir aussi FONCT PLANCHER/PLAFOND/ PARTIE FRACTIONNELLE TIONS ; DUPLIQUER LE CUBE ; PARALLÉLÉPIPÈDE; PRISME.

racine cubique/racine n La racine cubique d'un nombre a est un valeur x telle que $x^3 = a$. Nous écrivons $\sqrt[3]{a}$ pour la racine cubique d' un.

Tout nombre réel a a exactement une racine cubique réelle. Par exemple, la racine cubique de 27 est 3 (puisque 3 × 3 × 3 est égal à 27), et la racine cubique de –8 est –2 (puisque –2 × –2 × –2 est égal à –8). Si l'on travaille dans le domaine des nombres complexes, alors le THÉORÈME FONDAMENTAL DE ALGEBRA montre que chaque nombre a exactement trois racines cubiques complexes. Par exemple, les trois racines cubiques sur 27 sont $je\frac{3}{2} + -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3}{2} je\frac{3\sqrt{3}}{2}$, et 3. Une étude de la nième racine de l'unité montre que les trois complexes les racines cubiques d'un nombre se trouvent sur les sommets d'un triangle équilatéral dans le plan complexe.

En général, la racine nième d'un nombre a est une valeur x tel que $x^n = a$. Encore une fois, le théorème fondamental de l'algèbre montre que tout nombre a exactement n racines n complexes . Si a est un nombre réel, alors a a un réel nième racine si a est positif. (Par exemple, une quatrième racine de 16 est égal à 2.) Si a est un nombre réel négatif, alors un nième réel racine n'existe que si n est impair. (Par exemple, –243 a un racine cinquième, à savoir -3, mais pas de racine quatrième réelle.) La vraie nième racine d'un nombre a, s'il existe, est noté $\sqrt[n]{a}$.

Voir aussi ÉQUATION CUBIQUE ; RACINE; RACINE CARRÉE.

équation cubique Toute équation POLYNOMIALE de degré trois de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $a \neq 0$ est appelée équation cubique.

A la Renaissance, les érudits cherchaient une formule arithmétique générale en termes de coefficients a, b, c, et d qui résoudraient toutes les équations cubiques (une semblable à la célèbre formule QUADRATIQUE pour résoudre les équations de degré deux). À l'époque, cependant, les chercheurs n'étaient pas à l'aise avec les NOMBRES NÉGATIFS, ou avec ZÉRO comme nombre, et a écrit des équations sous une forme qui évité leur apparition. (Par exemple, le cube $x^3 - 2x + 5 = 0$ a été exprimé en $x^3 + 5 = 2x$.) Mathématiciens par conséquent pensé qu'il y avait huit différents types d'équations cubiques à résoudre.

Savant italien SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526) fut le premier à progresser dans la résolution de certaines cubiques, mais n'a jamais publié ses résultats. Plus tard, le savant NIC COLÒ TARTAGLIA (vers 1499-1557) réussit à résoudre quelques classes supplémentaires de cubiques. GIROLAMO CAR DANO (1501-1576) a publié l'œuvre de Tartaglia (sans Le consentement de Tartaglia) dans sa pièce épique de 1545 Ars magna (Le grand art) et a développé une approche générale qui résout toutes les équations cubiques. La formule qu'il a imaginée est aujourd'hui appelée "formule de Cardano" ou "formule de Cardano Tartaglia". Nous le décrivons ici en utilisant des notation:

En divisant l'équation cubique par le coefficient directeur a, nous pouvons supposer que nous travaillons avec un cubique de la forme :

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

pour les nombres $B = \frac{b}{a}$, $C = \frac{c}{a}$, et $D = \frac{d}{a}$. En remplaçant $x = y - \frac{B}{3}$ simplifie encore l'équation à un sans un terme au carré :

$$y^3 + py + q = 0$$

(Ici et .) Ce formulaire $p = C - \frac{B^2}{3}$ $q = \frac{2B^3}{27} - \frac{BC}{3} + D$ de la cubique est appelée la cubique réduite, et toute solution y de cette équation correspond à une solution $x = y - \frac{b}{3a}$ de l'équation d'origine.

Supposons que l'équation ait une solution qui puisse s'écrire comme la somme de deux quantités : y = u + v. La substitution de ces variables donne :

Machine Translated by Google

$$(tu^3 + v^3) + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Cette équation sera satisfaite si nous pouvons choisir u et v de sorte que $u^3 + v^3 = -q$ et $3uv + p = 0$. Cela donne une paire des équations pour u^3 et v^3 :

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

La résolution dans la première équation et en remplaçant le du résultat v^3 dans la seconde montre que u doit satisfaire la équation quadratique:

$$(u^3)^2 + q(u^3) - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

et en utilisant la formule quadratique, cela donne u^3, et consequentiellement $v^3 = -u^3 - q$, pour être les deux nombres :

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} \qquad \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Il faut maintenant prendre la racine cubique de ces quantités. Notez d'abord que tout nombre M a trois racines cubiques : un réel, noté $\sqrt[3]{M}$, et deux imaginaires, $w \times \sqrt[3]{M}$ et $w^2 \times \sqrt[3]{M}$, où $w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ Ensemble:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u_2 = w \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u_3 = w^2 \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

et

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v_2 = w \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v_3 = w^2 \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

On peut maintenant vérifier que les trois quantités $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2$, et $u_3 + v_3$ représentent les trois solutions du cubique réduit $y^3 + py + q = 0$. Elles constituent la formule de Cardano.

La quantité sous le signe de la racine carrée :

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

est appelé le discriminant de la cubique, et il détermine la nature des solutions :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a une racine réelle et deux racines complexes.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a trois racines réelles, dont au moins deux sont égaux.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation a trois racines réelles distinctes.

Dans le troisième cas, il faut prendre des combinaisons de racines cubiques de nombres complexes pour donner, étonnamment, des réponses purement réelles. Par exemple, la méthode de Cardano appliquée à l'équation $x^3 = 15x + 4$ donne comme solution unique la quantité :

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

Il n'est pas immédiat que ce nombre soit x = 4.

Ce phénomène déroutant consistant à utiliser des quantités complexes pour produire des résultats réels a été exploré pour la première fois par le mathématicien italien RAFAEL BOMBELLI (1526-1572). La mathématicienne française FRANÇOISE VIÈTE (1540-1603) a utilisé des formules trigonométriques comme approche alternative pour identifier les trois racines réelles distinctes qui apparaissent dans ce scénario déroutant.

Une autre méthode

Le mathématicien français Viète a également développé l'approche suivante plus simple pour résoudre les équations cubiques. Cette méthode a été publiée à titre posthume en 1615.

Machine Translated by Google

Prenez la forme réduite du y cubique et $y^3 + py + q = 0$ réécrivez-la comme suit :

$$y^3 + 3ry = 2t$$

où $r = \frac{p}{3}$ et $t = \frac{q}{2}$. Substituer $y = z - \frac{r}{z}$ pour obtenir l'équation la plus simple :

$$(z^3)^2 + 2t(z^3) - r^3 = 0$$

qui est un quadratique en z^3. Tout ce qu'il faut faire maintenant est de résoudre pour z^3 et extraire ses trois racines cubiques.

La solution de l'équation cubique est nécessaire dans la solution de l' ÉQUATION QUARTIQUE.

Voir aussi THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE ; HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET DE L'ALGÈBRE (essai).

curl Voir DIV.

courbe Un ensemble de points qui forment une ligne droite ou courbée en continu est appelé une courbe. Le GRAPHIQUE D'UNE FONCTION tracé en COORDONNEES CARTESIENNES, par exemple, est une courbe. Une courbe peut également être considérée comme la trajectoire d'une particule en mouvement (et, par conséquent, des ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES peuvent être utilisées pour la décrire).

En tant que graphe d'une fonction, une courbe est dite algébrique si elle est donnée par une formule y = f(x) avec f une fonction algébrique, et transcendante si f est transcendante. (Voir NOMBRE ALGEBRIQUE.) Par exemple, la PARABOLE $y = x^2$ est algébrique, comme toute SECTION CONIQUE, mais le sinus la courbe y = sin x est transcendante.

Une courbe située dans un plan est appelée courbe plane. Une courbe dans un espace tridimensionnel qui ne reste pas dans un plan, comme une HÉLICE, est appelée oblique ou tordue. Toute courbe située dans un espace tridimensionnel est appelée courbe spatiale (qu'elle soit tordue ou non).

Une courbe est dite fermée si l'on peut parcourir courbe et revenir au même point un nombre indéfini de fois. Par exemple, un CERCLE est fermé. Dans certains contextes, il convient d'autoriser un point à l'infini, auquel cas une ligne droite serait également considérée comme une courbe fermée. (On peut se diriger vers l'infini dans une direction et revenir de l'infini dans l'autre direction et répéter ce voyage un nombre indéfini de fois.) Une courbe avec des ENDPOINTS est appelée ouverte.

Voir aussi ARC ; LIEU.

cuspide Voir TANGENTE.

polygone cyclique Un POLYGONE est dit cyclique si tous ses sommets (coins) se trouvent sur un cercle. Comme tout triangle peut s'inscrire dans un cercle, tous les triangles sont cycliques. Il en va de même pour tous les carrés, les rectangles et tous les polygones réguliers. Cependant, tous les quadrilatères ou polygones à côtés supérieurs ne sont pas cycliques BRAHMAGUPTA (598–665) a donné une formule pour l'aire d'un quadrilatère cyclique. Les THÉORÈMES DU CERCLE montrent que les angles opposés de tout quadrilatère cyclique sont supplémentaires. L'inverse est également vrai : tout quadrilatère dont les angles opposés totalisent 180° est cyclique.

Voir aussi LA FORMULE DE BRAHMAGUPTA ; CERCLE; THÉORÈME DE PTOLÉMÉE .

cycloïde La forme tracée par un point sur la circonférence d'un cercle roulant sur une droite s'appelle une cycloïde. (C'est notamment la courbe tracée par un morceau de gomme collé à la jante d'une roue de bicyclette.)

Cette courbe possède de nombreuses propriétés géométriques remarquables et a été largement étudiée par les mathématiciens des XVIe et XVIIe siècles, et plus tard.

GALILEO GALILEI (1564-1642) a été le premier à étudier la courbe et lui a donné son nom. En 1644, le disciple de Galilée Evangelista Torricelli (qui a inventé le baromètre) a prouvé que l'aire sous un arc de la cycloïde est égale à trois fois l'aire du cercle roulant.

En 1658, l'architecte anglais Christopher Wren a montré que la longueur d'un arc de la cycloïde est quatre fois le diamètre du cercle. En 1696, Johann Bernoulli de la célèbre FAMILLE BERNOULLI a posé et résolu le désormais célèbre problème de la brachistochrone :

> Imaginez une petite balle partant d'un point A et roulant le long d'une courbe jusqu'à un point inférieur B à droite de A. La balle est propulsée uniquement par la force de gravité. Quelle forme de courbe reliant A à B permet à la balle de se déplacer le plus rapidement entre eux ?

Étonnamment, une ligne droite ne donne pas le temps le plus court, mais une cycloïde inversée le fait.

En 1658, le scientifique néerlandais Christiaan Huygens s'est penché sur la cycloïde dans ses travaux sur les pendules. Il découvrit qu'un simple pendule dans lequel le bob est

Machine Translated by Google

contraint de suivre une trajectoire en forme de cycloïde a toujours la même période quelle que soit la longueur du pendule. C'est ce qu'on appelle la propriété tautochrone de la cycloïde. (C'est aussi le cas que si une balle commence au repos à n'importe quel point d'une cycloïde inversée et se déplace le long de la courbe sous la force de gravité, alors le temps qu'il faut pour atteindre le point le plus bas de la courbe est indépendant de l'emplacement de départ du ballon.)

Les courbes associées peuvent être considérées en suivant le chemin tracé par un point sur la circonférence d'un cercle lorsque ce cercle roule le long d'un autre cercle. Si le cercle roule à l' intérieur d'un cercle fixe, alors la courbe tracée est appelée hypocycloïde. Si un cercle roule à l' extérieur d'un cercle fixe, alors la courbe tracée est appelée épicy cloïde. Dans les deux cas, le cercle fixe est appelé le déférent, et le cercle mobile est l'épicycle.

Des noms spéciaux sont donnés aux courbes créées dans des situations particulières. Par exemple, lorsque les deux cercles ont le même rayon, l'épicycloïde produite est en forme de cœur et s'appelle CARDIOÏDE . Lorsque le cercle extérieur roulant a un diamètre égal au quart de celui du cercle fixe, la courbe à quatre pointes produite est appelée astroïde. Une épicycloïde à cinq cuspides est appelée ranonculoïde.

L'épicycloïde était connue d' APOLLONIUS DE PERGE du troisième siècle avant notre ère, qui l'utilisa dans ses descriptions du mouvement planétaire.

cylindre Dans l'espace tridimensionnel, un cylindre est la surface formée par une collection infinie de droites parallèles, chacune passant par un point d'une courbe fermée fixe tracée dans un plan. La courbe fermée est appelée la directrice du cylindre, et les lignes tracées sont appelées les génératrices du cylindre. Souvent, le terme cylindre est utilisé pour la figure solide de volume fini confiné entre deux plans parallèles. Dans ce cadre, le cylindre a trois faces : les deux régions planes parallèles, appelées chacune une base de la figure, et la surface latérale donnée par les lignes droites qui génèrent le cylindre. La base d'un cylindre n'a pas besoin d'être un cercle. Par exemple, un CUBE répond à la définition d'être un cylindre.

Si la surface latérale est perpendiculaire à la base, alors le cylindre est appelé cylindre droit. Tous les autres cylindres sont dits obliques. La hauteur d'un cylindre est la distance perpendiculaire entre les deux bases.

Toutes les sections transversales horizontales d'un cylindre ont la même taille et la même forme que la base du cylindre. Le PRINCIPE DE CAVA LIERI montre alors que le volume V d'un cylindre est donné par V = Ah, où h est la hauteur du cylindre et A est l'aire de sa base.

ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 av. J.-C.) a montré que le volume d'une SPHÈRE est égal aux deux tiers du volume du cylindre qui la contient. La formule du volume d'une sphère s'ensuit facilement.

Voir aussi CÔNE.

coordonnées cylindriques (coordonnées polaires cylindriques) Dans l'espace tridimensionnel, l'emplacement d'un point P peut être décrit par trois coordonnées - r, θ et z - appelées coordonnées cylindriques de P, où (r, θ) sont les COORDONNÉES POLAIRES de la projection de P sur le plan xy , et z est la hauteur de P au-dessus du plan xy. Les coordonnées cylindriques sont utiles pour décrire des surfaces à symétrie circulaire autour de l' axe z. Par exemple, l'équation d'un cylindre de rayon 5 avec un axe central, l' axe z peut être décrit par la simple équation r = 5. (Comme l'angle θ varie entre zéro et 360°, et la hauteur z varie à travers tous valeurs, des points sur un cylindre infiniment long sont décrits.) La surface définie par l'équation θ = c, pour une certaine constante c (permettant à r et z de varier), est un DEMI-PLAN vertical avec un côté le long de l' axe z , et la surface z = c est un plan horizontal.

Un point P de coordonnées cylindriques (r, θ, z) a des COORDONNEES CARTESIENNES correspondantes (x, y, z) données par :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

Ces formules suivent les formules de conversion standard pour les coordonnées polaires.

Il est habituel de présenter l'angle θ en RADIAN MEA SURE. Dans ce cas, une triple intégrale de la forme $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ sur un volume V décrit dans Carte Les coordonnées siennes sont converties en l'intégrale correspondante $\iiint_V f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$ en coordonnées cylindriques. L'apparition du terme r dans l'intégrande suit pour la même raison que r apparaît dans la conversion d'un DOUBLE INTEGRAL de coordonnées cartésiennes planaires en coordonnées polaires.

Voir aussi ANGLE ; COORDONNÉES SPHÉRIQUES.

Machine Translated by Google

D

donnée (singulier, datum) Information d'un nombre

la nature s'appelle des données. Par exemple, les registres du quotidien le nombre de visiteurs d'une attraction touristique ou la mesure des taux de croissance d'une culture de levure dans différentes conditions de température seraient des exemples de données.
Les comptages directs des études d'observation ou des mesures d'expériences comme celles-ci sont appelés primaires ou données brutes. Informations numériques décrivant les données brutes (comme la valeur moyenne, la valeur la plus élevée, la plage de valeurs, et ainsi de suite) sont parfois appelées données secondaires. La science du développement de méthodes pour collecter, organiser, et la synthèse des données est appelée statistique descriptive.

Voir aussi STATISTIQUES ; STATISTIQUES : DESCRIPTIVES.

formule des jours de la semaine C'est un exercice difficile

dériver une formule mathématique qui détermine le jour de la semaine à laquelle tombe une date particulière du calendrier.

Dans un premier temps, connaître le jour où janvier 1 d'une année tombe, il est assez simple de déterminer quel jour toute autre date de cette année chutes. Par exemple, le jour de l'An en l'an 2000 était un samedi. Comme les jours de la semaine se succèdent par périodes de sept, il s'ensuit que le 8 janvier, le 15 janvier et Le 22 janvier de cette année-là étaient également des samedis. Depuis il y a 31 jours en janvier, et parce que 31 font trois plus qu'un multiple de 7, il s'ensuit que le 1er février 2000, est tombé le jour de la semaine trois jours plus tard que le samedi, à savoir le mardi. Comme il y avait 29 jours en février cette année-là, et que 29 est un de plus qu'un multiple de 7, Le 1er mars est tombé le jour de la semaine qui suit directement le mardi jour, à savoir le mercredi ; et le 1er avril, 30 jours plus tard, est tombé un jour de semaine deux jours après mercredi, à savoir vendredi jour. De cette façon, nous pouvons déterminer le jour de la semaine de n'importe quel premier jour du mois, et à partir de là, le jour de la semaine du n'importe quel jour particulier de ce mois.

Il est pratique d'étiqueter dimanche comme "jour 0", lundi comme "jour 1", jusqu'à samedi comme "jour 6". Comme les jours de semaine cycle en unités de 7, il convient également d'ignorer tous les multiples de 7 et de ne travailler qu'avec les restes de nombres lors de la division par 7. (C'est-à-dire que nous travaillerons dans un système de base 7 d' ARITHMÉTIQUE MODULAIRE.) Par exemple, les dates 16 et 30 jours dans une année tombent le même jour de la semaine que le jour 2 jours dans l'année : tous les numéros concernés voici 2 de plus qu'un multiple de 7. Nous appellerons le nombres 16, 30 et 2 "équivalents" et écrivez 16 ≡ 2 et 30 ≡ 2, par exemple.

Le 1er janvier 2000 est tombé le jour 6. Comme nous l'avons noté, Le 1er février tombe 31 ≡ 3 jours plus tard et tombe donc le jour 6+3 ≡ 2, mardi. Le 1er mars tombe encore 29 ≡ 1 jours plus tard, et atterrit ainsi le jour 6 +3+1 ≡ 3, mercredi. Dans général, le tableau suivant indique le montant par dont une date particulière doit être ajustée en fonction de le mois où il se situe :

Mois	Janv.	Fév.	mars	avril	mai	juin
Ajouter	0	3	3 (4)	6 (0)	1 (2)	4 (5)

Mois	juillet	août		septembre	Oct.	Nov.	Déc.
Ajouter	6 (0)	2 (3)	5	(6)	0 (1)	3 (4)	5 (6)

Machine Translated by Google

Les chiffres entre parenthèses correspondent aux années bissextiles. Ainsi, par exemple, le 1er juillet 2000 est tombé le jour 6 + 0 = 6, samedi ; et le 1er décembre 2000, est tombé le jour 6 + 6 ≡ 5, vendredi.

Il s'agit maintenant de déterminer à quel jour de la semaine est tombé le premier jour d'une année donnée. Supposons, pour les besoins de l'argument mathématique, que le calendrier grégorien soit utilisé depuis deux millénaires et que le 1er janvier de l'année 0 soit le jour d. Considérez le jour du jour de la semaine du jour de l'an N ans plus tard.

Comme chaque année ordinaire contient 365 (≡1) jours, le jour où tombe le 1er janvier avance d'un jour de semaine chaque année. Pour chaque année bissextile, il avance d'un jour supplémentaire. Il faut déterminer le nombre d'années bissextiles sur une période de N années.

En général, une année bissextile se produit tous les 4 ans, ce qui donne $\frac{N}{4}$ occurrences possibles d'une année bissextile, y compris l'année zéro. (Ici, nous utilisons la FONCTION PLAFOND.) Cependant, aucune année bissextile ne se produit sur une valeur d'année N qui est un multiple de 100 — et cela se produit $\frac{N}{100}$ fois — sauf si N est un multiple de 1 000, qui se produit $\frac{N}{1000}$ fois. (L'année 1900, par exemple, n'était pas une année bissextile, mais l'année 2000 l'était.) Le nombre total d'années bissextiles L qui se produisent dans une période de N années à partir de l'année zéro est donc donné par :

$$L = \frac{NN\,N}{4} - \frac{}{100\;1000} +$$

Par exemple, le 29 février est apparu, en théorie, $\frac{2000}{4} - \frac{2000}{100} + \frac{2000}{1000} = 500 - 20 + 2 = 482$ fois avant la date du 1er janvier 2000. Ainsi, le jour de la semaine du 1er janvier, année N, est donné par :

$$j + N + L$$

(Le 1er janvier de l'année zéro était le jour d. Il y a une avance pour chacune des N années, et une avance d'un jour supplémentaire pour chacune des L années bissextiles.)

Sachant que le jour de l'an 2000 était le jour 6, on en déduit alors que la valeur appropriée de d est donnée par :

$$j + 2000 + 482 = 6$$

Autrement dit, en travaillant avec des restes lors de la division par 7, d + 5 + 6 = 6, ce qui donne d = 2. Ainsi, dans notre théorie, le 1er janvier de l'année zéro était un mardi.

Nous avons maintenant l' ALGORITHME suivant pour calculer le jour de la semaine d'une date donnée. Supposons que l'on souhaite calculer le jour de la semaine du Dème jour, du mois M, de l'année N.

1. Considérez le numéro d'année N et calculez son reste de division par 7.
2. Calculer $L = \frac{NN\,N}{4} - \frac{}{100\;1000} +$ et reste de son division par 7.
3. Additionnez les réponses des deux étapes précédentes et ajoutez 2. Calculez le reste de ce nombre, si nécessaire, lorsqu'il est divisé par 7.
   C'est le numéro du jour de la semaine du 1er janvier de l'année N.
4. À ce numéro de jour de la semaine, ajoutez le jour D, soustrayez 1 et ajoutez le numéro de mois approprié du tableau ci-dessus. Regardez le reste en divisant par 7, si nécessaire.
   Ce résultat final est le numéro du jour de la semaine du jour souhaité.

Par exemple, pour la date du 15 mars 2091, N = 2091 ≡ 5, L = 523 – 21 + 3 = 505 ≡ 1, ce qui fait que le 1er janvier de cette année est le jour 2 + 5 + 1 ≡ 1, un lundi. A cela, nous ajoutons 14 jours (le nombre de jours plus tard est inférieur de 1 à la date D) avec un ajustement du mois de valeur 3 (ce n'est pas une année bissextile). Ainsi le 15 mars 2091 tombera le jour 1 + 14 + 3 ≡ 4, un jeudi. (Attention : comme le calendrier grégorien n'était pas utilisé avant le 15 octobre 1582, cet algorithme ne peut pas être appliqué à des dates antérieures à celle-ci.)

Simplification de la procédure

Cette méthode peut être simplifiée dans une certaine mesure. Écrivez le numéro de l'année sous la forme mcyy, avec m pour les millénaires, c pour le siècle et yy pour le numéro de l'année à deux chiffres. Plus précisément, nous entendons :

$$N = 1000m + 100c + yy$$

avec 0 ≤ c ≤ 9 et 0 ≤ yy ≤ 99. Par exemple, l'année 3261 s'écrira :

$$N = 1000 \times 3 + 100 \times 2 + 61$$

Remarquerez que

Machine Translated by Google

N mc yy mc yy 1000 100 6 2 ≡ + +

N aa aa 250 25 5 4 4 = ++ 4 ≡ ++

mcmc

N aa aa 10 mc 3 mcx

100 c aa =+ + 100 100

1000 10 1 000

N m

4

donnant:

NLN += + NN N 4 100 1000

aa aa aa + + 4 10

2 2 mc ++ 1000 100 c .

aa

que la quantité + − 10 1000 100 vaut 1 si yy = 00 et 0 dans tous

les autres cas. En réécrivant les étapes 1 et 2 de l'algorithme ci-dessus, nous avons :

Le 1er janvier de l'année mcyy tombe le jour numéro

2 2 mc yy ++ + ε

où ε vaut 1 si l'année est un tournant de siècle, mais pas le tournant d'un millénaire, et zéro sinon.

Ainsi, par exemple, considérons le Jour de l'An de l'année 3261. Le nombre du millénaire ici est m = 3, le nombre du siècle est c = 2, et nous avons yy = 61. Aussi, 61 = 15 25 1 6 , et, puisque ce n'est pas un tour de

4

siècle , ε = 0. Ainsi, le Jour de l'An de cette année tombera le jour 2 + (2 × 3) – (2 × 2) + 61 + 16 + 0 ≡ 4, un jeudi. Nous pouvons maintenant calculer le jour de la semaine de n'importe quel autre jour de l'année si nous le souhaitons.

Une méthode alternative

Le mathématicien Chris McManus a observé que quel que soit le jour de la semaine « 0 mars » (le dernier jour de février) qui tombe, il en va de même pour le 4/4 (4 avril), le 6/6 (6 juin), le 8/8. (8 août), 10/10 (10 octobre) et 12/12 (12 décembre). Il en est de même du 5/9 (5 septembre) et du 11/7 (11 juillet), et de leurs inverses 9/5 et 7/11. (On peut s'en souvenir avec le mnémonique "Je travaille de 9h à 17h au magasin de 7h à 11h".) Ainsi, par exemple, si vous savez que le 20 décembre 2002 était un vendredi, et que vous souhaitez déterminer le jour où tombait le 10 avril de cette année-là, calculez rapidement que le 12 décembre était un jeudi, ce qui donne le 4 avril également un jeudi, faisant du 10 avril un mercredi.

décibel Noté dB, un décibel est une mesure de l'intensité du son, zéro décibel représentant l'intensité la plus faible à laquelle un son peut être entendu.

Les décibels suivent une ÉCHELLE LOGARITHMIQUE de base 10 . Cela signifie que chaque augmentation de 1 dB représente une multiplication par 10 de l'intensité du son. Par exemple, une note jouée à 1 dB est 10 fois plus forte que le son le plus doux, et une note jouée à 2 dB est 100 fois plus forte que le son le plus doux. La parole humaine normale est à un niveau d'environ 60 dB, et un murmure est d'environ 20 dB. Le seuil de douleur pour l'oreille humaine est d'environ 90 dB. Les concerts de rock sont connus pour atteindre des niveaux de 120 dB à une distance de 50 m du système de sonorisation.

Le niveau de décibels d'un son est calculé par la formule :

$$10 \log_{10} \frac{P}{P_0}$$

où P est l'intensité de la note jouée et P0 est l'intensité la plus faible à laquelle cette note peut être entendue.

Un intervalle de 10 dB est appelé un bel. L'intensité sonore était à l'origine mesurée en termes de bel, le nom étant choisi en l'honneur de l'inventeur américain du téléphone, Alexander Graham Bell. Aujourd'hui, cependant, l'unité du décibel est considérée comme plus utile et est la plus couramment utilisée.

représentation décimale Voir BASE D'UN NOMBRE SYSTÈME.

décomposition (factorisation) Le résultat de l'expression d'un objet ou d'une quantité donné en termes de composants plus simples est appelé une décomposition. Par exemple, le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE montre que tout nombre naturel se décompose en produit de nombres premiers

Machine Translated by Google

Nombres. Aussi, toute fonction rationnelle se décompose en une somme de FRACTIONS PARTIELLES. Le processus d'ÉLIMINATION GAUSSIENNE montre que toute MATRICE carrée A se décompose en le produit d'une matrice triangulaire inférieure L et d'une matrice triangulaire supérieure U. Un exemple d'une telle factorisation LU est :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Tout VECTEUR se décompose en une somme de vecteurs de base. Par exemple:

$$\langle 3, 2, 1 \rangle = 3\langle 1, 0, 0 \rangle + 2\langle 0, 1, 0 \rangle + \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Et en GEOMETRIE, comme tout polygone peut être divisé en triangles, on pourrait dire que tous les polygones se "décomposent" en une union de triangles.

L'étude des éléments les plus simples de la décomposition d'un objet peut conduire à des résultats généraux sur l'objet.
Par exemple, savoir que les angles intérieurs d'un triangle totalisent 180° permet de déduire immédiatement que les angles intérieurs de tout quadrilatère (l'union de deux triangles) totalisent 360°, et que les angles intérieurs de tout pentagone (le union de trois triangles) somme de 540°.

Voir aussi FACTORISATION.

Dedekind, Julius Wilhem Richard (1831-1916)
Analyse allemande Né le 6 octobre 1831 à Braunschweig, qui fait aujourd'hui partie de l'Allemagne, Richard Dedekind est connu pour sa construction élégante du système de NOMBRE RÉEL , qui est basé sur une idée aujourd'hui connue sous le nom de DEDEKIND CUT. Ce travail a représenté une étape importante dans la formalisation des mathématiques. En particulier, il offrait les moyens de mettre enfin CALCU LUS sur une base mathématique solide.

Dedekind a étudié la THÉORIE DES NOMBRE et le calcul à l'Université de Göttingen. Il obtint un doctorat en 1852 sous la direction de CARL FRIEDRICH GAUSS (il fut le dernier élève de Gauss), et deux ans plus tard obtint un diplôme d'habilitation lui accordant le droit d'être membre de la faculté universitaire.

En 1858, Dedekind accepta un poste au Poly technikum de Zürich. Dedekind s'est rendu compte que les fondements du calcul, en particulier les propriétés du système de nombres réels sur lequel repose le calcul, n'étaient pas correctement compris. Confronté au défi d'enseigner le calcul aux étudiants du Polytechnikum pour la première fois, Dedekind a décidé de ne pas éluder la question, mais plutôt de développer une approche qui justifierait correctement les principes du sujet à lui-même et à ses étudiants. C'est alors que l'idée d'une coupe Dedekind lui est venue.

Dedekind a publié les détails de cette construction plusieurs années plus tard dans son célèbre article de 1872 « Continuité et nombres irrationnels ». Cet article fut extrêmement bien accueilli et admiré non seulement pour les idées brillantes qu'il contenait, mais aussi pour la manière dont ces idées étaient détaillées. Dedekind a fait preuve d'un talent pour expliquer les concepts mathématiques avec une clarté exceptionnelle.

En 1862, Dedekind retourna dans sa ville natale pour accepter un poste au Brunswick Polytechnikum. Il y resta pour le reste de sa vie. Il ne s'est jamais marié et a vécu sa vie avec l'une de ses sœurs, qui est également restée célibataire.

Dedekind a reçu de nombreuses distinctions pour son travail exceptionnel, notamment l'élection à l'Académie de Berlin en 1880, à l'Académie de Rome et à l'Académie des Sciences de Paris en 1900, ainsi que des doctorats honorifiques des universités de Zurich, Brunswick et Oslo. Dedekind est décédé à Brunswick, en Allemagne, le 12 février 1916.

Dedekind a eu un impact durable sur la compréhension moderne du système des nombres réels. La plupart des cours de niveau collégial sur le thème des nombres réels aborderont en détail les problèmes explorés par Dedekind.

Dedekind coupé Au cours des années 1800, il est devenu clair pour les mathématiciens que pour prouver que CALCULUS est mathématiquement valable, il faut définir correctement ce que l'on entend par un nombre réel et, de plus, montrer que le système des nombres réels est "complet", dans le sens qu'il ne lui manque aucun point. Ceci est particulièrement important pour établir le THÉORÈME DES VALEURS EXTRÊMES, le THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES et le THÉORÈME DES VALEURS MOYENNES. Tous les théorèmes clés du calcul s'appuient sur ces trois résultats.

Bien que les NOMBRES RATIONNELS Q soient relativement faciles à définir, le système de rationnels n'est certainement pas complet : la racine carrée de 2, par exemple, n'est pas une fraction et est donc « absente » de l'ensemble des rationnels.
La tâche de définir exactement ce que l'on entend par nombre irrationnel a longtemps laissé les savants perplexes,

Machine Translated by Google

et la définition d'un NOMBRE RÉEL était sujette à beaucoup de débats.

En 1872, JULIUS DEDEKIND avait la très simple et idée élégante de définir simplement les irrationnels comme étant les vides dans la droite des nombres rationnels. Il a noté que chaque "écart", comme la racine carrée de 2 par exemple, divise le ligne de rationnels en deux parties - une partie gauche et une partie droite pièce. On peut concentrer son attention sur la gauche pièce (car les points qui n'y sont pas constituent la pièce droite) et cette pièce gauche L satisfait aux conditions suivantes trois propriétés :

1. Il n'est pas vide, ni l'ensemble des points.
2. Si a est un nombre dans L, et b<a, alors b appartient aussi à L .
3. Si a est un nombre dans L, il est possible d'en trouver un autre nombre c également dans L mais légèrement plus grand que a.

Dedekind a simplement défini un nombre réel comme étant n'importe quel sous-ensemble L des nombres rationnels satisfaisant ces trois propriétés. Un tel ensemble est aujourd'hui connu sous le nom de coupe Dedekind.

Chaque nombre rationnel r définit une coupe. On peut vérifier que l'ensemble r* = {a Q : a < r} vérifie les trois propriétés. Ainsi l'ensemble des coupes Dedekind "contient" tous les nombres rationnels comme des ensembles de ce type. Il contient également d'autres types de nombres. Par exemple, le carré racine de 2 est donnée par l'ensemble :

L = {a Q : a est négatif, ou a est positif et a 2<2}

On peut vérifier que toute union de coupes, dans le contexte de SET THEORY, est encore une coupe. Avec cela étonnamment définition simple d'un nombre réel, Dedekind était capable de prouver toutes les propriétés du nombre réel système requis pour établir le bien-fondé des calculs. En particulier, il a pu montrer que toute collection de nombres réels avec un BOUND supérieur possède nécessairement une borne supérieure. (Ceci moins borne supérieure est la réunion de toutes les coupes listées dans le collection.)

raisonnement déductif/inductif Dans la méthode scientifique, il existe deux processus généraux pour établir résultats. Le premier, appelé raisonnement inductif, aboutit à conclusions générales en observant des exemples précis, identifier les tendances et généraliser. « Le soleil a toujours ressuscité dans le passé, donc il se lèvera demain », par exemple, illustre ce mode de raisonnement.

Le processus inductif repose sur des schémas de discernement mais ne tente pas de prouver que les motifs observées s'appliquent à tous les cas. (Peut-être que le soleil ne sera pas lever demain.) Pour cette raison, une conclusion tirée par le processus inductif est appelé une conjecture ou une conjecture éclairée. S'il n'y a qu'un seul cas pour lequel la conclusion ne tient pas, alors la conjecture est fausse. Tel un cas s'appelle un CONTRE-EXEMPLE.

Pour illustrer, au milieu des années 1700 LEONHARD EULER a observé que le produit de deux nombres entiers consécutifs plus 41 semble toujours donner un nombre PRIME . Par exemple, 2 × 3 + 41 = 47 est premier, tout comme 23 × 24 + 41 = 593 et 37 × 38 + 41 = 1447. Par raisonnement inductif, on conclurait que n × (n + 1) + 41 est toujours premier. Cependant, c'est une fausse conclusion. Le cas n=40 fournit un contre-exemple : 40 × 41 + 41 = 41 × 41 = 1681 n'est pas premier. (Curieusement n × (n + 1) + 41 est premier pour tout valeurs n entre –40 et 39.)

De nombreux tests d'intelligence demandent aux participants d'identifier "le numéro suivant dans la séquence." Ces questions reposent sur un raisonnement inductif, mais ne sont pas mathématiquement son. Par exemple, étant donné le défi :

Quel nombre vient ensuite dans la séquence :
2 4 6 ?

toute réponse est en fait acceptable (bien que le test les concepteurs attendent clairement la réponse "8"). On peut vérifier que le POLYNOME

$$\frac{1}{(3} \quad 2)(3\,42\,1)+(-)(-)(3-)(n-nn\,nn-\,-\,-\,4)$$

$$-\,(3n\,2n\,4)(-)(n)(6 \quad \frac{un}{} \quad (123) \quad -)$$

$$= \frac{un-8}{6}\,3n + (8 \quad un^{2} \quad \frac{11un\,76}{6}\,n + (8 \quad un$$

par exemple, a les valeurs 2, 4 et 6 lorsque n est égal à 1, 2, et 3, respectivement, et la valeur a lorsque n est égal à 4. Réglage a comme valeur arbitraire de votre choix justifie toute réponse à ce problème. (Ce particulier polynôme a été conçu en utilisant la FORMULE DE LAGRANGE .)

D'autre part, le raisonnement déductif fonctionne pour prouver une conclusion spécifique à partir d'un ou de plusieurs déclarations utilisant le raisonnement logique (tel que donné par FORMAL LOGIC) et des ARGUMENTS valides . Par exemple, étant donné le déclarations, "Toutes les vaches mangent de l'herbe" et "Daisy est une vache",

Machine Translated by Google

on peut conclure, par raisonnement déductif, que Daisy mange de l'herbe.

Le raisonnement déductif ne repose pas sur le fait que les prémisses qui sont faites sont nécessairement vraies. Par exemple, "Sydney et Boston sont des planètes, donc Boston est une planète" est un argument valable, alors que "Soit Boston, soit Vénus est une planète, donc Vénus est une planète" n'est pas valide.

Les mathématiciens ne sont pas satisfaits des conclusions tirées uniquement par le raisonnement inductif. Ils cherchent toujours une preuve logique aux conjectures faites. Mais cela n'empêche certainement pas les mathématiciens de faire des conjectures. Par exemple, la CONJECTURE DE GOLDBACH est un exemple d'une conjecture exceptionnelle toujours en attente de preuve mathématique (ou de réfutation).

déformation En TOPOLOGIE, toute transformation géométrique qui étire, rétrécit ou tord une forme, mais ne déchire ni ne rompt les lignes ou les surfaces qui forment la forme, est appelée une déformation (continue).
Par exemple, il est possible de mouler une boule sphérique solide en argile sous la forme d'un cube sans déchirer aucune partie de l'argile. En ce sens, un cube peut être considéré comme une déformation d'une sphère. Il n'est cependant pas possible de mouler une sphère en forme de TORUS (beignet) sans créer de déchirure. Les topologues considèrent par conséquent une sphère et un tore comme des formes distinctes (mais un cube et une sphère comme la « même » surface).

La notion de déformation peut être rendue mathématiquement précise. Si, pour un ensemble fixe S, un objet A est l'image d'une application f, et un second objet B est l'image d'une seconde application g :

$$f : S \rightarrow A$$
$$g : S \rightarrow B$$

alors B est une déformation de A s'il existe une fonction continue H(s,t) où s S et $0 \le t \le 1$, de sorte que H(s,0) est l'application f, et H(s,1) est la carte g. On dit aussi que l'application H « déforme A en B ».

Par exemple, la fonction $H(x,t) = t \cos x + (1 - t) \sin x$ transforme en continu une courbe sinus en une courbe cosinus.

mesure de degré Voir ANGLE.

degré d'un polynôme La puissance la plus élevée de la variable qui apparaît (avec COEFFICIENT non nul) dans un POLYNOMIAL est appelé le degré de ce polynôme. Par exemple, le polynôme $4x^3 - 2x + 7$ a le degré trois, et le polynôme $7w^{57} - 154w^{18} + w^5 - 73w^4 + \pi w^2$ a le degré 57. Toute constante non nulle peut être considérée comme un polynôme de degré zéro. Dans certains problèmes mathématiques, il convient de considérer la constante 0 comme un polynôme de degré « infini négatif ». UNE SÉRIE PUISSANTE, dans un certain sens, est un polynôme de degré infini positif.

degré d'un sommet (valence) Dans tout GRAPH, le nombre d'arêtes se rencontrant à un sommet particulier est appelé le degré de ce sommet. En additionnant tous les degrés des sommets d'un graphe, on compte deux fois le nombre total d'arêtes. Le fameux HANDSHAKE LEMMA de GRAPH THEORY est une conséquence amusante de ce résultat.

degrés de liberté Le nombre de variables indépendantes nécessaires pour spécifier complètement l'ensemble de solutions d'un SYSTÈME D'ÉQUATIONS est appelé le nombre de degrés de liberté du système. Par exemple, le système mathématique décrit par les équations :

$$3x + 2y - z = 7$$
$$x + 4y - 3z = 6$$

a un seul degré de liberté : si la valeur de z est spécifiée, alors x et y sont donnés par $x = (8-z)/5$ et $y = (11+8z)/10$.

En physique, le nombre de degrés de liberté d'un système mécanique est le nombre minimum de coordonnées nécessaires pour décrire l'état du système à tout instant par rapport à un référentiel fixe. Par exemple, une particule se déplaçant dans un cercle a un degré de liberté : sa position est complètement spécifiée par l'angle entre une ligne de référence fixe et la ligne reliant le centre du cercle à la particule. Une particule se déplaçant dans un PLAN, ou à la surface d'une SPHÈRE, a deux degrés de liberté.

Voir aussi ÉQUATION INDÉTERMINÉE.

De Moivre, Abraham (1667–1754) Français Géométrie, statistique
Né le 26 mai 1667, le savant français Abraham De Moivre est connu pour son travail de pionnier dans le développement de la géométrie analytique et de la théorie des probabilités. Il a été le premier à présenter

Machine Translated by Google

NOMBRES COMPLEXES dans l'étude de la TRIGONOMÉTRIE, aboutissant à la célèbre formule qui porte aujourd'hui son nom. Il a également été le premier à décrire et à utiliser la courbe de fréquence normale dans les statistiques.

Immigré en Angleterre en 1685, De Moivre travailla comme professeur particulier de mathématiques. Il avait espéré recevoir un poste de professeur de mathématiques mais, en tant qu'étranger, on ne lui a jamais offert une telle nomination.
Il est resté précepteur privé toute sa vie, malgré la réputation qu'il avait acquise en tant qu'érudit compétent et influent. Il a été élu membre de la ROYAL SOCIETY en 1697 et, en 1710, a été nommé à une commission mise en place par la société pour statuer sur les revendications rivales de SIR ISAAC NEWTON et GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ en tant que découvreurs de CALCULUS.

De Moivre a publié deux textes remarquables. La première, Doctrine du hasard (1718), examinait attentivement les principes sous-jacents de la théorie des PROBABILITÉS et développait solidement des notions fondamentales telles que « l'indépendance statistique » et la « loi du produit de probabilité », ainsi que les fondements établis pour des applications à la théorie des annuités. . Le second, Miscellanea analytica (1730), identifia avec succès les principes qui lui permirent plus tard d'écrire une formule pour la DISTRIBUTION NORMALE, une tâche qui avait entravé les chercheurs avant cette époque. Ce deuxième ouvrage contenait également les mathématiques nécessaires pour établir la FORMULE DE STIRLING .

On dit très sérieusement que De Moivre a correctement prédit le jour de sa propre mort. Constatant qu'il dormait 15 minutes de plus chaque jour, De Moivre supposa qu'il mourrait le jour où il dormirait 24 heures. Un simple calcul mathématique a rapidement donné la date du 27 novembre 1754. Il est effectivement décédé ce jour-là.

Voir aussi LA FORMULE DE DE MOIVRE .

La formule de De Moivre (l'identité de De Moivre)
1707 Le mathématicien français ABRAHAM DE MOIVRE découvre la formule suivante, maintenant appelée De
La formule de Moivre :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Pour les entiers positifs n, la formule peut être prouvée par INDUCTION, en utilisant les formules d'addition pour les fonctions sinus et cosinus de la TRIGONOMÉTRIE. Une approche beaucoup plus simple suit en utilisant

FORMULE D'EULER $\cos\theta+i\sin\theta = e^{i\theta}$ et réalisant que De
Le résultat de Moivre n'est rien de plus qu'une reformulation de la règle de l'exposant :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Cela montre que la formule de De Moivre est valable pour toute valeur réelle de n.

De Morgan, Augustus (1806–1871) British Alge bra, Logic Né le 27 juin 1806 à Madura,
L'Inde, le citoyen anglais Augustus De Morgan est remémoré en mathématiques pour sa contribution considérable
tions à la LOGIQUE FORMELLE et à l'ALGÈBRE. En 1847, il a développé un système formel de manipulations symboliques qui encapsulait les principes de la logique aristotélicienne et comprenait les fameuses lois qui portent maintenant son nom. On se souvient également de lui pour avoir correctement défini le processus d' INDUCTION mathématique et placé cette méthode de preuve dans un contexte rigoureux.

De Morgan est entré au Trinity College de Cambridge à l'âge de 16 ans et, à la fin de son baccalauréat, a postulé à la chaire de mathématiques du tout nouveau University College de Londres à l'âge de 21 ans. publications à l'époque, il obtint le poste en 1827.

De Morgan est devenu un écrivain prolifique en mathématiques. Son premier texte, Elements of Arithmetic, publié en 1830, fut extrêmement populaire et connut de nombreuses éditions améliorées. Plus tard, il écrivit des articles sur les sujets de CALCU LUS et de l'algèbre, et son texte de 1849 Trigonométrie et double algèbre fut également extrêmement influent. Cette dernière pièce contenait une interprétation géométrique utile des NOMBRES COMPLEXES. De Morgan a également écrit littéralement des centaines d'articles pour le Penny Cyclopedia, une publication publiée par la Society for the Diffusion of Use ful Knowledge. Il a présenté de nombreuses pièces originales comme entrées dans cet ouvrage. Sa définition précise de l'induction, par exemple, apparaît dans un article de l'édition de 1838.

S'intéressant activement à la diffusion générale des connaissances mathématiques, De Morgan cofonda en 1866 une société universitaire, la London Mathematical Society, et en devint le premier président. La société existe encore aujourd'hui et travaille à faciliter et à promouvoir la recherche mathématique.

En tant que collectionneur de faits numériques étranges, De Morgan a noté qu'avoir 43 ans en 1849 était une curieuse

Machine Translated by Google

événement, étant donné que le nombre 1 849 est 43 au carré. Il a également observé que tous ceux nés en 1892 bénéficieraient d'une coïncidence similaire en 1936, et ceux nés en 1980 en 2025. (Le nombre 2 025 est 45 au carré.)

De Morgan est décédé à Londres, en Angleterre, le 18 mars 1871.

Voir aussi les LOIS DE DE MORGAN .

Les lois de De Morgan Si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble universel, et A′ et B′ dénotent leurs compléments, alors les deux identités suivantes, connues sous le nom de lois de De Morgan, s'appliquent :

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Ces identités peuvent être utilisées pour convertir toute intersection d'ensembles en une union d'ensembles, ou vice versa.

Ces lois peuvent être considérées comme vraies à l'aide d'un DIAGRAMME DE VENN (en ombrant la région en dehors de l'intersection ou de l'union des deux ensembles), ou par un argument formel de la THÉORIE DES ENSEMBLES . Par exemple, pour prouver la première loi, il faut établir que tout élément qui appartient à (A∩B)′ appartient aussi à A′ ∪ B′, et vice versa. Cela peut être fait comme suit:

Si $x \in (A \cap B)'$, alors $x \notin A \cap B$, c'est-à-dire que x n'appartient pas à la fois à A et à B. Par conséquent, x appartient à au moins un complément A′ ou B′, et donc $x \in A' \cup B'$.

Inversement, si $y \in A' \cup B'$, alors y n'appartient pas à l'un (ou aux deux) de A et B. Par conséquent, y n'est pas un élément de A∩B, et donc $y \in (A \cap B)'$.

La deuxième loi peut être démontrée de la même manière.

Les lois de De Morgan peuvent être étendues à l'intersec tion ou union de plus de deux ensembles. Nous avons:

$$(A \cap B \cap C \cap \ldots \cap Z)' = A' \cup B' \cup C' \cup \ldots \cup Z'$$
$$(A \cup B \cup C \cup \ldots \cup Z)' = A' \cap B' \cap C' \cap \ldots \cap Z'$$

Lorsqu'un ensemble A est interprété comme "l'ensemble de toutes les instances dans lesquelles une affirmation p est vraie" et B "l'ensemble de toutes les instances dans lesquelles une affirmation q est vraie", alors les lois de De Morgan en théorie des ensembles se traduisent par ce qui suit deux identités dans la LOGIQUE FORMELLE :

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$$
$$\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$$

Une TABLE DE VÉRITÉ établit que ces paires correspondantes d'instructions composées sont logiquement équivalentes. Ces équivalences sont aussi appelées lois de De Morgan.

Les formules présentées ci-dessus ont été proposées en 1847 par le mathématicien et logicien britannique d'origine indienne AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871).

denumerable (énumérable, dénombrable) Un ensemble infini COMPTABLE est dit dénombrable. Ainsi un ensemble dénombrable est tout ensemble infini dont les éléments peuvent être rangés dans une liste assimilable à la liste des nombres naturels 1, 2, 3, … Le premier ARGUMENT DIAGONAL montre que l' ensemble des NOMBRES RATIONNELS est dénombrable. L'argument diagonal de seconde espèce établit que l'ensemble des NOMBRES RÉELS ne l'est pas. Dans un certain sens défini, l'ensemble des nombres réels est un ensemble infini "plus grand" que l'ensemble infini des rationnels. Un ensemble dénombrable est dit de CARDINALITE $\aleph_0$. Tout ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable. Celle-ci peut être établie comme suit :

Supposons que X est un ensemble infini. Soit x1 un élément quelconque de X. Puisque X est infini, ce n'est pas le seul élément de X. Soit x2 un autre élément de X. Puisque X est infini, ce ne sont pas les deux seuls éléments de X. Soit x3 un autre élément élément de X. En continuant ainsi, on obtient une liste d'éléments de X : x1 , x2 , x3 , … Cette liste représente un sous-ensemble dénombrable de X.

On peut alors légitimement dire qu'un ensemble dénombrable est le « plus petit » type d'ensemble infini. Autrement dit, $\aleph_0$ est le "plus petit" nombre cardinal transfini.

Voir aussi HYPOTHÈSE DU CONTINUUM.

dérivée Voir CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Desargues, Girard (1591–1661) Géométrie française, ingénierie Né le 21 février 1591 à Lyon, en France, le mathématicien Girard Desargues est considéré comme le fondateur de la GÉOMÉTRIE PROJECTIVE, une approche innovante et non grecque de la géométrie. Son texte très original et célèbre de 1639 Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des recontres du cone avec un plan

Machine Translated by Google

(Brouillon d'un essai sur les résultats de la prise de sections planes d'un cône) exposait les principes de la nouvelle théorie, contenait de nombreux nouveaux résultats et offrait, pour la première fois, une théorie unifiée des SECTIONS CONIQUES .
Son travail, cependant, a été largement ignoré au moment de sa sortie, et l'impact important de ses idées n'a été correctement reconnu qu'au XIXe siècle.

On sait très peu de choses sur la vie personnelle de Desargues. Issu d'une famille aisée, Desargues a certainement eu accès à une excellente éducation formelle et à la liberté d'explorer des intérêts académiques. Ses premiers travaux en mathématiques, bien que portant sur des thèmes pratiques - la construction de cadrans solaires, les techniques de taille de pierre et l'utilisation de la perspective dans l'art - étaient très théoriques, densément écrits et difficiles à lire, et par conséquent étaient de peu d'utilité. aux praticiens dans les domaines respectifs. Cela peut expliquer pourquoi la parution de sa célèbre pièce de 1639, écrite dans un langage tout aussi obscur, a été largement ignorée. Seuls quelques exemplaires du texte ont été imprimés, dont un seul survit aujourd'hui.

Le célèbre théorème de Desargues, la « perspective l'orème » qui porte son nom, a été publié en 1648 par le graveur et peintre français Abraham Bosse (1602-1676) dans son traité Manière universelle de M. Desargues (Méthodes générales de Desargues) sur le rôle de perspective de l'art. Ce résultat unique a ouvert la voie à une toute nouvelle approche de la pensée géométrique. Desargues est mort à Lyon, France, en septembre 1661. (La date exacte de sa mort n'est pas connue.)

Théorème de Desargues Du nom de son découvreur, mathématicien et ingénieur français GIRARD DESARGUES (1591-1661), ce théorème énonce :

> Supposons que deux triangles ABC et A′B′C′ soient positionnés dans un espace à deux ou trois dimensions de sorte que les droites joignant les sommets correspondants A et A′, B et B′, et C et C′ passent par un point commun (c'est-à-dire pour que les deux triangles soient en "perspective d'un point"). Alors, si aucune des paires de côtés AB et A′B′, AC et A′C′, ou BC et B′C′ n'est parallèle, alors les trois points d'intersection de ces paires de côtés sont sur une droite. (C'est-à-dire que les deux triangles sont en "perspective à partir d'une ligne".)

Le cas des trois dimensions est le plus facile à démontrer. Notant que les deux triangles ne peuvent pas se trouver dans des plans parallèles, on peut montrer que chaque point d'intersection d'une paire de côtés se trouve sur la ligne d'intersection des deux plans. La preuve de la version bidimensionnelle du théorème est délicate. La réciproque du théorème de Desargues est également vraie :

> Si les côtés correspondants de deux triangles ont des intersections le long de la même ligne droite, alors les lignes joignant les sommets correspondants passent par un point commun.

Le théorème de Desargues a joué un rôle clé dans le développement de la GÉOMÉTRIE PROJECTIVE. Comme indiqué, le théorème ne tient pas si une paire de droites considérées s'avère parallèle. Mais Desargues a observé que cette difficulté pouvait être contournée si l'on adjoignait à l'espace des points supplémentaires, des « points à l'infini », là où les droites parallèles se rejoignent. Cela a inspiré Desar à développer une notion de géométrie dans laquelle chaque paire de points détermine une ligne unique et, de plus, chaque paire de lignes détermine (se coupe en) un point unique. Dans ce système, les notions de « point » et de « droite » jouent un double rôle, conduisant à un principe général de dualité dans cette nouvelle géométrie projective :

> L'échange des rôles de « point » et de « ligne » dans tout théorème de géométrie projective conduit à une autre affirmation qui est également vraie en géométrie projective.

Le dual du théorème de Desargues est son inverse.
Voir aussi PERSPECTIVE.

Descartes, René (1596–1650) Géométrie française, algèbre, philosophie Né le 31 mars 1596 à La Haye (aujourd'hui Descartes), en France, le philosophe René Descartes est connu en mathématiques pour son ouvrage influent de 1637 La géométrie (Géométrie), dans lequel il a introduit des principes fondamentaux pour incorporer l'ALGÈBRE dans l'étude de la GÉOMÉTRIE, et vice versa. Ce travail a ouvert la voie au développement de la notion de système de coordonnées et, bien que ne figurant pas dans son ouvrage, CARTE SIAN COORDONNEES est aujourd'hui nommée en son honneur.

Descartes est également connu pour sa « règle des signes » pour compter le nombre de solutions aux équations POLYNOMIALES et pour promouvoir l'utilisation de symboles dans le travail algébrique. Il a préconisé l'utilisation de lettres pour représenter les variables, suggérant la convention selon laquelle les lettres d'abord dans le

Machine Translated by Google

l'alphabet doit faire référence à des quantités connues et les lettres de la dernière partie de l'alphabet à des quantités inconnues. (Par exemple, nous interprétons aujourd'hui sans aucun doute l'équation ax+b=0 comme une équation contenant une variable x, avec a et b supposés être des quantités connues.) Descartes a également développé la notation d'index pour les EXPOSANTS : x et ^{2}, ^{3x}_, autres. En tant que philosophe, Descartes souhaitait explorer les principes sous-jacents les plus profonds de toutes les connaissances scientifiques. Il estimait que les mathématiques étaient à la base de toute compréhension.

Diplômé en droit de l'Université de Poitiers à Paris en 1616, Descartes se rendit en Hollande pour s'inscrire à l'école militaire de Breda afin d'étudier les mathématiques et la mécanique. Le devoir avec l'armée l'a amené à travers l'Europe pendant un certain nombre d'années, mais en 1628, Descartes est retourné en Hollande et a commencé un traité complet sur la physique, l'optique et la mécanique céleste.

Il décida cependant de ne pas publier cet ouvrage après avoir appris que GALILEO GALILEI (1564-1642) était condamné à l'assignation à résidence pour avoir épousé la pensée scientifique moderne. Descartes modifia plus tard la pièce et publia en 1637 un traité de science dans lequel La géométrie figurait en annexe.

En 1644, Descartes publie Principia philo sophiae, un ouvrage complet explorant tous les aspects de l'investigation et de la connaissance scientifiques. Divisé en quatre parties - Les principes de la connaissance humaine, Les principes des choses matérielles, Du monde visible et La Terre - le travail de Descartes a soutenu que les mathématiques sont à la base de toute pensée et que toutes les études de la nature et de l'univers peuvent se réduire aux principes mathématiques de la mécanique.

Ce travail a été extrêmement influent, mais les détails spécifiques de certaines des théories que Descartes y a décrites étaient problématiques. Par exemple, Descartes croyait que les forces, telles que les forces gravitationnelles, ne pouvaient pas être transmises sans une sorte de milieu ambiant.

Ainsi, il a été forcé de conclure que les vides n'existent pas et que l'univers entier est rempli de matière.

Il a développé une «théorie des vortex» dans laquelle il a soutenu que les planètes et le Soleil sont transportés à travers l'espace par un système de vortex dans le milieu ambiant. Cette théorie des tourbillons a été acceptée pendant près de 100 ans en France jusqu'à ce que SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) démontre mathématiquement qu'un tel système dynamique est impossible.

En 1649, Descartes s'installe à Stockholm pour accepter un poste de tuteur de la reine Christine de Suède en mathématiques



René Descartes, éminent érudit du XVIIe siècle, fut le premier à appliquer les méthodes de l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie.
Le domaine de la géométrie analytique est né. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de Topham/The Image Works)

matiques. Le climat froid ne convenait pas bien à Descartes, et il mourut quelques mois plus tard, le 11 février 1650, d'une pneumonie.

Descartes a initié un changement philosophique quant à la façon dont les mathématiques et la pensée analytique sont utilisées dans le rôle de l'investigation scientifique. Plutôt que de façonner des théories scientifiques autour de ce qui est observé expérimentalement, Descartes a soutenu qu'il fallait d'abord identifier des principes fondamentaux « évidents » et utiliser un raisonnement logique pour comprendre les causes des phénomènes expérimentaux. Son désir de porter le sujet de la géométrie dans la physique dans le cadre de ce processus se fait encore sentir aujourd'hui : la plupart des branches de la physique moderne sont décrites en termes géométriques.

La règle des signes de Descartes Découverte par le philosophe et mathématicien RENÉ DESCARTES (1596-1650), la « règle des signes » donne une borne sur le nombre maximum

Machine Translated by Google

de racines positives qu'une équation POLYNOMIALE peut posséder. Cette borne est donnée par le nombre de changements de signe que surviennent lorsque les termes du polynôme sont écrits en ordre décroissant de degré. A titre d'exemple, en lisant de gauche à droite, l'équation polynomiale :

$$x^{6} - 2x^{5} - 6x^{3} + 2x^{2} - 7x + 8x - 2 = 0$$

a trois changements de signe (du positif au négatif, du négatif au positif, et inversement), et donc l'équation a au plus trois solutions positives.

La règle peut être étendue pour compter les racines négatives comme bien en remplaçant "x" par "-x" (qui, en effet, reflète l' axe des x négatif vers le côté positif) et appliquer la même règle au polynôme qui en résulte. Dans l'exemple ci-dessus, le polynôme résultant est :

$$(-x)^{6} + 7(-x)^{5} - 2(-x)^{4} - 6(-x)^{3} - 7(-x)^{2} + 8(-x) - 2 = 0$$

c'est,

$$x^{6} - 2x^{5} + 6x^{3} + 2x^{2} - 7x - 8x - 2 = 0$$

Qu'il y ait quatre changements de signe indique qu'il y a au plus quatre solutions négatives à l'équation d'origine.

Comme autre exemple, on peut rapidement vérifier que l'équation $x^{6} - 64 = 0$ a au plus une solution positive tion (qui doit être x = 2), et pas de solutions négatives.

Preuve de la règle

Très peu de textes de mathématiques présentent une preuve de Le fameux résultat de Descartes. L'argument, malheureusement, n'est pas élémentaire et s'appuie sur des techniques de CALCULUS. Nous présentons ici une preuve qui utilise également le principe de l'INDUCTION mathématique .

La règle des signes de Descartes fonctionne certainement pour les équations polynomiales de degré un : une équation de la forme ax + b = 0, avec a et b différents de zéro, a une solution positive si a et b sont de signes différents, et pas de solutions positives si elles sont de même signe.

Supposons que la règle des signes de Descartes est valable pour tout équation polynomiale de degré n, et considérons un polynôme $p(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^{n} + \cdots + a_1 x + a_0$ de degré n + 1. Sa dérivée $p'(x) = (n+1)a_{n+1}x^{n} + na_n x^{n-1} + \cdots$ est un polynôme de degré n et donc, par hypothèse, a au plus k racines positives, où k est le nombre de signer les changements qui se produisent. Chaque racine de p′(x) représente un maximum local (colline) ou minimum local (vallée) de la polynôme d'origine, et une racine du polynôme d'origine ne peut apparaître que directement après un tel emplacement. Ainsi, le polynôme d'origine a au plus k positif racines après l'emplacement de la première racine positive de p′(x). Si le graphique de p (x) croise l' axe x positif juste avant ce premier maximum ou minimum local dépend des signes de p(0) = a0 et p′(0) = a1 . Si les deux sont positifs, alors le graphique augmente à un maximum local juste à droite de x = 0, et il y a pas de racine supplémentaire. De même, il n'y a pas d'autre racine si les deux sont négatifs. Ce n'est que si a0 et a1 ont des signes opposés que l'équation originale pourrait avoir k + 1 plutôt que juste k racines positives.

Lorsque le signe change de la dérivée p′(x) correspond ceux de p(x), et avec la considération supplémentaire de un éventuel changement de signe entre a0 , et a1 , on a que le nombre de changements de signe de p(x) correspond bien le nombre de racines positives possibles qu'il pourrait posséder. Cela prouve la règle des signes.

On peut en outre noter que si un maximum local à un graphique apparaît en dessous de l' axe des x, ou si un minimum local se produit au-dessus de l'axe, alors le polynôme ne parvient pas à traverser l' axe des x deux fois. Ainsi, le nombre de positifs les racines qu'un polynôme possède pourraient manquer le nombre indiqué par le nombre de changements de signe par un multiple de 2. Cela conduit à une version plus raffinée de Descartes règle des signes :

> Ecrire les termes d'un polynôme à partir du plus haut aux puissances les plus faibles, et soit k le nombre de les changements de signe qui se produisent en lisant les coefficients de gauche à droite. Alors ce polynôme a au plus k racines positives. De plus, le nombre de racines positives qu'il possède sera pair si k est pair et impair si k est impair.
>
> Une borne sur le nombre de racines négatives peut être trouvée en remplaçant –x par x et en appliquant la même règle au polynôme modifié.

déterminant Dans l'étude des LINÉAIRES SIMULTANÉS ÉQUATIONS, il est commode d'attribuer à chaque carré MATRICE (celle représentant les coefficients des termes des équations simultanées) un nombre appelé le déterminant de cette matrice carrée. Pour expliquer, considérons l'exemple simple d'une paire d'équations linéaires :

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

Machine Translated by Google

Résoudre x dans la première équation et substituer le résultat dans la deuxième équation donne la solution :

$$x = \frac{de - bf}{bc - ad}$$

$$y = \frac{af - ce}{annonce - bc}$$

Ceci, bien sûr, n'est valable que si la quantité ad – bc n'est pas nulle. On appelle ad – bc le « déterminant » de la matrice 2 × 2 des coefficients :

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Notez que ce déterminant est obtenu à partir de la matrice en sélectionnant deux éléments de la matrice à la fois, un situé dans chaque ligne et colonne de la matrice, et en attribuant un signe + ou - selon que l'ordre dans lequel les colonnes sont choisies est une PERMUTATION paire ou impaire :

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad \text{colonne 1, colonne 2} \quad \text{annonce} \rightarrow +$$

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad \text{colonne 2, colonne 1} \quad \rightarrow - \quad \text{avant JC}$$

De même, un système de trois équations simultanées :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= p \\ dx + ey + fz &= q \\ gx + hy + iz &= r \end{aligned}$$

a une solution pourvu que la quantité aei – afh + bfg – bdi + cdh – ceg ne soit pas nulle. Nous appelons cette quantité le déterminant de la matrice carrée 3 × 3 :

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

Il est obtenu à partir de la matrice en sélectionnant trois éléments de la matrice à la fois, un situé dans chaque ligne et colonne de la matrice, et en attribuant un signe + ou - selon que l'ordre dans lequel les colonnes sont choisies est une permutation paire ou impaire :

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \quad \text{Colonne 1, Colonne 2, Colonne 3} \quad \rightarrow + aei$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{matrix} \quad \text{Colonne 1, Colonne 3, Colonne 2} \quad \rightarrow - ah$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{matrix} \quad \text{Colonne 2, Colonne 3, Colonne 1} \quad \rightarrow + bfg$$

Notez que les signes des produits peuvent être évalués de manière équivalente en termes de signe des permutations de lignes.

En général, le déterminant d'une matrice n × n est formé en sélectionnant n éléments de la matrice, disposés un par ligne et un par colonne, en formant le produit de ces entrées, en attribuant le signe approprié et en additionnant tous les résultats possibles. Le déterminant d'une matrice carrée A est noté det(A) ou, parfois, |A|.

La fonction déterminante satisfait un certain nombre de propriétés clés :

1. Si une colonne ou une ligne d'une matrice A est entièrement nul, alors det(A) = 0.

(Chaque produit formé en calculant le déterminant contiendra un terme qui est nul.)

2. Si deux colonnes ou deux lignes de la matrice sont interchangées, alors le signe de det(A) change.

(Si deux colonnes subissent un échange supplémentaire, le signe de chaque permutation change. Puisque le processus de formation du déterminant peut être considéré de manière équivalente en termes de permutations de lignes, il en va de même si deux lignes sont interchangées.)

3. Si une matrice A a deux colonnes identiques, ou deux lignes identiques, alors det(A) = 0.

(Échangez ces deux colonnes ou ces deux lignes. La matrice reste inchangée, mais le déterminant a un signe opposé. Il doit alors être le cas que det(A) = 0.)

Machine Translated by Google

Il est parfois commode de penser au déterminant d'une matrice A en fonction de ses colonnes écrites sous forme de vecteurs v1 , v2 ,…, vn . On écrit det(A) = det(v1 , v2 ,…, vn). Alors, par les observations ci-dessus, nous avons :

$$\det(v1 ,\ldots, 0,\ldots, vn) = 0$$

$$\det(v1 ,\ldots, vi ,\ldots, vj ,\ldots, vn) = -\det(v1 ,\ldots, vj ,\ldots, vi ,\ldots, vn)$$

$$\det(v1 ,\ldots, v,\ldots, v,\ldots, vn) = 0$$

Nous avons aussi:

4. $\det(v1 ,\ldots, v + w,\ldots, vn) = \det (v1 ,\ldots, v,\ldots, vn) + \det(v1 ,\ldots, w,\ldots, vn)$

et

5. $\det(v1 ,\ldots, kv,\ldots, vn) = k \det(v1 ,\ldots, v,\ldots, vn)$

et par conséquent

6. La valeur de det(A) n'est pas modifiée si un multiple d'une colonne est ajouté à une autre colonne : $\det(v1 ,\ldots, vi + kvj ,\ldots, vn) = \det(v1 ,\ldots, vi ,\ldots , vn)$

Ces résultats découlent de la définition du déterminant. Les résultats correspondants sur les lignes sont également valides.

LA RÈGLE DE CRAMER montre que la notion de déterminant est précisément le concept nécessaire pour résoudre simultanément des équations linéaires. Nous avons:

Un système d'équations linéaires simultanées a une solution (unique) si le déterminant de la matrice de coefficients correspondante n'est pas nul.

La règle de Cramer va plus loin et fournit une formule pour la solution d'un système en termes de déterminants.

Le déterminant a une autre propriété importante. Après quelques travaux algébriques, il est possible de montrer :

Le déterminant du produit de deux matrices n × n A et B est le produit de leurs déterminants :

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

Le déterminant de la MATRICE IDENTITAIRE I est un. Si une matrice carrée A est inversible, alors l'équation :

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

montre que det(A) n'est pas nul et que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Nous avons:

Si une matrice est inversible, alors son déterminant est pas nul.

L'inverse est également vrai :

Si le déterminant d'une matrice n'est pas nul, alors la matrice est inversible.

Pour voir pourquoi cela est vrai, supposons que A est une matrice avec un déterminant non nul. Soit ei la ième colonne de la matrice identité. D'après la règle de Cramer, puisque le déterminant n'est pas nul, le système d'équations Ax = ei a une solution x = si , disons. Définissez B comme étant la matrice avec la ième colonne si . Alors AB = I. Cela montre au moins que A a un « inverse à droite » B. Pour compléter la preuve, notons AT la transposée de A, c'est-à-dire la matrice obtenue à partir de A en interchangeant ses lignes et ses colonnes. Puisque le déterminant peut être vu de manière équivalente en fonction des lignes de la matrice comme de ses colonnes, nous avons que det(AT) = det(A). Comme le déterminant de AT est également non nul, il existe une matrice C telle que ATC = I. On peut vérifier que la transposée du produit de deux matrices est le produit inverse de leurs transposées. On a donc : CTA = (ATC)T = I = I. Cela montre que la matrice A possède également un CT inverse à gauche. Les inverses gauche et droite doivent être égaux, puisque CT = CTI = CT AB = IB = B. Ainsi la matrice B est bien la matrice inverse complète de A : AB = BA = I.

Voir aussi MATRICE INVERSE.

diagonale Toute ligne joignant deux sommets non adjacents d'un POLYGONE est appelée diagonale du polygone. Par exemple, un carré a deux diagonales, chacune coupant la figure en deux triangles rectangles congrus, et un pentagone a cinq diagonales différentes. Il n'y a pas de diagonales dans un triangle. En général, un ngon régulier a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales distinctes.

2 Une diagonale pour un POLYÈDRE est toute ligne joignant deux sommets qui ne sont pas sur la même face. Un cube, pour

Machine Translated by Google

exemple, a quatre diagonales distinctes. Un plan diagonal pour un polyèdre est tout plan qui passe par deux arêtes non adjacentes.

argument diagonal Le diagramme en bas à droite montre qu'il est possible de faire correspondre les éléments d'une ligne d'objets infiniment longue avec les éléments d'un tableau bidimensionnel d'objets dans une correspondance parfaite un à un (ce qui signifie que chaque élément du premier ensemble correspond exactement à un élément du second ensemble, et vice versa). Dans un certain sens, cela montre qu'un tableau infini à deux dimensions n'est pas "plus grand" qu'un tableau infini à une dimension. Des constructions similaires peuvent être utilisées pour faire correspondre des éléments de tableaux de dimension supérieure avec les éléments d'une seule ligne infinie d'objets.

La correspondance décrite est appelée argument diagonal de première espèce. Il a été introduit pour la première fois par le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918) en 1891. Cet argument montre que l'ensemble des NOMBRES RATIONNELS positifs est de la même CARDINALITÉ (c'est-à-dire exactement de la même "taille") que l'ensemble des NOMBRES NATURELS .
NOMBRES:

Listez d'abord une chaîne infinie comprenant tous les 1– rationnels avec numérateur $1 : 1, \frac{1-}{2}, \ldots$ Sous 1– 3 sous cette chaîne, listez tous les rationnels avec le numérateur 2 qui ne se réduisent pas à une fraction au numérateur 1 : $\frac{2-}{3}, \frac{2-}{5}, \ldots$ et sous 2– 1 sous ceci, écrivez la chaîne de tous les rationnels avec le numérateur 3 qui ne se réduisent pas à une 3– avec numérateur 1 ou $2 : 1, \frac{3-}{2}$, fraction 3– 3– , ,... ; et ainsi de suite 4 5 . L'argument diagonal montre maintenant que l'ensemble de tous les rationnels positifs peut en effet être présenté comme une seule liste dénombrable :

$$\frac{1-}{1}, \frac{2-}{1}, \frac{1-}{2}, \frac{3-}{1}, \frac{2-}{3}, \frac{1-}{3}, \frac{4-}{1}, \ldots$$

Cela montre que l'ensemble des rationnels est COMPTABLE.

On peut aussi utiliser cet argument pour montrer que l'union d'un nombre dénombrable d'ensembles dénombrables est elle-même dénombrable : listez simplement les éléments de chaque ensemble dans une chaîne infinie, un par ligne d'un tableau à deux dimensions, et utilisez l'argument diagonal pour fournir une méthode pour lister tous les éléments du tableau.

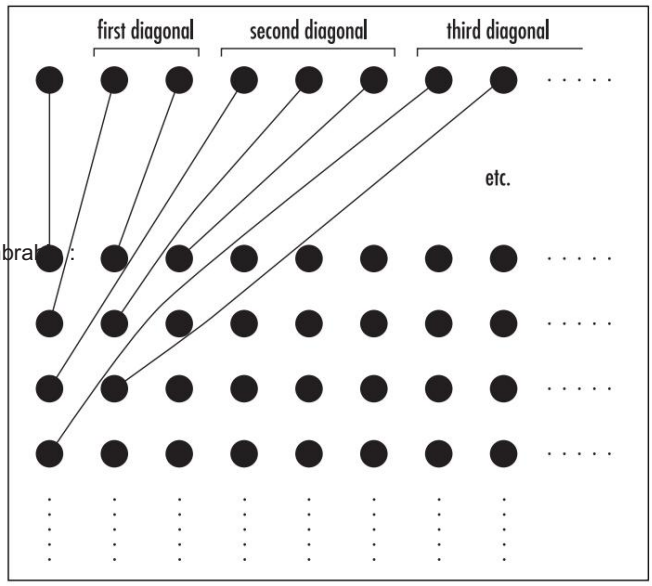
Cantor a fourni un « argument diagonal du second type » pour montrer que l'ensemble des nombres réels est un ensemble infini qui, dans un certain sens défini, est « plus grand » que l'ensemble des nombres à compter ou l'ensemble des rationnels. Pour plus de commodité, travaillez avec l'ensemble des nombres réels dans l' INTERVALLE [0,1]. Chacun de ces nombres réels peut être écrit sous la forme d'un nombre décimal infini, en utilisant une chaîne infinie de neuf si nécessaire. Par exemple, 1/3 = 0,3333 … et 1/2 = 0,5 = 0,49999 … L'argument de la seconde diagonale de Cantor procède comme suit :

Supposons qu'il soit possible de produire une liste complète de tous les nombres réels de l'intervalle [0,1], chacun écrit sous la forme d'un développement décimal infini :

0.a1 a2 a3 a4 a5 a6…
0.b1 b2 b3 b4 b5 b6…
0.c1 c2 c3 c4 c5 c6…
0.d1 d2 d3 d4 d5 d6 …
0.e1 e2 e3 e4 e5 e6…

Construire un autre nombre réel x = 0.α1 α2α3 … comme suit :

Mettre α1 égal à 1 si a1 est égal à 8 ou à 9, et égal à 8 si a1 est tout autre nombre ; fixer α2 égal à 1 si b2 est



La correspondance diagonale

Machine Translated by Google

égal à un 8 ou à un 9, et égal à 8 si b2 est un autre nombre ; fixer α3 égal à 1 si c3 est égal à un 8 ou à un 9, et égal à 8 si c3 est tout autre nombre ; et ainsi de suite.

Alors le nombre x n'apparaît pas sur la liste.
Ce n'est pas le premier nombre de la liste, puisque x et 0.a1 a2 a3 a4 … diffèrent par la première décimale ; ce n'est pas non plus le deuxième nombre de la liste, puisque x et 0. b1 b2 b3 … diffèrent par la deuxième décimale ; ce n'est pas non plus le troisième, le quatrième ou le 107e numéro de la liste. Ainsi, à partir de n'importe quelle liste de nombres réels, il est possible de construire un autre nombre réel qui ne figure pas sur la liste.

Même si l'on devait inclure le nombre x construit ci-dessus sur une nouvelle liste de nombres réels, on peut répéter à nouveau l'argument diagonal pour produire un nouveau nombre réel y qui ne figure pas sur la liste. De cette façon, on peut affirmer qu'il y a toujours « plus » de nombres réels qu'il n'est possible d'énumérer. L'ensemble des nombres réels est donc de plus grande cardinalité que l'ensemble des nombres rationnels. (Il convient de noter qu'au début, il semble plus simple de construire simplement le nombre réel x = 0, α1α2α3 … en sélectionnant α1 comme étant tout chiffre différent de α1 , α2 tout chiffre différent de b2 , α3 tout chiffre différent de c3 , et ainsi de suite.
Des choix arbitraires, cependant, pourraient conduire à l'ambiguïté et nuire à l'argumentation. Par exemple, le nombre x produit pourrait être 0,50000… qui apparaît déjà sur la liste sous la forme 0,49999… L'approche adoptée ci-dessus évite soigneusement cette préoccupation.)

Cantor a également prouvé qu'il existe une infinité d'ensembles infinis tous plus grands que l'ensemble infini des nombres naturels.

diamètre La distance la plus éloignée entre deux points sur la frontière d'une figure géométrique est appelée le diamètre de la figure. Par exemple, le diamètre d'un carré de côté 1 est la distance entre deux coins opposés du carré. Cette distance est $\sqrt{2}$. Un triangle équilatéral de côté 1 a un diamètre égal à 1. Dans ce contexte, le diamètre d'un objet est toujours un nombre.

Parfois, le terme diamètre fait également référence au segment de ligne lui-même reliant deux points limites distants l'un de l'autre. Par exemple, le diamètre d'un cercle est n'importe quel segment de ligne passant par le centre du cercle reliant deux points frontières. Un diamètre d'une SPHÈRE passe également par son centre.

Les cercles et les sphères sont des figures de LARGEUR CONSTANTE.
Voir aussi DIAGONALE.

Le problème de Didon Selon la légende, en l'an 800 avant notre ère, la princesse Didon de Tyr a fui sa terre natale phénicienne pour se libérer de la tyrannie de son frère roi meurtrier. Elle a traversé la Méditerranée et a cherché à acheter des terres pour une nouvelle ville sur les rives de l'Afrique du Nord. Confrontée uniquement aux préjugés et à la méfiance des habitants locaux, elle reçut la permission d'acheter uniquement la quantité de terrain pouvant être entourée d'une peau de taureau. Le défi d'accepter ces conditions tout en enfermant suffisamment de terres pour fonder une ville est devenu le problème de Didon.

Le poète romain Virgile (70-19 avant notre ère), dans son œuvre épique Énéide, fait référence à la légende de Didon et à sa solution intelligente au problème. Il prétend que Dido a coupé la peau en très fines lanières et les a assemblées pour former un très long brin, qu'elle a ensuite utilisé pour enfermer une proportion de terrain de surface maximale, comme indiqué par la forme d'un cercle. (Plus précisément, avec le littoral comme partie de la frontière, Dido formait un demi-cercle avec des bandes de peau de taureau.) La portion de terrain qu'elle a par conséquent achetée pour un prix minime était en effet assez grande pour construire une ville. Selon Virgile, cette histoire représente la fondation de la ville de Carthage, qui est aujourd'hui une banlieue résidentielle de la ville de Tunis.

Dans cette histoire, la princesse Dido a résolu le célèbre PROBLÈME ISOPERIMETRIQUE :

De toutes les figures du plan d'un périmètre donné, laquelle contient la plus grande surface ?

L'analyse mathématique de ce problème est difficile. Ce n'est qu'à la fin du XIXe siècle que les mathématiciens ont finalement pu prouver que la solution présentée dans ce conte ancien, à savoir le cercle, est la forme correcte.
Voir aussi PROBLEME ISOPERIMETRIQUE.

différence En ARITHMÉTIQUE, le résultat de la soustraction d'une quantité à une autre est appelé la différence des deux quantités. Par exemple, la différence entre 105 et 83 est 22. Le signe moins est utilisé pour indiquer les différences.
Par exemple, on écrit : 105 – 83 = 22. La différence

Machine Translated by Google

de deux quantités peut être négatif. Nous avons, pour exemple, 5 – 7 = –2. Le signe moins a été utilisé pour la première fois dans un texte imprimé en 1489 par un mathématicien allemand Johannes Widman (1462-1498).

La différence absolue de deux quantités a et b est la VALEUR ABSOLUE de la différence des deux grandeurs : |a – b|. La différence absolue de 13 et 8, pour exemple, est 5, tout comme la différence absolue entre 8 et 13. Certains auteurs utilisent le symbole ~ pour désigner une différence absolue : 8 ~ 13 = 5.

En THEORIE DES ENSEMBLES, la différence de deux ensembles A et B (également appelé complément relatif de B dans A) est l'ensemble d'éléments qui appartiennent à A mais pas à B. Cette différence est notée A\B ou A – B. Par exemple, A = {1,2,3,6,8,} et B = {2,4,5,6}, le A\B = {1,3,8}. Aussi, B\A = {4,5}.

La différence symétrique de deux ensembles A et B, noté AB, A+B ou AΘB, est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à l'un des deux ensembles, mais pas aux deux A et B. C'est la réunion des différences A\B et B\A. C'est aussi la différence de l'union de A et B et leur intersection :

$$AB = (A\backslash B) \quad (B\backslash A)$$
$$= (A \quad B) - (A \cap B)$$

Pour l'exemple ci-dessus, nous avons : AB = {1,3,4,5,8}.

Voir aussi DIFFÉRENCES FINIES.

différence de deux cubes L'équation $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ s'appelle la différence de deux cubes formule. On peut vérifier qu'il est valide en EXPANDING SUPPORTS. Comme la somme de deux cubes peut aussi s'écrire comme une différence, $x^3 + a^3 = x^3 - (-a)^3$, nous avons un com équation du panion $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$.

Les formules de DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS et de différence de deux cubes se généralisent pour les exposants supérieur à 3. Nous avons :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

pour n ≥ 2. Cela montre que la quantité x – a est toujours a facteur de $x^n - a^n$. Cette observation est utile pour le facteur chiffres. Par exemple, on voit que 651 – 1 est divisible par 6 – 1 = 5. Puisqu'on peut aussi écrire 651 – 1 = $(63)^{17} - 1^{17}$, on a que 63 – 1 = 215 est aussi un facteur de 651 – 1.

Si n est impair, alors il existe une formule associée :

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

Cela montre, par exemple, que 212 + 1 (ce qui équivaut à $(2^4)^3 + 1^3$) est divisible par 17.

Voir aussi MERSENNE PRIME.

différence de deux carrés L'équation $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$ s'appelle la différence de deux carrés formule. On peut vérifier qu'il est valide en EXPANDING SUPPORTS. Elle peut aussi être vérifiée géométriquement : placez un petit carré de côté a dans un coin d'un plus grand carré de côté x. La zone entre les deux carrés est $x^2 - a^2$. Mais cette région en forme de L peut être divisé en deux rectangles : un de longueur x et de largeur (x – a) et une seconde de longueur a et largeur (x – a). Ceux-ci s'empilent pour former un seul (x - a) × (x + a) rectangle. Il doit donc être vrai que $x^2 - a^2$ équivaut à (x – a)(x + a).

Le conjugué d'une somme x + a est le correspondant différence x - a, et le conjugué d'une différence x - a est la somme correspondante x + a. Multiplier une quantité algébrique ou numérique par son conjugué et invoquer la formule de la différence de deux carrés peut souvent simplifier une expression. Par exemple, si nous multiplions le 1 quantité $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ par « un », on obtient :

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$

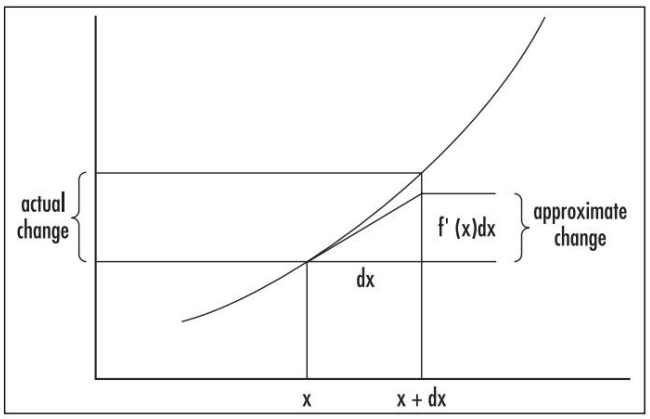
(Nous avons « rationalisé » le dénominateur.)

Une somme de deux carrés, $x^2 + a^2$, peut être considéré comme un différence si l'on est prêt à travailler avec des nombres complexes. Nous avons : $x^2 + a^2 = x^2 - (ia)^2 = (x - ia)(x + ia)$.

Voir aussi DIFFÉRENCE DE DEUX CUBES ; RATIONALISER ING LE DÉNOMINATEUR.

différentielle Près de tout point x, le graphe d'une fonction différenciable y = f(x) est bien approché par un

Machine Translated by Google



Le différentiel

petit segment de droite tangent au graphe en x.
La pente de cette tangente est la DÉRIVÉE f′(x).
En utilisant le symbole dx pour représenter un petit changement dans la variable x, nous voyons que le changement correspondant dans la variable y est approximativement dy = f′(x)dx. Les quantités dx et dy sont appelées différentielles.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) a fondé son développement de la théorie de CALCULUS sur l'idée dy d'une différentielle. On utilise aujourd'hui la notation pour la dérivée — dx (x), délibérément suggestive des idées de Leibniz.

Voir aussi HISTOIRE DE CALCULUS (essai); NUMÉRIQUE DIFFÉRENCIATION.

calcul différentiel Cette branche de CALCULUS traite des notions de PENTE, de taux de variation et de ratios de variation. Par exemple, une étude de la VITESSE, qui peut être décrite comme le taux de changement de position, relève de l'étude du calcul différentiel, tout comme d'autres concepts qui surviennent dans l'étude du mouvement.

Si une quantité y est une FONCTION d'une autre quantité x, disons y = f(x) , alors chaque changement dans la variable x, x → x + h, produit un changement correspondant dans la variable y : f(x) → f(x + h). Le rapport des changements de f(x + h) – f(x) les deux variables est : ———h — . Graphiquement, ce représente la pente (la "montée" sur la "course") du segment de droite reliant les deux points (x,f(x)) et (x+h,f(x+h)) sur le graphique de la courbe y = f(x).

La pente de ce segment de droite, pour un changement fixe h de la variable x, dépend de la forme de la courbe et changera généralement d'un point à l'autre. Un très une courbe raide donnera une forte élévation pour une course fixe, par exemple, tandis qu'une courbe qui monte lentement donnera une faible valeur de pente. Dans tous les cas, si la valeur h est très petite, alors la pente du segment de ligne décrit ci-dessus se rapproche de la pente de la ligne TANGENTE à la courbe à la position x. Plus la valeur de h est petite, meilleure est l'approximation.

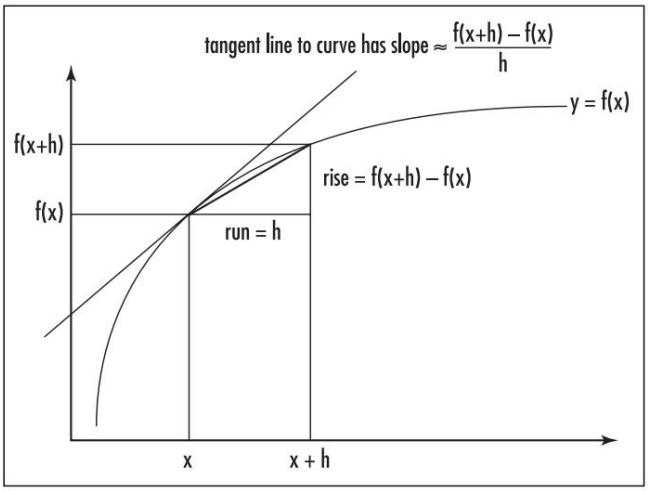
Dans un autre cadre, si y = f(t) représente la position d'une voiture le long d'une autoroute à l'instant t, alors, sur h secondes de trajet, l'automobile change de position d'une quantité + h) – f(t), et le rapport représente f(t + h) – f(t) f(t ———h — le taux moyen de changement de position, ou la vitesse moyenne, de la voiture sur h secondes de voyage. Si la valeur h est petite, alors cette quantité se rapproche de la vitesse réelle de la voiture au temps t telle que lue par le compteur de vitesse. Plus la valeur de h est petite, meilleure est l'approximation. f(x + h) – f(x) ———h — quotient » pour

Le rapport honorer le travail de SIR s'appelle un "Newton

ISAAC NEWTON (1642–1727) dans la découverte et le développement du calcul, et la LIMITE,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

s'il existe, s'appelle la dérivée de la fonction f(x). Il représente la pente du (ligne tangente au) graphique y = f(x) à la position x, ou, alternativement, le taux de variation instantané de la variable y = f(x) à la position/instant x.



Calcul de la dérivée

Machine Translated by Google

La dérivée d'une fonction y = f(x) à la position x est $\frac{df}{dx}$ noté soit $\frac{dy}{dx}$ ou y' (ou, pour faire le point à $\left.\frac{df}{dx}\right|_x$ dont la dérivée est calculée explicitement, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_x$ ou $f'(x)$). La dérivée s'écrit aussi f′(x), qui est lu comme "f premier de x".

Par exemple, la dérivée de la fonction $y = f(x) = x^2$ à la position x = 7 est donnée par :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=7} = \lim_{h\to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(7+h)^2 - 7^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{49 + 14h + h^2 - 49}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{14h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 14 + h$$

$$= 14$$

C'est-à-dire la pente de la tangente à la courbe $y = x^2$ en x=7 vaut 14. En général, la dérivée de $f(x) = x^2$ en un point arbitraire x est donnée par : $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$. Une considération quantité suffisante d'algèbre est généralement nécessaire pour calculer ces limites. Le but est d'annuler h au dénominateur pour éviter la division par zéro.

Le processus de recherche de la dérivée d'une fonction est appelée différenciation. Une fonction y = f(x) est dite différentiable en un point x si la dérivée de la fonction f′(x) existe à cette position. Une fonction est différentiable si sa dérivée peut être calculée en tout point sous considération. Toutes les fonctions ne sont pas différentiables.

Par exemple, la fonction VALEUR ABSOLUE y = |x| n'a pas de ligne tangente bien définie à son sommet à la position x = 0, et la limite $\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ fait n'existe pas. (Considérez les cas h positif et négatif séparément.) On peut montrer que toute fonction différentiable est continue, mais, comme la fonction de valeur absolue montre, une fonction continue n'a pas besoin d'être différentiable.

L'idée maîtresse du calcul différentiel est donc le calcul des dérivées des fonctions. Ce qui suit

Le tableau montre les dérivées de certaines fonctions standard. La RÈGLE DU PRODUIT, la RÈGLE DU QUOTIENT et la CHAÎNE RULE aide également au calcul des dérivées.

f (x)	f′(x)
k (constante)	0
mx+b (droite de pente m)	m
x	1
x^r	rx^{r-1}
péché x	parce que x
parce que x	–péché x
bronzer x	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
s x	sec x bronzer x
cosec x	–cosec x lit bébé x
lit bébé x	$-\text{cosec}^2 x$
e^x	e^x
ke^{kx}	ke^{kx}
a^x	a^x dans un
péché x	coche x
cosh x	sinh x
en x	$\frac{1}{x}$

En plus de traiter des questions de taux de variation, le calcul différentiel est également utilisé pour résoudre OPTIMISATION problèmes, c'est-à-dire des problèmes pour trouver le maximum ou valeurs minimales pour une fonction donnée (appelées Problèmes MAXIMUM/MINIMUM).

L'ANTIDIFFÉRENCIATION est intimement liée à CALCUL INTÉGRAL, le problème général de l'informatique aires sous courbes et volumes sous surfaces. Le LE THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL explique ceci connexion.

La dérivée d'une fonction y = f(x) au point x = x1 peut alternativement être défini comme la limite :

$$f'(x_1) = \lim_{x_2\to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Certains auteurs de manuels de mathématiques préfèrent cette définition. Bien sûr, en posant x1 = x et x2 = x + h, il est équivalent à la définition présentée ci-dessus.

Voir aussi CONCAVE HAUT/CONCAVE BAS ; DIFFERENTIAL ; ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE; DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE TIVE ; DÉRIVÉE SUPÉRIEURE ; HISTOIRE DU CALCUL (essai); DIFFÉRENCIATION IMPLICITE; EN AUGMENTANT/

Machine Translated by Google

DIMINUANT ; MAXIMUM MINIMUM; VALEUR MOYENNE THÉO REM ; DIFFÉRENCIATION NUMÉRIQUE ; DÉRIVÉE PARTIELLE; THÉORÈME DE ROLLE .

équation différentielle Toute équation qui contient une ou plusieurs dérivées est appelée une équation différentielle. Si une telle équation n'implique qu'un seul indépendant variable x et une seule variable dépendante y et sa dérivés, alors il est décrit comme "ordinaire". Par exemple, l'équation différentielle de $\frac{dy}{dx} - 4x + 3 = 0$ est un ordinaire l'équation.

Une solution d'une équation différentielle est toute fonction y = f(x) qui satisfait l'équation. Par exemple, $y = 2x^2 - 3x$ est une solution de l'équation ci-dessus. De même $2x^2 - 3x + 5$. Ces solutions ont été trouvées par is y = en écrivant $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$ et intégrant : $y = \int 4x - 3dx$ $= 2x^2 - 3x + C$. Si des valeurs particulières de x et y sont connu, disons y = 0 quand x = 1, alors une valeur pour C est déterminé, dans ce cas C = 1, donnant le particulier solution : $y = 2x^2 - 3x + 1$.

L'« ordre » d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'équation, et le "degré" de l'équation est la puissance à laquelle la dérivée d'ordre le plus élevé est élevée. Ainsi, par exemple, $\frac{d^3y}{dx^3} + xy\frac{dy}{dx} = 0$ x^6y^2 est une différentielle du troisième ordre équation du premier degré, et $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 = y^3$ est une équation du troisième ordre de degré 2.

Une équation impliquant plus d'un indépendant variable et les DÉRIVÉES PARTIELLES par rapport à celles variables est appelée une équation aux dérivées partielles. Pour exemple, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = xyz^2$ est du second ordre équation aux dérivées partielles de degré 3.

Les équations différentielles apparaissent dans pratiquement tous les branche de la science, de l'économie et de l'ingénierie. N'importe quel théorie qui tente de décrire les relations entre les taux de variation de quantités variant continuellement conduit à une équation différentielle. Par exemple, un modèle de croissance démographique décrit le taux de variation de la taille de la population P proportionnelle à la taille $\frac{dP}{dt} = kP$ de la population. Cela conduit à l'équation , où k est une constante. (Voir MODÈLES DE POPULATION.)

Trouver des solutions aux équations différentielles est une partie essentielle de la recherche scientifique.

Il existe plusieurs techniques standard pour résoudre certains types d'équations différentielles. Tous impliquent de réarranger les termes ou de transformer l'équation sous une forme facilement intégrable. Nous décrivons une sélection de quelques techniques de base.

Équations directement intégrables : une équation du premier ordre de la forme:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

est directement intégrable et a une solution donnée par y = $\int f(x)dx$. De même, une équation du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

peut être résolu en intégrant deux fois.

Séparation des variables : Une équation du premier ordre de la former:

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

où f est une fonction de y uniquement et g est une fonction de x seulement, peut être résolu en intégrant les deux côtés de la équation par rapport à x. Cela donne :

$$\int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx$$

La méthode d' INTEGRATION PAR SUBSTITUTION montre que l'intégrale à gauche peut être interprétée simplement comme une intégrale par rapport à la variable y, et donc nous sommes permis d'écrire :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Nous pouvons maintenant évaluer ces intégrales et résoudre pour y.

Par exemple, pour résoudre $\frac{dy}{dx} = y^2$ écrire, avec un abus de notation, $\frac{1}{y^2}dy = dx$ L'intégration donne $\int \frac{1}{y^2}dy = \int 1dx$, donnant, $-\frac{1}{y} = x + C$, ou $y = \frac{1}{C - x}$.

Machine Translated by Google

Équations homogènes : Une équation du premier ordre de la former:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

peut être résolu en substituant y = vx. Cela réduit la équation à un en v et x seuls. La séparation des variables fonctionnera désormais.

Par exemple, pour résoudre $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2+2}{x^2}$, qui peut etre ecrit $\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, poser y = vx pour obtenir : $\frac{dv}{dx} = v^2 + 1$. La séparation des variables s'applique désormais.

Équations linéaires : une équation du premier ordre de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

peut être résolu en multipliant par l'intégration facteur $e^{\int f(x)dx}$. Cela donne l'équation :

$$e^{\int f(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int f(x)dx} f(x)y = e^{\int f(x)dx} g(x)$$

qui peut être réécrit :

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int f(x)dx} y\right) = e^{\int f(x)dx} g(x)$$

Celle-ci est directement intégrable.

Par exemple, l'équation $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2$ a inte facteur de réseau $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$, et donc l'équation peut être réécrit $\frac{d}{dx}(xy) = x^3$, donnant $xy = \frac{1}{4}x^4 + C$, ou $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}$.

Équations de base du second ordre : Une équation du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

peut être résolu en multipliant par $2\frac{dy}{dx}$ pour obtenir:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 2f(y)\frac{dy}{dx}$$

L'intégration donne :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)\,dy + C$$

Après avoir pris les racines carrées, on peut maintenant séparer variables.

Il arrive souvent qu'aucune technique connue ne résoudre une équation différentielle particulière qui apparaît dans un étude scientifique particulière. Dans ce cas, les mathématiciens supposera souvent que la fonction solution y = f(x) peut s'écrire sous la forme d'une SÉRIE DE TAYLOR : $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ En substituant la série dans les différents tiale, il est généralement possible de calculer les valeurs d'au moins les premiers coefficients a0 ,a1 ,a2 ,…. Ce approche est appelée la « méthode des coefficients indéterminés ». Dans ce contexte, la série de Taylor utilisée est parfois appelée une fonction de perturbation.

chiffre Un symbole qui fait partie d'un nombre est appelé un chiffre. Par exemple, le nombre 42.768 a cinq chiffres. Dix chiffres sont utilisés en notation décimale, à savoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. En notation hexadécimale (base 16), les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F. Dans le système des nombres binaires uniquement deux chiffres sont utilisés : 0 et 1. En général, un système de comptage en base b utilise b chiffres différents pour représenter numéros 0 à b – 1.

En langue vernaculaire, le mot chiffre signifie un doigt ou un orteil. Quand on apprend à compter avec ses chiffres, ce n'est pas surprenant que le mot en soit venu à être utilisé pour des nombres spécifiques que les doigts représentent. La mesure d'un chiffre, défini comme la largeur d'un doigt, environ 3/4 d'un pouce, était une unité standard du vieil anglais de LONGUEUR.

Une montre numérique affiche des symboles spécifiques (chiffres) au fur et à mesure que des unités de temps discrètes (secondes) passent, et un l'ordinateur numérique traite les informations qui lui sont fournies sous forme de chiffres. Une montre analogique, cependant, utilise l'entité de balayage d'une main en mouvement comme un journal analogique du temps qui passe, et un ordinateur analogique, maintenant généralement considéré comme obsolète, utilise une tension variable pour

Machine Translated by Google

imiter des informations d'entrée en constante évolution, telles que le débit d'huile dans un pipeline, par exemple.

Voir aussi BASE D'UN SYSTÈME NUMÉRIQUE ; ERREUR.

dièdre Toute construction géométrique formée par l'intersection de deux plans est appelée dièdre. Par exemple, la ligne d'intersection de deux plans non parallèles est appelée une ligne dièdre, et l'angle entre les deux plans est appelé un angle dièdre (ou, parfois, un dièdre). Un angle dièdre peut être calculé en prenant le produit scalaire des deux vecteurs normaux aux plans.

L'angle dièdre d'un polyèdre est l'angle entre deux faces adjacentes du solide.

Le mot dièdre vient du préfixe grec di-, qui signifie « deux », et du mot hedra, qui signifie « base », « siège » ou « surface ».

Voir aussi NORMALE A UN PLAN.

dilatation Voir TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE; LINÉAIRE TRANSFORMATION.

dimension Le nombre de coordonnées nécessaires pour spécifier la position d'un point particulier dans l'espace est appelé la dimension de cet espace. Les lignes et les courbes sont considérées comme unidimensionnelles, car l'emplacement de n'importe quel point sur une courbe peut être spécifié par un seul paramètre, à savoir la distance le long de la courbe à laquelle il se trouve.
Les points dans l'espace à deux dimensions forment une surface et les points dans l'espace à trois dimensions se trouvent dans un volume.

Une théorie physique est dite multidimensionnelle si elle décrit l'univers avec un grand nombre de paramètres.
Étant donné que les événements dans le monde se produisent à des endroits et à des moments spécifiques, quatre paramètres sont nécessaires pour les décrire : trois paramètres spatiaux x, y et z et un quatrième paramètre t pour le temps. De ce fait, le « temps » est souvent cité comme étant la quatrième dimension. Cependant, une théorie qui considère également la charge électrique q des objets, par exemple, serait décrite comme "cinq dimensions", et une autre qui considère également la force magnétique comme "six dimensions". Les physiciens ont affirmé que nous vivons dans un univers allant jusqu'à 18 dimensions. Il y a peu de sens ici, si ce n'est que les scientifiques affirment que tous les événements de l'univers peuvent être entièrement décrits à travers 18 variables différentes. Il n'y a aucune raison spécifique pour que la quatrième variable soit toujours interprétée comme « temps ».

Pour un mathématicien, un objet à n dimensions est celui qui est entièrement décrit par n paramètres. Par exemple, un cercle assis dans un espace à deux dimensions est décrit par une équation à deux variables : x 2+y 2=1. Une SPHÈRE dans l'espace tridimensionnel est décrite par une équation à trois variables : x 2+y 2+z 2=1. L'ajout de plus de variables à l'équation donne des sphères de plus grande dimension : les équations x 2+y 2+z 2+w2=1 et x 2+y 2+z 2+w2+u 2 = 1, par exemple, pourraient être dites pour décrire des « hypersphères » dans un espace à quatre et cinq dimensions. Bien qu'on ne puisse pas imaginer ce que sont ces objets, les mathématiques de ces objets sont peu différentes des mathématiques des cercles et des sphères ordinaires.

Dans un contexte géométrique, la « dimension » peut être décrite par la notion d'échelle. Si nous ÉCHELLES un objet géométrique par un facteur k, alors sa taille change en conséquence : toute ligne de longueur a devient une ligne de longueur ka, toute région plane de zone A devient une région plane de zone k 2A, et tout solide de volume V est remplacé par un solide de volume k 3V. Un objet peut donc être décrit comme d-dimensionnel si sa "taille" s'adapte selon la règle :

$$\text{nouvelle taille} = k^d \times \text{ancienne taille}$$

Dans ce contexte, il est possible qu'un objet géométrique ait une dimension fractionnaire. Un tel objet est appelé un FRACTALE.

Voir aussi HYPERCUBE.

Dioclès (vers 240-180 av. J.-C.) Géométrie grecque Né à Évvoia (Eubée), une île grecque (la date de naissance exacte n'est pas connue), on se souvient de Dioclès pour son travail sur les SECTIONS CONIQUES et sa solution innovante au problème de DUPLICATION DU CUBE via l'invention d'une nouvelle courbe appelée courbe cissoïde.

Presque rien n'est connu de la vie de Dioclès, et la connaissance de son travail (jusqu'à récemment) nous est parvenue principalement grâce à des références faites par des érudits après son époque. On sait que Dioclès était un contemporain d' APOLLONIUS DE PERGE (vers 260-190 avant notre ère) et a peut-être passé beaucoup de temps à Arcadie, le centre intellectuel de la culture grecque.

Dioclès a écrit un texte significatif, On Burning Mirrors, qui, bien que principalement ignoré par les érudits grecs, a eu une influence considérable sur les mathématiciens arabes. Une traduction de cet ouvrage n'a été

Machine Translated by Google

récemment découvert dans la bibliothèque du sanctuaire de Mashhad, en Iran, et une édition anglaise du texte a été publiée pour la première fois en 1976.

La pièce est organisée comme une collection de 16 discussions sur des résultats originaux en géométrie, principalement concernés par le sujet des SECTIONS CONIQUES. On voit que Dio cles a été le premier à prouver la propriété de réflexion d'une PARABOLE, résolvant ainsi un vieux problème présenté par ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 avant notre ère) consistant à trouver une surface de miroir qui produit de la chaleur lorsqu'elle est placée face au soleil. (On dit qu'Archimède proposa d'utiliser des miroirs incurvés pour refléter les rayons du soleil et brûler les voiles des navires ennemis.) longueur donnée avec son aide. Comme la construction de la racine cubique de 2 est la principale pierre d'achoppement dans la solution du problème de duplication du cube, le cissoïde apporte une solution à ce défi classique. Aujourd'hui, nous décrivons la cissoïde comme la courbe plane d'équation y où a est une constante. L'apparition de la puissance cubique rend possible la construction de racines cubiques.

$$y^2(2a - x) = x^3,$$

Certains historiens suggèrent que Dioclès a peut-être utilisé les termes parabole, hyperbole et ellipse pour les sections coniques avant Apollonius, le savant généralement crédité de l'invention de ces noms. Les travaux de Dioclès sur les coniques ont grandement influencé le développement du sujet. La date exacte de la mort de Dioclès n'est pas connue.

Équation diophantienne Toute équation, généralement à plusieurs inconnues, qui est étudiée et qui ne doit avoir que des solutions à valeurs entières est appelée une équation diophantienne. Par exemple, le JUG-FILLING PROBLEM nous oblige à trouver des solutions entières à 3x + 5y = 1, et la classification des TRIPLES DE PYTHAGORE cherche des solutions entières à x . Ce sont des problèmes diophantiens. $x^2 + y^2 = z^2$ LE DERNIER THÉORÈME DE FERMAT traite de l'inexistence de solutions entières au n généralisé pour les exposants de valeur supérieure. équation x Les problèmes de ce ALEXANDRIE, $x^n + y^n = z^n$ type portent le nom de DIOPHANTE D' auteur du premier livre connu consacré exclusivement à la THÉORIE DES NOMBRE.

En 1900, DAVID HILBERT défia la communauté mathématique de concevoir un ALGORITHME qui déterminerait si oui ou non une équation diophantienne donnée a des solutions. Soixante-dix ans plus tard, Yuri Matyasevic a prouvé qu'un tel algorithme ne peut exister.

Diophante d'Alexandrie (env. 200–284 CE) Théorie grecque des nombres On se souvient de Diophante comme de l'auteur Arithmetica, le premier texte connu consacré exclusivement à l'étude de la THÉORIE DES NOMBRE. Dix des 13 volumes originaux survivent aujourd'hui. En examinant quelque 130 problèmes, Diophantus a développé des méthodes générales pour trouver des solutions à certains problèmes entiers étonnamment difficiles, inspirant un domaine d'étude qui est depuis devenu connu sous le nom d' ÉQUATIONS DIOPHANTINES.

On ne sait pratiquement rien de la vie de Diophante, pas même son lieu de naissance ni la date à laquelle il a vécu. L'auteur Metrodorus (vers 500 CE), dans l' anthologie grecque , a brièvement décrit la vie de Diophante à travers un puzzle:

> Son enfance a duré un sixième de sa vie; sa barbe a poussé après un douzième de plus ; il s'est marié après un septième de plus; et son fils est né cinq ans plus tard. Le fils a vécu jusqu'à la moitié de l'âge de son père et le père est mort quatre ans après le fils.

En prenant L comme durée de vie de Diophante, on en déduit alors que la quantité :

$$\frac{L}{6} + \frac{L}{12} + \frac{L}{7} + 5 + \frac{L}{2} + 4$$

correspond à la durée totale de sa vie. En fixant cela égal à L et en résolvant, on obtient L = 84. Bien sûr, l'information fournie ici (que Diophante s'est marié à 26 ans, a vécu jusqu'à 84 ans et a eu un fils qui a survécu jusqu'à 42 ans) est probablement fictive. Le puzzle, cependant, convient au type de problème que Diophante aimait résoudre.

Dans son célèbre texte Arithmetica (Arithmétique), Dio phantus présente une série de problèmes numériques spécifiques, avec des solutions fournies, qui conduisent intelligemment le lecteur à une compréhension des méthodes générales et des solutions générales. Diophante ignorait toute solution à un problème qui était négative ou impliquait une racine carrée irrationnelle. Il n'autorisait généralement que des solutions rationnelles positives. Aujourd'hui, allant plus loin, les mathématiciens appellent tout problème ne nécessitant que des solutions entières une équation Diophantine.

Certains des problèmes envisagés par Diophante sont étonnamment difficiles. Par exemple, dans le livre IV d' Arith metica , Diophantus demande aux lecteurs d'écrire le nombre 10 comme une somme de trois carrés chacun supérieur à trois. Il apporte la réponse :

Machine Translated by Google

$$\text{dix} = \frac{1321}{711} \quad \frac{22\ 2\ 1285\ 1288}{711} \quad \frac{}{711}$$

Bien que Diophante n'ait pas utilisé de notation algébrique sophistiquée, il a été le premier à utiliser un symbole pour une quantité inconnue et à introduire une notation pour les puissances de cette inconnue. Il a également utilisé une abréviation pour le mot égal. Ceci représente le premier pas dans l'histoire vers le passage de l'algèbre verbale à l'algèbre symbolique.

Le texte de Diophante a été profondément influent et, des siècles plus tard, a été considéré comme une lecture essentielle pour les érudits européens de la Renaissance. Inspiré par un exercice du texte, le savant PIERRE DE FERMAT (1601-1665) a griffonné le célèbre commentaire dans la marge de son exemplaire personnel d' Arithmetica qui a stimulé trois siècles d'intenses recherches mathématiques en théorie des nombres. Ce commentaire est devenu connu sous le nom de DERNIER THÉORÈME DE FERMAT .

cosinus de direction Chaque point P sur la surface d'une sphère unité détermine une direction unique dans l'espace tridimensionnel : si O est le centre de la sphère, alors le rayon reliant O à P spécifie une direction. Inversement, la direction d'une ligne donnée dans l'espace correspond à un point P sur la sphère unité.

En définissant O comme l'origine d'un système de COORDONNÉES CARTÉSIENNES , les "cosinus directeurs" de toute ligne dirigée dans un espace tridimensionnel sont simplement les coordonnées du point P sur la sphère unitaire qui correspond à la direction de cette ligne. Par exemple, le cosinus directeur de l' axe x positif est (1,0,0) et celui de l' axe z négatif est (0,0,–1).

L'emploi du mot cosinus dans le nom de ce concept vient de l'observation que la direction d'une droite passant par O est complètement spécifiée par les trois angles α, β et γ qu'elle fait avec chacun des positifs x-, y- , et les axes z, respectivement. (Ces angles sont supposés compris entre zéro et 180°. On les appelle les angles directeurs.) Un exercice de géométrie montre alors que le point P correspondant sur la sphère unité a des coordonnées (cosα, cos β, cos γ).

Les trois cosinus directeurs ne sont pas indépendants. Deux applications du THÉORÈME DE PYTHAGORE montrent que ces nombres satisfont la relation : cos2 α + cos2 β + cos2 γ = 1. Ainsi, deux cosinus directeurs quelconques déterminent le troisième.

Les cosinus directeurs d'une ligne arbitraire sont souvent notés (l,m,n). Les "rapports de direction" ou "nombres de direction" d'une ligne sont définis comme n'importe quel ensemble de trois nombres dans le rapport l : m : n. L'angle θ entre deux droites de directions cosinus (l1 ,m1 ,n1) et (l2 ,m2 ,n2) est donné par :

$$\cos\theta = l1\ l2 + m1m2 + n1n2$$

C'est simplement le PRODUIT POINTU des deux VECTEURS qui décrivent les directions des lignes.

dérivée directionnelle Le graphe d'une fonction z = f(x,y) est une surface située dans un espace tridimensionnel.
La dérivée directionnelle de f en un point P = (x,y) et dans la direction donnée par un VECTEUR v = < v1 , v2 >, notée Dv f, est simplement la PENTE de la surface au-dessus du point P dans la direction de v. On suppose que v est un vecteur de longueur 1.

Plus précisément, si t est une variable, mieux considérée comme "temps", alors l'expression P + tv représente un chemin en ligne droite commençant à P pointant dans la direction de v, et f(P + tv) est la "tranche" de la surface au-dessus de cette ligne. La dérivée directionnelle est alors la DÉRIVÉE de cette quantité par rapport à t :

$$D_{\vec{v}} f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(P + tv) = \lim_{h \to} \frac{f(x + hv_1, y + hv_2) - f(x, y)}{h}$$

(Nous exigeons que v soit un vecteur de longueur unitaire pour que la "vitesse" à laquelle nous traversons le chemin P + tv soit de 1 unité de longueur par unité de temps.)

Si nous prenons v comme vecteur unitaire dans la direction de l' axe des x positif, v = (1,0), alors $D_{\vec{v}} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}$, la DÉRIVÉE PARTIELLE de la fonction h par rapport à x. De même, la dérivée directionnelle dans la direction de l' axe y positif est la dérivée partielle par rapport à y. En général, la CHAIN RULE indique :

$$D_{\vec{v}} f = \left.\frac{\partial}{\partial t} F(P + tv)\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial F}{\partial y} v_2$$

Machine Translated by Google

qui peut être réécrit comme le produit scalaire de deux vecteurs :

$$Dv\, f = f \cdot v$$

où $f = \left\langle \frac{\partial}{f\,x}, \frac{\partial_f}{\partial_y} \right\rangle$ est le GRADIENT de f. Ce professionnel ∂ fournit la méthode la plus simple pour calculer la dérivée directionnelle d'une fonction.

Notez que $f \cdot v = |f| \cdot |v| \cos(\theta)$, où θ est l'angle entre les deux vecteurs. Puisque la fonction cosinus a une valeur maximale pour θ = 0°, cela montre que la direction v de la pente la plus raide pour un graphique en un point P se produit dans la direction v = f. Cela prouve:

> Le vecteur f pointe dans la direction dans laquelle f augmente le plus rapidement.

De même, la fonction cosinus a une valeur minimale pour θ = 180°, ce qui montre que la baisse la plus abrupte se produit précisément dans la direction opposée :

> Le vecteur –f pointe dans la direction dans laquelle f décroît le plus rapidement.

Ces idées s'étendent aux fonctions de plus de deux variables.

preuve directe La plupart des affirmations faites en mathématiques sont des déclarations de la forme :

> Si la prémisse A est vraie, alors la conclusion B est vraie.

Une preuve directe d'une telle affirmation tente d'établir la validité de l'affirmation en supposant que la prémisse A est vraie et en montrant que la conclusion B découle d'une série d'inférences logiques basées sur A et d'autres faits connus préalablement établis. Typiquement, une preuve directe a la forme :

1. Supposons que A est vrai.
2. Montrer que A implique B.
3. Conclure que B est vrai.

La partie principale de la preuve est la démonstration que A implique B.

Comme exemple simple, nous prouvons : si un nombre naturel n est pair, alors n^2 est un multiple de 4. Nous baserons son preuve sur le fait connu que tout nombre pair est un multiple de deux (ainsi que les manipulations algébriques standards).

> Preuve : Supposons que n est pair.
> Alors n peut être écrit sous la forme n = 2k, pour un certain nombre
> Par conséquent, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, et est donc un multiple de quatre.
> Ceci achève la preuve.

Une PREUVE INDIRECTE ou une PREUVE PAR CONTRADICTION tente d'établir que la conclusion B doit être vraie en montrant qu'elle ne peut pas être fausse.

Voir aussi RAISONNEMENT DEDUCTIF/INDUCTIF ; CONTRE TRAPOSITIF ; LOIS DE LA PENSÉE ; PREUVE; CQFD ; THÉORÈME.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805–1859) Allemand Analyse, Théorie des nombres Né le 13 février 1805, près de Liège, aujourd'hui en Belgique (bien qu'il se considérait comme allemand), le savant Lejeune Dirichlet est connu pour ses importantes contributions dans le domaine de la THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES et à l'étude des SÉRIES DE FOURIER. En particulier, il est réputé pour prouver que toute SÉQUENCE ARITHMÉTIQUE a, a+d, a+2d, a+3d, … doit contenir un nombre infini de nombres premiers, à condition que le nombre de départ a et la différence d soient RELA TIVEMENT PREMIERS. (Cela montre, par exemple, qu'il existe une infinité de nombres premiers supérieurs de 7 à un multiple de 13.) Dirichlet a été le premier à fournir la définition moderne d'une FONCTION que nous utilisons aujourd'hui et, dans l'étude des séries trigonométriques, a été le premier à fournir des conditions garantissant la convergence d'une série de Fourier donnée. Pour cette raison, malgré les travaux de JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830), Dirichlet est souvent cité comme le fondateur de la théorie des séries de Fourier.

Dirichlet est diplômé du gymnase (lycée) de Bonn à l'âge de 16 ans et est allé à Paris pour étudier les mathématiques. Il n'y a jamais terminé officiellement un programme universitaire et n'a donc jamais obtenu de diplôme universitaire. En 1825, à l'âge de 20 ans, Dirichlet a acquis une renommée instantanée en tant que mathématicien digne en publiant une preuve qu'il ne peut y avoir de solutions entières positives à l'équation du cinquième degré $x^5 + y^5 = z^5$. Ceci est un cas particulier du DERNIER THÉORÈME DE FERMAT , et Dirichlet travaillons a représenté la première étape significative

Machine Translated by Google

vers la résolution du problème général depuis l'époque de PIERRE DE FERMAT (1601-1665), qui avait établi que il n'y a pas de solutions à l'équation du quatrième degré, et LEONHARD EULER (1707-1783), qui avait prouvé que il n'y a pas de solutions à l'équation du troisième degré. Dirichlet a ensuite pu étendre son travail à l'équation du degré 14, mais à aucun autre cas.

En l'honneur de son exploit, Dirichlet a été a reçu un doctorat honorifique de l'Université de Cologne, et avec un diplôme supérieur en poche, Dirich a ensuite poursuivi une carrière universitaire. Il a été nommé professeur de l'Université de Berlin en 1828, où il est resté 27 ans. En 1855, Dirichlet succède CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) titulaire de la chaire de mathématiques à l'université de Göttingen.

Dirichlet a développé des techniques innovantes utilisant le notion de LIMITE dans l'étude de la THÉORIE DES NOMBRE lui a permis de faire des avancées significatives dans le domaine. Il a présenté son fameux résultat sur ARITHMETIC SÉQUENCES à l'Académie des Sciences le 27 juillet 1837, et a publié le travail dans l'article en deux parties « Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres » (Enquête sur diverses applications de l'analyse infinitésimale au nombre théorie) durant les 2 années qui ont suivi. Dirichlet aussi trouve des applications de ces travaux à la mécanique, à la solution d' ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, et à l'étude de la série de Fourier. Il a régulièrement publié des articles sur la théorie des nombres et la physique mathématique tout au long de sa carrière. Ses œuvres les plus remarquables comprennent le livre de 1863 Vorlesungen über Zahlentheorie (Conférences sur la théorie des nombres), l'article de 1846 « Über die Stabilität des Gleichgewichts » (Sur la stabilité du système solaire), et l'article de 1857 "Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik » (enquête sur un problème d'hydrodynamique).

Dirichlet est décédé le 5 mai 1859 à Göttingen, en Allemagne. Étant donné l'importance de son travail mathématique, de nombreux mathématiciens d'aujourd'hui considèrent Dirichlet comme le fondateur de la théorie analytique des nombres.

discontinuité Voir FONCTION CONTINUE.

discret Un ensemble de valeurs numériques dans lesquelles il y a aucune valeur intermédiaire n'est dite discrète. Par exemple, l'ensemble des INTEGER est discret, mais l'ensemble de tous REAL NUMBERS n'est pas : entre deux nombres réels, aussi proche soit-il, il existe un autre nombre réel. N'importe quel ensemble fini de valeurs est considéré comme discret.

Puisqu'un ensemble COMPTABLE de valeurs peut être mis en correspondance un à un avec les nombres entiers, un dénombrable ensemble est généralement considéré comme discret. Cela peut prêter à confusion, car l'ensemble dénombrable de RATIONAL NOMBRE, par exemple, est discret dans ce second sens, mais pas dans le premier : entre deux nombres rationnels quelconques p et q se trouve un autre rationnel (il $\frac{p+q}{2}$, par exemple). Un faut s'appuyer sur le contexte du problème à l'étude pour déterminer si l'ensemble des nombres rationnels doit être considéré comme discret.

Dans la théorie des STATISTIQUES et des PROBABILITÉS , un ensemble de DONNÉES ou un ensemble d' ÉVÉNEMENTS est dit discret si la population sous-jacente est finie ou dénombrable infinie. Les résultats de lancer un dé, par exemple, forment un ensemble discret d'événements, puisque le dé doit atterrir sur l'une des six faces. En revanche, par exemple la gamme de tailles des femmes australiennes 36 ans n'est pas discret mais continu.

En GEOMETRIE, une ISOMETRIE avec la propriété que chaque point est déplacé plus loin qu'une certaine distance positive fixe plus loin est appelée une transformation discrète. Par exemple, une translation est discrète, mais une rotation ou la réflexion ne l'est pas.

La géométrie discrète est l'étude d'un ensemble fini de points, lignes, cercles ou autres figures simples.

discriminant Une équation QUADRATIQUE de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ a des solutions données par la quadratique formule:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La quantité sous le signe de la racine carrée, $b^2 - 4ac$, est appelé le discriminant de l'équation. Si le discriminant d'un quadratique est positif, alors l'équation a deux racines réelles distinctes. Par exemple, l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a le discriminant 3 et les deux solutions réelles $x = 2$ et $x = 1/2$. Si le discriminant d'un quadratique est nul, alors l'équation n'a qu'une racine réelle. Par exemple, $x^2 - 6x + 9 = 0$, avec zéro discriminant, n'a que $x = 3$ comme une racine. (C'est une RACINE DOUBLE.) Si le discriminant est négatif, alors le quadratique n'a pas de solutions réelles. Cela fait, cependant, ont des solutions complexes (distinctes). Par exemple,

Machine Translated by Google

^{2x} – + x + 1 = 0, avec discriminant –3, a des solutions

$x = \frac{je - +1\sqrt{3}}{2}$ et $x = \frac{je - -1\sqrt{3}}{2}$.

Plus généralement, le discriminant de toute équation POLYNO MALE est défini comme étant le produit des différences au carré de toutes les paires possibles de racines de l'équation. Par exemple, si une ÉQUATION CUBIQUE a trois et r3 (éventuellement répétés), est le produit : alors les racines dis r1 , r2 , criminant de cubique

$$(r1 – r2)^2(r2 – r3)^2(r3 – r1)^2$$

Il est possible de trouver une formule pour le discriminant en fonction des coefficients apparaissant dans l'équation. Pour le cas d'un quadratique, il s'avère être précisément la quantité b 2 – 4ac décrite ci-dessus.

disjonction (instruction « ou ») Une instruction composée de la forme « p ou q » est connue sous le nom de disjonction. Par exemple, « J'ai visité Sydney ou Melbourne » est un exemple de disjonction.

Les disjonctions peuvent être interprétées de deux manières. Si une disjonction "p ou q" est lue comme

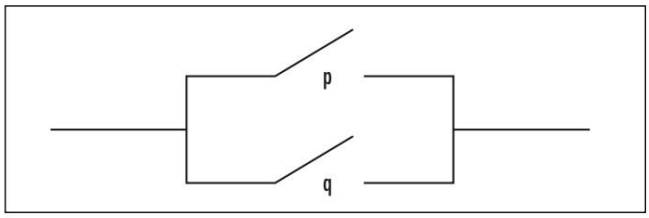
p ou q, mais pas les deux

(« Je n'ai visité qu'une seule des deux villes »), alors elle est dite « exclusive », et la disjonction est appelée un « ou exclusif » (parfois noté XOR). Interprété comme

p ou q, ou éventuellement les deux

("J'ai visité au moins une des villes"), alors la disjonction est dite "inclusive" et s'appelle une "inclusive ou." En LOGIQUE FORMELLE (et dans la plupart des mathématiques), les disjonctions sont toujours utilisées au sens inclusif. Il est noté en symboles par p q et a le suivant TABLE DE VÉRITÉ:

p	q	p q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F



Circuit de disjonction

Une disjonction peut être modélisée via un circuit parallèle. Si T désigne le flux de courant, alors le courant se déplace dans le circuit dans son ensemble précisément lorsque l'un ou les deux commutateurs p et q admettent le flux de courant.

Voir aussi CONJONCTION.

déplacement La distance parcourue par un objet en mouvement est parfois appelée son déplacement. Les physiciens utilisent souvent le symbole s pour désigner le déplacement. Le taux de changement de déplacement est appelé VITESSE.

Voir aussi CALCUL DIFFÉRENTIEL.

formule de distance La distance d entre deux points donnés P1 = (x1 ,y1) et P2 = (x2 ,y2) dans le plan est la longueur du segment de droite qui relie P1 à P2 . Si l'on considère ce segment de droite comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle avec une jambe horizontale, c'est-à-dire parallèle à l' axe des x, et une jambe verticale, parallèle à l' axe des y, alors le THÉORÈME DE PYTHAGORE peut être utilisé pour trouver une formule pour d. La longueur de la branche horizontale est la différence des coordonnées x x2 – x1 ou x1 – x2 , selon la valeur positive, et la longueur de la branche verticale est la différence des coordonnées y, y2 – y1 ou y1 – y2 .

Ainsi, d'après le résultat de Pythagore, nous avons :

$$j\,x\bar{x}\,a\sqrt{a - 2 - (\,)(1)^2 \quad 2\,1 \quad 2}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de distance bidimensionnelle. Par exemple, la distance entre les points (–3,5) $\sqrt{(2 – (–3))2 + (1 –}$ que, comme $5)2\ \sqrt{5\ 2+\ (–4)2}$ et (2,1) est Remarquez $= \sqrt{41}$. on pouvait s'y attendre, la formule de distance est symétrique en ce sens que la distance entre P1 et P2 est la même que la distance entre P2 et P1 .

L'ensemble de tous les points (x,y) dans le plan à une distance fixe r d'un point donné C = (a,b) forme un CERCLE de rayon

Machine Translated by Google

r et centre C. La formule de distance donne l'équation a) d'un cercle tel que $\sqrt{(x -)^2 + (y - b)^2}$, ou $(x - a)^2 + r = (y - b)^2 = r$.

Dans l'espace tridimensionnel, la distance d entre deux points P1 = (x1 ,y1 ,z1) et P2=(x2 ,y2 ,z2) est trouvée via deux applications du théorème de Pythagore. Par exemple, la distance entre les points O = (0,0,0) et A = (a,b,c) est trouvée en notant d'abord que P = (a,b,0) est le point directement au-dessous de A situé dans le plan xy, et que le triangle OPA est un triangle rectangle. Par la formule de distance bidimensionnelle, la distance entre O $\sqrt{(a - 0)2 + (b - 0)2}$ = et P $\sqrt{a 2 + b 2}$. La longueur de la droite verticale reliant P à A est c, et la longueur de l'hypoténuse OA est la distance d recherchée. Par le Pythagore = ( )2 + c théorème de $^2 2 = un + b 2 2 + c$. 2 + b 2 nous a $\sqrt{2 + c}$.

avons : d 2 √a 2 Donc : d = + b 2 Une légère modification de cet argument montre que la formule générale de distance tridimensionnelle pour la distance entre deux points P1 = (x1 ,y1 ,z1) et P2 = (x2 ,y2 ,z2) est :

$$ré = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2}$$

L'ensemble de tous les points (x,y,z) dans l'espace à une distance fixe r d'un point donné C = (a,b,c) forme une SPHÈRE de rayon r et de centre C. La formule de distance donne l'équation d'un tel sphère comme $^2 = y(x b)a)^2 + (z - c)^2 2 = r$.

La formule de distance se généralise aux points dans un espace à n dimensions comme la racine carrée de la somme des différences des n coordonnées au carré. Cela fonctionne même pour un espace unidimensionnel : la distance entre – x1) points x1 et x2 sur la droite numérique est deux $\sqrt{(x2^2}$. d = C'est précisément la VALEUR ABSOLUE |x2 – x1 |.

La LONGUEUR d'un VECTEUR v = < a,b,c > est donnée par la formule de distance : Si nous plaçons le vecteur à l'emplacement O = (0,0,0) de sorte que sa pointe se trouve à A = (a,b, c), alors sa longueur √a 2 est |v| = + b $2^{2 + c}$.

Distance d'un point à un plan dans un espace tridimensionnel La distance d'un point P à un plan est définie comme étant la distance entre P et le point N dans le plan le plus proche de P. Supposons que le point P a pour coordonnées P = (x0 ,y0 ,z0) et l' ÉQUATION VECTORIELLE D'UN PLAN est ax + by + cz + d = 0 où n = < a,b,c > est la normale au plan. Alors N est le point (x1 ,y1 ,z1) dans le plan avec le vecteur NP à 90° du plan., Cela signifie que le vecteur NP est est parallèle à n, et donc NP = kn pour une constante k. Ce donne l'équation <x0 – x1 ,y0 – y1 ,z0 – z1> = k <a,b,c>, et donc x1 = x0 – ka,y1 = y0 – kb, et z1 = z0 – kc. Puisque N = (x1 ,y1 ,z1) est dans le plan, ce point satisfait aussi l'équation du plan. Manipulation algébrique puis hache par cz d . Par la distance

montre que $k = \frac{0\ 0\ 0\ 2\ 2\ 2\ abc}{+\ +\ +\ \text{formule,}}$ la distance

P et N est :

$$\sqrt{(z\ 0\ 1\ aa\ 0\ 1)\ 2\ 2\ xx - + - + -} \quad 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 + \sqrt{ka\ kb\ kc} +$$

$$= |\ ka|\ \sqrt{avant\ JC\ 2\ 2\ 2 + +}$$

$$= \frac{|\ \text{hache par cz}\ |}{\sqrt{2\ 2\ 2\ abc + +}}$$

Celle-ci établit :

> La distance d'un point P = (x0 ,y0 ,z0) au plan ax + by + cz + d = 0 est donnée par la formule :

$$\frac{|\ \text{hache par cz d}\ |}{\sqrt{abc\ 2\ 2\ 2 + +}}$$

Distance d'un point à une ligne dans un espace à deux dimensions La distance d'un point P à une ligne est définie comme étant la distance entre P et le point N de la ligne la plus proche de P. L' ÉQUATION D'UNE LIGNE est une formule de la forme ax + by + c = 0. Un argument analogue à celui présenté ci-dessus établit :

> La distance d'un point P = (x0 ,y0) à la droite ax + by + c = 0 est donnée par la formule :

$$\frac{|\ \text{hache par c}\ |}{\sqrt{un\ B^2}}$$

> Voir aussi NOMBRES COMPLEXES.

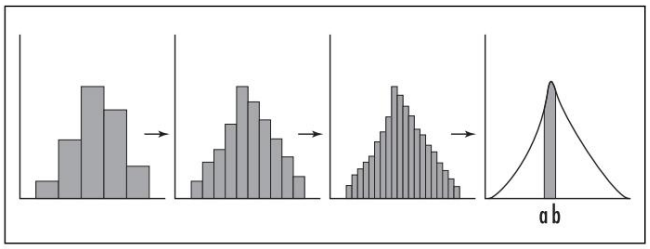
distribution Tout tableau ou diagramme illustrant la fréquence (nombre) de mesures ou de comptes d'une expérience ou d'une étude qui entrent dans certaines catégories prédéfinies est appelé une distribution. (Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.) Par exemple, la taille de 1 000 enfants de 8 ans participant à une étude médicale peut être

Machine Translated by Google

enregistré via un histogramme. Les catégories considérées sont des intervalles de plages de hauteur choisis de manière pratique, tels que 36,1 à 40,0 pouces, 40,1 à 44,0 pouces, etc., par exemple.

Si les DONNÉES recueillies sont numériques et peuvent adopter un tableau continu de valeurs, y compris des valeurs fractionnaires (par exemple, la hauteur peut adopter des valeurs fractionnaires - 48 3/4 po ou 52,837 po sont des mesures possibles), alors on peut choisir des mesures plus étroites et plages d'intervalles plus étroites pour les catégories. Dans la LIMITE, l'histogramme devient alors le graphique d'une courbe lisse représentant la répartition des mesures sur un spectre continu de valeurs. Dans un certain sens, l'aire totale sous la courbe représente le nombre total de mesures observées, et l'aire au-dessus d'un intervalle [a,b] représente le nombre de mesures qui ont une valeur supérieure à a et inférieure à b. Pour rendre cela plus précis, il convient de mettre à l'échelle la distribution de sorte que l'aire totale sous la courbe soit de un (c'est-à-dire que l'on dessine des histogrammes avec des barres verticales de hauteurs représentant le pourcentage de mesures enregistrées dans cette catégorie - "fréquences relatives " . "- avec la surface totale sous un tel histogramme représentant 100 pour cent). La courbe idéale obtenue à la limite est appelée « fonction de densité de probabilité ». L'aire sous la courbe au-dessus d'un intervalle [a,b] représente ici la PROBABILITÉ qu'une mesure prise au hasard tombe dans l'intervalle [a,b].

Une quantité numérique qui peut adopter un tableau continu de valeurs (telles que la taille, le poids ou la température) est généralement appelée variable aléatoire continue. On connaît la distribution (fonction de densité de probabilité) d'une variable aléatoire en réalisant des expériences ou des études - par exemple en enregistrant les tailles de 1 000 enfants de 8 ans - ou à partir d'un raisonnement mathématique, en utilisant le THÉORÈME CENTRAL- LIMITE , la DISTRIBUTION NORMALE, ou peut-être la DISTRIBUTION BINÔMALE, par exemple. Souvent, la distribution d'une variable aléatoire est inconnue et le "test d'hypothèse"



Une distribution comme limite

est utilisé pour vérifier la validité d'une hypothèse selon laquelle un ÉCHANTILLON suit une distribution particulière. Cela fait partie des statistiques inférentielles.

Si une variable aléatoire a une fonction de densité de probabilité donnée par une formule f(x), alors l'aire sous la courbe à gauche d'une valeur x donne une nouvelle fonction F(x) appelée fonction de distribution cumulative. La quantité F(x) représente la probabilité qu'une mesure prise au hasard ait une valeur inférieure ou égale à x.

Voir aussi STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

propriété distributive Étant donné un système mathématique à deux opérations, telles que l'addition et la multiplication, ou l'union et l'intersection, on dit qu'une opération distribue sur la seconde si l'application de la première opération à un ensemble d'éléments combinés via la seconde produit le même résultat en appliquant la première opération aux membres individuels de la combinaison, puis en les combinant via la seconde. Par exemple, en arithmétique ordinaire, la multiplication distribue sur l'addition. Nous avons, par exemple :

$$3 \times (2 + 5 + 4) = 3 \times 2 + 3 \times 5 + 3 \times 4$$

c'est-à-dire que tripler une somme de nombres produit le même résultat que tripler chaque nombre individuel puis additionner. (En arithmétique, la propriété distributive correspond à l'opération des CROCHETS EXPANSIBLES.)
Remarquez que l'addition n'est pas distributive sur la multiplication, cependant. Par exemple : $4 + (6 \times 7) \neq (4 + 6) \times (4 + 7)$.
(La première quantité est égale à $4 + 42 = 46$, tandis que la seconde est $10 \times 11 = 110$.)

En arithmétique, la propriété distributive est généralement exprimée comme une multiplication appliquée à la somme de juste deux mandats:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Qu'elle s'applique à une somme de trois termes ou plus découle de l'application plus d'une fois de cette loi fondamentale. Par exemple:

$$\begin{aligned} a \times (b + c + d) &= a \times ((b + c) + d) = \\ &\quad a \times (b + c) + a \times d \\ &\quad = a \times b + a \times c + a \times d \end{aligned}$$

La multiplication distribue également sur l'addition "de la droite". Nous avons:

Machine Translated by Google

$$(a + b) \times c = c \times (a + b) = c \times a + c \times b = a \times c + b \times c$$

Dans la THÉORIE DES ENSEMBLES, « intersection » se répartit sur « union » à la fois de la gauche et de la droite :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

En tant que moyen mnémotechnique, il est utile de penser que l'expression «distribue sur» est synonyme de «sprin kles over». Nous avons : multiplication « saupoudrer » additions et intersection « saupoudrer » union. Dans tout RING, la propriété distributive est l'axiome unique qui combine les deux opérations de définition.

Voir aussi ASSOCIATIF ; PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE.

div UN CHAMP DE VECTEURS assigne à chaque point (x,y,z) de l'espace un vecteur F = <f1 (x,y,z),f2 (x,y,z),f3 (x,y,z)>. La divergence de F, notée div F, est la quantité :

$$\text{division } F = \frac{\partial f123}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

donnée comme une somme de DÉRIVÉES PARTIELLES. Les physiciens ont montré que cette quantité représente la quantité de flux quittant un élément de volume dans l'espace. Par exemple, si F représente le champ de vitesse d'un fluide turbulent, et ρ est la densité du fluide, alors ρdivF, calculé en un point P, est la vitesse à laquelle la masse est perdue d'une boîte (infiniment petite) dessinée autour de P (À tout instant, du fluide entre et sort de cette boîte.)

L'opérateur de divergence est souvent écrit comme s'il s'agissait d'un produit scalaire de deux vecteurs :

$$\text{div}F = \quad \cdot F$$

où $= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}, \right\rangle$ est l'opérateur sup. La CROIX PRODUIT de avec F s'appelle la boucle de F :

$$\text{boucle } F \quad F = \times = \frac{\partial f21}{\partial y} - je \frac{f}{\partial} + \frac{f\partial f32}{\partial z} - 13 \frac{}{\partial X} \; j + \frac{\partial f}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial y} \; k$$

Si F est le champ de vitesse d'un liquide turbulent, alors les physiciens ont montré que 1/2 boucle F, calculée à un le point P, est la vitesse angulaire d'un élément de fluide situé en P, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une mesure de la quantité de rotation qu'il subit.

Voir aussi DÉGRADÉ.

divergent Ce terme signifie simplement « ne converge pas ». Par exemple, une SEQUENCE infinie est dite divergente si elle n'a pas de LIMITE, et une SERIE infinie diverge si la suite de sommes partielles diverge.

Une suite divergente est dite « proprement divergente » si elle tend vers l'infini. Par exemple, la séquence 1,2,3, … est proprement divergente (mais les séquences 1, –1,1, –1,1, … et 1, –2,3, –4,5, … ne le sont pas). On qualifie aussi une série de proprement divergente si la suite correspondante de sommes partielles a cette propriété.

Par exemple, la série 1 + 2 + 4 + 8 + 16 +… est proprement divergente.

Un PRODUIT INFINI est divergent s'il a une valeur nulle ou s'il ne converge pas. Une INTEGRALE IMPROPRE diverge si la limite qui la définit n'existe pas.

Voir aussi SEQUENCE CONVERGENTE.

règles de divisibilité Un nombre est dit divisible par n si, travaillant uniquement dans les nombres entiers, le nombre laisse un reste de zéro lorsqu'il est divisé par n. Par exemple, 37 laisse un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 3, et n'est donc pas divisible par 3. D'autre part, 39, laissant un reste de zéro, est divisible par 3.

Il existe un certain nombre de règles pour tester rapidement la divisibilité des nombres par de petits entiers. Nous présentons des règles de divisibilité pour les 12 premiers entiers.

Divisibilité par 1 Tous
les nombres sont divisibles par 1.

Divisibilité par 2
Comme tous les multiples de 10 sont divisibles par 2, il suffit de vérifier si le dernier chiffre d'un nombre est divisible par 2 ou non. Par exemple, 576 = 57 × 10 + 6. Ce 6 est un multiple de 2. s'assure que 576 l'est aussi. Nous avons la règle :

> Un nombre est divisible par 2 uniquement si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Divisibilité par 3 Que
10, 100, 1000,… laissent tous un reste de 1 lorsqu'ils sont divisés par 3 nous permet de déterminer rapidement le reste

Machine Translated by Google

der de n'importe quel nombre divisé par 3. Par exemple, 3 212 est égal à 3 × 1000 + 2 × 100 + 1 × 10 + 2 × 1 et laisse donc un reste de 3 × 1 + 2 × 1 + 1 × 1 + 2 × 1 = 8 lorsqu'il est divisé par 3. C'est la somme de ses chiffres. Bien sûr, un reste de 8 équivaut à un reste de 2. On a :

> Le reste de tout nombre divisé par 3 est la somme de ses chiffres. Ainsi un nombre n'est divisible par 3 que si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

On peut faire un usage répété de cette règle pour vérifier la divisibilité. Par exemple, 55 837 laisse un reste de 5 + 5 + 8 + 3 + 7 = 28 lorsqu'il est divisé par 3. Cela correspond à un reste de 2 + 8 = 10, qui, à son tour, est un reste de 1 + 0 = 1.

Cette règle montre que le brouillage des chiffres de tout multiple de 3 produit un nouveau nombre qui est toujours un multiple de 3.

Divisibilité par 4
Comme tout multiple de 100 est divisible par 4, il suffit de vérifier si les deux derniers chiffres d'un nombre représentent ou non un multiple à deux chiffres de 4. Par exemple, 18 736 est égal à 187 × 100 + 36. Comme 36 est un multiple de 4 (il peut être divisé par 2 deux fois), on est alors sûr que 18 736 est un multiple de 4. On a :

> Un nombre est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres représentent un nombre à deux chiffres qui peut être divisé par 2 deux fois.

Divisibilité par 5 Tout
nombre N peut être écrit sous la forme N = 10a + b où b est le dernier chiffre de N. (Par exemple, 739 = 73 × 10 + 9.) Comme 10 est divisible par 5, il suffit de vérifier si oui ou non le dernier chiffre b est divisible par 5. Cela donne :

> Un nombre est divisible par 5 uniquement si son dernier chiffre est 0 ou 5.

Divisibilité par 6 Pour
qu'un nombre soit divisible par 6, il doit être à la fois pair et multiple de 3. Cela donne :

> Un nombre n'est divisible par 6 que s'il s'agit d'un nombre pair dont la somme des chiffres est un multiple de 3.

Divisibilité par 7 Tout
nombre N est de la forme N = 10a + b, c'est-à-dire un multiple de 10 plus un seul chiffre. Comme 7a et 7b sont clairement divisibles par 7, on a que 10a + b laisse le même reste que 10a + b – 7a – 7b = 3(a – 2b) divisé par 7. Il suffit donc de vérifier si la quantité 3 (a - 2b) est un multiple de 7. Cela ne peut se produire que si a - 2b est un multiple de 7. En notant que a est le nombre d'origine N avec son dernier chiffre supprimé et b est le dernier chiffre de N, nous avons le règle:

> Pour tester si oui ou non un nombre est divisible par 7, supprimez le dernier chiffre et soustrayez deux fois ce chiffre du nombre restant. Alors le nombre original est divisible par 7 seulement si le résultat de cette opération est divisible par 7.

Par exemple, pour tester si oui ou non 68 978 est divisible par 7, supprimez le 8 et soustrayez deux fois ce chiffre, 16, de 6 897, le nombre restant. Cela donne 6 897 – 16 = 6 881. On peut tester si oui ou non 6 881 est un multiple de 7 de la même manière : 6 881 → 688 – 2 = 686, et encore une fois : 686 → 68 – 12 = 56. Que le résultat final, 56, soit divisible par 7 nous assure que 68 978 est un multiple de 7.

Divisibilité par 8
Comme tout multiple de 1 000 est divisible par 8, il suffit de vérifier si les trois derniers chiffres d'un nombre représentent ou non un multiple de 8 à trois chiffres. Par exemple, 648 728 est égal à 648 × 1 000 + 728. Comme 728 peut être divisé par 2 trois fois, et est donc un multiple de 8, nous avons que 648 728 est divisible par 8.

> Un nombre est divisible par 8 si ses trois chiffres finaux représentent un nombre à trois chiffres qui peut être divisé par 2 trois fois.

Divisibilité par 9 Etant
donné que 10, 100, 1000,… laissent tous un reste de un lorsqu'ils sont divisés par 9, la règle de divisibilité pour 9 est identique à celle de 3.

> Le reste de tout nombre divisé par 9 est la somme de ses chiffres. Ainsi un nombre n'est divisible par 9 que si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Encore une fois, on peut faire un usage répété de cette règle. Par exemple, 76 937 laisse un reste de 7 + 6 + 9 + 3 + 7 = 32 lorsqu'il est divisé par 9, ce qui, à son tour, correspond à un reste de 3 + 2 = 5. Cette règle est souvent utilisée pour

Machine Translated by Google

vérifier le travail arithmétique via la méthode de CASTING
À NEUF.

Divisibilité par 10 Tout
nombre N peut s'écrire sous la forme N = 10a + b, où b est le dernier chiffre de N. Ainsi un nombre n'est divisible par 10 que si son dernier chiffre est un multiple de 10. On a :

> Un nombre est divisible par 10 uniquement si son dernier chiffre est un zéro.

Divisibilité par 11 Les
nombres 100, 1000,… laissent alternativement des restes de 1 et –1 lorsqu'ils sont divisés par 11. (Par exemple, 100 est 1 de plus qu'un multiple de 11, mais 1000 est 1 de moins.) Ainsi, le reste d'un nombre lorsqu'il est divisé par 11, il est obtenu comme la somme alternée de ses chiffres. Par exemple, 69 782, qui équivaut à 6 × 10 000 + 9 × 1 000 + 7 × 100 + 8 × 10 + 2 × 1, laisse un reste 6 × 1 + 9 × (–1) + 7 × 1 + 8 × (–1) + 2 × 1 = 6 – 9 + 7 – 8 + 2 = –2 lorsqu'il est divisé par 11. (Ceci équivaut à un reste de 9.)

Nous avons:

> Le reste d'un nombre divisé par 11 est la somme alternée de ses chiffres. Ainsi, un nombre n'est divisible par 11 que si la somme alternée de ses chiffres est un multiple de 11.

Divisibilité par 12 Un
nombre n'est divisible par 12 que s'il est divisible à la fois par 3 et par 4. On a donc :

> Un nombre est divisible par 12 seulement si ses deux derniers chiffres représentent un multiple à deux chiffres de 4, et la somme de tous les chiffres du nombre est un multiple de 3.

La règle de divisibilité pour 7 peut également être étendue à d'autres nombres. Par exemple, N = 10a + b est divisible par 17 uniquement si 10a + b – 51b = 10(a – 5b) l'est. Ceci, à son tour, montre que N est divisible par 17 précisément lorsque la quantité a - 5b, obtenue en supprimant et en soustrayant 5 fois le chiffre final, est divisible par 17. Notez ici que 51 est le premier multiple de 17 qui est 1 de plus que un multiple de 10.

De la même manière, nous pouvons utiliser le fait que 111 est le premier multiple de 37 soit 1 de plus qu'un multiple de 10 pour obtenir une règle de divisibilité similaire pour 37, pour l'examen
ple. Les règles de divisibilité pour tous les nombres PRIME , sauf 2 et 5, peuvent être créées de cette façon.

division Le processus de recherche du QUOTIENT de deux nombres s'appelle la division. En arithmétique élémentaire, le processus de division peut être considéré comme une SOUS TRACTION répétée. Par exemple, 60 divisé par 12 égale 5 car 12 peut être soustrait de ce nombre cinq fois avant d'arriver à zéro : 60 – 12 – 12 – 12 – 12 – 12 = 0. On écrit : 60 ÷ 12 = 5. La division peut aussi être décrit comme le processus de recherche du nombre de sous-ensembles ou de grandeurs contenus dans un ensemble ou une quantité donnée. Par exemple, 5 ÷ 1/2 = 10 parce que 10 longueurs d'un demi sont contenues dans une longueur de 5 unités.

Si un nombre a est divisé par un nombre b pour produire un quotient q, a ÷ b = q, alors a est appelé le dividende et b le diviseur. Le quotient peut également être exprimé sous la forme d'une FRACTION, a/b, ou d'un RATIO, a:b. En général, le quotient q de deux nombres a et b satisfait l'équation q × b = a. Ainsi, la division peut également être considérée comme l'opération inverse de la MULTIPLICATION. Ainsi, puisque 5 × 12 = 60, par exemple, 5 est bien le quotient de 60 et 12. Ce raisonnement montre aussi que, puisque 0 × b = 0 pour tout nombre b non nul, on a 0 ÷ b = 0. Malheureusement , on ne peut pas donner de sens à la quantité 0 ÷ 0.

(Étant donné que 53 × 0 = 0, nous pouvons être forcés de conclure que 0 ÷ 0 = 53. En même temps, puisque 117 × 0 = 0, nous avons aussi que 0 ÷ 0 = 117. Nous avons une incohérence.)
Il n'est pas non plus possible de donner un sens au terme a ÷ 0 pour toute valeur non nulle a. (Si a ÷ 0 = q, alors q × 0 = a, donnant une CONTRADICTION.)

L' algorithme LONG DIVISION fournit un moyen de diviser de grands nombres entiers. Le processus de division peut être étendu aux NOMBRES NÉGATIFS, aux FRACTIONS, aux NOMBRES RÉELS et aux NOMBRES COMPLEXES. Dans tous les contextes, le nombre 1 agit comme un élément d'identité, à condition qu'il fonctionne comme un diviseur : a ÷ 1 = a pour tous les nombres a.

Le symbole ÷ est appelé "obelus" et est apparu pour la première fois en version imprimée dans le texte de 1659 de l'algèbre de Teutsche de Johann Heinrich Rahn.

Voir aussi RÈGLES DE DIVISIBILITÉ ; DIVISEUR; DIVISEUR DE ZÉRO ; ALGORITHME EUCLIDIEN ; FACTEUR; FACTORISER
TION ; THÉORÈME DES FACTEURS ; FONCTION RATIONNELLE; RESTER LE THÉORÈME.

diviseur Un autre nom pour FACTOR.

Machine Translated by Google

diviseur de zéro Deux quantités, dont aucune n'est
zéro, mais multipliez ensemble pour donner zéro comme produit
sont appelés diviseurs de zéro. En arithmétique ordinaire, les
diviseurs de zéro n'apparaissent jamais : si a × b = 0, alors au moins un des
a ou b doit être égal à zéro. En ARITHMÉTIQUE MODULAIRE, cependant,
des diviseurs de zéro peuvent exister. Par exemple, 3 × 2 est égal à zéro
en arithmétique modulo 6. Deux matrices non nulles peuvent se
multiplier pour donner la MATRICE nulle, et le produit de deux
les fonctions non nulles pourraient être la fonction zéro.

La présence de diviseurs nuls dans une formule mathématique
système complique souvent l'arithmétique que l'on peut effectuer au
sein de ce système. Par exemple, pour l'arithmétique
modulo 10, 2 × 4 égale 2 × 9, mais en divisant par 2, a
diviseur de zéro dans ce système, conduit à l'erreur
conclusion que 4 et 9 sont égaux dans ce système. Dans
général, on ne peut jamais effectuer de division lorsqu'un diviseur
de zéro est impliqué.

produit scalaire (produit intérieur, produit scalaire) Noté
a ·b, le produit scalaire de deux VECTEURS a et b est la somme
des produits des composantes respectives des vecteurs.
Précisément, si a = <a1 ,a2 ,…,an> et b = <b1 ,b2 ,…,bn>,
alors a ·b est le nombre :

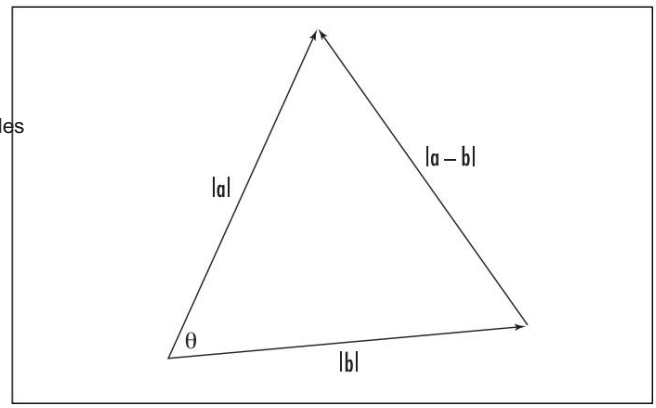
$$a \cdot b = a1b1 + a2b2 + \ldots + anbn$$

Le résultat de l'opération du produit scalaire est toujours un réel
nombre (scalaire). Par exemple, le produit scalaire de la
deux vecteurs a = < 1,4> et b = < 2,3> est a ·b = 1 · 2 +
4 · 3 = 14.

Le produit scalaire se présente dans de nombreuses situations. Pour
exemple, une épicerie fine locale reçoit ce qui suit
bon de commande déjeuner :

Combien?		Coût
2	Jambon @$2.80 ———	
	Turquie @ 3,15 $ ———	
1	Salade aux œufs à 1,95 $ ———	
3	Thon @ 2,50 $ ———	
	Rôti de bœuf à 3,60 $ ———	
	Coût total: ---	

On pourrait interpréter l'ordre comme un vecteur à cinq dimensions
<2,0,1,3,0> à associer à un vecteur à cinq dimensions
"vecteur de coût" <2.80,3.15,1.95,2.50,3.60>. Le total



Triangle de vecteurs

le coût de la commande est alors le produit scalaire de ces deux
vecteurs :

$$2 \times 2{,}80 + 0 \times 3{,}15 + 1 \times 1{,}95 + 3 \times 2{,}50 + 0 \times 3{,}60 = 15{,}05\ \$$$

Géométriquement, le produit scalaire donne un moyen de
calculer l'angle entre deux vecteurs. Par exemple, deux vecteurs
bidimensionnels a = < a1 ,a2 > et b =
< b1 ,b2 >, avec un angle θ entre eux, forment un triangle
dans le plan avec des côtés donnés par la DISTANCE
2 FORMULE : $|a| = \sqrt{a1^2 + a2^2}$, $|b| = \sqrt{b1^2 + b2^2}$,
$|a - b| = \sqrt{(a1 - b1)^2 + (a2 - b2)^2}$.

Par la LOI DES COSINES on a :

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\theta)$$

d'où il résulte que :

$$a \cdot b = a1b1 + a2b2 = |a||b|\cos(\theta)$$

Ainsi l'angle entre deux vecteurs a et b peut être
calculé via la formule :

$$\cos(\theta) = \frac{ab}{|a||b|}$$

Cette formule est également valable pour les vecteurs à trois
dimensions et plus. Par exemple, considérons le vecteur unitaire i =
<1,0,0> dans l'espace tridimensionnel pointant dans la direction de
l' axe des x, et j = <0,1,0> le vecteur correspondant pointant dans la
direction de l' axe des y. Comme l'angle

Machine Translated by Google

entre ces deux vecteurs est de 90°, leur produit scalaire i · j sera nul (i · j = 1,0 + 0,1 + 0,0 = 0). En général:

> Deux vecteurs a et b sont à angle droit si et seulement si leur produit scalaire a · b est nul.

Le produit scalaire a le commutatif suivant et propriétés distributives :

$$\text{une} \cdot b = b \cdot \text{une}$$

$$\text{une} \cdot (b + c) = \text{une} \cdot b + \text{une} \cdot c$$

Voir aussi PRODUIT CROISÉ ; NORMAL À UN PLAN ; ORTHOGONAL; PRODUIT VECTORIEL TRIPLE ; VECTEUR ÉQUATION D'UN PLAN.

intégrale double Le volume sous un graphe z = f(x,y) de deux variables (qui est dessinée comme une surface assise dans espace tridimensionnel) au-dessus d'une région R dans le plan xy est calculé via une double intégrale, notée :

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

On approxime ce volume en subdivisant le région R en petits morceaux rectangulaires, en dessinant un cuboïde angulaire rectiligne au-dessus de chaque rectangle avec une hauteur atteignant la surface, et en additionnant les volumes de chacun des ces cuboïdes. Au fur et à mesure que l'on prend des approximations de plus en plus fines, ce processus produit des approximations de mieux en mieux du vrai volume sous le graphique. La limite de ce processus est la double intégrale :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

où dAk désigne l'aire du kième rectangle région utilisée pour approximer R.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) a montré que si la région R est elle-même un rectangle, disons, donné par a ≤ x ≤ b et c ≤ y ≤ d, alors la double intégrale peut être calculé comme l'une des deux intégrales itérées :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

(Dans une intégrale itérée, on intègre une variable à un temps, considérant la deuxième variable comme une constante.) Cette le résultat est également vrai pour les autres régions en forme R , comme tant qu'ils ne sont pas trop compliqués.

Par exemple, le volume sous le graphique z = xy au dessus du rectangle R = [1,2] × [2,3] est :

$$\iint_R xy\,dA = \int_2^3 \int_1^2 xy\,dx\,dy = \int_2^3 \frac{1}{2}x^2 y \Big|_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_2^3 \frac{3}{2} y\,dy = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

Notez que l'intégration est effectuée à partir du à l'envers.

Une triple intégrale $\iiint_V f(x,y,z)\,dV$ d'une fonction de trois variables f(x,y,z), calculées sur un volume V dans dans l'espace, peut souvent être calculée comme une intégrale triple itérée, intégrant tour à tour chaque variable. Encore une fois, la commande de l'intégration, généralement, n'a pas d'importance.

Voir aussi GEORGE GREEN.

point double Emplacement sur une courbe où la courbe soit se croise, soit est tangent à lui-même, est appelé un point double. Dans le premier cas, le point d'intersection est appelé un nœud, et la courbe a deux tangentes distinctes à ce moment. Dans le second cas, le point de contact est appelé un tacnode ou une osculation. Les deux tangentes à la courbe coïncide en ce point.

Voir aussi POINT ISOLÉ ; POINT SINGULIER ; TANGENTE.

racine double Voir ROOT.

variable fictive Une variable apparaissant dans une expression mathématique est une variable fictive si elle est affectée pas de signification spécifique et si la lettre utilisée pour cela pourrait tout aussi bien être remplacé par une autre lettre. Un index de SUMMATION, par exemple, est une variable factice : la somme $\sum_{k=1}^{4} k^3$ de dénoter 13 + 23 + 33 + 43 , pour l'examen ple, pourrait tout aussi bien être représenté comme $\sum_{r=1}^{4} r^3$ ou $\sum_{n=1}^{4} n^3$, dire. La variable utilisée pour l'intégrale d'un DEFINITE INTEGRAL est une variable fictive. Les deux expressions $\int_0^1 x^2\,dx$ et $\int_0^1 t^2\,dt$, par exemple, représente

Machine Translated by Google

la même intégrale définie, un nombre, et donc x et t sont des variables muettes. (La variable x, cependant, n'est pas une variable fictive dans l' INTEGRAL INDÉFINI ∫x 2 dx.
Cette expression est une fonction de la variable spécifique x.)

dupliquer le cube (problème de l'autel de Délos, doubler le cube) cube donné. La légende raconte que ce problème, connu sous le nom de duplication du cube, est survenu lors de la peste grecque de 428 av . Dieu.

Ils ont été incapables d'accomplir cet exploit.

APOLLONIUS DE PERGE (vers 260-190 avant notre ère) a résolu le problème avec l'utilisation des SECTIONS CONIQUES, mais les érudits ont décidé plus tard d'ajouter la restriction que seuls les outils primitifs d'une règle (c'est-à-dire une règle sans marquage) et un boussole être utilisé dans sa solution. La difficulté du problème a considérablement augmenté.

Si nous supposons que la longueur du côté du cube d'origine est une longueur d'unités, alors il faut construire a √ 2a, nouvelle longueur b de sorte que b 3 = 2a 3 . Par conséquent, b = et donc le problème se réduit essentiellement au défi de construire une $\sqrt[3]{-2}$ unités de long en utilisant seulement un règle de longueur et un compas.

La théorie des nombres CONSTRUCTIBLES montre que, dans ce contexte, n'importe quelle quantité de longueur rationnelle peut être construite, et que si deux longueurs l1 et l2 peuvent être produites, alors leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient peuvent également l'être, ainsi que carrée de chaque √ —2, étant la quantité. Il semble la racine peu probable qu'une longueur ni rationnelle, ni la racine carrée d'un nombre rationnel, puisse être produite. En effet, en 1837, le mathématicien français Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) par a prouvé que √ —2 n'est pas constructible et, conséquent, le nombre que le problème de la duplication du cube est insoluble. (Pour voir ça $\sqrt[3]{-2}$ n'est pas rationnel, supposons le contraire qu'il peut s'écrire sous la forme d'un rapport de deux entiers : $\sqrt[3]{-2} = \frac{p}{q}$. Alors 2q Si je3 nombre p a m facteurs de 2, alors = p la quantité a 3m facteurs de 2. Par conséquent, il en va de même pour 2q3 . Mais cela est impossible, car le nombre de facteurs de 2 dans 2q doit être supérieur de 1 à un multiple de 3.
Cette absurdité montre que $\sqrt[3]{-2}$ ne peut pas être un rapport de deux entiers. Un argument similaire montre que $\sqrt[3]{2}$ non égale à la racine carrée d'une quantité rationnelle soit.)

Dürer, Albrecht (1471–1528) Géométrie allemande Né le 21 mai 1471 à Nuremberg, en Allemagne, l'artiste Albrecht Dürer est connu en mathématiques pour ses réalisations importantes dans le développement de la GÉOMÉTRIE descriptive et ses applications à la théorie de l'art. Dans quatre textes célèbres, Dürer a expliqué la théorie des proportions et décrit les techniques de la règle et du compas pour la construction de polygones réguliers. Il a exploré l'art de placer les figures d'une manière agréable à l'œil, commençant ainsi à développer la théorie de PERSPECTIVE, et a commencé une étude des ombres projetées par des objets tridimensionnels. Dürer est noté comme le premier érudit à publier un livre de mathématiques en allemand, et aussi comme le premier érudit occidental à donner un exemple de CARRÉ MAGIQUE.

Dürer a étudié la peinture et la gravure sur bois dans sa jeunesse. Il a fait son apprentissage auprès du principal producteur de retables de son temps, Michael Wolgemut, jusqu'à l'âge de 20 ans et a appris à apprécier le rôle que les mathématiques pouvaient jouer dans la conception d'œuvres artistiques. Après avoir lu les travaux d' Euclide (vers 300-260 avant notre ère), ainsi qu'un certain nombre de textes célèbres sur la théorie de l'architecture, Dürer s'est rendu en Italie, site du renouveau des mathématiques à la Renaissance, pour étudier les mathématiques de la forme. , mouvement et perspective. Vers 1508, Dürer a commencé à rassembler et à traiter tout le matériel qu'il avait étudié dans le but de produire un texte définitif sur les mathématiques des arts visuels. Ce travail n'a jamais été achevé, mais il a publié plus tard ses quatre volumes sur la théorie des proportions Underweysung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen, und gantzen Corporen (Traité sur la mensuration avec le compas et la règle en lignes, plans et ensemble corps) en 1525.

Dürer est connu pour son inclusion de la série de nombres suivante en arrière-plan de sa gravure de 1514 Melancholia :

16	3	2	13
5	dix	11	8
9 6712			
4	15	14	1

Machine Translated by Google

Chaque ligne et colonne, ainsi que les deux diagonales principales, totalisent 34, et donc ce tableau représente un carré magique de quatrième ordre. C'est le premier exemple de carré magique jamais enregistré en Europe occidentale. (Il a la caractéristique supplémentaire d'inclure l'année où la gravure a été achevée dans les deux cellules du milieu de la rangée du bas.)

Dürer est décédé à Nuremberg, en Allemagne, le 6 avril 1528. Sa théorie des proportions a permis aux artistes qui lui ont succédé d'effectuer facilement les transformations sur les figures nécessaires pour les traduire sur une toile et maintenir le sens correct de la perspective. (Avant Dürer, les artistes accomplissaient cet exploit uniquement par intuition ou par essais et erreurs.) Ce faisant, Dürer avait fourni une théorie bien pensée de la perspective géométrique qui était également appréciée des mathématiciens.

dyadique Toute quantité liée au concept de base 2 est parfois appelée dyadique. Par exemple, les rationnels dyadiques sont les fractions dont les dénominateurs sont 3– 2 2 3– puissances de 2. Ainsi 4 = et 173 —1024 = 173 – —2 10 , pour exemple, sont des rationnels dyadiques, mais ne le sont pas. 1– 3

Plier une bande de papier de 1 pied de long en deux produit un pli à la position du rationnel dyadique 1/2. Si l'on continue à plier l'extrémité gauche ou droite de la bande sur des marques de pli précédemment construites, alors des marques de pli apparaissent à tous les rationnels dyadiques (et uniquement les rationnels dyadiques).

Cette activité de pliage de papier est intimement liée à la construction des NOMBRES BINAIRES. Par exemple, pour créer une marque de pli le long d'une bande de papier à la position du rationnel dyadique 13/16, écrivez le numérateur 13 en binaire :

$$13 = 11012$$

(Cela équivaut à écrire la fraction 13/16 sous la forme d'un "décimal binaire :" 13/16 = 0,1101 en base 2.) Lisez maintenant le développement binaire à l'envers, en interprétant le chiffre 1 comme l'instruction "soulever à droite et plier" et le chiffre 0 comme "soulever à gauche et plier". Dans cet exemple nous avons :

1 : Soulever l'extrémité droite de la bande et plier pour produire un pli en position 1/2.
0 : Soulevez l'extrémité gauche et pliez jusqu'au pli précédent. Cela produit un nouveau pli à la position 1/4.
1 : Soulevez l'extrémité droite et pliez jusqu'au pli précédent. Cela produit un nouveau pli à la position 5/8.
1 : Soulevez l'extrémité droite et pliez jusqu'au pli précédent. Cela produit un nouveau pli à la position 13/16, comme souhaité.

En général:

> La représentation binaire du numérateur de tout rationnel dyadique représente des instructions pour la construction de ce rationnel dyadique le long d'une bande de papier.

Dans un certain sens limitatif, cette procédure fonctionne également pour les fractions qui ne sont pas dyadiques. Par exemple, le nombre 1/3 écrit sous forme décimale en base 2 est .010101… Si l'on devait lire ceci comme un ensemble d'instructions pour "plier à droite et plier à gauche indéfiniment", alors la séquence de plis produits converge en effet vers le position 1/3.

système dynamique Tout processus dans lequel chaque état successif est fonction de l'état précédent est appelé système dynamique. Par exemple, le retour d'un microphone dans le cadre d'un système d'annonce publique est un système dynamique : l'amplificateur transmet de minuscules sons erronés, que le microphone entend et amplifie, qu'il entend et amplifie ensuite, etc.

En mathématiques, si f est une application d'un espace X à lui-même, alors l' ITÉRATION de f définit un système dynamique - les états successifs du système sont les itérés de f issus d'un point de départ donné x :

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

Par exemple, l'application f(x) = x du nombre réel 1– 2 1– ligne à elle-même, commençant par x = 1, donne les itérations 1, , 2 1– 4 , 1– 8 … Si X est un cercle dans le plan et f est la fonction qui fait tourner ce cercle de 10° dans le sens des aiguilles d'une montre, alors les itérations de n'importe quel point sur le cercle constituent 36 points régulièrement espacés sur ce cercle.

L'« orbite » d'un point x est la séquence d'itérations qu'il produit. Si le système atteint un équilibre, c'est-à-dire tend vers un état stable, ou s'il passe d'un certain nombre d'états à l'autre, alors le point d'équilibre (ou les ensembles de points d'équilibre) sont appelés "attracteurs" du système.

Machine Translated by Google

tem. Par exemple, le nombre zéro est un attracteur pour 1– le système donné par f(x) = x : quelle que soit la valeur de départ 2 , toutes les itérations convergent vers la valeur zéro.

Les itérations de fonctions f très simples peuvent présenter un comportement extrêmement surprenant. Prenons, par exemple, les itérations de la fonction f(x) = 1 – cx2 avec la valeur initiale x = 0. (Ici c est une constante. Chaque valeur de c détermine son propre système dynamique.)

Fixer c = 0,1. Les cinq premières itérations du système xn+1 = 1 – 0.1xn 2 sont :

0, 1.000, 0.900, 0.919, 0.916, 0.916

Le système semble se stabiliser à la valeur 0,916. On vérifie que le même type de comportement se produit si on répète cet exercice pour c fixé à n'importe quelle valeur comprise entre 0 et 0,75. Il y a cependant un changement de comportement marqué pour c = 0,75 : le système ne converge plus vers une seule valeur mais oscille plutôt entre deux valeurs : 0,60 et 0,72. On dit que la valeur c = 0,75 est un point de bifurcation et que le système a subi un "doublement de période".

À la valeur c = 1,25, le système bifurque à nouveau pour donner des systèmes qui oscillent entre quatre valeurs. Pour des valeurs plus élevées de c, le système continue de bifurquer, jusqu'à ce que finalement un soi-disant CHAOS soit atteint, où les résultats sautent d'une manière apparemment aléatoire. Ce phénomène est typique de nombreux systèmes dynamiques : le comportement qu'ils présentent dépend fortement de la valeur d'un paramètre c. (De tels systèmes dynamiques sont dits « sensibles » au jeu de paramètres.)

Les chercheurs ont montré que de nombreux processus naturels qui semblent chaotiques, tels que l'écoulement turbulent des gaz et les mouvements oculaires rapides des humains, peuvent être modélisés avec succès en tant que systèmes dynamiques, généralement avec des fonctions sous-jacentes très simples les définissant.

Les météorologues modélisent le temps comme un système dynamique, ce qui les aide à faire des prévisions. Cependant, une sensibilité extrême aux paramètres peut facilement conduire à des prédictions erronées : un petit changement dans la valeur d'un seul paramètre peut produire des résultats très différents. Le soi-disant effet papillon, par exemple, prétend que les changements infimes de pression atmosphérique provoqués par un papillon battant des ailes pourraient être tout ce qui est nécessaire pour faire basculer un système dynamique météorologique dans le chaos.

Itération de fonctions avec des NOMBRES COMPLEXES conduit à une étude des FRACTALES.

Machine Translated by Google

E

e (nombre d'Euler) mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783) a introduit un nombre, aujourd'hui noté e, qui joue un rôle fondamental dans les études de composé INTÉRÊT, TRIGONOMÉTRIE, LOGARITHMES et CALCUL, et qui unit ces domaines disparates. (FORMULE D'EULER , par exemple, l'illustre.) Le nombre e a une valeur approximative de 2,718281828459045 … et peut être défini de l'une des manières suivantes :

1. Le nombre e est la valeur limite de l'expression $1 + \frac{1}{n}$ élevé à la puissance n, lorsque n augmente indéfiniment:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2. Si L(a) désigne l'aire sous la courbe y = 1/x au-dessus de l'intervalle [1,a], alors e est l'emplacement sur la en abscisse pour laquelle L(e) = 1.
3. Si f(x) est une fonction égale à sa propre DÉRIVÉE, d c'est-à-dire que $\frac{d}{dx} f(x) = f(x)$, alors f(x) est une EXPONENTIELLE FONCTION avec valeur de base e : $f(x) = e^x$.
4. e est la valeur de la somme infinie $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$.

La définition 1 est liée au problème de calcul intérêts composés. Comme nous le montrons ci-dessous, la définition 2 définit le logarithme naturel, et la définition 3 se pose à partir d'études de la croissance et de la décroissance naturelles, et par conséquent de l'examen des FONCTIONS EXPONENTIELLES. La quatrième définition est issue de l'étude de TAYLOR SÉRIE. On prouve que les quatre définitions sont équivalentes comme suit :

Considérons d'abord la courbe y = 1/x. Il a le remarquable propriété que les rectangles touchent la courbe et juste en dessous il a la même aire si les extrémités des rectangles sont dans le même rapport r. Par exemple, dans le premier schéma sur sur la page opposée, les rectangles au-dessus des intervalles r – 1 et [b,rb] ont chacun une aire [a,ra]. En prenant plus étroit et ——r rectangles plus étroits, tous dans le même rapport r, il s'ensuit alors que l'aire sous la courbe au-dessus de deux intervalles quelconques de la forme [a,ra] et [b,rb] est égale.

Suivant la définition 2, notons L(x) l'aire sous celui-ci de la position 1 à la position x. (Si x est inférieur supérieur à 1, considérez l'aire comme négative.) Notez que L(1) = 0. Définissez également e comme étant l'emplacement sur l' axe des x où le l'aire sous la courbe est 1 : L(e) = 1.

Notez que l'aire sous la courbe de 1 à la position ab, L(ab), est la somme des aires sous la courbe au-dessus des intervalles [1,a] et [a,ab]. Le premier domaine est L(a) et le second, par la propriété ci-dessus, est égal à Kg). Nous avons ainsi :

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

Ceci montre que L est une fonction qui convertit la multiplication en addition, ce qui suffit pour prouver qu'elle est la base de la FONCTION LOGARITHMIQUE e. On a L(x) = loge (x). Cette fonction s'appelle le logarithme naturel fonction et s'écrit généralement ln(x).

Machine Translated by Google

Par le THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL, le la dérivée d'une fonction d'aire est la fonction d'origine et donc on a :

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Considérons maintenant la fonction exponentielle tion $y = e^x$ correspondante. En prenant des logarithmes, on obtient $\ln(y) = x$. Différenciation des rendements $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$, et donc $\frac{dy}{dx} = y = e^x$. Ce établit la définition 3 indiquant que $f(x) = e^x$ est la fonction égale à sa propre dérivée.

Maintenant que nous connaissons la dérivée de $y = e^x$, nous pouvons calculer sa série de Taylor. On obtient:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Le réglage x = 1 établit la définition 4.

Il reste maintenant à établir la définition 1. A partir du graphique de la courbe y = 1/x, il est clair que la région 1– entre x = 1 et x = 1 + est pris en sandwich entre un

rectangle de surface $\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$ et un rectangle de aire $= \times 1 = \frac{1}{n}$. Ainsi:

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$$

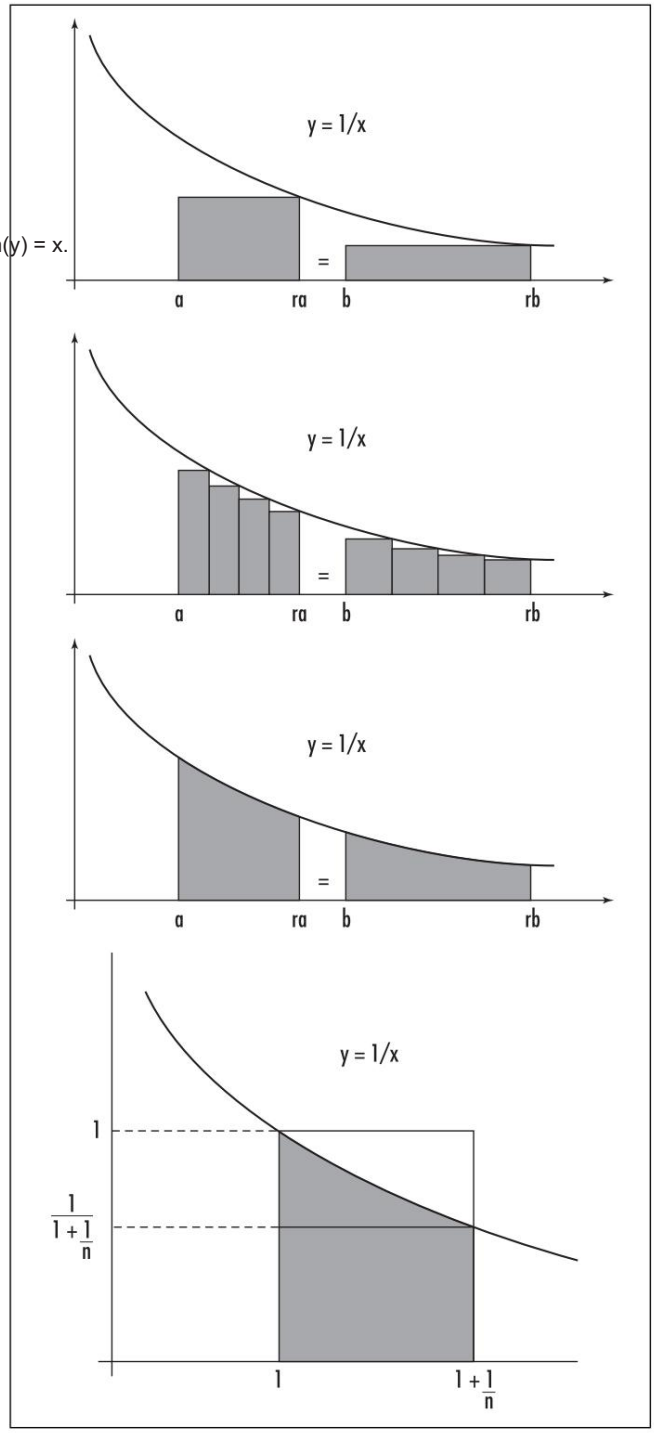
Multiplier par n donne :

$$\frac{n}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1$$

Lorsque n devient grand, la quantité $\frac{n}{n+1}$ approches la valeur 1. Il doit être le cas, alors, que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ s'approche d'une valeur dont le logarithme est 1.

Par conséquent $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est égal à 1. Cela donne :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$



La courbe y = 1/x

En ce qui concerne la question des intérêts composés, il est nécessaire pour calculer la limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$.

Machine Translated by Google

Nous avons:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(/nr)}\right)^{(/nr)r}=re$$

Cela représente la valeur d'un investissement de 1 $ après 1 an accumulant des intérêts composés en continu à un taux d'intérêt de r pour cent par an.

On peut utiliser la quatrième définition pour prouver que e est un NOMBRE IRRATIONNEL. On commence par supposer, pour au contraire, que e est une fraction de la forme $\frac{p}{q}$ et multiplie la formule présentée dans la définition 4 par q!.
Les parties fractionnaires qui restent ne peuvent pas s'additionner à un nombre entier.

En 1873, le mathématicien français Charles Hermite (1822-1901) a prouvé que e est un TRANSCENDANTAL NOMBRE.

Terre Notre planète, la troisième à partir du Soleil, est souvent supposée avoir la forme d'une SPHÈRE parfaite, mais des mesures détaillées montrent qu'elle a la forme d'un sphéroïde aplati avec un rayon équatorial de 3 963 miles (6 378 km) et un rayon polaire de 3 950 miles (6 357 km).

Sa distance orbitale moyenne du Soleil est de 9,296 × 107 miles (1,496 × 108 km), une « unité astronomique », et sa masse est de 1,317 × 1025 lb (5,976 × 1024 kg).

La Terre met 23 heures, 56 minutes et 4,1 secondes pour effectuer une journée sidérale, c'est-à-dire une rotation complète autour de son axe, mesurée par rapport aux étoiles fixes. Le jour solaire, le temps qu'il faut à un point P de la surface de la Terre faisant initialement face au Soleil pour revenir à cette position est, par définition, précisément de 24 heures. La différence des mesures temporelles s'explique par le fait que la Terre avance sur son orbite lors de sa rotation : la Terre doit tourner d'un peu plus de 360° pour ramener P face au Soleil lorsque la planète avance.

La première tentative connue de calcul de la circonférence de la Terre a été faite par le savant grec ÉRATOSTHÈNE DE CYRÈNE (vers 275-195 av. J.-C.).
Eratosthène a observé qu'au solstice d'été, à midi le 21 juin de chaque année, le Soleil brillait directement au fond d'un puits dans la ville de Syène (aujourd'hui Assouan). Cela signifiait que le Soleil était directement au-dessus à ce moment. Il a également noté qu'au même moment à Alexandrie, une ville située à environ 800 km au nord de Syène, des objets projetaient des ombres, ce qui signifie que le Soleil n'était pas directement au-dessus de nous à cet endroit. Ces observations ont fourni à Eratosthène les moyens de calculer le rayon de la Terre. Il a supposé que le Soleil était suffisamment éloigné de notre planète pour que les rayons de lumière qui nous en parviennent puissent être considérés comme essentiellement parallèles. Eratosthène a mesuré l'angle projeté par les ombres à Alexandrie (en utilisant un objet de hauteur connue et en mesurant la longueur des ombres projetées) et a trouvé que l'angle était de 1/50 de tour complet, soit environ 7,2°. La circonférence de la Terre suit : si 1/50e de tour complet correspond à une distance de 500 milles, alors un tour complet doit correspondre à une distance de 50 × 500 = 25 000 milles.

Coordonnées géographiques Les lignes de latitude et de longitude forment un système de COORDONNÉES sur la Terre. Les « parallèles de latitude » sont des cercles parallèles à l'équateur, repérés selon une mesure d'angle. Plus précisément, si O est le centre de la Terre, P est un point sur un cercle de latitude, P′ est le point de l'équateur directement au sud de P, et α est l'angle POP′, alors le cercle de latitude contenant P est étiqueté α. La latitude de tout point peut donc être de 0° (sur l'équateur) jusqu'à 90° nord (le pôle Nord) ou 90° sud (le pôle Sud). La ville de New York, par exemple, a une latitude de 40°45′06″ N.

Idéalement, l'étoile polaire se trouve directement au-dessus du pôle Nord. En mesurant l'angle d'élévation de l'étoile polaire (90° au pôle Nord, 0° à l'équateur), on peut déterminer rapidement la latitude de n'importe quel endroit de l'hémisphère nord. À l'aide de sextants pour mesurer l'altitude, les marins du passé comptaient sur l'étoile polaire pour les aider à déterminer leur emplacement. Les méridiens, ou lignes de longitude, vont du pôle Nord au pôle Sud, perpendiculairement aux cercles de latitude. Chaque méridien est un demi-cercle. L'équateur est divisé en 360°, avec le méridien passant par Greenwich, en Angleterre (appelé le premier méridien), considéré comme l'angle zéro, et l'angle de tout autre méridien varie de 180° est à 180° ouest. Précisément, la longitude d'un point P sur la sphère est donnée par l'angle P′OG′, où P′ est le point sur l'équateur directement au sud ou

Machine Translated by Google

au nord de P, et G′ est le point de l'équateur au sud de Greenwich. La ville de New York, par exemple, a une longitude 73°59′39″ O.

La longitude d'un point P à la surface de la Terre peut être mesuré en identifiant la différence de temps entre midi à P et midi à Greenwich. Comme la journée est divisée en 24 périodes d'une heure chacune un retard de 1 heure correspond à 1/24 de tour complet sur la circonférence de la Terre. Ainsi, à 360/24 = 15° longitude ouest, par exemple, le Soleil atteint son point culminant pointe dans le ciel 1 heure plus tard qu'à Greenwich ; à 30° de longitude ouest, il se produit 2 heures plus tard, et ainsi de suite. Après environ 1735, les marins ont pu transporter des chronomètres précis pour suivre Greenwich temps. En mesurant l'heure de midi à n'importe quel moment emplacement, les marins pouvaient déterminer avec précision la longitude de cet emplacement.

Voir aussi OBLATE/PROLATE.

excentricité Pour toute SECTION CONIQUE, le rapport de la distance d'un point de la courbe à un point fixe, la foyer, à sa distance d'une ligne fixe, la directrice, est constant. La valeur de ce rapport, notée e, est appelée l'excentricité de la courbe, et il donne une mesure de la forme de la courbe. Pour une PARABOLE, e est égal à un. Si e se situe entre zéro et un, alors la courbe est une ELLIPSE. Si e est supérieur à un, alors la courbe est une HYPERBOLA. L'excentricité d'un CERCLE est définie comme étant nulle. (Dans ce contexte, l'excentricité e ne doit pas être confondue avec le numéro de LEONHARD EULER e.)

Fractions égyptiennes Toute fraction avec numérateur d'unité, 1– comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{45}$, et $\frac{1}{598}$, s'appelle une fraction égyptienne.

Les Égyptiens d'il y a 4 000 ans exprimaient toutes les quantités fractionnaires comme des sommes de fractions égyptiennes distinctes. 2– Par exemple, s'écrivait $\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$, $\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}$.

En 1202, FIBONACCI a commencé sa propre enquête sur fractions égyptiennes et a été le premier à prouver que chaque fraction peut en effet être exprimée comme une somme finie de fractions égyptiennes distinctes. (Il n'est pas clair si le anciens Égyptiens ont jamais remis cela en question.) Il a montré que soustraire une quantité de la forme 1/n, avec n comme petit que possible, à partir d'une fraction donnée toujours pro produit une nouvelle fraction avec un numérateur plus petit. Ainsi l'application répétée de cette procédure doit éventuellement produire une fraction avec le numérateur d'unité lui-même.

A titre d'exemple, pour la fraction 5/17 nous avons :

$\frac{5}{17} - \frac{1}{4} = \frac{3}{68}$ ($\frac{1}{3}$ est une quantité trop grande pour être soustraite.)

et

$\frac{3}{68} - \frac{1}{23} = \frac{1}{1564}$ ($\frac{1}{22}$ est une quantité trop grande pour être soustraite.)

donnant:

$$\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}$$

De telles représentations n'ont pas besoin d'être uniques. Par exemple, 3– est égal à $\frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

Voir aussi MATHÉMATIQUES ÉGYPTIENNES.

Mathématiques égyptiennes Notre connaissance de l'antiquité Les mathématiques égyptiennes d'environ 2000 avant notre ère viennent principalement du PAPYRUS RHIND. On y apprend, pour exemple, que les Égyptiens suivaient un système très naturel pour désigner les chiffres : 1 était un trait vertical |, 2 était deux d'entre eux ||, 3 était |||, et 4 était ||||, et séparés des symboles ont été utilisés pour 5, 6, 7, 8 et 9, et pour 10, 20,…, 100, 200,…, 1000, etc. Tous les autres numéros étaient représentés comme des groupes de ces symboles, généralement classés du plus grand au plus petit. Comme le système de CHIFFRES ROMAINS, le système égyptien n'a pas utiliser un SYSTÈME DE PLACE-VALEUR (le symbole pour 5, par exemple, noté « 5 » peu importe où il apparaît dans le nombre). Il est très difficile de faire des calculs papier-crayon sans notation de valeur de position, mais les Égyptiens utilisaient toujours une planche à calculer, un peu comme une table à calculer. ABACUS, pour effectuer des calculs arithmétiques, et nécessaire uniquement pour enregistrer les résultats. Ils n'étaient donc pas gênés par leur système numérique encombrant. Le les anciens Égyptiens étaient adeptes de la multiplication, en utilisant un méthode des doublements successifs pour calculer les produits. Cette méthode est aujourd'hui appelée MULTIPLICATION ÉGYPTIENNE.

Les problèmes de division conduisent à des FRACTIONS. Il n'a pas arriver aux anciens Égyptiens pour exprimer des fractions avec numérateurs et dénominateurs. Dans le papyrus Rhind, le mathématicien Ahmes a simplement placé un point sur une nombre pour indiquer sa réciproque, sauf dans le cas de 1– les fractions dont chacune avait son $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, et $\frac{1}{4}$,

Machine Translated by Google

propre symbole. Ainsi les Égyptiens ne s'occupaient que de fractions de la forme $\frac{1}{n}$ (à l'exception des deux tiers).

Les fractions avec des numérateurs unitaires sont connues aujourd'hui sous le nom de FRACTIONS ÉGYPTIENNES. Toutes les autres quantités fractionnaires ont été exprimées sous forme de sommes de fractions égyptiennes distinctes . Par exemple, $\frac{2}{5}$, qui est égal à $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, était écrit $\overline{3}\ \overline{15}$, et comme $\frac{4}{13}$ $\overline{4}\ \overline{18}\ \overline{468}$.

La capacité de l'Égyptien à calculer de telles expressions est impressionnant. Le papyrus Rhind fournit des références listes de telles expressions, et les 23 premiers problèmes de le document sont des exercices de travail avec de telles représentations fractionnaires.

Les anciens Égyptiens étaient habiles à résoudre les ÉQUATIONS LIN EAR. Ils ont utilisé une méthode appelée fausse position pour trouver des solutions. Il s'agit de deviner un réponse, en observant le résultat de la conjecture, et ajuster la supposition en conséquence. A titre d'exemple, le problème 24 du papyrus Rhind demande :

> Trouvez la quantité telle que lorsque 1/7 de lui-même est ajouté à cela, le total est de 19.

Pour démontrer la solution, l'auteur propose une devinez 7. Cela plus son septième est 8, de loin trop petit, mais en multipliant le résultat par 19/8, on obtient la réponse de 19 dont nous avons besoin. Ainsi 7 × (19/8) doit être la quantité que nous désirons.

La majorité des problèmes du papyrus Rhind sont de nature pratique, traitant de questions d'aire (d'angles droits, de trapèzes, de triangles, de cercles), de volume (de cylindres, par exemple), de pentes et d'altitudes de pyramides (qui ont été construits 1 000 ans avant que le texte ne soit écrit), et les problèmes théoriques des nombres sur le partage marchandises sous certaines contraintes. Certains problèmes, cependant, indiquent un plaisir pour la pensée mathématique pour ses propre bien. Par exemple, le problème 79 demande :

> S'il y a sept maisons, chaque maison avec sept chats, sept souris pour chaque chat, sept oreilles de grain pour chaque souris, et chaque épi de grain produirait sept mesures de céréales si planté, combien d'articles y a-t-il en tout ?

Ce problème apparaît dans le Liber abaci de FIBONACCI , écrit dix 600 ans avant la découverte du papyrus Rhind.
Une version de ce problème apparaît également comme un familier comptine et énigme, "Comme j'allais à St. Ives."

Multiplication égyptienne Le PAPYRUS RHIND indique que les anciens Égyptiens d'environ 2000 av.
utilisé un processus de "doublement successif" pour multiplier Nombres. Ils ont calculé 19 × 35, par exemple, en doublant à plusieurs reprises 35 :

1	35
2	70
4	140
	280
8 16	560

Puisque 19 = 16 + 2 + 1, sommant 560 + 70 + 35 = 665 donne le produit. Cette méthode montre que la connaissance de la table de multiplication par deux est tout ce qui est nécessaire pour calculer multiplications. LA MULTIPLICATION RUSSE suit une approche similaire à cette méthode.

Voir aussi MATHÉMATIQUES ÉGYPTIENNES ; ÉLISABÉTHAIN MULTIPLICATION; MULTIPLICATION DES DOIGTS ; MULTIPLICA TION ; LES OS DE NAPIER ; MULTIPLICATION RUSSE.

valeur propre (valeur e, racine latente) Voir EIGENVECTOR.

vecteur propre (vecteur e, vecteur latent, vecteur caractéristique, vecteur propre) Pour un carré n × n MATRICE A, nous disons qu'un VECTEUR x non nul est un vecteur propre pour A s'il y a est un nombre λ tel que Ax = λx. Le nombre λ est appelée la valeur propre associée à ce vecteur propre. Si x est un vecteur propre de A, alors on a que (A – λI)x = 0, où I est la MATRICE D'IDENTITÉ. Cela montre que le la matrice A – λI n'est pas inversible, et doit donc avoir zéro déterminant : det(A – λI) = 0. Il s'agit d'une équation polynomiale en λ de degré n, appelée « polynôme caractéristique » de A. Comme il ne peut y avoir au plus n solutions à une telle équation, on a qu'une matrice n × n A a pour la plupart des n valeurs propres distinctes. Les mathématiciens ont prouvé que associé à chaque valeur propre possible il existe au moins un vecteur propre correspondant. De plus, il a été établi que les vecteurs propres associés avec des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendantes.

L'étude des vecteurs propres et des valeurs propres grandement simplifie les manipulations matricielles. Supposons, par exemple, une matrice carrée 3 × 3 A a trois valeurs propres distinctes λ_1 , λ_2 et λ_3 . Définissez D comme la matrice diagonale

Machine Translated by Google

$$ré = \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{matrix}$$

et prenons B la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants de A. Il est alors possible de montrer que :

$$A = BDB–1$$

Cette observation permet de calculer des puissances élevées de A avec très peu de travail. Par exemple, la quantité A100 par exemple, n'est qu'un , produit de trois matrices :

$$A100 = (BDB–1)\ 100$$
$$= BD100B –1$$

notant que D100 est simplement :

$$D100 = \begin{matrix} \lambda_1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{100} \end{matrix}$$

Ce travail permet également aux mathématiciens de définir la racine carrée d'une matrice :

$$\sqrt{AB} = \begin{matrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{matrix}_B{}^{-1}$$

(sous réserve que les racines carrées des valeurs propres soient définies), ou pour définir de nouvelles grandeurs, comme le loga rithm d'une matrice :

$$\ln(AB) = \begin{matrix} \ln(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_3) \end{matrix}_B{}^{-1}$$

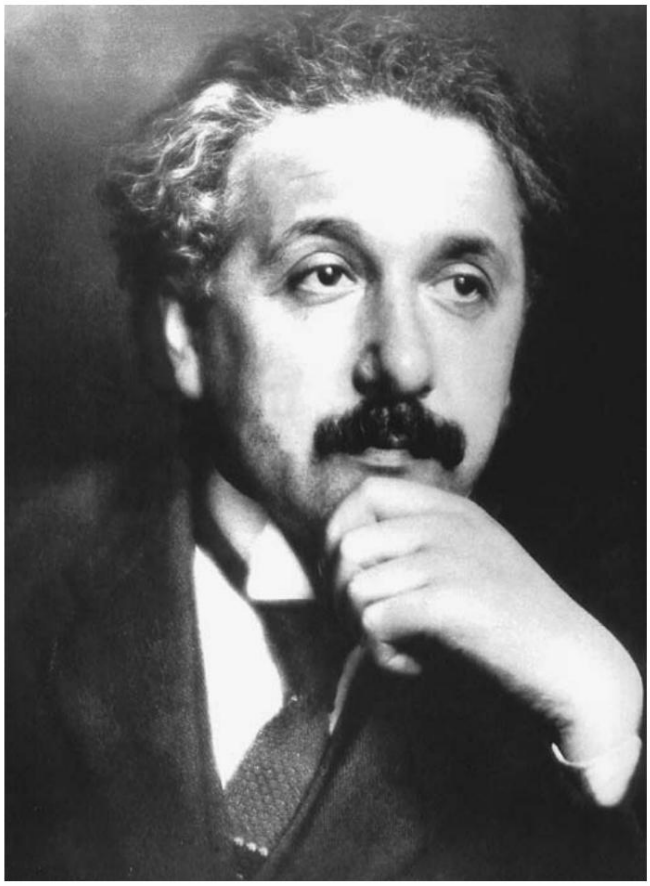
De telles actions se sont avérées utiles dans l'étude de la physique théorique et de l'ingénierie.

Le préfixe eigen est l'allemand pour "caractéristique" ou "propre". Les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice caractérisent complètement la matrice.

Voir aussi THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON ; INVERSE MATRICE; LINÉAIREMENT DÉPENDANT ET INDÉPENDANT.

Einstein, Albert (1879–1955) Relativité allemande , mécanique quantique Né le 14 mars 1879 à Ulm, en Allemagne, Albert Einstein est reconnu comme un physicien mathématicien exceptionnel dont les travaux sur les théories restreinte et générale de la relativité ont complètement révolutionné la manière de penser des scientifiques. sur l'espace, la matière et le temps. Bien qu'il se considérait comme un physicien, les travaux d'Einstein ont inspiré de nombreux développements significatifs dans les mathématiques modernes, y compris le développement de l'analyse TENSOR comme moyen approprié pour décrire la courbure de l'espace.

L'environnement scolaire classique ne convenait pas bien à Ein stein. En 1895, il échoua à l'examen d'entrée d'une école technique suisse, où il espérait étudier l'électrotechnique. Après avoir fréquenté une deuxième école à Aarau, il réussit finalement à entrer à la Zurich



Albert Einstein, éminent physicien mathématicien du XXe siècle, a révolutionné notre compréhension de l'espace, de la matière et du temps grâce à ses théories de la relativité restreinte et générale. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de Topham/The Image Works)

Machine Translated by Google

école pour y obtenir son diplôme en 1900 avec un diplôme d'enseignement. Incapable de trouver un poste universitaire, Einstein a accepté un emploi à l'Office suisse des brevets à Berne en 1902 et y est resté pendant 7 ans.

Pendant son séjour à l'office des brevets, Einstein a étudié la physique théorique le soir, sans bénéficier d'un contact étroit avec la littérature scientifique ou ses collègues, et a réussi à produire et à publier, le tout en 1905, cinq articles vraiment exceptionnels : • « Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt »

(Sur une heuristique concernant la production et la transformation de la lumière), publié dans Annalen der Physik, mars 1905.

• "Die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefurdete Bewegung von in ruhenden Flüs sigkeiten suspendierten Teilchen" (Sur le mouvement des petites particules en suspension dans un liquide stationnaire exigé par la théorie cinétique moléculaire de la chaleur), publié dans Annalen der Physik, mai 1905 . • « Zur Elektrodynamik bewegter Körper » (De l'électrodynamique des corps en mouvement), publié dans Annalen der Physik, juin 1905. • « Ist die Trägheit eines Körpes von seinem Energiein halt abhängig ? (L'inertie d'un corps dépend-elle de son contenu énergétique ?), publié dans Annalen der Physik, septembre 1905. • "Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen"

(Une nouvelle détermination de la dimension moléculaire), écrit dix en avril 1905, publié dans Annalen der Physik, avril 1906.

Le premier article portait sur l'effet photoélectrique déroutant observé par les scientifiques de l'époque. Heinrich Hertz (1857-1894) remarqua que le nombre d'électrons émis par une section de métal bombardée par un faisceau lumineux n'était pas déterminé par l'intensité du faisceau, mais plutôt par sa longueur d'onde. Max Planck (1858–1947) a également observé que l'énergie électromagnétique était émise par des objets rayonnants selon des quantités discrètes, encore une fois en proportion directe avec la longueur d'onde du rayonnement. Einstein a proposé que la lumière et le rayonnement eux-mêmes se déplacent en faisceaux discrets, qu'il a appelés quanta, et ont décrit les mathématiques qui expliqueraient par conséquent ces phénomènes.

Dans son deuxième article, Einstein a développé des équations mathématiques qui décrivaient correctement le mouvement des atomes et des molécules sous le "mouvement brownien". Dans son troisième article, Einstein a proposé sa théorie de la relativité restreinte. Il a noté que parce que la lumière est capable de voyager dans le vide, il n'y a pas de référentiel naturel pour mesurer sa vitesse. (La vitesse du son, par exemple, est mesurée par rapport au milieu de l'air à travers lequel il passe.) De plus, puisqu'il est impossible de déterminer si l'on est stationnaire dans l'espace ou se déplaçant dans l'espace à une vitesse uniforme, il s'ensuit alors que tous les observateurs doivent observer la lumière se déplaçant à la même vitesse. À partir de là, Einstein a développé une série d'"expériences de pensée" qui établissent clairement que les observateurs voyageant à des vitesses différentes doivent donc enregistrer des valeurs différentes lorsqu'ils mesurent des quantités telles que la longueur et le temps. (Par exemple, imaginez un faisceau lumineux rebondissant entre deux miroirs fixes placés à une distance telle que le temps nécessaire pour rebondir entre les deux miroirs est de 1 sec. Supposons qu'un second observateur passe devant l'« horloge » à une vitesse uniforme. Selon cet observateur, l'horloge passe devant elle à une vitesse uniforme. Un calcul simple montre que, puisque la vitesse de la lumière est inchangée pour cet observateur, elle verrait le faisceau lumineux prendre plus de 1 seconde pour compléter un cycle entre les deux miroirs.) Le quatrième article a développé davantage la théorie de la relativité restreinte, culminant avec sa célèbre équation E = mc2 indiquant que l'énergie et la masse sont équivalentes , montrer (avec un facteur de la vitesse de la lumière au carré incorporé).

Einstein a soumis son article final en tant que doctorant à l'Université de Zurich pour recevoir un doctorat. En 1909, Einstein était reconnu comme l'un des principaux penseurs scientifiques. Il a démissionné de l'office des brevets et a été nommé professeur titulaire à l'Université Karl-Ferdinand de Prague en 1911. Cette même année, sur la base de sa théorie de la relativité, Einstein a fait une prédiction sur la façon dont les rayons lumineux des étoiles lointaines se courberaient autour du Soleil. , espérant qu'un jour les astronomes pourront observer cet effet et vérifier que sa théorie de la relativité est correcte. Il a également commencé à travailler sur l'incorporation du rôle de l'accélération (mouvement non uniforme) dans sa théorie spéciale pour développer une théorie générale de la relativité. Après plusieurs faux départs, Einstein publie finalement une théorie générale cohérente en 1915. Quatre ans plus tard, lors d'une éclipse solaire, des scientifiques britanniques ont pu observer la courbure des rayons lumineux comme l'avait prédit Einstein. La presse populaire a couvert l'histoire et Einstein a immédiatement attiré l'attention du monde entier pour son exploit.

En 1921, Einstein a reçu le prix Nobel non pas pour sa théorie de la relativité, mais, étonnamment, pour ses travaux sur l'effet photoélectrique. Il a également reçu le Copley

Machine Translated by Google

Médaille de la ROYAL SOCIETY de Londres en 1925 et médaille d'or de la Royal Astronomical Society en 1926.

Avec la montée de l'antisémitisme en Europe, Einstein a accepté un poste à l'Institute of Advanced Study de Princeton, NJ, en 1933. Il y est resté jusqu'à sa mort le 18 avril 1955.

On ne peut pas exagérer l'effet que le travail d'Einstein a eu sur la physique moderne. L'un de ses principaux objectifs était d'unir la description discrète des particules et de la matière à la description continue du rayonnement électromagnétique et de développer une seule théorie unifiée des deux. Le résultat est la mécanique quantique. Un travail intense se poursuit aujourd'hui pour incorporer d'autres forces physiques, telles que la gravité, dans une grande théorie unifiée.

matrice élémentaire Voir ELIMINATION GAUSSIENNE.

Les Éléments Sans aucun doute le texte mathématique le plus influent de tous les temps, Les Éléments, écrit par EUCLIDE (vers 300-260 av. J.-C.), a fourni le modèle de toute la pensée mathématique pour les deux millénaires qui l'ont suivi.
Les mathématiciens conviennent que ce travail définit ce qu'est la poursuite des MATHÉMATIQUES PURES . Plus de 2 000 éditions des Éléments ont été imprimées depuis la production de sa première version composée en 1482.

Écrit en 13 volumes (appelés « livres »), Les Éléments représentent une compilation de toutes les mathématiques connues à l'époque. Organisé selon une structure logique stricte, Euclide commence l'ouvrage par un ensemble de définitions de base, de "notions communes" et d'axiomes (POSTULATS D'EUCLIDE), et en déduit, par le procédé du raisonnement logique pur, quelque 465 propositions (THEO REMs) sur les thèmes de la géométrie plane, de la théorie des nombres (généralement présentée en termes de géométrie) et de la géométrie solide. Le travail est vénéré pour sa clarté, sa précision et sa rigueur.

L'ouvrage est extrêmement laconique dans sa présentation. Il n'y a pas de discussion ou de motivation, et les résultats sont simplement énoncés et prouvés, se référant souvent à un chiffre accompagnant l'énoncé. Chaque preuve se termine par une reformulation de la proposition étudiée avec les mots "qui devait être prouvée". La traduction latine de cette expression est quod erat demonstrandum, et de nombreux mathématiciens aiment encore aujourd'hui terminer une preuve formelle par l'abréviation QED

Bien qu'il soit généralement admis qu'aucun résultat présenté dans Les Éléments n'a été prouvé par Euclide, l'organisation du matériel et le développement logique présentés sont originaux. Le choix par Euclide des postulats de départ montre une perspicacité remarquable et une profonde sagesse du sujet. Sa reconnaissance de la nécessité de formuler le controversé POSTULAT PARALLÈLE, par exemple, montre un niveau de génie au-delà de tous ceux qui ont essayé de prouver que son choix n'était pas pertinent au cours des deux millénaires qui ont suivi. (Ce n'est qu'au 19ème siècle, avec le développement de NON-EUCLIDEAN GEOME TRY, que les mathématiciens ont réalisé que le postulat parallèle était une hypothèse essentielle dans le développement de la géométrie planaire standard.)

Les six premiers livres des Éléments traitent du thème de la géométrie plane. En particulier, les livres I et II établissent les propriétés de base des triangles, des lignes parallèles, des parallélogrammes, des rectangles et des carrés, et les livres III et IV examinent les propriétés des cercles. Dans le Livre V, Euclide examine les propriétés des grandeurs et des rapports, et applique ces résultats à la géométrie plane du Livre VI. Euclide présente une preuve du THÉORÈME DE PYTHAGORE dans le Livre I.

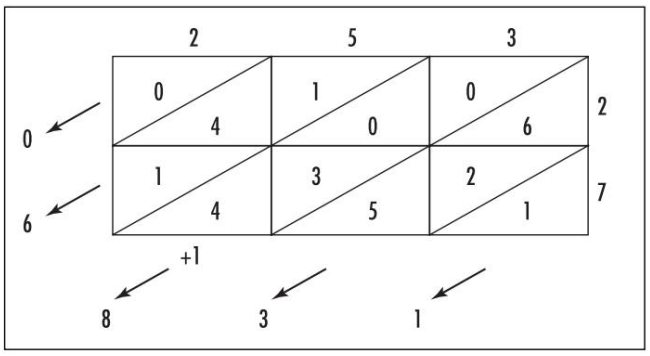
Les livres VII à X traitent de la THÉORIE DES NOMBRE. Le célèbre ALGORITHME D'EUCLIDE apparaît dans le livre VII, et LA PREUVE D'EUCLIDE DE L'INFINI DES PRIMES dans le livre IX. Le livre X traite de la théorie des nombres irrationnels, et Euclide prouve en fait l'existence de ces nombres dans cet ouvrage.

Les trois derniers volumes de The Elements explorent la géométrie tridimensionnelle. Le travail se termine par une discussion des propriétés de chaque SOLIDE PLATONIQUE et la preuve qu'il existe précisément cinq polyèdres de ce type.

méthode d'élimination pour les équations linéaires simultanées Autre nom de l'ÉLIMINATION GAUSSIENNE.

Multiplication élisabéthaine Également connue sous le nom de méthode galley et méthode du treillis, cette technique de multiplication était enseignée aux étudiants en mathématiques dans l'Angleterre élisabéthaine. Pour multiplier 253 et 27, par exemple, dessinez une grille de carrés 2 × 3. Écrivez le premier numéro en haut et le deuxième numéro en bas à droite. Divisez chaque cellule de la grille en diagonale.
Multipliez les chiffres de la rangée du haut, à tour de rôle, avec chacun des chiffres de la colonne de droite, en écrivant les produits en

Machine Translated by Google



Multiplication élisabéthaine

les cellules carrées appropriées de la grille en tant qu'entrées à deux chiffres. (Ainsi calculez 3 × 2 comme 06, par exemple.)

Additionnez les entrées de chaque diagonale en commençant par la diagonale en bas à droite. Notez le chiffre des unités et portez tous les chiffres des dizaines qui apparaissent sur la diagonale suivante. La réponse, 6 831, apparaît maintenant le long de la colonne de gauche et de la ligne du bas.

Cette procédure fonctionne pour les multiplications à plusieurs chiffres de n'importe quelle taille. Son succès repose sur la PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE de l'arithmétique et sur le processus d' EXPANSION DES CROCHETS. Dans notre exemple,

$$253 \times 27 = (2 \times 102 + 5 \times 10 + 3) \times (2 \times 10 + 7)$$
$$= (2 \times 2) \times 103 + (2 \times 7) \times 102 + (3 \times 2) \times 10 + (5 \times 2) \times 102 + (5 \times 7) \times 10 + 3 \times 7$$

Chaque diagonale correspond à une position de puissances de 10, avec des entrées placées dans une partie supérieure d'une cellule carrée correspondant aux chiffres portés à la position de puissances de 10 suivante. Essayez de calculer un problème de multiplication à la fois de la manière élisabéthaine et de la manière habituelle, côte à côte, pour voir que les deux méthodes ne diffèrent pas.

Voir aussi MULTIPLICATION ÉGYPTIENNE ; DOIGT MULTI PLICATION ; MULTIPLICATION; LES OS DE NAPIER ; RUSSE MULTIPLICATION.

ellipse Comme l'une des SECTIONS CONIQUES, une ellipse est la courbe plane constituée de tous les points P dont les distances de deux points donnés F1 et F2 dans le plan ont une somme constante. Les deux points fixes F1 et F2 sont appelés foyers de l'ellipse. Une ellipse apparaît également comme la courbe produite par l'intersection d'un plan avec une seule nappe d'un CÔNE circulaire droit.

En utilisant la notation |PF1 | et |PF2 | pour les longueurs des segments de droite reliant respectivement P à F1 et F2 , la condition de définition d'une ellipse peut s'écrire :

$$|PF1| + |PF2| = ré$$

où d désigne la somme constante.

L'équation d'une ellipse peut être trouvée en introduisant un système de coordonnées dans lequel les foyers sont situés aux positions F1 = (–c,0) et F2 = (c, 0), pour un certain nombre positif c. Il est commode d'écrire d = 2a, pour certains a > 0. Si P = (x,y) est un point arbitraire sur l'ellipse, alors la condition de définition dit :

$$\sqrt{(x + c)^{2} + y^{2}} + \sqrt{(x - c)^{2} + y^{2}} = 2a$$

Déplacer le deuxième radical vers la droite, mettre au carré et simplifier donne l'équation :

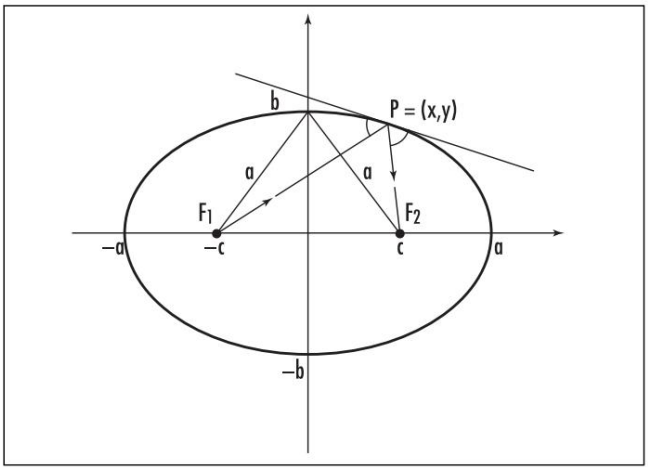
$$\sqrt{(x + c)^{2} + y^{2}} = 2a - \frac{c}{un}x$$

Équerre et simplifier à nouveau donne :

$$\frac{2x}{un^{2}} + \frac{ans^{2}}{un^{2} - c^{2}} = 1$$

En notant que a est supérieur à c, nous pouvons définir le positif comme a ber b. Ainsi $a^{2} - c^{2}$ égal à b 2 quantité, pour un nombre positif l'équation de l'ellipse est :

$$\frac{2x}{un^{2}} + \frac{ans^{2}}{b^{2}} = 1$$



Ellipse

Machine Translated by Google

Inversement, on peut montrer que toute équation de cette forme, avec a > b, donne bien une ellipse de foyers , 0), et dont les points P ont foyers une somme constante aux positions (± √a 2 – b 2 distances des 2a Si, au contraire, b > a, l'équation est à nouveau une ellipse, mais √b 2 cette fois avec des foyers le long de l' axe des ordonnées en (0,±).
2 - c

La somme commune des distances est 2b. (Si a est égal à b, la courbe est un CERCLE.)

L'équation montre qu'une ellipse croise l' axe x à x = ±a et l' axe y à y = ±b. Les nombres a et b sont appelés respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe.

Les ellipses ont la propriété de réflexion suivante : tout rayon de lumière émanant d'un foyer est réfléchi sur le côté de l'ellipse directement vers l'autre foyer. Ceci peut être prouvé en résolvant un problème d'OPTIMISATION .
Toute pièce dont les murs sont incurvés en forme d'ellipse a la propriété que tout murmure émis à un foyer peut être entendu par toute personne située au second foyer : non seulement les ondes sonores rebondissent sur le mur incurvé dirigé d'un foyer à l'autre, mais ils parcourent également la même distance et arrivent ainsi synchronisés au deuxième foyer.

Le Mormon Tabernacle à Salt Lake City, Utah, et la Whispering Gallery dans le bâtiment du Capitole des États-Unis à Washington, DC, sont construits pour avoir cette propriété.

Les miroirs elliptiques sont utilisés pour le traitement des calculs rénaux. En positionnant un miroir de manière à ce que le calcul rénal se trouve à un foyer, les médecins peuvent placer un générateur d'ondes sonores de haute intensité au deuxième foyer. Les ondes du générateur traversent sans danger le corps du patient pour ensuite se concentrer sur la pierre et la détruire.

Une ellipse peut être dessinée à l'aide d'un crayon, d'une ficelle et de deux punaises. En clouant chacune des deux extrémités de la ficelle à des endroits fixes (les foyers), on tire la ficelle tendue avec la pointe du crayon, puis on déplace lentement le crayon tout en gardant la ficelle tendue.
La courbe tracée est une ellipse, la somme constante des distances aux foyers étant la longueur de la corde.

Dans le processus de dérivation de l'équation d'une ellipse, nous avons présenté l'équation

$$\sqrt{2 ( ) xc ya - + =} - x \quad \frac{c}{un}$$

Ensemble $e = = \frac{c}{un} \quad \frac{\sqrt{un + B}}{un} = - \sqrt{1 \quad \frac{b}{un^2}}$. C'est ce qu'on appelle le EXCENTRICITE de l'ellipse et a une valeur comprise entre zéro et 1. L'équation ci-dessus peut être réécrite :

$$\frac{\sqrt{( ) xc y \quad 2 2 - +}}{X \quad \frac{un}{e}} = e$$

Le numérateur de la grandeur de gauche est la distance d'un point donné P à un foyer, et le dénominateur est la distance du point P à la verticale x = –a/e, appelée directrice de l'ellipse . Cette formulation fournit une caractérisation alternative de l'ellipse :

> Une ellipse est l'ensemble de tous les points P tels que le rapport de sa distance à un point fixe (le foyer) à sa distance à une ligne fixe (la direction) est égal à une constante e de valeur 0 < e < 1.

L' EXCENTRICITE d'un cercle est définie comme étant e = 0. Si e = 1, cette caractérisation donne une PARABOLE. Pour e > 1, on a un HYPERBOLA.

Voir aussi CERCLE D'APOLLONIUS ; PROJECTION.

ellipsoïde Toute surface géométrique ou solide situé dans un espace tridimensionnel possédant la propriété que tout plan qui le coupe produit une section transversale qui est soit une ELLIPSE soit un cercle est appelé un ellipsoïde. Une telle figure a trois axes de symétrie.

Un ellipsoïde centré autour de l'origine (0,0,0) a pour équation :

$$\frac{2x}{un^2} + + \frac{ans^2}{b\ 2} \quad \frac{2\ z}{2c} = 1$$

Les points (±a,0,0), (0,±b,0) et (0,0,+c) sont les emplacements où l'ellipsoïde croise les axes x, y et z, respectivement.

On peut créer un ellipsoïde en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes. Cela produit une figure avec deux des trois quantités a, b, c égales en valeur. Un ellipsoïde ainsi produit est appelé un sphéroïde, mais tous les ellipsoïdes ne sont pas des sphéroïdes. Si les trois quantités a, b et c ont la même valeur r, l'ellipsoïde est une SPHÈRE de rayon r.

Les mathématiciens ont montré que le volume d'un ellipsoïde est donné par (4/3)πabc. (Comparez cela avec l'équation du volume d'une sphère.) Depuis l'époque de LEONHARD EULER (1707-1783), les mathématiciens ont tenté de trouver une formule simple pour la surface

Machine Translated by Google

d'un ellipsoïde général. Cela s'est avéré être un problème très difficile et aucune formule fermée n'existe. (La surface d'une ellipse ne peut être exprimée qu'en termes d'« intégrale elliptique » difficile.)

ensemble vide (ensemble nul) Tout ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide. Par exemple, l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à trois et inférieurs à deux est vide, tout comme l'ensemble de toutes les personnes avec des branchies.

Un ensemble A est dit sous-ensemble d'un ensemble B, noté A B, si tous les éléments de A appartiennent à B. Par conséquent tout ensemble vide est sous-ensemble de tout autre ensemble. En particulier, si A et B sont tous les deux vides, alors AB et BA, et les deux ensembles vides sont égaux. Cela montre qu'il n'y a qu'un seul ensemble vide. Il est généralement noté Ø, mais il peut aussi s'écrire { }.

L'ensemble avec l'ensemble vide comme membre unique est écrit {Ø}, et l'ensemble avec l'ensemble contenant l'ensemble vide comme membre unique est écrit {{Ø}}. On construit ainsi une chaîne d'ensembles :

$$Ø, \{Ø\}, \{\{Ø\}\}, \{\{\{Ø\}\}\},\ldots$$

qui correspond naturellement à la séquence de comptage des nombres 0, 1, 2, 3, … Dans ce contexte, on pourrait soutenir que toutes les mathématiques découlent de l'ensemble vide. C'est donc un exercice intéressant que de donner une interprétation numérique à un ensemble de deux membres de la forme {Ø,{Ø}}, par exemple.

Un ensemble qui n'est pas vide est dit non vide.

Voir aussi THÉORIE DES ENSEMBLES.

point final Voir INTERVALLE.

épicycle Voir CYCLOÏDE.

définition epsilon-delta Voir LIMIT.

égalité Deux quantités sont dites égales si, dans un sens significatif, elles sont équivalentes. Par exemple, les quantités 2 + 3 et 5 ont la même valeur et sont donc égales. Les deux ensembles {a,b,c} et {c,a,b} sont égaux puisqu'ils contiennent les mêmes éléments. Le symbole = est utilisé pour dénoter l'équivalence de deux quantités, et donc nous écrivons 2+3 = 5 et {a,b,c} = {c,a,b}.

Deux expressions algébriques sont dites égales si l'une peut être transformée en l'autre par les règles standard de l'algèbre. Par exemple, $(x + 1)^2 + 3 = x + 2x + 4$. Deux fonctions sont dites égales si elles ont les mêmes domaines et produisent la même valeur de sortie pour chaque entrée. Par exemple, les fonctions f(x) = 9x et $g(x) = \frac{2^x \text{ journal } x^3}{\text{de bord } x^3}$, définis sur des valeurs positives de x, sont égal.

Le symbole = (une paire de segments de ligne parallèles pour indiquer l'égalité) a été introduit en 1557 par le mathématicien gallois ROBERT RECORDE (vers 1510-1558) "parce que 2 thynges ne peuvent être plus égaux".

Voir aussi ÉQUATION.

coefficients de mise en équation Deux polynômes $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ et $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ sont identiques en tant que fonctions, c'est-à-dire qu'ils donnent les mêmes valeurs de sortie pour chaque valeur d'entrée de x, seulement si les coefficients des polynômes correspondent : $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_0 = b_0$. (L'étude générale des POLYNOMES l'établit.) Le processus d'appariement des coefficients si deux polynômes sont connus pour être identiques est appelé "coefficients d'équivalence".

Par exemple, si x est égal à un polynôme de la forme $A + B(x - 1) + C(x - 1)(x - 2)$, alors, après EXPANDING BRACKETS, on a $x^2 = Cx^2 + (B - 3C)x + (A - B + 2C)$. L'équation des coefficients donne : C = 1, B – 3C = 0 (et donc B = 3), et A – B + 2C = 0 (et donc A = 1).
Ainsi $x^2 = 1 + 3(x - 1) + (x - 1)(x - 2)$. (Cette technique est souvent utilisée dans la méthode des FRACTIONS PARTIELLES.)

Comme autre exemple, si α et β sont les racines d'une équation quadratique de la forme $x^2 - mx + n$, alors : $x^2 - mx + n = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$. Nous comprenons alors que m est la somme des racines, et n leur produit .

assimilant parties réelles et imaginaires Deux NOMBRES COMPLEXES a + ib et c + id ne sont égaux que si a = c et b = d. L'utilisation de ce fait s'appelle « assimiler les parties réelles et imaginaires ». Par exemple, si $(x + iy)(2 + 3i) = 4 + 5i$, alors nous devons avoir $2x - 3y = 4$ et $3x + 2y = 5$.

LEONHARD EULER (1707-1783) a utilisé intelligemment cette technique pour trouver des formules pour PYTHAGOREAN

Machine Translated by Google

TRIPLES. Aussi, en utilisant sa célèbre formule $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$, aujourd'hui appelée FORMULE D'EULER , de nombreuses identités trigonométriques peuvent être établies rapidement en assimilant les parties réelles et imaginaires. Comme autre application, considérer la série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta)$. Puisque $\cos(n\theta)$ est le réel partie de $e^{jn\theta}$, la série en question est la partie réelle de la SÉRIE GÉOMÉTRIQUE $\sum_{n=0}^{\infty} \left(re^{j\theta}\right)^n$. Évaluer, donne

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} re^{j\theta}\right)^n = \frac{1}{1 - re^{j\theta}} = \frac{1}{(1 - r\cos(\theta)) - jr\sin(\theta)}$$

$$= \frac{1 - r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta)}$$

Ainsi nous avons $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1}{2}$.

équation Un énoncé mathématique qui affirme qu'une expression ou une quantité est égale à une autre s'appelle une équation. Les deux expressions ou quantités impliquées sont reliées par un signe égal, "=". Par exemple, l' énoncé $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ est une équation tout comme les énoncés $2x + 3 = 11$ et $10 = 2 \times 5$.

Une équation qui est vraie pour toutes les valeurs possibles des variables impliquées est appelée une IDENTITÉ. Pour Par exemple, $y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$ est une identité : cette équation y tion est vraie quelle que soit la valeur choisie pour y. Une équation qui n'est vraie que pour certaines valeurs des variables est appelée une équation conditionnelle. Par exemple, l'équation $2x + 3 = 11$ est conditionnelle, puisqu'elle n'est vraie que si x vaut quatre. L'équation $2c + d = 6$ est aussi une condition, puisqu'elle n'est valable que pour certaines valeurs de c et d.

Les nombres qui rendent une équation conditionnelle vraie sont appelés les solutions ou les racines de l'équation. Par exemple, la solution de $2x + 3 = 11$ est $x = 4$. Une équation peut posséder plus d'une solution, et l'ensemble de toutes les solutions possibles à une équation conditionnelle est appelé son ensemble de solutions. Par exemple, l'équation $y^2 = 9$ a un ensemble de solutions $\{3, -3\}$, et l'ensemble de solutions de l'équation $2c + d = 6$ est l'ensemble de toutes les paires de nombres de la forme $(c, 6 - 2c)$.

Le principe de base de la résolution d'une équation consiste à additionner, soustraire, multiplier ou diviser les deux côtés de l'équation par le même nombre jusqu'à ce que la variable souhaitée soit isolée d'un côté de l'équation. Par exemple, l'équation $2x + 7 = 5x + 1$ peut être résolue en soustrayant en soustrayant 1 des deux côtés pour donner $2x + 6 = 5x$, puis en soustrayant $2x$ des deux côtés pour obtenir $6 = 3x$, et enfin en divisant les deux côtés par 3 pour obtenir la solution $x = 2$. Cette approche fonctionne bien pour les ÉQUATIONS LINÉAIRES d'une variable. Pour les équations QUADRATIQUE et les équations POLYNOMIALES de degré élevé, on peut également être amené à prendre des racines carrées et supérieures dans le processus de résolution de l'équation. Cependant, toutes les équations ne peuvent pas être résolues algébriquement, auquel cas on ne peut rechercher qu'une SOLUTION GRAPHIQUE.

Il convient de noter que l'exécution de la même opération arbitraire des deux côtés d'une équation ne doit pas nécessairement préserver la validité de l'équation. Par exemple, bien que l'énoncé $9 = 9$ soit certainement valide, prendre une racine carrée des deux côtés de cette équation triviale pourrait donner le résultat invalide $-3 = 3$.
Bien que $2(x - 1) = 3(x - 1)$ soit vrai pour la valeur $x = 1$, la division par la quantité $x - 1$ donne $3 = 4$, conclusion invalide $2 = 3$. Et enfin, puisque $16 = 12$, sélectionner le numérateur de chaque côté de l'équation donne l'absurdité $12 = 3$. Il faut veiller à ce que les opérations utilisées pour résoudre une équation préservent bien l'égalité.

Même si l'application d'une même opération de part et d'autre d'une équation est jugée valable, un tel acte peut néanmoins conduire à une nouvelle équation pas nécessairement exactement équivalente à la première. Par exemple, en commençant par $a = b$, la mise au carré des deux côtés donne l'équation a qui $a^2 = b^2$, signifie maintenant $a = b$ ou $a = -b$. Les mathématiciens utilisent le symbole " " pour indiquer qu'une équation conduit à une seconde, mais que la seconde n'implique pas nécessairement la première. Par exemple, il convient d'écrire : $a = b \Rightarrow a = b$ 2 . (Mais $a = b \Rightarrow a = b$.) $a^2 = b^2$ Le symbole « » est utilisé pour indiquer que deux équations sont équivalentes, c'est-à-dire que la première implique la seconde, et que la seconde implique la première.
Par exemple, nous avons : $4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$.

Voir aussi ÉQUATION CUBIQUE ; HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET DE L'ALGÈBRE (essai).

équation d'une droite Une LIGNE droite dans un espace à deux dimensions a la propriété que le rapport de la différence des coordonnées y de deux points quelconques sur la droite (montée) à la différence de leurs coordonnées x (course) est toujours le même. Autrement dit, la PENTE d'une ligne droite est constante et peut être calculée à partir de deux points donnés sur la ligne. Précisément, si $(a1, b1)$ et $(a2, b2)$ sont

Machine Translated by Google

deux points sur la droite, et (x,y) sont les coordonnées d'un point arbitraire sur la droite, alors on a :

$$\frac{y - b1}{x - a1} = \frac{b2 - b1}{a2 - a1}$$

Cela fournit l'équation « en deux points » de la droite.
Par exemple, l'équation de la droite passant par les points (2,3) et (–1,5) est $\frac{y - 3}{x - 2} = \frac{2}{3}$.

La quantité $\frac{b2 - b1}{a2 - a1}$ est la pente m de la droite.

Ainsi, on peut réécrire la forme à deux points de l'équation comme $\frac{y - b1}{x - a1}$. Le réarrangement donne :

$$y - b1 = m(x - a1)$$

C'est ce qu'on appelle l'équation « forme point-pente » de la ligne. Par exemple, l'équation d'une droite de pente 4 passant par le point (5,7) est simplement y – 7 = 4(x – 5).
Travailler avec cette forme d'équation est utile si la pente de la ligne est déjà spécifiée.

La réorganisation de l'équation point-pente donne y = mx + (ma1 + b1). En désignant la constante ma1 + b1 simplement par b , on obtient l'équation :

$$y = mx + b$$

Notant que si x = 0, alors on a y = b. Cela montre que la constante b est l' ordonnée à l'origine de la droite. Pour cette raison, l'équation ci-dessus est appelée l'équation de la "forme d'interception de la pente" de la ligne. Ainsi, par exemple, l'équation d'une droite de pente –1 croisant l' axe y en position 3 est y = –x + 3.

Un inconvénient de la forme d'interception de pente est qu'elle ne permet pas d'écrire l'équation d'une ligne verticale, c'est-à-dire une ligne qui n'intercepte pas du tout l' axe des ordonnées. Le retour à la forme à deux points et la multiplication croisée donne l'équation (a2 – a1)(y – b1) = (x – a1)(b2 – b1). EXPANSION DES CROCHETS et réarrangement des termes donne à nouveau l'équation générale :

$$cx + dy = r$$

pour certaines constantes c, d et r. C'est ce qu'on appelle la forme générale de l'équation d'une droite. Par exemple, l'équation de la ligne verticale trois unités à droite de l' axe y est obtenue en sélectionnant c = 1, d = 0 et r = 3, pour donner l'équation x = 3.

Certains auteurs préfèrent diviser la forme générale de l'équation d'une droite par la constante r et modifier les noms des étiquettes restantes pour que l'équation se lise :

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$$

C'est ce qu'on appelle la forme d'interception de l'équation d'une droite.

Dans l'espace tridimensionnel, une ligne est spécifiée par un point (a,b,c) sur la ligne et un VECTEUR par v = <v1 ,v2 ,v3>, représentant la direction de la ligne. Ainsi les coordonnées (x,y,z) de tout autre point de la droite sont données par :

$$x = a + tv1\ y = b + tv2\ z = c + tv3$$

pour une certaine valeur du nombre réel t. Ce sont les ÉQUATIONS PARA MÉTRIQUES de la ligne. (Les équations paramétriques d'une ligne dans un espace à deux dimensions sont analogues.)

Si le vecteur v est calculé via la différence des coordonnées du point (a,b,c) et d'un deuxième point (a1 ,b1 ,c1) sur la droite, c'est-à-dire v1 = a1 – a,, v2 = b1 – b , et v3 = c1 – c—alors la résolution de t dans les équations paramétriques donne :

$$\frac{x - un}{a1 - un} = \frac{y - b}{b1 - b} = \frac{z - c}{c1 - c}$$

Ce sont les équations « en deux points » d'une droite dans un espace tridimensionnel.

Voir aussi DIRECTION COSINES ; ÉQUATION LINÉAIRE; ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES ; LIGNES INCLINÉES ; VECTEUR ÉQUATION D'UN PLAN.

équation d'un plan Voir ÉQUATION VECTORIELLE DE A AVION.

équiangulaire Un POLYGONE est dit équiangulaire si tous ses angles intérieurs sont égaux. Par exemple, un angle droit est équiangulaire (chaque angle intérieur vaut 90°), tout comme un triangle EQUILATERAL (chaque angle intérieur vaut 60°). Un polygone est dit régulier s'il est à la fois équiangulaire et équilatéral.

Un point (x,y) dans le plan cartésien est dit être un point de réseau si x et y sont des entiers, et un polygone dessiné dans le plan est dit être un polygone de réseau si son

Machine Translated by Google

les sommets se trouvent aux points du réseau. Les mathématiciens ont prouvé qu'il est impossible de tracer un polygone de réseau équiangulaire à n côtés si n est un nombre différent de 4 ou 8. (Tout polygone de réseau équiangulaire à quatre côtés est un rectangle, et tout polygone de réseau équiangulaire à huit côtés a huit angles intérieurs, chacun égal à 135°.) Le carré et l'octogone sont les deux seuls polygones de réseau réguliers.

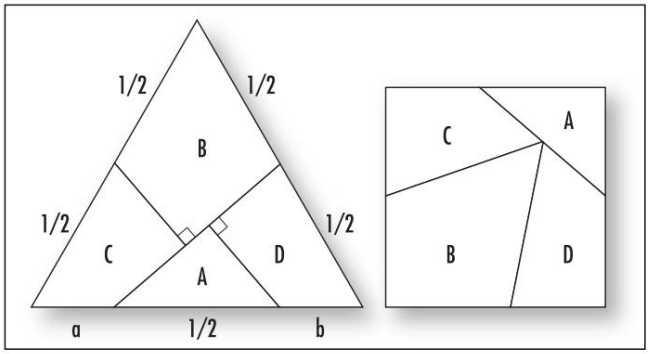
Voir aussi COORDONNEES CARTESIENNES.

équidécomposable Deux figures géométriques sont dites être équidécomposable s'il est possible d'en disséquer un figure en un nombre fini de pièces qui peuvent être reculées, sans chevauchement, pour former la deuxième figure. Pour exemple, un triangle équilatéral de côté 1 est équidécomposable avec un carré de même aire.

Dans l'image, a est de longueur $\frac{3 - \sqrt[4]{3}}{4}$ et b est de la $\frac{\sqrt[4]{3} - 1}{4}$. (Le défi de convertir un équilatéral longueur du triangle en carré par dissection était d'abord un casse-tête posé par le casse-tête anglais Henry Ernest Dudeney en 1907. Le défi est également connu sous le nom de puzzle de Haberdasher.)

Mathématicien écossais William Wallace (1768-1843) a prouvé que deux polygones quelconques du même aire sont équidécomposables. Mathématiciens ont prouvé depuis que le résultat reste valable même pour les figures aux contours courbes. En particulier, Le mathématicien hongrois Miklov Laczovich a démontré en 1988 qu'il fallait près de 1050 pièces pour transformer un cercle en carré.

Étonnamment, le résultat correspondant dans trois dimensions ne tient pas, même pour les polyèdres simples.



Figures équidécomposables

Mathématicien allemand Max Dehn (1878–1952) prouvé, par exemple, qu'un cube et un tétraèdre régulier de même volume ne sont pas équidécomposables.

équidistants Deux points P et Q sont dits équidistants d'un troisième point O s'ils sont identiques distance de O. On écrit : |PO| = |QO|.

Étant donné un seul point O dans un plan, l'ensemble de tous points équidistants de O est un CERCLE avec O comme son centre. Étant donné deux points A et B dans un plan, l'ensemble des tous les points équidistants de A et B est la bissectrice perpendiculaire du segment de droite AB, c'est-à-dire une droite perpendiculaire à AB et passant par le milieu de AB. (Pour voir cela, soit M le milieu de la segment de droite AB, et soit P un point quelconque de la bissectrice perpendiculaire à AB. Supposons que |PM| = x et |AM| = y = |MB|. Ensuite, par le THÉORÈME DE PYTHAGORE , nous avoir |PA| = = |PB|, donc P est équidistant de A et B. On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore pour vérifier que tout point n'appartenant pas à cette droite n'est pas équidistant de ces deux points.)

Étant donné trois points A, B et C dans un plan, pas dans un droite, il n'y a qu'un point P équidistant de tous les trois. (Pour voir cela, tracez les bissectrices perpendiculaires de AB et BC, et soit P l'unique point auquel ils se croisent. Alors P est équidistant de A et B, et P est également équidistant de B et C. Par conséquent, P est la même distance des trois points.) Notant que les points A, B et C peuvent être considérés comme les sommets de un TRIANGLE, cela prouve :

> Les trois bissectrices perpendiculaires des côtés de tout triangle se rencontrent en un point commun P.

(Cette observation est utilisée pour prouver que les trois ALTITUDES de tout triangle sont également CONCURRENTES.)

Pour aller plus loin, supposons que la distance commune de P à chacun des trois points A, B et C est r. Il s'ensuit qu'un cercle de rayon r centré sur P passe par chacun de ces points. Cela prouve:

> Pour tout triangle ABC il existe un seul cercle qui passe par chacun de ses sommets A, B, et C

Ce cercle est appelé le CIRCUMCERCLE du triangle, et le point P, le point commun d'intersection de les trois bissectrices perpendiculaires du triangle, est appelé centre circonscrit du triangle.

Machine Translated by Google

Dans l'espace tridimensionnel, l'ensemble de tous les points équidistants d'un seul point O est une sphère avec O comme centre. Étant donné deux points A et B, l'ensemble de tous les points équidistants d'eux est un plan qui passe par le milieu du segment de droite AB et lui est perpendiculaire. Étant donné trois points A, B et C, non tous alignés, l'ensemble de tous les points P équidistants des trois est une droite perpendiculaire au plan formé par les trois points et passant par le centre circonscrit du triangle ABC. Il n'est pas nécessaire qu'il y ait un point équidistant de quatre points donnés dans un espace tridimensionnel.

La distance d'un point à une ligne est la longueur d'un segment de ligne à partir du point rencontrant cette ligne à angle droit. Encore une fois, en utilisant le théorème de Pythagore et des triangles similaires, on peut montrer que l'ensemble de tous les points équidistants de deux lignes qui se croisent dans un plan est une paire de lignes perpendiculaires qui passent chacune par le point d'intersection des deux lignes, et chacune bissectrice un angle formé par les lignes. De plus, en raisonnant comme ci-dessus, on peut prouver :

> Dans tout triangle, les trois droites bissectrices des angles intérieurs du triangle se rejoignent en un point commun.

(Considérez d'abord le point d'intersection de seulement deux bissectrices d'angle. Ce point doit, en fait, être équidistant des trois côtés du triangle, et se trouve donc sur la troisième bissectrice d'angle.)

Voir aussi LIGNE EULER ; ENCERCLE.

équilatéral Un POLYGONE est dit équilatéral si tous ses côtés ont la même longueur. Par exemple, un carré est équilatéral, tout comme un triangle dont chaque angle intérieur est égal à 60°. Un polygone est dit « régulier » s'il est à la fois équilatéral et ÉQUIANGULAIRE.

Un point (x,y) dans le plan cartésien est dit « point de treillis » si x et y sont des entiers, et un polygone dessiné dans le plan est dit « polygone de treillis » si ses sommets se trouvent à points de réseau. Les mathématiciens ont prouvé qu'il est impossible de dessiner un polygone de réseau équilatéral avec un nombre impair de côtés, bien qu'il existe des polygones de réseau équilatéraux avec un nombre pair de côtés. Le carré et l'octogone sont les deux seuls polygones de réseau réguliers.

Voir aussi COORDONNEES CARTESIENNES.

relation d'équivalence Voir PAIRWISE DISJOINT.

Ératosthène de Cyrène (vers 275-195 av. J.-C.) Géométrie grecque , théorie des nombres, astronomie, géographe Né à Cyrène, en Afrique du Nord (la date de naissance exacte n'est pas connue), Ératosthène est connu comme la première personne à avoir calculé la circonférence de La terre. (Voir TERRE.) En utilisant la distance connue entre deux villes particulières, la longueur des ombres projetées par le soleil de midi sur ces villes et un raisonnement géométrique simple, Ératosthène a déterminé que la circonférence de la Terre était de 250 000 "stades". Malheureusement, la longueur exacte d'un « stade » n'est pas connue aujourd'hui, et il n'est donc pas possible d'être certain de l'exactitude de ce résultat. Si nous considérons, comme le suggèrent de nombreux historiens, que la longueur probable de cette unité est de 515,6 pieds (157,2 m), alors le calcul d'Eratosthène est extraordinairement précis.

Eratosthène s'est rendu à Athènes dans sa jeunesse et y a passé de nombreuses années à étudier. Vers 240 avant notre ère , il est nommé bibliothécaire de la plus grande bibliothèque du monde antique, la Bibliothèque d'Alexandrie. Au début de sa carrière universitaire, Ératosthène écrivit l'exposé Platonicus pour tenter d'expliquer les mathématiques sur lesquelles PLATON fondait sa philosophie. Bien que cet ouvrage soit aujourd'hui perdu, les érudits des temps ultérieurs s'y sont fréquemment référés et l'ont décrit comme une source inestimable détaillant les mathématiques de la géométrie et de l'arithmétique, ainsi que les mathématiques de la musique. Dans cet ouvrage, Eratosthène a également décrit le problème de la DUPLICATION DU CUBE et y a apporté une solution en utilisant un dispositif mécanique qu'il a inventé.

Ératosthène a également travaillé sur la théorie des nombres PRIME et a découvert une célèbre technique de "tamis" pour trouver les nombres premiers. Cette méthode est encore utilisée aujourd'hui et porte son nom.

En plus de mesurer la circonférence de la Terre, Ératosthène a également conçu des techniques ingénieuses pour déterminer la distance de la Terre au Soleil (qu'il a mesurée à 804 millions de stades), la distance entre la Terre et la Lune (780 000 stades) et l'inclinaison de l'axe de la Terre par rapport au plan dans lequel la Terre tourne autour du Soleil (qu'il a mesuré comme 11/83 de 180°, c'est-à-dire 23° 51′ 15″). Eratosthène a également cartographié avec précision une partie importante du Nil et correctement identifié l'occurrence de fortes pluies près de sa source comme la raison de son inondation erratique près de son embouchure. Il a compilé un cata astronomique

Machine Translated by Google

log liste plus de 675 étoiles spécifiques et conçoit un système de calendrier efficace qui inclut les années bissextiles.

En tant qu'érudit extraordinairement complet, Eratosthène a écrit des œuvres littéraires sur les thèmes du théâtre et de l'éthique, et a également écrit de la poésie. Son célèbre poème "Hermès" a été inspiré par ses études de astronomie.

On pense qu'Ératosthène est resté à Alexan dria pendant toute la dernière partie de sa vie. La date exacte de sa mort n'est pas connue.

Erdös, Paul (1913–1996) Hongrois Mathématiques discrètes, théorie des nombres Né le 25 mars 1913 à Budapest, en Hongrie, le mathématicien prolifique Paul Erdös (prononcé « air-plat ») est connu comme l'un des plus grands résolveurs de problèmes et poseurs de problèmes de tous les temps. Avec une capacité étonnante à créer des problèmes qui ont conduit à de nouveaux domaines productifs de recherche en mathématiques, Erdös est considéré comme le fondateur du domaine des «mathématiques discrètes», les mathématiques de l'informatique.

Sans domicile permanent, Erdös a parcouru le monde plusieurs fois au cours de sa vie, collaborant et écrivant des articles avec des universitaires de tous les pays. Ses collègues ont inventé le terme numéro d'Erdös pour décrire leurs liens étroits avec lui, attribuant un numéro d'Erdös de 1 à tous ceux qui avaient co-écrit un article avec Erdös, le numéro 2 à ceux qui avaient travaillé avec quelqu'un qui avait travaillé avec Erdös, et ainsi de suite. sur.

Selon sa nécrologie dans le New York Times, 458 mathématiciens peuvent revendiquer un nombre d'Erdös de 1, et plus de 4 500 universitaires un nombre d'Erdös de 2.

Erdös est entré à l'Université de Budapest en 1930 à l'âge de 17 ans, et en quelques années seulement, il a commencé à apporter des contributions significatives au domaine de la THÉORIE DES NOMBRE. À 20 ans, il découvre une nouvelle preuve élémentaire de conjecture de Joseph Bertrand (1822-1900), affirmant qu'au moins un PRIME est compris entre n'importe quel nombre n et son double 2n. (Le mathématicien russe PAFNUTY LIVOVICH CHEBYSHEV a établi la validité de cette affirmation, par des moyens compliqués, en 1850.) Plus tard dans la vie, Erdös a également trouvé une preuve élémentaire du célèbre THÉORÈME DES NOMBREUX PREMIERS.

En 1934, à l'âge de 21 ans, Erdös a obtenu un doctorat. en mathématiques de l'Université de Budapest. En raison de son héritage juif, Erdös a été contraint de quitter la Hongrie et il a accepté l'offre d'une bourse postdoctorale à Manchester, en Angleterre. Comme le situation en Europe a empiré, Erdös a décidé de déménager aux États-Unis en 1938.

Erdös n'a jamais accepté un poste universitaire permanent. Il a préféré consacrer toutes ses heures de veille à la poursuite des mathématiques et a voyagé d'une conférence ou d'un séminaire de mathématiques à l'autre, constituant un cercle croissant de collaborateurs. Dans la dernière partie de sa vie, Erdös ne possédait rien de plus qu'une valise de vêtements et voyageait d'université en université, et de la maison d'un mathématicien à l'autre.

Il s'est forgé une réputation de brillant mathématicien et d'invité épouvantable. Ne dormant que 3 à 5 heures par jour, Erdös réveillait souvent ses hôtes mathématiciens à toute heure de la nuit, désireux de se lancer dans des recherches plus mathématiques. À la fin de sa vie, Erdös avait travaillé sur plus de 1 500 articles mathématiques.

Il est décédé à Varsovie, en Pologne, le 20 septembre 1996.

Erdös a remporté de nombreux prix au cours de sa vie, dont le prix Cole de 1951 de l'American Mathematical Society pour son article de 1949 "On a New Method in Elementary Number Theory that Leads to an Elementary Proof of the Prime Number Theorem" et le Wolf de 1983. Prix de 50 000 $ de la Wolf Foundation.

Il a également reçu un salaire de l'Académie hongroise des sciences. N'ayant pas besoin d'argent, Erdös en donnait souvent, soit à des étudiants dans le besoin, soit comme prix pour la résolution de problèmes qu'il avait posés, dont il y en avait beaucoup. Aujourd'hui encore, les mathématiciens publient des articles inspirés par ces défis.

erreur La différence entre la valeur approximative d'une quantité et la vraie valeur numérique de cette quantité s'appelle l'erreur d'approximation. Il y a cependant une certaine confusion dans la littérature quant à la manière d'interpréter cette définition. Si x est une approximation de la valeur X, alors certains textes fonctionnent avec la différence X - x lorsqu'ils parlent de l'erreur, alors que d'autres textes utilisent la différence x - X. (Ainsi, l'erreur en utilisant 3,6 comme approximation pour 3,59, disons, pourrait être considéré comme 0,01 ou –0,01.) Pour cette raison, de nombreux auteurs préfèrent travailler avec « l'erreur absolue », $|X - x|$, et évitent complètement la question du signe.

Le terme erreur est également utilisé pour l'incertitude d'une mesure. Par exemple, on ne peut généralement lire la température qu'au degré Fahrenheit le plus proche. Ainsi, un enregistrement de température de 75 ° F doit être écrit, ou au moins interprété comme, (75 ± 0,5) ° F pour indiquer qu'il y a

Machine Translated by Google

est une erreur possible allant jusqu'à un demi-degré. Lorsqu'une mesure est écrite en notation décimale, il est généralement entendu que l'erreur absolue ne dépasse pas une demi-unité dans le dernier chiffre. Ainsi, par exemple, un enregistrement de 2,3 indique que l'erreur ne dépasse pas ±0,05, alors que l'enregistrement 2,30 indique que l'erreur ne dépasse pas ±0,005. Dans ce contexte, le dernier chiffre enregistré est généralement considéré comme fiable.

Si un nombre représentant une mesure n'a pas de partie décimale, un point est parfois utilisé pour indiquer jusqu'à quel point les chiffres sont fiables. Par exemple, en enregistrant une mesure comme 23 00, on nous dit que le 3 est le dernier chiffre fiable et que l'erreur dans cette mesure peut atteindre ±50 (la moitié de la place des 100). Une mesure enregistrée de 230 0, en revanche, indique que le premier zéro est fiable et que l'erreur sur cette mesure est au plus de ±5 (la moitié de la décimale).

Les chiffres jusqu'au chiffre fiable inclus sont appelés les chiffres significatifs de la mesure. Ainsi la mesure 23 00 a deux chiffres significatifs, par exemple, alors que la mesure enregistrée 230 0 a trois chiffres significatifs. Si un résultat est exprimé en NOTATION SCIENTIFIQUE, p × 10n, il est généralement entendu que tous les chiffres de p sont significatifs. Par exemple, en écrivant une valeur 0,0170 sous la forme 1,70 × 10–2, nous indiquons que le 0 final est le résultat d'une mesure, et donc ce chiffre est fiable. La quantité 0,0170 a donc trois chiffres significatifs (et l'erreur de cette mesure est au plus de ±0,00005). De même, une mesure enregistrée de 0,00030300, par exemple, a cinq chiffres significatifs. (Les trois premiers zéros de l'expansion décimale servent uniquement à placer correctement la virgule décimale. Les cinq chiffres restants représentent le résultat de l'enregistrement d'une mesure.)

Lors du calcul avec des valeurs approximatives, il est important de s'assurer que le résultat n'implique pas un niveau de précision irréaliste. Par exemple, si les dimensions de la pièce sont mesurées à 14,3 pieds sur 10,5 pieds, la multiplication de la longueur par la largeur donne la superficie de la pièce à 150,15 pieds2 . La réponse ainsi présentée suggère un niveau de précision au 1/100 près, ce qui est déraisonnable étant donné que les mesures initiales sont faites au 1/10 près. Généralement, le résultat d'un calcul doit être présenté comme n'étant pas plus précis que la mesure initiale la moins précise. Par exemple, en additionnant les mesures 230 0 et 1068, le résultat doit être enregistré comme 3370 (le nombre 3368 est arrondi à la dizaine la plus proche). En multipliant 14,3 et 10,5, chacun avec trois chiffres significatifs, le résultat doit être écrit 150 pi2 (encore trois chiffres significatifs).

Voir aussi ERREUR POURCENTAGE ; PRÉCISION; RELATIF ERREUR; ERREUR D'ARRONDI .

Euclide (environ 300–260 av. J.-C.) Géométrie grecque Le géomètre Euclide est connu comme l'auteur du texte le plus célèbre de l'ensemble des mathématiques, LES ÉLÉMENTS. En 13 livres, l'ouvrage couvre tout ce que l'on savait en mathématiques à son époque, de la géométrie élémentaire et de la théorie des nombres aux théories sophistiquées des proportions, des irrationnels et de la géométrie solide. Mais Euclide est vénéré aujourd'hui principalement pour son approche unique dans l'organisation du matériel qu'il a présenté. Partant d'un petit ensemble de définitions, de « notions communes » et d'AXIOMES (énoncés de base dont la vérité semble aller de soi), Euclide a dérivé par un raisonnement logique pur quelque 465 propositions (théorèmes) en mathématiques. Cela a établi des normes de rigueur et des pouvoirs de déduction qui sont devenus le modèle de tous les travaux ultérieurs en mathématiques pendant les deux millénaires qui ont suivi. On peut dire que Les Éléments définissent ce qu'est la MATHÉMATIQUE PURE .

On ne sait presque rien de la vie d'Euclide. On pense qu'il a vécu et enseigné à Alexandrie, une ville grecque près de l'embouchure du Nil dans l'actuelle Égypte, et qu'il a peut-être été bibliothécaire en chef de la grande bibliothèque de l'Académie d'Alexandrie. De nombreux textes historiques anciens décrivant le travail d'Euclide confondent le mathématicien Euclide d'Alexandrie avec le philosophe Euclide de Mégare, qui vécut environ 100 ans plus tôt. De plus, Euclide était un nom très courant à l'époque, et il y avait de nombreux érudits éminents dans divers domaines tout au long de cette période. En raison de la confusion qui a suivi et du manque d'informations spécifiques sur le mathématicien Euclide, certains historiens ont avancé la théorie selon laquelle Euclide n'était pas, en fait, un personnage historique, mais le nom adopté par une équipe de mathématiciens à la bibliothèque. d'Alexandrie qui publia un ouvrage complet sous le seul nom d'Euclide. (A comparer avec le fictif NICOLAS BOURBAKI du 20ème siècle). Ce n'est pas l'opinion populaire, cependant.

Les Éléments ont été considérés comme un texte d'étude standard pour les érudits grecs et romains pendant 1 000 ans. Il a été traduit en arabe vers 800 de notre ère et étudié de manière approfondie par des érudits arabes. Avec le regain d'intérêt scientifique à la Renaissance, l'œuvre d'Euclide

Machine Translated by Google

est devenu le modèle de la pensée logique en Europe. Plus de 2 000 éditions différentes du texte ont paru depuis la première version composée produite en 1482, et de nombreux grands scientifiques occidentaux, dont SIR ISAAC NEWTON (1642-1627) par exemple, ont décrit leur maîtrise de l'œuvre d'Euclide comme une partie importante de leur développement de la pensée scientifique. L'étude des éléments faisait partie intégrante du programme standard de mathématiques des lycées américains jusqu'aux années 1950.

D'autres travaux attribués à Euclide d'Alexandrie qui ont survécu aujourd'hui incluent Data , sur les propriétés des figures; Sur les divisions, étudier la théorie géométrique de la division des zones de figures en certaines proportions ; et Optique, le premier ouvrage grec sur la théorie de la PERSPECTIVE. On sait aussi qu'Euclide a produit au moins cinq autres textes de géométrie, dont un traité de quatre livres sur CONICS, ainsi qu'un ouvrage sur la musique et un autre traitant des principes scientifiques généraux.

Voir aussi les POSTULATS D'EUCLIDE .

Algorithme d'Euclide Dans son troisième livre des ÉLÉMENTS, EUCLIDE décrit une procédure systématique pour trouver le PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN de deux entiers positifs quelconques. La méthode est la suivante :

1. Écrivez la paire de nombres.
2. Soustrayez le plus petit nombre du plus grand.
3. Réécrivez la paire de nombres mais remplacez le plus grand nombre par la réponse de la deuxième étape.
4. Répétez les étapes deux et trois jusqu'à ce que vous ayez deux numéros identiques. Cette valeur répétée est le plus grand facteur commun des deux nombres originaux.

A titre d'exemple, on calcule le plus grand facteur commun de 42 et 60 :

$$42:60 \rightarrow 42:18 \rightarrow 24:18 \rightarrow 6:18 \rightarrow 6:12 \rightarrow 6:6$$

Leur plus grand facteur commun est 6. Chaque étape de la procédure produit une paire de nombres avec une plus petite différence. Finalement, une paire avec une différence nulle en résultera. L'algorithme euclidien est donc sûr de s'arrêter après un nombre fini de calculs.

Pourquoi l'algorithme fonctionne

Supposons que deux nombres a et b produisent finalement la valeur z via cette procédure :

$$a : b \rightarrow c : ré \rightarrow \ldots \rightarrow u : v \rightarrow z : z$$

Il n'est alors pas trop difficile de montrer que z est bien le plus grand facteur commun de a et b.

Premièrement, si a et b sont tous les deux des multiples de n'importe quel nombre n, alors leur différence l'est aussi. Cela signifie que toutes les paires de nombres produites par cette procédure restent des multiples de n. En particulier, z est un multiple de n. (Dans l'exemple ci-dessus, 42 et 60 sont des multiples de 3, par exemple. Tous les nombres produits via la procédure restent des multiples de 3. Ils sont également des multiples de 2 et de 6.) Cela établit que z est au moins aussi grand comme tout facteur commun de a et b.

Deuxièmement, en revenant sur la procédure, nous voyons que l'avant-dernière paire u : v est obtenue à partir de z : z par addition. (Regardez l'exemple ci-dessus.)
Ainsi u et v sont des multiples de z. En remontant jusqu'au bout, nous avons en fait que tous les nombres apparaissant dans la liste doivent être des multiples de z, y compris à la fois a et b. Ainsi z est un facteur commun.

Ces deux conclusions montrent que z est bien le plus grand facteur commun que nous recherchons. En prime, les deux paragraphes ci-dessus montrent également que le plus grand facteur commun de deux nombres est un multiple de tout autre facteur commun.

Combinaisons linéaires

Une conséquence surprenante de l'algorithme d'Euclide est qu'il donne également une méthode constructive pour écrire le plus grand facteur commun de deux entiers positifs a et b comme une combinaison linéaire des nombres originaux.

En gardant une trace des soustractions effectuées dans l'exemple ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned}
42 : 60 \rightarrow 42 : 18 &= (42) : (60–42) \rightarrow 24 : \\
18 &= (42) – (60 – 42) : (60 – 42) = (2 \times 42 – 60) : \\
&\quad (60 – 42) \rightarrow 6 : 18 = (2 \times 42 – \\
&\quad 60) – (60 – 42) : (60 – 42) \\
&\quad =(3 \times 42 – 2 \times 60) : (60 – 42) \rightarrow 6 : \\
12 &= (3 \times 42 – 2 \times 60) : (60 – 42) – (3 \times 42 – 2 \times \\
&\quad 60) = (3 \times 42 – 2 \times \\
&\quad 60) : (3 \times 60 – 4 \times 42) \rightarrow 6 : 6 = (3 \times 42 – 2 \\
&\quad \times 60) : (3 \times 60 – 4 \times 42) – (3 \times 42 – 2 \times 60) \\
&\quad = (3 \times 42 – 2 \times 60) : (5 \times 60 – 7 \times 42)
\end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire $6 = 3 \times 42 – 2 \times 60$ (et aussi $6 = 5 \times 60 – 7 \times 42$.) En général, cela montre qu'il est toujours

Machine Translated by Google

possible d'écrire le plus grand diviseur commun de deux nombres a et b sous la forme :

$$xa + yb$$

pour certains entiers x et y. Ce fait est utile pour résoudre le fameux PROBLÈME DE REMPLISSAGE DE JUG, par exemple.

Voir aussi THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE.

Géométrie euclidienne La GÉOMÉTRIE basée sur les définitions et les AXIOMES énoncés dans le célèbre ouvrage d'Euclide LES ÉLÉMENTS est appelée géométrie euclidienne. Le trait saillant de cette géométrie est que le cinquième postulat, le POSTULAT PARALLÈLE, est valable. Il s'ensuit qu'à travers n'importe quel point du plan il y a précisément une ligne passant par ce point parallèle à n'importe quelle direction donnée, que tous les angles d'un triangle totalisent exactement 180°, et que le rapport de la circonférence de n'importe quel cercle à son diamètre est toujours de la même valeur π.

La géométrie euclidienne bidimensionnelle est appelée géométrie plane et la géométrie euclidienne tridimensionnelle est appelée géométrie solide. En 1899, le mathématicien allemand DAVID HILBERT (1862-1943) a prouvé que la théorie de la géométrie euclidienne est exempte de CONTRADICTION.

Voir aussi EUCLIDE ; POSTULATS D'EUCLIDE ; L'HISTOIRE DE GÉOMÉTRIE (essai); GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

Espace euclidien (espace cartésien, n-espace) L' ESPACE VECTORIEL de tous les n-TUPLES (x1 ,x2 ,…,xn) de nombres réels x1 , x2 ,…,xn avec les opérations d'addition et de multiplication scalaire données par :

$$(x1 , x2 ,\ldots, xn) + (y1 ,y2 ,\ldots,yn) = (x1 , + y1 , x2 + y2 ,\ldots, xn + yn) \; k(x1 , x2 ,\ldots,xn) = (kx1 , kx2 ,\ldots,kxn)$$

et muni de la notion de distance entre les points x = (x1 , x2 ,…,xn) et y = (y1 , y2 ,…,yn) telle que donnée par la FORMULE DE DISTANCE :

$$ré(x,y) = \sqrt{(x1 - y1)^2 + (x2 + y2) 2+\ldots+(xn - yn)^2}$$

est appelé un espace euclidien.

Les éléments d'un espace euclidien bidimensionnel peuvent être identifiés par des points dans un plan par rapport à un ensemble d' axes de coordonnées cartésiennes . L'espace vectoriel de tous n-uplets de NOMBRES COMPLEXES sous un ensemble analogue d'opérations est appelé un espace euclidien complexe.

Les postulats d'Euclide EUCLIDE d'Alexandrie (ca. 300-260 avant notre ère) a commencé sa célèbre pièce en 13 volumes LES ÉLÉMENTS avec 23 définitions (du genre, "un point est ce qui n'a pas de partie" et "une ligne est ce qui n'a pas de largeur") suivies de 10 AXIOM divisés en deux types : cinq notions communes et cinq postulats. Ses notions communes étaient :

1. Les choses qui sont égales à la même chose sont égales à un autre.
2. Si des choses égales sont ajoutées à égales, alors les touts sont égaux.
3. Si des choses égales sont soustraites des égaux, alors les restes sont égaux.
4. Les choses qui coïncident les unes avec les autres sont égales à un autre.
5. Le tout est plus grand que la partie.

Les postulats d'Euclide étaient :

1. Une ligne droite peut être tracée pour joindre deux points.
2. Tout segment de ligne droite peut être étendu à une ligne droite de n'importe quelle longueur.
3. Étant donné n'importe quel segment de droite, il est possible de tracer un cercle avec le centre d'une extrémité et avec le segment de droite comme rayon.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si deux lignes droites émanant des extrémités d'un segment de ligne donné ont des angles intérieurs sur un côté donné du segment de ligne totalisant moins de deux angles droits, alors les deux lignes, si elles sont prolongées, se rencontrent pour former un triangle de ce côté du segment de ligne.

(Son quatrième postulat est une déclaration sur l'homogénéité de l'espace, qu'il est possible de déplacer des figures à différents endroits sans changer leur structure de base.)

Il convient de noter qu'Euclide a délibérément évité toute mention directe de la notion d'infini. Sa formulation du deuxième postulat, par exemple, évite la nécessité d'affirmer que les lignes droites peuvent être étendues indéfiniment, et son cinquième postulat, également connu sous le nom de PARAL LEL POSTULATE, évite la mention directe des lignes parallèles, c'est-à-dire des lignes qui ne se rencontrent jamais lorsqu'ils sont prolongés indéfiniment.

De ces hypothèses de base, Euclide a déduit, par un raisonnement logique pur, 465 énoncés de vérité (THEO-

Machine Translated by Google

REMs) sur les figures géométriques. L'approche systématique qu'il a suivie et la rigueur du raisonnement qu'il a introduite ont été saluées comme une grande réussite intellectuelle. Son modèle d'exploration mathématique est devenu la norme pour toutes les recherches mathématiques des 2 000 prochaines années.

Le cinquième postulat d'Euclide a toujours été considéré avec suspicion. Il n'a jamais été considéré comme aussi simple et aussi évident que ses quatre postulats restants, et Euclide lui-même a fait tout son possible pour éviter de l'utiliser dans son travail. (Euclide n'a invoqué le cinquième postulat qu'à sa 29e proposition.)
Au fil des siècles, les érudits en sont venus à croire que le cinquième postulat pouvait être logiquement déduit des quatre postulats restants et n'avait donc pas besoin d'être répertorié comme un axiome. De nombreuses personnes en ont proposé des preuves, y compris le philosophe grec Proclus du Ve siècle, qui est connu pour son récit historique de la géométrie grecque.
Malheureusement, sa preuve était erronée, comme l'étaient les preuves proposées par les savants arabes des VIIIe et IXe siècles, et par les savants occidentaux de la Renaissance.

En 1733, le professeur et érudit italien GIROLAMO SAC CHERI (1667–1733) croyait que parce que les axiomes d'Euclide modélisent le monde réel, qu'il pensait être cohérents, ils ne pouvaient pas conduire à une CONTRADICTION. Si les quatre premiers postulats impliquent effectivement que le cinquième postulat est également vrai, alors supposer les quatre postulats avec la négation du cinquième postulat devrait conduire à une incohérence logique. Malheureusement, en suivant ce tact, Saccheri n'a jamais rencontré de contradiction.

En 1795, le mathématicien et physicien écossais John Playfair (1748-1819) proposa une formulation alternative du célèbre cinquième postulat (aujourd'hui connu sous le nom d' AXIOME DE PLAY FAIR). Cette version de l'axiome est considérablement plus facile à manipuler et sa négation est plus facile à envisager. Dans une tentative de suivre l'approche de Saccheri, le mathématicien russe NICOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) et le mathématicien hongrois JÁNOS BOLYAI (1802–1860), sont arrivés indépendamment à la même conclusion surprenante : les quatre premiers postulats d'Euclide ainsi que la négation de Playfair version du cinquième postulat ne conduira pas à une contradiction. Cela établit, une fois pour toutes, que le cinquième postulat est un AXIOME INDÉPENDANT et ne peut être déduit des quatre postulats restants. Plus important encore, en explorant les géométries qui conduisent à supposer que le cinquième postulat ne tient pas, les chercheurs ont été conduits à la découverte de la GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE.

À la fin des années 1800, le mathématicien allemand DAVID HILBERT (1862-1943) a noté que, malgré sa rigueur, Le travail d'Euclid contenait de nombreuses hypothèses cachées. Il s'est également rendu compte, malgré les tentatives d'Euclide pour les décrire, que les notions de «point», «ligne» et «plan» ne peuvent pas être correctement définies et doivent rester des termes indéfinis dans toute théorie de la géométrie. Dans son ouvrage de 1899 Grundlagen der Geometrie (Fondements de la géométrie)
Hilbert a affiné et élargi les postulats d'Euclide en une liste de 28 hypothèses de base qui définissent tout ce qui est nécessaire dans un compte rendu complet de la géométrie d'Euclide. Ses axiomes sont aujourd'hui appelés axiomes de Hilbert.

Voir aussi GEOMETRIE EUCLIDEENNE; HYPERBOLIQUE GÉOMÉTRIE; GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

La preuve d'Euclide de l'infinitude des nombres premiers

Vers le troisième siècle avant notre ère, EUCLIDE a prouvé qu'il n'existe pas de nombre PRIME le plus grand , ce qui signifie que la liste des nombres premiers s'étend indéfiniment. Il a présenté sa preuve sous la forme de la proposition IX.20 dans son livre LES ÉLÉMENTS, et il a été le premier à reconnaître et à prouver ce fait à propos des nombres premiers.

La preuve d'Euclide repose sur l'observation que tout nombre N est soit premier, soit factorisé en nombres premiers. Son argumentation se déroule comme suit :

> Supposons au contraire qu'il existe un plus grand nombre premier p. Alors la liste finie 2, 3, 5, 7, …, p contient tous les nombres premiers. Mais considérez la quantité :
>
> $$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p + 1$$
>
> Il n'est divisible par aucun des nombres premiers de notre liste (il en reste un à chaque fois), et il n'a donc pas de facteur premier. Il faut alors que N soit premier. Ainsi, nous avons créé un nouveau nombre premier plus grand que le plus grand nombre premier p. Cette absurdité montre que notre hypothèse selon laquelle il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers doit être fausse.

L'argument d'Euclide est un exemple classique de PREUVE PAR CONTRADICTION. Son argument fournit également un ALGORITHME pour générer de nouveaux nombres premiers à partir de n'importe quelle liste finie de nombres premiers. Par exemple, à partir de la liste des nombres premiers 2, 3, 7, l'argument d'Euclide donne $N = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$ comme nouveau nombre premier, et à partir de la liste 2,3,7,43, nous avons $N = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807 = 13 \times 139$, donnant 13 comme nouveau nombre premier.

Machine Translated by Google

L'argument d'Euclide peut être développé davantage pour obtenir d'autres faits intéressants sur les nombres premiers. Par exemple, on peut prouver :

> Il y a une infinité de nombres premiers qui laissent un reste de 3 lorsqu'ils sont divisés par 4. (C'est-à-dire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme 4n + 3.)

Encore une fois, supposons au contraire que la liste de tels nombres premiers soit finie : 3, 7, 11,…,p, et cette fois considérons la quantité. N = 4 × (3 × 7 × 11 ×…× p) –1. Si ce nombre est premier, alors nous avons trouvé un nouveau nombre premier de la forme requise. Si ce n'est pas le cas, alors il se divise en nombres premiers : N = p1 × p2 ×…× pk . Remarquez que puisque N n'est pas divisible par 3, aucun de ses facteurs premiers n'est égal à 3. Il ne peut pas non plus être vrai que tous les facteurs premiers pi laissent un reste de 1 lorsqu'ils sont divisés par 4 (car alors N serait également laisser un reste de 1). Ainsi au moins un de ces facteurs premiers est un nombre premier de la forme 4n + 3 qui ne figure pas déjà dans notre liste de tels nombres premiers. Il doit être le cas alors que la liste de ces nombres premiers continue indéfiniment.

De la même manière (bien qu'il soit un peu plus conforme cité) on peut aussi prouver :

> Il existe une infinité de nombres premiers de la forme 6n+5.

(Utilisez N = 2 × 3 × 5 ×…× p – 1.) PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859) a généralisé ces résultats pour prouver que si a et b sont deux nombres entiers RELATIVEMENT PREMIERS , alors il y a une infinité de nombres premiers de la forme an + b.

Voir aussi THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE.

Eudoxe de Cnide (vers 408-355 av. J.-C.) Géométrie grecque , théorie des nombres, astronomie Né à Cnide, en Asie Mineure (aujourd'hui la Turquie), Eudoxe est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité. Tout son travail original est perdu, mais il est connu des écrivains ultérieurs qu'il était responsable du matériel présenté dans le livre V du célèbre traité d'Euclide LES ÉLÉMENTS. Dans sa théorie des proportions, Eudoxe a développé une théorie cohérente des NOMBRES RÉELS en utilisant une rigueur et une précision absolues. Toute l'importance de ce travail sophistiqué est apparue au grand jour environ deux millénaires plus tard, lorsque des érudits du XIXe siècle ont tenté de résoudre certains difficultés fondamentales avec la théorie de CALCULUS. Ils ont découvert qu'Eudoxe avait déjà anticipé ces problèmes fondamentaux et avait fait des pas significatifs vers leur résolution. Eudoxe est également connu comme le premier à avoir développé une « méthode d'épuisement » pour calculer la SURFACE des figures courbes.

Jeune homme, Eudoxe se rendit à Tarente, aujourd'hui en Italie, pour étudier la théorie des nombres, la géométrie et l'astronomie avec ARCHYTAS DE TARENTE, un disciple de PYTHAGORE. Les deux hommes ont travaillé pour résoudre le célèbre problème de la DUPLICATION DU CUBE et, en fait, Eudoxe a proposé sa propre solution géométrique au défi en utilisant des lignes courbes spéciales comme aide. (Bien que le problème n'exige l'utilisation que d'une boussole et d'une règle droite, cette solution partielle n'en était pas moins une réalisation importante.)

Eudoxe a étudié la théorie des proportions. Ce mélange de GÉOMÉTRIE et de THÉORIE DES NOMBRE appelle deux longueurs a et b COMMENSURABLES si elles sont chacune un multiple entier d'une longueur plus petite t : a = mt et b = nt. Dans cette approche, deux rapports a : b et c : d sont dits égaux s'ils sont les mêmes multiples de certaines longueurs fondamentales t et s : a = mt, b = nt et c = ms, d = ns.

On a longtemps cru que toutes les longueurs étaient commensurables et donc que tous les rapports pouvaient être comparés. Par conséquent, la découverte pythagoricienne de deux longueurs incommensurables, à savoir 1 et $\sqrt{2}$, la longueur du côté et la diagonale d'un carré unité, a provoqué une crise dans la communauté mathématique. Comme HIPPASE DE METAPONTUM (vers 470 avant notre ère) l'a découvert, il n'y a pas de petite valeur t telle que 1 = mt et $\sqrt{2}$ = nt. (C'est équivalent à l'affirmation selon laquelle le nombre $\sqrt{2}$ ne peut pas doit être écrit sous la forme d'une fraction n/m.)

Eudoxe est venu résoudre la crise de la comparaison des rapports même s'ils ne sont pas commensurables en évitant tout usage d'une longueur commune t. Il a défini les rapports a : b et c : d comme étant égaux si, pour toutes les paires possibles d'entiers n et m :

je. ma < nb si mc < nd ii. ma = nb si mc = nd iii. ma > nb si mc > nd

Avec cette formulation, Eudoxe était capable de comparer des lignes de n'importe quelle longueur, rationnelles ou irrationnelles, et d'éviter toutes les difficultés philosophiques associées à des quantités incommensurables. Le mathématicien JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916) a fondé

Machine Translated by Google

théorie des DEDEKIND CUTs sur cette approche développée par Eudoxe.

En géométrie, Eudoxe a été le premier à établir que le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre qui l'entoure, et aussi que le volume d'une pyramide est le tiers du volume d'un prisme de même base et hauteur. . ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (env. 287-212 avant notre ère) a utilisé ces résultats dans son célèbre traité Sur la sphère et le cylindre, citant Eudoxe comme la personne qui les a prouvés pour la première fois.

Eudoxe a maintenu un intérêt actif pour l'astronomie tout au long de sa vie. Il a construit un observatoire dans la ville de Cnide et a soigneusement noté le mouvement des planètes et des étoiles dans le ciel nocturne. En dehors des mathématiques, Eudoxe est surtout connu pour son ingénieuse théorie du mouvement planétaire basée sur un système de 27 sphères imbriquées. En utilisant des techniques avancées de géométrie tridimensionnelle, Eudoxe a pu utiliser ce modèle pour expliquer le mouvement rétrograde déroutant des corps célestes.



Leonhard Euler, le plus prolifique des mathématiciens célèbres, a apporté des contributions significatives à presque tous les domaines des mathématiques pures et appliquées étudiés à son époque tout en établissant de nouveaux cours de recherche. Une grande partie de la notation mathématique utilisée aujourd'hui a été introduite ou standardisée par Euler. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de Topham/The Image Works)

Euler, Leonhard (1707–1783) Suisse Analyse, Géométrie, Théorie des nombres, Théorie des graphes, Mécanique, Physique

Né le 15 avril 1707 à Bâle, en Suisse, le génie Leonhard Euler était, sans comparaison, le mathématicien le plus prolifique de tous temps. Avec plus de 850 livres et articles à son actif, Euler a apporté des contributions fondamentales à pratiquement toutes les branches des mathématiques de son époque. Il formalisa la notion de FONCTION (et introduisit la notation f(x) pour celle-ci), et changea ainsi l'orientation des mathématiques d'une étude des courbes et des lignes fixes vers une étude plus puissante de la transformation et du changement. (Il fut le premier, par exemple, à considérer les fonctions spéciales de TRIGONOMETRY comme des fonctions.) Euler a publié des travaux sur ANALYSIS, DIFFER

CALCUL ENTIEL, CALCUL INTÉGRAL, DIFFÉRENTIEL ÉQUATIONS, THÉORIE DES NOMBRES, GÉOMÉTRIE, LOGIQUE, COM BINATORIQUE, approximations de π, mouvement planétaire et astronomie, navigation, cartographie, mécanique, etc. Il a introduit et popularisé de nombreux symboles standard que nous utilisons aujourd'hui (tels que i pour $\sqrt{-1}$, π pour PI, E pour son célèbre nombre et Σ pour SOMME).

Il n'est tout simplement pas possible dans un court article de rendre justice à la quantité phénoménale des contributions d'Euler à l'étude des mathématiques.

Euler a obtenu une maîtrise en philosophie de l'Université de Bâle en 1723, à la suite de la chemin que son père lui a tracé pour étudier la théologie. Les intérêts d'Euler, cependant, résidaient dans les mathématiques, et Euler resta encore trois ans à l'université pour suivre un programme d'études dans ce domaine. En 1727, il soumit une candidature au grand prix de l'Académie des sciences de Paris pour la meilleure disposition des mâts sur un navire. Euler a remporté le deuxième prix, qui a attiré l'attention de la communauté scientifique en tant que jeune diplômé exceptionnel. Euler a accepté un poste à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg cette année-là et a été promu professeur titulaire de l'académie trois ans plus tard.

En 1736, Euler publia Mechanica (Mécanique), une pièce historique qui introduisait des techniques mathématiques rigoureuses comme moyen d'étudier le sujet. Il a remporté le Grand Prix de l'Académie de Paris en 1738, puis à nouveau en 1740, et était à cette époque un érudit très apprécié. A l'invitation de Frédéric le Grand, Euler

Machine Translated by Google

rejoint l'Académie des sciences de Berlin en 1741. Il y resta 25 ans, assumant la direction de l'académie en 1759.

Pendant son séjour à Berlin, Euler a écrit plus de 350 articles et plusieurs livres influents sur une grande variété de sujets en mathématiques pures et appliquées. Dans 1753, il invente la roue à aubes et l'hélice à vis pour propulser les navires sans vent. Dans 1761, il a développé une méthode d'utilisation de l'observation données sur la planète Vénus pour déterminer la distance de la Terre à partir du Soleil, ainsi que pour effectuer des mesures de longitude à la surface de la Terre.

En 1766, Euler retourna à Saint-Pétersbourg, mais bientôt tomba ensuite malade et perdit la vue. Bien qu'il soit aveugle, Euler a continué à produire des pièces importantes de travail. (Il a publié environ 500 livres et papiers alors qu'il était aveugle.) Euler a également travaillé à populariser le méthode scientifique et écrit, entre les années 1768 et 1772, sa célèbre pièce en trois volumes Lettres à un Princesse allemande sur le thème de la vulgarisation scientifique. Euler resta à Saint-Pétersbourg jusqu'à sa mort en 1783.

Le nom d'Euler est associé à au moins un concept fondamental dans presque toutes les branches des mathématiques. Pour exemple, LE THÉORÈME D'EULER est un résultat clé dans GRAPH THÉORIE, reliant le nombre de sommets et d'arêtes d'un graphique au nombre de régions qu'il produit. Le nombre e joue un rôle fondamental dans la théorie du calcul différentiel, les équations différentielles, la théorie des PROBABILITÉS , la STATISTIQUE, la théorie des SOUS-FACTORIELS et des dérangements, l'étude de l'INTÉRÊT COMPOSÉ et la étude des NOMBRES COMPLEXES par EULER FORMULE, par exemple. En théorie des nombres, EULER CONSTANT joue un rôle clé dans l'étude de la SÉRIE HARMONIQUE, par exemple. Euler a trouvé une formule pour la « fonction indicatrice d'Euler » qui fournit, pour un nombre n, le décompte des nombres inférieurs à n qui sont RELA TIVEMENT PREMIERS à n et a montré son importance dans théorie de l'ARITHMETIQUE MODULAIRE. Le nom d'Euler est intimement associé à l'étude du ZETA FUNCTION, avec la fonction gamma dans l'examen de la fonction FACTORIAL , avec l'étude de CARRÉS LATIN, et avec la construction de NOMBRES PAR FAIT pairs. (Personne à ce jour ne sait si ou il n'existe pas d'exemples de nombres parfaits impairs.)

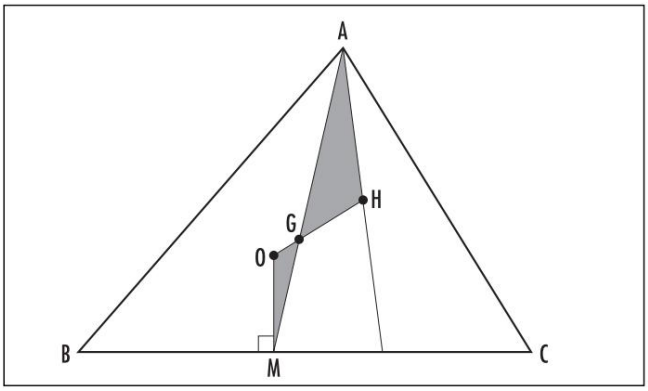
Moins connu est le polynôme d'Euler, $n^2 - n + 41$, qui produit une sortie PRIME pour chaque entrée entière de –39 à 40. Le bloc rectangu lar de 40 × 117 × 240, appelé « brique d'Euler », a la propriété que toute diagonale tracée sur la face de ce solide a aussi longueur entière. Euler a montré qu'il existe une infinité de nombreux blocs de ce type avec des longueurs de côté entières et des entiers diagonales du visage. (Personne à ce jour ne sait si ou il n'existe pas de brique d'Euler avec des diag onnels d'espace interne également de longueur entière.)

Euler est décédé à Saint-Pétersbourg, en Russie, en septembre 18, 1783. Il n'est pas exagéré de dire qu'Euler offert des informations approfondies sur pratiquement toutes les branches de mathématiques et de physique mathématique étudiés à son temps et, de plus, a ouvert la voie à de nombreuses nouvelles branches de la recherche mathématique. En 1915, l'Euler Comité de l'Académie suisse des sciences a commencé à rassembler et à publier ses œuvres complètes. Divisée en quatre séries—mathématiques, mécanique et astronomie, l'optique et le son, et les lettres et les cahiers - 76 volumes de travail ont été publiés à ce jour (couvrant environ 25 000 pages de documents écrits), et le comité projette encore huit volumes de matériel qui n'ont pas encore été publiés.

Chemin/circuit eulérien Voir THÉORIE DES GRAPHES.

Droite d'Euler Pour tout triangle, les conditions suivantes sont vraies :

1. Les trois MEDIANE D'UN TRIANGLE se rejoignent en un point G, le centre de gravité du triangle.
2. Les trois ALTITUDES d'un triangle se rejoignent en un point H, l'orthocentre du triangle.
3. Les bissectrices perpendiculaires de chaque côté d'un triangle se rencontrent en un point O, le centre circonscrit du triangle.



La ligne Euler

Machine Translated by Google

Ces affirmations sont prouvées par une étude des médiane d'un triangle, l'altitude d'un triangle et la considération des points ÉQUIDISTANTS , respectivement.

Au milieu des années 1700 LEONHARD EULER (1707–83) fait l'étonnante découverte qu'en outre, pour tout triangle, les trois points G, H et O sont COLLINEAIRE, c'est-à-dire allongé sur une ligne droite. Cette ligne est appelée droite d'Euler du triangle.

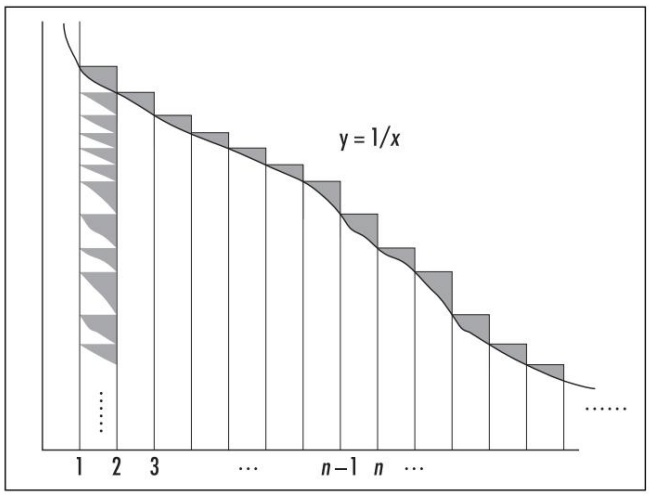
Euler a prouvé cette observation comme suit : Si, par hasard, les points O et G coïncident, alors chaque médiane du triangle est aussi une altitude. Cela signifie que le triangle est symétrique par rapport à chaque médiane, et doit donc être équilatéral. Par conséquent, le point H se trouve au même emplacement que O et G, et les trois points, trivialement, se trouvent sur une ligne droite. Si, comme c'est plus probablement le cas, O et G ne coïncident pas, puis tracez une ligne à travers et considérons un point J de cette droite situé de sorte que la longueur du segment GJ soit le double de celle de OG. Soit M le milieu de la base du triangle.

De l'étude des médianes d'un triangle, on sait que la longueur du segment AG à celle de GM dans le diagramme ci-dessus est dans un rapport de 2 à 1. Par conséquent, les deux les triangles grisés sont similaires, et, en particulier, les angles Match AJG et GOM . Par l'inverse du PARALLELE POSTULAT, les droites OM et AJ sont parallèles. Depuis l'OM fait un angle de 90° avec la base du triangle, donc aussi doit ligne AJ, faisant de cette ligne une hauteur par rapport au triangle.

Jusqu'à présent, rien dans cet argument ne repose sur le sommet A étant l'objet du focus. Le même raisonnement montre que l'altitude du sommet B passe également passant par le point J, tout comme l'altitude à partir du sommet C. Cela montre que le point J est en fait l'orthocentre H du triangle. Par conséquent, O, G et H font bien reposent tous sur la même ligne droite.

Constante d'Euler Dans le dessin de rectangles de largeur 1 qui viennent couvrir la courbe y = 1/x, on voit que la "l'aire en excès" au-dessus de la courbe s'adapte à l'intérieur du premier angle rectiligne de hauteur 1, et se résume donc à une valeur finie non supérieur à 1. La quantité de surface excédentaire, notée γ, est appelée constante d'Euler. À huit décimales près, il a valeur 0,57721566. Personne ne sait si γ est un nombre rationnel ou irrationnel.

Comme l'aire sous la courbe de x = 1 à x = n vaut $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n$, on a que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$ est approximativement égal à ln(n). Plus précisément, la somme des aires des n premiers rectangles est donnée par :



Comprendre la constante d'Euler

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \text{erreur}$$

où "l'erreur" est le terme moins tous les "excès zones » au-dessus de la courbe à partir de la position n . Avis que ces zones en excès rentrent toutes dans le rectangle de hauteur $\frac{1}{n}$, donc cette erreur n'est pas plus grande que $\frac{1}{n}$. En particulier, il est négligeable si n est grand.

Voir aussi SÉRIE HARMONIQUE.

La formule d'Euler En 1748 LEONHARD EULER note que la SÉRIE TAYLOR pour les fonctions e^x, péché x, et cos x sont intimement liés. Depuis

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\text{péché } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\text{parce que } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

en posant x = iθ, où i est la racine carrée de –1 et θ est un nombre réel (généralement considéré comme un angle), donne :

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

Machine Translated by Google

$$1 \quad ii\,je = + \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= (\text{série cos}\ \theta) + (\text{série sin}\ \theta)$$

La formule $e^{j\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ est aujourd'hui appelé La formule d'Euler. Cela a des conséquences intéressantes :

En posant $\theta = \pi$, on obtient : $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + je \cdot 0 = -1$. Les mathématiciens pensent souvent que cela comme l'un des plus beaux faits mathématiques : c'est une équation remarquablement simple qui relie les nombres mystérieux et omniprésents e, π, i et –1.

Réglage $\theta = \frac{\pi}{2}$ donne $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, ce qui montre que c'est-à-dire $(e^{\frac{i\pi}{2}})^2 = e^{\frac{2i\pi}{2}} = e^{i\pi}$. soulevant ainsi un complexe nombre à une puissance complexe peut donner un réel répondre en conséquence.

La formule d'Euler fournit un moyen très simple pour tirer (et mémoriser) certaines identités de TRIGONOMÉTRIE. Par exemple, depuis

$$e^{iA}\,e^{iB} = e^{i(A+B)}$$

nous avons:

$$(\cos A + i\sin A) \cdot (\cos B + i\sin B) = \cos(A + B) + i\sin(A + B)$$

Développer les parenthèses à gauche et collecter les termes qui contiennent i et ceux qui n'en contiennent pas donne rapidement :

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$
$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

De même, les équations $(e^{iA})^2$, $(e^{iA})^3$ ainsi de $= e^{je(2A)}$, $= e^{je(3A)}$, et suite donnent des formules à double angle et à triple angle, Par exemple.

La formule d'Euler est également utilisée pour représenter le complexe Nombres. Par exemple, si z est un point du complexe plan à une distance r de l'origine, faisant un angle θ avec l' axe des x, alors ses coordonnées x et y peuvent être écrit:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

et le nombre complexe est donc :

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

C'est ce qu'on appelle la forme polaire du nombre complexe. Si un multiple de deux nombres complexes, $z = re^{i\theta}$ et $w = se^{i\tau}$, on voit que $z \cdot w = rse^{i(\theta+\tau)}$, c'est-à-dire:

> Le produit de deux nombres complexes est un nouveau nombre complexe dont la distance à l'origine est le produit des distances à l'origine des deux nombres originaux, et dont l'angle avec l' axe des x est la somme des deux angles formés par les deux nombres originaux.

La formule d'Euler rend la dérivation de ce fait rapide et facile.

Voir aussi NOMBRES COMPLEXES ; DE MOIVRE POUR MULA ; E FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

Théorème d'Euler (formule d'Euler, Euler-Descartes pour mula) Un GRAPH est une collection de points, appelés sommets, reliées deux à deux par des segments de droite, appelés arêtes, divisant ensuite le plan en un nombre fini de Régions. En 1752, LEONHARD EULER montra que si un le graphe dessiné sur le plan a v sommets, e arêtes et divise le plan en un total de r régions (cela inclut la grande « région extérieure »), alors :

$$v - e + r = 1 + c$$

où c est le nombre de "composantes connexes" de le graphique, c'est-à-dire le nombre de morceaux distincts de dont il est composé. Par exemple, le graphique présenté est composé de deux "morceaux distincts" (c = 2) et a neuf sommets, 13 arêtes et divise le plan en sept régions distinctes, et en effet v – e + r vaut 3, un de plus que c.

La formule est facilement prouvée via une INDUCTION argument sur le nombre d'arêtes : si un graphe n'a arêtes, alors il est constitué uniquement de v points déconnectés. Ainsi, il a c = v composants et divise le plan en une seule région. La formule v - e + r = 1 + c tient vrai. On vérifie que l'ajout d'une arête soit divise un région en deux (augmentant ainsi la valeur de r de un), crée une région supplémentaire si ce bord est une boucle (en augmentant à nouveau la valeur de r de 1), ou relie deux composants déconnectés du graphique (ainsi

Machine Translated by Google

en diminuant la valeur de c de 1). Dans tous les cas la formule v – e + r = 1 + c reste équilibrée.

La formule est généralement appliquée à un graphique qui est connexe, c'est-à-dire qui n'a qu'un seul composant (c = 1). Dans ce cas la formule s'écrit :

$$v - e + r = 2$$

et cette version de l'équation est généralement appelée théorème d'Euler.

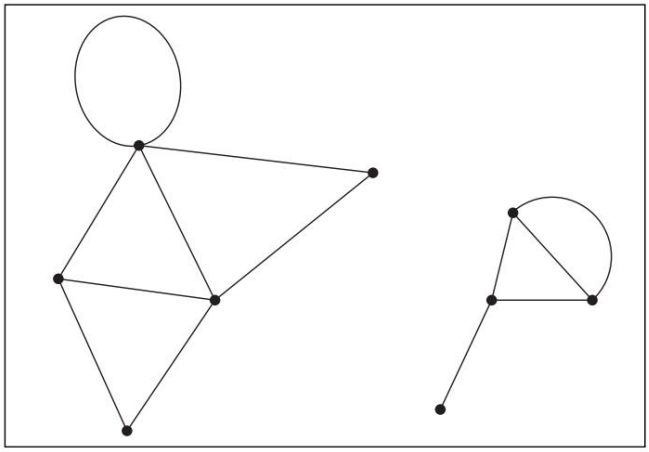
Les sommets, les arêtes et les faces d'un POLYÈDRE peuvent être considérés comme un graphe connexe. Par exemple, un cube dont la face supérieure a été retirée et poussée à plat sur un plan donne un graphique avec huit sommets et 12 arêtes divisant le plan en six régions. (La grande région "extérieure" correspond à la face supérieure du cube qui a été supprimée.) Nous avons toujours : v - e + r = 2. En général, pour tout polyèdre avec v sommets, e arêtes et f faces, nous avons :

$$v - e + f = 2$$

Cela a été observé pour la première fois par RENÉ DESCARTES en 1635. Euler n'avait aucune connaissance des travaux de Descartes lorsqu'il a développé la formule dans le cadre plus général de la théorie des graphes. Pour cette raison, cette fameuse formule est aussi appelée la formule d'Euler-Descartes.

Ce résultat n'est vrai que pour les graphes qui se trouvent sur le plan (ou les polyèdres qui peuvent être poussés à plat sur un plan). On peut montrer que pour des graphes connexes dessinés sur un TORUS, par exemple, la formule doit être ajustée pour lire : v – e + r = 0. Par exemple, si un polyèdre contient un trou (par exemple, un cube percé d'un trou carré), on a : v – e + f = 0. (Il y a ici une difficulté technique : il faut être sûr que chaque région ou face considérée est pas lui-même un ANNULUS.

Il peut être nécessaire de dessiner des bords supplémentaires pour diviser les régions en une forme appropriée.)



Un graphique à deux composantes

fonctions paires et impaires Une fonction y = f(x) est dite paire si, pour chaque x, la fonction prend la même valeur à la fois pour x et –x, c'est-à-dire f(–x) = f(x) pour toutes les valeurs de x. Le graphe d'une fonction paire est donc symétrique par rapport à l'axe vertical. Les fonctions x^2, $3x - 5$, cos(x), et $\sqrt{4 + x}$, par exemple, sont même des fonctions.

Une fonction y = f(x) est dite impaire si, pour chaque x, la fonction prend des valeurs opposées en x et –x, c'est-à-dire f(–x) = –f(x) pour toutes les valeurs de x. Le graphe d'une fonction impaire est donc symétrique par rapport à une rotation de 180° autour de l'origine. Les fonctions x, x^3, $x^3 + x^2 - x$, sin(x), et $\frac{3x^5 - 7x}{4 + x^2}$, par exemple, sont impairs les fonctions.

Toute fonction g(x) peut être exprimée comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Laisser:

$$\text{même}(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2}$$

$$\text{impair}(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2}$$

Alors feven(x) est pair, fodd(x) est impair et g(x) = feven(x) + fodd(x).

La SÉRIE DE FOURIER de toute fonction paire ne contient que des termes cosinus, et la série de Fourier de toute fonction impaire uniquement des termes sinus. La valeur absolue de toute fonction impaire f(x) est une fonction paire, c'est-à-dire que si y = | f(x)|, alors y est pair.

nombres pairs et impairs Travaillant uniquement dans le domaine des nombres entiers, un nombre est dit pair s'il est divisible par 2, et impair s'il laisse un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 2. Par exemple 18 est divisible par 2 et donc est pair, et 23 laisse un reste de 1 et donc est impair.

Il y a une interprétation physique de l'uniformité ou de l'impair d'un nombre : un nombre pair de cailloux, par exemple, représente un tas qui peut être divisé en deux

Machine Translated by Google

parties - 18 galets divisés en deux tas de 9, par exemple. Un tas de cailloux impair laisse un caillou supplémentaire quand on tente d'accomplir cet exploit : 23 cailloux se divisent en deux tas de 11, avec un reste. Cette interprétation montre que le nombre zéro est pair : un tas vide de cailloux peut être divisé en deux tas égaux de rien.

La combinaison de plusieurs tas de cailloux, dont chacun peut être divisé uniformément, produit un gros tas qui peut encore être ainsi séparé. Cela montre que la somme de toute collection de nombres pairs est paire. La combinaison de deux tas de cailloux impairs produit un résultat qui est pair - les deux cailloux «errants» se combinent pour produire un résultat qui peut être divisé de manière égale. La somme de trois nombres impairs laisse cependant un seul caillou errant, et c'est donc impair. En résumé nous avons :

La somme de n'importe quel nombre de nombres pairs est même.

La somme d'un nombre pair de nombres impairs est même.

La somme d'un nombre impair de nombres impairs est impair.

Ces idées simples sont assez puissantes. Par exemple, nous pouvons rapidement constater que :

La somme des nombres de 1 à 100 sera paire.

(Cette somme contient 50 nombres pairs et 50 nombres impairs.)

Il est impossible de rendre la monnaie d'un dollar en utilisant une combinaison de 13 pennies, nickels et quarters.

(Treize pièces de valeur impaire totaliseront un montant impair. Il est alors impossible d'atteindre une somme de 100.)

Si 15 feuilles arbitraires sont arrachées à un manuel, la somme des numéros de page manquants est nécessairement impaire.

(Chaque feuille contient un numéro de page impair d'un côté et un numéro de page pair de l'autre. La somme de 15 nombres impairs et de 15 nombres pairs est nécessairement impaire.)

Dix-sept tasses sont placées à l'envers sur une table. En retournant quatre tasses à la fois, il est impossible d'atteindre un état dans lequel chaque tasse est droite.

(Pour être laissé debout, chaque tasse doit être retournée un nombre impair de fois au cours du jeu. Ainsi, un nombre impair d'inversions doit se produire en tout, soit une somme de 17 nombres impairs. Mais un total impair ne se produira jamais lorsque vous retournez un nombre pair de tasses à la fois.)

Voir aussi PARITE.

événement Tout sous-ensemble de l' ESPACE ÉCHANTILLON de tous les résultats possibles d'une expérience est appelé un événement. Par exemple, l'acte de lancer un dé a un espace échantillon {1, 2, 3, 4, 5, 6}—les six scores possibles—et l'événement "le score est pair" est le sous-ensemble {2, 4, 6 }. Un événement peut être un résultat unique ("rouler un deux", par exemple, est le sous-ensemble {2}), l'ensemble de l'espace d'échantillonnage ("rouler un nombre inférieur à 10") ou l'ensemble vide ("rouler un multiple de Sept").

La probabilité qu'un événement E se produise est le rapport entre le nombre de résultats de cet événement et le nombre total de résultats possibles. Ce rapport est noté 1– P(E). Par exemple, en lançant un dé, P(pair) = = 2 $\frac{3}{6}$,

P({5,6}) = 6 $2 = \frac{1}{3}$, 0– et P(multiple de 7) = = 0. 6 LA

THÉORIE DES ENSEMBLES est utile pour analyser les chances que des combinaisons d'événements se produisent. Si A et B représentent deux événements pour une expérience, alors :

L'intersection A ∩ B représente l'événement " A et B se produisent tous les deux."

L'union A B représente l'événement « soit A ou B se produit.

Le complément A′ représente l'événement "A ne se produit pas".

Pour illustrer : si, en lançant un dé, A est l'événement {2, 4, 6} et B l'événement {5,6}, alors A ∩ B = {6}, A B = {2, 4, 5 , 6}, et A′ = {1, 3, 5}.

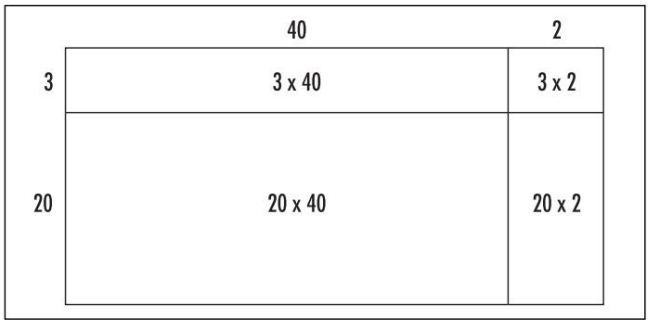
Les lois de probabilité suivantes sont valables pour deux événements A et B :

je. P(A ∩ B) = P(A) + P(B) – P(A B). ii. Lorsque A et B sont des événements disjoints, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas résultats en commun, alors P(A B) = P(A) + P(B). iii. P(A′) = 1 – P(A). iv. Lorsque A et B sont des ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS, P(A ∩ B) = P(A) × P(B).

L'étude des PROBABILITÉS explique ces règles.

Voir aussi CONDITIONNEL ; MUTUELLEMENT EXCLUSIF ÉVÉNEMENTS; CHANCES.

Machine Translated by Google



Calcul du produit de 23 et 42

Parenthèses expansives La figure géométrique d'un rectangle explique le processus d'expansion des parenthèses. Prenons, par exemple, un rectangle de 23 x 42. Sa SURFACE est donnée par le produit 23 × 42. Ce produit peut facilement être calculé en considérant 23 comme 20 + 3 et 42 comme 40 + 2. Cela correspond à subdiviser le rectangle en quatre morceaux :

On a donc (20 + 3) × (40 + 2) = 20 × 40 + 20 × 2 + 3 × 40 + 3 × 2, ce qui équivaut à 800 + 40 + 120 + 6, soit, 966, qui est bien 23 × 42.

Notez que chacun des quatre termes de la somme est le produit d'un nombre dans le premier ensemble de parenthèses (20 ou 3) et d'un nombre dans le second ensemble (40 et 2), avec toutes les paires de nombres possibles apparaissant. Ce principe vaut en général. Par exemple, la quantité (x + y)(a + b + c) est égale à la somme de six produits : xa + xb + xc + ya + yb + yc (cela correspond à la subdivision d'un rectangle en six morceaux), et (r + s + t + u + v)(k + l + m + n + o + p + q) est la somme de 35 produits individuels.

Ce principe s'étend à n'importe quel nombre d'ensembles de parenthèses. Par exemple:

$$(2 + 3) \times (4 + 5) \times (6 + 7) = 2 \times 4 \times 6 + 2 \times 4 \times 7 + 2 \times 5 \times 6 + 2 \times 5 \times 7 + 3 \times 4 \times 6 + 3 \times 4 \times 7 + 3 \times 5 \times 6 + 3 \times 5 \times 7$$

(Encore une fois, sélectionnez un terme dans chaque ensemble de parenthèses, en vous assurant d'inclure toutes les combinaisons possibles.) Cela correspond à la subdivision d'un cube en huit morceaux.

Cela vaut également pour les produits contenant des termes uniques avec des ensembles de parenthèses. Par exemple, nous avons : (a + b) × x × (c + d) = a × x × c + a × x × d + b × x × c + b × x × d.

De nombreuses écoles enseignent des dispositifs mnémoniques pour étendre correctement les parenthèses. Ceux-ci peuvent être plus compliqué que simplement comprendre le processus simple à portée de main.

Voir aussi PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE ; IMBRANCHE MULTIPLICATION.

valeur attendue (espérance, moyenne) La valeur attendue d'un jeu de hasard impliquant des paris monétaires est le gain (ou la perte) moyen ou MEAN par jeu auquel vous vous attendriez si le jeu était joué un grand nombre de fois. La valeur attendue illustre la mesure dans laquelle un jeu est mis en votre faveur ou contre vous. Pour démontrer : imaginez que vous avez la possibilité de jouer au jeu de dés suivant :

> Vous lancez un seul dé et regardez le score obtenu.
> Si un 1 apparaît, vous gagnez 10 $, et si un 2 apparaît,
> vous gagnez 5 $. Si un autre numéro est lancé, vous payez
> des frais de 3 $ pour jouer au jeu.

Est-ce un jeu qui vaut la peine d'être joué ?

Avec 600 parties de ce jeu, on s'attendrait à ce que près d'un sixième de ces lancers (environ 100 d'entre eux) rapporte un 1, et donc un gain de 10 $, un autre sixième des lancers (c'est-à-dire environ 100 lancers) pour donnent un 2 et un gain de 5 $, et les deux tiers des lancers (environ 400) entraînent une perte de 3 $ (c'est-à-dire un bénéfice de -3 $).
Le gain moyen sur 600 rouleaux serait donc de :

$$\frac{100\ 10\ 100\ 5\ 400\ 3) \times + \times + \times - (}{600} \quad \frac{1}{6} \quad = \times + \times + \times \frac{1\ 4\ 10\ 3)}{5\ 6\ 6} \quad ($$

$$= 0.50$$

c'est-à-dire un gain de 50 cents par match. Cette valeur attendue positive montre que le jeu vaut bien la peine d'être joué. Notez, cependant, que l'on peut encore perdre de l'argent en jouant au jeu. Ce qui a été démontré ici, c'est que, sur le long terme, le jeu est en votre faveur.

Notez l'apparition des fractions 1/6, 1/6 et 4/6 dans notre calcul de la valeur attendue. Il s'agit des probabilités que chaque résultat identifié se produise réellement. De telles probabilités apparaissent toujours lors du calcul de la valeur attendue. En général, si une expérience donne des valeurs numériques x1 , x2 ,…,xn , pi étant la probabilité que le résultat xi se produise, alors la valeur attendue de l'expérience est donnée par :

$$x1p1 + x2p2 + \ldots + xn\ pn$$

Machine Translated by Google

Par exemple, en lançant une paire de dés, la somme attendue est :

$$2\,\frac{1}{36} + 3\,\frac{2}{36} + 4\,\frac{3}{36} + 5\,\frac{4}{36} + 6\,\frac{5}{36} + 7\,\frac{6}{36} + 8\,\frac{5}{36} + 9\,\frac{4}{36} + 10\,\frac{3}{36} + 11\,\frac{2}{36} + 12\,\frac{1}{36}$$

(Les sommes possibles sont les nombres 2 à 12, la probabilité de lancer 2 étant de 1/36, un 3 étant de 2/36, et ainsi de suite.)

La valeur attendue est généralement désignée par la lettre μ de l' ALPHABET GREC. Si une expérience a un nombre infini de résultats possibles, alors la valeur attendue est donnée par une somme infinie (SERIES). La DISTRIBUTION BINOME en est un exemple. Si le phénomène aléatoire peut produire un tableau continu de valeurs (par exemple, la taille d'un individu peut être n'importe quelle valeur, y compris les fractions), alors la valeur attendue est donnée par un INTEGRAL :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx$$

Ici p(x) est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire considérée pour le DISTRIBUTION.

La notion de valeur attendue a été développée pour la première fois par le scientifique néerlandais Christiaan Huygens (1629-1695) dans son traité On Reasoning in a Dice Game.

Voir aussi HISTOIRE DES PROBABILITÉS ET STATISTIQUES (essai).

exposant (indice) Pour un nombre réel b et un nombre entier positif m, la sténographie b m est utilisée pour la multiplication répétée de b avec lui-même m fois : b m = b × b ×…× b (m fois). Ainsi, par exemple, 25 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32, (–1)3 = (–1) × (–1) × (–1) = –1, m est appelé le exposant, ou l'indice, et $\frac{1}{3}^{2} = \frac{1}{9}$, et 101 = 10. Dans l'expression b m, b est appelé la base de l'exponant. On appelle aussi b m de b. un pouvoir

Le produit de deux expressions b m et b n de même base b est lui-même une multiplication répétée du nombre b. Précisément:

$$b^{m} \times b^{n} = (b \times b \times \cdots \times b) \times (b \times b \times \cdots \times b) = \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{m+n \text{ fois}} = b^{m+n}$$

Ceci établit la règle de multiplication pour les exposants :

> Pour multiplier deux expressions de même base, retenez la base commune et additionnez les exposants : $b^{m} \times b^{n} = b^{m+n}$.

La règle de puissance pour les exposants, (b m) n = b mn, suit. (Il faut ajouter m à lui-même n fois.) La règle de multiplication est considérée comme fondamentale et permet de définir des quantités exponentielles b m pour des valeurs de m autres que des nombres entiers. Nous suivons le principe selon lequel la règle de multiplication doit toujours être valable.

Considérons, par exemple, l'expression 20 . Cette quantité n'a aucun sens lorsqu'elle est interprétée comme "la multiplication de deux avec elle-même zéro fois". Cependant, on peut attribuer une valeur significative à cette expression en la multipliant par une autre puissance de deux. Par exemple, selon la règle de multiplication, il faut que 20 × 2 5 = 20+5 = 25 . Cela dit que 20 × 32 = 32, ce qui nous dit que 20 doit être égal à un. La règle de multiplication conduit donc à la règle :

> L'exposant zéro pour toute base non nulle est égal à 1 : $b^{0} = 1$.

Pour donner un sens à la quantité 2–1, invoquez à nouveau la règle de multiplication. Nous avons, par exemple, $2^{-1} \times 2^{3} = 2^{-1+3} = 2^{2}$. Cela se lit comme suit : 2–1 × 8 = 4. Il doit donc être vrai que 2–1 = 1/2. Des calculs similaires montrent que 2–2 doit être égal à 1/4 et que 2–3 doit être égal à 1/8. En général, $2^{-\text{mois}} = \frac{1}{2^{\text{mètres}}}$ Cela fonctionne pour toute base non nulle b.

> Un exposant négatif indique qu'une réciproque b^{-n} doit être pris : $b^{-n} = \frac{1}{b^{n}}$.

Nous pouvons utiliser cette observation pour calculer $\frac{6^{5}}{4^{5}}$, Par exemple. Réécriture, nous avons $\frac{6^{5}}{4^{5}} = 1 \times \frac{6}{4} \times \frac{6}{4} \times \frac{6}{4} \times \frac{6}{4} \times \frac{6}{4} = 4^{-5} \times 6^{5} = 5\,525\,64\,2$.

> Pour diviser deux expressions de même base, retenez la base commune et soustrayez les exposants :
>
> $$\frac{b^{m}}{b^{n}} = b^{n-m}$$

Machine Translated by Google

La règle de multiplication nous permet également de donner un sens à exposants fractionnaires. Considérons que la $2^{\frac{1}{2}}$. Il doit quantité 2 soit le cas où $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$. Ainsi $2^{\frac{1}{2}}$ est une valeur qui, multiplié par lui-même, est égal à 2. Par conséquent $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. De même, $2^{\frac{1}{3}}$ est une valeur qui, multipliée par lui-même trois fois, est égal à 2, et donc $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$, le cube racine de 2. En général, $2^{\frac{1}{n}}$ est égal à la nième racine de 2. Cette fonctionne pour toute base non nulle.

> Un exposant fractionnaire indique qu'une racine doit être prise : $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

Nous utilisons la règle de puissance pour donner un sens à d'autres types de exposants fractionnaires. Par exemple, la quantité $27^{\frac{2}{3}}$ peut être calculé comme $27^{\frac{1}{3} \times 2} = (27^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$. En général, nous avons :

$$b^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{1}{q} \times p} = (\sqrt[q]{b})^p$$

Enfin, pour calculer une quantité élevée à un irrationnel puissance, on approche l'exposant par une fraction, calcule l'expression exponentielle correspondante, et prend la LIMITE au fur et à mesure qu'on utilise de mieux en mieux approximations. Par exemple, écrire $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, on voit que n'importe laquelle des fractions $\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \ldots$ peut être utilisé pour approximer $\sqrt{2}$ avec des diplômes de mieux en mieux de précision. On définit $2^{\sqrt{2}}$ être la limite des valeurs :

$2^{1{,}4} = 2^{\frac{14}{10}} = (\sqrt[10]{2})^{14} \approx 2.639$, $2^{1{,}41} = 2^{\frac{141}{100}} = (\sqrt[100]{2})^{141} \approx 2.657$, $2^{1{,}414} = 2^{\frac{1414}{1000}} \approx 2.665$, ….

Les règles de multiplication et de puissance sont valables même pour les exposants irrationnels. Par exemple, nous avons :

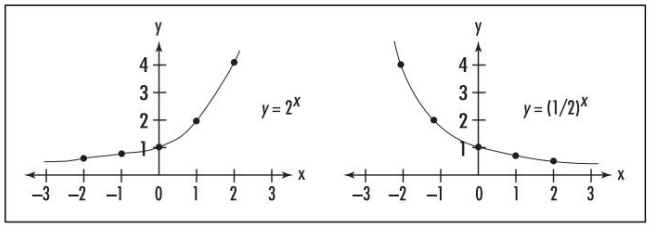
$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} = 2$$

Le mathématicien grec ARCHIMÈDE DE SYRA CUSE (287-212 av. J.-C.) fut l'un des premiers érudits à utiliser un mot spécial pour la puissance d'un nombre. Il appelé la quantité 10 000, 10^4, une myriade, et il a utilisé l'expression "myriade de myriades" pour 10 000 au carré, $10^4 \times 10^4 = 10^8$. Les anciens Grecs, pour qui mathématiques étaient synonymes de géométrie, appelaient carré d'une quantité indéterminée un nombre tétragone, signifiant un "nombre à quatre coins". DIOPHANTE DE ALEXANDRIE (vers 200–284 CE) a utilisé le mot grec dynamis, signifiant "pouvoir", pour le carré d'un inconnu, et a appelé une troisième puissance un "cube", une quatrième pouvoir un "pouvoir-pouvoir", et cinquième et sixième pouvoirs « power-cube » et « cube-cube », respectivement.

Il a fallu plusieurs siècles aux savants pour commencer à utiliser symboles pour désigner des quantités inconnues. Allemand mathématicien Michael Stifel (vers 1487-1567) était le premier à développer un système de notation pour les puissances de une quantité indéterminée x. Il désigna le quatrième puissance de x simplement comme xxxx. D'autres chercheurs ont développé systèmes de notation alternatifs. Les universitaires finissent par opté pour le système de notation mathématicien et philosophe français RENÉ DESCARTES (1596–1650) introduit en 1637, celui que nous utilisons aujourd'hui. Bien que Descartes ne considérait que les exposants intégraux positifs, plus tard ce siècle-là, le mathématicien anglais SIR ISAAC NEWTON (1642–1727), inspiré par le travaux de JOHN WALLIS (1616-1703), ont montré que le même système de notation peut être étendu pour inclure exposants négatifs, fractionnaires et irrationnels. LEON HARD EULER (1707-1783) permit plus tard la possibilité d'exposants complexes.

Voir aussi NOMBRES COMPLEXES ; FONCTION EXPONENTIELLE TION ; LOGARITHME.

fonction exponentielle Toute fonction ou grandeur qui varie comme la puissance d'une autre grandeur est dite exponentielle. Précisément, si b est un nombre positif différent à partir de un, alors la fonction $f(x) = b^x$ est appelée fonction exponentielle de base b. La fonction est définie pour tout nombre réel x. (Ce ne serait pas le cas si b étaient négatifs : la valeur b par exemple, serait $b^{\frac{1}{2}}$ pas de sens.) Les graphiques de $y = 2^x$ et $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fonctions exponentielles

Machine Translated by Google

illustrent les différences essentielles entre les cas b > 1 et 0 < b < 1.

De nombreux types de croissance et de décroissance se produisent à un rythme qui implique une variation exponentielle. Par exemple, une colonie de bactéries peut se reproduire à un rythme qui double la taille de la colonie toutes les 24 heures. Si initialement 500 organismes sont présents, après 1 jour, la culture atteint une taille de 1 000 organismes, après 2 jours jusqu'à une taille de 2 000 organismes, et à la fin du troisième jour, il y a 4 000 organismes. En général, la taille de la population à la fin du jour N est donnée par 500 × 2 N. Toute formule de la forme ABx avec b > 1 et A constante est censée représenter une croissance exponentielle. Cette formule est un exemple simple de MODÈLE DE POPULATION.

La formule analogue avec 0 < b < 1 représente la décroissance exponentielle. La désintégration des matières radioactives en est un exemple typique. Par exemple, si 50 % de la radioactivité produite par une explosion nucléaire disparaît après 5 jours, alors après 10 jours, il ne reste que 25 % de la radioactivité et 12,5 % après 15 jours. Le pourcentage de radioactivité présente après N jours est donné par la formule $\left(\frac{1}{2}\right)^{5N}$. Le niveau de la radioactivité diminue mais n'atteindra jamais zéro.

La DÉRIVÉE d'une fonction exponentielle f(x) = b x peut être calculée via DIFFÉRENCIATION IMPLICITE après avoir d'abord pris un LOGARITHME. Précisément, si y = b x alors ln y = x · ln b. La différenciation donne $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \ln b$, et donc $\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$. Soit :

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

Cette formule de la dérivée est grandement simplifiée si l'on travaille avec la base b = e, où e est défini comme étant le nombre tel que ln e = 1. Nous avons :

La dérivée de e^x est e^x. Par conséquent, le graphique de la fonction exponentielle f(x) = e x a la propriété que la pente du graphique en tout point est la même que la valeur de la fonction en ce point.

La fonction f(x) = e x est parfois appelée fonction exponentielle. Comme la dérivée de cette fonction est particulièrement simple, il n'est pas surprenant que le nombre e soit omniprésent dans toutes les études de CALCULUS.

série exponentielle La SÉRIE TAYLOR de la fonction $f(x) = e^x$, donné par $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ est appelée la série exponentielle. Le RATIO TEST de l'étude des CONVERGENT SERIES montre que cette série converge pour toutes les valeurs de x. LEONHARD EULER (1707-1783) a utilisé cette série pour prouver sa célèbre formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, aujourd'hui appelée FORMULE D'EULER .

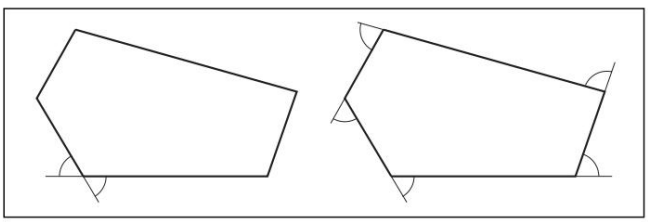
expression Toute combinaison significative de symboles représentant des nombres, des opérations sur des nombres ou d'autres entités mathématiques est appelée une expression. Par exemple, 2 + x et a^{b+c} sont des expressions. On pourrait soutenir que x + y = 2 est une expression, bien que les mathématiciens préfèrent l'appeler une équation. De la même manière, $\sqrt[3]{8}$ pourrait être appelé une expression même s'il équivaut à un seul nombre. Dans FORMAL LOGIC, les instructions composées sont parfois appelées expressions. Par exemple, ¬(p (q r)) est une expression.

Le mot exprimer est souvent utilisé dans le sens de « transformer ». Par exemple, le produit (x – y)(x + y) peut être exprimé de manière équivalente par la DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS : $x^2 - y^2$

angle extérieur Un ANGLE compris entre un côté d'un POLYGONE et le prolongement d'un côté adjacent est appelé angle extérieur du polygone. Puisque deux arêtes d'un polygone se rencontrent à un sommet, il y a deux angles extérieurs à chaque sommet. On voit facilement, cependant, que ces deux angles ont la même valeur.

La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est de 360°, puisque ces angles correspondent à un tour complet. Ce résultat est également vrai pour les polygones concaves si l'on considère les angles qui tournent vers la gauche comme positifs et ceux qui tournent vers la droite comme négatifs.

Le THÉORÈME DE L'ANGLE EXTÉRIEUR , prouvé pour la première fois par le géomètre EUCLIDE (vers 300–260 avant notre ère), déclare que



Angles extérieurs

Machine Translated by Google

l'angle extérieur à un sommet d'un triangle a une valeur supérieure à celle d'un angle intérieur à l'un des deux sommets restants.

Voir aussi CONCAVE/CONVEXE.

théorème de l'angle extérieur Dans son célèbre ouvrage LES ÉLÉMENTS, le géomètre EUCLIDE (vers 300-260 av. J.-C.) a établi le résultat suivant, qu'il a appelé le théorème de l'angle extérieur :

Pour un triangle ABC donné avec des angles intérieurs x et y et un angle extérieur z comme indiqué, nous avons z > x et z > y.

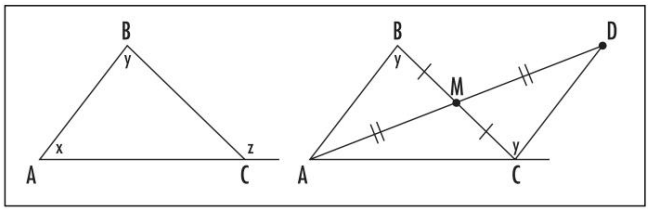
Le résultat se prouve comme suit :

Soit M le milieu du côté BC et prolongeons une ligne du point A à M jusqu'à un nouveau point D de sorte que AM et DM aient la même longueur.
Considérons les triangles AMB et DMC. Ils partagent deux côtés de mêmes longueurs et un angle commun à M. Selon le principe SAS de similarité, les deux triangles sont des figures congruentes. Par conséquent, l'angle MCD correspond à l'angle MBA, qui est y. Puisque z est nettement plus grand que l'angle MCD, nous avons que z > y.
Un argument analogue basé sur une ligne passant par le milieu du côté AC établit que z est également supérieur à x.

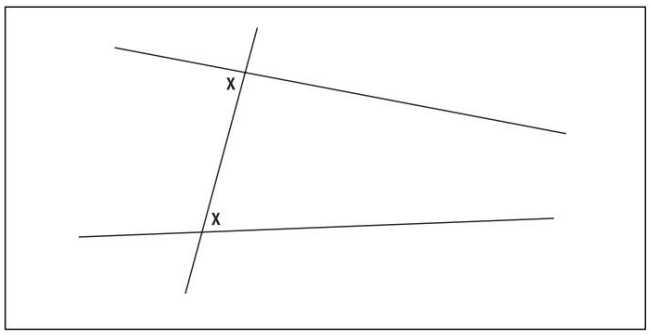
Ce théorème a une conséquence très importante.

Si deux droites coupées par une sécante produisent des angles intérieurs alternés égaux, alors les deux droites sont parallèles.

Dans le schéma ci-dessus, si les deux angles étiquetés x sont bien égaux, alors les droites ne peuvent pas se rejoindre à droite pour former un triangle : l'angle extérieur x ne peut pas être supérieur



Comprendre le théorème de l'angle extérieur



Angles intérieurs alternés égaux

que l'angle intérieur x. De même, les lignes ne peuvent pas se rencontrer à gauche pour former un triangle pour la même raison. (Travailler avec l'angle 180 – x.) Il faut alors que les droites soient parallèles.

Ce résultat est la CONVERSE du POSTULAT PARALLÈLE célèbre et controversé d'Euclide .

Il est important de noter qu'Euclide a prouvé le théorème de l'angle extérieur et sa conséquence sans supposer que le postulat parallèle est valable. Si l'on est prêt à supposer que les trois angles d'un triangle totalisent toujours 180° (un énoncé équivalent au postulat parallèle), alors la preuve du théorème de l'angle extérieur est TRIVIAL .

extraction Le processus de recherche de la RACINE d'un nombre ou de la solution d'une équation algébrique est parfois appelé extraction. Par exemple, extraire la racine carrée de 3 est le processus de recherche de sa racine carrée. (On pourrait utiliser la MÉTHODE DE HERON , par exemple, pour calculer √ 3 = 1,7320508…)

Le terme extraction de chiffres est souvent utilisé pour décrire toute méthode permettant de calculer un chiffre spécifique d'un nombre sans calculer les chiffres précédents. Par exemple, en 1995, le mathématicien Simon Plouffe a découvert les formules remarquables suivantes pour π :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \left(\frac{1}{16}\right)^n$$

Elle a conduit les mathématiciens à une technique qui calcule le Nième chiffre de π en base 16 sans avoir à calculer les N – 1 chiffres précédents. (En base 16, le nombre π apparaît sous la forme 3.243F6A8885A308D … où

Machine Translated by Google

A représente 10, B représente 11, et ainsi de suite, avec F représentant 15. Chaque décimale est une puissance de seizième.) Malheureusement aucune technique analogue n'est actuellement connu pour calculer facilement la base 10 ordinaire de π.

extrapolation Processus d'estimation de la valeur d'une fonction en dehors d'une plage de valeurs connue est appelée extrapolation. Par exemple, si la température d'un tasse de thé était initialement à 200 °F, puis a été mesurée 100°F et 50°F 10 et 20 minutes plus tard, respectivement, alors on pourrait deviner que sa température après 30 minutes serait 25°F. Méthodes d'extrapolation sont normalement beaucoup moins fiables que INTERPOLATION, les processus d'estimation des valeurs de fonction entre valeurs. Les scientifiques préfèrent généralement éviter de faire des prévisions basées sur l'extrapolation. Les météorologues, cependant, doivent utiliser des techniques d'extrapolation pour prévisions météorologiques. Les prévisions à long terme sont généralement considérées comme peu fiables.

Voir aussi MODÈLES DE POPULATION.

théorème des valeurs extrêmes Ce théorème affirme qu'un FONCTION CONTINUE f(x), définie sur un INTERVAL [a,b], atteint une valeur maximale et une valeur minimale quelque part dans cet intervalle. C'est, il existe un point c dans l'intervalle [a,b] tel que f(x), ≤ f(c), pour tout x dans [a,b], et il existe un autre point d dans [a,b] tel que f(x) ≥ f(d) pour tout x dans [a,b]. Par exemple, le théorème des valeurs extrêmes nous dit que, sur le intervalle [1,5] disons, la fonction f(x) = 3x · cos(x ^{2} + sinx) adopte en effet une valeur plus grande. Il ne nous dit pas, cependant, où cette valeur maximale se produit. Un point à laquelle une fonction a une valeur maximale ou minimale est appelé un extrême.

Le théorème est intuitivement clair si l'on pense à un fonction continue sur un intervalle fermé comme celle dont graphique se compose d'une seule pièce continue sans lacunes, sauts ou trous : en déplaçant un crayon de la gauche point final (a,f(a)) au point final droit (b,f(b)), un ne douterait pas qu'il doit y avoir un point culminant sur la courbe où f(x) atteint sa valeur maximale, et un point bas où il atteint sa valeur minimale. Une preuve rigoureuse du théorème repose cependant sur la notion de complétude des nombres réels (c'est-à-dire qu'aucun point ne manque à la droite réelle). Ce est une propriété subtile, qui n'a été bien comprise qu'à la fin des années 1800 avec l'invention d'un DEDEKIND COUPE. Par exemple, la fonction f(x) = 2x – ^{2x} – = x(2 – x) n'a pas de valeur maximale sur l'intervalle [0, 2] si la valeur 1 est exclue de nos considérations. Bien que cela semble un exemple artificiel, un encore faut-il s'assurer que ce type de problème peut ne se produisent jamais.

Il est essentiel que la fonction considérée soit continue et que l'intervalle à l'étude soit fermé pour que le théorème soit vrai. Par exemple, la fonction (discontinue)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

n'atteint pas une valeur maximale dans l'intervalle fermé 1– [0,2] ; la fonction (continue) f(x) = $\frac{1}{x}$, défini sur l'intervalle ouvert (0,2), puisque la fonction est arbitrairement grand pour des valeurs x proches de zéro.

Le THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES est un résultat complémentaire au théorème des valeurs extrêmes. Il affirme que non seulement une fonction continue sur un intervalle fermé atteint effectivement des valeurs maximales et minimales, mais il prend également toutes les valeurs entre ces deux extrêmes valeurs. LE THÉORÈME DE ROLLE et le THÉORÈME DE LA VALEUR MOYENNE découlent du théorème des valeurs extrêmes si nous supposons en outre que la fonction considérée est différentiable.

Voir aussi CALCUL DIFFÉRENTIEL ; MAXIMUM/ LE MINIMUM.

Machine Translated by Google

F

face Une surface plane à l'extérieur d'une figure solide, généralement un POLYÈDRE, est appelée une face de la figure. Par exemple, un cube a six faces identiques et un cylindre a deux faces. (La surface latérale d'un cylindre n'est pas plate.) Au milieu des années 1700, le mathématicien suisse LEON HARD EULER a établi que si toutes les surfaces extérieures d'un solide convexe sont plates, alors le nombre de faces f que possède la figure est donné par le formule:

$$f = 2 – v + e$$

Ici , v est le nombre de sommets et e est le nombre d'arêtes de la figure.

L'angle entre deux arêtes d'un polyèdre se rencontrant à un sommet commun est parfois appelé angle de face.

En THÉORIE DES GRAPHES, toute région du plan délimitée par les arêtes d'un graphe planaire est parfois appelée une face du graphe. LA FORMULE D'EULER v - e + f = 2 est également valable pour les graphes planaires connectés si l'on est prêt à considérer la grande région illimitée à l'extérieur du graphe comme une face.

Voir aussi DIÈDRE.

facteur Le terme facteur est utilisé dans deux contextes mathématiques : la THÉORIE DES NOMBRE et l'ALGÈBRE. En théorie des nombres, si a, b et n sont des nombres entiers et si a fois b est égal à n, alors a et b sont appelés facteurs de n. Par exemple, 3 et 4 sont tous deux des facteurs de 12 (puisque 12 = 3 × 4), tout comme les nombres 1, 2, 6 et 12 (2 × 6 = 12 et 1 × 12 = 12). Tout nombre qui divise le nombre donné de manière égale est un facteur. Pour cette raison, les facteurs sont parfois appelés diviseurs.

Les facteurs d'un nombre donné ont une interprétation géométrique. Par exemple, on peut disposer 12 galets en six réseaux rectangulaires différents : un rectangle de 1 sur 12, un rectangle de 2 sur 6, un rectangle de 3 sur 4, un rectangle de 4 sur 3, un rectangle de 6 sur 2 et enfin un rectangle de 12 sur 2. 1 rectangle. Les dimensions de ces rectangles sont précisément les facteurs de 12. Cette interprétation montre que les facteurs d'un nombre vont par paires, à moins que l'un des rectangles formés ne soit un carré parfait (auquel cas un facteur est « apparié à lui-même »).). Ceci montre:

> Les nombres carrés ont un nombre impair de facteurs.
> Tous les autres nombres ont un nombre pair de facteurs.

Par exemple, 36, qui équivaut à 6 × 6, a un nombre impair de facteurs : 1 et 36, 2 et 18, 3 et 12, 4 et 9, et 6. Cette simple observation résout la fameuse énigme du gardien de prison :

> Un directeur de prison et 100 détenus, résidant dans les cellules numérotées de 1 à 100, conviennent de réaliser l'expérience suivante pendant 100 jours.
> Au cours de l'expérience, certaines portes de cellule resteront déverrouillées et les prisonniers s'engagent à ne pas s'échapper.
>
> Le premier jour, le directeur de la prison tournera la clé de chaque porte de cellule et laissera toutes les portes déverrouillées.
>
> Le deuxième jour, le gardien tournera la clé d'une porte sur deux. Cela verrouillera les portes numérotées 2, 4, …, 100 et laissera ouvertes les portes impaires.

Machine Translated by Google

Le troisième jour, en commençant par la porte numéro 3, il tournera la clé d'une porte sur trois. Cela laissera un mélange de portes verrouillées et déverrouillées.

Le quatrième jour, il tournera la clé d'une porte sur quatre, le cinquième jour, la clé d'une porte sur cinq, et ainsi de suite, jusqu'au jour 100, où il tournera la clé de chaque porte sur 100, c'est-à-dire juste la dernière porte. À ce moment-là, tout détenu qui trouvera sa porte ouverte sera autorisé à sortir.

Quelles portes resteront déverrouillées à la suite de cette expérience ?

Observez que le gardien tournera la clé de la porte numéro n chaque jour d qui est un facteur de n. Par exemple, la clé de la porte numéro 39 sera tournée les jours 1, 3, 13 et 39 uniquement, et la clé de la porte numéro 25 les jours 1, 5 et 25. Pour qu'une porte soit laissée déverrouillée au fin de l'expérience, sa clé doit être tournée un nombre impair de fois. Comme seuls les nombres carrés ont un nombre impair de facteurs, nous avons que les prisonniers 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100 sont mis en liberté.

Tout nombre n a toujours 1 et lui-même comme facteurs. Ceux-ci sont appelés « facteurs inappropriés ». Tout autre facteur de n, s'il y en a un, est appelé « facteur propre ». Par exemple, 1 et 12 sont des facteurs impropres de 12, et 2, 3, 4 et 6 sont des facteurs propres. Un nombre, différent de 1, qui possède des facteurs propres est appelé "composé", ou un NOMBRE COMPOSITE, et celui qui n'en a pas est appelé PRIME. Par exemple, le nombre 25 a un facteur propre, à savoir 5, et est donc composé ; alors que 7 n'a que deux facteurs, tous deux impropres, et est donc premier.

Tout facteur propre d'un nombre composé, s'il n'est pas lui-même premier, peut être écrit comme un produit de deux facteurs plus petits. L'application répétée de ce processus montre que tout nombre différent de 1, s'il n'est pas déjà premier, peut être écrit comme un produit de nombres premiers. Par exemple:

$$180 = 30 \times 6 = (6 \times 5) \times (2 \times 3) = 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3.$$

Le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE affirme que tout entier supérieur à 1 se divise en nombres premiers d'une seule manière (jusqu'à l'ordre des nombres premiers). Un arbre factoriel est un diagramme qui décrit ce processus de factorisation de manière imagée. Deux élèves dessinant des arbres de facteurs différents pour le même nombre arriveront à la même liste de nombres premiers à la base de leurs arbres.

En algèbre, un facteur est un POLYNÔME qui divise exactement un autre polynôme donné. Par exemple, 2x + 1 et x – 1 sont tous deux des facteurs de $2x - 1 = (2x + 1)(x^2 - x - 1$, puisque $2x^2 - x - 1$). Il est généralement admis que les facteurs d'un polynôme doivent être eux-mêmes des polynômes non constants dont les coefficients sont des nombres réels.

Un polynôme qui ne peut pas être factorisé est appelé irré + 1 ductile. Par exemple, x les ^{2} ne peut pas être factorisé sur nombres réels et donc est irréductible. Si l'on admet les NOMBRES COMPLEXES comme coefficients, alors la situation change : on peut écrire : x LE THÉORÈME $^2 + 1 = (x + je)(x - je)$. Le PLAISIR FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE affirme que tout polynôme se factorise dans le domaine des nombres complexes.

Voir aussi FACTEUR COMMUN ; RÈGLES DE DIVISIBILITÉ ; THÉORÈME DES FACTEURS ; PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN; LONG DIVISION; NOMBRE PARFAIT ; PRIME.

factorielle Si n est un nombre naturel, alors le symbole n! (lu comme "n factoriel") désigne le produit de tous les entiers positifs de 1 à n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Par exemple, 6 ! = 1·2·3·4·5·6 = 720. L'ordre dans lequel les termes du produit sont multipliés est sans importance. (Nous avons que 6 ! est également égal à 6·5·4·3·2·1.)

Les factorielles apparaissent naturellement lorsque l'on compte le nombre de façons dont une collection d'objets peut être organisée. Étant donné n objets, il y a n choix pour quel objet nous souhaitons considérer comme « premier ». Une fois cette sélection effectuée, il reste n – 1 choix pour l'objet à sélectionner en second, et après que le premier et le second sont choisis, il reste n – 2 choix pour le troisième. Ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'il reste deux objets, ce qui donne deux choix pour lesquels considérer l'avant-dernier et un seul objet à sélectionner comme dernier. Par le PRINCIPE DE MULTIPLICATION, il y a donc $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ différents PERMUTATIONs (ou arrangements, ou ordres) de n objets.

Si l'on souhaite disposer seulement r objets choisis parmi une collection de n choses différentes, il y a n choix pour quel objet considérer comme premier, n - 1 choix pour lequel considérer comme second, et ainsi de suite, jusqu'à n - r + 1 choix pour quel objet considérer rth, produisant un total de $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - r + 1)$ arrangements différents de r objets sélectionnés parmi n. Cette formule peut être écrite de manière plus compacte comme suit :

$$\frac{n!}{(n - r)!}$$

Machine Translated by Google

Lorsque r est égal à n (disposer tous les n objets), cette formule lit $\frac{n!}{0!}$. Pour coïncider avec notre calcul précédent réponse de n!, il est naturel de définir 0! comme égal à 1.

La notation en point d'exclamation pour factorielle était utilisé pour la première fois par Christian Kramp en 1808, dans son article « Élémens d'arithmétique universelle », bien que d'autres notations pour n! populaire à l'époque, et plus tard, inclus n_|, n′, Π(n) et Γ(n+1).

LEONHARD EULER (1707-1783) a tenté de généraliser la fonction factorielle à des valeurs non entières. Au l'âge de 22 ans, il a découvert la quantité LIMIT suivante qui aide à atteindre ceci:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

(Il a appelé cette expression la fonction gamma pour honorer l'utilisation du symbole Γ par ADRIEN-MARIE LEGENDRE pour factorielle.) Cette expression a la propriété, comme vous peut vérifier que Γ(x + 1) = x · Γ(x) pour tout Γ( ) lim 1 positif valeurs réelles x. Aussi $= \frac{n^n n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} = 1$. Par conséquent, Γ(m) = (m – 1) ! pour tout entier positif m. Ainsi, par exemple, Γ(7) = 6 ! = 720. Il est maintenant possible de définissent également des quantités telles que $\frac{1}{2}$!et (√ 2) ! en utilisant ce expression.

L'INTEGRATION PAR PARTIES montre que l' IMPROPRE INTÉGRALE $\int_0^\infty e^{-t} t^{m-1}\,dt$ vaut aussi (m – 1)!. Mathé Les maticiens ont montré que la fonction gamma d'Euler et l'intégrale impropre correspondante concorde pour toutes les valeurs réelles positives x :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Cette intégrale a la valeur inattendue $\sqrt{\pi}$ quand $x = \frac{1}{2}$.

Ainsi, nous pouvons conclure, par exemple, que $-\frac{1}{2}! =$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, et $\frac{1}{2}! = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Voir aussi THÉORÈME BINÔMIAL ; PERMUTATION; FORMULE DE STIRLING .

factorisation Le processus ou le résultat de l'écriture d'un nombre ou un POLYNOME comme produit de termes est appelée factorisation. Par exemple, le FONDAMENTAL LE THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE affirme que tout nombre entier peut être écrit comme un produit de nombres PREMIERS et, à l'ordre près des termes, cette factorisation est unique. (Par exemple, 132 = 2 × 2 × 3 × 11.) Ainsi, tout entier nombre a une "factorisation première" unique. Le THÉORÈME FUN DAMENTAL DE L'ALGÈBRE affirme que, dans le domaine des NOMBRES COMPLEXES, tous les facteurs polynomiaux complètement en termes linéaires. (Par exemple, $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = (x - 3)(x + 2)(2x + 1)$ et $x^2 - 4x + 5 = (x - 2 + i)(x - 2 - i)$.) Si l'on souhaite rester dans le domaine des NOMBRES RÉELS, alors tout polynôme avec les coefficients réels sont garantis pour être pris en compte dans un produit de termes linéaires et termes QUADRATIQUE irréductibles. (Pour exemple, $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$.)

Voir aussi DÉCOMPOSITION ; THÉORÈME DES FACTEURS.

théorème des facteurs Le THÉORÈME DU RESTE montre que si un POLYNOME p(x) est divisé par un terme de la forme x - a pour une constante a, puis le reste terme est la constante p(a) :

$$p(x) = (x - a)Q(x) + p(a)$$

Ainsi, si la valeur du polynôme est nulle en x = a, c'est-à-dire p(a) = 0, alors les facteurs polynomiaux tels que p(x) = (x – a)Q(x). Cela conduit au théorème factoriel suivant :

> Un terme linéaire x - a est un facteur d'un polynôme p(x) si, et seulement si, p(a) = 0.

Par exemple, pour $p(x) = 2x^3 - 10x^2 + 4x + 12$, on a p(1) = 0, p(–2) = 0 et p(3) = 0. Par conséquent, x – 1, x + 2, et x – 3 sont chacun des facteurs du polynôme. (Dans cet exemple nous avons p(x) = 2(x – 1)(x + 2)(x – 3).) Puisque 2 et –2 sont clairement chacun des zéros de $x^6 - 64$, ce le polynôme doit être divisible par $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$.

Voir aussi THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE.

division équitable (coupe de gâteau) Un puzzle classique demande une façon équitable de partager une part de gâteau entre deux gourmands frères. Le schéma « tu coupes, je choisis » demande frère pour trancher le gâteau dans ce qu'il croit être deux parts égales et demande au second frère d'en choisir une des deux pièces. Le premier est alors garanti recevoir, dans sa mesure, exactement 50 pour cent du gâteau et le deuxième frère, s'il a une estimation différente

Machine Translated by Google

de moitié, a l'avantage de recevoir plus de 50
pour cent de la tranche selon sa propre mesure. Un
peut éviter cet avantage perçu avec un autre
régime de partage. Dans la suite "tenue de couteau"
régime, chaque frère est assuré de sentir qu'il a
l'avantage:

> Chaque frère tient un couteau verticalement à travers le gâteau à l'endroit qu'il croit couper le gâteau exactement de moitié. (Si les frères ont des relations différentes estimation de ce qui constitue la « moitié », alors la couteaux seront à différents endroits.) le gâteau n'importe où entre ces deux positions garantit à chaque frère une part, selon son estimation, supérieure à 50 %.

Ce schéma se généralise au partage entre tous
nombre de joueurs. Par exemple, il est possible de partager un
gâteau entre trois joueurs de manière à ce que chacun
le joueur croit honnêtement qu'il reçoit plus d'un tiers du gâteau.

> Chaque joueur tient un couteau verticalement à travers le gâteau à l'endroit qu'il croit coupé exactement un tiers du gâteau à partir de la gauche. Le gâteau est ensuite coupé entre les deux les plus à gauche positions, donnant cette pièce au joueur tenant le couteau le plus à gauche. Ce joueur a reçu, selon son estimation, plus d'un tiers du gâteau, et chacun des autres deux joueurs estiment qu'il reste plus des deux tiers du gâteau. Les deux frères suivants exécutent ensuite le schéma de division du gâteau décrit ci-dessus pour deux joueurs.

Tout schéma de partage du gâteau entre n joueurs qui garantit à chaque joueur, selon son estimation, au moins 1/n du gâteau est appelé un schéma de partage équitable.

Le schéma décrit ci-dessus entre trois acteurs,
cependant, n'est pas "sans envie". Bien que chaque joueur
croit qu'il a reçu plus que sa juste part du
gâteau, il n'est pas assuré qu'il croit aussi qu'il
a reçu le plus gros morceau jamais coupé. (Chaque division juste
schéma entre deux joueurs est sans envie.) Compliqué
des systèmes de partage équitable sans envie existent pour le partage
gâteau parmi n'importe quel nombre de joueurs. Il existe également des
méthodes de division équitable pour diviser les collections de biens indivisibles.
objets (tels que les meubles d'un lotissement) entre deux
ou plusieurs personnes utilisant des paiements en espèces pour égaliser le
division finale.

Suite de Farey (série de Farey) Pour un positif donné
nombre entier n, la séquence de toutes les fractions propres,
écrit sous forme réduite, avec des dénominateurs pas plus grands
supérieur à n et rangé par ordre de grandeur est appelé le
nième séquence de Farey. Par exemple, le cinquième Farey
séquence est :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

Ces séquences ont un certain nombre de propriétés arithmétiques.
Par exemple, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des termes consécutifs de a
Suite de Farey, puis les nombres ad et bc, résultant
en prenant leur produit vectoriel, sont toujours consécutives
entiers. (Par exemple, la paire consécutive et $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$
donner des entiers consécutifs 9 et 10.) Aussi, si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$
sont trois termes successifs d'une suite de Farey, alors les
moyen terme $\frac{c}{d}$ est la fraction médiane $\frac{a+e}{b+f}$. (Pour
exemple, le terme entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{5}$ vaut $\frac{3+3}{5+4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.)

Ce constat permet de construire rapidement à partir
séquence de Farey à la suivante : il suffit de calculer la
médiants entre tous les termes présents et retiennent ceux
dont les dénominateurs ne sont pas trop grands.

La suite de Farey a été étudiée pour la première fois par C. Haros
en 1802, mais l'intérêt pour le sujet n'a pas bougé jusqu'à
Le géologue britannique John Farey (1766-1826) a publié son
Article de 1816, "On a Curious Property of Vulgar Fractions" dans
Philosophical Magazine. (Farey ignorait
du travail de Haros.) En 1938, le mathématicien américain
Lester R. Ford a présenté une remarquable interprétation
géométrique de la suite de Farey :

> Au-dessus de chaque fraction réduite $\frac{a}{b}$ sur le nombre ligne, tracez un cercle de rayon $\frac{1}{2b^2}$ touchant le droite numérique à ce point. Malgré l'attente, ces cercles ne se chevauchent jamais, bien qu'ils le fassent touchent souvent. De plus, deux cercles aux positions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ touchez précisément quand ad et bc sont entiers consécutifs, et de plus les le plus grand cercle qui tient dans l'espace entre au-dessus de la droite numérique est le cercle au médiant $\frac{a+c}{b+d}$.

Machine Translated by Google

(Ces affirmations peuvent être prouvées en utilisant la FORMULE DE DISTANCE pour établir que la distance entre les centres de deux cercles qui se touchent est égal à la somme de les rayons des deux cercles.)

Fermat, Pierre de (1601–1665) Français Théorie des nombres, Calcul, Théorie des probabilités Né le 17 août 1601, à Beaumont-de-Lomagne, France, Pierre de Fermat est connu comme l'un des principaux mathématiciens de la première moitié du XVIIe siècle, reconnu pour sa fondation travail sur la théorie des nombres. Fermat est également responsable de certains travaux pionniers sur CALCULUS et la théorie des tangentes aux courbes, la théorie des PROBABILITÉS et GEOMETRIE analytique . Sa pièce de 1679 Isagoge ad locos planos et solidos (Sur le plan et lieu solide), publié à titre posthume, préfigurait l'œuvre de RENÉ DESCARTES (1596-1650) sur l'application de l'algèbre à géométrie, lui permettant de définir algébriquement important courbes telles que l' HYPERBOLE et la PARABOLE. Dans optique, il est reconnu comme le premier chercheur à avoir formulé la « propriété fondamentale du moindre temps », déclarant que la lumière suit toujours les chemins les plus courts. Peut-être plus particulièrement, Fermat est connu pour l'énigmatique commentaire qu'il inscrivit en marge d'une de ses lectures livres prétendant avoir résolu un nouveau problème en théorie des nombres. Rechercher une solution à ce problème (sinon celui que Fermat avait en tête) a stimulé trois siècles de recherche importante et animée en mathématiques. LE DERNIER THÉORÈME DE FER MAT a finalement été résolu en 1994.

Fermat a obtenu un baccalauréat en droit civil de l'Université d'Orléans en 1631 et commença travailler comme avocat au parlement local de Toulouse cette même année. Il a suivi ce cheminement de carrière tout au long de sa vie, acceptant un poste de criminel juge de la cour en 1638 et, enfin, la haute position de conseiller du roi en 1648. Les travaux de Fermat en mathématiques étaient un intérêt extérieur.

Fermat a d'abord développé une passion pour la lecture et « restaurer » les textes grecs classiques. Cela signifiait terminer les mathématiques de tous les passages manquants à partir des archives qui ont survécu depuis les temps anciens. Son travail sur le texte Plane loci d' APOLLONIUS DE PERGE (vers 262-190 avant notre ère) a attiré l'attention des communauté des mathématiques à l'époque, non seulement pour travaux de restauration lui-même, mais aussi pour la nouvelle géométrie méthodes imaginées par Fermat pour calculer les tangentes à courbes et résolution de problèmes de maxima/minima. Fermat a développé une correspondance avec le moine français MARIN MERSENNE (1588-1648), qui servait à diffuser l'information mathématique aux notables de l'époque. Malgré l'attention reçue par Fermat, il n'a pas cherché la gloire en publiant l'un de ses travaux. (Il a publié un petit morceau dans sa vie, qu'il a fait anonymement.) Fermat a partagé ses découvertes et résultats avec Mersenne et d'autres chercheurs, mais pas son méthodes pour les obtenir. Cela a à la fois inspiré et mathématiciens frustrés à l'époque.

En 1654, le célèbre érudit BLAISE PASCAL (1623-1662) écrit à Fermat avec quelques questions mathématiques sur les paris et les jeux de hasard. La correspondance qui s'en est suivie a conduit à l'élaboration conjointe d'un nouvelle théorie mathématique des probabilités. Fermat est aujourd'hui considéré comme l'un des fondateurs du domaine. Cependant, Fermat avait développé un grand intérêt pour la théorie des nombres, en particulier, les propriétés des nombres entiers. Nombres. Ce sujet n'intéressait guère les mathématiciens de l'époque - peut-être à cause de son manque apparent d'application immédiate - mais Fermat tenta de susciter l'intérêt pour le sujet en posant des questions stimulantes à ses contemporains. Il a demandé aux érudits de prouver, par exemple, que l'équation $x^2 + 2 = y^3$ a une seule solution entière positive. Ses collègues, cependant, considéraient des questions comme celles-ci comme trop spécifiques pour être une préoccupation sérieuse et souvent rejetée alors. Fermat, d'autre part, réalisé que la compréhension de la solutions à ces questions spécifiques fournit une passerelle à une grande perspicacité sur le très général et mystérieux propriétés des nombres entiers. Ce n'est qu'à Fermat son fils Samuel a publié la copie annotée de Fermat du Arithmetica par le savant classique DIOPHANTE DE ALEXANDRIE (vers 200-284 CE) - le texte contenant la fameuse note marginale - que l'intérêt pour le nombre était ravivé et le brillant ouvrage de Fermat sur la sujet a été pleinement reconnu.

Fermat est décédé à Castres, en France, le 12 janvier 1665. La prétention posée dans la note griffonnée en marge d' Arithmetica s'appelle le dernier théorème de Fermat. Il inspiré plus de trois siècles de mathématiques intenses recherche dans le domaine de la THÉORIE DES NOMBRE.

Voir aussi MAXIMUM/MINIMUM.

Le dernier théorème de Fermat Depuis l'Antiquité, les érudits connaissaient de nombreuses, en fait une infinité de solutions entières différentes à l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

Machine Translated by Google

(Les solutions de cette équation sont appelées TRIPLES DE PYTHAGORE.) Vers 1637, PIERRE DE FERMAT a conjecturé qu'il n'existe cependant pas de solutions entières positives pour les équations

$$x^n = z^{nn} + y$$

avec n supérieur à deux. Dans sa copie des œuvres traduites de DIOPHANTE D' ALEXANDRIE, à côté d'un problème de triplets de Pythagore, Fermat écrit sa note désormais célèbre :

> Par contre, il est impossible de séparer un cube en deux cubes, ou une puissance quatrième en deux puissances quatrièmes, ou généralement toute puissance sauf un carré en deux puissances de même exposant. J'en ai découvert une preuve vraiment admirable, mais la marge est trop étroite pour la contenir.

Pendant plus de 350 ans, les mathématiciens ont tenté de reproduire la prétendue preuve de Fermat. L'affirmation elle-même est devenue connue sous le nom de dernier théorème de Fermat, et c'était l'un des plus grands problèmes non résolus de tous les temps. Bien que le problème ne se prête à aucune application pratique évidente, les tentatives pour le résoudre ont contribué à motiver le développement d'un grand nombre de mathématiques importantes.

On pense généralement que Fermat n'avait pas de preuve du théorème. Dans ses correspondances avec ses collègues, il ne mentionne que les cas n = 3 et 4 et ne fournit aucun détail de preuve même pour ces cas particuliers. Fermat, encore une fois comme note marginale dans sa copie de l'œuvre de Diophante, fournit une preuve détaillée d'un autre défi posé par Diophante, celui des triangles de longueur latérale rationnelle. Bien que cela ne soit pas explicitement mentionné, la preuve du cas n égal 4 découle facilement de l'argument mathématique qu'il fournit. On pense que Fermat en était conscient.

Le cas n = 4 étant pris en compte, il n'est pas difficile de voir qu'il suffit d'étudier les cas où n est un nombre premier impair. Par exemple, si l'on sait que x n'a pas de solutions entières positives, alors x ne peut pas $^{7}7 + y^{42} 7 =$ non plus avoir de solutions entières positives. (Réécrivez ^{42} y $+ 42 = z^{z}$ cette dernière équation sous la forme $(x^{6})^{7} + (y^{6})^{7} = (z^{6})^{7}$.)

Au milieu des années 1700, LEONHARD EULER a prouvé que l'équation avec n = 3 n'a pas de solutions entières positives. Les travaux approfondis de MARIE-SOPHIE GERMAIN (1776-1831) au tournant du siècle ont permis aux mathématiciens de montrer plus tard que le théorème tient pour toutes les valeurs de n inférieures à 100. Au cours des XIXe et XXe siècles, les mathématiciens ont développé les domaines de la géométrie algébrique et de l'arithmétique sur les courbes. En 1983, Gerd Faltings a prouvé la soi-disant conjecture de Mordell, un résultat important avec la conséquence immédiate suivante : toute équation de la forme $x^n + y^n = z^n$ avec n > 3 a, au plus, un nombre fini de solutions entières positives. Cela a conduit les mathématiciens à un pas significatif vers la démonstration du dernier théorème de Fermat pour toutes les valeurs de n : est-il possible de montrer que ce nombre fini est nul dans tous les cas ? Enfin, en 1995, près de 360 ans après l'affirmation de Fermat, le mathématicien anglais ANDREW WILES, avec l'aide de Richard Taylor, a présenté une preuve complète du dernier théorème de Fermat. Il est, sans surprise, très long et très avancé, s'appuyant fortement sur les nouvelles mathématiques du siècle. Inutile de dire que la preuve dépasse certainement les capacités de Fermat.

Bien que la preuve de Wiles soit à juste titre considérée comme un point culminant des mathématiques du XXe siècle, les mathématiciens recherchent toujours un argument simplifié.

Ferrari, Ludovico (1522–1565) Algèbre italienne Né le 2 février 1522 à Bologne, le savant italien Ludovico Ferrari est connu comme le premier à avoir résolu l' ÉQUATION QUARTIQUE. Il travailla comme assistant de GIROLAMO CARDANO (1501-1576), qui publia la solution de Ferrari dans son célèbre ouvrage de 1545 Ars magna (Le grand art).

Affecté comme domestique à la maison Cardano à l'âge de 14 ans, Ferrari impressionne rapidement son maître par son esprit agile et par sa capacité à lire et à écrire. Car dano a décidé de former Ferrari à l'art des mathématiques.

En échange, Ferrari a aidé Cardano à préparer ses manuscrits. Quatre ans après son arrivée, et avec la bénédiction de Cardano, Ferrari accepte un poste à la Fondation Piatti de Milan en tant que maître de conférences public en géométrie. Ferrari, cependant, a continué à travailler en étroite collaboration avec Cardano.

Ferrari découvrit sa solution à l'équation quartique en 1540, mais elle s'appuya sur les méthodes de résolution de l' ÉQUATION CUBIQUE qui avaient été développées par NICCOLÒ TARTAGLIA (vers 1499-1557) et révélées à Cardano en secret. (Les mathématiciens de l'époque étaient soutenus par des mécènes et protégeaient leurs méthodes en tant que secrets commerciaux : ils étaient souvent tenus de prouver leur valeur en résolvant des défis qu'aucun autre chercheur ne pouvait résoudre.) Incapables de publier le résultat sans rompre une promesse, Ferrari et Cardano se sont sentis coincé. Cependant, quelques années plus tard, Fer

Machine Translated by Google

rari a appris qu'un autre érudit SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526) avait également développé des méthodes pour résoudre certains types d'équations cubiques. Bien qu'essentiellement identique au travail de Tartaglia, Ferrari et Cardano décidèrent de publier la solution à la quartique, attribuant le travail sur la cubique nécessaire à del Ferro, avec qui aucune promesse de secret n'avait été faite.

Tartaglia a été outré et une dispute amère qui a duré de nombreuses années s'est ensuivie entre Tartaglia et Fer rari. Le 10 août 1548, comme c'était courant à l'époque, Tartaglia défia Ferrari à un concours ouvert et à un débat public pour tenter de démontrer qu'il était en fait l'expert des équations cubiques. Mais il ressortait clairement du concours que Ferrari avait une compréhension plus complète des équations cubiques et quartiques. Tartaglia est parti avant la fin du concours et la victoire a été donnée à Ferrari. Il a immédiatement acquis une renommée nationale et a reçu de nombreuses offres d'emploi, y compris une demande de l'empereur lui-même d'agir en tant que tuteur royal.

Ferrari, cependant, n'accepta aucun poste offert à l'époque, quitta les mathématiques et accepta un poste lucratif d'évaluateur fiscal auprès du gouverneur de Milan.

Ferrari mourut à Bolgna, en Italie, en octobre 1565 (la date exacte n'est pas connue) et on se souvient en mathématiques uniquement pour ses travaux sur l'équation quartique.

Ferro, Scipione del (Ferreo, dal Ferro) (1465-1526)
Algèbre italienne Né le 6 février 1465 à Bologne, en Italie, Scipione del Ferro est connu comme le premier mathématicien à avoir résolu l' ÉQUATION CUBIQUE. Malheureusement, aucun de ses écrits ne survit aujourd'hui, et nous découvrons son œuvre principalement à travers les manuscrits de GIRO LAMO CARDANO (1501-1576) et de LUDOVICO FERRARI (1522-1565).

Del Ferro fut nommé professeur d'arithmétique et de géométrie à l'université de Bologne en 1496, poste qu'il conserva toute sa vie. On sait peu de choses sur son travail académique. Des lettres à d'autres chercheurs de l'époque suggèrent que del Ferro a étudié des méthodes de rationalisation des expressions rationnelles, des constructions à la règle et au compas en géométrie et des méthodes de résolution d'équations cubiques.

Les mathématiciens de l'époque de del Ferro connaissaient la solution générale d'une équation QUADRATIQUE de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. (Il convient de mentionner, cependant, que les érudits du XVIe siècle n'utilisaient pas zéro comme nombre dans une expression, ni permis l'utilisation de nombres négatifs. Ainsi l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$, par exemple, a été écrit x savait $^2 + 2 = 3x$.) Mathématiciens aussi que, avec l'utilisation appropriée de la substitution, toute équation cubique pouvait être réduite à l'une de = ax + b. (Ici deux formes : $x^3 + ax = b$ ou x^3 encore, a et b sont positifs.) Del Ferro fut le premier mathématicien à résoudre des équations du premier type. Certains historiens suggèrent qu'il était également capable de résoudre des équations du second type.

Del Ferro a consigné tous ses résultats dans un carnet personnel, qu'il a légué à son gendre Han nibal Nave, également mathématicien. Nave a ensuite partagé le contenu du carnet avec Cardano et Fer

rare. Après avoir vu la méthode de résolution de la cubique pleinement expliquée, Cardano et Ferrari ont réalisé que del Ferro avait en fait résolu la célèbre équation cubique quelque 30 ans avant que NICCOLÒ TARTAGLIA (vers 1499-1557), leur contemporain, n'ait prétendu faire de même. En 1545, Cardano publia Ars magna (Le grand art), décrivant la solution de Ferrari à l' ÉQUATION QUARTIQUE en utilisant les méthodes de del Ferro pour le cubique.

Del Ferro est mort à Bologne, en Italie, entre le 29 octobre et le 16 novembre 1526. On se souvient de lui en mathématiques uniquement pour ses travaux sur les équations cubiques.

Fibonacci (Leonardo Fibonacci, Léonard de Pise) (vers 1170-1250)
Arithmétique italienne, théorie des nombres Né à Pise, Italie (la date de naissance exacte n'est pas connue), le mathématicien Léonard de Pise, mieux connu sous son surnom Fibonacci, est le meilleur connu pour son aide dans l'introduction du système de CHIFFRES HINDOUS-ARABES aux marchands et aux savants d'Europe. Il a fortement préconisé le système dans son célèbre texte de 1202 Liber abaci (Le livre du comptage), un traité sur les techniques et les pratiques de l'arithmétique et de l'algèbre, qui s'est avéré extrêmement influent. Cet ouvrage contenait également une importante collection de problèmes arithmétiques, dont un qui aboutit à la fameuse suite de nombres qui porte son nom. Considéré comme le plus

mathématicien important du moyen-âge, Fibonacci a également beaucoup écrit sur les sujets de la GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE et des ÉQUATIONS DIOPHANTINES.
Il est reconnu comme le premier chercheur en Occident à faire des progrès dans le domaine de la THÉORIE DES NOMBRES depuis l'époque de DIOPHANTE D' ALEXANDRIE.

Bien que né dans le nord de l'Italie, Fibonacci a été élevé et éduqué dans le nord de l'Afrique, où son père, marchand et représentant du gouvernement,

Machine Translated by Google

occupé un poste diplomatique. En vieillissant, Fibonacci a également voyagé en Grèce, en Égypte, en Syrie, en France et en Sicile, et a pris une note particulière des systèmes arithmétiques utilisés par les marchands locaux de ces régions. Il est devenu convaincu que le système numérique utilisé par les Arabes avec ses racines indiennes - la manière réelle dont ils écrivaient les nombres et la façon dont ils les manipulaient pour effectuer des calculs - était de loin supérieur à tout autre système arithmétique qu'il avait rencontré, y compris le système maladroit des CHIFFRES ROMAINS en usage à l'époque en Europe. À son retour à Pise vers l'an 1200, Fibonacci a commencé à écrire sa célèbre pièce. Son but était d'expliquer simplement les chiffres hindous-arabes, le rôle d'un SYSTÈME DE PLACE-VALEUR , et d'illustrer son approche supérieure. Le texte commence simplement :

> Ce sont les neuf chiffres des Indiens : 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Avec ces neuf chiffres, et avec ce signe 0, … n'importe quel nombre peut s'écrire dix, comme on le verra .

Divisé en quatre sections, l'ouvrage décrit les méthodes d'addition, de multiplication, de soustraction et de division. Il traite également des fractions (y compris une discussion sur les FRACTIONS ÉGYPTIENNES), ainsi que de la géométrie et de l'algèbre. (Certaines parties du texte sont écrites de droite à gauche, indiquant peut-être à quel point Fibonacci a été influencé par les érudits arabes.)

Bien que l'acceptation complète du système hindou-arabe en Occident ne se soit produite qu'environ 300 ans plus tard, le travail de Fibonacci dans ce domaine est reconnu comme le premier pas significatif dans cette direction.

Fibonacci a également beaucoup écrit dans les domaines de la théorie des nombres, de la trigonométrie et de la géométrie. On dit que les progrès présentés par Fibonacci dans sa pièce de 1225 Liber quadratorum (Le livre des nombres carrés) étaient d'un tel intérêt et d'une telle valeur qu'ils ont suscité un regain d'intérêt pour les mathématiques théoriques et ont ravivé les mathématiques occidentales de leur sommeil au Moyen Âge.

Au cours de sa vie, Fibonacci a été reconnu comme un grand érudit. La nouvelle de ses capacités parvint à l'empereur Frédéric II, assis à Palerme, qui l'invita à affronter d'autres mathématiciens de l'époque dans un tournoi mathématique. Fibonacci a correctement résolu les trois défis qui lui étaient proposés, lui attirant davantage d'attention et de renommée. En 1240, Fibonacci était a reçu un salaire de la ville de Pise en reconnaissance de ses services à la communauté.

Tous les textes de Fibonacci, et leurs reproductions, ont été écrits à la main. Des copies du Liber abaci survivent encore aujourd'hui.

Le nom de Fibonacci est dérivé du raccourci du latin filius Bonacci, signifiant le fils de Bonaccio, le nom de famille de son père. Au cours de sa vie, Fibonacci était également connu sous le nom de Léonard de Pise ou, en latin, Leonardo Pisano. Parfois, Fibonacci s'est également identifié comme Leonardo Bigollo, suivant le mot toscan bigollo pour "un voyageur".

En introduisant le chiffre hindou-arabe en Europe, son influence sur les mathématiques occidentales a été profonde. Il mourut dans la ville de Pise, en Italie, probablement en l'an 1250. (La date exacte du décès n'est pas connue.)

Voir aussi NOMBRES DE FIBONACCI.

Nombres de Fibonacci L'un des nombres qui apparaît dans la séquence 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, où chaque nombre, après le second, est la nombre somme 89, …, des deux nombres précédents, est appelé un de Fibonacci. Si Fn désigne le nième nombre de Fibonacci, alors on a

$$Fn = Fn–1 + Fn–2$$

avec F1 = F2 = 1.

Ces chiffres proviennent d'un célèbre problème d'élevage de lapins décrit dans le texte de FIBONACCI Liber abaci :

> Combien de lapins seraient produits au nième mois si, à partir d'un seul couple, tout couple de lapins d'un mois produisait un couple de lapins pour chaque mois d'après le suivant ?

(La première paire de lapins, par exemple, ne produit pas une autre paire de lapins avant le mois 3. Cette même paire produit une nouvelle paire pour chaque mois suivant.)

Au cours d'un mois, la totalité des lapins présents est constituée de tous les couples du mois précédent ainsi que de tous les nouveaux descendants. Le nombre de descendants est égal à la taille de la population des deux mois précédents. Ainsi, la solution au problème est la séquence décrite ci-dessus.

Tout problème dont la nième solution de cas est la somme des deux solutions de cas précédentes produit le Fibonacci

Machine Translated by Google

séquence. Par exemple, il existe Fn manières de monter n – 1 marches, une ou deux marches à la fois (pensez à commencer la montée par une marche simple ou une marche double). Il existe également Fn manières de paver une rangée de carrés 1 × (n – 1) avec des carreaux 1 × 1 et des dominos 1 × 2, et il existe des séquences Fn de 0 et de 1 à n chiffres longs commençant et se terminant par 1 et contenant pas deux 0 consécutifs.

Considérant un 1 comme "pile" et 0 et "face", et en ignorant les 1 initiaux et finaux, ce dernier exemple peut être utilisé pour montrer que la PROBABILITÉ de ne pas obtenir deux faces d'affilée en lançant une pièce n fois est $\frac{F_{n+2}}{2^n}$. On peut aussi l'utiliser pour montrer qu'il existe des sous-ensembles Fn+2 de {1,2,…,n} sans deux nombres consécutifs comme membres.

Les apparitions les plus surprenantes des nombres de Fibonacci se produisent peut-être dans la nature. Les graines dans la tête d'une fleur de soleil, par exemple, semblent former deux systèmes de spirales - souvent avec 55 spirales s'inclinant dans le sens des aiguilles d'une montre et 34 spirales avec une inclinaison dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. (Les grandes espèces de tournesols ont 89 et 144 spirales, encore une fois des nombres de Fibonacci consécutifs.) Cela semble être typique de tous les objets naturels contenant des motifs de fleurons, de pétales ou de graines en spirale : ananas, pommes de pin et même l'espacement des branches autour du tronc de un arbre. Le nom botanique de la disposition des feuilles est phyllotaxie.

Il est utile de se demander s'il est possible de trouver une valeur x telle que la suite 1,x,x2 ,x satisfasse la même relation récursive que les nombres de Fibonacci, à savoir que tout terme après le second soit égal à la somme des deux termes précédents . Cette condition nécessite donc que x soit un nombre satisfaisant l'équation . Par la formule QUADRATIQUE il y a deux solutions :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\tau = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Il s'ensuit que toute combinaison de la forme a satisfait $\varphi^n + b\tau^n$ la même relation récursive que la suite de Fibonacci. Le choix approprié des constantes a et b , de sorte que les deux premiers termes de la suite produite soient tous les deux égaux à 1, donne la formule suivante, appelée formule de Binet, pour le nième nombre de Fibonacci :



Cet ananas a cinq rangées diagonales d'écailles hexagonales dans un sens et huit rangées dans l'autre sens. (Notez que la sixième rangée d'échelles non marquées dans l'image de gauche n'est pas une nouvelle rangée ; c'est une continuation de la rangée d'échelles la plus basse.)

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tau^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

(Il est surprenant que cette formule donne un nombre entier pour chaque valeur de n). On peut utiliser ce résultat pour montrer que le rapport $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ des nombres de Fibonacci se rapproche de la valeur lorsque n devient grand. Cela se trouve être le NOMBRE D'OR.

Les propriétés des nombres de Fibonacci sont si nombreuses qu'il existe un périodique mathématique, The Fibonacci Quarterly, entièrement consacré à leur étude continue.

Voir aussi TRIANGLE DE PASCAL ; POLYOMINE.

champ Voir SONNERIE.

Médailles Fields Ce sont des prix décernés à de jeunes chercheurs pour leurs réalisations exceptionnelles en mathématiques. Les récompenses sont considérées comme équivalentes en stature aux prix Nobel (qui n'existent pas pour les mathématiques).

Les « médailles internationales pour des découvertes exceptionnelles en mathématiques » ont été proposées pour la première fois lors de la réunion du Congrès international des mathématiciens de 1924 à Toronto.

Machine Translated by Google

Le mathématicien canadien John Charles Fields (1863-1932) a ensuite fait don de fonds pour soutenir cette idée, et les prix ont été créés et nommés en son honneur. Il a été convenu que deux médailles d'or seraient décernées tous les quatre ans - à chaque réunion quadriennale du Congrès international des mathématiciens. Les premiers prix ont été décernés en 1936 et, après une pause en temps de guerre, ont repris en 1950. En 1966, en raison de l'expansion significative de la recherche mathématique, il a été convenu que jusqu'à quatre médailles pourraient être décernées lors d'une réunion donnée.

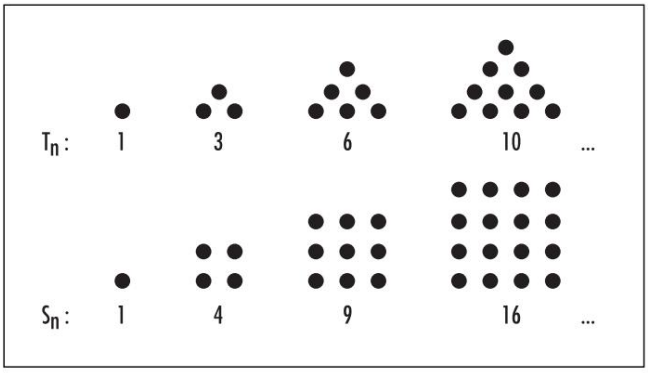
Le prix lui-même consiste en un prix en argent et une médaille en or. Une image d' ARCHIMÈDE DE SYRACUSE, accompagnée de la citation « Transire suum pectus mundoque potiri » (S'élever au-dessus de soi et s'emparer du monde), apparaît sur une face de la médaille.
Au verso se trouve l'inscription « Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere » (les mathématiciens du monde réunis ici rendent hommage à votre travail remarquable).

Conformément au souhait de Fields, les prix sont décernés en reconnaissance des travaux existants réalisés par un mathématicien, ainsi que du potentiel de réalisations futures. Pour cette raison, les prix sont généralement décernés à des mathématiciens de moins de 40 ans.

Un conseil d'administration mis en place par l'Université de Toronto administre les prix, et un comité de mathématiciens nommés par le Congrès international des mathématiciens remet les médailles aux récipiendaires.

Laurent Lafforgue de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, Buressre-Yvette, France, et Vladimir Voevodsky de l'Institute of Advanced Study, Princeton, New Jersey, ont été les récipiendaires 2002 du prix. Lafforgue a apporté des contributions significatives au soi-disant programme de Langlands, une série de conjectures de grande envergure proposées par Robert Langlands en 1967 qui, si elles étaient vraies, uniraient des branches disparates des mathématiques. Voevodsky a reçu le prix pour ses travaux en géométrie algébrique, un domaine qui unit la théorie des nombres et la géométrie.

nombres figurés Disposer des points pour créer des figures géométriques conduit à une classe de nombres appelés nombres figurés. Par exemple, les nombres triangulaires sont les nombres résultant d'arrangements triangulaires de points, et les nombres carrés ceux des tableaux carrés.



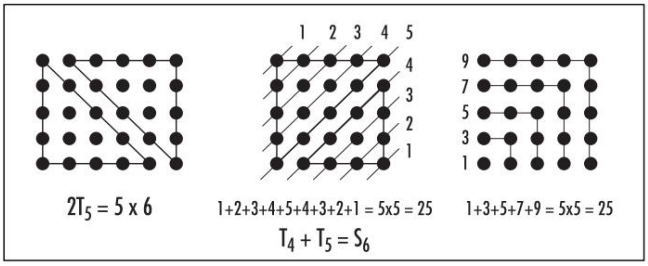
Nombres triangulaires et carrés

D'autres formes géométriques sont possibles, conduisant à d'autres suites de nombres figurés.

Les nombres figurés revêtaient une importance particulière pour les Pythagoriciens du VIe siècle avant notre ère. Croyant que tout dans l'univers pouvait s'expliquer par « l'harmonie des nombres », ils donnaient une importance particulière, voire une personnalité, aux nombres figurés. Par exemple, 10, étant la somme des quatre premiers nombres comptant 1 + 2 + 3 + 4, dans leur croyance unis les quatre éléments - la terre, l'eau, le feu et l'air - et devait donc être tenu dans le plus grand respect. . (Ils nommèrent ce nombre tetraktys, "les quatre sacrés".)

De nombreuses propriétés arithmétiques des sommes peuvent être expliquées en lecture par les nombres figurés. Par exemple, le nième nombre triangulaire,Tn , est donné par la somme÷1 + 2 + + n. Comme deux configurations triangulaires placées produisent ensemble un tableau n × (n + 1) de points, 2Tn , n = × (n + 1), on a :

$$J_n \quad 1\,2\,n = + + + = \frac{+(nn\,1)}{2}$$



Propriétés des nombres figurés

Machine Translated by Google

Le nième nombre carré est donné par la formule : $S_n = n^2$. En regardant les diagonales du carré, on obtient la somme :

$$1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1 = n^2$$

La somme des n premiers nombres impairs est également cachée dans un carré. Nous avons ainsi :

La somme des n premiers nombres impairs est n^2.

L'ajout d'un à chacune de ces sommations donne la somme des n premiers nombres pairs. Ainsi nous avons :

La somme des n premiers nombres pairs est $n^2 + n$.

Il y a une belle interaction entre les nombres triangulaires et carrés. Par exemple, la somme de deux nombres triangulaires consécutifs est toujours un nombre carré : 1 + 3 égale 4, 3 + 6 égale 9 et 6 + 10 égale 16, par exemple. En général:

$$T_{n-1} + T_n = S_n$$

Le schéma central de la figure au bas de la page 194 explique pourquoi c'est le cas.

De même, on peut disposer huit copies d'un triangle pour former un carré avec son centre supprimé pour prouver que 8Tn est toujours un moins qu'un nombre carré.

De la même façon, on peut aussi établir que la combinaison suivante de trois nombres triangulaires consécutifs est toujours carrée : $T_{n-1} + 6T_n + T_{n+1}$.

Les nombres 1 = T1 = S1 , 36 = T8 = S6 et 1225 = T49 = S35 sont à la fois carrés et triangulaires, tout comme 41 616 et 1 413 721. Les mathématiciens ont prouvé, en utilisant les FRACTIONS CONTINUES, qu'il existe une infinité de nombres avec cette propriété.

Les nombres triangulaires alternés 1, 6, 15, 28, … sont parfois appelés les nombres de Bohlen. Le nième nombre de Bohlen x est divisible par n et est l'unique multiple de n satisfaisant : $1 + 2 + \ldots + = x$. $x - n$

En 1796, KARL FRIEDRICH GAUSS a prouvé que tout nombre naturel est la somme d'au plus trois nombres triangulaires, et JOSEPH-LOUIS LAGRANGE en 1770 a prouvé que tout nombre naturel est la somme d'au plus quatre nombres carrés.

On peut étendre la portée des nombres figuratifs à trois dimensions pour produire les nombres cubiques, tetrahedral, etc. Le nième nombre de cube est donné par la formule n^3. C'est un cubi en trois dimensions cal tableau de points, chaque couche étant un tableau carré de points. (Ainsi n couches de n 2 points donnent un total de n × n éléments.) Le nième nombre tétraédrique est produit en empilant les n premiers nombres n^2 triangulaires : $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Cela donne la suite :

$$1, 4 = 1 + 3, 10 = 1 + 3 + 6, 20 = 1 + 3 + 6 + 10, \ldots$$

On peut prouver que le nième nombre tétraédrique est donné par la formule $n(n + 1)(n + 2)/6$. Les nombres

triangulaires et les nombres tétraédriques apparaissent sous forme de diagonales dans le TRIANGLE DE PASCAL . L'empilement successif de nombres tétraédriques produit des nombres hypertétraédriques : 1, 5, 15, 35, … Ceux-ci correspondent à des arrangements géométriques quadridimensionnels de points. Ils apparaissent également comme une diagonale dans le triangle de Pascal.

Voir aussi MULTIPLICATION IMBRANCHEE ; NOMBRE PARFAIT ; CARRÉ; TRIANGLE.

multiplication des doigts Après avoir mémorisé les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5, il existe une méthode populaire pour calculer toutes les valeurs des tables de multiplication par 6 à 10. Il est basé sur la règle suivante pour l'encodage des nombres :

Un poing fermé représente 5 et tout doigt levé sur cette main ajoute 1 à cette valeur.

Ainsi, une main avec un doigt levé, par exemple, représente 6. Une main avec trois doigts levés représente 8.

Pour multiplier deux nombres entre 5 et 10, on suit alors ces étapes :

1. Encodez les deux nombres, un sur chaque main.
2. Comptez 10 pour chaque doigt levé.
3. Comptez le nombre de doigts non levés sur chaque main et multipliez les deux comptes.
4. Ajoutez les résultats des étapes deux et trois. C'est le produit recherché.

Par exemple, "6 fois 8" est représenté par un doigt levé sur la main gauche, trois sur la main droite. Il y a quatre doigts levés en tout, ce qui donne le nombre 40 pour l'étape 2. La main gauche a quatre doigts abaissés et la droite a deux doigts abaissés. Nous calculons 4 × 2 = 8.

Ainsi, le produit recherché est 40 + 8 = 48. De même, "8

Machine Translated by Google

fois 8" est calculé comme 60 + 2 × 2 = 64, "9 fois 7" comme 60 + 1 × 3 = 63 et "6 fois 7" comme 30 + 3 × 4 = 42. Remarquez qu'il n'est jamais nécessaire de multiplier deux nombres supérieurs à cinq. Le fonctionnement de la méthode s'explique par l'identité algébrique :

$$(5 + a)(5 + b) = 10(a + b) + (5 – a)(5 – b)$$

L'identité $(N + a)(N + b) = 2N(a + b) + (N – a)(N – b)$ montre que nous pouvons étendre cette méthode à l'utilisation d'un nombre différent de chiffres sur chaque main. Par exemple, avec N = 10, en utilisant les doigts et les orteils, on peut facilement calculer 17 × 18 comme "sept doigts levés" et "huit orteils levés". En comptant chaque chiffre élevé comme 20 (2N), nous avons : 17 × 18 = 20 × 15 + 3 × 2 = 306.

Voir aussi MULTIPLICATION ÉGYPTIENNE ; MULTIPLICATION ÉLISABÉTHANE ; MULTIPLICATION; LES OS DE NAPIER ; MULTIPLICATION RUSSE.

fini Intuitivement, un ensemble est dit fini si l'on peut réciter tous les éléments de l'ensemble en un temps limité. Par exemple, l'ensemble {couteau, fourchette, cuillère} est fini, car il ne faut qu'une ou deux secondes pour réciter les éléments de cet ensemble. D'autre part, l'ensemble des nombres naturels {1, 2, 3, …} n'est pas fini, car on ne peut jamais réciter chacun des éléments de cet ensemble.

Malgré notre compréhension intuitive du concept, il est difficile de donner une définition mathématique précise et directe d'un ensemble fini. L'approche la plus simple consiste à définir simplement un ensemble fini comme étant un ensemble qui n'est pas INFINI, car la notion d'ensemble infini peut être clarifiée. Alternativement, puisqu'il existe une procédure bien définie pour écrire mécaniquement la chaîne de nombres naturels 1, 2, 3, …, on peut définir un ensemble fini comme étant n'importe quel ensemble S dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque . réponse avec un segment initial borné de la chaîne de nombres naturels. Par exemple, en faisant correspondre « couteau » avec 1, « fourchette » avec 2 et « cuillère » avec 3, l'ensemble {couteau, fourchette, cuillère} est fini car ses éléments peuvent être mis en correspondance précisément avec la chaîne de nombres naturels { 1, 2, 3}.

différences finies Pour analyser les termes d'un SEQUENCE, il peut être utile de créer un tableau des différences successives (au sens « droite moins gauche ») entre les termes de la suite, et des différences ultérieures de les différences. Par exemple, pour la séquence 1,2,4,8,15,26,42,64,… on obtient le tableau des différences :

1 2 4 8 15 26 42 64 ...

1 2 4 7 11 16 22 ...

12345 6 ...

11 11 1 ...

0000 ...

000 ...

D'après le modèle qui est maintenant apparent, il est clair que le prochain numéro de la séquence d'origine sera 64 + 29 = 93.

Les entrées de la première ligne sous la séquence d'origine sont dites les « premières différences finies » ; la deuxième ligne sous la séquence représente les «secondes différences finies», et ainsi de suite. Tous les termes qui apparaissent dans un tableau de différences finies sont entièrement déterminés par les valeurs qui apparaissent dans la diagonale principale. Par exemple, si les valeurs a, b, c, … indiquées ci-dessous sont connues, alors le reste du tableau doit se présenter comme suit :

aa ba a b ca b c da b c d 2 3 3 4 6 4 ...

bb cb c d b c d 2 3 3 ...

cc dc d 2 ...

jj e + ...

e ...

Les coefficients qui apparaissent dans la rangée du haut correspondent aux entrées de chaque rangée du TRIANGLE DE PASCAL , qui sont données par les COEFFICIENTS BINÔMIAUX. Ceci suggère qu'il serait éclairant d'examiner la différence finie tableaux des séquences $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$. On obtient :

11 1 1 1 ...

00 0 0 ...

00 0 ...

0 0 ...

Machine Translated by Google

n_1 : 01 2 3 4 ...

11 1 1 ...

00 0 ...

0 0 ...

n_2 : 00136 ...

01 23 ...

111 ...

0 0 ...

Chacune de ces séquences produit un tableau avec une diagonale d'attaque simple : une qui est nulle partout sauf pour l'apparition d'un seul 1. En utilisant cela à notre avantage, rappelons que la diagonale d'attaque de la séquence 1, 2, 4, 8 , 15, 26, 42, 64, … est 1,1,1,1,0,0,0,…, qui est la somme des diagonales principales pour les quatre séquences données par n, n, n, n et $0, 1, 2, 3$. Ainsi le nième terme dans notre séquence d'origine doit être égal au somme des nièmes termes de chacune des quatre suites, soit :

$$n^4 + 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$= \frac{3n^4 - 5n^3 + 6n^2}{6}$$

Ainsi nous avons maintenant une formule pour la suite 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64,…

En général, on peut utiliser cette technique pour trouver une formule pour toute séquence dont la table des différences contient éventuellement une ligne de différences finies constantes. Cependant, toutes les séquences n'ont pas cette propriété. Par exemple, la table des différences pour la suite des NOMBRES de FIBONACCI cycles indéfiniment :

1 1 2 3 5 8 13 21 34 ...

0 1 1 2 3 5 8 13 ...

001 1 2 3 5 ...

Il faut employer des techniques alternatives pour calculer des formules pour de telles séquences.

tests de première et deuxième dérivées Voir MAXIMUM/ LE MINIMUM.

Fisher, Sir Ronald Aylmer (1890–1962) Statistiques britanniques , génétique Né le 17 février 1890 à Londres, en Angleterre, Sir Ronald Fisher est considéré comme le statisticien le plus important du début du XXe siècle. Son texte phare de 1925, Statistical Methods for Research Workers, a établi des méthodes de conception d'expériences et d'analyse des résultats qui ont été largement utilisées par les scientifiques depuis. Fisher était également un généticien compétent et a apporté des contributions significatives aux domaines de la sélection et de la dominance génétique.

Après avoir obtenu un diplôme en astronomie du pont de Cam en 1912, Fisher a développé un intérêt pour la théorie des erreurs dans l'observation astronomique. Ces travaux l'ont conduit à un intérêt général pour les problèmes statistiques et l'analyse des ERREUR dans toutes les disciplines, y compris celles relevant de la biologie. En 1919, Fisher a accepté un poste à la Rothamsted Agricultural Experiment Station en tant que biologiste. Là, il a développé ses idées clés dans la théorie de la génétique tout en fondant la théorie de la conception expérimentale décrite dans son article de 1925.

Fisher a été professeur de génétique à l'University College de Londres de 1933 à 1943, puis professeur de génétique à l'Université de Cambridge jusqu'en 1957. À sa retraite, Fisher a déménagé en Australie pour devenir chercheur à la Division des mathématiques et des statistiques. , CSIRO, Adélaïde.

Sa méthode d'analyse multivariée a permis aux scientifiques, pour la première fois, d'analyser correctement des problèmes impliquant plus d'une variable, et sa notion de « vraisemblance » a fourni les moyens de tirer des conclusions générales sur la base de probabilités relatives de différents événements. Fisher a également contribué à la science des TESTS D'HYPOTHÈSES en identifiant et en analysant de nouvelles DISTRIBUTIONS clés. Son travail a sans aucun doute transformé la statistique d'une science générale en un outil scientifique pratique et puissant. Il est considéré comme le fondateur des statistiques modernes.

Fisher a été élu membre de la ROYAL SOCIETY en 1929 et a reçu la médaille royale de la société en 1938, la médaille Darwin de la société en 1948 et la médaille Copley de la société en 1955.

Il a été fait chevalier en 1952 en reconnaissance de son travail influent dans le domaine des statistiques et pour son développement d'un

Machine Translated by Google

théorie statistique de la sélection naturelle. Fisher est décédé à Adélaïde, en Australie, le 29 juillet 1962.

Voir aussi HISTOIRE DES PROBABILITÉS ET STATISTIQUES (essai); KARL PEARSON.

point fixe Tout point qui est mappé sur lui-même par une TRANSFORMATION donnée est appelé un point fixe. Par exemple, les points x = 0 et x = 1 sont des points fixes pour la fonction f(x) = x REFLEXION ^{2}. Tout point sur la ligne de pour une réflexion dans un plan est un point fixe pour cette réflexion.

Toute application continue f qui applique des points dans l'intervalle unitaire [0,1] à des points dans le même intervalle doit posséder un point fixe. (Par le THEO REM DE VALEUR INTERMEDIAIRE , les graphes de y = f(x) et y = x pour 0 ≤ x ≤ 1 doivent se croiser.) Ceci est un cas particulier d'un résultat plus général prouvé par Luitzen Egbertus Jan Brouwer en 1915 énonçant que, pour toute valeur n, toute application continue f:[0, 1]n → [0,1]n doit posséder au moins un point fixe. (Pour n = 2, [0,1]2 = [0,1] × [0,1] est le carré unité dans le plan, et pour n = 3, [0,1]3 = [0,1] × [0,1] × [0,1] est un cube unité dans un espace tridimensionnel.) Ce théorème a les conséquences amusantes suivantes :

> Considérez deux feuilles de papier carrées, l'une posée directement sur l'autre. Initialement, chaque point de la feuille supérieure se trouve directement au-dessus de son point correspondant sur la feuille inférieure. Maintenant, froissez la feuille du dessus et posez la boule froissée n'importe où sur la feuille du bas. Selon le théorème du point fixe de Brouwer, il y a encore au moins un point de la feuille froissée se trouvant directement au-dessus de son point correspondant sur la feuille inférieure.
>
> Comme expérience de pensée, imaginez les molécules du liquide dans une tasse de café comme les points d'un cube en trois dimensions. Une fois le café brassé, le théorème du point fixe de Brouwer assure qu'au moins une molécule reviendra à son emplacement d'origine.

Voir aussi ITERATION.

fonctions plancher/plafond/partie fractionnaire La fonction plancher, également connue sous le nom de fonction du plus grand nombre entier, prend un nombre réel x et renvoie le plus grand nombre entier ne dépassant pas x. Cette grandeur est notée : $\lfloor x \rfloor$. Par exemple, $\lfloor 7{,}2 \rfloor = 7$, $\lfloor 7{,}9998 \rfloor = 7$ et $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Aussi, $\lfloor -6{,}34 \rfloor = -7$.

La fonction de plafond, également connue sous le nom de fonction du plus petit entier, prend un nombre réel x et renvoie le plus petit entier non inférieur à x. Cette quantité est notée : $\lceil x \rceil$. Par exemple, $\lceil 7{,}2 \rceil = 8$, $\lceil 7{,}998 \rceil = 8$ et $\lceil 7 \rceil = 7$. Aussi, $\lceil -6{,}34 \rceil = -6$. La partie fractionnaire d'un nombre réel x, notée {x}, est donnée par : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Par exemple, {7,2} = 0,2, {7,998} = 0,998 et {7} = 0.
Aussi, {–6,34} = 0,66.

Les noms « plancher » et « plafond », ainsi que la notation de ces fonctions, ont été introduits par Kenneth Iverson dans son texte informatique de 1962 A Programming Language. Ces fonctions apparaissent souvent dans applications de comptage. Par exemple, il existe $\lfloor \frac{N}{4} \rfloor$ multiples de 4 inférieurs ou égaux à N, et, pour deux nombres réels x et y avec x < y, l'intervalle fermé [x, y] contient $\lfloor y \rfloor - \lceil x \rceil + 1$ entiers.

Voir aussi FORMULE DES JOURS DE LA SEMAINE .

fonction plancher Voir SOL/PLAFOND/ PARTIE FRACTIONNÉE LES FONCTIONS.

fluxion Dans sa version de CALCULUS, SIR ISAAC NEW TON considérait la variable x comme une quantité fluide, ou un fluent, et appelait le taux de variation de x le « fluxion » de x. Il a utilisé la notation $\dot{x}$ pour la fluxion de x, $\ddot{x}$ pour la fluxion de la fluxion de x, et ainsi de suite. Ainsi si x = f(t), où x est la distance et t le temps pour un objet en mouvement, alors $\dot{x}$ est la VITESSE instantanée de l'objet, et $\ddot{x}$ son ACCELERATION instantanée.

Aujourd'hui, le terme fluxion est considéré comme obsolète, et nous utilisons le mot DERIVATIVE à sa place. La notation en point saillant pour la dérivée, cependant, est encore utilisée par les physiciens pour désigner les dérivées par rapport au temps.

Voir aussi CALCUL ; HISTOIRE DU CALCUL (essai).

accord focal Tout ACCORD d'une courbe conique—une PARABOLE, une ELLIPSE ou une HYPERBOLE—qui passe par un FOCUS de la conique est appelé un accord focal.

Voir aussi SECTIONS CONIQUES ; RAYON FOCAL.

rayon focal Toute ligne partant du FOCUS d'une conique courbe—une PARABOLE, une ELLIPSE ou une HYPERBOLE—vers un point de la conique est appelée un rayon focal.

Voir aussi SECTIONS CONIQUES ; ACCORD FOCAL.

Machine Translated by Google

focus (pluriel, foyers) A chaque CONIQUE SECTION est associé un ou deux points particuliers appelés chacun un foyer de la conique.

Voir aussi ELLIPSE ; HYPERBOLE; PARABOLE.

logique formelle (logique symbolique) En mathématiques, la l'étude systématique du raisonnement s'appelle la logique formelle. Il analyse la structure des ARGUMENTS, ainsi que les méthodes et validité de la déduction mathématique et preuve.

Les principes de la logique peuvent être attribués à ARISTO TLE (384-322 avant notre ère), qui a écrit le premier traité sur le sujet. Il a cherché à identifier les modes de inférence qui sont valides en vertu de leur structure, non leur contenu. Par exemple, « Le vert et le bleu sont des couleurs ; donc le vert est une couleur » et « Les vaches et les cochons sont des tuiles rep ; donc les vaches sont des reptiles » ont la même structure ("A et B, donc A"), et tout argument avancé via cette structure est logiquement valide. (En particulier, le deuxième exemple est logiquement valable.) Ce mode de pensée a permis à EUCLID (environ 300–260 avant notre ère) de formaliser la géométrie, en utilisant des preuves déductives pour déduire des vérités géométriques à partir d'une petite collection d' AXIOM (vérités évidentes).

Aucune avancée significative n'a été faite dans l'étude de logique pour le millénaire qui a suivi. Cette période a été surtout un temps de consolidation et de transmission du matériel de l'antiquité. La Renaissance, cependant, suscité un regain d'intérêt pour le sujet. Mathématique érudits de l'époque, Pierre Hérigone et Johann Rahn en particulier, développé des moyens de représentation logique arguments avec des abréviations et des symboles, plutôt que mots et phrases. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) en vinrent à considérer la logique comme des « mathématiques universelles ». Il prône le développement d'une « langage » ou un « calcul universel » pour quantifier la tout le processus de raisonnement mathématique. Il espérait concevoir une nouvelle symbolique mécanique qui réduirait erreurs de pensée à l'équivalent de l'arithmétique les erreurs. (Il a ensuite abandonné le travail sur ce projet, l'évaluant comme une tâche trop ardue pour un seul homme.)

Au milieu des années 1800, GEORGE BOOLE a réussi à créer une approche purement symbolique de la proposition logique, la partie qui traite des inférences impliquant phrases déclaratives simples (énoncés) jointes par le connecteurs :

non, et, ou, si … alors …, ssi

(Celles-ci sont appelées la NÉGATION, la CONJONCTION, la DISJONCTION, le CONDITIONNEL et le BICONDITIONNEL, respectivement.) Il l'appliqua avec succès aux mathématiques, faire un pas significatif vers la réalisation de l'objectif de Leibniz.

En 1879, le mathématicien et philosophe allemand Gottlob Frege a construit un système symbolique pour prédis la logique. Cela généralise la logique propositionnelle en y compris les QUANTIFICATEURS : déclarations utilisant des mots tels que certains, tous, et, non. (Par exemple, "Tous les hommes sont mortels" par opposition à "Cet homme est mortel".) Au tournant de la siècle DAVID HILBERT a cherché à concevoir un ensemble complet, formulation cohérente de toutes les mathématiques à l'aide d'un petite collection de symboles avec des significations bien définies. mathématicien et philosophe anglais BERTRAND RUSSELL, en collaboration avec son collègue ALFRED NORTH WHITEHEAD, a relevé le défi de Hilbert. Dans 1925 ils publient un ouvrage monumental. Début avec un ensemble impressionnant de prémisses (principes logiques « qui vont de soi »), ils ont tenté d'établir les fondements logiques de toutes les mathématiques. C'était une réalisation impressionnante. (Après des centaines de pages de manipulations symboliques, ils ont établi le validité de « 1 + 1 = 2 », par exemple.) Bien qu'ils n'ont pas complètement atteint leur objectif, le travail de Russell et White head a été important pour le développement de logique et mathématiques.

Six ans après la publication de leurs travaux, cependant, KURT GÖDEL stupéfia la communauté mathématique en prouvant que l'objectif de Hilbert (et de Leibniz) était futile. Il a démontré une fois pour toutes qu'aucun système formel de logique suffisamment sophistiqué pour incorporer les principes de base de l'arithmétique ne peut atteindre tous les objectifs. les déclarations qu'il espère prouver. Ses résultats sont aujourd'hui appelés THÉORÈMES D'INCOMPÉTENCE DE GÖDEL . La vision réduire toutes les vérités de la raison à une arithmétique incontestable s'en est trouvée ébranlée.

Comprendre les fondements philosophiques de les mathématiques sont encore un domaine de recherche scientifique intense.

Voir aussi ARGUMENT ; RÉA DÉDUCTIVE/INDUCTIVE SONS; LOIS DE LA PENSÉE.

formule Toute identité, règle générale ou expression générale en mathématiques qui peut être appliquée à différents valeurs d'une ou plusieurs quantités s'appelle une formule. Par exemple, la formule de l'aire A d'un cercle est :

$$A = \pi r^2$$

Machine Translated by Google

où r représente le rayon du cercle. Le
La formule QUADRATIQUE pour les racines d'une équation quadratique de la forme ax2 + bx + c = 0 est :

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fondements des mathématiques La branche des mathématiques concernée par la justification des mathématiques les règles, les axiomes et les modes d'inférence sont appelés fondements des mathématiques. Le paradigme de l'analyse mathématique critique est venu des travaux du grand géomètre EUCLIDE (vers 300-260 avant notre ère) qui, dans son travail LES ÉLÉMENTS, ont démontré que toute géométrie connue à son époque peut être logiquement déduite d'un petit ensemble de vérités évidentes (axiomes). LEONHARD EULER (1707-1783) a produit des résultats fondamentaux dans des branches des mathématiques et ont souvent vu des liens entre ces branches. Lui aussi a recherché de petits ensembles de concepts fondamentaux et, espérons-le, communs à tous les domaines. À la fin des années 1800 et au tournant du siècle avec la découverte de RUSSELL'S PARADOXE en THEORIE DES ENSEMBLES, les mathématiciens ont été amenés à paradoxes et incohérences apparents au sein de la des notions apparemment très basiques d'"ensemble" et de "nombre". Cela a conduit à l'étude fervente des principes fondamentaux des mathématiques élémentaires et même à l'étude des le processus de pensée mathématique lui-même (FORMEL LOGIQUE). Dans les années 1930, le mathématicien autrichien KURT GÖDEL (1906-1978) stupéfia la communauté mathématique en prouvant, essentiellement, que tout système formel de les mathématiques qui intègrent les principes de l'arithmétique contiendront des énoncés qui ne peuvent être ni prouvés ni réfutée, et, en outre, un tel système sera nécessairement incapable d'établir qu'il est exempt de CONTRADICTIONS. Malgré ces conclusions inquiétantes, l'étude des principes fondateurs des mathématiques est encore un domaine de recherche actif aujourd'hui.

Voir aussi GEORG CANTOR ; THÉORÈMES D'INCOMPÉTITUDE DE GÖDEL ; BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL ; ALFRED NORTH WHITEHEAD ; ERNST FRIEDRICH FERDI NAND ZERMELO.

théorème des quatre couleurs Pendant des siècles, les cartographes ont sait que quatre couleurs suffisent pour colorer n'importe carte (c'est-à-dire toute division du plan en régions). C'est exigeait que les régions partageant une longueur commune de limite soit peinte de couleurs différentes (mais deux régions se rejoignant en un point, comme les états de l'Arizona et du Col orado sur une carte des États-Unis, peut être peint même teinte). Les cartographes avaient également observé que il en va de même pour toute carte dessinée sur une SPHÈRE (le globe).

La question de savoir si cette observation pouvait être s'est avéré vrai mathématiquement a été posé pour la première fois par l'anglais érudit Francis Guthrie en 1852. Mathématiciens AUGUSTUS DE MORGAN (1806–71) et ARTHUR CAY LEY (1821–95) ont travaillé pour résoudre le problème et, en 1872, l'élève de Cayley Alfred Bray Kempe (1849–1922) produit la première tentative d'épreuve de la quadrichromie conjecture. Malheureusement, 11 ans plus tard, un universitaire anglais Percy Heawood (1861-1955) a découvert que Kempe avait fait une erreur dans son travail. En 1890 Headwood plus tard a prouvé que cinq couleurs suffisent toujours pour colorer une carte planaire, mais la preuve que quatre suffisent en réalité lui a échappé. Heawood a également regardé au-delà cartes planes et sphériques et fait une conjecture générale que si une surface contient des trous g (tels que TORUS avec g = 1 trou, ou une sphère avec g = 0 trous), alors tout carte dessinée sur cette surface peut être coloriée avec

$$\frac{7 + \sqrt{48g + 1}}{2}$$

couleurs, et qu'il existe des exemples de cartes sur ces surfaces qui nécessitent précisément ce nombre de couleurs. (Les parenthèses indiquent d'arrondir à l'entier inférieur le plus proche.)

En 1968, deux mathématiciens, Gerhard Ringel et JWT Youngs, a prouvé que Heawood avait raison pour tous surfaces avec deux trous ou plus et pour le tore. Malheureusement, leurs travaux ne s'appliquaient pas au cas d'un sphère et d'une BOUTEILLE KLEIN. Ce n'est que le lendemain décennie où, en 1976, les mathématiciens Kenneth Appel et Wolfgang Haken a finalement établi que quatre couleurs suffisent en effet pour colorer n'importe quelle carte sur une sphère (et d'où le rabot, puisque, en faisant un petit trou dans le centre d'une des régions à peindre, un trou la sphère peut être étirée et aplatie sur le plan, et, inversement, une région plane peut être étirée et moulé dans une sphère perforée).

La preuve d'Appel et Haken était considérée comme controversée à l'époque, car elle utilisait quelque 1 200 heures de temps d'ordinateur pour vérifier près de 2 000 spas compliqués

Machine Translated by Google

dispositions particulières. (Il a été soutenu que puisqu'aucun être humain ne pouvait vérifier que l'ordinateur avait correctement effectué ce travail, alors le résultat produit n'est pas une preuve valide.) La plupart des mathématiciens acceptent aujourd'hui la validité du travail d'Appel et Haken et considèrent les fameux quatre problème de couleur résolu.
(La recherche d'une preuve simple et élégante facilement vérifiée par la main humaine continue cependant.)

Il est intéressant de noter que la conjecture de Heawood échoue en fait pour le seul cas qui reste : on sait que six couleurs suffisent pour colorer n'importe quelle carte dessinée sur une bouteille de Klein (g = 1) , et non sept, comme le prédit la formule.

Voir aussi SOL/PLAFOND/ PARTIE FRACTIONNELLE
LES FONCTIONS.

Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768–1830) Français Analyse, Ingénierie Né le 21 mars 1768, le savant français Joseph Fourier est connu en mathématiques pour ses contributions fondamentales à la théorie de la conduction de la chaleur et son étude des séries trigonométriques. Ses avancées révolutionnaires sur ces sujets apparaissent dans son célèbre traité de 1822 Théorie analytique de la chaleur . Aujourd'hui, les SÉRIES DE FOURIER jouent un rôle fondamental dans l'étude de la physique et de l'ingénierie, ainsi que dans le développement des mathématiques théoriques.

Placé dans une école militaire comme orphelin à l'âge de 10 ans, Fourier manifeste un vif intérêt pour les mathématiques à ce jeune âge. Il a enseigné à la même école militaire pendant quatre ans avant d'entrer dans la nouvelle école de formation des enseignants L'École Normale (plus tard rebaptisée L'École Polytechnique) en 1794. Là, Fourier a reçu l'enseignement des mathématiques de JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) et excellait dans toutes ses études.
En 1797, lorsque Lagrange quitte la chaire d'analyse et de mécanique, Fourier est nommé nouveau directeur du département.

Cette position fut cependant de courte durée, car l'année suivante, Fourier fut affecté à l'armée de Napoléon lors de l'invasion de l'Égypte. Il a été chargé de superviser une variété d'enquêtes archéologiques et scientifiques, et c'est au cours de cette période de sa vie, alors qu'il était stationné dans le désert égyptien, que Fourier a développé une fascination pour les mathématiques du transfert de chaleur.

Adoptant une approche très originale, Fourier a analysé la conduction en représentant des oscillats compliqués.
ing des quantités comme des sommes de composants plus simples. Cela l'a conduit à sa théorie des séries trigonométriques. En 1807, Fourier a détaillé les résultats de ses travaux dans l'article "Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides", mais les mathématiciens de l'époque, dont Lagrange, n'étaient pas convaincus de la validité de son approche. Fourier a réécrit l'article en 1811, et a même reçu un prix pour son contenu, mais a tout de même été critiqué par la communauté mathématique pour son manque de rigueur et son manque de généralité. Pendant encore 10 ans, Fourier a travaillé pour établir les fondements mathématiques de son travail et détailler le raisonnement derrière ses méthodes. Enfin, en 1822, après la publication de son célèbre traité, toutes les critiques de ses mathématiques furent réglées, et l'approche de Fourier fut acceptée comme valide et fondamentalement importante.

Fourier est élu au poste puissant de secrétaire de l'Académie des sciences la même année et, en 1827, il est honoré d'être membre de la ROYAL SOCIETY de Londres.

On a supposé que Fourier, ironiquement, aurait contracté la maladie exotique myxœdème en Égypte, qui, parmi plusieurs symptômes, induit une extrême sensibilité au froid. On dit que Fourier gardait ses quartiers d'habitation presque insupportablement chauds et s'emmitouflait toujours dans de nombreuses couches de vêtements. Fourier meurt d'une crise cardiaque le 16 mai 1830.

Les séries de Fourier ont trouvé de nombreuses applications en physique et en ingénierie. Pratiquement toutes les branches de la science qui s'occupent du transfert d'énergie par les ondes (telles que l'acoustique, les études sismiques, les communications sans fil, la spectroscopie) utilisent les méthodes de Fourier.
Dans un cadre plus abstrait, les séries de Fourier sont maintenant considérées comme l'une des infinités d'approches possibles pour décomposer les éléments d'un ESPACE VECTORIEL de fonctions en termes d'éléments de base. Ce changement de perspective a conduit à de nouvelles perspectives dans l'étude de la mécanique quantique.

Série de Fourier Lorsqu'un musicien joue simultanément sur deux cordes d'un violon, une seule onde sonore atteint nos oreilles, l'effet combiné des deux notes.

Néanmoins, le cerveau humain est capable de décoder les informations qu'il reçoit pour "entendre" jouer deux notes distinctes.

Autrement dit, le cerveau humain est capable de reconnaître des ondes sonores complexes comme des sommes d'ondes sonores de base plus simples.

Machine Translated by Google

Au XVIIIe siècle, le mathématicien et physicien français JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–83) et le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707–83) ont travaillé pour décrire les vibrations complexes des cordes comme des sommes de fonctions plus simples. Le mathématicien suisse Daniel Bernoulli (1700-1782) de la célèbre FAMILLE BERNOULLI a introduit l'utilisation des fonctions trigonométriques dans cette étude, une approche qui a ensuite été entièrement développée par le mathématicien et physicien français JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830), bien que son travail ait été motivé par l'étude de la conduction thermique. Fourier a montré que de nombreuses fonctions pouvaient être représentées comme des sommes infinies de fonctions sinus et cosinus.

Le résultat de l'écriture d'une fonction comme une somme de fonctions trigonométriques est aujourd'hui appelé une série de Fourier. Comme les fonctions trigonométriques changent de valeur tous les 2π en RADIAN MEASURE, on suppose dans ces études que les fonctions considérées sont elles-mêmes périodiques de période 2π.

Supposons que f(x) est une telle fonction. Alors une série de Fourier pour f est une expression de la forme :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \cdots + b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + \cdots$$

On retrouve les valeurs des constantes a0 ,a1 ,a2 ,… b1 ,b2 ,… en intégrant. Par exemple, puisque $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \frac{a_0}{2}(2\pi) = \pi a_0$$

donnant : $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$. Multiplier par sin(x) et intégrer donne :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1\cos(x)\sin(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_2\cos(2x)\sin(x)\,dx + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} b_1\sin(x)\sin(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_2\sin(2x)\sin(x)\,dx + \cdots = a_0(0) + a_1(0) + a_2(0) + \cdots + b_1(\pi) + b_2(0) + \cdots = b_1\pi$$

montrant que $b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx$.

On peut montrer que les fonctions {1,cos(x),cos(2x), …,sin(x),sin(2x),…} sont ORTHOGONAL en ce sens que l'intégrale du produit de deux fonctions différentes de cet ensemble est nul. Cette observation permet de calculer toutes les valeurs a0 ,a1 ,a2 ,…,b1 ,b2 ,… par cette méthode de multiplication par une fonction trigonométrique et d'intégration. Nous avons, en général :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

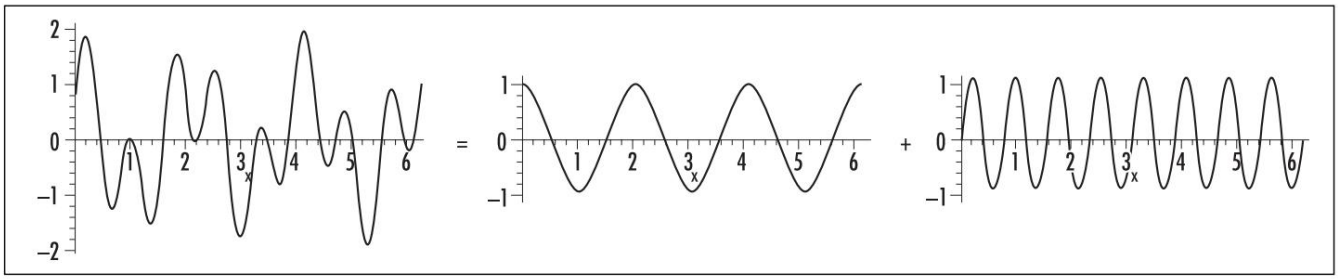
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Les mathématiciens ont montré que si f(x) et son DERIVATIVE f'(x) sont toutes les deux des FONCTIONS CONTINUES, alors le développement

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \cdots + b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + \cdots$$

est valable. Ils ont également montré que, s'il est interprété correctement, le développement reste valable même si f ou



Une onde comme somme d'une courbe cosinus et d'une courbe sinus

Machine Translated by Google

f′ ne sont pas continues pour un nombre fini d'emplacements dans l'intervalle [–π,π]. Cela montre, par exemple, que les fonctions qui zigzaguent comme une dent de scie, ou sautent et déprécié comme un escalier, par exemple, peut encore être bien approximée par une somme de fonctions trigonométriques. Par exemple, supposons que f(x) soit la fonction en forme de V f(x) = |x| sur l'intervalle [–π,π], avec cette section de graphique répété sur toute la droite numérique pour produire l'image d'une dent de scie. On vérifie :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx \qquad \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \qquad = \begin{cases} 0 \text{ pour n pair} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} \text{ pour n impair} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

donnant:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(x)}{1} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \frac{\cos(7x)}{7^2} + \cdots\right)$$

au moins sur l'intervalle [–π,π]. A noter, par curiosité, que si nous plaçons x = 0 dans cette formule, nous obtenons le identité remarquable :

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \cdots$$

Voir aussi FONCTION ZETA.

fractale Si nous mettons à l'échelle l'image d'un objet géométrique par un facteur k, alors sa taille change en conséquence : toute ligne de longueur a devient une droite de longueur ka, toute plane la région de l'aire A devient une région plane de l'aire k 2A, et tout solide de volume V est remplacé par un solide de volume k 3V. Un objet peut donc être décrit comme d-dimensionnel si sa « taille » s'échelonne selon la règle :

nouvelle taille = k^d × ancienne taille

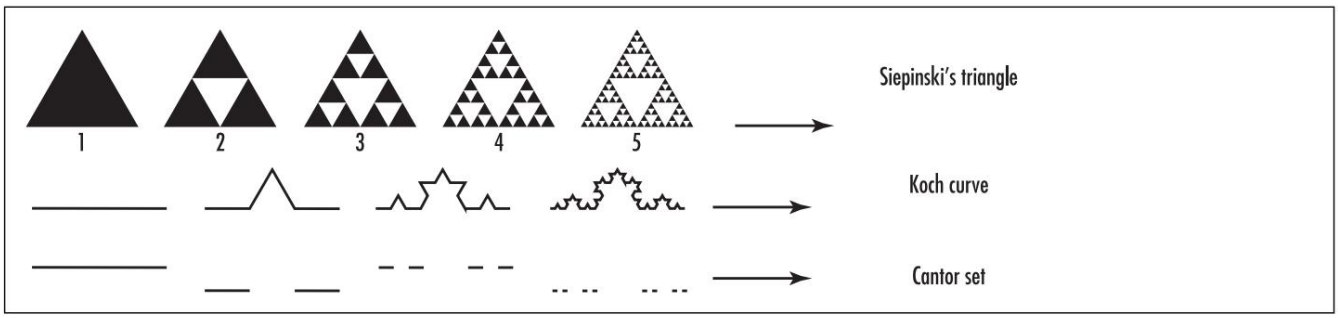
Au tournant du XXe siècle, les mathématiciens ont découvert des objets géométriques de dimension fractionnaire. Ces objets sont appelés fractales. L'un de ces objets est le triangle de Sier Pinski, conçu par le mathématicien polonais Vaclav. Sierpinski (1882-1969). Commençant par un équilatéral triangle, on le construit en enlevant successivement cen triangles centraux à l'infini. Le résultat final est un objet possédant une "auto-similitude", ce qui signifie que la figure entière est composée de trois copies d'elle-même, dans ce cas chacune à une demi-échelle. Si la dimension de l'objet est d et la taille de l'objet entier est S, alors selon la règle d'échelle ci-dessus, la taille de chaque pièce mise à l'échelle est $\left(\frac{1}{2}\right)^d \times S$. Comme la figure entière est composée de trois de ces chiffres plus petits, nous avons $S = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^d \times S$. Ce nous dit que $2^d = 3$, ce qui donne $d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58$. Ainsi le triangle de Sierpinski est une construction géométrique qui se situe quelque part entre une longueur et une aire.

En 1904, le mathématicien suédois Nils Fabian Helge von Koch (1870-1924) a décrit une courbe fractale construite de manière similaire. Partant d'un segment de droite, on trace sur son tiers médian deux côtés d'un triangle équilatéral de taille correspondante et le répète construction à l'infini sur toute la ligne les segments qui apparaître. Le résultat s'appelle la courbe de Koch. C'est aussi auto-similaire : la figure entière est composée de quatre exemplaires d'elle-même, chacune à l'échelle d'un tiers. L'objet a une fractale cote $d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}26$.

L'ensemble Cantor, inventé par le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918), est construit à partir de un seul segment de ligne, en supprimant son tiers médian et les tiers médians de tous les segments de ligne qui apparaissent par la suite. Le résultat est une construction géométrique, ne ressemblant à rien de plus qu'un ensemble de points, mais encore une fois avec la même propriété d'auto-similarité : le construit entier est composé de deux copies de lui-même, chacune à une troisième échelle. L'ensemble Cantor est une fractale de dimension $d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$. Il n'est pas assez grand pour être considéré unidimensionnel, mais c'est certainement « plus » qu'un ensemble déconnecté de points isolés.

Les fractales apparaissent également dans la théorie du CHAOS et étude des SYSTEMES DYNAMIQUES. mathématicien français Gaston Maurice Julia (1892-1978) considérait le itérations de fonctions f qui prennent des nombres complexes comme entrées et donnent des nombres complexes comme sorties. Si z est un nombre complexe et l'ensemble des points f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), … sont tous tracés sur un graphe, alors deux possibilités peuvent se présenter : soit la suite est illimitée, ou les points sautent dans une région délimitée. L'ensemble

Machine Translated by Google



Fractales

de toutes les valeurs z qui conduisent à une suite bornée est appelé le «jeu de Julia» pour f. C'est une région du plan complexe qui est presque toujours une fractale. Même simple fonctions telles que $f(z) = z^2 + c$, avec différentes valeurs de la constante c, peut produire des structures étonnamment variées et belles.

Benoit Mandel, mathématicien français d'origine polonaise brot considère alternativement toutes les valeurs complexes c pour lequel l'application répétée de la fonction $f(z) = z^2 + c$, en commençant par le point z = 0, donne a séquence bornée. Tracer tous ces points c décrit un sous-ensemble du plan complexe appelé aujourd'hui l'ensemble Mandel brot. Il a une structure extrêmement compliquée. Dans en particulier, sa limite est une fractale.

Le triangle de Sierpinski est également issu d'une itération procédure connue sous le nom de « jeu du chaos : »

> Choisissez un point au hasard à l'intérieur d'un triangle équilatéral (schéma (1) ci-dessus) puis tracez le point à mi-chemin entre lui et l'un des sommets du triangle pris au hasard. (Ce le point se trouvera quelque part dans la région ombrée du diagramme (2) ci-dessus.) Dessinez maintenant le point à mi-chemin entre ce nouveau point et un autre sommet choisi au hasard. (Ce point mentira quelque part dans la région ombrée du diagramme (3) ci-dessus.) Imaginez que nous continuons ce processus indéfiniment. Le triangle de Sierpinski représente toutes les destinations « finales » possibles de ce point car ce jeu est joué un nombre infini de fois.

De nombreux objets dans la nature semblent posséder les propriétés d'auto-similarité des fractales. Par exemple, le la forme des limites d'un nuage semble tout aussi irrégulière sous grossissement comme il le fait lorsqu'il est regardé directement. Les scientifiques ont découvert qu'il était possible d'attribuer des dimensions fractales à divers objets dans la nature. L'étude des fractales a depuis trouvé des applications à l'étude de la formation des cristaux, de la mécanique des fluides, de la croissance urbaine, de la linguistique, de l'économie et de nombreux autres domaines divers.

Une grande partie du travail en géométrie fractale a été réalisée par Benoit Mandelbrot, qui a également inventé le terme fractale.

dimension fractale Voir FRACTAL.

fraction Tout nombre écrit sous forme de QUOTIENT, c'est-à-dire comme un nombre a divisé par un autre b, est une fraction. Nous écrire a/b et appeler le dividende a le numérateur du fraction et le diviseur b le dénominateur du frac tion. On suppose que b n'est pas nul.

Il convient de considérer les fractions simplement comme réponses aux problèmes de division. Par exemple, si six tartes sont partagés également entre trois garçons, puis chaque garçon reçoit deux tartes. On écrit : 6/3 = 2. De même, si l'on la tarte est partagée entre deux garçons, puis la quantité de tarte chaque garçon reçoit s'écrit 1/2. Nous appelons à juste titre cette quantité "moitié". Clairement si une tarte est partagée avec juste un garçon, alors ce garçon reçoit toutes les tartes. Ce donne l'observation :

Règle du dénominateur unitaire : $= \frac{\text{un}}{1}$ a

Chaque propriété fractionnaire peut être expliquée avec ceci modèle simple de partage de tarte. Par exemple, nous avons :

Loi d'annulation : Pour toute valeur non nulle x et fraction que $\frac{\text{un}}{b}$ nous avons $\frac{xa}{xb} = \frac{\text{un}}{b}$.

Par exemple, si a tartes sont partagées entre b garçons, alors doubler le nombre de tartes et doubler le nombre

Machine Translated by Google

des garçons ne modifie pas la quantité de tarte de chaque garçon reçoit : $\frac{2a}{2b} = \frac{un}{b}$. Nous avons, en effet, "annulé" un diviseur commun au numérateur et au dénominateur de la fraction. Ce principe montre aussi qu'il est possible d'exprimer la même fraction en un nombre infini 3– de formes équivalentes. Par exemple, , 10 5 6– 9– 30– , 15 , 50 , et $\frac{120}{200}$ représentent tous la même fraction.

En poursuivant le modèle du partage des tartes, on constate que si les tartes a1 sont partagées entre les garçons b , alors une autre tarte a2 sont partagés entre les mêmes garçons, alors en effet a1 + a2 les tartes étaient partagées entre ces garçons. Cela donne la règle :

Addition de fractions similaires : $\frac{a1}{b} + \frac{a2}{b} = \frac{a1 + a2}{b}$

fournissant ainsi une méthode pour additionner des fractions partageant le même dénominateur. Pour additionner des fractions avec des dénominateurs différents, convertissez chaque fraction en formes qui partager un DÉNOMINATEUR COMMUN , puis additionner. Pour exemple, additionner et écrire $\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{8 \times 2}{8 \times 5} + \frac{5 \times 3}{5 \times 8} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40}$ pour obtenir la réponse. Cela donne $\frac{31}{40}$ la règle:

Addition de fractions différentes : $\frac{un}{b} + \frac{c}{d} = \frac{da + bc}{bd}$

La soustraction est effectuée de la même manière.

Si, en partageant des tartes, on souhaitait doubler la quantité de tarte que chaque garçon reçoit, on pourrait simplement doubler le nombre de tartes disponibles. Cela suggère la règle :

Règle de produit : $x \times \frac{un}{b} = \frac{xa}{b}$

Cela montre, avec la loi d'annulation, que la multiplication d'une fraction par son dénominateur produit son numérateur comme résultat :

Règle du produit du dénominateur : $b \times \frac{un}{b} = \frac{ba}{b} = \frac{un}{1}$

La règle du produit montre également comment multiplier pour 2– fractions. Par exemple, pour calculer × observer 3 $\frac{4}{7}$ ce $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{\frac{2}{3} \times 4}{7}$ par la règle du produit. multiplier le numérateur et le dénominateur par trois donnent chacun $\frac{3 \times \frac{2}{3} \quad 4}{3 \times 7}$, lequel est $\frac{2 \times 4}{3 \times 7}$. Ce processus se résume :

Multiplication des fractions : $\frac{un}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\text{un-avant}}{bd}$

La règle de division suivante pour les fractions est prouvée dans un manière similaire:

Division des fractions : $\frac{\frac{un}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{un}{b} \times \frac{d}{JC} = \frac{\text{publicité}}{\text{avant}}$

(Multiplier le numérateur et le dénominateur chacun par b obtenir $\frac{un}{b \times \frac{c}{}}$. Multipliez maintenant le numérateur et d dénominateur chacun par d pour donner $\frac{\text{publicité}}{\text{avant JC}}$.)

Types de fractions

En écrivant une fraction générique a/b, on suppose souvent que a et b sont chacun un NOMBRE ENTIER. Si c'est en effet le cas, alors la fraction est appelée un "commun" fraction (ou parfois une fraction « simple » ou « vulgaire »). Chaque fraction commune représente un RATIONAL NOMBRE. Bien qu'il existe une infinité de rationnels nombres, étonnamment, ils n'occupent absolument aucun espace sur la LIGNE NUMÉRIQUE.

Une fraction commune avec numérateur positif et dénominateur est dit "propre" si son numérateur est inférieur que son dénominateur, et "impropre" dans le cas contraire. (Ainsi une fraction propre représente une quantité inférieure à un, et une fraction impropre une quantité supérieure ou égal à un.) Un « nombre fractionnaire » est un nombre composé d'un nombre entier et d'une fraction propre. Par exemple, $3\,1/2$ est un nombre fractionnaire.

Une fraction nulle est une fraction dont le numérateur est égal à zéro. Si aucune tarte n'est partagée entre les garçons b , alors chacun garçon reçoit zéro tarte. Ainsi, chaque fraction nulle est égale à zéro : 0/b = 0.

Une fraction « indéfinie » est une fraction dont le dénominateur est égal à zéro. Une telle fraction est invalide, car elle ne peut avoir aucune valeur significative. (Si, par exemple, 2/0 avait la valeur x, puis la multiplication par le dénominateur donne l'absurdité 2 = 0 × x = 0. Aussi, en divisant

Machine Translated by Google

zéro par zéro pourrait, prétendument, avoir n'importe quelle valeur souhaitée. Par exemple, on pourrait soutenir que 0/0 = 17 en notant que 0 × 17 = 0 est une affirmation vraie. Il n'y a pas un seul valeur appropriée pour cette quantité.)

Une fraction "unitaire", également appelée ÉGYPTIEN FRACTION, est une fraction propre dont le numérateur est égal à un. Une fraction « complexe » est une fraction dans laquelle le numérateur ou le dénominateur, ou les deux, est une fraction. Par exemple, $\frac{3/5}{4/7}$ est une fraction complexe. La division des fractions règle fournit les moyens de simplifier les fractions complexes.

Voir aussi ANNULATION ; FRACTION CONTINUE ; REPRÉSENTATION DÉCIMALE ; FRACTIONS PARTIELLES ; PAR CENTAGE ; RAPPORT; RATIONALISER LE DÉNOMINATEUR ; FORME RÉDUITE.

fonction partie fractionnaire Voir PLANCHER/PLAFOND/ FONCTIONS DE PARTIE FRACTIONNELLE.

fréquence Dans STATISTIQUES, la fréquence absolue d'un la valeur observée est le nombre de fois cette valeur apparaît dans un ensemble de données. Par exemple, dans l'échantillon 4, 6, 3, 4, 4, 1, 7, 3, 7, 9, 8, 4, 4, 5, 2, la fréquence absolue de l'observation 4 est cinq, et celle de 8 est un.

La fréquence relative d'une valeur observée est la proportion de fois où elle apparaît. Ceci est calculé en divisant la fréquence absolue de l'observation par la nombre total d'entrées dans l'ensemble de données. Par exemple, la fréquence relative de 4 dans l'ensemble de données ci-dessus est 5/15 = 1/3, et celui de 8 est 1/15.

On peut calculer la fréquence relative des entrées dans un ensemble de données infini en utilisant une LIMITE. Pour exemple, les mathématiciens ont prouvé que 5,8% des les puissances de deux 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,… commencent avec un 7. (La première puissance à le faire est 246.) Par cela, ils signifie que si l'on devait examiner les premières N puissances de deux, environ 5,8 % d'entre eux commencent par un 7. Cette approximation est rendue plus exacte en prenant valeurs de plus en plus grandes de N.

En physique, le terme fréquence est défini comme la nombre de cycles qui se produisent par unité de temps dans un système qui oscille (comme un pendule, une onde, un vibrateur chaîne ou un courant alternatif). Le symbole utilisé pour fréquence est généralement f, bien que la lettre grecque v soit souvent employé pour la fréquence de la lumière ou d'autres rayonnements électromagnétiques. Une unité de fréquence s'appelle un hertz (Hz).

distribution de fréquences Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

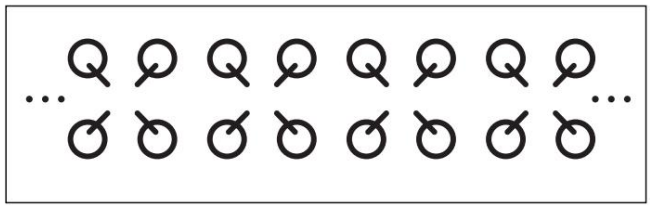
polygone de fréquence Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

motif de frise (ornement de bande) Un dessin sur une bande infinie qui se compose de copies répétées d'un seul motif s'appelle un motif de frise. (Dans l'architecture classique, une frise est une structure horizontale, généralement imprimée de décorations, reposant au sommet de certaines colonnes. Le moderne l'équivalent est une bande horizontale de papier peint utilisée pour décorer la partie supérieure d'un mur juste en dessous du plafond.)

Les mathématiciens s'intéressent à la SYMÉTRIE propriétés des motifs de frise. Chaque motif de frise, par déf inition, est symétrique par une TRANSLATION T dans le direction de la bande. Un motif de frise peut également être symétrique autour d'une RÉFLEXION horizontale (H), d'une réflexion verticale (V), d'une ROTATION de 180° autour d'un point dans le dessin (R), un GLIDE REFLECTION (G), ou une collection de ces cinq transformations de base. La première frise modèle ci-dessous possède les cinq symétries.

Toutes les combinaisons de T, H, V, R et G ne représentent pas les symétries d'un motif de frise. Par exemple, une frise motif ne peut pas posséder les symétries T et H seul, car la composition de ces deux symétries produit un réflexion de glissement, et donc le motif doit également posséder la symétrie G. De même, tout motif de frise qui possède les symétries H et V doivent également posséder la symétrie R, puisque l'effet combiné d'une verticale et d'une horizontale la réflexion est une rotation. En raisonnant ainsi, on peut prouver qu'il n'y a que sept combinaisons de types de symétrie qu'un motif de frise peut posséder. Ceux-ci sont:

T seul	T, H et G
T et V	T, V, R et G
T et R	T, H, V, R et G
T et G	



Un motif frise

Machine Translated by Google

Pour cette raison, les mathématiciens disent qu'il n'y a que sept motifs de frise possibles.

Un motif de papier peint est l'analogue bidimensionnel d'un motif de frise. Les mathématiciens ont prouvé qu'il existe exactement 17 motifs de papier peint différents.

frustum Si un solide géométrique est coupé par deux plans parallèles, alors la partie du solide entre les deux plans s'appelle un frustum. Un tronc de cône est également produit en coupant le solide par un plan parallèle à la BASE du solide. Par exemple, un tronc conique est la forme produite en coupant le haut d'un cône (avec la coupe parallèle à la base). Un tronc pyramidal est fait en découpant le sommet d'une pyramide, encore une fois avec la coupe parallèle à la base.

L'altitude h d'un tronc de cône est la distance entre les deux plans parallèles. Le volume d'un tronc de cône ou de pyramide est donné par la formule :

$$\frac{1}{3}h\left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}\right)$$

où A1 et A2 sont les aires des faces supérieure et inférieure.

Voir aussi CÔNE ; SOLIDE DE RÉVOLUTION ; VOLUME.

Test F Voir STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

fonction (mapping) Toute procédure ou règle qui affecte à chaque membre d'un ensemble X un et un seul élément d'un autre ensemble Y est appelée une fonction. Par exemple, la relation « est la mère de » est une fonction de l'ensemble X de tous les peuples du monde vers l'ensemble Y de toutes les femmes : chaque personne se voit « attribuer » une, et une seule, mère biologique. La règle qui met les nombres au carré considère les membres de l'ensemble X = {1,2,3,4} comme des éléments correspondants de l'ensemble Y = {1,4,9,16}.

Si f est un symbole utilisé pour désigner une fonction d'un ensemble X vers un ensemble Y, alors on écrit f : X → Y et on appelle X le domaine de f et Y le codomaine de f. Nous disons aussi que f « mappe » des éléments de X sur des éléments de Y. Si un élément spécifique x de l'ensemble X est mappé sur l'élément y de Y, alors nous écrivons y = f(x). (Les mathématiciens appellent parfois x une « entrée » et la valeur y la « sortie » correspondante.) Par exemple, si f est la fonction d'élévation au carré décrite ci-dessus, alors nous avons f(2) = 4 et f(3) = 9. Si "M" désigne la fonction "est la mère de", et la mère de Lawrence est Trenyce, alors nous pouvons écrire M(Lawrence) = Trenyce. Parfois, les mathématiciens utiliseront des flèches avec des tabulations pour souligner la notion de mappage et écriront, par exemple, M : Lawrence |→ Trenyce.

Notez que tous les éléments de Y n'ont pas besoin d'être le résultat d'un mappage. (Toutes les femmes ne sont pas mères, par exemple.) En outre, il est possible que deux ou plusieurs éléments de X soient associés au même élément de Y. (Deux personnes peuvent avoir la même mère, par exemple.) L'ensemble des toutes les sorties possibles f(x) pour une fonction donnée f est appelée la plage (ou l' IMAGE) de la fonction. Par exemple, la plage de la fonction « est la mère de » M, est l'ensemble de toutes les femmes qui ont accouché.

En mathématiques, on étudie généralement les fonctions entre des ensembles de nombres, généralement décrites par des formules. Par exemple, la fonction d'élévation au carré est décrite par l'équation $f(x) = x^2$, ou la fonction $y = x^2$, tandis que $y = 3x + 2$, par exemple, décrit la règle "attribuer à tout nombre x le nombre y deux fois plus que trois fois x".
Dans ce contexte, x est appelé la variable indépendante et y la variable dépendante. (Sa valeur dépend de la valeur de x.) UN GRAPHIQUE D'UNE FONCTION est une représentation graphique d'une fonction qui opère sur des nombres.

Les équations, telles que $y = x^2$ et $y = 3x + 2$, dans lesquelles la variable dépendante est exprimée en fonction de la variable indépendante, sont dites sous « forme explicite ».
En revanche, les expressions pour lesquelles les variables indépendantes et dépendantes apparaissent d'un côté du signe d'égalité sont dites sous « forme implicite ». Par exemple, les équations $2x - y = 5$ et $x^2 + y^2 = 9$ sont sous forme implicite. Les équations implicites peuvent ou non définir y en fonction de x. Par exemple, la première équation présentée ci-dessus peut être réécrite $y = 2x - 5$, donnant la forme explicite d'une fonction. La deuxième relation, cependant, ne représente pas une fonction : il n'y a pas de valeur unique de y associée à chaque valeur de x. (Par exemple, avec x = 0, y peut être 3 ou –3.)

Tout ensemble de paires ordonnées (x,y) satisfaisant une contrainte donnée est appelé une relation. Par exemple, l'ensemble de toutes les paires ordonnées (x,y) satisfaisant $x^2 + y^2 = 9$ est une relation. Graphiquement, cette relation représente + y envoie un cercle de rayon trois. Une relation est une fonction si ce n'est jamais le cas que deux paires ordonnées distinctes ont la même valeur de coordonnée x (c'est-à-dire qu'aucune valeur x unique n'a deux valeurs y différentes qui lui sont associées). Cette condition est parfois appelée le « test de la ligne v

Machine Translated by Google

Historique des fonctions

Depuis l'Antiquité, les savants se sont intéressés à l'identification de règles ou de relations entre les quantités. Par exemple, les anciens Égyptiens savaient que la circonférence d'un cercle est liée à son diamètre via un rapport fixe que nous appelons maintenant PI, et les savants chinois, et plus tard les pythagoriciens, savaient que les trois côtés d'un triangle rectangle satisfont la relation simple donnée par le THÉORÈME DE PYTHAGORE . Bien que ces résultats n'aient pas été exprimés en termes de formules et de symboles (l'évolution du symbolisme algébrique a pris plusieurs siècles), les chercheurs étaient conscients que la valeur d'une quantité pouvait dépendre de la valeur d'autres quantités considérées. Bien que non explicite, la notion de « fonction » était à l'esprit.

Au milieu des années 1300, la mathématicienne française NICOLE ORESME a découvert qu'une quantité variant uniformément (comme la position d'un objet se déplaçant à une vitesse uniforme, par exemple) pouvait être représentée graphiquement sous la forme d'un « graphique », et que la zone sous le graphique représente la changement total de la quantité. Oresme a été le premier à décrire une manière de représenter graphiquement la relation entre une variable indépendante et une variable dépendante et, de plus, à démontrer l'utilité de la tâche.

En 1694, le mathématicien allemand GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, codécouvreur de CALCULUS, a inventé le terme fonction (latin : functio) pour désigner la PENTE de la courbe, une définition qui a très peu de choses en commun avec notre utilisation actuelle du mot. Le grand mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783) a reconnu la nécessité d'expliciter la notion de relation entre quantités et il a défini le terme fonction comme signifiant une quantité variable qui dépend d'une autre quantité. Euler a introduit la notation f (x) pour « une fonction de x » et a promu l'idée d'une fonction en tant que formule. Il a basé tous ses travaux en calcul et en ANALYSE sur cette idée, qui a ouvert la voie aux mathématiciens pour considérer les quantités trigonométriques et les logarithmes comme des fonctions. Cette notion de fonction a par la suite unifié de nombreuses branches des mathématiques et de la physique.

En 1822, le physicien et mathématicien français JEAN BAP TISTE JOSEPH FOURIER présenta des travaux sur le flux de chaleur. Il représente sented fonctions comme des sommes de fonctions sinus et cosinus, mais a fait remarquer que de telles représentations ne peuvent être valides que pour une certaine plage de valeurs. Cela amena plus tard le mathématicien allemand PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859) à proposer une définition plus précise :

> Une fonction est une correspondance qui attribue une valeur unique d'une variable dépendante à chaque valeur autorisée d'une variable indépendante.

C'est, à un niveau élémentaire, la définition généralement acceptée aujourd'hui.

À la fin du XIXe siècle, le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918) a tenté de fonder toutes les mathématiques sur le concept fondamental d'un SET. Parce que les termes variable et relation sont difficiles à spécifier, Cantor a proposé une définition alternative d'une fonction :

> Une fonction est un ensemble de paires ordonnées dans lesquelles chaque premier élément est différent.

Cette idée est basée sur le fait que le graphique d'une fonction n'est rien de plus qu'une collection de points (x, y) sans deux valeurs y affectées à la même valeur x. La définition de Cantor est très générale et peut s'appliquer non seulement aux nombres mais aussi à des ensembles d'autres choses. Les mathématiciens en sont donc venus à considérer les fonctions comme des « mappings » qui attribuent aux éléments d'un ensemble X, appelé le domaine de la fonction, des éléments d'un autre ensemble Y, appelé le codomaine. (Chaque élément x de X se voit attribuer un seul élément de Y.) On peut ainsi décrire une fonction comme un diagramme de flèches dans lequel une flèche est tirée de chaque membre de Y.

le domaine à son membre correspondant du codomaine.
La fonction est alors la collection complète de toutes ces correspondances.

Les textes avancés en mathématiques d'aujourd'hui présentent généralement les trois définitions d'une fonction - en tant que formule, en tant qu'ensemble de paires ordonnées et en tant que mappage - et les mathématiciens travailleront généralement avec les trois approches.

Voir aussi GRAPHIQUE D'UNE FONCTION.

Par exemple, les points (0,–3) et (0,3) sur le cercle de rayon trois ont la même valeur de première coordonnée, et la ligne verticale à x = 0 intercepte le graphique du cercle à deux emplacements. Le cercle est une relation, mais ce n'est pas une fonction.

Une fonction f:X → Y est dite « sur » (ou « sur jective ») si tout élément du codomaine Y est le image d'un élément de X. (C'est-à-dire que chaque élément y de Y est de la forme y = f(x) pour un certain x de X.) Par exemple, la fonction d'élévation au carré considérée comme une application de l'ensemble {1 ,2,3,4} à l'ensemble {1,4,9,16} est sur. Ce n'est pas sur, cependant, lorsqu'on le considère comme une carte de l'ensemble de tous les nombres réels à l'ensemble de tous les nombres réels : aucun nombre négatif ne résulte de l'opération d'élévation au carré.

Machine Translated by Google

Une fonction f:X → Y est dite "un-à-un" (ou "injective") si deux éléments différents de X ne produisent pas la même sortie. Par exemple, la fonction « est la mère de » n'est pas univoque : deux personnes différentes peuvent avoir la même mère. La fonction d'élévation au carré, considérée comme une carte de l'ensemble {1,2,3,4} à l'ensemble {1,4,9,16}, est un à un. Ce n'est pas univoque, cependant, lorsqu'on le considère comme un nombre de l'ensemble de tous les nombres réels à l'ensemble de tous les nombres réels : les nombres 2 et –2, par exemple, produisent la même sortie.

Une fonction qui est à la fois bijective et sur s'appelle une "bijection" (ou parfois une PERMUTATION). Une bijection f:X → Y a la propriété que chaque élément de Y "provient" d'un, et d'un seul, élément de X. On peut ainsi définir la fonction inverse, notée f –1 : Y → X, qui associe à chaque élément y de Y l'élément de X d'où il est issu. Algébriquement, si la variable dépendante y est donnée comme une formule explicite en termes de x, alors la fonction inverse détermine la variable indépendante x comme une formule en termes de y. Par exemple, l'inverse de la fonction y = 3x + 2 est donné par x = (y – 2)/3. (C'est-à-dire que l'opération inverse de "tripler un nombre et d'en ajouter deux" est de "soustraire deux puis diviser par trois".) Les rôles des variables x et y ont changé, et donc le graphique de l'inverse d'un La fonction peut être trouvée en inversant les axes x et y sur le graphique de la fonction d'origine.

Dans la théorie de la CARDINALITE, les bijections jouent un rôle clé pour déterminer si oui ou non deux ensembles X et Y ont la même "taille".

Voir aussi NOMBRE ALGÉBRIQUE ; HISTOIRE DES FONCTIONS (essai).

théorème fondamental de l'algèbre (l'orème de d'Alembert) Le théorème important suivant en mathématiques est considéré comme fondamental pour la théorie de l'algèbre :

> Tout polynôme $p(z) = a_n z^{n} + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ des coefficients a_i soit des nombres réels soit des nombres complexes, $a_n \neq 0$, a au moins une racine. Autrement dit, il existe au moins un nombre complexe α tel que $p(\alpha) = 0$.

D'après le THÉORÈME DES FACTEURS , nous devons alors avoir $p(z) = (z - \alpha)q(z)$ pour un certain polynôme $q(z)$ de degré $n - 1$. L'application du théorème fondamental de l'algèbre au polynôme $q(z)$, puis à chaque polynôme de degré supérieur à un qui apparaît, montre que le polynôme $p(z)$ se divise complètement en n facteurs linéaires (pas nécessairement distincts). Nous avons pour conséquence :

> Tout polynôme $p(z) = a_n z^{n} + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ des coefficients a_i soit des nombres réels soit des nombres complexes, $a_n \neq 0$, se factorise complètement comme $p(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n)$ pour certains nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Par conséquent, dans le CHAMP des nombres complexes, tout polynôme de degré n a précisément n racines (lorsqu'il est compté avec la multiplicité). Par exemple, le polynôme $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$ se factorise en $(z - 1)^2(z + i)(z - i)$ avec la racine 1 apparaissant deux fois. Les mathématiciens appellent un corps algébriquement clos si chaque polynôme de degré n avec des coefficients de ce corps a précisément n racines dans ce corps. L'ensemble des nombres complexes est donc algébriquement clos. (Le corps des nombres réels, cependant, ne l'est pas. Le polynôme $p(x) = x^2 + 1$, par exemple, ne se factorise pas dans les réels.)

Le théorème fondamental de l'algèbre a été conjecturé pour la première fois par le mathématicien hollandais Albert Girard en 1629 dans son enquête sur les racines imaginaires. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) a été le premier à prouver le résultat dans sa thèse de doctorat de 1799. Plus tard, il a re-prouvé le résultat plusieurs fois tout au long de sa vie en utilisant une variété d'approches mathématiques différentes, et il lui a donné le nom de "théorème fondamental de l'algèbre". En France, le résultat est connu sous le nom de théorème de d'Alembert pour honorer le travail de JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) et ses nombreuses tentatives (infructueuses) pour

Pour démontrer le théorème, il suffit de considérer un polynôme complexe de coefficient dominant égal à un : $z^n + \ldots + a_1 z + a_0$. (Diviser par $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ si nécessaire.) Remarquez que si $a_0 = 0$, alors le polynôme a une racine, à savoir $z = 0$, et il n'y a plus rien à établir. Supposons alors que a_0 est un nombre complexe différent de zéro.

En utilisant la FORMULE D'EULER , considérons la variable z comme un nombre complexe de la forme $z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, où R est un nombre réel non nul et θ est un angle. Notez que lorsque θ varie de zéro à 360°, $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ trace un cercle de rayon R et $z^n = R^n e^{in\theta} = R^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ s'enroule n fois autour d'un cercle de rayon R^n . Remarquez aussi que si R est grand, alors $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)$ est bien approché par $z^n(1 + 0 + \ldots + 0 + 0) = z^n$. Ainsi

Machine Translated by Google

comme θ varie de zéro à 360°, toujours pour R grand, p(z) trace étroitement un cercle de grand rayon Rn (s'enroulant à nouveau autour de n fois). Si R est suffisamment grand, ce cercle est sûr d'enfermer le point (0,0) dans le plan complexe. Si R diminue jusqu'à la valeur zéro, alors la trace de p(z) lorsque θ varie est un cercle de rayon 0 autour du point p(0) = a0 .
Autrement dit, la trace de p(z) est le point a0 dans le plan complexe. Entre ces deux extrêmes, il doit y avoir une valeur intermédiaire de R pour laquelle la trace de p(z) passe par l'origine (0,0). Autrement dit, il existe une valeur α sur le cercle de ce rayon R pour laquelle p(α) = 0. Cela prouve le théorème.

théorème fondamental de l'arithmétique (théorème de factorisation unique) Ce résultat fondamental de l'arithmétique affirme :

> Tout entier supérieur à un peut être exprimé comme un produit de facteurs premiers d'une et d'une seule façon, jusqu'à l'ordre des facteurs. (Si le nombre est déjà premier, alors c'est un produit avec un terme.)

Par exemple, le nombre 100 peut être écrit sous la forme 2 × 2 × 5 × 5. Le théorème fondamental de l'arithmétique affirme que le nombre 100 ne peut pas être écrit comme un produit d'un ensemble différent de nombres premiers.

De nombreux enfants du primaire connaissent le processus de factorisation à l'aide d'un arbre factoriel. Il est souvent considéré comme allant de soi que les nombres premiers que l'on obtient comme facteurs seront toujours les mêmes, quels que soient les choix que l'on fait en cours de route pour construire l'arbre. Cependant, une preuve de cela est requise.

Il est simple de voir que tout nombre n a, à tout le moins, une factorisation première : si n est premier, alors n est un produit de nombres premiers contenant un terme. Si n n'est pas premier, le n peut être écrit comme un produit de deux facteurs : n = a × b. Si a et b sont premiers, il n'y a plus rien à faire. Sinon, a et b peuvent eux-mêmes être factorisés. Continuez ainsi. Ce processus s'arrête lorsque tous les facteurs considérés sont des nombres premiers.

L'unicité de la factorisation première découle de la propriété suivante des nombres premiers :

> Si un produit a × b est égal à un multiple d'un nombre premier p, alors l'un de a ou b doit lui-même être un multiple de p.

(Pour voir pourquoi cela est vrai, supposons que a n'est pas déjà un multiple de p. Puisque p est premier, cela signifie que le seul facteur que p et a peuvent avoir en commun est 1. Par l' ALGORITHME EUCLIDIEN , nous pouvons donc trouver les nombres x et y de sorte que 1 = px + by. Multiplier par b donne : b = pbx + aby. Le premier terme de cette somme est un multiple de p, et le second aussi puisque ab l'est. Cela montre que b doit être a multiple de p, si a ne l'est pas.)

Supposons, par exemple, que nous trouvions les deux factorisations premières suivantes du même nombre :

$$7 \times 13 \times 13 \times 29 \times 29 \times 29 \times 41 = 19 \times 19 \times 23 \times 23 \times 37 \times 61$$

La quantité de gauche est certainement un multiple de 7, ce qui signifie que la quantité de droite l'est aussi. Par la propriété décrite ci-dessus, cela signifie que l'un des facteurs : 19, 23, 37 ou 61 est un multiple de sept. Puisque chacun de ces facteurs est premier, cela est impossible. En général, ce raisonnement montre que les nombres premiers apparaissant dans deux factorisations d'un nombre doivent être les mêmes. (Cela montre également, par exemple, qu'aucune puissance de 7 ne pourrait jamais être égale à une puissance de 13, et qu'aucune puissance de 6 n'est divisible par 14.)

EUCLID, d'environ 300 avant notre ère, était conscient que les factorisations premières des nombres sont uniques.

Notez que, dans ces considérations, il est essentiel que 1 ne soit pas considéré comme premier - sinon chaque nombre aurait une infinité de représentations différentes en tant que produit de facteurs premiers. (Par exemple, on pourrait écrire : 6 = 2 × 3 = 1 × 2 × 3 = 1 × 1 × 2 × 3, et ainsi de suite.)

L'écriture des nombres en fonction de leurs factorisations premières permet d'identifier rapidement les facteurs communs et les multiples communs. Par exemple, si $a = p1^{n1} p2^{n2} \ldots pk^{nk}$ et $b = p1^{m1} p2^{m2} \ldots pk^{mk}$, avec les nombres ni et mi éventuellement zéro (ceci garantit que chaque nombre est exprimé via la même liste de nombres premiers), alors le PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR de a et b est le nombre :

$$\text{pgcd}(a,b) = p1^{\alpha 1} p2^{\alpha 2} \ldots pk^{\alpha k}$$

avec chaque αi le plus petit de ni et mi , et le MOINS COMMUN MULTIPLE de a et b est :

$$\text{lcm}(a,b) = p1^{\beta 1} p2^{\beta 2} \ldots pk^{\beta k}$$

avec chaque βi le plus grand de ni et mi . Cela prouve la relation :

Machine Translated by Google

$$\text{lcm}(a,b) = \frac{ab}{\text{pgcd}(a,b)}$$

Le théorème fondamental de l'arithmétique est utilisé pour prouver l'irrationalité des racines des nombres entiers. Précisément, on peut montrer que la racine carrée d'un entier positif a est un nombre rationnel si, et seulement si, a est un carré parfait (c'est-à-dire a = b 2 pour un nombre entier b). Celle-ci est établie comme suit :

Supposons que $\sqrt{a}$ est une fraction. Alors $\sqrt{a} = n/m$ pour certains nombres entiers n et m :

La mise au carré et la simplification donnent $am^2 = n^2$. La factorisation première de n donne une factorisation première de n 2 avec la propriété que chaque nombre premier qui apparaît le fait un nombre pair de fois. Comme il s'agit de la factorisation première de am2, et que les nombres premiers qui apparaissent dans m2 le font déjà un nombre pair de fois, il s'ensuit que les nombres premiers qui apparaissent dans la factorisation de a le font également un nombre pair de fois. La sélection d'un nombre premier dans chaque paire de nombres premiers qui apparaît produit un nombre entier b avec la propriété $b^2 = a$. Ainsi l'hypothèse que $\sqrt{a}$ est rationnel nous amène à conclure que a est un carré parfait.

Par conséquent, puisque le nombre 2, par exemple, n'est pas un carré parfait, il est impossible que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Ainsi $\sqrt{2}$ doit être un nombre irrationnel. (Un argument similaire montre également établit cette nième racine $\sqrt[n]{a}$ est rationnel si, et seulement si, a est un puissance parfaite.)

Voir aussi FACTEUR COMMUN ; MULTIPLE COMMUN; FACTEUR.

théorème fondamental du calcul La théorie de CALCULUS développe des méthodes pour calculer deux quantités importantes associées aux courbes, à savoir les pentes des lignes tangentes aux courbes et les aires des régions délimitées par des courbes. Bien que des problèmes isolés traitant de ces questions aient été étudiés depuis l'Antiquité (voir essai HISTOIRE DU CALCUL), aucune approche ou technique unifiée pour les résoudre n'a été développée pendant très longtemps. Une percée eut lieu dans les années 1670 lorsque GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ en Allemagne et SIR ISAAC NEWTON en Angleterre découvrirent indépendamment une relation inverse fondamentale entre le problème de tangente (différenciation) et le problème d'aire (intégration). Leur résultat, aujourd'hui connu en tant que théorème fondamental du calcul, lie les deux parties du sujet et est sans aucun doute le fait le plus important de l'ensemble des mathématiques.

Leibniz et Newton ont chacun reconnu l'importance du résultat, développé les idées qui en découlent et appliqué les résultats qui en découlent pour résoudre des problèmes de science et de géométrie avec ce qui ne peut être décrit que comme un succès spectaculaire. Leur découverte du théorème fondamental est, en substance, la découverte du calcul.

Le théorème a deux parties. Soit y = f(x) une courbe continue. Si A(x) représente l'aire sous la courbe de la position a à la position x, alors le TAUX DE CHANGEMENT de zone, $\frac{dA}{dx}$, est donné par:

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

En notant que l'aire sous la courbe entre les positions x et x + h peut être approchée comme un rectangle de largeur h et de hauteur f(x), nous avons $A(x + h) – A(x) \approx dA\ dx$ f(x)·h. Ainsi, $\frac{dA}{dx} \approx \lim_{h \to 0} \frac{f(x)h}{h} = f(x)$. Les détails de l'argument peut être rendu rigoureux pour prouver:

Le taux de variation de l'aire sous une courbe y = f(x) par rapport à x est f(x).

En gros, "prendre la DERIVATIVE d'un INTE GRAL renvoie la fonction d'origine". En particulier, la fonction A(x) est une des primitives de f(x). Le THÉORÈME DE LA VALEUR MOYENNE, cependant, montre que si F(x) est une autre primitive de f(x), alors elle ne doit différer de A(x) que par une constante : A(x) = F(x) + c . En notant que A(a) = 0, on obtient : A(x) = F(x) – F(a). En particulier, l'aire sous la courbe y = f(x) de x = a à x = b est A(b) = F(b) – F(a) . Comme cette zone est généralement notée $\int_a^b f(x)dx$, cela établit la deuxième partie du théorème fondamental du calcul :

Si f(x) est une fonction continue, et F(x) est toute primitive de f(x), alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) – F(a)$.

Cette seconde observation est le résultat clé : elle transforme le problème très difficile de l'évaluation des aires (via des limites de sommes) en un problème beaucoup plus facile de trouver des primitives. Par exemple, pour calculer l'aire sous la parabole y = x 2 de x = 3 à x = 12, il suffit

Machine Translated by Google

noter que $\frac{1}{3}x^3$ est une primitive de x^2. La zone souhaitée est ainsi $\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{7}{3}$ unités au carré. L'ensemble l'idée maîtresse du CALCUL INTÉGRAL se transforme par conséquent en l'étude du CALCUL DIFFÉRENTIEL employé en sens inverse.

Voir aussi ANTIDIFFÉRENCIATION.

théorème fondamental des isométries Soit ABC un triangle dans le plan. Alors l'emplacement de tout point P dans le plan est complètement déterminé par les trois nombres qui représentent ses distances aux sommets du triangle. Toute TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE qui préserve les distances est appelée une isométrie. Si une isométrie prend les points A, B et C aux emplacements A ', B ' et C ', respectivement, alors elle prend également le point P au point unique P 'avec des distances correspondantes de A ', B ' et C '.
Ainsi, une isométrie est complètement déterminée par son effet sur ses sommets de tout triangle dans le plan.

Trois REFLEXIONS, au plus, sont toujours nécessaires pour mapper trois sommets A, B et C d'un triangle à trois sommets A′, B′ et C′ d'un autre triangle congruent. (Réfléchissez d'abord le long de la bissectrice perpendiculaire de AA′ pour amener le point A à l'emplacement A′. Ensuite, réfléchissez le long d'une ligne passant par A′ pour prendre l'image de B à B′. Une réflexion supplémentaire peut être nécessaire pour envoyer ensuite le image de C à C′.) Cette observation prouve le théorème fondamental des isométries :

> Chaque isométrie du plan est la composition d'au plus trois réflexions.

logique floue En 1965, l'ingénieur électricien iranien Lofti Zadeh a proposé un système de logique dans lequel des degrés de vérité peuvent être attribués aux énoncés. Par exemple, que Betty soit grande ou non n'est pas simplement vrai ou faux, mais plutôt une question de degré.

La théorie des ensembles flous attribue des degrés d'appartenance aux éléments des ensembles flous. Ces degrés vont de 1, lorsque l'élément est dans l'ensemble, à zéro lorsqu'il est hors de l'ensemble. L'appartenance de Betty à l'ensemble des personnes de grande taille est une question de degré.

Voir aussi les LOIS DE LA PENSÉE.

Machine Translated by Google

g

Galilei, Galileo (1564–1642) Mécanique italienne, astronomie Né le 15 février 1564 à Pise (aujourd'hui en Italie), Galileo Galilei est connu pour son 1638 Dis corsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze (Dialogues sur deux nouvelles sciences) présentant une nouvelle approche de l'étude de la cinématique à travers une combinaison d'expérience et de théorie mathématique.
Il a formulé et vérifié la loi d'accélération de

les corps qui $1 \text{ carré} = t^2$, établi que les projectiles

tombent suivent des trajectoires paraboliques, et a été le premier à remarquer que la période d'un pendule est indépendante du poids du bob. Bien qu'il ne soit pas l'inventeur du télescope, il a été le premier à développer une conception viable de l'appareil qui lui a permis de faire des observations astronomiques (remarquables). En particulier, il a accumulé des preuves empiriques significatives qui ont soutenu la théorie copernicienne selon laquelle les planètes voyagent autour du Soleil. Sa croyance en cette théorie l'a mis en conflit avec l'Église catholique romaine et a conduit à son procès et à son assignation à résidence.

Galileo a été envoyé par ses parents à l'Université de Pise pour étudier la médecine à l'âge de 17 ans, mais ce programme d'études ne l'a jamais séduit. Il quitta l'université sans diplôme et commença à enseigner les mathématiques et la mécanique à Sienne. En 1586, il écrivit La balancitta (La petite balance), dans laquelle il décrivait les méthodes d' ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (287-212 avant notre ère) pour trouver les densités relatives des substances avec une balance. Cette pièce lui a valu une attention significative dans la communauté scientifique, et en 1589, il a été nommé chaire de mathématiques à l'Université de Pise. Il est resté à ce poste pendant 3 ans avant d'accepter le poste prestigieux de professeur de mathématiques à l'Université de Padoue.

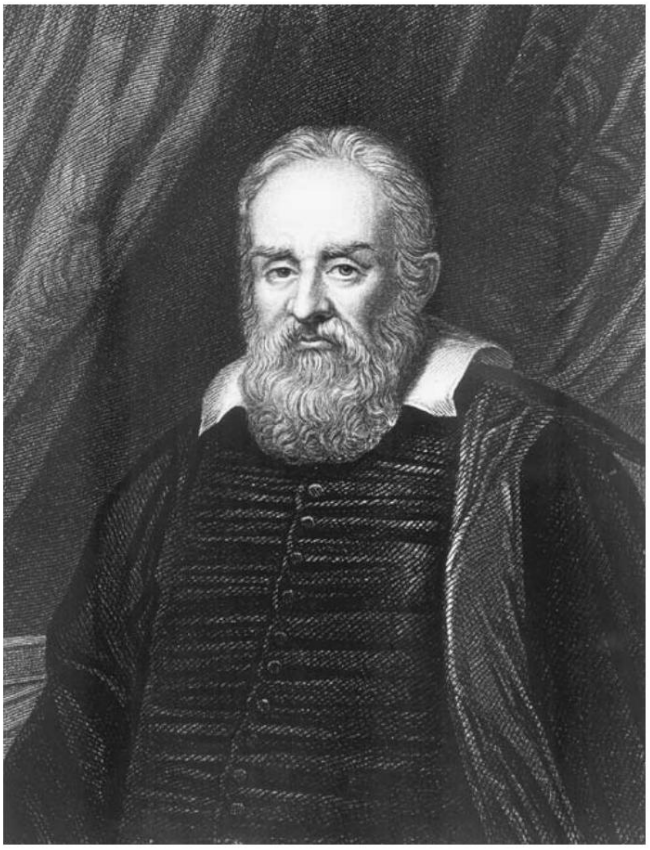
Au cours de ses 18 années à Padoue, Galilée a développé ses théories du mouvement. En utilisant des plans inclinés pour ralentir le taux de descente, Galileo a observé que tous les objets tombent au même taux d'accélération. De là, à l'aide de mathématiques vérifiées par l'expérience, il en déduit sa célèbre loi selon laquelle la distance parcourue par un objet qui tombe est proportionnelle au carré du temps de sa chute. Il en résulte que les objets lancés dans l'air se déplacent en arcs paraboliques.

En 1609, Galilée apprit que des érudits hollandais avaient inventé une longue-vue capable de grossir les images d'objets distants. Intrigué, Galilée se mit à construire sa propre version de la longue-vue et produisit finalement une pièce (qu'il appela un « perspicillum ») avec une puissance de grossissement de huit ou neuf, bien supérieure aux capacités du télescope flamand. Galilée tourna sa pièce vers les cieux et commença une série de découvertes astronomiques remarquables.

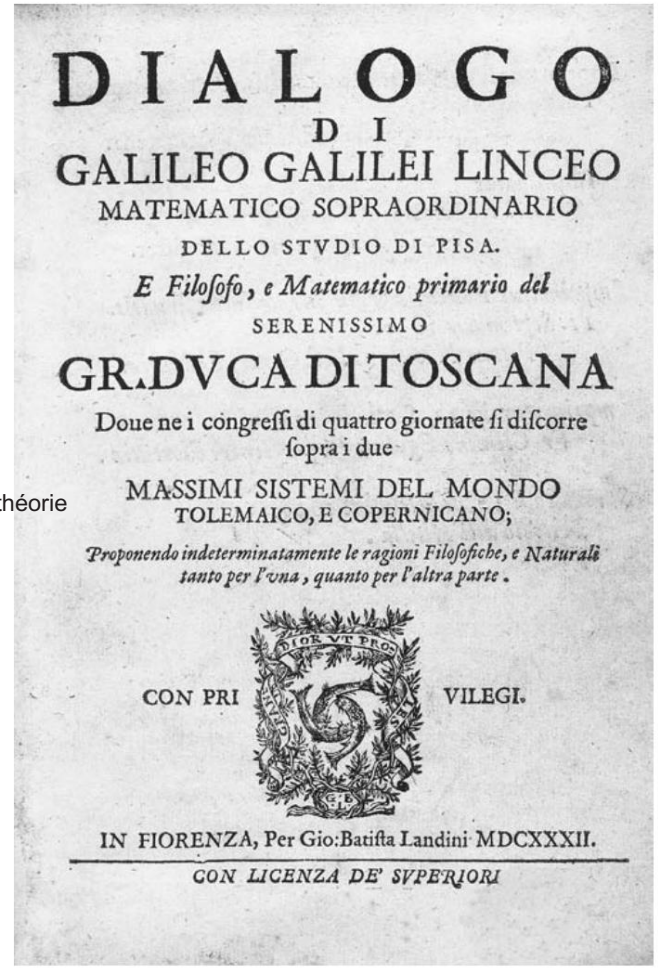
Dans son livre de 1610 Sidereus nuncius (messager étoilé), Galilée décrit la topographie de la Lune, établit que la Voie lactée est composée d'étoiles et annonce sa découverte de quatre lunes en orbite autour de Jupiter. Pour des raisons politiques avisées, il nomma ces lunes les "étoiles médicéennes", en l'honneur de Cosme de Médicis, le grand-duc de Toscane. Ce travail a valu à Galilée une renommée considérable et, un mois seulement après la sortie du livre, Galilée a été nommé mathématicien en chef à Pise et « mathématicien et philosophe » du grand-duc de Toscane.

Machine Translated by Google

Plus tard cette année-là, Galilée a tourné son télescope vers Saturne, a observé ses anneaux, puis s'est tourné vers Vénus. Il a découvert que Vénus présente des phases comme celles de la Lune, ce qui ne serait possible que si cette planète tournait autour du Soleil et non de la Terre. Galilée avait rassemblé des preuves convaincantes pour soutenir la théorie copernicienne du système solaire. Bien que l'autorité religieuse de l'époque considérait ce modèle comme l'antithèse de la Sainte Écriture (dans laquelle la Terre est perçue comme située au centre de l'univers), les dirigeants de l'Église étaient tolérants envers les érudits qui utilisaient des théories alternatives sous le couvert d'outils mathématiques pour calculer les orbites des planètes. Galilée, malheureusement, alla plus loin et proclama plus tard dans une communication privée qu'il était convaincu que la théorie était une déclaration de la réalité physique. Malheureusement, la lettre a été interceptée par l'église, et pendant les 15 années qui ont suivi, l'église catholique a examiné attentivement le travail de Galilée et a exigé qu'il suive l'enseignement de l'église en tout temps. En 1632, Galilée tenta de publier le texte Dialogo (Dialogue) sur la théorie du mouvement planétaire, intelligemment écrit de manière à ne jamais affirmer que le système copernicien est la réalité physique), mais l'église, sentant que la frontière avait été traversé, interdit immédiatement sa vente et jugé Galileo pour hérésie. Il a été reconnu coupable et placé en résidence surveillée pour le reste de sa vie. Galileo a cependant réussi à



Galileo Galilei, un éminent scientifique du 17ème siècle, fut le premier à combiner théorie et expérience pour comprendre la dynamique.
Il a établi que l'accélération due à la gravité est indépendante de la masse et que les projectiles suivent des arcs paraboliques. Galileo a également développé le télescope et a fait des observations astronomiques importantes et controversées.
(Photo publiée avec l'aimable autorisation de Topham/The Image Works)



DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STVDIO DI PISA.
E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR. DVCA DI TOSCANA
Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;
Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali tanto per l'vna, quanto per l'altra parte.
CON PRI VILEGI.
IN FIORENZA, Per Gio: Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SVPERIORI

Galileo a réussi à faire sortir clandestinement son manuscrit controversé Dialogo d'Italie, où sa vente était interdite, pour publication en Hollande.
(Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/ The Image Works)

Machine Translated by Google

publier sa célèbre pièce de 1638 en la faisant sortir clandestinement d'Italie et l'imprimer en Hollande.

Galilée mourut le 8 janvier 1642. On se souvient de lui pour avoir eu un impact profond sur la nature même de la recherche scientifique, reliant les mathématiques, la philosophie spéculative et l'expérience physique dans l'étude du monde naturel. Le 31 octobre 1992, à l'occasion du 350e anniversaire de la mort de Galilée, le pape Jean-Paul II a reconnu publiquement que l'Église catholique avait commis une erreur en condamnant Galilée pour hérésie pour sa théorie sur le mouvement des planètes.

Galois, Évariste (1811–1832) Algèbre abstraite française Né le 25 octobre 1811 à Bourg La Reine, en France, le savant Évariste Galois est connu pour ses résultats célèbres qui ont conduit non seulement à la conclusion qu'il ne peut y avoir de formule générale qui résout toutes les équations POLYNOMIALES du cinquième degré (même s'il existe de telles formules pour résoudre les ÉQUATIONS QUADRATIQUES, CUBIQUES et QUARTIQUES), mais surtout pour la classification des équations spécifiques qui peuvent être résolues. Ses travaux fondateurs de 1829 sur les solutions des équations ont fondé le domaine de la THÉORIE DES GROUPES.

Galois s'inscrit à son premier cours de mathématiques au lycée à l'âge de 17 ans et, un an plus tard, publie un article original, "Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques".
(Preuve d'un théorème sur les fractions continues périodiques), sur l'étude des FRACTIONS CONTINUES. Ses professeurs de l'époque, malheureusement, ne comprenaient pas son travail et ne le considéraient pas comme un élève doué. (Certes, Galois avait du mal à articuler ses idées sophistiquées). Galois espérait fréquenter la prestigieuse École Polytechnique , la principale université de Paris à l'époque, mais a échoué deux fois à l'examen d'entrée. Il s'inscrit à la place à l'École Normale, mais en est ensuite expulsé pour s'être opposé à la politique universitaire interdisant aux étudiants de rejoindre la rébellion parisienne contre le roi Charles X. Il rejoint l'Artillerie de la Garde nationale, une aile radicale de l'armée. En 1831, Galois est emprisonné pour avoir porté son uniforme lorsque le soutien à la garde est rendu illégal.

Auparavant, Galois avait lu les travaux de NIELS HEN RIK ABEL (1802-1829) sur l'étude des solutions algébriques aux équations. Le problème de la SOLUTION PAR LES RADICAUX était dans son esprit et, pendant son incarcération, Galois a écrit un manuscrit détaillant ses réflexions sur le problème. Cette fois, Galois tombe amoureux de la fille du médecin résident de la prison, Stéphanie-Félice du Motel, mais, comme le montrent les lettres, les sentiments ne sont pas réciproques. Pour des raisons qui ne sont pas claires aujourd'hui, Galois s'est battu en duel en son honneur peu de temps après sa libération. Il fut blessé dans ce duel et mourut le lendemain, le 31 mai 1832.

Le frère de Galois a ensuite copié le manuscrit de la prison et l'a envoyé à d'éminents mathématiciens de l'époque. Sans l'initiative de son frère, l'essentiel de l'œuvre de Galois serait aujourd'hui perdu pour nous. Le mathématicien français JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) a publié l'œuvre phare de Galois en 1846.

Galton, Sir Francis (1822–1911) Statistiques britanniques Né le 16 février 1822 à Sparkbrook, en Angleterre, Francis Galton est connu en mathématiques pour son travail de pionnier dans l'application de techniques statistiques à l'analyse de problèmes biologiques. Les idées et les contributions de Galton à la nature de l'analyse statistique ont ouvert la voie à de nouveaux développements et à l'utilisation généralisée qui en a résulté, des statistiques dans toutes les sciences biologiques et sociales au XXe siècle.

Galton a obtenu un baccalauréat de base à Cambridge, ne prenant que suffisamment de cours de mathématiques pour répondre aux exigences de distribution. (Il n'a jamais reçu de formation sérieuse en mathématiques.) Après avoir hérité d'une somme d'argent considérable de son père, Galton a voyagé à travers le sud-ouest de l'Afrique et a acquis une renommée considérable en tant qu'explorateur intrépide. Il a développé un intérêt pour l'étude de l'hérédité humaine et a commencé à considérer la question de l'élevage sélectif comme un moyen d'améliorer la race humaine. (De telles poursuites étaient jugées acceptables à son époque.) Galton a également développé un modèle mathématique simple d'hérédité ancestrale basée sur l'idée que chaque parent contribue 1/4 d'un trait génétique à un enfant, chaque grand-parent de 1/16 du trait au enfant, et ainsi de suite, de sorte que la somme des contributions de tous les ancêtres est l'unité :

$$1 2 _ + 4 + __ + 8 + _ + = 4 16 _ 4 _ _ 64 2 _ 8 \quad L\ 1$$

Galton a été fait chevalier pour ce travail en 1909.

L'Université de Londres a créé le Francis Galton Laboratory for National Eugenics en son honneur à la fin des années 1800. L'éminent statisticien KARL PEARSON

Machine Translated by Google

(1857-1936), dont une grande partie du travail a été fortement influencée par les études de Galton, a été une fois directeur de la laboratoire.

Galton est décédé à Surrey, en Angleterre, le 17 janvier 1911.

Voir aussi HISTOIRE DES PROBABILITÉS ET STATISTIQUES (essai).

la ruine du joueur Une classe de problèmes en PROBABILITÉ théorie, tous connus sous le nom de problèmes de la ruine du joueur, contient des questions du genre suivant :

> Un joueur avec 5 $ parie à plusieurs reprises 1 $ sur un pile ou face. Chaque fois qu'il joue, il a 50 % de chances de gagner un dollar et 50 % de chances de perdre un dollar. Le joueur va jouer jusqu'à ce qu'il ait 10 $ ou qu'il ait fait faillite. Quelle est la probabilité qu'il réussisse à doubler son argent?

Des problèmes comme ceux-ci sont généralement résolus comme suit : laissez P(k) est la probabilité d'atteindre l'objectif de 10 $ lorsque le joueur a actuellement k dollars en main. Nous tenons à calculer P(5). Notez trois choses :

1. P(0) = 0. (Avec zéro dollar, le joueur a perdu et ne gagnera pas.)
2. P(10) = 1. (Avec 10 $ en main, le joueur a gagné.)
3. $P(k) = \frac{1}{2}P(k-1) + \frac{1}{2}P(k+1)$ ou $P(k+1) - P(k) = P(k) - P(k-1)$.

> (Avec k dollars en main, il y a 50 % de chances le joueur perdra un dollar et devra essayer de gagner avec k–1 dollars en main, et 50 % chance qu'il gagne un dollar et continue jouer avec k + 1 dollars en main.)

On a donc onze valeurs, P(0),P(1),…,P(10), avec la première valeur égale à zéro, la dernière égale à 1, et toutes valeurs intermédiaires égales à la moyenne des deux valeurs qui l'entourent. On peut vérifier qu'il n'y a qu'un seul suite de nombres satisfaisant ces conditions, à savoir : $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, 1$. Cela montre que $P(1) = \frac{1}{10}$, $P(2) = \frac{2}{10}$ et, en particulier, que $P(5) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Remarquez qu'avec un dollar en main, il n'y a qu'un 1 chance sur 10 que le joueur gagne 10 $ avant de jouer cassé. On peut de même montrer qu'il n'y a qu'un seul sur 100 chances qu'un joueur gagne 100 $, et un sur 1 000 chances de gagner 1 000 $. Les casinos sont bien conscient que les joueurs sont réticents à arrêter de jouer avec de petits profits, surtout si un joueur a eu un série de pertes et est à son dernier dollar.

La ruine du joueur montre que, selon toute vraisemblance, les joueurs finiront fauchés avant de percevoir les bénéfices qu'ils réalisent. contenu avec.

Voir aussi FONCTION HARMONIQUE ; MARCHE ALÉATOIRE.

la théorie des jeux La théorie des jeux est la branche des mathématiques qui tente d'analyser des situations impliquant parties ayant des intérêts divergents dont le résultat de la situation dépend des choix faits par ceux des soirées. Des situations de conflit surviennent dans presque tous les problèmes du monde réel qui impliquent une prise de décision, et la théorie des jeux a par conséquent trouvé de profondes applications à l'étude de la concurrence commerciale, de l'économie, la politique, les opérations militaires, le partage des biens et même l'étude des relations personnelles. Bien qu'il soit difficile de fournir une analyse complète de tous les types de jeux qui se posent, des solutions complètes existent pour de simples « jeux matriciels » (que nous décrivons ci-dessous) impliquant un petit nombre de joueurs. Ces jeux simples peuvent être utilisé pour modéliser des situations multijoueurs plus complexes.

La théorie des jeux a été étudiée pour la première fois en 1921 par le français mathématicien Félix Edouard Émile Borel (1871-1956), mais l'importance du sujet n'a pas été correctement reconnu jusqu'à la sortie en 1944 du monumental ouvrage Théorie des jeux et comportement économique par JOHN VON NEUMANN (1903–57) et Oskar Morgen stern (1902–77). Ces deux savants ont complètement analysé les situations conflictuelles en satisfaisant aux critères de base suivants : conditions:

i. Il y a un nombre fini de joueurs.
ii. Chaque joueur peut sélectionner l'un d'un nombre fini de actions possibles. Le choix des actions disponibles pour chaque joueur n'a pas besoin d'être le même.
iii. Tous les joueurs sont conscients des actions et des conséquences que d'autres peuvent choisir de prendre.
iv. Chaque joueur est un penseur rationnel et choisira le l'action qui convient le mieux à ses intérêts.
v. Lors du déroulement du jeu, aucun participant ne sait ce des actions seront prises par les autres joueurs.
vi. Le résultat du jeu peut être modélisé comme un ensemble des paiements (positifs, nuls ou négatifs) à chacun des les joueurs.

Machine Translated by Google

Si la somme des paiements à tous les joueurs est nulle, alors le jeu est appelé un jeu à somme nulle. Cela signifie que la victoire de n'importe quel joueur doit être compensée par une perte pour certains autres joueurs.

Le type de jeu le plus simple est un jeu à somme nulle à deux joueurs. Le choix des actions et les résultats possibles du jeu peuvent être résumés dans une « matrice des gains » A, dans laquelle les lignes représentent les actions possibles qu'un joueur, le joueur R, peut entreprendre ; les colonnes les actions possibles du second joueur, le joueur C ; et la (i,j)-ième entrée de la matrice Aij représente le montant que le joueur C doit payer au joueur R si R sélectionne la ligne i et C sélectionne la colonne j dans le jeu du jeu. (Si Aij est négatif, alors le joueur R paie un certain montant à C.) Par exemple, le tableau suivant représente un jeu à somme nulle pour deux joueurs pour lequel chaque joueur peut effectuer l'une des trois actions possibles :

	1	2	3
1	-1	1	
2	5	1	0
3	4	–3	
		–2	2

Comme première tentative d'analyse de ce jeu, considérez les actions que le joueur R peut entreprendre. Elle espère que le jeu aboutira au plus grand nombre positif possible (dans ce cas 5), car c'est le montant que le joueur C doit payer à R si tel est le résultat du jeu. Ainsi, le joueur R est tenté de sélectionner l'action 1 (d'autant plus que R sait que le résultat optimal du joueur C de -3 se trouve dans la colonne 1). Bien sûr, le joueur C est conscient que le joueur R est susceptible de penser de cette façon et serait réticent à sélectionner la colonne 1 comme action de peur que 5 soit le résultat de la partie. Le joueur R est conscient que le joueur C pensera ainsi, et soupçonnera alors que le joueur C choisira la colonne 2, sachant qu'il sélectionnera probablement la ligne 1, et donc R, pour déjouer ce plan, est tenté de choisir une action différente de 1 après tout. Et ainsi de suite. Comme on le voit, on peut rapidement entrer dans un cycle sans fin de seconde supposition.

Au lieu de viser à maximiser son profit du jeu, une autre approche que le joueur R pourrait adopter est de minimiser ses pertes. Par exemple, si le joueur R fait l'action 1, il peut potentiellement perdre 1 point (si C arrive à choisir la colonne 2). Si R choisit la ligne 2, le pire résultat serait ni gain ni perte, et s'il choisit la ligne 3, il pourrait potentiellement être en baisse de trois points. Ainsi, le résultat minimum maximal pour le joueur R se produit avec le choix de la rangée 2. Ce raisonnement est appelé la « stratégie maximin ». De même, le choix de la colonne 2 donne le résultat maximum minimal en faveur du joueur C. Ainsi, suivant une "stratégie mini max", le joueur C choisirait la colonne 2, et le résultat du jeu est par conséquent 0.

L'entrée 0 dans la matrice des gains ci-dessus est appelée un point de selle. C'est un minimum dans sa ligne et un maximum dans sa colonne. Si une matrice de gains contient un point de selle, alors la stratégie optimale pour chaque joueur est de prendre des actions correspondant au point de selle. La valeur du point de selle, pour un jeu qui possède un tel point, est appelée la valeur du jeu.

Toutes les matrices de gains pour un jeu à deux ne possèdent pas un point de selle. Par exemple, le jeu suivant correspondant à deux actions possibles pour chaque joueur n'a pas de point de selle, et suivre les stratégies minimax ou maximin n'est optimal pour aucun des joueurs.

	1	2
1	1	–2
2	–3	4

(La stratégie maximin pour le joueur R suggère qu'il sélectionne la ligne 1, et la stratégie minimax pour le joueur C qu'il prenne la colonne 1 donnant le résultat 1 pour le jeu. Le joueur C, cependant, peut anticiper cela et est alors tenté de changer de choix pour colonne 2 pour obtenir le résultat préférable de - 2. Le joueur R, bien sûr, est conscient que le joueur C fera probablement cela, et changera donc son choix pour la ligne 2 pour obtenir le résultat 4, et ainsi de suite.
Les deux joueurs sont à nouveau piégés dans un cycle sans fin de deuxième supposition.)

La stratégie appropriée dans un tel jeu dépourvu de point de selle est une stratégie mixte, dans laquelle chaque joueur décide de sélectionner une action au hasard, pondérée de manière appropriée afin de maximiser son profit attendu du jeu. Par exemple, supposons que le joueur R décide de sélectionner la ligne 1 avec PROBABILITÉ p et la ligne 2 avec probabilité 1 – p. Selon cette stratégie, si le joueur C choisit la colonne 1, alors la valeur attendue du profit du joueur R est E1 = 1 × p + (–3) × (1 – p) = 4p – 3. Si, d'autre part, le joueur C devaient sélectionner la colonne 2, alors le profit espéré pour le joueur R est E2 = (–1) × p + 4 × (1 – p) = 4p – 5p. Ces résultats attendus sont égaux si nous choisissons p = 7/9. Ainsi, en sélectionnant la ligne 1 avec ce

Machine Translated by Google

probabilité, le joueur R peut être assuré que le joueur C profit de $4\frac{7}{9} \quad 345 = - \quad \frac{7}{9} \quad 1 =$, quoi qu'il en soit 9 attendu le fera. De même, suivant une stratégie mixte, le joueur C doit sélectionner la colonne 1 avec probabilité 5/9 afin de minimiser sa perte attendue.

En 1928, von Neumann prouva le fameux « théorème du mini max » :

> Si chaque joueur adopte sa meilleure stratégie mixte dans un jeu à deux à somme nulle, alors le gain attendu d'un joueur sera égal à la perte attendue de l'autre.

Le résultat attendu partagé d'un tel jeu est appelé la « valeur » du jeu.

Les jeux qui ne sont pas des jeux à somme nulle sont appelés jeux à somme variable. Le DILEMME DU PRISONNIER et CHIC KEN sont des exemples de ces jeux à conflit partiel. On y recherche des stratégies dominantes, espérant trouver un équilibre pour le jeu.

Au cours des dernières décennies, la théorie des jeux a été étendue avec succès aux jeux à somme variable à n personnes et aux jeux avec une gamme continue d'actions et de stratégies possibles. La théorie des jeux est désormais un cours standard proposé dans les départements universitaires d'économie.

Voir aussi FAIR DIVISION.

Gardner, Martin (1914–) Américain Mathématiques récréatives Né le 21 octobre 1914 à Tulsa, Oklahoma, l'écrivain indépendant Martin Gardner est aujourd'hui considéré comme le seul responsable de la culture et de l'intérêt pour les mathématiques récréatives du XXe siècle. Avec de nombreux articles et plus de 65 livres à son actif, Gardner a acquis une renommée mondiale en tant qu'écrivain capable de rendre les problèmes complexes de la science et des mathématiques accessibles et significatifs pour le grand public.

Bien qu'il ne soit pas mathématicien, Gardner est souvent crédité d'avoir fait plus pour promouvoir et stimuler la poursuite générale des mathématiques que n'importe quel érudit dans le domaine.

Gardner est diplômé de l'Université de Chicago avec un baccalauréat en philosophie en 1936. Après avoir servi dans la marine américaine pendant quatre ans, Gardner est retourné à Chicago et a commencé une carrière d'écrivain indépendant, d'abord en éditant et en écrivant de courtes œuvres de fiction. En 1958, Gardner accepta le poste de mathématicien chroniqueur de jeux pour Scientific American, bien qu'il n'ait jamais suivi de cours de mathématiques à l'université. Sa première pièce expliquant les mathématiques d'un cube Soma, un puzzle de dissection de cube nommé d'après une drogue addictive fictive, illustrait sa capacité naturelle à discuter et à clarifier facilement des problèmes complexes. Ce premier article lui a valu une attention nationale et Gardner est resté chroniqueur pour la publication pendant 25 ans. Ses articles ont été extrêmement influents et ont depuis été rassemblés et republiés (plusieurs fois) sous forme de livres.

Bien versé dans les pratiques de l'illusion et de la magie, Gardner a également publié des ouvrages sur la magie, les mathématiques de la magie, ainsi que des textes qui discutent et démystifient les affirmations et les pratiques de la pseudoscience. Il a écrit deux romans, The Flight of Peter Fromm (1994) et Visitors from Oz (1998), et quelques ouvrages sur les thèmes de la philosophie et de la littérature. Son œuvre la plus vendue est The Annotated Alice — Alice's Adventures in Wonderland and through the Looking Glass (1965).

Gardner vit actuellement à Hendersonville, en Caroline du Nord, et poursuit son travail en tant qu'écrivain indépendant. Malgré un manque de formation formelle en mathématiques, Gardner a fait des découvertes mathématiques originales, de saveur récréative, qui ont été publiées dans des périodiques savants.

Gauss, Carl Friedrich (1777–1855) Allemand Théorie des nombres, géométrie, algèbre, analyse, statistique, physique, astronomie Né le 30 avril 1777 à Brunswick, duché de Brunswick (aujourd'hui Allemagne), Carl Friedrich Gauss est aujourd'hui reconnu comme le plus grand mathématicien et physicien pur de son temps. Ses contributions dans les deux domaines ont été énormes. À l'âge de 18 ans, il invente la MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS et fait la nouvelle découverte qu'un polygone régulier à 17 côtés peut être construit uniquement à la règle et au compas, signalant qu'il a accompli de grandes avancées dans la théorie des nombres CONSTRUCTIBLES . En 1801, il publia son chef-d'œuvre Disquisitiones arithmeticae (Enquêtes arithmétiques) dans lequel il démontra le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE, le THÉORÈME MENTAL FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE, et introduisit la théorie de l' ARITHMÉTIQUE MODULAIRE. Dans des travaux ultérieurs, il proposa des solutions générales au problème de la détermination du mouvement planétaire, développa des théories statistiques qui conduisirent à la découverte de la DISTRIBUTION gaussienne et étudia la théorie du potentiel ainsi que l'électricité et le magnétisme.

Machine Translated by Google

en physique. Il a également élaboré, mais n'a pas publié, les principes de la GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE indépendamment de JÁNOS BOLYAI (1802–60) et de NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856), et a développé la théorie des NOMBRES COMPLEXES et des fonctions complexes.

Gauss a démontré un talent pour les mathématiques à un âge précoce. (On dit qu'il a étonné ses professeurs du primaire en additionnant les nombres entiers de 1 à 100 en un instant en observant que la somme équivaut à 50 paires de nombres chacun totalisant 101.) Avant de quitter le lycée, Gauss avait découvert indépendamment le PRIME LE THÉORÈME DES NOMBRE, le THÉORÈME BINÔMIAL, des résultats importants en arithmétique modulaire et l'inégalité générale arithmétique-moyenne géométrique. Il entre à l'Université de Göttingen en 1795 mais, pour des raisons qui ne sont pas claires pour les historiens, quitte avant d'avoir obtenu un diplôme pour retourner dans sa ville natale de Brunswick. Il a soumis une thèse de doctorat à l'Université de Helmstedt sur le thème du théorème fondamental de l'algèbre, qui a été acceptée par contumace. Gauss publie peu après son chef-d'œuvre Disquisitiones arithmeticae .

En 1801, Gauss fit sensation dans la communauté des astronomes en prédisant correctement les positions orbitales de l'astéroïde Cérès, découvert le 1er janvier 1801 par l'astronome italien Giuseppe Piazzi.
Piazzi a eu l'occasion d'observer une partie extrêmement réduite de son orbite avant qu'elle ne disparaisse derrière le soleil. D'autres astronomes ont publié des prédictions sur l'endroit où il réapparaîtrait plusieurs mois plus tard, tout comme Gauss, offrant une prédiction très différente de l'opinion commune. Lorsque la comète fut de nouveau observée le 7 décembre 1801, elle se trouvait presque exactement là où Gauss l'avait prédit. Bien que Gauss n'ait pas révélé sa méthode de prédiction à l'époque, on sait qu'il a utilisé sa méthode des moindres carrés pour faire le calcul. En 1807, Gauss quitta Brunswick pour diriger l'observatoire de Göttingen et, en 1809, il publia son texte général sur les mathématiques de l'astronomie, Theoria motus corporum coelestium (Théorie du mouvement des corps célestes).

Pendant son séjour à l'observatoire, Gauss a poursuivi ses travaux sur les mathématiques. Il a commencé à développer une théorie de la courbure de surface et des géodésiques, et a étudié la convergence des SÉRIES, des techniques d'intégration, des STATISTIQUES, de la théorie du potentiel, etc. En 1818, on lui a demandé de mener une étude géodésique de l'état de Hanovre, et 14 ans plus tard, il a participé à un projet de cartographie du champ magnétique de la terre. Ses travaux mathématiques sur la théorie de la géométrie différentielle ont permis à Gauss de prouver un certain nombre de propriétés que le champ terrestre doit posséder, ce qui lui a permis de prédire correctement la valeur du champ à différents endroits, ainsi que l'emplacement du pôle sud magnétique. . (De plus, il a prouvé mathématiquement qu'il ne peut y avoir que deux pôles magnétiques.)

Gauss est resté à Göttingen pour la dernière partie de sa carrière. Il a reçu de nombreux honneurs tout au long de sa vie, y compris l'élection en tant que membre étranger de la prestigieuse ROYAL SOCIETY de Londres en 1804 et la réception de la médaille Copley de la société en 1838.
Il a également remporté le prix de l'Université de Copenhague en 1822. Gauss a publié plus de 300 travaux importants, principalement écrits en latin, et a conservé un grand nombre de cahiers et de correspondances non publiés qui se sont avérés aussi riches en mathématiques que la plupart de ses travaux publiés.

Gauss est mort à Göttingen le 23 février 1855. Il est impossible d'exagérer l'influence de Gauss sur presque toutes les branches des mathématiques et de la physique mathématique. Il était passé maître dans l'art de résoudre des problèmes difficiles qui étaient au cœur d'idées mathématiques complexes, et l'exhaustivité et la minutie de son travail ont ouvert la voie à des avancées significatives en mathématiques.
Un certain nombre de concepts fondamentaux de la théorie des nombres, de la géométrie différentielle et des statistiques (tels que la réciprocité gaussienne, la courbure gaussienne et la distribution gaussienne) sont aujourd'hui nommés en son honneur.

Élimination gaussienne (pivotante) Nommé en l'honneur de CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), le processus d'élimination gaussienne fournit les moyens de trouver la solution (s'il en existe une) pour un système de n ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES à n inconnues en multipliant des équations sélectionnées avec des constantes soigneusement choisies et des équations de soustraction pour éliminer les variables. La méthode est mieux expliquée avec un exemple. Considérons le système suivant de trois équations linéaires à trois inconnues :

$$y + 3z = 0$$
$$2x + 4y – 2z = 18 x +$$
$$5y + 3z = 14$$

Intervertissez les deux premières équations pour que la variable x apparaisse dans la première ligne :

Machine Translated by Google

$$2x + 4y - 2z = 18\ y + 3z = 0\ x + 5y + 3z = 14$$

Divisez la première équation par 2 pour que le coefficient de la variable dominante x soit 1.

$$x + 2y - z = 9\ y + 3z = 0\ x + 5y + 3z = 14$$

Éliminer l'apparence de la variable x de la troisième équation en lui soustrayant la première équation.
Autrement dit, remplacez la troisième équation par l'énoncé équivalent : (x + 5y + 3z) – (x + 2y – z) = 14 – 9, c'est-à-dire 3y + 4z = 5. Nous avons :

$$x + 2y - z = 9\ y + 3z = 0\ 3y + 4z = 5$$

La deuxième équation contient y comme variable principale avec un coefficient de 1. Éliminer y de la troisième équation en lui soustrayant trois copies de la deuxième équation, c'est-à-dire remplacer la troisième équation par l'énoncé équivalent, (3y + 4z) – 3(y + 3z) = 5 – 3 · 0, soit –5z = 5. Nous avons maintenant :

$$x + 2y - z = 9\ y + 3z = 0\ -5z = 5$$

Divisez la troisième équation par -5 de sorte que la variable principale qu'elle contient soit z avec un coefficient de 1 :

$$x + 2y - z = 9\ y + 3z = 0\ z = -1$$

La solution du système d'équations est maintenant facile à calculer. Par un processus de rétrosubstitution, on voit que z = –1, d'où il résulte de la seconde équation que y = –3z = 3, et de la première équation que x = 9 – 2y + z = 9 – 6 – 1 = 2. On vérifie qu'il s'agit bien de la solution de l'ensemble d'équations d'origine.

Un peu de terminologie
Une opération de ligne élémentaire est toute manœuvre sur un ensemble d'équations linéaires simultanées qui :

1. Intervertit deux équations 2.
Multiplie (ou divise) une équation par une quantité non nulle

3. Additionne ou soustrait un multiple d'une équation de un autre

Le processus d'élimination gaussienne utilise des opérations élémentaires sur les lignes pour transformer un système d'équations linéaires en un système équivalent sous "forme échelonnée", c'est-à-dire un système dans lequel chaque équation aboutit, à son tour, à l'une des variables de coefficient 1. Via le processus de rétrosubstitution, il est alors simple de déterminer la solution du système d'équations. Le processus illustré ci-dessus fonctionne pour n'importe quel nombre d'équations avec le même nombre d'inconnues. Il est possible qu'au cours du processus d'élimination gaussienne, un système d'équations produise un énoncé absurde (comme 0 = 9, par exemple), auquel cas on conclurait que le système n'a pas de solutions, ou peut-être un vide. énoncé (tel que 0 = 0), auquel cas on conclurait que le système d'équations a une infinité de solutions.

Notons qu'il est possible de pousser plus loin le processus d'élimination gaussienne et de réduire un système d'équations à un système dans lequel chaque variable n'apparaît qu'une seule fois sur chaque ligne. Par exemple, dans notre exemple, nous avons obtenu :

$$x + 2y - z = 9\ y + 3z = 0\ z = -1$$

En soustrayant deux copies de la deuxième équation de la première, on obtient :

$$x + -7z = 9\ y + 3z = 0\ z = -1$$

et maintenant en ajoutant sept copies de la troisième équation à la première, et en soustrayant trois copies de la troisième équation à la seconde, on obtient :

$$x = 2\ y = 3\ z = -1$$

La solution au système est maintenant apparente.

Machine Translated by Google

Conséquences pour la théorie des matrices Tout système d'équations linéaires peut être représenté via une MATRICE de coefficients et une colonne de valeurs constantes.

Par exemple, pour notre exemple :

$$y + 3z = 0$$
$$2x + 4y - 2z = 18\ x$$
$$+ 5y + 3z = 14$$

la matrice des coefficients, appelons-la A, est donnée par :

$$A = \begin{matrix} 01\ 3 \\ 24\ 2 \\ 15\ 3 \end{matrix}^{-}$$

la colonne de valeurs constantes, appelons-la b, est :

$$b = \begin{matrix} 0 \\ 18 \\ 14 \end{matrix}$$

Toute opération élémentaire sur les lignes effectuée sur le jeu d'équations d'origine correspond à une opération sur les lignes de la matrice de coefficients A et de la matrice de colonnes b. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, notre première opération consistait à échanger les première et deuxième lignes. Ceci peut être accompli en multipliant A et b chacun par la matrice PERMUTATION

$$\begin{matrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{matrix}$$

Nous avons:

$$\begin{matrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{matrix} \begin{matrix} 01\ 3 \\ 24\ 2 \\ 15\ 3 \end{matrix}^{-} = \begin{matrix} 24\ 2 \\ 01\ 3 \\ 15\ 3 \end{matrix}^{-}$$

$$\begin{matrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 18 \\ 14 \end{matrix} = \begin{matrix} 18 \\ 0 \\ 14 \end{matrix}$$

De même, l'opération élémentaire de ligne consistant à diviser la première ligne par 2 est accomplie par multiplication avec la matrice

$$\begin{matrix} 12\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{matrix}$$

et l'acte de soustraire la première équation de la première est accompli par multiplication avec la matrice :

$$\begin{matrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ -1\ 0\ 1 \end{matrix}$$

On voit ainsi que toute opération élémentaire sur une ligne correspond à une multiplication par une matrice élémentaire. Cette observation a une conséquence importante.

> L'inverse d'une matrice carrée A est simplement le produit des matrices élémentaires qui réduisent A à la matrice identité.

Notre exemple explique cela. Nous avons utilisé des opérations élémentaires sur les lignes pour réduire le système d'équations au système équivalent :

$$x = 2$$
$$y = 3\ z = -1$$

Autrement dit, nous avons trouvé une collection de huit matrices élémentaires E1 , E2 , …, E8 telles que l'application de ces huit matrices a réduit la matrice des coefficients A à la MATRICE D'IDENTITÉ I.

$$E8E7E6E5E4E3E2E1A = je$$

Si nous laissons B être la matrice E8E7E6E5E4E3E2E1, alors nous avons BA = I, ce qui signifie que B = A–1, la MATRICE INVERSE de A. (Comme le DÉTERMINANT de la matrice identité I est 1, l'équation E8E7E6E5E4E3E2E1A = I montre que (le déterminant de A ne peut pas être nul. Ainsi, comme le montre l'étude des déterminants, la matrice A a bien un inverse.) Remarquons que la matrice B est la même opération élémentaire sur les lignes appliquée à la matrice I. Ce résultat fournit une méthode constructive pour calculer l'inverse d'une matrice A.

> Pour calculer l'inverse d'une matrice A, écrivez la matrice A et la matrice I côte à côte. Effectuer

Machine Translated by Google

opérations élémentaires sur les lignes sur les deux matrices simultanément. Réduire A à une matrice identité. La deuxième matrice produite est la matrice inverse de A.

A titre d'exemple, nous calculons la matrice inverse de la matrice des coefficients ci-dessus :

01 3 | 100
24 2 − | 010
15 3 | 001

24 2 − | 010
01 3 | 100
15 3 | 001

12 1 − | 0 05 0
01 3 | 100
15 3 | 001

M

100 | 22.12 14 −
010 | 08.03 06
001 | 06.01 02 −

Ainsi

22.12 14 −
A− = 1 − ... 08 03 06
06.01 02 −

Résolution de systèmes d'équations linéaires via des matrices inverses

Dans notre exemple :

y + 3z =
0 2x + 4y – 2z =
18 x + 5y + 3z = 14

si x désigne le vecteur colonne des variables :

x
x = y
z

alors le système peut s'écrire de manière compacte :

Hache = b

En multipliant par la matrice inverse A–1, on obtient :

22 .12 14 − 2
x ab −1 = − 08.03 06 = 0 18
06 01 02 − 14 1 3

rendant à nouveau la solution au système apparente. Bien sûr, le travail de calcul de la matrice inverse est équivalent au processus original d'élimination gaussienne. Cette approche a cependant l'avantage de pouvoir être facilement appliquée à un ensemble différent de valeurs constantes b sans répéter le processus d'élimination

forme générale d'une équation Une formule qui décrit la relation générale entre les variables sans spécifier les constantes impliquées est appelée la forme générale de l'équation. Par exemple, la forme générale d'une équation QUADRATIQUE dans la variable x est ax2 + + c = 0. (L'équation 2x une 2 bx – 3x + 4 = 0, par exemple, est équation quadratique spécifique.) La formule de la SURFACE A d'un CERCLE, A 2 =, πr où r est le rayon du cercle, est également une équation sous forme générale.

groupe linéaire général (groupe linéaire complet) L'ensemble de toutes les matrices carrées n × n inversibles avec des entrées réelles ou complexes forme un GROUPE sous l'opération de multiplication MATRICE . Ce groupe est appelé groupe linéaire général d'ordre n et est noté GLn . Il est simple de voir que les quatre axiomes de groupe sont effectivement valables :

Fermeture. Si A et B ont des inverses, alors leur = produit AB : (AB)-1 B –1A–1.

Identité. La matrice identité I est inversible et appartient donc à cet ensemble.

Machine Translated by Google

Associativité. Cette règle vaut pour toutes les matrices, et donc pour les matrices inversibles en particulier.

Inverses. L'inverse d'une matrice A est elle-même inversible, et appartient donc à l'ensemble : (A–1) –1 = A.

Une étude des DÉTERMINANTS et de la RÈGLE DE CRAMER montre qu'une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Ainsi, le groupe linéaire général d'ordre n peut être défini comme l'ensemble de toutes les matrices carrées n × n avec des déterminants non nuls. Le sous-ensemble de toutes les matrices carrées de déterminant égal à 1 forme un sous-groupe de GLn appelé le groupe linéaire spécial, noté SLn .

géodésique La courbe la plus courte reliant deux points d'une surface et reposant entièrement sur cette surface est appelée géodésique. Par exemple, LE THÉORÈME DE PYTHAGORE montre qu'une ligne droite donne le chemin le plus court entre deux points sur un plan, et donc les lignes droites sont les géodésiques d'un plan. Sur une SPHÈRE, les géodésiques sont des sections de grands cercles. (Les avions volent le long d'arcs géodésiques à travers la surface de la Terre.) On envisage une géodésique comme le chemin qu'une bande d'élastique étiré adopterait si elle était maintenue aux deux points en question et forcée de rester sur la surface étudiée.

Sur un plan, il n'y a toujours qu'une seule géodésique entre deux points donnés. Sur une sphère il y a une infinité de géodésiques qui relient les deux pôles de la sphère, par exemple. (Si les deux points choisis ne sont pas antipodaux, alors la géodésique qui les relie est unique.)

Un dôme géodésique est une structure en forme de dôme composée d'éléments structurels en ligne droite maintenus en tension. Les segments de droite se rapprochent des géodésiques du dôme.

distribution géométrique Voir DISTRIBUTION BINOMIALE.

moyenne géométrique Voir MEAN.

séquence géométrique (progression géométrique) UNE SÉQUENCE de nombres dans laquelle chaque terme, sauf le premier, est un multiple fixe du précédent est appelée une séquence géométrique. Le rapport constant des termes est appelé rapport commun. Par exemple, la suite 1,3,9,27,… est géométrique, de raison 3. La suite 1 1 1, , —2 —4 ^{1} , —8 ,… est également géométrique, avec des points communs 1 rapport .

2 Une suite géométrique de premier terme a et de raison r a la forme : a, ar, ar2 Le nième terme ar2 de la suite est donné par an = arn–1. (Cependant, il est courant de commencer le décompte en appelant le premier terme de la suite le « terme zéro », de sorte que a0 = ar0 = a et le nième terme de la suite est donné par la formule : an = arn .) Une suite géométrique peut aussi être qualifiée d'exponentielle. Le rapport commun r est la base de la FONCTION EXPONENTIELLE f(n) = arn .

Si la valeur r est comprise entre –1 et 1, alors les termes arn de la suite géométrique se rapprochent de la valeur 0 lorsque n devient grand. Si r = 1, alors la suite géométrique est la suite constante a,a,a,… Pour toutes les autres valeurs de r, la suite diverge.

La somme des termes d'une suite géométrique s'appelle une suite géométrique :

$$a + ar + ar2 + ar3 + \ldots$$

Dans l'étude des SÉRIES CONVERGENTES, le test du rapport montre que cette série se somme en une valeur finie si –1 < r < 1. La valeur S de la somme peut être calculée comme suit :

Si S = a + ar + ar2 + ar3 +…, alors rS = ar + ar2 + ar3 + ar4 1 +… La soustraction donne : S – rS = a, et donc S = —1 – r

En particulier on a 1 + r + r ^{2} 3 + r + … = 1 —1 – r

Si r est une fraction de la forme (avec N ≥ 2), alors cette formule —N peut être réécrite :

$$\frac{}{NNN} + \frac{11}{2}\,1\,\frac{11}{3N} + + = \quad \frac{}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{1}{N - 1}$$

Cette expression particulière peut également être justifiée par une démonstration physique, que nous illustrons ici pour le cas N = 3 :

John prend un morceau de papier et le déchire en trois. Il tend un morceau à Andrea, un autre

Machine Translated by Google

à Béatrice, et déchire le troisième morceau en tiers encore. Il tend un morceau à Andrea, un second à Béatrice, et déchire le troisième morceau restant en tiers à nouveau. Il répète ce processus indéfiniment. Finalement, John donnera tout le papier loin - moitié à Andrea et moitié à Beatrice. Mais la quantité de papier qu'Andrea reçoit et la La quantité reçue par Béatrice peut également être calculée comme un tiers, plus un tiers de tiers, plus un tiers d'un tiers d'un tiers, et ainsi de suite. Ainsi il doit être le cas que $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ équivaut à $\frac{1}{2}$.

Un nombre décimal répétitif peut être considéré comme la somme d'un séquence géométrique. Par exemple, la décimale 0,111… est égal à la série $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$, qui, selon la formule ci-dessus, est $\frac{1}{9}$. (En conséquence le décimale répétitive 0,999… égale 9 fois ceci, $9 \times \frac{1}{9}$, qui est 1 : 0,999… = 1.)

La somme S des seuls n premiers termes d'une géométrie série, $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ peut être calculée à partir de la formule $S - rS = a - ar^n$. Sous réserve que $r \neq 1$, cela donne :

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

(Si $-1 < r < 1$, alors $r^n \to 0$ lorsque n croît. Cela montre à nouveau que $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = a \cdot \frac{1 - 0}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$.) Pour exemple, la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{512}$ est égal à

$$1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}.$$

Un calcul similaire résout un fameux « échiquier » :

La légende raconte que le jeu d'échecs était inventé pour un maharaja indien devenu tellement ravi du jeu qu'il a voulu récompenser l'inventeur avec tout ce qu'il désire.

L'inventeur n'a rien demandé de plus qu'un grain de riz sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur le troisième, et ainsi de suite, chaque carré contenant le double du nombre de grains que le carré précédent. Sachant qu'il y a 64 cases sur un échiquier, combien de grains de riz a fait le inventeur en fait demande?

Selon la formule, l'inventeur a demandé $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 263$ grains de riz. Cela équivaut $1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2}$ $= 264 - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ grains, ce qui est l'équivalent d'environ 25 milliards de miles cubes de riz, une quantité inconcevable. L'inventeur a trompé maharaja à faire une promesse qu'il ne pouvait pas honneur.

Voir aussi SÉQUENCE ARITHMÉTIQUE ; SE CONVERGENT QUENCE; SÉRIE.

série géométrique Voir SEQUENCE GEOMETRIQUE.

transformation géométrique Une procédure spécifiée qui déplace des points dans le plan vers différentes positions (et donc changer l'emplacement, et éventuellement le formes, de figures géométriques) s'appelle une transformation géométrique. Plus précisément, une transformation géométrique est une FONCTION qui associe à chaque point du plane un autre point du plan. (On peut exiger la fonction doit être un-à-un et sur.)

Par exemple, la fonction qui déplace chaque point de le plan une unité vers la droite est une transformation géométrique (appelée translation). Cette transformation conserve les formes de toutes les figures géométriques.

Toute transformation géométrique qui préserve les distances entre les points du plan (et donc la forme et taille des figures géométriques) s'appelle un essai isométrique ou un mouvement rigide. Celui qui multiplie toutes les distances entre les points par un facteur constant (appelé la dilatation facteur) est appelée une similitude, et une transformation qui prend des lignes droites en lignes droites s'appelle un LINEAIRE TRANSFORMATION. Toutes les isométries sont des transformations linéaires, par exemple. Ces idées s'étendent également aux transformations dans l'espace tridimensionnel.

Bien qu'il n'ait jamais fait un usage explicite du concept dans ses écrits, l'idée d'une transformation géométrique est issu des travaux du géomètre grec EUCLIDE (ca. 300-260 avant notre ère).

Nous énumérons ici quelques exemples classiques de géométrie métamorphoses.

Réflexion dans une ligne

Étant donné une ligne l dans le plan, une réflexion dans cette ligne prend un point P d'un côté de l au point correspondant P′

Machine Translated by Google

du côté opposé de l tel que le segment reliant P à P′ soit PERPENDICULAIRE à l et bissecté par lui.
Les points sur l lui-même ne sont pas déplacés. Toute réflexion est une isométrie qui transforme les figures géométriques en leurs images miroir. La ligne utilisée pour effectuer la réflexion s'appelle la ligne de réflexion.

Dans un système de COORDONNEES CARTESIENNES , une réflexion autour de l' axe des x amène un point de coordonnées (x,y) au point (x,–y), et une réflexion autour de l' axe des y modifie le signe de la coordonnée x : (x,y) devient (–x,y). L'analogue d'une réflexion dans une ligne dans un espace tridimensionnel est une réflexion dans un plan.

Translation

Une transformation géométrique qui déplace tous les points du plan d'une distance fixe dans une direction fixe s'appelle une translation. Aucun point n'est laissé de côté par une traduction. Une translation est une isométrie, et toutes les figures géométriques sont transformées en de nouvelles figures avec la même taille, forme et orientation que les originaux.

Si l1 et l2 sont deux lignes PARALLÈLES dans le plan, distantes de d unités, une réflexion sur la première ligne, suivie d'une réflexion sur la seconde, a le même effet que de déplacer tous les points du plan d'une distance de 2d unités dans un direction fixe perpendiculaire aux deux droites. Ainsi toute translation équivaut à la COMPOSITION de deux reflets.

Dans un repère cartésien, une translation amène un point de coordonnées (x,y) au point (x + a, y + b) pour certaines valeurs fixes a et b.

Rotation

Une rotation autour d'un point O d'un angle θ est la transformation géométrique qui mappe un point P dans le plan au point P 'de sorte que P et P 'sont à la même distance de O, et l'angle POP ' a la mesure θ. (Un tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est appliqué si θ est positif ; un tour dans le sens des aiguilles d'une montre de θ est négatif.) Seul l'emplacement du point O reste inchangé sous une rotation, sauf si l'angle θ est un multiple de 360°, auquel cas tous les points sont fixé.

Une rotation équivaut à deux réflexions sur lignes qui se coupent en O en faisant un angle de $\frac{\theta}{2}$ entre elles.

Chaque rotation est une isométrie. L'analogue d'une rotation autour d'un point dans l'espace tridimensionnel est une rotation autour d'une ligne.

Réflexion glissée

Une réflexion dans une ligne suivie d'une translation dans une direction parallèle à cette ligne est appelée réflexion glissée.

Réflexion en un point

Une réflexion en un point O du plan est l'isométrie qui ramène un point P du plan au point correspondant P′ tel que O soit au POINT MILIEU du segment de droite reliant P et P′. Une réflexion en un point équivaut à une rotation de 180° autour de ce point.

Dilatation

Une dilatation de centre O et de facteur de dilatation k > 1 est la transformation géométrique qui laisse O fixe et éloigne tout point P de O, d'un facteur k, le long du rayon de O à P. Ainsi, une dilatation étire les figures uniformément vers l'extérieur de O. Il est possible, par exemple, de convertir un carré en un rectangle via une dilatation. (Une dilatation avec un facteur de dilatation k entre O et 1 "rétrécit" tous les points plus près de O.) Une dilatation n'est pas une isométrie.

Inversion circulaire

Aussi appelée « inversion dans un cercle » ou « réflexion dans un cercle », une inversion circulaire dans un cercle, de centre O et de rayon r, prend un point P dans le plan à une distance d d de O, et le mappe au point P 'à une distance r de O le long $\frac{2}{d}$ du même rayon de O à P. Ainsi, les points à l'intérieur du cercle sont pris à l'extérieur, et vice versa. Les points sur le cercle lui-même ne sont pas déplacés par la transformation. L'image du centre O sous une inversion de cercle est indéfinie.

Une inversion circulaire n'est pas une isométrie mais s'avère être une cartographie utile dans l'étude de la GÉOMÉTRIE. Il a la propriété que les cercles et les lignes droites du plan sont convertis en nouveaux cercles et nouvelles lignes droite

Voir aussi MOTIF DE FRISE ; THÉO FONDAMENTAL REM DES ISOMETRIES ; SYMÉTRIE; TRANSFORMATION DE COORDONNÉES.

géométrie La branche des mathématiques concernée par les propriétés de l'espace et des figures, lignes, courbes et points dessinés dans l'espace s'appelle la géométrie. La géométrie plane examine les objets dessinés dans un plan (lignes, cercles, polygones, etc.), la géométrie solide traite des figures dans un espace tridimensionnel (polyèdres, lignes, plans et surfaces) et les études de GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE .

Machine Translated by Google

Histoire de la géométrie

L'étude de la GÉOMÉTRIE est ancienne. Les archives montrent que les érudits égyptiens et babyloniens d'environ 1900 avant notre ère avaient développé de solides principes de mesure et de raisonnement spatial dans leur architecture et dans leur arpentage des terres.
Les deux cultures connaissaient le THÉORÈME DE PYTHAGORE et avaient développé des tableaux de TRIPLES PYTHAGORIENS. (Les Égyptiens utilisaient des cordes nouées pour construire des "triangles 3-4-5" afin de créer des ANGLES DROITS .) art) de la Chine ancienne comprend également des travaux sur le théorème de Pythagore.

Dans la Grèce antique, les mathématiciens se sont rendus compte que de nombreuses propriétés des formes et des figures pouvaient être déduites logiquement d'autres propriétés. Dans son ouvrage épique LES ÉLÉMENTS , le géomètre grec EUCLIDE (vers 300-260 avant notre ère) a rassemblé un grand volume de connaissances sur le sujet et a montré que chaque résultat pouvait être logiquement déduit d'un très petit ensemble d'hypothèses de base (des vérités évidentes) sur le fonctionnement de la géométrie. Le travail d'Euclide était rigoureux et systématique, et la notion d'une PREUVE logique était née. Les postulats d'Euclide et le processus de raisonnement logique sont devenus le modèle de toutes les recherches géométriques ultérieures pendant les deux millénaires qui ont suivi. Sa méthode de compilation et d'organisation de toutes les connaissances mathématiques connues à son époque était une réalisation intellectuelle importante. L'approche rigoureuse d'Euclide était, et est toujours, modelée dans d'autres branches des mathématiques. Chercheurs en SET

La THÉORIE, les FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES et le CALCUL, par exemple, cherchent tous à suivre le même processus de rea formelle. le son comme approche correcte pour parvenir à une bonne compréhension de ces sujets.

La prochaine plus grande percée dans l'avancement de la géométrie s'est produite au 17ème siècle avec la découverte des COORDONNÉES CARTÉSIENNES comme moyen de représenter les points comme des paires de nombres réels et les lignes et les courbes comme des équations algébriques. Cette approche, décrite par le mathématicien et philosophe français RENÉ DESCARTES (1596-1650) dans son célèbre ouvrage de 1637 La géométrie (Géométrie), unissait les domaines alors disparates de l'algèbre et de la géométrie. Malheureusement, l'intérêt de Descartes consistait uniquement à faire progresser les méthodes de construction géométrique, et non à développer un modèle algébrique complet de la géométrie. Cette dernière tâche a été poursuivie par le mathématicien français PIERRE DE FERMAT (1601-1665), qui avait également exposé les principes de la géométrie coordonnée dans un manuscrit non publié qu'il avait fait circuler parmi les mathématiciens avant la sortie de La géométrie. Fermat publia plus tard l'ouvrage en 1679 sous le titre Isagoge ad locus planos et solidos (Sur le plan et le locus solide). L'application de l'algèbre à la discipline a fourni aux chercheurs un nouvel outil puissant pour résoudre des problèmes géométriques et leur a également fourni un grand nombre de types de courbes différents à étudier.

Les travaux de Fermat en géométrie ont inspiré des travaux sur la théorie du CALCUL DIFFÉRENTIEL et, plus tard, ont conduit à l'étude de la «géométrie différentielle» (l'application du calcul à l'étude des formes et des surfaces). Ceci a été développé par le mathématicien et physicien allemand CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855).

Ni Descartes ni Fermat n'autorisaient des valeurs négatives pour les distances. Par conséquent, aucun des chercheurs n'a travaillé avec un ensemble complet d'axes de coordonnées tels que nous les utilisons aujourd'hui. Le

les propriétés des lignes et des formes tracées à la surface d'une SPHÈRE. Le mot géométrie vient des mots grecs ge signifiant « terre » et metria signifiant « mesurer ». Comme l'origine du mot le suggère, l'étude de la géométrie a évolué à partir de préoccupations très pratiques en ce qui concerne la mesure précise des étendues de terre, la navigation et l'architecture.

Le mathématicien grec EUCLIDE (vers 300-260 avant notre ère) a formalisé l'étude de la géométrie en une pure logique de raisonnement et de déduction. Dans son célèbre ouvrage, LES ÉLÉMENTS, Euclide a rassemblé un volume considérable de connaissances grecques sur le sujet et a montré que tous les résultats connus à l'époque pouvaient être déduits d'une très petite collection de vérités évidentes ou d'AXIOMES, qu'il a énoncées explicitement . Tout résultat pouvant être déduit de ces axiomes est aujourd'hui qualifiée d'euclidienne. L'approche rigoureuse d'Euclide en matière d'investigation géométrique est restée le modèle d'étude standard pendant deux millénaires.

Voir aussi GEOMETRIE EUCLIDEENNE; ESPACE EUCLIDIEN ; POSTULATS D'EUCLIDE ; HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE (essai); GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE ; POSTULAT PARALLÈLE ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Germain, Marie-Sophie (1776–1831) Français Théorie des nombres, Physique mathématique Née le 1er avril 1776 à Paris, France, la chercheuse Marie-Sophie Germain est connue en mathématiques pour ses importantes contributions au sujet de la THÉORIE DES NOMBRES. Notamment,

Machine Translated by Google

les notions de distance négative et d'aire négative ont été avancées pour la première fois par SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) et GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), les coinventeurs de CALCULUS.

Le 19ème siècle a vu d'autres avancées majeures dans le domaine de la géométrie. On avait noté depuis longtemps que le cinquième postulat d'Euclide, le soi-disant POSTULAT PARALLÈLE, n'est pas nécessaire pour une grande partie de la géométrie. De nombreux savants arabes du premier millénaire ont tenté, sans succès, de montrer que le cinquième postulat pouvait être logiquement déduit des quatre autres (ce qui le rend inutile), comme l'ont fait les savants européens de la Renaissance. En 1795, le mathématicien écossais John Playfair a montré que le cinquième postulat équivaut à l'affirmation selon laquelle, à travers n'importe quel point, on peut tracer une, et une seule, ligne passant par ce point parallèlement à une ligne donnée.
(Ceci est aujourd'hui appelé AXIOME DE PLAYFAIR .) Bien qu'il n'élimine pas la nécessité du cinquième postulat, Playfair a montré qu'il pouvait être compris sous une forme plus traitable.

En 1829, le mathématicien russe NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) fit un pas audacieux et considéra un monde géométrique dans lequel le cinquième postulat est faux. Il a supposé qu'à travers un point donné, plus d'une ligne pouvait être tracée parallèlement à une ligne donnée. Ce faisant, Lobachevsky a découvert un nouveau système mathématique cohérent, exempt de contradiction, aussi logiquement valable que la géométrie d'Euclide. (Cette géométrie est aujourd'hui appelée HYPER BOLIC GEOMETRY.) L'impact philosophique du travail de Lobachevsky était énorme: il avait montré que les mathématiques n'avaient pas besoin d'être basées sur un seul ensemble de vérités physiques, et qu'il existe d'autres systèmes mathématiques tout aussi valables basés sur des alternatives, axiomes soigneusement choisis. Lobachevsky avait également montré que le cinquième postulat d'Euclide ne peut être établi comme une conséquence des quatre axiomes restants : il avait pré

a envoyé un exemple valable d'un système dans lequel les quatre premiers postulats d'Euclide sont valables, mais pas le cinquième.

Étonnamment, certaines des idées de Lobachevsky ont été anticipées bien avant le XIXe siècle. Le grand mathématicien et poète persan OMAR KHAYYÁM (vers 1048-1122) a établi un certain nombre de résultats que nous reconnaissons aujourd'hui comme non euclidiens. Ces résultats ont ensuite été traduits en latin et étendus par le prêtre italien GIROLAMO SAC CHERI (1667–1733).

Malheureusement, aucun des deux chercheurs n'a découvert la validité de la GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE, car chacun se concentrait plutôt sur la tentative d'établir le cinquième postulat d'Euclide en conséquence des quatre autres.

Le mathématicien allemand BERNHARD RIEMANN (1826-1866) a découvert une forme alternative de géométrie non euclidienne dans laquelle le cinquième postulat d'Euclide échoue d'une manière différente. Dans un système de GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE, il n'est jamais possible de tracer une ligne passant par un point donné parallèlement à une ligne donnée.

Les contributions de Riemann à l'avancement de la géométrie ont été importantes. Dans sa célèbre conférence de 1854 « Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen » (Sur les hypothèses qui sont à la base de la géométrie), Riemann a avancé l'idée que la géométrie peut être l'étude de n'importe quel type d'espace de n'importe quel nombre d'espaces. dimensions, et plus tard développé les mathématiques nécessaires pour décrire correctement la forme de l'espace. ALBERT EINSTEIN (1879-1955) utilisa plus tard ces travaux pour développer sa théorie de la relativité.

Voir aussi GEOMETRIE AFFINE; MATHÉMATIQUES ARABE; MATHÉMATIQUES BABYLO NIENNES; JÁNOS BOLYAI ; DIMENSION; MATHÉMATIQUES ÉGYPTIENNES ; LES ÉLÉMENTS ; GÉOMÉTRIQUE; TRANSFORMATION; MATHÉMATIQUES GRECQUES ; HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET DE L'ALGÈBRE (essai); MATHÉMATIQUES INDIENNES ; PERSPECTIVE; POSTULAT; GÉOMÉTRIE; THÉORÈME; TOPOLOGIE.

son travail a ouvert la voie à d'autres chercheurs dans le domaine pour établir la validité du DERNIER THÉORÈME DE FERMAT pour toutes les valeurs n <100, la seule étape substantielle franchie vers la résolution du problème au cours du 19ème siècle. Germain a également travaillé à développer une théorie mathématique de l'élasticité. Elle est considérée comme l'une des rares femmes érudites en mathématiques avant le XXe siècle.

À l'âge de 13 ans, après avoir lu un récit de la vie et de la mort d' ARCHIMÈDE DE SYRACUSE, Germain dit qu'elle s'est sentie poussée à devenir mathématicienne. Elle poursuit ses études en apprenant d'abord elle-même le latin et le grec, puis en lisant les œuvres de SIR ISAAC NEW TON, LEONHARD EULER et EUCLID. En tant que femme, Germain n'a pas été autorisée à entrer à l'université, mais elle a réussi à poursuivre ses études de mathématiques en lisant des notes de cours empruntées à des élèves ayant fréquenté l'École Polytechnique de Paris. Le mathématicien JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813) donne un cours d' ANALYSE à l'université et Germain lui soumet une thèse sur le sujet sous le pseudonyme de Louis LeBlanc, un nom masculin. Lagrange a été très impressionné par le contenu de l'article et a recherché son auteur. Il ne fut pas du tout troublé de découvrir que « M. LeBlanc » était une femme. En fait, il a été tellement impressionné par son travail qu'il lui a offert des conseils personnels dans l'étude des mathématiques avancées.

Toujours sous son pseudonyme masculin, Germain établit plus tard une correspondance avec le mathématicien allemand CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), avec qui elle développe et partage une grande partie de ses travaux en

Machine Translated by Google

la théorie du nombre. Gauss, lui aussi, a finalement découvert sa véritable identité, mais cela n'a pas diminué son respect pour elle en tant que bonne érudite. En 1808, l'Institut de France organisa un concours pour trouver une théorie mathématique de la théorie de l'élasticité. Bien que les mathématiques nécessaires pour résoudre le défi n'étaient pas disponibles pour les chercheurs à l'époque, Germain a consacré une décennie de travail à résoudre le problème et a réussi à faire des pas significatifs dans le développement d'une théorie initiale sur le sujet. Malheureusement, une grande partie de son travail a été ignorée par l'Institut.

Germain ne s'est jamais marié ni n'a obtenu de poste professionnel; elle a été soutenue financièrement par son père tout au long de sa vie. Germain est décédée d'un cancer du sein à Paris, en France, le 27 juin 1831. Son certificat de décès mentionnait sa profession simplement comme « propriétaire ».

réflexion glissée Une réflexion dans une ligne suivie d'une translation dans une direction parallèle à cette ligne est appelée réflexion glissée.

Voir aussi TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE.

gnomon La figure en forme de L qui reste lorsqu'un PARALLELOGRAMME (généralement un carré) est retiré du coin d'un parallélogramme similaire plus grand s'appelle un gnomon. Par exemple, dans un tableau carré 2 × 2 de points, les trois points entourant n'importe quel point d'angle forment la forme d'un gnomon. (Remarquez, incidemment, que 4 = 1 + 3.) L'ajout d'un gnomon de cinq points au tableau 2 × 2 produit un tableau carré 3 × 3 (et nous avons que 9 = 1 + 3 + 5), et en ajoutant à cela un gnomon de sept points donne un tableau 4 × 4 (donnant 16 = 1 + 3 + 5 + 7).

Ce processus montre qu'en général, le nième nombre carré est égal à la somme des n premiers nombres impairs.

L'aiguille d'un cadran solaire est aussi appelée gnomon. Elle et l'ombre qu'elle projette forment ensemble la forme d'un L.

Voir aussi NUMÉROS CHIFFRÉS.

Gödel, Kurt (1906-1978) Logique austro-américaine Né le 28 avril 1906 à Brünn, Autriche-Hongrie (aujourd'hui Brno, République tchèque), Kurt Gödel est aujourd'hui considéré comme le logicien le plus important du XXe siècle. Sa célèbre paire de théorèmes d'incomplétude a stupéfié la communauté mathématique, anéantissant les espoirs de tous ceux qui cherchaient avec ferveur un ensemble d'axiomes fondamentaux à partir desquels toutes les mathématiques pourraient être logiquement déduites.

Gödel montra très tôt un talent pour le travail académique et avait terminé l'équivalent d'un cursus universitaire avant de quitter l'école secondaire. En 1923, il entra à l'Université de Vienne pour obtenir un diplôme en physique, mais passa aux mathématiques en 1926 lorsqu'il fut initié au domaine de la LOGIQUE FORMELLE.

Il est vite devenu clair pour la faculté du département que Gödel apporterait des contributions considérables dans le domaine. À l'été 1929, Gödel a terminé une thèse de doctorat sur le sujet et a obtenu un doctorat. l'année suivante. Sa thèse a décrit les détails de sa première découverte célèbre, mais l'impact révolutionnaire de son travail n'a pas été pleinement compris par la communauté mathématique au sens large jusqu'à ce qu'il publie le résultat un an plus tard.

Gödel avait prouvé que tout système mathématique suffisamment sophistiqué pour incorporer les principes de l'arithmétique contiendrait toujours des énoncés qui ne peuvent être ni prouvés ni réfutés. Plus tard, il a également montré qu'aucun système mathématique ne pouvait être prouvé comme étant cohérent, c'est-à-dire exempt de CONTRADICTION, en utilisant uniquement les axiomes du système. Cela avait été un rêve de 200 ans, depuis l'époque de GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ en fait, de placer l'ensemble des mathématiques sur une base axiomatique solide. Gödel avait prouvé, en substance, qu'un tel rêve ne peut jamais se réa

Après avoir rejoint la faculté de l'Université de Vienne pendant trois ans, Gödel a accepté, en 1933, un poste à l'Institute for Advanced Study de Princeton, New Jersey. Après avoir fait une dépression nerveuse, il retourna à Vienne après seulement un an, mais retourna plus tard à l'Institut en 1942 pour échapper à l'Europe déchirée par la guerre. Gödel est devenu citoyen américain la même année.

De nombreux prix lui ont été décernés tout au long de sa vie. En 1950, il a été l'un des deux récipiendaires du premier prix Einstein, et il a reçu des doctorats honorifiques de l'Université Yale à New Haven, Connecticut, et de l'Université Harvard à Cambridge, Massachusetts, dans les deux années qui ont suivi. Il a été élu à l'Académie nationale des sciences en 1955.

On dit que Gödel avait des opinions arrêtées sur de nombreux sujets de la vie et se sentait toujours avoir raison, en particulier dans les disciplines des mathématiques et de la médecine. Gödel était de nature nerveuse et, après avoir subi de graves saignements dus à un ulcère duodénal, il a décidé de suivre lui-même un régime alimentaire extrêmement strict.

Machine Translated by Google

concevoir. Il a développé une méfiance générale à l'égard des médecins et, vers la fin de sa vie, est devenu convaincu qu'il était empoisonné. Gödel a finalement cessé de manger complètement et est mort de faim le 14 janvier 1978.

Les travaux de Gödel en logique mathématique touchent au cœur même du sujet. Son nom et ses résultats sont familiers à tout étudiant de premier cycle ayant suivi un premier cours de logique formelle.

Voir aussi THÉORÈMES D'INCOMPÉTITUDE DE GÖDEL .

Les théorèmes d'incomplétude de Gödel En 1900, DAVID HILBERT posait 23 problèmes aux futurs mathématiciens.
Le deuxième de ses 23 problèmes mettait la communauté mathématique au défi de trouver une base logique pour la discipline des mathématiques, c'est-à-dire de développer un système formel de symboles, avec une signification bien définie et des règles de manipulation bien définies, sur lesquelles tous des mathématiques pourrait être fondée. Des mathématiciens, tels que BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSEL et son collègue ALFRED NORTH WHITEHEAD, ont relevé le défi et ont fait quelques progrès dans cette direction. Mais en 1931, KURT GÖDEL stupéfia la communauté mathématique en prouvant une fois pour toutes qu'un tel objectif ne pourrait jamais être atteint.

Le premier théorème d'incomplétude de Gödel stipule que tout système mathématique suffisamment sophistiqué pour incorporer les principes de l'arithmétique contiendra nécessairement des énoncés (théorèmes) qui ne peuvent être ni prouvés ni réfutés. Officieusement, cela signifie qu'il ne sera jamais possible de programmer un ordinateur pour répondre à toutes les questions mathématiques.

Son second théorème d'incomplétude (qui est en fait une conséquence du premier) affirme qu'aucun système de logique mathématique incorporant les principes de l'arithmétique ne sera jamais capable d'établir sa propre cohérence. Autrement dit, la preuve qu'un système de mathématiques est exempt de CONTRADICTION nécessitera des axiomes et des principes non contenus dans le système.

Gödel a prouvé ses théorèmes en attribuant des nombres aux symboles utilisés dans un système mathématique (virgules, chiffres, parenthèses gauche et droite, etc.), puis en concevant une méthode ingénieuse pour attribuer des nombres à toutes les déclarations mathématiques (combinaisons de symboles) dans le système. Il a alors été possible de montrer que le système mathématique contient un énoncé de la forme : « Cette phrase ne peut pas être prouvée ». Bien sûr, il est impossible de prouver ou de réfuter une telle affirmation.

Le travail de Gödel a anéanti des siècles d'espoir de trouver un petit ensemble d'axiomes de base sur lesquels fonder toutes les mathématiques.

Voir aussi COHÉRENT ; LOGIQUE FORMELLE; TABLE DE VÉRITÉ.

Goldbach, Christian (1690–1764) Prussien Théorie des nombres
Né le 18 mars 1690 à Königsberg, Prusse (aujourd'hui Kaliningrad, Russie), Christian Goldbach est surtout connu en mathématiques pour la célèbre conjecture non résolue qui porte son nom.

Goldbach a étudié à Saint-Pétersbourg et est devenu professeur de mathématiques et historien à l'université en 1725. Il a beaucoup voyagé à travers l'Europe et a établi des contacts personnels avec un certain nombre d'éminents mathématiciens de l'époque. Bien que Goldbach ait étudié les sommes infinies, la théorie des équations et la théorie des courbes, ses travaux les plus importants se situent dans le domaine de la THÉORIE DES NOMBRES, dont une grande partie a été menée par correspondance avec le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783).

Une lettre en particulier a par la suite attiré l'attention internationale. Dans ce document, Goldbach a mentionné que chaque nombre pair semble être la somme de deux nombres PRIME . Par exemple, il a noté que 4 est égal à 2 + 2, 6 est égal à 3 + 3, 10 est égal à 3 + 7 et 1 000 est égal à 113 + 887. Incapable de trouver un cas où ce n'était pas le cas, Gold bach a demandé à Euler si oui ou non c'était en effet une propriété de tous les nombres pairs. Euler a tenté de résoudre le problème, mais a constaté qu'il n'était pas en mesure d'établir la réclamation, ni de trouver un CONTRE-EXEMPLE à celle-ci. Plus tard, le mathématicien anglais Edward Waring a publié le problème dans son texte populaire de 1770 Meditationes alge braicae (Méditations sur l'algèbre), attribuant correctement le problème à Goldbach. Le défi a acquis une notoriété considérable. Aujourd'hui appelé CONJECTURE DE GOLDBACH , le problème reste l'un des défis non résolus les plus connus en mathématiques.

Goldbach mourut à Moscou, en Russie, le 20 novembre 1764. Outre la conjecture qui porte son nom, Goldbach est également connu pour sa correspondance avec PIERRE DE FERMAT (1601-1655) et pour être l'un des rares mathématiciens à l'époque à comprendre les implications de l'approche de Fermat en théorie des nombres.

La conjecture de Goldbach Dans sa lettre de 1742 à LEON
HARD EULER, mathématicien prussien CHRISTIAN

Machine Translated by Google

GOLDBACH (1690-1764) a conjecturé que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres PREMIERS . Par exemple, 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3,…, 20 = 3 + 17,…, 50 = 13 + 37,…, 100 = 3 + 97, etc. Personne à ce jour n'a été en mesure d'établir si cette affirmation est vraie pour chaque nombre pair. Le problème est depuis devenu connu sous le nom de conjecture de Goldbach, et il reste l'un des problèmes mathématiques non résolus les plus célèbres d'aujourd'hui. Entre le 20 mars 2000 et le 20 mars 2002, un prix d'un million de dollars a été offert à quiconque pourrait résoudre la conjecture de Gold bach. Le prix n'a pas été réclamé.

La conjecture de Goldbach équivaut au défi de prouver que tout entier supérieur à 5 est la somme de trois nombres premiers. (Si le nombre est impair, soustrayez 3 et écrivez le nombre résultant comme la somme de deux nombres premiers.
S'il est pair, soustrayez 2.)

La source de la difficulté avec ce problème est que les nombres premiers sont définis en termes de multiplication, alors que le problème implique une addition. Il est souvent très difficile d'établir des liens entre ces deux opérations distinctes sur les entiers.

En 1931, le mathématicien russe L. Schnirelmann (1905-1938) a prouvé que tout entier positif est la somme d'au plus 300 000 nombres premiers. Bien que ce résultat semble ridicule par rapport au problème initial, c'est une première étape significative pour résoudre la conjecture : il montre au moins qu'il est possible de borner le nombre de nombres premiers représentant les entiers.

En 1937, un autre mathématicien russe, Ivan Vinogradoff (1891-1983), a prouvé que tout nombre suffisamment grand peut être écrit comme une somme de quatre nombres premiers. Ce qui constitue "suffisamment grand" n'est pas connu (le travail de Vinogradoff montre seulement qu'il ne peut y avoir une infinité d'entiers qui nécessitent plus de quatre sommations premières) - mais au moins une petite borne a été placée sur "la plupart" des entiers. En 1973, Jing-Run Chen a prouvé que tout nombre pair suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et d'un nombre premier ou à deux facteurs premiers.

Les travaux sur la résolution de la conjecture de Goldbach se poursuivent. Depuis l'année 2003, il a été confirmé par ordinateur que la conjecture est vraie pour tous les nombres jusqu'à 6 × 1016
.

Voir aussi FORCE BRUTE.

nombre d'or (proportion divine, rapport extrême et moyen, nombre d'or, nombre d'or) Un segment de ligne reliant deux points A et B est dit divisé par un troisième point P dans le nombre d'or si le rapport de la longueur totale AB à la longueur AP est le même que le
RATIO de la longueur AP sur la longueur PB :

$$\frac{AB}{AP} = \frac{PA}{PB}$$

La valeur de ce rapport est notée (la lettre grecque phi) et peut être calculée comme suit :

Définissez la longueur PB sur une unité. Puis, depuis AP

$\frac{}{PB}$ = , la longueur AP est de unités, et la longueur

de tout le segment AB est + 1. Nous avons :

$$\frac{\quad + 1}{} = \frac{}{\quad -1}$$

donnant l' équation QUADRATIQUE = + 1.^{2}
Cela a deux solutions. La sélection de la solution supérieure à 1 donne :

$$= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988\ldots$$

(La deuxième solution de cette équation quadratique est $1 + \sqrt{5} = 1 -$
$= -$
$\frac{}{2}$0,618033988….)

Le nombre d'or a été étudié et rendu célèbre par les Pythagoriciens, les disciples du mathématicien grec PYTHAGORE (vers 500 avant notre ère). Ils l'ont découvert dans leur étude du PENTAGRAMME, la figure qui apparaît lorsqu'on trace les diagonales d'un pentagone régulier. Les côtés d'un pentagramme se divisent dans le nombre d'or.

La méthode suivante montre comment construire un point P qui divise un segment de ligne donné AB en nombre d'or :

Étant donné un segment de droite AB, tracez une droite perpendiculaire passant par A. Trouvez le POINT MILIEU M de AB et localisez sur la droite perpendiculaire un point C dont la distance de A est la même que la longueur AM. (Utilisez un cercle de centre A et de rayon AM comme aide.) Dessinez maintenant un cercle de centre C et de rayon BC pour localiser un deuxième point D sur la ligne perpendiculaire de sorte que la longueur BD soit égale à la longueur BC. Soit P le point du segment de droite AB tel que la longueur AP soit égale à la longueur AD. (Utilisez un cercle de centre A

Machine Translated by Google

et rayon AD pour trouver ce point.) Ensuite, le point P divise le segment AB dans le nombre d'or.

(Pour voir pourquoi cela fonctionne, supposons que le segment de droite AB est de longueur unitaire et que la longueur de AP est x. Alors le triangle ABC est un triangle rectangle avec l'hypoténuse 1 + x. LE THÉORÈME DE PYTHAGORE montre maintenant que x = — 2 – 1 = — donnant = AB ,) — AP

Notant que la construction de points médians, de cercles et de lignes perpendiculaires peut être accomplie avec un bord droit (c'est-à-dire une règle sans marques) et une boussole seule, la procédure ci-dessus montre que le nombre d'or est un nombre CONSTRUCTIBLE .

Diviser la relation 1 2 = + 1 par donne = 1 + — . En substituant cette formule en elle-même multiple fois établit :

$$= + = + 1 1 1 \qquad \frac{1}{1 \frac{1}{+}} 1 = + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 \frac{1}{+}}} = \ldots \qquad \backslash$$

Répéter ce processus indéfiniment montre que le nombre d'or a le simple suivant SUITE

Développement de FRACTION :

$$1 = + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Si l'on termine cette expansion après un nombre fini d'étapes, alors les rapports des NOMBRES DE FIBONACCI apparaissent :

$$3 = + 1 \frac{1}{1} = = + = \frac{F_2}{F_1} '' , \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{F}{F_2} \quad 1 + \frac{1}{2 1 \frac{}{+ 1}} \quad 4 = = + \frac{3}{F} + 1 \quad 21 \quad \frac{1}{1 \frac{1}{+ 1 1 +}}$$

$$= = \frac{5}{3} \quad \frac{F_5}{F_4} ,$$ et ainsi de suite. (Le fait que ce modèle persiste peut être prouvé par INDUCTION.) On a :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{+ n}}{F_n} =$$

Un argument d'induction prouve également que:

$$^{n} = Fn + Fn{-}1$$

La substitution de la formule = √ 1+ en elle-même plusieurs fois donne une expression pour comme une séquence de radicaux imbriqués semblable à la FORMULE DE VIÈTE pour π. Nous avons:

$$+ + + 1 1 1 = \sqrt{1 \sqrt{1 \sqrt{1 \ldots}}}$$

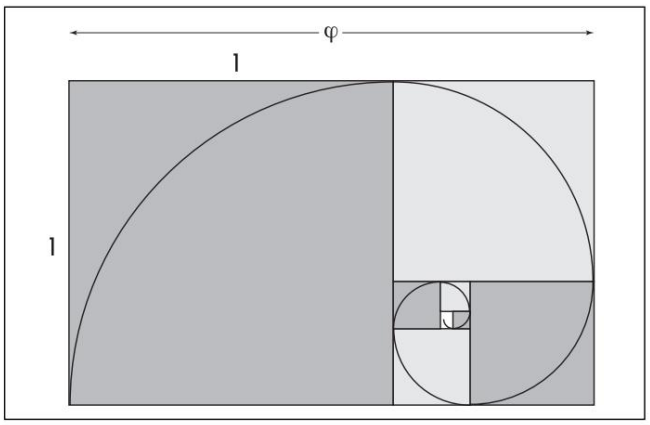
Le nombre d'or se produit également en TRIGONOMÉTRIE comme

$$\text{parce que} \quad \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} \cos 5 \quad \frac{2}{} \quad \frac{1}{} , \quad = \quad 2 \quad \text{et le péché} \quad \frac{\pi}{\text{dix}} = \frac{1}{2} ,$$ pour exemple.

Le nombre apparaît également dans un certain nombre d'endroits inattendus dans la nature et à travers les activités artistiques de l'humanité. Étant donné que le nombre d'or est bien approximé par la fraction 16/10, certains chercheurs suggèrent que les anciens Égyptiens de 3000 avant notre ère utilisaient le nombre d'or à plusieurs reprises dans la construction de leurs tombes. La « chambre dorée » de la tombe de Ramsès IV mesure 16 aunes par 16 aunes par 10 aunes, soit environ le rapport : : 1 ; d'autres tombes se trouver rapport de matage : : 1 ; et les meubles égyptiens trouvés dans ces tombes avaient souvent une forme globale basée sur le rapport : 1 : 1. L'artiste allemand ALBRECHT DÜRER (1471-1528) a écrit un texte en quatre volumes, Treatise on Human Proportions, détaillant les occurrences du rapport dans le corps humain. (Il a affirmé, par exemple, que le rapport de la longueur du visage humain à sa largeur est d'environ , et aussi que le coude divise le bras humain, de l'épaule au bout des doigts, dans le nombre d'or.) Les artistes de cette époque sont venus voir le nombre d'or comme une " PROPORTION divine" et l'a utilisé dans toutes les formes de travail artistique. Le RECT D'OI ANGLE était considéré comme la forme rectangulaire la plus agréable à l'œil.

rectangle d'or Tout rectangle dont les côtés sont dans le rapport 1 à , où = RATIO, $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est l' OR est appelé un rectangle d'or. Un tel rectangle a la propriété que l'excision du plus grand carré possible d'une extrémité de la figure laisse un autre rectangle dans la même proportion. (Le rectangle restant a des parties pro - 1 à 1. Puisque le nombre d'or satisfait le équation 2 1 = + 1, on a : — = $\frac{- 1}{1}$.) Par ça méthode, de nouveaux rectangles dorés peuvent être construits à partir

Machine Translated by Google



Le rectangle d'or

un rectangle d'or donné à l'infini. Dessiner des arcs entre les coins non adjacents des carrés produit une spirale avec la propriété remarquable qu'elle coupe n'importe quel rayon du centre de la spirale au même ANGLE (environ 73°).

Tout au long de l'histoire, le rectangle d'or a été considéré comme ayant une forme particulièrement agréable. Les piliers du Parthénon grec du 5ème siècle avant notre ère sont espacés pour produire des rectangles dorés sur sa façade (bien que personne ne puisse être certain que les concepteurs aient voulu que ce soit le cas). De nombreux érudits européens des années 1500 ont basé une grande partie de leur travail sur le rectangle d'or, et le graveur allemand ALBRECHT DÜRER (1471-1528) a utilisé le nombre d'or dans son analyse des PROPORTIONS trouvées dans le corps humain. De nombreux rectangles utilisés aujourd'hui dans les publicités de magazines, par exemple, sont étonnamment proches des rectangles dorés.

Le rectangle doré apparaît également dans le cinquième PLA TONIC SOLID, l'icosaèdre. Si toutes les arêtes de la figure sont supposées avoir une longueur d'une unité, alors la distance entre une arête donnée et l'arête (parallèle) qui lui est opposée de l'autre côté de la figure est . Ainsi, deux bords opposés d'un icosaèdre forment deux côtés d'un rectangle d'or.

Un "triangle d'or" est un triangle isocèle dont les côtés à sa base sont dans le rapport à 1. Un tel triangle a des angles internes de 72°, 36° et 72°. Si l'un des angles de base est bissecté, la figure est divisée en deux triangles plus petits, dont l'un est un nouveau triangle d'or.

Voir aussi SPIRALE D' ARCHIMÈDE.

googol/googolplex En 1938, Milton Sirotta, neveu de neuf ans du mathématicien américain Edward Kasner, a inventé le terme googol pour le nombre 1 suivi de 100 zéros (10100). En même temps, il a inventé le terme googolplex pour le nombre 1 suivi d'un googol zéros (10googol = 10(10100)). Les physiciens pensent qu'il n'y a qu'environ 1080 particules dans tout l'univers, considérablement moins qu'un googol.

Gosset, William Sealy (1876–1937) Statistiques britanniques Né le 13 juin 1876 à Canterbury, en Angleterre, on se souvient de William Gosset pour son important travail en statistique, notamment son invention du test t, dont les détails ont été publiés en 1908 sous le titre STUDENT'S T-TEST.

Gosset a étudié la chimie et les mathématiques au New College d'Oxford, avant d'accepter un poste de chimiste à la brasserie Guinness de Dublin en 1899.
Son intérêt pour les statistiques était motivé par les problèmes pratiques de mesure et de maintien de la qualité de la production. Plutôt que de tester chaque échantillon de produit de la brasserie, Gosset a recherché des techniques mathématiques qui lui permettraient de déduire des informations fiables sur la base d'un petit nombre d'échantillons. Son célèbre test t est le résultat de ses efforts. Dans un effort pour protéger les secrets commerciaux, la brasserie a interdit à ses employés de publier, mais Gosset a néanmoins imprimé sa méthode sous le pseudonyme de "Student".

Le travail de Gosset a été jugé d'une grande valeur pour la brasserie. En 1922, il reçut un assistant en statistiques et fut autorisé à créer un petit département de statistiques au sein de l'entreprise. Le test t de Student est aujourd'hui considéré comme une technique fondamentale dans le répertoire des outils utilisés par l'industrie et la science lorsqu'il s'agit de problèmes de contrôle de la qualité et d'inférence statistique générale.

En 1935, Gosset quitte l'Irlande pour gérer une nouvelle brasserie Guinness à Londres. Il mourut deux ans plus tard, le 16 octobre 1937. Son analyse statistique de la variance a eu un effet profond sur les pratiques de l'industrie du XXe siècle.

Voir aussi HISTOIRE DES PROBABILITÉS ET DES STATISTIQUES (essai).

grad Voir GRADIENT.

Machine Translated by Google

gradient La PENTE d'une ligne est parfois appelée son gradient ou pente. Par exemple, la pente de la droite reliant les deux points A = (a1 ,a2) et B = (b1 ,b2), notée mAB, est donnée par :

$$m_{UN\,B} = \frac{\text{"augmenter"}}{\text{"courir"}} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Trois points A, B et C dans le plan sont COLLINEAIRES si les gradients mAB et mAC sont égaux.

Dans le cadre du calcul multivariable - l'étude de CALCULUS appliquée aux FONCTIONS de plus d'une variable - le gradient d'une fonction f (x, y, z) de trois VARIABLES, également appelé « grad of f », est défini comme étant le VECTEUR de ses DÉRIVÉES PARTIELLES. Il est noté grad(f) ou f et est donné par :

$$\partial f = <\frac{f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{f}{\partial z}>$$

Une telle quantité s'avère utile dans le calcul de la DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE d'une fonction. En physique, f est également utilisé pour décrire la variation spatiale de l'amplitude d'une force, telle qu'une force gravitationnelle ou une force magnétique. L'étude des dérivées directionnelles montre que la quantité f calculée en un point représente la direction à partir de ce point dans laquelle la vitesse de variation de la force f est maximale.

Voir aussi DIV.

graphe (réseau) Tout diagramme de points et de segments de droite reliant des paires de points est appelé un graphe. Les points sont généralement appelés sommets ou nœuds, et les segments de ligne sont appelés arêtes. Plusieurs arêtes sont autorisées à connecter la même paire de sommets pour produire un ensemble d'arêtes multiples. On peut aussi autoriser une arête reliant un sommet à lui-même via une boucle. Les arêtes peuvent se croiser, mais les endroits où elles se croisent ne sont pas considérés comme des sommets. Par exemple, l'image suivante est un graphique. Il n'a que six sommets et se présente en deux morceaux déconnectés.

Un graphe qui vient en un seul morceau est dit connexe. Cela signifie qu'il est toujours possible de se déplacer d'un sommet à un autre en traversant une séquence d'arêtes.

Les graphiques peuvent être utilisés pour codifier les informations. Par exemple, un graphique peut représenter le réseau de possibles itinéraires de vol entre les villes, le flux d'informations entre les départements d'une grande organisation, ou même l'ensemble des connaissances parmi les personnes participant à une fête. (Chaque sommet représente une personne dans la pièce, et une arête est tracée entre deux sommets si les deux personnes correspondantes se connaissent.) L'étude générale des graphiques peut se traduire par des faits intéressants sur les possibilités de voyage, la rationalisation du flux de données, les relations et pareil.

Le degré (ou valence) d'un sommet est le nombre d'arêtes qui se rencontrent à ce sommet. Les boucles sont comptées deux fois.

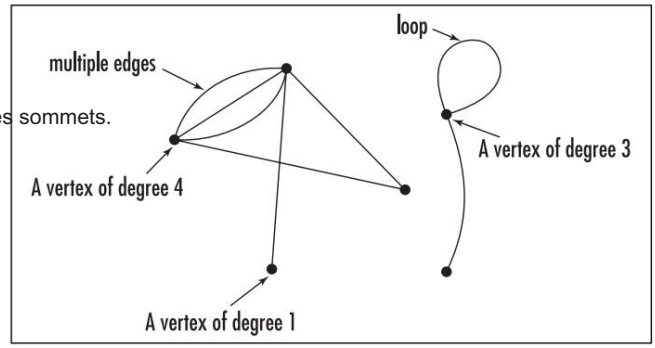
Un graphe est dit complet si chaque sommet est relié à chacun des autres sommets par une seule arête.
Par exemple, le graphique complet sur quatre sommets ressemble à un carré avec les deux diagonales dessinées. Chaque sommet a un degré trois.

Un graphe est dit planaire s'il peut être tracé sur un plan sans que deux arêtes ne se croisent. Le graphe complet à quatre sommets est planaire si l'on trace une des diagonales « à l'extérieur du carré ». Le PROB LEM À TROIS UTILITÉS est un exemple de graphe qui n'est pas planaire.

Un cycle dans un graphe est une séquence d'arêtes qui commence et se termine au même sommet et ne parcourt pas deux fois la même arête. Trouver un « circuit d'Euler », c'est-à-dire un cycle qui traverse chaque arête d'un graphe précisément une fois, est un vieux problème. (Voir THÉORIE DES GRAPHIQUES.)

Un graphe connexe ne contenant ni boucles ni cycles est appelé un arbre. Ces graphiques ressemblent à une série de branches bifurquées, et donc à l' arbre des noms. Tout diagramme d'arbre, tel qu'un arbre de PROBABILITÉ, est un exemple de graphique qui est un arbre. Il découle du THÉORÈME D'EULER que tout graphe connexe à n sommets et n–1 arêtes doit être un arbre.

Voir aussi CHEMIN CRITIQUE ; CHEMIN/CIRCUIT EULÉRIEN ; CHEMIN/CIRCUIT HAMILTONIEN ; TOURNOI.



Un graphique typique

Machine Translated by Google

solution graphique Toute solution à une paire d'équations simultanées trouvée en traçant le graphique de chacune équation et inspection visuelle de l'emplacement d'un point d'intersection s'appelle une solution graphique. Par exemple, en traçant les graphiques de y = 2x + 3 et y = 9 – 4x, on voit que les droites se coupent au point (1,5) et donc x = 1, y = 5 est une solution de la paire d'équations. UN l'approche graphique est souvent la seule méthode possible de résoudre une paire compliquée d'équations. Les calculatrices graphiques sont équipées d'un bouton "trace" qui permet un pour trouver rapidement les coordonnées des points d'intersection jusqu'à un certain degré de précision.

Une seule équation f(x) = 0 peut être résolue graphiquement en localisant les abscisses à l'origine de la fonction. Par exemple, pour trouver la racine carrée de 2, on peut tracer un graphique de la fonction f(x) = x 2 –2 et essayez d'identifier le emplacement de l' abscisse positive.

Cette méthode graphique montre clairement qu'une paire de ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES :

$$\text{hache} + \text{par} = p$$
$$cx + dy = q$$

a soit une solution (les droites se coupent en un point), aucune solution (les droites sont parallèles), ou infiniment plusieurs solutions (les lignes coïncident).

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE de la forme $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ peut être résolu graphiquement. On cherche une courbe y = g(x) dans le plan dont la pente en tout point (x, y) est donnée par f(x,y). Ainsi si, pour une large sélection de points (x,y) à travers le plan, nous dessinons de courts segments de pente f(x,y), les formes des courbes suivant ces pentes peuvent être visuellement apparent. Si on nous dit aussi la valeur de la fonction y = g(x) en un point particulier (x, y), puis en suivant la pente des segments de droite à partir de ce point décrit une solution particulière à l'équation.

Voir aussi MÉTHODE DE BISECTION ; MÉTHODE DE NEWTON .

graphique d'une fonction Dessin ou représentation visuelle montrant la relation entre deux ou plusieurs variables s'appelle un graphe. Il est courant de tracer le graphique d'une FONCTION d'une seule variable y = f(x) sur un système CARTE SIAN COORDINATE avec un axe des x et un axe des y à angles droits. Le graphe de la fonction est alors l'ensemble des tous les points (x,y) qui satisfont l'équation y = f(x) dessinés comme une courbe dans le plan. Par exemple, l'ensemble de tous points (x, y) qui satisfont $y = x^2$ forme une PARABOLE, tandis que le graphique de la fonction y = 3x est une droite passant par l'origine avec la pente 3.

Une approche générale pour représenter graphiquement une fonction consiste à faire un tableau de paires (x, y) qui satisfont l'équation à l'étude, puis de localiser ces points sur un système de coordonnées. Si suffisamment de points sont dessinée, puis une courbe lisse reliant les points est probablement une bonne représentation de la fonction. Les calculatrices graphiques utilisent cette technique pour afficher le graphique d'une fonction.

Au fur et à mesure que l'on se familiarise avec les équations de base, représenter graphiquement des formules simples devient une question de routine. Par exemple, on peut établir qu'une ÉQUA TION LINÉAIRE de la forme y = mx + b donne un graphe linéaire de pente m croisant l' axe y à la position b, et qu'un équation de la forme $x^2 + y^2 = r^2$ représente un CERCLE de rayon r. Pour déterminer les graphiques des plus complexes fonctions, les érudits - pendant de nombreuses décennies - ne pouvaient que recourir à la tâche fastidieuse de faire des tableaux et de tracer points individuels jusqu'à ce qu'une image générale émerge. Le avènement de CALCULUS, cependant, au tournant du 18 siècle a apporté le pouvoir d'identifier rapidement et examiner la forme et la structure de base des graphiques compliqués. En examinant la DÉRIVÉE première d'un fonction, par exemple, on peut déterminer où graphique augmente et diminue, ainsi que l'emplacement de les maxima et minima locaux. La dérivée seconde fournit des informations sur la forme de la courbe— qu'il soit concave vers le haut ou concave vers le bas. Cette information, associée à la connaissance des x- et y-ordonnées à l'origine de la courbe et toutes les ASYMPTOTES qu'elle pourrait posséder, est suffisant pour tracer une image raisonnablement précise du graphique sans avoir à tracer points. L'application de ces techniques nouvellement découvertes à partir du calcul fut littéralement une expérience révélatrice pour les chercheurs de l'époque.

La mathématicienne française NICOLE ORESME (env. 1323–82) a été le premier à tracer le graphique d'une fonction et de trouver une interprétation intéressante pour le domaine de la région en dessous. L'avocat et mathématicien amateur français PIERRE DE FERMAT (1601-1665) a développé le idée plus loin, définissant une procédure générale pour associer des courbes à des formules. Etant donné une relation entre deux variables A et B, disons, Fermat a dessiné une horizontale ligne de référence pour la variable indépendante A et imagé une deuxième ligne glissant le long de cette ligne de référence en un angle fixe dont la longueur B variait selon la

Machine Translated by Google

relation définie. Il n'a pas exigé que la ligne représentant B soit perpendiculaire à la ligne de référence.

Le mathématicien et philosophe français RENÉ DESCARTES (1596-1650) a développé indépendamment la même technique, mais il a eu la perspicacité supplémentaire d'introduire le symbolisme algébrique pour décrire les relations via des formules et pour étiqueter les graphiques de manière appropriée. Descartes aussi, cependant, envisageait les fonctions comme des longueurs glissantes le long d'une seule ligne de référence. Ce n'est que des décennies plus tard que les mathématiciens ont commencé à dessiner un deuxième axe de coordonnées explicite, l' axe y, à un angle fixe de 90° par rapport à l' axe horizontal de référence x.

Les quantités autres que les fonctions peuvent également être représentées graphiquement. Par exemple, une inégalité de la forme y < x + 3 définit le DEMI-PLAN sous la ligne y = x + 3.

Le graphe d'une fonction de deux variables z = f(x, y) est une surface située dans un espace tridimensionnel. Par exemple, le graphique de la fonction z = x Un graphique logarithmique est un ^{2} ^{2} est un PARABOLOÏDE. + y

graphique dans lequel les deux axes du système de coordonnées sont marqués en ÉCHELLE LOGARITHMIQUE. Ces tracés sont particulièrement utiles pour examiner les équations de la forme y = axn .

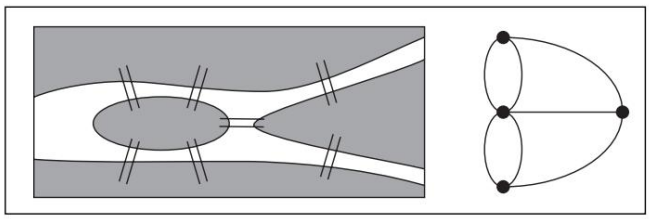
Un graphique en coordonnées polaires est un tracé d'une équation de la forme r = f(θ) donnée en COORDONNÉES POLAIRES. Le papier graphique à coordonnées polaires aide à tracer de tels graphiques.

Les graphiques d'autres types de relations numériques sont étudiés dans les statistiques descriptives.

Voir aussi CONCAVE HAUT/CONCAVE BAS ; COORDI NATES ; SOLUTION GRAPHIQUE ; HISTOIRE DES FONCTIONS (essai); AUGMENTATION/DIMINUTION ; MAXIMUM MINIMUM; STATISTIQUES : DESCRIPTIVES.

théorie des graphes L'étude mathématique des graphes s'appelle la théorie des graphes. Le domaine a été fondé en 1736 par le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783) avec sa solution au célèbre problème des sept ponts de Königsberg :

L'ancienne ville allemande de Königsberg (aujourd'hui la ville russe de Kaliningrad) a été construite sur les deux rives de la rivière Pregel et sur deux îles de la rivière. Les différentes parties de la ville étaient reliées par sept ponts. Un débat s'ensuivit parmi les habitants pour savoir s'il était possible de parcourir à pied une visite complète de la ville en traversant chaque pont exactement une fois. (Il n'était pas jugé nécessaire de retourner à son point de départ.) La plupart des gens estimaient que



Le problème des sept ponts de Königsberg

c'était impossible, mais pouvait-on prouver que c'était le cas ?

La perspicacité d'Euler pour résoudre le problème est venue en réduisant le plan de la ville à un GRAPHIQUE, c'est-à-dire un diagramme de points (sommets) et d'arêtes, chaque point représentant une masse terrestre et chaque arête un pont. Toute déambulation dans la ville correspond ainsi à un parcours sur les bords du graphe. Le problème du pont de Königsberg revient donc à se demander :

Est-il possible de dessiner le graphique ci-dessus sans lever le crayon de la page et sans tracer deux fois sur le même bord ?

Euler a pu résoudre le problème plus général de la classification de tous les graphes qui peuvent être ainsi tracés. Il a observé que, en traçant un tel chemin, toute arête dessinée entrant dans un sommet doit correspondre à une arête sortant de ce sommet. Ainsi, toutes les arêtes se rencontrant à chaque sommet sont appariées par paires à moins que l'on commence ou termine un voyage à un sommet particulier, auquel cas une arête reste inégalée. Ainsi, un graphe qui peut être ainsi tracé ne doit contenir que deux sommets de degré impair - ce seront le début et la fin du voyage; ou aucun sommet de degré impair - le chemin commence et se termine au même endroit. Tout graphique contenant plus de deux sommets de degré impair ne peut être tracé sans lever le crayon de la page. En particulier, les sept ponts du problème de Königsberg ne peuvent pas être résolus (les quatre sommets ont un degré impair).

Tout chemin qui trace à travers un graphe en suivant chaque arête précisément une fois est connu aujourd'hui sous le nom de chemin eulérien. Si le chemin commence et se termine au même sommet, on parle de circuit eulérien. Euler est allé plus loin pour montrer que tous les graphes connectés possédant précisément deux sommets de degré impair ont bien des chemins eulériens, et que les graphes dont tous les sommets sont de degré pair possèdent

Machine Translated by Google

Circuits eulériens. Si un graphe représente des voies de transport dans une ville ou à travers un pays, par exemple, la recherche de circuits eulériens pour le graphe peut avoir une utilité pratique importante.

En 1857, WILLIAM ROWAN HAMILTON a exploré la question de trouver des chemins à travers des graphes qui ne tracent pas nécessairement chaque arête, mais visitent à la place chaque sommet du graphe une fois, et une seule. Aujourd'hui, un tel chemin est appelé chemin hamiltonien, ou circuit hamiltonien s'il s'agit d'un chemin qui revient au sommet de départ. Bien que les mathématiciens aient développé des théorèmes qui donnent les conditions dans lesquelles les chemins hamiltoniens existeront, personne à ce jour ne connaît un algorithme simple qui nous permette de les trouver. Chaque graphique doit toujours être examiné individuellement, et trouver un chemin hamiltonien - s'il en existe un - est généralement une question de supposition inspirée.

Un comptage simple peut conduire à des résultats importants en théorie des graphes. Par exemple, la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe compte le nombre total d'extrémités d'arêtes. Comme chaque arête a deux extrémités, nous avons :

> Dans tout graphe, la somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

En particulier, la somme de tous les degrés des sommets doit être un nombre pair. Par conséquent, il ne peut y avoir un nombre impair de nombres impairs dans cette somme.

> Dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Ce résultat a une interprétation amusante. En considérant les arêtes d'un graphe comme des poignées de main entre des personnes, nous avons établi le soi-disant HANDSHAKE LEMMA :

> A tout instant, le nombre de personnes sur cette planète, vivantes ou décédées, qui ont participé à un nombre impair de poignées de main est pair.

Un POLYÈDRE peut être considéré comme un graphe dessiné sur une SPHÈRE—chaque coin du polyèdre est un sommet, et chaque arête de la figure est une arête du graphe. Si un polyèdre est constitué de seulement t faces triangulaires, alors 3t compte deux fois le nombre d'arêtes de la figure (chaque triangle a trois arêtes et chaque arête borde deux triangles). Ainsi 3t = 2e, où e est le nombre d'arêtes. Cela montre que t doit être un nombre pair. Nous avons:

> Il est impossible de couvrir une sphère avec un nombre impair de triangles.

Euler a également montré que pour tout graphe dessiné sur un plan ou une sphère (sans que les arêtes du graphe ne se croisent):

$$v - e + r = 2$$

où v est le nombre de sommets que possède le graphe, e son nombre d'arêtes et r le nombre de régions définies par le graphe, y compris la grande région « extérieure » si le graphe est dessiné sur un plan. C'est ce qu'on appelle la FORMULE D'EULER . Si le graphe est tracé à la place sur un TORUS, cette formule est modifiée pour lire : v – e + r = 0.

La théorie des graphes est une discipline sous étude continue intense. Ses nombreuses applications varient du purement théorique au très concret et pratique. Les problèmes de routage, les problèmes de flux d'informations et la conception de circuits électroniques, par exemple, peuvent tous être efficacement analysés et affinés grâce à l'étude de ce domaine.

Voir aussi CHEMIN/CIRCUIT EULÉRIEN ; HAMILTONIEN CHEMIN/CIRCUIT ; PROBLÈME DES TROIS UTILITÉS ; TOPOLOGIE ; TOURNOI; PROBLÈME VENDEUR VOYAGEUR .

plus grand diviseur commun (plus grand facteur commun, plus grand facteur commun) Le plus grand FACTEUR commun à un ensemble donné d'entiers est appelé le plus grand diviseur commun de ces entiers. Par exemple, les nombres 72, 120 et 180 ont en commun les facteurs 1, 2, 3, 4, 6 et 12, 12 étant le plus grand diviseur commun. On écrit pgcd(72, 120, 180) = 12.

On peut trouver le plus grand diviseur commun de deux entiers ou plus simplement en énumérant les facteurs de chaque entier et en identifiant le plus grand facteur qu'ils ont en commun. Alternativement, si les décompositions premières des nombres entiers sont connues, alors leur plus grand diviseur commun peut être déterminé comme le produit des nombres premiers qu'ils ont en commun. Par exemple, en notant que :

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$
$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

on voit que ces trois nombres partagent, comme facteurs premiers, deux 2 et un 3. Leur plus grand diviseur commun est donc pgcd (72,120,180) = 2 × 2 × 3 = 12. (Ce second

Machine Translated by Google

montre que tout facteur commun d'un ensemble donné d'entiers est un diviseur du plus grand facteur commun.)

L' ALGORITHME EUCLIDEEN peut être utilisé pour trouver le plus grand commun diviseur de deux entiers si l'un des ces méthodes est irréalisable. L'utilisation répétée du L'algorithme euclidien trouvera le plus grand point commun diviseur de plus de deux entiers.

L'algorithme d'Euclide montre également qu'il est toujours possible d'écrire le plus grand diviseur commun de deux entiers a et b comme une combinaison linéaire de a et b, c'est-à-dire qu'il est toujours possible de trouver des entiers x et y de sorte que :

$$pgcd(a,b) = ax + par$$

De même, le plus grand facteur commun de tout ensemble fini d'entiers a1 ,a2 ,…,an peut être exprimé comme une combinaison linéaire de la forme pgcd(a1 ,a2 ,…,an) = a1x1 + a2x2+ …+anxn . Dans notre exemple :

$$12 = pgcd(72, 120, 180)$$
$$= 72 \times (1) + 120 \times (1) + 180 \times (-1)$$

Voir aussi THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE ; PROBLÈME DE REMPLISSAGE DE CRUCHE ; RELATIVEMENT PREMIER.

Alphabet grec Pour honorer les mathématiciens de l'antiquité grecque, les mathématiciens d'aujourd'hui utilisent souvent les lettres de l'alphabet grec pour représenter des variables et symboles dans les équations. Généralement, les lettres minuscules sont utilisé pour représenter des variables (telles que des angles, COMPLEX CHIFFRES, et grandeurs étudiées en STATISTIQUES), et les lettres majuscules sont utilisées pour l'arithmétique standard et opérations statistiques. Les utilisations peuvent varier d'un auteur à auteur cependant.

Le tableau suivant répertorie les lettres du grec alphabet ainsi que les utilisations courantes de certains caractères.

Voir aussi MATHÉMATIQUES GRECQUES.

Supérieur inférieur	Prononciation du nom du cas			Utiliser
UN	α-alpha		AL-fuh	α : désigne souvent un angle
B	β	bêta	BAY-tuh	β : désigne souvent un angle
Γ	γ gamma		GAM-euh	γ : désigne souvent un angle Γ : le GAMMA FONCTION
Δ	δ	delta	DEL-tuh	δ : une petite quantité (EPSILON-DELTA DÉFINITION) Δ : indique le changement
E	ε	epsilon	EP-sil-on	ε : une petite quantité (EPSILON-DELTA DÉFINITION)
Z	ζ	zêta	ZAY-tuh	ζ : le ZETA FONCTION
H	η eta	thêta	AY-tuh	
Θ		θ	THAY-tuh	θ : désigne souvent un angle (POLAIRE COORDONNÉES)
je	ι	iota	eye-OH-tuh	ι : une petite quantité
K	κ kappa		KAP-euh	
Λ	λ lambda		LAM-duh	λ : longueur d'onde (en physique)
M μ mu			MYOO	μ : désigne « microns » ; Fonction Moebius
N	ν	nu	NYOO	ν : fréquence (la physique)
Ξ	ξ	xi	kuh-SEYE	
O	o	omicron	OM-ee-KRON	
Π	π	pi	TARTE	π : le rapport d'un cercle à son diamètre Π : produit (infini)
P	ρ	Rho	ROH	ρ : rayon d'une sphère (SPHÉRIQUE COORDONNÉES)
Σ	σ sigma		SIG-ma	σ : NORME DÉVIATION Σ : SOMMATION
T	τ	tau	TU	
Y	υ	upsilon	OOP-si-LON	
Φ	phi		FRAIS	: désigne souvent un angle (SPHÉRIQUE COORDONNÉES)
X	χ	chi	K-EYE	χ : TEST DU CHI CARRÉ
Ψ	ψ psi		SOUPIR	ψ : fonction d'onde (physique)
Ω ω	omega		oh-MAY-guh	ω : un nombre complexe ; la première transfini NOMBRE ORDINAL.

Mathématiques grecques Les anciens Grecs de ca. 600 BCE à ca. 480 CE a établi les normes actuelles de logique rigueur en mathématiques. Bien que de nombreuses cultures anciennes pratiqué et développé les mathématiques, ce sont les Grecs qui a développé l'art explicite de la « preuve » et a exploré la puissance du raisonnement déductif pur à son maximum.

Machine Translated by Google

Il convient de mentionner que lorsqu'ils parlent de «mathématiques grecques», les historiens incluent tout mathématicien qui a écrit en langue grecque et a suivi la tradition grecque de la pensée mathématique. Le grec était la langue commune du monde méditerranéen pendant les temps anciens, et de nombreux intellectuels de différentes parties de cette région sont aujourd'hui considérés comme des savants grecs. Par exemple, le grand Archimède était originaire de Syra cuse, qui fait maintenant partie de l'Italie, et EUCLIDE (vers 300-260 avant notre ère) aurait vécu à Alexandrie, en Égypte.

Il existe très peu de documents originaux d'œuvres grecques. Au départ, les connaissances se transmettaient uniquement oralement de maître à élève. Vers 450 avant notre ère, les Grecs ont adopté la pratique égyptienne ancienne d'écrire sur des rouleaux de papyrus. Malheureusement, le papyrus - une plante herbacée cultivée dans la région du delta du Nil - se décompose rapidement loin du climat exceptionnellement sec de l'Égypte. Les Grecs ont combattu ce problème en faisant à plusieurs reprises des copies de leurs œuvres mais, en raison de l'effort requis, ils n'ont copié que les pièces qu'ils jugeaient de la plus haute importance. Le premier ouvrage mathématique préservé et honoré de cette façon était le chef-d'œuvre d'Euclide LES ÉLÉMENTS de ca. 300 av. J.-C. Les historiens ont dû s'appuyer sur les commentaires d'érudits ultérieurs pour déduire ce qui avait été accompli mathématiquement avant l'époque d'Euclide.

Les érudits grecs ont abordé toutes les mathématiques à travers l'étude de la GÉOMÉTRIE. Même leurs travaux sur les propriétés des nombres entiers, des rapports et des proportions, ainsi que sur la mécanique et l'astronomie ont été réalisés dans un style géométrique. Un « nombre », par exemple, était littéralement un segment de ligne, et un « rapport » était compris en termes de segments COMMENSURABLES . Il est intéressant de noter que les savants grecs ont pris des mesures prudentes pour éviter de parler directement de l'infini. (Les paradoxes du cinquième siècle avant notre ère sur la nature du mouvement et l'infiniment petit développés par ZENO OF ELEA ont profondément affecté la pensée grecque.) Par exemple, Euclide a déclaré que n'importe quel segment de ligne pouvait être étendu à n'importe quelle longueur arbitraire, mais n'a jamais parlé de lignes. qui étaient infiniment longs. Dans LA PREUVE D'EUCLIDE DE L'INFINI DES PRIMES, Euclide a déclaré qu'à partir de n'importe quelle liste finie de nombres PREMIERS , on peut toujours en construire un de plus, mais n'a jamais parlé de l'ensemble des nombres premiers comme infini.

De nombreux historiens considèrent THALES DE MILETUS (ca. 625-547 BCE) comme le premier mathématicien grec de la note. Les commentaires suggèrent que Thales a identifié et prouvé sept propositions géométriques clés, dont que les angles à la base d'un TRIANGLE ISOCÈLE sont toujours égaux et que l'angle inscrit à partir du diamètre d'un CERCLE est toujours un angle droit, par exemple. Le grand érudit et mystique PYTHAGORE vécut un siècle plus tard, et lui et ses disciples sont crédités de la découverte du célèbre résultat sur les triangles rectangles (aujourd'hui appelé LE THÉORÈME DE PYTHAGORE) et de la découverte des NOMBRES IRRATIONNELS. Beaucoup de mystère entoure la vie et la légende de Pythagore.

Il a fondé une secte semi-religieuse appelée la Fraternité pythagoricienne (les femmes étaient des membres égaux) basée sur certaines significations mystiques attribuées aux nombres entiers et à leurs rapports.

Le grand philosophe PLATON (428-348 av. J.-C.) a beaucoup écrit sur les mathématiques dans ses célèbres dialogues, démontrant un profond respect personnel pour le sujet. Les cinq polyèdres réguliers - les SOLIDES PLATONIQUES - sont nommés en son honneur. Dans ses traités philosophiques, Platon a utilisé l'exemple des mathématiques comme quelque chose qui ne peut pas être découvert par les sens, mais peut néanmoins être découvert par le pouvoir du raisonnement logique. Il croyait également que les mathématiques étaient une partie essentielle de l'éducation d'une personne cultivée. Le philosophe ARISTOTE (384-322 avant notre ère) a adopté le même point de vue et a utilisé les mathématiques comme exemples dans son développement de la LOGIQUE FORMELLE et son analyse des ARGUMENTS.

Aujourd'hui, le savant grec Euclide est considéré comme le spécialiste des mathématiques le plus influent de tous les temps. Dans son célèbre ouvrage Les Éléments, Euclide a rassemblé toutes les connaissances mathématiques connues à son époque dans un seul tome. Bien qu'il s'agisse d'un exploit impressionnant, c'est l'organisation du texte qui a eu le plus grand impact. Commençant par une petite collection de « vérités évidentes », Euclide a montré que toute la connaissance mathématique de son temps pouvait être déduite par le seul raisonnement logique pur. Ce travail a démontré la puissance de l'esprit et a établi le modèle pour toutes les recherches mathématiques à l'avenir. Aujourd'hui, les mathématiciens travaillent toujours selon les normes de rigueur fixées par Euclide. Après la Bible, Les Éléments d'Euclide est le livre le plus largement publié de tous les temps.

Après avoir produit Les Éléments, Euclide a poursuivi ses travaux sur les SECTIONS CONIQUES, sur l'optique et sur les problèmes généraux de géométrie. Il a continué à s'intéresser aux nombres CONSTRUCTIBLES et a sans aucun doute envisagé le problème grec classique de la QUADRATURE DU CERCLE. (Dans Les Éléments , Euclide avait démontré des procédures générales pour élever au carré des figures polygonales arbitraires.)

Machine Translated by Google

défi, ainsi que les problèmes de TRISECTING AN ANGLE et DUPLIQUER LE CUBE, ont stimulé un grand beaucoup d'autres recherches importantes en mathématiques pour siècles à venir.

ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 av. J.-C.) résolu le problème de la quadrature de la parabole, ainsi que fait des progrès significatifs dans le calcul des aires et volumes de figures courbes et de solides. (Il a aussi "résolu" le problème de la quadrature du cercle en faisant utilisation de sa SPIRALE D'ARCHIMÈDE. Malheureusement, son méthode allait au-delà de l'utilisation d'une règle et boussole seule, et n'est donc pas une solution acceptable pour le problème d'origine.)

APOLLONIUS DE PERGE (vers 262-190 av. J.-C.) a poursuivi ses travaux sur les sections coniques et est reconnu pour avoir correctement défini une ELLIPSE, une HYPERBOLE et une PARABOLE. Vers la même époque, l'astronome grec Hipparque a écrit un tableau de "valeurs d'accords" (le équivalent à une table moderne de valeurs sinusoïdales), qu'il utilisé pour résoudre des problèmes astronomiques. Cela représentait le début du développement de la TRIGONOMÉTRIE en mathématiques grecques, mais a également marqué la fin d'une fervente développement mathématique dans la tradition grecque. Pour les cinq siècles qui ont suivi, de nouveaux développements se limitaient à de simples avancées en astronomie, trigonométrie et algèbre, avec seulement quelques exceptions notables.

Au deuxième siècle de notre ère, l'astronome grec CLAUDIUS PTOLEMY a corrigé et étendu la table d'Hip parchus et a clarifié les mathématiques qui sont utilisé pour produire un tel tableau. Il est aussi connu comme un des premiers érudits à tenter sérieusement de prouver le POSTULAT PARALLÈLE d'Euclide. Au troisième siècle, DIOPHANTE D' ALEXANDRIE a produit son célèbre texte Arithmetica (Arithmétique), dont l'étude des ÉQUATIONS DIOPHANTINES est née. Au milieu du IVe siècle, l'enthousiaste PAPPUS D' ALEX ANDRIA tenta de raviver l'intérêt pour les recherche mathématique de style grec. Il a produit son traité Synagoge (Collections) pour servir de commentaire et guide de toutes les oeuvres géométriques de son temps et y a inclus un nombre important de des résultats originaux, des extensions d'idées et des innovations changements de perspective. Malheureusement, il n'a pas réussi son objectif général. Après Pappus, il convient de noter HYPATIE D' ALEXANDRIE (370-415), la première femme être nommé dans l'histoire des mathématiques, crédité pour avoir écrit des commentaires perspicaces sur les œuvres de Apollonios et Diophante, et PROCLUS (ca. 410-485), qui est connu pour son commentaire détaillé sur le travail d'Euclide et sa propre tentative de prouver le postulat parallèle.

Le début du Ve siècle marque une nette fin à la tradition des mathématiques grecques.

Voir aussi ARCHYTAS DE TARENTE ; DÉDUCTIF/ RAISONNEMENT INDUCTIF; ÉRATOSTHÈNE DE CYRÈNE ; POSTULATS D'EUCLIDE ; ALGORITHME EUCLIDIEN EUCLI DEAN GEOMETRIE ; EUDOXE DE CNIDE ; HÉRON DE ALEXANDRIE ; HIPPASE DU MÉTAPONTE ; HIPPO CAISSES DE CHIOS ; HISTOIRE DES EQUATONS ET ALGE BRA ; MÉNÉLAS D' ALEXANDRIE ; THÉORÈMES DE PAPPUS ; THÉORÈME DE PTOLÉMÉE ; TRIPLES PYTHAGORIENS ; THÉO DORUS DE CYRÈNE ; LES PARADOXES DE ZÉNO .

Green, George (1793–1841) Né au calcul britannique en juillet 1793 (sa date de naissance exacte n'est pas connue) à Nottingham, Angleterre, on se souvient de George Green aujourd'hui pour son article influent de 1828 "Essay on the Application de l'analyse mathématique à la théorie de Électricité et magnétisme », dans lequel il développe le notion de "potentiel" et a prouvé un résultat mathématique fondamental aujourd'hui connu sous le nom de théorème de Green.

Green a quitté l'école à l'âge de neuf ans et a travaillé dans la boulangerie de son père pendant les 30 années suivantes. Les historiens font ne sais pas comment Green a développé une compréhension de mathématiques, ni comment il avait accès aux travaux en cours en le domaine, mais en 1828, il publia l'un des plus grands articles scientifiques de l'époque. En dehors de faisant progresser la compréhension mathématique de l'électromagnétisme, important pour les physiciens, Green a également établi une technique mathématique fondamentale pour calcul des INTÉGRALES DE CONTOUR et des INTÉGRALES DOUBLES. Le célèbre théorème qui porte son nom énonce que si une région R dans le plan xy est délimitée par une courbe C, et si les fonctions P(x,y) et Q(x,y) ont des DERIVES PARTIELLES, alors :

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Ce résultat apparaît dans tous les manuels de calcul multivariable d'aujourd'hui.

Après avoir lu la célèbre pièce de 1828, le mathématicien Sir Edward Bromhead invita Green à continuer

Machine Translated by Google

travaux dans le domaine de la physique mathématique, et sur six années suivantes, ils produisirent ensemble trois articles sur les thèmes de l'électricité et de l'hydrodynamique. Au conseil de Bromhead, Green entra à l'université de Cambridge en 1833, à l'âge de 40 ans, pour commencer un premier cycle licence en mathématiques. Green en a publié six autres documents après avoir terminé le programme. Il est mort en mai né le 31 décembre 1841 à Nottingham.

Gregory, David (1659–1708) Britannique Calcul, géométrie Né le 3 juin 1659 à Aberdeen, Écosse,
On se souvient de David Gregory pour ses écrits explicatifs. En 1684, il publie Exercitatio geometrya
(Exercices de géométrie), décrivant de nombreux résultats de JAMES GREGORY, son oncle, sur SERIES infinies. Il a aussi publié certains des résultats de SIR ISAAC NEWTON sur les mathématiques et l'astronomie, et il fut le premier à enseigner les théories newtoniennes « modernes » à Cambridge. En 1703, il publia la toute première collection complète de toutes les œuvres d'EUCLID .

Gregory a étudié au Marischal College, qui fait partie de la Université d'Aberdeen, et a accepté un poste de professeur de mathématiques à l'Université d'Édimbourg en 1683. Il a donné des conférences sur les thèmes des mathématiques, de la mécanique, et hydrostatique. En 1691, il fut élu professeur savilien à Oxford, la même année il fut nommé membre de la ROYAL SOCIETY de Londres.

En 1702, Grégoire publie Astronomiae physicae et geometryae elementa (Physique astronomique et éléments de géométrie), qui était un récit populaire de l'œuvre de Newton et, un an plus tard, son édition des œuvres complètes d'Euclide. Gregory a fortement soutenu Newton dans le débat pour savoir si c'était lui ou le mathématicien allemand GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, qui avait le premier découvert CALCULUS.

Gregory a également terminé son propre travail sur l'étude de séries et de travaux publiés sur le thème de l'optique. Il décédé le 10 octobre 1708 à Berkshire, en Angleterre.

Non noté comme un mathématicien exceptionnel, Gregory est surtout connu pour le rôle qu'il a joué dans conserver les papiers et enregistrer les communications verbales que lui a transmises son oncle James Gregory et par Sir Isaac Newton.

Gregory, James (1638–1675) Tournesol britannique né en novembre 1638 (la date exacte n'est pas connue), le mathématicien écossais James Gregory découvrit indépendamment ered et expliqué des concepts importants dans CALCULUS avant que le sujet ne soit plus tard pleinement développé par les fondateurs SIR ISAAC NEWTON et GOTTFREID WILHELM LEIBNIZ.

Gregory était au courant du THÉORÈME FONDAMENTAL DE CALCULUS, a été le premier à faire la distinction entre les SÉRIES convergentes et divergentes , et connaissait les SÉRIES DE TAYLOR. 40 ans avant que BROOK TAYLOR ne publie ses résultats. Dans mathématiques, on se souvient de lui, en particulier, pour la série qui porte son nom. En dehors des mathématiques, Gregory est surtout connu pour sa description théorique de un type révolutionnaire de télescope à réflexion.

Gregory a été scolarisé à la maison en mathématiques avant entreprend des études au Marischal College d'Aberdeen. Il étudia les mathématiques de l'optique et publia en 1661 un texte sur le sujet, Optica promota (Le progrès de l'optique), écrit dans un style purement mathématique. Partant de cinq postulats et de 37 définitions, Gregory a développé la théorie de la réflexion et réfraction de la lumière de manière systématique et rigoureuse, aboutissant à la description d'un nouveau principe de la construction d'un télescope.

En 1664, Grégoire se rendit en Italie pour séjourner au Université de Padoue pour s'intéresser aux mathématiques. Pendant ce temps, Gregory a développé les bases de « géométrie infinitésimale », dont il publia les détails sous le titre Geometriae pars universalis (The universal partie de la géométrie). Aujourd'hui, nous décrirons ce livre comme un traitement systématique des sujets en calcul.

Gregory a été le premier à discuter de la convergence et divergence de séries, travail qui le conduisit en 1671 à la découverte des développements en série des fonctions. Il s'est toutefois abstenu de publier ses découvertes, ayant entendu une rumeur selon laquelle Newton aurait peut-être déjà développé des résultats similaires. (En fait, Newton n'était pas conscient du théorème clé nécessaire pour mettre cette théorie sur une base solide et n'a donc pas pu développer la théorie.) Brook Taylor a découvert plus tard la même clé résultat et a publié sa description du sujet dans 1715.

Tout au long de sa courte vie, Gregory a maintenu une intérêt pour l'astronomie. Il est mort à l'âge de 36 ans à la fin Octobre 1675, peu de temps après avoir subi un accident vasculaire cérébral, il encourus lors de l'observation des lunes de Jupiter avec quelques étudiants. Gregory n'est pas devenu célèbre en tant que mathématicien au cours de sa vie. Ce n'est que rétrospectivement que les historiens réalisent aujourd'hui l'influence importante qu'il avait pour aider Newton à développer ses idées.

Voir aussi SÉRIE GREGORY.

Machine Translated by Google

Série Gregory (série de Leibniz) Nommée d'après le L'astronome et algébriste écossais JAMES GREGORY (1638–75), la SÉRIE MACLAURIN pour arctan(x) est parfois appelée la série Gregory :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Cette expression est valable pour –1 ≤ x ≤ 1. Placer x = 1 dans la formule donne ce qui suit remarquable pour mula pour PI :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Souvent, le nom "série Gregory" est utilisé pour signifier cela expression particulière.

Voir aussi FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES ; MADHAVA DE SANGAMAGRAMMA ; SÉRIE TAYLOR.

groupe La recherche en mathématiques pures est motivée par une question : qu'est-ce qui fait que les mathématiques fonctionnent comment ça marche? En identifiant les principes clés qui sous-tendent un type de système mathématique, qu'il s'agisse géométrie et symétrie, ou nombres et arithmétique— les mathématiciens établissent des liens entre des domaines disparates : des faits connus sur un système satisfaire un ensemble de principes de base se traduisent immédiatement par des faits analogues concernant un second système satisfaisant à des principes analogues. Par exemple, une étude de l'arithmétique montre que l'opération d'addition satisfait aux mêmes quatre principes de base que la multiplication. Ainsi tout fait connu sur l'addition est accompagné par un fait connu sur la multiplication (et ce résultat correspondant sur la multiplication par conséquent ne nécessite aucune nouvelle preuve.)

Motivés par les rouages de l'arithmétique, les mathématiciens définissent un groupe comme étant n'importe quel ensemble, souvent noté G, dont les éléments peuvent être combinés d'une manière qui imite l'addition ou la multiplication des entiers. Plus précisément, si nous désignons le résultat de la combinaison les éléments a et b de G par le symbole a*b, alors G est un groupe si les quatre axiomes suivants sont vérifiés :

1. Clôture : Pour tout a et b dans G, l'élément a*b est également membre de G.
2. Associativité : Pour tout a,b,c dans G on a : a*(b*c) = (abc.
3. Existence d'une identité : Il existe un élément e dans G de sorte que a*e = a = e*a pour tout a dans G.
4. Existence d'inverses : Pour tout a dans G il existe un élément b dans G tel que a*b = e et b*a = e.

Pour honorer le travail du chercheur norvégien NIELS HENRIK ABEL (1802-1829), les mathématiciens appellent G "Abélien" si un cinquième axiome est également valable :

5. Commutativité : Pour tout a et b dans G on a : a*b = b*a.

Ces axiomes capturent en effet les principes de fonctionnement derrière l'addition et la multiplication. Pour exemple, en interprétant "*" comme addition avec "e" comme nombre zéro, l'ensemble de tous les entiers satisfait les axiomes d'un groupe abélien. (Dans ce réglage, l'inverse d'un l'entier a est généralement noté –a.) L'ensemble de tous les nombres réels sans zéro forme un groupe abélien sous multiplication. Dans ce contexte, * est interprété comme le opération du produit, "e" est le nombre 1, et l'inverse d'un élément a est le nombre 1/a.

Un groupe peut être abstrait. Par exemple, l'ensemble de quatre éléments G = {e,a,b,c} est un groupe abélien sous une opération * donnée comme suit :

*	e	un avant JC
e	e	un avant JC
un	un	e cb
b	b	c ea
c	c	bébé

L'ensemble des éléments G = {1, –1, i, – i, j, – j, k, –k} avec l'opération de groupe *, donnée par multiplication en QUATER NIONS, est un exemple de groupe non abélien. L'ensemble de toutes les matrices inversibles 2 × 2 avec des entrées réelles est également un groupe non abélien sous l'opération de MATRIX multiplication.

LA THÉORIE DES GROUPES est l'étude de la structure générale des groupes et tous les résultats qui découlent des quatre (ou cinq) axiomes de base. Le sujet est incroyablement riche et de nombreux mathématiciens consacrent aujourd'hui l'intégralité de leurs recherches carrières au développement ultérieur de ce sujet.

La théorie des groupes a de profondes applications en physique et en science. Tout système physique possédant

Machine Translated by Google

une symétrie quelconque, par exemple, peut être analysée à l'aide des outils et des techniques de ce sujet. Par exemple, les six symétries d'un triangle équilatéral forment un groupe (non abélien) : il y a deux rotations, une rotation horaire et une rotation antihoraire de 60° ; trois réflexions, une autour de chaque hauteur du triangle ; et une opération d'identité correspondant à l'absence d'action du tout. En déclarant que l'opération "*" est l'effet de l'exécution d'une action suivie de l'autre, on peut vérifier que les quatre axiomes de groupe sont valables pour ce système. (Le cinquième axiome, cependant, ne tient pas, puisque l'exécution de la rotation suivie d'une réflexion, par exemple, donne un résultat différent de l'exécution de cette même réflexion suivie de la rotation.) L'analyse de la symétrie joue un rôle important dans cristallographie et mécanique quantique. Les chercheurs dans ces domaines considèrent la théorie des groupes comme un outil essentiel dans leurs travaux.

L'ensemble des symétries de tout POLY GON régulier à n côtés forme un groupe appelé le nième groupe dièdre. Il a 2n membres constitués de n rotations (y compris l'élément d'identité) et de n réflexions. L'ensemble des rotations en lui-même et pour lui-même forme un groupe de n éléments seulement.

Notez que n est un facteur de 2n. En général, tout sous-ensemble H d'un groupe G qui satisfait lui-même les quatre axiomes d'un groupe est appelé sous-groupe de G. Le mathématicien français JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) a prouvé que si H est un sous-groupe d'un groupe G, alors le nombre d'éléments dans H divise également le nombre d'éléments dans G. Ce résultat a des conséquences intéressantes lorsqu'il est appliqué à des systèmes de symétrie, ou à des groupes issus de l'étude de la THÉORIE DES NOMBRE et de l'ARITHMÉTIQUE MODULAIRE.

Voir aussi ALGEBRE ABSTRAITE ; CHAMP; GÉNÉRAL LIN GROUPE D'OREILLE ; HOMOMORPHISME ; ISOMORPHISME ; ANNEAU.

théorie des groupes L'étude générale des GROUPES et des résultats qui découlent des axiomes de base qui les définissent s'appelle la théorie des groupes. Bon nombre des principes clés de la théorie des groupes ont été identifiés pour la première fois par le mathématicien allemand CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) dans ses études sur la THÉORIE DES NOMBRE et l'ARITHMÉTIQUE MODULAIRE. Le développement d'une théorie des groupes en tant que sujet à part entière est cependant généralement attribué au jeune mathématicien français ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) ; qui a conçu les outils innovants nécessaires pour étudier en profondeur et dans une perspective abstraite les solutions aux équations algébriques.

En identifiant les principes abstraits qui font fonctionner l'algèbre et l'arithmétique comme ils le font, la théorie des groupes fournit un outil puissant pour analyser tout système mathématique qui satisfait les mêmes axiomes de base. L'application de la théorie des groupes aux symétries d'un système physique, par exemple, peut souvent avoir des conséquences importantes en physique.

Voir aussi ALGEBRE ABSTRAITE ; CHAMP; GROUPE; ANNEAU.

Machine Translated by Google

H

Hadamard, Jacques (1865–1963) Numéro français
Théorie, Analyse, Physique mathématique Né le 8 décembre 1865 à Versailles, France, Jacques Hadamard est connu comme l'un des deux mathématiciens qui prouvé indépendamment le célèbre NOMBRE PREMIER THEO REM conjecturé pour la première fois par le mathématicien allemand CARL FRIEDRICH GAUSS. Savant belge CHARLES-JEAN DE LA VALLÉE-POUSSIN fut le second mathématicien à prouver le résultat.

Hadamard a obtenu un doctorat en 1892 de l'École Normale Supérieure après avoir soutenu un mémoire sur les fonctions complexes et les TAYLOR SERIES. Le la même année, il a également terminé les travaux sur le Riemann ZETA FONCTION et l'hypothèse de Riemann, ce qui lui a valu le Grand Prix des Sciences Mathématiques de l'établissement. Hadamard s'est vite rendu compte également qu'avec la développements récents dans le domaine des fonctions complexes, toutes les pièces nécessaires étaient maintenant en place pour développer un preuve de la fameuse conjecture exceptionnelle des nombres premiers faite par Gauss. (Vallée-Poussin indépendamment fait la même constatation.) Hadamard a présenté son preuve du fameux résultat en 1896. Plus tard cette même année Hadamard est nommé professeur d'astronomie et mécanique rationnelle à l'Université de Bordeaux.

Tout au long de sa carrière, Hadamard a également apporté des contributions significatives au domaine de la théorie des matrices en identifiant une classe de matrices qui peuvent être utilisées dans COMBINATORICS pour créer des "conceptions de blocs" et avoir applications à la théorie des PROBABILITÉS . Il a également étudié la théorie de l'ESPACE VECTORIEL (définissant le terme fonctionnel pour une fonction linéaire sur un espace vectoriel) et a contribué à la étude de l'enseignement des mathématiques. Hadamard a écrit 300 articles scientifiques. En 1906, il est élu président de la Société Mathématique de France, et 3 ans plus tard nommé président du Collège de France. Il est resté dans ce poste pendant seulement 3 ans, avant d'accepter le poste de professeur d'analyse à l'École Polytechnique.
Il est élu à l'Académie des sciences de Paris en 1912.

Hadamard est décédé à Paris, France, le 17 octobre, 1963. Sa preuve du théorème des nombres premiers est considérée comme sa réalisation la plus remarquable.

demi-plan Le plan qui se trouve d'un côté d'un

droite s'appelle un demi-plan. Si les points sur la ligne elle-même sont considérés comme faisant partie de la région, alors on dit que les le demi-plan est "fermé". Un demi-plan "ouvert" exclut les points sur la ligne.

Si l'équation de la ligne donnée est ax + by = c, alors l'ensemble des points (x,y) qui satisfont ax + by > c forment un demi-plan ouvert d'un côté de la ligne, et ceux les points (x,y) vérifiant ax + par < c forment un demi-plan ouvert de l'autre côté. Si c est positif, alors cette seconde l'inégalité représente le demi-plan qui contient origine (on a a · 0 + b · 0 = 0 < c), et si c est négatif, alors la première inégalité contient l'origine. Si c est égal à zéro, il faut substituer des valeurs différentes pour x et y pour déterminer quelle inégalité représente quelle demi-plan. Les inégalités ax + par ≥ c et ax + par ≤ c représentent des demi-plans fermés.

Dans l'espace tridimensionnel, un demi-espace est le région de l'espace située d'un côté d'un plan. Le

Machine Translated by Google

le demi-espace peut être fermé ou ouvert selon que des points du plan doivent ou non être considérés comme faisant partie de cette région.

Théorème d'appariement de Hall (théorème du mariage de Hall)
En 1935, le mathématicien anglais Philip Hall a établi le résultat suivant, maintenant connu sous le nom de théorème d'appariement de Hall :

> Etant donnés n ensembles A1 , A2 , … , An ayant la propriété que l'union de n'importe quels k d'entre eux (1 ≤ k ≤ n) contient au moins k éléments distincts, il est toujours possible de sélectionner n objets distincts, un dans chaque ensemble.

La condition placée sur ces ensembles n'est pas triviale - certains ensembles peuvent être vides, ou le même élément peut apparaître dans plus d'un ensemble, par exemple.

Le théorème est certainement vrai pour le cas n = 1 : un seul ensemble satisfaisant la condition du théorème contient au moins un élément. Deux ensembles satisfaisant aux conditions du théorème contiennent ensemble au moins deux éléments distincts. Comme aucun ensemble ne peut être vide, un ensemble contient un élément et l'autre un autre élément distinct. Ainsi, le théorème est également vrai pour le cas n = 2. On peut construire une preuve générale du théorème en utilisant une preuve par INDUCTION.

La validité du théorème peut être démontrée avec un amusant jeu de solitaire : divisez un jeu de cartes mélangé en 13 piles de quatre cartes. Le défi consiste à sélectionner un as d'une pile, un deux d'une autre, un trois d'une troisième, jusqu'au roi d'une 13e pile.

Le théorème d'appariement de Hall garantit que ce jeu peut toujours être gagné, quelle que soit la façon dont les cartes sont mélangées. (Pensez à chaque pile comme un ensemble contenant un, deux, trois ou quatre éléments - les dénominations distinctes qui apparaissent dans cette pile. Parmi toutes k piles, il doit y avoir au moins k dénominations distinctes.)

Hall a donné une autre interprétation à son théorème (en expliquant le nom alternatif du résultat) :

> Supposons que n femmes listent chacune les noms des hommes qu'elles aimeraient épouser. Tant que n'importe quelles k femmes mentionnent au moins k noms distincts parmi elles, 1 ≤ k ≤ n, alors il est possible de faire des correspondances satisfaisantes pour toutes.

Voir aussi CARRÉ SEMI-MAGIQUE.

Problème d'arrêt En 1936, le théoricien de l'informatique Alan Turing s'est demandé s'il serait un jour possible d'écrire un programme informatique capable de lire n'importe quel autre programme et de déterminer si ce programme s'arrêtera ou fonctionnera indéfiniment (en tombant dans une infi boucle nie, par exemple). Cette question est depuis devenue connue sous le nom de problème d'arrêt. Turing a conclu qu'un tel programme ne pouvait pas exister. Il a raisonné via un ARGUMENT intelligent d' AUTO-RÉFÉRENCE :

> Supposons qu'il existe un programme HALT(P) capable de lire un programme informatique P et d'imprimer oui ou non selon que P s'arrêtera ou non. Considérons alors un autre programme, que nous appellerons TROUBLE, qui prend un programme P et fait ce qui suit :
>
> PROBLÈME (P) :
> Si ARRÊT(P) = "oui" alors effectuer une infinité boucle.
> Si ARRÊT(P) = "non", alors arrêt.
>
> Autrement dit, TROUBLE prend un programme P et entre dans une boucle infinie si P est un programme qui s'arrête, et il s'arrête si P est un programme qui ne s'arrête pas. Demandez maintenant : que fait TROUBLE (TROUBLE) ? Nous avons que TROUBLE s'arrête si TROUBLE ne s'arrête pas, et ne s'arrête pas s'il s'arrête ! Cette absurdité montre qu'aucun programme de ce type HALT(P) ne pourrait exister.

Il y a des difficultés techniques avec cet argument (il faut faire attention à bien distinguer les rôles d'un programme et l' entrée d'un programme, par exemple), mais Turing a pu surmonter ces inquiétudes et montrer que cet argument est fondamentalement valable.

Hamilton, Sir William Rowan (1805–1865) Algèbre irlandaise , théorie des graphes, théorie des nombres, physique mathématique Né le 4 août 1805 à Dublin, en Irlande, William Rowan est généralement considéré comme le plus grand mathématicien irlandais de tous les temps. On se souvient de lui pour son développement d'un système algébrique entièrement nouveau, les QUATERNIONS, qui, sept décennies plus tard, se sont avérés cruciaux pour le développement de la mécanique quantique et de la physique mathématique de la structure interne d'un atome.

Hamilton était un enfant prodige, maîtrisant 12 langues différentes à l'âge de 13 ans. Pendant l'adolescence,

Machine Translated by Google

il a lu les ouvrages d' EUCLIDE en grec original, les ouvrages de SIR ISAAC NEWTON en latin et les ouvrages de PIERRE-SIMON DE LAPLACE en français. Il trouva une erreur subtile dans le texte classique de Laplace, Mécanique céleste, et écrivit une lettre à l'astronome royal d'Irlande, John Brinkley, expliquant l'erreur et comment elle devait être corrigée. Brinkley a immédiatement reconnu le génie de Hamilton en tant que mathématicien montant et l'a publiquement surnommé le « premier mathématicien de son âge ».

Hamilton est entré au Trinity College à l'âge de 18 ans pour étudier l'optique et les mathématiques. Son travail original dans ces domaines en tant qu'étudiant de premier cycle, qui comprenait deux articles "Systems of Right Lines in a Plane" et "The ory of Systems of Rays", était considéré comme si important et innovant qu'il justifiait sa nomination immédiate en tant que professeur. d'astronomie au collège avant l'obtention de son diplôme de base.

Parallèlement à ses travaux en optique, Hamilton a apporté des contributions significatives au domaine de la THÉORIE DES GRAPHIQUES et à l'algèbre des NOMBRES COMPLEXES, publiant des résultats sur ce dernier sujet dans son article de 1837 "Essai préliminaire et élémentaire sur l'algèbre comme science du temps pur". .” En 1842, il releva le défi difficile d'essayer de créer un système algébrique pour l'espace tridimensionnel qui avait les mêmes propriétés algébriques que les nombres complexes dans l'espace bidimensionnel. [Un point (x,y) dans le plan peut être mis en correspondance avec le nombre complexe x + iy. Cela fournit ainsi un moyen de « multiplier » en deux points de l'espace : (x1 , y1) · (x2 , y2) = (x1x2 – y1y2 , x1y2 + x2y1).] Bien qu'il n'ait jamais pu trouver de solution à cette problème de la « multiplication des triplets », ses efforts l'ont conduit à la remarquable découverte d'un type différent de système de numération convenant à l'espace à quatre dimensions. Il a appelé ce système les quartnions et a trouvé des liens surprenants avec la physique mathématique. Il a notamment observé que chaque quaternion correspond naturellement à une transformation physique dans l'espace tridimensionnel et que la multiplication de deux quaternions correspond parfaitement à la composition des deux transformations physiques qu'ils représentent. Ainsi la géométrie de l'espace physique tridimensionnel peut être réduite à l'étude algébrique de l'algèbre des quater nions. Hamilton était convaincu que ses travaux révolutionneraient la physique mathématique. Bien qu'il ait des applications sur le terrain aujourd'hui, malheureusement, son travail n'a pas eu l'impact qu'il espérait.

Hamilton a reçu de nombreux prix tout au long de sa vie, notamment un titre de chevalier en 1835 et l'élection à l'Académie nationale des sciences aux États-Unis comme premier membre étranger. Il a écrit de la poésie pour se consoler tout au long de sa vie et a soutenu publiquement que le langage des mathématiques est tout aussi artistique que le langage exprimé par la poésie. Son ami proche, le poète William Wordsworth (1772–1834), n'était pas d'accord. Hamilton mourut près de Dublin le 2 septembre 1865.

Chemin/circuit hamiltonien Voir THÉORIE DES GRAPHIQUES.

théorème du jambon-sandwich Comme généralisation du THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES et le théorème des deux galettes qui en découle, les mathématiciens ont prouvé le résultat suivant, appelé théorème du sandwich au jambon :

> Étant donné trois objets quelconques assis dans un espace tridimensionnel, il existe un seul plan qui coupe simultanément le volume de chaque objet exactement en deux.

Par exemple, il y a un seul avion qui tranche simultanément la tour Eiffel, la planète Neptune et ce livre chacun précisément de moitié en volume. Le théorème tire son nom de l'interprétation suivante :

> Il est possible, en une seule coupe plane, de diviser chacun de deux morceaux de pain et une tranche de jambon en deux morceaux de volume égal. Ceci est possible quelle que soit la forme des morceaux d'aliments et quel que soit l'endroit dans l'espace où les trois aliments sont placés.

Le résultat se généralise aux dimensions supérieures :

> Étant donné n'importe quels objets N se trouvant dans un espace à N dimensions, il est toujours possible de trouver un « plan » de dimension (N – 1) qui coupe simultanément le « volume » de chaque objet en deux.

(Avec N = 2, c'est le théorème des deux crêpes.)

lemme de la poignée de main Ce résultat amusant indique qu'à tout instant, le nombre de personnes sur cette planète, vivantes ou décédées, qui ont participé à un nombre total impair de poignées de main est nécessairement pair. Ce lemme peut être démontré à l'aide de la THÉORIE DES GRAPHES.

Machine Translated by Google

Hardy, Godfrey Harold (1877–1947) Britannique Analyse, Théorie des nombres Né le 7 février 1877 à Cranleigh, Angleterre, éminent mathématicien Godfrey On se souvient de Hardy pour ses importantes contributions aux domaines de la THÉORIE DES NOMBRES, des inégalités, et l'étude de la FONCTION ZETA de Riemann et de l'hypothèse de Riemann. Hardy a également encouragé l'Indien mathématicien SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN à venu en Angleterre, et a collaboré avec lui pendant cinq années pour produire un certain nombre de résultats significatifs, la plupart notamment sur la théorie des PARTITIONS. En 1940 Hardy publié A Mathematician's Apology, qui reste, à ce jour, l'une des descriptions les plus vives et les plus éloquentes de la façon dont un mathématicien pense.

Hardy entre au Trinity College de Cambridge en 1896 poursuivre des études supérieures en mathématiques. Après avoir publié plusieurs articles sur le thème des INTEGRAL, SERIES, et sujets généraux d' ANALYSE, publiés par Hardy, en 1908, le manuel de premier cycle A Course of Pure Mathématiques, qui expliquaient, de manière rigoureuse, les les concepts de fonction, de LIMITE et les éléments d'analyse. Ces travaux furent très influents et auraient transformé toute la nature de l'enseignement universitaire.

En 1911, Hardy entame une collaboration de 35 ans avec le mathématicien anglais John Littlewood. (1885-1977), entraînant un changement d'orientation dans le domaine de la théorie des nombres. Ensemble, ils ont produit plus de 100 éditions conjointes. Ce travail s'est également bien lié avec les recherches que Hardy menait en 1914 avec Ramanujan, également sur des sujets de théorie des nombres.

Hardy a été reconnu comme une figure importante de mathématiques. En 1910, il est élu membre de la ROYAL SOCIETY de Londres, a reçu la Royal Medal de la Société en 1920, la médaille De Morgan de la Society en 1929, et la Sylvester Medal of the Society en 1940 pour ses travaux en mathématiques pures. Sept ans plus tard, il a reçu la médaille Copley du Society pour ses contributions au domaine de l'analyse.

Hardy est décédé à Cambridge, en Angleterre, le 1er décembre 1947. Il est généralement reconnu comme le leader anglais pur mathématicien de son temps. Son livre de 1932 The Theory of Numbers, coécrit avec EM Wright, est considéré comme un texte classique et est toujours utilisé par les étudiants diplômés. et les chercheurs dans le domaine de la théorie des nombres aujourd'hui.

fonction harmonique Une fonction définie à un niveau nombre d'emplacements est dit harmonique si la valeur de la fonction à n'importe quel endroit est égal à la moyenne des valeurs de la fonction à ses emplacements voisins. Pour exemple, si 10 élèves sont assis en cercle, alors leur « âge fonction » serait harmonique si l'âge d'un élève était égal à l'âge moyen de ses deux voisins. (Un peu de réflexion montre que cela n'est possible que si l'âge de chaque élève est le même. Une fonction harmonique pour des points disposés en cercle doit être constante.)

Les fonctions harmoniques jouent un rôle important dans la étude des MARCHES ALÉATOIRES et calcul des cotes aux jeux de hasard. Imaginez, par exemple, un joueur jouant à un simple jeu consistant à lancer une pièce pour gagner un dollar ou en perdre un dollar. Nous demandons : avec 3 $ en main, quelles sont ses chances de atteindre la barre des 10 $ avant de faire faillite ? Pour calculer ceci, soit P(N) la PROBABILITÉ d'atteindre le objectif commençant avec N dollars en main. Clairement P(0) = 0 et P(10) = 1. Nous souhaitons calculer P(3).

La clé est de noter que P(N) est une fonction harmonique sur ses 11 valeurs de zéro à 10. Cela s'ensuit parce que il y a des chances égales pour le joueur de perdre ou de gagner un dollar et donc au prochain jeu avec N - 1 ou N + 1 dollars en main. Par conséquent:

$$P(N) = \frac{P(N-1) + P(N+1)}{2}$$

et donc chaque quantité P(N) est bien la moyenne des valeurs qui le précèdent et lui succèdent. Certains ont pensé montre que les valeurs P(0) = 0 jusqu'à P(10) = 1 doivent être augmentant strictement par intervalles égaux d'un dixième. Le les valeurs P(N) sont donc $P(N) = \frac{N}{10}$. En particulier, $P(3) = \frac{3}{10}$, montrant qu'il n'y a que 30 pour cent de chances que le joueur atteindra son objectif avant de perdre tout son argent.

moyenne harmonique Voir MEAN.

séquence harmonique (progression harmonique) A SE 1– QUENCE de nombres de la forme $\frac{1}{a1}, \frac{1}{a2}, \frac{1}{a3}, \ldots$ avec entiers a1 ,a2 ,a3 ,… formant une SEQUENCE ARITHMETIQUE s'appelle une séquence harmonique. Les nombres a1 ,a2 ,a3 ,… ont une différence constante entre eux. Par exemple, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ est une séquence harmonique, comme l'est $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \ldots$ et $\frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{75}, \frac{1}{100}, \ldots$ Le mot harmonique est

Machine Translated by Google

utilisé parce que la nième harmonique produite par une corde de violon est la tonalité produite par la corde qui est 1/n fois plus longue.

La SÉRIE correspondante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ car toute séquence harmonique diverge nécessairement. Dans l'étude des SÉRIES CONVERGENTES, le test de comparaison montre que ce doit être le cas. (Comparer une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{}{1+n\,dn}$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, dont nous savons qu'elles divergent.)

Voir aussi SÉRIE HARMONIQUE.

série harmonique La somme infinie particulière $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ s'appelle la SÉRIE harmonique. Le

L'harmonique de 5 mots est utilisée parce que la nième harmonique produite par une corde de violon est la tonalité produite par la corde qui est 1/n fois plus longue.

Même si les termes de cette série approchent de zéro, la série ne se résume pas à une valeur finie. Cela peut être vu en regroupant les termes de la série en sections de longueur deux, quatre, huit, 16, etc., et en faisant une simple comparaison :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{33} + \cdots\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

$$= \infty$$

Le fait que la série diverge signifie que la sommation d'un nombre suffisant de termes initiaux de la série produira des réponses arbitrairement grandes (bien que cela puisse prendre un grand nombre de termes pour le faire). Par exemple, la somme des quatre premiers termes produit une réponse supérieure à 2, les 11 premiers termes une réponse supérieure à 3, les 13 671 premiers termes une réponse supérieure à 10 et le premier 1,53 × 1043 termes une réponse supérieure à 100. Il est clair que la série diverge très lentement vers l'infini.

En 1734, LEONHARD EULER montra que, pour de grandes valeurs de n, la nième SOMME PARTIELLE de la série harmonique peut être bien approchée par un LOGARITHME :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln(n) + \gamma$$

où γ ≈ 0,577 est une constante (appelée CON STANTE D'EULER) et l'erreur dans cette approximation n'est pas supérieure à 1/n. (Remarquez que ln(n) + γ→∞ lorsque n croît. Cela montre à nouveau que la série diverge.)

Les sommes partielles de la série harmonique sont appelées les nombres harmoniques et sont notées Hn . Les 10 premiers numéros harmoniques sont :

$$H_1 = 1;$$

$$H_2 = \frac{3}{2}; \quad H_3 = \frac{11}{6}; \quad \frac{11}{6}$$

$$H_4 = \frac{25}{12}; \quad H_5 = \frac{137}{60}; \quad \frac{49}{20}; \quad \frac{363}{140}$$

$$H_6 = \frac{761}{280}; \quad H_7 = \frac{7129}{2520}; \quad \frac{7381}{2520}$$

On peut utiliser un argument d'induction pour montrer que si $2^k \le n < 2^{k+1}$, alors le dénominateur de Hn (écrit sous forme réduite) est un multiple de 2^k . Par conséquent, aucun dénominateur (sauf le premier) ne peut valoir 1. Cela prouve :

> Aucun nombre harmonique autre que le premier n'est un nombre entier.

La divergence de la série harmonique résout l'amusant problème de l'élastique :

> Une fourmi infiniment petite commence à une extrémité d'un élastique de 1 pied de long et rampe sur une distance de 1 pouce vers l'autre extrémité. Il s'arrête ensuite et la bande est étirée de 1 pied de plus (jusqu'à une longueur totale de 2 pieds), emportant la fourmi avec elle jusqu'au 2 pouces. position. La fourmi rampe ensuite sur un autre pouce, jusqu'aux 3 pouces. position, et fait une pause pendant que la bande est étirée d'un pied de plus. Ce processus de marche d'un pouce et de pause pendant que le groupe étire un pied se poursuit indéfiniment. (Nous supposons que l'élastique est infiniment élastique.) La fourmi arrivera-t-elle un jour au bout de l'élastique

Machine Translated by Google

A noter que dans la première étape du trajet, la fourmi couvre 1/12ème de la longueur de la bande, et que cette proportion reste la même tant que la bande est étirée.
Pendant la deuxième étape du voyage, la fourmi ne couvre plus que 1/24e de la longueur de la bande (1 pouce sur 24 pouces), 1/36e de la longueur pendant la troisième longueur, et ainsi de suite. Ainsi après n étapes du parcours, la fourmi fraction $\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{H_n}{12}$ de la bande. Le parcourt le et n'atteint l'arrivée que si jamais Hn dépasse la valeur 12. Comme la série harmonique diverge, cela doit bien être le cas.

Bien que la série harmonique diverge, le test ALTER NATING SERIES issu de l'étude des CONVERGENT SERIES montre que la série harmonique alternée, donnée par

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots\quad 1-\frac{1}{5}\quad\frac{1}{6}$$

converge. Nous pouvons utiliser la formule d'approximation d'Euler pour trouver sa valeur. Première remarque :

$$S=-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2n}\right)$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{n}\right)$$

$$=\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n-\frac{1}{2}\ln(n)-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\varepsilon_n$$

$$=\ln 2+\text{erreur}$$

où l'erreur n'est pas supérieure à 2/n et converge donc vers zéro à mesure que n augmente. Par conséquent, les sommes paires partielles des séries se rapprochent de la valeur ln(2). La somme d'un nombre impair de termes est égal $S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}=S_{2n}-\frac{1}{2n+1}$ et ainsi de suite $S_{2n}=\ln 2+\text{erreur}+\frac{1}{2n+1}$ lorsque n devient grand. Ainsi n tend vers ln2 lorsque

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots=\ln(2)$$

Cet exemple est souvent utilisé pour illustrer la différence entre CONVERGENCE conditionnelle et ABSOLUE d'une série. Dans ce cadre, il peut également être utilisé pour fournir une "preuve" amusante que 1 est égal à 2.

Voir aussi EXPANSION DE MERCATOR .

hélice Une courbe en forme de spirale située dans un espace tridimensionnel s'appelle une hélice. Le nom est le mot grec pour une "spirale" ou une "torsion".

Une hélice cylindrique repose sur un cylindre et coupe à travers des lignes droites tracées sur la longueur du cylindre à un angle constant α. Un escalier en colimaçon et le filetage d'une vis droite sont des exemples d'hélices cylindriques. Une hélice conique est une courbe en spirale sur un CONE, et une hélice sphérique est une spirale sur une SPHÈRE qui coupe les lignes de longitude à un angle constant.

Une hélice cylindrique a des ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES : x = a coût, y = a sint, et z = bt, où a et b sont des constantes, et t est le paramètre. Une hélice conique est donnée par : x = aet cost, y = aet sint, et z = e

Heron of Alexandria (ca.10–75 CE) Greek Geome try, Number theory, Physics, Engineering Parfois appelé Hero, Heron of Alexandria est connu en mathématiques pour son texte en trois volumes Metrica, redis couvert en 1896. Le travail discute et développe en détail les principes de la géométrie, du nombre et de l'approximation numérique. Il contient également la plus ancienne preuve connue de la célèbre formule qui porte le nom de Heron. En dehors des mathématiques, Heron est surtout connu pour ses contributions à la mécanique et à la mécanique des fluides.

Démontrant un large éventail d'intérêts scientifiques, Heron a écrit des études sur l'optique, la pneumatique (l'étude et l'utilisation des pressions de gaz et de fluides), l'astronomie, les techniques d'arpentage et la géométrie plane et solide, mais c'est le travail présenté dans Metrica qui prouve son le génie comme intellect mathématique. Le livre I de cette célèbre pièce calcule les aires des triangles, des quadrilatères et des polygones réguliers, ainsi que les aires des cônes, des prismes, des sphères et d'autres formes tridimensionnel Sa célèbre formule pour l'aire d'un triangle uniquement en termes de longueurs de ses côtés est présentée dans cette section, ainsi qu'une méthode générale pour calculer la racine carrée d'un nombre avec n'importe quel degré de précision prescrit. (Cette procédure est aujourd'hui appelée MÉTHODE DE HERON .

Le livre II de Metrica dérive des formules pour le volume de chaque SOLIDE PLATONIQUE, ainsi que les volumes des cônes et des segments sphériques, et le livre III étend l'étude d'EUCLIDE sur la division géométrique. Heron présente également une méthode pour déterminer la racine cubique d'un nombre dans ce troisième volume.

Heron a également écrit un certain nombre de traités importants sur la mécanique, dont beaucoup survivent aujourd'hui. Son texte Pneumatica représente une attention (mais, par endroits, inexacte

Machine Translated by Google

taux) étude de la pression dans les fluides, ainsi qu'une description d'une collection de gadgets et de jouets illustrant des principes scientifiques spécifiques. Il décrit également les conceptions de plus de 100 machines pratiques, y compris des poulies et des ascenseurs pneumatiques, des orgues à vent, des machines à pièces, des camions de pompiers et des moteurs à vapeur qui fonctionnent de manière similaire au moteur à réaction d'aujourd'hui.

Certains textes de Heron ont l'apparence de brouillons de notes de cours, ce qui conduit certains historiens à soupçonner qu'il a peut-être enseigné au célèbre musée d'Alexandrie.
On sait peu de choses sur la vie de Heron.

La formule du héron (formule du héros) Dans son ouvrage Metrica, le HÉRON D' ALEXANDRIE (environ 100 CE) a présenté une formule pour la SURFACE d'un TRIANGLE uniquement en termes de longueurs latérales du triangle. Aujourd'hui connue sous le nom de formule de Heron, elle se lit comme suit :

$$\text{zone} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

où a, b et c sont les côtés du triangle, et s = (a + b + c) est son « demi-périmètre ». La formule est un cas particulier de la FORMULE DE BRAHMAGUPTA , découverte 500 ans plus tard.

La formule de Heron peut être prouvée comme suit : si θ est l'angle entre les côtés de longueur a et b, alors l'aire du triangle est donnée par aire = $\frac{1}{2}$ ab sin(θ). La LOI DE COSINES affirme que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$. Résoudre sin(θ) et cos(θ), et substituer dans l'identité standard de la TRIGONOMÉTRIE, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, donne, après quelques travaux algébriques, le résultat de Heron.

Voir aussi FORMULE DE BRETSCHNEIDER ; MÉDIANE D'A TRIANGLE; QUADRILATÈRE; TRIANGLE.

Méthode de Héron (méthode de Hero) Dans le livre I de son volume Metrica, HÉRON D' ALEXANDRIE donne une méthode pour approximer la RACINE CARRÉE d'un nombre. Cela fonctionne comme suit :

> Estimez la valeur de la racine carrée. Divisez cette supposition par le nombre considéré et prenez la moyenne du résultat et de l'estimation initiale. Cela produira une meilleure approximation de la racine carrée.
>
> L'application répétée de cette méthode produit une estimation à tout degré désiré de précision.

En symboles, Heron affirme que si x se rapproche la racine carrée d'un nombre N, alors $\frac{x + \frac{N}{x}}{2}$ est un meilleur approximation. Par exemple, en prenant 3 comme approximation à la racine carrée de 10, on obtient $\frac{3 + \frac{10}{3}}{2} \approx 3.1667$ comme estimation améliorée. Répéter la procédure donne $\frac{3.1667 + \frac{10}{3.1667}}{2} \approx 3.1623$ comme une approximation encore meilleure tion. (En fait, $\sqrt{10} \approx 3{,}16227766$.)

Pour montrer pourquoi cette méthode fonctionne, considérons $y = \frac{x + \frac{N}{x}}{2}$. Alors $y - \sqrt{N} = \frac{1}{2}\left(x - 2\sqrt{N} + \frac{N}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{N}\right)^2$, ce qui montre que si le erreur $x - \sqrt{N}$ est petite, alors l'erreur $y - \sqrt{N}$ sera encore plus petite. (Nous supposons ici que x est une valeur supérieure à 1.)

Cette méthode était connue des Babyloniens de 2000 avant notre ère. Elle est également équivalente à la MÉTHODE DE NEWTON lorsqu'elle est appliquée à la fonction $f(x) = x^2 - N$.

Voir aussi MATHÉMATIQUES BABYLONIENNES.

dérivée supérieure Prendre la DÉRIVÉE de la même fonction plus d'une fois, si cela est permis, produit les dérivées supérieures de cette fonction. Les première, deuxième et troisième dérivées d'une fonction f(x) sont notées respectivement f′(x), f″(x) et f‴(x), et pour n ≥ 4, la nième dérivée est $f^{(n)}(x)$. Par exemple, la troisième dérivée de $f(x) = x^4 + \sin x$ est f‴(x) = 24x – cos x. Cette notation de la dérivée répétée est due à JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813). GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), coinventeur de CALCULUS, a utilisé le notation $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ pour les dérivées supérieures, et le mathématicien français Louis Arbogast (1759–1803) a écrit $D^n f(x)$. Les trois systèmes de notation sont utilisés aujourd'hui.

Hilbert, David (1862–1943) Allemand Logique formelle, Géométrie, Physique mathématique, Théorie algébrique des nombres Né le 23 janvier 1862 à Königsberg, Prusse (aujourd'hui Kaliningrad, Russie), le mathématicien David Hilbert est connu comme l'un des pères fondateurs de Mathématiques du XXe siècle. En 1899, Hibert

Machine Translated by Google

publie ses célèbres Grundlagen der Geometrie (Fondements de la géométrie), dans lequel il a fourni une base axiomatique complètement rigoureuse du sujet clarifiant les hypothèses cachées qu'EUCLID avait fait dans son développement du sujet deux mille ans plus tôt. De plus, Hilbert a avancé le sujet de LOGIQUE FORMELLE et a utilisé ses résultats pour prouver que son l'approche de la géométrie est COHÉRENTE étant donné que la l'arithmétique des nombres réels est exempte de contradictions. En 1900, Hilbert posa 23 problèmes aux mathématiciens du 20e siècle qu'il estimait devoir cœur de la recherche mathématique vitale. Deux de ses problèmes ont été résolus presque immédiatement, mais les 21 défis restants ont effectivement stimulé d'importants pensée mathématique. Beaucoup de ses défis sont encore non résolu aujourd'hui. Hilbert a aussi beaucoup influencé le développement de la théorie quantique en théorie physique : sa notion d'« espace de Hilbert » a fourni la le bon cadre conceptuel pour le sujet. Hilbert a également apporté d'importantes contributions aux domaines de la relativité restreinte et de la relativité générale.

Hilbert a obtenu un doctorat en mathématiques de l'Université de Königsberg en 1885 après avoir écrit un thèse en ALGEBRE ABSTRAITE. Il a été nommé à un poste de professeur à l'université, où il est resté pendant 10 ans avant d'accepter le poste de président de mathématiques à l'Université de Göttingen en 1895. Hilbert a enseigné et travaillé à Göttingen pendant reste de sa carrière.

Son texte de 1897 Zahlbericht (Théorie des nombres) était saluée comme une brillante synthèse de la pensée actuelle en la théorie algébrique des nombres, et les résultats originaux qu'elle contenait ont été reconnus comme exceptionnels. chez Hilbert capacités à saisir les subtilités d'une théorie mathématique sophistiquée, à développer des idées pénétrantes et à fournir de nouvelles perspectives innovantes et stimulantes sur un sujet étaient évidents. Tout au long de sa carrière, Hilbert travaillé sur une grande variété de sujets disparates, faisant contributions révolutionnaires à chacun avant de passer à la suivante. Il a publié son célèbre ouvrage sur GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE en 1899.

En 1900, Hilbert fut invité à s'adresser à Paris Réunion du Congrès international des mathématiciens. Au cours de son discours, il a détaillé 10 mathématiques problèmes qu'il jugeait d'une grande importance. (Il élargi la liste à 23 problèmes lorsqu'il a publié son adresse.) Ces problèmes incluent le CONTINUUM HYPOTHÈSE, CONJECTURE DE GOLDBACH , une recherche de l'axiomatisation de la physique, et la recherche d'un algorithme général de résolution des ÉQUATIONS DIOPHANTINES. Des progrès importants, et dans de nombreux cas, complets solution, a été faite sur tous les défis posés sauf une, l'hypothèse dite de Riemann, qui demande les emplacements des racines de la ZETA FONCTION. Cela reste peut-être le plus célèbre problème non résolu d'aujourd'hui.

Plus tard dans la vie, Hilbert a travaillé sur la logique formelle et sur les fondements de la physique théorique. Entre 1934 et en 1939, il publie deux volumes de Grundlagen der Mathematik (Fondements des mathématiques), coécrit avec Paul Bernays (1888-1977), destinés développer une preuve de la cohérence des mathématiques. (Les théorèmes d'incomplétude de GÖDEL ont montré, cependant, qu'un tel but est inaccessible.) Son développement de l'analyse fonctionnelle a fourni le cadre mathématique correct pour la théorie de la mécanique quantique.

Hilbert a reçu de nombreux honneurs tout au long de sa carrière, y compris une citation spéciale du Hongrois Académie des sciences en 1905. À sa retraite en 1929, la ville de Göttingen donne son nom à une rue, et la ville de Königsberg, sa ville natale, l'a déclaré un citoyen d'honneur. Il est décédé à Göttingen en février 14, 1943. On se souvient de lui pour avoir façonné la nature même de la recherche du XXe siècle en mathématiques pures.

L'hôtel infini de Hilbert (paradoxe de Hilbert) Allemand le mathématicien DAVID HILBERT (1862-1943) a observé que les études de l'infini peuvent souvent conduire à des conclusions non intuitives et surprenantes. Son célèbre paradoxe de l'hôtel infini illustre certaines de ses idées :

> Imaginez un hôtel avec un nombre infini de pièces. Supposons que chaque pièce soit occupée. Est-ce possible pour l'hôtel d'accueillir un plus d'invité?

Si les chambres sont numérotées 1, 2, 3, etc., Hilbert a précisé que, malgré les inconvénients, chaque client existant peut être déplacé de la chambre n à la chambre n + 1, laissant ainsi la chambre 1 libre pour un retardataire. Il y a en effet chambre pour un autre invité unique. On peut aller plus loin : supposons un bus touristique, avec un nombre infini de touristes à bord, arrive à l'hôtel. Déplacer chacun client de l'hôtel de la chambre n à la chambre 2n, à la place, laisse tout les chambres impaires vacantes pour le nombre infini de nouveaux arrivants.

Machine Translated by Google

Si un nombre infini de bus touristiques, contenant chacun un nombre infini de touristes, arrivent en même temps, on peut encore trouver de la place pour accueillir la multitude de nouveaux invités :

Déplacez tous les clients de l'hôtel existants vers les chambres paires.

Placez les touristes du premier bus dans les salles données par les puissances de 3 : 3, 9, 27,…

Placez les touristes du second bus dans les salles données par les puissances de 5 : 5, 25, 125,…

Utilisez ensuite toutes les pièces numérotées par les puissances de 7, de 11, de 13, et ainsi de suite, le long de la liste de tous les nombres PRIME . Comme, selon la PREUVE D'EUCLIDE DE L'INFINITUDE DES PRIMES, il y a une infinité de nombres premiers, et il n'y a pas deux puissances de nombres premiers différents identiques, ce schéma d'allocation fait l'affaire.

Voir aussi CARDINALITE ; THÉORÈME FONDAMENTAL DE ARITHMÉTIQUE; INFINI; PARADOXE; TRISTRAM SHANDY PARADOXE.

Chiffres hindous-arabes Le système de numération que nous utilisons aujourd'hui s'appelle le système de numération hindou-arabe. À l'aide d'un SYSTÈME DE PLACE-VALEUR en base 10 , les nombres sont exprimés par des combinaisons des symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, organisés de manière à représenter des groupements de puissances de 10. Par exemple, le nombre 574 représente les cinq groupes de 100, sept groupes de 10 et quatre unités simples.

Ce système numérique est originaire de l'Inde vers 600 EC, presque exactement sous la même forme que nous l'utilisons aujourd'hui. Le système a été transmis aux Arabes deux siècles plus tard alors qu'ils travaillaient à traduire les ouvrages sans skrit sur l'astronomie en arabe. Le mathématicien arabe MUHAMMAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı (environ 800) a écrit un traité influent décrivant le système numérique hindou et l'a utilisé dans son célèbre livre Hisab al-jabr w'al-muq¯ abala (Calcul par restauration et réduction), dont le titre dérive le mot moderne algèbre . Lorsque les érudits occidentaux ont commencé à traduire les textes arabes en latin, le mot du système de numération efficace s'est répandu dans toute l'Europe occidentale. L'érudit italien FIBONACCI (vers 1170-1250) a vivement promu leur utilisation. À la fin du XVIIe siècle, le système numérique hindou-arabe a complètement remplacé le système lourd de CHIFFRES ROMAINS qui ont été la norme en Europe pendant plus de 1 500 ans.

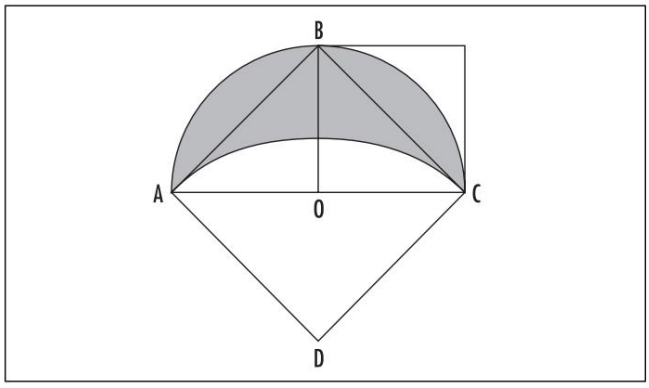
Voir aussi BASE D'UN SYSTÈME NUMÉRIQUE ; RÉP DÉCIMALE RÉSENTATION ; NOMBRE; ZÉRO.

Hippase de Métaponte Voir PYTHAGORE.

Hippocrate de Chios (env. 470–410 av. J.-C.) Géométrie grecque Né à Khíos (Chios), en Grèce, Hippocrates est connu comme le premier mathématicien à avoir trouvé l'aire d'une figure courbe, à savoir celle d'une LUNE. Il a également fait les premiers pas vers une analyse correcte du problème de la QUADRATURE DU CERCLE.

On sait très peu de choses sur la vie d'Hippocrate. On pense qu'Hippocrate a peut-être d'abord travaillé comme marchand avant de développer un intérêt et un talent pour la géométrie plus tard dans sa vie. Bien qu'il n'ait écrit qu'un seul texte sur le sujet (malheureusement perdu pour nous aujourd'hui), de nombreux chercheurs à travers l'histoire se sont référés à son travail dans leurs propres études.

Hippocrate s'est intéressé au fameux problème de la quadrature du cercle, c'est-à-dire trouver une méthode pour construire un carré de même aire qu'un cercle donné. Bien qu'il n'ait pas été en mesure de résoudre ce problème, il a réussi à montrer que, dans de nombreux cas, il est possible de « carrer une lune ». Par exemple, dans le diagramme ci-dessous, la figure ABCD est un carré, et la région ombrée est la lune formée par un arc de cercle de centre D et un deuxième arc de cercle de centre O, le centre du carré. Hippocrate, utilisant un raisonnement géométrique, a montré que l'aire de la lune correspond à l'aire du plus petit carré illustré.



Lune d'Hippocrate

Machine Translated by Google

(On peut vérifier cela algébriquement en étiquetant le rayon du plus grand arc de cercle r et en calculant la longueur du côté du grand carré, l'aire du secteur DAC, l'aire du demi-cercle ABC et par conséquent l'aire de la lune.)

En appliquant ce type d'analyse à un certain nombre de lunes différentes, Hippocrate a réussi à prouver que le rapport des aires de deux cercles différents est le même que le rapport de leurs rayons au carré. Ce nouveau résultat est une réalisation importante. Certains historiens pensent qu'Euclide s'est peut-être inspiré des travaux d'Hippocrate lorsqu'il a décrit et prouvé ce résultat dans son célèbre texte LES ÉLÉMENTS.

histogramme Voir DISTRIBUTION ; STATISTIQUES : DESCRIPTIVES.

homogène Un POLYNÔME en plusieurs variables p(x,y,z,…) est dit homogène si tous les termes du polynôme ont le même degré total. Par exemple, chaque terme du polynôme $x^3 + 5y^2z - xy2$ a un degré total trois et représente donc un polynôme homogène.

Plus généralement, une fonction de plusieurs variables f(x,y,z,…) est homogène s'il existe un entier naturel n tel que la relation suivante soit vraie pour toute constante k non nulle :

$$f(kx,ky,kz,\ldots) = k^n f(x,y,z,\ldots)$$

Par exemple, la fonction $2x - \text{péché}\left(\frac{xy+}{y}\right)\cos(\,) + xy\frac{\text{ans}^2}{2x-}$ est homogène.

L'identification de fonctions homogènes peut être utile pour résoudre des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Toute formule qui représente la MOYENNE d'un ensemble de nombres doit être homogène.

En physique, le terme homogène décrit une substance ou un objet dont les propriétés ne varient pas avec la position. Par exemple, un objet de densité uniforme est parfois qualifié d'homogène. En cuisine, lors du crémage du beurre et du sucre par exemple, on cherche à obtenir un mélange homogène.

homomorphisme Une application f entre deux ensembles S et T, chacun équipé d'une sorte de structure algébrique, est appelée un homomorphisme (grec, homos, "même" ; morphé, "forme" ou "forme") s'il préserve les relations algébriques au sein des ensembles. Par exemple, si l'opération algébrique est « multiplication » dans l'ensemble S et « addition » dans l'ensemble T, et si z est le produit de deux éléments de S, $z = x \times y$, alors f(z) doit correspondent à la somme des deux éléments correspondants dans T :

$$f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

La fonction LOGARITHME , par exemple, est un homomorphisme de l'ensemble des nombres réels positifs sous multiplication à l'ensemble de tous les nombres réels sous addition.

Si f est la fonction de doublement, f(x) = 2x, sur les nombres réels, alors f est un homomorphisme sous addition, mais pas sous multiplication :

$$f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)\ f(x \times y) = 2 \times x \times y \neq f(x) \times f(y)$$

L'application au carré $f(x) = x^2$ conserve la multiplication mais pas addition.

Une application entre deux GROUPES est appelée un homomorphisme si elle préserve les opérations algébriques des groupes. Une application f : S → T entre deux RING est appelée un homomorphisme si elle conserve à la fois les additions et les multiplications du système :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)\ f(x \times y) = f(x) \times f(y)$$

pour tous les éléments x et y de l'anneau S.

Voir aussi ISOMORPHISME.

Hypatie d'Alexandrie (env. 370–415 CE) Philosophie grecque , Commentaire Née vers 370 à Alexandrie, en Égypte, on se souvient d'Hypatie comme de la première femme de l'histoire des mathématiques à avoir apporté des contributions significatives dans le domaine, à la fois en tant qu'érudite et en tant que professeur.
Elle était la fille du mathématicien et astronome Théon d'Alexandrie. Hypatie a écrit des commentaires influents sur le travail de son père et aussi sur le travail d' APOLLONIUS DE PERGE (ca. 263–190 BCE) et DIO PHANTUS D' ALEXANDRIE (ca. 200–284 CE).

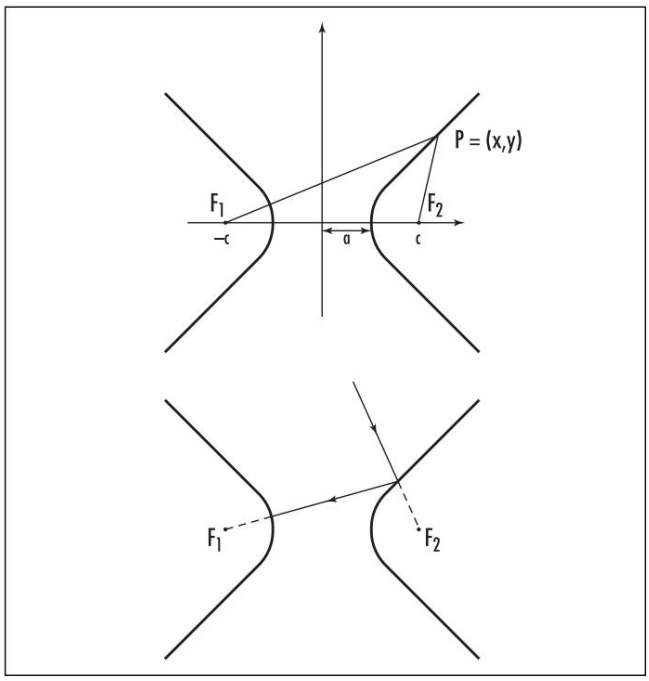
On sait peu de choses sur la vie d'Hypatie. Elle a probablement reçu une instruction en mathématiques de son père et a certainement entretenu une relation de travail étroite avec lui tout au long de sa vie. On sait qu'elle a aidé

Machine Translated by Google

lui en écrivant son commentaire en 11 parties sur le travail mathématique de CLAUDIUS PTOLEMY (85–165 CE) et sur sa production d'une version révisée des Éléments d'EUCLIDE . Hypatie a produit ses propres commentaires sur des pièces classiques, notamment la célèbre Arith metica de Diophante, les Coniques d'Apollonius et les œuvres astronomiques de Ptolémée. Tous ses travaux, cependant, sont aujourd'hui perdus, et nous ne les connaissons que par des références faites par des érudits ultérieurs.

Vers 400 après JC , Hypatia dirigea l'école platonicienne d'Alexandrie, où elle consulta sur des questions scientifiques et donna des conférences sur la philosophie et les mathématiques. Pendant ce temps, le christianisme est apparu comme la religion dominante de la région, et les fanatiques se sont sentis menacés par son intellect et son érudition. Vers 415 CE, Hypatia a été brutalement assassinée par un groupe de fidèles religieux qui considéraient ses opinions philosophiques comme païennes. De nombreux historiens suggèrent que la mort d'Hypatie marque le début du déclin d'Alexandrie en tant que grand centre d'érudition et d'apprentissage de l'Antiquité.

Il convient de mentionner qu'au moins une autre femme est connue pour avoir joué un rôle actif dans les mathématiques à l'époque grecque. Dans son ouvrage Collection, PAPPUS D' ALEXANDRIE (300–350 CE) rend hommage à une érudite du nom de Pandrosion. On ne sait pratiquement rien d'elle.



Hyperbole

hyperbole Comme l'une des SECTIONS CONIQUES, l'hyper bole est la courbe plane composée de tous les points P dont les distances de deux points donnés F1 et F2 dans le plan ont une différence constante. Les deux points fixes F1 et F2 sont appelés foyers de l'hyperbole. L'hyper bola apparaît aussi comme la courbe produite par l'intersection d'un plan avec les deux nappes d'une droite circulaire
CÔNE.

En utilisant la notation |PF1 | et |PF2 | pour les longueurs des segments de droite reliant P à F1 et F2 , respectivement, la condition de définition d'une hyperbole peut s'écrire comme l'une des deux équations suivantes :

$$|PF1| - |PF2| = d \text{ ou } |PF2| - |PF1| = d$$

où d désigne la différence constante. Chaque équation définit sa propre courbe, ou branche, de la même hyperbole.

L'équation d'une hyperbole peut être trouvée en introduisant un système de coordonnées dans lequel les foyers sont situés aux positions F1 = (–c, 0) et F2 = (c,0), pour certains nombre positif c. Il est commode d'écrire d = 2a, pour certains a > 0. Si P = (x,y) est un point arbitraire sur l'hyperbole, alors, selon la FORMULE DE DISTANCE, les conditions de définition sont les suivantes :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

Déplacer le deuxième radical vers la droite, mettre au carré et simplifier donne l'équation :

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm a - \frac{c}{a}x$$

Équerre et simplifier à nouveau donne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$.

En notant que c est supérieur à a, nous pouvons fixer le positif l'équation $c^2 - a^2$ égal à b^2, pour certains $b > 0$. Ainsi de la quantité c de l'hyperbole est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Inversement, on peut montrer que toute équation de cette forme produit bien une hyperbole avec des foyers aux positions

Machine Translated by Google

comme $\sqrt{a^2+b^2}$, et dont les points P sont distants de (± + b 2 différence 2a des foyers. Cette équation révèle aussi que l'hyperbole a des ASYMPTOTES obliques $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Les hyperboles ont la propriété de réflexion suivante : tout rayon de lumière qui s'approche du côté convexe d'une branche le long d'une ligne pointant vers un foyer est réfléchi directement vers l'autre foyer. (Cette propriété peut être prouvée de la même manière que la propriété de réflexion d'une PARABOLE est prouvée.)

Des hyperboles apparaissent dans le pliage d'une fine feuille de papier. Dessinez un cercle et un point à l'extérieur du cercle sur une feuille de papier. Pliez le point sur le cercle et pliez le papier. Ouvrez le pli et recommencez, cette fois en pliant le point à un autre point du cercle. Comme vous le faites plusieurs fois, une branche d'une hyperbole émergera le long du côté de tous les plis. Le point marqué est un foyer de l'hyperbole et le centre du cercle est l'autre. Le rayon du cercle est la différence constante des distances entre un point de l'hyperbole et les deux foyers.

Dans le processus de dérivation de l'équation d'un hyper bola, nous avons présenté l'équation :

$$\sqrt{c(\quad)+x-cyxa^{2}}\quad\frac{}{un}$$

valable pour une branche de la figure au moins. Ensemble $e = \frac{c}{un}$

$\frac{\sqrt{un^2-B^2}}{un} 1 = \sqrt{+\frac{b}{un^2}}$. C'est ce qu'on appelle l' EXCENTRICITE de l'hyperbole et a une valeur supérieure à 1. L'équation ci-dessus peut être réécrite :

$$\frac{\sqrt{(\quad)xcy^{2}+\quad^{2}}}{x-\frac{un}{e}} = e$$

Le numérateur de la quantité du côté gauche est la distance d'un point donné P à un foyer, et le dénominateur est la distance du point P à la droite verticale x = appelée directrice de l'hyperbole. $\frac{un}{e}$,

Cette formulation fournit une caractérisation alternative de l'hyperbole :

> Une hyperbole est l'ensemble de tous les points P tels que le rapport de sa distance à un point fixe (le focus) à sa distance à une ligne fixe (la directrice) est égale à une constante e > 1.

Voir aussi CERCLE D'APOLLONIUS ; ELLIPSE.

fonctions hyperboliques Par analogie avec le fait que les fonctions sinus et cosinus de la TRIGONOMÉTRIE représentent les coordonnées d'un point sur le cercle unitaire, x = 1, les fonctions hyperboliques représentent les coordonnées d'un point sur la branche droite d'une HYPERBOLE, x Plus précisément, l' $^{2}2-{}^{2}2=1.-y$

abscisse d'un point de la courbe, à un "angle" t, est appelée fonction cosinus hyperbolique, et est notée cosh(t), et l' ordonnée est appelée fonction sinus hyperbolique, notée sinh(t) .

Nous avons:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

On peut également voir que cosh(–t) = cosh(t) et sinh(–t) = –sinh(t).

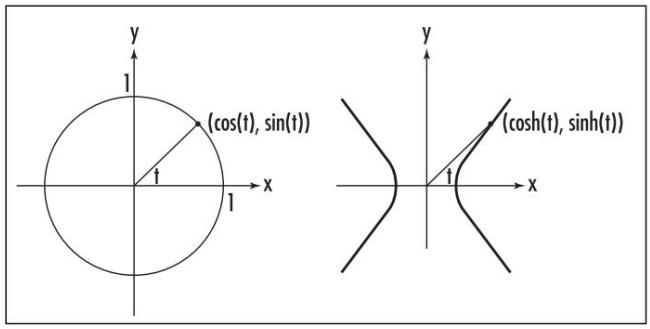
Les mathématiciens définissent parfois les fonctions sinus et cosinus hyperboliques via les formules :

$$\text{coche}(t) = \frac{ee+^{-t}}{2}$$

$$\sinh(t) = \frac{t\,ee^{-}-^{-t}}{2}$$

On peut vérifier que ces formules satisfont bien l'équation d'une hyperbole x = 1 avec x > 0, et donc doivent bien être les coordonnées de ses points. (Ces équations rappellent la formule $\cos(t) =$

$\frac{eeça+^{-il}}{2}$ et $\text{péché}(t) = \frac{+ge^{-il}}{2}$, qui découlent de i FORMULE D'EULER pour les fonctions trigonométriques ordinaires.)



Les fonctions trigonométriques et hyperboliques

Machine Translated by Google

En prenant la DÉRIVÉE on voit :

$$\frac{d}{dt}\cosh(t) = \frac{d}{dt}\frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = \sinh(t)$$

et

$$\frac{d}{dt}\sinh(t) = \cosh(t)$$

Par analogie avec les fonctions trigonométriques ordinaires, les mathématiciens définissent quatre fonctions hyperboliques supplémentaires :

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}, \quad \coth(t) = \frac{1}{\tanh(t)},$$

$$\sec(t) = \frac{1}{\cosh(t)}, \quad \csc(t) = \frac{1}{\sinh(t)}$$

La courbe en cosinus hyperbolique apparaît dans la nature lorsque la forme de la courbe formée par une chaîne qui pend librement entre deux points. Cette courbe est appelée CATÉNAIRE.

Voir aussi la RÈGLE D'OSBORNE .

géométrie hyperbolique (géométrie lobachevskienne) Indépendemment découverte en 1823 par le mathématicien hongrois JÁNOS BOLYAI (1802-1860) et en 1829 par le russe mathématicien NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856), la géométrie hyperbolique est une NON-EUCLIDIENNE GEOMETRIE dans laquelle le fameux POSTULAT PARALLELE échoue De la manière suivante:

> Par un point donné non sur une ligne donnée,
> il y a plus d'une ligne parallèle à celle-ci
> ligne donnée.

mathématicien français JULES HENRI POINCARÉ (1854-1912) a fourni plus tard un modèle simple pour ce géométrie et les moyens de visualiser facilement la géométrie aboutit à cette théorie. Le « disque de Poincaré » est constitué de tous les points à l'intérieur du CERCLE UNITAIRE. UN "point" en géométrie est n'importe quel point à l'intérieur de ce cercle, et une "ligne" doit être interprétée comme un arc de cercle à l'intérieur le cercle dont les extrémités sont perpendiculaires à la limite du cercle. Tout diamètre du cercle limite est également considéré comme une ligne. Les distances ne sont pas mesurées avec une règle traditionnelle : points sur le cercle de délimitation sont considérés comme infiniment éloignés du centre de le cercle.

Bolyai et Lobachevsky ont montré que tous, sauf le cinquième des POSTULATS D'EUCLIDE tiennent dans l'hyperbolique géométrie et, de plus, que ce modèle de géométrie est cohérent (c'est-à-dire exempt de CONTRADICTION). Ce établit que le postulat parallèle ne peut pas être logiquement déduit comme conséquence du reste axiomes proposés par Euclide.

En géométrie hyperbolique, la somme de tous les angles dans les triangles à moins de 180°, et le rapport de la circonférence de tout cercle à son diamètre est inférieur à π. (De plus, le la valeur de ce rapport n'est pas la même pour tous les cercles.) De plus, il est possible que deux droites perpendiculaires soient parallèles à la même ligne.

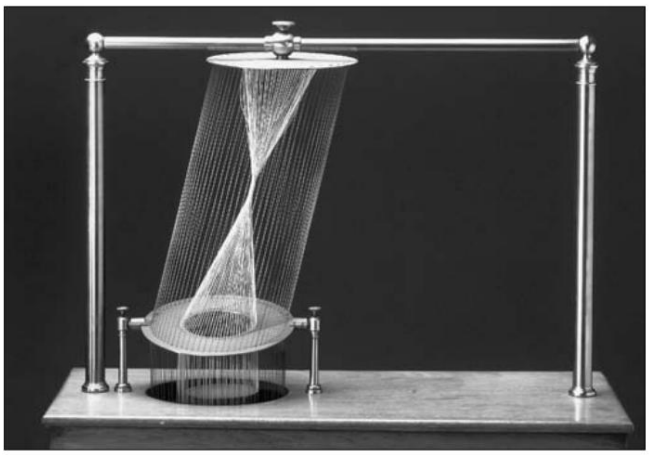
Physiciens, suite aux travaux d' ALBERT EINSTEIN, suggèrent que la géométrie de notre univers est hyperbolique : qu'elle nous apparaisse comme euclidienne résulte du fait que nous en occupons une si petite partie. (Ceci est analogue au fait qu'il est difficile de reconnaître le Terre aussi ronde quand on y vit.)

Voir aussi GEOMETRIE EUCLIDEENNE; AXIOME DE PLAYFAIR ; GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

hyperboloïde Le SOLIDE DE REVOLUTION obtenu par la rotation d'une HYPERBOLA autour d'un de ses axes s'appelle un hyperboloïde. Si la rotation s'effectue autour de l'axe qui se situe entre les deux branches de la courbe, alors la surface résultante est appelée un hyperboloïde de un feuille. Il ressemble à un cylindre "pincé" au centre donc comme se courber vers l'intérieur. Les points de cette surface satisfont une équation des constantes de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1$ pour certains forme a, b et c. Si, au contraire, la rotation s'effectue autour de l'axe qui relie les deux foyers du hyperbole, alors la surface résultante a deux pièces, chacune ressemblant à un bol. Cette surface est appelée une hyperboloïde de deux feuillets. Les points sur cette surface satisfont l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$.

On peut construire un modèle d'hyperboloïde de une feuille en tenant deux anneaux métalliques, un directement au-dessus de l'autre, et attachant des cordes verticales à partir de points sur l'anneau inférieur à leurs points correspondants sur le anneau supérieur. Si l'on tourne ensuite l'anneau supérieur de sorte que le les cordes verticales commencent à s'incliner, le modèle commence à "con strict". La surface résultante est un hyperboloïde de un feuille. On peut aussi voir cette surface en attachant une ficelle autour d'une poignée de brins de spaghetti non cuits.

Machine Translated by Google



En faisant tourner le disque supérieur de ce modèle à cordes de 1872, on peut transformer un cylindre d'accords en forme d'hyperboloïde. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/ The Image Works)

Lorsque les brins s'inclinent, la surface d'un hyperboloïde d'une feuille apparaît.

Voir aussi ELLIPSOÏDE ; PARABOLOÏDE.

hypercube L'analogue de dimension supérieure de SQUARE en deux dimensions et d'un CUBE en trois dimensions est appelé un hypercube.

Un carré unitaire dans le plan a quatre sommets aux positions (0,0),(1,0),(0,1) et (1,1). Un cube unitaire dans un espace tridimensionnel a huit sommets aux emplacements (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1), (0,1,1) et (1,1,1). Par analogie, un hypercube de longueur de côté 1 assis dans un espace à quatre dimensions a 16 sommets donnés par : (0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0),…,(1,1,1,1).

Certaines personnes trouvent utile d'interpréter la quatrième coordonnée comme le temps. Dans ce contexte, chaque valeur particulière de la quatrième coordonnée représente un instant donné dans le temps, et les trois coordonnées restantes décrivent un objet ordinaire dans un espace tridimensionnel.
Un hypercube à quatre dimensions peut donc être considéré comme un cube ordinaire se déplaçant dans le temps. (On peut aussi appliquer cette interprétation aux carrés et cubes ordinaires de dimension inférieure. Par exemple, un segment de droite est le résultat d'un point glissant horizontalement dans le temps, un carré est le résultat d'un segment de ligne horizontale glissant dans la direction de l' axe y positif au fil du temps, et un cube est le résultat d'un carré bidimensionnel glissant dans la direction de l' axe z positif au fil du temps.) Un quatre l'hypercube dimensionnel est aussi appelé un tesseract.

Un carré dans un espace à deux dimensions a quatre sommets et quatre arêtes. Un cube dans un espace tridimensionnel a huit sommets et six faces carrées. On peut montrer qu'un tesseract a huit sommets et six "faces" cubiques et qu'en général, un hypercube à n dimensions a 2 n sommets et 2n faces, chacun étant lui-même un hypercube d'une dimension en moins.

Quatre segments de ligne articulés se plient bout à bout pour former un carré. Six carrés disposés en « croix » pour former un cube. Huit cubes disposés de manière analogue - quatre dans une rangée avec les quatre cubes restants attachés aux quatre faces exposées du deuxième cube - se plient dans un espace à quatre dimensions pour former un hypercube. Au total, il existe 261 façons différentes d'arranger huit cubes ordinaires qui se plient dans un espace à quatre dimensions pour former un hypercube. Chaque arrangement est appelé un NET.

hypoténuse Le côté le plus long d'un triangle qui contient un angle de 90°, c'est-à-dire un triangle rectangle, est appelé l'hypoténuse du triangle. LE THÉORÈME DE PYTHAGORE montre que ce côté le plus long est opposé à l'angle droit. (Si les trois côtés d'un triangle rectangle sont a, b et c, avec c opposé à l'angle droit, alors cb 2 . Cela établit que c est en effet plus grand que a et b.) Les $^{2\,2\,=\,un}$ + deux côtés restants de a triangle rectangle sont appelés les jambes du triangle.

Le mot hypoténuse est dérivé du terme grec hypoteinousa qui signifie « sous tension » (le préfixe hypo-signifie « sous » et teinein signifie « étirer »).

Les mathématiciens ont montré qu'un entier c peut être la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés entiers si, et seulement si, dans la FAC TORISATION première de c, aucun PRIME apparaissant un nombre de fois impair n'est 3 de plus qu'un multiple de 4.

Voir aussi TRIPLES PYTHAGORIENS.

test d'hypothèse Voir STATISTIQUES : INFERENTIELLE.

Machine Translated by Google

je

identité Une équation qui déclare que deux expressions mathématiques sont égales pour toutes les valeurs possibles de toutes les variables qui s'y trouvent est appelée une identité. Par exemple, la formule DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS = (x – y)(x + y) et l'équation trigonométrique sin2θ + y^{2} 2 x – cos2θ = 1 sont des identités. Parfois, le symbole ≡ est utilisé à la place de = pour indiquer que l'énoncé est une identité. Il se lit comme « identiquement égal à ».

Un énoncé numérique, qui n'implique aucune variable, peut toujours être appelé une identité s'il éclaire quelque chose d'intéressant sur les nombres impliqués. Par exemple, la relation suivante pourrait être appelée une identité en raison de l'apparition inattendue du nombre π :

$$3 \arctan \frac{1}{4_{+}} \quad \arctan \frac{1}{20_{+}} \quad \arctan \frac{1}{1985\,4_{=}} \quad \frac{\pi}{}$$

Voir aussi ÉQUATION ; ÉLÉMENT D'IDENTITÉ.

élément d'identité (identité, élément neutre) Un élément d'un ensemble qui, combiné à tout autre élément de l'ensemble, laisse cet élément inchangé est appelé élément d'identité. Plus précisément, étant donné une OPÉRATION BINAIRE sur un ensemble S, on dit que e dans S est "*" un élément d'identité si :

un*e = un
e*a = un

pour tous les éléments a de l'ensemble.

Par exemple, le nombre zéro est un élément d'identité pour l'ensemble des nombres réels sous l'opération d'addition : on a que a + 0 = a = 0 + a pour tous les nombres un. En ce qui concerne la multiplication, 1 est un élément d'identité, puisque a × 1 = a = 1 × a pour tous les nombres a. (Le nombre zéro est parfois appelé une « identité additive » et le nombre 1 une « identité multiplicative ».)

Dans la théorie des matrices, la MATRICE D'IDENTITÉ est un élément d'identité sous multiplication pour l'ensemble de toutes les matrices carrées d'une taille particulière. En THEORIE DES ENSEMBLES, l' ENSEMBLE VIDE est une identité sous l'opération de prise d'union. Tout GROUPE est tenu d'avoir un élément d'identité.

Il est impossible qu'un système mathématique possède deux éléments d'identité différents par rapport à la même opération binaire. Si, par exemple, e et f sont tous deux des éléments d'identité pour un ensemble S, alors e*f est égal à e (puisque f est un élément d'identité), et il est également égal à f (puisque e est un élément d'identité). Donc e et f sont identiques.

Dans certaines théories mathématiques, il est souhaitable de distinguer une « identité gauche », c'est-à-dire un élément eL tel que eL*a = a pour tous les éléments a, et une « identité droite » eR qui satisfait a*eR = a pour tout un. Bien sûr, si la théorie satisfait la PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE, alors eL et eR sont égaux et représentent une identité pour le système.

Voir aussi ÉLÉMENT INVERSÉ.

matrice d'identité (matrice d'unité) Une MATRICE carrée avec chaque élément diagonal principal égal à 1 et toutes les autres entrées égales à zéro est appelée une matrice d'identité. Une telle matrice est généralement notée I ou Id, voire Idn si la

Machine Translated by Google

ORDRE D'UNE MATRICE est n. Par exemple, la matrice d'identité 3 × 3 est :

$$I3 = \begin{matrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{matrix}$$

Si A est une matrice à m lignes et n colonnes, alors la multiplication matricielle montre que nous avons :

$$AIn = A$$
$$ImA = A$$

c'est-à-dire que la multiplication avec la matrice d'identité appropriée laisse toute autre matrice inchangée. Si toutes les matrices considérées ont le même nombre de lignes que de colonnes, disons n de chacune, alors In agit comme un ÉLÉMENT D'IDENTITÉ pour cet ensemble sous multiplication matricielle.

Toute matrice 2 × 2 A de la forme :

$$\begin{matrix} d & \frac{1 - d^2}{c} \\ c & -d \end{matrix}$$

ou

$$\begin{matrix} j & c \\ \frac{1 - 2j}{c} & -d \end{matrix}$$

satisfait A2 = I2 . Ainsi, toute matrice de ce type peut être considérée comme une RACINE CARRÉE de la matrice d'identité 2 × 2. Si l'on est prêt à autoriser l'utilisation de NOMBRES COMPLEXES, alors la matrice suivante est un exemple de racine cubique de la matrice d'identité 3 × 3 :

$$A = je \begin{matrix} 0\,0 & -je \\ 0\,0 & \\ 01\,0 & \end{matrix}$$

Cette matrice vérifie la relation A3 = I3 .

image (plage) L'ensemble de toutes les valeurs qu'une FONCTION peut adopter est appelé l'image de la fonction. Par exemple, l'image de la fonction y = x 2 définie pour tous les nombres réels est l'ensemble de tous les nombres supérieurs ou égaux à zéro. Le terme est également utilisé pour la sortie d'une entrée spécifique pour la fonction. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, l'image du nombre 3 est 9.

Lorsqu'il s'agit de fonctions de nombres réels, le terme plage est préféré à l'image. Souvent, les mathématiciens n'utiliseront le mot image que lorsqu'ils penseront géométriquement à un problème. Par exemple, si la fonction est une TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE telle qu'une réflexion dans une ligne, alors on parlera de l'image de figures géométriques sous cette transformation. Dans cet exemple, l'image de n'importe quel cercle est un autre cercle et l'image d'une ligne droite est une autre ligne droite.

implication Voir CONDITIONNEL.

différenciation implicite Lorsque deux variables x et y satisfont une seule équation F(x,y) = 0, on peut néanmoins considérer l'équation comme définissant y en fonction de x, même si aucune formule explicite de ce type n'apparaît . (Voir FONCTION IMPLICITE.) Dans un tel cas, on peut aller plus loin et différencier l'équation dans son ensemble, en considérant y en fonction de x et en utilisant la RÈGLE DE CHAÎNE dans le processus pour trouver une formule

pour la dérivée $\frac{dy}{dx}$. Ce processus est connu sous le nom de différenciation implicite . Par exemple, si xy3 + 7x 2y = 1, alors la différenciation donne :

$$32\,2\,3.147.0 \frac{dy}{dx} + ++ = y\,xy\,xy\,x$$

et ainsi:

$$\frac{dx}{dx} = - \frac{xy^3 2^x 14\,y +}{2\,3\,7 + xy}$$

(en supposant que le dénominateur n'est pas nul).

La différenciation implicite est utile pour trouver les dérivées de fonctions inverses, par exemple. Par exemple, si y = sin–1(x), alors sin(y) = x. La différenciation $\frac{dy}{dx}$ donne cos(y) = 1, et donc,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{péché}^2(y)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}.$$

Parfois, une fonction est plus facilement différenciée si l'on applique d'abord un logarithme, puis on dérive

Machine Translated by Google

implicitement. Ce processus est appelé différenciation logarithmique. Par exemple, pour différencier $y = x^x$, écrire $\ln(y) = 1 - \ln(x)\ x = x\ln(x)$. Alors $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(x) + x\frac{1}{x}$, et ainsi, $\frac{dy}{dx} = y(\ln(x) + 1) = x^x(\ln(x) + 1)$.

fonction implicite Une formule de la forme F(x,y) = 0 est dit définir implicitement la variable y en fonction de X. Par exemple, l'équation xy = 1 définit implicitement 1– la variable dépendante y comme y = . Cependant, les choses peuvent $\frac{1}{x}$ prêter à confusion, car une seule équation peut définir y comme plusieurs fonctions possibles de x (par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = 1$ suggère que soit y = $\sqrt{1-x^2}$ ou y = $-\sqrt{1-x^2}$), et dans certains cas, il peut même ne pas être possible de résoudre une formule explicite pour y (pour exemple, il n'est pas du tout clair que x 2y 2 + ycos(xy) = 1 donne bien une formule pour y).

Les mathématiciens ont prouvé que tant que la fonction F(x,y) a des DÉRIVÉES PARTIELLES continues, et qu'il existe un point (a,b) pour lequel F(a,b) = 0 et $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ en (a,b), alors l'équation F(x,y) = 0 fait définir en effet y en fonction de x, au moins pour les valeurs de x dans un petit voisinage de x = a. De plus, le processus de DIFFÉRENCIATION IMPLICITE est valable pour ces valeurs de x. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de la fonction implicite.

intégrale impropre (intégrale infinie, intégrale sans restriction) Dans la théorie du CALCUL INTÉGRAL , il est permis d'étendre la notion d'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ pour inclure les fonctions f(x) qui deviennent infinies dans la gamme considérée, [a,b], ou, alternativement, pour considérer l'intégration sur un domaine infini : [a,∞), (–∞,b], ou même (–∞,∞). De telles intégrales sont appelées intégrales impropres. On traite de telles intégrales par restreindre la plage d'intégration et prendre la limite à mesure que l'intervalle s'agrandit jusqu'à la taille requise.

Considérons, par exemple, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Le l'intégrande devient illimitée lorsque x s'approche de la valeur zéro, et donc, de manière normale, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ n'est pas bien défini. Cependant, la fonction est borné sur l'intervalle [L,1] pour tout 0 < L < 1, et l'intégrale $\int_L^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est valable. Nous avons: $\int_L^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_L^1 = 2 - 2\sqrt{L}$. L'intégrale impropre considérée est alors défini comme étant la LIMITE lorsque L → 0, à partir de ci-dessus, de ces valeurs : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{L\to 0+}\int_L^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{L\to 0+} 2 - 2\sqrt{L} = 2$.

En général, si un intégrande f(x) est infini à une extrémité point a, alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ est défini comme limite :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{L\to a+}\int_L^b f(x)dx$$

ou, si infini au point final b, alors l'intégrale impropre est définie comme la limite :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{L\to b-}\int_a^L f(x)dx$$

Si la limite existe, alors on dit que l'intégrale impropre converger. (Ainsi, par exemple, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est une convergente intégrale impropre.) Si la limite n'existe pas, alors la on dit que l'intégrale impropre diverge. (On peut vérifier, par exemple, qui diverge $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$)

Pour illustrer le deuxième type d'intégrale impropre, considérez, par exemple, que la quantité doit $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx$. C'est à être interprétée comme la limite :

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = \lim_{L\to\infty}\int_1^L \frac{1}{2x}dx$$

qui se calcule facilement : $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = \lim_{L\to\infty}\int_1^L \frac{1}{x^2}dx = \lim_{L\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^L = \lim_{L\to\infty} 1 - \frac{1}{L} = 1$. (Nous interpréter cela comme disant que la superficie totale sous le 1– courbe y = à droite de x = 1 est 1.) $\frac{1}{x^2}$

En général, les intégrales impropres de ce type sont calculées comme suit :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{L\to\infty}\int_a^L f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{L\to-\infty}\int_L^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^L f(x)dx$$

Machine Translated by Google

Si les limites existent, alors les intégrales impropres sont dites converger. (Ainsi, par exemple, $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx$ est une convergente intégrale impropre.) Si la limite n'existe pas, alors la on dit que l'intégrale impropre diverge. (On peut vérifier, pour exemple, que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge.) Le test intégral utilisé dans l'étude de CONVERGENT SERIES utilise intégrales impropres de ce type.

Il est possible de définir encore plus général impropre intégrales en considérant les intégrandes qui prennent la valeur l'infini à plusieurs endroits dans la plage d'intégration, éventuellement sur une plage infinie d'intégration. On interprète ces intégrales impropres comme la somme de plusieurs limites.

Mathématiques incas L'empire inca régnait sur la région du Pérou et de ses environs avant la conquête espagnole du continent en 1532. Ce fut une expérience extraordinaire civilisation sophistiquée. Le peuple Inca avait beaucoup systèmes développés d'agriculture, de transport, de route la construction, la production textile et l'administration, pourtant, étonnamment, n'avait aucune forme d'écriture. En conséquence, avec absolument aucun registre ou document culturel disponible, on sait très peu de choses sur les mathématiques de ces personnes.

On sait que l'Inca enregistrait des informations numériques avec un appareil connu sous le nom de quipu, qui consistait d'un ensemble de cordes toutes liées à une centrale commune objet, généralement une autre corde. Les administrateurs simplement liés nœuds dans les cordes pour enregistrer les nombres, avec chaque corde représentant un décompte différent. Les nœuds étaient regroupés en clusters pour représenter des quantités de puissances de 10. Ainsi, par exemple, le nombre 283 était représenté (arrière) par un groupe de trois nœuds placés près de l'extrémité libre d'une corde (trois unités), un espace, un groupe de huit nœuds au centre de la chaîne (huit 10), un autre espace, et enfin deux nœuds en haut de la ficelle (deux 100). Le Les Incas, en effet, suivaient le système de REPRÉSENTATION DÉCIMALE que nous utilisons aujourd'hui. Un grand espace indiquait un chiffre de zéro (pour distinguer 208 de 28, par exemple).

Des cordes de différentes couleurs ont été utilisées pour signifier ce que comptaient les nœuds sur cette corde. Pour exemple, des cordes blanches peuvent avoir représenté le dénombrement du bétail, tandis que les ficelles vertes peuvent avoir représenté les niveaux de punition à exécuter pour commettre un certain crime.

Chaque ville de l'Empire inca avait son propre quipca mayoc, un "gardien des nœuds", qui enregistrait le recensement des informations sur la population, les produits et armes de la ville. Des quipues consignant ces informations étaient envoyées chaque année, par des relais, à la capitale de l'empire, Cuzco.

La mesure dans laquelle le peuple inca a manipulé les chiffres et les calculs effectués ne sont pas clairs. UN Prêtre espagnol du nom de José de Acosta, qui vécu parmi les Incas de 1571 à 1586, décrit dans son livre, Historia natural y moral de las Indias, les habitants mélangent les grains de maïs sur le sol comme si manipuler les billes d'un BOULIER. Évidemment certains type de calcul numérique était en cours, mais Acosta n'a pas compris la méthode et a été incapable d'expliquer exactement ce qui se passait.

L'Inca pensait aux nombres en termes très concrets. Le concept de « dualité », par exemple, n'existait pas pour l'Inca, et le compte de 2 appliqué à des choses. Ceci est démontré par le fait que l'Inca avait plusieurs mots différents pour deux, qui ont été utilisés pour distinguer différents contextes - les deux objets qui font un paire, les 2 provenant d'un objet divisé en deux, et l'objet unique et son partenaire spécifique qui forment une paire, par exemple. Il n'y avait pas de mot unique qui englobe tout pour l'état d'avoir deux parties.

Il est probable que le peuple Inca gardait des valeurs astronomiques archives, un sujet d'intérêt pour la plupart des cultures anciennes, mais il n'y a aucune preuve directe de cela.

incircle Un cercle qui se trouve à l'intérieur d'un triangle et touche les trois côtés est appelé le cercle inscrit de ce triangle. Le le centre de ce cercle est appelé le centre du triangle, et son rayon s'appelle le rayon intérieur du triangle.

Il est relativement simple de voir que pour tout triangle il y a précisément un cercle dans le triangle qui touche les trois côtés. (Effacer un côté du triangle et notez qu'il y a une infinité de cercles qui correspondent dans le coin formé par les deux côtés restants. Dans redessinant le troisième côté, observez que précisément l'un des ces cercles sont tangents à cette arête supplémentaire.)

Le centre d'un triangle est un point situé à même distance de chacun des trois côtés du triangle. Notez que tout point ÉQUIDISTANT de juste deux lignes qui se croisent se trouvent sur la bissectrice de celles-ci lignes (c'est-à-dire sur une ligne qui coupe l'angle entre le deux lignes données en deux). Par conséquent, nous avons que le le centre de tout triangle se situe sur chacune des bissectrices des sommets du triangle. Celle-ci établit :

Machine Translated by Google

Les trois bissectrices d'un triangle sont CON ACTUEL.

Un excircle pour un triangle est un cercle qui se trouve à l'extérieur du triangle et qui est tangent à un côté du triangle et tangent aux extensions des deux côtés restants. Un triangle a trois excercles distincts.

Dans un contexte plus général, s'il est possible de tracer un cercle à l'intérieur d'un POLYGONE tangent à chaque côté du polygone, alors ce cercle est appelé un cercle inscrit au polygone. Chaque polygone régulier a un cercle inscrit. Il n'y a pas d'incercle pour un rectangle non carré.

Voir aussi CIRCUMCERCLE.

inclinaison/déclinaison L'angle θ entre un rayon émanant de l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes et l' axe des x positif mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est appelé l'inclinaison du rayon. Un angle mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre est appelé sa déclinaison. Ces termes sont rarement utilisés en mathématiques aujourd'hui.

Un PLAN qui n'est pas horizontal est appelé un plan incliné, et l'angle que la ligne de plus grande pente à l'intérieur du plan fait avec l'horizontale est appelé l'angle d'inclinaison du plan.

principe d'inclusion-exclusion Si n(A) désigne le nombre d'éléments dans un ensemble fini A, alors le nombre d'éléments dans l'union A B de deux ensembles est donné par :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(Compter le nombre d'éléments dans chacun de A et B compte deux fois les éléments qui appartiennent aux deux. Il faut compenser ce double comptage.) De même, le nombre d'éléments dans l'union de trois ensembles est donné par :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(On peut établir cela soit en raisonnant par lequel les éléments sont comptés plusieurs fois, soit en notant que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ et en appliquant l'observation précédente :

$$n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) = n(A \cup B) + n(C) - n((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

Deux autres applications de la formule pour l'union de deux donnent le résultat.)

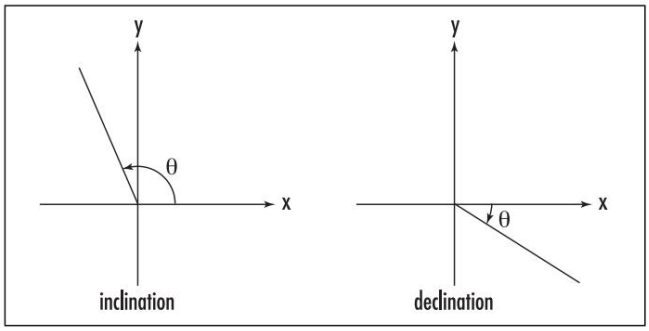
En général, un argument INDUCTION montre que le nombre d'éléments dans l'union de n ensembles est donné par :

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

Cette formule s'appelle le principe général d'inclusion-exclusion. Il peut être interprété comme suit :

> Le nombre d'éléments d'un ensemble fini qui possèdent au moins une des k propriétés possibles est égal au nombre possédant exactement une propriété, moins le nombre possédant exactement deux propriétés, plus le nombre possédant précisément trois propriétés, et ainsi de suite, jusqu'à au décompte des éléments possédant toutes les k propriétés.

Ce puissant principe de comptage a des applications importantes dans la théorie des PROBABILITÉS .



Angles d'inclinaison et de déclinaison

croissant/décroissant UNE SÉQUENCE de nombres {an } est dite croissante si a1 ≤ a2 ≤ a3 ≤ c'est-à-dire que chaque,terme de la séquence est supérieur ou égal à celui qui le précède. Elle est dite strictement croissante si a1 < a2 … La suite constante 1,1,1, …, par exemple, < a3 < est considérée comme croissante.

Machine Translated by Google

Les suites croissantes ont la propriété agréable que leur convergence (ou divergence) est facile à identifier :

> Une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée.

(Voir BOUND et CONVERGENT SEQUENCE.) Cela semble clair géométriquement. Si sur la ligne des nombres réels la séquence de nombres {an } se déplace régulièrement vers la droite mais ne pénètre pas une barrière à la position B, alors les nombres doivent "s'empiler" à une certaine valeur limite L ≤ B.
Inversement, si une suite croissante converge vers une valeur L, alors tous les termes de la suite se trouvent à gauche de L sur la droite numérique et sont donc délimités au-dessus par L. (Ces déclarations peuvent être prouvées rigoureusement en utilisant le " complétude » de la droite des nombres réels via la notion de DEDEKIND CUT.)

Une suite {an } est dite décroissante si a1 ≥ a2 ≥ c'est-à-dire qui …, que chaque terme de la suite est inférieur ou a3 ≥ à celui le précède. Elle est dite strictement décroissante si a1 > a2 > a3 >…. De même on peut montrer qu'une suite décroissante converge si, et seulement si, elle est bornée en dessous. Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Une fonction à valeurs réelles f est dite croissante sur un intervalle si, sur cet intervalle, des valeurs d'entrée supérieures produisent des valeurs de sortie supérieures (ou éventuellement égales), c'est-à-dire si a et b sont deux valeurs dans l'intervalle avec a < b, alors f(a) ≤ f(b). Si c'est toujours le cas que f(a) < f(b), alors la fonction est dite strictement croissante sur l'intervalle. La MEAN-VALUE THEO REM montre qu'une fonction différentiable f est croissante précisément sur les intervalles où la DÉRIVÉE est non négative, f′(x) ≥ 0, et strictement croissante si f′(x) > 0.

Une fonction à valeur réelle f est dite décroissante sur un intervalle si des valeurs d'entrée plus élevées produisent des valeurs de sortie plus petites (ou éventuellement égales) de la fonction, c'est-à-dire si a < b , alors f (a) ≥ f (b). Si c'est toujours le cas que f(a) > f(b), alors la fonction est dite strictement décroissante sur l'intervalle. Le THÉORÈME DE LA VALEUR MOYENNE montre qu'une fonction différentiable f est décroissante précisément sur les intervalles pour lesquels f′(x) ≤ 0, et strictement décroissante si f′(x) < 0.

Une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle est dit monotone sur cet intervalle.

Voir aussi CALCUL DIFFÉRENTIEL ; GRAPHIQUE D'UNE FONCTION ; MAXIMUM MINIMUM.

incrément Un petit changement fini dans la valeur d'une variable ou dans la valeur d'une fonction est appelé un incrément.

Si la variable est x, alors un incrément de x est généralement noté Δx ou δx. Si f est une fonction de x, alors l'incrément correspondant de f, noté Δf, vaut $\Delta f = f(x + \Delta x) – f(x)$. La LIMITE du rapport $\Delta f/\Delta x$, lorsque l'incrément Δx diminue jusqu'à zéro, est appelée la DÉRIVÉE de f.
Un incrément négatif est parfois appelé un décrément.

Voir aussi DIFFÉRENTIEL.

intégrale indéfinie Voir ANTIDIFFÉRENCIATION; INTÉ CALCUL GRAL.

axiome indépendant Un AXIOME d'une théorie mathématique est dit indépendant s'il ne peut pas être dérivé des axiomes restants d'une théorie comme une conséquence logique. Par exemple, l'existence de GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES établit que le célèbre POSTULAT PARALLÈLE d'Euclide est indépendant de ses quatre postulats restants. En général, c'est l'approche qu'adoptent les mathématiciens pour montrer qu'un axiome A dans un système mathématique est indépendant des axiomes restants : présenter un exemple d'une autre théorie mathématique cohérente qui s'est avérée exempte de contradictions dans laquelle tous les axiomes sauf A sont valables et pour où A est faux. (Par conséquent, il est impossible que ces axiomes impliquent que A est vrai, car alors on a un système dans lequel A et non A sont vrais.)

Voir aussi les POSTULATS D'EUCLIDE .

événements indépendants Deux expériences menées successivement sont considérées comme indépendantes si les résultats obtenus dans une expérience n'affectent pas les résultats obtenus dans la seconde. Par exemple, les résultats du lancer d'un dé n'influencent pas les résultats obtenus plus tard en lançant une pièce. Ces deux actions sont indépendantes.

Dans la théorie des PROBABILITÉS , nous disons que deux ÉVÉNEMENTS A et B sont indépendants si le fait de savoir que A s'est produit n'a aucune influence sur la probabilité que B se produise ensuite. Par exemple, dans deux lancers de dés, un nombre pair au premier lancer et un 6 au second sont des événements indépendants - les chances d'obtenir un six sont de 1/6, quel que soit le résultat du premier lancer.

Deux événements qui ne sont pas indépendants sont dits dépendants. Par exemple, l'événement « Sally porte un

Machine Translated by Google

imperméable » est susceptible de dépendre de l'événement « il pleut ». La PROBABILITÉ CONDITIONNELLE est utilisée pour analyser les événements dépendants.

Les expériences qui impliquent de tirer des objets d'une source finie, comme des balles d'un sac ou des cartes d'un jeu, sans remplacer les objets retirés, produisent souvent des événements dépendants. Par exemple, les événements « la première carte tirée d'un jeu de cartes est rouge » et « la deuxième carte tirée est rouge » sont dépendants : la probabilité que la deuxième carte sélectionnée soit de la couleur souhaitée peut être de 26/51 ou de 25. /51 , selon que la première carte tirée est noire ou rouge.

Une étude attentive de la PROBABILITÉ montre que deux événements indépendants A et B satisfont la relation de probabilité :

$$P(A \text{ et } B) = P(A) \times P(B)$$

Les mathématiciens prennent cette relation comme la définition de deux événements A et B étant indépendants.

équation indéterminée Une équation, ou un SYSTÈME D'ÉQUATIONS, avec un nombre infini de solutions est appelée indéterminée. Par exemple, l'équation :

$$x + 2y = 5$$

est indéterminée (pour chaque nombre réel t il existe la solution x = 5 – 2t et y = t), de même que le système de deux équations :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 2a + 3b - c &= 0 \end{aligned}$$

dans les variables a, b et c. (Tous les triplets de la forme (a,b,c) = $\left(t, \frac{1-4t}{3}, \frac{t}{3}\right)$ sont des solutions.)

L'équation unique $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ n'est pas indéterminée : elle a l'unique solution (réelle) x = y = z = w = 0.

Voir aussi DEGRÉS DE LIBERTÉ.

index (pluriel, indices) Un nombre qui indique un lieu ou décrit la caractéristique ou la nature d'une fonction s'appelle un index. Par exemple, une SÉQUENCE de nombres peut être notée {an }, l'indice n désignant la place dans la séquence. (Ainsi a7 , par exemple, représenterait le septième nombre de la liste.) Un EXPOSANT est parfois appelé un indice. Pour exemple, on pourrait dire que la fonction f(x) = x index 5 pour indiquer que les quantités sont élevées à $\sqrt[5]{}$ la cinquième puissance. La fonction radicale g(x) = x, par exemple, a l'indice 3, et la fonction $\sqrt[3]{}$ logarithmique h(x) = log10 x a l'indice 10.

Dans les statistiques et les affaires, un indice est un chiffre utilisé pour montrer la variation d'une certaine quantité sur une période de temps, généralement standardisé par rapport à une valeur de base. Par exemple, un indice des prix de détail est utilisé pour mesurer les variations du coût des articles ménagers. Pour l'année de référence, l'indice est généralement fixé à 100. Si, par exemple, le coût du détergent à vaisselle pour l'année de référence est de 1,60 $ et que le prix augmente à 1,76 $ et à 2,00 $ les deux années suivantes, alors l'indice des prix de cet article serait de 100, 110 et 125 pour chacune de ces années, respectivement.

Il est possible de concevoir un indice qui donne une mesure générale de la valeur de plus d'un produit simultanément. Par exemple, l'indice Dow Jones de la Bourse de New York est un indicateur de la valeur d'une sélection représentative d'actions de l'industrie, des transports et des services publics.

Mathématiques indiennes Tout le cours des mathématiques occidentales a été profondément marqué par une seule invention indienne, celle du système décimal des valeurs de position. Que chaque nombre possible puisse être exprimé via un ensemble de seulement 10 symboles, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, en utilisant soigneusement la place de chaque symbole, semble tellement notion simple aujourd'hui qu'il est difficile d'apprécier sa profonde importance. Cet élégant système de notation a fourni aux chercheurs indiens les moyens d'effectuer des calculs arithmétiques complexes avec une relative facilité, ce qui a conduit à des développements significatifs dans les techniques numériques, les méthodes d'approximation et la théorie de l'arithmétique. Ce n'est que lorsque d'autres cultures ont adopté le système décimal de valeur de position de l'Inde qu'elles ont pu accomplir les mêmes prouesses mathématiques que cette culture avait déjà développées.

La première preuve datée de l'activ mathématique ité dans le sous-continent indien remonte à la civilisation de l'Indus de 2500 av. J.-C. Les poids en bronze et les tiges graduées (règles) de l'époque montrent que ces personnes travaillaient déjà avec un système décimal. Les gens de l'Indus travaillaient avec une unité de base d'une longueur de 1,32 po (aujourd'hui appelée «pouce de l'Indus»), dont 10 font leur version d'un «pied». Les fouilles montrent que les poids et les tiges graduées ont été largement utilisés dans la construction.

Machine Translated by Google

Les premiers documents écrits de la culture indienne sont les textes religieux les Védas, datant entre 1500 avant notre ère et 800 avant notre ère. Bien que leur contenu ne soit pas mathématique, les annexes aux textes donnent des règles spécifiques pour la construction d'autels, démontrant une compréhension approfondie des principes de base de la géométrie. Les premières versions des chiffres de 0 à 9 étaient utilisées à cette époque.

En 600 de notre ère, la religion védique était en déclin et le jaïnisme est venu au premier plan. Au cours de cette période, les mathématiques étaient guidées par les besoins de la religion et ses exigences d'observations astronomiques minutieuses pour déterminer les heures exactes des observances religieuses et le développement d'un calendrier précis. Le système de représentation décimale était maintenant pleinement développé et les chercheurs étaient capables de faire des calculs précis et étonnamment précis. Le math ématicien A– RYABHATA (environ 500 CE), par exemple, avait développé une théorie de la TRIGONOMÉTRIE pour faciliter les calculs astronomiques, avait développé des méthodes pour extraire les racines carrées, évalué π avec un haut degré de précision, et était capable de trouver solutions entières à une grande classe d'équations issues des théories astronomiques.

Un texte écrit de cette période a été découvert en 1881 dans la ville de Bakhshali, aujourd'hui au Pakistan.
Écrit sur de l'écorce de bouleau, le manuscrit de Bakhshali montre que les mathématiciens étaient également à l'aise avec les fractions, les manipulations algébriques de base (ils utilisaient un point pour représenter une quantité inconnue) et les formules d'approximation sophistiquées. Par exemple, le manuscrit décrit, en mots, l'approximation suivante pour la racine carrée d'un nombre N :

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \cdots}}}$$

Ici $ab = 2$ est le plus grand carré parfait plus petit que N et $N - a^2$. Par exemple, nous avons :

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{14}} \approx 1,071067821$$

qui est correct à sept décimales près.

Deux centres de recherche mathématique ont été formés en Inde à l'époque du jaïnisme, tous deux des observatoires astronomiques. A– ryabhata a dirigé le premier centre à Kusumapura dans le nord-est du sous-continent indien, et le mathématicien Varahamihira, qui a également apporté des contributions à l'astronomie et à la trigonométrie, a dirigé le deuxième centre à Ujjain, également dans le nord.

Varahamihira a été remplacé par le mathématicien du VIIe siècle BRAHMAGUPTA, qui, dans son célèbre ouvrage Brahmasphutasiddhanta (L'ouverture de l'univers), a introduit et expliqué l'arithmétique des nombres non positifs. Il fut le premier mathématicien de l'histoire à donner à zéro le statut d'un nombre, le définissant comme le résultat de la soustraction d'une quantité à elle-même.
Le travail de Brahmagupta comprend également une formule pour l'aire d'un quadrilatère cyclique en fonction de ses côtés (aujourd'hui appelée FORMULE DE BRAHMAGUPTA), et présente des méthodes pour résoudre des équations linéaires et quadratiques, ainsi que des systèmes d'équations. Brahmagupta a également développé des techniques d'interpolation sophistiquées pour calculer les valeurs sinusoïdales en trigonométrie.

Au cours des 200 années suivantes, les savants indiens ont travaillé à affiner d'autres méthodes de trigonométrie et des techniques de calcul astronomique. Le mathématicien BH –ASKARA II du XIIe siècle a fait des progrès dans la théorie des nombres, l'algèbre, la combinatoire et l'astronomie, et a écrit un texte complet résumant l'état des mathématiques et de l'astronomie en Inde à son époque. Peu de temps après, d'autres érudits indiens ont développé ces idées plus avant. Les mathématiciens de Jaina ont également clarifié les règles standard des EXPOSANTS et manipulé les exposants d'une manière qui suggère aujourd'hui qu'ils étaient également familiers avec les principes de base des LOGARITHMES.

L'érudit du XIVe siècle MADHAVA DE SANGAMA GRAMMA a fait des progrès significatifs dans l'ANALYSE. Il a produit les développements en série infinie des fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses (aujourd'hui appelées SÉRIE TAY LOR), a découvert le THÉORÈME BINÔMIAL et a même produit la SÉRIE DE GREGORY pour π, qu'il a utilisée pour approximer sa valeur à un degré considérablement précis

Au cours du premier millénaire, l'Inde avait très peu de contacts avec les cultures de l'Occident. Cependant, la nouvelle du système de représentation décimale a réussi à se répandre assez rapidement dans d'autres pays. Un manuscrit écrit en Syrie en 662 traite de la nouvelle méthode de calcul, et il est prouvé que le système décimal a été utilisé au Cambodge et dans d'autres pays asiatiques peu de temps après. Dès le IXe siècle,

Machine Translated by Google

le système décimal était d'usage courant dans le monde islamique, et de là il s'est rapidement transmis à l'Europe. Les érudits arabes ont maintenu un vif intérêt pour le travail des mathématiciens indiens pendant les siècles qui ont suivi et ont joué un rôle actif dans la préservation et la traduction de nombreux textes indiens.

Voir aussi MATHÉMATIQUES ARABE ; BASE D'UN NOMBRE SYSTÈME.

preuve indirecte (preuve par contradiction, reductio ad absurdum) La plupart des affirmations faites en mathématiques sont des affirmations de la forme :

Si la prémisse A est vraie, alors la conclusion B est vraie.

Une preuve indirecte d'un tel énoncé tente d'établir la validité de l'affirmation en supposant que la prémisse A est vraie et en montrant, par conséquent, que la conclusion B ne peut pas être fausse. On le fait en explorant les conséquences logiques de l'hypothèse A et "pas B" jusqu'à ce qu'à un moment donné, une contradiction (telle que 1 + 1 = 3, par exemple) soit atteinte. Partant de la conviction que les mathématiques doivent être exemptes d'absurdités, les mathématiciens acceptent généralement cette approche comme suffisante pour établir la validité de B.

A titre d'exemple, on prouve : pour un entier naturel n, est pair, si n^2 alors n est pair. Nous basons la preuve sur des faits connus concernant les nombres pairs et impairs, et sur les manipulations algébriques standard.

Preuve : supposons que n^2 est pair et supposons que le contraire, que n ne l'est pas.
Alors il faut que n soit impair.
Par conséquent, n vaut un de plus qu'un multiple de 2 et peut s'écrire sous la forme 2k + 1, pour un certain nombre k.

Cela signifie que n^2 est donné par $n^2 = (2k + 1)^2$ = 4k 2 + 4k + 1 = 2(2k aussi un 2k) + 1 et est donc de plus qu'un multiple de 2.
Nous concluons que n est à la fois pair et impair, ce qui est clairement une contradiction.
Il ne peut donc pas être vrai que n soit impair.
Elle doit donc être paire.

Remarquez dans cette preuve que nous avons supposé que la prémisse A était vraie, et sommes arrivés à la contradiction que « non A » tient également. Une preuve indirecte qui arrive à une contradiction de ce type est généralement appelée une « preuve utilisant la contrapositif » : nous avons établi la validité de « A implique B » en démontrant que la CONTRAPOSITIVE « non B implique non A » est vraie. LA PREUVE D'EUCLIDE DE L'INFINITUDE DES PRIMES est un exemple de preuve indirecte qui ne repose pas sur la contraposée. EUCLIDE (300-260 av. J.-C.) fut le premier mathématicien à utiliser largement la technique de la preuve indirecte.

Une PREUVE DIRECTE tente d'établir la validité d'une proposition "si A, alors B" en supposant que la prémisse A est vraie et en suivant ses conséquences logiques jusqu'à ce que l'énoncé B soit établi. Cependant, toutes les propositions ne se prêtent pas à une approche directe. Par exemple, étant donné qu'un nombre n au carré n^2 est pair (c'est-à-dire n^2 = 2m, par exemple) il n'est pas immédiat de savoir comment procéder pour établir directement que n est par conséquent pair.

Toute preuve indirecte repose sur l'hypothèse qu'un énoncé qui ne peut pas être faux doit être vrai. Certains philosophes et mathématiciens qui étudient les LOIS DE LA PENSÉE remettent sérieusement en question cette hypothèse.

Voir aussi CONTRADICTION ; INDUCTIF DÉDUCTIVE RAISONNEMENT; PREUVE; CQFD ; THÉORÈME.

induction (réduction complète, induction finie, induction mathématique mathématique) La méthode de preuve connue sous le nom d'induction mathématique est utilisée par les savants depuis les temps les plus reculés, mais ce n'est qu'en 1838, grâce aux travaux du logicien et mathématicien anglais AUGUSTUS DE MORGAN , que le principe a été correctement identifié et décrit. Dans un contexte formel, le principe d'induction mathématique affirme :

Si un ensemble S de nombres vérifie les deux propriétés suivantes :

je. Le nombre 1 appartient à S. ii. Si un nombre k appartient à S, alors son successeur k + 1 aussi .

alors il faut que S contienne tous les nombres naturels 1, 2, 3,…

(Ce principe apparaît comme un AXIOME dans l'ensemble de postulats de GIUSEPPE PEANO pour la construction des nombres naturels.) Souvent, l'ensemble S est considéré comme un ensemble de nombres naturels n pour lesquels une propriété ou une formule P(n) est vraie : S = {n : P(n) tient}.

Pour illustrer le principe d'induction, nous allons prouver que, pour tout entier naturel n, nous avons que 1– 1 + 2 + 3 +…+ n est égal à n(n + 1). Soit P(n) représenter 2

Machine Translated by Google

cette assertion et définissons S comme l'ensemble de tous les nombres naturels pour lesquels cette assertion est vraie :

$$1– P(n) : 1 + 2 + 3 +…+ n = n(n + 1) 2 S =$$

{n : la formule P(n) est vraie}

Notre but est de montrer que tous les nombres naturels appartiennent à S (c'est-à-dire que P(n) est vrai pour tous les nombres naturels n). Il faut établir deux choses :

1. Le numéro 1 appartient à S.

Entrer n = 1 dans la formule donne l'énoncé manifestement vrai $1 = \frac{1–}{2} \times 1 \times (1 + 1)$. Donc P(1) est vrai et 1 S.

2. Supposons que le nombre k appartient à S. Autrement dit, supposons que la formule

$$1 + 2 +…+k = k(k + \frac{1–}{2}1)$$

est vrai. S'ensuit-il nécessairement que la formule correspondante pour k + 1 est valide ? Autrement dit, peut-on alors déduire, sous cette hypothèse, que

$$1 + 2 +…+ k + (k + 1) = (k + 1)(\frac{1–}{2}k + 1) + 1)$$

tiendra?

Pour cela, partons de l'équation P(k), supposée valide, et additionnons la quantité k + 1 de part et d'autre.
Cela donne:

$$1 + 2 +…+ k + (k + 1) = k(k + 1)\frac{1–}{2} + (k + 1)$$

Après avoir réarrangé et regroupé les termes à droite, cela se lit comme suit :

$$1 + 2 +…+ k + (k + 1) = (k + 1)(\frac{1–}{2}k + 2)$$

qui est l'énoncé P(k + 1). Par le principe d'induction mathématique, il s'ensuit maintenant que l'ensemble S contient bien tous les nombres naturels, c'est-à-dire que P(n) est une formule valide pour toutes les valeurs de n.

Le principe d'induction mathématique est une technique puissante qui peut établir la validité d'un nombre infini d'énoncés d'un seul coup. Comme illustré ci-dessus, il est particulièrement utile pour établir Formules et équations impliquant les nombres naturels. Un inconvénient, cependant, est que cette méthode de preuve ne donne aucune indication sur ce que devrait être la formule appropriée à prouver : la méthode de preuve inductive n'offre aucune idée, par exemple, de la raison pour laquelle la formule pour la somme des premiers n compter les nombres est $\frac{1–}{2} n(n + 1)$. Il faut arriver aux candidats pour les formules par d'autres moyens.

Le processus inductif est souvent assimilé à faire tomber une chaîne de dominos. Pour renverser avec succès une rangée de dominos debout, il faut :

1. Faites tomber le premier domino 2.
Assurez-vous que les dominos sont suffisamment espacés pour que, lorsqu'un domino tombe, il fasse tomber le suivant

Si l'on peut établir que ces deux propriétés sont valables, alors tous les dominos d'une chaîne (même infiniment longue) tomberont.

Malgré l'élégance et la simplicité du principe, il faut toujours faire preuve de prudence lors de l'utilisation du principe d'induction mathématique. L'argument amusant suivant, par exemple, illustre ce qui peut mal tourner :

Affirmation : tous les chevaux sont de la même couleur.

Nous le « démontrons » comme suit : Soit S l'ensemble de tous les nombres naturels pour lesquels l'énoncé suivant est vrai.

P(n) : si n chevaux se tiennent dans un champ, alors tous les chevaux de ce champ sont de la même couleur.

Il est clair que P(1) est vrai : si un seul cheval est debout dans un champ, alors tous les chevaux de ce champ sont de la même couleur. Supposons maintenant, malgré son absurdité, que P(k) est vrai, c'est-à-dire que tous k chevaux dans un champ doivent être de la même couleur. Considérons maintenant k+1 chevaux dans un champ. Enlevez un cheval, Chester, disons. Cela laisse k chevaux dans le champ, qui, selon notre hypothèse, doivent tous être de la même couleur. Ramenez Chester sur le terrain et retirez un autre cheval. Cela laisse à nouveau k chevaux dans le champ, qui, par hypothèse, doivent tous être de la même couleur. Cela montre que Chester est de la même couleur que les k premiers chevaux, et en fait que tous les k+1 chevaux sont de la même couleur. Nous avons, à partir de P(k), établi que P(k+1) découle. Par le principe d'induction mathématique, il s'ensuit maintenant que P(n) est vraie, quelle que soit la valeur de n. En particulier, tous les chevaux du monde sont de la même couleur.

Machine Translated by Google

Pour examiner cet argument, notez qu'il est bien vrai que P(1) est valide, et il est vrai que P(k) implique P(k+1) — pour presque toutes les valeurs de k. Le défaut dans l'argument ci-dessus est que bien que P(2) établit P(3), et P(3) établit P(4), et ainsi de suite, ce n'est pas le cas que P(1) établit P(2) : enlever un cheval d'un champ contenant seulement deux chevaux n'établit pas, hélas, que les deux chevaux sont de la même couleur. Dans notre chaîne de dominos, tous les dominos sauf les deux premiers sont correctement espacés : le premier domino ne renverse pas le deuxième domino lors de sa chute, et la chaîne reste debout.
Cela montre qu'il faut toujours faire attention à ce que tout argument présenté dans une preuve par induction soit bien valable pour toutes les valeurs de k.

Voir aussi PREUVE ; SOMMES DES POUVOIRS.

raisonnement inductif Voir DEDUCTIVE/INDUCTIVE RAISONNEMENT.

inégalité Un énoncé mathématique selon lequel une quantité ou une expression est supérieure ou inférieure à une autre s'appelle une inégalité. Les symboles suivants sont utilisés :

a > b, a est supérieur à ba
< b, a est inférieur à ba
≥ b, a est supérieur ou égal à ba ≤ b, a est inférieur ou égal à b

Les inégalités satisfont un certain nombre de PROPRIETES D'ORDRE.

Une inégalité est dite fermée ou inconditionnelle si elle est valable pour toutes les valeurs des variables, le cas échéant, qui apparaissent dans l'équation. Par exemple, les inégalités $3^2 2 + 1 > xx$, et $5 + y^2 \le 5, > 4y$ sont des inégalités fermées car elles sont toujours vraies. Les inégalités qui ne sont pas fermées sont dites ouvertes ou conditionnelles. L'ensemble des valeurs des variables apparaissant dans l'inégalité qui rend l'énoncé vrai est appelé l'ensemble solution de l'inégalité. Par exemple, l'inégalité ouverte 2x + 1 > 7 a pour ensemble de solutions l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels x > 3. L'ensemble solution de l'inégalité ouverte $a^2 + b 2 < 0$ est le ENSEMBLE VIDE.

Les inégalités ouvertes peuvent être résolues de la même manière que les équations. Comme le montrent les propriétés d'ordre, on peut ajouter ou soustraire la même quantité aux deux côtés de l'inégalité et préserver l'inégalité, ou on peut multiplier l'inégalité par une quantité positive. Multiplier par une quantité négative change le sens de l'inégalité. (Par exemple, si a < b, alors soustraire la quantité a + b des deux côtés donne –b < –a. Cela montre que l'effet de la multiplication par –1 est d'inverser le sens de l'inégalité.) Par exemple, on peut résoudre l'inégalité 2x + 1 > 7, comme suit :

$$2x + 1 > 7$$
$$2x > 6$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2x > \frac{1}{2}\cdot 6$$
$$x > 3$$

donnant en effet l'ensemble de solutions {x:x > 3}.

Il convient de noter que si a · b > 0, alors nous pouvons être sûrs que a et b sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs. Si, au contraire, a · b < 0, alors on peut être sûr que a et b sont de signes opposés. Ces observations sont essentielles pour résoudre des inégalités impliquant une seule variable élevée à la puissance seconde. Par exemple, pour résoudre l'inégalité ouverte $x^2 + x – 2 > 0$, factoriser le QUADRATIQUE pour obtenir (x + 1)(x – 2) > 0 et examiner les deux scénarios possibles. Soit x + 1 et x – 2 sont tous deux supérieurs à zéro (donnant que x doit être supérieur à 2), soit x + 1 et x – 2 sont tous deux inférieurs à zéro (donnant que x doit être inférieur à –1). Ainsi, l'ensemble solution de l'inégalité est l'ensemble de tous les nombres réels x avec x > 2 ou x < –1.

Une seule inégalité à deux variables définit une région dans le plan. Par exemple, l'inégalité 2x + y ≥ 3 est satisfaite par les points (0,3), (5,0) et (2,2), par exemple. Dans cet exemple, l'ensemble de solutions complet est le DEMI-PLAN fermé situé au-dessus de la ligne y = –2x + 3 dans le plan.

Il existe un certain nombre d'inégalités standard en mathématiques :

Inégalité triangulaire : Pour tout triangle dont les côtés sont a, b et c, nous avons : a + b > c.
Inégalité moyenne arithmétique-géométrique : Pour les nombres non négatifs $a1, a2, \ldots, an$ on a :

$$\sqrt[n]{\quad\quad} \quad \frac{\text{une 1 2 na}}{\text{– da une 1 2}}$$
$$n \qquad\qquad n$$

Inégalité de Bernoulli : Pour tout nombre réel x supérieur à 1 et entier positif n :

$$(1 + x)\, n > 1 + nx$$

Machine Translated by Google

(Cela peut être prouvé en tronquant le MACLAURIN SÉRIE:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \ldots,$$

On peut aussi montrer que l'inégalité est également vraie pour $-1 < x < 0$).

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour deux VECTEURS quelconques a et b, leur PRODUIT scalaire satisfait :

$$|a \cdot b| \leq |a| \times |b|$$

Ainsi, pour deux listes quelconques de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Inégalité du produit de Weierstrass : Pour toute liste de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ avec $0 \leq a_k \leq 1$ pour tout k, on a :

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

(Cela peut être prouvé par INDUCTION sur le nombre d'éléments de la liste.)

Inégalité de Napier : pour deux nombres réels positifs a et b , nous avons :

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln \ln b - \ln a}{1 - \ln a} < \frac{}{}$$

Inégalités exponentielles : Pour un nombre réel positif x et un nombre réel c, on a :

$$c^x < 1 + c(x - 1) \text{ si } 0 < c < 1 > 1 + c^x \; c(x - 1) \text{ si } c > 1$$

(Il s'agit d'une généralisation de l'inégalité de Bernoulli.)

Inégalité isopérimétrique : Pour toute figure géométrique fermée dans le plan de périmètre P, son aire A est inférieure à l'aire d'un cercle de même périmètre :

$$A \leq \frac{P^2}{4\pi}$$

L'égalité vaut si, et seulement si, cette figure est un cercle.

Une déclaration mathématique selon laquelle deux quantités ou expressions ne sont jamais égales s'appelle une inéquation. Par exemple, l'énoncé $3 \neq 5$ est une inéquation.

Les mathématiciens et les physiciens écrivent souvent $a >> b$ si a est significativement plus grand que b et $a << b$ est a est significativement petit. Par exemple, $n + 100 \approx n$ si $n >> 0$. Les mathématiciens plaisantent plus en utilisant le symbole ≤≥ pour signifier « inférieur à, supérieur à ou peut-être égal » lorsque l'on n'est pas sûr de la réponse numérique à un problème.

Voir aussi MOYENNE ARITHMÉTIQUE-GÉOMÉTRIQUE INÉGALITY ; PROBLÈME ISOPERIMETRIQUE ; INÉGALITÉ TRIANGULAIRE.

inférence En logique, le processus général de développement d'un ARGUMENT pour tirer une conclusion à partir d'un ensemble de prémisses est appelé inférence. Le processus peut être déductif ou inductif.

En statistique, l'inférence est le processus qui consiste à tirer une conclusion sur une population en se basant sur l'étude d'un échantillon. Parfois, la conclusion elle-même est appelée une inférence. Les statistiques inférentielles sont la science qui consiste à faire des inférences et des prédictions sur une population sur la base d'informations numériques recueillies à partir d'un échantillon.

Voir aussi RAISONNEMENT DEDUCTIF/INDUCTIF ; POPULATION ET ÉCHANTILLON ; STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

produit infini Le produit d'un nombre infini de facteurs, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots$, est appelé un produit infini.

Le nième nombre du produit est appelé le nième terme du produit, et le produit des n premiers termes, $P_n = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$ est appelé le nième produit partiel. En 1812, CARL FRIEDRICH GAUSS a introduit la notation

$\prod_{i=1}^{\infty} a_i$ pour un produit infini (et $\prod_{i=1}^{n} a_i$ pour le nième produit partiel).

Un produit infini peut avoir une valeur de zéro ($1 \times 1 \times \ldots$, par exemple), peut être infini en valeur 2 4 ($1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots$, par exemple) ou peut osciller en valeur ($1 \times (-1) \times 1 \times (-1) \times \ldots$, par exemple). Ce n'est que si les produits partiels P_n s'approchent d'une valeur finie non nulle L lorsque $n \to \infty$ que le produit infini est dit converger (vers la valeur L). Sinon le produit infini diverge. Par exemple, le produit infini

$$\prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$$

a nième produit partiel :

Machine Translated by Google

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

1– qui approche la valeur lorsque n → ∞. Ainsi on peut 2

écrire $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{2}$.

En prenant le LOGARITHME, on voit qu'une infinité

produit avec des termes positifs $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si, et

seulement si, la SERIES $\sum_{i=1}^{\infty} \ln a_i$ converge. (C'est pourquoi

les mathématiciens ne considèrent pas la convergence vers zéro comme une forme valide de convergence pour un produit infini : le valeur de la somme $\sum_{i=1}^{\infty} \ln a_i$ serait alors $-\infty$) Mathe

maticiens ont montré qu'une série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge

absolument exactement si $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + |a_i|)$ converge.

En 1656, le mathématicien anglais JOHN WALLIS a découvert la représentation remarquable suivante pour $\frac{\pi}{2}$ comme produit infini :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

Cette expression s'appelle aujourd'hui LE PRODUIT DE WALLIS .

Voir aussi CONVERGENCE ABSOLUE ; FONCTION ZETA.

infinitésimal Une quantité positive, supposée infiniment petite mais non nulle elle-même, est appelée un infinitésimal. L'existence abstraite de telles quantités a joué un rôle important, mais gênant, dans le développement précoce de CALCULUS. Les difficultés théoriques encourues par eux ont été rendues plus tard sans objet lorsque AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857) introduit la notion de LIMITE.

Les travaux de Cauchy ont placé le calcul dans un cadre théorique solide et ont supprimé le besoin de toujours parler en termes d'infinitésimaux. La notion est désormais considérée comme obsolète.

(Bien que les mathématiciens aient récemment développé une théorie de l'analyse non standard qui, dans un certain sens, inclut un concept valide d'un infinitésimal, après tout.)

Voir aussi FLUXION ; HISTOIRE DU CALCUL (essai).

infini Dans l'usage courant, le mot infini est utilisé pour désigner quelque chose qui est illimité, sans limites et sans fin. Par exemple, l'ensemble des nombres comptés 1, 2, 3, … est illimité (après un nombre compté donné, il y en a toujours un autre), et l'ensemble de ces nombres est dit infini. En géométrie, une ligne droite est généralement perçue comme sans fin, et a donc une étendue infinie. Dans le monde physique, cependant, il n'y a pas d'exemple clair de quantité infinie (ou, s'il y en avait, nous, en tant qu'humains, ne serions jamais capables de la percevoir pleinement). Les physiciens en sont venus à croire, par exemple, qu'il n'y a qu'un nombre fini d'atomes dans l'univers (de l'ordre de 1087 atomes) et que l'univers est de forme fermée et non d'étendue infinie. Si c'est effectivement le cas, alors il ne serait jamais possible de tracer une ligne infinie (il n'y a pas assez d'atomes pour l'encre), et si l'univers est effectivement délimité, la ligne peut éventuellement se reboucler sur elle-même. Néanmoins, l'infini est un concept abstrait que nous pensons pouvoir, à un certain niveau, comprendre. Il comporte cependant de nombreuses difficultés paradoxales, comme le démontrent les PARADOXES DE ZENO , L'HÔTEL INFINI DE HILBERT et le PARADOXE DE TRISTRAM SHANDY, par exemple.

La notion de quelque chose d'illimité apparaît en mathématiques dans un certain nombre de contextes variés. Par exemple:

1. Limites : En 1655, le mathématicien anglais John Wallis a introduit le symbole ∞ comme raccourci pour l'expression « devenir grand et plus positif ». Cette notation est utilisée aujourd'hui, en particulier, dans l'étude des LIMITS.

Par exemple, l'énoncé $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+n+1} = 5$ est

lire : « la quantité $\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+n+1}$ se rapproche de la

2 valeur 5 lorsque n devient grand et positif. L'équation $\frac{3-x}{x} = -2$ s'écrit :

« la fonction devient $\frac{3-x}{x}$ $\lim_{x\to\infty}$ grand et négatif lorsque x devient grand et positif. Cela signifie que pour tout nombre négatif -M on se soucie

Machine Translated by Google

à choisir, on peut toujours trouver une plus grande valeur de x qui pour $\frac{2}{x}$ est, et reste, inférieur à –M pour toujours plus grandes valeurs de x.

2. Géométrie : Dans LE THÉORÈME DE DESARGUES , le mathématicien français GIRARD DESARGUES (1591–1661) a trouvé pratique de considérer les droites parallèles comme se coupant en un certain point de l'infini. Ainsi, dans la théorie de la GÉOMÉTRIE PROJEC TIVE, la notion de points « infiniment éloignés » prend sens et contexte.

3. Théorie des ensembles : l'astronome et physicien italien GALILEO GALILEI (1564-1642) a observé que chaque nombre compté peut être mis en correspondance avec son carré, montrant en quelque sorte que l'ensemble infini des nombres comptés n'est pas plus infini que le sous-ensemble des nombres carrés :

12345 6 ...

bb bbbb

1 4 9 16 25 36 ...

Au 19e siècle, l'algébriste britannique AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871) et mathématiciens allemands JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916) et GEORG CANTOR (1845-1918) s'est rendu compte qu'il s'agit d'une propriété commune des ensembles infinis et qu'il est approprié d'utiliser cette propriété comme définition de ce que cela signifie pour un ensemble d'être infini :

> Un ensemble est infini si ses éléments peuvent être mis en correspondance, sans répétition, avec les éléments d'un sous-ensemble propre de lui-même.

Cette définition a l'avantage de préciser ce que cela signifie pour un ensemble d'être fini.

> Un ensemble est fini s'il n'est pas infini.

(Un commentaire doit être fait sur ce point. Bien que nous ayons tous une compréhension intuitive claire de ce que cela signifie pour un ensemble d'être FINI, il n'est pas du tout facile de fournir une description mathématique directe de ce concept. Cependant, il est possible pour montrer qu'aucun ensemble de la forme {1,2,3,…,n} n'est infini, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun moyen de faire correspondre les éléments de cet ensemble avec les éléments d'un sous-ensemble propre de lui-même sans produire de répétition. Ceci est fait avec un argument INDUCTION sur n. On peut l'utiliser comme un lien entre cette approche indirecte et notre intuition sous-debout.) Cantor est allé plus loin en développant une étonnante théorie de la CARDINALITÉ qui montre, entre autres, qu'il existe de nombreux types différents d'ensembles infinis, certains méritant d'être qualifiés de « plus infinis » que d'autres.

La notion d'infini est étudiée et utilisée depuis l'Antiquité. ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 av. J.-C.) a utilisé la notion de quantité infiniment petite pour développer des formules pour les aires et les volumes de figures et de solides courbes. (Dans un sens vague, on peut voir un cercle, par exemple, comme un polygone régulier avec une infinité de côtés, tous infiniment courts. Il est cependant préférable de voir le cercle comme la figure LIMITE d'une séquence de polygones réguliers .) Le géomètre EUCLID (ca.300–260 BCE) a prouvé que l'ensemble des nombres PREMIERS est infini, et ZENO OF ELEA (ca. 490–425 BCE) a contemplé l'infini dans ses études du temps, de l'espace et du mouvement.

Bien que les savants de l'antiquité grecque aient utilisé l'infini, ils s'en méfiaient. Euclide, par exemple, s'est donné beaucoup de mal pour formuler les choses d'une manière qui ne faisait jamais mention d'une quantité réellement infinie. Par exemple, il a prouvé qu'à partir de n'importe quelle collection finie de nombres premiers, on peut toujours en construire un de plus (plutôt que d'affirmer que l'ensemble des nombres premiers est infini), et dans son célèbre ouvrage LES ÉLÉMENTS, il n'a jamais fait mention de lignes qui continuer indéfiniment; il a seulement parlé d'étendre davantage les segments de ligne si n (Cette subtile tournure de phrase s'est avérée importante pour GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN avec son invention de la GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE au XIXe siècle .) termes de potentialité : étant donné une partie finie, on peut toujours fournir plus. Ce point de vue s'est maintenu pendant près de deux millénaires. Le travail de Cantor sur l'infini réel, inspiré des idées de départ de Dedekind et De Morgan, était considéré comme révolutionnaire à son époque.

inflection (inflexion) Voir CONCAVE UP/CONCAVE DOWN.

point d'inflexion (point d'inflexion) Un point sur une courbe auquel la ligne tangente à la courbe passe d'une rotation dans un sens (dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) à une rotation dans le sens opposé. La concavité de la courbe change en un tel point.

Voir aussi CONCAVE HAUT/CONCAVE BAS.

Machine Translated by Google

théorie de l'information La branche de PROBABILITÉ la théorie qui traite de la transmission, du traitement et de la vérification des messages envoyés par voie électronique s'appelle la théorie de l'information. Le domaine a été créé en 1948 par mathématicien américain CLAUDE EDWARD SHANNON, qui a montré le premier qu'il est possible d'encoder tous les types de informations (mots, sons, images) en simples séquences de bits 0 et 1 qui peuvent ensuite être transmises le long d'un fil sous forme d'impulsions. (Jusqu'alors, les scientifiques pensaient qu'il serait nécessaire pour transmettre des ondes électromagnétiques le long des fils.) Pour ajuster le bruit erroné qui est souvent transmis avec le message, les mathématiciens ont depuis développé des techniques de probabilité qui déterminent la probabilité que le message reçu soit gratuit à partir d'erreurs. Au fil des décennies, les mathématiciens ont également développé des contrôles de redondance efficaces pour aider à détecter et corriger les erreurs. Ces techniques sont beaucoup plus efficaces que de simplement répéter le message à des fins de comparaison.

La théorie de l'information est également utilisée pour mesurer la quantité d'informations qu'un signal, quel qu'il soit, pourrait contenir. Transmettre et recevoir correctement un seul lettre de l'alphabet - c'est-à-dire l'une des 26 lettres - contient plus d'informations, par exemple, que réception d'un seul chiffre binaire, 0 ou 1. Les mathématiciens utilisent les logarithmes pour mesurer le contenu de l'information et dire que la réception d'une lettre de l'alphabet contient log $\frac{2\ 26}{\text{enregistrer}\ 2\ 2} \approx 4\ 7$ autant d'informations que la réception d'un chiffre binaire. (Nous avons un $\frac{\text{enregistrer}\ 2\ 2}{\text{journal}\ \ 2\ 2}$.) Cela suppose que =1 chaque lettre de l'alphabet est également susceptible de se produire. Dans général, si la probabilité que la lettre a soit envoyée est p1 , la lettre b est p2 , et ainsi de suite, alors la mesure de le contenu informationnel est donné par :

$$– p1 \log_2 p1 – p2 \log_2 p2 –…– p26 \log_2 p26$$

(Cela correspond à la valeur précédente de 4,7 calculée lorsque chaque probabilité pi vaut 1/26.) Cette quantité est une mesure de l'entropie de l'ensemble de données initial.

Le domaine de la théorie de l'information a des applications évidentes dans les domaines de la télégraphie, de la transmission radio et de la comme, mais il a également été récemment utilisé pour analyser les humains parole, dans l'étude des langues et dans la cybernétique.

valeur instantanée La valeur d'une grandeur variable, telle que VELOCITY, à un instant donné dans le temps est appelée sa valeur instantanée. Une valeur instantanée est un DÉRIVÉ.

entier (nombre dirigé, nombre signé) L'un des nombres entiers positifs ou négatifs , ou zéro, est appelé un entier : …–3,–2,–1,0,1,2,3,… Plus précisément, une fois les NOMBRES NATURELS ont été définis via PEANO'S POSTULATS, par exemple, on peut définir un entier comme étant n'importe quel quantité qui peut être exprimée comme la somme ou la différence de deux nombres naturels. (Par exemple, le nombre -5 peut être considéré, formellement, comme le couple de nombres naturels 3 et 8 écrit sous la forme 3–8. Il peut être défini aussi bien par la paire 1-6 que par la paire 12-17, pour exemple.) La différence de deux nombres entiers est toujours un autre entier, qui constitue un RING mathématique. L'ensemble des nombres entiers est noté Z (du mot allemand Zahlen pour "chiffres"). mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918) a montré que l'ensemble des nombres entiers est COUNTABLE et donc CARDINALITE 0 .

La SÉRIE TAYLOR de $f(x) = \frac{x}{(1 - x)^2}$ a la entiers apparaissant comme coefficients :

$$\frac{x}{(1 - x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$$

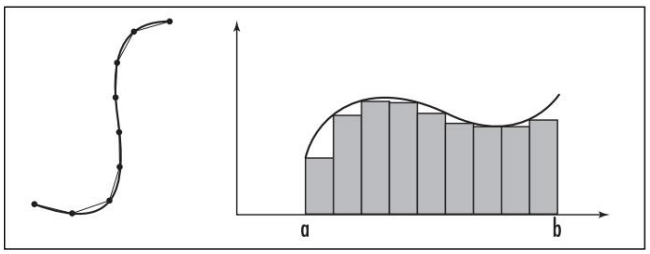
(Cette série est valable pour –1 < x < 1.) Cela montre, pour 1 exemple, qu'en fixant $x = \frac{1}{100}$, la fraction a le dix- nombres entiers apparaissant tour à tour à chaque décimale : 10– = 0.12345.... (Malheureusement notre pratique de "porter 81 ing digits » masque le fait que le modèle que nous voyons continue.)

Voir aussi FONCT PLANCHER/PLAFOND/ PARTIE FRACTIONNELLE TIONS.

intégral Voir ANTIDIFFÉRENCIATION; CAL INTÉGRAL CULUS.

calcul intégral Le calcul de sommes de quantités infiniment petites, INFINITESIMALES, est appelé calcul intégral. Par exemple, considérons le problème de trouver la longueur d'un chemin courbe en utilisant uniquement une ligne droite l'indicateur. On pourrait approximer la distance le long la courbe en marquant un certain nombre de points le long de la courbe, mesurant les segments de droite entre eux, et en additionnant les longueurs de ces segments.

Machine Translated by Google



Longueur et superficie approximatives

Une approximation encore meilleure pourrait être faite en utilisant plus de points et par conséquent des segments de ligne plus courts. La longueur réelle de la courbe serait la valeur LIMITE de ces approximations améliorées car nous utilisons des segments de ligne de plus en plus courts reliant de plus en plus de points sur la courbe (la somme de segments de ligne infiniment courts). De même, l'aire sous une courbe dessinée dans le plan peut être approchée comme la somme des aires d'un nombre fini de rectangles dessinés sous la courbe.
L'utilisation de rectangles de plus en plus étroits donnera des approximations de mieux en mieux. L' aire réelle sous la courbe est la valeur limite de ces approximations (la somme de rectangles infiniment étroits).

Tout processus qui consiste à segmenter une quantité en éléments gérables, à additionner et à prendre la limite de ces sommes au fur et à mesure que le processus est affiné relève de la catégorie du calcul intégral. Traditionnellement, le calcul intégral est d'abord enseigné comme le processus de recherche de l'aire sous une courbe y = f(x) sur un intervalle [a,b]. La zone désignée

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

est appelée intégrale définie, et est définie comme étant la limite, lorsque h tend vers zéro, des sommes des aires de rectangles de largeur au plus h, utilisées pour approximer l'aire de la courbe comme décrit ci-dessus. Une telle approximation avec des rectangles est appelée une somme de Riemann, en l'honneur du mathématicien allemand BERNHARD RIE MANN (1826-1866), dont les travaux ont conduit les mathématiciens à montrer que cette approche est bien mathématiquement valable, en particulier que, dans des conditions raisonnables, tout les méthodes d'approximation de l'aire sous la courbe conduisent à la même valeur limite.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), l'un des inventeurs de CALCULUS, a introduit le symbole ∫ pour représenter une intégrale. Il le considérait comme une forme allongée S dénotant la somme, et il a appelé la théorie de l'intégration calculus summatorius. Le mathématicien suisse Johann Bernoulli (1667–1748) de la célèbre FAMILLE BERNOULLI a travaillé avec Leibniz pour développer la théorie, mais il a préféré le nom de calcul intégral et l'utilisation d'une lettre majuscule I comme signe d'intégration. (En latin, le mot integralis signifie « faire un tout ».) Les deux messieurs ont trouvé un heureux compromis en utilisant le nom de Bernoulli pour la théorie et le symbole de Leibniz pour l'intégrale.

L'idée d'utiliser une limite pour calculer les aires des figures courbes, ou les longueurs des chemins courbes, a été utilisée par les érudits depuis l'époque d' ARCHIMÈDE DE SYRACUSE au IIIe siècle avant notre ère jusqu'à l'époque de PIERRE DE FERMAT au milieu du 17ème siècle. En pratique, cependant, les techniques employées pour effectuer ces calculs ont toujours été extrêmement difficiles et compliquées. La grande réussite de Leibniz et ISAAC NEWTON (1642-1727), découvreurs indépendants du calcul, a été de reconnaître que l'intégration est simplement un processus de différenciation inverse, aujourd'hui appelé ANTIDIF FERENTIATION. Ce résultat, connu sous le nom de THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL, indique essentiellement que pour trouver l'aire sous une courbe y = f(x) sur un intervalle [a,b], recherchez une fonction F(x) dont la DÉRIVÉE est f(x). Alors:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La fonction F(x) est appelée primitive de f. Le membre de droite de cette équation est souvent abrégé en $F(x) \Big|_a^b$ parabole y = x 2 de x = 0 à x = 2, $\int_a^b$ un . Ainsi, par exemple, la zone sous le est donnée par − résultat évite tout besoin de $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{8}{3}$. Ce remarquable travailler avec des limites compliquées.

Pour mettre en évidence l'interaction entre l'intégration et la différenciation inverse, la primitive d'une fonction f(x) est généralement notée ∫f(x)dx et est appelée l'intégrale indéfinie de f. Il est défini à une CONSTANTE D'INTÉGRATION près. Ainsi ∫f(x)dx est une fonction dont la dérivée est f(x) (alors que l'intégrale définie $\int_a^b$ nombre est égal à l'aire sous la courbe y = f(x) sur l'intervalle un f(x)dx est un [a,b)]). L'idée maîtresse du calcul intégral est le développement de méthodes pour trouver les primitives des fonctions.

Puisque la dérivée de la somme de deux fonctions est la somme des dérivées et que la dérivée d'un

Machine Translated by Google

fonction multipliée par un nombre k est juste k fois sa dérivée, nous avons :

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

Les résultats correspondants pour les intégrales définies sont également vrais. Cela découle du théorème fondamental du calcul (puisque ces résultats sont vrais pour les primitives), mais ils peuvent également être considérés comme valides par des arguments géométriques. (Par exemple, si les valeurs d'un graphique sont multipliées par un nombre k, c'est-à-dire si la fonction y = f(x) est remplacée par y = k · f(x), alors l'aire sous le graphique augmente de a facteur de k.)

Le tableau suivant montre quelques intégrales courantes :

f (x)	∫f (x)dx	
r x	$\frac{x^{r+1}}{1\ r+}$ + C fourni r	1 ≠ –
$\frac{1}{X}$	ln |x| +C	
xe _	xe _ +C	
hache e	$\frac{1}{un}$ hache e +C	
un^x	$\frac{un^X}{\text{—ln a}}$ + C	
en x	x lnx – x + C	
péché x	–cos x + C	
parce que x	sinx + C	
bronzer x	–ln |cos x| +C	
SCC x	ln |csc x – lit x| +C	
s x	ln |sec x + tan x| +C	
lit bébé x	ln |sin x| +C	
péché2 x	$\frac{1}{2}$ x – $\frac{1}{}$ péché 2x + C 4	
cos2 x	$\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{4}$ péché 2x + C	
sinh x	matraque x + C	
coche x	sinh x + C	
f ′(x) —f (x)	ln |f (x)| +C	

Il existe un certain nombre de techniques pour trouver les intégrales indéfinies de fonctions plus complexes telles que comme INTÉGRATION PAR PARTIES et INTÉGRATION PAR SOUS STITUTION.

Voir aussi ANTIDIFFÉRENCIATION ; CALCUL; DIF CALCUL FERENTIEL ; DOUBLE INTÉGRALE ; L'HISTOIRE DE CALCUL (essai); INTEGRALE INCORRECTE ; NUMÉRIQUE L'INTÉGRATION.

test intégral Voir SÉRIE CONVERGENTE.

intégrande La fonction à intégrer s'appelle l'intégrande. Par exemple, l'expression f(x) dans l'une ou l'autre des intégrales ∫f (x)dx ou ∫ ba f (x)dx est l'intégrande.

Voir aussi ANTIDIFFÉRENCIATION ; CALCUL INTÉGRAL.

intégration par parties Cette technique d'intégration est utile pour trouver l'intégrale du produit de deux fonctions. Il utilise la RÈGLE DU PRODUIT pour différencier en sens inverse. Plus précisément, la règle de produit se lit comme suit :

$$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = u'(x)v(x) – u(x)v'(x)$$

L'intégration des deux côtés et le réarrangement donnent donc :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) – \int u'(x)v(x)dx$$

(UNE CONSTANTE D'INTEGRATION apparaîtra lorsque toutes les intégrales seront finalement calculées.) Ainsi, on peut utiliser efficacement cette formule si l'intégrale ∫u′(x)v(x)dx s'avère beaucoup plus facile à calculer. Par exemple, pour évaluer ∫x cos x dx, écrivez : u(x) = x et v′(x) = cos(x), ce qui donne u′(x) = 1 et v(x) = sin(x) (en ignorant encore une constante d'intégration pour le moment) de sorte que :

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) – \int 1 \cdot \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

On choisit typiquement le facteur facile à différencier comme étant u(x) et le facteur simple à intégrer pour v′(x).

La formule d'intégration par parties peut être utilisée même si l'intégrande est composée d'un seul facteur. On peut « insérer un 1 » dans l'intégrande pour imaginer qu'il existe un second facteur égal à la fonction constante 1. Pour illustrer, pour calculer ∫ln(x)dx écrire : ∫ln(x)dx = ∫ln(x) · 1dx et ensemble :

Machine Translated by Google

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int v'(x)u(x)\,dx$$

$$u(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = x$$

Alors:

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - x + C$$

La formule d'intégration par parties peut être appliquée plus plusieurs fois pour résoudre un problème d'intégration. Pour exemple, pour évaluer $\int e^x \cos(x)dx$, une application de la technique donne :

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx$$

L'application de la technique d'intégration par parties à la seconde intégrale donne :

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x)dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx \\ &= e^x \sin(x) - [-e^x \cos(x) - \int e^x (-\cos(x))dx] \\ &= e^x (\sin(x) + \cos(x)) - \int e^x \cos(x)\,dx\end{aligned}$$

L'algèbre montre maintenant que l'intégrale recherchée est donnée par :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

La méthode d'intégration par parties a été découverte par Mathématicien anglais BROOK TAYLOR (1685–1731).

Voir aussi ANTIDIFFÉRENCIATION ; CALCUL INTÉGRAL; INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION ; RÉCURRENCE RELATION.

intégration par substitution (changement de variable, règle de substitution pour l'intégration) Cette technique d'intégration permet de trouver facilement l'intégrale d'une fonction reconnu comme une COMPOSITION de deux fonctions plus simples. C'est essentiellement la RÈGLE DE LA CHAÎNE pour la différenciation employé à l'envers. Plus précisément, la règle de la chaîne stipule :

$$\frac{d}{dx}f(u(x)) = f'(u(x))\,u'(x) = f'(u(x))\frac{du}{dx}$$

L'intégration des deux côtés donne :

$$\int f'(u(x))\frac{du}{dx}\,dx = f(u(x)) + C$$

Notant que, puisque f est la primitive de f', le membre de droite de cette formule peut être considéré comme le intégrale indéfinie de f′ évaluée avec u comme variable. Il est donc valide d'écrire :

$$\int f'(u(x))\frac{du}{dx}\,dx = \int f'(u)\,du$$

Cette équation est l'équation de changement de variables pour l'intégration. Par exemple, nous pouvons l'utiliser pour évaluer $\int 2x(1+x^2)^4\,dx$. Réglage $u(x) = 1 + x^2$, donnant $\frac{du}{dx} = 2x$, l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}\int x(1+x^2)^4\,dx &= \int u^4\frac{du}{dx}\,dx \\ &= \int u^4\,du \\ &= \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= \frac{1}{5}(1+x^2)^4 + C\end{aligned}$$

Remarquez que la notation que nous avons utilisée ici imite les propriétés des fractions : nous sommes autorisés à remplacer un terme $\frac{du}{dx}$ dx sous un signe entier par le terme dx.

Lors de l'utilisation de cette technique, on choisit généralement u(x) être une fonction qui simplifie une partie compliquée de l' INTEGRAND, puis ajuste les choses pour que facteur $\frac{du}{dx}$ apparaît explicitement. Par exemple, pour évaluer $\int x^2\sqrt{x^3-1}\,dx$, il est naturel de poser $u(x) = x^3 - 1$. Alors $\frac{du}{dx} = 3x^2$, et nous avons:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3-1}\,dx &= \int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}\,dx \\ &= \int \frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9}(x^3-1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Machine Translated by Google

Lors du calcul d'une intégrale définie par cette technique, il est conseillé de calculer d'abord l'intégrale indéfinie puis, à la fin du processus, de travailler avec les limites d'intégration. Par exemple, l'intégrale définie $\int_2^5 1 \times \sqrt{x\ 3 - 1}\ 1 - dx$ n'est pas égal à $\int_1^5 3\sqrt{u}\ du$, puisque le les valeurs x = 1 à x = 5 font référence à la variable x et non à la nouvelle variable u. Nous calculons :

$$\int_1^5 1\ 2 \times \sqrt{dx^3} - = - \left(\frac{2}{9}\ 3x - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^5 \quad 2 = \frac{124}{9}\ \frac{3}{2}$$

Voir aussi ANTIDIFFÉRENCIATION ; CALCUL INTÉGRAL LUS ; INTÉGRATION PAR PIÈCES.

intercepter Un point où deux chiffres se croisent est appelé un intercept. Le terme est généralement réservé aux emplacements auxquels le GRAPHIQUE D'UNE FONCTION croise l' axe des x et l' axe des y dans un système de COORDONNÉES CARTÉSIENNES, pour former ce qu'on appelle les intersections x et y. Si une ligne droite a une intersection x (a, 0) et une intersection y (0, b), alors l'équation de la ligne est donnée par $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. C'est ce qu'on appelle la "forme d'intersection b " de son équation.

L' ordonnée à l'origine d'une fonction arbitraire y = f(x) est le point (0, f(0)).

intérêts Les frais payés pour l'utilisation de l'argent sont appelés intérêts. Par exemple, les sociétés de prêts hypothécaires facturent aux acheteurs de maisons des frais pour emprunter de l'argent, et les sociétés de cartes de crédit facturent aux clients des frais pour le privilège d'utiliser l'argent de la société pour effectuer des achats. À l'inverse, les banques paient de l'argent aux clients pour maintenir un solde sur un compte d'épargne. (Les clients ont, en fait, prêté de l'argent à l'institution.) Dans un tel arrangement, le montant emprunté ou investi est appelé le principal ou le capital, et les frais, exprimés en pourcentage, c'est-à-dire en nombre de dollars. pour cent à payer chaque année du prêt, s'appelle le taux d'intérêt.

Il existe deux types d'intérêts. Le premier, l'intérêt simple, est calculé uniquement sur le principal. Par exemple, si un client emprunte 3 000 USD pendant 3 ans avec un intérêt simple calculé à 15 % par an, le client a accepté de payer 0,15 × 3 000 = 450 USD pour chaque année du prêt, plus de restituer les 3 000 USD initiaux à la fin de la période de 3 ans. Le client paie donc un total de 4 350 $ à la fin des 3 ans.

En général, le total des intérêts que j'ai payés sur un montant principal P à un taux d'intérêt annuel R (exprimé sous forme décimale) pendant T années est donné par la formule :

$$Je = P \times R \times T$$

(Dans notre exemple, I = 3 000 × 0,15 × 3 = 1 350.) À la fin du prêt, le montant A dû est :

$$UNE = P + je = P + P \times R \times T = P(1 + RT)$$

Il est cependant rare aujourd'hui qu'un établissement prêteur accorde des prêts avec des frais calculés sur la base d'intérêts simples. En règle générale, on s'attend également à ce que l'on paie des intérêts sur tout intérêt encouru au fur et à mesure que le prêt progresse.

L'intérêt composé est calculé en ajoutant l'intérêt au principal et en recalculant l'intérêt à la fin des « périodes de conversion » convenues. Par exemple, une société de carte de crédit peut facturer 18 % d'intérêts par an, mais les intérêts seront composés mensuellement (à un taux de 18/12 = 1,5 % par mois).

Ainsi, après avoir emprunté 1 000 $, disons, un client devrait rembourser le principal plus 0,015 × 1 000 = 15 $ d'intérêts, soit un total de 1 015 $, à la fin du premier mois. À défaut de le faire, le client devra alors rembourser ce montant, plus 1,5 % supplémentaire sur ce montant, soit un total de 1 015 × (1 + 0,015) = 1 030,23 $ à la fin du deuxième mois. A la fin de chaque mois écoulé,

le montant dû augmente d'un facteur $1 + \frac{0.18}{12}$

$= + (.) 1\ 0\ 015$. Après 1 an, soit 12 mois, le solde

sur la carte de crédit sera donc $1{,}000\ 1 \times + \left(\frac{0.18}{12} \right)^{12} =$

1 195,62 $.

En général, si un montant principal de P dollars est emprunté à un taux d'intérêt de R % par an (exprimé sous forme décimale) et que l'intérêt est composé n fois par an pendant T années, alors le montant A dû à la fin de cette période est donnée par la formule :

$$PA = \left(1 + \frac{R}{n} \right)^{NT}$$

Machine Translated by Google

Considérons maintenant une banque qui propose son épargne compte clients un taux d'intérêt annuel de 10 pour cent composé hebdomadairement. Un investissement de 1 000 $ après le 1 année donnerait donc $1 000 ,1 × + 0.10 52 52 = $,1105 06 . Si les intérêts sont plutôt calculés quotidiennement, les clients recevoir un rendement légèrement meilleur : 1,000 1 × + 0.10 365 365 = = 1 105,16 $, et un rendement encore meilleur si l'intérêt est composé toutes les heures, voire toutes les minutes. Le rendement maximal possible est atteint lorsque l'intérêt est calculé à chaque instant.

Au milieu des années 1700, le mathématicien suisse LEON HARD EULER s'est attaqué au problème du calcul de l'intérêt composé en continu et a montré que lorsque n devient grand, la quantité A = P(1 +)nT R– n se rapproche de la valeur PeRT. (Une étude du nombre e établit cette affirmation.) La formule :

$$A = PERT$$

représente donc le solde d'un investissement, ou d'un prêt, après T ans, sous l'état idéal d'intérêt composé en continu. Ainsi, notre investissement de 1 000 $, après 1 an, composé en continu à raison de 10 pour cent par an, donne un rendement de 1 000 × e 0.10×1 = 1 105,17 $. Les banques utilisent aujourd'hui cette formule pour calculer intérêts sur les comptes d'épargne.

La pratique consistant à facturer des frais pour l'utilisation de l'argent est un ancien. Les archives montrent que de nombreuses civilisations, les Hébreux, les Grecs, les Romains et même les Babyloniens de 2000 avant notre ère, par exemple, accusaient intérêts simples sur les emprunts. Les Romains appelaient cette pratique l' usure et les frais atteignaient souvent 60 %. Certains ordres religieux, dont le christianisme, le judaïsme, et l'islam, ont remis en question l'éthique de la pratique, arguant que l'on ne devrait payer des frais que pour l'utilisation de quelque chose qui pourrait être usé ou perdre de la valeur en raison de usure normale. (A l'époque, on ne voyait pas l'argent perdre toute valeur pendant la durée d'un prêt.) Pendant de nombreux siècles, la pratique consistant à facturer des frais pour l'utilisation de l'argent était interdit par ces ordonnances.

Au cours de la croissance de l'industrie et du commerce au Moyen Âge et Renaissance, les mentalités changent. De plus en plus de personnes ont demandé des prêts en espèces pour prendre participer à de nouvelles opportunités, et les prêteurs ont estimé qu'il était approprié mangé pour être indemnisé pour ne pas avoir participé à ces opportunités elles-mêmes. Les prêteurs ont recommencé à facturer des frais. L'église a assoupli son attitude envers l'usure, et de nouveaux établissements, appelés banques, ont été formés pour gérer, stocker et prêter de l'argent. Le terme intérêt de l'expression latine id quod intérêt signifiant "ce qui est entre » a bientôt remplacé le terme usure. Aujourd'hui le le mot usure n'est utilisé que dans un contexte négatif d'imposition de taux d'intérêt illégalement élevés.

Voir aussi É.

angle intérieur L' ANGLE formé par deux côtés d'un POLYGONE situé à l'intérieur du polygone est appelé un intérieur angle. Par exemple, les quatre angles intérieurs d'un ANGLE RECT égal à 90°.

Si un angle intérieur est supérieur à 180°, alors l'angle est appelé un "angle rentrant" et le polygone est concave. Tout angle intérieur inférieur à 180° est appelé "saillant."

Chaque angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés équivaut à n -2 n × 180°.

Voir aussi CONCAVE/CONVEXE ; TRANSVERSALE.

théorème des valeurs intermédiaires (théorème de Bolzano) Du nom du mathématicien tchèque BERNHARD PLACIDUS BOLZANO (1781-1848), le théorème des valeurs intermédiaires affirme que si f(x) est une fonction CONTINUE définie sur un INTERVALLE fermé, alors cette fonction prend toutes les valeurs entre f(a) et f(b); c'est-à-dire si N est un nombre quelconque entre f(a) et f(b), alors il y a au moins un point c entre a et b tel que f(c) = N. Par exemple, la fonction f(x) = x 2 est continu sur l'intervalle [3,4] et a f(3) = 9 et f(4) = 16. Puisque 11 est compris entre 9 et 16, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'un nombre c, compris entre 3 et 4, tel que f(c) = c 2 = 11, c'est-à-dire qu'il prouve que le racine carrée de 11 existe.

Le théorème est intuitivement clair si nous considérons une fonction continue sur un intervalle fermé comme une fonction dont graphique se compose d'une seule pièce continue sans lacunes, sauts ou trous : en déplaçant un crayon de la gauche l'extrémité (a, f(a)) à l'extrémité droite (b, f(b)), il semble évident que la pointe du crayon adopte toutes les « hauteurs » entre hauteur initiale f(a) et hauteur finale f(b). En escaladant le face d'une montagne, disons, il faut en effet traverser

Machine Translated by Google

chaque hauteur intermédiaire de la base au sommet. Une preuve rigoureuse du théorème, cependant, repose sur la notion de "complétude" des nombres réels (ce qui signifie qu'aucun point, comme la racine carrée de 11, ne manque à la droite réelle). Il s'agit d'une propriété subtile, qui n'a été correctement comprise qu'à la fin des années 1800 avec la construction d'un DEDEKIND CUT.

Le théorème des valeurs intermédiaires est utile pour localiser les racines des équations. Par exemple, considérons la fonction f(x) = x 3 +2 x – 5. Elle est continue sur l'intervalle [1,2] et vérifie f(1) < 0 et f(2) > 0. Il s'ensuit alors que l'équation x + 2x – 5 = 0 a une racine quelque part entre 1 et 2. En travaillant avec des intervalles de plus en plus petits, on peut souvent utiliser cette méthode pour déterminer l'emplacement d'une racine avec un bon degré de précision. La MÉTHODE DE BISECTION, par exemple, emploie cette technique.

Le théorème des valeurs intermédiaires a un certain nombre de conséquences amusantes :

> En théorie, il est toujours possible de couper un pancake, quelle que soit sa forme irrégulière, exactement en deux avec une seule coupe en ligne droite.

Tenez un couteau à gauche de la crêpe afin que 100 % du gâteau se trouve à sa droite. Faites maintenant glisser le couteau, en parallèle, sur la crêpe jusqu'à ce qu'il repose de l'autre côté du gâteau. À cet endroit, zéro pour cent de la crêpe se trouve à droite du couteau. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il doit y avoir un emplacement intermédiaire pour le couteau qui donne la valeur de 50 % à sa droite. C'est-à-dire qu'il existe, en théorie, une position de couteau qui coupe la crêpe exactement en deux.

Notez que ce résultat ne dépend pas de l'angle auquel nous tenons initialement le couteau - verticalement, horizontalement ou en diagonale. Nous avons en effet montré qu'il est toujours possible de couper une crêpe en deux avec un couteau tenu selon n'importe quel angle préalablement réglé.

> En théorie, il est toujours possible de couper simultanément deux crêpes chacune exactement en deux avec une seule coupe en ligne droite, peu importe la forme des crêpes ni leur emplacement sur la table.

Ce résultat est connu sous le nom de théorème des deux crêpes. Le résultat précédent nous assure que nous sommes toujours capables de couper la première crêpe exactement en deux, en pointant le couteau dans n'importe quel angle que nous voulons choisir. Le souci est que le couteau pourrait ou non couper la deuxième crêpe. Souper Dans cette pose, nous trouvons une direction, considérons cet angle comme zéro degré, qui coupe la première crêpe en deux, mais manque complètement la deuxième crêpe, avec 100 % de la deuxième crêpe se trouvant à droite du couteau, par exemple. Tourner le couteau à 180°. Nous avons maintenant une coupe au couteau (même ligne, direction opposée) qui coupe la première crêpe exactement en deux, la deuxième crêpe se trouvant entièrement à sa gauche, c'est-à-dire zéro pour cent à droite. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il doit y avoir un angle intermédiaire entre zéro degré et 180 ° qui coupe le premier pancake exactement en deux, et 50 % du deuxième pancake se trouve à sa droite, c'est-à-dire un angle qui tranche simultanément le gâteau. deuxième crêpe en deux également.

> À tout instant, il y a deux points sur l'équateur terrestre directement opposés l'un à l'autre avec exactement la même température de l'air.

Pour chaque position θ degrés de longitude sur l'équateur, soit f(θ) la température de l'air à cette position moins la température de l'air au point opposé de l'équateur, à θ + 180° :

$$f(\theta) = \text{temp}(\theta) - \text{temp}(\theta + 180°)$$

Notez que f(θ + 180°) est égal à la même valeur, mais de signe opposé, à f(θ) :

$$f(\theta + 180°) = \text{temp}(\theta + 180°) - \text{temp}(\theta) = -f(\theta)$$

Ainsi la fonction f(θ) passe de valeurs positives à négatives. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il doit y avoir un emplacement intermédiaire où la fonction est nulle.

C'est la position souhaitée sur l'équateur terrestre.

Voir aussi THÉORÈME DES VALEURS EXTRÊMES ; UN POINT FIXE; THÉORÈME JAMBON-SANDWICH ; SPHÈRE.

interpolation Le processus d'estimation de la valeur d'une fonction entre deux valeurs déjà connues est appelé interpolation. Par exemple, si la température d'une tasse de thé était initialement de 200 °F, et deux minutes plus tard, elle était de 180 °F, on pourrait deviner que sa température à la minute était de 190 °F, en supposant que la température diminue régulièrement au fil du temps. Ceci représente la méthode d'interpolation la plus simple, appelée interpolation linéaire : nous supposons que la variation de la fonction peut être décrite comme une droite passant par les valeurs connues.

Machine Translated by Google

Si une fonction f a des valeurs f(a) et f(b) aux emplacements a et b, l'interpolation linéaire estime la valeur de la fonction en x, entre a et b, comme :

$$f(x) \approx f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(a))$$

Si le graphe de f est lisse et l'intervalle [a,b] est petit, puis l'interpolation linéaire donne généralement un bon approximation de la vraie valeur. Si, toutefois, l'intervalle est grand, il est moins probable qu'il restera le cas. Par exemple, étant donné que 32 = 9 et 34 = 81, linéaire l'interpolation suggère que 33 (ce qui équivaut à 27) est approximativement $9 + \frac{3-2}{4-2}(81-9) = 45$.

+ Les méthodes d'interpolation améliorées prennent en compte compte d'autres valeurs de données. Par exemple, JOSEPH-LOUIS La méthode d'interpolation de LAGRANGE , appelée LAGRANGE'S FORMULA, estime les valeurs de la fonction en ajustant un POLY NOMIAL à toutes les valeurs de données connues. Alternativement, s'il on soupçonne, par exemple, que la fonction est exponentielle, c'est-à-dire de la forme $y = b^x$, puis interpolation linéaire fonctionne bien pour le logarithme de la fonction : la relation log y = b log x est linéaire.

L'EXTRAPOLATION est le processus d'estimation de la fonction des valeurs hors de la plage des valeurs observées.

Voir aussi RÉGRESSION.

intervalle Tout segment unique de la droite numérique est appelé un intervalle. Plus précisément, un intervalle est un ensemble de nombres contenant tous les nombres réels entre deux numéros donnés. Les nombres donnés sont appelés points finaux, et ils peuvent ou non être considérés comme partie de l'intervalle. Par exemple, l'ensemble de tous les réels les nombres compris entre 2 et 5 inclus sont un intervalle ; comme l'est l'ensemble de tous les nombres réels strictement supérieurs à 9 mais inférieur ou égal à 23.

Un intervalle est dit fermé si les deux extrémités sont inclus. Les crochets sont utilisés pour indiquer que ce est le cas. Par exemple,

[un B]

désigne l'ensemble de tous les nombres réels x qui satisfont $a \le x \le b$. Sur une droite numérique, les extrémités sont marquées par des cercles noirs pour indiquer qu'elles sont incluses.

Un intervalle est ouvert si aucun point de terminaison n'est inclus. Les parenthèses sont utilisées pour indiquer qu'il s'agit de l'intention. Par exemple:

(un B)

désigne l'ensemble de tous les nombres réels x qui satisfont $a < x < b$. Sur une droite numérique, les extrémités sont marquées par des cercles pour indiquer qu'ils ne sont pas inclus.

Si une variable x satisfait soit $a \le x < b$ soit $a < x \le b$ on dit alors qu'il est situé dans un intervalle semi-ouvert notées respectivement :

[a,b) ou (a,b]

Sur une droite numérique, un cercle noirci marque le point final inclus dans l'intervalle et un cercle ouvert le point final qui est exclu.

Avec ce système de notation, les deux intervalles décrites dans le paragraphe d'ouverture sont ainsi notées [2,5] et (9,23]. Certains textes utilisent des crochets inversés au lieu de parenthèses pour indiquer l'exclusion des extrémités - ainsi un intervalle ouvert est noté]a,b[, et a intervalle semi-ouvert comme [a,b[, par exemple.

La longueur d'un intervalle est la distance entre son points de terminaison. Par exemple, l'intervalle (9, 23] a une longueur 14, tout comme les intervalles [9, 23], [9, 23) et (9, 23).

L'incorporation du symbole ∞ pour l'infini permet de pour désigner des intervalles non bornés. Par exemple, [a, ∞) désigne l'ensemble de tous les nombres réels x plus grands que ou égal à a ; (–∞,a) désigne l'ensemble de tous les nombres réels x strictement inférieur à a ; et ainsi de suite. Parfois, les mathématiciens écrivent (–∞,∞) pour l'ensemble de tous les nombres réels. (Un ne place généralement pas de crochet à côté du symbole de l'infini, bien qu'il soit possible de définir un système numérique permettant l'inclusion de ∞ comme un nombre à prendre en considération.)

Un intervalle peut être constitué d'un seul point (l'intervalle [1,1] par exemple) ou peut être l'ensemble vide (le intervalle [4,1] par exemple). L'intersection de deux intervalles est un intervalle, mais la réunion de deux intervalles peut ou non être un intervalle.

Voir aussi CARDINALITE ; VALEUR INTERMÉDIAIRE THÉORÈME.

invariant Propriété, quantité ou relation qui est pas modifié par un ensemble d'opérations spécifiques ou transformations, ou par la façon dont cette propriété est observée, est appelé un invariant. Par exemple, la distance entre deux points d'un plan ne change pas sous un ROTATION. Ainsi la distance est invariante des rotations. (C'est pas, cependant, invariant des DILATATIONS, par exemple.) Un

Machine Translated by Google

L'application du THÉORÈME D'EULER montre que toute conception de ballon de football qui utilise des hexagones et des pentagones, quelle que soit l'irrégularité de ces formes, avec trois arêtes se rencontrant à chaque sommet, doit inclure précisément 12 marqueurs de stylo. (Le nombre d'hexagones peut varier.) Le nombre de pentagones est donc un invariant dans la conception d'un ballon de football.

Certains invariants peuvent être assez surprenants. Pour l'examen ple, considérons l'exercice théorique suivant:

> Supposons que 10 pieds de longueur soient ajoutés à une corde qui était juste assez longue pour s'enrouler parfaitement autour de l'équateur de la Terre. Imaginez que la corde soit à nouveau enroulée autour de l'équateur, mais cette fois, en raison de sa longueur supplémentaire, elle plane juste au-dessus du sol. Quelle est la hauteur de l'écart entre le sol et la corde suspendue ?

Pour répondre à cette question, notons R le rayon de la

Terre. La longueur de la corde tendue est de 2 pieds, $\pi R + 10 = 2\pi R + \frac{5}{\pi}$ ce qui correspond à la circonférence

5 d'un cercle de rayon R + pieds. Cela montre que le

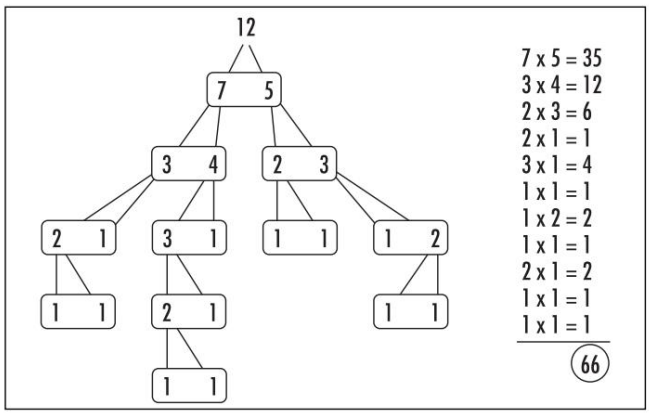
5 cordes flottent à $\frac{5}{\pi} \approx 1{,}6$ pieds du sol. Remarquez que le

réponse, en plus d'être étonnamment grande en valeur, ne dépend pas de la valeur de R. Cela signifie que la taille de la planète est sans importance. Ainsi, si 10 pieds de longueur sont ajoutés à une corde qui s'adapte parfaitement autour de l'équateur de n'importe quelle planète - Mars, Jupiter ou une planète de la taille d'un pois - la corde tendue flottera toujours à un mètre de l'équateur. $\frac{5}{\pi}$

sol. Cette valeur est un invariant du problème.

Comme autre exemple, considérez le célèbre "jeu de fractionnement" suivant :

> Écrivez le nombre 12 en haut d'une page et en dessous, écrivez une paire de nombres entiers positifs qui totalisent 12, disons 7 et 5. Sur le côté du papier, notez le produit 7 × 5 = 35. Maintenant, écrivez en dessous 7 une paire de nombres qui totalisent 7, disons, 3 et 4, et enregistrez le produit 3 × 4 = 12. Continuez de cette manière, en "divisant" chaque nombre qui apparaît dans le diagramme en deux et en enregistrant le produit de la paire de nombres choisis. Faites ceci jusqu'à ce que le chiffre 1 apparaisse 12 fois. Ce qui suit représente un tel diagramme de fractionnement possible :



Le jeu du fractionnement

Additionnez maintenant tous les produits enregistrés. Quelle valeur est obtenue ?

Étonnamment, quel que soit le diagramme de découpage que l'on construit, la somme des produits est un invariant du jeu et aura toujours la valeur 66. (Le nombre 66 se trouve être le 11ème NOMBRE TRIANGULAIRE. En général, si l'on commence ce jeu par un nombre N, alors l'invariant qui apparaît dans le jeu est le (N –1)ème nombre triangulaire.)

élément inverse Un élément d'un ensemble qui, lorsqu'il est combiné avec un autre élément, produit l' ÉLÉMENT D'IDENTITÉ de l'ensemble, est appelé élément inverse. Plus précisément, si un ensemble S est équipé d'un "*" BINAIRE et d'un élément d'identité e, alors un inverse pour un OPÉRATION élément a de l'ensemble est un autre élément b tel que a*b = b*a = e.

Par exemple, pour l'ensemble des nombres sous l'opération d'addition, l'inverse de tout nombre a est son négatif –a. Dans ce contexte, l'élément d'identité est nul et nous avons bien :

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Sous l'opération de multiplication, l'élément d'identité est 1, et l'inverse de tout nombre (non nul) a est 1 – son inverse :

un

$$\frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a} = 1$$

Chaque élément d'un GROUPE doit avoir un inverse. L'inverse de l'élément d'identité est lui-même.

Machine Translated by Google

Il n'est pas possible qu'un même élément a ait deux inverses b1 et b2 différents . Ceci est établi en notant que e = a*b2 de sorte que b1 = b1*e = b1*(a*b2) = (b1*a)*b2 = e*b2 = b2 .

De la symétrie de la définition, nous avons que si b est l'inverse de a, alors a est aussi l'inverse de b. Par conséquent, l'inverse d'un inverse est l'élément d'origine. Exprimé en termes d'addition, cela se lit –(–a) = a et en termes de multiplication comme suit :

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

L'inverse d'un élément a est souvent noté a –1, surtout si l'opération binaire considérée peut être interprétée comme un type de multiplication. Par exemple, l'inverse d'un carré MATRICE A, s'il existe, est noté A–1 .

fonction inverse (mappage inverse, fonction inverse)
Une FONCTION f de domaine D et de domaine R, f : D → R, est dite inversible ou de fonction inverse si, pour chaque sortie possible y de la fonction, y R, il y en a une, et une seule, entrée x D, qui produit cette sortie. Nous écrivons x = f –1(y) pour l'entrée x qui produit la sortie donnée y. (Ainsi x = f –1(y) si, et seulement si, f(x) = y.) Cela définit alors une fonction f –1 : R → D, appelée fonction inverse de f. Dans un certain sens, la fonction inverse "défait" la fonction d'origine.

Par exemple, considérons la fonction sur les nombres réels qui double une entrée et ajoute 3 : f(x) = 2x + 3. La sortie 11 est produite à partir de l'entrée de 4, et nous avons donc f –1(11) = 4 En général, une sortie de y est produite à partir d'une entrée $x = \frac{y-3}{2}$, donc f –1(y) = $\frac{y-3}{2}$. (Cette 2 la formule est obtenue en résolvant x dans l'équation : y – 3 = 2x + 3 pour donner x = .)

Puisque f –1(y) est le entrée qui produit la sortie y, et x est l'entrée qui produit la sortie f(x), les relations suivantes s'appliquent :

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ pour toutes les valeurs } y \text{ dans la plage de } f$$

et

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ pour tout } x \text{ dans le domaine de } f$$

Ceci explique la notation maladroite de la fonction inverse : Dans l'étude de la COMPOSITION des fonctions, f m désigne le composé f0 f0…0 f (m fois), et nous avons f m 0 f n = f m+n . Pour donner un sens à la quantité f, cette règle stipule que $f^0 f^0 = f^0 = f^1 = f$, suggérant que nous devrions définir f successivement, $f^0(x) = x$ pour toutes les valeurs x. Consé l'énoncé $f^{-1} f^1 = f^0$ suggère que f –1(f(x)) indiquant que la notation f^{-1} pour la fonction inverse. L'exposant de -1 ne doit pas être confondu avec l'opération de 1

inversion. (Nous écrivons (f(x))–1 pour dénoter $\frac{1}{f(x)}$, et part f –1(x) pour signifier la fonction inverse de f.)

Il est d'usage de désigner l'entrée d'une fonction réelle par la variable x et la sortie par la variable y. Cela peut entraîner une certaine confusion. Par exemple, pour calculer la fonction inverse de $y = f(x) = x^3 + 2$, nous résolvons l'entrée x dans l'équation en termes de sortie y pour obtenir, mais $x = \sqrt[3]{y - 2}$, nous intervertissons les variables x et y de sorte que x dénote la nouvelle entrée et y la nouvelle sortie : $y = \sqrt[3]{x - 2}$. Cela donne la formule $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$ pour la fonction inverse.

Comme les formules y = f(x) et x = f –1(y) représentent exactement la même équation, les deux formules donnent exactement les mêmes courbes lorsqu'elles sont tracées par rapport à une paire d' axes de coordonnées x -y. Suivre la convention d'échanger les variables x et y pour la deuxième équation pour écrire y = f –1(x) revient à échanger les axes x et y dans le graphique de la courbe. Inverser le graphique sur la ligne diagonale y = x ramène l' axe des y en position verticale et l' axe des x en position horizontale, mais inverse également la courbe tracée sur la ligne diagonale. Ainsi, les graphiques de y = f(x) et y = f –1(x) sont des images miroir l'un de l'autre sur une ligne diagonale.

Toutes les fonctions ne possèdent pas une fonction inverse. Par exemple, il n'y a pas de fonction inverse de la fonction au carré $y = x^2$: certaines sorties proviennent de plus de entrée possible. (La sortie de 4, par exemple, provient des deux entrées 2 et -2.) Cependant, il est souvent possible de restreindre une fonction à une certaine partie de son domaine et de définir une fonction inverse pour ce domaine restreint. Par exemple, pour la fonction d'élévation au carré, si nous exigeons que seules les entrées non négatives soient considérées, alors une fonction inverse existe : nous avons $y = \sqrt{x}$ (la racine carrée positive) comme fonction inverse. On définit les FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES, par exemple, en se restreignant à une portion convenable du domaine.

Si la fonction y = f(x), alors la dérivée de la fonction inverse y = f –1(x) est donnée par :

Machine Translated by Google

$$\frac{df}{dx}(f^{-1}x) = \frac{1}{f'(f^{-1}x)}$$

à condition que la quantité au dénominateur ne soit pas nulle. Cette formule peut être établie en utilisant la CHAIN RULE dans l'énoncé f(y) = x. (La différenciation donne : f′(y) · y′ = 1 et donc y′ = —f′(y) .) 1 , qui est le dessus

Une version simple d'un théorème général de la fonction inverse stipule que si la dérivée d'une fonction y = f(x) est non nulle en un point x = a, alors une fonction inverse existe, du moins lorsque le domaine est limité à un petit intervalle environ un. (Puisque la dérivée de f(x) = x 0, il 2 est nul en x = n'est pas possible de définir une fonction inverse de la fonction d'élévation au carré autour du point x = 0.)

fonctions hyperboliques inverses (fonctions hyperboliques d'aire) Définies de manière analogue aux FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES, les fonctions hyperboliques inverses sont les fonctions inverses des FONCTIONS HYPERBOLIQUES. Par exemple, le sinus hyperbolique inverse d'un nombre x, noté arc sinh x ou sinh–1x, est une valeur a dont le sinus hyperbolique est x : sinh a = x. De même, le cosinus hyperbolique inverse de x est une valeur a avec cosh a = x, et la tangente hyperbolique inverse de x est une valeur a telle que tanh a = x. (Techniquement, pour une valeur x donnée , il existe deux valeurs a différentes pour lesquelles cosh a = x, une positive et une négative. Par convention, la valeur positive est toujours choisie.)

Comme la fonction sinus hyperbolique est définie sur toutes les valeurs réelles et produit toutes les valeurs réelles comme sorties possibles, la fonction sinh–1 x est définie pour toutes les valeurs réelles de x. D'autre part, la fonction cosinus hyperbolique ne produit que des valeurs de sortie supérieures ou égales à 1, et par conséquent la fonction cosinus hyperbolique inverse cosh–1 x n'est définie que pour les valeurs de x ≥ 1. De même, la fonction tangente hyperbolique inverse tanh–1 x est défini uniquement pour –1 < x < 1.

Les fonctions hyperboliques inverses ont les DÉRIVÉES suivantes :

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$$

Celles-ci peuvent être établies en utilisant la relation cosh2 y – sinh2 y = 1. Par exemple, pour calculer la dérivée de y = sinh–1 x, écrivez sinh y = x puis différenciez cette équation en utilisant la RÈGLE DE CHAÎNE .

Cela donne cosh y · = 1, mourir établissant ainsi : —dx

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y = \sqrt{1+(\sinh y)^2} = \sqrt{1+x^2}$$

comme revendiqué.

Il est possible de donner des formulations alternatives des fonctions hyperboliques inverses. Notant que cosh y = $\frac{e^y + e^{-y}}{2}$ et sinh y = $\frac{e^y - e^{-y}}{2}$, nous avons cosh y + sinh y = e y ou y = ln(cosh y + sinh y). Posons y = sinh–1 x. Alors , ce qui sinh y = x et cosh y = $\sqrt{1+\sinh^2 y}$ = $\sqrt{1+x^2}$ donne :

$$\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

qui est valable pour toutes les valeurs de x. De la même manière,

$$\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

valable pour x ≥ 1, et

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

valable pour – 1 < x < 1.

matrice inverse (matrice inverse) Une MATRICE carrée A est dite inversible (ou non singulière) s'il existe une matrice B telle que AB = BA = I, où I est la MATRICE D'IDENTITÉ. La matrice B est appelée matrice inverse de A. Il existe au plus une matrice inverse de la matrice A donnée . (Si B1 et B2 sont toutes deux des matrices inverses, alors B1 = IB1 = B2AB1 = B2 I = B2 .) Si une matrice inverse pour une matrice A existe, alors elle est notée A–1. Une étude des DETERMINANTS montre qu'une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul.

La matrice inverse d'une matrice 2 × 2

$$UN = \begin{matrix} un & B \\ CD \end{matrix}$$

Machine Translated by Google

de déterminant det(A) = ad – bc est la matrice :

$$UN^{-1} = \frac{1}{\text{annonce avant JC}} \begin{matrix} db \\ - \text{ Californie} \end{matrix}$$

Le processus d' ÉLIMINATION GAUSSIENNE fournit une méthode relativement simple pour calculer l'inverse de la matrice de toute matrice carrée de plus grande taille.

Si, dans un système de n ÉQUA TIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES Ax = b, la matrice A des coefficients est inversible, alors le système a pour solution x = A–1b. En particulier, si ej désigne le vecteur colonne dont la seule entrée non nulle est un 1 en jième position, alors xj = A–1ej est la jième colonne de A–1. Autrement dit, la jème colonne de cette matrice inverse est une solution du système d'équations Axj = ej . D'après la RÈGLE DE CRAMER , la ième entrée de cette colonne, c'est-à-dire la (i,j)ième entrée de la matrice inverse, est le rapport des déterminants :

$$(UN^{-1})_{ij} = \frac{\det(A_{ij})}{\det(A)}$$

où A| est la matrice A avec la ième colonne remplacée ij par ej . Calculer det(A| ij) revient, à un signe plus ou moins près, à calculer le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en supprimant sa ième colonne et sa jième ligne.
Cette valeur est parfois appelée le (i,j)ème cofacteur de A.

Si A est inversible, alors il est impossible de trouver un vecteur colonne x non nul tel que Ax = 0. (Sinon, x = A–1 0 = 0.) Cette observation est importante pour l'étude des VECTEURS PROPRES et des VALEURS PROPRES.

Voir aussi GROUPE LINEAIRE GENERAL.

inverse d'un énoncé Voir CONTRAPOSITIVE.

loi du carré inverse Toute relation entre deux grandeurs physiques dont l'une est proportionnelle à la RÉCIPROQUE du carré de l'autre est appelée loi du carré inverse. Par exemple, la loi de gravitation développée par SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) affirme que la grandeur F de la force gravitationnelle entre deux corps de masses m et M est donnée par :

$$F = \frac{mM}{2\,r}$$

Ici G est la constante gravitationnelle (égale à 6,67 × 10–11 m3kg–1sec–2) et r est la distance entre les deux masses. C'est une loi du carré inverse. L'éclairement fourni par une source de lumière diminue de l'inverse du carré de la distance à la source et il en va de même d'une relation de carré inverse.

fonctions trigonométriques inverses Une FONCTION INVERSE de toute fonction trigonométrique est appelée une fonction trigonométrique inverse. Par exemple, le sinus inverse d'un nombre x, noté arcsinx ou sin–1x, est un ANGLE a pour dont le sinus est x : sina = x. Comme la sinusoïde ne prend que des valeurs comprises entre –1 et 1, la fonction sinus inverse n'est définie que pour les valeurs –1 ≤ x ≤ 1. On notera également que pour toute valeur x il existe une infinité d'angles a avec sin a = x . On suppose alors généralement que l' angle π– π– a est choisi de sorte que – ≤ a ≤ . (Ceci est appelé la plage 2 2 des valeurs principales pour le sinus.) De même, le cosinus inverse d'un nombre x avec –1 ≤ x ≤ 1, écrit arccos x ou cos–1 x, est un angle a, généralement choisi dans le principal gamme pour cosinus, 0 ≤ a ≤ π, avec cos a = x. Puisque la fonction tangente adopte toutes les valeurs réelles, la fonction tangente inverse est définie pour tout nombre réel x, et arctan x, ou tan–1 x, est défini comme étant cet angle a dans la plage principale π– π– pour la tangente, – ≤ a ≤ 2 2 Les fonctions trigonométriques inverses ont , tel que tan a = x.
les DÉRIVÉES suivantes :

$$\frac{d}{dx}\text{péché}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pour } \pm x| \neq$$

$$\frac{d}{dx}\text{parce que}^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pour } \pm x| \neq$$

$$\frac{d}{dx}\text{bronzer}^{-1}x = \frac{1}{2\,1+x}$$

Celles-ci peuvent être établies en utilisant la relation sin2 y + cos2 y = 1. Par exemple, pour calculer la dérivée de y = sin–1 x, écrivez sin y = x puis dérivez cette équation en utilisant la RÈGLE DE CHAÎNE . Ce dy donne cos y = 1, établissant ainsi : —dx

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{parce que}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\text{péché}\,y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

comme revendiqué. La SÉRIE DE TAYLOR de la fonction arctan donne la SÉRIE DE GREGORY .

Machine Translated by Google

On peut établir un certain nombre d'identités avant-inverse pour les fonctions trigonométriques. Comme exemples nous avons :

$$\text{péché}(\cos^{-1}x) = -\sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{péché}(\text{bronzage}^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{2\,1 + x}}$$

$$\cos(\text{péché}^{-1}x) = -\sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{coût}(\text{bronzage}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{2\,1 + x}}$$

$$\text{bronzer}(\text{péché}^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1 - 2x}}$$

$$\text{bronzer}(\cos^{-1}x) = \frac{\sqrt{1 - 2x}}{x}$$

Par exemple, si $a = \cos^{-1} x$ – x, alors cos a = x = . Ainsi 1 angle a apparaît dans un triangle rectangle avec l'hypoténuse 1 et la jambe adjacente de longueur x. D'après THÉO DE PYTHAGORE REM, la longueur de la jambe opposée est et donc $\sqrt{1 - x^2}$

$\text{péché un} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}$, établissant la première relation tion. Les identités restantes sont prouvées de la même manière.

Voir aussi FONCTIONS HYPERBOLIQUES INVERSES.

nombre irrationnel Tout nombre qui ne peut pas être exprimé comme un RATIO de deux nombres entiers est appelé un nombre irrationnel. Comme le montre l'étude des NOMBRES RATIONNELS , les nombres irrationnels sont précisément les nombres dont les développements décimaux ne se terminent pas ou ne tombent pas dans un cycle répétitif de valeurs. Par exemple, le nombre avec le développement décimal 0,1131331333313333133333133… est irrationnel. L'étude des nombres rationnels montre également que, dans un sens très réel, « la plupart » des nombres sont irrationnels.

Une preuve célèbre, souvent attribuée à Hippase de Metapontum (vers 470 avant notre ère), montre que $\sqrt{2}$ est irréel national. THÉODORE DE CYRÈNE (vers 465-398 avant notre ère) a établi géométriquement le même résultat et a également montré que les nombres $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$ (hors $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, et $\sqrt{16}$) sont irrationnels. Les FONDAMEN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE peuvent être utilisés pour prouver que la même racine d'un entier positif n est rationnelle si, et seulement si, n est déjà la même puissance d'un entier. (Si $\sqrt[m]{n} = \frac{a}{b}$ pour certains entiers a et b, alors $a^m = nb^m$. En écrivant chacun de a, b et n comme un produit de nombres premiers, et en notant que les nombres premiers qui apparaissent par conséquent sur le côté gauche de cette équation doivent correspondre à ceux qui apparaissent sur la droite, nous concluons que chaque facteur premier de n apparaît dans n un multiple de m fois. Ceci établit que n = c m pour un entier c.) Le même raisonnement montre qu'un nombre tel que log25 est irrationnel. (Si log25 = $\frac{a}{b}$, alors 2a = 5b, contredisant le fondamental théorème d'arithmétique.)

La troncature du développement décimal d'un nombre irrationnel produit un rationnel arbitrairement proche de ce nombre irrationnel. Par exemple, 1,4, 1,41, 1,414, … est une suite de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$ = 1.41421356…

En 1737, LEONHARD EULER établit que le nombre e est irrationnel, et en 1761 JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728–77) prouve l'irrationalité de π. Personne à ce jour ne sait si oui ou non les nombres e^{π}, $\sqrt{\pi}$ et π^2 sont irrationnels. (On sait que e π et e · π sont irrationnels.) Étonnamment, la rationalité ou l'irrationalité de la CONSTANTE γ d'EULER n'est toujours pas connue.

Il est possible qu'un nombre irrationnel élevé à une puissance irrationnelle soit rationnel. Par exemple, si $x = \sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ (√ ple d'un tel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ s'avère être rationnel, alors nous avons un examen phénomène. Si x, par contre, est √ non rationnel, alors il est irrationnel et $x^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = 2^1 = 2$ est un exemple de ce que nous recherchons. (Malheureusement, ce raisonnement indirect n'indique pas laquelle des deux possibilités se produit réellement.)

Voir aussi NOMBRE ALGÉBRIQUE ; FRAC SUITE TION ; E; NOMBRE; NOMBRES RÉELS; SOURDE; TRANSCEN NUMÉRO DENTAIRE.

point isolé (acnode) Un point qui satisfait l'équation d'une courbe mais qui n'est pas sur l'arc principal de la courbe est appelé un point isolé. Par exemple, la courbe a $y^2 = x^3$ a x = 0, y = 0 comme solution, sans autre solution près de cette position. Le point (0,0) est un point isolé pour l'équation.

Voir aussi DOUBLE POINT.

isométrie (transformation de congruence) Une TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE, telle qu'une translation, une rotation ou une réflexion, qui préserve les distances entre les points dans l'espace est appelée une isométrie. Les isométries ont ainsi la propriété de conserver la forme et la taille des objets géométriques.

Machine Translated by Google

Les figures. (Si, par exemple, trois points A, B et C représentent les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1, alors les images A′, B′ et C′ des trois points sous une isométrie forment à nouveau une triangle équilatéral de côté 1.)

Le THÉORÈME FONDAMENTAL DES ISOMÉTRIES montre que toute isométrie dans le plan est le résultat d'au plus trois réflexions. Toute isométrie qui préserve l'emplacement de trois points plans laisse tous les points du plan inchangés. Aucune isométrie ne peut conserver la position de deux points seulement. Si une isométrie conserve l'emplacement d'un seul point, alors cette isométrie doit être une rotation autour de ce point.

isomorphisme Une correspondance un à un et sur entre les éléments de deux ensembles équipés d' OPÉRATIONS BINAIRES qui préservent les opérations sur ces ensembles est appelée un isomorphisme. Par exemple, l'application f:n → 2n apparie chaque nombre naturel avec un nombre pair (et, à l'inverse, chaque nombre pair est apparié avec un nombre naturel unique) et, de plus, préserve l'opération d'addition entre les deux ensembles : On ont f (n + m) = f(n) + f(m) pour tous les nombres naturels n et m.

Ainsi, par rapport à l'addition, f est un isomorphisme entre les deux ensembles. (Notez, cependant, que f ne préserve pas les produits et n'est donc pas un isomorphisme par rapport à la multiplication.)

La fonction LOGARITHME ln x fournit une carte entre l'ensemble de tous les nombres réels positifs et l'ensemble de tous les nombres réels. Le logarithme convertit les multiplications du premier ensemble en additions du second ensemble : ln(xy) = ln x + ln y. L'ensemble des réels positifs sous multiplication est donc isomorphe à l'ensemble de tous les réels sous addition.

Le mot isomorphisme est dérivé des mots grecs isos signifiant « même » ou « égal » et morphos signifiant « forme » ou « structure ».

Voir aussi HOMOMORPHISME.

problème isopérimétrique Un problème classique en mathématiques, appelé problème isopérimétrique, demande :

> De toutes les figures dessinées dans le plan avec un périmètre donné, laquelle contient la plus grande surface ?

L'origine de ce problème remonte à l'antiquité avec la célèbre légende de la princesse Dido et DIDO'S PROBLÈME.

Le thème de l'isopérimétrie (préfixe iso : le même) a été systématiquement étudié par la famille suisse de mathématiciens des XVIIe et XVIIIe siècles, la FAMILLE BERNOULLI. Ils ont découvert et classé de nombreuses courbes satisfaisant certaines propriétés maximales et minimales, mais n'ont pas résolu le problème isopérimétrique. LEON HARD EULER (1707-1783) a également contribué à ce domaine, en utilisant les techniques de CALCULUS.

JAKOB STEINER (1796-1863) a utilisé des méthodes purement géométriques pour établir la réponse partielle suivante : s'il y avait une forme qui offrait une surface maximale pour un périmètre donné, alors cette forme devait être un cercle.
Steiner pensait avoir complètement résolu le problème isopérimétrique, que la réponse devait être un cercle, mais quelques années plus tard, le mathématicien allemand KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897) a souligné que l'hypothèse selon laquelle les problèmes ont toujours des solutions peut conduire à des absurdités. L'exemple amusant suivant illustre sa préoccupation :

> Considérez la question : de tous les entiers positifs, lequel est le plus grand ? S'il existe une réponse à ce problème, alors ce ne peut pas être un nombre n différent de 1, car alors n^2 est un entier plus grand que n. Cela ne laisse que l'entier 1 comme réponse à la question.

Weierstrass s'est rendu compte qu'il se pourrait très bien que le problème isopérimétrique n'ait pas de solution, malgré les travaux de Steiner, et donc peut-être que même le cercle peut être remplacé par une forme de plus grande aire pour le même périmètre. Pour résoudre complètement le problème isopérimétrique, Weierstrass s'est rendu compte qu'il fallait aussi prouver qu'une solution au problème existe. Enfin, en 1870, Weier Strass a pu le faire en développant une nouvelle théorie mathématique appelée aujourd'hui le « calcul des variations ».
La solution du problème, connue des anciens savants, fut enfin établie comme mathématiquement correct.

Les variations simples du problème isopérimétrique sont plus faciles à gérer. Considérons, par exemple, la question : de tous les rectangles de périmètre 40 pieds, lequel a la plus grande aire ? On peut y répondre par un exercice d'algèbre : tout rectangle a deux grands côtés et deux petits côtés. Si le périmètre est de 40 pieds, alors deux côtés sont plus longs que 10 pieds et deux sont plus courts que 10 pieds (sauf si la figure est un carré). En écrivant les dimensions du rectangle comme 10 + x pieds de long et 10 - x pieds de large, pour un certain nombre x, son aire est alors donnée par la formule

Machine Translated by Google

$(10 – x)(10 + x) = 100 – x^2$. On voit maintenant que la zone est maximale précisément lorsque x vaut zéro, c'est-à-dire que la figure est un carré.

Un exercice de géométrie montre que de tous les triangles d'un périmètre donné, le triangle équilatéral a la plus grande aire.

Voir aussi BULLES DE SAVON ; POINTE STEINER.

trapèze isocèle (trapèze isocèle) Un trapèze dont les deux côtés non parallèles sont de longueur égale est appelé trapèze isocèle. La figure a une ligne de symétrie perpendiculaire aux côtés parallèles. Tout trapézoïde isocèle peut être considéré comme un TRIANGLE ISOCÈLE tronqué.

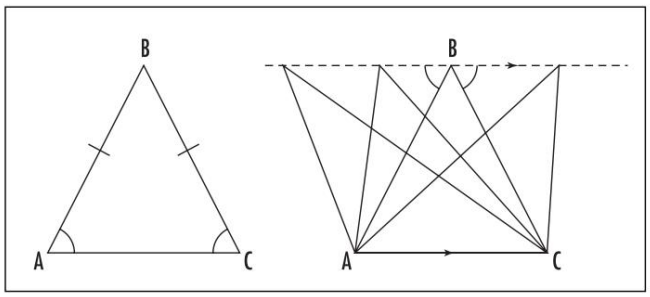
Voir aussi TRAPÈZE/TRAPÈZE.

triangle isocèle Un triangle possédant deux côtés de même longueur est dit isocèle. Le nom est dérivé des termes grecs iso signifiant «même» et skelos signifiant «jambe». Certains érudits insistent pour qu'un triangle soit appelé isocèle seulement si deux, mais pas les trois, de ses côtés sont de longueur égale, mais ce n'est vraiment qu'une question de goût. (Un triangle dont les trois côtés sont de longueur égale est appelé équilatéral.) Les angles de base d'un triangle isocèle sont égaux. Celle-ci peut être établie comme suit :

> Supposons que le triangle ABC soit isocèle avec les côtés AB et BC égaux en longueur. Considérez un schéma de ce triangle comme l'image de deux triangles, ABC et CBA superposés l'un sur l'autre. Ces deux triangles partagent des paires de côtés qui correspondent en longueur et partagent un angle commun (en B) entre ces deux côtés. Ainsi, par le principe SAS issu de l'étude de similarité, les deux triangles sont congruents. Par conséquent, tous les angles correspondants entre les triangles correspondent. En particulier, l'angle au sommet A doit correspondre à l'angle au sommet C.

Si l'on fait glisser le sommet B dans une direction parallèle à la base AC, alors le périmètre du triangle change (bien que la SURFACE de la figure, $A = \frac{1}{2} \times$ base $\times$ hauteur ne change pas). L'étude d'OPTIMISATION montre que la somme des distances $|AB| + |BC|$ est au minimum lorsque le triangle est isocèle. Nous avons:

> De tous les triangles avec une base donnée et une hauteur fixe, le triangle isocèle a le plus petit périmètre.



Triangle isocèle

Pour minimiser tout le périmètre d'un triangle sans changer son aire, on peut ajuster chaque sommet du triangle (en faisant glisser le sommet le long d'une ligne parallèle au côté opposé) de sorte qu'il soit un sommet d'un triangle isocèle. Cela produit un triangle équilatéral et établit ainsi :

> De tous les triangles d'une aire fixe, le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.

Il est possible de disposer cinq points dans un plan de manière à ce que trois points choisis au hasard parmi eux forment les sommets d'un triangle isocèle. (Les points se trouvent aux sommets d'un pentagone régulier.) Il est impossible d'accomplir le même exploit avec six points ou plus.

Voir aussi AAA/AAS/ASA/SAS/SSS ; CHIFFRES CONGRUENTS ; TRIANGLE.

itération L'application répétée d'une procédure mathématique dans laquelle chaque étape est appliquée à la sortie de l'étape précédente est appelée itération. Par exemple, la MÉTHODE DE HERON pour calculer les racines carrées des nombres est une procédure itérative.

Les itérations d'une fonction f, commençant par la valeur x_0, sont définies par la séquence de valeurs :

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)),\ x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))),\ldots$$

Si cette suite converge vers une valeur a, disons, alors :

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(a)$$

(Nous supposons ici que f est une FONCTION CONTINUE.) Ainsi, l'itération fournit un moyen de résoudre

Machine Translated by Google

équations de la forme x = f(x). Par exemple, à plusieurs reprises appuyer sur le bouton "cosinus" d'une calculatrice produira des valeurs proches d'une solution de l'équation x = cos x. (Comme la calculatrice ne peut afficher que huit ou 10 décimales, cela signifie que les valeurs affichées à l'écran finira par se stabiliser.) NEWTON'S METHOD est souvent citée comme la procédure itérative la plus largement utilisée.

Voir aussi SEQUENCE CONVERGENTE ; SYSTÈME DYNAMIQUE TEM ; DÉFINITION RÉCURSIVE.

Machine Translated by Google

J

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851) Allemand

Analyse Né le 10 décembre 1804 à Potsdam,
Prusse (aujourd'hui l'Allemagne), on se souvient de Carl Jacobi pour
son important travail sur la théorie des fonctions elliptiques
et pour avoir appliqué son travail de façon étonnante au
théorie des nombres. Il a prouvé une conjecture célèbre de
PIERRE DE FERMAT (1601-1665) déclarant que tout
nombre peut s'écrire comme la somme de quatre carrés parfaits.
(Auparavant, CARL FRIEDRICH GAUSS avait prouvé que
chaque nombre est la somme des trois NUMÉROS DE TAUX FIGU
triangulaires.) Il a également apporté d'importantes contributions
à la théorie de la dynamique en physique et fait une étude
approfondie de la théorie des DÉTERMINANTS. La formule
généralisée de CHANGEMENT DE VARIABLE pour DOUBLE
INTEGRALs (et intégrales multiples supérieures) contient un
déterminant qui est aujourd'hui nommé en son honneur.

Jacobi a terminé toutes ses études secondaires
en 1 an mais a dû attendre plusieurs années
avant d'avoir atteint l'âge minimum de 16 ans pour entrer dans le
Université de Berlin. Pendant ce temps, Jacobi lisait
travaux avancés en mathématiques et recherches menées
travail sur les équations polynomiales. Jacobi a reçu son doctorat
de Berlin en 1825 et a pris un poste d'enseignant
à l'Université de Königsberg un an plus tard. Par ça
temps, Jacobi avait déjà fait des découvertes fondamentales dans
le domaine de la THÉORIE DES NOMBRES. Il a commencé ses
travaux sur les fonctions elliptiques peu de temps après.

La formule de changement de variables dans INTEGRAL CAL
CULUS déclare que si f est une fonction d'une variable u,
qui à son tour est une variable de x, alors l'intégrale de f
par rapport à u peut être calculé comme suit :

$$\int_{a}^{b} f(u)\,du = \int_{c}^{d} f(u(x))\,\frac{du}{dx}\,dx$$

Ici, les limites de l'intégration changent pour refléter la
changement de variables. Dans son étude des déterminants,
Jacobi a montré, en deux dimensions, que si f(u,v) est un
fonction de deux variables, avec u et v chacune des fonctions
de x et y, alors le changement de variable approprié
formule devient :

$$\iint_{R} f(u,v)\,du\,dv = \iint_{S} f(u(x,y),v(x,y))\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right| dx\,dy$$

où R est une région dans le plan uv, S est le correspondant
ing région dans le plan xy, et $\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right|$ représente le
déterminant de la MATRICE 2 × 2 des DÉRIVÉES PARTIELLES.
Un résultat analogue s'applique pour les triples et
intégrales multiples supérieures. De tels déterminants sont
aujourd'hui appelés Jacobiens. Bien que le mathématicien français
AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857) ait découvert ces
formules de transformation plus tôt, il était
Jacobi qui a développé la théorie de la fonctionnelle
déterminants pleinement dans sa publication exhaustive de 1841
De determinantibusfunctionalibus (Functional
déterminants).

Machine Translated by Google

Jacobi était passionné par la recherche théorique et prononça un jour la défense suivante pour poursuivre la science pour elle-même : « Le seul but de la science est l'honneur de l'esprit humain, et de ce point de vue une question sur les nombres est aussi importante qu'une question sur le système du monde.

Jacobi est mort de la variole le 18 février 1851.

Jiuzhang suanshu (Chiu-chang Suan-shu) Voir CHI MATHÉMATIQUES NÉSES.

Jordanie, Marie Ennemond Camille (1838-1922)
Français Topologie, Algèbre abstraite, Ingénierie Né le 5 janvier 1838 à Lyon, France, Camille Jordan est connu pour ses travaux sur les groupes de PERMUTATION et la théorie des équations. Il ravive l'intérêt pour l'œuvre importante d' ÉVARISTE GALOIS et développe nombre de ses idées et offre de nouvelles contributions substantielles. Les travaux ultérieurs de Jordan sur ANALYSIS incluent le célèbre théorème qui porte désormais son nom.

Jordan s'est formé et a travaillé toute sa vie en tant qu'ingénieur. Ses intérêts pour la THÉORIE DES GROUPES ont été motivés par l'étude mathématique des structures cristallines. À bien des égards, il a défini ce domaine d'étude avec la publication de son texte de 1870 Traité des substitutions et des équations algébriques (Traité sur les permutations et les équations algébriques), le premier livre jamais publié sur le sujet. Ce travail a stimulé d'importantes recherches mathématiques sur le sujet pendant tout le siècle qui a suivi. Jordan a reçu le prix Poncelet de l'Académie des sciences pour la pièce.

Après la publication de son célèbre ouvrage, Jordan a poursuivi ses travaux en algèbre, établissant des résultats importants dans les domaines de l' ALGÈBRE LINÉAIRE, de la THÉORIE DES NOMBRE, des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, de la mécanique et des SÉRIES DE FOURIER. Les travaux dans ces derniers domaines l'ont conduit aux thèmes de la TOPOLOGIE et de l'analyse, et à l'étude des groupes continus, qui ont occupé la dernière partie de sa carrière.

Jordan est décédé à Paris, en France, le 22 janvier 1922. De 1961 à 1964, René Garnier et Jean Dieudonné rassemblèrent l'ensemble de l'œuvre de Jordan et publièrent la série en quatre volumes Oeuvres de Camille Jordan.

Un point de confusion doit être réglé. Bien que Jordan ait travaillé dans le domaine de l'algèbre matricielle, la méthode d' ÉLIMINATION GAUSSIENNE, souvent appelée Gauss L'élimination de Jordan, ne porte pas le nom de Camille Jordan, mais plutôt de l'arpenteur Wilhelm Jordan (1842–99). W. Jordan a utilisé cette méthode d'élimination pour analyser correctement les erreurs de mesure. (Cependant, la « forme canonique jordanienne » d'une matrice est due à Camille Jordan.)

Voir aussi THÉORÈME DE LA COURBE DE JORDAN.

Théorème de la courbe de Jordan En 1893, la mathématicienne française MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN a énoncé un résultat fondamental :

> Toute boucle tracée dans le plan qui ne s'intersecte pas divise le plan en deux parties distinctes : un intérieur et un extérieur.

Ce théorème tout à fait évident, maintenant appelé théorème de la courbe de Jordan, est étonnamment difficile à prouver. Sa validité dit quelque chose de significatif sur la géométrie et la structure de la surface sur laquelle la courbe est tracée. Par exemple, des cercles dessinés sur un plan ou une sphère divisent certainement ces surfaces en deux parties, mais ce n'est pas nécessairement le cas pour un cercle dessiné sur un TORUS, par exemple : une "boucle" qui fait le tour du beignet ne sépare pas la surface en deux morceaux distincts. Il faut d'abord développer une compréhension claire de la géométrie de l'espace avant que des résultats tels que le théorème de la courbe de Jordan puissent être prouvés. C'est une question subtile et difficile. Le mathématicien américain Oswald Veblen (1880–1960) a été le premier à prouver la validité du théorème.

Problème de Josèphe Ce célèbre puzzle mathématique est basé sur l'histoire difficile de Josèphe Flavius, un chef militaire juif combattant les Romains dans la ville de Jotapata au cours du premier siècle de notre ère. On dit que la bataille, qui a eu lieu au printemps 67, a été perdu. Plutôt que de soumettre leur destin aux mains des Romains, les hommes de Josèphe se sont brièvement réfugiés dans une grotte, où ils ont voté pour se suicider en groupe.
Bien que Josèphe n'ait pas été d'accord avec ce plan, il n'y a opposé aucune opposition ouverte. Au lieu de cela, il a suggéré qu'ils procèdent de la manière la plus ordonnée possible.
Il a proposé qu'ils s'assoient en cercle et tuent humainement un homme sur trois jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule personne. Cette personne se suiciderait alors. Josèphe, dit-on, s'est intelligemment positionné pour être le dernier survivant. Plutôt que de se suicider, il se rendit aux Romains.

Machine Translated by Google

Cette histoire conduit au problème mathématique général suivant :

> Supposons que N participants, numérotés 1, 2, …, N, s'assoient en cercle et commencent à compter chaque nième personne. Chaque personne ainsi sélectionnée est appelée « out » et quitte la partie. Le décompte se poursuit jusqu'à ce que le dernier participant soit déclaré vainqueur du jeu. Etant donné la taille du groupe, est-il possible de prédire à l'avance qui sera le vainqueur ? Supposons que le décompte commence par le joueur 1.

Le tableau suivant montre la position du gagnant, en comptant chaque troisième personne, pour les jeux impliquant N = 1 à N = 15 personnes :

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
O(N)	1	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13	2	5

Les nombres qui en résultent peuvent être analysés comme suit : Une partie avec N joueurs devient une partie avec N–1 joueurs dès que la première personne est appelée, sauf que le début de la partie N–1 est décalé de trois cases.
Ainsi, si W(N) désigne le gagnant d'une partie à N joueurs, on a W(N) = W(N–1) + 3. On peut cependant avoir besoin d'ajuster cette formule pour tenir compte d'éventuels autour du cercle complet. Par exemple:

> Clairement W(1) = 1.
>
> L'addition de 3 donne W(2) = 4. Mais, en comptant autour du cercle, nous voyons que la position quatre dans une partie à deux joueurs est en réalité le joueur 2. Ainsi W(2) = 2.
>
> L'addition de trois donne W(3) = 5. Mais, en comptant autour du cercle, nous voyons que la position cinq dans une partie à trois joueurs est vraiment le joueur 2. Ainsi W(3) = 2,
>
> et ainsi de suite.

De cette manière, nous pouvons calculer toutes les entrées de la table sans avoir à effectuer le jeu. D'autres versions du jeu peuvent être analysées de la même manière.

Le paradoxe de Jourdain En 1913, le mathématicien français Philip Jourdain proposa une variante du célèbre PARADOXE DU MENTEUR , parfois appelé maintenant le paradoxe des cartes. D'un côté d'une carte est imprimé : "La déclaration de l'autre côté de cette carte est vraie", et sur le verso : "La déclaration au verso de cette carte est fausse." Aucune des deux phrases ne peut être vraie ou fausse, car la déclaration au verso implique le contraire.

Il vaut la peine de souligner que si, à la place, les deux phrases se lisent comme suit : « La déclaration au verso de cette carte est fausse », alors aucun paradoxe ne se produit ; c'est simplement le cas où une seule des phrases est en fait fausse et l'autre est vraie. Si, d'un autre côté, les deux phrases se lisent comme suit : "La déclaration au verso de cette carte est vraie", alors les deux déclarations pourraient être vraies, ou les deux pourraient être fausses.

Voir aussi AUTO-RÉFÉRENCE.

problème de remplissage de cruche Une célèbre catégorie de problèmes de décantation contient des puzzles du genre suivant :

> Étant donné une cruche de 3 gallons et une cruche de 5 gallons (sans aucune marque), est-il possible de tirer exactement 1 gallon d'eau d'un puits ?

Comme on n'a pas les moyens de mesurer le contenu exact d'une cruche partiellement remplie, il ne nous reste que trois manœuvres autorisées :

1. Remplissez complètement une cruche vide du puits 2.
Videz complètement une cruche pleine dans le puits 3.
Versez de l'eau d'une cruche dans une autre, en remplissant ou en vidant complètement une cruche dans le processus

Ce problème particulier a une solution simple : remplissez complètement la cruche de 3 gallons et versez son contenu dans la cruche de 5 gallons. Remplissez la cruche de 3 gallons et versez une partie de son contenu pour remplir la cruche de 5 gallons. Cela laisse (et nous en sommes certains) précisément 1 gallon d'eau dans la cruche de 3 gallons et 5 gallons d'eau dans la seconde. Videz maintenant la cruche de 5 gallons.

Dans cette solution, la cruche de 3 gallons a été remplie deux fois et la cruche de 5 gallons a été vidée une fois. Si l'on compte +1 à chaque fois qu'une cruche est remplie et –1 à chaque fois qu'elle est vidée, la solution décrite ci-dessus peut donc être représentée par l'équation :

$$2 \times 3 + (-1) \times 5 = 1$$

Étonnamment, toute solution de l' ÉQUATION DIOPHANTINE $x \times 3 + y \times 5 = 1$ correspond à une solution du problème du remplissage de la cruche. (Par exemple, $(-3)\times 3 + 2\times 5 = 1$ représente une solution dans laquelle la cruche de 5 gallons est

Machine Translated by Google

complètement rempli deux fois et la cruche de 3 gallons complètement vidée trois fois.) Puisque 1 est le PLUS GRAND FACTEUR COMMUN de 3 et 5, l'ALGORITHME EUCLIDÉEN fournit des solutions à l'équation x × 3 + y × 5 = 1, et donc à la problème de remplissage des carafes.

En variante, nous demandons : est-il possible d'obtenir exactement 1 gallon d'eau en utilisant une cruche de 9 gallons et une cruche de 15 gallons ? Cela nécessiterait de trouver une solution à l'équation x × 9 + y × 15 = 1. S'il y avait une solution à ce problème, alors 1 serait une combinaison de deux multiples de 3, et donc lui-même un multiple de 3. Ceci, bien sûr, est absurde, et il n'y a pas de solution à ce problème. Ce type d'argument peut être utilisé pour montrer que d gallons d'eau peuvent être obtenus à partir d'une cruche d'un gallon et d'une cruche de b-gallon si, et seulement si, d est un multiple du plus grand facteur commun de a et b.

Voir aussi BICONDITIONNEL.

Ensemble de Julia Voir FRACTALE.

Machine Translated by Google

K

al-Kashi, Jamshid Mas'ud (vers 1380–1429) Iranien
Arithmétique, Astronomie Né à Kashan, en Iran, al Kashi est surtout connu en mathématiques pour ses débuts décimales pour représenter des fractions et approximer les nombres réels, deux siècles avant l'Europe les chercheurs ont développé la même technique. Son célèbre texte, La clé de l'arithmétique, achevé le 2 mars 1427, décrit toutes les mathématiques nécessaires à ceux qui étudient l'astronomie, l'arpentage, l'architecture et la comptabilité. Al-Kashi a développé des techniques itératives pour extraire racines nièmes et pour résoudre les ÉQUATIONS CUBIQUES et QUARTIQUES, et a donné une estimation de la valeur de π correcte à 16 décimales. (Cela dépasse de loin les réalisations des anciens savants grecs et chinois qui approximé π comme une fraction correcte, en notation décimale, à six décimales près.)

Qu'al-Kashi et ses contemporains ont choisi de représenter les quantités sous forme de décimales indique une importance et changement sophistiqué dans la compréhension historique de "nombre". Par exemple, en écrivant π explicitement comme un décimal, comme n'importe quel nombre peut s'écrire ainsi, changé le statut de π d'une construction géométrique physique (le rapport de la circonférence d'un cercle à sa diamètre) à un membre ordinaire de la classe de REAL NOMBRES. Al-Kashi a adopté une perspective où tous les mathématiques ont ainsi été unifiées par l'étude du système des nombres réels.

Al-Kashi était très intéressé par l'astronomie et considérait une grande partie de son travail mathématique comme un outil pour aide aux calculs astronomiques. technique de La TRIGONOMÉTRIE a joué un rôle de premier plan. Dans son texte Le Traité sur l'accord et le sinus, présenté par al-Kashi tableaux de valeurs de sinus et listé une valeur de sin(1°) avec une précision de 16 décimales. Cela a permis extrêmement calculs astronomiques précis. Sur une note purement mathématique, al-Kashi a également travaillé sur la TRISECTION Un problème d'ANGLE, en notant que l'obstacle derrière se réduit à résoudre une équation cubique. Postuler techniques itératives, al-Kashi a pu fournir une approche novatrice du problème, une approche qui trouver des solutions approximatives à tout degré prescrit de précision. Des chercheurs européens travaillant sur le même problème tout au long du Moyen Âge et de la Renaissance ignoraient l'œuvre d'al-Kashi.

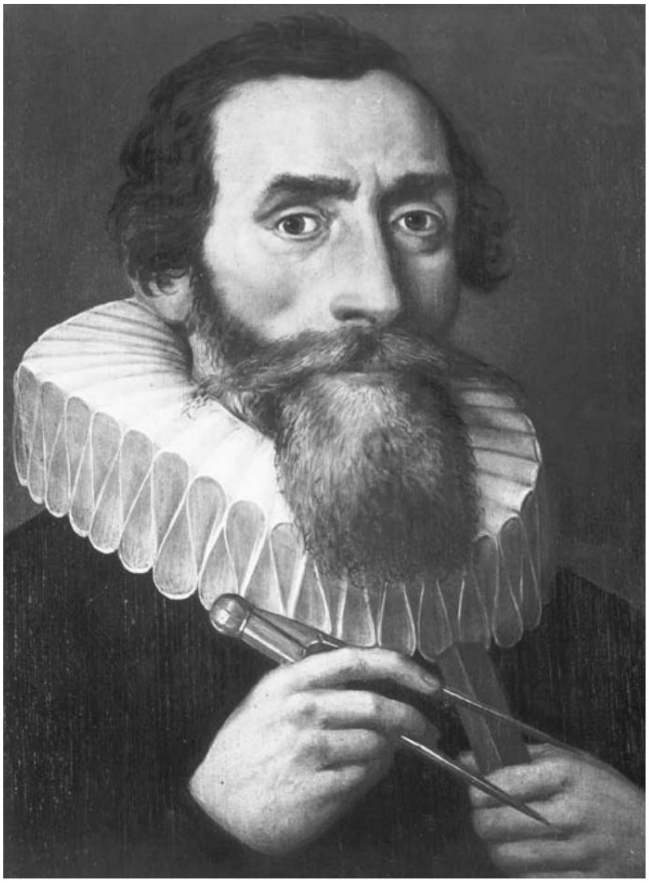
Méthode de Kendall Voir CORRÉLATION DES RANGS.

Kepler, Johannes (1571–1630) Astronomie allemande,
Tournesol Né le 27 décembre 1571 à Württemberg, en Allemagne, on se souvient surtout de Johannes Kepler pour ses trois lois du mouvement planétaire : que les planètes voyager sur des orbites elliptiques avec le Soleil à un foyer ; qu'ils le fassent à un rythme tel que la ligne joignant le planète au Soleil balaie des zones égales en unités égales de temps; et que le carré de la période d'une orbite planaire est proportionnel au cube de la largeur de l' ELLIPSE qu'il traverse. Ces lois étaient toutes fondées sur observation détaillée de l'orbite de Mars. En tant que mathématicien, Kepler est connu pour avoir donné le premier clair preuve du fonctionnement des LOGARITHMES , pour son étude des

Machine Translated by Google

géométrie des SOLIDES PLATONIQUES, pour sa découverte de deux polyèdres réguliers non convexes et pour son traitement mathématique des propriétés de compactage des SPHÈRES. (Il a également expliqué pourquoi la forme en nid d'abeille est la conception la plus efficace pour diviser une région plane en cellules séparées.) Plus important encore, Kepler a conçu une méthode pour calculer les volumes de nombreux SOLIDES DE RÉVOLUTION à l' aide d' INFINITESIMAUX. Aujourd'hui, cela est considéré comme une contribution significative au développement de CALCULUS.

Kepler a étudié l'astronomie et la théologie à l'université de Tübingen, en Allemagne. À l'époque, seules six planètes étaient connues des astronomes, et toutes étaient supposées être en orbite circulaire autour du Soleil. En 1596, Kepler publie Mysterium cosmographicum (Mys



Johannes Kepler, un éminent astronome du 17ème siècle, est connu pour son introduction de trois lois du mouvement planétaire. Ces lois ont fourni à Sir Isaac Newton l'inspiration pour développer sa loi de la gravitation en carré inverse. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

ère du cosmos), dans laquelle il a présenté une théorie mathématique expliquant les tailles relatives des orbites des planètes. Convaincu que Dieu avait créé l'univers selon un plan mathématique, Kepler a posé que si une sphère était dessinée autour de la trajectoire de Saturne et un CUBE inscrit dans cette sphère, alors l'orbite de Jupiter repose sur une sphère inscrite dans ce cube. De plus, l'inscription d'un TÉTRAÈDRE dans cette deuxième sphère et d'une sphère dans le tétraèdre capture la trajectoire orbitale de Mars. En continuant ainsi, avec un dodécaèdre entre Mars et la Terre, un icosaèdre entre la Terre et Vénus et un octaèdre entre Vénus et Mercure, Kepler a produit un modèle pour les tailles d'orbite qui est précis à moins de 10 % des valeurs observées, bien dans les limites expérimentales. erreur. Comme il n'y a que cinq solides de Platon, ce modèle expliquait aussi pourquoi, soi-disant, il n'y avait que six planètes. Bien sûr, le modèle platonicien du système solaire de Kepler n'est pas correct - trois autres planètes ont été découvertes plus tard et, comme Kepler lui-même l'a établi plus tard, aucune orbite d'une planète n'est circulaire.

Kepler a déménagé à Prague au tournant du siècle pour travailler avec l'un des plus grands astronomes de l'époque, Tycho Brahe (1546-1601). À la mort de Brahé, Kepler lui succéda comme mathématicien impérial.

Brahe avait conservé de nombreux enregistrements sur l'orbite de Mars, et à partir d'eux, Kepler a été forcé de conclure que son orbite était une ellipse. Il a également noté, à partir des données, que la vitesse de la planète s'est modifiée de telle manière que la ligne reliant le Soleil à la planète a balayé des zones égales en des temps égaux. Ces deux lois, lorsqu'elles sont étendues à toutes les planètes, sont aujourd'hui appelées les deux premières lois de Kepler. Il les a publiés dans son article de 1609 Astrono mia nova (Nouvelle astronomie). Dix ans plus tard, il ajouta une troisième loi : les carrés des temps mis par les planètes pour parcourir une orbite sont proportionnels aux cubes des longueurs des grands axes de leurs orbites elliptiques.

Kepler n'avait aucune explication quant à la raison pour laquelle ces lois étaient vraies autre que la preuve irréfutable des données. Ce n'est que lorsque SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) a formulé sa célèbre loi de la gravitation que les lois de Kepler ont pu être déduites mathématiquement.

Au cours de sa cérémonie de mariage en 1613 avec sa deuxième épouse Susanna (sa première épouse Barbara est décédée en 1611), Kepler remarqua que les serviteurs mesuraient le volume d'un tonneau de vin en glissant une tige en diagonale à travers la bonde et en mesurant la longueur qui correspondait. . Il a commencé à se demander pourquoi cette méthode fonctionnait. Cela l'a conduit à son étude des solides de révolutions et des

Machine Translated by Google

publication de sa célèbre pièce de 1615 Nova stereome tria doliorum (Nouvelle stéréométrie des tonneaux de vin). Ce travail a ensuite été développé par BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647).

En 1614, JOHN NAPIER publia son récit des arithmétiques logarithmiques, un dispositif mathématique qu'il inventa dans le but d'aider les astronomes dans leurs grands calculs numériques. Kepler a été ravi d'apprendre le travail de Napier et a aidé à fournir une explication mathématique de la méthode de Napier. Kepler a également publié des tables de valeurs arithmétiques logarithmiques précises à huit décimales près.

Kepler est décédé le 15 novembre 1630 à Regensburg, en Allemagne. Sa deuxième loi du mouvement planétaire a joué un rôle crucial dans la formation de la pensée de Sir Isaac Newton dans le développement de sa théorie de la mécanique.
Bien que Newton n'ait fait aucune mention directe du travail de Kepler dans ses premiers écrits, il a crédité Kepler comme source d'inspiration pour ses idées dans une conférence qu'il a donnée aux membres de la ROYAL SOCIETY avant la sortie de son célèbre ouvrage de 1687 Principia.

al-Khw–arizm–ı, Muhammad ibn M–us–a (vers 780–850)
Algèbre arabe Né à Khw– arizm, (maintenant Khiva), Uzbe kistan, l'érudit arabe Muhammad ibn M– us– a al-Khw– arizm– ı est connu pour avoir écrit deux textes extraordinairement influents. Le premier, Al-jam' w'al-tafriq ib hisab al-hind (Addition et soustraction dans l'arithmétique indienne), a introduit le système numérique indien en Occident, et un second ouvrage a déclenché le développement de l'algèbre. Le titre de son deuxième ouvrage, Hisab al-jabr w'al-muq– abala (Calcul par restauration et compensation), une fois traduit en latin, a produit le mot même d'algèbre que nous utilisons aujourd'hui.

Al-Khw– arizm– ı était un érudit de la Maison de la Sagesse à Bagdad, une académie d'apprentissage et une bibliothèque fondée par le calife al-Mamun en 813. (Cette institution a été la première bibliothèque construite n'importe où dans le monde depuis la destruction de la célèbre Bibliothèque d'Alexandrie.) Abritant une importante collection de textes philosophiques et scientifiques grecs, la bibliothèque engagea des universitaires arabes pour traduire les manuscrits en arabe et mener des recherches plus approfondies sur les sujets abordés.
Al-Khw– arizm– ı était l'un de ces érudits qui s'intéressait particulièrement aux travaux sur les mathématiques et l'astronomie.

Dans ses premières pièces célèbres, Al-jam' w'al-tafriq ib hisab al-hind, al-Khw– arizm– ı décrit et explique les avantages du système de décimales tel qu'il est utilisé en Inde pour écrire les nombres et faire de l'arithmétique. Ce Le travail a été traduit en latin environ 300 ans plus tard et est devenu la principale source pour les Européens qui voulaient apprendre le nouveau système de numération. Il est intéressant de noter que bien que cet ouvrage utilise un symbole pour zéro (en arabe appelé sifr), al-Khw– arizm– ı ne le considérait pas comme un nombre et ne l'utilisait que comme un espace réservé (pour distinguer 203 de 23, pour exemple).

Al-Khw– arizm– ı voulait que sa deuxième pièce célèbre, Hisab al-jabr w'al-muq– abala, soit également utilisée comme guide pédagogique. Il visait à offrir un éventail de techniques et de méthodes pour résoudre des problèmes très pratiques en matière de commerce, d'héritage, de droit, d'arpentage et d'architecture. Commençant à un niveau extraordinairement élémentaire, al-Khw– arizm– ı a d'abord défini les nombres naturels et l'acte de compter pour ensuite passer au sujet principal de la première section de l'article, à savoir la résolution d'équations linéaires et quadratiques élémentaires. Il est important de noter que toutes les mathématiques d'al-Khw–arizm–ı ont été faites entièrement en mots, et aucun symbole n'a jamais été utilisé. Il appelait un nombre une « unité », une inconnue une « racine » et une quantité au carré un « carré ».

Pour résoudre les équations, al-Khw– arizm– ı a utilisé deux opérations qu'il a appelées al-jabr et al-muq– abala. Le premier, « complétion », est le processus de suppression de tous les termes négatifs d'une équation. En notation moderne, cela = 3 + 5x, par
2 2 – 5x = 3 en x
convertit x exemple. Le second,
«l'équilibrage», est le processus de soustraction de termes positifs de même puissance lorsqu'ils se produisent de chaque côté d'une équation. En notation moderne, cela signifie 2 + 7 =
réécriture 5x 2 2 + 7 = 3x + x, par exemple, comme 2x
x. Avec ces deux manœuvres, al-Khw– arizm– ı réduit toutes les équations linéaires et quadratiques en six types de base, qu'il énumère. Le reste de cette partie du texte est consacré à la résolution de ces équations. La pratique standard d'aujourd'hui de COMPLÉTER LE CARRÉ est décrite dans cette section.

La partie suivante du texte d'al-Khw– arizm– ı est constituée d'applications et d'exemples travaillés. Parce que beaucoup de problèmes étaient de nature géométrique, al-Khw– arizm– ı rejetait les solutions négatives aux problèmes et n'autorisait que des réponses positives. Il a reconnu que les équations quadratiques peuvent donner deux solutions à un problème. Al-Khw– arizm– ı a également calculé les aires de figures géométriques simples, ainsi que le volume d'une sphère, du cône et de la pyramide, dans cette section. La dernière section du texte se concentre sur les règles islamiques compliquées pour l'héritage et ne développe aucun nouveau contenu mathématique.

Machine Translated by Google

Au 10ème siècle, l'Espagne était sous contrôle islamique, et des érudits européens intéressés par la culture intellectuelle du monde islamique se sont rendus en Espagne pour étudier les textes arabes. C'est là que les œuvres d'Al-Khw– arizm– ı ont été découvertes et traduites en latin.

Al-Khw– arizm– ı a également écrit des textes sur l'astronomie, le cadran solaire, le calendrier juif et la géographie. Il a calculé les latitudes et longitudes de plus de 2 400 localités spécifiques en vue de la construction d'une carte du monde précise.

On pense que le mot algorithme est dérivé du nom d'al-Khw-arizm-ı. Les érudits européens médiévaux, tentant de traduire le nom de l'érudit arabe en latin, ont appelé la pratique consistant à utiliser des chiffres hindous-arabes "algorisme", à partir duquel, à son tour, toute pratique ou procédure générale est devenue connue sous le nom d'"algorithme". Le fait qu'une version de son nom soit devenue une partie de notre vocabulaire occidental illustre à quel point l'œuvre d'al-Khw– arizm– ı a influencé le développement de l'arithmétique et de l'algèbre en Europe.

Klein, Felix Christian (1849–1925) Allemand Algèbre abstraite, Géométrie, Topologie Né le 25 avril 1849, le savant Felix Klein est connu pour avoir uni les domaines disparates de la GÉOMÉTRIE et de l'ALGÈBRE à travers l'étude des TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES. Il a montré que l'analyse abstraite de l'algèbre des transformations par la THÉORIE DES GROUPES conduit à une compréhension claire à la fois de la GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE et de la GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE. En particulier, il a prouvé que la géométrie euclidienne ordinaire peut être prouvée COHÉRENTE, c'est-à-dire sans contradiction, si et seulement si la géométrie non euclidienne est cohérente. Cela a démontré, pour la première fois, que les théories controversées non euclidiennes de la géométrie étaient d'une importance égale à la théorie de la géométrie euclidienne ordinaire. En topologie, la BOUTEILLE KLEIN est nommée en son honneur.

Klein a obtenu un doctorat en mathématiques de l'Université de Bonn en 1868 après avoir terminé un sis explorant les applications de la géométrie à la mécanique.
Après une courte période de service militaire, Klein accepte un poste de professeur de mathématiques à Erlangen, en Bavière, en 1872. C'est là qu'il commence ses travaux sur l'analyse des transformations géométriques et l'unification des géométries euclidiennes et non euclidiennes. . Son approche du sujet en mettant l'accent sur les "invariants de groupe" a été extrêmement influente, et les travaux dans ce domaine se poursuivent aujourd'hui. (C'est ce qu'on appelle le « programme Erlangen » de Klein.)

En 1886, Klein accepta le poste de directeur de département à l'Université de Göttingen, où il resta jusqu'à sa retraite en 1913. Il enseigna des étudiants depuis son domicile dans les années qui suivirent.

En plus de mener des recherches de haut niveau en mathématiques, Klein écrit également des pièces mathématiques destinées au grand public et fonde une encyclopédie mathématique qu'il supervisera jusqu'à sa mort. Klein a été honoré d'être élu à la ROYAL SOCIETY en 1885 et a reçu la médaille Copley de la Société en 1912. Il est décédé le 22 juin 1925 à Göttingen, en Allemagne.

Voir aussi GROUPE KLEIN-FOUR .

Bouteille Klein Le MÖBIUS BAND est un objet tridimensionnel possédant une seule surface et un seul bord. Une SPHÈRE et un TORUS (en forme de beignet), d'autre part, sont des objets avec deux surfaces - une surface extérieure et une surface intérieure - ne possédant pas d'arêtes. La bouteille de Klein est un objet tridimensionnel alternatif avec une seule surface, semblable à celle d'une bande de Möbius, mais sans bords.

On peut facilement modéliser ces surfaces citées avec un pantalon. Par exemple, coudre ensemble les deux ouvertures de jambe produit un tube circulaire avec un trou pour la taille. Ce trou peut être colmaté avec un morceau de matériau pour produire un modèle complet d'un tore. Une bouteille Klein est produite en ramenant une jambe de pantalon vers le haut, au-dessus et à travers la taille du pantalon et en la poussant vers le bas à travers le tube de la deuxième jambe avant de coudre les deux ouvertures de jambe ensemble. Encore une fois, le trou pour la ceinture représente un trou dans la surface, mais l'objet produit n'en est pas moins une bouteille de Klein (percée). Malheureusement, il n'est plus physiquement possible de colmater le trou avec un morceau de tissu. Cela montre que la bouteille de Klein n'existe pas proprement dans un univers tridimensionnel. (On peut imaginer, cependant, que le matériau qui ferait un patch pour le trou de la taille a été « arraché » dans la quatrième dimension. En ce sens, la bouteille de Klein est un objet mathématique valide dans un espace à quatre dimensions. .)

On peut vérifier avec ce modèle que la surface idéale d'une bouteille de Klein serait bien unilatérale : une fourmi rampant d'un côté de la matière du pantalon pourrait atteindre n'importe quelle autre partie du pantalon, de part et d'autre de

Machine Translated by Google

la matière, sans jamais tricher en traversant le
bord du trou donné par la ceinture.

Si l'on coupe un pantalon cousu pour faire une bouteille de Klein (perforée) en deux le long de la ligne qui suit le coutures intérieures et extérieures du pantalon, puis le modèle tombe en deux morceaux, dont chacun est facilement vu comme ayant issu d'une bande de Möbius. Cela montre qu'une bouteille de Klein peut aussi être considérée comme l'union de deux Möbius bandes jointes le long de leurs bords. (Si quelqu'un physiquement tente de coudre ensemble deux bandes de Möbius, l'une bientôt constate qu'il est nécessaire de percer une bande pour produire un trou semblable au trou pour la taille d'un pantalon.)

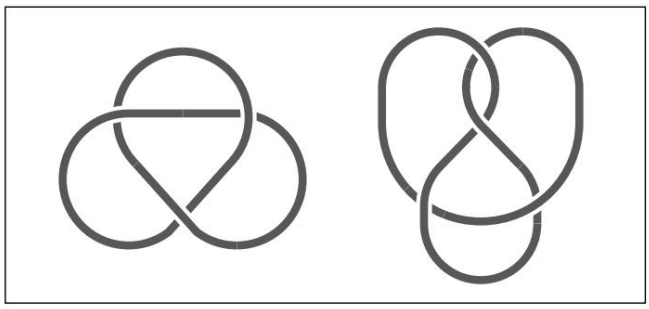
Groupe Klein-four (viergruppe) Il y a essentiellement seulement deux GROUPES avec seulement quatre éléments. Le premier est le « groupe cyclique » C4 donné par les symétries de rotation d'un carré, C4 = {1, R, R2 , R3 }, où R représente une rotation de 90° d'un carré dans le sens des aiguilles d'une montre et 1 est l' ÉLÉMENT D'IDENTITÉ, une rotation de zéro degrés. Comme une rotation de 360° équivaut à aucun action, nous avons que R4 = 1. Multiplication dans cette groupe est donné par la règle du produit des exposants. Nous avoir, par exemple, que R2 × R3 = R5 = R.

Le deuxième groupe avec seulement quatre éléments est appelé le groupe Klein-quatre. En désignant ses éléments par 1, a, b, et c, 1 étant l'élément d'identité, il possède une table de multiplication donnée par :

×	1 abécédaire			
1	1 abécédaire			
un	un	1	c	b
bb cc ba 1			1	un
c				

Ce groupe peut aussi être représenté par un ensemble de symétries d'un carré. Définissez a pour signifier une réflexion sur un axe vertical, b une réflexion autour d'un axe horizontal, et c une rotation de 180°. Nous avons, par exemple, qu'un une réflexion verticale suivie d'une rotation de 180° est la équivalent d'une réflexion horizontale (c × a = b), et que deux réflexions autour du même axe conduisent à la identité (a × a = b × b = 1).

théorie des nœuds Branche de la TOPOLOGIE qui étudie les propriétés des boucles fermées intégrées dans trois



Les deux nœuds avec moins de cinq croisements

l'espace dimensionnel est appelé théorie des nœuds. Chaque boucle étudié, appelé nœud, représente le chemin tracé par un morceau de ficelle entrelacé dans l'espace (sans auto-intersection) dont les extrémités libres ont été jointes. Si un un morceau de ficelle emmêlé peut être physiquement transformé en une copie exacte d'une deuxième chaîne enchevêtrée (ou à moins une image miroir de ce deuxième enchevêtrement), alors nous disons que les deux nœuds représentés par les cordes sont équivalents. À l'heure actuelle, personne ne connaît une procédure générale garantissant de déterminer avec une relative facilité si oui ou non deux nœuds donnés sont équivalents.

Les nœuds peuvent être représentés sur une page en deux dimensions comme une image d'une boucle qui se croise sur et sous elle-même. Il est classique de dessiner l'image d'un nœud donné avec le moins de traversées possible. Une photo avec juste une ou deux traversées équivaut à une boucle démêlée (le « dénouement »). Il n'y a qu'un seul nœud (jusqu'à l'équivalence) à trois croisements et un seul à quatre traversées. Chacun est illustré ci-dessus. Il y a deux nœuds distincts nécessitant un minimum de cinq croisements, trois nécessitant un minimum de six traversées, et sept nécessitant un minimum de sept traversées. Après cela, le nombre de nœuds distincts avec un nombre minimal donné de croisements lorsqu'il est dessiné sur une page se développe rapidement.

Les nœuds ont d'abord été étudiés par CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) et son élève Johann Listing (1808–82). En 1877, le physicien écossais Peter Tait a classé tous les nœuds avec jusqu'à sept traversées. Il a également conjecturé que non "nœud alterné" (c'est-à-dire celui dont le chemin alterne se croise sur et sous lui-même) équivaut à la dénouer. Un siècle plus tard, un mathématicien néo-zélandais Vaughn Jones lui a prouvé qu'il avait raison.

En 1928, le mathématicien américain James Waddell Alexander a découvert un moyen théorique d'associer à chaque nœud un POLYNÔME de telle manière que si deux

Machine Translated by Google

nœuds sont équivalents, alors les polynômes qui leur sont associés s'avèrent être les mêmes. Cela a donc fourni un moyen algébrique de distinguer les nœuds : si deux nœuds ont des polynômes d'Alexander différents, alors ils ne sont pas équivalents. Dans les années 1960, le mathématicien britannique John Horton Conway a découvert une méthode explicite pour implémenter les polynômes d'Alexandre et, en 1984, Vaughn Jones a développé un choix alternatif (plus simple) de polynôme à associer à chaque nœud. (C'est avec le « polynôme de Jones » que Jones put établir l'affirmation de Tait.) La même année, huit mathématiciens découvrirent indépendamment un autre polynôme qui généralise l'approche de Jones. (Ce polynôme est appelé le polynôme HOMFLYPT - un acronyme de leurs noms.)

Malheureusement, on ne sait pas encore si la technique de Jones fournit une correspondance parfaite entre des nœuds distincts et des polynômes distincts — il est possible que deux nœuds non équivalents puissent produire le même polynôme de Jones. (Personne n'en a encore vu d'exemple.)

La théorie des nœuds est un domaine actif de la recherche actuelle. Il est utilisé dans l'étude pratique de molécules complexes telles que l'ADN, dans l'analyse des circuits électriques et dans la planification des réseaux routiers et autoroutiers.

Bien que l'image miroir d'un nœud soit considérée comme équivalente au nœud d'origine, les mathématiciens ont prouvé qu'aucun nœud (sauf le nœud dénoué) ne peut être physiquement déformé en son image miroir. Il est également intéressant de noter qu'aucun nœud n'existe dans l'espace à deux dimensions ou dans l'espace à quatre dimensions (ce qui signifie que tout nœud dans ces espaces peut être déformé en un nœud).

Voir aussi TRESSE.

Courbe de Koch Voir FRACTAL.

Kolmogorov, Andrey Nikolaevich (1903–1987) Russe Théorie des probabilités, Analyse, Systèmes dynamiques Né le 25 avril 1903 à Tambov, en Russie, le savant Andrey Kolmogorov est connu pour ses importantes contributions dans le domaine de la théorie des PROBABILITÉS et ses travaux révolutionnaires dans l'étude des SYSTEMES DYNAMIQUES. Il a également contribué à l'étude des SÉRIES DE FOURIER, de l'ANALYSE et de la TOPOLOGIE. Appliquant ses travaux aux études planétaires, Kolmogorov a également pu établir la stabilité mathématique de notre système solaire.

Kolmogorov a commencé sa carrière professionnelle en tant que conducteur de chemin de fer. Pendant son temps libre, cependant, il a étudié les mathématiques d'émathique et de physique, et réussit à rédiger un traité sur les lois de la mécanique de SIR ISAAC NEWTON . En 1920, il entre à l'Université d'État de Moscou. Au moment où il a terminé ses études de premier cycle, il avait publié huit articles influents sur les thèmes de la THÉORIE DES ENSEMBLES et de l'analyse. Kolmogorov a publié 10 autres articles avant de recevoir son doctorat en 1929.

Deux ans plus tard, Kolmogorov est nommé professeur de mathématiques à l'Université d'État de Moscou. À cette époque, il commence à écrire Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Fondations sur la théorie des probabilités), dans lequel il tente, avec succès, de construire toute la théorie des probabilités à partir d'un ensemble fini d'axiomes en n'utilisant que la rigueur logique. Kol mogorov a acquis une renommée nationale lorsque l'ouvrage a été publié en 1933. L'œuvre a été traduite en anglais par Nathan Morrison en 1950.

En 1938, Kolmogorov fut nommé chef du département des probabilités et des statistiques à l'Institut mathématique Steklov nouvellement créé en Russie. Peu de temps après, l'attention de Kolmogorov se tourna vers l'étude de la turbulence et, en 1941, il écrivit deux articles importants sur la nature du flux d'air turbulent des moteurs à réaction, établissant les principes fondateurs de la théorie des systèmes dynamiques. Plus tard, il a appliqué ce travail à l'étude du mouvement planétaire.

Kolmogorov a reçu de nombreux prix pour son travail remarquable. En 1939, il est élu en URSS
Academy of Science, et au cours des années suivantes, il a reçu huit prix de l'État et de l'académie.
Il a également été élu dans un certain nombre d'académies étrangères, dont la Royal Statistical Society de Londres en 1956, l'American Academy of Arts and Sciences en 1959, l'Académie néerlandaise des sciences en 1963, la ROYAL SOCIETY de Londres en 1964 et la French Academy of Arts and Sciences en 1963 . Académie des sciences en 1968. Kolmogorov a également reçu le prix international Balzan en 1962.

Kolmogorov est décédé à Moscou, en Russie, le 20 octobre 1987. Ses travaux ont ouvert la voie à des recherches continues dans les domaines de l'analyse de Fourier, des «chaînes de Markov» en théorie des probabilités et de l'analyse topologique.

Kronecker, Leopold (1823–1891) Allemand Théorie des nombres Né le 7 décembre 1823 à Liegitz, Prusse (aujourd'hui Legnica, Pologne), le mathématicien et philosophe Leopold Kronecker est reconnu comme un érudit pour ses contributions considérables au domaine de la THÉORIE DES NOMBRES . Comme

Machine Translated by Google

philosophe, on se souvient également de lui comme le premier à avoir mis en doute l'existence des NOMBRES TRANSCENDANTAUX et des hiérarchies d'ensembles infinis, notions mises en avant par KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897) et GEORG CANTOR (1845-1918). À un moment donné, Kronecker est même allé jusqu'à nier l'existence des NOMBRES IRRATIONNELS.

Kronecker est entré à l'université de Berlin en 1841 et a obtenu un doctorat en mathématiques après avoir terminé une thèse sur le thème de la théorie algébrique des nombres 4 ans plus tard. Plutôt que de poursuivre une carrière universitaire, Kro necker a décidé de retourner à Liegitz pour participer à l'activité bancaire familiale. Au cours des 10 années qui ont suivi, il est devenu assez riche et a ensuite eu le luxe de poursuivre des cours de mathématiques par lui-même sans jamais avoir besoin d'accepter un poste universitaire. En 1855, il retourna à Berlin et publia en succession rapide une série d'articles influents qui lui attirèrent l'attention nationale. En 1861, Kronecker a été élu membre de la prestigieuse Académie de Berlin, ce qui lui a valu le droit d'enseigner à l'Université de Berlin, même s'il n'était pas membre du corps professoral. (En 1883, quelque 20 ans plus tard, Kronecker obtint un poste officiel à l'université.) Kro necker fut également élu à l'Académie de Paris en 1868 et à la ROYAL SOCIETY de Londres en 1884.

Au cours des années 1870, Kronecker s'intéressa vivement aux nouvelles approches indirectes que les mathématiciens utilisaient pour prouver l'existence de certains types de nombres. Mais il en vint bientôt à sentir que de telles pratiques non constructives étaient philosophiquement erronées. Par exemple, Cantor avait démontré que l'ensemble des nombres réels est "plus infini" que l'ensemble des NOMBRES ALGEBRIQUES, et donc, des nombres qui ne sont pas algébriques (appelés nombres transcendantaux) doivent exister.

Selon Kronecker, les mathématiques ne pouvaient jamais être basées que sur des quantités finies avec un nombre fini d'opérations qui leur étaient appliquées. Un argument comme celui de Cantor n'avait donc, dans la pensée de Kronecker, aucun sens. Même lorsque CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN (1852-1939) prouva en 1882 que le nombre spécifique π est transcendantal, Kronecker complimenta Lindemann sur sa belle preuve mais ajouta qu'en fait, il n'avait rien accompli, puisque les nombres transcendantaux n'existent pas.

Kronecker était catégorique dans ses vues et, dans son article de 1887 Über den Zahlbergriff (Sur la théorie des nombres), il tenta de persuader la communauté mathématique de la nécessité absolue de n'utiliser que des nombres directs et finis. techniques. Il est célèbre pour avoir remarqué une fois que « Dieu a créé les nombres entiers. Tout le reste est l'œuvre de l'homme » comme une tentative de ramener la pensée mathématique à des principes concrets. Weierstrass et Cantor se sont sentis personnellement attaqués par Knonecker et ont pensé qu'il sapait délibérément leurs propres programmes de recherche.

Bien que de nombreux mathématiciens d'aujourd'hui ne soient pas d'accord avec les vues de Kronecker, elles ont été prises au sérieux à l'époque, et les idées avancées par Kronecker ont ensuite été développées au cours du siècle qui a suivi. La pratique consistant à n'utiliser que des approches directes et finies pour prouver des résultats en mathématiques est aujourd'hui appelée constructivisme.

Kronecker est décédé le 29 décembre 1891 à Berlin, en Allemagne.

Le compte de Kruskal

Au début des années 1980, le physicien de Princeton Martin Kruskal a découvert une propriété mathématique remarquable que tous les passages d'un texte écrit semblent posséder. Ce phénomène est maintenant appelé comptage de Kruskal.

Pour illustrer le principe, passez en revue, par exemple, la comptine familière :

Petite étoile scintillante
scintillante, Comme je me demande
ce que tu es, Au-dessus du monde
si haut, Comme un diamant dans le ciel.
Twinkle twinkle little star, Comme
je me demande ce que tu es.

Effectuez les étapes suivantes :

1. Sélectionnez n'importe quel mot de la première ou de la deuxième ligne et comptez le nombre de lettres qu'il contient.
2. Comptez ce nombre de mots dans le passage pour atterrir sur un nouveau mot. (Par exemple, choisir le mot étoile, composé de quatre lettres, vous transportera vers le mot quoi.)
3. Comptez le nombre de lettres du nouveau mot et avancez à nouveau d'autant de positions.
4. Répétez cette procédure jusqu'à ce que vous ne puissiez plus aller plus loin (c'est-à-dire que compter en avant vous fera sortir de la comptine).
5. Observez le dernier mot sur lequel vous avez atterri.

Étonnamment, quel que soit le mot sur lequel vous commencez cette tâche de comptage, la procédure vous amène toujours au même mot dans la dernière ligne, à savoir le mot vous.

Machine Translated by Google

Kruskal a observé que ce même phénomène semble se produire avec n'importe quel morceau de texte suffisamment long - compter de cette manière à partir de n'importe quel mot de début vous amène au même endroit à la fin de la page.

Cela fournit une activité amusante pour plusieurs personnes à effectuer simultanément, travaillant toutes avec le même texte, mais en commençant par différents choix de mots initiaux.

Le phénomène peut s'expliquer de la manière suivante : imaginez que lors d'un premier passage dans le texte, tous les mots rencontrés soient encerclés. Atterrir sur l'un de ces mots encerclés lors d'une exécution ultérieure de l'expérience ment amènera le joueur au même dernier mot. Quelle est alors la probabilité qu'une seconde exécution de l'expérience ne « touche » aucun des mots précédemment encerclés ? Si le passage est suffisamment long, disons qu'il comporte 20 étapes, les chances de "manquer" un mot encerclé à chaque fois sont susceptibles d'être très faibles, d'autant plus que le passage anglais typique contient des mots raisonnablement courts.

Les estimations calculant cette PROBABILITÉ montrent qu'elle a probablement une valeur inférieure à 0,1 %. Ainsi, avec une certitude d'environ 99,9 %, deux chemins à travers un passage de texte coïncideront à un moment donné.

Machine Translated by Google

L

Lagrange, Joseph-Louis (1736–1813) Analyse italo-française , mécanique, algèbre abstraite, théorie des nombres Né le 25 janvier 1736 à Turin, en Italie, on se souvient de Joseph-Louis Lagrange, entre autres, pour son texte définitif de 1788 Mécanique analytique , dans laquelle il expose de manière purement formelle et tout à fait rigoureuse comment et pourquoi les choses bougent. En effet, l'ouvrage résume tout l'état de la mécanique post-newtonienne du XVIIIe siècle. La publication est également célèbre pour ne comporter ni figures ni diagrammes. (Lagrange a apparemment estimé que les formules qu'il développait capturaient suffisamment bien la réalité physique pour que les images ne soient pas nécessaires.) tous les degrés (Traité sur la résolution des équations numériques de tous degrés), sur la théorie des équations, dans lequel il développe des principes généraux de résolution des équations POLYNOMIALES jusqu'au degré quatre via des principes que nous appellerions aujourd'hui THÉORIE DES GROUPES. Le fameux « théorème de Lagrange » issu de l'étude des groupes apparaît dans cet ouvrage, ainsi que la fameuse formule d'INTERPOLATION qui porte son nom. Il a également apporté d'importantes contributions dans le domaine de la THÉORIE DES NOMBRE, prouvant en 1770, par exemple, que tout entier positif est la somme de quatre nombres carrés. Aussi, en 1771, il fut le premier à prouver ce qu'on appelle aujourd'hui le « théorème de Wilson », qu'un nombre n est PREMIER si, et seulement si, (n – 1) ! + 1 est divisible par n.

Bien que Lagrange soit né à Turin et y ait passé la première partie de sa vie, il finit par s'installer à Paris et s'est identifié comme français. Il a été introduit éduqué aux matières de physique et de mathématiques au Collège de Turin. Il étudia d'abord les principes du TAUTOCHRONE et, en 1754, avait publié quelques découvertes importantes sur le sujet. Il partagea les résultats avec LEONHARD EULER (1707-1783), qui fut convenablement impressionné. À l'âge de 19 ans, Lagrange est nommé professeur de mathématiques à l'École royale d'artillerie de Turin. Là, il fit des progrès significatifs dans l'étude générale de la mécanique et écrivit un certain nombre d'articles influents. En 1756, il fut élu à l'Académie de Berlin sous la recommandation d'Euler.

Au cours des 20 années pendant lesquelles Lagrange est resté à l'Académie de Berlin, il a travaillé sur une grande variété de sujets. Il a jeté les bases d'un sujet qui sera connu sous le nom de « dynamique » et a apporté d'importantes contributions aux études de la mécanique des fluides, à l'intégration des équations différentielles et à la résolution des systèmes d'équations différentielles, ainsi qu'à la étude des cordes vibrantes et de la propagation du son. En 1766, il succède à Euler en tant que directeur des mathématiques à l'Académie de Berlin et, en 1772, il partage avec Euler l'un des prix biennaux de l'Académie des sciences de Paris pour ses travaux sur le "problème des trois corps" de la physique. Il remporte à nouveau un prix de l'Académie de Paris en 1774 pour ses travaux sur le mouvement de la lune, puis en 1780 pour son étude mathématique du mouvement planétaire.

En 1787, Lagrange quitte Berlin pour occuper un poste à l'Académie des sciences de Paris. Il publie son ouvrage Mécanique analytique l'année suivante. Il a aussi

Machine Translated by Google

travaillé avec l'Académie de Paris pour standardiser
poids et mesures du jour. Le comité pour la mulation du système métrique et prône le système général
utilisation d'une base décimale.

Les réalisations importantes de Lagrange ont été reconnues par l'empereur Napoléon en 1808, alors qu'il était nommé à la Légion d'honneur et comte de la
Empire. Cinq ans plus tard, il a également été nommé Grand Croix de l'Ordre Impérial de la Réunion. Il mourut en
Paris, France, le 10 avril 1813.

L'impact de Lagrange en mathématiques, en particulier en physique mathématique, se fait encore sentir aujourd'hui. De nombreux concepts fondamentaux de la mécanique et du calcul multivariable, tels que le lagrangien (la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un ensemble de particules), la description lagrangienne (mesure de la déformation d'un corps physique) et les multiplicateurs de Lagrange dans le calcul - jouent un rôle vital dans l'étude actuelle de ces sujets.

Voir aussi FORMULE DE LAGRANGE .

Formule de Lagrange (formule d'interpolation de Lagrange)
Étant donné une collection de points sur le plan, il est parfois voulu trouver la formule d'une fonction qui passe
par chacun de ces points. Par exemple, un scientifique peut chercher une formule pour une fonction qui correspond à toutes les données valeurs obtenues à partir d'une expérience. À la fin des années 1700, mathématicien franco-italien JOSEPH-LOUIS LAGRANGE a suggéré la formule d'INTERPOLATION suivante :

> Si (a1 ,b1), (a2 ,b2), …, (an ,bn) sont une collection de points dans le plan, avec les valeurs ai distinctes, alors
>
> $$f(x) = b_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)} + b_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)} + \cdots + b_n \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}$$
>
> est un POLYNOME, de degré n – 1, qui passe par chacun des points.

Cette formule est aujourd'hui connue sous le nom de formule de Lagrange. On peut vérifier que cela fonctionne en substituant x = a1 à voir que f(a1) = b1 , et ainsi de suite.

A titre d'exemple, considérons les points (1,2), (2,5), et (3,1) dans le plan. La formule de Lagrange montre que la quadratique

$$\text{effet}(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 5\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 1\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$= -\frac{7}{2}x^2 + \frac{27}{2}x - 8$$

traverse chacun d'eux.

De nombreux tests d'intelligence demandent aux participants d'identifier "le numéro suivant dans la séquence." Le for mula de Lagrange fournit un moyen de justifier absolument tout réponse à une telle question. Par exemple, la prochaine nombre dans la séquence 2,4,6,… pourrait bien être 103. Nous pouvons affirmer que la séquence suit la formule :

$$u_n = n + \frac{95}{6}n - \frac{32}{6}n^2 + \frac{95}{6}n^3 - \frac{1057}{6}n^4$$

(Appliquer le 95 de Lagrange formule aux points (1,2), (2,4), (3,6) et (4,103).)

Lambert, Johann Heinrich (1728–1777) Suisse allemand Géométrie, Analyse, Théorie des nombres, Physique
Né le 26 août 1728, le savant Johann Lambert est
mieux connu comme le premier à prouver, en 1761, que π est un NOMBRE IRRATIONNEL. Il a également travaillé sur Euclide
POSTULAT PARALLÈLE et a frôlé la découverte de
GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE. Lambert a également développé la notation et la théorie des FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

En 1766, Lambert écrit Theorie der Parellellinien
(Sur la théorie des droites parallèles), dans lequel il postulait l'existence de surfaces sur lesquelles les triangles ont des sommes angulaires inférieures à 180°, donnant ainsi un exemple de une géométrie dans laquelle le postulat parallèle serait FAUX. (Une telle surface a été découverte plus tard. C'est ce qu'on appelle un pseudosphère.) Lambert a prouvé que dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle ne serait pas constante, et en fait augmenterait (mais jamais pour égaler 180°) à mesure que sa surface diminue.

En 1737, LEONHARD EULER avait prouvé que e et e^2 sont tous les deux irrationnels. Dans le journal "Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités trans scendantes circulaires et logarithmiques.
quelques propriétés remarquables des grandeurs transcendantales circulaires et logarithmiques) présenté au Berlin Académie des sciences en 1761, Lambert a fourni une preuve que si x est un nombre rationnel différent de zéro, alors ni e^x ni tan x ne peut être rationnel. Ainsi Lambert

Machine Translated by Google

avait réussi à étendre le résultat d'Euler en établissant que e élevé à une puissance fractionnaire, $e^{\frac{p}{q}}$, n'est jamais rationnel, et, de plus, notant que $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, cela ne peut pas non plus Sois rationnel. Lambert a également conjecturé que e et π sont des NOMBRES TRANSCENDANTAUX. (Ce n'était pas pour un autre 100 ans que, en 1873, le mathématicien français Charles Hermite a prouvé la transcendance de e, et l'allemand mathématicien CARL LOUIS FERDINAND VON LINDE MANN, en 1883, la transcendance de π.)

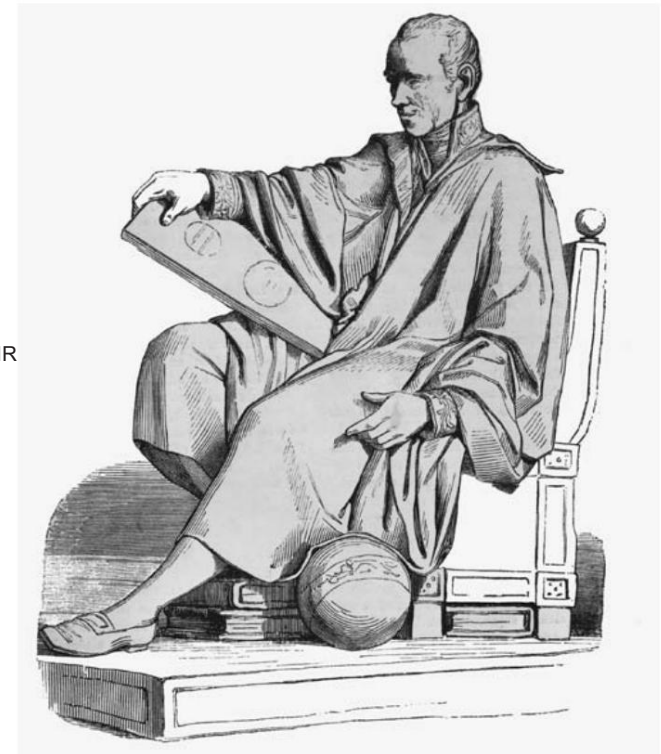
Lambert a également travaillé sur la théorie des PROBABILITÉS et, en physique, a apporté d'importantes contributions à la étude de la chaleur et de la lumière. Il est décédé à Berlin, en Allemagne, le 25 septembre 1777. Une grande partie de l'œuvre de Lambert, bien que important à son époque, peut être considéré aujourd'hui comme ayant ouvert le moyen pour les autres de réaliser de plus grands progrès.

Laplace, Pierre-Simon, marquis de (1749-1827)
Mécanique française , Analyse, Equations différentielles, Théorie des probabilités Né le 23 mars 1749 en Normandie, en France, le savant Pierre-Simon Laplace est le meilleur connu pour son influent traité en cinq volumes Traité de mécanique céleste , publié entre les années 1799 et 1825. Dans cet ouvrage Laplace a essayé de développer une méthode mathématique rigoureuse compréhension du mouvement des corps célestes, y compris les diverses anomalies et inégalités qui ont été observées dans leurs orbites. Ce faisant, Laplace fait des progrès significatifs dans le développement des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, des équations DIFFÉRENTIELLES , des PROBABILITÉS et des STATISTIQUES. Il a été le premier à prolonger SIR théorie de la gravitation d' ISAAC NEWTON à l'étude de tout le système solaire. En 1812, Laplace publie également sa Théorie analytique des probabilités des probabilités), ce qui a considérablement fait progresser les thèmes des probabilités et des statistiques.

A 16 ans Laplace entre à l'Université de Caen et s'est rapidement découvert un amour pour les mathématiques. Trois ans plus tard, sans terminer ses études, Laplace s'installe à Paris pour travailler avec le mathématicien JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783), subvenant à ses besoins comme professeur de mathématiques à l'École militaire. Par à l'âge de 24 ans, Laplace avait produit 13 articles de haute qualité sur les sujets du CALCUL INTÉGRAL, mécanique et l'astronomie physique, ce qui lui a valu attention nationale. Il continua à produire des résultats fondamentalement importants et fut bientôt considéré comme l'un des des scientifiques les plus influents de son temps.

En 1773, Laplace est élu à l'Académie de Paris des Sciences et y a obtenu un poste de direction 12 ans plus tard. Il a été affecté à un comité spécial de l'Académie de Paris en 1790 avec la charge de standardiser tous les poids et mesures européens.

Les travaux de Laplace sur la mécanique céleste étaient révolutionnaires. En 1786, il avait prouvé que les petites perturbations observées dans le mouvement orbital des planètes restera à jamais petit, constant et autocorrecteur, et en 1796 il fut le premier à proposer l'idée que le système solaire est né de la contraction et refroidissement d'une grande nébuleuse en rotation, et par conséquent aplatie, de gaz incandescent. En 1799, il publie les deux premiers volumes de sa célèbre Mécanique céleste, dans lequel il décrit les lois générales de mouvement des solides et des fluides, a appliqué la loi universelle de la gravité aux études du système solaire, et développé méthodes d'analyse de la différence et du différentiel



Pierre-Simon Laplace, éminent physicien mathématicien du XIXe siècle, a apporté une contribution fondamentale à l'étude de mouvement planétaire en appliquant la théorie de la gravitation de Sir Isaac Newton à l'ensemble du système solaire. Il a également été le pionnier du travail dans le théorie des probabilités et statistiques. (Photo gracieuseté de Topham/L'image fonctionne)

Machine Translated by Google

équations qui se posent dans ces études. Volumes ultérieurs étudié les forces locales agissant entre les molécules et l'effet à grande échelle de ces interactions locales. Il appliqué ce travail à l'étude de la pression et de la densité, la nature de la gravité, l'action capillaire, le son, la réfraction et la théorie de la chaleur.

En 1812, Laplace publie son célèbre article sur la thème des probabilités. Motivé par l'analyse des erreurs dans l'observation, Laplace développa la théorie des probabilités à partir des principes de départ et clarifia fondements mathématiques de nombreux aspects de la sujet. Il a donné sa propre définition de la probabilité et l'a utilisé pour justifier les manipulations mathématiques de base. L'ouvrage traite de ses fameux MOINS CARRÉS MÉTHODE, le PROBLÈME DE L'AIGUILLE DE BUFFON et LE PROBLÈME DE BAYES THÉORÈME. En analysant la distribution des erreurs dans les observations scientifiques, Laplace a également appliqué ce travail à la détermination précise des masses de Jupiter, Saturne et Uranus, ainsi que l'amélioration de la triangulation méthodes d'arpentage et la détermination correcte de longitude et latitude en géodésie.

Sous Napoléon, Laplace devient comte de la empire en 1806 et reçut le titre de marquis en 1817. Laplace a écrit qu'il croyait que la nature de l'univers est complètement déterministe, ce qui signifie que les mouvements de tous les objets du système solaire sont prédéterminés par les conditions initiales au début de l'univers. Lorsque Napoléon lui a demandé où Dieu se situait dans ce point de vue, Laplace aurait répondu : « Je n'ai besoin de cette hypothèse.

Laplace est mort à Paris, France, le 5 mars 1827. Il n'est pas possible d'exagérer l'influence de Laplace sur le développement de la théorie mathématique de mécanique. Un certain nombre de concepts fondamentaux, tels que l'opérateur de Laplace en théorie du potentiel et transformation de Laplace dans l'étude des équations différentielles, sont nommés en son honneur.

Carré latin Un carré latin n × n est un arrangement des n premières lettres latines A, B, C, D, … dans un en carré de telle manière qu'aucune ligne ou colonne de ce tableau contient deux lettres identiques. Par exemple, l'arrangement ci-dessous est un carré latin 3 × 3 :

abc
TAXI
BCA

Un carré latin est dit diagonal si, en plus, aucune lettre n'est répétée dans l'une ou l'autre des diagonales du carré. Voici, par exemple, un carré latin diagonal 4 × 4 :

A B C D
C DA B
D CB A
B AD C

Aucun carré latin 3 × 3 n'est diagonal.

Il n'y a qu'un seul carré latin 1 × 1, deux 2 × 2 Carrés latins (aucun d'entre eux n'est diagonal), 12 3 × 3 carrés latins et 576 carrés latins 4 × 4. Le nombre de carrés latins d'un ordre donné croît extrêmement rapidement, comme le montre le tableau suivant :

n	Nombre de n × n carrés latins
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161 280
6	812 851 200
7	61 479 419 904 000
8	108 776 032 459 082 956 800
9	5 524 751 496 156 892 842 531 225 600
dix	9 982 437 658 213 039 871 725 064 756 920 320 000

Il y a plus de carrés latins 15 × 15 qu'il n'y en a atomes dans l'univers (que les physiciens calculent comme étant environ 1081).

Deux carrés latins du même ordre sont appelés orthogonales entre elles si toutes les paires de lettres qui apparaissent lorsque les deux carrés sont superposés sont différents. Par exemple, les deux carrés ci-dessous sont mutuellement orthogonaux. Ici, nous avons utilisé des lettres du Alphabet grec pour le deuxième carré. La résultante tableau de paires d'éléments qui apparaît est appelé un Carré gréco-latin.

A B C D		αβγ δ		Aα Bβ Cγ Dδ
BADC	+	γδαβ	=	Bγ Aδ Dα Cβ
CDAB		δγβα		Cδ Dγ Aβ Bα
DCBA		βαδγ		Dβ Cα Bδ Aγ

Ce carré résout le fameux "problème d'officier" en premier posé par LEONHARD EULER (1707–83):

Machine Translated by Google

Disposez 16 officiers, chacun de l'un des quatre régiments possibles et de l'un des quatre grades possibles, dans une rangée 4 × 4 de sorte que deux officiers dans une rangée ou une colonne donnée ne viennent pas du même régiment, ni n'ont le même grade.

Les carrés gréco-latins sont aussi parfois appelés carrés d'Euler. Les mathématiciens ont prouvé qu'il n'y a pas de solution au problème des officiers pour le cas de 36 officiers de six grades différents de six régiments différents (ni pour le cas de quatre officiers de deux régiments de deux grades), mais que toutes les autres versions du problème d'officier ont des solutions. En d'autres termes, n × n carrés gréco-latins existent pour toutes les valeurs de n sauf n = 2 et n = 6.

Les carrés gréco-latins sont importants dans la conception d'expériences dans les études scientifiques. Par exemple, si quatre espèces de tomates A, B, C et D sont à tester avec quatre engrais différents α, β, γ et δ, les parcelles peuvent être disposées selon un carré gréco-latin pour être sûr que chaque espèce de tomate et chaque engrais apparaît dans chaque ligne et colonne.

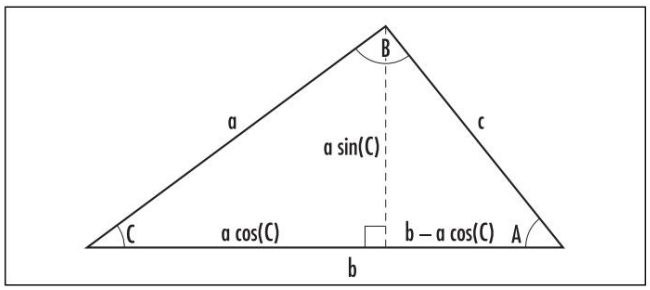
loi des moyennes Cette « loi » fait référence à la croyance erronée selon laquelle les résultats précédents de séries indépendantes d'un essai aléatoire influencent les résultats de séries à venir. Par exemple, après avoir lancé sept "faces" d'affilée, la supposée loi des moyennes dicterait que "faces" est désormais un résultat plus probable. Ce n'est bien sûr pas le cas. La chance de lancer pile au huitième lancer est toujours de 50 %. La loi des moyennes est une mauvaise interprétation courante de la LOI DES GRANDS NOMBRES mathématiquement correcte. Les joueurs ont souvent l'impression qu'après une longue série de pertes, les chances de gagner une main suivante doivent être considérablement plus grandes.

loi des cosinus/loi des sinus (règle du cosinus, règle du sinus) Soient a, b et c les trois longueurs de côté d'un triangle avec des angles intérieurs, comme indiqué.

La loi des cosinus affirme :

$$^{2\,2 = \text{courant alternatif}} + b\ 2 - 2abcos(C)$$

(avec des déclarations analogues pour les angles A et B). Lorsque C est un angle droit, ce résultat se réduit à un énoncé du THÉORÈME DE PYTHAGORE . La loi des cosinus peut donc être considérée comme une généralisation de ce fameux résultat.



Établir la loi des cosinus

La loi peut être prouvée en traçant une altitude à partir du sommet du triangle et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle contenant l'altitude et le côté c dans l'image ci-dessus.

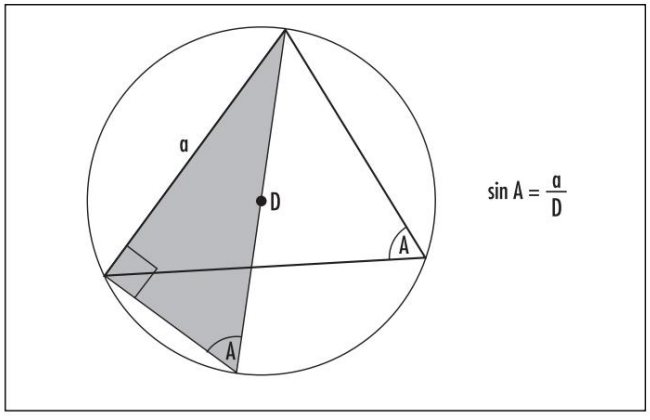
La loi des sinus affirme :

$$\frac{^{un}}{\sin(\ )} = \frac{b}{\sin(\ )} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Cela peut être prouvé en dessinant les altitudes du triangle. Par exemple, l'altitude au-dessus est simultanément de longueur asin(C) et csin(A), établissant ainsi une partie de la loi des sinus.

Dessiner le CIRCUMCERCLE au triangle et calculer le sinus de l'angle A dans le triangle ombré illustré (avec le même angle périphérique A) établit :

$$\frac{^{un}}{\text{Un péché (}\ \text{)}} = D$$



Établir la loi des sinus

Machine Translated by Google

où D est le diamètre du cercle circonscrit. (Ici, nous utilisons le fait que tout angle sous-tendu à partir d'un diamètre est de 90 °.) Ainsi, les trois quantités exprimées dans la loi des sinus sont chacune égales au diamètre du cercle circonscrit du triangle, offrant ainsi une preuve alternative de la loi .

Voir aussi THÉORÈMES DU CERCLE.

loi des grands nombres Si l'on lance une pièce équitable 10 fois, on s'attendrait, en moyenne, à ce que cinq de ces lancers soient « face ». Bien sûr, dans n'importe quelle série de 10 lancers, n'importe quel nombre de faces est possible, même une série de 10 faces d'affilée, mais c'est extrêmement improbable. Le nombre de têtes réellement observées dans une expérience est susceptible d'être de quatre, cinq ou six, soit près de 50 %. (La probabilité d'apparition d'un nombre particulier de têtes est décrite par la DISTRIBUTION BINÔMALE.)

Dans une série de 100 lancers, nous nous attendrions à ce que les effets de séries excessives de pile, ou pile, soient « moyennés » et que la proportion de têtes obtenues soit encore plus proche, en moyenne, de la « valeur réelle » de 50 % - et plus près encore si nous menons une expérience de 1 000 ou 10 000 lancers, ou plus. C'est la loi des grands nombres en action. Précisément, cette loi stipule ce qui suit :

> Plus un phénomène aléatoire est répété, plus la proportion d'essais dans lesquels un résultat particulier se produit se rapproche de la probabilité réelle que ce résultat se produise.

Si, par exemple, un 1 ne s'est jamais produit en lançant un dé 10 fois, nous pouvons être assurés, cependant, que la proportion de 1 apparaissant dans d'autres 100, 1 000, 10 000, … lancers approchera la valeur d'un sixième.

De nombreux joueurs interprètent à tort la loi des grands nombres comme une méthode pour prédire les résultats d'événements aléatoires. (Voir LOI DES MOYENNES.)

La loi des grands nombres est une conséquence mathématique du THÉORÈME DE CHEBYSHEV . Cela peut être interprété comme disant que si un phénomène aléatoire produit des résultats numériques avec une valeur moyenne μ, alors la moyenne de N valeurs observées du phénomène se rapproche de la valeur μ lorsque N augmente. Le théorème de Chebyshev est lié, car il donne des mesures de la façon dont les valeurs sont distribuées autour de la moyenne.

Voir aussi MÉTHODE DE MONTE CARLO ; STATISTIQUES: DESCRIPTIF.

loi des sinus (règle des sinus) Voir LOI DES COSINS/LOI DES SINES.

loi du levier ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (env. 287-212 avant notre ère) a reconnu que deux poids w1 et w2 placés à des distances x1 et x2 , respectivement, du ful crum (point de pivot) d'un levier simple s'équilibreront lorsque x1w1 = x2w2 . Ce principe s'appelle la loi du levier. Par exemple, un adulte pesant deux fois plus qu'un enfant s'équilibrera sur une balançoire s'il est assis à la moitié de la distance du point de pivotement que l'enfant.

Voir aussi CENTRE DE GRAVITÉ.

lois de la pensée Le philosophe grec ARISTOTE (384-322 av. J.-C.) a identifié trois lois de la logique, toutes des tau logies (ce qui signifie que chacune a une TABLE DE VÉRITÉ avec une valeur constante T) qui ont depuis été considérées comme des descriptions fondamentales de notre façon de penser. Ses trois lois de la pensée sont :

1. Loi de non-contradiction : Il n'est pas vrai que quelque chose puisse être à la fois vrai et faux.
   Symboliquement : ¬[p (¬p)]
2. Loi du tiers exclu : chacune doit être vraie ou pas vrai.
   Symboliquement : p (¬p)
3. Loi d'Identité : Si quelque chose est vrai, alors c'est vrai.
   Symboliquement : p → p

Les mathématiciens s'appuient souvent sur la loi du tiers exclu pour établir la validité des résultats mathématiques : une PREUVE INDIRECTE ou une PREUVE PAR CONTRADICTION prouve qu'un énoncé p est vrai en montrant qu'il ne peut pas être faux. Cependant, tous les philosophes (et mathématiciens) ne sont pas d'accord avec cette approche et remettent en question la validité de cette deuxième loi. Par exemple, comme l'a montré le mathématicien autrichien du 20ème siècle KURT GÖDEL , il y a des affirmations en mathématiques qui ne peuvent être ni prouvées ni réfutées, et par conséquent ne sont ni vraies ni fausses. Le mouvement constructiviste n'accepte que les résultats établis par la PREUVE DIRECTE .

Pour aller au-delà de la loi du tiers exclu, les logiciens ont tenté de généraliser la LOGIQUE FORMELLE pour inclure trois valeurs possibles de véracité : vrai,

Machine Translated by Google

faux et indécis. Une autre généralisation, appelée
LOGIQUE FLOUE, traite la vérité comme une quantité continue
avec des valeurs allant de 0 (tout à fait faux) à 1 (tout à fait
vrai). A titre d'exemple, dans cette théorie, la phrase:

Cette phrase est fausse.

se voit attribuer une valeur de vérité de 1 / et est réputé moitié
2 , vrai et à moitié faux. (On arrive à cette valeur comme suit : notez
d'abord que si une déclaration p est affectée d'une valeur de vérité v,
qui est soit 0 soit 1, alors la déclaration ¬p
a la valeur opposée 1 – v, 1 ou 0. Nous supposons que cette
reste vrai même si v est de valeur fractionnaire. Si p représente la
phrase : « Cette phrase est fausse », alors son
la vérité établit son mensonge, p → ¬p, et son mensonge sa vérité, ¬p
→ p. La valeur de vérité v de l'énoncé oscille entre les valeurs v et 1 –
v .
seule une valeur stable pour v se produit lorsque v = 1 - v, ce qui donne
la valeur de vérité appropriée v = 1/2.)

Voir aussi ARGUMENT ; AUTO-RÉFÉRENCE.

coefficient dominant Pour un POLYNOME $p(x) = anx^n +$
$an–1x^{n–1}$ le coefficient an de la valeur la plus élevée
la puissance de la variable est appelée le coefficient directeur de
le polynôme. Par exemple, le coefficient directeur de
le polynôme $2x^3 – 3x + 6$ vaut 2, et celui de $x + 3$ vaut 1. A
polynôme est dit monique si son coefficient dominant est 1.

En résolvant une équation polynomiale $anx^n + an–1x^{n–1}$
$+…+ a1x + a0 = 0$, il est souvent commode de supposer que
le polynôme en question est monique. On y parvient
en divisant l'équation par un . Résoudre le
équation $2x^4 – 8x^3 + 2x – 6 = 0$, par exemple, est équivalent
prêté à résoudre $x^4 – 4x^3 + x – 3 = 0$.

Si tous les coefficients d'un polynôme unitaire sont
entiers, puis toute racine rationnelle du polynôme
doit lui-même être un entier. Par exemple, si la fraction (écrite sous
$x = \frac{p}{q}$ forme réduite) était une solution de la
équation polynomiale $x^4 – 4x^3 + x – 3 = 0$, alors, substi
tuting dans cette valeur pour x et en multipliant par
$4q$ donne :

$$p^4 – 4p^3q + pq^3 – 3q^4 = 0$$

Cela montre que p^4 est un multiple de q. Puisque p et q
ne partagent aucun facteur commun, cela n'est possible que si q
est égal à 1. Ainsi la racine $x = \frac{p}{q}$ est un entier.

Un argument similaire montre que si la CONSTANTE
terme a0 d'un polynôme vaut 1, alors toute racine rationnelle de
le polynôme (s'il en a un) doit être une fraction de
forme $x = \frac{1}{r}$. Par conséquent, tout polynôme unitaire avec q
un terme constant de 1 peut posséder au plus un rationnel
racine (ou entière), à savoir x = 1. Cela prouve, par exemple, que x =
1 est la seule racine rationnelle de l'équation :

$$x^7 – 5x^2 + 2x – 3x + 1 = 0$$

(On vérifie que x = 1 est bien une solution de ce
équation.)

plus petit commun multiple Un nombre qui est un multiple
de deux ou plusieurs autres nombres est appelé un COMMUN
MULTIPLE de ces nombres. Le plus petit multiple commun est appelé
leur plus petit multiple commun, écrit comme
"lcm." Par exemple, le plus petit commun multiple de 10,
12, et 15 est 60. Il n'y a pas de plus petit nombre qui est
divisible par chacun de ces nombres. Nous avons
lcm(10, 12, 15) = 60.

Le plus petit commun multiple d'un ensemble d'entiers peut
trouvé en divisant chaque nombre en facteurs premiers.
Par exemple, pour trouver le lcm de 180 et 378, écrivez :

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$378 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$$

Le lcm est alors trouvé en multipliant les facteurs premiers
ensemble, en prenant chacun le nombre maximum de fois qu'il
apparaît dans l'un des nombres. Dans notre cas : lcm(180,
378) = 2 × 2 × 3 × 3 × 3 × 5 × 7 = 3 780. Cette méthode
montre que tout multiple commun d'une collection de
entiers est un multiple du plus petit commun multiple. Il
montre aussi que, pour deux entiers positifs a et b :

$$\text{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{pgcd}(a, b)}$$

où "pgcd" désigne le PLUS GRAND FACTEUR COMMUN
(diviseur) des deux nombres. La relation analogue pour trois entiers
ou plus, cependant, ne tient pas
en général.

Voir aussi THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE.

méthode des moindres carrés Si un SCATTER DIAGRAM indique une
corrélation linéaire entre les deux variables de

Machine Translated by Google

l'intérêt pour une étude scientifique (par exemple, la moyenne la pointure des chaussures des adultes pourrait être linéairement corrélée à hauteur), alors on peut chercher l'équation d'une droite qui correspond le mieux aux données. Une telle droite est appelée droite de régression. Plus précisément, si une étude produit N paires de valeurs de données, (x1 ,y1),…,(xN,yN), alors on cherche une équation linéaire y = ax + b qui minimise l'écart total des données points de cette ligne. Cet écart total pourrait être mesuré comme une somme de valeurs absolues :

$$|y1 – (ax1 + b)| + |y2 – (ax2 + b)| +…+ |yN – (axN + b)|$$

(donnant ce qu'on appelle l'approximation de Chebyshev critère), mais cette quantité est difficile à analyser en utilisant les techniques de CALCUL. (La VALEUR ABSOLUE la fonction n'est pas différentiable.)

Une autre mesure de l'écart total est la somme de tous les écarts individuels au carré, ce qui, encore une fois, est un somme des quantités positives :

$$D = (y1 – (ax1 + b))2 + (y2 – (ax2 + b))2 +…+ (yN – (axN + b))2$$

La tâche consiste à choisir des valeurs pour a et b qui minimisent cette somme. C'est ce qu'on appelle le critère des moindres carrés.

Une condition nécessaire pour que D adopte un minimum est que les deux dérivées partielles et b $\frac{\partial D}{\partial a}$ $\frac{\partial D}{\partial b}$ égal à zéro, ce qui donne les deux équations normales :

$$\frac{\partial D}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N} y_i - (ax_i + b)x_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{N} ax_i^2 + bx_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{N} y_i - (ax_i + b) = 0 \quad a\sum_{i=1}^{N} x_i + Nb = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

En divisant par N et en résolvant pour a (la pente) et b (l'ordonnée à l'origine), on obtient :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2}$$

et

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

où $\bar{x}$ est la valeur x moyenne, et $\bar{y}$ est la valeur y moyenne.

Paramètre:

$$S_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2$$

(il s'agit de la VARIANCE des valeurs x) et

$$S_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

(la COVARIANCE des deux variables), ces formules peut s'écrire de manière plus compacte : $a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ et $b = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{x}$. Ainsi la méthode des moindres carrés donne équation pour la ligne de meilleur ajustement comme suit :

$$a\bar{a} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}(xx) - \bar{}$$

Mesurer le degré d'ajustement
La quantité D qui a été minimisée (ci-dessus) est appelée la "somme d'erreur des carrés":

$$D = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2 + \cdots$$

Il reflète la quantité de variation des points de données sur la droite de régression. La somme totale corrigée de carrés (SST) de y :

$$SST = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2$$

donne une mesure de la dispersion des valeurs y en général. Nécessairement, D ≤ SST. La différence, SST – D, appelée la somme des carrés de régression, reflète la quantité de variation des valeurs y expliquée par la ligne de régression linéaire y = ax + b par rapport à leur distribution générale. Que la quantité SST – D est positive invite à la définition de la CORRELATION COEFFICIENT, R2 , donné par $R^2 = \frac{SST - D}{SST}$. Un exercice en algèbre montre :

Machine Translated by Google

$$R^2 = \frac{(s_{xy})^2}{SS_{xx}\, aa}$$

Cette valeur numérique représente la proportion de la variation totale de la variable y qui peut être expliquée par la ligne de meilleur ajustement. Cette proportion a des valeurs comprises entre 0 et 1, avec une valeur de 1 indiquant que toute variation est due à un ajustement linéaire, c'est-à-dire que les valeurs des données se situent parfaitement sur la ligne de régression, et une valeur R2 de zéro indique qu'aucune des variations dans les valeurs y est due à une corrélation linéaire. Si R2 = 0,84, par exemple, nous pouvons dire que 84 % de la variation des valeurs de y sont expliquées par une relation linéaire avec les valeurs de x.

Voir aussi RÉGRESSION.

Lebesgue, Henri-Léon (1875–1941) Analyse française Né le 28 juin 1875, le mathématicien français Henri Lebesgue est connu pour ses idées révolutionnaires dans CALCULUS et dans la théorie de l'intégration. En généralisant la notion d' AREA à celle d'une « théorie de la mesure » abstraite, Lebesgue a transformé l'objet d'une intégrale en un outil applicable à une classe extraordinairement large de paramètres. Il a publié des travaux sur ce sujet à l'âge de 27 ans.

Lebesgue a étudié à l'École Normale Supérieure, France, et a enseigné à l'Université de Nancy pendant 3 ans. Il y présente ses célèbres travaux à ses collègues universitaires lors de sa dernière année en 1902. L'idée derrière sa démarche est relativement simple. On calcule généralement une intégrale en subdivisant la plage d'entrées, l' axe des x, en petits intervalles, puis en ajoutant les aires des rectangles au-dessus de ces intervalles de hauteurs donnés par la fonction. Cela revient à compter la valeur d'une poche pleine de pièces en retirant une pièce à la fois et en ajoutant les résultats au fur et à mesure. L'approche de Lebesgue, cependant, consiste à subdiviser la plage de sorties, l' axe des y, en petits intervalles et à mesurer la taille des ensembles sur l' axe des x pour lesquels la fonction donne la sortie souhaitée sur l' axe des y . Cela revient à compter des pièces en collectant d'abord tous les centimes et en déterminant leur nombre, puis tous les nickels et en déterminant la taille de cette collection, et ainsi de suite. Bien sûr, la forme des ensembles que l'on rencontre le long de l' axe des x peut être compliquée et difficile à mesurer en taille. Le travail des mathématiques françaises Les ématiciens Émile Borel (1871-1956) et MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838-1922) en développant la théorie dite de la mesure ont fourni à Lebesgue les moyens de le faire.

Lebesgue a écrit plus de 50 articles et deux livres, dont son article de 1902 "Intégrale, longeur, aire" (Intégrales, longueurs, aire), son article de 1910 « Sur l'intégration des fonctions discontinues » et sa monographie de 1906 Leçons sur les séries trigonométriques. Il apporta également d'importantes contributions aux domaines de la TOPOLOGIE et des SÉRIES DE FOURIER, et fut nommé professeur à la Sorbonne, Université de Paris, en 1910.

À un moment donné de sa vie, Lebesgue a exprimé un sérieux malaise quant à la poursuite des travaux sur la théorie de l'intégration qu'il avait lui-même fondés. Il craignait qu'en rendant les mathématiques abstraites, les sujets de la matière ne commencent à perdre leur contexte significatif. Il est décédé à Paris, en France, le 26 juillet 1941.

L'approche révolutionnaire de Lebesgue en matière de théorie de l'intégration est aujourd'hui enseignée à tous les étudiants de niveau supérieur et aux étudiants diplômés en mathématiques. Il est considéré comme un élément central de toute étude sérieuse d'analyse.

dérivée gauche/dérivée droite La DÉRIVÉE d'une fonction f(x) à la position x est définie comme la LIMITE $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. La valeur de la limite, si elle existe, représente la pente de la tangente au graphique de la fonction à la position x. Si la quantité h est restreinte à ne passer que par des valeurs négatives lorsqu'elle s'approche de la valeur zéro, c'est-à-dire si la limite ci-dessus est remplacée par une limite à gauche, on obtient la dérivée gauche de la fonction en x :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Restreindre h à ne passer que par des valeurs positives produit la dérivée droite de la fonction en x :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(Voir LIMIT.) La dérivée générale f′(x) existe si, et seulement si, les dérivées gauche et droite existent toutes les deux et s'accordent en valeur. Cela ne doit pas toujours être le cas. Prendre en compte

Machine Translated by Google

fonction f(x) = x + |x|, par exemple, à la position
Le h gauche négatif)dérivé (avec
est $\lim_{h\to 0^-} \frac{(h + |h|) - (0 + |0|)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h + -h}{h} = 0$ où
car la dérivée droite (avec h positif) est) + − + (hh
$\lim_{h\to 0^+} \frac{(h + |h|) - (0 + |0|)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h + h}{h} = 2$. Le bronzage
la ligne droite vers la courbe a une pente nulle juste à gauche de
x = 0 et pente 2 juste à sa droite. Cette incohérence
montre qu'il n'y a pas de ligne tangente bien définie à la
graphique f(x) = x + |x| à x = 0.

Legendre, Adrien-Marie (1752-1833) Géométrie française, théorie des nombres Né le 18 septembre 1752, à Paris, France, Adrien-Marie Legendre est connu comme un mathématicien français compétent qui a consacré sa vie à le sujet mais a eu la malchance de voir l'essentiel de son œuvre rendue obsolète par les découvertes et capacités des mathématiciens plus jeunes et plus brillants.

Legendre publié dans les domaines de la THÉORIE DES NOMBRES, fonctions elliptiques, GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE et fonctions célestes mécanique. Son nom est associé à plusieurs concepts mathématiques, dont les polynômes de Legendre, une classe importante de fonctions utiles pour résoudre certains types d' ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ; les MOINDRES CARRES MÉTHODE; et le symbole de Legendre en théorie des nombres. Il publie un texte de géométrie élémentaire, Eléments de géométrie (Eléments de géométrie), qui dominait l'enseignement de la géométrie en Amérique et en Europe à travers le 19ème siècle. En 1791, l'Académie des sciences a entrepris la tâche de normaliser les poids et mesures et ordonna à Legendre de faire les observations astronomiques nécessaires pour calculer la longueur d'un mètre.

On sait peu de choses sur les débuts de Legendre. Né dans un famille aisée, Legendre avait accès à une excellente l'éducation formelle et les moyens de poursuivre des études intérêts. En 1770, Legendre soutient une thèse en mathématiques et physique au collège Mazarin. Son 1782 recherche mathématique sur la trajectoire des projectiles gagnés lui a décerné un prix de l'Académie de Berlin et a remporté lui accorder une certaine attention en tant qu'érudit en mathématiques. Une année plus tard, Legendre a été nommé adjoint au Académie des Sciences de Paris, rebaptisée plus tard Institut National des Sciences et des Arts. Il est resté là jusqu'en 1824, s'élevant convenablement en rang et en position au fil des décennies. Cependant, en raison d'un désaccord politique avec le fonctionnement de l'Institut, Legendre s'est vu refuser une pension à sa retraite et mourut dans la pauvreté 9 ans plus tard, le 9 janvier 1833.

Bien que son travail soit considéré comme obsolète, Legendre a soulevé un certain nombre de questions fondamentales dans domaines de la théorie des nombres et de la théorie des fonctions elliptiques qui a suscité de nombreuses recherches mathématiques durant le siècle qui l'a suivi.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716) allemand Calcul, Logique Né le 1er juillet 1646 à Leipzig, Sax ony (aujourd'hui Allemagne), érudit Gottfried Wilhelm Leibniz est connu pour avoir découvert, et avoir été le premier à publier en 1684, la théorie du CALCUL DIFFÉRENTIEL. Dans les années suivantes, il développa également la théorie du CALCUL INTE GRAL et formula l' ORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL qui unit les deux domaines. Ce travail a été accompli indépendamment des progrès réalisés par



Gottfried Wilhelm Leibniz, éminent mathématicien du 18e siècle, a été le premier à fonder et à publier un compte rendu du calcul différentiel. Il a ensuite développé la théorie du calcul intégral et le théorème fondamental du calcul qui relie les deux sujets. (Photo gracieuseté de Feltz/Topham/The Image Works)

Machine Translated by Google

SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) sur les mêmes sujets.
Leibniz a également consacré des efforts considérables au développement d'une featurea generalis, un langage universel, dans le but de généraliser le formalisme logique créé par ARISTOTE (384-322 avant notre ère). (Le logicien GEORGE BOOLE a ensuite suivi cet objectif dans les années 1800.)

Leibniz est entré à l'Université de Leipzig à 14 ans, comme c'était la coutume à l'époque, pour commencer un cursus général de 2 ans. Ayant lu les travaux d'Aris totle, Leibniz entamait déjà un premier travail de formalisation et de systématisation du processus de raisonnement. Il a obtenu des diplômes en droit et en philosophie au cours des 6 années suivantes, puis a commencé l'ambitieux projet de rassembler toutes les connaissances humaines. Il commença par l'étude du mouvement et de la cinématique et publia, en 1671, son livre Hypothesis physica nova (Nouvelle hypothèse physique).

Leibniz s'est rendu à Paris en 1672 et a commencé une étude de la physique et des mathématiques avec les principaux scientifiques de la ville à cette époque. Deux ans plus tard, il avait développé sa théorie du calcul différentiel, mais avait du mal à trouver un bon système de notation mathématique pour la théorie. Dans un manuscrit non publié de 1675, Leibniz avait décrit la RÈGLE DU PRODUIT pour la différenciation et établi les règles de différenciation des POLYNOMES.

Le mot était parvenu à Newton des résultats que Leibniz avait développés, et Newton lui a immédiatement écrit en expliquant qu'il avait déjà découvert la théorie une décennie plus tôt. Newton, cependant, n'a pas fourni de détails sur son travail. Leibniz répondit courtoisement à Newton mais, ne réalisant pas que les correspondances étaient retardées de plusieurs mois, Newton soupçonna Leibniz de s'attarder sur sa lettre, de reconstituer les détails manquants et de voler ses idées. Bien qu'il soit entendu aujourd'hui que Leibniz avait accompli son travail complètement indépendamment de Newton, une âpre dispute entre les deux messieurs s'ensuivit, qui dura des décennies.

En 1684, Leibniz publia ses détails sur le calcul différentiel dans Nova methodus pro maximis et minimis (Une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima) après avoir finalement établi un système efficace de notation pour son travail - la notation d que nous utilisons aujourd'hui.
À cette époque, Leibniz avait également développé sa théorie du calcul intégral (ainsi que la notation ∫ dx familière) et commença à publier les détails du travail en 1686. (Newton a écrit sur sa méthode des « fluxions » en 1671 mais n'a pas réussi à l'obtenir. publié.)

Tout au long de sa vie, Leibniz a également apporté des contributions significatives à l'étude des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, à la théorie des équations et à l'utilisation d'un DÉTERMINANT pour résoudre des systèmes d'équations, et à la généralisation du THÉORÈME BINÔMIAL à plus de deux variables. De plus, dans sa quête pour rassembler toutes les connaissances humaines, Leibniz a écrit d'importants traités de métaphysique et de philosophie. Il a également développé une «loi de continuité» générale pour l'univers, suggérant que tout ce qui se produit dans la nature le fait en termes de degré, et a soutenu que «la masse multipliée par la vitesse au carré» est une quantité fondamentale qui est conservée dans les systèmes physiques. (C'est ce qu'on appelle aujourd'hui la "loi de la conservation de l'énergie".)

Leibniz mourut à Hanovre, en Allemagne, le 14 novembre 1716. Il n'est pas possible d'exagérer l'effet que Leibniz eut sur le développement de la théorie analytique au cours des siècles qui suivirent. Son choix de système de notation pour le calcul, par exemple, a facilité une compréhension claire du sujet et une utilisation aisée de ses techniques.
Les mathématiciens d'aujourd'hui utilisent généralement la notation développée par Leibniz plutôt que celle développée par Newton.

Théorème de Leibniz Voir RÈGLE DU PRODUIT.

lemme Voir THÉORÈME.

longueur La distance le long d'une ligne, ou la distance sur laquelle une figure ou un solide s'étend dans une certaine direction, est appelée sa longueur. On peut mesurer deux longueurs pour un rectangle pour donner une indication de sa taille. (La plus grande des deux dimensions est généralement appelée sa longueur et la plus petite sa largeur.)

Les premières unités de longueur étaient données par les parties du corps. Par exemple, une « coudée » a été définie comme étant la longueur de l'avant-bras, mesurée du coude au bout du majeur (environ 19 pouces) ; une « ell », encore parfois utilisée pour mesurer le tissu, est la longueur du bout du nez à l'extrémité d'un bras tendu (environ 35 pouces) ; une « main », utilisée pour mesurer la taille des chevaux, est la largeur de la main d'un homme (environ 4 pouces) ; et un « pied » était défini comme la distance parcourue d'un pas.
Les anciens Romains considéraient un pied comme l'équivalent de 12 largeurs de pouce, ce qui donnait le mot pouce du mot latin unicia signifiant un douzième. Les Romains ont également identifié 1 000 pas comme un milia passuum, menant

Machine Translated by Google

à notre concept d'un « mile ». Un millième de pied s'appelle un "gry". Les longueurs définies par les mesures corporelles sont sujettes à de grandes variations, et il a été constaté que différentes communautés à travers le monde utilisaient différentes normes de longueur même si les unités utilisées portaient le même nom. Au cours des XIXe et XXe siècles, une norme internationale d'unités a été développée et des unités de longueur non ambiguës ont été définies.

En mathématiques, la notion de longueur apparaît dans plusieurs contextes et peut recevoir des définitions précises. Par exemple, sur la droite numérique, la longueur d'un segment de droite reliant un nombre a au nombre b est donnée par la VALEUR ABSOLUE |b – a|; la longueur d'un segment de droite reliant les points A = (a1 ,a2) et B = (b1 ,b2) est donnée $\sqrt{(b1 - a1)^2 + (b2 - a2)^2}$; et FORMULE DE DISTANCE la longueur d'un VECTEUR a = <a1 ,a2> est donnée par un = $\sqrt{a1^2 + a2^2}$. (Ces dernières formules se généralisent à trois dimensions et plus.)

CALCULUS peut être utilisé pour trouver la LONGUEUR D'ARC de lignes courbes dans un espace à deux et trois dimensions.

Voir aussi UNITÉS SI.

L'Hôpital, Guillaume François Antoine, marquis de (1661–1704) Tournesol français Né à Paris, France, en 1661 (sa date de naissance exacte n'est pas connue), Guillaume l'Hôpital est connu comme le célèbre auteur du premier manuel sur le sujet du CALCUL DIFFÉRENTIEL, Analyse des infiniment petits , écrit en 1696. Outre l'explication des méthodes et des détails de la théorie nouvellement découverte, cet ouvrage contient également la première formulation de la règle qui porte désormais son nom.

Le talent de L'Hôpital pour les mathématiques a été reconnu dès son plus jeune âge. A l'âge de 15 ans, il résout un problème sur la CYCLOÏDE posé par BLAISE PASCAL (1623-1662) et contribue plus tard à la solution du fameux problème du BRACHISTOCHRONE . Avant de se consacrer sérieusement aux mathématiques, l'Hôpital a servi comme officier de cavalerie mais a rapidement dû démissionner en raison d'une myopie.

En 1691, l'Hôpital engagea le mathématicien suisse Johann Bernoulli de la FAMILLE BERNOULLI pour lui enseigner la nouvelle théorie du calcul. Cela se fit principalement par correspondance, et il fut convenu que tout le contenu des lettres échangées appartiendrait au marquis. Ce matériel a formé la base de son texte de 1696.

Le premier chapitre d' Analyse des infiniment petits définit la notion de DIFFÉRENTIEL (ou de différence, comme l'appelait l'Hôpital) et donne des règles de manipulation. Il expose également les principes de base du calcul différentiel. Le deuxième chapitre donne la méthode pour déterminer la tangente à une courbe, et le chapitre trois traite des problèmes MAXIMUM/MINIMUM en prenant comme exemples des problèmes de mécanique et de géographie. Les chapitres suivants traitent des cuspides, des points d'inflexion, des dérivées d'ordre supérieur, des évoluées et des caustiques. LA RÈGLE DE L'HÔPITAL apparaît au chapitre neuf.

Après la mort de l'Hôpital, Johann Bernoulli se plaignit publiquement qu'on ne lui accordait pas assez de crédit pour le travail contenu dans le texte. (L'Hôpital a écrit une note de gratitude dans le livre à Bernoulli, et à GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, pour avoir contribué leurs idées.) On sait aujourd'hui, par exemple, que Bernoulli, et non l'Hôpital, a découvert la règle de l'Hôpital.

L'Hôpital a écrit un manuscrit complet pour un deuxième livre Traité analytique des sections coniques , qui a été publié à titre posthume en 1720. Il avait également prévu d'écrire un troisième texte, l'un sur le thème du calcul intégral. Ius, mais a interrompu le travail sur le projet lorsqu'il a appris que Leibniz travaillait sur son propre livre sur le sujet.

L'Hôpital est décédé à Paris, France, le 2 février 1704.

Règle de L'Hôpital Du nom de GUIL LAUME FRANÇOIS ANTOINE L'HÔPITAL (1661-1704), élève du mathématicien Johann Bernoulli de la FAMILLE BERNOULLI, la règle de l'Hôpital est une méthode pour trouver la LIMITE d'un rapport de deux fonctions dont chacune tend séparément vers zéro. Précisément:

> Supposons que f(x) et g(x) soient deux fonctions différentiables avec f(a) = 0 et g(a) = 0 en un point a. Alors la limite du rapport f(x)/g(x) lorsque x → a est égale à la limite du rapport des dérivées f′(x)/g′(x) lorsque x → a (à condition que la dérivée de g(x) n'est jamais nul, sauf éventuellement en x = a).

Par exemple, pour calculer la limite $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (qui semble être de la forme 0/0), on prend simplement la dérivée du numérateur et du dénominateur séparément :

Machine Translated by Google

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{2} \quad \lim_{x \to 1} x \quad 1$$

Comme autre exemple, nous avons : $\lim_{x \to 0} \frac{\text{péché}x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{parce que } x}{1} =$ cos (0) = 1.

Si nous faisons l'hypothèse que la dérivée g(x) n'est pas nul en x = a, alors la preuve de la règle de l'Hôpital est relativement simple :

Ecrire la limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ comme $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)}$. Puisque f(a) = g(a) = 0, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Le résultat est toujours valable si g′(a) = 0, mais il faut faire utilisation intelligente du THÉORÈME DE LA VALEUR MOYENNE pour l'établir.

Johann Bernoulli est celui qui a découvert et prouvé règle de l'Hôpital.

Il est permis d'appliquer la règle de l'Hôpital aux même limite plus d'une fois, c'est-à-dire différencier numérateur et dénominateurs chacun un certain nombre de fois. Pour illustrer, nous avons :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \text{parce que } x}{x^2} = \lim_{0} \frac{\text{péché}x}{2} \quad \lim_{0} \frac{\text{parce que } x}{2} \quad \frac{1}{2}$$

Le théorème est également valable pour les limites lorsque x → ∞.

La règle fonctionne également pour un rapport de fonctions f(x)/g(x) si chaque fonction tend séparément vers l'infini comme x → a, (c'est-à-dire que nous avons un rapport indéterminé ∞/∞). On constate que les fonctions 1/f(x) et 1/g(x) chacune tendent vers zéro quand x → a, et donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim \frac{(1/g(x))'}{(1/f(x))'}$$

par la règle de l'Hôpital. Par conséquent:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(1/g(x))'}{(1/f(x))'}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{(g(x))^2} \frac{(f(x))^2}{f'(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}^2 \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}^{-1}$$

d'où il résulte que des exemples, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Comme nous avons :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 2}{x^2 + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{14x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{14}{2} = 7$$

et

$$\text{en lim}_{x \to \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(1)x}{1} = 0$$

Paradoxe du menteur VIe siècle av. J.-C. Crétois

Le prophète Épiménide est censé avoir dit : « Tous les Crétois sont des menteurs », une déclaration maintenant appelée la déclaration du menteur. paradoxe. Il est difficile de déterminer si Epi menides, lui-même crétois, dit ici la vérité. Le déclaration, cependant, n'est pas un vrai PARADOXE. C'est possible le cas qu'Épiménide est au courant d'au moins un honnête compatriote et fait ici une fausse déclaration via le emploi du mot tous. Une version plus nette de l'intention Le paradoxe réside dans l'affirmation : « Cette phrase est fausse ».

On peut aussi considérer les conséquences logiques des variantes de cette affirmation. Par exemple, et si Épiménide avait plutôt déclaré : « Tous les Crétois sont des diseurs de vérité » ?

Voir aussi AUTO-RÉFÉRENCE.

tables de mortalité (tables de mortalité) Basées sur les résultats du recensement et résultats d'études médico-sociales, tables de mortalité sont des tableaux de valeurs indiquant la proportion de personnes d'un certain âge censé vivre successivement plus âge. Différents tableaux sont fournis pour différentes spécificités populations et âges (par exemple, les hommes australiens 40 ans, femmes canadiennes de 25 ans) et sont largement utilisés par les compagnies d'assurance pour analyser le risque d'émission polices d'assurance, ainsi que dans les études scientifiques. Pour exemple, ces tables peuvent être utilisées pour comparer la mortalité

Machine Translated by Google

taux de maladies dans différents groupes d'âge ou dans des populations ayant des habitudes différentes. Les tables de mortalité sont régulièrement mises à jour pour tenir compte de nouveaux facteurs susceptibles de modifier l'espérance de vie.

Dans sa brochure de 1662, Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality, le commerçant anglais John Graunt fut le premier à rassembler et à publier des tables de mortalité pour une population spécifique. En résumant les registres funéraires du gouvernement pour les années 1604-1661, Graunt a pu estimer le nombre de décès, décennie par décennie, à attendre parmi un groupe de 100 Londoniens typiques nés en même temps. Il a donné le nom de "table de mortalité" à son affichage des résultats. Graunt a également pu faire des observations générales sur la population - que les femmes vivent plus longtemps que les hommes, que le taux de mortalité est généralement constant, etc. - et il a été le premier à commenter la régularité des phénomènes sociaux de cette manière.

En 1693, en s'appuyant sur les archives rassemblées par Casper Heumann de Breslau, l'astronome anglais Edmund Halley a affiné les techniques mathématiques utilisées par Graunt pour compiler un ensemble révisé et plus détaillé de tables de mortalité, adaptées à une analyse correcte des rentes.

LA SCIENCE ACTUARIELLE est l'étude mathématique des espérances de vie et d'autres tendances démographiques. On dit que le travail de Halley est le travail fondateur dans ce domaine.

Voir aussi HISTOIRE DES PROBABILITÉS ET DES STATISTIQUES (essai); STATISTIQUES.

limite Intuitivement, une limite est une quantité dont on peut s'approcher de plus en plus mais qui n'est jamais nécessairement atteinte. Par exemple, les nombres de la SÉQUENCE 0,9, 0,99, 0,999,… approchent, mais n'atteignent jamais, la valeur 1. On dit que la limite de cette séquence est un. La fonction f(x) = $\frac{1}{x}$ prend des valeurs de plus en plus proche de zéro à mesure que x devient grand. On dit que la limite de cette fonction quand x devient grand est zéro.

La notion de limite a été correctement identifiée pour la première fois par le mathématicien français AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857), apparaissant comme un outil nécessaire pour placer la théorie du calcul sur une base théorique solide. Le mathématicien allemand KARL THEODOR WILHELM WEIER STRASS (1815-1897) développa plus tard l'idée et donna au concept de limite les définitions précises et rigoureuses que nous suivons aujourd'hui.

La limite d'une séquence

> Une séquence de nombres a1 ,a2 ,a3 ,… a une limite L si l'on peut démontrer que pour tout nombre positif ε (aussi petit soit-il), finalement tous les nombres de la séquence seront aussi proches de la valeur L. C'est-à-dire, on peut trouver une valeur N telle que an soit compris entre L – ε et L + ε si n > N.

Cela signifie que quel que soit le niveau de précision que vous souhaitez choisir (ε), tous les nombres de la liste (à partir de aN) seront éventuellement à une distance ε de L. Par exemple, dans la séquence 0,9, 0,99, 0,999, …, tous les nombres de la liste à partir de la troisième place sont à une distance de 1/1000 de la valeur 1, et tous les nombres à partir de la sixième place sont à moins d'un millionième de la valeur 1. En fait, pour toute petite valeur ε , nous pouvons localiser une position dans la séquence de sorte qu'à partir de cette position, toutes les valeurs de la liste soient à une distance ε de un.

Si une suite {an } a une valeur limite L, on écrit : $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Par exemple, on peut montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n} = 1$. Une étude minutieuse de CONVERGENT SEQUENCEs montre que toutes les séquences n'ont cependant pas de limite.

Toute somme infinie (SERIES) peut être considérée comme une limite d'une séquence de SOMMES PARTIELLES, et tout PRODUIT INFINI la limite d'une séquence de produits partiels.

La limite d'une fonction

> Une fonction f(x) a une limite L lorsque x devient grand si l'on peut démontrer que pour tout nombre positif ε (aussi petit soit-il), toutes les sorties de la fonction seront éventuellement aussi proches de la valeur L. C'est-à-dire que on peut trouver un nombre N tel que la valeur f(x) soit comprise entre L – ε et L + ε si x > N.

Cela signifie que quel que soit le niveau de précision que vous souhaitez choisir (ε), toutes les sorties de la fonction f(x) (à partir de x = N) seront éventuellement à une distance ε de L. Par exemple, toutes les sorties de la fonction f(x) = $\frac{1}{x}$ au-delà. De même, toutes les sorties sont inférieurs à 0,001 à partir du point x = 1 000 sont inférieures à 0,000001

Machine Translated by Google

à partir de x = 1 000 000. En fait, pour toute petite valeur ε, il est possible de localiser une valeur x = N de sorte que toutes les sorties de la fonction à partir de cette position soient dans un 1 distance ε de zéro. (Par exemple, N = $\frac{1}{\varepsilon}$ ça ira.)

Si une fonction f(x) a une valeur limite L lorsque x devient grand, on écrit : limx→ ∞ f(x) = L. On peut définir de même la notion de limite lorsque x devient grand et négatif : limx→– ∞ f(x) = L.

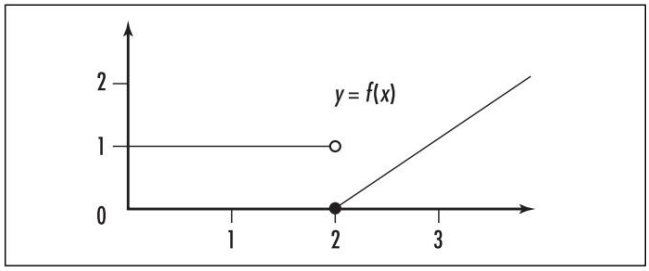
On peut aussi envisager la possibilité que les sorties d'une fonction f(x) approchent d'une valeur L lorsque x approche d'une valeur finie a. En gros, nous disons que la "limite de f(x) lorsque x tend vers a est L" si, à mesure que x se rapproche de plus en plus de a, les sorties f(x) se rapprochent de plus en plus de L. Si c'est bien la cas, on écrit : limx→a f(x) = L.

Pour rendre cette notion précise, nous devons supposer que l'on est donné un degré de précision ε souhaité, et montrer qu'il est en effet possible de spécifier un "degré de proximité avec a" qui garantit que toutes les sorties f(x) sont dans un distance ε de L. Cela conduit à la célèbre définition epsilon-delta de Weierstrass d'une limite :

> Une fonction f(x) a une "limite L lorsque x tend vers a" si l'on peut démontrer que pour tout nombre positif ε (aussi petit soit-il), les sorties de la fonction peuvent être rendues aussi proches de L en restreignant x aux valeurs très proche, mais non égal, à a. Autrement dit, on peut produire un nombre δ tel que si x, différent de a, est compris entre a – δ et a + δ, alors on peut être sûr que f(x) est compris entre L – ε et L + ε.

Cela dit que quel que soit le niveau de précision que vous souhaitez choisir (ε), toutes les sorties de la fonction f(x) pour des valeurs x proches de a (c'est-à-dire à une distance δ de a) seront à une distance ε de L Considérons , par exemple, la fonction f(x) = 5x pour des valeurs proches de x = 2.
Notez que toutes les sorties de la fonction sont à une distance de 0,1 de 10 si x est à une distance de 0,02 de 2.
Toutes les sorties de la fonction sont à une distance 0,001 de 10 si x est à une distance 0,0002 de 2. En fait, pour toute petite valeur ε, il est possible de décrire un nombre δ tel que si x est à une distance δ de 2, alors f(x) = 5x est à une distance ε de 10. (En fait, $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ fera l'affaire.) Ceci montre lim Si une fonction f(x) est continue en x = a, alors la $x\to 2$ 5x = 10.

limite limx→a f(x) existe et est égal à f(a). Ceci, cependant, ne doit pas toujours être le cas (auquel cas nous disons que f est discontinue en a).



Limites gauche et droite qui ne correspondent pas

Il est parfois commode de décrire la limite « juste à partir de la gauche » ou « juste à partir de la droite ». Écrit comme limx → a - f (x), une limite à partir de la gauche est définie comme une valeur L afin que les sorties de la fonction f (x) puissent être rendues aussi proches de L que nous le souhaitons en restreignant x à des valeurs proches de et à gauche de a (c'est-à-dire pour les valeurs de x entre a - δ et a, pour un certain nombre δ). Une limite à partir de la droite, écrite limx→a + f(x), est une valeur L telle que les sorties de la fonction f(x) peuvent être rendues aussi proches de L que nous le souhaitons en restreignant x à des valeurs proches de et de la à droite de a (c'est-à-dire pour les valeurs de x comprises entre a et a + δ, pour un certain nombre δ). Par exemple, dans le graphique ci-dessus, nous avons limx→2 – f(x) = 1 et limx→2 + f(x) = 0. Le fait que les limites gauche et droite ne concordent pas montre que la fonction est discontinue en x = 2.

Le mot limite est également utilisé dans CALCUL INTÉGRAL en termes de limite d'intégration. Soit une intégration intégrale $\int_a^b$ définie f(x) dx, le nombre a est appelé la limite inférieure de et b la limite supérieure d'intégration.

Voir aussi ASYMPTOTE ; FONCTION CONTINUE ; DÉRIVÉ; DIVERGENT; HISTOIRE DU CALCUL (essai); DÉRIVÉE GAUCHE / DÉRIVÉE DROITE ; DIS CONTINUITÉ AMOVIBLE ; LES PARADOXES DE ZÉNO .

limite de gauche/droite Voir LIMITE.

Lindemann, Carl Louis Ferdinand von (1852–1939)
Théorie allemande des nombres Né le 12 avril 1852, le savant Ferdinand von Lindemann est le plus connu pour sa preuve de 1882 que π est un NOMBRE TRANSCENDANTAL. Cette réalisation a finalement réglé le problème séculaire de la QUADRATURE DU CERCLE : en prouvant que π n'est pas une solution d'une équation polynomiale à nombre entier

Machine Translated by Google

coefficients, Lindemann avait démontré l'impossibilité de construire un carré de même aire d'un cercle donné avec les seuls outils classiques de la règle et du compas.

Lindemann a rédigé une thèse sur le thème de la GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE sous la direction de CHRIS TIAN FELIX KLEIN (1849–1925) et a obtenu un doctorat d'Erlangen en 1873. Il a obtenu un diplôme d'habilitation en 1877 à l'Université de Würzburg. et a été nommé professeur à l'Université de Fribourg la même année. Il a ensuite été transféré à l'Université de Königsberg, puis a finalement accepté une chaire à l'Université de Munich en 1893, où il est resté pour le reste de sa carrière.

En 1873, l'année où Lindemann obtint son doctorat, le mathématicien français Charles Hermite publia sa preuve que le nombre e est transcendantal.
Lindemann s'est rendu à Paris pour rencontrer Hermite et discuter des méthodes de sa preuve. En utilisant le célèbre for mula $e^{i\pi} = -1$ de LEONHARD EULER (1707–83), Lindemann s'est rendu compte que les méthodes d'Hermite pouvaient être étendues pour établir également la transcendance de π. Lin demann a publié sa preuve dans son article de 1882 Über die Zahl (Sur les nombres).

Lindemann s'intéressa aussi à la physique et contribua à l'étude des électrons. Il travaille également à la traduction et à la révision des travaux du mathématicien JULES HENRI POINCARÉ (1854-1912).

En 1894, Lindemann est élu député bavarois Académie des Sciences. Il a également reçu un diplôme honorifique de l'Université de St. Andrews en 1912. Il est décédé à Munich, en Allemagne, le 6 mars 1939, et l'histoire se souviendra toujours de lui pour avoir résolu le problème classique de la quadrature du cercle.

ligne Une COURBE est parfois appelée une ligne. Dans GEOME TRY, une ligne est généralement considérée comme droite, mais il est difficile de bien définir ce que l'on entend par là.
Le géomètre EUCLIDE (vers 300-260 av. J.-C.) a fourni la définition intuitive d'une ligne comme une "longueur sans largeur", mais il n'a jamais tenté de définir ce que l'on entend par une longueur ou ce que signifie dire qu'une construction a pas de largeur. Euclide, cependant, a déclaré qu'entre deux points A et B dans le plan, il existe une ligne droite qui les relie.

Aujourd'hui, les mathématiciens prennent cela comme point de départ de la géométrie, laissant les termes ligne et point (et plan) comme des termes indéfinis, mais en prenant les propriétés que nous attendons qu'ils possèdent (comme "entre deux points il y a une ligne qui les relie") comme AXIOM pour la théorie de la géométrie.

Si l'on travaille avec une théorie de la géométrie (ou de la forme et de l'espace) dans laquelle il existe une notion claire de distance entre deux points, alors on pourrait définir une ligne droite entre deux points comme étant le chemin le plus court entre ces points. Par exemple, LE THÉORÈME DE PYTHAGO RAS , en un certain sens, établit que les chemins droits, tels que nous les concevons intuitivement, sont en effet les itinéraires les plus courts entre deux points. A la surface d'une SPHÈRE, les chemins les plus courts entre des points sont des arcs de grands cercles, et il convient donc de les considérer comme des chemins "droits" dans GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Voir aussi COLLINAIRE ; CONCURRENT; ÉQUATION D'UN DOUBLER; ÉQUATION LINÉAIRE; PENTE.

algèbre linéaire L'étude des matrices et de leurs applications s'appelle l'algèbre linéaire. Comme les matrices sont utilisées pour analyser et résoudre des systèmes d' ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES et pour décrire des TRANSFORMATIONS LINÉAIRES entre des ESPACES VECTORIELS, ce sujet d'étude unit la pensée géométrique à l'analyse numérique. Comme l'ensemble de toutes les matrices inversibles d'une taille donnée forme un groupe, appelé GROUPE LINEAIRE GENERAL, des techniques d' ALGÈBRE ABSTRAITE peuvent également être incorporées dans ce travail.

Voir aussi MATRICE.

équation linéaire Une équation est dite linéaire si aucune variable apparaissant dans l'équation n'est élevée à une puissance différente de 1, et si aucune variable (ou plus) apparaissant dans l'équation n'est multipliée ensemble. Par exemple, l'équation $2x – 3y + z = 6$ est linéaire, mais les équations $2x^{-1} 3 = 0$ et $4xy + – 5y + z 5xz = 7$ ne le sont pas.

Une fonction d'une variable est dite linéaire si elle est de la forme $f(x) = ax + b$, pour certaines constantes a et b. Plus généralement, une fonction de plusieurs variables de la forme

$$f(x1 ,x2 ,\ldots,xn) = a0 + a1x1 + a2x2 +\ldots+ anxn$$

pour certaines constantes a0 , a1 , a2 , …, an est dit linéaire.

Machine Translated by Google

Toute équation de la forme ax + by = c représente une LIGNE dans un espace à deux dimensions. (La résolution de y, en supposant que b n'est pas nul, donne la fonction linéaire $y = -x\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$.) Une équation de la forme ax + by + cz = d représente un PLAN dans un espace tridimensionnel.

Une combinaison linéaire de variables x1 , x2 , x3 , … est une somme de la forme

$$a1x1 + a2 x2 + a3x3 + \dots$$

pour certaines constantes a1 , a2 , a3 , … Dans VECTOR SPACE the ory, un ensemble de vecteurs est dit linéairement dépendant si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle.

En ALGÈBRE LINÉAIRE, une équation MATRICIELLE de la forme Ax = b est appelée une équation linéaire. Il représente un système d' ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES.

Une équation différentielle linéaire est une EQUATION DIFFERENTIELLE de la forme :

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

pour certaines constantes a0 , a1 , a2 , …, an et une fonction fixe f(x).

Dans certains contextes, il convient d'appliquer le terme linéaire à des variables spécifiques apparaissant dans une expression compliquée. Par exemple, le terme 5x 2yz est linéaire par rapport à y et par rapport à z.

Voir aussi ÉQUATION D'UNE LIGNE ; ÉQUATION D'UN AVION; TRANSFORMATION LINÉAIRE ; DÉPENDENT LINÉAIREMENT DENT ET INDÉPENDANT.

linéairement dépendants et indépendants Une collection de fonctions est dite linéairement dépendante si l'une d'elles peut être exprimée comme une somme de multiples constants de l'autre ; si ce n'est pas possible, alors la collection est dite linéairement indépendante. Par exemple, les fonctions f1 (x) = x, f2 (x) = x – 2x, f3 (x) = x sont linéairement dépendantes puisque f3 (x) = 2f1 (x) + f2 (x). Les fonctions {x, 7x} sont également linéairement dépendantes, puisque la deuxième fonction est un multiple constant de la première. Par contre, les fonctions {x, x2 } sont linéairement indépendantes, tout comme les fonctions {sin x, cos x}.

Un ensemble de VECTEURS est dit linéairement dépendant s'il est possible d'écrire un vecteur comme une combinaison des vecteurs restants. De manière équivalente, les vecteurs v1 , v2 ,…,vn sont linéairement dépendants s'il est possible de choisir des scalaires c1 ,c2 ,…,cn , pas tous nuls, de sorte que

$$c1v1 + c2v2 + \dots + cnvn = 0$$

(Si ci , disons, n'est pas nul, alors la division par ce scalaire montre que vi est une somme de multiples des vecteurs restants.) Si cela n'est pas possible, alors les vecteurs sont dits linéairement indépendants. Par exemple, dans l'espace tridimensionnel, les vecteurs i = <1,0,0>, j = <0,1,0> et k = <0,0,1> sont linéairement indépendants - il n'est pas possible d'écrire l'un comme une somme de multiples des deux autres.

Une base pour un ESPACE VECTORIEL est une collection de vecteurs indépendants précoces avec la propriété que tout autre vecteur dans l'espace vectoriel peut être écrit comme une somme de multiples de ces vecteurs. Par exemple, les vecteurs i, j et k forment une base pour l'espace vectoriel des vecteurs tridimensionnels pour tout autre vecteur a = < a1 ,a2 ,a3> qui peut être exprimé par la combinaison a = a1 i + a2 j + a3k. Il est impossible d'exprimer un vecteur comme une combinaison de vecteurs de base de deux manières différentes. (Pour expliquer : supposons que v1 , v2 , v3 est une base pour un espace vectoriel, et qu'un vecteur a peut être exprimé comme une combinaison de ces vecteurs de deux manières différentes : a = a1v1 + a2v2 + a3v3 = b1v1 + b2v2 + b3v3 .La soustraction donne l'équation (a1 – b1)v1 + (a2 – b2)v2 + (a3 – b3)v3 = 0. Comme les vecteurs v1 ,v2 ,v3 sont linéairement indépendants, il faut que a1 = b1 , a2 = b2 et a3 = b3 .)

Les mathématiciens ont prouvé que tout espace vectoriel doit avoir une base et que le nombre de vecteurs dans toute base pour un espace vectoriel particulier est toujours le même. Ce nombre est appelé la dimension de l'espace vectoriel. En particulier, l'ensemble de toutes les fonctions est un espace vectoriel et doit donc avoir une base. Un candidat pour une telle base est la collection infinie de fonctions {1,x,x2 ,x dent, et le travail de construction de la SÉRIE DE TAYLOR montre ^{3} ^{4} ,x ,…}. Cet ensemble est certainement linéairement indépendant que toutes les fonctions « convenablement agréables » peuvent être exprimées comme des sommes infinies de ces fonctions de base.

Des fonctions comme sin(x), cos(x) et sin(7x) répètent des valeurs tous les 2π et sont appelées périodiques. Les mathématiciens ont montré que la collection {1,sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x), sin(3x), cos(3x),…} forme une base pour l'espace vectoriel de toutes les fonctions périodiques. Ceci conduit à l'étude des SÉRIES DE FOURIER.

Voir aussi ORTHOGONAL.

Machine Translated by Google

programmation linéaire La branche des mathématiques qui s'intéresse à la recherche des valeurs maximales ou minimales des fonctions linéaires, c'est-à-dire des fonctions impliquant des variables élevées uniquement à la première puissance, soumises à un certain nombre d'inégalités qui doivent rester vraies, est appelée programmation linéaire. Ce domaine a des applications profondes à l'économie et à l'industrie et est un domaine de recherche active. Alors qu'en principe, les problèmes d'OPTIMISATION de ce type sont simples à résoudre, les problèmes pratiques peuvent impliquer plus de 100 variables et être difficiles à analyser. Le défi consiste à trouver des techniques efficaces pour trouver des solutions.

Le principe de la programmation linéaire est mieux illustré par un exemple. Supposons, par exemple, que nous souhaitions trouver la valeur maximale de la fonction U = 4x – 3y sous les contraintes x ≥ 0, y ≥ 0, x ≤ 1 et y ≤ 1.
Dans cet exemple, les contraintes définissent un carré unitaire dans le plan, et nous souhaitons trouver le point (x, y) dans cette « région réalisable » qui fournit la plus grande valeur pour la « fonction objectif » U = 4x – 3y.

En raisonnant à rebours, notons que chaque valeur possible c de la fonction objectif définit une droite 4x – 3y = c de pente 4/3. Lorsque la valeur de c varie, cette ligne balaie le plan. Partant d'une grande valeur de c et diminuant sa valeur, on cherche donc la première valeur, de c qui produit une ligne qui touche la région de faisabilité.

De toute évidence, cela se produira à l'un des sommets du carré. En vérifiant les quatre sommets, (0,0), (1,0), (0,1) et (1,1), nous voyons que x = 1, y = 0 donne la plus grande valeur possible 4 pour U.

En général, les conditions de contrainte définissent une région polyg onale dans l'espace, et les valeurs maximales et minimales de U ne peuvent apparaître qu'aux sommets de la région.
La programmation linéaire cherche alors à trouver des méthodes efficaces pour vérifier quels sommets donnent les valeurs les plus grandes et les plus petites pour U.

Voir aussi RECHERCHE OPÉRATIONNELLE.

transformation linéaire Une application T : V → W entre deux ESPACES VECTORIELS V et W est appelée une transformation linéaire si les deux conditions suivantes sont remplies :

je. T(a + b) = T(a) + T(b) pour deux vecteurs quelconques a et b
ii. T(ka) = kT(a) pour tout nombre k et tout vecteur a

Si les espaces vectoriels V et W représentent l'ensemble de tous les points du plan ou de l'espace tridimensionnel, alors une transformation linéaire est un exemple de TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE qui transforme des lignes droites en lignes droites. Par exemple, les rotations et les réflexions sont des transformations linéaires. Cependant, toutes les transformations géométriques ne sont pas des transformations linéaires. Bien qu'une translation, par exemple, conserve des lignes droites dans le plan, elle ne satisfait pas la première condition décrite ci-dessus et n'est donc pas une transformation linéaire.

Si e1e2 ,…,en est une base de l'espace vectoriel V, alors tout vecteur a dans V peut être écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs de base :

$$a = c1e1 + c2e2 + \ldots + cnen$$

pour certains nombres c1 , c2 ,…, cn . Ainsi la valeur de la transformation linéaire T est entièrement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs de base :

$$T(a) = T(c1e1 + c2e2 + \ldots + cnen)$$
$$= c1T(e1) + c2T(e2) + \ldots + cnT(en)$$

Si f1 ,f2 ,…,fm est une base du second espace vectoriel W, alors chaque vecteur T(ej) est une combinaison linéaire de ces vecteurs de base :

$$T(ej) = a1j\,f1 + a2j\,f2 + \ldots + amjfm$$

Ainsi, les nombres aij précisent complètement le fonctionnement de la transformation linéaire. Soit A la MATRICE avec

(i,j)ième entrée égale à aij. Cela montre que chaque transformation linéaire est représentée par une matrice. De plus, si nous représentons les vecteurs de base e1 ,e2 ,…,en comme la col
vecteurs umn :

$$ee\bar{e}2n = \begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}, \quad = \begin{matrix}0\\1\\\vdots\\0\end{matrix}, \quad = \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\1\end{matrix}$$

alors la matrice A, dont la jième colonne est la suite de valeurs qui résultent de l'application de T à la jième base vec satisfait Aej =

T(ej), et, en général, pour tout vecteur ej , tor a on a :

$$T(a) = Aa$$

C'est-à-dire que nous avons :

Machine Translated by Google

Toute transformation linéaire T d'un espace vectoriel V vers un espace vectoriel W est donnée par multiplication avec une matrice A dont la jème colonne est l'effet de T sur le jème vecteur de base de V.

Par exemple, considérons une rotation R dans le plan autour de l'origine d'un angle θ. Une telle rotation prend un vecteur unitaire dans la direction de l' axe des x, $e1 = \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$, au vecteur $\begin{matrix}\theta\cos\\\sin\theta\end{matrix}$, et le vecteur unitaire dans la direction de l' axe y, $e2 = \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$, au vecteur $\begin{matrix}-\sin\theta\\\theta\cos\end{matrix}$. Ainsi la matrice représentant une rotation d'angle θ est donnée par :

$$R = \begin{matrix}\theta\cos & -\sin\theta\\ \sin\theta & \theta\cos\end{matrix}$$

De la même manière, une réflexion sur l' axe des x, par exemple, est donnée par la matrice :

$$\begin{matrix}dix\\0\ 1-\end{matrix}$$

et une dilatation par un facteur k comme :

$$\begin{matrix}k & 0\\0 & k\end{matrix}$$

Bien sûr, si l'on travaillait avec un ensemble différent de vecteurs de base, la matrice représentant la transformation linéaire serait différente.

On peut montrer que si la matrice A représente une transformation linéaire T:V → W et la matrice B représente une transformation linéaire S:W → R, alors le produit matriciel BA représente la transformation linéaire composée : SoT:V → R. Si la matrice A est inversible, alors la MATRICE INVERSE A–1 représente la transformation linéaire inverse T –1:W → V. (Cette application inverse existe si A est effectivement inversible.)

Voir aussi TRANSFORMATION AFFINE ; MATRIX OPER ATIONS.

Liouville, Joseph (1809–1882) Théorie française des nombres, analyse Né le 24 mars 1809 à Saint Omer, en France, l'érudit Joseph Liouville est surtout connu pour sa preuve de 1844 de l'existence des NOMBRES TRANSCENDANTAUX. Liouville a également réussi à fournir, pour la première fois, des exemples précis de nombres qui ne peuvent pas être algébriques. (Ces nombres sont aujourd'hui appelés nombres de Liouville) . THÉORIE. En 1864, il édita et publia également des manuscrits laissés par ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) sur les équations POLYNOMIALES . Liouville a écrit plus de 400 articles mathématiques au cours de sa carrière, dont environ 200 sur le thème de la théorie des nombres.

Liouville est diplômé de l'École polytechnique en 1827 avec un diplôme de base en mathématiques et mécanique. Après avoir occupé différents postes d'enseignement, Liouville est finalement nommé professeur d'analyse et de mécanique dans cette même institution en 1838. Parallèlement, Liouville s'est déjà acquis une réputation internationale pour ses travaux sur l'électrodynamique, les équations aux dérivées partielles et l'étude de chaleur, ainsi que pour la création d'une nouvelle revue de mathématiques, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées , aujourd'hui communément appelée Journal de Liouville.

La correspondance avec les mathématiciens CHRISTIAN GOLDBACH et Daniel Bernoulli de la FAMILLE BERNOULLI a suscité l'intérêt de Liouville pour les nombres transcendantaux. Il tenta de prouver que le nombre e était transcendantal, mais n'y parvint pas. (Cet exploit fut plus tard accompli par le mathématicien français Charles Hermite en 1873.) Cependant, en utilisant la théorie des fractions continues, Liouville réussit à construire une classe de nombres réels x avec la propriété que pour chaque nombre naturel nombre n il existe une fraction satisfaisant l'inégalité :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Ceci, a montré Liouville, était suffisant pour établir que x est transcendantal. En particulier, Liouville a montré que le nombre spécifique (parfois appelé maintenant le nombre de Liouville) :

Machine Translated by Google

$$\sum_{n=n!}^{\infty} \frac{1}{1} = 0.110001000000000000000010000$$

est transcendantal.

Liouville est mort à Paris, France, le 8 septembre 1882. Il a établi sa place dans l'histoire des mathématiques pour un travail de pionnier sur l'étude de REAL
NOMBRES.

Liu Hui Voir MATHÉMATIQUES CHINOISES.

Li Ye (Li Chi, Li Zhi) (1192-1279) Algèbre chinoise On se souvient de Li Ye pour son texte de 1248 Ceyuan Haijing (Miroir marin des mesures circulaires), dans lequel il introduisit la « méthode de l'élément céleste » - un système de notation pour les polynômes dans une variable (l'élément céleste) - et un ensemble de techniques pour résoudre de telles équations polynomiales. En utilisant le schéma unique d'un mur de ville circulaire inscrit à l'intérieur d'un grand triangle rectangle, Ceyuan Haijing guide le lecteur à travers 170 problèmes géométriques, intelligemment conçus pour illustrer les techniques de traduction de la géométrie en algèbre, puis résoudre les équations algébriques qui en résultent. Plus de 650 formules différentes pour les zones triangulaires et les longueurs de segment sont présentées dans ce texte.

On sait extrêmement peu de choses sur la vie de Li Ye, sauf que son travail lui a apparemment valu une certaine estime. En 1266, Li Ye fut nommé à l'élite de l'Académie Hanlin par l'empereur Kublai Khan, petit-fils du grand Gengis Khan. Il n'y resta que quelques années pour ensuite prendre sa retraite et vivre le reste de sa vie en ermite.

Lobachevsky, Nikolai Ivanovich (1792–1856) Géométrie russe Né le 1er décembre 1792 à Nov gorod, en Russie, Nikolai Lobachevsky est connu pour sa découverte en 1826 de la GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE et pour avoir détaillé nombre de ses propriétés. (Ce travail a été mené indépendamment des découvertes faites par JÁNOS BOLYAI (1802-1860) 3 ans plus tôt.) Il fut le premier à publier une description d'une GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE dans son article de 1826 "A Concise Outline of the Foundations de Géométrie ».

Lobachevsky est entré à l'Université d'État de Kazan en 1807 avec l'intention d'étudier la médecine, mais a rapidement changé d'intérêt pour suivre des cours de mathématiques et de physique. Il obtient une maîtrise en 1811 et, trois ans plus tard, est nommé maître de conférences à l'université. En 1822, il fut nommé professeur titulaire et, en 1827, recteur de l'université. Il est resté à l'Université d'État de Kazan jusqu'à sa retraite en 1846.

Lobachevsky a été initié au sujet de la géome en tant qu'étudiant. Depuis l'époque d' Euclide (env.
300-260 avant notre ère), les érudits ont remis en question le choix d'Euclide des axiomes comme base de toute la géométrie. Son cinquième postulat, le fameux POSTULAT PARALLÈLE, était jugé d'une nature différente des quatre autres, et les érudits soupçonnaient qu'il pouvait en être déduit comme une conséquence logique. Cela est devenu un défi exceptionnel en mathématiques. Pendant deux millénaires, les érudits ont tenté d'établir le cinquième postulat en tant que THÉORÈME, mais ont échoué.

En apprenant ce problème, Lobachevsky a commencé à analyser la situation par lui-même. Plutôt que d'essayer de prouver le cinquième postulat, il envisagea la possibilité qu'il n'ait pas besoin de découler des quatre axiomes restants, et, de plus, a admis la possibilité d'une géométrie dans laquelle les quatre premiers axiomes sont vrais, mais une dans laquelle le cinquième postulat est manifestement faux. Avec cette réflexion élargie, Lobachevsky a découvert une théorie cohérente de la géométrie - la géométrie hyperbolique - différente de la géométrie euclidienne, mais néanmoins valable en soi. L'existence d'une telle géométrie a montré une fois pour toutes que le cinquième postulat est en fait indépendant des quatre axiomes restants. Ce fut une réalisation remarquable.

Lobachevsky a présenté les résultats de sa découverte à ses collègues de l'Université d'État de Kazan en 1826 et a publié son article "A Concise Outline of the Foundations of Geometry" dans le Kazan Messenger.
Malheureusement, l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg a décidé de ne pas publier son article en tant qu'article évalué par des pairs, et le travail de Lobachevsky n'a pas été largement reconnu.

Bien que Lobachevsky ait réussi à publier des articles sur le sujet à des dates ultérieures, y compris son article allemand de 1840 "Geometrische Untersuchnungen zur Theorie der Parallellinien" (Enquête géométrique sur la théorie des lignes parallèles), ce n'est qu'après sa mort le 24 février 1856, que l'importance de son travail a été comprise et publiée dans un forum principal. Aujourd'hui, la géométrie lobachevskienne joue un rôle central dans la description moderne de l'espace et du mouvement dans la mécanique quantique relativiste et la théorie générale de la relativité.

Machine Translated by Google

maximum local/minimum local Voir MAXIMUM/
LE MINIMUM.

locus (pluriel, lieux) Un ensemble de points satisfaisant à une condition spécifiée est appelé un lieu de points. Par exemple, le lieu de tous les points du plan à égale distance d'un point donné est un cercle, et le lieu de tous les points ÉQUIDISTANTS de deux points donnés A et B du plan est une droite perpendiculaire au segment de droite reliant A et B par son POINT MILIEU.

De plus, si le point A est remplacé par un cercle, alors le lieu de tous les points équidistants de A et B est un HYPER BOLA si B est à l'extérieur du cercle A, et une ELLIPSE si B est à l'intérieur de A. Le lieu de tous les points équidistants d'une ligne A et d'un point B est une PARABOLE.

Si, dans un système de COORDONNEES CARTESIENNES, un lieu de points peut être exprimé sous la forme

$$\{(x,y) : f(x,y) = 0\}$$

alors l'équation f(x,y) = 0 est appelée l'équation du lieu. Par exemple, $x^2 - 25 = 0$ est l'équation d'un cercle de rayon 5 centré autour de l'origine.

logarithme La puissance (EXPOSANT) à laquelle un nombre b doit être élevé pour obtenir un nombre donné N s'appelle le logarithme en base b de N. C'est-à-dire que si $b^x = N$, alors on écrit $\log_b N = x$, ce que l'on lit comme "la puissance de b qui donne N est x". On suppose que le nombre b est positif. Par exemple, il faut élever le nombre 10 à une puissance de 2 pour obtenir le nombre 100, et donc le logarithme en base 10 de 100 est 2 :

$$\log_{10} 100 = 2$$

Nous avons aussi:

$\log_{10} 1\,000 = 3$ (la puissance de 10 qui donne 1 000 est 3)

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$ (la puissance de $\frac{1}{2}$ qui donne $\frac{1}{8}$ est 3)

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (la puissance de 3 qui donne $\frac{1}{9}$ est –2)

$\log_4 1 = 0$ (la puissance de 4 qui donne 1 est nulle)

et

$\log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2}$ (la puissance de 6 qui donne $\sqrt{6}$ est 1/2)

Parce qu'une quantité b^x n'est jamais négative, ou nulle, il n'y a pas de logarithme d'un nombre négatif ou de zéro.

Comme les logarithmes sont des exposants, ils obéissent aux mêmes règles que les exposants. Par exemple, la règle de multiplication pour les exposants se lit $b^x b^y = b^{x+y}$ indiquant que, lors de la multiplication, les exposants s'additionnent. Cela conduit à la règle des logarithmes :

1. $\log_b (N \times M) = \log_b N + \log_b M$

(Précisément, si $x = \log_b N$ et $y = \log_b M$, alors on a : $b^x = N$ et $b^y = M$. Par conséquent, $N \times M = b^x \times b^y = b^{x+y}$ $N \times M$. C'est-à-dire, $= \log_b$, qui stipule que x + y est la puissance de b qui donne $N \times M = x + y = \log_b N + \log_b M$.)

De même, la règle des exposants $(b^x)^y = b^{xy}$ conduit à la règle :

2. $\log_b (N^y) = y \log_b N$

Nous avons aussi les règles :

3. $\log_b (b^x) = x$ (La puissance de b qui donne b^x est bien x.) 4.
$b^{\log_b x} = x$ (En fait, $\log_b x$ est la puissance de b qui donne x.) 5. $\log_b 1 = 0$ (La puissance de b qui donne 1 est nulle.)

Les logarithmes ont été inventés par le mathématicien écossais JOHN NAPIER (1550–1617) comme moyen de simplifier les calculs arithmétiques. Par exemple, la règle 1 montre que tout problème de multiplication peut être converti en une opération d'addition beaucoup plus simple à l'aide de logarithmes. Cette découverte fut d'un grand intérêt pour les savants de la Renaissance, en particulier les astronomes, aux prises avec des problèmes nécessitant la manipulation de très grands nombres. De tels calculs étaient extrêmement fastidieux et sujets à de nombreuses erreurs. Inspiré par les problèmes liés à la taille de la Terre, Napier a estimé que travailler avec le nombre $10^7 = 10\,000\,000$ serait le plus utile -1 pour les scientifiques, et il a choisi le nombre $b = 1 - 10^{-7}$

comme base de ses logarithmes. Napier a multiplié toutes les quantités avec lesquelles il travaillait par 10^7 pour éviter l'apparition de décimales. Aujourd'hui son logarithme d'un

le nombre N s'écrirait $10^7 \log_{1-\frac{1}{10^7}} \frac{N}{10^7}$.

Machine Translated by Google

Bien que les logarithmes soient maintenant compris comme des exposants, Napier lui-même ne les considérait pas de cette manière. Il a développé sa théorie des logarithmes géométriquement, les considérant comme un rapport des distances parcourues par deux objets en mouvement, l'un se déplaçant le long d'une ligne droite à une vitesse de 1 unité par seconde, et l'autre se déplaçant le long d'un segment de ligne de 1 unité de long et avec la vitesse change en fonction de sa distance par rapport au point final auquel il s'approche. Napier a choisi le nom logarithme des mots grecs logos pour « rapport » et arithmos pour « nombre ». Ce n'est qu'à la fin du XVIIe siècle que les mathématiciens ont reconnu que les logarithmes étaient, en fait, des exposants.

Après que Napier eut publié son travail en 1614, le mathématicien anglais HENRY BRIGGS (1561-1630) suggéra à Napier que, comme notre système de numération, les logarithmes devraient être basés sur le nombre 10. Napier a convenu que cela simplifierait en effet les choses, et b = 10 était alors considéré comme la base préférée des logarithmes. Les logarithmes en base 10 sont aujourd'hui appelés logarithmes communs ou logarithmes de Briggs. Le logarithme commun de N est simplement noté log N ou lg N.

En 1624, Briggs a publié des tableaux répertoriant les valeurs des logarithmes communs pour les nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000 inclus. Les valeurs des nombres 20 000 à 90 000 ont été complétées après la mort de Briggs par le mathématicien néerlandais Adriaan Vlacq.

L'horloger suisse Jobst Bürgi, fabricant d'instruments astronomiques, a également conçu des logarithmes pour faciliter la multiplication des grands nombres. Cependant, puisque Napier a publié son travail en premier, le mérite de leur découverte n'a pas été attribué à Bürgi.

Un nombre avec une valeur donnée pour son logarithme est appelé l'antilogarithme, ou antilog, de cette valeur. L'antilog en base 10 d'une valeur x est 10x .

Les logarithmes communs des nombres 3,7, 370, 370 000, par exemple, diffèrent par des nombres entiers : log 3,7 ≈ 0,5682, log 370 = log(3,7 × 100) ≈ 0,5682 + 2 = 2,5682, et log 370 000 = log(3,7 × 105) ≈ 5,5682.

La partie décimale d'une valeur logarithmique s'appelle la mantisse et la partie entière s'appelle la caractéristique du logarithme. (Par exemple, les trois logarithmes ci-dessus ont chacun une mantisse de 0,5682 et des caractéristiques de 0, 2 et 5, respectivement.) Les tables logarithmiques du passé ne répertorient que les mantisses des nombres de 1 à 10. Le logarithme de tout autre nombre peut alors être calculé en ajoutant le nombre entier approprié pour représenter la puissance de 10 nécessaire.

Dans CALCULUS, il est commode de travailler avec des rythmes loga de base e. Le nombre e est un nombre irrationnel de valeur environ 2,718281828… Les logarithmes de base e sont appelés logarithmes naturels, et un logarithme de base e est noté ln. Ainsi, ln(e Si l'on veut travailler avec des nombres complexes, ^{3}) = 3, par exemple.

alors il est possible de donner un sens au logarithme d'un nombre négatif. Par exemple, LA FORMULE D'EULER nous dit que e

$^{i\pi}$ = –1. Par conséquent ln(–1) = iπ. En allant plus loin, en s'étendant aux logarithmes des nombres complexes, nous ont, par exemple, pour $\ln \ln \overline{\jmath}e \quad -\sqrt{(\,)\,1} = -=\frac{-1}{}\ln(\,)\,12 \quad \frac{*\pi}{2}$. Dans ce paramètre, tous les nombres non nuls - réels et complexes - ont des logarithmes.

Voir aussi E; FONCTION EXPONENTIELLE; LOGARITHMIQUE FONCTION; ÉCHELLE LOGARITHMIQUE; RÈGLE À CALCUL.

fonction logarithmique Toute FONCTION CONTINUE f(x), non identiquement nulle, définie pour les valeurs positives de x avec la propriété que f(a · x) = f(a) + f(x) pour toutes les valeurs positives a et x, est appelée fonction logarithmique.

On dit que ces fonctions "convertissent la multiplication en addition". La série d'observations ci-dessous montre que toute fonction logarithmique est donnée par un LOGARITHME : f(x) = logbx pour une base b positive.

1. Toutes les fonctions logarithmiques f(x) satisfont f(1) = 0.

(Cela découle de l'observation : f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1).)

1 2. Toutes les fonctions logarithmiques satisfont f ( ) $\frac{}{\text{un}}$ $^{=-}$ () fa ·

Par conséquent, les fonctions logarithmiques donnent des sorties positives et négatives.

(Cela découle de l'observation : ( )1 = = ffa = 0 1−() $\frac{}{\text{un}}$

1 fa(f)+.)

3. Pour toute fonction logarithmique, il existe un nombre b pour lequel f(b) = 1.

(On a f(1) = 0 et qu'il est possible de choisir une valeur a telle que f(a) soit positive. Une des valeurs f(a), f(a f(a) + f(a), f(a un. Ainsi il est ^{2}) = possible de ^{3}) = f(a) + f(a) + f(a), … sera supérieur à trouver un nombre c avec f(c) > 1.

D'après le THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES , il doit y avoir une valeur b entre 1 et c, de sorte que f(b) = 1.)

Machine Translated by Google

4. Si f(x) est une fonction logarithmique avec f(b) = 1, alors f(x) = logb x.

(Pour tout entier positif n, on a f(x n) = f(x) + f(x) + f(x) = nf(x). Aussi, $1 (fx^{n}f)\bar{}+\ldots\frac{}{X\ n} = fx\ nf^{n}x\ \bar{}\ ()\ ( )$.

Pour une fraction $\frac{p}{q}$, on a $qf(x) = f((x^{\frac{p}{q}})\ q) = f(x\ p)^{\frac{p}{q}}$ = pf (x), qui montre f(x r) = rf(x) pour tout nombre rationnel r. Comme tout nombre irrationnel est une LIMITE de nombres rationnels, cette propriété vaut également pour les nombres irrationnels. En particulier, pour toute valeur x, f(b x) = xf(b) = x. Autrement dit, f est bien la fonction qui extrait l'exposant d'une puissance donnée de b.)

Si une fonction logarithmique satisfait f(e) = 1, alors on l'appelle la fonction logarithmique. C'est la fonction donnée par le logarithme naturel : f(x) = ln x. Sa dérivée est donné par $(\ln x) = \frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}$, et par conséquent $\ln x = \int x\ \frac{1}{t}\ dt$. Ainsi, la fonction logarithmique peut alternativement être définie comme l'aire sous $y = \frac{1}{x}$ La courbe. (Voir E.)

dérivée d'une fonction logarithmique à une base arbitraire b peut être calculée par différenciation implicite après avoir d'abord démêlé puis réappliqué un logarithme.
Plus précisément, si y = logb x, alors b y = x. L'application du logarithme naturel donne ylnb = lnx. En différenciant, on voit dy et que $\ln b = \frac{dy}{dx}\ \frac{1}{x}$, ainsi, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln b}$. Ainsi nous avons :

$$\frac{}{ddx}(\ {}^{bjournal\ _}\ ^{X}) = \frac{1\ 1}{{}_{dans}\ boîte}\ \frac{}{}$$

Voir aussi HOMOMORPHISME ; ÉCHELLE LOGARITHMIQUE; RÈGLE À CALCUL.

échelle logarithmique Une ligne marquée de distances dont les LOGARITHMES sont les distances réelles le long de la ligne est dite en échelle logarithmique. Par exemple, dans une échelle logarithmique de base 10, si 10 est l'étiquette 1 pouce le long de la ligne, chaque pouce successif sera marqué 100, 1 000, etc. (La position étiquetée 1 000, par exemple, est physiquement log10 1 000 = 3 pouces le long de la ligne.) Si un ensemble d'axes de coordonnées sont tous deux à l'échelle logarithmique, alors le tracé n courbe y = x , de a par exemple, apparaîtra comme le tracé de log y = log(x n) = n log x, c'est-à-dire comme si les variables en question étaient logy et logx. Dans ce réglage, le graphique apparaît sous la forme d'une ligne droite de PENTE n. Les scientifiques complotent souvent graphiques sur du papier millimétré log-log et mesurer la pente pour trouver la valeur de n qui correspond le mieux aux données.

Le terme échelle logarithmique est également utilisé pour décrire toute quantité qui est généralement mesurée en termes de rythmes loga. En 1935, le sismologue américain Charles Richter établit l'échelle de Richter pour décrire l'intensité des tremblements de terre. L'échelle qu'il a imaginée est logarithmique, base 10, ce qui signifie qu'un séisme de 6 sur son échelle, par exemple, est 106 ou 1 million, fois plus fort que les petits séismes qu'il a fixés à zéro. La mesure du pH de l'acidité ou de l'alcalinité utilisée en chimie est également logarithmique, tout comme l'unité DECIBEL utilisée pour mesurer l'intensité sonore.

Voir aussi RÈGLE À CALCUL.

croissance logistique Voir MODÈLES DE POPULATION.

division longue Voir BASE D'UN SYSTÈME DE NOMBRE.

grand rayon La distance entre le centre d'un POLYGONE régulier et l'un de ses sommets est appelée le grand rayon du polygone. Cette quantité est également le rayon de CIR CUMCIRCLE du polygone. Si le polygone a n côtés, chacun 1 unité de longueur, alors un exercice dans TRIGONOME TRY montre que le long rayon a une valeur

$$r = \frac{1}{{}_{2\ péché}\ \frac{180}{n}}$$

Un analogue de PI pour un polygone régulier est le rapport de son PÉRIMÈTRE à deux fois la longueur de son rayon long (qui est égal au diamètre du polygone si n est pair).
Cette quantité se rapproche de la valeur lorsque π lorsque n devient grand. Cela découle du fait que, selon la RÈGLE DE COMPRESSION, $\frac{péché(x)}{X}$ se rapproche de la valeur 1 en tant que x, mesuré en radians, devient petit.

Voir aussi APOTHÈME ; MESURE RADIAN.

Lovelace, Augusta Ada Byron (1815–1852) Calcul britannique Née le 10 décembre 1815 à Pic cadilly, en Angleterre, Augusta Ada Byron Lovelace est connue comme l'une des premières personnes à avoir écrit un ensemble d'instructions pour une machine informatique. En tant qu'assistant de

Machine Translated by Google



Augusta Ada Byron Lovelace, assistante du chercheur du XIXe siècle Charles Babbage, a été la première à développer une théorie du calcul mécanique et la première à écrire l'équivalent d'un programme informatique. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

le notable CHARLES BABBAGE (1791-1871) dans sa conception et la construction planifiée d'un "moteur analytique", Lovelace a décrit les principes nécessaires à l'exécution de mathématiques sur une machine et, en fait, a été la première personne à écrire un programme informatique.

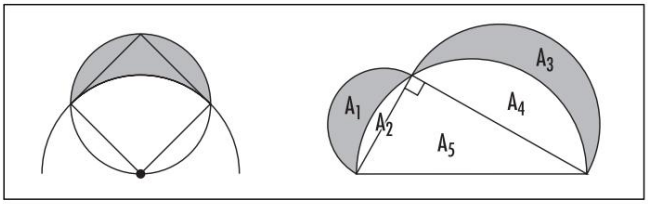
Fille du célèbre poète George Gordon, Lord Byron, Lovelace a été encouragée à étudier les mathématiques par sa mère, elle-même une mathématicienne adepte. Le 5 juin 1833, alors qu'il assistait à une fête, Lovelace rencontra Babbage et apprit ses travaux sur le calcul mécanique. Fasciné par le sujet, Lovelace a visité le studio londonien de Bab bage 2 semaines plus tard pour voir sa première machine, le "moteur de différence". À partir de cette date, Lovelace a travaillé comme assistant de Babbage sur le développement ment d'un dispositif supérieur capable de recevoir des instructions et des données à partir de cartes perforées, et capable d'effectuer tous les types possibles d'opérations mathématiques.

Les érudits européens de l'époque écrivaient des commentaires sur l'œuvre de Babbage, et Lovelace prit sur elle de traduire les textes français en anglais.
En 1843, elle publie une traduction annotée d'un ouvrage de Luigi Menabrea (1809-1896), Notions sur la machine analytique de Charles Babbage (Notes sur le moteur analytique de Charles Babbage), dans laquelle, grâce à ses nombreuses annotations, elle détermine effectivement l'ensemble de la théorie. fonctionnement d'une telle machine. (Ce matériel n'a pas été correctement développé par Menabrea.)
Lovelace avait, en fait, expliqué comment programmer une machine pour effectuer des mathématiques abstraites.

Sur une note philosophique, Lovelace a abordé la question pressante de savoir si les machines à calculer (ordinateurs) seraient un jour capables de penser. Elle a soutenu que les machines ne pourront jamais faire que ce que nous savons leur ordonner de faire et, en tant que telles, ne pourront jamais anticiper les résultats ou les vérités. Ce dernier point, a-t-elle estimé, est ce qui constitue la "pensée", alors que le premier ne l'est pas. Cet argument est depuis devenu connu sous le nom d'« objection de Lady Lovelace ».

En raison du manque de financement, Babbage et Lovelace n'ont jamais pu terminer la construction du nouveau moteur. Les travaux de Lovelace sont pourtant aujourd'hui reconnus comme ayant correctement anticipé les enjeux théoriques de l'informatique. Elle est décédée à Londres, en Angleterre, le 27 novembre 1852.

lune Une figure en forme de croissant dans le plan formé par deux arcs de cercle s'appelle une lune. Les lunes ont été largement étudiées par HIPPOCRATE DE CHIOS au cinquième siècle avant notre ère . Dans une première tentative pour résoudre le tristement célèbre problème de la QUADRATURE DU CERCLE, il a montré qu'il est possible d'équarrir des lunes du type montré dans l'illustration ci-dessous. (C'est-à-dire qu'Hippocrate a esquissé un



lunes

Machine Translated by Google

série spécifique d'étapes qui permettaient de construire un carré de la même aire que cette lune en utilisant uniquement une règle droite et un compas.) Les mathématiciens ont depuis prouvé qu'il n'y a que quatre autres types de lunes qui peuvent également être ainsi équarries.

Dans la figure de la page précédente, les aires des deux lunes ombrées totalisent l'aire du triangle. Ici, chaque arc de cercle est un demi-cercle tracé sur le côté d'un triangle rectangle. Cette affirmation découle de la version généralisée du THÉORÈME DE PYTHAGORE , qui stipule que les aires de deux demi-cercles construits sur les deux la somme des petits côtés d'un triangle rectangle est égale à l'aire du demi-cercle construit sur l'hypoténuse. (Par conséquent, dans notre diagramme, les aires A1 + A2 et A3 + A4 totalisent A2 + A4 + A5 , ce qui donne A1 + A3 = A5 .)

Dans l'étude de la géométrie sphérique, la partie de la surface d'une sphère délimitée par deux grands cercles est aussi appelée lune. Si l'angle entre les deux grands cercles est de θ degrés, alors la surface de ce tranche de la sphère est $4\pi r^2 \cdot \frac{\theta}{360}$ unités au carré, où r est le rayon de la sphère.

Machine Translated by Google

M

Maclaurin, Colin (1698–1746) Tournesol britannique Né en février 1698 (sa date de naissance exacte n'est pas connue) à Kilmodan, en Écosse, le savant Colin Maclaurin est considéré comme le plus grand mathématicien britannique de la génération qui suivit SIR ISAAC NEWTON. Dans ses deux textes célèbres Geometrica organica (Géométrie organique) de 1720 et Traité des fluxions de 1742, Maclaurin développe et étend le sujet du CALCUL et propose de nombreux résultats originaux. La célèbre série qui porte son nom est cependant un cas particulier de l'œuvre de BROOK TAYLOR (1685-1731), comme Maclaurin le reconnaît avec justesse. Il a également écrit un manuel élémentaire influent, A Treatise on Algebra, sur l'application de l'algèbre à la géométrie.

Orphelin à l'âge de 10 ans, Maclaurin entra à l'université de Glasgow en 1709, ce qui, à l'époque, était considéré comme une alternative acceptable à l'enseignement secondaire. Il y étudia les travaux d' EUCLIDE, ce qui éveilla en lui une passion pour les mathématiques. À 14 ans, il obtint le diplôme de base de la maîtrise et donna une conférence publique sur la théorie de la gravitation de Newton, démontrant un niveau de connaissances scientifiques comparable à celui des érudits de l'époque.

En 1717, Maclaurin est nommé professeur de mathématiques au Marischal College de l'Université d'Aberdeen. Ce poste lui offrit l'opportunité de se rendre à Londres en 1719, où il rencontra SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) et poursuivit ses études en mathématiques et en physique. Le travail de Maclaurin est bien accueilli et il est élu membre de la ROYAL SOCIETY la même année. Deux ans plus tard, il reçoit également le grand prix de l'Académie française des Sciences pour ses travaux sur l'impact des corps. En même temps, il avait écrit et publié son célèbre traité Geometrica organica, qui lui valut une considération considérable en tant que fin savant en géométrie.

Dans une tentative de régler les critiques du calcul nouvellement développé de Newton, Maclaurin a publié son propre compte rendu de la théorie. Son long Treatise of Fluxions fait appel à la géométrie pour apporter de la rigueur à l'utilisation par Newton des FLUXION et des fluents. Il a également développé la théorie des SERIES infinies , produit de nouveaux tests de convergence et discuté des extensions de fonctions POWER SERIES (TAYLOR SERIES). Ce travail a été très influent et, en l'honneur de sa réalisation, son nom reste attaché à la série qu'il considérait - la SÉRIE Maclaurin. Maclaurin a également fourni de nombreuses nouvelles applications du calcul dans ce travail.

Maclaurin reçoit un deuxième prix de l'Académie des sciences en 1740, cette fois pour son étude des marées. Le fait que le prix ait également été décerné à LEONHARD EULER (1707–83) et à Daniel Bernoulli (1707–82) de la FAMILLE BERNOULLI la même année montre que Maclaurin était considéré comme un égal avec les deux meilleurs mathématiciens de son époque. Il mourut à Édimbourg, en Écosse, le 14 janvier 1746.

Série Maclaurin Voir SÉRIE TAYLOR.

Madhava de Sangamagramma (vers 1350–1425) Trigonométrie indienne , astronomie Né près de Cochin dans le sud-ouest de l'Inde, Madhava est connu pour ses brillantes découvertes en ANALYSE. Il a calculé, par exemple, l'équivalent de la SÉRIE DE TAYLOR du sinus, cosinus et

Machine Translated by Google

fonctions arctangentes de la TRIGONOMÉTRIE, ont découvert la GREGORY SERIES pour π (qu'il a utilisé pour calculer un approximation de cette valeur correcte à 11 décimales lieux), et, de plus, a fourni des estimations précises pour le terme d'erreur en tronquant la série après un nombre fini d'étapes. Madhava a également produit le plus précis tableau des valeurs des sinus de son temps. Les méthodes Madhava utilisés pour accomplir ces exploits sont censés être essentiellement les mêmes que ceux développés dans CALCULUS par GOT TFRIED WILHELM LEIBNIZ, SIR ISAAC NEWTON, et BROOK TAYLOR. Bien sûr, Madhava avait découvert ces techniques 300 ans avant leur invention de ce sujet.

On sait très peu de choses sur la vie de Madhava, et tout ses écrits mathématiques sont perdus. Les historiens ont appris le travail mathématique de Madhava à travers le quelques textes astronomiques de lui qui ont survécu, et d'après les commentaires des savants suivant Madhava fait de son travail.

Il convient de mentionner que, d'après son développement en série pour l'arc tangente :

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Madhava fixe x = 1 pour obtenir le familier Gregory série pour π. Il n'est pas bien connu que Madhava a également mis $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pour obtenir la formule alternative suivante pour π :

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \cdots\right)$$

carré magique Tableau carré de nombres pour lequel la somme des nombres dans n'importe quelle ligne, colonne ou principale diagonale est la même s'appelle un carré magique. La somme constante obtenue est appelée la constante magique de la carré. Habituellement, les nombres dans un carré magique sont doivent être distincts, et on suppose souvent que pour un carré n × n , les nombres spécifiques 1, 2, 3, …, n^2 sont utilisés. (Il est commode de désigner un tel carré magique comme type standard.)

Le premier exemple connu est le « Lho shu carré » qui apparaît dans un ancien manuscrit chinois de l'époque de l'empereur Yu d'environ 2200 avant notre ère Ici, les nombres de 1 à 9 sont disposés dans un 3 × 3 tableau pour produire un carré magique de constante magique 15. Jusqu'aux rotations et réflexions, c'est le seul arrangement ment de ces neuf entiers qui produit une magie carré. (Ainsi on dit qu'il n'y a qu'une seule magie 3 × 3 carré de type standard.)

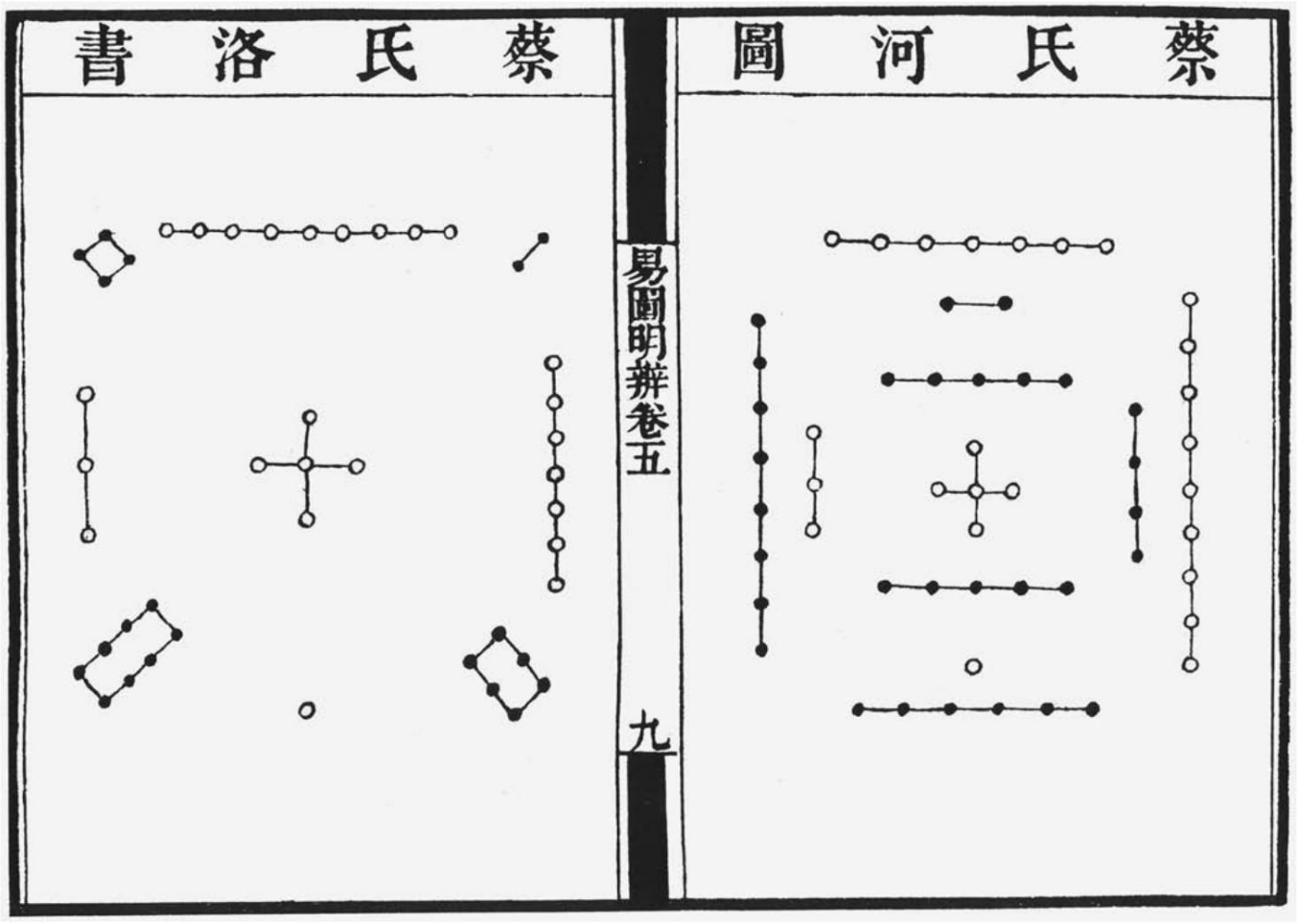
8	1 6	
3	5 7	
4 9 2		

Les anciens savants chinois, et plus tard les savants arabes, exemples calculés de carrés magiques standard 4 × 4, 5 × 5 et d'ordre supérieur. (Le carré magique 5 × 5 illustré ci-dessous est attribué à Yang Hui du 13ème siècle, et le carré magique 6 × 6 de Chêng Ta-wei du XVIe siècle.) Artiste allemand ALBRECHT DÜRER (1471–1528) représenté le carré magique 4 × 4 ci-dessous en arrière-plan de sa gravure Melancholia, et on croit que c'est la première introduction d'un carré magique au L'occident. Célèbre scientifique et homme d'État Benjamin Franklin (1707-1790) était magistral dans l'invention de carrés magiques d'ordre élevé et aurait joué avec de nouveaux places chaque fois que les débats politiques devenaient fastidieux.

16 3 2 13				
5 10 11 8				
9 6 7 12				
4 15 14 1				

1 23 16 4 21				
15 14 7 18 11				
24 17 13 9 2				
20 8 19 12 6				
5 3 10 22 25				

Machine Translated by Google



Tiré d'une version blockbook du XVIIIe siècle du Livre des Mutations, ou I Ching, le diagramme de gauche représente le carré magique Lho shu. (Photo gracieuseté de C. Walker/Topham/The Image Works)

27	29	2	4	13	36		
9	11	20	22	31	18		
32	25	7	3	21	23		
14	16	34	30	12	5		
28	6	15	17	26	19		
1	24	33	35	8	10		

Il est simple de calculer la constante magique M d'un carré magique n × n standard . L'addition des entrées de chaque ligne produit la constante magique M et, comme il y a n lignes, la quantité nM doit être égale à la somme de toutes les entrées du tableau. Ainsi, comme le montrent les formules SOMMES DES PUISSANCES :

$$2\,nM = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

donnant:

$$M_n = \frac{1}{2}(n^2 + n^2)$$

Pour n = 1, 2, 3, 4, 5, … cela donne la séquence de valeurs 1,5,15,34,65,…

Machine Translated by Google

Il n'y a pas de carrés magiques 2 × 2 de type standard, juste un carré magique 3 × 3 standard, 880 carrés magiques 4 × 4 standard et 275 305 224 carrés magiques 5 × 5 standard. À ce jour, personne ne connaît le nombre de carrés magiques standard 6 × 6.

Des méthodes générales sont connues pour construire des carrés magiques standard n × n de toute taille n supérieure à 2. Par exemple, pour toute valeur impaire de n, commencez par placer le nombre 1 à n'importe quel endroit à l'intérieur du tableau et placez progressivement les nombres suivants dans le carré en diagonale au-dessus et à droite. Suivez un "effet de bouclage" de sorte que les chemins partant du haut de la matrice reviennent vers le bas et ceux partant vers la droite reviennent vers la gauche. Lorsque l'on rencontre un carré déjà rempli, placez l'entier suivant dans la cellule directement en dessous de la cellule actuelle pour ensuite continuer à vous déplacer en diagonale vers le haut vers la droite. Par exemple, en commençant par 1 au centre, cette méthode produit le carré magique 5 × 5 suivant. (Remarquez, en lisant la séquence d'entrées, les nombres 6, 11, 16 et 21 ont chacun été "cognés" vers une diagonale inférieure.)

10	12	19	21	3
11	18	25	2	9
17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22

Cette méthode de construction est connue sous le nom de méthode siamoise et est attribuée à l'ambassadeur de France au Siam (aujourd'hui Thaïlande) Simon de la Loubère (ca. 1670). Des méthodes de construction de carrés magiques standard d'ordre pair existent, mais sont considérablement plus compliquées.

Il existe une pléthore d'exigences alternatives que l'on pourrait placer sur un arrangement carré de nombres produire des carrés magiques aux propriétés alternatives remarquables. Nous n'énumérons ici que quelques exemples :

1. Carrés semi-magiques : Un tableau carré de nombres qui n'est pas un carré magique uniquement parce que ses diagonales principales ne s'ajoutent pas à la constante magique est appelé un CARRÉ SEMI-MAGIQUE. Ces carrés ont la propriété remarquable que, lorsqu'ils sont considérés comme des matrices, la somme MATRICE , le produit et l'inverse de toute collection de carrés semi-magiques sont à nouveau semi-magiques.
2. Carrés de multiplication magiques : Un tableau carré de nombres dans lequel chaque ligne, colonne et diagonale a le même produit est dit un carré de multiplication magique. Le tableau suivant, par exemple, est un tel carré magique.

12	9	2	
1	6	36	
18	4	3	

3. Carrés de division magiques : Un tableau carré de nombres pour lequel pour chaque triplet de nombres a, b et c dans une ligne, une colonne ou une diagonale, le quotient a ÷ (b ÷ c) est le même qu'un carré de division magique . Par exemple, le tableau suivant est un tel carré :

18	9	3
36	6	1
12	4	2

4. Carrés magiques d'addition-multiplication : Un carré qui est à la fois un carré magique d'addition et de multiplication est appelé un carré magique d'addition-multiplication. Le tableau 8 × 8 suivant est un exemple d'un tel carré :

Machine Translated by Google

39	34	138	243	100	29	105	152	
116	25	133	120	51	26	162	207	
119	104	108	23	174	225	57	30	
150	261	45	38	91	136	92	27	
135	114	50	87	184	189	13	68	
216	161	17	52	171	90	58	75	
19	60	232	175	54	69	153	78	
46	81	117	102	15	76	200	203	

5. Carrés de bordure : Un carré magique (en cours d'addition) qui reste magique lorsque sa bordure est supprimée est appelé un carré magique de bordure. Si l'on peut continuer à supprimer les bordures des carrés suivants tout en préservant la propriété magique, alors nous disons que nous avons un carré magique imbriqué. Voici un exemple de carré magique imbriqué :

31	30	33	16	15	
13	26	27	22	37	
14	21	25	29	36	
32	28	23	24	18	
35	20	17	34	19	

26	27	22	
21	25	29	
28	23	24	

6. Carrés alphamagiques : Si le remplacement de chaque entrée dans un carré magique (additif) par le nombre de lettres dans le nom (anglais) de ce nombre produit un nouveau carré magique, alors nous disons que nous avons un carré alphamagique. Par exemple, le carré ci-dessous, écrit avec des mots, est alphamagique (le nombre de lettres dans chaque nom est écrit entre parenthèses, formant son propre carré magique.)

cinq(4)	vingt-deux (9)	dix-huit (8)
Vingt-huit (11)	quinze (7)	deux (3)
douze (6)	huit (5)	vingt-cinq (10)

7. Rectangles magiques : Un tableau rectangulaire de nombres dans lequel la somme des entrées dans n'importe quelle ligne ou colonne est la même s'appelle un rectangle magique. S'il y a n lignes et m colonnes et que la constante magique est M, la somme de toutes les lignes montre que nM est égal à la somme de toutes les entrées du tableau. La somme de toutes les colonnes donne nM comme somme de toutes les entrées du tableau, et nous devons donc avoir nM = mM. Si n et m doivent être différents, cela force la constante magique à être nulle. Ainsi, tout rectangle magique, tel que celui ci-dessous, doit inclure des entrées négatives.

3	–4	1	
–3	4	–1	

On peut également envisager des arrangements alternatifs de nombres et rechercher des pentagrammes magiques et des hexagrammes, ou des tableaux cubiques magiques de nombres, par exemple. Il s'agit d'un sujet d'exploration populaire pour les passionnés de mathématiques.

magnitude Une mesure positive de la taille d'une quantité est appelée sa magnitude. Par exemple, la magnitude d'un nombre réel est sa VALEUR ABSOLUE. (Ainsi, par exemple, 27 et –27, bien que de polarité opposée,

Machine Translated by Google

ont la même grandeur.) La grandeur d'un VECTEUR est sa longueur.

Les physiciens et les astronomes utilisent l'expression ORDRE DE MAGNITUDE pour désigner la plus petite puissance de 10 nécessaire pour représenter une quantité. Par exemple, les nombres 4×1023 et 9,78×1023 sont du même ordre de grandeur.

Voir aussi NOTATION SCIENTIFIQUE.

Ensemble de Mandelbrot Voir FRACTAL.

matrice (pluriel, matrices) Un tableau rectangulaire de nombres affichés en lignes et en colonnes et entre parenthèses est appelé une matrice. (En science, le mot matrice est utilisé pour décrire le matériau de base, le sol ou la roche, qui maintient en place un objet tel qu'un fossile ou un cristal. En mathématiques, le mot est utilisé pour décrire un tableau qui « contient » des nombres. en place.) Une matrice m × n a m lignes et n colonnes. Par exemple, l'objet ci-dessous est une matrice 2 × 3 :

$$\begin{matrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Une matrice est dite carrée si le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. Une matrice avec une seule ligne (une matrice de lignes) ou une seule colonne (une matrice de colonnes) peut être considérée comme un VECTEUR.

Généralement, une matrice est désignée par une lettre majuscule. Par exemple, la matrice ci-dessus pourrait être appelée A,

$$3 x 1 \tan - = - + xx 3$$

et l'entrée dans la ième ligne et la jième colonne comme Aij. Par exemple, dans cet exemple, A11 = 5 et A23 = 2.

Les matrices apparaissent dans l'étude des ÉQUATIONS LIN EAR SIMULTANÉES et dans l'étude de l'ALGÈBRE LINÉAIRE. Toute TRANSFORMATION LINEAIRE peut être représentée via une matrice. On peut combiner des matrices selon un ensemble d' OPÉRATIONS MATRICIELLES standard.

Voir aussi VECTEUR PROPRE ; GROUPE LINÉAIRE GÉNÉRAL ; MATRICE D'IDENTITÉ; MATRICE INVERSE.

opérations matricielles Il existe trois opérations arithmétiques de base que l'on peut effectuer sur une MATRICE ou sur une paire de matrices de même dimension (c'est-à-dire deux matrices avec le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes).

1. Multiplication scalaire : Pour multiplier une matrice par un nombre réel k, multipliez chaque entrée de la matrice par ce nombre. Par exemple, si

$$\text{UNE} = \begin{matrix} 2 & 20 \\ 0 & 17 \\ 3 & 41 \end{matrix}$$

alors

$$4A = \begin{matrix} 8 & 80 \\ 0 & 428 \\ 12 & 16 & 4 \end{matrix}$$

En général, la formule du (i,j)ème élément du produit scalaire kA est :

$$(kA)ij = kAij$$

2. Addition matricielle : Pour additionner deux matrices de la même dimension, additionnez les entrées correspondantes et entrez chaque somme à l'endroit correspondant dans la somme matricielle. Par exemple, si

$$\text{Un} = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

et

$$B = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

alors

$$A B + = \begin{matrix} - + + - \\ 03 \end{matrix} \begin{matrix} (1232) \\ 54 + + \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{matrix}$$

En général, la formule du (i,j)ème élément de la somme A + B est :

$$(A + B)ij = Aij + Bij$$

Machine Translated by Google

Le produit scalaire et la somme matricielle satisfont la relation :

$$k(A + B) = kA + kB$$

3. Multiplication matricielle : le produit scalaire de deux vecteurs fournit un moyen naturel d'obtenir une seule valeur numérique à partir de deux listes de nombres distinctes : le produit de (x1 ,x2 ,…,xn) et (y1 ,y2 ,…, yn) est donnée par la somme x1y1 + x2y2 +…+xnyn . Chaque ligne et colonne d'une matrice fournit une liste de nombres, et ainsi on peut créer à partir de deux matrices A et B un nouveau tableau de valeurs numériques dont les entrées sont les produits scalaires des lignes ou des colonnes de A avec les lignes ou les colonnes de B. Il s'est avéré pratique d'utiliser simplement les lignes de A et les colonnes de B, à condition que le nombre d'entrées dans chaque ligne de A corresponde au nombre d'entrées dans chaque colonne de B. En résumé :

Si A est une matrice n × m et B une matrice m × r , alors le produit matriciel AB est la matrice n × r dont la (i,j)ième entrée est le produit scalaire de la ième ligne de A avec la jième colonne de B. Nous avons :

$$(AB)ij = Ai1B1j + Ai2B2j +…+AimBmj$$

Par exemple, si $A = \begin{matrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{matrix}$ et $B = \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$,

alors AB est la matrice 2 × 2 :

$$AB = \begin{matrix} 2(1)+0(3)+(-1)(2) & 2(1)+0(3)+(-1)(1) \\ 1(1)+3(3)+5(2) & 1(1)+3(3)+5(1) \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 20 & 13 \end{matrix}$$

Dans cet exemple, le produit BA n'est pas défini.

Dans de nombreuses applications, on suppose que toutes les matrices sont des matrices carrées, c'est-à-dire qu'elles ont un nombre égal de lignes et de colonnes. Dans ce cadre, même si les produits AB et BA de deux matrices carrées A et B de même taille peuvent chacun être définis, ils sont susceptibles d'être inégaux. Ainsi le produit matriciel ne satisfait pas la PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE. La MATRICE D'IDENTITÉ est une matrice I avec la propriété que AI=IA=A pour toute matrice carrée A de taille fixe.

La transposée d'une matrice A, notée AT, est la matrice obtenue à partir de A en intervertissant ses lignes avec ses colonnes. Le produit ATB est la matrice dont la (i,j)ème entrée est le produit scalaire de la ième colonne de A avec la jème colonne de B. De même, le produit ABT a la (i,j)ème entrée le produit scalaire de la ième rangée de A avec la jième rangée de B, et ATB T a (i,j)ième entrée le produit scalaire de la ième colonne de A avec la jième rangée de B.
Ce dernier exemple est égal à la transposition de l'original = ATB BA. On a donc : (BA) ^{J} T produit

Si une TRANSFORMATION LINÉAIRE est représentée par une matrice A et une seconde par la matrice B, alors la COMPOSITION de ces deux transformations est représentée par une matrice égale au produit BA. (Ceci se lit à rebours : la transformation représentée par A est appliquée en premier et est suivie de la seconde transformation B.) C'est précisément le désir de faire valoir cette observation qui a d'abord conduit les mathématiciens à définir

le produit matriciel de la manière décrite ci-dessus.

Voir aussi DÉTERMINANT ; GROUPE LINÉAIRE GÉNÉRAL ; MATRICE INVERSE.

maximum/minimum Le point le plus élevé sur le graphique d'une fonction est appelé le point maximum du graphique, et la valeur de la fonction à ce point est appelée la valeur maximale de la fonction (ou son maximum global ou son maximum absolu). De même, le point minimum du graphique est le point auquel le graphique a sa valeur la plus basse, et la valeur minimale du graphique est la valeur de la fonction à ce point (également appelé minimum global ou minimum absolu). Il est possible qu'une fonction n'ait pas de valeur maximale ou pas de valeur minimale. Par exemple, la fonction y = x, définie sur tous les nombres réels, n'a ni maximum ni

valeur minimale, et la fonction $y = \frac{1}{2 1 + x}$, défini sur tous les nombres réels, n'a pas de valeur minimale. Le THÉORÈME DES VALEURS EXTRÊMES montre, d'autre part, que toute fonction continue définie sur un intervalle fermé adopte nécessairement à la fois une valeur maximale et une valeur minimale sur cet intervalle.

Un maximum local (également appelé maximum relatif) pour une fonction est un point sur le graphique d'une fonction qui est supérieur à tous ses points proches sur le graphique. De toute évidence, un maximum local n'a pas besoin d'être le point le plus élevé sur le graphique, bien que le point le plus élevé soit certainement considéré comme un maximum local. De même, un local

Machine Translated by Google

minimum (ou minimum relatif) pour un graphique est le emplacement d'une valeur de fonction plus petite que toutes à proximité valeurs de la fonction. Encore une fois, un minimum local n'a pas besoin d'être un minimum absolu, même si cela pourrait l'être.

Si la fonction en question est dérivable, alors les outils et techniques de CALCULUS permettent de localiser facilement les maxima et les minima locaux. C'est clair géométriquement, par exemple, que la pente de la tangente à un graphique est nulle à un maximum local ou minimale locale. Nous avons:

> Si la fonction f(x) a un maximum local ou minimum local en x = c, alors f′(c) = 0

La définition limite de la dérivée donne une idée précise preuve de cela. Si la valeur f(c) est un maximum local, pour exemple, alors, pour petit h, la valeur f(c + h) est inférieure à la valeur f(c). Par conséquent, si h tend vers la valeur zéro en parcourant les valeurs positives juste au-dessus de (fc zéro, alors le quotient est négatif. Ce h

$$\frac{h\ fc^{+}\ -\ )\ ()}{}$$

montre que la dérivée $F\mathrm{C}(\ )\ \lim\ _{h\to 0}\ \frac{fc\ h\ \bar{+}fc^{-}\ )\ ()}{(\ h}$

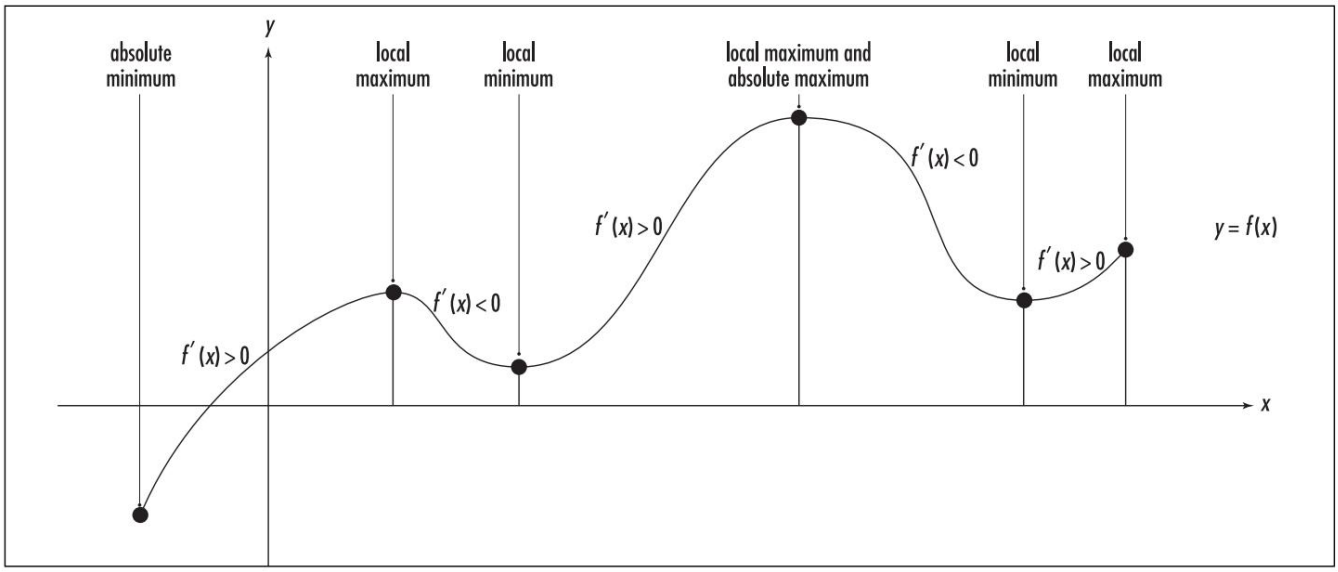
doit être ≤ 0. Par contre, si h tend vers zéro passant par des valeurs négatives, alors le quotient est positif, et f′(c) ≥ 0. Il faut alors que f′(c) = 0.

Toute valeur x = c pour laquelle f′(c) = 0 est appelée point critique (ou point stationnaire) de la fonction. UN l'étude des fonctions CROISSANTE/DÉCROISSANTE établit :

> Un point critique x = c est un maximum local pour la fonction f si et seulement si f(x) est croissante juste à gauche de c et décroissant juste jusqu'à droit de c. Par conséquent, x = c est un maximum local si et seulement si f′(c) = 0 et f′(x) > 0 juste à gauche de c, et f′(x) < 0 juste à sa droite.
>
> Un point critique x = c est un minimum local pour la fonction f si, et seulement si, f(x) décroît juste à gauche de c et augmente juste à droit de c. Par conséquent, x = c est un minimum local si et seulement si f′(c) = 0 et f′(x) < 0 juste à gauche de c, et f′(x) > 0 juste à sa droite.

Cette observation, appelée test de la dérivée première, permet un pour déterminer si oui ou non un point critique est un maximum local ou un minimum local. (Tout critique point auquel la dérivée change effectivement de signe est appelé un tournant.) Par exemple, considérons . Pour trouver la fonction $fx(\ ) = \frac{x}{x\ \ +\ 1}$ ses points critiques 2 il faut résoudre l'équation f′(x) = 0. Cela donne :

$$\text{effet}(\ ) = \frac{(x^{2}\ )+11\ 2\ \bar{-}\ \ xx\ (\ \ )}{(x^{2}\ )+1^{\ 2}} = \frac{1^{-}\ x^{2}}{(1_{\ })+x^{2\ \ 2}} = 0\ \text{, donnant } x = -1$$



Maxima et minima

Machine Translated by Google

et x = 1 comme points critiques. Pour une valeur juste à gauche de x = –1 (par exemple, x = –1,1), nous voyons que f ′(x) est négatif. Pour une valeur juste à droite de x = –1 (par exemple, x = –0,9), il est positif. Ainsi, la fonction a un minimum local en x = –1.

Une analyse similaire montre que x = 1 est un maximum local.

Une étude des fonctions CONCAVE UP/CONCAVE DOWN établit :

> À un maximum local, une fonction est concave vers le bas. Par conséquent, un maximum local pour une fonction f(x) peut être identifié comme un point x = c avec f′(c) = 0 et f″(c) < 0.
>
> Au minimum local, une fonction est concave vers le haut. Par conséquent, un minimum local pour une fonction f(x) peut être identifié comme un point x = c avec f′(c) = 0 et f″(c) > 0.

Cette observation s'appelle le test de la dérivée seconde.

Par exemple, considérez le défi de trouver deux nombres positifs dont la somme est 100 et dont le produit est aussi grand que possible. Si nous laissons x et y représenter deux nombres positifs variables, alors on nous demande de "maximiser" la fonction produit p = xy, étant donné que x + y = 100. La résolution de y et la substitution donnent : P = x(100 – x) = 100x – x ^{2}. Ceci exprime P en fonction de x seul. Un maximum pour cette fonction ne peut se produisent à un point critique. Résoudre $\frac{dP}{dx} = 0$ donne 100 – 2x = 0 ou x = 50. Pour classer ce point critique, notez que $\frac{d^2P}{dx^2} = -2 < 0$. Cela montre que la courbe est concave vers le bas. Par conséquent, le point x = 50, seul point critique, est un maximum (global). La valeur correspondante pour y est y = 100 – 50 = 50. La valeur maximale du produit est donc 50 × 50 = 2 500.

Voir aussi OPTIMISATION.

Mathématiques mayas La culture maya, basée dans la péninsule du Yucatán, en Amérique centrale, s'étendait sur la période de 250 CE à 900 CE, mais était basée sur une civilisation établie dans la région dès 2000 avant notre ère .
Les gens de cette époque avaient construit de grandes villes, remplies de constructions de tous types, y compris de grands réservoirs pour stocker l'eau de pluie, des systèmes d'irrigation sophistiqués et des champs surélevés pour l'agriculture. Les dirigeants étaient des prêtres et les pratiques religieuses étaient synchronisées avec les observations astronomiques

En 1511, avec une force de 11 navires et 508 soldats, L'explorateur espagnol Hernán Cortés a conquis les peuples du Yucatan. Il ne rencontra pratiquement aucune résistance. Trente ans plus tard, l'évêque Diego de Landa de l'Ordre franciscain a été envoyé dans le Nouveau Monde en tant que missionnaire, et il a fait de son mieux pour aider les peuples mayas et les protéger de leurs nouveaux maîtres espagnols. Au début, il a été horrifié par les pratiques religieuses des gens et les icônes inhabituelles qui apparaissaient dans leurs textes écrits, croyant que l'écriture était les mensonges du diable. Il ordonna que toutes les idoles mayas soient détruites et que tous les livres mayas soient brûlés, ce qui attrista considérablement la population locale. Peut-être par remords, Landa ressentit le besoin d'écrire en 1566 un texte, Relación de las cosas de Yucatán (À propos des choses du Yucatán), enregistrant l'écriture, les coutumes, les pratiques religieuses et l'histoire du peuple maya, ainsi que quelques tentatives à justifier ses actes. C'est à partir de ce travail, et de quatre restes de textes mayas réels sauvés du feu, que nous apprenons les mathématiques mayas. Une grande partie des mathématiques du peuple était motivée par les calculs des cycles planétaires et par le besoin de conserver un système de calendrier précis.

Venant d'un climat tropical, les Mayas savaient parfaitement que le corps humain est composé de 20 chiffres, et il n'est pas surprenant que ces personnes aient développé un système de comptage en base 20 (aujourd'hui appelé système vigésimal). Ainsi, au lieu de compter en groupes d'unités (1), de dizaines (10), de centaines (100) et de milliers (1 000), les personnes de cette culture comptaient en termes d'unités (1) et de vingt (20). Motivés par le nombre de jours dans l'année, les Mayas travaillaient ensuite par groupes de 360, puis par groupes de 20 × 360. Ainsi, par exemple, un nombre représenté par 2-12-5-17 dans le système maya représente le valeur:

$$17 \times 1 + 5 \times 20 + 12 \times 360 + 2 \times 20 \times 360 = 18\,837$$

(Le système n'est donc pas strictement vigésimal.)

Les nombres étaient représentés par des points et des barres, une barre indiquant cinq unités. Ainsi, un diagramme représentant un groupe de deux barres et trois points représente le nombre 13. (Certains historiens suggèrent que chaque point représente le bout d'un doigt et la barre horizontale une main tendue.)
Les Mayas utilisaient la notation positionnelle pour représenter les grands nombres, y compris un symbole pour zéro, l'image d'un poing fermé, ou peut-être une coquille de conque, pour représenter aucun creusement d'une certaine puissance de 20 ou 360.

Les Mayas avaient deux systèmes de calendrier. Le Tzolkin, le calendrier rituel, contenait 13 mois, un pour chaque dieu du monde supérieur, avec 20 jours par mois. Ainsi

Machine Translated by Google

le Tzolkin a suivi une année de 260 jours (qui se trouve être le nombre de jours entre les deux jours de l'année au cours desquels le Soleil est directement au-dessus de la péninsule du Yucatán). Le deuxième calendrier, le Haab, le calendrier agricole, était l'année habituelle de 365 jours, divisée en 18 mois de 20 jours, et un court mois de 5 jours appelé le Wayeb. Les deux calendriers coïncidaient tous les 18 980 jours (le multiple commun le plus bas de 260 et 365), c'est-à-dire tous les 52 ans, donnant une période qui constituait un « siècle » maya. Les Mayas étaient également pleinement conscients que la planète la plus visible dans les cieux, Vénus, revenait exactement à la même position tous les 584 jours, un nombre qui se divise par 2 × 18 980. Que Vénus revienne à sa même position précisément au bout d'exactement deux "siècles", c'est-à-dire tous les 104 ans, avait une signification religieuse profonde pour le peuple maya.

Il semble que les Mayas n'avaient pas de méthodes standard pour multiplier ou diviser de grands nombres, et ils semblaient n'avoir jamais développé le concept de fraction. Pourtant, malgré la nature lourde de leur système de notation, les Mayas ont effectué des calculs astronomiques d'une précision exceptionnelle. Par exemple, ils ont correctement calculé que la durée exacte d'une année était de 365,242 jours et que la durée du mois lunaire était de 29,5302 jours. (Ces résultats n'ont pas été présentés en termes de décimales, bien sûr. Les archives montrent, par exemple, que les Mayas ont calculé que 149 mois lunaires s'étendent sur exactement 4 400 jours.) Les Mayas ont fait leurs observations astronomiques en utilisant des outils pas plus sophistiqués qu'une paire de bâtons. attachés ensemble à angle droit pour observer les planètes.

moyenne Une moyenne de deux nombres a et b est un nombre m entre a et b qui, dans un certain sens, représente le « milieu » des deux nombres. La mesure la plus courante de la « moyenne » est la moyenne ou la moyenne arithmétique donnée par $m = \frac{a+b}{2}$. Il représente l'emplacement sur la ligne à mi-chemin entre les positions a et b. Alternativement, on pourrait considérer la moyenne géométrique donnée par $m = \sqrt{ab}$. Cela représente la longueur du côté d'un carré dont l'aire est la même que celle d'un rectangle a × b .

Au quatrième siècle avant notre ère, les membres de la dernière école pythagoricienne ont identifié 10 moyens, maintenant appelés les moyens néo-pythagoriciens. Par exemple, les deux premiers sont les moyennes arithmétiques et géométriques. Le troisième moyen, donné par $m = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, est appelée la moyenne harmonique, et le quatrième, $m = \frac{a^2+b^2}{a+b}$, est la moyenne contre-harmonique. = Tous les « moyens » ont la propriété que si les nombres a et b sont chacun multipliés par k, alors m est également multiplié par k.

La notion de moyenne peut être étendue à celle de plus de deux nombres. Soit n nombres a1 ,a2 ,…,an nous fixons:

moyenne arithmétique : $m = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

Moyenne géométrique: $m = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

moyenne harmonique: $m = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

compteur - moyenne harmonique : $m = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$

Par exemple, la moyenne arithmétique de 3, 8 et 9 est $\sqrt{20/3} = 6\ 2/3$, et leur moyenne géométrique $\sqrt[3]{3 \cdot 8 \cdot 9} = 6$. It est un théorème d'algèbre qui, pour tout ensemble des nombres positifs a1 ,a2 ,…,an , la moyenne arithmétique est toujours supérieure ou égale à la moyenne géométrique :

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

C'est ce qu'on appelle l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques. (Pour le cas avec seulement deux nombres a et b, l' énoncé $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ est équivalent à l' énoncé manifestement vrai $(a-b)^2 \geq 0$.) En appliquant cette inégalité aux nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ l'inégalité harmonique-géométrique suit :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

En statistique, la moyenne arithmétique μ d'un ensemble d'observations a1 ,a2 ,…,an est appelée moyenne d'échantillon. Le

Machine Translated by Google

La VALEUR ATTENDUE d'une variable aléatoire est aussi appelée c'est méchant.

Voir aussi VALEUR MOYENNE ; STATISTIQUES : DESCRIPTIVES.

valeur moyenne Soit f une FONCTION CONTINUE sur un intervalle fermé [a,b]. La hauteur d'un rectangle dont largeur est (b – a) et dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe au-dessus de l'intervalle [a,b] est appelé le valeur moyenne de la fonction. La valeur moyenne de f est noté f et est donné par :

$$\bar{F} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)\,dx$$

En gros, si l'on "lisse" les hausses et chutes du graphe de la fonction, sans changer la zone sous le graphique, puis la hauteur de la résultante la courbe de niveau est F.

Si la fonction f représente, par exemple, la température de l'air au bureau de poste général d'Adélaïde, en Australie, enregistrée sur une période de 24 heures, f représente le puis la température moyenne au centre-ville d'Adélaïde ce jour-là.

théorème de la valeur moyenne (théorème de la valeur moyenne de Lagrange) mathématicien français JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813) fut le premier à déclarer ce qui suit important théorème de CALCUL, aujourd'hui appelé le théorème de la valeur moyenne :

> Si une courbe est continue sur un intervalle fermé [a,b], et a une tangente à chaque point entre a et b, alors il y a au moins un point dans cette intervalle auquel la tangente est parallèle à la segment de droite qui relie les extrémités (a,f(a)) et (b,f(b)).

Dans un langage mathématique plus rigoureux, ce théorème s'écrit :

> Si une fonction f (x) est continue dans le fermé intervalle [a,b], et dérivable dans l'ouvert intervalle (a,b), alors il existe au moins un valeur c entre a et b telle que
>
> $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Notez que la quantité est la PENTE (montée dépassement) du segment de droite reliant les deux extrémités. Il est également égal à la pente moyenne de la courbe sur tout l'intervalle [a,b]. (Pour voir cela, notez qu'à en tout point x, la quantité f′(x) est la pente de la tangente en ce point. Sommation, c'est-à-dire intégration, sur toutes les valeurs et en divisant par la longueur de l'intervalle considéré donne la moyenne pente de la courbe : $\frac{\int_a^b f'(x)\,dx}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.) Ainsi, le le théorème de la valeur moyenne stipule que pour tout différentiable fonction définie sur un intervalle [a,b], il existe une endroit où la pente réelle de la courbe est égale à la pente moyenne du graphique.

Le théorème de la valeur moyenne a quatre conséquences importantes séquences :

1. Si la dérivée d'une fonction est toujours positive, alors la fonction est croissante.

Cela signifie que si a et b sont deux nombres avec a < b, alors on a f(a) < f(b). Puisque, pour un certain nombre c, on ont $F'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et les quantités b – a et f′(c) sont toutes les deux positives, il faut que f(b) – f(a) soit également positif.

2. Si la dérivée d'une fonction est toujours négative, alors la fonction est décroissante.

Ceci est établi d'une manière similaire à ce qui précède.

3. Si la dérivée d'une fonction est toujours nulle, alors la fonction a une valeur constante.

Il faut montrer que pour deux valeurs quelconques a et b on avoir que f(a) est égal à f(b). Cela découle du théorème de la valeur moyenne, puisque pour une certaine valeur c nous avons :

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a) = 0\cdot(b-a) = 0$$

4. Si deux fonctions f(x) et g(x) ont la même dérivée, alors les deux fonctions diffèrent d'une constante, c'est-à-dire f(x) = g(x)+C pour un certain nombre C.

Soit h(x) = f(x) – g(x). Alors la dérivée de h(x) est toujours nul, et donc par le troisième résultat h(x) = C pour une valeur constante C.

Machine Translated by Google

Le théorème de la valeur moyenne lui-même peut être établi comme une conséquence du THÉORÈME DE ROLLE . On fait cela en écrivant l'équation de la droite qui relie les deux extrémités (a,f(a)) et (b,f(b)) de la fonction f.
Il est donné par :

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(Mettez x = a et x = b pour voir que c'est correct.) Considérez maintenant la fonction :

$$h(k) = f(x) - g(x)$$

C'est une fonction différentiable avec h(a) = h(b) = 0, et donc par le théorème de Rolle, il y a au moins une valeur c entre a et b pour laquelle h′(c) = f′(c) – g ′(c) = 0. Cela donne l'équation affirmée dans l'énoncé du théorème de la valeur moyenne.

Le théorème de la valeur moyenne peut être considéré comme une déclaration sur la nature d'une courbe différentiable coupant une ligne droite. Le mathématicien français AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) a ensuite généralisé le théorème à un sur deux courbes différentiables se coupant en deux points. Le résultat est connu sous le nom de théorème de la valeur moyenne étendu ou théorème de la valeur moyenne de Cauchy.

> Si deux fonctions f et g ont les mêmes valeurs en x = a et x = b, sont continues dans l'intervalle fermé [a,b], dérivables dans l'intervalle ouvert (a,b), et de plus si g(a) ≠ g(b) et g′(x) n'est jamais nul dans (a,b), alors il existe au moins une valeur c entre a et b pour laquelle :

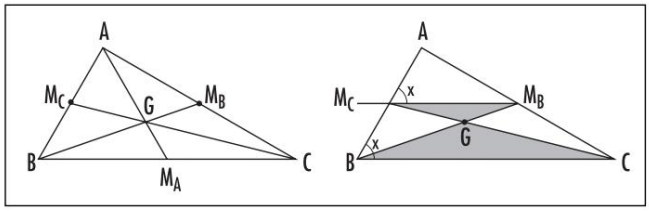
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Le théorème se prouve de manière similaire en utilisant la fonction de support :

$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)]$$

Voir aussi DÉRIVÉ ; AUGMENTATION/DIMINUTION.

médiane Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.



Les médianes sont concurrentes

médiane d'un triangle Un segment de droite reliant le POINT MILIEU d'un côté d'un triangle au sommet opposé à ce côté est appelé médiane du triangle. Tout triangle a trois médianes. Il est considéré comme un résultat fondamental que les trois médianes d'un triangle se rencontrent toujours en un point commun (appelé le centroïde du triangle et généralement noté G.) Pour voir cela, considérons un triangle avec les sommets A, B et C et les points médians comme montré.

Première remarque :

> Toute ligne reliant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté du triangle.

Dans le diagramme ci-dessus, par le principe SAS, les triangles BAC et MCAMB sont similaires, avec un facteur d'échelle de deux, car ils partagent un angle commun en A et les deux côtés de chaque triangle correspondent dans un rapport de 2 à 1. Par conséquent les angles étiquetés x sont égaux, donnant deux angles alternés égaux, d'où il résulte de la réciproque du POSTULAT PARALLÈLE que les droites MCMB et BC sont parallèles.

Nous avons maintenant que les angles MBMCC et MCCB sont égaux, de même que les angles MCMBB et MBBC. Par conséquent, selon le principe AAA, les deux triangles grisés sont similaires, toujours dans un rapport de 2 pour 1. En particulier, les segments de ligne BG et GMB sont dans ce rapport, ainsi que les segments de ligne CG et GMC. Celle-ci établit :

> Le point d'intersection de deux médianes quelconques d'un triangle se trouve aux deux tiers du chemin le long de chaque médiane.

Par conséquent, la médiane AMA interceptera également la médiane BMB aux deux tiers de la distance le long de la longueur de BMB, à savoir au même point G. Ainsi, les trois médianes sont effectivement CONCURRENTES en G.

Machine Translated by Google

En tant que variante de la FORMULE DE HERON , l'aire d'un triangle peut être exprimée uniquement en termes de longueurs des médianes du triangle. Nous avons:

$$4 \text{ zone} = -\sqrt{(ss\ ms\ ms)(ABC)(\ )(\ )}$$

où mA, mB et mC sont les longueurs des trois médianes et $s = \frac{mA + mB + mC}{2}$.

Voir aussi AAA/AAS/ASA/SAS/SSS ; THÉO REM D'APOLLONIUS ; LIGNE EULER.

Ménélas d'Alexandrie (vers 70-130) Géométrie grecque, Trigonométrie Né à Alexandrie, en Égypte, le mathématicien Ménélas est connu pour son seul ouvrage survivant Sphaerica (Sphères), qui contient les premiers résultats connus sur la GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE et la trigonométrie sphérique. En convertissant des résultats sphériques en résultats planaires, Ménélas a également établi un certain nombre de théorèmes importants sur la géométrie planaire, dont le célèbre résultat qui porte désormais son nom.

On sait extrêmement peu de choses sur la vie de Ménélas. Bien qu'il ait été cité à travers l'histoire comme natif d'Alexandrie, on sait que Ménélas a passé une partie de sa vie à Rome. Par exemple, les archives de l'année 98 énumèrent un certain nombre d'observations astronomiques faites par Ménélas depuis cette ville à cette époque.

Les travaux de Ménélas en géométrie sphérique ont probablement été inspirés par ses travaux en astronomie. Le premier des trois volumes de Sphaerica définit les principes de base du sujet et comprend la définition très précise d'un triangle sphérique comme celui formé par trois arcs de grands cercles, chacun inférieur à un demi-cercle. Suivant le même niveau de rigueur que celui établi par le géomètre EUCLIDE, Ménélas a développé la théorie de cette géométrie de manière très approfondie avec un raisonnement logique précis. (Curieusement, Ménélas a évité toute utilisation de PREUVE PAR CONTRADICTION, une approche qu'Euclide a librement utilisée.) Dans le volume II de Sphaerica, Ménélas développa des applications à l'astronomie, et dans le volume III explora la trigonométrie sphérique et ses applications à la géométrie plane.

Les érudits arabes de la période 850-1500 CE ont traduit l'œuvre de Ménélas et ont écrit de nombreux commentaires sur la pièce. Les mêmes érudits ont également fait référence à d'autres textes de Ménélas, notamment des pièces intitulées Accords en cercle et Éléments de géométrie, ainsi qu'un texte complet sur le thème de la mécanique. Malheureusement, aucune copie de ces œuvres ne subsiste aujourd'hui.

Voir aussi MATHÉMATIQUES ARABE ; DE MÉNÉLAS THÉORÈME.

Théorème de Ménélas Supposons qu'une TRANSVERSALE coupe les trois côtés du triangle A1A2A3 aux points P1 ,P2 ,et P3 comme indiqué :

Alors, si AiPj représente la longueur de la droite seg on a : reliant le point Ai au point Pj , ment

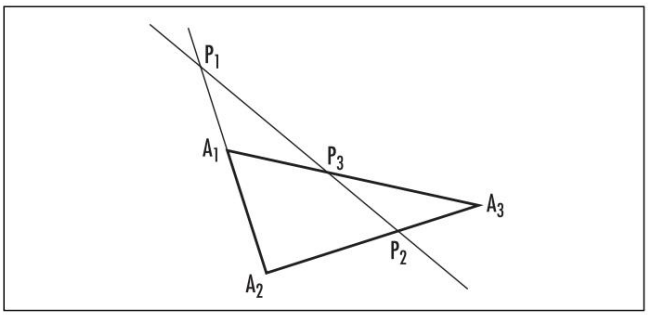
$$\frac{PA_1}{PA_2}\frac{1}{1}\,2\frac{PA_2}{PA_3}\frac{2}{2}=1\frac{PA_3}{PA_1}\frac{3}{3}$$

Ce résultat a été observé pour la première fois par le mathématicien grec MENELAS D' ALEXANDRIE (vers 70-130 CE). Il l'a prouvé en traçant des lignes de chaque sommet Ai à la transversale pour donner cinq triangles rectangles. L'examen des angles à l'intérieur de ces triangles montre qu'un certain nombre de ces triangles sont similaires. La poursuite de toutes les paires de côtés qui sont par conséquent dans le même rapport établit finalement le résultat.

La réciproque du théorème de Ménélas est également vraie :

> Si P1 , P2 et P3 sont trois points sur les côtés d'un triangle A1A2A3 , avec P1 sur le côté A1A2 (éventuellement étendu), P2 sur le côté A2A3 (éventuellement étendu) et P3 sur le côté A3A1 (éventuellement étendu), satisfaisant
>
> $$\frac{PA_1}{PA_2}\frac{1}{1}\,2\frac{PA_2}{PA_3}\frac{2}{2}=1\frac{PA_3}{PA_1}\frac{3}{3}$$
>
> alors les trois points sont COLLINEAIRES.

Voir aussi AAA/AAS/ASA/SAS/SSS ; THÉORÈME DE CEVA .



Théorème de Ménélas

Machine Translated by Google

L'expansion de Mercator (série de Mercator) Le TAY
LOR SERIES expansion de la LOGARITHMIQUE naturelle
FONCTION est donnée comme suit :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Elle est valable pour $-1 < x \leq 1$. Cette série est parfois appelée développement de Mercator en l'honneur du mathématicien danois Nicolaus Mercator (vers 1619–1687) qui, en 1668, fut le premier à publier ce développement.

Le développement de Mercator a la curieuse propriété de prouver apparemment l'énoncé absurde selon lequel 1 est égal à 2. En fixant x = 1, on obtient :

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \ln 2 - 1 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Ce paradoxe a alerté les mathématiciens sur le fait qu'il n'est pas toujours permis de réarranger les termes d'une série. En 1837, PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1815-1859) a prouvé qu'une telle opération est valide si la série est absolument convergente. Malheureusement, la SÉRIE HARMONIQUE alternée exprimée ci-dessus ne l'est pas.

Voir aussi CONVERGENCE ABSOLUE.

Projection de Mercator Il n'est pas possible de faire une carte du monde à plat sans incorporer une sorte de distorsion. Au milieu des années 1600, le cartographe flamand Gerhard Kremer (1512-1594), connu sous le nom de Mercator, a conçu une méthode pour cartographier des points de la surface de la Terre sur une surface plane de telle sorte que toutes les directions de la boussole, au moins, soient conservé. Bien que les distances et les superficies soient déformées sous cette PROJECTION, les formes générales des petites régions, telles que les petits pays et les petites masses d'eau, sont raisonnablement bien préservées.

La construction mathématique de la projection de Mercator est obtenue en imaginant un cylindre placé autour de la sphère de la Terre tangent à l'équateur et parallèle à l'axe de la Terre. Un point sur la surface de la Terre est mappé à un point sur ce cylindre en traçant une ligne à partir du centre de la Terre et à travers ce point jusqu'à ce qu'il coupe le cylindre. (Les pôles Nord et Sud ne sont pas cartographiés.) Le cylindre est ensuite coupé et déroulé pour former une surface plane.

Dans la projection de Mercator, les lignes de longitude sont à la même distance, mais les lignes de latitude s'éloignent davantage de l'équateur. Mercator a ajusté l'espacement vertical des lignes de latitude sur sa carte plane pour compenser cette distorsion et faire en sorte que les formes des pays ressemblent davantage à leur vraie forme telle qu'elle apparaît sur le globe.

La projection de Mercator peut être donnée par des formules mathématiques. Selon sa cartographie, un point sur la surface de la Terre à un angle de latitude α et à un angle de longitude β a des COORDONNÉES CARTÉSIENNES x et y sur le plan donné par :

$$\begin{aligned} x &= k\alpha \\ y &= k \log \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

pour une constante k. Les angles entre les lignes sur la surface de la sphère (loin des pôles) sont préservés sous la projection de Mercator et donc cette cartographie est un exemple de CARTOGRAPHIE CONFORME.

Voir aussi PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE.

Mersenne, Marin (1588–1648) Nombre français the ory, Théologie Né le 8 septembre 1588 à Oize, France, Marin Mersenne est connu pour la liste des nombres PRIME qui portent son nom. Ces nombres premiers sont intimement liés à la formulation même du PER
NUMÉROS DE FECT.

Mersenne a étudié la théologie à l'adolescence et à 23 ans a rejoint les Minimes, un ordre religieux voué à la prière et à l'érudition. Tout au long de sa vie, Mersenne s'est intéressé à la THÉORIE DES NOMBRES, à la mécanique et à l'acoustique. Il défend l'œuvre de GALILEO GALILEI (1564-1642) et de RENÉ DESCARTES (1596-1650) contre la critique théologique et se charge de traduire en français de nombreux textes de Galilée. Les historiens croient

Machine Translated by Google

que c'est grâce aux efforts de Mersenne que Galilée le travail est devenu connu en dehors de l'Italie.

Mersenne a joué un rôle important au XVIIe siècle science, non seulement pour sa contribution à la théorie des nombres et la mécanique, mais aussi pour son service en tant que canal de communication entre mathématiciens : érudits écriraient à Mersenne dans le seul but de faire diffuser leurs idées. Lettres de plus de 78 correspondants différents, dont PIERRE DE FERMAT (1601-1665), Galilée et Christiaan Huygens ont été découverts dans la cellule de son monastère après sa mort.

En 1644, Mersenne publie Cogitata physico-mathe matica (Pensées physico-mathématiques), son célèbre texte sur la théorie des nombres. Mersenne était particulièrement intéressé à trouver une formule qui engendrerait tous les nombres premiers Nombres. Bien qu'il ait échoué dans cet effort, son travail n'a l'amènent à considérer les nombres premiers p pour lesquels 2p – 1 est aussi premier, maintenant appelé les PRIME de MERSENNE. Ces nombres se sont avérés d'une importance significative dans plusieurs branches différentes de la théorie des nombres.

Mersenne est décédé à Paris, en France, le 1er septembre 1648.

Mersenne premier Un nombre PREMIER de la forme 2n – 1 est appelé un nombre premier de Mersenne. Par exemple, 23 – 1 = 7 et 27 – 1 = 127 et sont des nombres premiers de Mersenne. Ces nombres ont été étudiés par le philosophe et mathématicien français MARIN MERSENNE (1588-1648) dans son tente de trouver une formule qui générerait tous nombres premiers. Bien qu'il ait échoué dans cette poursuite, les nombres premiers de cette forme sont aujourd'hui nommés en son honneur.

Notez que si n se factorise en n = ab, alors la quantité 2n – 1 factorise également : 2ab –1 = (2a –1)(2a(b–1) + 2a(b–2) +.....+ 2a + 1). Ainsi, pour que 2n –1 soit premier, il doit être le cas où n est premier. Cependant, tous les nombres premiers n conduit à un nombre premier de Mersenne. Par exemple, bien que n = 11 est premier, 211 – 1 = 2047 = 23 × 89 ne l'est pas. La première quelques nombres premiers de Mersenne sont 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, … correspondant au nombre premier valeurs n égales à 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31,…

Seuls 40 nombres premiers de Mersenne sont actuellement connus, mais malgré leur rareté, ils restent une source fructueuse de grands nombres premiers. Presque certainement, lorsqu'un journal proclame qu'un nouveau "plus grand" nombre premier a été trouvé, il s'avère être de la forme 2n – 1. Par exemple, le plus grand nombre premier connu en 2004 est le Mersenne premier avec n = 20 996 011. C'est un premier nombre de plus de 6 millions de chiffres. Les nombres premiers de Mersenne sont intimement lié aux nombres parfaits.

Voir aussi DIFFÉRENCE DE DEUX CUBES.

point médian Un point sur un segment de ligne divisant le longueur de ce segment en deux parties égales est appelée la milieu du segment. Si deux points d'un plan ont COORDONNEES CARTESIENNES P = (x1 , y1) et Q = (x2 , y2), puis le milieu M du segment reliant P à Q a des coordonnées $M = (\frac{x1+x2}{2}, \frac{y1+y2}{2})$. De même, pour deux points P = (x1 ,y1 ,z1) et Q = (x2 ,y2 ,z2) dans l'espace tridimensionnel, les coordonnées du milieu M du segment de droite qui les relie sont donnés par : $M = (\frac{x1+x2}{2}, \frac{y1+y2}{2}, \frac{z1+z2}{2})$.

Une droite passant par le milieu d'un segment de droite et La PERPENDICULAIRE à ce segment est appelée une bissectrice perpendiculaire. Une étude des points EQUIDISTANTS montre que les trois bissectrices perpendiculaires des trois côtés de tout triangle se rencontre en un seul point (appelé le centre circonscrit du triangle). Les trois MÉDIANE D'UN TRIAN GLE sont également CONCURRENTES.

Le théorème du milieu du cercle affirme que si l'on trace un cercle C dans le plan et sélectionne un point P n'importe où dans le plan, puis tous les points médians de la ligne les segments reliant P aux points du cercle forment un cercle de la moitié du rayon initial. Cela se voit valable comme suit :

Supposons que le cercle a un rayon r et est positionné sur l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes. Alors tout point Q du cercle a pour coordonnées Q = (r cosθ, r sinθ), pour une certaine valeur θ. Si les coordonnées de P sont données par P = (a,b), alors la coordonnée du milieu M est $M = (\frac{r\cos\theta + a}{2}, \frac{r\sin\theta + b}{2})$ parce que $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. Comme θ varie, cela décrit un cercle de rayon $\frac{r}{2}$ avec centre

Voir aussi BISECTOR ; THÉORÈMES DU CERCLE.

milieu de gamme Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

Möbius, August Ferdinand (1790–1868) allemand Topologie, Astronomie Né le 17 novembre 1790,

Machine Translated by Google

à Schulpforta, en Saxe (aujourd'hui l'Allemagne), on se souvient du savant August Ferdinand Möbius en mathématiques pour ses travaux en GÉOMÉTRIE et TOPOLOGIE, et ses conception de la surface unilatérale aujourd'hui appelée BANDE DE MOBIUS.

Möbius entre à l'Université de Leipzig en 1809 étudier le droit, mais a rapidement changé d'intérêt et s'est lancé dans une étude des mathématiques, de l'astronomie et de la physique. En 1813 il se rendit à Göttingen pour travailler avec CARL FRIED RICH GAUSS (1777–1855), le meilleur mathématicien de jour, et également directeur de l'observatoire astronomique de Göttingen. Möbius a terminé une thèse de doctorat en 1815 sur le thème de l'astronomie et peu de temps après a réalisé une thèse d'habilitation sur le thème des équations trigonométriques. En 1816, il est nommé président de astronomie et mécanique à l'Université de Leipzig. Il est resté à Leipzig le reste de sa vie.

Möbius a publié un ouvrage influent, Der barycen trische Calcül (Le calcul des barycentres), sur l'analyse géométrie en 1827. Il y décrit un certain nombre d'avancées significatives et originales dans les domaines de la PROJECTION. GÉOMÉTRIE et GÉOMÉTRIE AFFINE. Il a également étudié la géométrie du plan des NOMBRES COMPLEXES, et a montré que toute fonction complexe de la forme :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec z un nombre complexe, et a, b, c et d des nombres réels vérifiant ad – bc ≠ 0, transforme les droites et cercles dans le plan complexe en de nouvelles lignes droites et cercles. Les fonctions complexes de la forme ci-dessus sont aujourd'hui appelées fonctions de Möbius.

En 1831, Möbius publia d'importants résultats dans la THÉORIE DES NOMBRES. Il est surtout connu dans ce domaine pour sa découverte de la formule d'inversion de Möbius, qui peut être décrit comme suit. Considérons une fonction μ définie sur l'ensemble des entiers positifs comme suit : μ(1) = 1 ; μ(p) = –1 si p est PRIME ; μ(n) = (–1)k si n admet k facteurs premiers, tous distincts ; et μ(n) = 0 si n a une factorisation première qui inclut les nombres premiers répétés. (Ainsi, par exemple, μ(70) = μ(2 · 5 · 7) = –1 et μ(20) = μ(2 · 2 · 5) = 0.) Si f est une fonction quelconque sur les entiers positifs, et, à partir de celle-ci, une nouvelle fonction F est défini comme $F(n) = \Sigma_{d|n} f(d)$, une somme sur tous les facteurs d de n, alors la formule d'inversion de Möbius stipule que l'on peut récupérer à partir de F la fonction originale f via la règle :

$$f(n) = \sum_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$$

Möbius a écrit à propos de la surface unilatérale qui porte son nom dans une pièce de 1858 découverte seulement après sa mort. Son intérêt pour l'objet était motivé par une question générale sur la géométrie des polyèdres qui avait capté son intérêt. Bien que Möbius n'ait pas été le premier pour décrire la surface unilatérale (le mathématicien allemand Johann Listing avait considéré l'objet comme un simple quelques années plus tôt), son analyse mathématique de la surface était profonde et significative.

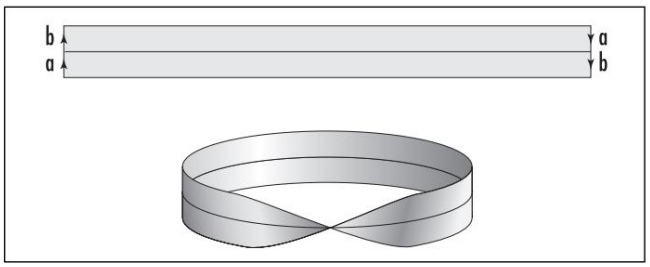
Möbius a également publié des ouvrages importants dans les domaines de l'astronomie, de la mécanique céleste et de la statique. Il mourut en Leipzig, Allemagne, le 26 septembre 1868. Son travail sur la théorie des nombres a eu un effet profond sur la nature de la recherche sur le sujet aujourd'hui. Par exemple, la notion de la fonction de Möbius a trouvé des applications naturelles pour paramètres abstraits généralisés en géométrie algébrique, combinatoire et ensembles partiellement ordonnés, fournissant ainsi nouvelles perspectives dans l'étude des nombres.

Bande de Möbius (bande de Möbius) La surface unilatérale obtenu en collant ensemble les deux extrémités d'une longue bande rectangulaire angulaire torsadée à 180° de manière à réaliser une demi-torsion dans l'objet résultant est appelé une bande de Möbius. Ce surface a la propriété que si l'on peint la surface sur tout le tour, on constate que les deux faces de la bande originale sont colorées. Cela montre que la surface est en fait à sens unique. Aussi, tracer son doigt le long de la bord d'une bande de Möbius couvre tous les points possibles sur le bord de l'objet, montrant ainsi, en plus, que la surface n'a qu'un bord.

Dans un certain sens, il est impossible de couper une bande de Möbius à moitié. Par exemple, couper l'objet le long d'un centre ligne parallèle au bord produit une seule ligne connectée objet à deux faces. La raison en est visible dans le schéma à la page suivante. (Notez que la moitié supérieure de la bande d'origine est reliée à la partie inférieure via les segments marqués a qui sont collés ensemble, et à nouveau pour les segments étiquetés b.) En général, si une bande de papier avec n demi-torsions est coupé en deux le long de la ligne centrale, un morceau en résultera si n est impair, et deux morceaux sont produits si n est pair. Aussi, si l'on tente de couper un bande de Möbius en tiers (le long de deux lignes parallèles qui diviser la bande en trois), puis deux anneaux imbriqués résultat, l'un deux fois plus long que l'autre. Le plus court de les deux est un autre groupe de Möbius.

Coller ensemble deux bandes de Möbius le long de leur bords produit une surface appelée BOUTEILLE KLEIN. Un

Machine Translated by Google



Bande de Moebius

peut également obtenir une bouteille de Klein en "pliant" une bande de Möbius en deux le long de la ligne centrale parallèle à son bord et en collant ensemble les points du bord qui se rejoignent. (Si l'on fait cela pour une bande de papier ordinaire ne contenant pas de demi-torsions, la surface résultante est un TORUS.) Malheureusement, ces constructions ne peuvent pas être entièrement achevées dans un espace tridimensionnel, et il faut utiliser la quatrième dimension pour obtenir suffisamment d'espace. maniabilité.

Dans un système de COORDONNEES CARTESIENNES , si l'on fait tourner un segment de ligne dans le plan yz autour de l' axe z, la surface de révolution résultante est une bande sans demi-torsions. Si ce segment de ligne devait tourner autour de son POINT MILIEU de 180° au cours de sa rotation autour de l' axe z, alors la surface résultante est une bande de Möbius. Pour plus de commodité, supposons que le segment de ligne est de longueur 2 et est initialement positionné dans le plan yz parallèle à l' axe z avec le milieu à la position de distance 2 le long de l' axe y . Chaque point du segment de droite est déterminé par un paramètre v, compris entre –1 et 1, avec v = 0 correspondant au milieu du segment. Supposons que lorsque le segment a tourné d'un angle θ autour de l' axe z, le

segment a tourné d'un angle $\frac{\theta}{2}$ autour de son milieu.

Ensuite, une analyse minutieuse des positions des points le long de ce segment lors de leur rotation autour de l' axe z montre que les ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES de la bande de Möbius résultante sont données par :

$$x = -2 \; v \text{ péché} \frac{\theta}{2} \text{ péché}(\theta)$$

$$y = -v2 \text{ péché} \frac{\theta}{2} \text{ parce que}(\theta)$$

$$z = v \cos \frac{\theta}{2}$$

Les mathématiciens ont montré que, pour toute carte de régions dessinée sur une bande de Möbius, au plus six couleurs serait jamais nécessaire pour peindre le dessin afin que deux régions partageant une frontière ne soient pas peintes de la même couleur.

La bande de Möbius a été découverte indépendamment par le mathématicien allemand Johann Listing (1808–88) et le savant allemand AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790–1868). La nature unilatérale de la bande a ensuite été exploitée par la société BF Goodrich dans sa conception de bandes transporteuses de type Möbius. En répartissant "l'usure" des deux côtés d'une bande, ces courroies ont duré deux fois plus longtemps que les courroies conventionnelles.

Voir aussi DIMENSIONS ; THÉORÈME DES QUATRE COULEURS ; SOLIDE DE RÉVOLUTION.

mode Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

arithmétique modulaire Les chiffres sur le cadran d'une horloge fournissent un modèle pour un système mathématique inhabituel appelé "clock math" ou "arithmetic mod 12".
On pense comme suit : s'il est actuellement 3h00, alors 8 heures plus tard il sera 11h00. Nous écrivons 3 + 8 = 11, en ne notant rien d'inhabituel ici. Cependant, attendre 6 heures à partir de 10h00, disons, donne l'équation 10 + 6 = 4, car le temps à la fin de cette attente sera de 4h00. Suivant cette nouvelle interprétation de l'addition, le calcul de l'horloge donne, par exemple, 4 + 11 = 3, 8 + 2 = 10 et 7 + 7 = 2.

Il est commode d'appeler le numéro 12 "zéro".

(Après tout, en calcul d'horloge, ajouter 12 heures à n'importe quelle heure ne change pas l'heure enregistrée sur l'horloge et n'a donc aucun effet dans ce système.) Le nombre 13 est considéré comme identique à 1, (la 13ème heure sur une horloge se trouve à la même position que la première heure), le nombre 14 est 2, et ainsi de suite. En général, les mathématiques de l'horloge remplacent tout nombre par son excès sur un multiple de 12. Par exemple, 26 est deux de plus qu'un multiple de 12, et donc 26 équivaut à 2. Nous écrivons 26 ≡ 2 (mod 12). De même, 29 ≡ 5 (mod 12), 43 ≡ 7 (mod 12) et 72 ≡ 0 (mod 12). Le nombre –2 est 10 de plus qu'un multiple de 12 et donc –2 ≡ 10 (mod 12). Le symbole ≡ est appelé

CONGRUENCE.

On peut effectuer une multiplication en calcul d'horloge. Nous avons, par exemple, que 3 × 7, normalement 21, est égal à 9 en calcul d'horloge : 3 × 7 = 9. (Cela peut également être réalisé en termes d'addition répétée : 3 × 7 = 7 + 7 + 7 = 2 + 7 = 9.) De la même manière, 2 × 4 = 8, 4 × 5 = 8 et 6 × 6 = 0 en calcul d'horloge. Le tableau suivant montre tous les produits de ce système.

Machine Translated by Google

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Remarquez que 2 × 2 = 4, et il convient donc d'écrire $\sqrt{4}$ = 2. Nous avons aussi que $\sqrt{4}$ est égal à 4, 8 et 10, puisque 4 × 4 = 4, 8 × 8 = 4, et 10 × 10 = 4 en calcul d'horloge. De la même manière, $\sqrt{1}$ est égal à 1, 5, 7 ou 11, et $\sqrt{9}$ est égal à 3 ou 9. Il n'y a pas de nombre équivalent à $\sqrt{2}$, par exemple, dans ce système.

Il est possible de donner une interprétation de certaines fractions en mathématiques de l'horloge. Considérez 4/5 par exemple. En arithmétique ordinaire, cette fraction est un nombre x tel que 5 × x = 4. En regardant la cinquième ligne du tableau ci-dessus, on voit que 5 × 8 = 4, et il convient donc d'interpréter la fraction 4/ 5 comme le nombre 8 en calcul d'horloge. De la même manière, 1/5 = 5, 3/7 = 9 et 2/7 = 2. Notez cependant qu'il n'est pas possible de donner une interprétation à la fraction 1/6, par exemple, puisque le nombre 1 n'apparaît nulle part dans la sixième ligne du tableau. (Il n'y a pas de nombre x tel que 6 × x = 1.) Le fait que toutes les fractions ne soient pas représentées dans les mathématiques de l'horloge est considéré comme une déficience du système.

Calcul généralisé de l'horloge : arithmétique modulaire On peut imaginer une horloge avec un nombre d'heures différent représenté sur son cadran. Par exemple, en mathématiques à 5 heures, seules cinq heures sont représentées, 0, 1, 2, 3 et 4 (encore une fois, il convient de considérer la cinquième heure comme la même que l'heure zéro), et tous les autres nombres sont remplacés par leur excès sur un multiple de 5. Ainsi, par exemple, on a 6 ≡ 1 (mod 5) et 32 ≡ 2 (mod 5). Le tableau des produits pour l'arithmétique mod-5 apparaît comme suit. Notez que chaque chiffre apparaît dans chaque ligne (non nulle) du tableau.

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

En général, dans l'arithmétique modulaire de base N , chaque nombre est remplacé par son excès sur un multiple de N.

Si N est un NOMBRE COMPOSITE, N est égal à a × b disons, alors l'entrée dans la ième ligne et la bième colonne de la table des produits est zéro (par exemple, 3 × 4 est zéro en calcul 12-clock). Par conséquent, le nombre zéro apparaît plus d'une fois dans la énième ligne, ce qui ne laisse pas suffisamment d'espace pour que tous les autres chiffres apparaissent dans cette ligne. D'autre part, si N est PRIME, alors chaque ligne non nulle de la table des produits contient en effet tous les chiffres, comme le montre la table des produits pour les mathématiques à 5 horloges. (Pour voir pourquoi c'est le cas, notez que pour tout nombre a inférieur au premier N est RELATIVEMENT PREMIER à N, et donc, par l' ALGORITHME EUCLIDIEN, il existe des entiers x et y tels que ax + yN = 1. Cela montre que ax vaut 1 de plus qu'un multiple de N, et donc ax ≡ 1(mod N). Par conséquent, le nombre 1 apparaît dans la ième ligne, xième colonne, du tableau des produits. Il en va de même pour le nombre 2, puisque a(2x) = 2ax ≡ 2 (mod N), le nombre 3, a(3x) = 3ax ≡ 3 (mod N), et ainsi de suite.) On a :

> Si N est un nombre premier, tous les chiffres apparaissent dans chaque ligne non nulle de la table des produits pour l'arithmétique modulo N.

En particulier, pour tout nombre non nul a en arithmétique mod-N , le nombre 1 apparaît dans la ième ligne de la table des produits. Il existe donc un nombre x tel que a × x = 1. La fraction $\frac{1}{a}$ a donc une interprétation valable dans ce système. Cet argument s'applique à toutes les fractions que l'on peut souhaiter considérer. Nous avons:

> Si N est un nombre premier, alors toutes les fractions existent en arithmétique mod-N.

Cela classe complètement tous les systèmes arithmétiques modulaires qui possèdent des fractions.

Machine Translated by Google

Petit théorème de Fermat Soit p un nombre premier. Ensuite, pour chaque nombre non nul a inférieur à p, tous les chiffres de zéro à p – 1 apparaissent dans la ligne ath du tableau des produits pour l'arithmétique mod-p. Ignorant le multiple zéro de a, ceci affirme que tous les multiples de a, à savoir, a × 1, a × 2, a × (p – 1), correspondent, dans un certain …, ordre, à la liste des chiffres 1, 2, … , p – 1. Par conséquent, le produit des nombres de chaque liste doit être le même :

$$a \times 1 \times a \times 2 \times \ldots \times a \times (p-1) = 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1)$$

La réécriture donne :

$$a^{p-1} \times 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1) = 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1)$$

Multiplier par les fractions 2 (qui existent en $1-$, $\frac{1}{3}$, jusqu'à $\frac{1}{p-1}$ mathématiques prime-clock) donne le célèbre résultat découvert pour la première fois par l'avocat français et mathématicien amateur PIERRE DE FERMAT (1601-1665):

> Pour tout nombre premier p, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ pour toutes les valeurs non nulles a < p.

L'application de cette observation à la valeur spécifique a = 2 fournit une méthode utile pour tester la primalité des nombres : si p est premier, alors $2^{p-1} - 1$ est divisible par p. Sinon, alors le nombre p n'est pas premier. Malheureusement, certains nombres réussissent le test sans être premiers. Par exemple, $2^{340} - 1$ est divisible par 341, même si 341 est composé. (Nous avons 341 = 11 × 31.) Les nombres composés de ce type sont appelés pseudo-premiers.

Voir aussi CONGRUENCE.

module (pluriel, modules) La VALEUR ABSOLUE d'une quantité, sans tenir compte de son signe ou de sa direction, est parfois appelée le module de la quantité. Par exemple, les nombres –3 et 3, bien que de parité opposée, ont le même module de 3. Le module d'un VECTEUR est sa longueur, et le module d'un NOMBRE COMPLEXE est la longueur du vecteur qui représente ce nombre complexe. Plus précisément, si z = a + ib est un nombre complexe, alors son module, noté |z|, est le nombre réel non négatif $\sqrt{a^2 + b^2}$. Si le nombre complexe s'écrit sous forme polaire, $z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$ alors son module est r.

Dans l'étude des LOGARITHMES, le nombre par lequel les logarithmes d'une base sont multipliés pour donner loga rythmes d'une base différente s'appelle le module. Par exemple, l'équation :

$$\log_a x \times \log_b a = \log_b x$$

montre que la multiplication par le module logb a convertit les logarithmes de base a en ceux de base b. (Pour voir pourquoi cela fonctionne, notez que si $y = \log_a x$, alors $a^y = x$. Par conséquent, $\log_b(a^y) = \log_b x$, ce qui donne $y \times \log_b a = \log_b x$.) En particulier, la multiplication par le nombre $\log_{10} e \approx 0{,}434294$ convertit les logarithmes naturels en logarithmes communs.

En ARITHMÉTIQUE MODULAIRE, le nombre par lequel les quantités sont divisées s'appelle le module du système. Par exemple, en "calculs d'horloge", le module du système est 12.

monôme Toute expression algébrique composée d'un seul terme, telle que $5x^3y^2$, s'appelle un monôme.

Voir aussi BINÔME ; POLYNÔME; TRINÔME.

Méthode de Monte Carlo Lancée par JOHN VON NEU MANN (1903-1957) et le mathématicien polonais Stanislav Ulam, la méthode de Monto Carlo est une méthode probabiliste simple qui est parfois employée par les mathématiciens appliqués pour analyser des processus trop compliqués à analyser autrement. Nommée d'après le célèbre casino de jeu, la méthode de Monte Carlo utilise simplement la LOI DES GRANDS NOMBRES pour estimer la probabilité qu'un événement souhaité se produise. Par exemple, pour estimer la probabilité que cinq lettres choisies au hasard dans l'alphabet épellent un mot en anglais, on pourrait simplement effectuer l'expérience un grand nombre de fois (c'est-à-dire qu'un ordinateur sélectionne cinq lettres au hasard 1 000 fois , disons) et compter la proportion de fois qu'un mot anglais est obtenu. Cette proportion donne une estimation de la probabilité recherchée. De nombreux casinos utilisent cette technique pour déterminer les probabilités de paiement de bon nombre de leurs jeux compliqués.

La méthode de Monte Carlo est également utilisée pour estimer l'aire d'une figure plane au contour irrégulier. Par exemple, pour estimer la surface d'un déversement de pétrole au-dessus de l'océan, les scientifiques prennent une photographie aérienne de l'ensemble du déversement, en notant les dimensions couvertes par la photographie, disons un rectangle de 4 km sur 5 km. La photographie est ensuite numérisée et introduite dans un ordinateur, qui est programmé pour sélectionner, au hasard, un grand nombre de points

Machine Translated by Google

sur la photo, disons, 10 000. L'ordinateur compte alors le nombre r de ces points qui ont touché la marée noire

montré sur la photographie, ce qui donne une proportion $\frac{r}{\text{de } 10}$ 000 qui se rapproche bien de la fraction de la superficie totale couverte par le pétrole. Par exemple, si r = 7 568 points atterrissent dans des emplacements correspondant au déversement, alors la zone de

le déversement total est très proche $\frac{7\ 568}{\text{de } 10}$ × 20 = 15,1 km2 .

000. Plus le nombre de points sélectionnés est élevé, plus l'estimation est précise.

De la même manière, on peut estimer les valeurs d' INTEGRES définies compliquées, telles que $\int \sin(x))dx$. Par $\int_3^7 \cos 2\,(x^2 +$ exemple, sélectionnez un grand nombre de points au hasard dans une boîte qui contient la courbe en question et comptez la proportion d'entre eux qui tombe en dessous de la courbe donnée.

Voir aussi PROBLÈME D'AIGUILLE DE BUFFON ; PROBABILITÉ.

Problème de Monty Hall Nommé d'après l'animateur d'un jeu télévisé américain populaire Let's Make a Deal!, le problème de Monty Hall est un casse-tête classique souvent utilisé pour tester les initiés dans le domaine de la théorie des PROBABILITÉS . Cela se passe comme suit :

> Dans un jeu télévisé, trois portes fermées se dressent devant vous. L'hôte vous informe qu'un prix en argent se trouve derrière l'une des portes, et rien derrière les deux autres. Vous sélectionnez une porte, mais avant de l'ouvrir, l'hôte ouvre rapidement l'une des deux portes restantes pour vous montrer que le prix n'est pas là. Il vous donne maintenant la possibilité de changer d'avis et d'ouvrir à la place la troisième porte restante. La question est : que devez-vous faire ? Devriez-vous conserver votre choix initial de porte ou passer à l'autre option ? Y a-t-il un avantage à changer ?

La première réaction typique à ce casse-tête est qu'il n'y a aucun avantage à changer. Puisqu'il reste deux portes avec une seule contenant un prix, la chance de sélectionner la bonne porte, soit en restant avec la porte choisie, soit en changeant, est toujours de 50 %.
Étonnamment, ce raisonnement n'est pas correct, car il ne fait aucun usage des informations subtiles que l'hôte vous présente, que vous pouvez en fait utiliser à votre avantage.

Supposons qu'avant de jouer au jeu, vous décidiez de rester avec votre choix. Ensuite, une victoire pour vous repose sur le choix de la bonne porte au départ, et il y a 1 chance sur 3 que cela se produise. Si, d'un autre côté, vous jouez le jeu avec la décision de changer, alors gagner repose sur le choix initial d'une porte incorrecte (c'est là que l'action de l'hôte vient au premier plan), et il y a 2 chances sur 3 que cela soit le cas. Au total, on s'aperçoit en effet que l'échange double vos chances de gagner ! (Ce raisonnement est d'autant plus convaincant si vous imaginez un jeu joué avec 100 portes closes, dont une seule cache un prix.

Choisir la bonne porte au départ est très peu probable. Cependant, si l'hôte révèle que 98 des portes restantes sont vides, vous déciderez certainement que les chances sont en votre faveur pour changer.)

Voir aussi LE COMPTE DE KRUSKAL ; PUZZLE À DEUX CARTES.

Théorème de Morley En 1899, le mathématicien Frank Morley (1860–1937) a découvert que les intersections de paires adjacentes de trisecteurs d'angle dans n'importe quel triangle forment toujours un triangle équilatéral. Plus précisément, étant donné un triangle ABC, dessinez pour chaque sommet une paire de segments de droite divisant l'angle à ce sommet en tiers. Si les deux segments de droite les plus proches du côté AB se rencontrent au point D, les deux segments les plus proches du côté BC au point E et les deux segments les plus proches du côté AC au point F, alors DEF est garanti être un triangle équilatéral.

Il est remarquable que ce fait élégant de la GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE n'ait été découvert que si longtemps après l'époque d'Euclide. La démonstration de ce résultat, bien qu'un peu longue et détaillée, ne requiert que des techniques géométriques très élémentaires.

multiplication Le processus de recherche du produit de deux nombres s'appelle la multiplication. En arithmétique élémentaire, la multiplication peut être définie comme le processus consistant à trouver le nombre total d'éléments dans une collection d'ensembles où chaque ensemble de cette collection a le même nombre d'éléments. Ainsi, par exemple, l'accumulation de quatre ensembles possédant chacun trois objets donne un total de 12 objets. On écrit : 4 × 3 = 12. Dans ce contexte, la multiplication peut donc être considérée comme un processus d'addition répétée : 4 × 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12. Si on range les 12 objets dans un tableau rectangulaire de quatre rangées de trois, puis la lecture de l'arrangement en trois colonnes de quatre montre que 3 × 4 fournit la même réponse que 4 × 3. En général, ce raisonnement montre que les produits de comptage des nombres satisfont la

Machine Translated by Google

PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE : a × b = b × a pour tous les nombres comptés a et b.

Si un nombre a est multiplié par un nombre b pour former un produit a × b, alors le premier nombre a est appelé a multiplicande et le deuxième nombre b un multiplicateur. (Bien sûr, la propriété commutative de la multiplication évite d'avoir à distinguer le multiplicande du multiplicateur.)

Le symbole × pour la multiplication a été utilisé dans WILLIAM OUGHTRED (1574–1660) 1631 travail Clavis mathematicae (La clé des mathématiques), mais les historiens soupçonne que le symbole a été utilisé jusqu'à 100 ans plus tôt. Les mathématiciens d'aujourd'hui utilisent aussi un point en relief pour indiquer la multiplication (4 · 3 = 12, par exemple), ou ils écrivez simplement des symboles côte à côte si des variables sont utilisé (x × y = xy ou 2 × w = 2w, par exemple).

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le produit de deux grands nombres, comme ELIZABETHAN MULTIPLICATION, MULTIPLICATION ÉGYPTIENNE et RUS MULTIPLICATION SIAN.

Le processus de multiplication peut être étendu à NOMBRES NÉGATIFS (produisant la conséquence nécessaire que le produit de deux quantités négatives est positif), FRACTIONS, NOMBRES RÉELS, NOMBRES COMPLEXES et MATRICES. Deux VECTEURS peuvent être multipliés par un DOT PRODUIT ou un PRODUIT CROISÉ. Le produit de deux ensembles est appelé PRODUIT CARTESIEN.

Le nombre 1 est un ÉLÉMENT D'IDENTITÉ multiplicatif dans la théorie de l'arithmétique. On a que a × 1 = a = 1 × a pour tout nombre a.

Le produit de deux fonctions à valeurs réelles f et g est la fonction f · g, dont la valeur à toute entrée x est la produit des sorties de f et g à cette valeur d'entrée : (f · g)(x) = f(x) · g(x). Par exemple, si f(x) = x ^{2} + 2x et g(x) = 5x + 7, alors (f · g)(x) = (x ^{2} + 2x)(5x + 7) = 3 5x ^{2} + 17x + 14x.

Les formules de produits dans TRIGONOMETRY affirment :

$$\text{péché}\cos xy = \frac{\text{péché}(x+y)+\text{péché}(x-y)}{2}$$

$$\text{péché}\text{péché} xy = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\cos\cos xy = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

$$\text{péché}\cos xy = \frac{\text{péché}(x+y)+\text{péché}(x-y)}{2}$$

Voir aussi ASSOCIATIF ; PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE ; INFI PRODUIT NUIT.

principe de multiplication (principe fondamental de comptage) Supposons qu'une tâche puisse être décomposée en deux étapes. Si la première étape peut être effectuée d'une manière ou d'une autre , et le second de b manières différentes (quelle que soit la résultat de la première étape), puis le principe de multiplication dit que la tâche d'origine peut être effectuée de manière a × b .

Par exemple, imaginez que cinq routes relient ville A à la ville B, et sept routes relient la ville B à ville C. Alors on a 5 × 7 = 35 alternatives pour conduire de A à C. En lançant un dé et en lançant une pièce de monnaie, 6 × 2 = 12 résultats différents sont possibles.

Le principe de multiplication s'étend aux tâches qui sont composés de plus de deux étapes. Par exemple, avec trois paires de chaussures différentes, quatre pantalons différents, et trois chemises différentes, on a 3 × 4 × 3 = 36 tenues porter. Il y a 10 × 10 × 10 × 26 × 26 × 26 = 17 256 000 numéros de plaques d'immatriculation différents composés de trois nombres à un chiffre suivis de trois lettres.

Voir aussi FACTORIEL ; PERMUTATION.

événements mutuellement exclusifs (événements disjoints) Deux événements s'excluent mutuellement s'ils ne peuvent pas se produire tous les deux au cours d'une même série d'expériences. Par exemple, en lançant un dé, les événements « rouler un 3 » et « rouler un nombre pair » s'excluent mutuellement, alors que les événements "roulant un multiple de 3" et "rouler un nombre pair" ne le sont pas.

Si A et B sont deux événements mutuellement exclusifs pour un expérience, alors la probabilité qu'un événement ou l'autre se produit est donnée par la loi d'addition :

$$P(A \quad B) = P(A) + P(B)$$

Voir aussi PROBABILITÉ.

Machine Translated by Google

N

Napier, John (Jhone Neper) (1550–1617) Log arithmétique britannique Né à Édimbourg, en Écosse, en 1550 (son nom exact date de naissance n'est pas connue), on se souvient de John Napier dans mathématiques pour ses travaux sur la TRIGONOMÉTRIE et les méthodes de calcul, notamment pour son invention de LOGARITHMES.

Comme d'habitude à l'époque, Napier entra dans le St. Andrew's University en 1563 à l'âge de 13 ans. C'est peu probable que Napier ait étudié les mathématiques dans cette institution, et les historiens d'aujourd'hui ne savent pas par quoi signifie qu'il a acquis une connaissance pratique du sujet. Napier s'intéressa activement à la théologie et publié un certain nombre d'ouvrages importants sur le rôle religion dans la société. Son étude des mathématiques était seulement jamais un passe-temps.

Napier savait que les astronomes de son époque ont été gênés par la difficulté de faire de grands calculs à la main, en particulier, calculer les produits de très grands nombres. Il cherchait une méthode qui simplifierait le processus. Utilisation du curieux modèle géométrique d'un objet se déplaçant le long d'un segment droit d'unité de longueur avec une vitesse variant en fonction de sa distance à l'extrémité, Napier a trouvé une formule qui convertit les problèmes de multiplication en calculs d'addition plus simples. Aujourd'hui on dirait que Napier travaillé avec la formule :

$$N = 10^{7}\left(1 - \frac{1}{10^{7}}\right)^{L}$$



John Napier, un éminent mathématicien du XVIIe siècle, a découvert les logarithmes. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Musée des sciences, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

où N est un nombre et L est, ce qu'il a appelé le "rythme loga" de ce nombre. (Napier a inséré des facteurs de 107 afin d'éviter l'apparition de décimales dans les calculs.) Napier a publié ses résultats en 1614 dans son article Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Description de la merveilleuse règle des logarithmes).

Si on divise la formule de Napier par 107 on obtient :

$$\frac{N}{7\,10} = -\ 1\ \frac{1}{7\,10}^{7\,10\,10^{\frac{L}{7}}} \approx \frac{1}{e}^{\frac{L}{dix^{7}}}$$

utilisant le fait que $\lim_{n\to\infty}\ 1 + \frac{r}{n}^{n} = re$, où e est

Le numéro d'Euler. Ainsi, jusqu'à un facteur 107 , on voit ça les logarithmes de Napier sont proches des logarithmes d'aujourd'hui, mais en base 1/e. Sous les conseils du savant anglais HENRY BRIGGS (1561-1630), Napier modifia plus tard sa méthode des logarithmes en base 10.

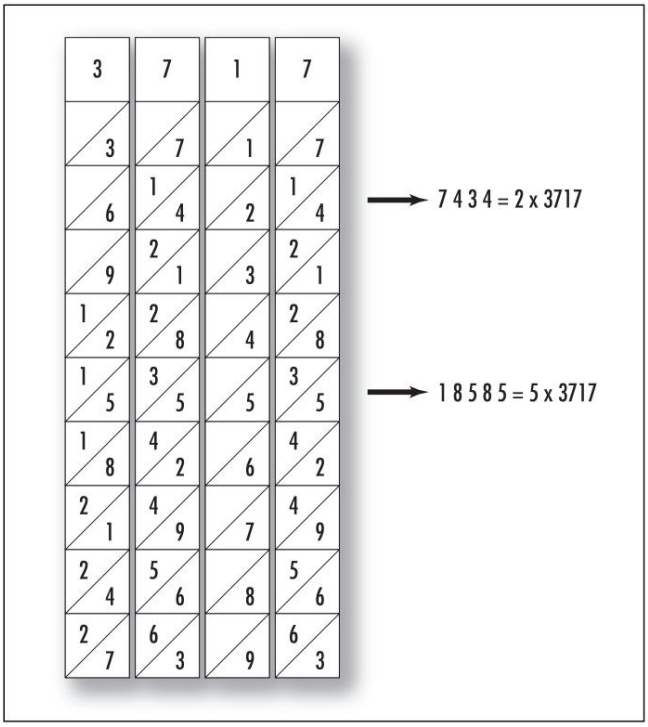
Napier a inventé des dispositifs mécaniques pour aider au calcul, à la multiplication, à la division et à l'extraction des racines carrées et cubiques. Il a également apporté des contributions significatives à l'étude de la trigonométrie sphérique, trouvant des formules pour le rapport des côtés de triangles dessinés sur des sphères. Ces formules sont aujourd'hui nommées en son honneur.

Napier est décédé à Édimbourg, en Écosse, le 4 avril 1617.

Voir aussi E; LES OS DE NAPIER .

Os de Napier (barres de Napier) En 1614, le mathématicien écossais JOHN NAPIER a conçu un ensemble de barres graduées, maintenant appelées os de Napier, qui peuvent être utilisées pour convertir tous les longs problèmes de multiplication en problèmes d'addition plus faciles et plus rapidement résolus. Chaque tige, en os ou en ivoire, était gravée d'une colonne de nombres constituée des multiples du chiffre inscrit à la tête de la tige. Des lignes diagonales ont été tracées pour séparer les dizaines et les unités de chaque multiple. Une tige vierge représentait les multiples de zéro.

Pour calculer une longue multiplication, telle que le produit 3717 × 25, on alignerait quatre tiges, une pour chaque chiffre 3, 7, 1 et 7, comme indiqué :



Multiplication avec les os de Napier

En regardant les deuxième et cinquième lignes (correspondant aux chiffres 2 et 5), et en ajoutant le long des diagonales dans les lignes (cela correspond au suivi des chiffres portés), nous voyons que 2 × 3 717 = 7 434 et 5 × 3 717 = 18 585 . L'ajout d'un zéro à la queue du premier produit donne 20 × 3 717 = 74 340, et donc le produit que nous recherchons est la somme des deux nombres 74 340 et 18 585. Cela peut être rapidement calculé avec un stylo et du papier.

Il y a une complication : en regardant n'importe quelle ligne particulière, deux nombres dans une diagonale peuvent totaliser deux chiffres. Il faut reporter le premier chiffre de la somme sur la diagonale suivante à gauche. Par exemple, en regardant la huitième ligne, nous voyons que 8 × 3 717 est égal à 29 736. (Le 1 de la somme de 8 et 5 porte au 6 dans la diagonale suivante vers la gauche.)

Voir aussi MULTIPLICATION ÉGYPTIENNE ; ÉLISABÉTHAIN MULTIPLICATION; MULTIPLICATION DES DOIGTS ; MULTIPLICA TION ; MULTIPLICATION RUSSE.

Nash, John (1928–) Américain Théorie des jeux, Topol ogie Né le 13 juin 1928 à Bluefield, Virginie-Occidentale, on se souvient de John Nash pour son travail fondateur en

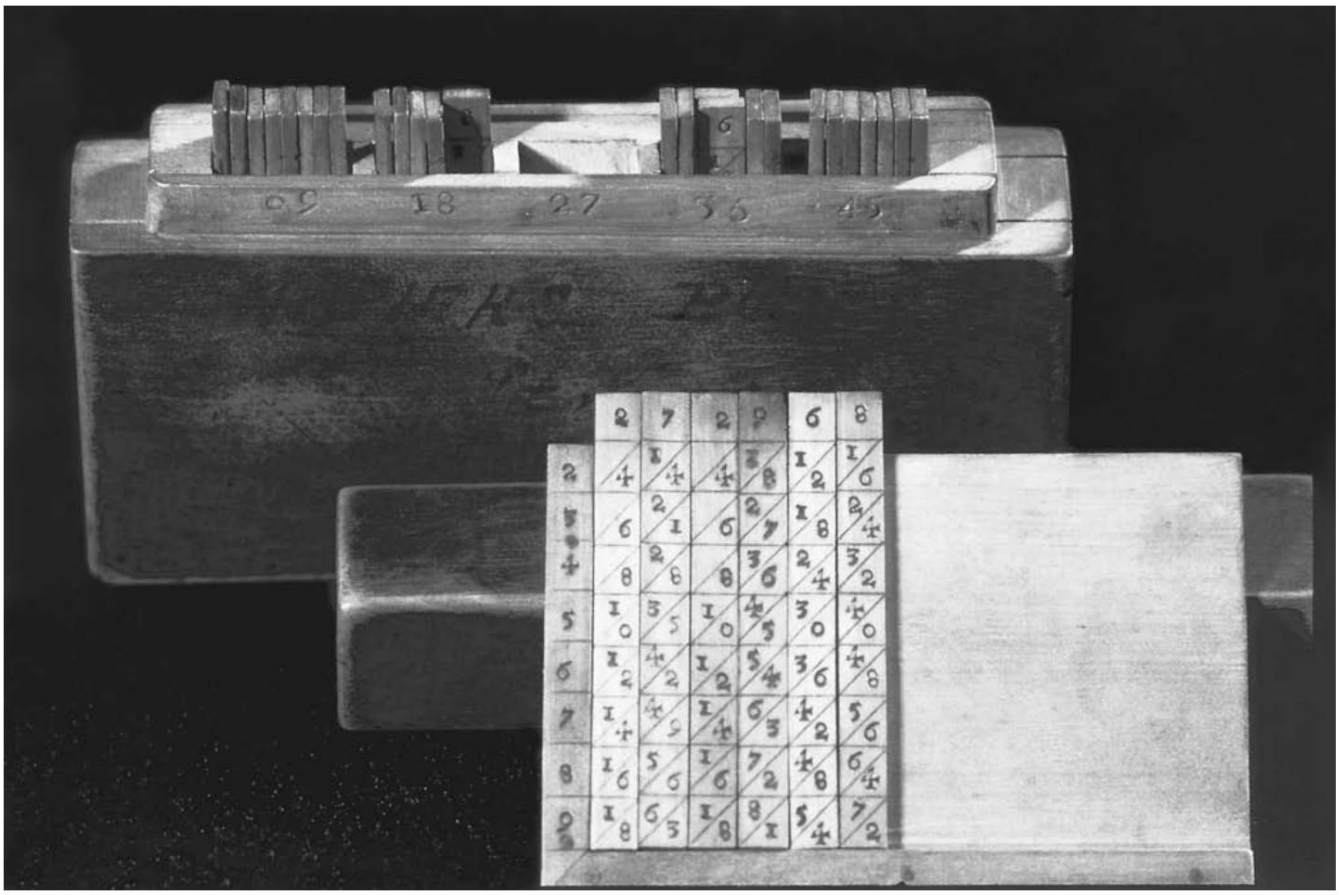
Machine Translated by Google

THÉORIE DES JEUX à somme non nulle . La thèse de doctorat de Nash en 1949 "Jeux non coopératifs" (seulement 45 pages longtemps) s'est avéré avoir un impact si profond sur développement et l'étude de la théorie économique qu'il a simplement redéfini la nature de la pensée économique au cours de les quatre décennies qui suivirent. Pour cela, il a été honoré en tant que co-récipiendaire du prix Nobel d'économie 1994. Nash a également apporté des contributions extraordinaires à le domaine de la TOPOLOGIE et a résolu un certain nombre de problèmes de percée dans l'étude de la géométrie riemannienne.

Nash entre au Carnegie Institute of Technology (maintenant l'Université Carnegie-Mellon) en 1945 avec le l'intention d'étudier le génie chimique, mais s'est rapidement découvert une passion pour les mathématiques. Il est diplômé 3 ans plus tard avec un baccalauréat et une maîtrise en mathématiques et est entré à l'Université de Princeton en 1948 pour commencer à travailler sur un doctorat. Il n'a obtenu son diplôme que 2 des années plus tard.

En 1954, Nash avait publié cinq extraordinaires articles sur le thème de la théorie des jeux, y compris "Equi librium Points in N-person Games" en 1950, "The Problème de négociation » en 1950, et « Non-Cooperative Games » en 1951, et deux ouvrages vraiment significatifs sur le sujet de la géométrie analytique, "Real Algebraic Mani folds" en 1952, et "C1 Isometric Imbeddings" dans 1954. Il s'est clairement imposé comme un génie mathématique et a été reconnu comme tel par la communauté mathématique. Il était professeur titulaire au Massachusetts Institute of Technology du l'âge de 29 ans.

Au début des années 1960, Nash a commencé à développer une schizophrénie paranoïde et est devenu pratiquement incapable par la maladie pendant les deux décennies qui ont suivi. Il a perdu son poste au MIT, a passé plusieurs années errant en Europe et en Amérique, et retourna à Princeton, New Jersey, avant de recevoir une aide institutionnelle.



Les os de Napier, comme cet ensemble de tiges datant de 1690, ont fourni les moyens de simplifier le processus de longue multiplication. (Photo avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

Lentement, pendant de nombreuses années, Nash a commencé à se rétablir et a finalement repris l'enseignement à Princeton et contemplé le travail mathématique. Il a présenté un article au 10e Congrès mondial de psychiatrie en 1996 décrivant sa maladie. En plus du prix Noble 1994, Nash a reçu le prix Leroy P. Steele 1999 de l'American Mathematical Association. Nash décrit sa thèse de 45 pages comme son "travail le plus trivial" de sa carrière.

nombre naturel (nombre compté, nombre entier) N'importe lequel des nombres entiers positifs 1, 2, 3, … est appelé un nombre naturel ou un nombre comptant. Les nombres naturels sont utilisés pour compter des objets séparés. La collection de tous les nombres comptés {1,2,3,…}, appelée l'ensemble des nombres naturels, est notée N, ou parfois IN ou Z+ . Certains mathématiciens choisissent d'inclure le nombre ZÉRO dans cet ensemble. (Il n'y a pas de convention standard en la matière.)

L'ensemble des nombres naturels est fermé sous ADDITION et MULTIPLICATION, c'est-à-dire que la somme ou le produit de deux nombres naturels est à nouveau un nombre naturel. L'ensemble, cependant, n'est pas fermé par SOUSTRACTION ou DIVISION. Par exemple, le résultat de la soustraction de 5 à 3 n'est plus un nombre naturel, pas plus que le résultat de la division de 7 par 2.

Un ensemble infini d'objets dont les éléments peuvent être rangés dans une liste proche de la liste des nombres naturels est dit COMPTABLE. Tous les ensembles infinis ne sont pas dénombrables.

Voir aussi PROPRIÉTÉ DE FERMETURE ; DISCRET; CHIFFRE NOMBRES; NOMBRE; LA THÉORIE DU NOMBRE; NOMBRE ORDINAL BERS ; NOMBRE ENTIER.

condition nécessaire Voir CONDITION — NÉCESSAIRE ET SUFFISANT.

négation (pas d'énoncé) En LOGIQUE FORMELLE, un énoncé de la forme « non p » est appelé la négation de l'énoncé p. Par exemple, "Shakespeare n'a pas écrit Hamlet" est la négation de l'affirmation que Shake speare a faite. En pratique, il n'est pas toujours nécessaire que le terme n'apparaisse pas . Par exemple, la négation de x > y est x ≤ y.

La négation d'un énoncé p est notée en symboles par ¬p (ou parfois par ~p, –p ou même p). La négation de l'énoncé a une valeur de vérité opposée à celle de l'énoncé original, et a donc une TABLE DE VÉRITÉ :

p	¬p
T	F
F	T

nombres négatifs Tout NOMBRE RÉEL inférieur à ZÉRO est appelé un nombre négatif. Dans les applications pratiques, les nombres négatifs sont utilisés pour désigner des quantités inférieures à un certain point de référence. Par exemple, dans l'échelle de température centigrade, une température de -10° est de 10° en dessous du point de congélation de l'eau.

Le produit de deux nombres négatifs est une quantité positive. Par exemple, (–1) × (–1) = 1. Cela peut être justifié en utilisant la PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE et le fait que le produit de toute quantité avec zéro est zéro. Concrètement, nous avons :

(–1) × 0 = 0
(–1) × (1+ (–1)) = 0
(–1) × 1 + (–1) × (–1) = 0 –
1 + (–1) × (–1) = 0 (–
1) × (–1) = 1

Les nombres négatifs ont généralement été considérés avec suspicion tout au long de l'histoire. Les érudits de l'Égypte ancienne et de la Babylonie ignoraient les solutions négatives à leurs équations mathématiques, tout comme les érudits de la Grèce antique (pour qui le « nombre » était directement associé à la notion de longueur physique). Les chercheurs chinois étaient à l'aise de travailler avec des quantités négatives dans les étapes intermédiaires vers la résolution d'un problème, mais ils ne les ont jamais autorisées comme solutions finales.

L'érudit indien du VIIe siècle BRAHMAGUPTA est considéré comme le premier érudit à déterminer correctement l'arithmétique des quantités négatives. Il considérait leur existence comme valide en assimilant les quantités positives à la possession et les quantités négatives à la dette. Ce travail a ensuite été développé par le savant BH 1114– ASKARA (env. 85). Bien que les érudits arabes de cette époque aient lu et traduit les textes indiens, ils ont choisi de ne pas travailler avec des quantités négatives. Alors que les érudits européens du XIIe siècle tiraient une grande partie de leurs connaissances mathématiques du monde islamique, la familiarité avec les quantités négatives ne s'est pas facilement imposée à l'Occident.

Au XVIe siècle, d'éminents mathématiciens tels que GIROLAMO CARDANO, Michael Stifel et FRANÇOIS VIÈTE ont catégoriquement rejeté la notion de nombre négatif.

Machine Translated by Google

bres, jugeant ces quantités comme « dénuées de sens » et « absurdes ». Cette attitude a généralement persisté pendant le siècle qui a suivi, même si les chercheurs ont jugé nécessaire de travailler avec eux algébriquement lorsqu'ils résolvaient des équations mathématiques plus sophistiquées. Au tournant du 18e siècle, cependant, il était généralement admis que les nombres négatifs sont une construction nécessaire en mathématiques. LEONHARD EULER (1707-1783) était à l'aise de travailler avec des quantités négatives.

Avec le développement de l'ALGÈBRE ABSTRAITE au 19e siècle, la nécessité d'attribuer un « sens » aux nombres est devenue moins importante. Même si certains érudits du XIXe siècle comme AUGUSTUS DE MORGAN ont continué à publier des commentaires contre la validité des quantités négatives, leur utilité et leur nécessité étaient généralement acceptées.

Voir aussi MATHÉMATIQUES BABYLONIENNES ; MATHÉMATIQUES CHINOIS; MATHÉMATIQUES ÉGYPTIENNES ; MATHÉMATIQUES GRECQUES EMATIQUE ; NOMBRE; POSITIF.

multiplication imbriquée Pour évaluer un POLYNÔME tel que $p(x) = 2x^3 - 4x + 3$ pour une valeur particulière x = 5, disons, on substitue simplement 5 à x et effectue le nombre requis de multiplications. Dans cet exemple, 3 + 2 + 1 = 6 multiplications sont nécessaires :

$$p(5) = 2 \times 5 \times 5 \times 5 + 7 \times 5 \times 5 - 4 \times 5 + 3 = 408$$

(C'est généralement le cas qu'un polynôme contient un NOMBRE TRIANGULAIRE de produits.) Le nombre de multiplications requises peut être considérablement réduit si l'on réécrit d'abord le polynôme sous une forme connue sous le nom de multiplication imbriquée. Dans cet exemple nous écrivons

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 + 7x^2 - 4x + 3 \\ &= (2x^2 + 7x - 4)x + 3 \\ &= ((2x + 7)x - 4)x + 3 \end{aligned}$$

Ainsi p(5) peut être calculé avec seulement trois opérations de multiplication :

$$\begin{aligned} p(5) &= ((2 \times 5 + 7) \times 5 - 4) \times 5 + 3 = \\ &((10 + 7) \times 5 - 4) \times 5 + 3 = \\ &(85 - 4) \times 5 + 3 = \\ &408 \end{aligned}$$

Notez que ce processus a simplement multiplié le premier coefficient par 5, ajouté le deuxième coefficient, multiplié le résultat par 5, ajouté le troisième coefficient, multiplié par 5, puis ajouté le coefficient final. Le processus est enregistré de manière compacte dans un tableau comme suit :

5	2	7	–4	3
	0	10	85	405
	2	17	81	408

La première ligne énumère les coefficients du polynôme et un zéro est placé sous le premier coefficient.
On travaille de gauche à droite en ajoutant les entrées dans les deux lignes, en multipliant le résultat par 5 et en enregistrant ce résultat dans la colonne suivante. L'entrée dans le coin inférieur droit est la valeur p(5).

Les chiffres restants sur la rangée du bas ont une interprétation surprenante. D'après le THÉORÈME DES FACTEURS, si le polynôme p(x) est divisé par le terme x – 5, alors le reste sera p(5) = 408. Dans cet exemple on peut vérifier que

$$\frac{p(x)}{x-5} = 2x^2 + 17x + 81 + \frac{408}{x-5}$$

Les nombres sur la ligne du bas du tableau ci-dessus sont précisément les coefficients du quotient. Ce même phénomène se produit pour tout polynôme de n'importe quel degré. L'examen d'un exemple abstrait illustre pourquoi cela fonctionne. (Pour plus de simplicité, nous allons à nouveau travailler avec une équation cubique.)

Considérons le polynôme p(x) = ax3 + bx2 + cx + d divisé par le terme linéaire x – h. Le processus de DIVISION LONGUE donne ce qui suit :

$$\begin{array}{r|l} & ax^2 + (ah+b)x + ((ah+b)h+c) \\ x-h & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ & ax^3 - ax^2h \\ \hline & (ah+b)x^2 + cx \\ & (ah+b)x^2 - (ah+b)xh \\ \hline & ((ah+b)h+c)x + ré \\ & ((ah+b)h+c)x - ((ah+b)h+c)h \\ \hline & ((ah+b)h+c)h + ré \end{array}$$

D'autre part, la méthode d'évaluation de p(h) via le processus de multiplication imbriquée donne le tableau :

Machine Translated by Google

350 net

h	a b c		d
	0 ah	(ah + b) h	((ah + b)h + c)h
	une ah + b	(ah + b)h + c	((ah + b)h + c)h + ré = p(h)

La comparaison des deux tableaux côte à côte montre que les deux processus sont identiques.

Le processus d'élaboration d'un tableau pour l'évaluation d'un polynôme p(x) à une valeur x = h, ou, de manière équivalente, pour la division de p(x) par x – h, est appelée division synthétique. C'est un processus très simple et efficace. A titre d'exemple, le tableau suivant montre que le polynôme $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 4x + 5x + 4$ vaut 6 lorsqu'il est évalué à x = 2, et quotient $2x^3 + 4x^2 - 2x + 4$ lorsqu'il est divisé par $x - \frac{1}{2}$.

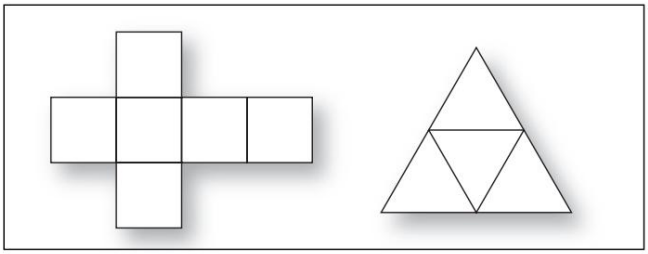
1-2	2	3	–4	54	
	01 2			-1	2
	2	4	–2	4	6

Revenant au thème des nombres triangulaires : Tout produit imbriqué de la forme :

(9(…(9(9(9 + 1)+1)+1)…+1)+1)

est triangulaire. Par exemple, 9 + 1 = 10 = T4 , 9(9 + 1) + 1 = 91 = T13, et 9(9(9 + 1) +1) + 1 = 820 = T40. Ce découle de la relation 9Tn + 1 = T3n+1 début avec T1 = 1. Cette relation montre aussi que si le nombre de neufs présents dans le produit emboîté est n, alors les $\frac{3n-1}{2}$-ième nombre triangulaire est produit.

filet En géométrie, un filet est un schéma dessiné sur une page qui, une fois découpé et plié le long des lignes indiquées, peut être utilisé pour construire un POLYÈDRE. Pour exemple, le diagramme suivant montre les filets d'un cube et un TÉTRAÈDRE.



Réseaux pour un cube et un tétraèdre

Pas tous les arrangements de six carrés sur une page produit un filet pour un cube. (Par exemple, une ligne de six carrés ne se plie pas pour former un cube.) On peut montrer qu'il y a 11 réseaux essentiellement différents pour un cube, chacun représentant une manière fondamentalement différente de déplier la figure. Il n'y a que deux façons différentes pour déplier un tétraèdre. Les mathématiciens ont montré qu'il existe 261 façons différentes de déplier un HYPERCUBE à quatre dimensions en un réseau tridimensionnel de huit cubes connectés.

En termes de comptabilité, le mot net fait référence à la bénéfice calculé après déduction de toutes les charges d'exploitation. Par exemple, si une petite école privée reçoit 100 000 $ en frais de scolarité par année comme revenu, mais engage une dépense d'exploitation annuelle de 97 000 $ (pour salaires, frais d'assurance, fournitures scolaires, etc.), alors l'école fonctionne avec un bénéfice net annuel de 3 000 $.

Dans le commerce, le terme net désigne le poids de marchandises à l'exclusion du poids de tout emballage ou récipient contenant les marchandises. Par exemple, de nombreuses épiceries les magasins soustraient le poids des contenants en plastique utilisés pour contenir des aliments frais du poids total du article en cours d'achat. Les clients ne sont facturés que pour le poids net de l'article.

Neumann, John von (1903–1957) hongrois-américain Théorie des jeux, Logique, Analyse, Algèbre abstraite le 28 décembre 1903, à Budapest, Hongrie, pur et le mathématicien appliqué John von Neumann est connu pour ses importantes contributions à un très large éventail de sujets. En mathématiques pures, il a travaillé sur des problèmes en THÉORIE DES ENSEMBLES et a conçu un ensemble d'axiomes pour le sujet alternatif à ceux proposés par ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871-1953). Il a également fait des progrès dans le domaine fonctionnel l'analyse, la théorie de l'OPTIMISATION et la THÉORIE DES GROUPES, et a réussi à fournir un système axiomatique pour théorie de la mécanique quantique. En mathématiques appliquées, von Neumann est surtout connu pour son texte de 1944

Machine Translated by Google

The Theory of Games and Economic Behavior, écrit avec Oskar Morgenstern (1902-1976), qui a essentiellement fondé le domaine de la THÉORIE DES JEUX. Il a également apporté des contributions majeures au développement de l'ordinateur moderne, à la fois en tant que problème de conception pratique et en tant qu'enquête théorique sur la nature et les capacités des AUTOMATES. Il a été le premier à concevoir un moyen de stocker des programmes à l'intérieur d'un ordinateur.

Von Neumann a démontré une aptitude incroyable pour les mathématiques à un très jeune âge. Il a reçu des cours particuliers de mathématiques de la part de membres du corps professoral de l'Université de Budapest alors qu'il était lycéen et, à 18 ans, il avait écrit et publié un article de mathématiques co-écrit. Bien que von Neumann ait été admis dans le programme de mathématiques de l'Université en 1921, il a suivi les souhaits de son père et a étudié la chimie à l'Université de Berlin et à la Technische Hochschule de Zürich. Remarquablement, sans jamais assister à un cours à l'Université de Budapest, von Neumann a poursuivi ses travaux en mathématiques en privé, a réussi l'examen universitaire de mathématiques, a rédigé une thèse influente sur le thème de la théorie des ensembles et y a obtenu un diplôme en 1926, tous les tout en poursuivant des études d'ingénieur chimiste à Zürich. En 1930, von Neumann accepta un poste de professeur de mathématiques à l'Université de Princeton aux États-Unis.

En 1932, il publie son travail révolutionnaire Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Fondements mathématiques de la mécanique quantique) sur la mécanique quantique théorique, qui le conduit à l'étude des algèbres d'opérateurs et de l'analyse fonctionnelle pour les années qui suivent. En 1938, il reçoit le prix Bôcher de l'American Mathematical Society pour ses travaux dans ce domaine. Au début des années 1940, les intérêts de von Neumann se tournèrent vers les mathématiques appliquées et, en 1944, il publia son célèbre article sur le thème de la théorie des jeux. Ses travaux ultérieurs sur la conception logique des ordinateurs et la théorie des automates semblaient, à von Neumann, un prolongement naturel de toutes ses études antérieures.

Pendant et après la Seconde Guerre mondiale, von Neumann a été consultant auprès du ministère de la Défense et du laboratoire scientifique de Los Alamos. En 1955, le président Eisenhower le nomma à la Commission de l'énergie atomique et, en 1956, il reçut le prix Enrico Fermi pour toutes ses contributions à cet égard.
La même année, il a été honoré dans le milieu universitaire avec le prix commémoratif Albert Einstein.

Von Neumann a été élu dans un grand nombre de sociétés universitaires tout au long de sa vie, notamment l'Académie nationale des sciences (États-Unis), l'Académie américaine des arts et des sciences, l'Instituto Lomdardo do Scienze e Lettere (Italie) et l'Académie royale des Pays-Bas. des Sciences et des Lettres. Il est décédé à Washington, DC, le 8 février 1957.

Newton, Sir Isaac (1642–1727) Calcul britannique , mécanique, dynamique, optique, astronomie, philosophie naturelle Né le 4 janvier 1642 à Woolsthorpe, en Angleterre, Sir Isaac Newton est considéré comme l'un des plus grands érudits scientifiques de tous les temps. Il a dominé et révolutionné les mathématiques et la physique du XVIIe siècle. Newton est responsable du développement du CALCUL différentiel et intégral et de la découverte du THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL qui unit les deux champs. Il a également généralisé le THÉORÈME BINO MIAL pour incorporer des exposants non entiers; développé des méthodes numériques pour résoudre des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, approximer des LIMITES et calculer des intégrales ; et découvert de nombreux résultats importants dans la théorie des équations. En physique, on se souvient de lui pour sa formulation d'un système de mécanique capable de descriptions précises et exactes des mouvements de tous les objets et pour sa loi universelle de gravitation à travers une LOI DU CARRÉ INVERSÉ . Il a décrit ce travail dans son ouvrage de 1687 Philosophiae naturalis principia mathematica (Les principes mathématiques de la philosophie naturelle), souvent simplement appelé Principia. Ceci est aujourd'hui considéré comme l'un des travaux scientifiques les plus importants de tous les temps.

Newton entra au Trinity College de Cambridge en 1661 pour étudier le droit et la philosophie, mais il se découvrit bientôt un intérêt pour les mathématiques, l'optique et la mécanique. Un cahier personnel de l'époque révèle qu'il a lu et travaillé en détail les travaux d' EUCLIDE (vers 300-260 avant notre ère) et de RENÉ DESCARTES (1596-1650) sur le thème de la géométrie, de GALILEO GALILEI (1564-1642) sur la mécanique de l'univers, et de FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603) et JOHN WAL LIS (1616-1703) sur l'algèbre. Newton a étendu certaines des techniques de Wallis pour trouver l'aire des figures courbes et a travaillé sur de nouvelles approches des SÉRIES infinies.
Il est diplômé de Cambridge avec un baccalauréat en 1665, mais il n'a pas attiré l'attention de ses professeurs en tant qu'érudit particulièrement doué à l'époque.

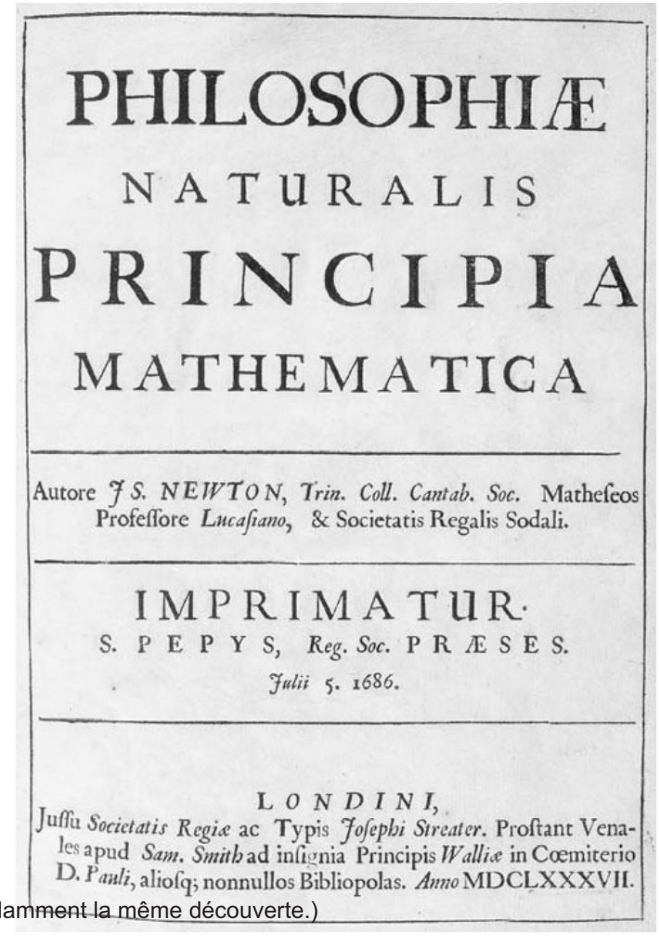
Machine Translated by Google



Sir Isaac Newton, éminent scientifique du XVIIIe siècle, a dominé et révolutionné les mathématiques et la physique de la fin des années 1600 et du début des années 1700. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Le collège a fermé pendant 2 ans à cause de la peste et Newton est retourné dans sa ville natale de Woolsthorpe. Là, il a commencé à travailler sur le développement de nouvelles approches des mathématiques, de la physique et de l'optique. Il a fait la découverte fondamentale que l'intégration est le processus inverse de la différenciation, et il a utilisé ce concept unificateur pour jeter les bases d'une théorie générale du calcul. (En tant que tel, il a terminé ce travail deux décennies avant que le savant allemand GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) ne fasse indépendamment la même découverte.) Newton a utilisé la notion de FLUXION (dérivé) comme base de son approche. Il a résumé son travail dans sa pièce de 1671 De methodis serierum et fluxionum (La méthode des séries infinies et des fluxions) mais n'a pas réussi à faire publier le travail. (Une traduction anglaise de la pièce a été imprimée à titre posthume en 1736.) Cela semble avoir été un problème fréquent pour Newton. Les historiens ont appris de l'examen de ses lettres et de ses écrits personnels qu'il avait une aversion morbide et une peur de la critique et retiendrait invariablement de publier ses idées. Cela a conduit à une dispute amère, par exemple, 20 ans plus tard, lorsque Leibniz a publié ses découvertes et a prétendu avoir inventé le calcul.

L'Université de Cambridge a rouvert en 1667 et Newton est revenu pour obtenir une maîtrise 1 an plus tard. À cette époque, grâce à ce qu'il avait partagé avec des amis et rapporté dans des lettres, il avait acquis une réputation d'érudit doué, et 2 ans plus tard, à la



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Venales apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, aliosq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Considéré comme le travail scientifique le plus important des temps modernes, les Principia de Sir Isaac Newton décrivent la loi du carré inverse de la gravitation et son application à la dérivation mathématique des trois lois du mouvement planétaire de Johannes Kepler. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

À l'âge de 27 ans, Newton est nommé professeur lucasien à Cambridge.

A cette époque, Newton a commencé un travail sérieux sur le étude de l'optique. A l'aide d'un prisme, il découvrit que la lumière blanche était composée d'un spectre de couleurs, réfractant chacun à travers une lentille à un angle différent. Il conclut alors que tous les télescopes réfracteurs étaient sujets à des aberrations chromatiques et se mit à travailler à la construction d'un modèle réfléchissant. En 1672, il fut élu membre de la prestigieuse ROYAL SOCIETY de Londres en l'honneur de ce travail. Il a publié son texte Optiks (Optique) en 1704.

Newton a également commencé à formuler ses fameuses lois de mouvement et ses lois de la gravitation au milieu des années 1660. En 1684, l'éminent astronome Edmond Halley (1656-1742) a suggéré à Newton qu'il devrait étudier les mathématiques de l'attraction gravitationnelle et tenter de dériver le célèbre JOHANNES KEPLER trois lois. Newton a apparemment répondu simplement qu'il avait déjà de nombreuses années plus tôt. Ce n'est qu'après les exhortations persistantes de Halley que Newton a accepté de publier les résultats. dans ce qui allait devenir son œuvre la plus célèbre, la pièce Principia de 1687.

Newton a également publié de son vivant, quelque peu retardée après l'achèvement des travaux, Enumeratio lin earum tertii ordnis (Énumération des lignes du troisième ordre) en 1704, Arithmetica universalis (Universal arithmétique), ses travaux rassemblés en algèbre en 1707, et Analyse par série quantitatum (Analyse au moyen de diverses séries) en 1711.

Newton a démissionné de son poste à l'Université de Cambridge en 1701 pour occuper un poste gouvernemental prestigieux à Londres et a participé à très peu de choses. recherches mathématiques par la suite. En 1703, il était élu président de la Royal Society et a été réélu à ce poste chaque année jusqu'à sa mort le 20 mars, 1727. En 1705, il fut fait chevalier par la reine Anne, devenir le premier scientifique à être ainsi honoré pour ses réalisations savantes.

Il est impossible de sous-estimer l'influence que Les travaux de Newton ont eu sur le développement de toutes les recherches scientifiques. Les spécialistes s'accordent aujourd'hui pour dire que la publication de Principia a marqué le début de l'ère moderne. ère scientifique.

La méthode de Newton Dans de nombreuses situations pratiques, on est nécessaire pour trouver une solution numérique à une équation de la forme f(x) = 0, même s'il n'y a pas d'algorithme algébrique clair des moyens pour résoudre une telle équation. (Il n'y a pas de méthodes générales appropriées pour résoudre $\sqrt{x + 2\sqrt{x + 3}} - 5 = 0$, par exemple.) Si la fonction en question est différentiable (voir CALCUL DIFFÉRENTIEL), alors on peut employez la méthode de Newton pour trouver l'emplacement approximatif d'une RACINE.

On commence par faire une estimation initiale x0 , en espérant manquer complètement la valeur correcte de la racine par juste un petite quantité. Supposons qu'il s'avère que la racine est h unités éloignées de x0 (donc f(x0 + h) = 0). En utilisant ceci valeur de h, on peut approximer la dérivée de la fonction en x0 comme :

$$\text{effet}'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\frac{\text{effet}}{h}$$

En retournant cela, nous voyons que h est approximativement $-f(x0)/f'(x0)$. Remplacer cette valeur par h montre que si x0 est notre estimation initiale pour la racine, puis le point :

$$x_1 = x_0 - \frac{\text{effet}(x_0)}{\text{effet}'(x_0)}$$

est susceptible d'être une bien meilleure approximation de la racine. (Géométriquement, x1 est l'emplacement auquel la tangente ligne vers le graphique y = f(x) à la position x0 croise l' axe des x .) La répétition de cette procédure, à chaque fois en utilisant le résultat qui vient d'être obtenu comme estimation initiale suivante, produit a) suite de valeurs x0 ,x1 ,x2 ,…, avec $x_{n+1} = x_n - \frac{\text{effet}_n}{\text{effet}'_n}$ donnant successivement de meilleures approximations de la racine. On peut effectuer cette procédure jusqu'au degré désiré de précision est obtenue.

Pour illustrer la méthode de Newton, on calcule $\sqrt{2}$ à quatre décimales. Le calcul de cette racine est équivalent pour résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$. Réglage $f(x) = x^2 - 2$, on a $f'(x) = 2x$. Ainsi la suite des approximations est donnée par la formule :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$$

(Comparer avec la MÉTHODE DE HERON .) Avec x0 = 1 comme notre estimation initiale, nous obtenons les approximations :

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1.5$$

Machine Translated by Google

$$x_2 = \frac{17}{12} = 1.416667$$

$$x_3 = \frac{99}{70} = 1.414216$$

$$x_4 = \frac{577}{408} = 1.414213$$

et ainsi de suite. Ainsi, à quatre décimales, nous voyons $\sqrt{2} = 1,4142$.

Si on fait initialement deux suppositions x0 et x1 au racine d'une équation f(x) = 0, alors on peut utiliser le fx fx formule $f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ approximer la pente de la courbe à la position x = x1 . Une approximation améliorée mation pour la racine est donc donnée par $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$. L'application répétée conduit à () () la méthode sécante pour approximer les racines : étant donné deux suppositions initiales x0 et x1 ensemble :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

Neyman, Jerzy (1894–1981) Statistiques moldaves
Né le 16 avril 1894 à Bendery, en Moldavie, le statisticien Jerzy Neyman est connu pour son travail fondamental dans la théorie des statistiques inférentielles. Il apporté une contribution importante à la pratique de test d'hypothèse et estimation, et a été le premier à introduire la notion d'intervalle de confiance.

Neyman a étudié les mathématiques à l'Université de Kharkov et a obtenu un doctorat en mathématiques et statistiques en 1924 de l'Université de Varsovie. Collaborant avec le fils de KARL PEARSON , ES Pear son, Neyman a écrit un certain nombre d'articles influents. Les deux pièces les plus marquantes "Sur le problème de les tests d'hypothèses statistiques les plus efficaces » et "Le test des hypothèses statistiques en relation avec Probabilités A Priori » ont été publiés en 1933.

En 1938, Neyman émigre aux États-Unis, où il a travaillé à l'Université de Californie, Berkeley, pour le reste de sa vie. Il est mort à Oakland, Californie, le 5 août 1981.

Ses travaux en statistique, avec l'introduction de la intervalle de confiance, révolutionné les techniques d'échantillonnage et pratiques en agriculture, biologie, médecine et sciences physiques, et son étude des populations stratifiées a conduit à un nouveau domaine de la théorie statistique. La structure du sondage Gallup utilisé aujourd'hui, par exemple, est sur la base de ce travail.

Voir aussi STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

cercle à neuf points Considérons un triangle de sommets A, B et C. Soient MA, MB et MC les POINTS MILIEUX de chacun de ses trois côtés. Considérez aussi les trois altitudes du triangle, des droites passant chacune par un sommet de le triangle rencontre le côté opposé à angle droit. Laisser HA, HB et HC sont les pieds des trois altitudes, une sur chaque côté du triangle. Une étude des points EQUIDISTANTS montre que les trois altitudes passent par un point commun le point H appelé orthocentre du triangle. (Voir ALTI TUDE.) Soit PA, PB et PC les milieux de la droite segments reliant H à chaque sommet A, B et C, respectivement. Nous avons maintenant neuf points associés à le triangle : MA, MB, MC, HA, HB, HC, PA, PB et PC.

Étonnamment, ces neuf points seront toujours situés sur un cercle. Ce cercle est appelé le cercle à neuf points du triangle.

Ce résultat a été découvert par le mathématicien allemand Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834). Le centre de le cercle se trouve sur la LIGNE D'EULER du triangle. En effet, si O est le centre circonscrit du triangle, alors est, le centre du CIRCUMCERCLE du triangle, alors le centre du cercle à neuf points Q est le milieu de le segment de droite reliant O à H. (Cela étant connu, on peut alors prouver que Q est bien à la même distance de chacun des neuf points énumérés, établissant ainsi l'affirmation que les neuf points se trouvent sur un cercle.)

Feuerbach a également prouvé que le cercle à neuf points et l' INCERCLE du triangle se touche en un seul point et, de plus, que le cercle à neuf points est TANGENT à chacun des trois excercles du triangle.

Étant donné quatre points arbitraires dans le plan, on peut construire un cercle de neuf points pour tout triangle formé par un ensemble de trois de ces points. Comme il existe quatre séries de trois points, cela donne quatre cercles de neuf points en tout. Étonnamment, ces quatre cercles de neuf points passent tous par un seul point commun.

Noether, Amalie (Emmy) (1882–1935) Allemande Abs tract algebra
Née le 23 mars 1882 à Erlangen, Bavière, on se souvient de la mathématicienne Emmy Noether

Machine Translated by Google

pour son travail hautement créatif dans la théorie des ANNEAUX et dans l'ALGÈBRE ABSTRAITE. Elle était responsable de diriger l'algèbre loin des calculs arithmétiques détaillés vers une étude axiomatique générale de la structure. Elle est également connue pour sa détermination à réussir en tant que femme universitaire dans le domaine à prédominance masculine du milieu universitaire du début du XXe siècle.

Noether a étudié les langues et la musique pendant ses années scolaires et a suivi une formation de professeur de français et d'anglais. En 1900, elle a réussi ses examens de certification d'État mais n'a jamais travaillé comme éducatrice. Au lieu de cela, elle a décidé de poursuivre une carrière en mathématiques, en assistant à des cours à l'Université d'Erlangen. À l'époque, les femmes n'étaient pas autorisées à s'inscrire comme étudiantes à l'université et ses études à l'université n'ont jamais été considérées comme officielles. En 1904, elle passa l'examen d'État du baccalauréat et se rendit ensuite à l'université de Göttingen. Trois ans plus tard, elle a obtenu un doctorat de cette institution. Cependant, elle n'a pas été autorisée à poursuivre le diplôme d'habilitation qui lui permettrait d'obtenir la qualification appropriée pour devenir membre du corps professoral de l'université. Noether retourna à Erlangen.

Au cours des années suivantes, Noether a publié un certain nombre d'articles influents sur le thème de l'algèbre. Son travail a attiré l'attention d'éminents mathématiciens DAVID HILBERT (1862-1943) et CHRISTIAN FELIX KLEIN (1849-1925), qui l'ont invitée à revenir à l'Université de Göttingen et ont combattu l'administration universitaire pour lui donner le droit de poursuivre des études supérieures. . Elle a finalement obtenu un poste officiel en tant que membre du corps professoral de l'université en 1922.

Les mathématiciens considèrent aujourd'hui son article de 1921 "Idealtheorie in Ringbereichen" (La théorie des idéaux dans les structures en anneau) comme ayant une influence fondamentale sur le développement de l'algèbre abstraite moderne.

Noether a reçu de nombreux honneurs et récompenses pour son travail. En 1928, elle fut invitée à s'adresser à la Conférence internationale de mathématiques à Bologne et prit la parole à Zurich en 1932, la même année où elle fut co-récipiendaire du prix commémoratif Alfred Ackermann-Teubner pour l'avancement des connaissances mathématiques.

Avec le soulèvement des nazis en 1933, Noether a été démis de ses fonctions à Göttingen en raison de sa foi juive. Elle a ensuite accepté un poste de professeur au Bryn Mawr College, en Pennsylvanie. À cette époque, elle a également enseigné à l'Institute of Advanced Study de Princeton, New Jersey.

Noether est décédée à Bryn Mawr le 14 avril 1935. Elle a écrit un total de 45 articles de recherche tout au long de sa carrière et a façonné l'ensemble du programme d'études en algèbre abstraite. La mathématicienne Bartel Leendert van der Waer den (1903-1996) a été particulièrement influencée par son travail et a continué à promouvoir ses idées après sa mort.

géométrie non euclidienne Après de nombreuses tentatives infructueuses tout au long de l'histoire pour établir le POSTULAT PARALLÈLE comme conséquence des quatre autres POSTULATS D'EUCLIDE , les mathématiciens ont commencé à envisager des théories de la géométrie dans lesquelles le cinquième postulat ne tient pas. Une telle théorie de la GÉOMÉTRIE est appelée une géométrie non euclidienne.

En 1795, le mathématicien et physicien écossais John Playfair (1748–1819) a présenté une formulation alternative, mais équivalente, du postulat parallèle : à travers n'importe quel point du plan, il y a précisément une ligne passant par ce point parallèle à toute direction prescrite. Refondre le postulat de cette manière fait apparaître que la négation du célèbre cinquième postulat comporte deux parties. Soit:

1. Il n'y a pas de lignes passant par un point donné parallèlement à une direction donnée.
2. Il y a plus d'une ligne passant par un point donné parallèle à une direction donnée.

De 1826 à 1829, le mathématicien russe NICO LAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) a développé une théorie cohérente de la géométrie dans laquelle le cinquième postulat d'Euclide échoue de la manière décrite au point 2. Le mathématicien hongrois JÁNOS BOLYAI (1802-1860) est arrivé indépendamment à la même conclusion surprenante en supposant qu'en tout point il existe une infinité de lignes distinctes parallèles à une direction donnée. (CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–18) était également arrivé à des conclusions similaires, mais il n'a pas publié ses résultats.) Une telle théorie de la géométrie est aujourd'hui appelée GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE.

Dans les années 1850, le mathématicien allemand GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) a présenté une forme alternative de géométrie dans laquelle le cinquième postulat d'Euclide échoue de la manière décrite au point 1 ci-dessus. Dans cette théorie, aujourd'hui appelée géométrie riemannienne ou GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE, les « lignes » sont de grands cercles dessinés à la surface d'une sphère. Par conséquent, il est impossible de tracer une paire de droites qui ne se coupent jamais.

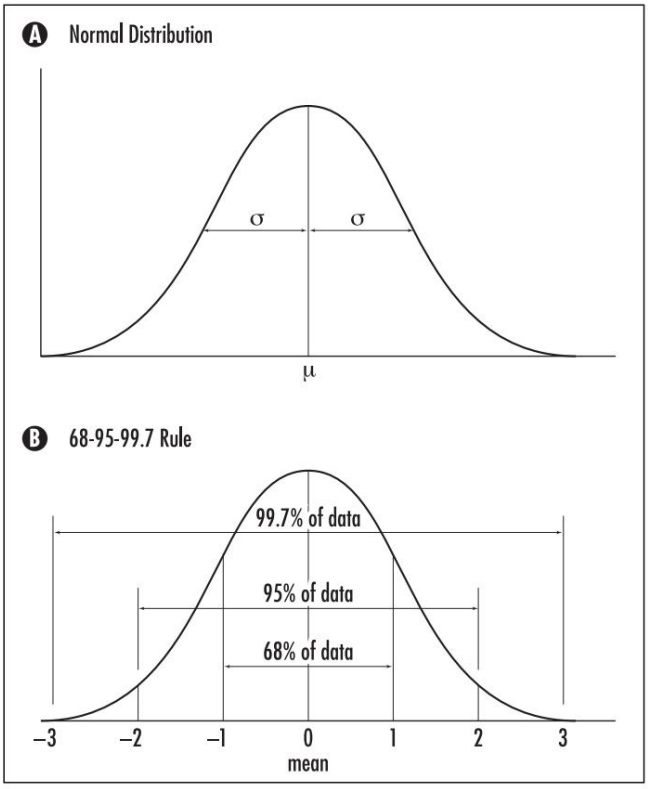
Machine Translated by Google

Malgré la simplicité du modèle riemannien, il n'était pas immédiatement évident pour les érudits du XIXe siècle qu'il était admissible. Le deuxième postulat d'Euclide semble affirmer que les lignes droites doivent être de longueur infinie. Riemann a eu la perspicacité de noter que "prolongé indéfiniment" n'implique pas "infiniment long", lui permettant ainsi d'envisager une géométrie dans laquelle les lignes droites se bouclent sur elles-mêmes.

En géométrie hyperbolique, tous les angles d'un triangle totalisent moins de 180° et le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est supérieur à π. En géométrie sphérique, tous les angles d'un triangle totalisent plus de 180°, et le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est inférieur à π. La GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE, dans laquelle les angles d'un triangle totalisent toujours exactement 180° et le rapport de la circonférence au diamètre de tout cercle est précisément π, peut donc être considérée comme un intermédiaire entre les deux.

Voir aussi EUCLIDE ; AXIOME DE PLAYFAIR .

distribution normale Au début des années 1700, les scientifiques ont remarqué que les erreurs de mesures dans les expériences scientifiques répétées plusieurs fois avaient tendance à suivre la même forme de DISTRIBUTION, même si les études étaient menées dans des domaines non liés (physique versus biologie ou sociologie, par exemple). Le modèle particulier d'erreurs observé est aujourd'hui connu sous le nom de distribution normale (ou distribution gaussienne). Le mathématicien français ABRAHAM DE MOIVRE, en 1733, fut le premier à écrire une formule mathématique pour la distribution. Plus tard, les mathématiciens PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827), SIMÉON-DENIS POISSON (1781–1840) et CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) ont précisé et prouvé nombre de ses propriétés mathématiques. Au tournant du 20e siècle, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, et plus tard d'autres, a affiné et développé le travail de Laplace pour établir le THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRALE afin d'expliquer l'occurrence fréquente de la distribution normale dans toutes les études scientifiques.



La distribution normale

La distribution normale se révèle être une courbe symétrique en forme de cloche. Elle est mise à l'échelle de sorte que l'aire totale sous la courbe soit exactement égale à 1. L'emplacement du pic de la courbe est appelé sa moyenne, notée μ, et la largeur de la courbe est mesurée par une valeur σ, appelée son écart type . (Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE et DISTRIBUTION.) Des deux côtés du pic, la courbe tombe uniformément vers le bas. La courbe descend alors moins raide, avec une courbure vers le haut. L'emplacement auquel la courbure change de direction de courbure vers l'intérieur vers le haut est à une distance de 1 écart type de la moyenne, le sommet de la courbe.

La « règle 68-95-99,7 » affirme que 68 % de l'aire sous la courbe se situe à une distance de 1 écart type de chaque côté de la moyenne ; 95 % de la superficie se situe à moins de 2 écarts-types de la moyenne; et 99,7 % dans les 3 écarts-types.

Par exemple, on peut observer dans une étude médicale que la taille moyenne des femmes âgées de 18 à 24 ans est normalement distribuée, avec une moyenne μ = 64,5 pouces et un écart type σ = 2,5 pouces. Nous pouvons alors en déduire que 68% des jeunes femmes mesurent entre 64,5 - 2,5 = 62 et 64,5 + 2,5 = 67 pouces.

Si une mesure dans une expérience est connue pour suivre une distribution normale, alors la probabilité qu'une mesure prise au hasard se situe dans la plage [a,b] est trouvée en calculant l'aire sous la courbe au-dessus de l'intervalle [a,b]. Les textes de référence dans les statistiques fournissent des tableaux de calculs de surface pour un dis normal

Machine Translated by Google

tribution de la moyenne zéro et de l'écart-type 1 (le distribution normale standard). On peut convertir un distribution normale arbitraire en une normale standard formulaire en utilisant des Z-SCORE, ce qui permet ensuite de calculer les probabilités pour cette distribution.

La formule de la courbe décrivant un dis normal tribution de la moyenne μ et de l'écart-type σ est :

$$\text{effet } (\bar{f}) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; -\infty < x < \infty$$

La fonction de distribution cumulative de la norme distribution normale (μ = 0, σ = 1) est notée φ(z) et est donné par $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{z^2}{2}} dz$. Références statistiques répertorie généralement les valeurs de cette fonction de z = 0,0 à z = 4,0. (Nous avons φ(0.0) = 0 et φ(4.0) = 0.99997.) Les valeurs des fonction pour les valeurs négatives de z peut être déduite en utilisant la fait que la distribution normale est de forme symétrique.

Voir aussi LE THÉORÈME DE CHEBYSHEV ; STATISTIQUES : INFERER ENTIEL.

normale à une courbe Dans un espace à deux dimensions, une normale à une courbe en un point P de la courbe est la droite passant par P perpendiculaire à la TANGENTE à la courbe. Par exemple, le rayon d'un cercle est normal à la circonférence du cercle.

Voir aussi NORMALE A UN PLAN; NORMALE A SUR AFFRONTER; ORTHOGONAL; PERPENDICULAIRE.

normal à un plan (vecteur normal à un plan) Dans espace tridimensionnel, un VECTEUR dont la direction est On dit que la PERPENDICULAIRE à un plan est une normale au avion. Un vecteur normal est donc perpendiculaire à tout vecteur situé dans le plan donné.

Si ax + by + cz = d est l'équation du plan, alors n = < a,b,c > est une normale au plan. Ceci suit de la dérivation de l' ÉQUATION VECTORIELLE DE A AVION. Tout multiple scalaire (non nul) de ce vecteur est également une normale à l'avion.

Voir aussi NORMALE A UNE COURBE ; NORMALE A SUR AFFRONTER; ORTHOGONAL.

normale à une surface Dans un espace tridimensionnel, une la normale à une surface en un point P de la surface est une ligne passant par P PERPENDICULAIRE au plan TANGENT de la surface en P. Par exemple, une ligne passant par le centre d'une sphère est normal à la surface à chaque des deux points, il coupe la sphère.

On suppose que les surfaces en discussion sont "lisses", de sorte qu'en chaque point il y a un plan tangent bien défini. Par exemple, une SPHERE est lisse, comme l'est un TORUS, mais la surface d'un cube est pas. (Il n'y a pas de plan tangent bien défini à l'un des ses coins, par exemple.)

Voir aussi NORMALE A UNE COURBE ; NORMALE À A AVION; ORTHOGONAL.

NP complet En 1971, l'informaticien Steven Cook a spécifié une certaine classe de problèmes de calcul comme "d'une difficulté équivalente" en ce sens que s'il y en avait un des problèmes de cette classe peut être résolu « dans un un laps de temps raisonnable » sur un ordinateur, alors tous les les problèmes de cette classe peuvent être ainsi résolus. Cette catégorie des problèmes est appelé NP complet.

Le fameux PROBLÈME DU VENDEUR VOYAGEUR en est un tel problème. Il cherche à trouver l'itinéraire le plus court qui vis un certain nombre de villes. On sait que si n représente le nombre de villes dans le problème, alors, quand n augmente, le nombre de routes possibles à vérifier croît comme une fonction FACTO RIAL dans n. Ces chiffres augmentent extraordinairement rapide, plus rapide que n'importe quelle fonction POLYNOMIALE dans n. (Un polynôme est une formule de la forme $a_r n^r + a_{r-1} n^{r-} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0$.) Problèmes dont la complexité croît en polynôme sont considérés comme « résolubles dans un montant raisonnable de temps." On ne sait pas s'il existe un moyen de résoudre le problème du voyageur de commerce en temps polynomial. Si ça peut être ainsi résolu, alors, comme l'a montré Steven Cook, chacun et chaque problème NP peut également être résolu en polynôme temps. Il existe de nombreux problèmes différents dans la classe NP. Le fait que personne à ce jour n'ait trouvé d'algorithme « rapide » pour résoudre l'un d'entre eux suggère que le problème du voyageur de commerce, en particulier, n'a pas de sens. moyens de résolution réalisables par calcul. Les lettres NP signifie "temps polynomial non déterministe".

Une question différente demande si une solution proposée à un problème peut être vérifiée pour être valide dans un laps de temps polynomial. Cela conduit à la classe de "P" problèmes. On ne sait pas si la classe des problèmes P (ceux qui prennent un temps polynomial pour vérifier les solutions) est la même que la classe des problèmes NP (ceux dont on espère qu'ils prendront une quantité polynomiale de

Machine Translated by Google

le temps de trouver des solutions). Cette question s'écrit généralement : P = NP ?

Voir aussi TEMPS POLYNOMIAL.

Racine n ième de l'unité Tout NOMBRE COMPLEXE z tel que $z^n = 1$ est appelé racine n ième de l'unité. Lorsque n vaut 2 ou 3, les racines pertinentes sont généralement appelées racines carrées et racines cubiques, respectivement. Il y a deux racines carrées de l'unité, à savoir, z = 1 et z = –1, et il y a trois cubes racines de l'unité : z = 1, $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, et $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Dans général, comme le montre le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE , il y a n nièmes racines de l'unité. Le nombre z = 1 est une nième racine de l'unité pour toutes les valeurs de n.

Le théorème d'EULER montre que les racines nièmes de l'unité sont données par la formule :

$$z = e^{\frac{2\pi k}{n}i} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

pour k = 0,1,…,n (puisque $z^n = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1 + 0 = 1$). Cela montre que les n nièmes racines de l'unité reposent toutes sur un cercle de rayon un et sont équidistantes le long de ce cercle à des angles multiples de $\frac{2\pi}{n}$. Autrement dit, lorsqu'elles sont tracées sur le plan complexe, les n nièmes racines de l'unité se trouvent aux sommets d'un ngon régulier avec le point z = 1 sur l'axe réel comme un sommet du polygone.

Une nième racine de l'unité z est appelée une primitive si $z^n = 1$, mais $z \neq 1$ pour tout entier positif inférieur à n. Par exemple, bien que z = –1 soit une racine quatrième de l'unité, ce n'est pas une racine primitive, puisque nous avons aussi (–1)2 = 1. Les nombres z = i et z = –i sont tous deux des racines quatrièmes primitives de unité.

Une nième racine de l'unité z satisfait l'équation $z^n - 1 = 0$. La factorisation donne :

$$(z-1)(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}) = 0$$

Si z est différent de 1, alors il faut que le deuxième terme du côté gauche de cette expression soit zéro.
Cela prouve:

> Chaque nième racine d'unité différente de 1 satisfait $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1} = 0$.

En prenant n = 5, par exemple, et EQUATING REAL AND PARTIES IMAGINAIRES, cela montre, par exemple, que :

$$\cos(0) + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$$

et

$$\sin(0) + \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} = 0$$

n-uplet (liste) Un ensemble de n objets pris dans un ordre particulier est appelé un n-uplet. Un n-uplet de nombres a1 , a2 , dans cet ordre, est généralement noté (a1 ,a2 ,…,an) ou …, an , a1 ,a2 ,…,an . Deux n-uplets (a1 ,a2 ,…,an) et (b1 ,b2 ,…,bn) sont égaux si et seulement si les entrées correspondantes correspondent : a1 = b1 , a2 = b2 ,…, an = bn . Ainsi, par exemple, (2,1.3) et (1,2,3) sont des 3-uplets distincts.

Un 3-uplet est appelé un "triple" et un 4-uplet un "quadruple". Lorsque n = 2, un n-uplet est appelé une paire ordonnée.

Un n-uplet de nombres peut représenter un point dans un espace à n dimensions, une SEQUENCE finie ou, si des crochets sont utilisés, un VECTEUR à n dimensions . Une PARTITION ordonnée d'un nombre N est un n-uplet de nombres dont les entrées totalisent N.

Voir aussi ENSEMBLE ORDONNÉ.

nombre Le développement de différents types de nombres peut être considéré comme motivé par la nécessité de résoudre différents types d'équations. Par exemple, les nombres comptés (c'est-à-dire les NOMBRES NATURELS N) suffisent pour résoudre n'importe quelle équation du type x + 2 = 5, par exemple, mais pas une équation du type x + 5 = 2. (Il n'y a pas de solution à cette équation dans l'ensemble des nombres à compter.) Cela motive l'introduction des NOMBRES NÉGATIFS et la construction des ENTIERS Z. Mais

cet ensemble n'est pas toujours suffisant pour résoudre des équations du type 5x = 3, par exemple. Désirer des solutions à des équations de ce type conduit à construire des FRACTIONS et l'ensemble de tous les NOMBRES RATIONNELS Q.
Malheureusement, encore une fois, toutes les équations ne peuvent pas être résolues 2 –2 = 0 dans ce système. Par exemple, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle. L'extension de l'ensemble des nombres rationnels pour inclure des solutions aux équations de ce type introduit les NOMBRES IRRATIONNELS et la construction du système REEL NOMBRE . Pourtant, ce nouveau système ne suffit pas non plus pour résoudre toutes les équations. Avec l'introduction d'un seul numéro supplémentaire, noté i,

Machine Translated by Google

représenter une solution ("imaginaire") de l'équation $x^2 + 1 = 0$, les NOMBRES COMPLEXES C naissent. Étonnamment, comme le montre le THÉORÈME FONDAMENTAL DE ALGEBRE, l'introduction de ce nombre unique est tout qui est nécessaire pour résoudre toute équation POLYNOMIALE $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Ainsi les nombres complexes représentent un système de nombres algébriquement clos dans le sens que la construction d'aucun nouveau type de nombre n'est nécessaire pour résoudre des équations arithmétiques.

Sur le plan conceptuel, la notion de « nombre » est intimement liée à l'acte de compter. Simple les systèmes de comptage des temps anciens utilisaient des marques de pointage pour nombre record, et au fil des millénaires, cette base système de numération a évolué vers le SYSTÈME DE VALEUR DE PLACE sophistiqué que nous utilisons aujourd'hui. (Les anciens Égyptiens de vers 3000 avant notre ère ont peut-être été les premiers à déménager de la seule utilisation des marques de pointage.) Ce fut une grande réussite intellectuelle pour l'humanité lorsque la notion de "nombre" a été supprimé des objets spécifiques étant compté, reconnaissant, par exemple, que deux vaches, deux maisons, et deux jours tous partagent une propriété commune de « dualité ». (Même aujourd'hui, nous utilisons parfois différents mots pour compter différents types de "deux". Par exemple, les mots jumeaux, couple et paire ne peuvent pas être utilisés de manière interchangeable pour représenter deux personnes.) Cette simple reconnaissance d'un point commun abstrait entre des ensembles de objets a été exploité par un mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918) qui, à la fin des années 1800, développé une notion générale de CARDINALITE. Avec ça, Cantor a étendu la notion de « nombre » pour inclure nombre d'ensembles de taille infinie. Il a établi, pour exemple, qu'il existe un nombre infini de types d'infini et a réussi à développer un sens système d'arithmétique pour ses nombres transfinis.

Le mathématicien irlandais SIR WILLIAM ROWAN HAMIL TON (1805-1865) a suivi une voie différente et a travaillé étendre la notion de « nombre » pour représenter des opérations sur un espace à n dimensions. UN SCHÉMA D'ARGAND montre que les nombres complexes ont une représentation naturelle sous forme de points sur un plan. Hamilton a cherché à donner sens à une arithmétique pour les points en trois et espace de dimension supérieure. Bien qu'il n'ait pas réussi dans l'accomplissement de cet objectif pour l'espace tridimensionnel, son invention des QUATERNIONS montre que cet exploit peut se faire dans un espace à quatre dimensions. (Les octonions fournissent une arithmétique pour l'espace à huit dimensions.)

Le schéma suivant illustre la relation entre les systèmes de numération décrits :

N Z Q R C quaternions

Voir aussi MATHÉMATIQUES ARABE ; BABYLONIEN MATHÉMATIQUES; BASE D'UN SYSTÈME DE NOMBRE ; CHINOIS MATHÉMATIQUES; REPRÉSENTATION DÉCIMALE ; ÉGYPTIEN MATHÉMATIQUES; MATHÉMATIQUES GRECQUES ; HINDOU-ARABE CHIFFRES ; MATHÉMATIQUES INDIENNES ; MATHÉMATIQUES MAYA ICS ; CHIFFRES ROMAINS; ZÉRO.

droite numérique (ligne réelle) Une ligne droite, généralement horizontale, pour laquelle chaque point de la ligne représente un Le NOMBRE RÉEL est appelé une droite numérique. On suppose que la ligne s'étend indéfiniment à gauche et à la droite. Un seul point O sur la droite, appelé origine, correspond au nombre ZERO dans le nombre réel système, et il est classique de supposer qu'un point a distance a unités à droite de O représente le positif nombre réel a et un point b unités à gauche de O le nombre réel négatif –b. Les nombres entiers sont ainsi représentés par des points régulièrement espacés, séparés d'une unité, le long de la ligne. Une droite numérique est une CARTE unidimensionnelle Système de COORDONNÉES SIAN .

La théorie de la CARDINALITE montre qu'il existe autant de points sur la droite numérique qu'il y a points dans un plan à deux dimensions. La DIAGONALE ARGUMENT montre que l'ensemble des NOMBRES RATIONNELS (fractions) n'occupent absolument aucun espace sur la droite numérique.

Voir aussi DIMENSIONS.

systèmes de numération Voir BASE D'UN SYSTÈME DE NUMÉROTATION.

théorie des nombres (arithmétique supérieure) L'étude de la propriétés arithmétiques des nombres s'appelle nombre l'ory. Le fait que de nombreuses déclarations simples sur les nombres peuvent être extraordinairement difficiles à prouver, voire pas du tout. possible, fait de ce sujet un sujet séduisant et stimulant sujet pour mathématiciens. (LA CONJECTION DE GOLDBACH, par exemple, reste non résolue.) CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), charmé par le sujet et ses «richesse inépuisable», appelée théorie des nombres "reine des mathématiques".

La théorie élémentaire des nombres est l'étude de ces sujets de théorie des nombres qui n'utilisent que les techniques de base de l'ARITHMÉTIQUE et des mathématiques du secondaire dans

Machine Translated by Google

leurs solutions. Par exemple, le classement des PYTHAGOREAN TRIPLES serait considéré comme un problème en théorie élémentaire des nombres, comme le ferait la solution de nombreuses ÉQUATIONS DIOPHANTINES. (L'utilisation du mot élémentaire ici n'implique nullement que le niveau de la sophistication mathématique utilisée est élémentaire.) LA THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRE intègre la notion de LIMIT dans l'étude des nombres, et nombre algébrique théorie étend l'étude de la théorie des nombres à un étude des NOMBRES ALGEBRIQUES et des nouveaux systèmes de numération qui incluent des solutions à des problèmes algébriques autrement insolubles équations.

Voir aussi ALGEBRE ABSTRAITE ; CONJEC TURE CATALAN; CONJECTURE DE COLLATZ ; LA PREUVE D'EUCLIDE INFINITUDE DES PREMIERS ; ALGORITHME EUCLIDIEN ; FUN THÉORÈME DAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE ; LES POSTULATS DE PEANO ; PRIME; THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS.

différenciation numérique La DÉRIVÉE d'une fonction f(x) peut être bien approchée comme un "Newton quotient":

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

au moins pour les petites valeurs de h. Toute utilisation de cette formule pour approcher la valeur d'une dérivée est appelée différenciation numérique. Par exemple, on peut approximer la dérivée de $f(x) = x^2$ en x = 7 simplement comme $f'(7) \approx \frac{(7 + 0{,}1)^2 - 72}{0{,}1} = 14{,}1$.

Réécriture de la formule du quotient de Newton donne :

$$f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$$

Si la dérivée de la fonction est connue, alors cette formule peut être utilisée pour approximer les valeurs de f. Par exemple, pour estimer les racines carrées, posons $f(x) = \sqrt{x}$ pour obtenir :

$$\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + h\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ainsi $\sqrt{38}$, par exemple, vaut environ $\sqrt{36} + \frac{2}{2\sqrt{36}} = 6 + \frac{1}{6} \approx 6{,}167$.

La dérivée seconde d'une fonction est bien approximé par le quotient :

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Cela suit en utilisant l'approximation $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, avec $f'(x+h) \approx \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h}$ et $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Voir aussi MÉTHODE DE NEWTON .

intégration numérique Selon la théorie de CALCUL INTÉGRAL, la valeur numérique d'un intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est déterminé en trouvant une primitive tive F(x) à l'intégrande f(x) puis en calculant la quantité F(b) – F(a). Bien que théoriquement valable, il est rare dans les applications du monde réel qu'une telle procédure puisse jamais être complétée. Il y a deux possibilités complications:

1. Une primitive de l'intégrande ne peut pas être trouvée. (Considérons l'intégrale $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$, par exemple.)
2. La fonction f(x) peut ne pas être complètement spécifiée. (Lors de la réalisation d'une expérience, on ne peut jamais enregistrer un nombre fini de valeurs de données, auquel cas les valeurs d'une fonction f(x) ne sont connues qu'à un nombre fini de points.)

Néanmoins, malgré ces limites, les scientifiques et les ingénieurs ont souvent encore besoin d'une valeur numérique pour l'aire sous la courbe y = f(x), au moins avec un certain degré de précision spécifié. L'intégration numérique est quelconque technique qui permet de trouver une valeur approximative pour une intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$. Il y a deux éléments méthodes actuellement utilisées :

1. Règle trapézoïdale (également connue sous le nom de trapèze règle) : Diviser l'intervalle [a,b] en n + 1 de manière égale points espacés a = x0 , x1 ,…xn–1, xn = b. Par commodité, notons f(xi) par fi et notons Pi le point (xi , fi) sur la courbe ci-dessus x = xi . La ligne droite le segment reliant Pi à Pi+1 peut être utilisé comme approximation pour la courbe y = f(x) entre et xi et xi+1. L'aire sous cette partie de la courbe est donc approximativement l'aire d'un trapèze de largeur $h = \frac{b - a}{n}$, bord gauche de hauteur fi et bord droit de hauteur fi+1. Cette aire est donnée par $\frac{1}{2}$: h(fi + fi+1).

Machine Translated by Google

L'addition des aires de tous ces trapèzes entre a et b donne la règle des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

Les mathématiciens ont montré que l'erreur dans cette approximation est proche de $\frac{C}{n^2}$, pour une constante C. Donc doubler le nombre de points utilisés pour faire l'approximation augmente la précision du résultat d'un facteur 4.

Pour illustrer la règle du trapèze, nous estimons $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ en utilisant $n = 4$, ici $f(x) = \sqrt{1-x}$ et $x0 = 0$, $x1 = 0,25$, $x2 = 0,5$, $x3 = 0,75$, $x4 = 1$ avec $h = 0,25$.

Nous avons :

$$f0 = 1$$
$$f1 = \sqrt{0,75} = 0,866$$
$$f2 = \sqrt{0,5} = 0,707$$
$$f3 = \sqrt{0,25} = 0,500$$
$$f4 = 0$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx \approx \frac{0,25}{2}\left(1 + 2(0,866) + 2(0,707) + 2(0,500) + 0\right)$$
$$= 0.643$$

(La vraie valeur de l'intégrale est 2/3.)

2. Règle de Simpson : Alors que la règle trapézoïdale utilise des segments de ligne droite pour approximer la courbe, la règle de Simpson utilise les arcs de paraboles passant par trois points à la fois : un passant par les points P0 , P1 et P2 , le suivant passant par P2 , P3 , et P4 , et ainsi de suite. (On suppose que n est pair pour cette méthode.)

en calculant les équations de chacun de ces arcs paraboliques et en additionnant les aires sous chacun, on obtient, après quelques travaux, la règle :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

Les mathématiciens ont montré que l'erreur dans cette approximation est $\frac{C}{n^4}$ pour une constante C. Ainsi, doubler le nombre de points utilisés pour faire l'approximation augmente la précision du résultat d'un facteur 16.

Pour illustrer la règle de Simpson, nous estimons à nouveau $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ en utilisant n = 4. Nous avons :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx \approx \frac{0,25}{3}\left(1 + 4(0,866) + 2(0,707) + 4(0,500) + 0\right)$$
$$= 0.657$$

Si n est un multiple de 3, on peut utiliser des arcs de courbes cubiques pour établir la règle :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \cdots + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right)$$

Ceci est parfois appelé la règle des 3/8 de Simpson.

Ces méthodes d'approximation sont attribuées à tort au professeur de mathématiques anglais THOMAS SIMPSON (1710-1761).

Voir aussi MÉTHODE DE MONTE CARLO ; NUMÉRIQUE DIFFÉRENCIATION.

Machine Translated by Google

O

oblate/prolate Une surface incurvée semblable à une sphère mais allongée ou raccourcie dans une direction est appelée un sphéroïde. Si la longueur du diamètre de pôle à pôle est supérieure à la longueur du diamètre reliant deux points opposés sur l'équateur, alors le sphéroïde est dit aplati. Si, au contraire, le diamètre polaire est inférieur au diamètre équatorial, alors le sphéroïde est dit allongé. La Terre, par exemple, n'est pas une sphère parfaite mais un sphéroïde aplati.

Voir aussi TERRE ; ELLIPSOÏDE ; SPHÈRE.

oblique Ce terme est utilisé dans un certain nombre de paramètres géométriques pour signifier soit "pas à angle droit" ou "ne contient pas d'angle droit". Par exemple, deux lignes sécantes tracées dans le plan sont obliques si elles se rencontrent à un ANGLE différent de 90°, ou trois lignes se rencontrant en un point de l'espace tridimensionnel sont obliques si elles ne sont pas mutuellement perpendiculaires. Une seule ligne tracée dans le plan est appelée une ligne oblique si elle n'est ni horizontale ni verticale, et un système de coordonnées oblique a des axes qui ne sont pas à angle droit.

Tout angle qui n'est pas un multiple de 90° est appelé angle oblique. Un triangle oblique est un triangle qui ne contient pas d'angle droit.

Un cône oblique est un cône dont le sommet n'est pas directement au-dessus du centre de sa base (et donc la ligne reliant le sommet au centre de la base n'est pas perpendiculaire à la base). Un prisme oblique a des bords latéraux qui ne sont pas perpendiculaires à la base.

Voir aussi COORDONNEES CARTESIENNES ; ANGLE DROIT; LIGNES INCLINÉES.

angle obtus Un ANGLE compris entre 90° et 180° est appelé un angle obtus. Un TRIANGLE dont l'un des angles est obtus est appelé triangle obtus. Selon la LOI DES COSINS, un triangle dont les côtés sont a, b et c, et les angles correspondants A, B, C opposés à ces côtés, satisfait :

$$\text{CosC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Pour que l'angle C soit obtus, il faut que cosC < 0, c'est-à-dire a $^2 + b^2 < c^2$. Ainsi un triangle a, b, c est obtus si l'une des inégalités suivantes est vraie : $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$, $c^2 < a^2 + b^2$.

Un angle compris entre 180° et 360° est appelé angle réflexe. Un angle de 180° degrés est un angle droit, et un angle de 360° s'appelle un tour complet ou un PERIGON.

Voir aussi ANGLE AIGU ; THÉORÈME DE PYTHAGORE ; TRIANGLE.

avers Changer le prédicat B d'un énoncé de la forme « tous les A sont B » du positif au négatif, ou vice versa, et nier l'énoncé dans son ensemble produit l'avers de l'énoncé : « aucun A n'est pas B ».

Par exemple, l'avers de la déclaration "tous les hommes sont mortels" est "aucun homme n'est immortel". Les diagrammes d'Euler montrent que tout énoncé de ce type est logiquement équivalent à son avers.

Voir aussi ARGUMENT.

Machine Translated by Google

octant Les plans xy, yz et xz dans un système tridimensionnel de COORDONNEES CARTESIENNES divisent l'espace en huit régions appelées « octants ». L'ensemble des points (x,y,z) satisfaisant x > 0, y > 0 et z > 0 constituent la premier ou "positif" octant. Les octants restants sont étiquetés les deuxième, troisième et quatrième octants dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l' axe z positif, avec le cinquième, sixième, septième et huitième octants sous ces quatre, toujours dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, avec le cinquième octant directement sous le premier.

L'analogue bidimensionnel d'un octant est un QUAD RANT. Pour n supérieur à trois, l' analogue à n dimensions est appelé un orthant. Points dans l'orthant positif avoir toutes les coordonnées positives. Science-fiction populaire les romans décrivent souvent l'espace comme divisé en quadrants. C'est le terme incorrect pour l'espace tridimensionnel.

Un ANGLE de 45° est aussi parfois appelé un octant.

chances Si dans un jeu de hasard il y a un résultat jugées favorables (constituant ainsi un ÉVÉNEMENT souhaité E), et b résultats défavorables (pas dans E), alors la cote en faveur de E est le rapport $\frac{a}{b}$, généralement écrit a:b ou "a à b", et les chances contre E b est le rapport $\frac{b}{a}$, écrit b:a ou "b à a".

Par exemple, en jetant un dé, les chances en faveur de rouler un 2 sont 1: 5. Il n'y a qu'un résultat favorable, à savoir un 2, et cinq résultats défavorables : {1,3,4,5,6}. Les cotes sont généralement écrites sous forme réduite. Par exemple, si les chances en faveur d'un événement sont de 12 contre 4, un écrit généralement 3:1 plutôt que 12:4.

Les probabilités sont étroitement liées aux calculs de PROBABILITÉ . Si les chances en faveur d'un événement E sont a sur b, alors on est informé que a d'un total de a + b possible appartiennent à l'ensemble E. Ainsi, la probabilité que l'événement E se produise est donnée par P(E) = $\frac{a}{a+b}$, et celui de qu'il ne se produise pas par P(not E) $\frac{b}{a+b}$. A l'inverse, si le = probabilité qu'un événement E soit connu, alors la cote dans faveur de E peut être calculé comme un rapport de probabilités : $\frac{P(E)}{P(\text{pas } E)} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a+b}} = \frac{a}{b}$, et les chances contre comme le rapport inverse des probabilités.

Les cotes sont généralement utilisées lors des courses de chevaux, généralement "chances contre" - pour dire aux joueurs les gains sur vari nos paris. Par exemple, une cote annoncée de 5 contre 3 sur un cheval particulier indique qu'un pari de 3 $ sur ce cheval gagnera 5 $ (plus le retour des trois dollars initiaux) si ce cheval remporte la course. Il indique également au joueur que ce cheval n'aurait qu'un 3/8 chance de gagner.

Omar Khayyám (Umar al-Kh– ayamm– ı) (1048–1122) Algèbre arabe , Astronomie Né le 18 mai 1048, On se souvient du savant persan Omar Khayyám dans mathématiques pour ses importantes contributions à la avancement de l'ALGÈBRE. Dans son célèbre texte, Treatise on Démonstration de problèmes d'algèbre, Khayyám a développé des règles géométriques et algébriques pour résoudre QUADRATIQUE et ÉQUATIONS CUBIQUES, en utilisant intelligemment SECTIONS CONIQUES. Il fut le premier mathématicien à jamais concevoir une théorie générale pour résoudre les cubiques et a été le premier à reconnaître que les constructions à la règle et au compas seules ne suffiraient jamais comme approche géométrique pour cet objectif. En dehors des mathématiques, Omar Khayyám est surtout connu pour ses poèmes, qui ont été librement traduits par Edward Fitzgerald en 1859 dans le texte The Rubáiyát d'Omar Khayyam.

Khayyám a étudié la philosophie et les mathématiques à sa ville natale de Nishapur, en Perse (aujourd'hui l'Iran), et est rapidement devenu un érudit expert. A 25 ans, il avait écrit trois textes significatifs : un sur la musique, un sur arithmétique, et un premier texte sur le thème de l'algèbre. En 1073, Khayyám a déménagé dans la ville d'Esfah - pour aider avec la construction d'un observatoire et à la tête d'un équipe de scientifiques étudiant l'astronomie. Au cours de ses 18 années à l'observatoire Khayyám terminé tableaux extraordinairement précis de données astronomiques et tables de valeurs trigonométriques. Il a également calculé la longueur de l'année à 365,24219858156 jours, ce qui, à l'époque, était exacte à la sixième décimale près. (Le la durée d'une année évolue avec le temps. Aujourd'hui, sa valeur est 365,242190 jours. La valeur de la sixième décimale changements au cours d'un siècle.)

Plus tard dans la vie, Khayyám a déménagé au centre culturel de Merv (aujourd'hui Mary au Turkménistan) et retourna dans son intérêt pour l'algèbre. Il écrivit son célèbre traité sur la sujet alors que là-bas. Khayyám a noté que le grand grec les savants de l'antiquité n'ont fait aucune étude sérieuse de la théorie d'équations cubiques et a décidé de prendre sur lui de développer ce travail de manière appropriée. Khayyám a créé des méthodes géométriques ingénieuses pour trouver des équations cubiques, mais

Machine Translated by Google

jamais, comme il l'espérait, trouvé des techniques algébriques utilisables. Néanmoins, Khayyám a réussi à classer toutes les équations cubiques et a été le premier à reconnaître que de telles équations pouvaient posséder deux solutions différentes. (Il n'est pas clair si Khayyám a compris ou non que les cubiques pourraient, en fait, posséder trois solutions distinctes.)

Une grande partie du travail de Khayyám sur la THÉORIE DES NOMBRE et les méthodes de calcul numérique a été perdue. Son développement du TRIANGLE DE PASCAL , comme on l'appelle aujourd'hui, et son utilisation dans le THÉORÈME BINÔMIAL, par exemple, ne sont mentionnés qu'en passant dans son célèbre ouvrage algébrique. Khayyám a également écrit sur les principes fondateurs de la géométrie. Il a essayé d'établir que le fameux POSTULAT PARALLÈLE est une conséquence d'autres postulats (échouant, bien sûr), mais a découvert en cours de route un certain nombre de résultats significatifs sur les figures non euclidiennes. Il est surtout connu pour ses contributions à l'algèbre.

Khayyám est mort dans la ville de Nishapur, en Perse (aujourd'hui l'Iran), ca. 4 décembre 1122.

opération Toute procédure mécaniste sur les éléments d'un ensemble qui produit un résultat unique pour ces éléments est appelée une opération sur cet ensemble. Par exemple, l'addition est une opération sur l'ensemble des nombres entiers : pour toute collection de nombres entiers, il existe une valeur unique appelée leur somme. L'acte de trouver l'union de deux ensembles est une opération sur la collection de tous les ensembles.

Une OPÉRATION UNAIRE est une règle qui associe un résultat à chaque élément d'un ensemble S. L'action d'élever au carré un nombre, par exemple, est une opération unaire sur l'ensemble des nombres réels. UNE OPÉRATION BINAIRE fournit un résultat pour tous les deux éléments d'un ensemble S. L'addition de deux entiers est une opération binaire sur l'ensemble de tous les entiers.

En ARITHMÉTIQUE, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines carrées sont appelées opérations élémentaires. En revanche, la règle qui associe à chaque nombre naturel la somme de ses chiffres, par exemple, n'est pas élémentaire.

Un symbole utilisé pour désigner une opération est parfois et appelé opérateur. Par exemple, +, –, ×, ÷, $\sqrt{\ }$, log10 sont des opérateurs.

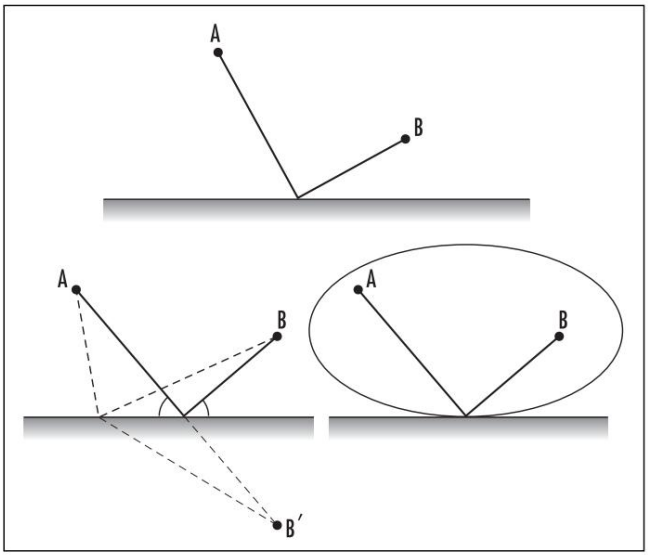
recherche opérationnelle (recherche opérationnelle, OR) L'étude du rôle des mathématiques et des STATISTIQUES dans la résolution des problèmes qui se posent dans les affaires, le commerce et la production de biens et de services est appelée recherche opérationnelle. Souvent, un problème d'OPTIMISATION se posera dans toute tentative de minimiser les coûts ou de maximiser les profits, et les techniques de PROGRAMMATION LINÉAIRE peuvent être nécessaires. Le problème de la planification des tâches interdépendantes peut être analysé via la THÉORIE DES GRAPHES, et la recherche d'un CHEMIN CRITIQUE dans un diagramme schématique peut conduire à des pratiques commerciales améliorées. Le PROBLÈME DU VENDEUR VOYAGEUR illustre également le rôle de la théorie des graphes dans la détermination de la livraison efficace des marchandises. Les problèmes de qualité et de fiabilité de la production dépendent fortement des techniques d'inférence statistique, tandis que les mathématiques de la THÉORIE DES JEUX ont aidé les entreprises à concevoir des stratégies de marché et des pratiques commerciales mutuelle

opposé Un côté d'un TRIANGLE est dit opposé à un angle donné dans le triangle si ce côté n'est pas l'un des bras formant l'angle. Par exemple, le côté opposé au plus grand angle d'un triangle est le côté le plus long du triangle. (Cela découle de la LOI DES COSINS.)

Deux droites se coupant en un point (souvent appelé sommet) forment quatre angles. Toute paire d'angles partageant ce sommet, mais n'ayant pas de bras en commun, est appelée une paire d'angles opposés ou verticaux. Ils ont la même mesure.

Si une figure géométrique a un centre de symétrie, alors deux côtés ou deux angles sont dits opposés s'ils sont reliés par une ligne passant par ce centre.

optimisation Le processus de recherche de la meilleure solution possible à un problème s'appelle l'optimisation. Dans



Résoudre le problème du "chemin le plus court"

Machine Translated by Google

Mathématiques Cela nécessite généralement de trouver la valeur maximale ou minimale d'une fonction, éventuellement soumise à certaines contraintes. Les techniques de CALCULUS réussissent immensément à atteindre de tels objectifs. (Voir MAXIMUM/MINIMUM.)

Certains problèmes d'optimisation peuvent être résolus géométriquement. Considérez, par exemple, le défi de trouver le chemin le plus court d'un point A à un point B qui "vise" un mur droit. Constatant qu'il suffit de ne considérer que des chemins composés de deux segments de droite, on se demande quelle paire de segments donne le trajet le plus court.

Notez que chaque chemin de A à B via le mur correspond à un chemin de même longueur de A au même point de contact sur le mur, puis à l'image miroir B 'de B de l'autre côté du mur. Comme le chemin rectiligne reliant A à B′ (faisant des angles égaux de part et d'autre du mur) est le chemin le plus court de A à B′, il s'ensuit que le chemin le plus court de A à B via le mur est celui qui rebondit sur le mur à angles égaux. Alternativement, on peut résoudre ce problème en traçant des ELLIPSES autour des points A et B avec A et B comme foyers. La première ellipse qui touche le mur donne l'emplacement sur le mur qui donne le chemin le plus court de A à B via le mur.

Le fait que ces deux solutions résolvent le même problème établit la propriété de réflexion bien connue d'une ellipse : comme tout chemin d'un foyer A d'une ellipse à un point sur la courbe de l'ellipse et retour au deuxième foyer B est une solution au problème de cheminement (le mur droit étant la tangente à l'ellipse), il s'ensuit que ce chemin rebondit sur le côté de l'ellipse à angles égaux. Par conséquent, un faisceau lumineux émis à partir d'un foyer A d'une ellipse suit une trajectoire qui se réfléchit sur le côté de l'ellipse pour arriver au deuxième foyer B.

La loi de réfraction de SNELL peut également être considérée comme la solution à un problème d'optimisation.

Voir aussi TRIANGLE ISOCÈLE ; PROGRAMMATION LINÉAIRE; RECHERCHE OPÉRATIONNELLE; TRIANGLE DE PÉDALE ; STEINER INDIQUER.

orbite Voir SYSTEME DYNAMIQUE.

ensemble ordonné Un ensemble S est dit partiellement ordonné s'il est muni d'une relation, généralement notée ≤, qui permet de comparer la taille ou les positions relatives d'éléments dans l'ensemble. La relation ≤ doit satisfaire les trois conditions suivantes :

1. Réflexivité : a ≤ a pour tout a S.
2. Antisymétrie : Si a ≤ b et b ≤ a, alors a = b.
3. Transitivité faible : Si a ≤ b et b ≤ c, alors a ≤ c.

Par exemple, interpréter ≤ comme "inférieur ou égal à" fournit un ordre partiel sur l'ensemble de tous les nombres réels.
Par exemple, 4,6 ≤ √– 30 et –1 ≤ 0. L'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble {A,B,C,D,E}, par exemple, est partiellement ordonné si l'on interprète ≤ comme signifiant "est un sous-ensemble de." Dans ce cas, par exemple, {B,D} ≤ {A,B,D,} et Ø ≤ {C}, mais {A,B,C} ≤/ {B,C,D,E}. L'ensemble des nombres naturels peut également être partiellement ordonné en interprétant ≤ comme "est un facteur de". Par exemple, dans ce cadre, nous avons 3 ≤ 6 et 4 ≤ 12, mais 5 ≤/ 12. Remarquez dans ces deux derniers exemples que tous les éléments de l'ensemble ne peuvent pas être comparés.

Un ensemble est dit totalement ordonné si une quatrième condition est vérifiée :

4. Trichotomie : Pour tout a,b S , soit a ≤ b , soit b ≤ a .
(Si les deux sont valables, alors a = b.)

L'ensemble de tous les nombres réels, ou l'ensemble de tous les nombres naturels, par exemple, sont tous deux totalement ordonnés sous la relation "inférieur ou égal à". Les nombres naturels, cependant, ne sont pas totalement ordonnés sous la relation « est un facteur de ». Ni l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné.

Parfois, un ensemble totalement ordonné est appelé une chaîne ou une séquence, puisque tous les éléments peuvent être disposés sur une ligne, avec chaque élément sur la ligne par rapport ≤ à chaque élément à sa droite.

Il est souvent commode d'écrire b ≥ a pour signifier a ≤ b et a < b pour signifier a ≤ b et a ≠ b. L'énoncé b > a est interprété de la même manière. Par exemple, dans l'exemple des sous-ensembles, nous avons {A} < {A,B} et {C,D} ≥ {D,C}. (En fait, {C,D} = {D,C}.)

Étant donné deux éléments a et b d'un ensemble S de relation d'ordre partiel ≤, on dit qu'un élément u de S est majorant pour a et b si a ≤ u et b ≤ u. Nous appelons u une borne supérieure si u est plus petite que toute autre borne supérieure pour a et b ; autrement dit, si a ≤ v et b ≤ v pour un autre élément v, alors u ≤ v. Par exemple, dans l'exemple des sous-ensembles, la plus petite borne supérieure de {A,B} et {B,C} existe et est égal à leur union {A,B,C}. De même, un élément l est une borne inférieure pour a et b si l ≤ a et l ≤ b,

Machine Translated by Google

et c'est une plus grande borne inférieure si l est plus grand que toute autre borne inférieure pour a et b. Dans notre exemple, la plus grande borne inférieure de {A,B} et {B,C} est leur intersection {B}. Un ensemble partiellement ordonné est appelé un treillis si chaque paire d'éléments a une plus petite borne supérieure et une plus grande borne inférieure. L'existence d'unions et d'intersections montre que l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné est un treillis. L'ensemble des nombres naturels sous la relation "est un facteur de" est également un treillis : la plus petite borne supérieure de deux nombres naturels est leur plus petit MULTIPLE COMMUN, et la plus grande borne inférieure est leur PLUS GRAND FACTEUR COMMUN. De nombreux résultats de la THÉORIE DES NOMBRE peuvent être interprétés comme des déclarations sur cette relation d'ordre des nombres naturels.

Tout ensemble totalement ordonné est un treillis. Par exemple, la plus petite limite supérieure de deux nombres réels a et b est simplement celle qui est la plus grande des deux, et leur plus grande limite inférieure est le plus petit nombre.

Voir aussi BOUND ; PROPRIÉTÉS DE LA COMMANDE.

ordre d'une matrice (dimension d'une matrice) Une MATRICE m × n , c'est-à-dire une matrice à m lignes et n colonnes, est dite d'ordre m × n (lu comme « m par n »). Une matrice n × n est parfois appelée matrice carrée d'ordre n.

En THÉORIE DES GROUPES, un élément g d'un GROUPE est dit d'ordre n si n est le premier entier positif tel que = e, en supposant qu'il existe un tel entier. (Voici e est le g^n Si, dans certains travaux mathématiques , on considère les matrices comme des éléments d'un groupe, on réserve généralement le mot ordre pour un sens théorique de groupe, et on utilise le mot dimension pour décrire la taille de la matrice. . Par exemple, la matrice

$$A = \begin{matrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{matrix}$$

est une matrice carrée de dimension 3 et d'ordre 2, puisque A2 = I.

Voir aussi MATRICE D'IDENTITÉ.

ordre de grandeur Voir NOTATION SCIENTIFIQUE.

ordre des opérations (précédence opérationnelle) Lors de l'évaluation de calculs arithmétiques impliquant plus de un type d'opération, les mathématiciens ont assigné un ordre de priorité quant aux opérations qui sont exercées en premier.

Il est convenu que tout calcul impliquant l'ADDI TION seule est effectué dans l'ordre lu de gauche à droite. Par exemple, 8 + 5 + 2 est calculé comme 13 + 2, soit 15. (Bien que la propriété ASSOCIATIVE de l'addition montre que l'ordre de calcul dans ce cas n'a pas d'importance.) Comme la SOUSTRACTION peut être considérée comme l'addition de moins quantités, tout calcul impliquant à la fois une addition et une soustraction est donc effectué de la même manière, en se lisant de gauche à droite.

Par exemple, 2 – 5 + 7 est calculé comme (–3) + 7, soit 4. (Encore une fois, la propriété associative montre que suivre cette convention n'est pas vital.)

La MULTIPLICATION peut être considérée comme une "addition répétée" et donc, dans un certain sens, est une opération plus puissante que l'addition et la soustraction. Il est prioritaire sur ces opérations. La DIVISION, qui peut être considérée comme une multiplication par des quantités RÉCIPROQUES , reçoit le même statut. Ainsi, étant donné tout calcul impliquant les quatre opérations, on s'attend à calculer toutes les multiplications et divisions qui apparaissent en premier (lues de gauche à droite) et toutes les additions et soustractions en second. Par exemple, on calcule :

$$2 + 4 \times 3 \div 6 – 3 \times 3 + 5$$

comme 2 + 12 ÷ 6 – 9 + 5, ce qui équivaut à 2 + 2 – 9 + 5, qui est zéro. (Lire strictement de gauche à droite produit la réponse incorrecte de 5.)

Comme les EXPOSANTS peuvent être considérés comme un acte d'exécution de multiplications répétées, toutes les puissances qui apparaissent dans un calcul ont la priorité sur les multiplications et les divisions, et doivent donc être calculées en premier. Par exemple, 2 + 62 ÷ 9 est calculé comme 2 + 36 ÷ 9 = 2 + 4 = 6.

Souvent, des parenthèses ou des CROCHETS sont introduits pour modifier l'ordre des opérations dans un calcul. Les mathématiciens suivent la convention selon laquelle si des parenthèses sont présentes, il faut d'abord calculer les quantités à l'intérieur des parenthèses (en utilisant les règles ci-dessus). Si plusieurs ensembles de parenthèses sont présents, cela nécessite d'abord d'évaluer les parenthèses les plus internes. Par exemple, nous calculons :

$$2 \times (3 + (32 + 6) \times 2) + 1$$

comme

Machine Translated by Google

$$2 \times (3 + (32 + 6) \times 2) + 1 = 2 \times (3 + (9 + 6) \times 2) + 1 = 2 \times (3 + 15 \times 2) + 1 = 2 \times (3 + 30) + 1 = 2 \times 33 + 1 = 66 + 1 = 67$$

On enseigne souvent aux écoliers un moyen mnémotechnique tel que « Veuillez excuser ma chère tante Sally » pour rappeler l'ordre des opérations : parenthèses, exposants, multiplication, division, addition, soustraction.

Voir aussi SUPPORTS D'EXTENSION.

propriétés d'ordre Les NOMBRES RÉELS satisfont un certain nombre de propriétés de base par rapport à la relation d'ordre <, c'est-à-dire strictement inférieur à. Nous avons:

1. Loi de trichotomie : pour deux nombres réels a et b, exactement l'un des suivants est vrai : a < b, b < a, ou a = b
2. Loi transitive : Si a < b et b < c, alors a < c.
3. Loi d'addition : si a < b, alors a + c < b + c pour de vrai nombre C.
4. Loi de multiplication : Si a < b et c > 0, alors ac < bc.
5. Loi de complétude : Tout ensemble de nombres réels qui est délimité au-dessus a une limite inférieure supérieure .

Les deux premières propriétés sont des caractéristiques standard d'un ORDERED SET, et les deux propriétés suivantes expliquent dans quelle mesure l'addition et la multiplication respectent la relation d'ordre. La déclaration finale est une propriété clé du système des nombres réels. Dans leurs tentatives pour rendre la théorie de CALCULUS mathématiquement rigoureuse et précise, les mathématiciens se sont rendus compte qu'il fallait être sûr qu'aucun nombre ne manquait sur la droite des nombres réels. (Le THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES , par exemple, repose sur cela.) La cinquième loi ci-dessus est conçue pour garantir cela. Avec sa construction d'un DEDEKIND CUT, le mathématicien allemand JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916) a pu prouver que le système des nombres réels satisfait bien cette cinquième propriété. (L'ensemble des nombres rationnels, d'autre part, satisfait les quatre premières propriétés mais pas la cinquième, et n'est donc pas complet. Bien que, par exemple, chaque nombre rationnel x qui satisfait $x \le 2$ soit plus petit que 3, il y a pas de plus petit nombre rationnel qui fournit une borne pour tous les rationnels de ce type.)

À partir des cinq propriétés de base énumérées ci-dessus, d'autres propriétés familières des nombres réels suivent. Pour

Par exemple, on peut montrer que si a < b, alors –a > –b. (Utilisez la propriété 3 en ajoutant –a puis –b des deux côtés.) Plus généralement, nous avons que si a < b et c < 0, alors ac > bc.

De ceci et de la propriété 4, il s'ensuit que le carré de tout nombre non nul est positif : $a > 0$ pour tout a. Cette dernière observation montre également qu'il n'y a pas de relation d'ordre analogue pour les NOMBRES COMPLEXES :

> Si les nombres complexes étaient ordonnés, nous aurions $i^2 > 0$, ce qui donnerait l'énoncé absurde $-1 > 0$.

Il est souvent pratique d'écrire $a \le b$ pour signifier "inférieur ou peut-être égal à". Par exemple, $3 \le 5$ et $12 \le 12$. Souvent, les propriétés d'ordre des nombres réels sont exprimées en termes de cette version de la relation.

Voir aussi AXIOME DE CHOIX ; ENSEMBLE BIEN ORDONNÉ.

nombres ordinaux Dans l'usage courant, les adjectifs qui dénotent la position d'objets individuels dans une séquence, tels que « premier », « deuxième » ou « 107e », sont appelés nombres ordinaux. À la fin des années 1800, le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918) nota que les nombres naturels 0, 1, 2,… satisfont la propriété d'ordre simple suivante :

> Si l'on écrit un nombre fini de nombres naturels, il y a toujours un nombre naturel le plus ancien unique qui a été omis de la liste.

Par exemple, dans la liste {0,1,4,7} le nombre 2 est le premier nombre naturel absent de cette liste. Utilisons les notations a,b,c,…| pour le premier nombre naturel manquant dans la collection a,b,c, … Par exemple, on a :

$$0,1,4,7 | = 2$$
$$0,1,2,3,4 | = 5$$
$$0 | = 1$$

Cantor a envisagé la possibilité de permettre aux listes de nombres naturels utilisées d'être infinies. Il a défini une quantité ω (oméga) comme :

$$\omega = 0,1,2,3,\ldots|$$

c'est-à-dire que ω est le premier nombre supérieur à tout nombre naturel fini. Il s'ensuit alors que $0,1,2,3,\ldots,\omega| = \omega + 1$, le premier nombre après ω, et $0,1,2,3,\ldots,\omega, \omega + 1| = \omega + 2$, et ainsi de suite. On peut continuer et établir que

Machine Translated by Google

$$0,1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots| = \omega + \omega = \omega \times 2$$

et

$$0,1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots,\omega+\omega,\omega+\omega+1,\ldots| = \omega+\omega+\omega = \omega \times 3$$

et, en poursuivant ce processus :

0,1,2,3,..., 1, ω + ,...

1, ω, ω, ω + + ,...

ω, ω, ω, ω, ω + ,...

| ωωωω = ++++

= ωω

= 2ω

De cette façon, Cantor a réussi à développer un nouveau type extraordinaire d'arithmétique qui étend l'ensemble des nombres naturels à un système qui inclut des nombres transfinis. Puisque ces quantités étaient dérivées de la propriété d'ordre des nombres naturels, il a appelé ces nouveaux nombres des nombres ordinaux. Cantor a développé des règles claires et précises pour faire de l'arithmétique avec ces nombres, y compris l'addition, la multiplication et l'élévation des nombres ordinaux aux puissances les uns des autres. Cantor a noté que le nombre ordinal ω^{ω} est le premier nombre ordinal qui ne peut pas être obtenu à partir de ω nombres ordinaux antérieurs par un nombre fini d'additions, de multiplications et d'exponentiations. Il a appelé ce nombre ε_0 .

Suivant l'approche adoptée dans l'étude de CAR DINALITY, Cantor a également montré que les nombres ordinaux peuvent alternativement être construits comme suit. Considérons d'abord deux ensembles, dont chacun des éléments est ordonné, comme étant du même nombre ordinal s'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles qui préserve l'ordre de ces éléments. (Par exemple, l'ensemble des nombres entiers négatifs et l'ensemble des nombres entiers positifs ont le même nombre ordinal via la correspondance $n \leftrightarrow -n$.) Alors ω est défini comme étant le nombre ordinal de l'ensemble des nombres naturels.

Oresme, Nicole (ca. 1323–1382) Français Géométrie des coordonnées Née ca. 1323 en Allemagne, France, (la date de naissance exacte n'est pas connue) l'érudit médiéval Nicole Oresme est surtout connu en mathématiques pour les études du mouvement, et en tant que premier érudit à décrire une relation entre deux variables sous la forme d'un GRAPHIQUE D'UNE FONCTION.

Oresme a étudié la théorie du mouvement d'ARISTOTE , la cinématique, à l'Université de Paris sous la direction du philosophe et logicien Jean Buridan. Il obtint une licence ès arts au début des années 1340 et obtint plus tard une maîtrise en théologie dans la même institution en 1355. Bien qu'Oresme ait suivi une carrière dédiée au travail dans un ordre catholique (il fut nommé plus tard évêque de Lisieux) , Oresme continua de s'intéresser activement à l'œuvre d'Aristote tout au long de sa vie et publia d'importants ouvrages qui influencèrent la réflexion scientifique sur ce sujet. Oresme rencontra des difficultés philosophiques avec les définitions du temps et de l'espace proposées par Aristote, qui dépendaient elles-mêmes de la notion de mouvement, et proposa des définitions alternatives indépendantes de ce concept.

L'œuvre la plus importante d'Oresme est peut-être De configurationibus qualitatum et motuum (La géométrie des qualités et du mouvement), dans laquelle il décrit, pour la première fois, une procédure générale de représentation picturale des relations entre variables. De plus, il s'est rendu compte que l'aire sous le graphique d'une quantité uniformément variable représente le changement total de la quantité. Oresme avait alors inventé un type de géométrie de coordonnées et fait ses premiers pas vers le travail en CALCUL intégral.

(Dans ce même travail, Oresme a également prouvé que la distance parcourue en un temps fixe par un objet se déplaçant à accélération constante est la même que pour un objet se déplaçant à une vitesse uniforme égale à la vitesse du premier objet au milieu du temps Il s'agit d'une réalisation remarquable étant donné que les outils et les techniques de calcul ne lui étaient pas disponibles à l'époque.)

Oresme a également étudié les SERIES infinies , utilisant souvent des astuces graphiques ingénieuses pour établir des résultats. La preuve standard de la divergence de la SÉRIE HARMONIQUE (en regroupant les termes de la série et en comparant avec des sommes de moitié) lui revient.

Ses études sur les mouvements des planètes l'ont également amené à étudier les proportions et les NOMBRES RATIONNELS. Oresme a été le premier spécialiste de l'histoire des mathématiques à considérer et à travailler avec les exposants fractionnaires. Comme les savants de l'antiquité, Oresme recherchait l'harmonie dans l'univers. Il a proposé, par exemple, que le rapport des périodes de deux corps célestes aura toujours une valeur rationnelle. (Ce n'est pas le cas.)

Oresme est mort à Lisieux, France, en 1382. L'exact la date de décès n'est pas connue.

Machine Translated by Google

orientation En mathématiques, le terme orientation est utilisé pour désigner un sens de direction ou de rotation. Pour Par exemple, une ligne étiquetée avec une direction est dite être orienté, et une boucle fermée dessinée dans le plan peut se voir attribuer une orientation dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Dans un espace à deux et trois dimensions, les axes de coordonnées sont dits positifs ou négatifs. orientés (et sont appelés DROITIER/GAUCHE SYSTEMS), et une surface, telle qu'une SPHERE par exemple, est dit orientable, puisqu'en tout point de la surface il y a, grosso modo, une notion bien définie de "haut". (Par exemple, en tant qu'habitants de la surface de la Terre que nous définissons "jusqu'à" dans la direction pointant loin du centre de la Terre.) Toutes les surfaces ne sont pas orientable. Le MÖBIUS BAND, par exemple, est une surface qu'on ne peut pas orienter.

orthogonal (perpendiculaire) Ce terme est utilisé dans paramètre pour décrire deux constructions géométriques qui se rencontrent A l'angle droit. Par exemple, deux courbes, ou droite droites, sont orthogonales si elles se coupent à angle droit, c'est-à-dire l'angle entre les deux TANGENTES au courbes au point d'intersection est de 90°. Deux VECTEURS sont orthogonaux si l'angle entre eux est de 90° (et par conséquent leur produit scalaire est nul). Deux surfaces peut aussi être dit orthogonal. Par exemple, un avion passant par le centre d'une sphère coupe le surface de la sphère orthogonalement - le plan tangent à la sphère en tout point d'intersection est perpendiculaire au plan donné.

Le terme orthogonal est également utilisé dans certains contextes généralisés. Par exemple, deux fonctions f et g sont dit orthogonal sur l'intervalle [a,b] si l'intégrale $\int_{un}^{b} f(x)g(x)dx$ vaut zéro. (Le produit scalaire a · b de deux vecteurs a = < a1 , a2 ,…, an > et b = < b1 , b2 ,…, bn > est la somme des composantes vectorielles multipliées entre elles : a · b = a1b1 + a2b2 +…+ anbn . L'intégrale ci-dessus est un somme généralisée des composantes des fonctions multipliés ensemble.) Les fonctions sin(x) et cos(x), par exemple, sont orthogonaux sur l'intervalle [0, 2π]. C'est une observation importante pour le développement de la SÉRIE FOURIER.

Une MATRICE est dite orthogonale si ses lignes représentent des vecteurs qui, pris deux à la fois, ont des points produit égal à zéro.

Voir aussi NORMALE A UNE COURBE ; NORMALE À A AVION; NORMAL À UNE SURFACE.

La règle d'Osborne Les mathématiciens ont observé que chaque identité trigonométrique donne une identité pour FONCTIONS HYPERBOLIQUES si simplement :

1. Remplacez chaque fonction trigonométrique par son analogue hyperbolique.
2. Changer le signe de tout terme impliquant le produit de deux sinus hyperboliques (sinh).

Ce principe s'appelle la règle d'Osborne. Par exemple, de l'identité trigonométrique cos(x + y) = cosx cosy – sinx siny, on obtient l'identité hyperbolique cosh(x + y) = cosh x coshy + sinhx sinhy. De 1 + 1 tan2x = sec2x, qui est $1 + \frac{\text{péché}^2 X}{2\cos x} = \frac{}{2\cos X}$, suit $1 - \frac{\text{péché}^2 X}{\text{matraque2x}_{-}} = \frac{1}{\text{matraque2x}_{-}}$, ou 1 – tanh2x = sech2x. Ce principe fonctionne parce que, par la FORMULE D'EULER et la définition des fonctions hyperboliques, cosx = $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ = cosh(ix) et sinx = $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2_{je}}$ = –isinh(ix). Ainsi, toute identité valable pour les sinus et les cosinus sera également valable pour cosh et sinh, à l'exception d'un facteur $i^2 = -1$ modifiera le signe d'un produit de deux hyperboliques sinus.

Oughtred, William (1574–1660) Logarithmes britanniques Né le 5 mars 1574, mathématicien anglais William Oughtred est surtout connu pour son travail dans le développement et la conception du dispositif de calcul connu sous le nom de RÈGLE À CALCUL.

Au tournant du XVIIe siècle, les scientifiques enthousiasmé par la découverte récente des LOGARITHMES en tant que aide à convertir les calculs fastidieux de multiplication et de division en opérations d'addition plus simples et soustraction. En 1620 mathématicien anglais Edmund Gunter a tracé une ÉCHELLE LOGARITHMIQUE le long d'une Règle de 2 pieds de long et a montré comment une paire d'étriers pouvait être utilisé pour additionner et soustraire physiquement des longueurs, et fournissent donc, pour la première fois, un système purement mécanique moyens de calculer des produits et des quotients. Inspiré par le travail de Gunter, Oughtred a conçu une méthode plus simple dispositif composé de deux règles coulissantes qui ont accompli le même exploit. En 1632, il publie Circles of Proportion and the Horizontal Instrument, un petit livre décrivant les règles à calcul (et les cadrans solaires). Toboggan d'Oughtred la règle est devenue l'équivalent moderne de la règle d'aujourd'hui

Machine Translated by Google



William Oughtred, un érudit du XVIIe siècle, a inventé la règle à calcul moderne. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

calculatrice de poche pour les scientifiques et les universitaires pour les siècles à venir.

Oughtred était également un érudit accompli dans plusieurs branches des mathématiques. En 1631, il publia un texte influent, Clavis mathematicae (La clé des mathématiques), dans lequel il décrivait les CHIFFRES HINDOU-ARABES et la REPRÉSENTATION DÉCIMALE, et décrivait également des concepts d'algèbre. (A cette époque, les chiffres romains étaient encore utilisés.) Il a introduit les symboles × pour la multiplication et :: pour la proportion. En 1657, Oughtred a également écrit l'un des premiers textes complets sur la TRIGONOMÉTRIE, introduisant pour la première fois une notation concise pour le sujet. Il a également étudié la GÉOMÉTRIE SPHERIQUE et l'astronomie.

Étonnamment, Oughtred a reçu très peu d'éducation formelle dans le domaine des mathématiques. Il a obtenu une maîtrise du King's College de Cambridge en 1600 et a été ordonné ministre épiscopal en 1603.
En 1604, il devint le vicaire de Shalford et, plus tard, le recteur d'Albury, Surrey.

Oughtred a offert des cours de mathématiques à un certain nombre d'étudiants privés qui sont venus chez lui et y vivraient gratuitement. Le célèbre mathématicien JOHN WALLIS (1616-1703), par exemple, fut l'un de ses élèves. Oughtred est décédé à Albury, en Angleterre, le 30 juin 1660.

valeur aberrante Une observation jugée inhabituelle, et peut-être erronée parce qu'elle est largement séparée du groupe principal de points de l'échantillon, est appelée une valeur aberrante. Par exemple, dans l'ensemble {4, 8, 3, 6, 5, 6, 903}, l'observation 903 est une valeur aberrante. Les valeurs aberrantes peuvent être des observations correctes reflétant une anomalie dans le système étudié, ou elles peuvent être le résultat d'une erreur de mesure ou d'enregistrement. Par exemple, 903 pourrait être une erreur de frappe de 9, 3.

Voir aussi DONNÉES ; STATISTIQUES : DESCRIPTIVES.

ovale Dérivé du mot latin ovus pour « œuf », le terme ovale est un nom générique pour toute figure courbe qui ressemble à un cercle allongé. Il n'y a pas de définition mathématique précise pour ce terme.

Une ELLIPSE est considérée comme un ovale. Il est défini comme l'ensemble des points P dont la somme des distances à deux points fixes A et B du plan est constante : |AP| + |BP| = k. L'ensemble de tous les points P qui ont un produit constant à partir de deux points fixes A et B, |AP| × |BP| = k, décrivent également des courbes qui peuvent ressembler à des ovales. Ces courbes ont été étudiées pour la première fois par l'astronome italien du XVIIe siècle Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) et sont aujourd'hui appelées les ovales de Cassini.

Machine Translated by Google

P

deux à deux disjoints (indépendants, mutuellement exclusifs)

Une collection d'ensembles A, B, C, … est dite disjointe deux à deux si l'intersection de deux ensembles quelconques de la collection est vide. Par exemple, les ensembles {1,2}, {3,4}, {5,6}, … sont deux à deux disjoints, tout comme les trois ensembles :

A = l'ensemble de tous les nombres naturels pairs

B = l'ensemble de tous les nombres naturels 1 supérieur à une puissance de 100

C = l'ensemble de tous les nombres premiers 1 inférieur à un multiple de 4

Une collection de sous-ensembles disjoints deux à deux A, B, C, … d'un ensemble plus grand S est dite exhaustive si chaque élément de S est répertorié comme un élément d'un (un seul) sous-ensemble spécifié. Dans ce cas on dit aussi que les ensembles A, B, C, … partitionnent l'ensemble S. Le premier exemple présenté ci-dessus, par exemple, est un sous-ensemble exhaustif des nombres naturels et donc partitionne les nombres entiers positifs.
Le deuxième exemple, cependant, ne le fait pas. (Le nombre 13, par exemple, n'appartient à aucun des sous-ensembles spécifiés.)

Étant donné une partition A, B, C, … d'un ensemble S, deux éléments a et b de S sont dits équivalents, par rapport à cette partition, notée a ~ b, s'ils appartiennent au même sous-ensemble spécifié par la cloison. Par exemple, les jours de l'année sont partitionnés en sept ensembles disjoints donnés par les noms des jours de la semaine. Par exemple, le 1er août 1966 et le 30 juin 2003 sont équivalents dans ce contexte puisqu'ils appartiennent tous deux au sous-ensemble appelé "lundi".

La notion d'équivalence satisfait trois propriétés essentielles :

je. Réflexivité : tout élément a est équivalent à lui-même : a ~ a ii. Symétrie : si a est équivalent à b, alors b est équivalent à a : a ~ b b ~ a iii. Transitivité : si a est équivalent à b et b est équivalent à c, alors a est équivalent à c : a ~ b, b ~ c a ~ c

En général, toute relation « ~ » définie sur des éléments d'un ensemble S satisfaisant les trois propriétés énumérées ci-dessus est appelée relation d'équivalence sur S. Par exemple, considérer comme équivalents deux mots de la langue anglaise s'ils possèdent chacun la même nombre de voyelles est une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les mots. Il s'avère que toute relation équivalente, quelle que soit sa définition, relève d'une partition de l'ensemble sur lequel elle s'appuie. Par exemple, l'ensemble de tous les mots est partitionné par les ensembles W0 ,W1 ,W2 , … où Wk est l'ensemble de tous les mots avec précisément k voyelles.

Voir aussi FORMULE DES JOURS DE LA SEMAINE ; THÉORIE DES ENSEMBLES.

Pappus d'Alexandrie (env. 300–350 CE) Géométrie grecque Né à Alexandrie, en Égypte, Pappus est aujourd'hui considéré comme le dernier grand géomètre de l'Antiquité à avoir travaillé selon la pensée et la tradition savante grecques. Il a écrit des commentaires sur les œuvres d' EUCLIDE et de CLAUDIUS PTOLEMY, mais on se souvient surtout de son traité Synagoge (Collections), dont les volumes III-VII des huit originaux ont survécu intacts aujourd'hui.

Machine Translated by Google

Ces textes contiennent des comptes rendus détaillés d'une grande partie des mathématiques grecques, dont certaines auraient autrement été perdues pour nous.

On sait extraordinairement peu de choses sur la vie de Pappus. De nombreux historiens soupçonnent qu'il a vécu à Alexandrie toute sa vie et qu'il y a peut-être dirigé sa propre école.

La célèbre pièce de Pappus, Synagoge, a été écrite comme un guide général de toute la géométrie grecque, plus précisément, un guide d'accompagnement à lire parallèlement aux œuvres originales grecques. En tant que tels, les livres I et II couvrent l'arithmétique de base et les méthodes d'expression des grands nombres.
Le livre III examine la MOYENNE ARITHMÉTIQUE, la MOYENNE GÉOMÉTRIQUE et la MOYENNE HARMONIQUE des proportions, les propriétés de la géométrie de base et la représentation de ces moyennes en géométrie, ainsi que certaines considérations sur les SOLIDES PLATONIQUES. Le livre IV examine les courbes spéciales, y compris la SPIRALE D' ARCHIMÈDE, et le problème de la TRISECTION D'UN ANGLE.

Dans le livre V, Pappus présente une analyse mathématique de la structure des nids d'abeilles, montrant que la structure hexagonale utilise le moins de périmètre pour diviser le plan. Il examine également POLYÈDRE.
Le livre VI explore le sujet de l'astronomie, principalement en tant que revue des travaux de Théodose, Autolycus, Aris tarque et Euclide sur le sujet comme moyen de corriger les interprétations erronées courantes.

Dans le livre VII apparaît le problème suivant, aujourd'hui connu sous le nom de problème de Pappus :

> Étant donné quatre droites dans le plan, trouver le lieu des points P tel que la proportion du produit des distances de P à partir de deux droites quelconques par le produit des distances aux deux droites restantes soit constante.

Pappus montre que la courbe résultante est toujours une SECTION CONIQUE. Il généralise également le problème pour considérer le cas de plus de quatre lignes dans le plan.
Une grande partie du travail géométrique du mathématicien français RENÉ DESCARTES (1596-1650) a été inspiré par ce problème.

Le livre VIII de Synagoge traite de la mécanique. Il commence par une définition écrite du CENTRE DE GRAVITÉ d'une figure (Pappus est le seul érudit grec à avoir jamais fourni une définition de ce concept) et discute un certain nombre de résultats géométriques qui emploient la notion. Il décrit également les principes des leviers, des poulies, des cales, des essieux et de la vis.

Pappus a écrit Synagoge en partie pour tenter de raviver le fervent intérêt pour les mathématiques grecques classiques et le style de recherche mathématique qu'ils menaient.
Malheureusement, cela ne s'est pas produit. Le travail de Pappus, néanmoins, a grandement influencé le cours de la pensée dans le développement de la géométrie projective un millénaire plus tard. Beaucoup de ses résultats géométriques peuvent être mieux exprimés et compris dans ce cadre.

Les théorèmes de Pappus Le mathématicien grec PAPPUS D' ALEXANDRIE (env. 320 après J.-C.) a établi deux résultats fondamentaux concernant la surface et le volume d'un
SOLIDE DE RÉVOLUTION.

> Considérez le solide de révolution formé en faisant tourner une courbe dans le plan autour d'une ligne qui ne coupe pas la courbe. Alors la surface de ce solide est égale au produit de la longueur de la courbe et de la distance du centroïde (CENTRE DE GRAVITÉ) de la courbe parcourue autour de la ligne de révolution. Le volume du solide est égal au produit de l'aire délimitée par la courbe (ou de l'aire comprise entre la courbe et l'axe de révolution) et de la distance parcourue par le barycentre de la courbe.

Ces résultats peuvent être prouvés en rapprochant la courbe comme une série de segments de droite, en établissant la revendication de ce chemin polygonal, puis en vérifiant que le résultat reste valide alors que l'on travaille avec des approximations de plus en plus fines de la courbe. C'est un processus qui implique une LIMITE. Il est remarquable que Pappus ait pu établir ces résultats avant l'avènement de CAL CULUS quelque 1 350 ans plus tard.

Dans l'étude de la GÉOMÉTRIE PROJECTIVE, le résultat suivant est également attribué à Pappus :

> Considérons un hexagone ABCDEF dans le plan.
> Cet hexagone peut avoir n'importe quelle forme et peut même s'auto-entrecroiser. Supposons que les points A, C et E se trouvent sur une droite et que les points B, D et F se trouvent sur une autre. Pour chacune des trois paires de côtés opposés de l'hexagone, trouvez l'endroit où ces côtés (s'ils sont prolongés) se croisent. Alors ces trois points d'intersection se trouvent eux-mêmes sur une ligne droite.

BLAISE PASCAL (1623-1662) étendit plus tard ce résultat pour prouver que si un hexagone a des sommets situés sur

Machine Translated by Google

toute SECTION CONIQUE, alors les trois points d'intersection des paires de côtés opposés se trouvent sur une ligne droite. (UN paire de deux lignes droites peut être considérée comme une HYPERBOLA dégénérée .)

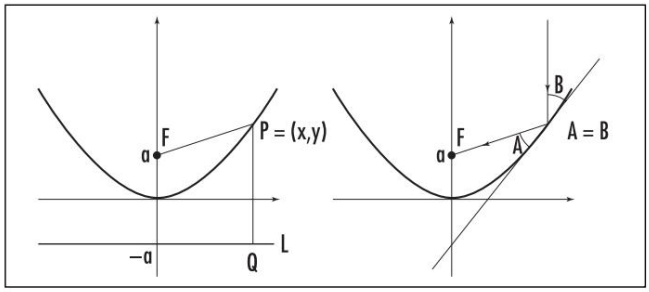
parabole Comme l'une des trois SECTIONS CONIQUES, une la parabole est la courbe plane composée de tous les points P équidistants d'un point fixe F donné, et une ligne fixe donnée L. Le point fixe est appelé le foyer de la parabole, et la droite fixe sa directrice. UN la parabole se pose également comme la courbe produite par l'intersection d'un plan à travers un CONE circulaire droit tenu parallèle au côté incliné du cône.

L'équation d'une parabole peut être trouvée en introduisant un système de coordonnées dans lequel le foyer est le point F = (0,a), pour un certain nombre positif a, et le directrice est la droite horizontale y = –a. Si P = (x,y) est un point arbitraire sur la parabole, alors la DISTANCE POUR MULA décrit la condition de définition comme $\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = y + a$. La mise au carré et la simplification donnent l'équation :

$$y = x\frac{1}{4a}^2$$

Inversement, l'inversion de ces étapes montre que tout équation de la forme $y = A(x - p)^2 + q$ est l'équation d'une parabole de foyer $F = (p, q + \frac{1}{4A})$ et de directrice $= q - \frac{1}{4A}$. Ainsi, le graphique de toute équation quadratique y est une parabole.

La propriété de réflexion d'une parabole indique que tout rayon lumineux incident perpendiculaire à la directrice sera réfléchie directement au foyer F. Sur le diagramme en haut à droite, cela signifie que les angles à la tangente ligne à la courbe A et B sont égaux. (Ceci peut être prouvé avec CALCUL en notant qu'au point P = (x,y), la pente de la tangente à la parabole $y = \frac{1}{4a}x^2$ est $m1 = \frac{}{x - 2a}$, alors que la pente de la ligne reliant le point Q à F, soit $m2 = -\frac{2a}{x}$. Puisque m1m2 = –1, ces droites sont perpendiculaires. Cela montre que la tangente coupe en deux le triangle isocèle FPQ, ce qui donne que les angles A et B sont égaux.) Les antennes paraboliques et les télescopes à réflexion utilisent des antennes paraboliques de manière à



Parabole

focaliser des rayons lumineux parallèles à un point fixe, et inversement, des réflecteurs de projecteurs et des phares d'automobiles les réflecteurs, par exemple, sont paraboliques : tous les rayons d'un l'ampoule positionnée au foyer sont réfléchies parallèlement à la axe de la parabole. (Voir PARABOLOÏDE.)

Des paraboles apparaissent dans le pliage d'une mince feuille de papier. Tracez une ligne droite foncée sur la feuille—cela être la directrice de la parabole - et un point non sur la ligne, la mise au point. Pliez le point sur la ligne et pliez le papier. Ouvrez le pli et recommencez, cette fois plier le point à un point différent sur la ligne. Comme toi faites cela plusieurs fois, la forme d'une parabole émerge le long du côté de tous les plis.

On dit qu'une parabole a une EXCENTRICITE e égale à 1. Le rapport de la distance d'un point P sur la courbe d'un point fixe (le foyer) à sa distance d'un droite fixe (la directrice) vaut toujours 1.

Voir aussi CERCLE D'APOLLONIUS ; ELLIPSE; HYPERBOLE.

paraboloïde Le SOLIDE DE REVOLUTION obtenu par faire tourner une PARABOLE autour de son axe s'appelle une paraboloïde. Les points de sa surface satisfont une équation de la forme $z = b(x^2 + y^2)$, où b est une constante, et chaque section horizontale, ou chaque CONTOUR LINE, du solide est un cercle. La forme du personnage ressemble à un bol.

Les techniques de CALCUL INTÉGRAL montrent que le le volume d'une section du solide, jusqu'à une hauteur h, est donné par $V = \pi a^2 h$, où a est le rayon de la section circulaire à la hauteur h. Sa superficie est

$$UN = \frac{\pi}{6h^2}\left(a^2 + 4h^2\right)^{\frac{3}{2}} - a^3 .$$

Chaque section verticale du paraboloïde est, bien sûr, une parabole. L'objectif commun de ces

Machine Translated by Google

paraboles est appelé le foyer du paraboloïde. La propriété de réflexion d'une parabole montre que les rayons lumineux et les faisceaux sonores émis par le foyer d'une parabole sont réfléchis hors du paraboloïde sous la forme d'un faisceau parallèle. Les réflecteurs des phares automobiles, par exemple, sont paraboliques. A l'inverse, un faisceau parallèle reçu par un réflecteur paraboloïde est convergé vers son foyer. Les antennes paraboliques et les télescopes à réflexion utilisent des réflecteurs paraboliques.

Un paraboloïde elliptique a des sections transversales horizontales qui sont des ELLIPSES et est donné par l'équation z = ax2 + by2 , où a et b sont des constantes. Un paraboloïde hyperbolique (également appelé surface de selle) satisfait z = ax2 – by2 . Il a des sections transversales horizontales qui sont des HYPERBOLA, et ressemble en effet à la forme d'une selle de cheval.

Voir aussi ELLIPSOÏDE ; HYPERBOLOÏDE.

paradoxe Une déclaration qui semble contradictoire ou contraire au sens commun est appelée un paradoxe. Certains paradoxes en mathématiques apparaissent comme des conséquences logiques de prémisses apparemment plausibles, comme le paradoxe de Banach-Tarski résultant de l'étude d' AREA, le PARADOXE DE BERTRAND et le PARADOXE DE RUSSELL .
(L'apparition de ces paradoxes particuliers a amené les mathématiciens à réévaluer les fondements fondamentaux des mathématiques.) D'autres paradoxes peuvent être de simples énoncés contradictoires. Par exemple, on dit que Socrate a dit un jour : « Une chose que je sais, c'est que je ne sais rien », et George Orwell a écrit un jour : « La liberté, c'est l'esclavage ». Les deux affirmations ont une saveur similaire au PARADOXE DU MENTEUR .

D'autres paradoxes célèbres incluent:

Le paradoxe de
Grelling Certains mots de la langue anglaise se décrivent eux-mêmes avec justesse. Par exemple, pentasyllabique, signifiant « ayant cinq syllabes », est bien pentasyllabique. D'autres mots ne sont pas autodescriptifs : par exemple, monosyllabique, comestible et tangible. Définissez un nouveau mot hétérologique comme signifiant « un mot qui ne se décrit pas ». Demandez maintenant : « Est-ce que l'hétérologie est hétérologique ?

Paradoxe de Berry
Le nombre un million, cent mille, cent vingt et un peut être nommé comme "le premier nombre non nommable en moins de 10 mots". (Tous les nombres les nombres inférieurs à 1 100 121 peuvent être nommés en neuf mots ou moins.) Mais cette dernière description n'utilise que neuf mots pour indiquer ce nombre et peut donc être nommée avec moins de 10 mots, malgré sa définition.

Le paradoxe du barbier
Un barbier place une pancarte sur la vitrine du magasin. On y lit : « Ce barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ces hommes. Qui rase le barbier ?

Le paradoxe de l'avocat
Ce paradoxe est traditionnellement attribué au philosophe grec Protagoras (490-421 avant notre ère)

Un professeur de droit accepte un étudiant sans le sou sous son aile pour ses frais de scolarité en vertu d'un accord selon lequel l'étudiant paiera ses frais au tuteur si et seulement s'il gagne son premier procès. Cependant, après avoir obtenu son diplôme d'avocat, l'étudiant s'engage dans une autre carrière et n'entreprend jamais de première affaire. Le tuteur le poursuit plus tard pour ses honoraires.

L'étudiant décide intelligemment de représenter son propre cas. De cette façon, raisonne-t-il, il n'aura jamais besoin de payer ses honoraires au tuteur. S'il obtient gain de cause, il sera statué qu'il n'aura pas à payer, alors que s'il perd la cause, il sera dispensé de payer selon son accord préalable avec le tuteur. Étonnamment, le tuteur raisonne aussi qu'il ne peut pas perdre. Si l'étudiant gagne ce procès, alors il doit payer les frais selon leur accord précédent, alors que, si l'étudiant perd, la décision sera qu'il doit payer !

Le quiz inattendu Un
instituteur informe sa classe qu'il y aura un quiz surprise un jour de la semaine suivante, et que personne ne pourra déduire la veille au soir que le quiz arrivera le lendemain. Les élèves raisonnent alors comme suit :

> Il ne peut y avoir de quiz le vendredi, car le jeudi soir, n'ayant pas eu de quiz les quatre jours précédents, nous saurions que le quiz arrivera le lendemain. Le quiz doit donc avoir lieu un autre jour que le vendredi.
>
> Le quiz ne peut pas non plus avoir lieu le jeudi, car le mercredi soir, n'ayant pas eu de quiz les trois jours précédents (et avec le vendredi exclu comme possibilité), nous saurions que le quiz aura lieu le lendemain.
>
> Par le même raisonnement, le quiz ne peut pas avoir lieu le mercredi, le mardi ou même le lundi.

Machine Translated by Google

Les étudiants en déduisent donc logiquement qu'il ne peut y avoir de quiz n'importe quel jour de la semaine suivante. Ils ont alors été légitimement surpris par un quiz pop qui est venu mercredi. (Parfois, ce paradoxe est formulé en termes d'un prisonnier attendant son exécution. Dans ce contexte, on l'appelle le «paradoxe de la pendaison inattendue».)

Le paradoxe du portefeuille

Deux hommes décident de jouer au jeu suivant :

> Les deux hommes ouvrent leurs portefeuilles. Celui qui a le moins d'argent remporte le contenu du portefeuille de l'autre.

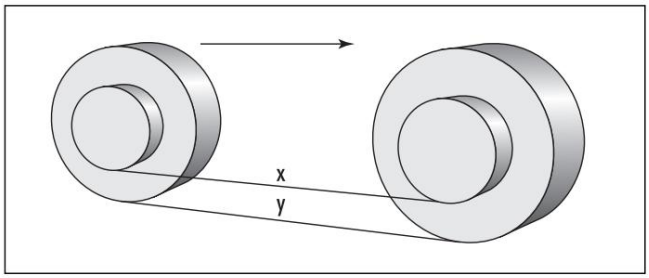
Chaque homme peut légitimement affirmer qu'il a plus à gagner qu'à perdre, et donc que le jeu est biaisé en sa faveur. Cependant, un tel simple jeu gagnant/perdant ne peut pas être simultanément avantageux pour les deux joueurs.

Paradoxe de la roue d'Aristote

Deux roues de tailles différentes sont collées ensemble de manière à ce que leurs centres soient alignés. L'ensemble du système roule alors le long d'une double voie comme indiqué : En un

tour, les deux roues roulent sur la même distance et donc, dans le schéma, x = y. Or x est la circonférence de la petite roue et y la circonférence de la grande roue. On est donc obligé de conclure que deux roues de tailles différentes ont la même circonférence !

Ces paradoxes s'appuient sur des déclarations AUTO-RÉFÉRENTIELLES intelligentes (le paradoxe de Grelling, le paradoxe de Berry, le paradoxe du barbier et même le paradoxe de l'avocat), de fausses hypothèses cachées (les élèves ont supposé que l'enseignant disait la vérité - ils ne le savent pas ; gagner et perdre le jeu de portefeuille ne sont pas également probables ; et le barbier pourrait-il être une femme ?), et composé déguisé



Les roues d'Aristote

mouvements (la petite roue est entraînée vers l'avant par la grande roue lorsqu'elle tourne et glisse ainsi le long de la piste supérieure).

Voir aussi CONDITIONNEL ; L'HÔTEL INFINI DE HILBERT ; LE PARADOXE DE JOURDAIN ; TRISTRAM SHANDY PARADOXE ; LES PARADOXES DE ZÉNO .

parallèle Deux droites dans un plan sont dites parallèles si elles ne se rencontrent jamais, quelle que soit leur extension. Si deux droites étiquetées L et M sont parallèles, alors on écrit L M.

La notion de lignes parallèles est un concept abstrait : on ne peut pas tracer physiquement une ligne de longueur infinie, ni vérifier l'étendue entière de deux lignes infinies pour déterminer si elles se croisent ou non.

(En tant qu'êtres humains, nous ne pouvons concevoir que des quantités finies et des phénomènes locaux .) Afin de rendre possible le travail avec des lignes parallèles, le géomètre EUCLIDE (env.
300 avant notre ère) a introduit un AXIOME, appelé POSTULAT PARALLÈLE, pour décrire le comportement local des lignes parallèles. Il a affirmé que, pour toute TRANSVERSALE traversant une paire de lignes parallèles, les angles intérieurs alternés sont égaux.
(Ainsi, par exemple, la paire d'angles étiquetés x dans le diagramme de la page 376 sont en effet égaux en mesure, comme le sont chaque paire d'angles droits autour des lignes étiquetées a et b.) À partir de cela, Euclide a pu établir plusieurs propriétés de lignes parallèles que nous attendons intuitivement comme étant vraies. Par exemple, Euclide a prouvé :

> Deux lignes parallèles restent toujours à une distance fixe l'une de l'autre. Autrement dit, dans le diagramme de la page 376, il doit être vrai que la longueur a est égale à la longueur b.

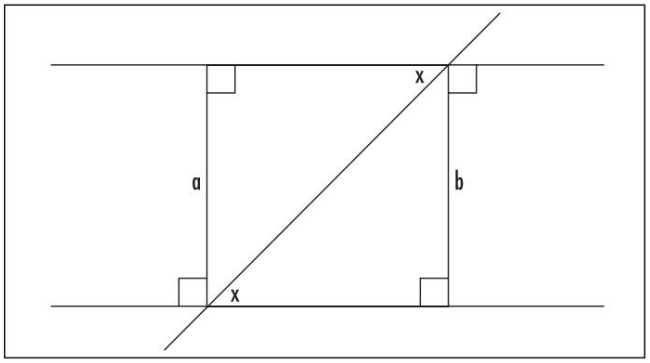
(Observez que les deux triangles du diagramme partagent les mêmes angles et une longueur diagonale commune. Le principe ASA garantit maintenant qu'ils sont des FIGURES CONGRUEUSES. Par conséquent, les distances a et b doivent être égales.)

Euclide a également observé que l'inverse de son postulat parallèle est vrai et ne nécessite aucune hypothèse particulière sur la géométrie pour sa preuve. (Il découle immédiatement du THÉORÈME DE L'ANGLE EXTÉRIEUR.)

> Si deux droites coupées par une sécante produisent des angles intérieurs alternés égaux, alors les deux droites doivent être parallèles.

Ce résultat permet de construire facilement des droites parallèles. Pour produire une droite passant par un point P parallèle

Machine Translated by Google



Lignes parallèles

à une ligne L donnée, tracez une ligne arbitraire L′ passant par P qui coupe L. Mesurez l'angle entre L et L′, et tracez une autre ligne L″ passant par P, faisant cet angle avec L′ de manière à créer un diagramme avec angles intérieurs alternés égaux. D'après le résultat ci-dessus, L″ est une droite passant par P parallèle à L.

Le mathématicien écossais John Playfair (1748–1819) a prouvé que pour tout point P et ligne L donnés dans le plan, il existe une, et une seule, ligne passant par P parallèle à L. Ce résultat est aujourd'hui connu sous le nom d' AXIOME DE PLAYFAIR . Playfair a prouvé qu'on pouvait prendre cet axiome comme point de départ de la géométrie et en tirer le postulat parallèle.

Voir aussi AAA/AAS/ASA/SAS/SSS ; HISTOIRE DE GEOME TRY (essai); PARALLÉLOGRAMME; CHIFFRES SIMILAIRES.

parallélépipède (parallélépipède) Une figure solide à six faces, dont chacune est un PARALLELOGRAMME, est appelée un parallélépipède. Un cube dont les six faces sont carrées est un exemple particulier de parallélépipède, tout comme une "boîte rectangulaire" à six faces rectangulaires (également appelée cuboïde).
Dans ces deux exemples, les bords se rejoignent aux coins des solides à des angles de 90 °, mais cela n'a pas besoin d'être le cas pour un parallélépipède général.

Le volume d'un parallélépipède est l'aire de la BASE de la figure multipliée par la hauteur de la figure. Si les trois arêtes se rencontrant en un coin sont considérées comme des vecteurs a, b et c, alors le volume du parallélépipède est également donné par la valeur absolue du PRODUIT VECTORIEL TRIPLE a · b × c.

Un parallélotope est un parallélépipède dont les trois côtés sont dans le rapport 4:2:1.

Voir aussi PRISME.

parallélogramme Un QUADRILATERAL dont les côtés opposés sont parallèles, et donc de longueur égale, est appelé un parallélogramme. L'aire d'un parallélogramme est "la base multipliée par la hauteur". C'est-à-dire que si une paire de côtés parallèles, de longueur b, sont distants de h unités, alors l'aire de la figure est bh. (Voir ZONE.)

Un examen des angles alternés sur des lignes parallèles montre rapidement que les angles opposés dans un parallélogramme sont égaux et que les angles adjacents sont supplémentaires, c'est-à-dire, somme à 180°. Le parallélogramme est le seul quadrilatère possédant cette propriété.

Les DIAGONALES d'un parallélogramme se coupent en deux, et encore une fois le parallélogramme est le seul quadrilatère qui a cette propriété. Si les deux longueurs de côté différentes d'un parallélogramme sont a et b, et la longueur de ses deux diagonales sont p et q, alors

$$p^2 2 2 = 2a + q + 2b 2$$

Cela découle de l'application de la LOI DES COSINS aux quatre triangles définis par les diagonales (deux triangles de chaque côté de chaque diagonale) et de l'addition des quatre équations. Interprétée comme une équation de longueurs VECTORIELLES , elle établit la LOI DU PARALLELOGRAMME dans la théorie de l'espace vectoriel.

Un parallélogramme dont les quatre côtés ont la même longueur est appelé un losange (ou parfois un losange, un losange ou un losange). Un rhomboïde est un parallélogramme dont les côtés adjacents sont de longueur inégale.

Si les quatre angles d'un parallélogramme sont égaux, alors chaque angle vaut 90° et la figure est un RECTANGLE.
Un parallélogramme qui est à la fois équilatéral et équiangulaire est un CARRÉ.

Voir aussi TRAPÈZE/TRAPÈZE.

loi du parallélogramme (règle du parallélogramme) Le fait que l'addition VECTEUR est commutative est parfois appelée la loi du parallélogramme. Ceci est approprié, puisque la somme des deux vecteurs a et b dans le plan, a + b, est donnée comme DIAGONALE du parallélogramme défini par les deux vecteurs. Notez que la deuxième diagonale est donnée par la différence vectorielle a - b. Les propriétés géométriques d'un parallélogramme établissent que les longueurs de ces vecteurs satisfont la relation :

$$une + b 2 + une - b 2 = 2a^2 + 2b 2$$

Cette équation est aussi appelée la loi du parallélogramme.

Voir aussi PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE.

Machine Translated by Google

postulat parallèle (cinquième postulat d'Euclide) Dans son célèbre ouvrage LES ÉLÉMENTS, le géomètre EUCLIDE (vers 300 av. J.-C.) a proposé cinq postulats de base qui décrivent les principes de la géométrie sur un PLAN plat. Son cinquième postulat déclare:

> Si deux lignes L et M sous-tendues à partir d'un segment de ligne commun ont des angles intérieurs sommant moins de 180°, alors ces lignes, si elles sont prolongées, se rencontreront pour former un TRIANGLE.

On peut par conséquent conclure que si ces angles totalisent plus de 180 °, les lignes, si elles sont prolongées de l'autre côté du segment de ligne donné, formeront un triangle de ce côté. (La somme des angles intérieurs supplémentaires sera inférieure à 180°.) De plus, si les lignes ne se rencontrent jamais, c'est-à-dire si elles sont PARALLÈLES, alors la somme des deux angles x et y indiqués ne peut être inférieure ni supérieure à 180°, et doit donc être égal à 180°. Nous avons:

> Pour une paire de lignes parallèles avec une TRANSVERSALE, comme indiqué dans le schéma ci-dessous à droite, les angles étiquetés x et y doivent totaliser exactement 180°. Par conséquent, les angles intérieurs alternés de la transversale sont égaux.

Ceci est souvent considéré comme l'énoncé du cinquième postulat d'Euclide. Pour cette raison, on l'appelle souvent le postulat parallèle.

Comme le postulat parallèle est intimement lié à la formation des triangles, il n'est pas surprenant que l'on puisse l'utiliser pour prouver :

> La somme des angles intérieurs de tout triangle vaut 180°.

Comme nous le montrons ci-dessous, il est possible alternativement de prendre cet énoncé comme postulat de base et de l'utiliser pour établir le postulat parallèle. (Ainsi, le postulat parallèle et cette affirmation sur les triangles sont des hypothèses de départ logiquement équivalentes.)

Dans son texte de 1795 Elements of Geometry, le mathématicien écossais John Playfair proposa une troisième version, logiquement équivalente, du postulat parallèle :

> Étant donné une droite L dans le plan et un point P qui n'est pas sur cette droite, alors il existe une et une seule droite passant par P parallèle à L.

Cette version alternative du postulat est aujourd'hui appelée AXIOME DE PLAYFAIR . En 1829, il a fourni le russe mathématicien NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) l'inspiration pour considérer et découvrir une théorie cohérente d'une GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE.

Nous avons maintenant trois assertions :

1. Postulat parallèle d'Euclide 2. Les angles d'un triangle totalisent 180° 3. Axiome de Playfair

Ces trois énoncés sont logiquement équivalents, c'est-à-dire que chacun implique les deux autres. Pour le voir, il suffit de montrer que (3) implique (2), (2) implique (1), et que (1) implique (3). Nous devrons utiliser la réciproque du postulat parallèle d'Euclide :

> Si une transversale à travers une paire de droites donne des angles intérieurs alternés égaux, alors les droites sont parallèles.

Comme le montre le THÉORÈME DE L'ANGLE EXTÉRIEUR , cette affirmation peut être prouvée sans utiliser aucune des trois affirmations ci-dessus.

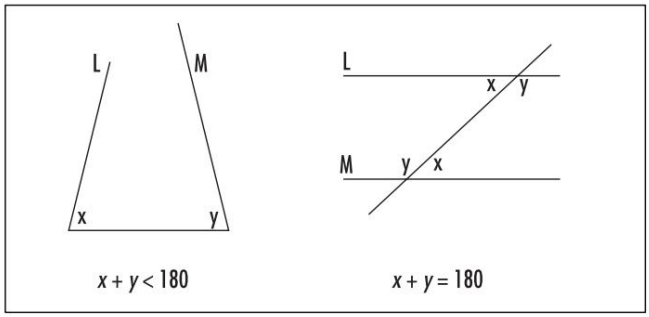
Considérons maintenant les trois implications :

(3) implique (2):

Étant donné un triangle avec les angles a, b et c comme indiqué dans le diagramme de la page 378, tracez deux lignes au sommet qui copient les angles a et b. Étant donné que les deux donnent des angles intérieurs alternés égaux sur une transversale, les deux lignes sont parallèles à la base du triangle. Selon l'axiome de Playfair, il n'y a qu'une seule ligne de ce type. Ainsi, les angles a, b et c se trouvent tous sur la même ligne droite et totalisent donc 180°.

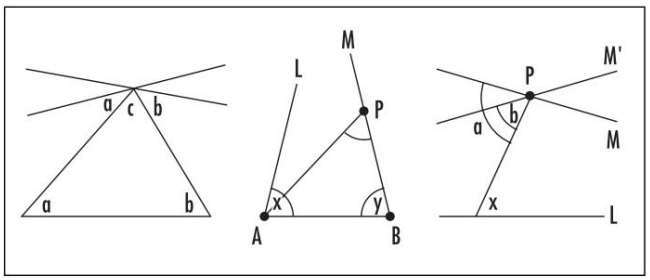
(2) implique (1) :

Dans le diagramme du milieu de la page 378, supposons que les lignes L et M sont parallèles et ne se rencontrent donc jamais. Pourrait-il



Comprendre le postulat parallèle

Machine Translated by Google



Versions équivalentes du postulat parallèle

être que les angles x et y totalisent moins de 180 ° ? Dessinez un point P sur la ligne M et faites-le glisser le long de M suffisamment loin pour que l'angle du triangle APB en P soit inférieur à 180 – x – y. Il est clair que l'angle de ce triangle en A est inférieur à x. Nous avons maintenant un triangle avec trois angles dont la somme est inférieure à x + (180 – x – y) + y = 180°.
Ceci est impossible par notre hypothèse que (2) est vraie. Il ne peut pas être le cas que L et M sont parallèles après tout.

(1) implique (3):

La discussion sur le théorème de l'angle extérieur montre qu'il existe certainement au moins une ligne passant par un point P parallèle à une ligne donnée L. Supposons qu'il existe deux telles lignes. Appelez-les M et M′ comme indiqué dans le schéma ci-dessus. Tracez n'importe quelle ligne de P à L. Puisque, par (1), nous supposons que les angles intérieurs alternés sont égaux pour les lignes parallèles, les deux angles a et b indiqués sont égaux à x.
Par conséquent M et M' doivent être la même ligne.

Voir aussi HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE (essai).

paramètre Voir ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES.

équations paramétriques (équations de liberté) Lorsque nous pensons à une courbe comme le chemin tracé par un point mobile, il est pratique de représenter la courbe comme deux équations, une pour chaque coordonnée x et y, en termes d' une troisième variable généralement notée t : x = f(t) et y = g(t).
La variable t est appelée paramètre (du grec para signifiant « ensemble » et meter signifiant « mesurer »). Les équations avec paramètres sont appelées équations paramétriques. Dans les problèmes physiques, t est généralement considéré comme le temps.

Toute courbe y = f(x) peut être exprimée en termes d'équations paramétriques : il suffit de poser x = t et par conséquent y = f(t).

Les représentations paramétriques, cependant, ne sont pas uniques. La courbe $y = 4x^2$ par exemple, peut être représentée par $x = t, y = 4t^2$ et aussi $x = t^{3/2}, y = t^6$. Infiniment beaucoup d'autres représentations sont possibles.

Un CERCLE de rayon r et de centre (m,n) a une représentation paramétrique : x = m + r cos t et y = n + r sin t.
(Remarquez que $(x - m)^2 + (y - n)^2 = (\text{coût } r)^2 + (r \sin t)^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$, l'équation d'un cercle.) De même, une ELLIPSE $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ a pour paramétrisation : x = a cos t et y = b sin t.

Il n'y a pas de méthode générale pour transformer une équation de la forme F(x,y) = 0 en équations paramétriques. Chaque exemple individuel doit être examiné avec soin et beaucoup d'ingéniosité est souvent requise. (Par exemple, on ne sait pas immédiatement ce que pourraient être les équations paramétriques pour la courbe donnée par $x^5 = 0 + xy + y^5$.) Pour le sens inverse, on peut tenter de convertir d'équations paramétriques en une seule équation de la forme F(x,y) = 0 en résolvant pour t. Pour illustrer, considérons les équations : x = 3t + 1 et y = t – 1. La première équation donne t = (x – 1)/3, et la seconde, t = y + 1. Par conséquent : y + 1 = (x – 1)/3, ou y = x/3 – 4/3. Cela montre que les équations paramétriques à l'étude représentent une trajectoire rectiligne.

La PENTE d'une courbe donnée par les équations paramétriques est $\frac{dy}{dx} = \frac{y't)}{x'(t)}$ à condition que la DÉRIVÉE x'(t) ne soit pas nulle. Cela découle de la RÈGLE DE LA CHAÎNE pour la différenciation : si y est une fonction de x, qui est elle-même une fonction de t, alors $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$. Les équations paramétriques sont également utilisées pour décrire le mouvement des particules dans l'espace tridimensionnel . On reçoit trois équations dans un paramètre t, une pour chacune des trois coordonnées x, y et z.

Voir aussi LONGUEUR D'ARC ; LARGEUR CONSTANTE.

parité On dit que deux nombres entiers qui sont à la fois pairs ou impairs ont la même parité. Par exemple, 17 et 53 ont la même parité (les deux sont impairs) et 9 et 14 ont une parité opposée. L'étude des nombres pairs et impairs utilise souvent la parité pour établir un nombre de résultats sophistiqués.

Parfois, le terme parité est utilisé dans un cadre plus général pour signifier "être dans l'un des deux états possibles".
Par exemple, trois rondelles de hockey étiquetées A, B et C posées sur un terrain de jeu, et non en ligne droite, peuvent être en

Machine Translated by Google

l'un des deux états possibles : le déplacement de A à B vers C peut avoir un sens horaire ou antihoraire. Chaque fois qu'un joueur de hockey frappe une rondelle entre les deux autres, la parité du système change.
Cela montre, par exemple, qu'un joueur de hockey ne pourra jamais remettre les trois rondelles dans leur position d'origine s'il effectue 33 coups sûrs de ce type.

Comme autre exemple, il est impossible pour 25 personnes debout dans une grille de carrés 5 × 5, une personne par cellule, de changer de place si chaque personne est invitée à se déplacer d'une place vers une cellule verticale ou horizontale voisine. Un argument de parité explique pourquoi. Si l'on imagine les cellules colorées en noir et blanc selon un motif en damier, alors les 13 personnes debout dans les cellules noires doivent occuper seulement 12 cellules blanches, rendant le défi insoluble. (Si, cependant, les joueurs sont autorisés à faire des pas en diagonale, alors le puzzle peut être résolu.)

dérivée partielle Étant donné une fonction f(x,y) de deux variables, la DÉRIVÉE de f par rapport à une seule des variables, en traitant l'autre variable comme une constante, est appelée une dérivée partielle de cette fonction.
Plus précisément, la dérivée partielle de la fonction avec par rapport à x, noté $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou parfois f_x, est la LIMITE :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

et la dérivée partielle par rapport à y, notée $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou f_y, est :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Géométriquement, le graphe de la fonction z = f(x,y) est une surface située dans un espace tridimensionnel, et le graphe $\frac{\partial f}{\partial x}$ mesure la pente de la quantité de surface du au-dessus du point (x,y) dans la direction parallèle à l' axe des x ∂f, et est la pente de la surface dans la direction $\frac{\partial f}{\partial y}$ parallèle à l' axe des y. Puisque l'une des variables est traitée comme une constante, la dérivée partielle d'une fonction peut être trouvée en utilisant les règles normales de différenciation. Par exemple, pour la fonction f(x,y) = x 2y 3 + 2x + y, ∂f ∂f on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 1$.

Le symbole ∂ pour « partiel » a été introduit en 1788 par le mathématicien français JOSEPH-LOUIS LAGRANGE. Il ressemble au d utilisé pour la différenciation ordinaire.

La nième dérivée partielle d'une fonction par rapport à ∂ à la même variable est noté $\partial \frac{^n f}{x^n}$ et différencier par rapport à deux variables différentes conduit à des dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ etc.

La quantité $\partial \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, par exemple, doit être interprété comme « se différencie d'abord par rapport à y, puis par rapport à x ». (C'est-à-dire que l'on effectue les opérations dans l'ordre inverse comme indiqué par le dénominateur.) Par exemple, si f(x,y) = x 2y 3 + 2x + y alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 - 2 + 1) = 6xy$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 2 + 1) = 6xy$$

L'égalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

n'est pas un hasard. Les mathématiciens ont prouvé que l'ordre de différenciation partielle n'a pas d'importance tant que toutes les dérivées partielles impliquées sont des fonctions continues. La notion de dérivée partielle s'étend aux fonctions de plus de deux variables.

Une équation aux dérivées partielles est une équation qui contient les dérivées partielles d'une fonction. Par exemple, la fonction f(x,y) = e xy est une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = (x + y)f$$

Voir aussi RÈGLE DE CHAÎNE ; ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE; DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE.

fractions partielles Expressions algébriques contenant le rapport de deux POLYNOMES $\frac{p(x)}{q(x)}$, avec le degré de

Machine Translated by Google

p(x) inférieur au degré de q(x), peut être divisé en fractions pour une manipulation plus facile. Cela nécessite d'abord de diviser le dénominateur q(x) en linéaire et irréductible facteurs quadratiques, chacun à un indice, puis en écrivant $\frac{p(x)}{q(x)}$ comme une somme de termes de chacun des types suivants :

1. Correspondant à chaque terme linéaire (répété) $(x - k)^n$ dans q(x), il existe une somme de termes $\frac{A_1}{(x-k)} + \frac{A_2}{(x-k)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-k)^n}$.

2. Correspondant à chaque irréductible (répété) termes quadratiques $(ax^2 + bx + c)^m$ dans q(x), il existe un somme des termes $\frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$.

Ici, les nombres Ai , Bi et Ci sont des constantes. Quelques des exemples illustrent le processus :

$$\frac{4}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{x^2+2x+5}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$\frac{3x^2+7x+1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

Les valeurs des constantes A, B, C, … sont trouvées par en multipliant par le dénominateur puis COEFFICIENTS D'EQUATION. Alternativement, on peut substituer des valeurs appropriées à la variable x pour déterminer les valeurs de certaines de ces inconnues plus rapidement. Par exemple, dans le premier exemple, après avoir multiplié à travers, on a : 4 = A(x – 3) + B(x + 2). Réglage x = 3 donne 4 = 0 + 5B, en établissant que B est 4/5, et en fixant x = –2 donne A = –4/5. Nous avons ainsi :

$$\frac{4}{(x+2)(x-3)} = \frac{-\frac{4}{5}}{x+2} + \frac{\frac{4}{5}}{x-3}$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)$$

Les mathématiciens ont prouvé que tout rationnel fonction $\frac{p(x)}{q(x)}$, avec le degré de p(x) inférieur à la degré de q(x), peut en effet s'écrire comme une somme de fractions, et que les termes constants apparaissant, Ai , Bi , et Ci , sont uniques pour cette fonction rationnelle. (C'est, aucune fonction rationnelle ne peut être exprimée comme une somme de fractions partielles de deux manières différentes.) Les fractions partielles sont généralement utilisé pour résoudre des INTÉGRALES et pour résoudre Équations différentielles. A titre d'exemple, nous avons :

$$\int \frac{4}{(x+2)(x-3)}\,dx = \frac{4}{5}\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{4}{5}\left(\ln|x-3| - \ln|x+2| + C\right)$$

$$= \frac{4}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C$$

commande partielle Voir ENSEMBLE ORDONNÉ.

somme partielle La nième somme partielle Sn d'un nombre infini la série a1 + a2 + a3 +… est la somme des premiers n seulement termes de la série : Sn = a1 + a2 +…+ an . Par exemple, les quatre premières sommes partielles de la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ sont $S1 = \frac{1}{2}$, $S2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $S3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, et $S4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Une série est dite converger vers une valeur L si la les sommes partielles Sn tendent vers L dans la LIMITE lorsque $n \to \infty$. Dans l'exemple ci-dessus, la séquence de sommes partielles $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$ se rapproche de la valeur 1. Ainsi nous écrire: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 1$.

Voir aussi SERIE CONVERGENTE.

partition En THÉORIE DES NOMBRE une partition d'un naturel le nombre n est une représentation de n comme une somme de nombres positifs entiers. Par exemple, 20 + 15 + 5 et 10 + 10 + 10 + 10 sont des partitions du nombre 40, tout comme la représentation 40 elle-même. Une partition est considérée comme ordonnée si le l'ordre des termes dans la somme est considéré comme important.

Machine Translated by Google

Par exemple, 20 + 15 + 5 et 5 + 20 + 15 sont considérés comme deux partitions ordonnées différentes du nombre 40.

Il n'y a qu'une seule partition ordonnée du nombre 1, deux partitions ordonnées de 2, quatre de 3 et huit partitions ordonnées du nombre 4 :

1:1
2:1 + 1 = 2
3:1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2 = 3
4:1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2
= 2 + 2 = 1 + 3 = 3 + 1 = 4

Ce modèle persiste :

Un nombre n a 2n–1 partitions ordonnées.

(On peut créer une partition ordonnée d'un nombre n en en écrivant d'abord n comme une somme de n 1s, puis en supprimant certains, tous ou aucun des signes + entre les 1. Comme il y a n – 1 signes plus à considérer, chacun offrant un choix de qu'il s'agisse de laisser ou d'effacer, cela offre 2n–1 possibilités en tout.)

Si l'ordre des termes dans une partition n'est pas considéré comme important, alors la partition est appelée non ordonné. (Par exemple, 20 + 15 + 5 et 5 + 20 + 15 sont maintenant considérés comme la même partition du nombre 40.) Le symbole P(n) est généralement utilisé pour désigner le nombre de partitions non ordonnées que possède un nombre n . Par exemple, P(4) = 5, puisqu'il n'y a que cinq partitions non ordonnées du nombre 4 (à savoir, 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2, 3 + 1 et 4). Ce qui suit le tableau montre les 10 premières valeurs de fonction de partition :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

À ce jour, personne ne connaît la formule exacte de ce fonction, et on sait généralement très peu de choses sur sa comportement.

Au milieu des années 1700, LEONHARD EULER a étudié ce fonction et a trouvé une relation vraiment remarquable. Considérez ces CHIFFRES triangulaires qui sont divisible par trois : 3, 6, 15, 21, 36, 45, … En prenant un tiers de ces nombres, on obtient la suite : 1, 2, 5, 7, 12, 15, … Déclarer P(0) = 1 et P(n) égal à zéro si n est négatif, Euler a prouvé que la formule suivante est vraie :

$$P(n) – P(n – 1) – P(n – 2) + P(n – 5) + P(n – 7) – P(n – 12) – P(n – 15) +\ldots = 0$$

Ici, les signes entre les termes alternent par paires. Avis aussi que bien que le côté gauche de cette équation apparaisse être une somme infinie, éventuellement tous les termes de la somme égale à zéro. Par conséquent, il faut ajouter et ne soustraire qu'une liste finie de nombres.

Cette formule nous permet de calculer des valeurs plus élevées de P(n). Par exemple, pour trouver la valeur de P(11) utilisez :

$$P(11) – P(10) – P(9) + P(6) + P(4) – P(–1) – P(–4) +\ldots = 0$$

C'est,

$$P(11) – 42 – 30 + 11 + 5 – 0 – 0 +\ldots = 0$$

cédant

$$P(11) = 56$$

Dans les années 1930, les mathématiciens GODFREY HAROLD HARDY et SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN ont prouvé que si n est grand, alors la fonction P(n) est bien approximée par la formule :

$$P(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi}$$

Ainsi, par exemple, la valeur de P(1 000) est approxi environ $\frac{1}{4000\sqrt{3}} e^{\sqrt{\frac{2000}{3}}\pi^2} \approx 2.4 \times 10^{31}$.

Comprendre les propriétés du pair non ordonné fonction de la fonction est toujours un domaine de recherche actif.

Pascal, Blaise (1623–1662) théorie française des probabilités, Calcul, Géométrie, Philosophie Né le 19 juin, 1623, à Clermont-Ferrand, France, philosophe et le scientifique Blaise Pascal est connu pour son travail dans GÉOMÉTRIE, hydrostatique et théorie des PROBABILITÉS . Bien qu'il n'ait pas inventé le fameux triangle arithmétique qui porte son nom, il en a fait un usage intensif. propriétés dans son développement de la probabilité et la étude des distributions statistiques. Il a également travaillé sur problèmes de trouver des longueurs d'arc et des zones de figures courbes. Il est notamment connu pour ses travaux sur la

Machine Translated by Google

CYCLOID et le développement des idées de ce travail qui a conduit à l'invention de CALCULUS.

Pascal était fasciné par les mathématiques dès son plus jeune âge et à 16 ans avait déjà découvert un certain nombre de résultats remarquables dans l'étude de la GÉOMÉTRIE PROJECTIVE. Il publie son premier ouvrage de géométrie, Essay on Conic Sections, en 1640.

Afin d'aider son père dans son travail d'enregistrement et de perception des impôts, Pascal invente et construit entre les années 1642 et 1645 une calculatrice mécanique capable d'effectuer des calculs arithmétiques sophistiqués. Au cours des 7 années suivantes, Pascal a supervisé la construction de pas moins de 50 de ces machines mais, malheureusement, peu ont été vendues. La production de la "Pascaline" a cessé, mais Pascal est néanmoins noté comme la deuxième personne dans l'histoire à avoir construit un tel appareil. (Le savant allemand Wilhelm Schickard a construit le premier en 1624.)

À la fin des années 1640, Pascal s'intéresse à l'hydrostatique et aux propriétés de la pression atmosphérique. Il publia Nouvelles expériences concernant le vide en 1647 - un ouvrage controversé car les scientifiques de l'époque doutaient de l'existence du vide - et 4 ans plus tard, son célèbre traité sur l'équilibre des liquides.



Blaise Pascal, éminent érudit du XVIIe siècle, est connu pour son travail de pionnier dans le domaine de la théorie des probabilités. (Photo gracieuseté de Monique Salaber/The Image Works)

Son intérêt pour les mathématiques pures ne s'est jamais démenti pendant cette période et il a continué à développer des travaux sur la théorie des SECTIONS CONIQUES. (Malheureusement, ses manuscrits de cette période nous sont aujourd'hui perdus.)

Dans une correspondance avec PIERRE DE FERMAT (1601-1665), Pascal a travaillé sur la résolution de deux problèmes difficiles sur les jeux de hasard : quel est le nombre attendu de lancers nécessaires pour lancer un double 6 avec une paire de dés ? Et comment répartir les paris prévus pour un jeu de dés, si le jeu doit être interrompu en cours de jeu ? Pascal et Fermat ont résolu le premier problème et le second uniquement pour le cas d'une partie à deux joueurs. Ce travail a marqué le début du développement de la théorie moderne des probabilités.

Pascal était un homme profondément religieux et on se souvient également de sa célèbre ligne de pensée rationnelle plaidant en faveur de la croyance en l'existence de Dieu.
Appelé désormais « le pari de Pascal », l'argument de Pascal énonce simplement que si Dieu n'existe pas, alors rien n'est perdu en croyant en Lui, alors que si Dieu existe, tout sera perdu en ne reconnaissant pas Son existence.

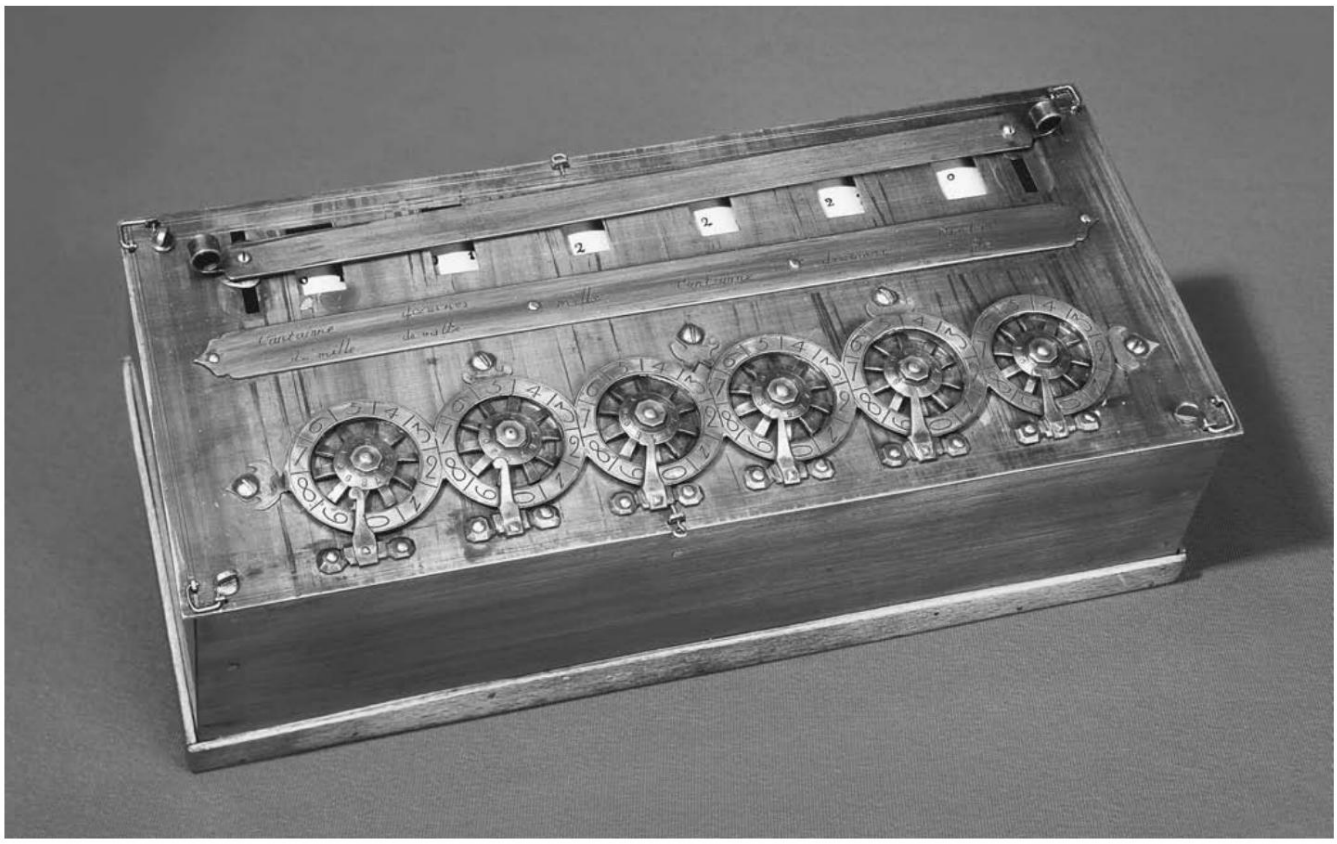
Pascal a calculé la longueur et l'aire de l'arc d'une branche de la courbe cycloïde, ainsi que le volume et l'aire d'un SOLIDE DE REVOLUTION obtenu en le faisant tourner autour de l' axe des x. Ce fut sa dernière réalisation mathématique avant de consacrer sa vie au service religieux. Il meurt d'un cancer le 19 août 1662, à l'âge de 39 ans.

Bien qu'il ne soit pas connu pour avoir produit un grand nombre de travaux profondément créatifs, Pascal a néanmoins joué un rôle déterminant dans le développement de plusieurs nouveaux domaines d'étude (calcul infinitésimal, théorie des probabilités, géométrie projective et statique des fluides, par exemple). Il a apporté des contributions significatives à chaque domaine et, peut-être plus important encore, a joué un rôle significatif dans la clarification des fondements de ces études et la systématisation des méthodes qu'elles utilisent.

Distribution de Pascal Voir DISTRIBUTION BINOMIALE.

Triangle de Pascal Le tableau triangulaire de nombres avec 1 au sommet, avec un 1 au début et à la fin de chaque ligne, et avec la propriété que chaque nombre intérieur est la somme des deux nombres au-dessus de lui dans la ligne précédente est appelé triangle de Pascal . Les premières rangées du triangle sont illustrées ci-dessous :

Machine Translated by Google



En 1642, Blaise Pascal invente et construit la première machine à calculer au monde. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/ Topham HIP/The Image Works)

1
1 1
121
1331
14641
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

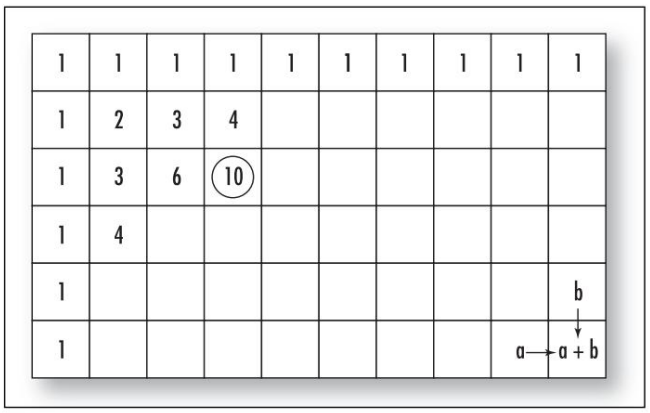
Le triangle porte le nom du mathématicien français BLAISE PASCAL (1623-1662), qui l'a largement utilisé dans son développement de la théorie des PROBABILITÉS . Cependant, Pascal n'a jamais prétendu avoir inventé le triangle. Il apparaît, par exemple, dans le texte de 1303 de CHU SHI-CHIEH Siyuan Yujian (Le précieux miroir des quatre éléments), et les tables des premières rangées du triangle apparaissent dans les textes arabes anciens.

Pour motiver la construction du triangle, on peut se poser la question suivante :

> Si, dans une grille rectangulaire, on est autorisé à se déplacer d'une cellule à l'autre uniquement en faisant des pas vers l'est ou vers le sud, combien y a-t-il de routes distinctes entre la cellule supérieure gauche et n'importe quelle autre cellule donnée ?

Par exemple, pour passer à la cellule encerclée illustrée, on pourrait faire trois pas vers l'est suivis de deux pas vers le sud (que nous enregistrerons comme EEESS), ou, alternativement, un pas vers le sud, deux pas vers l'est, un pas vers le sud, suivis d'un étape finale est (SEESE). En fait, tout arrangement de trois E et de deux S correspond à un chemin possible, et on peut vérifier qu'il existe en tout 10 de ces combinaisons de cinq lettres. Cela montre qu'il existe 10 routes vers la cellule encerclée indiquée. Il est pratique d'attribuer le numéro un à la cellule en haut à gauche. (En commençant par la cellule en haut à gauche, il n'y a qu'un seul plan d'action nécessaire pour atteindre cette cellule, à savoir, aucune action.)

Machine Translated by Google



A la découverte du triangle de Pascal

Notez également que pour atteindre une cellule en particulier, vous avez deux options : soit vous diriger vers la cellule située juste au-dessus et faire un dernier pas vers le sud, soit vous diriger vers la cellule juste à sa gauche et faire un dernier pas vers l'est. Ainsi, le nombre de chemins vers une cellule particulière est la somme des deux comptages pour les cellules au-dessus et à sa gauche. Ce est la caractéristique déterminante du triangle de Pascal.

Nous pouvons en dire plus : les nombres dans chaque cellule comptent le nombre de façons d'arranger un nombre fixe de Es et de Ss. Par exemple, le nombre sous la cellule encerclée dans l'image sera 20. Cela montre qu'il doit y avoir 20 façons distinctes d'arranger trois E et trois S. Alternativement, nous pourrions déterminer ce décompte en demandant : Combien de façons y a-t-il de sélectionner trois endroits (les positions où se trouvera la lettre E) parmi une chaîne de six positions ?

La réponse à cette question est dans le COMBINATEUR COEFFICIENT $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$. Compter la rangée supérieure de triangle de Pascal comme ligne zéro et la première entrée de chaque ligne la zéroième entrée de cette ligne, nous voyons maintenant que la kème entrée dans la nième ligne du triangle de Pascal correspond au coefficient combinatoire $\binom{n}{k}$, qui équivaut à nombre de façons d'arranger k Es et (n – k) Ss en une chaîne de n lettres. Nous avons:

> Le triangle de Pascal est le tableau triangulaire de tous les coefficients combinatoires.

Le THÉORÈME BINÔMIAL montre que la combinatoire les coefficients apparaissent également dans les développements d'expressions de la forme $(x + y)^n$. Nous avons:

> Les entrées de la nième ligne du triangle de Pascal sont précisément les coefficients qui apparaissent dans le développement de $(x + y)^n$

Par exemple, nous avons $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$. Le triangle de Pascal possède un certain nombre de propriétés remarquables. Nous n'énumérons qu'un échantillon.

1. Les entrées de la nième ligne de la somme du triangle de Pascal à 2^n.

   Par exemple, 1 = 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 + 1 = 4, 1 + 3 + 3 + 1 = 8 et 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16. Cela découle de l'expansion de la quantité $(1 + 1)^n$.

2. La somme alternée des entrées de chaque rangée du triangle de Pascal est nulle.

   Par exemple, 1 - 1 = 0, 1 - 2 + 1 = 0, 1 - 3 + 3 - 1 = 0, et 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0. Cela découle de l'expansion de la quantité $(1 + (-1))^n$.

   Il convient d'observer que ces deux résultats peuvent également être obtenus en notant que chaque entrée du triangle de Pascal est la somme de deux entrées de la ligne précédente. Ainsi la somme directe ou alternée des entrées d'une ligne correspond à une somme qui considère deux fois chaque entrée de la ligne précédente.

3. Les NOMBRES DE FIBONACCI apparaissent comme des sommes d'entrées dans certaines diagonales du triangle de Pascal.

   Pour expliquer : le sommet 1 constitue la première diagonale. Le premier 1 de la première rangée constitue la deuxième diagonale. Le premier 1 de la deuxième rangée et le dernier 1 de la troisième rangée constituent la troisième diagonale. (Notez que 1 + 1 = 2.) En continuant ainsi, nous voyons que 1 + 3 + 1 = 5, 1 + 4 + 3 = 8, et 1 + 5 + 6 + 1 = 13. En écrivant chaque terme en la diagonale comme la somme des deux entrées au-dessus, nous voyons que la somme des entrées dans une diagonale correspond aux sommes des entrées des deux diagonales précédentes.

4. Chaque rangée du triangle de Pascal correspond au chiffre d'une puissance de 11.

   Par exemple, $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1\,331$ et $11^4 = 14\,461$. Cela découle de l'expansion de la quantité $(10 + 1)^n$. Si nous n'étions pas tenus de porter des chiffres lors des multiplications, cette correspondance resterait exacte.

5. Sélectionnez n'importe quelle entrée N dans le triangle de Pascal et encerclez toutes les entrées qui se trouvent dans le parallélogramme qui a N et le sommet comme sommets opposés. Ensuite, la somme de toutes les entrées de ce parallélogramme est inférieure de 1 au nombre M directement en dessous de N deux rangées plus bas.

Machine Translated by Google

Par exemple, dans le triangle illustré à la page précédente, le nombre 20 est un plus grand que la somme des nombres délimités dans le parallélogramme avec 6 comme coin le plus bas. (Nous avons 6 + 3 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 19.) Cette propriété peut être prouvée en notant que le nombre M est la somme des deux nombres au-dessus, qui, à leur tour, sont chacun la somme de deux nombres de la ligne précédente, et ainsi de suite. On peut faire correspondre cette tabulation inversée avec les entrées du parallélogramme décrit (à l'exception d'un seul 1).

Voir aussi NUMEROS CATALAN.

Peano, Giuseppe (1858–1932) Fondements italiens des mathématiques Né le 27 août 1858 à Cuneo, en Italie, le logicien Giuseppe Peano est connu pour son travail influent sur la logique mathématique et sur les FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES. En 1889, il publie un célèbre ensemble d'axiomes (révisé en 1899), aujourd'hui appelé PEANO'S POSTU LATES, qui définit les NOMBRES NATURELS en termes d'ensembles. Un an plus tard, il invente des courbes qui remplissent l'espace, comme la COURBE DE PEANO , que l'on croyait impossible à l'époque. Ces courbes montrent, en quelque sorte, qu'il y a autant de points sur une droite qu'il y en a dans un plan.

Peano est diplômé de l'Université de Turin en 1880 avec un doctorat en mathématiques et son diplôme d'habilitation en 1884. Il est resté à l'université en tant que professeur de mathématiques tout au long de sa carrière.

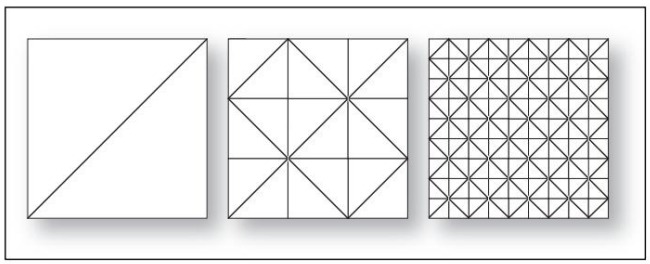
Les premiers travaux de Peano étaient dans le domaine des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, où il a étudié et établi des résultats significatifs sur le problème de la classification des équations pour lesquelles l'existence de solutions est garantie. Mais ses intérêts se tournent vers la logique mathématique en 1888 avec la publication de son texte Calcul géométrique, dont le premier chapitre est consacré au sujet. Peano publie ses célèbres axiomes définissant les nombres naturels un an plus tard dans le petit pamphlet Arithmetices prin cipia, nova methodo exposita, (Principes arithmétiques, exposition d'une nouvelle méthode), qu'il rédige entièrement en latin à la surprise de ses collègues. Peu de temps après, il a présenté son travail sur sa fameuse courbe.

Les historiens des mathématiques estiment que les contributions de Peano aux mathématiques ont diminué après cela. En 1892, Peano a commencé à travailler sur une entreprise énorme pour rassembler tous les résultats connus en mathématiques, essentiellement sous forme de liste géante. Ce projet, qu'il a appelé Formulario mathematico (Formes mathématiques), a consommé ses heures de travail pendant 16 ans. Il termina le projet en 1908, mais reçu peu d'attention pour cela. Bien que le texte contienne de nombreuses informations précieuses, il était difficile à lire, non seulement en raison de sa nature sèche, mais aussi parce que Peano a choisi de l'écrire dans une nouvelle "langue universelle" qu'il a inventée à partir d'une version simplifiée. du latin. Il espérait développer une culture universelle de l'exploration mathématique unie par un langage commun. Son rêve ne s'est jamais réalisé.

Peano est décédé à Turin, en Italie, le 20 avril 1932.
Une grande partie de son travail mathématique, bien qu'important à l'époque, est surtout d'intérêt historique aujourd'hui.

Courbe de Peano En 1890, le mathématicien italien GIUSEPPE PEANO (1858–1932) a décrit une courbe qui pouvait passer par chaque point d'un carré. La courbe est construite par un processus itératif. On commence par tracer la diagonale d'un carré, puis on divise le carré en neuf sous-carrés et on trace certaines diagonales de ces sous-carrés. A l'étape suivante, chaque sous-carré est divisé en neuf sous-sous-carrés et le motif est répété. La courbe de Peano est la courbe qui résulte lorsque cette procédure est répétée indéfiniment. On peut intuitivement voir que la construction de Peano est un objet qui passe par chaque point du carré. (Elle passe par certains points plus d'une fois.) Pour cette raison, la courbe de Peano est décrite comme une courbe de remplissage d'espace. Sa construction montre, en un certain sens, que l'ensemble des points à l'intérieur d'un carré n'est pas plus infini que l'ensemble des points sur une courbe.

Pour rendre la définition de la courbe de Peano mathématiquement précise, pour chaque nombre t dans l'intervalle [0,1] , notons Pn (t) le point dans le carré qui est de t unités le long de la longueur de la courbe qui est produite dans le nième étape de la procédure ci-dessus. (Remarquez, par exemple, que $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ = (0.5, 0.5) pour tout n.) Définissons alors P(t) comme étant la LIMITE de ces points :



Courbe de remplissage d'espace de Peano

Machine Translated by Google

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} P_n(t)$$

On peut montrer que cette formule représente bien une FONCTION CONTINUE depuis l'intervalle unitaire [0,1] jusqu'à tous les points du carré unitaire. Puisque toute fonction continue définie sur un intervalle peut être considérée comme l' ÉQUATION PARAMÉTRIQUE d'une courbe, il convient en effet de penser alors la fonction de Peano comme une courbe dans un espace à deux dimensions.

Notez que si nous prenons la longueur du côté du carré à 1 unité, alors la longueur de la diagonale est $\sqrt{2}$ unités de long. Chaque itération de la procédure produit une courbe trois fois plus longue que la courbe de l'étape précédente.

Voir aussi CARDINALITE ; INFINI.

Les postulats de Peano En 1889, le mathématicien italien GIUSEPPE PEANO (1858–1932) présenta une première série de postulats de base qui, espérait-il, caractériseraient précisément les propriétés des nombres naturels. Il a révisé son système 10 ans plus tard pour déclarer : Il existe un ensemble N dont les éléments sont appelés « num bers » avec les propriétés suivantes :

1. A tout nombre a on peut assigner un autre nombre a′ appelé son successeur. (Nous pensons normalement à a′ comme a + 1.)
2. Deux nombres différents n'ont pas le même successeur.
3. Il y a au moins un nombre qui ne succède à aucun autre nombre.
4. Axiome d'induction : Si un sous-ensemble M de nombres contient au moins un nombre qui n'est pas un successeur, mais a la propriété que pour tout nombre a dans M, son successeur a′ est dans M, alors M = N. (Cela c'est-à-dire que chaque nombre est dans M.)

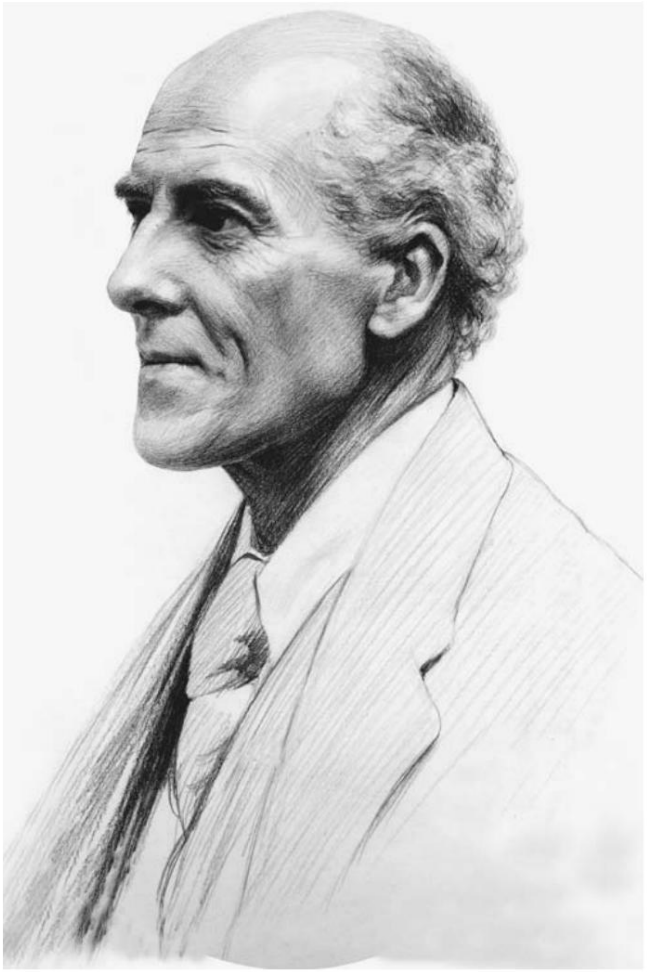
Il convient de noter qu'il découle de ces axiomes qu'il n'existe qu'un seul nombre qui ne succède à aucun autre nombre. (Soit e un nombre quelconque qui n'est pas un successeur et soit M l'ensemble de tous les nombres qui sont des successeurs avec le nombre e. Par l'axiome d'induction, M = N. Il s'ensuit alors que e est le seul nombre qui échoue être un successeur.) Ce numéro spécial est généralement appelé ZERO.

De ces postulats très élémentaires, Peano a pu définir une opération d'addition sur les nombres et en déduire toutes les propriétés de l'arithmétique que nous utilisons aujourd'hui.

Voir aussi INDUCTION ; NOMBRES NATURELS.

Pearson, Karl (1857–1936) Statistique britannique Né le 27 mars 1857 à Londres, en Angleterre, le mathématicien Karl Pearson est connu pour son influence dans le développement des statistiques appliquées à la biologie et aux sciences sociales. Pearson a introduit, pour la première fois, des concepts de base tels que l'ÉCART-TYPE et la notion de COEFFICIENT DE CORRÉLATION. Il a également développé le précieux TEST CHI-SQUARED.

Formé à l'Université de Cambridge, Pearson a occupé un poste de professeur à l'University College de Londres, pendant la majeure partie de sa carrière, étudiant l'analyse de l'hérédité et de l'évolution en biologie. À partir de 1893, Pearson a publié une série de 18 articles tous intitulés "Mathematical



Karl Pearson, un éminent statisticien du XXe siècle, a été le premier à développer des concepts fondamentaux tels que "l'écart type" et le "coefficient de corrélation". (Photo gracieuseté de Topham/Fotomas/The Image Works)

Machine Translated by Google

Contribution à la théorie de l'évolution », qui, sur une période de 21 ans, a décrit les principes de l'analyse statistique. Son travail, cependant, n'était pas sans controverse. Alors que d'autres statisticiens de l'époque, dont SIR RONALD AYLMER FISHER (1890-1962) et WILLIAM SEALY GOSSET (1876-1937), mettaient l'accent sur le rôle des causes plutôt que sur la corrélation et travaillaient avec des échantillons de petite taille pour déduire des informations fiables, Pearson a analysé de grandes tailles d'échantillons et exploré les tendances générales.
Cette différence de philosophie a conduit à une dispute amère entre Pearson et Fisher, suffisamment véhémente pour amener Fisher à refuser un poste prestigieux au collège afin d'éviter simplement de travailler avec Pearson.
Néanmoins, le travail de Pearson a été dûment reconnu comme significatif, et Pearson a reçu le poste de premier professeur Galton d'eugénisme au Galton National Laboratory of Eugenics. Il y fut président de 1911 à 1933.

En plus d'apporter des contributions importantes au domaine des statistiques, Pearson a également pratiqué le droit, était actif en politique et a écrit des œuvres littéraires. En 1892, il publie The Grammar of Science, un texte philosophique qui tente d'étendre l'approche et les méthodes de la science à un large éventail d'activités générales. Cette pièce a même anticipé certaines des idées de la théorie de la relativité.

Pearson a fondé la revue Biometrics et a été l'éditeur des Annals of Eugenics. En raison de son travail fondamental dans le développement des statistiques modernes, de nombreux chercheurs considèrent aujourd'hui Pearson comme le fondateur des statistiques du XXe siècle. Il mourut à Coldharbour, en Angleterre, le 27 avril 1936.

Voir aussi SIR FRANCIS GALTON, HISTORY OF PROBA BILITY AND STATISTICS (essai) ; STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

triangle pédale Étant donné un point P dans un triangle ABC, le triangle pédale par rapport à P est formé en faisant tomber des lignes perpendiculaires de P à chacun des trois côtés du triangle. Si X, Y et Z sont les emplacements auxquels ces lignes rencontrent les côtés du triangle, alors le triangle XYZ est le triangle pédalier pour P. Le triangle pédalier peut s'étendre à l'extérieur du triangle si ABC est un triangle obtus.

Les trois hauteurs d'un triangle quelconque se rejoignent en un point commun O appelé orthocentre du triangle. (Voir TRIANGLE.) Le triangle pédalier par rapport à O, avec des sommets aux pieds des altitudes du triangle, est souvent appelé le triangle pédalier d'un triangle donné. C'est aussi appelé triangle orthique. Les géomètres ont montré que si l'on construit une séquence imbriquée de trois triangles orthiques, alors le troisième triangle orthique est similaire au triangle d'origine.

Le cercle pédalier d'un triangle par rapport à un point P est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle pédalier par rapport à P. Le cercle pédalier par rapport à l'orthocentre O est le cercle inscrit du triangle.

En 1775, le mathématicien italien Giovanni Fagnano a proposé le problème suivant :

> De tous les triangles inscrits dans un triangle aigu, lequel a le moins de périmètre ?

En utilisant les techniques de CALCULUS, Fagnano a pu prouver que le triangle orthique est le triangle inscrit souhaité. (Ceci peut aussi être prouvé par des moyens géométriques purs.) Cette observation conduit à un résultat intéressant : si XYZ est le triangle inscrit de plus petit périmètre, alors les deux côtés X à Y et Y à Z sont une solution au fameux path-walking problème de la théorie de l'OPTIMISATION .
Par conséquent, ces deux côtés interceptent le "mur" du triangle donné à des angles égaux, et représentent ainsi le chemin qu'une balle suivrait lorsqu'elle serait lancée de ce côté du triangle. Comme le même argument s'applique à n'importe quelle paire de côtés du triangle orthique, nous avons :

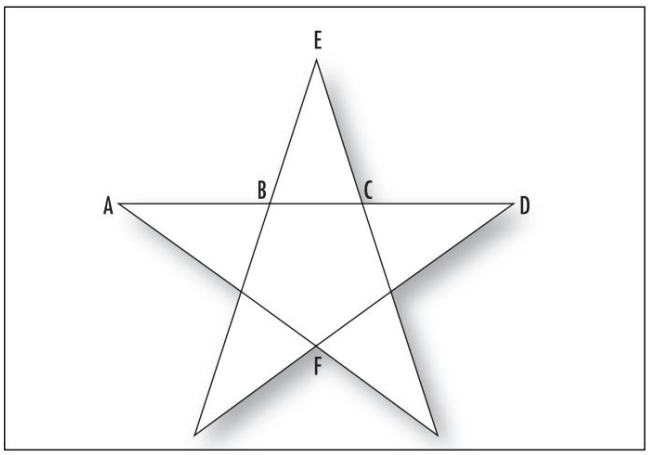
> Le triangle orthique représente la trajectoire fermée d'une balle rebondissant à l'intérieur d'un triangle aigu.

Les mathématiciens ont prouvé que c'est le seul chemin en circuit fermé qu'une balle puisse suivre à l'intérieur d'un triangle aigu. Pour les triangles obtus, il n'y a pas de triangle inscrit de plus petit périmètre.

pentagram (pentacle, pentalpha, pentangle) La figure en forme d'étoile formée par les cinq diagonales d'un pentagone régulier (ou de manière équivalente, formée en étendant tous les côtés d'un pentagone régulier pour se rencontrer par paires) est appelée un pentagramme. L'Ordre de Pythagore, un groupe d'adeptes de PYTHAGORE, a accordé une signification profonde à divers nombres et formes géométriques, y compris le pentagramme. La figure est souvent appelée le "Pentagramme de Pythagore". Ses propriétés géométriques étaient considérées comme divines.

Le RATIO D'OR apparaît un certain nombre de fois dans un pentagramme. Par exemple, le point C divise la longueur AD

Machine Translated by Google



Pentacle

en deux parties de rapport égales à la moyenne d'or, et le point B divise la longueur AC de la même manière. Ceci, de bien sûr, se produit de tous les côtés de l'étoile. Également les longueurs AF, DF, AE et DE sont toutes égales, AFDE un losange.

Si la distance de A à D est 1, alors :

$$AB = CD = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$BC = \sqrt{5}-2$$

$$AF = DF = AE = DE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

La distance du centre du pentagramme à 1 le point C est $\frac{\sqrt{25-11\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$ et au point E est $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}$. La hauteur du pentagramme est $\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$.

pourcentage Un nombre qui représente une fraction de 100 s'appelle un pourcentage. Par exemple, 5 %, écrit 5%, est la fraction $\frac{5}{100}$, et 125 pour cent est le fraction $\frac{125}{100}$. Le terme pourcentage vient du latin phrase per centum, signifiant « par cent ». C'est dit que l'empereur romain Auguste (63 BCE-14 CE) percevait un impôt d'une partie pour 100 sur le produit de tous les biens vendus aux enchères et sur les marchés. Depuis lors, il a été populaire pour représenter toutes les taxes en termes de pourcentages.

Toute fraction peut être convertie en pourcentage en en multipliant par 100. Par exemple, la fraction $\frac{4}{5}$ est interprété comme "quatre cinquièmes de 100" et s'écrit donc : $\frac{4}{5} \times 100 = \frac{400}{5} = 80$ pour cent. Les décimales peuvent aussi être représentés en pourcentages en multipliant par 100 : 0,327, par exemple, sous forme de pourcentage égal à 0,327 × 100 = 32,7 pour cent.

Pour reconvertir un pourcentage en fraction ou en nombre décimal, divisez par 100 et omettez le signe de pourcentage. Pour exemple, 85 pour cent représente "85 parties de 100" et donc est la fraction 85/100 ou, de manière équivalente, la décimale 0,85.

Cent pour cent d'une quantité est 100/100 de celle-ci, c'est-à-dire tout. Par exemple, si 23 élèves sont inscrits à une danse et tous les 23 apparaissent sur un jour, alors 100 pour cent de la classe est présente. Si seulement 20 apparaissent, alors seule la fraction 20/23 ≈ 0,87 de la classe est présent, c'est-à-dire 87 pour cent.

Une valeur en pourcentage supérieure à 100 % représente une quantité supérieure à l'ensemble d'origine. Pour Par exemple, si le Boys Soccer Group a vendu 1 850 barres chocolatées tardives en 2002 et 1 998 barres chocolatées en 2003, puis le nombre de barres vendues en 2003 par rapport avec le nombre vendu l'année précédente est ou $\frac{1998}{1850} = 1{,}08$ 108 pour cent. On appellerait cela un 8 pour cent augmentation des ventes de barres de chocolat. En général, si une quantité passe de la valeur a à la valeur b, le pourcentage d'augmentation de la valeur est donné par la formule : $\frac{(b-a)}{a} \times 100$ pour cent.

On dit que le symbole % pour le pourcentage susceptible évolué à partir des notations abrégées utilisées par le XVe siècle Commis italiens pour le terme pour cent. De telles abréviations inclus : par 100, P 00 et Pc°, avec le c au final expression éventuellement remplacée par une diagonale doubler. Un manuscrit de 1425 montre le symbole % en usage.

Le terme permillage est utilisé pour les parties par mille accompagné du symbole : o/oo. Par exemple, un la quantité exprimée par 543 o/oo représente 543 parties pour mille, soit la fraction 543/1 000.

pourcentage d'erreur Si l' ERREUR ou l'incertitude dans un mesure d'une quantité est exprimée en POURCENT-

Machine Translated by Google

AGE de la mesure totale, l'erreur est appelée pourcentage d'erreur. Par exemple, lorsque 1,2 est utilisé comme approximation pour la quantité 1,16, alors le pourcentage de $\frac{0,04}{1,16} \times 100 \approx 3,4$ %. Si, en mesurant l'erreur de hauteur d'un bâtiment est à 62 pieds, les ingénieurs utilisent un appareil qui mesure au demi-pied près, alors la hauteur du bâtiment doit être écrite : 62 ± 0,5 pieds. Le pourcentage erreur de cette mesure est : $\frac{0,5}{62} \times 100 \approx 0,81$ %. Voir aussi ERREUR RELATIVE.

centile (centile, quartile) L'une des 99 valeurs qui divisent un ensemble de données classées par ordre numérique en 100 parties égales est appelée centile. Par exemple, le 90e centile est la valeur telle que 90 % des points de données sont inférieurs à cette valeur. Souvent, les scores aux tests standardisés sont présentés en termes de centiles.
Par exemple, si 525 étudiants passent un examen et que 95 % des étudiants obtiennent une note de 73 ou moins, le 95e centile pour cet examen est de 74.

Il est souvent jugé pratique de diviser les ensembles de données en quatre parties égales. Le quartile inférieur (ou premier), noté Q1 , est le 25e centile. Le quartile moyen (ou deuxième), Q2 , la médiane, est le 50e centile, et le quartile supérieur (ou troisième), Q3 , est le 75e centile.

nombre parfait Un nombre entier qui est égal à la somme de ses FACTEURS, à l'exclusion du nombre lui-même, est appelé un nombre parfait. Par exemple, les nombres 6, 28, 496 et 8128 sont chacun parfaits.

$$6 = 1 + 2 + 3 = 21 (22 - 1)$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 22 (23 - 1)$$
$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 24 (25 - 1)$$
$$8\,128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064 = 26 (27 - 1)$$

Les nombres parfaits étaient considérés comme ayant des propriétés numérologiques importantes par les anciens érudits et ont été largement étudiés par les Grecs. Dans le livre IX des ÉLÉMENTS , écrit vers 300 avant notre ère, EUCLIDE a prouvé que si $2^n - 1$ est PREMIER, alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait. Au tournant du XVIIe siècle, le philosophe et mathématicien français MARIN MERSENNE entreprit une étude pour déterminer quels nombres du forme $2^n - 1$ sont premiers. Un tel numéro est aujourd'hui appelé MERSENNE PRIME.

Vers 100 avant notre ère , l'érudit syrien Nicomaque de Gerasa a suggéré que l'inverse du résultat d'Euclide est vrai, c'est-à-dire que chaque nombre parfait doit être de la forme $2^n - 1 (2^n - 1)$ avec $2^n - 1$ premier. (En particulier, alors, il ne peut y avoir de nombres parfaits impairs.) En 1750, LEON HARD EULER a prouvé qu'en effet tout nombre parfait pair doit être de cette forme, prouvant partiellement l'affirmation de Nico machos. Étonnamment, encore à ce jour, personne ne sait s'il existe ou non des exemples de nombres parfaits impairs. Cela reste un fameux problème non résolu. Il a été prouvé que si un nombre parfait impair existe, il doit être plus grand qu'un GOOGOL.

Le résultat d'Euler montre que tout nombre parfait pair est un NOMBRE FIGURÉ triangulaire. Explicitement, $2^{n-1}(2^n - 1) = \frac{2^n (2^n - 1)}{2}$ est la formule de la $(2^n - 1)$-ème triangulaire numéro.

Il est également connu que chaque nombre parfait pair doit se terminer par un 6 ou un 8 (ceci a été conjecturé par Nicomaque) et que chaque nombre parfait pair supérieur à 6 est une somme de nombres cubiques impairs consécutifs :

$$28 = 13 + 33$$
$$496 = 13 + 33 + 53 + 73$$
$$8128 = 13 + 33 + \ldots + 153$$

par exemple, et que tout pair parfait est un de plus qu'un multiple de 9.

La somme des inverses de tous les facteurs d'un parfait nombre est toujours 2. Par exemple, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$. (Cela découle du fait que la somme de tous les facteurs d'un nombre parfait N est égale à 2N. La division de la somme par N produit le résultat.)

On ne sait pas s'il existe une infinité de parfaits Nombres. Moins de 50 nombres parfaits sont connus.

Un nombre qui n'est pas parfait est classé comme abondant ou déficient selon que la somme de tous ses facteurs - à l'exclusion du nombre entier lui-même - est supérieure ou inférieure au nombre. Par exemple, 18 est abondant, car la somme de ses facteurs est supérieure à 18 (on a 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21 > 18), tandis que 25 est déficient car sa somme de facteurs est inférieure à 25. (On ont 1 + 5 = 6 < 25). Tous les nombres premiers sont déficients.

Voir aussi NUMÉROS AMIABLES ; MATHÉMATIQUES GRECQUES.

Machine Translated by Google

périgone (angle rond) Un angle de 360° s'appelle un périgone. Cela représente un tour complet.

périmètre La longueur de la limite d'une figure plane s'appelle son périmètre. Par exemple, le périmètre d'un rectangle est égal à deux fois sa longueur plus deux fois sa largeur. Le périmètre d'un cercle est sa circonférence. Étonnamment, il est possible qu'une figure plane d' aire finie ait un périmètre infini.

Voir aussi FRACTAL.

période Voir FONCTION PÉRIODIQUE.

doublement de période Voir SYSTÈME DYNAMIQUE.

fonction périodique Une fonction est périodique si elle se répète à intervalles réguliers de la variable. Par exemple, la fonction sin(x) est périodique car elle tourne tous les 360°, précisément : sin(x) = sin(x + 360°) pour toutes les valeurs de x. Nous avons aussi que sin(x) = sin(x + 720°) et sin(x) = sin(x + 1080°), par exemple. La plus petite valeur positive p pour laquelle une fonction périodique f satisfait f(x) = f(x + p) pour toutes les valeurs x est appelée la période de la fonction. La fonction sin(x) a une période de 360°, tout comme la fonction cos(x). (La fonction tangente tan(x), cependant, a une période de 180°.)

En physique, tout phénomène qui se répète à intervalles réguliers, comme le balancement d'un pendule, la vibration d'une source sonore ou la rotation de la Terre, est appelé périodique, et le temps qu'il faut pour un cycle complet de le phénomène s'appelle sa période. Cette idée s'étend également à d'autres branches des mathématiques. Par exemple, la décimale répétitive 45,76185185185185185… = 45,76185 a la période 3, puisque trois chiffres sont répétés, et une rotation de 60° autour d'un point du plan a la période 6, puisque six rotations de ce type ramènent les points à leur point d'origine. Emplacements.

Voir aussi SYSTEME DYNAMIQUE ; SÉRIE FOURIER.

permutation (arrangement, ordre) Un arrangement ordonné spécifique d'une collection donnée d'objets est appelé une permutation. Par exemple, une sélection d'un gagnant, un premier finaliste, et un deuxième finaliste d'un groupe de trois finalistes dans un concours serait une permutation de ces trois participants. Les listes ADBC et BDCA sont deux permutations des lettres A, B, C et D.

Le PRINCIPE DE MULTIPLICATION montre que n objets distincts peuvent être ordonnés n! différentes façons. Il y en a donc 4 ! = 24 permutations différentes dans toutes les lettres A, B, C et D. (Voir FACTORIAL.)

Le nombre de façons d'arranger juste r objets à partir d'une collection de n objets distinguables (r ≤ n) est noté P_r^n. Celles-ci sont appelées "permutations prises r à la fois". Par exemple, il y a 12 permutations de A,B,C,D prises deux à la fois : AB, AC, AD, BA, BC, = 12. Encore une fois, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC. Ainsi P_2^4 le principe de multiplication montre que

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En particulier, les $P_n^n = n!$.

permutations P de l'ensemble complet de nombres {1,2,…,n} peuvent être classées comme paires ou impaires en comptant le nombre de fois qu'un grand nombre apparaît à gauche d'un nombre plus petit. Par exemple, dans la permutation 25143 des cinq premiers nombres comptés, le nombre 2 apparaît à gauche de 1 ; 5 apparaît à gauche de 1, 4 et 3 ; et 4 apparaît à gauche de 3. Au total, un grand nombre apparaît à gauche d'un petit nombre un nombre impair de fois. Cette permutation est étrange.

Une transposition est une permutation qui n'échange que deux objets. Par exemple, 14325 représente une transposition (le 4 et le 2 ont changé de place).
On peut vérifier qu'il est possible de remettre les entrées de n'importe quelle permutation paire dans leur ordre d'origine en appliquant un nombre pair de transpositions, et les entrées d'une permutation impaire par un nombre impair de transpositions. Ceci est souvent considéré comme la définition de ce que signifie dire qu'une permutation est paire ou impaire.

Une permutation dans laquelle aucun élément n'apparaît à son emplacement d'origine est appelée un dérangement. Par exemple, BCAED est un dérangement de A, B, C, D, E. Il y a précisément

$$!n \approx \left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right) \cdot n!$$

dérangements de n objets.

Machine Translated by Google

Pour le prouver, notons Si1 i2…ik le nombre de mutations par qui maintiennent les éléments i1 ,i2 ,…ik fixes en place. (Ainsi, les n – k objets restants peuvent être permutés de n'importe quelle manière.) Nous avons Si1i2…

Il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k objets, et par les $S_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (n-k)!$.

PRINCIPE D'INCLUSION-EXCLUSION il y a donc

$$(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) - (S_{12} + S_{13} + \cdots + S_{n-1,n}) + \cdots + (-1)^{n-1} S_{12\ldots n} = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}0!$$

permutations qui maintiennent au moins un objet à son emplacement correct. La formule ci-dessus s'ensuit facilement.

La PROBABILITÉ qu'une permutation choisie au hasard soit un dérangement est ce nombre divisé par n!, le nombre total de permutations. Si n est grand, sa valeur est très proche de la série infinie :

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$$

qui se trouve être la SÉRIE DE TAYLOR de e x évaluée à x = – 1. Cela résout le fameux « problème de hachures » :

> Un groupe de messieurs vérifient leurs chapeaux au vestiaire d'un country club. Le greffier perd les enregistrements indiquant quel chapeau appartient à qui et commence à distribuer des chapeaux au hasard au fur et à mesure que les hommes partent. Quelle est la probabilité qu'aucun homme ne reçoive son propre chapeau ?

La réponse est d'environ $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

Des permutations sont également utilisées pour analyser le SLIDE FIF TEEN PUZZLE. Le nombre de permutations de n objets dans lesquelles chaque objet se déplace d'au plus un endroit, soit à gauche, soit à droite, depuis son emplacement d'origine est Fn+1, le (n+1)-ième NOMBRE DE FIBONACCI.

Voir aussi COEFFICIENT BINOME ; COMBINAISON; FONCTION; SOUS-FACTORIEL.

perpendiculaire Ce terme est utilisé dans n'importe quel contexte pour décrire deux constructions géométriques qui se rencontrent à droite angles. Par exemple, deux droites sont perpendiculaires si l'angle entre elles est de 90°. "Déposer une perpendiculaire" d'un point à une ligne consiste à tracer un segment de ligne qui commence au point donné et rencontre la ligne à angle droit. La longueur de ce segment de ligne est la distance la plus courte entre le point donné et les points de la ligne. Cette longueur est appelée la distance perpendiculaire du point à la ligne.

La médiatrice d'un segment de droite est la droite perpendiculaire au segment passant par son milieu. Il représente tous les points du plan qui sont équidistants des deux extrémités du segment de ligne donné. Deux plans sont perpendiculaires s'ils se rencontrent à angle droit.

Le terme perpendiculaire a tendance à être utilisé principalement dans les discussions sur les lignes et les plans. D'autres quantités géométriques (telles que les vecteurs et les surfaces courbes) peuvent se rencontrer à angle droit, mais les mathématiciens ont tendance à utiliser le mot ORTHOGONAL dans ces contextes. Par exemple, deux vecteurs sont orthogonaux si l'angle entre eux est de 90°. Cette convention n'est pas ferme. Souvent, les mots perpendiculaire et orthogonal sont utilisés de manière interch

Voir aussi PRODUIT DOT ; NORMAL À UNE COURBE ; NI MAL VERS UN AVION ; NORMAL À UNE SURFACE ; PENTE.

perspective Deux figures planes sont dites en perspective à partir d'un point P si, pour chaque point A d'une figure, il existe un point correspondant B de l'autre de sorte que la droite reliant P à A rencontre également B. Le point P s'appelle le centre de la perspective.

La notion de perspective a joué un rôle important dans le développement des techniques artistiques au XVe siècle. Dans une tentative de capturer une impression de profondeur dans une scène peinte en deux dimensions, les artistes de la Renaissance ont commencé à dessiner des objets au premier plan plus grands que ceux de la même taille à l'arrière-plan. Ils ont imaginé un point distant à l'infini à l'arrière de la scène et ont tracé des lignes directrices émanant de ce point à travers la toile pour aider à créer un réalisme tridim (Aujourd'hui, nous appelons une telle construction une PROJECTION centrale.) Les artistes et érudits ALBRECHT DÜRER (1471-1528) et GIRARD DESARGUES (1591-1661) ont été les premiers à étudier les mathématiques de la perspective.

Les mathématiciens disent également que deux figures planes sont en perspective à partir d'une ligne si les côtés correspondants de chaque forme, s'ils sont étendus, se rencontrent en des points qui se trouvent tous sur une ligne commune. LE THÉORÈME DE DESARGUES montre que si deux

Machine Translated by Google

les figures planes sont en perspective d'un point, alors elles sont également en perspective à partir d'une ligne, et vice versa. (Bien que le théorème ne soit énoncé que pour les triangles, tout la figure polygonale peut être subdivisée en triangles pour auquel le théorème s'applique.)

pi Le nombre réel, noté π, défini comme le rapport de la circonférence C d'un CERCLE de n'importe quelle taille dessiné dans un plan à son diamètre D, est appelé pi :

$$\pi = \frac{C}{D}$$

Sa valeur est π = 3,141592653589793… Que la valeur de ce rapport est le même pour tous les cercles plans n'est pas immédiatement évident. Pour voir pourquoi c'est le cas, notez que si tout diagramme ou image est agrandi ou réduit par un facteur k, alors toutes les longueurs de cette image changent d'un facteur k. Dans en particulier, pour l'image d'un cercle, la longueur de sa circonférence passe à kC et la longueur de son diamètre à kD. Par conséquent, le rapport de la circonférence à diamètre reste inchangé : $\frac{kC}{kD} = \frac{C}{D}$. Que deux les cercles dans le plan peuvent être considérés comme des versions à l'échelle l'un de l'autre explique donc pourquoi la valeur de π est la même pour tous les cercles. (Il convient de mentionner que le propriété d'échelle utilisée ici est un phénomène de GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE et que la valeur de π n'est pas la idem pour tous les cercles en GEOMETRIE SPHERIQUE ou GEOMETRIE HYPER BOLIQUE. Par exemple, la valeur de π change pour les cercles dessinés sur des sphères, dont la valeur varie n'importe où entre 2 et 3.141592…)

Une étude de AREA montre que l'aire d'un cercle de le rayon r est donné par :

$$A = \pi r^2$$

Ainsi π peut aussi être défini comme le rapport de l'aire d'un cercle à son rayon au carré.

Bien que ce ne soit pas standard, on peut associer un valeur π à d'autres formes également. Par exemple, le rapport de le périmètre d'un carré à sa largeur (diamètre court) est le même pour tous les carrés. Ainsi on peut dire : πcarré = 4. (En utilisant la diagonale du carré comme diamètre long produit à la place la valeur πcarré = rapport $\frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2.828$.) Le du périmètre d'un triangle équilatéral à son diamètre (mesuré comme la hauteur du triangle) est le identique pour tous les triangles équilatéraux. On a : $\pi_{\text{triangle}} = \approx \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 3,464. En fait, précisément de cette manière, en inscrivant polygones avec de plus en plus de côtés dans un cercle et calculer les valeurs associées de π pour ces polygones, ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 avant notre ère) ont montré que la vraie valeur de π pour les cercles se situe entre $\frac{223}{71} = 3 + \frac{\text{dix}}{71}$ et $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$. Le rapprochement $\frac{22}{7}$, correct à deux décimales, est encore souvent utilisé aujourd'hui.

Depuis l'Antiquité, les savants ont tenté pour trouver la valeur exacte de π. Le PAPYRUS RHIND de L'Égypte ancienne (datée d'environ 1650 av. J.-C.) décrit une procédure pour calculer l'aire d'un cercle qui est de 256 équivaut à utiliser la valeur approximative $\frac{81}{}$ pour π. Les Babyloniens de la même époque utilisaient le terme approximatif valeur $\frac{25}{8}$. Vers 150 EC l'astronome grec CLAUDIUS PTOLÉMÉE a établi que $\pi \approx \frac{377}{120}$, et 300 ans plus tard Le savant chinois ZU CHONGZHI a utilisé le approximatif $\frac{113}{}$ $\pi \approx \frac{355}{}$, corriger à six décimales près. Vers 530 CE, érudit hindou 62 832 Création d'ARYABHATA l'approximation proche vers $\frac{}{20\,000} = \frac{3\,927}{1\,250}$ pour π, et 1150 CE BH ASKARA, après avoir utilisé cette estimation plusieurs fois dans son travail, a noté que le $\sqrt{10}$ services comme une approximation suffisamment précise pour la plupart des objectifs pratiques.

En 1429, le mathématicien arabe JAMSHID AL-KASH– ı calculé la valeur de π avec 16 décimales près, et en 1610, utilisant un polygone à 262 côtés pour approximer un cercle, le mathématicien allemand Ludolph van Ceulen a calculé avec précision les 35 premières décimales de π. Il consacra la plus grande partie de sa vie à cette tâche.

En 1767, le mathématicien suisse JOHANN HEINRICH LAMBERT a prouvé que π est un NOMBRE IRRATIONNEL, établissant ainsi que le développement décimal pour π ne se terminera jamais ni ne tombera dans un cycle répétitif. Plus tard, en 1873, le savant anglais WILLIAM SHANKS, après 15 ans de travail, calculé, à la main, la décimale expansion de π à 607 places. Malheureusement il a fait une erreur à la 527e place, rendant ensuite le développement décimal incorrect, mais personne ne s'en apercevra pendant près d'un siècle.

Machine Translated by Google

En 1882, le mathématicien allemand FERDINAND VON LINDEMANN a prouvé que π est un NOMBRE TRANSCENDENTAL, établissant une fois pour toutes que le problème de la QUADRATURE DU CERCLE ne peut pas être résolu.

Avec l'avènement des machines informatiques au XXe siècle, les mathématiciens pouvaient calculer de plus en plus de chiffres de π. En 1949, JOHN VON NEUMANN a utilisé l'ordinateur ENIAC du gouvernement américain pour calculer π à la 2 037ème décimale. (Il a fallu 70 heures de temps de machine.)
En 1981, les scientifiques japonais Kazunori Miyoshi et Kazuhiko Nakayama ont évalué 2 millions de décimales de π, et en 1991, à l'aide d'un superordinateur construit à la maison dans un appartement de New York, les frères Gregory et David Chudnovsky ont calculé π à 2 260 321 366 décimales. Aujourd'hui, plus de 1,24 × 1012 chiffres de π sont connus.

La séquence de chiffres 0123456789 apparaît dans le développement décimal de π commençant à la 17 387 594 880ème décimale. C'est la première, mais pas la seule, apparition de cette séquence. Le 9876543210 apparaît pour la première fois à la 21 981 157 633ème décimale.

Il existe de nombreuses belles formules pour π. Par exemple, la FORMULE DE VIÈTE , la SÉRIE GREGORY, la FONCTION ZETA et le PRODUIT DE WALLIS montrent respectivement que :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \times \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

$$\frac{2\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \cdots$$

Le BUFFON NEEDLE PROBLEM fournit également une autre apparence surprenante du π. Le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783) a également montré :

$$\pi = 4 \arctan\frac{1}{2} + 4 \arctan\frac{1}{3}$$

$$\pi = 4 \arctan\frac{1}{7} + 8 \arctan\frac{1}{3}$$

$$\pi = 20 \arctan\frac{1}{7} + 8 \arctan\frac{3}{79}$$

(Des formules similaires découlent de l'identité générale :

$$\arctan\frac{1}{x} = \arctan\frac{1}{x+y} + \arctan\frac{y}{1 + x(x+y)}$$

pour des choix appropriés de x et y.) Le mathématicien hongrois PAUL ERDÖS (1913-1996) a établi le résultat remarquable suivant :

En commençant par un entier positif n, arrondissez-le au multiple de n - 1 le plus proche, puis arrondissez le résultat au multiple de n - 2 le plus proche, et ainsi de suite, jusqu'au multiple de 2 le plus proche. Appelez le résultat f (n). (Nous avons, par exemple, f(3) = 4, f(5) = 10 et f(7) = 18.)
Alors la LIMITE du rapport de n à f(n), lorsque n devient grand, est π :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{f(n)} = \pi$$

Un certain nombre de questions fondamentales sur l'interaction entre π et le nombre e d'Euler restent sans réponse.
Par exemple, personne ne sait encore si les nombres ou loge (π) π + e, e^{π}, sont rationnels ou irrationnels (ni si π π est algébrique ou transcendantal). Il est curieux que la quantité e – π ait une valeur extraordinairement proche de 20.

Notre choix d'utiliser le symbole π pour désigner le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est dû au mathématicien britannique William Jones (1675-1749), qui l'a utilisé pour la première fois dans sa publication de 1706 Synopsis pal mariorum matheseos . On pense qu'il l'a choisi parce que π est la lettre initiale du mot grec περιφέρεια pour "périphérie". Euler a suivi le choix de Jones et a popularisé l'utilisation de ce symbole dans son influent texte de 1736 Mechanica.

Le nombre π a suscité l'intérêt de nombreux passionnés de mathématiques. Il existe des clubs à travers le monde pour ceux qui peuvent réciter, de mémoire, les 100 premiers et même les 1 000 premiers chiffres de π. Certaines personnes déclarent le 14 mars « jour pi » et considèrent que le temps 1:59 de ce jour est significatif. (Cela correspond à l'expansion décimale 3,14159…) Il existe un mnémonique populaire pour mémoriser les 12 premiers chiffres de π :

Voir. J'ai une rime qui assiste mon faible cerveau, dont
les tâches résistent souvent.

Machine Translated by Google

Le nombre de lettres de chaque mot de cette phrase correspond aux 13 premiers chiffres de l'expansion décimale π.

En 1897, le mathématicien amateur Dr. EJ Goodwin, de Solitude, Indiana, pensait avoir découvert une relation remarquable entre la circonférence d'un cercle et son aire. Plutôt que de partager sa découverte avec la communauté mathématique, Goodwin apporta sa « découverte » à son représentant à l'Assemblée générale de l'Indiana et le persuada de présenter le projet de loi suivant :

> Qu'il soit décrété par l'Assemblée générale de l'État de l'Indiana, qu'il a été constaté qu'une aire circulaire est égale au carré sur une ligne égale au quadrant de la circonférence.

De toute évidence, aucun politicien n'a compris les mathématiques de cette affirmation, car le projet de loi a été adopté et Goodwin était en bonne voie de persuader l'État de l'Indiana que l'aire d'un cercle de circonférence C est donnée par $\frac{C}{4}^2$, ou, de manière équivalente, que la valeur de π est exactement 4. Heureusement, en raison de l'attention de la presse et de la indignation des mathématiciens vivant dans l'État, le projet de loi a déraillé avant d'avoir atteint l'approbation complète du Sénat et d'être promulgué. Le sénateur Hubbell, un opposant au projet de loi qui a également vu l'absurdité de l'affirmation, a fait remarquer avec justesse: "Le Sénat pourrait tout aussi bien essayer de légiférer sur l'eau pour qu'elle monte."

Voir aussi E; FORMULE D'EULER ; MESURE RADIAN ; ESCALADER.

camembert (graphique à secteurs) Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

principe du casier (principe de Dirichlet, principe du tiroir, principe de la boîte aux lettres, schubfachprinzip) Attribué à PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859), le principe du casier observe que si n objets sont placés dans p cases, et n > p, alors au moins un boîte reçoit deux ou plusieurs objets. L'exemple du logement de n pigeons dans p casiers est souvent cité. Ce principe peut également être énoncé sous la forme alternative suivante :

> Si chacun des n objets se voit attribuer l'une des p étiquettes, et n > p, alors au moins deux objets ont la même étiquette.

Ainsi, par exemple, si nous sortons trois chaussettes d'un tiroir qui ne contient que des chaussettes noires et des chaussettes blanches (trois objets, deux étiquettes), au moins deux de ces chaussettes seront de la même couleur.

Ce principe simple a un certain nombre de conséquences surprenantes. Par exemple:

> Il existe deux personnes (non chauves) à Sydney, en Australie, avec exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

(Étiquetez chaque personne par le nombre de cheveux sur sa tête. On sait qu'aucun être humain n'a plus d'un million de cheveux, et il y a plus que ce nombre de personnes à Sydney.)

> Toute collection de 18 entiers contient deux entiers qui diffèrent d'un multiple de 17.

(Attribuez à chaque entier son reste lorsqu'il est divisé par 17. En notant qu'il y a 17 restes possibles - de 0 à 16 - toute collection de 18 entiers doit contenir deux membres avec le même reste. Leur différence est un multiple de 17.)

> Dans tout groupe de six personnes, il y en a deux qui ont un nombre identique d'amis dans le groupe.

(Attribuez à chaque personne le nombre d'amis qu'elle possède dans le groupe. Les six chiffres de 0 à 5 sont possibles, mais pas les 0 et 5 simultanément.
Ainsi, parmi les six du groupe, seuls cinq labels sont possibles. Deux personnes doivent posséder la même valeur.)

Le principe du casier peut être généralisé comme suit :

> Si chacun des nk + 1 objets se voit attribuer l'une des n étiquettes, alors au moins k + 1 objets se voient attribuer la même étiquette.

(Si chaque étiquette est utilisée au plus k fois, alors au plus nk objets sont étiquetés. Comme il y a plus d'objets que cela, certaines étiquettes doivent être utilisées plus de k fois.) Comme conséquences, nous avons, par exemple :

> Parmi 2 000 personnes, au moins cinq sont nées le même jour de l'année.

(Étiquetez chaque personne avec le jour où elle est née. Comme il y a 366 étiquettes possibles et 2 000 = 366 × 5 + 170 > 366 × 5 + 1, au moins cinq personnes ont la même étiquette.)

Machine Translated by Google

Si 865 points sont dispersés sur une feuille de papier carrée de 1 pied de large, alors environ sept de ces points seront regroupés suffisamment proches pour se trouver dans un carré de 1 pouce de large.

(Divisez la feuille de papier en 144 carrés de 1 po chacun de côté et étiquetez chaque point par le carré dans lequel il se trouve. Pour les points qui tombent sur une ligne entre deux carrés, décidez arbitrairement à quel carré il appartient.
Comme 865 = 144 × 6 + 1, un de ces petits carrés contient sept points.)

Le principe suivant est parfois considéré comme une variante du principe du casier :

Si n nombres totalisent S, alors tous les nombres ne sont pas supérieurs à $\frac{S}{n}$. De plus, tous les chiffres ne sont pas plus petit que $\frac{S}{n}$.

Comme conséquence simple nous avons :

Si les salaires de cinq travailleurs totalisaient 100 000 $, alors au moins un travailleur ne gagnait pas plus de 20 000 $.

Voir aussi COMBINATOIRE.

système de valeur de position Voir BASE D'UN SYSTÈME DE NOMBRE.

plan De manière informelle, un plan est une surface plane sans arêtes et s'étendant à l'infini dans toutes les directions. Plus précisément, un plan est une surface géométrique, sans arêtes, avec la propriété que toute droite reliant deux points de la surface reste dans la surface.

Les plans sont considérés comme bidimensionnels - à l'intérieur de la surface, il n'y a que deux directions de mouvement indépendantes : "gauche et droite" et "aller et retour". Tout autre mouvement (mouvement diagonal, par exemple) peut être considéré comme un effet combiné de ces deux mouvements.

Situé dans un espace tridimensionnel, un plan est considéré comme un objet géométrique sans épaisseur. Il est possible d'écrire une équation pour un tel plan.
(Voir ÉQUATION VECTORIELLE D'UN PLAN.)

La géométrie plane est l'étude des relations entre les points, les lignes et les courbes situées dans le même plan. Une figure plane est une figure, telle qu'un carré, un cercle ou un triangle, qui se trouve dans un avion. Les points qui se trouvent tous sur le même plan sont dits coplanaires.

Deux avions situés dans un espace tridimensionnel se croisent s'ils partagent des points communs. S'ils le font, l'ensemble de points qu'ils partagent forme une ligne droite. Deux plans qui ne se coupent pas sont dits parallèles. Trois plans situés dans un espace tridimensionnel peuvent se croiser en un point, le long d'une ligne ou pas du tout.

Dans l'espace à deux et à trois dimensions, deux points P et Q déterminent une ligne. Dans l'espace tridimensionnel, trois points P, Q et R déterminent un plan (à condition que P, Q et R ne se trouvent pas eux-mêmes sur une ligne droite). Pour le voir, considérons la ligne qui passe par P et Q. Il y a une infinité de plans qui contiennent cette ligne. Le point R détermine lequel de ces plans choisir. (Alternativement, en utilisant l'analyse VECTORIELLE , les VECTEURS DE POSITION QR sont deux vecteurs dans le plan souhaité, et donc leur CROSS QR est une normale au plan. C'est tout ce dont nous avons besoin pour écrire l' ÉQUATION VECTORIELLE D'UN PLAN.) Trois points quelconques dans l'espace tridimensionnel sont coplanaires.

Quatre points peuvent ou non se trouver tous sur le même plan. C'est la raison pour laquelle les chaises à quatre pieds ont peu de chances d'être stables sur des sols rugueux et inégaux. Les extrémités des pieds de la chaise représentent quatre points coplanaires, mais les emplacements auxquels vous souhaitez placer ces points sur un sol irrégulier peuvent ne pas l'être. Un tabouret à trois pieds, cependant, sera toujours stable, car trois points quelconques sur le sol irrégulier seront coplanaires. Pour cette raison, les tabourets de grange utilisés pour la traite, par exemple, sont traditionnellement fabriqués à trois pattes.

Platon (vers 428–348 av. J.-C.) Philosophie grecque Né à Athènes, en Grèce, on se souvient du philosophe Platon en mathématiques pour avoir promu l'idée que les concepts mathématiques ont une existence réelle indépendante de la pensée humaine. Ceci est par conséquent lié à l'argument selon lequel les mathématiciens découvrent les mathématiques plutôt qu'ils ne les créent . Platon considérait les mathématiques comme une partie essentielle d'une éducation valorisée, et il a grandement influencé l'estime avec laquelle les mathématiques sont considérées dans le monde occidental. Il a également été le premier à décrire les cinq SOLIDES PLATONIQUES.

Platon était un homme du monde très intéressé par la politique et les affaires humaines. Il était membre du service militaire pendant la guerre du Péloponnèse

Machine Translated by Google

(431-404 avant notre ère) entre Athènes et Sparte, et il voyagé à travers l'Égypte et l'Italie une fois la démocratie restitué à Athènes. En Égypte, Platon apprit la horloge à eau et a ensuite ramené l'idée en Grèce. En Italie, il rencontra les disciples de PYTHAGORE et a été grandement influencé par les mathématiques qu'ils étudié. Bien que Platon n'ait apporté aucune contribution directe aux mathématiques, son respect pour le sujet était profond, et il a beaucoup écrit sur la philosophie du sujet dans ses ouvrages.

Vers 387 avant notre ère, Platon retourna à Athènes pour fonde une école vouée à l'enseignement et à la recherche la philosophie et les sciences. Il s'est assuré un terrain du héros grec Academos, et l'école est devenue connue sous le nom d'Académie. Platon a présidé l'institut pour le reste de sa vie.

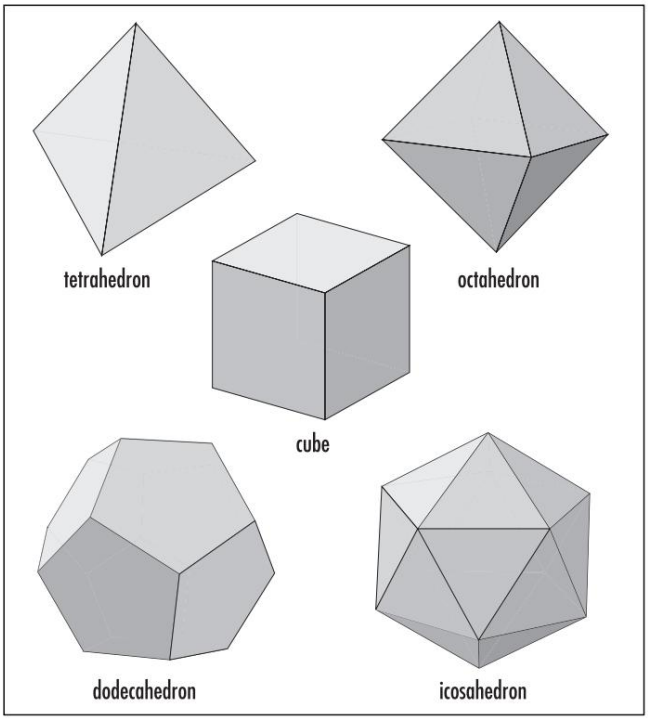
Platon a écrit au total 35 dialogues, conversations fictives entre personnages, savamment structurées de manière à révéler une ligne philosophique de pensée et d'investigation. Dans son dialogue Phédon, Platon décrit les objets mathématiques comme des formes parfaites (une ligne, par exemple, est vraiment un objet sans largeur), et a professé que les objets que nous voyons et pouvons construire dans le l'univers physique sont des imitations imparfaites de ces idéals formes. Il a également discuté de ces idées dans son travail le République. Il ressort de ses dialogues que Platon considérait les mathématiques comme une source de vérité universelle et que l'étude des mathématiques offrait le meilleur outil pour favoriser le développement intellectuel.

Dans son ouvrage Timée, Platon a décrit les cinq solides platoniques comme des unités fondamentales de l'univers. Il suggéré, par exemple, que chacun des quatre "éléments" - la terre, le feu, l'air et l'eau - est convenablement modélisé par la forme d'un solide platonicien, à savoir la CUBE, le TÉTRAÈDRE, l'octaèdre et le icosaèdre, respectivement. Le cinquième solide de Platon, le dodécaèdre, avec ses 12 faces correspondant aux 12 signes du zodiaque, représentait l'univers lui-même. Allemand l'astronome JOHANNES KEPLER (1571-1630) était si épris de l'harmonie proposée du platonicien solides qu'il développa plus tard une méthode étonnamment précise modèle du système solaire basé sur eux.

L'attitude et le respect de Platon envers la nature de la pensée mathématique a eu une influence durable sur tout le cours du progrès scientifique en Occident. Outre la promotion de la valeur des mathématiques pures, Platon a également souligné la nécessité d'une preuve rigoureuse, établissant ainsi un fondement philosophique pour les autres ers, notamment EUCLID, sur lesquels poursuivre la recherche. Platon est également reconnu pour avoir limité l'utilisation de la géométrie outils au compas et à la règle seuls.

Solide de Platon (polyèdre régulier) Tout POLY-HÈDRE convexe, dont toutes les faces sont des polygones réguliers congruents, est appelé un solide de Platon. Par exemple, un CUBE, composé de six faces carrées identiques, est un solide de Platon, comme l'est un TÉTRAÈDRE composé de quatre faces triangulaires équilatérales identiques. Les solides de Platon ont la propriété que non seulement toutes ses faces sont identiques, mais toutes ses sommets sont également semblables dans le sens où le même nombre d'arêtes se rencontrent à chaque sommet du polyèdre.

Les polygones réguliers et les polyèdres réguliers ont été largement étudiés par les savants grecs classiques. Dans un espace à deux dimensions, des polygones réguliers avec n'importe quel nombre de côtés existe. Dans l'espace tridimensionnel, cependant, il n'y a qu'un petit nombre de polyèdres réguliers. Comme sa proposition finale dans son ouvrage vénéré LE ELEMENTS, le géomètre EUCLIDE (vers 300–260 avant notre ère) ont montré qu'il n'y a que cinq solides de Platon, à savoir :



Les solides de Platon

Machine Translated by Google

1. Tétraèdre régulier, avec quatre faces triangulaires et trois arêtes se rencontrant à chaque sommet 2.
Cube, avec six faces carrées et trois arêtes se rencontrant à chaque sommet
3. Octaèdre, avec huit faces triangulaires et quatre arêtes se rencontrant à chaque sommet
4. Dodécaèdre, avec 12 faces pentagonales et trois arêtes se rencontrant à chaque sommet
5. Icosaèdre, avec 20 faces triangulaires et cinq arêtes se rencontrant à chaque sommet

Il n'est pas difficile de voir pourquoi il ne peut y avoir d'autres solides platoniques. Notez que pour tout polyèdre, au moins trois faces polygonales doivent se rencontrer à chaque sommet du solide, et que, pour former un pic à ce sommet, les angles des faces se rencontrant à ce sommet doivent totaliser moins de 360°. (Si la somme des angles autour d'un sommet est précisément de 360°, alors la surface serait plate au sommet. Si, d'autre part, la somme des angles est supérieure à 360°, alors la surface s'effondrerait à ce sommet .) Considérez maintenant les différents polygones réguliers qui pourraient être utilisés pour construire un solide platonicien :

Triangles équilatéraux : Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60°. Ainsi, trois, quatre ou cinq de ces triangles pourraient entourer un sommet d'un polyèdre, mais pas six ou plus. (La somme des angles ne serait plus inférieure à 360°.) Chacune de ces possibilités se produit en fait. Ce sont respectivement le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre.

Carrés : Chaque angle d'un carré est égal à 90°. Ainsi, seuls trois carrés pourraient éventuellement entourer un sommet dans un polyèdre. Cela se produit en fait. C'est le cube.

Pentagones réguliers : Chaque angle d'un pentagone régulier est égal à 108°, et donc seuls trois pentagones pourraient éventuellement entourer un sommet dans un polyèdre. Cela se produit en fait. C'est le dodécaèdre.

Hexagones réguliers et plus : Chaque angle d'un polygone régulier à six côtés ou plus est de 120° ou plus.
Aucune de ces figures ne pourrait entourer un sommet dans un polyèdre.

Le fait que chaque solide platonicien puisse être placé à l'intérieur d'une SPHÈRE - la figure tridimensionnelle la plus parfaite, selon l'ancienne secte pythagoricienne de 500 avant notre ère, de telle sorte que chaque sommet du solide touche juste la sphère - a été jugé profondément significatif à l'époque de l'antiquité. Les Grecs associaient chaque solide platonicien à un « élément » du monde physique. Le tétraèdre, avec son volume minimal par unité de surface, était le feu, et le cube stable était la terre solide. L'octaèdre le moins stable était l'air et l'icosaèdre, avec le rapport volume/surface maximal, était l'eau. Les pythagoriciens, au début, n'étaient pas au courant de l'existence du dodécaèdre, mais ils ont attribué le sens de l'univers entier à cette figure dès sa découverte. (Ses 12 faces correspondent aux 12 signes du zodiaque.) Le mot quintessence, qui signifie aujourd'hui le meilleur ou le plus pur aspect d'une chose immatérielle, dérive de l'expression quinta essential signifiant le cinquième élément, à savoir le dodécaèdre représentant tout. Le philosophe PLATON (vers 428-348 av. J.-C.) a beaucoup écrit sur les cinq polyèdres réguliers et leur signification dans son ouvrage Timée. C'est la raison pour laquelle nous les appelons aujourd'hui solides de Platon.

L'astronome et mathématicien allemand JOHANNES KEPLER (1571-1630) a également tenté d'attribuer une signification particulière aux cinq solides de Platon. À son époque, seules cinq planètes étaient connues, et Kepler s'efforça de relier d'une manière ou d'une autre les orbites de ces planètes aux cinq solides spéciaux. Il a proposé que l'orbite de chaque planète repose sur une sphère et que la distance entre les sphères successives était précisément telle que chacun des solides platoniciens, à son tour, s'emboîte parfaitement entre les deux sphères, la sphère intérieure touchant juste les faces de l'orbite. polyèdre, et les sommets du polyèdre touchant juste la sphère extérieure. Kepler a ensuite abandonné cette théorie. (Il est , en fait, connu pour avoir découvert que l'orbite de chaque planète n'est pas un cercle mais une ELLIPSE.) précis à environ 5 pour cent près.

Si nous supposons que chaque arête d'un solide platonicien mesure 1 unité de longueur, alors le VOLUME V de chaque solide est donné comme suit :

$$V_{\text{tétraèdre}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$V_{\text{Cube en V}} = 1$$

$$V_{\text{octaèdre}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$V_{\text{dodécaèdre}} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}$$

$$V_{\text{icosaèdre}} = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12}$$

Machine Translated by Google

Il convient de mentionner que, comme les solides de Platon, il n'y a qu'un nombre fini de polyèdres semi-réguliers, c'est-à-dire des polyèdres à deux types de faces, chacun un polygone régulier avec chaque sommet identique. Par exemple, le motif classique de 12 pentagones et 20 hexagones sur un ballon de football représente un polyèdre semi-régulier.
ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (287-212 avant notre ère) a prouvé qu'il n'y a que 13 polyèdres semi-réguliers. Pour cette raison, on les appelle aujourd'hui les solides d'Archimède.

Voir aussi FIGURES CONGRUENTES ; POLYGONE.

Axiome de Playfair Voir PARALLELE; POSTULAT PARALLÈLE.

tracer L'acte de spécifier l'emplacement d'un point sur un ensemble d'axes de coordonnées est appelé « tracer » le point. Si une collection de points est spécifiée par une équation de la forme y = f(x), alors un graphique de l'équation est parfois appelé un tracé.

Voir aussi COORDONNEES CARTESIENNES ; COORDONNÉES ; GRAPHIQUE D'UNE FONCTION ; DIAGRAMME DE DISPERSION.

plus Le symbole utilisé pour indiquer ADDITION est le signe plus, +. Par exemple, le nombre 4 augmenté de l'ajout de deux unités supplémentaires s'écrit 4+2. En général, toute opération qui doit être interprétée comme analogue à l'addition est désignée par un signe plus. Par exemple, l' opération GROUP dans un groupe abélien abstrait est généralement notée +. En tant qu'adjectif, le symbole + est utilisé pour décrire une quantité de valeur positive. Par exemple, +4 est une quantité de 4 unités supérieure à zéro.

On pense que le symbole est dérivé d'une abréviation du mot latin et pour « et », qui était souvent utilisé pour décrire l'addition : 4 et 2 font 6, par exemple.
Un manuscrit latin de 1489 sur l'arithmétique écrit par Johannes Widman contient la première utilisation imprimée connue du symbole. Il contient également le symbole "-" pour SUB TRACTION, qui serait déjà utilisé couramment en Allemagne depuis plusieurs décennies.

Le symbole plus/moins, ±, est utilisé pour désigner une quantité qui doit être à la fois ajoutée et soustraite.
Par exemple, les deux solutions du QUADRATIQUE $\pm 1\ 5$
l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ peut être écrit $\frac{\sqrt{\ }}{2}$. Si la
le choix de l'opération est important, les mathématiciens introduiront le symbole . Par exemple, l'expression $a \pm bc$ indique que la deuxième opération doit être différente de la première. (Ainsi, l'expression peut être interprétée comme a + b - c ou a - b + c, mais pas a + b + c ou a - b - c.) Cependant, les choses sont confuses. Si le symbole n'est pas utilisé, alors tous les choix d'opérations sont réputés permis. L'expression a ± b ± c, par exemple, pourrait être l'une quelconque des quatre possibilités.
Aucun symbole spécial n'indique que les deux opérations doivent être identiques.

Le symbole plus/moins a été utilisé pour la première fois en français mathématicien Albert Girard dans son texte de 1621 Tables.

Poincaré, Jules-Henri (1854–1912) Français Analyse, Topologie, Mécanique Né le 29 avril 1854 à Nancy, France, le mathématicien Jules-Henri Poincaré est connu comme l'un des grands génies de tous les temps qui a été actif dans presque tous les domaine des mathématiques et de la physique. Poincaré a fondé le domaine de la TOPOL OGIE algébrique (l'application de techniques algébriques pour résoudre des problèmes d'espace, de forme et de forme) et a découvert une importante classe de fonctions appelées fonctions automorphes. (Ces fonctions, définies dans le domaine des NOMBRES COMPLEXES, sont des rapports de fonctions linéaires et ont la propriété d'être invariantes sous diverses symétries du plan complexe.) En mathématiques appliquées, on se souvient de lui pour ses travaux substantiels dans la théorie des mécanique céleste et pour ses travaux sur l'optique, l'électromagnétisme, la thermodynamique, la théorie quantique et le développement de la théorie de la relativité restreinte. (Il est considéré comme un codécouvreur de la théorie spéciale avec ALBERT EINSTEIN et Hendrik Lorentz.) Poincaré a publié plus de 500 mémoires au cours de sa vie, ainsi qu'un certain nombre de livres populaires sur la philosophie des mathématiques et des sciences.

Après avoir travaillé plusieurs années comme ingénieur des mines à Vesoul, Poincaré obtient un doctorat en mathématiques à l'Université de Paris en 1879. Sa thèse examine les applications des ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES et sert de tremplin à ses travaux ultérieurs en topologie, fonctions automorphes, et en physique.
Poincaré avait un talent pour reconnaître les liens entre des sujets d'étude disparates, lui permettant de résoudre des problèmes sous de nombreux angles différents.

Poincaré publie sa première pièce sur le thème de la topologie en 1895 avec son texte Analysis situs (Analyse de position). En même temps, il a également décrit sa méthode de théorie de l'homotopie basée, essentiellement, sur la

Machine Translated by Google

idée simple que, bien que toute boucle tracée sur la surface d'une SPHÈRE puisse être continuellement réduite jusqu'à un point (tout en restant à la surface de la sphère), le il n'en va pas de même pour les boucles dessinées sur les surfaces de autres objets tridimensionnels. Par exemple, pas tous les boucles dessinées à la surface d'un TORUS sont homotopiquement équivalentes à un point. Ainsi l'étude des boucles sur surfaces conduit à une méthode de distinction des surfaces. (Ceci est important, par exemple, si l'on essaie de déterminer la forme d'objets mathématiques qui ne peuvent pas être visualisés.) Poincaré a conjecturé que toute surface qui a les mêmes propriétés d'homotopie qu'une sphère est topologiquement identique à une sphère. Ce résultat, connue sous le nom de conjecture de Poincaré, est connue depuis longtemps à tenir pour les surfaces unidimensionnelles et bidimensionnelles, et, depuis 1982, pour les surfaces à quatre dimensions et plus. Les travaux visant à prouver la véracité de la conjecture pour les surfaces tridimensionnelles se poursuivent aujourd'hui.

De 1892 à 1899, Poincaré publie son ouvrage en trois volumes Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Nouvelles méthodes en mécanique céleste), une pièce marquante qui visait à caractériser toutes les mouvements des systèmes mécaniques.

Il a été nommé directeur de la faculté des sciences de l'Université de Paris en 1881, chaire de mathématiques physique et probabilités à l'Université de la Sorbonne en 1886, et, la même année, président du prestigieux École Polytechnique. Il a tenu ces chaises jusqu'à son mort en 1912. En 1887, Poincaré est élu, séparément, aux cinq sections de l'Académie des sciences. (mécanique, physique, géographie, navigation et géométrie), et en 1908 il est également élu à l'Académie Française. Il a également reçu une somme extraordinairement importante nombre de prix et de distinctions décernés par d'autres institutions savantes du monde entier, y compris la ROYAL SOCIETY LA MÉDAILLE SYLVESTRE en 1901 et la Médaille Bruce de la Société astronomique du Pacifique en 1911.

Poincaré est mort à Paris, France, le 17 juillet 1912.

point Un emplacement dans l'espace (ou sur une courbe ou une surface) s'appelle un point. Un point est généralement spécifié par son COORDONNÉES dans un système de coordonnées. Par exemple, un point dans un système tridimensionnel de CARTESIAN COORDONNEES est donnée par un triplet de nombres (x,y,z). Dans GEOMETRIE élémentaire , un point est un terme indéfini mais est vaguement considéré comme une entité géométrique ayant pas de dimension. Le géomètre EUCLIDE (environ 300 avant notre ère) donnait la vague description d'un point comme "ce qui n'a pas d'ampleur.

Une collection de lignes est dite CONCURRENTE si les lignes se rejoignent en un point commun. Un TRIANGLE possède de nombreux points de concurrence intéressants.

En arithmétique, la virgule est le symbole utilisé séparer la partie entière d'un nombre de sa partie fractionnaire. Par exemple, le nombre 2,53 se lit comme "deux virgule cinq trois."

Voir aussi REPRÉSENTATION DÉCIMALE ; NEUF POINTS CERCLE; PARCELLE.

point de contact (point de tangence) Le point unique où deux courbes ou deux surfaces courbes se touchent, mais ne traversez pas, s'appelle un point de contact. Par exemple, le point auquel une balle posée sur une table touche le la surface de la table est le point de contact d'une SPHÈRE et un AVION.

Voir aussi TANGENTE.

Poisson, Siméon-Denis (1781-1840) Français Théorie des probabilités Né le 21 juin 1781 à Pithiviers, France, on se souvient du savant Siméon-Denis Poisson pour son travail fondamental sur la théorie des PROBABILITÉS, pour la découverte de la distribution qui porte son nom, et aussi pour sa formulation de la LOI DES GRANDS NOMBRES, toutes complétées dans la dernière partie de sa carrière mathématique. Auparavant, Poisson avait réalisé d'importants contributions au thème de la mécanique céleste et à théorie de l'électricité et du magnétisme.

Poisson entre à l'École polytechnique de Paris en 1798 pour étudier les mathématiques sous la direction de JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813) et PIERRE SIMON LAPLACE (1749-1827), tous deux membres de la faculté à l'époque. Après seulement deux ans d'études plus tard, Poisson obtint un poste de professeur adjoint à la institution et plus tard un poste de professeur titulaire en 1806.

Au cours de cette première période de sa carrière, Poisson a étudié les ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ainsi que les SÉRIES PUISSANTES. et leurs applications à la mécanique et à la physique. A partir de 1808, il produit des résultats fondamentaux étendant les travaux de Laplace et Lagrange sur le mouvement du planètes, développant de nouvelles techniques de séries pour approximer les solutions aux perturbations de leurs orbites. Il a publié un traité influent en deux volumes sur le thème de mécanique en 1811 et a résolu d'importants problèmes sur

Machine Translated by Google

la théorie de la gravitation dans les années qui suivirent. Il trouva des applications de ces travaux à la théorie de l'électromagnétisme en 1813 et à la théorie du transfert de chaleur en 1815.

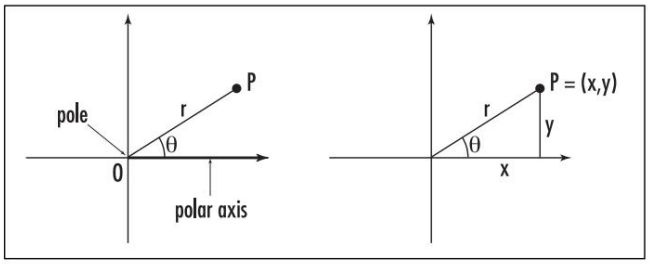
Vers la fin de sa carrière, les intérêts de Poisson se sont tournés vers la probabilité. Fasciné par les études de comportement sociétal, il a commencé à analyser la probabilité qu'un événement aléatoire se produise dans un intervalle de temps donné étant donné que sa probabilité de se produire est très faible, mais le nombre d'opportunités pour qu'il se produise est grand. Ces travaux l'amenèrent à découvrir la DISTRIBUTION DE POISSON, comme on l'appelle aujourd'hui, dont il publia les détails en 1837.

Poisson était un écrivain prolifique et a publié plus de 300 ouvrages mathématiques au cours de sa carrière. Malheureusement, les chercheurs de l'époque ne considéraient généralement pas son dernier travail comme important, et Poisson n'a jamais joui du plein respect de la communauté mathématique. Ce n'est qu'après sa mort, le 25 avril 1840, que l'importance de ses nombreuses idées novatrices est devenue évidente.

Distribution de Poisson Voir DISTRIBUTION BINOMIALE.

coordonnées polaires Inventées par SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) les coordonnées polaires identifient l'emplacement d'un point P dans le plan par sa distance r à un point fixe O dans le plan, appelé l'origine ou le pôle, et l'angle θ la ligne le segment OP fait avec un rayon fixe placé en O, appelé axe polaire. Le pôle est généralement considéré comme l'origine d'un système standard de COORDONNÉES CARTÉSIENNES, l'axe polaire étant l' axe x positif et l'angle θ mesuré dans le sens antihoraire. Le couple de nombres (r,θ) est appelé les coordonnées polaires de P.

A titre d'exemple, le point 1 unité le long de l' axe des x, et 1 unité le long de l' axe des y, écrit (1,1) en cartésien



Coordonnées polaires

coordonnées, est une distance $\sqrt{2}$ d'origine et fait un angle de 45° avec l' axe des abscisses, et a donc des coordonnées $(\sqrt{2}, 45°)$. En ajoutant des multiples de 360° à la polaires (angle, on peut identifier le même point que $(\sqrt{2}, 405°)$, $(\sqrt{2}, 765°)$ ou encore $(\sqrt{2}, -315°)$, par exemple. Cela montre que la représentation en coordonnées polaires d'un point n'est pas unique. Les coordonnées polaires de l'origine ne sont pas bien définies, et ce point est généralement appelé simplement le point avec r = 0.

Il est possible de convertir entre les coordonnées polaires et cartésiennes. Si un point P a des coordonnées cartésiennes (x,y) et des coordonnées polaires (r,θ) , alors P se trouve au sommet d'un triangle rectangle avec une branche horizontale de longueur x et une branche verticale de longueur y. La longueur r est l'hypoténuse du triangle et, de la TRIGONOMÉTRIE, θ est un angle dont le sinus est y/r, le cosinus est x/r et la tangente est y/x. Ainsi, à l'aide du THÉORÈME DE PYTHAGORE , on a les équations :

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Pour vérification on voit que le point P = (1,1) donné en coordonnées cartésiennes a bien des coordonnées polaires donné par $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45°$. Le point Q de coordonnées polaires (2,30°) a des coordonnées cartésiennes données par : $x = 2\cos(30) = \sqrt{3}$ et $y = 2\sin(30) = 1$. Donc Q = $(\sqrt{3},1)$.

Les coordonnées polaires sont utiles pour décrire les équations en mathématiques qui ont une symétrie centrale autour de l'origine. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, l'équation d'un cercle de rayon cinq se lit : $x^2 + y^2 = 25$. En coordonnées polaires, cette équation se réduit à $(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 5$. L'équation d'une SPIRALE D'ARCHIMÈDE est aussi élémentaire en coordonnées polaires : $r = a\theta$ pour certains constante A.

UNE DOUBLE INTÉGRALE $\iint_R f(x,y)dA$ est défini comme étant le volume sous le graphe z = f(x,y) au-dessus d'une région R dans le plan xy. Il peut être calculé comme une intégrale itérée $\int\int f(x,y)dxdy$ avec les limites d'intégration appropriées insérées. Pour convertir cette intégrale en une intégrale exprimée en coordonnées polaires, on effectue une double intégration donnée par $\int\int f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$. L'apparition du r dans l'intégrande s'explique comme suit :

Machine Translated by Google

Subdivisez la région R en petits morceaux appropriés pour l'examen avec des coordonnées polaires. Le ke section est donc une région donnée par les valeurs r et θ borné entre des valeurs fixes : rk1 < r < rk2 et θk1 < θ < θk2 . Il apparaît comme la région entre un secteur d'angle θk2 – θk1 de rayon rk2 et le secteur de même angle mais à un plus petit rayon rk1 , et a donc une aire :

$$dA_k = \frac{\theta_{k2} - \theta_{k1}}{2\pi}\pi r_{k2}^2 - \frac{\theta_{k2} - \theta_{k1}}{2\pi}\pi r_{k1}^2$$

$$= \frac{1}{2}(\theta_{k2} - \theta_{k1})(r_{k2}^2 - r_{k1}^2)$$

$$= \frac{r_{k1} + r_{k2}}{2}(\theta_{k2} - \theta_{k1})(r_{k2} - r_{k1})$$

$$= \frac{r_{k1} + r_{k2}}{2}\, d\theta_k\, dr_k$$

où dθk = θk 2 – θk 1 et drk = rk 2 – rk 1 . Le double l'intégrale est donc donnée comme limite

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k \cos\theta_k, r_k \sin\theta_k)\, dA_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k \cos\theta_k, r_k \sin\theta_k)\, \frac{r_{k1} + r_{k2}}{2}\, d\theta_k\, dr_k$$

pris en charge des subdivisions de plus en plus fines de la région R. Mais dans cette limite, les valeurs rk1 et rk2 se rapprochent toutes deux une valeur commune r, et donc le terme $= r$ apparaît dans $2r$ l'intégrande. (Des calculs similaires expliquent pourquoi un doit insérer un r lors de la conversion d'une intégrale en COORDONNÉES CYLINDRIQUES, et un terme $\rho^2 \sin\phi$ lors de la conversion en COORDONNÉES SPHÉRIQUES.)

Voir aussi CARL GUSTAV JACOB JACOBI ; ROSE.

Pólya, George (1887–1985) Éducation hongroise, Géométrie, Théorie des nombres Né(e) le 13 décembre 1887, à Budapest, Hongrie, mathématicien George Pólya est connu non seulement pour son travail influent dans les domaines de la théorie des PROBABILITÉS , des mathématiques physique, GEOMETRIE, COMBINATOIRE et NOMBRE THÉORIE, mais aussi pour ses travaux marquants dans le domaine de l'enseignement des mathématiques et de la résolution de problèmes. Son œuvre célèbre How to Solve It a fourni des outils heuristiques pour casser problèmes complexes en composants plus simples et développer des stratégies d'attaque, et fournir des travaux pratiques idées pour trouver des solutions et comprendre le processus créatif de faire des mathématiques. Le travail était immensément influent et a été traduit en 17 langues, se vendant à plus d'un million d'exemplaires. Polya est aussi noté pour avoir inventé le nom THÉORÈME CENTRAL-LIMITE pour le fameux résultat fondamental utilisé en STATISTIQUE.

Pólya a obtenu un doctorat en mathématiques de la Université de Budapest en 1912 après avoir terminé une thèse sur le thème des probabilités géométriques. Il s'intéressait non seulement à comprendre les mathématiques, mais aussi à le processus par lequel il est découvert. En 1913, il commence travailler sur un manuel en ANALYSE qui organisait les sujets et les problèmes non par leur sujet, mais plutôt par leur méthode de résolution. Cette réflexion le conduisit bientôt à la travailler sur l'art de la résolution de problèmes et l'écriture de son célèbre texte Comment le résoudre. En bref résumé, Pólya a élaboré le plan de base en quatre étapes suivant pour résoudre un problème :

1. Comprendre le problème. (Identifiez les éléments connus et les inconnues. Dessinez un schéma ou un tableau. Utilisez le diagramme pour identifier les relations entre les variables ou faire de même avec des formules algébriques.)
2. Élaborez un plan. (Considérez si le problème est similaire à un exemple précédemment résolu. Cherchez un motif. Considérez les formules connues qui peuvent être applicables. Faire devine et utilise des essais et des erreurs. Casser le problème en plus petites pièces ou caisses. Travaillez à rebours à partir du solution annoncée. Reformulez le problème.)
3. Exécutez le plan. (Vérifiez chaque étape. Prouvez ou vérifiez chaque étape.)
4. Regardez en arrière, vérifiez le travail et réfléchissez au problème. (La solution obtenue a-t-elle un sens ? solution soit trouvée via un autre, et peut-être plus court, méthode? Posez des questions « et si ». Et si la question était modifiée d'une certaine manière ? Que se passe-t-il si certaines conditions ou déclarations du problème sont omises ?)

En identifiant le processus de réflexion derrière la résolution problèmes pour la première fois, Pólya a révolutionné l'art de l'enseignement des mathématiques. Il a soutenu que le plus grand bien dans l'enseignement des mathématiques vient de fournir étudiants la possibilité de découvrir les résultats par eux-mêmes et que le développement de la résolution de problèmes compétences fournit les moyens appropriés pour que cela se produise.

Pólya a reçu de nombreux honneurs tout au long de sa vie, y compris l'élection à la London Mathematical Society,

Machine Translated by Google

l'Académie nationale des sciences des États-Unis, l'Académie américaine des arts et des sciences et la Académie Suisse de Mathématiques. En 1933, il est récompensé une bourse Rockefeller pour soutenir une visite à Princeton Université, et au milieu des années 1940, Pólya a accepté un poste à l'Université de Stanford, où il est resté pendant reste de sa carrière. Il est décédé à Palo Alto, en Californie, le 7 septembre 1985. Son texte classique est toujours utilisé aujourd'hui comme modèle standard pour les cours de niveau secondaire et collégial sur la résolution de problèmes.

polygone Figure géométrique plane délimitée par un nombre de lignes droites s'appelle un polygone. Le nom est dérivé de la langue grecque avec une signification poly "beaucoup" et gonia signifiant "angle". C'est généralement supposons que deux lignes formant la figure ne se croisent pas (autre qu'aux coins ou aux sommets du polygone).
Le polygone est dit convexe si l'intérieur de la figure se trouve entièrement d'un côté de chaque ligne utilisée pour former il. Il est appelé concave sinon. (Par exemple, un carré est un polygone convexe et la forme d'une étoile est un polygone concave.)

Le tableau suivant donne les noms des polygones avec des nombres de côtés différents.

Côtés	Nom
3	Triangle
4	Quadrilatère
5	Pentagone
6	Hexagone
7	Heptagone
8	Octogone
9	Nonagone ou Ennéagone
dix	Décagone
11	Undécagone ou Hendecagon
12	Dodécagone
13	Tridécagone ou Triskaidecagon
14	Tétradécagone ou tétrakaidecagone
15	Pentadécagone ou Pentakaidecagone
16	Hexadécagone ou Hexakaidecagon
17	Heptadécagone ou Heptakaidecagone
18	Octadécagone ou Octakaidecagone
19	Enneadecagon ou Enneakaidecagon
20	Icosagone
30	Triacontagone
40	Tétracontagone
50	Pentacontagone
60	Hexacontagone
70	Heptacontagone
80	Octacontagone
90	Ennéacontagone
100	Hectogon

Un polygone à n côtés (un n-gone) a aussi n intérieur angles dont chacun est inférieur à 180° si le polygone est convexe. (Un polygone concave a au moins un intérieur angle supérieur à 180°.)

Une DIAGONALE d'un polygone est une ligne droite reliant deux sommets non adjacents. Dessiner tous les diagonales d'un sommet donné montre que tout convexe un polygone à n côtés peut être subdivisé en n–2 triangles. (Il en va de même pour les polygones concaves, mais on peut besoin d'utiliser une autre collection de diagonales.) la somme des angles intérieurs d'un TRIANGLE est de 180°, ce montre que les angles intérieurs de tout polygone à n côtés somme à (n – 2) × 180°. Ainsi, par exemple, l'intérieur angles de n'importe quel quadrilatère somme à 2 × 180° = 360°, de tout pentagone à 3 × 180° = 540°, et ainsi de suite.

Le franchissement de la limite d'un polygone se termine un tour complet. Cela montre que la somme de l'extérieur les angles de n'importe quel polygone totalisent 360°. (Pour un concave polygone, il faut compter les virages à gauche comme positifs et à droite devient négatif.)

Un polygone est dit équilatéral si toutes les longueurs des côtés sont égal et équiangulaire si tous les angles intérieurs sont égaux. UN polygone n'a pas besoin d'être équilatéral s'il est équiangulaire (considérez un RECTANGLE par exemple) ni équiangulaire s'il est équilatéral (considérons le cas particulier d'un PARALLELO GRAM appelé losange). Les polygones qui sont à la fois équilatéraux et équiangulaires sont dits réguliers.
polygones. Un CARRÉ, par exemple, est un polygone régulier.

Les angles intérieurs d'un n-gone régulier ont chacun valeur $\frac{(n-2)}{n} \times 180°$—la somme des angles intérieurs divisé par le nombre d'angles. Ainsi, par exemple, un triangle équilatéral a des angles intérieurs de $\frac{1}{3} \times 180° = 60°$, angles carrés de $\frac{2}{4} \times 180° = 90°$, pentagone régulier angles de $\frac{3}{5} \times 180° = 108°$, et ainsi de suite.

Machine Translated by Google

Le PÉRIMÈTRE d'un n-gone régulier , avec des côtés de 1 à 2
longueur s, est ns, et sa SURFACE est × périmètre × r = nsr. 1–
2
Ici r est l' APOTHÈME du polygone.

Il est possible de construire un triangle équilatéral à l'aide d'une règle (une règle sans marques) et d'un compas seuls. Tracez une ligne droite. Réglez la boussole à un angle fixe et tracez un cercle avec un centre n'importe où le long de cette ligne. Choisissez un point d'intersection de ce cercle avec la ligne et dessinez un deuxième cercle de même rayon avec ce point choisi comme centre. Les centres de chaque cercle et leur point d'intersection forment maintenant les trois coins d'un triangle équilatéral.

On peut également dessiner un carré, un 5-gon régulier et un 6-gon régulier, mais pas un 7-gon régulier, en utilisant uniquement la boussole et la règle. La question de savoir précisément quels n-gons réguliers sont CONSTRUCTIBLES de cette manière est ancienne.

Étant donné une feuille de papier rectangulaire, il est également possible de créer la forme d'un triangle équilatéral en froissant la feuille. Pliez le papier en deux dans le sens de sa plus grande longueur, en marquant cette ligne médiane comme un pli. Amenez le coin inférieur gauche du papier sur cette ligne médiane pour former un pli diagonal qui passe par le coin inférieur droit. L'emplacement de ce coin gauche sur la ligne médiane est le sommet d'un triangle équilatéral avec le bord inférieur du papier comme base.

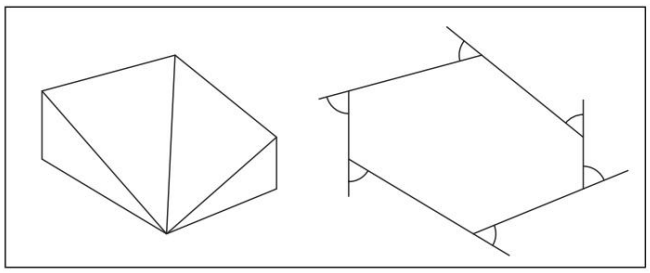
Seuls trois polygones réguliers recouvrent le plan : le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier. Une étude de TESSELATION montre qu'aucun autre polygone régulier ne peut le faire.

Tous les polygones réguliers ont les remarquables suivants propriété:

> Pour tout point à l'intérieur d'un polygone régulier, la somme des distances de ce point à chacun des côtés est toujours la même.

Supposons, par exemple, que nous choisissions un point arbitraire P à l'intérieur d'un hexagone régulier de longueur de côté s situé à des distances h1 , h2 ,…, h6 des côtés de l'hexagone.
Les lignes reliant P aux sommets de l'hexagone divisent la figure en six triangles. L'aire du polygone est

par conséquent la somme des aires de ces triangles, sh1 1–
2
1– 1– 1– 1–
+ sh2 + sh3 + sh4 + sh5 + sh6 , donc h1 + h2 + h3 + h4 + h5 + h6 a une valeur 2 2 2 2 2 2
2 × zone
s
, peu importe



Somme des angles d'un polygone

quel point est choisi. (En général, la quantité 2 × aire
s
est égal au nombre de côtés du polygone régulier multiplié par son apothème.)

La généralisation tridimensionnelle d'un polygone est un POLYÈDRE. La généralisation en quatre dimensions s'appelle un polychore, et en un nombre arbitraire de dimensions, un polytope.

Voir aussi CONCAVE/CONVEXE ; POLYGONE CYCLIQUE ; LONG RAYON.

polyèdre (pluriel, polyèdres) Une figure solide tridimensionnelle dont la surface est composée de surfaces planes polygonales est appelée polyèdre. Par exemple, un CUBE, à six faces carrées, est un polyèdre, tout comme un TÉTRAÈDRE à quatre faces triangulaires, et n'importe quelle PYRAMIDE ou PRISME, par exemple. Chaque surface polygonale est appelée une FACE du polyèdre, et toute ligne le long de laquelle deux faces se croisent est appelée une arête. Tout point auquel trois faces ou plus se rencontrent est appelé un sommet ou un coin du polyèdre.

Les POLYGONES et les polyèdres ont d'abord été étudiés en détail par les anciens Grecs, qui leur ont également donné leur nom : poly signifie « plusieurs » et hédra signifie « siège ».
Ainsi, un polyèdre était considéré comme pouvant être assis sur l'une de ses faces. Dans ce contexte, on suppose alors généralement qu'un polyèdre est convexe, c'est-à-dire qu'aucun plan contenant une face de la figure ne passe également par l'intérieur de la figure. (Par conséquent, un polygone convexe peut être "assis" sur n'importe laquelle de ses faces sur une table.)
Un polyèdre non convexe est dit concave.

Des polyèdres spécifiques sont nommés en fonction du nombre de faces qu'ils possèdent. Par exemple, un tétraèdre est une figure solide à quatre faces polygonales, un pentaèdre est une figure à cinq faces et un hexaèdre est

Machine Translated by Google

tout polyèdre à six faces. Il n'y a pas de polyèdre à moins de quatre faces.

Un polyèdre convexe est dit régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers congruents. Le géomètre EUCLIDE (vers 300-260 av. J.-C.) a prouvé, dans son dernier volume des ÉLÉMENTS , qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre régulier (avec quatre faces triangulaires), le cube (avec six faces carrées), le l'octaèdre (avec huit faces triangulaires), le dodécaèdre (avec 12 faces pentagonales) et l'icosaèdre (avec 20 faces triangulaires). Ces cinq solides réguliers ont joué un rôle important dans l'étude grecque de la géométrie, et une grande signification mystique a été attribuée aux figures. Le philosophe PLATON (vers 428-348 av. J.-C.) a étudié et écrit abondamment sur les cinq polyèdres réguliers, et pour cette raison ils sont aujourd'hui appelés les SOLIDES PLATONIQUES.

Un polyèdre est dit semi-régulier s'il est composé de deux types différents de faces polygonales combinées ensemble de la même manière à chaque sommet du polyèdre. Par exemple, le motif classique dessiné sur un ballon de football décrit un polyèdre semi-régulier composé de 12 pentagones et de 20 hexagones disposés de manière à ce que chaque sommet de la figure soit entouré d'un pentagone et de deux hexagones. ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 av. J.-C.) a prouvé qu'il n'existe que 13 polyèdres semi-réguliers, aujourd'hui appelés solides d'Archimède.

Un polyèdre est dit étoilé s'il est construit à partir d'un polyèdre régulier en attachant des pyramides à ses faces, ou à facettes s'il est formé avec ces pyramides tournées vers l'intérieur.

Le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783) a découvert une formule remarquable, LE THÉORÈME D'EULER , reliant le nombre de sommets v, d'arêtes e et de faces f, de tout polyèdre exempt de trous apparentés au trou d'un TORUS. Nous avons:

$$v - e + f = 2$$

Cette formule prouve, par exemple, que tout polyèdre composé de faces pentagonales et hexagonales, pas nécessairement régulières, avec trois arêtes se rejoignant à chaque sommet, doit contenir précisément 12 faces à cinq côtés. (Pour voir cela, soit v le nombre de sommets du polyèdre, e le nombre d'arêtes, p le nombre de faces pentagonales et h le nombre de faces hexagonales. Alors v - e + p + h = 2. Aussi, puisque trois arêtes se rencontrent à chaque sommet, chaque face pentagonale a cinq arêtes, et chaque face hexagonale six arêtes, on a $3v = 2e = 5p + 6h$. les équations forcent p à avoir la valeur 12, quelle que soit la valeur que h puisse adopter.)

Voir aussi ALTITUDE ; BASE D' UN POLYGONE/POLYHE DRON ; CONCAVE CONVEXE; CÔNE; CYLINDRE; AFFRONTER; FRUSTUM ; HYPERCUBE ; FILET; PARALLÉLÉPIPÈDE; PRISME; PYRAMIDE.

polynôme Une somme de multiples de puissances entières positives d'une variable est appelée un polynôme. La forme générale d'un polynôme est une expression de la forme :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

où an , an–1,…,a1 ,a0 sont des nombres, appelés les COEFFICIENTS du polynôme, de coefficient directeur an supposé différent de zéro. Le nombre a0 , qui peut être nul, est appelé le terme constant du polynôme. La plus grande puissance n qui apparaît dans l'expression avec un coefficient non nul est appelée le DEGRÉ DU POLYNÔME. Par exemple, $\sqrt{2}x^3 - 5x + 8$ et 5 sont des polynômes de degrés trois et zéro, respectivement.

Un polynôme de degré deux est appelé un QUADRATIQUE, de degré trois un cubique, de degré quatre un quartique et de degré cinq un quintique.

On peut ajouter deux polynômes pour produire un nouveau polynôme en collectant des termes similaires, et on peut multiplier deux polynômes en utilisant le processus d' EXPANSION DES CROCHETS. Par exemple:

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) + (x^3 + 4x - 2) = x^3 + 3x^2 + x + 2$$

et

$$(x^2 + 2x + 1)(3x + 5) = 3x^3 + 11x^2 + 13x + 5$$

Si l'on considère la variable x comme une BASE non spécifiée D'UN SYSTÈME DE NOMBRE, alors on peut effectuer les mêmes opérations arithmétiques sur les polynômes (comme la MULTIPLICATION ÉLISABÉTHANE et la DIVISION LONGUE) que pour les nombres ordinaires. Le rapport de deux polynômes produit une FONCTION RATIONNELLE.

Une fonction polynomiale est une fonction dont les sorties sont données par une expression polynomiale. Par exemple, $f(x) = 5x^3 - 7x - 3$ est une fonction cubique. Il n'est pas possible pour une fonction polynomiale non nulle de produire zéro comme sortie pour toutes les entrées x. Nous avons:

Machine Translated by Google

Si $anx^n + an–1x^{n–1} +…+ a1x + a0 = 0$ pour toutes les valeurs x, alors il faut que an = an–1 =…= a1 = a0 = 0.

(Pour voir cela, écrivez $anx^n + an–1x^{n–1} +……+ a1x + a0 = hache_n^n \left(1 + \frac{un_{n-1}}{hache_n} + \frac{1}{hache_n^{n-1}} + \frac{un_1}{hache_n^{n-1}} + \frac{un_0}{hache_n^n}\right)$. Pour un grand valeur de x, le terme anx n prendra une très grande valeur, et l'expression entre parenthèses adoptera une valeur proche de 1 + 0 +…+ 0 + 0 = 1. Ainsi la valeur de l'expression polynomiale entière ne sera pas nulle, sauf si an = 0. La répétition de cet argument montre que tous les coefficients devraient alors être nuls.) En conséquence, nous avons :

> Si deux polynômes produisent la même sortie valeurs pour chaque valeur d'entrée x, puis les deux les polynômes doivent être identiques, c'est-à-dire que leurs les coefficients correspondent.

(La différence de ces deux polynômes serait un nouveau polynôme qui produit toujours la sortie nulle.) Cette deuxième affirmation explique pourquoi le processus de COEFFICIENTS D'EQUATION est valide.

Le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE assure nous que toute équation polynomiale de degré n de la forme $anx^n + an–1x^{n–1} +……+ a1x + a0 = 0$ a précisément n racines (lorsqu'il est compté avec la multiplicité). Certaines racines peuvent être NOMBRES COMPLEXES. Il existe des formules arithmétiques pour trouver les racines de toute équation quadratique, toute ÉQUATION CUBIQUE, et toute ÉQUATION QUARTIQUE. En 1824 l'algébriste NIELS HENRIK ABEL a prouvé qu'il n'y a pas formules analogues pour résoudre le cinquième degré et plus équations polynomiales.

L'évaluation d'un polynôme de degré n nécessite généralement le calcul de $n + (n –1) +…+ 2 + 1 + 0 = \frac{n(n + 1)}{2}$ multiplications. Par exemple, dans l'expression

$$2x\,3 + 3x^2 + 4x + 5 = 2 × x × x × x + 3 × x × x + 4 × x + 5$$

le signe de multiplication « × » apparaît 3 + 2 + 1 + 0 = 6 fois. C'est la formule du nième TRIANGULAIRE NOMBRE. Le processus d'exécution d'une MULTI PLICATION NESTED réduit le nombre de produits nécessaires pour juste n. Par exemple, réécrire $2x\,3 + 4x + 5 + 3x^2$ comme x(x(2x + 3) + 4) + 5 réduit le nombre de multiplications présentes de six à trois. Le processus de SYN THETIC DIVISION est intimement lié à l'imbrication multiplications.

LA FORMULE DE LAGRANGE montre que pour tout n + 1 points, dessinés dans le plan, ayant chacun une coordonnée x distincte , il existe une fonction polynomiale de degré n dont le graphique passe par chacun de ces points. Ainsi il est toujours possible d'« ajuster » une fonction polynomiale à tout ensemble fini de points de données. Ceci est utile aux fins d' INTERPOLATION et d'EXTRAPOLATION.

Un polynôme peut avoir plus d'une variable. Par exemple, $5x\,2y + 7xy2 – y\,3$ est un polynôme bivarié de degré trois.

Voir aussi BINÔME ; COMPLÉTER LE CARRÉ ; RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES ; DIFFERENCE DE DEUX CUBES; DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS ; DISCRIMINANT; THÉORÈME DES FACTEURS ; FACTORISATION ; HISTOIRE D'EQUA TIONS ET ALGEBRE (essai); MONOMIAL ; RESTE THÉORÈME; RACINE; SOLUTION PAR DES RADICAUX ; TAILLEUR SÉRIE; TRINÔME.

temps polynomial On dit qu'un calcul s'exécute en temps polynomial si le nombre de pas élémentaires nécessaire pour effectuer le calcul peut être exprimé comme une fonction POLYNOMIALE de la taille de l'entrée. Pour Par exemple, si une étape de base consiste à additionner ou à multiplier deux nombres à un seul chiffre, alors le calcul de la multiplication deux nombres à n chiffres via une multiplication longue ordinaire nécessite au plus 4n 2 pas. (En multipliant chacun des paire de chiffres nécessite n^2 étapes et en additionnant tous les résultats, avec portage, vaut au plus $3n^2$ étapes.) Ainsi, de longues multiplications s'exécutent en temps polynomial.

Calculs qui ne s'exécutent pas en temps polynomial sont dits fonctionner en temps exponentiel. Par exemple, le tâche de lister tous les arrangements possibles de n objets croît comme n FACTORIEL. Comme la fonction factorielle va dépasser toute fonction polynomiale de n pendant suffisamment grandes valeurs de n, l'opération consistant à lister tous les commandes est exponentielle. Même avec les plus puissants ordinateurs, calculs de temps exponentiels en général nécessitent une quantité de temps infaisable pour terminer. Les algorithmes de temps polynomial, cependant, sont plus pratiques.

Voir aussi NP COMPLET ; VENDEUR VOYAGEUR PROBLÈME.

polyomino Généralisant le concept de domino, un polyomino est une forme créée en joignant des carrés 1 × 1 sur toute la longueur des bords de manière à ce qu'aucun coin d'un carré se situe en un point intérieur d'un autre

Machine Translated by Google

bord du carré. Un polyomino composé de n carrés est appelé n-polyomino ou simplement n-omino.

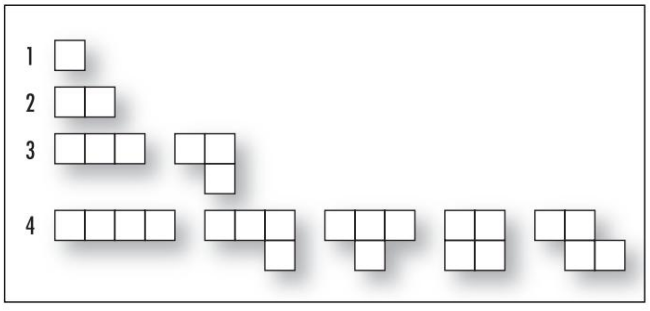
Deux polyominos sont considérés comme équivalents si l'un peut être ramassé, tourné et éventuellement retourné, pour correspondre à l'autre. En utilisant cette notion d'équivalence, il est alors un seul 1-omino (appelé « monomino »), un 2-omino (le domino), deux 3-ominos (chacun appelé un tromino) et cinq 4-ominos (chacun appelé tétromino).

Soit P(n) le nombre de n-ominos distincts. Le tableau suivant donne la valeur de P(n) pour n à partir de 1 à 12.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	dix	11	12
P(n)	1	1	2	5	12	35	108	369	1 285	4 655	17 073	63 600

Les valeurs exactes de P(n) jusqu'à n = 24 sont connues, mais trouver une formule générale pour P(n) reste une question ouverte problème. En 1966, le mathématicien David Klarner prouvé qu'il existe un nombre K (aujourd'hui appelé nombre de Klarner constante) telle que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{P(n)} = K$. (Cela montre que P(n) a une valeur approchée Kn si n est grand, et donc la croît de façon exponentielle.) La valeur exacte de K est pas connu, mais les mathématiciens ont établi que il se situe entre 3,9 et 4,649551. (Ils soupçonnent que c'est la valeur est proche de 4,2.)

L'ordre d'un polyomino est le plus petit nombre de copies identiques de ce polyomino qui peuvent être assemblés pour former un rectangle. Si la création d'un angle droit est impossible, alors ce polyomino est dit ont un ordre infini. Le tromino droit est d'ordre un (c'est lui-même un rectangle) et le tromino courbé a de l'ordre deux. (Deux copies de ce tromino peuvent s'emboîter pour produire un rectangle 2 × 3.) Les quatre tétrominos illustrés ci-dessus ont les ordres 1, 2, 4, 1 et ∞, respectivement. (Pour voir que le tétromino final ne peut pas paver n'importe quel rectangle, considérez le placement du tetromino en haut à gauche coin du rectangle. Son orientation force le placement des tétrominos en dessous ou à sa droite.)



Polyominos

Il n'y a pas de polyominos d'ordre trois. Compter les nombre de façons différentes de paver un rectangle 2 × n avec dominos donne les NOMBRES FIBONACCI.

Généralisations des polyominos à des formes composées d'unités fondamentales autres que des carrés (telles sous forme de triangles équilatéraux et d'hexagones réguliers) sont appelés polyformes.

Voir aussi TESSELLATION.

population Voir POPULATION ET ÉCHANTILLON.

population et échantillon LA STATISTIQUE est la science de collecter, tabuler et résumer les DONNÉES obtenues à partir de systèmes d'étude particuliers, et faire des inférences ou des prédictions sur la base de ces données. Le mot population est utilisé pour le groupe de tous les individus (ou objets ou événements) faisant l'objet de l'étude. UN l'échantillon est un sous-groupe ou un sous-ensemble représentatif de population. Par exemple, dans une étude médicale sur la taux de croissance des enfants de 8 ans aux États-Unis, la population serait constituée de tous les enfants américains de 8 ans. Comme il n'est pas possible d'examiner chaque enfant d'un âge donné, un échantillon de seulement 1 000 enfants pourrait être utilisé pour l'étude.

Un échantillon dans lequel chaque individu de la population a une chance égale d'être choisi pour l'échantillon est appelé un échantillon aléatoire. Si, dans un échantillon, une partie de la population est plus représentée qu'elle se produit réellement, alors l'échantillon est dit biaisé. Biaisé l'échantillonnage est à éviter.

Un exemple historique célèbre d'une prédiction erronée basée sur un échantillonnage biaisé s'est produit au cours de la Élections présidentielles américaines de 1936. La publication populaire Literary Digest, dans le cadre du sensationnalisme menant à l'élection, a mené un sondage pour prédire la issue de la course. Après avoir interrogé un échantillon d'électeurs éligibles, choisis en tirant des noms au hasard parmi annuaires téléphoniques de tout le pays, les éditeurs de la publication a conclu que l'élection était une conclusion anticipée - Alfred Landon devait gagner avec un avance confortable - et ils ont ensuite publié

Machine Translated by Google

beaucoup de commentaires éditoriaux à cet effet. Il s'est avéré, cependant, que l'adversaire de Landon, Franklin Roosevelt, a remporté l'élection par une victoire écrasante. Les membres du Digest ne se rendaient pas compte qu'ils avaient travaillé avec un échantillon biaisé - seuls les Américains aisés pouvaient s'offrir des téléphones à l'époque de la Grande Dépression et donc être répertoriés dans les annuaires téléphoniques. Il s'agissait d'une classe d'électeurs plus susceptibles de voter républicain. Par conséquent, la prédiction du Digest était erronée. La publication s'est repliée en 1937 en raison à la fois du fiasco de l'échantillonnage et des temps difficiles de la dépression.

Aujourd'hui, un certain nombre de méthodes d'échantillonnage sont couramment utilisées pour s'assurer qu'aucun biais ne se produit. Ces méthodes comprennent :

Échantillonnage aléatoire
Chaque sujet de la population se voit attribuer un numéro, et les numéros sont générés au hasard à l'aide d'un ordinateur pour sélectionner les membres.

Échantillonnage systématique
Chaque sujet de la population se voit attribuer un numéro, et, à partir d'un nombre aléatoire, chaque kième membre est désormais sélectionné. Par exemple, on peut sélectionner chaque 23e personne, en commençant par le 533e membre.

Échantillonnage stratifié
Lorsqu'une population est naturellement divisée en groupes (tels que hommes/femmes, ou âge par décennie), la sélection d'un échantillon aléatoire à l'intérieur de chaque groupe produit ce qu'on appelle un « échantillon stratifié ». Les échantillons ainsi produits sont utilisés pour s'assurer que des représentants de chaque sous-groupe sont présents dans l'étude. Par exemple, dans une étude impliquant des étudiants de première et de deuxième année d'université, on peut sélectionner 25 étudiants au hasard dans chaque groupe - hommes de première année, femmes de première année, hommes de deuxième année et femmes de deuxième année - pour constituer un échantillon de 100 étudiants.

Échantillonnage en
grappes Si un sous-groupe intact d'une population est utilisé comme échantillon représentatif de l'ensemble de la population, l'échantillon est appelé échantillon en grappes. Par exemple, l'ensemble de toutes les filles de première année pourrait être utilisé pour représenter la population de tous les étudiants universitaires aux fins d'une étude, ou les 12 œufs dans une boîte d'œufs comme représentant de tous les œufs manipulés par un supermarché particulier.

Voir aussi BIAIS ; STATISTIQUES : DESCRIPTIVES.

modèles de population En biologie, le terme population désigne le nombre d'individus ou d'organismes vivant dans une certaine zone. Par exemple, la population de l'Australie est le nombre d'individus vivant actuellement sur ce continent, et la population d'une culture de levure de laboratoire est le nombre d'organismes présents dans une boîte de Pétri particulière. Un modèle de population est une théorie mathématique utilisée pour décrire ou prédire l'évolution de la taille d'une population au fil du temps.

L'intérêt pour la croissance des populations a été stimulé à la fin du XVIIIe siècle lorsque Thomas Malthus (1766-1834) a publié un essai sur le principe de la population tel qu'il affecte l'amélioration future de la société. Malthus a développé un modèle simple qui a abouti à la conclusion troublante qu'éventuellement la population humaine atteindrait une taille qui ne peut être maintenue avec les ressources alimentaires disponibles sur cette planète. Bien que son modèle simplifie à l'extrême les choses et se soit avéré inexact pour faire des prévisions à long terme, le modèle malthusien reste utile pour comprendre la croissance à court terme. Son modèle est développé comme suit :

Soit P(t) la taille de la population au temps t et supposons que sur une unité de temps (une minute, un jour ou un an) qu'un certain pourcentage, disons b pour cent, de la population donne naissance à une progéniture, et un autre pourcentage, disons d pour cent de la population, meurt. (Le nombre b est appelé le taux de natalité et d est appelé le taux de mortalité.)

Ainsi, après une unité de temps, la population augmente de la quantité bP(t) – dP(t). Nous avons:

$$P(t + 1) – P(t) = (b – d)P(t)$$

Cela signifie que le taux de variation de la taille de la population est donné par une constante (b - d) multipliée par la taille de la population. En supposant que la fonction de population P(t) puisse, pour des raisons de commodité, être considérée comme changeant continuellement avec le temps, cette déclaration finale peut être interprétée, dans CALCULUS, comme une formule :

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

où k = b – d. (La constante k est appelée taux de croissance.) Ainsi, P(t) est une fonction dont la dérivée est une constante multipliée par elle-même. Seules les fonctions exponentielles ont cette propriété et donc :

$$P(t) = P(0)e^{kt}$$

Machine Translated by Google

vecteur de 408 positions

où P(0) est la taille de la population au temps zéro.
Ce modèle prédit qu'une taille de population augmentera de façon exponentielle si le taux de natalité dépasse le taux de mortalité.

Les biologistes se rendent compte que de nombreux écosystèmes ne peuvent pas supporter des tailles de population arbitrairement grandes (la Terre ne peut fournir qu'une quantité finie de ressources alimentaires par an, par exemple), et donc ce modèle simple n'est pas considéré comme réaliste. Généralement, à mesure qu'une population augmente et se rapproche d'une capacité maximale M, par exemple, le taux de croissance k diminue. On peut modéliser cela en ne supposant plus que k est constant, mais varie comme suit :

$$k = M - P(t)$$

Par exemple. (Ici, lorsque la taille de la population P(t) est proche de M, le taux de croissance k est en effet petit.) Cela conduit au modèle :

$$\frac{dP}{dt} = kP = (M - P)P$$

C'est ce qu'on appelle le modèle de croissance logistique et il a été introduit par le biologiste néerlandais Pierre-François Verhulst (1804-1849). Il est possible de résoudre cette équation différentielle et d'obtenir une formule explicite pour la fonction de population P(t). Cependant, on peut décrire rapidement certaines caractéristiques de la croissance démographique sans aucun travail.
Par exemple,

1. Si une taille de population commence à la valeur M, alors $\frac{dP}{dt} = (M - M) \cdot M = 0$. Cela signifie qu'il n'y a pas de changement dans la taille de la population et que la fonction P(t) reste indéfiniment à la valeur M.
2. Si une taille de population commence à une valeur supérieure à M, alors $\frac{dP}{dt} = (M - P) \cdot P < 0$. Cela signifie que le la taille de la population diminuera. (Il n'y a pas assez de ressources alimentaires pour subvenir aux besoins d'une grande population.)
3. Si une taille de population commence à une valeur inférieure à M, alors $\frac{dP}{dt} = (M - P) \cdot P > 0$. Cela signifie que le la taille de la population va augmenter. Le taux d'augmentation diminue à mesure que la taille de la population se rapproche de M. Le graphique de la fonction ressemble donc à une courbe en forme de S croissante piégée au-dessus de l' axe des x et en dessous de la ligne constante P = M.

Le modèle logistique fonctionne bien pour décrire les changements de population pour des systèmes biologiques simples (comme une culture de levure) et, étonnamment, a également bien fonctionné pour décrire la croissance de la population américaine entre les années 1920 et 1950. Cependant, cela est probablement une coïncidence.
La croissance de la population humaine est très difficile à modéliser, compte tenu de facteurs imprévisibles tels que les progrès de la technologie médicale, les guerres et, dans la modélisation de la population d'un pays spécifique, l'immigration.

vecteur de position Étant donné un point P dans le plan, ou dans l'espace à trois dimensions, le VECTEUR représenté par le segment de droite dirigé vers P est appelé le vecteur de $\overrightarrow{OP}$ reliant l'origine O position de P. Ce vecteur a pour composantes les coordonnées de P. Par exemple, si P est le point (2,5), alors son vecteur position est le vecteur $\langle 2,5 \rangle = 2i + 5j$.

En physique, le vecteur position d'une particule est souvent noté r. C'est une fonction du temps t et elle est généralement exprimée sous la forme $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, où x, y et z sont des fonctions du temps. Il représente la localisation physique de la particule à tout instant t. La DÉRIVÉE du vecteur position est le vecteur VITESSE $v(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$, et sa dérivée double est le vecteur accélération $a(t) = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k$.

Voir aussi ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES.

positif UN NOMBRE RÉEL x est dit positif s'il est supérieur à zéro, c'est-à-dire si $x > 0$. Un nombre réel inférieur à zéro est dit négatif.

Le produit de deux nombres positifs est à nouveau positif. Il est surprenant que les règles de l'arithmétique dictent que le produit de deux NOMBRES NÉGATIFS doit également être positif. Il s'ensuit alors que pour tout nombre non nul (réel) x nous devons avoir $x^2 > 0$.

Aucun NOMBRE COMPLEXE ne peut être considéré comme positif ou négatif. Par exemple, si le nombre i est positif, alors, d'après l'énoncé précédent, nous devons avoir $i > 0$, ce qui donne l'absurdité $-1 > 0$. La même conclusion s'ensuivrait si nous devions considérer i négatif.

Un nombre réel quelconque positif ou éventuellement nul est dit non négatif. Celui qui est négatif ou éventuellement nul est appelé non positif.

Voir aussi PROPRIÉTÉS DE LA COMMANDE.

Machine Translated by Google

postulat Un autre nom pour AXIOM. Il est de coutume
appeler les axiomes de GEOMETRIE EUCLIDEENNE et de
Postulats ARITHMÉTIQUEs plutôt que des axiomes.

Voir aussi POSTULATS DE PEANO .

série entière Toute SERIE de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ les coefficients an sont constants et x est une variable est appelée une série de puissance. Pour exemple, la SÉRIE TAYLOR de toute fonction est une puissance série, tout comme la SÉRIE GÉOMÉTRIQUE $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. La convergence ou non d'une série entière dépend de quelle valeur est choisie pour la variable x. Par exemple, la série géométrique converge si $-1 < x < 1$ et diverge autrement. À tout le moins, chaque série de puissance converge pour x = 0.

Les mathématiciens ont prouvé le résultat suivant :

Étant donné une série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, précisément l'un des ce qui suit est vrai :

1. La série ne converge que pour x = 0.
2. La série converge (absolument) pour toutes les valeurs de x.
3. Il existe un nombre réel positif R tel que la série converge (absolument) pour toutes les valeurs $-R < x < R$ et diverge pour $|x| > R$ (La série peut ou non converger pour chacune des valeurs x = R et x = –R.)

La valeur R est appelée rayon de convergence de la série de puissance. (Si la série ne converge que pour x = 0, on dit généralement que le rayon de convergence est nul. Si la série converge pour toutes les valeurs de x, alors le rayon de convergence est infinie.)

On utilise souvent le test de ratio de l'étude of CONVERGENT SERIES pour trouver le rayon de convergence d'une série entière. Par exemple, le test du rapport montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge si $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x|$ est inférieur à 1 et diverge si supérieur à 1. Ainsi le rayon de convergence pour cette série de puissance est R = 1. (En allant plus loin, pas de glace que, pour x = 1 la série est l' HARMONIQUE SÉRIE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$, qui diverge, et pour it x = –1 c'est la série harmonique alternée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$, qui converge. La puissance série en question converge donc pour $-1 \le x < 1$.)

Voir aussi CONVERGENCE ABSOLUE.

précision Le nombre total de chiffres enregistrés pendant prendre une mesure s'appelle la précision de la la mesure. Par exemple, une longueur enregistrée de 3.650 mètres est précis à quatre CHIFFRES SIGNIFICATIFS. (Le le dernier chiffre zéro indique que la mesure a été fait au millimètre près.) Le nombre de chiffres à droite de la virgule est appelé le précision de la mesure. Ainsi, par exemple, la le chiffre 3.650 est précis à trois décimales près.

Voir aussi ERREUR.

prémisse Une déclaration qui est connue ou supposée être vrai et sur lequel un ARGUMENT logique est basé est appelé la prémisse de l'argument. Une prémisse pourrait être un AXIOME d'une théorie mathématique particulière, ou simplement une hypothèse considérée comme vraie aux fins de découvrir ses conséquences. Par exemple, le la prémisse que "les lignes parallèles se rencontrent en un point" a conduit mathématiciens pour découvrir le domaine du PROJECTIF GEOMETRIE, une nouvelle approche valable et fructueuse pour comprendre la géométrie ordinaire.

premier Nombre entier possédant seulement deux nombres positifs facteurs est appelé un nombre premier, ou simplement un nombre premier. Pour exemple, 7 n'a que deux facteurs positifs, à savoir 1 et 7, et est donc premier. Le nombre 24 a huit facteurs positifs et n'est donc pas premier, et le nombre 1 n'a qu'un facteur et n'est pas premier. Le terme composé est utilisé pour décrire des nombres supérieurs à 1 qui ne sont pas premiers. (Mathématicien médiéval FIBONACCI (1170-1250) appelé nombres premiers « incomposites ».) Il est essentiel que le nombre 1 ne soit considéré ni premier ni composé pour la THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE pour être vrai.

Les 25 premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Ce sont tous les nombres premiers plus petits que

Machine Translated by Google

100. Le mathématicien grec EUCLIDE (environ 300 avant notre ère) a été le premier à prouver que la liste des nombres premiers continue pour toujours. Aujourd'hui, nous appelons son argumentation particulière établissant cette PREUVE D'EUCLIDE DE L'INFINIITUDE DES PRIMES.

Tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. (Si le nombre est déjà premier, il est considéré comme un produit à un seul terme.) Par exemple, le le nombre 100 peut être factorisé comme 2 × 2 × 5 × 5. Pour cela raison, les nombres premiers sont considérés comme le bâtiment multiplicatif blocs de nombres naturels, et ont donc été l'objet d'études intensives à travers les siècles. Étonnamment, de nombreuses questions de base à leur sujet restent non résolus. Par exemple, personne ne connaît un simple formule qui générera les nombres premiers, ou une procédure simple et faisable en termes de calcul pour la factorisation grands nombres en nombres premiers. On ne sait pas si il existe une infinité de TWIN PRIMES , ou si, comme CHRIS TIAN GOLDBACH (1690-1764) l'a conjecturé, tous les nombre supérieur à 2 est bien une somme de deux nombres premiers. (Ceci est connu sous le nom de CONJECTURE DE GOLDBACH .) on sait s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $m^2 + 1$, c'est-à-dire 1 de plus qu'un nombre carré, ou si entre deux nombres carrés il doit y avoir un premier. (On sait cependant que pour tout nombre n supérieur à 1, il existe un nombre premier entre n et 2n.)

En 1791, CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) a conjecturé que le nième nombre premier a une valeur approximative de $n \cdot \ln(n)$ où ln(n) est le LOGARITHME naturel de n. Cette affirmation s'est avérée plus tard exacte et est aujourd'hui appelé THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS.

Malgré l'infinitude des nombres premiers, ces nombres, en certains sens, sont très rares. Il est facile de produire une chaîne arbitrairement longue d'entiers consécutifs, dont aucun sont premiers. Par exemple, en utilisant le FACTORIAL fonction, les nombres 1001 ! +2, 1001 ! + 3, jusqu'à 1001 ! + 1001 forment une chaîne de 1000 composés consécutifs Nombres. (Ces nombres sont respectivement divisibles par 2,3,…,1001.) Le TAMIS D' ERATOSTHENES peut être utilisé pour "trier" les nombres premiers jusqu'à un nombre entier donné.

Les nombres premiers, en particulier les grands nombres premiers, jouer un rôle clé dans la CRYPTOGRAPHIE. La découverte de nouveaux grands nombres premiers intéressent les financiers institutions et services de sécurité devant se développer codes de cryptage efficaces. Les grands nombres premiers sont découverts à l'aide d'un ordinateur, et sont généralement MERSENNE PRIMES. Le plus grand nombre premier connu à partir de l'année 2003 est de 220 996 011 - 1. Il est supérieur à 6 millions chiffres longs.

Le mathématicien et avocat français PIERRE DE FER MAT (1601-1665) a prouvé que si p est un nombre premier, alors $2^{p-1} - 1$ sera divisible par p. Sinon, cela signifie que le nombre p n'était pas premier au départ. Ceci est souvent utilisé comme un test pour déterminer si un nombre p est un bon candidat pour être premier. Malheureusement, certains chiffres peuvent toujours passer le test sans être premier. Par exemple, $2^{340} - 1$ s'avère être divisible par 341, même si le le nombre 341 n'est pas premier (341 = 11 × 31). Composite les nombres qui réussissent le test de Fermat sont appelés pseudopremiers. Les trois premiers nombres pseudo premiers sont 341, 561 et 645.

Voir aussi NOMBRE COMPOSITE ; FACTEUR.

théorème des nombres premiers Les mathématiciens définissent π(n) être le nombre de PRIME inférieur ou égal à n. Pour exemple, il y a quatre nombres premiers inférieurs à 10, et donc π(10) = 4. La quantité proportion $\frac{\pi(n)}{n}$ mesure ainsi la de nombres jusqu'à n qui sont premiers. Étude de cette fonction est importante pour comprendre la répartition des nombres premiers parmi les nombres naturels.

n	π(n)	$\frac{\pi(n)}{n}$
dix	4	0,4
100	25	0,25
1 000	168	0,168
10 000	1 229	0,1229
100 000	9 592	0,09592
1 000 000	78 498	0,078498
10 000 000	664 579	0,0664579
100 000 000	5 761 455	0,05761455
1 000 000 000	45 505 251	0,045505251

A 14 ans, le mathématicien CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) se passionne pour la tabulation données sur les nombres premiers. Il a observé, entre autres choses, que la fonction inverse $r(n) = \frac{n}{\pi(n)}$ semble être augmentation de la valeur d'un montant constant 2,31 avec chaque 10-multiplication de n, au moins pour les grandes valeurs de n. C'est,

$$r(10n) \approx r(n) + 2{,}31$$

Par exemple, r(100 000 000) est égal à $\frac{1}{0{,}05761455} \approx$

Machine Translated by Google

17,357 et r(1 000 000 000) est égal à 19,667. Comme 2,31 $\approx \frac{1}{0{,}045505251}$ est approximativement le LOGA RITHM naturel de 10, cela suggérait à Gauss que r(n) se comporte comme la fonction de logarithme naturel. Il conjectura :

$$\frac{\pi(n)}{n} \approx \frac{1}{\ln(n)}$$

pour les grandes valeurs de n, mais n'a jamais été en mesure de prouver cette affirmation.

Cent ans plus tard, JACQUES HADAMARD (1865-1963) et CHARLES-JEAN DE LA VALLÉE-POUSSIN (1866-1962) ont simultanément, mais indépendamment, prouvé la conjecture de Gauss en utilisant des techniques sophistiquées de la THÉORIE analytique des nombres. Le résultat est connu aujourd'hui sous le nom de théorème des nombres premiers. Il nous dit que le nième nombre premier vaut approximativement n · ln(n).

principal Voir INTÉRÊTS.

axes principaux L'équation la plus générale à trois variables du second degré est :

$$Ax2 + By2 + Cz2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

avec des constantes A à F pas toutes nulles. Dans l'espace à trois dimensions, le graphe d'une telle équation est une surface appelée surface quadrique. Les mathématiciens ont montré qu'en faisant tourner et en déplaçant les axes de coordonnées, il est possible de réécrire l'équation par rapport à un nouvel ensemble d'axes pour simplifier la forme de l'équation, en la réduisant à l'un des 13 types différents. Les nouveaux axes de coordonnées sont appelés axes principaux du quadrique.

Six des formes possibles de l'équation conduisent à des quadriques non dégénérées :

1. Ellipsoïde : $\frac{2x_}{un^2} + \frac{ans^2}{b\,2} + \frac{2\,z}{2c_} = 1$
2. Hyperboloïde d'une nappe : $\frac{2x_}{un^2} + \frac{ans^2}{b\,2} - \frac{2\,z}{2c_} = 1$
3. Hyperboloïde de deux feuillets : $\frac{2x_}{un^2} + \frac{ans^2}{b\,2} - \frac{2\,z}{2c_} = -1$
4. Cône elliptique : $\frac{2x_}{un^2} + \frac{ans^2}{b\,2} = \frac{2\,z}{2c_}$
5. Paraboloïde elliptique : $\frac{2x_}{un^2} + \frac{ans^2}{b\,2} = \frac{z}{c}$
6. Paraboloïde hyperbolique : $\frac{2x_}{un^2} - \frac{ans^2}{b\,2} = \frac{z}{c}$

Les sept équations possibles restantes sont des quadriques dégénérées :

1. Cylindre elliptique : $\frac{2x_}{un^2} + \frac{ans^2}{b\,2} = 1$
2. Cylindre hyperbolique : $\frac{2x_}{un^2} - \frac{ans^2}{b\,2} = 1$
3. Cylindre parabolique : $\frac{2x_}{un^2} = \frac{y}{b}$
4. Paire d'avions : $\frac{2x_}{un^2} = \frac{ans^2}{b\,2}$ ou $\frac{2x_}{un^2} = 1$
5. Avion unique : $\frac{2x_}{un^2} = 0$
6. Ligne : $\frac{2x_}{un^2} + \frac{ans^2}{b\,2} = 0$
7. Point : $\frac{2x_}{un^2} + \frac{ans^2}{b\,2} + \frac{2\,z}{2c_} = 0$

Dans un espace à deux dimensions, avec une rotation et une translation appropriées des axes de coordonnées, toute équation quadratique non dégénérée Ax2 + By2 + Cxy + D = 0 peut être réécrite comme l'équation d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole, ou, dans les cas dégénérés, une paire de lignes, une seule ligne ou un point. Les axes du nouveau système de coordonnées sont à nouveau appelés axes principaux.

Voir aussi SECTIONS CONIQUES.

prisme Tout POLYÈDRE dont les deux faces (les bases) sont des polygones congruents situés dans des plans parallèles et dont les faces restantes (les faces latérales) sont des par allélogrammes est appelé un prisme. Plus précisément, un prisme est un CYLINDRE à base polygonale.

Les lignes joignant les sommets correspondants des polygones de base d'un prisme sont appelées arêtes latérales. Si les bords latéraux d'un prisme rencontrent ses bases à angle droit, alors le prisme est appelé prisme droit. Un prisme qui n'est pas droit est dit oblique.

Les prismes sont nommés en fonction de leurs bases. Un prisme triangulaire a deux bases triangulaires (et trois faces latérales) ; un prisme quadrangulaire a deux bases quadrilatérales et quatre faces latérales. Un CUBE est un exemple de prisme quadrangulaire droit.

Machine Translated by Google

La hauteur d'un prisme est définie comme étant la distance entre les deux plans parallèles qui contiennent les bases des figures. Le VOLUME V d'un prisme est donné par l'aire de sa base multipliée par la hauteur de la figure :

V = aire de base × hauteur

Cela découle du PRINCIPE DE CAVALIERI .

Un prismatoïde est un polyèdre dont les sommets sont situés dans l'un ou l'autre de deux plans parallèles. Les deux bases de la figure ne sont pas tenues d'être congruentes, ni même d'avoir le même nombre de sommets. Toutes les faces latérales d'un prismatoïde sont soit triangulaires, soit quadrilatérales. Si le nombre de sommets de chaque polygone de base est le même et que chaque face latérale est un quadrilatère, alors le prisma toid est appelé un prismoïde.

dilemme du prisonnier En THÉORIE DES JEUX, tout jeu de conflit partiel à somme variable pour deux personnes qui imite le scénario classique suivant est appelé dilemme du prisonnier :

> Deux prisonniers, détenus dans des pièces séparées au secret, doivent choisir d'avouer ou de nier leur implication dans un crime d'équipe. Si les deux avouent, chacun sera condamné à deux ans de travaux forcés. Si les deux nient leur implication, chacun sera condamné à quatre ans de travaux forcés. Cependant, si un prisonnier nie et que l'autre avoue, alors le déni n'entraîne qu'un an de travaux forcés et les aveux six.

Les tableaux suivants montrent les gains attendus pour chaque prisonnier X et Y pour chacun des quatre résultats possibles du jeu :

Résultats pour le prisonnier X

		Prisonnier Y : C	Prisonnier Y : D
Prisonnier X	C	2 années	6 ans
	D	1 an	4 années

Résultats pour le prisonnier Y

		Prisonnier Y : C	Prisonnier Y : D
Prisonnier X	C	2 années	1 an
	D	6 ans	4 années

Chaque détenu peut argumenter comme suit :

> Je n'ai aucune indication quant à ce que mon partenaire fera. S'il doit choisir l'option C, avouer, alors c'est à mon avantage de choisir l'option D, nier. S'il doit choisir l'option D, alors, encore une fois, il est à mon avantage de choisir D. Dans tous les cas, je devrais choisir l'option D.

Le choix de D est donc une stratégie dominante pour chaque détenu, et il est probable que les deux détenus nieront leur implication dans le crime. Par ailleurs, il est à noter qu'aucun des deux joueurs n'est tenté de déroger à ce choix pour tenter de tromper son adversaire dans le jeu : le risque d'être le seul confesseur l'inhibe.

Ainsi, le résultat (D,D) est un résultat stable pour le jeu, et les deux prisonniers seront probablement chacun condamnés à quatre ans de travaux forcés. (Tout résultat d'un jeu, tel que (D,D) pour le dilemme du prisonnier, est appelé un « équilibre de Nash » pour le jeu si aucun joueur ne peut en bénéficier en s'en écartant unilatéralement.)

Le dilemme du prisonnier fournit un PARADOXE :

> Dans le jeu du dilemme du prisonnier, chaque joueur a une stratégie dominante qui, lorsqu'elle est utilisée, donne au jeu un résultat moins bénéfique que si les deux s'écartaient de la stratégie dominante.

Ce phénomène se voit également dans la situation difficile d'une course aux armements entre deux nations : le désarmement mutuel profite aux deux nations, mais la crainte qu'une nation adverse choisisse de déroger à un tel accord inhibe la coopération.

Les éléments du dilemme du prisonnier peuvent être étendus à des jeux impliquant plus de deux joueurs. Par exemple, un enseignant demande à chacun de ses élèves d'écrire sur une feuille de papier son nom et soit le mot coopérer , soit le mot défaut. Les élèves savent que les bonbons seront distribués dans la classe selon les règles suivantes :

> Si chaque élève choisit de coopérer, chacun recevra 10 pièces.
>
> Si deux élèves ou plus font défaut, tous seront punis. Ceux qui coopèrent ne recevront que cinq bonbons, et les transfuges n'en recevront aucun.
>
> Si, d'un autre côté, il y a un seul étudiant audacieux prêt à être le seul transfuge, alors ce transfuge recevra 80 morceaux de bonbons, et tous les autres étudiants aucun.

Machine Translated by Google

Le jeu du poulet Une
variante intéressante du jeu du dilemme du prisonnier est le jeu du poulet. Il s'inspire du jeu de conduite dangereuse dans lequel deux conducteurs se dirigent directement l'un vers l'autre sur une route à voie unique. Chaque conducteur doit décider à la dernière minute s'il doit dévier à droite ou ne pas dévier. Pour faire entrer les mathématiques dans le jeu, il est commode d'introduire des valeurs numériques pour les résultats du jeu.

Supposons que 10 points soient attribués au vainqueur du jeu : celle qui choisit de ne pas dévier étant donné que l'autre conducteur l'a fait. Comme cela est gênant pour le deuxième pilote, 0 point lui est attribué. Si les deux pilotes décident de faire une embardée, alors, comme cela n'est que légèrement embarrassant pour chacun, attribuez 5 points à chaque joueur. D'un autre côté, si les deux joueurs décident de ne pas dévier, alors le résultat est désastreux et attribue -10 points à chaque pilote dans ce cas. Les résultats du jeu du poulet peuvent être résumés dans les deux tableaux de gains suivants :

Résultats pour le pilote 1

		Conducteur 2: Embardée	Conducteur 2: Ne pas dévier
Conducteur 1	Embardée	5	0
	Ne pas dévier	dix	-dix

Résultats pour le pilote 2

		Conducteur 2: Embardée	Conducteur 2: Ne pas dévier
Conducteur 1	Embardée	5	0
	Ne pas dévier	dix	-dix

Notez qu'aucun joueur n'a de stratégie dominante dans le jeu du poulet : sa meilleure action dépend du choix que l'autre pilote va faire. De plus, le jeu du poulet a deux équilibres de Nash distincts : (Swerve, Not Swerve) et (Not Swerve, Swerve). (Il n'est dans l'intérêt d'aucun des joueurs de s'écarter de l'une de ces options.) Cela suggère qu'un compromis (Swerve, Swerve) n'est pas facile à réaliser.

De nombreux conflits dans la vie réelle, tels que les conflits sociaux et les conflits commerciaux internationaux, ont la saveur d'un jeu de poulet. Comme on le sait, les issues de tels conflits sont en effet variables : une partie peut décider de « céder » pour éviter une sortie désastreuse. viennent, alors que souvent aucune des parties ne se rend, et des grèves et des guerres en résultent.

Voir aussi JOHN NASH.

probabilité Les principes de la théorie des probabilités ont été identifiés pour la première fois par le mathématicien et médecin italien du XVIe siècle GIROLAMO CARDANO (1501-1576), puis par les mathématiciens français BLAISE PASCAL (1623-1662) et PIERRE DE FERMAT (1601-1665). L'idée clé est que si une situation peut être décrite en termes de résultats possibles, chacun également probable, alors la probabilité d'un résultat particulier est définie comme étant le nombre 1 divisé par le nombre total de résultats.
Par exemple, si un dé est lancé, six résultats sont possibles : {1,2,3,4,5,6}. Nous pensons généralement que chaque résultat est également probable, et nous disons donc que la probabilité d'obtenir un résultat particulier, tel qu'un 5 par exemple, est de 1/6.

Plus généralement, si plus d'un résultat possible est jugé acceptable, nous définissons la probabilité d'obtenir l'un de ces résultats comme étant le rapport du nombre de résultats souhaités au nombre total de résultats. Par exemple, il existe trois façons de lancer un nombre pair lors du lancement d'un dé. Ainsi on dit que la probabilité de lancer un multiple de 2 est 3/6 = 1/2. Les chances de lancer l'un des numéros 1, 4, 5 ou 6 sont de 4/6 = 2/3.

Les mathématiciens appellent l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience l' ESPACE ÉCHANTILLON, et tout ensemble particulier de résultats (ou juste un seul résultat) un ÉVÉNEMENT. Par exemple, en lançant un dé, l'espace d'échantillonnage est l'ensemble {1,2,3,4,5,6}, et un événement pourrait être le sous-ensemble {2} (lancer un deux), par exemple, ou { 2,4,6} (rouler un nombre pair). Un événement est toujours un sous-ensemble de l'espace d'échantillonnage.

Si A représente un événement, c'est-à-dire un ensemble de résultats souhaitables, alors la notation P(A) est utilisée pour dénoter la probabilité que cet événement se produise, c'est-à-dire la probabilité que le résultat d'une série d'expériences appartienne à l'ensemble A. Une valeur P(A) est toujours comprise entre zéro et 1, la valeur P(A) = 0 indiquant que l'événement A ne se produira jamais et la valeur P(A) = 1 indiquant que l'événement A se produira toujours. En lançant un dé, 1– 2– par exemple, on a P(pair) = , P({1,4,5,6}) = 2 3 P(un multiple de 7) = 0, et P(un entier nombre) = 1. ,

Attribuer des probabilités aux événements nécessite un comptage minutieux. Souvent, la plus grande difficulté est d'identifier

Machine Translated by Google

Histoire des probabilités et des statistiques

Les questions sur les paris et les jeux ont fourni une grande partie des premiers impulsion pour le développement de la théorie des PROBABILITÉS . En 1654 Chevalier de Méré, un noble français avec un goût pour le jeu, a écrit une lettre au mathématicien BLAISE PASCAL (1623-1662) demander des conseils sur la répartition des enjeux de interrompu Jeux.

Par exemple, supposons que, lors d'une partie amicale de tennis, deux les joueurs déposent chacun une mise de 100 $ dans un pari pour gagner "meilleur sur neuf" matchs, mais la pluie interrompt le jeu après seulement quatre matchs, avec un joueur ayant remporté trois matchs, le deuxième un seul. Quelle serait alors la juste façon de diviser la cagnotte de 200 $? Bien sûr, la répartition de l'argent devrait refléter la probabilité de chaque joueur de gagner le pari si la série de jeux devait être terminée.

Pascal a communiqué le souci d'analyser de telles situations à son collègue PIERRE DE FERMAT (1601-1665), et leurs correspondances ultérieures sur le question représentait la naissance du nouveau domaine de la probabilité théorie. Les deux mathématiciens ont résolu le "problème de de Méré de points » (utilisant deux approches entièrement différentes, d'ailleurs), puis ont ensuite travaillé ensemble pour généraliser la problème et étendre leurs analyses à d'autres types de jeux de chances. Leurs découvertes ont suscité l'intérêt d'autres savants européens. En 1656, le physicien hollandais astronome-mathématicien Christiaan Huygens (1629-1695) publié De ratiociniis in ludo aleae (Sur le raisonnement en jeux de hasard) résumant et prolongeant les idées développé par Pascal et Fermat. Il a formulé leur travail en termes d'une nouvelle notion, celle de VALEUR ESPÉRÉE. Il s'est avéré être très fructueux.

Le principe clé de la théorie des probabilités est l'idée que si une situation peut être décrite en termes de possibilités résultats qui sont également probables, alors la probabilité de tout résultat particulier qui se produit est égal à 1 divisé par le total nombre de résultats. Ce principe a en fait été reconnu et discuté pour la première fois plus d'un siècle plus tôt par le mathématicien et médecin italien GIROLAMO CARDANO (1501-1576) dans son ouvrage Liber de ludo aleae (Livre sur les jeux du hasard). Ce texte, cependant, n'a été publié que 1663, 9 ans après que Pascal et Fermat eurent résolu de Le problème de Méré. Il est probable que Cardano serait connu comme « le père de la théorie des probabilités » si le travail avait été publié de son vivant. Cardano a également reconnu le LOI DES GRANDS NOMBRES.

Le mathématicien suisse Jacob Bernoulli (1654-1705) de la célèbre FAMILLE BERNOULLI a reconnu le large éventail applicabilité de la probabilité dans des domaines autres que les jeux de hasard. Son livre Ars conjectandi (L'art de la conjecture), publié à titre posthume en 1713, a démontré l'utilisation de la théorie dans médecine et météorologie. C'était aussi le premier texte complet traitant des questions de STATISTIQUES.

Dans un certain sens, la probabilité et les statistiques représentent deux côtés d'une même situation fondamentale. Probabilité explore ce qui peut être dit à propos d'un échantillon inconnu d'un recueil connu. (Par exemple, nous connaissons toutes les possibilités combinaisons numériques d'une paire de dés. Qu'est-ce alors le résultat le plus probable en lançant une paire de dés ?) Les statistiques explorent ce qui peut être dit à propos d'une collection inconnue donné un petit échantillon. (Si 37 de ces 100 personnes se brossent dents deux fois par jour, que dire du brossage des dents habitudes de toute la population ?) Les deux champs sont restés étroitement liés pendant une grande partie du 18ème siècle et la début du siècle suivant.

En 1733, ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) reconnut l'apparition répétée de la DISTRIBUTION NORMALE dans études scientifiques et en écrivit une équation mathématique. Il est d'abord apparu à partir du « caractère aléatoire » des erreurs dans les observations astronomiques et dans expériences scientifiques.

La seconde moitié du XIXe siècle a vu d'importantes progresser dans le développement et la compréhension de la théorie fondements de la théorie des probabilités. Cela était principalement dû à les travaux des mathématiciens-astronomes-physiciens français JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813) et PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827), génie allemand CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), et le mathématicien français SIMÉON-DENIS POIS-

les résultats fondamentaux qui sont considérés comme tout aussi probable. Par exemple, il y a 11 résultats possibles pour lancer une paire de dés, à savoir, obtenir un somme de 2, 3, …, 11 ou 12, mais ces événements ne sont pas tout aussi probable. Le résultat fondamental ici est pas la somme des deux nombres sur les dés, mais plutôt la paire de nombres que les deux dés donnent— un chiffre (de 1 à 6) sur le premier dé et un second deuxième numéro (encore de 1 à 6) sur le second. Là sont 36 résultats également probables en tout. Comme six d'entre eux paires ont une somme de 7, on peut dire que la probabilité 6 lancer 7 avec une paire de dés est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Le 6 probabilité de lancer 10 est $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, et la probabilité abilité de lancer 2 est seulement $\frac{1}{36}$.

Machine Translated by Google

SON (1781–1840) qui, entre autres, mathématiquement prouvé la loi des grands nombres. La publication la plus importante de cette époque sur la théorie des probabilités est celle de Laplace. Texte de 1812 Théorie analytique des probabilités (Analytical théorie des probabilités.). Dans ce document, Laplace a recueilli et étendu tout ce qu'on savait sur le sujet à l'époque. Les mathématiciens russes PAFNUTY CHEBYSHEV (1821-1894), Andrei Markov (1856–1922) et Alexandr Lyapunov (1857–1918) plus loin développé les fondements mathématiques du sujet dans la fin du 19ème siècle.

La pensée statistique de base peut être considérée comme ayant développé beaucoup plus tôt. Les anciens Égyptiens a compilé des DONNÉES concernant la population et la richesse dès en 3050 avant notre ère, développant des techniques simples pour rassembler et enregistrer les informations chiffrées recueillies. L'ancien Les Chinois ont entrepris des études similaires vers 2300 avant notre ère A recensement a été effectué en 594 avant notre ère par les Grecs dans le but de lever des impôts, et Athènes a entrepris une population recensement en 309 avant notre ère Les Romains ont également tenu des registres de recensement, ainsi que des registres de naissances et de décès, et rassembla des quantités importantes d'informations numériques à partir de relevés géographiques effectués dans tout l'empire. Très peu cependant, des archives statistiques ont été conservées pendant la période du Moyen Âge.

En 1662, John Graunt a analysé les actes de naissance et de décès et produit la première TABLE DE VIE. Le but du tableau était de faire des observations générales et des prédictions sur l'espérance de vie de catégories de membres d'une population donnée. Ce travail a représenté une étape importante vers analyser les données à des fins d' INFERENCE.

En 1790, les États-Unis ont procédé à leur premier recensement décennal, annonçant le retour du recensement. Plusieurs nations européennes ont emboîté le pas peu de temps après. Belge le savant LAMBERT ADOLPHE QUÉTELET (1796-1874) a analysé les archives de la nation et fait d'importantes observations sur l'influence de l'âge, du sexe, de la profession et de la situation économique sur la mortalité. En 1835, il tenta d'appliquer méthodes probabilistes à l'étude des caractéristiques humaines, tant physiques que comportementales. Il s'en est servi pour donner ce qu'il espérait était une description complète de «l'homme moyen». Bien que l'œuvre de Quételet ait été généralement très respectée, sa tentative de l'appliquer au domaine du comportement la science a été critiquée. Dans les années 1860, l'anglais le savant FRANCIS GALTON (1822–1911) a tenté de postuler méthodes statistiques à l'étude de l'hérédité humaine. Son travail a été influent et a aidé à définir les statistiques comme un discipline mathématique à part entière.

Au tournant du XXe siècle, le monde de l'entreprise ont commencé à reconnaître la pertinence et l'utilité des statistiques, en particulier pour les questions de contrôle de la qualité, d'économie, les assurances et les télécommunications. De nombreuses grandes entreprises commencé à embaucher des statisticiens.

Alors qu'il travaillait pour une brasserie anglaise, le scientifique industriel WILLIAM SEALY GOSSET (1876–1937) développa le STUDENT'S T-TEST, permettant de dériver des informations fiables à partir de petits échantillons. (Politique de l'entreprise pour demander à ses employés de publier. Gosset l'a fait dans tous les cas, écrivant sous le pseudonyme "Student".) Le mathématicien anglais KARL PEARSON (1857-1936) a développé le CHI SQUARED TEST et est considéré comme le fondateur du test moderne. tests d'hypothèses.

RONALD AYLMER FISHER (1890-1962) est considéré comme le statisticien le plus important du XXe siècle. Son 1925 text Les méthodes statistiques pour les chercheurs ont transformé les statistiques en un puissant outil scientifique. Il a clarifié de nombreux principes mathématiques sur lesquels la discipline est fondée. Fisher a également développé des méthodes d'analyse multivariée pour analyser correctement les problèmes impliquant plus d'une variable.

En 1926, le mathématicien pur et appliqué JOHN VON NEUMANN (1903-1957) a fondé la THÉORIE DES JEUX, une théorie mathématique cadre d'analyse des jeux de hasard, comme le poker, qui impliquent stratégie et choix de la part des joueurs. Von Neumann a reconnu les applications de la théorie à sciences économiques et sociales. Le travail de Nobel Laure ate JOHN FORBES NASH, JR., (né en 1928) a pris ses applications à l'économie à un niveau profond.

Voir aussi STATISTIQUES : DESCRIPTIVE ; STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

La probabilité donne une mesure de la vraisemblance ou de la fréquence d'occurrence. Si nous lançons une paire de dés 1 000 fois, alors on s'attendrait, en moyenne, à ce que près d'un sixième des rouleaux (environ 167 d'entre eux) aient une somme de 7; près de 1/12e d'entre eux (environ 83 rouleaux) à avoir somme 10 ; et près de 1/36e (environ 28 d'entre eux) à avoir une somme de 2. Ce principe est précisé dans la LOI DE GRANDS NOMBRE.

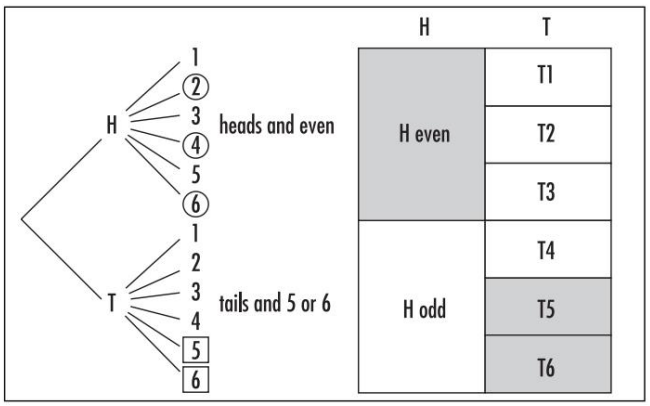
Calcul des probabilités

Deux modèles sont souvent utilisés pour aider à calculer les probabilités dans des situations modérément compliquées. Ils peuvent également être utilisé pour illustrer deux règles de calcul.

1. Arbres de probabilité et règle d'addition

Un arbre de probabilité est un diagramme affichant tous les résultats d'une séquence d'actions. On suppose que le

Machine Translated by Google



Modèles de probabilité

les résultats d'une action n'affectent pas les résultats des actions qui suivent.

Pour illustrer, imaginez que vous lancez une pièce de monnaie et que vous lancez ensuite un dé. Chaque résultat du tirage au sort - pile ou face - peut être accompagné de l'un des six résultats possibles du lancer du dé : les chiffres de 1 à 6. Le diagramme d'arbre de probabilité (illustré ci-dessus) est utilisé pour rendre cela explicite. En particulier, il montre que 12 résultats différents sont possibles en réalisant ces deux actions. Le calcul de la probabilité de tout ensemble de résultats souhaité est maintenant simple. Par exemple, les chances de lancer une tête avec un nombre pair 1– . De même, la probabilité de lancer sont $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ une queue 4

avec un 5 ou un 6 font 12 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Ce modèle illustre la propriété additive de la théorie des probabilités. Dans notre exemple :

$$P(\text{pile et un nombre pair ou pile et un 5 ou un 6}) = \frac{3+2}{12}$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{2}{12}$$

= P(face et un nombre pair) + P(face et un 5 ou un 6)

En général, si A représente un ensemble de résultats souhaités et B un autre ensemble de résultats n'ayant aucun point commun avec A, alors

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

En particulier, les deux événements « A » et « non A » sont disjoints, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun résultat en commun. Comme nous sommes certain que A se produira ou ne se produira pas, P(A ou non A) = 1, on a, par cette règle :

$$P(\text{non } A) = 1 - P(A)$$

Par exemple, la probabilité de ne pas lancer un deux lorsque 5– lance un dé est P(non 2) = 1 – p(lancer 2) = 1 – = 6 $\frac{1}{6}$.

Si deux événements A et B ont des résultats en com mon, alors la règle ci-dessus est modifiée pour lire :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ et } B).$$

Le terme P(A et B) est soustrait pour contrer le double comptage des résultats communs à A et B.

2. Le modèle carré et la règle de multiplication Le modèle carré de la théorie des probabilités utilise un carré pour représenter l'ensemble des résultats obtenus en réalisant une expérience un grand nombre de fois. Par exemple, en lançant une pièce de monnaie, nous nous attendrions, en moyenne, à ce que la moitié des résultats soient face et l'autre moitié à face. Nous représentons cela en divisant le carré en deux parties de surface égale. La partie gauche représente maintenant un ensemble d'expériences à part entière. Lors du prochain lancer de dé, nous nous attendrions à ce que, en moyenne, la moitié de ces résultats produise un nombre pair et l'autre moitié un nombre impair. Cela divise la région des têtes en deux sous-parties égales. La partie droite du carré représente également un ensemble d'expériences à part entière. En lançant un dé, nous nous attendrions à ce qu'un sixième des résultats soit un 1, un sixième soit un 2, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'un sixième des résultats soit un 6. Cela divise la région des queues en six portions de surface égale.

Il est maintenant facile de lire les probabilités concernant les combinaisons de résultats. Par exemple, le résultat de « face suivi d'un nombre pair » est représenté par la moitié de la moitié du carré, c'est-à-dire :

$$P(\text{faces et un nombre pair}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Le résultat « pile et un 5 ou un 6 » est représenté par un sixième de la moitié du carré plus un autre sixième de la moitié du carré. Ainsi:

$$P(\text{queues et 5 ou 6}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Ce modèle illustre la propriété multiplicative dans la théorie des probabilités. Dans notre exemple :

Machine Translated by Google

P (faces et nombre pair) = moitié de
la moitié du carré 1– 2
= ×1-2
= P(pair) × P(faces)

P(queues et {5, 6}) =
un tiers de la moitié du carré
= P({5,6}) × P(queues)

En général, si A et B représentent deux ensembles de résultats souhaités à partir de deux ensembles d'expériences différents, alors la probabilité d'obtenir à la fois A et B lors de la réalisation des expériences successives est :

P(A et B) = P(A) × P(B)

Nous supposons ici que les résultats d'une expérience n'ont aucun effet sur les résultats de la seconde, c'est-à-dire que les deux expériences sont des ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS.

Difficultés philosophiques La
probabilité, telle que définie jusqu'ici, repose sur notre capacité à compter les résultats. Si l'ensemble des résultats est infiniment grand, alors la question du comptage n'a pas de sens. Néanmoins, nous pouvons encore avoir une compréhension intuitive de la « probabilité » dans ces situations. Par exemple, en faisant tourner un point cardinal, nous sommes toujours certains que la probabilité que le pointeur atterrisse entre le nord et l'est est de 1/4, même s'il y a une infinité d'endroits où le pointeur s'arrête dans le quart désiré du bord de la boussole.
Si un nombre entier est choisi au hasard, nous soupçonnons que la probabilité qu'il soit pair est de 1/2 - après tout, il n'y a que deux possibilités, paire ou impaire, chacune représentant la moitié des résultats possibles. Ainsi, la détermination de la « probabilité » repose sur la capacité d'attribuer une mesure relative de taille à des ensembles de points, ou de résultats, même si ces ensembles peuvent être infinis. Il s'agit d'une question difficile, qui a causé beaucoup de confusion au cours du 19e et du début du 20e siècle. (Voir AREA et PARADOXE DE BERTRAND .)

Une deuxième difficulté réside dans le fait que la définition de la probabilité de Cardano est circulaire : la probabilité de tout résultat est déterminée en sachant à l'avance quels résultats sont également probables.

Comment la probabilité est comprise aujourd'hui
En lançant une pièce de monnaie, par exemple, nous sommes généralement disposés à dire que seulement deux résultats sont possibles : face ou queues - et nous pensons qu'il est approprié d'attribuer une probabilité de 1/2 pour chaque occurrence. Les gens d'une disposition contraire peuvent soutenir, cependant, que plus de deux résultats pourraient se produire (la pièce pourrait tomber sur son côté, par exemple) et que les valeurs de probabilité devraient être attribuées différemment. Certes, les problèmes soulevés par le paradoxe de Bertrand, par exemple, montrent que la notion d'aléatoire est sujette à une compréhension personnelle. Pour qu'une discussion mathématique significative ait lieu, il doit donc être convenu à l'avance quels résultats sont considérés comme étant dans la plage des possibilités, et quelle sera la probabilité de tous les ensembles de résultats. (Cela pousse l'approche de Cardano plus loin - non seulement les résultats également probables doivent être spécifiés, mais toutes les probabilités doivent également être déclarées dès le départ.)

Ainsi, dans toute discussion sur la théorie des probabilités, un mathématicien d'aujourd'hui déclarera au départ :

1. L'espace échantillon S : l'ensemble de tous les résultats considérés
comme possibles 2. Une mesure de probabilité P : une règle qui attribue à tout événement AS un nombre P(A) appelé la probabilité de A.

La mesure de probabilité consiste à satisfaire ces trois règles :

je. Pour tout événement A, P(A) est un nombre compris entre 0 et
1. ii. P(S) = 1. (C'est-à-dire que dans n'importe quel déroulement de l'expérience, un
résultat se produira.) iii. Si deux événements A et B n'ont aucun résultat en commun, alors P(A ou B) = P(A) + P(B).

Pour des modèles finis simples, comme l'acte de lancer un dé, ce modèle encode l'approche développée par Cardano, Pascal et Fermat, mais il étend également cette réflexion à des systèmes plus complexes. Par exemple, en lançant une fléchette sur un jeu de fléchettes, les probabilités peuvent être définies comme des rapports de zones. La probabilité de lancer un œil de boeuf, par exemple, est le rapport de l'aire de l'oeil de boeuf à l'aire de l'ensemble du plateau. Cette définition satisfait les axiomes i, ii et iii ci-dessus.

La clé de l'analyse de tout phénomène aléatoire est alors de définir de manière appropriée une mesure de probabilité. Différentes mesures de probabilité peuvent conduire à des résultats différents. Les physiciens et les scientifiques sont alors mis au défi de trouver la mesure qui reflète le mieux notre intuition
compréhension du phénomène évoqué.

Voir aussi PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ; ÉVÉNEMENT; SON
TORY OF PROBABILITY AND STATISTICS (essai); CHEZ KRUSKAL

Machine Translated by Google

COMPTER; MÉTHODE DE MONTE- CARLO ; PROB DE MONTY HALL LEM ; CHANCES; MARCHE ALÉATOIRE ; STATISTIQUES; DEUX CARTES PUZZLE.

fonction de densité de probabilité Voir DISTRIBUTION.

Proclus Voir les POSTULATS D'EUCLIDE .

règle de produit La DÉRIVÉE du produit de deux fonctions f et g est donnée par la règle du produit :

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

Par exemple, nous avons $\frac{d}{dx}(x\sin x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x\cos x$. La règle peut être prouvée en utilisant la limite définition de la dérivée comme suit :

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)$$

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Alternativement, on peut reconnaître que la quantité $f(x + h) \cdot g(x + h)$ est la formule de l'aire d'un rectangle, celui qui contient le plus petit rectangle d'aire $f(x) \cdot g(x)$. Écrire une formule pour l'aire de la forme en L région entre les deux rectangles, divisant par h, et prendre la limite quand h devient petit conduit au même formule de la règle du produit.

La règle du produit peut être généralisée pour s'appliquer à tout produit fini de fonctions. Par exemple, pour le produit de trois fonctions on a :

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

Si l'une des fonctions d'un produit est une constante k, alors la règle de produit affiche :

$$(kf(x))' = 0 \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = kf'(x)$$

Deux applications de la règle du produit donnent la seconde dérivée d'un produit de deux fonctions :

$$(f(x) \cdot g(x))'' = f(x) \cdot g''(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x)$$

En général, la dérivée nième d'un produit de deux fonctions est une somme de produits contenant BINOMIAL COEFFICIENTS :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Ce résultat est appelé théorème de Leibniz.

Voir aussi RÈGLE DE CHAÎNE ; DÉRIVÉE SUPÉRIEURE ; QUO RÈGLE TIENT.

projection Toute projection d'une figure géométrique sur une PLANE pour produire une image bidimensionnelle de cette figure s'appelle une projection. Par exemple, la journée l'ombre projetée par un objet extérieur est un exemple de projection au sol. Comme le Soleil est à une grande distance de la Terre, les rayons solaires sont essentiellement PARALLÈLE, et les ombres qu'il projette sont des projections parallèles. Les ombres projetées par un seul point de lumière, cependant, comme la flamme d'une bougie, ont des formes différentes que celles projetées par le soleil. De telles projections sont appelées saillies centrales.

mathématicien et ingénieur français GIRARD DESARGUES (1591-1661) observe que la projection centrale de toute SECTION CONIQUE est une autre section conique. (Par exemple, la forme projetée sur le sol par le bord circulaire d'une lampe de poche est une ELLIPSE.) Cela l'a amené à étudier les propriétés des figures géométriques qui restent inchangé dans les projections centrales, fondant ainsi le domaine de la GEOMETRIE PROJECTIVE.

Dans l'analyse VECTOR , la projection d'un vecteur a sur un vecteur b est un vecteur parallèle à b dont la longueur est la longueur de "l'ombre" projetée par a si les deux vecteurs sont placés au même endroit dans l'espace et les "rayons de lumière » projetant l'ombre sont parallèles et PERPEN DICULAR à b. Ainsi la projection de a sur b est un vecteur de la forme xb, pour une certaine valeur x, avec la propriété que le vecteur reliant la pointe de xb à la pointe de a est perpendiculaire à b. En utilisant le produit scalaire des vecteurs, cela donne l'équation:

Machine Translated by Google

$$b \cdot (a - xb) = 0$$

La résolution de x donne la formule du vecteur projeté :

$$\text{Projection de a sur b} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$$

Voir aussi PROJECTION DE MERCATOR ; STÉRÉOGRAPHIQUE PROJECTION.

géométrie projective La branche de la GÉOMÉTRIE qui examine les propriétés des figures géométriques qui restent inchangées par une PROJECTION centrale est appelée géométrie projective. De manière informelle, les ombres projetées par une source ponctuelle de lumière, comme la flamme d'une bougie ou la petite ampoule d'une lampe de poche, sont des projections centrales, et ainsi la géométrie projective examine les propriétés qui sont les mêmes pour l'ombre d'un objet géométrique et l'objet lui-même. Par exemple, "l'ombre" d'une droite est une autre droite, et donc la notion de "droite" est un concept valable en géométrie projective.

Le mathématicien et ingénieur français GIRARD DESARGUES (1591-1661), à travers ses études de PER SPECTIVE en art, fut frappé par le fait que l'image d'une SECTION CONIQUE en projection est une autre section conique. (Par exemple, le contour du bord circulaire d'une lampe de poche, une section conique, dirigée vers le sol à un angle approprié produit l'image d'une ELLIPSE, d'une PARABOLE ou d'une branche d'une HYPERBOLE.) Son étude de ce phénomène a fondé le domaine de la géométrie projective. Malheureusement, son travail a été mal compris à l'époque et a été négligé. Le sujet a ensuite été relancé en 1822 par le mathématicien français Jean Victor Poncelet (1788-1867) avec sa publication du Traité des propriétés des figures (Traité sur la propriété projective des figures).

LE THÉORÈME DE DESARGUES est un résultat fondamental sur la perspective. Afin d'unifier les cas particuliers du théorème et de tenir compte de la possibilité que deux droites soient parallèles dans son énoncé, Desargues a développé la notion de "points à l'infini" afin que l'on puisse parler à juste titre du point d'intersection de deux droites quelconques . lignes dans le plan. (On dit que les lignes parallèles se coupent en ces points à l'infini.) Dans ce cadre, deux points quelconques du plan déterminent une ligne, et deux lignes quelconques déterminent un point. Ainsi Desargues avait créé un notion de géométrie dans laquelle les mots point et ligne jouent un double rôle, et peuvent être interchangés dans tout énoncé vrai sur cette géométrie pour obtenir de nouveaux énoncés (vrais) dans cette géométrie. Cette notion de dualité a d'abord été correctement esquissée par Poncelet.

Aujourd'hui, tout système d'objets, généralement appelés points et lignes, satisfaisant les cinq axiomes suivants est appelé une géométrie projective :

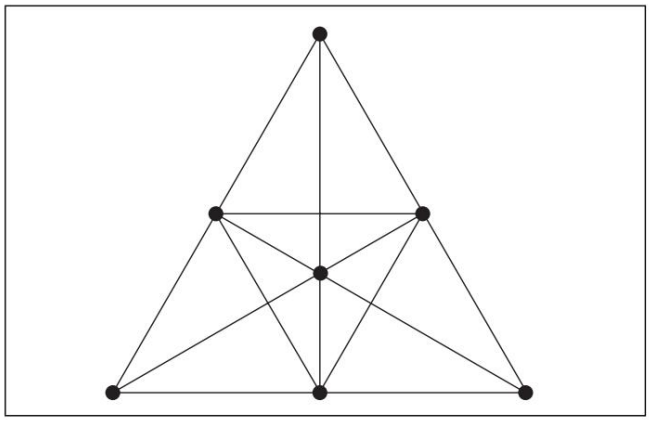
1. Pour deux points distincts, il y a exactement une droite qui les contient tous les deux.
2. Pour deux droites distinctes, il y a exactement un point commun aux deux.
3. Il y a au moins une ligne.
4. Chaque ligne contient au moins trois points.
5. Tous les points ne se trouvent pas sur la même ligne.

(Les trois derniers axiomes garantissent que la géométrie n'est pas triviale.)

Une géométrie projective finie est tout arrangement d'un nombre fini de points et de lignes qui obéissent à ces cinq axiomes. Par exemple, le diagramme ci-dessous, appelé le plan de Fano, est une géométrie projective avec sept points et sept lignes avec exactement trois points sur chaque ligne et trois lignes passant par chaque point. (Le triangle central est considéré comme une seule ligne.) C'est ce qu'on appelle la configuration symétrique de type 73 .

Il existe une seule configuration symétrique de type trois de type 93 , 10 de type 103 et 31 de type 113 . 83 , Toutes les configurations symétriques jusqu'au type 183 ont été déterminées.

Voir aussi HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE (essai).



La configuration symétrique du type 73

Machine Translated by Google

preuve Une démonstration qu'un énoncé découle d'un autre via un processus de raisonnement logique pur est appelée une preuve. Toutes les preuves sont basées sur un ensemble de prémisses, c'est-à-dire des déclarations qui ont été précédemment établies comme valides, ou sont prises comme AXIOM, et suivent une séquence de déductions qui établissent que la déclaration finale présentée - la conclusion - est vraie. Alternativement, on peut considérer une preuve comme une pièce écrite démontrant un raisonnement logique qui convainc tous les lecteurs de la validité absolue du résultat, étant donné les hypothèses faites comme prémisses.

A titre d'exemple, l'argument suivant est une preuve. Il suppose que les principes de base de l'algèbre sont compris et que deux faits de base sur les nombres naturels sont connus, à savoir que chaque nombre naturel est pair ou impair et que chaque nombre pair est un multiple de 2.

Affirmation : Si n est un nombre naturel tel que n impair, n^2 est alors n lui-même est impair.

Preuve : Il ne peut pas être vrai que n soit pair, car alors n serait de la forme 2k, ce qui rend $n = 4k^2 = (2k)^2$ non impair. Donc n doit être impair. Mais $n^2 = 2(2k^2)$ pair et aussi

L'utilisation du terme preuve en mathématiques diffère de l'utilisation du mot dans la méthode scientifique. Généralement, un scientifique émettra une hypothèse pour expliquer un phénomène physique, puis effectuera des expériences pour tester cette hypothèse. Si les résultats de l'investigation sont systématiquement conformes à l'hypothèse (et de plus, si l'hypothèse conduit à des prédictions sur d'autres phénomènes physiques qui sont ensuite confirmées), un scientifique peut dire qu'un principe physique a été prouvé. Par exemple, que la matière soit composée d'éléments fondamentaux tels qu'énumérés dans un tableau périodique est une théorie scientifique éprouvée. Il s'agit cependant d'un résultat établi uniquement sur l'expérience et l'observation.

Cependant, l'observation seule ne constitue pas une preuve en mathématiques et peut conduire à des conclusions erronées. Par exemple, on peut être tenté de soutenir $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ est une identité algébrique valide puisque, après tout, cela fonctionne pour a = 1 et b = 0, par exemple. Après avoir testé tous les nombres de 1 à 1 000, par exemple, on pourrait conclure que tous les nombres sont inférieurs à 1 million. (Un millier d'instances qui appuient une affirmation la rendent sûrement convaincante.) Les deux affirmations sont, bien sûr, absurdes. Par exemple, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ ne tient pas pour a = b = 1, et 1 000 001 n'est pas inférieur à 1 million. Ces exemples illustrent pourquoi un mathématicien n'acceptera que des justifications basées sur un raisonnement logique et non sur la seule observation.

Il existe plusieurs méthodes de preuve différentes. Une PREUVE DIRECTE procède linéairement des prémisses à la conclusion, tandis qu'une PREUVE INDIRECTE (également appelée PREUVE PAR CONTRADICTION, ou reductio ad absurdum) suppose la fausseté de la conclusion souhaitée et montre que c'est impossible. De nombreuses affirmations en THÉORIE DES NOMBRE et en THÉORIE DES GRAPHIQUES sont également établies par la méthode de l'INDUCTION mathématique.

En 1976, deux mathématiciens Kenneth Appel et Wolfgang Haken ont présenté une "preuve" générée par ordinateur du célèbre THÉORÈME DES QUATRE COULEURS. S'appuyer sur 1 200 heures de calcul informatique pour vérifier près de 2 000 clauses particulières. Aucun individu, malheureusement, n'a les moyens de vérifier les détails de l'œuvre et d'être personnellement convaincu du bien-fondé de l'argumentation. La question de savoir si les travaux d'Appel et Harken constituaient ou non une « preuve » suscita une grande controverse dans la communauté mathématique. Pour la tranquillité d'esprit, les mathématiciens recherchent encore aujourd'hui une preuve purement mathématique du résultat, évitant complètement l'aide de l'ordinateur.

Voir aussi FORCE BRUTE ; RÉA DÉDUCTIVE/INDUCTIVE SONS; THÉORÈME.

preuve par contradiction (reductio ad absurdum)

Voir PREUVE INDIRECTE.

preuve par contraposition Voir CONTRAPOSITIVE.

proportionnel Deux grandeurs x et y sont dites directement proportionnelles si leur RAPPORT est toujours constant. y

Cela signifie $= k\frac{y}{x}$ ou $y = kx$, pour une constante non nulle k appelée constante de proportionnalité. Par exemple, la loi de Hooke en physique affirme que la force F exercée par un ressort étendu sur une petite longueur x est directement proportionnelle à cette longueur : F = kx. Ici, k est appelé la constante du ressort.

Si y est directement proportionnel à x, on écrit $y \propto x$ et on dit que y varie directement comme x. Bien sûr, il s'ensuit également que $x \propto y$. Lorsque les valeurs de y sont tracées par rapport aux valeurs correspondantes de x, le graphique obtenu est une ligne droite passant par l'origine.

Machine Translated by Google

Si une quantité y est proportionnelle à l'inverse de a variable x, c'est-à-dire y $\frac{1}{x}$, alors on dit que y et x sont inversement proportionnel ou que y varie inversement à x. Par exemple, les lois des gaz en physique affirment que la pression du gaz est inversement proportionnelle au volume.

En algèbre, les termes d'un énoncé sur les rapports de quantités sont parfois appelés proportionnels. Par exemple, dans l'expression :

une : b = c : ré

la quantité c est la troisième proportionnelle.

proposition En mathématiques, tout énoncé pour lequel une preuve est requise ou a été fournie est appelé une proposition. Dans la LOGIQUE FORMELLE, toute déclaration qui a une valeur de vérité soit vraie soit fausse (mais pas les deux) est appelée une proposition.

Voir aussi THÉORÈME.

Ptolémée, Claudius (ca. 85–165 EC) Géométrie grecque , Trigonométrie, Astronomie Né en Égypte, vers 85 EC, l'érudit Claudius Ptolemy est connu pour sa pièce épique Syntaxis mathematica (Collection mathématique), également connue sous le nom d' Almagest (Le plus grand), souvent considéré comme le travail le plus important en TRIGONOMÉTRIE des temps anciens. L'ouvrage contient des tables précises d'"accords" (équivalentes à une table moderne de valeurs sinusoïdales), ainsi qu'une description claire de la manière dont cette table a été construite. (Il a utilisé un résultat aujourd'hui connu sous le nom de THÉORÈME DE PTOLÉMÉE , l'équivalent géométrique des formules d'ADDITION trigonométriques que nous utilisons aujourd'hui.) On sait que Ptolémée a également tenté de prouver le célèbre POSTULAT PARALLÈLE d'EUCLIDE .

Le lieu exact de la naissance de Ptolémée est inconnu. Bien qu'il soit né en Égypte, il est considéré comme un érudit grec classique parce qu'il a suivi les traditions savantes des Grecs et a écrit dans cette langue. Son nom de famille, Ptolémée, est grec, mais son prénom, Claudius, est romain. Cela suggère qu'il était également considéré comme un citoyen romain.

Des traductions précises de toutes les œuvres de Ptolémée survivent aujourd'hui. Son ouvrage le plus remarquable, Syntaxis mathematica, se compose de 13 volumes, et une grande partie des mathématiques qui y sont développées est motivée par des préoccupations



Claudius Ptolemy, un éminent érudit du IIe siècle, a écrit l'Almagest, l'ouvrage le plus influent sur le thème de la trigonométrie des temps anciens. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

de l'astronomie. En particulier, Ptolémée a travaillé pour donner des descriptions détaillées des mouvements du Soleil, de la Lune et des planètes connues à l'époque. Il croyait que la Terre se trouvait au centre du système solaire.

Dans les livres 1 et 2 de Syntaxis mathematica, Ptolémée développe une théorie mathématique des mouvements circulaires composés (mouvement dans les ÉPICYCLES) comme moyen d'expliquer le mouvement observé des planètes. Cela a motivé son besoin de sa table d'accords précise. Il convient également de mentionner que dans ce travail, Ptolémée a utilisé un polygone à 360 côtés inscrit dans un cercle pour trouver l'approximation suivante pour π correct à trois décimales :

$$\pi \approx \frac{377}{120} \approx 3\ 14166\ .$$

Le livre 3 de Syntaxis mathematica traite du mouvement du Soleil. En analysant attentivement les

Machine Translated by Google

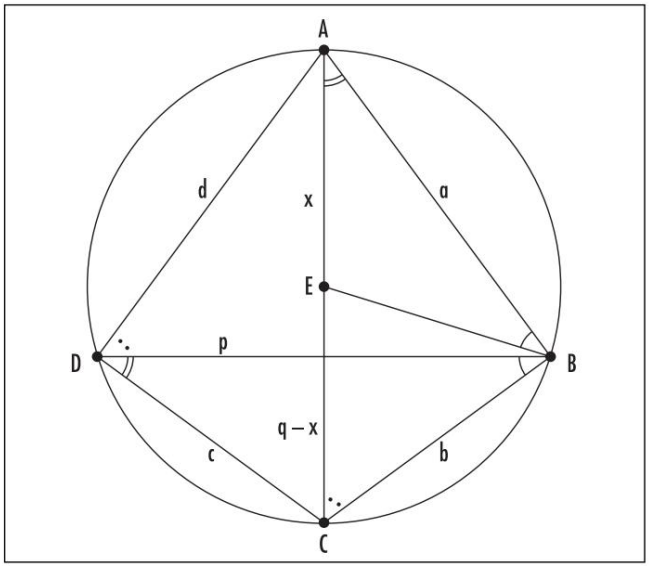
longueurs des saisons et le moment des solstices et des équinoxes, Ptolémée a conclu que, bien que, selon lui, le Soleil orbite autour de la Terre, la Terre ne se trouve pas au centre de cette orbite. Il développe une théorie mathématique pour calculer la distance de ce centre à laquelle la Terre est censée se trouver.

Les livres 4 et 5 examinent le mouvement de la Lune et le livre 6 fournit une théorie des éclipses. Une grande partie des livres 7 et 8 représente un catalogue de plus de 1 000 étoiles, et les cinq livres restants explorent sa théorie épicyclique du mouvement planétaire.

Ptolémée a également écrit d'importants travaux scientifiques dans d'autres domaines. Son livre Analemma discute de nouvelles méthodes mathématiques pour construire des cadrans solaires ; son travail Optics examine les propriétés de la couleur, de la réflexion et de la réfraction ; et son ouvrage majeur Geography tente de cartographier le monde entier connu à son époque, en donnant des mesures aussi précises que possible de la latitude et de la longitude des grandes villes.

Le théorème de Ptolémée L'astronome et mathématicien grec du IIe siècle CLAUDIUS PTOLEMY a prouvé le résultat suivant, maintenant connu sous le nom de théorème de Ptolémée :

> Si a, b, c et d sont les côtés d'un QUADRILATERAL inscrit dans un cercle, et si p et q sont les longueurs de ses diagonales, alors ac + bd = pq.



Théorème de Ptolémée

Cela peut être prouvé comme suit : selon les THÉORÈMES DU CERCLE standard, les angles CAB et CDB indiqués sont égaux. Construire la droite BE telle que les triangles ABE et Le CBD est similaire. Alors $= \frac{un}{x}$ $\frac{p}{c}$. On vérifie alors que les triangles ABD et EBC sont également semblables (angles ADB et ACB sont égaux), et donc $q - x \frac{b}{ac + bd} = \frac{p}{d}$. Par conséquent $= px + p(q - x) = pq$.

Voir aussi LA FORMULE DE BRAHMAGUPTA ; SIMILAIRE LES FIGURES.

mathématiques pures L'étude des systèmes et des structures mathématiques abstraites, sans nécessairement avoir des applications pratiques à l'esprit, s'appelle les mathématiques pures. Il a diverses branches, y compris l'ALGÈBRE ABSTRAITE, la GÉOMÉTRIE, la THÉORIE DES NOMBRE, le CALCUL, la TOPOLOGIE et les sujets qui en découlent, mais la distinction avec les MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES peut ne pas être nette. Par exemple, la GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE pourrait être analysée comme une étude abstraite des relations entre les lignes, les points et les formes géométriques basée sur les fondements des POSTULATS D' EUCLIDE , ou pourrait, en même temps, être considérée comme une étude de résultats qui pourraient potentiellement (et, en fait, s'est avéré utile pour les architectes, les géomètres, les ingénieurs et les scientifiques.

Bien qu'une grande partie des mathématiques développées à l'époque de l'Antiquité aient été clairement motivées par des préoccupations pratiques, le développement des mathématiques pour elles-mêmes intéressait néanmoins les premiers chercheurs. Par exemple, les tablettes babyloniennes de ca. 1600 AEC énumèrent de grands TRIPLES PYTHAGORIENS qui ne pouvaient avoir aucune utilité pratique. Les mathématiciens grecs d'environ 400 avant notre ère ont commencé à rechercher la rigueur, la preuve et la justification dans leur pensée mathématique, et ca. 300 av. J.-C. EUCLIDE produisit son traité logiquement rigoureux LES ÉLÉMENTS, résumant toutes les connaissances mathématiques connues à son époque. L'organisation unique des idées présentées dans son travail est devenue la caractéristique principale de la pièce. Cela, en soi, était considéré comme une analyse de la pensée logique, qui est devenue le paradigme de toute la pensée mathématique et scientifique pendant les deux millénaires qui ont suivi.

Au XIXe siècle, les mathématiciens ont commencé à rechercher des idées unificatrices entre des branches distinctes de l'algèbre et de la géométrie. L'étude générale des structures et des opérations sur celles-ci a conduit au développement de l'algèbre abstraite, par exemple. Le développement des PARA DOX en THEORIE DES ENSEMBLES et dans les fondements de

Machine Translated by Google

CALCULUS a forcé les chercheurs à rechercher des niveaux plus élevés de rigueur et d'abstraction. Même la nature du raisonnement logique lui-même a été examinée comme une tentative de comprendre et de résoudre des paradoxes fondamentaux. Le besoin d' ANALYSE abstraite et de synthèse a été reconnu comme important, et la dichotomie entre les mathématiques appliquées et les mathématiques pures est devenue plus apparente.

Aujourd'hui, de nombreuses universités de recherche possèdent deux départements de mathématiques, l'un considéré comme pur et l'autre appliqué. Les étudiants peuvent obtenir des diplômes supérieurs dans l'un ou l'autre domaine.

Voir aussi MATHÉMATIQUES BABYLONIENNES ; GREC MATHÉMATIQUES.

pyramide Un CÔNE dont la base est un polygone s'appelle une pyramide. Plus précisément, une pyramide est la figure solide formée par un polygone et un certain nombre de triangles, un attaché à chaque côté du polygone, tous se réunissant en un point commun appelé le sommet de la pyramide . La pyramide est classée comme une pyramide droite si la ligne reliant le sommet de la pyramide au CENTRE DE GRAVITÉ de la base rencontre la base à angle droit.

(Sinon, on l'appelle une pyramide oblique.) Une pyramide carrée est une pyramide droite à base carrée.

L'étude des volumes des cônes montre que le volume d'une pyramide n'est que le tiers de l'aire de la base de la figure multipliée par sa hauteur. Un TÉTRAÈDRE est une pyramide droite ayant quatre triangles équilatéraux comme faces.

Voir aussi FRUSTUM.

Pythagore (vers 569-475 av. J.-C.) Géométrie grecque , théorie des nombres Né à Samos, en Ionie, le mathématicien et mystique grec Pythagore est connu comme le fondateur de l'école pythagoricienne, qui prétendait avoir trouvé la vérité universelle grâce à l'étude des nombres. En tant que tels, les pythagoriciens sont crédités comme les premiers à avoir pris les mathématiques au sérieux en tant qu'étude à part entière sans égard à l'application possible et au besoin pratique. Ce que Pythagore apporta précisément n'est plus clair, mais l'école est reconnue pour avoir découvert le rôle des rapports de nombres entiers dans la gamme musicale, les propriétés des NOMBRES FIGURÉS, des NOMBRES AMICABLES, des NOMBRES PARFAITS et l'existence des NOMBRES IRRATIONNELS.

Bien que le THÉORÈME DE PYTHAGORE était connu des Babyloniens plus de 1000 ans plus tôt, le Pythagore



Pythagore, chef d'une secte du VIe siècle av. J.-C. , affirmait avoir découvert la vérité universelle grâce à l'étude des nombres entiers et de leurs rapports. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de Topham/The Image Works)

ans sont les premiers à avoir fourni une preuve générale du résultat.

On sait très peu de choses sur la vie de Pythagore. La secte qu'il a fondée était à moitié scientifique et à moitié religieuse et suivait un code du secret qui a certainement favorisé un grand mystère sur l'homme lui-même. De nombreux écrits historiques attribuent des qualités divines à Pythagore et ne sont généralement pas considérés comme des représentations exactes. Il est entendu que Pythagore a rendu visite à THALES DE MILETUS (vers 625–547 avant notre ère) en tant que jeune homme qui, très probablement, a contribué à l'intérêt de Pythagore pour les mathématiques. Vers 535 avant notre ère, Pythagore se rendit en Égypte et fut certainement influencé par les sectes secrètes des prêtres égyptiens. (Beaucoup de pratiques suivies par les Pythagoriciens étaient les mêmes que celles pratiquées en Égypte - refus de manger des haricots ou de porter des vêtements faits de peaux d'animaux, par exemple.)

En 525 avant notre ère, l'Égypte a été envahie par les forces perses et Pythagore a été capturé et emmené à Babylone.

Machine Translated by Google

Finalement, après avoir été libéré, Pythagore s'est installé dans le sud de l'Italie, où il a fondé sa célèbre école vers 518 avant notre ère . Les hommes et les femmes étaient les bienvenus en tant que membres.

Pythagore croyait que tous les phénomènes physiques (et métaphysiques) pouvaient être compris à travers les nombres. Cette croyance proviendrait de son observation que deux cordes vibrantes ne produisent une combinaison harmonieuse de sons que lorsque les rapports de leurs longueurs peuvent être exprimés en termes de nombres entiers. (Pythagore était un musicien accompli et a apporté d'importantes contributions à la théorie de la musique.)

Pythagore et ses disciples ont étudié les nombres entiers et leurs rapports, et sont même allés jusqu'à attribuer des propriétés mystiques aux nombres. Par exemple, ils croyaient que le premier nombre naturel, 1, agissait comme la source divine de tous les nombres et était donc d'une stature différente d'un nombre ordinaire. (Le nombre 2 était considéré comme le premier nombre.) Tous les nombres pairs étaient supposés féminins et tous les nombres impairs masculins, et tous les nombres impairs (sauf 13) représentaient la chance.
Le nombre 4 signifiait « justice », étant le premier carré parfait, et 5 mariage, l'union (somme) du premier nombre pair (2) et du premier nombre impair (3). Le nombre 6 était « parfait » puisqu'il est égal à la somme de ses facteurs différents de lui-même.

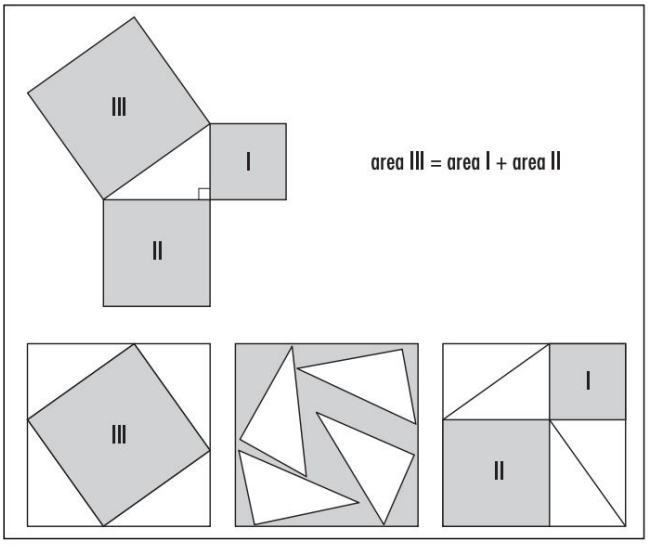
En GÉOMÉTRIE, les Pythagoriciens savaient que les angles intérieurs d'un TRIANGLE totalisent toujours 180° (et, plus généralement, que l'angle intérieur d'une figure à n côtés totalise (n – 2) × 180°), et savaient comment construire trois des cinq SOLIDES PLATONIQUES. Ils pouvaient résoudre des équations de la forme $x^2 = a(a – x)$ en utilisant des méthodes géométriques, et ils ont développé un certain nombre de techniques pour construire des figures d'une aire donnée. Ils ont attribué une grande signification mystique au PENTAGRAMME en raison des rapports géométriques qu'il contient. En astronomie, les pythagoriciens savaient que la Terre est ronde, mais pensaient qu'elle se trouvait au centre de l'univers. Ils savaient que l'orbite de la Lune est inclinée par rapport à l'équateur de la Terre et ont été les premiers à réaliser que l'étoile du soir et l'étoile du matin étaient le même objet céleste (à savoir la planète Vénus).

La date exacte, le lieu et les circonstances de la mort de Pythagore ne sont pas connus. Malgré son décès, les factions de l'ordre pythagoricien d'origine ont duré plus de 200 ans. Les membres de la confrérie pythagoricienne vénéraient tellement leur fondateur qu'il était considéré comme impie pour tout individu de revendiquer une découverte. pour sa propre gloire sans se référer à Pythagore lui-même. On dit, par exemple, que le membre Hippase de Métaponte (vers 470 av. J.-C.) a été mis à mort par noyade pour avoir annoncé sa propre découverte du dodécaèdre régulier, le cinquième solide platonicien. (D'autres versions de cette histoire populaire soutiennent qu'il a été exécuté pour avoir prétendu avoir découvert que la racine carrée de 2 est un nombre irrationnel.)

Théorème de Pythagore (théorème de Pythagore, principe du triangle rectangle) Salué comme le résultat le plus important de toute la géométrie, le théorème de Pythagore stipule que, pour un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'HYPOTÉNUSE est égal à la somme des carrés de les deux autres côtés. Géométriquement, si l'on construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle rectangle, alors le théorème affirme que l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres. Algébriquement, si les trois côtés du triangle sont a, b et c, avec la longueur c l'hypoténuse, alors le théorème affirme que la relation suivante est vraie :

$$un^2 + b\,2\,2 = c$$

Le théorème peut facilement être prouvé en disposant quatre copies du triangle rectangle donné dans un grand carré.
Tant que les triangles ne se chevauchent pas, la quantité d'espace autour d'eux est toujours la même, peu importe comment



Théorème de Pythagore

Machine Translated by Google

les triangles sont disposés. En particulier, les arrangements de gauche et de droite montrent que le théorème est vrai.

Le théorème porte le nom du philosophe, mathématicien et mystique grec PYTHAGORE (vers 500 avant notre ère). Des tablettes babyloniennes datant d'avant 1600 av. J.-C. énuméraient des tables de nombres a, b et c satisfaisant la relation a + b 2 , suggérant que les savants de l'époque étaient au courant du résultat. (On pense que les Babyloniens utilisaient des triangles 3-4-5 pour mesurer les angles droits lors de la planification des constructions.) Le théorème est énoncé explicitement dans l'ancien texte hindou Sulbasutram (vers 1100 avant notre ère) sur les bâtiments du temple, et le diagramme de quatre triangles arrangé en carré apparaît dans l'ancien texte chinois Chou Pei Suan Ching d'environ 500 avant notre ère Bien que les érudits d'autres cultures aient pu être au courant du résultat, Pythagore est crédité comme le premier à donner une explication complète et appropriée de la raison pour laquelle le résultat est vrai .

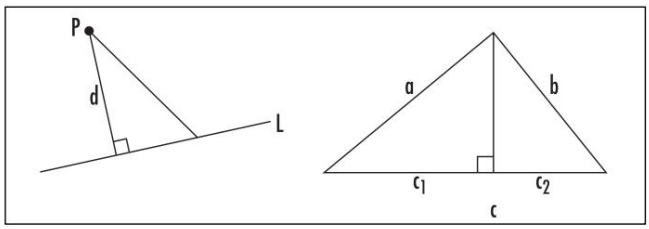
2 2

Aujourd'hui, de nombreuses preuves différentes du théorème de Pythagore sont connues. Les anciens Grecs (pensant uniquement en termes de constructions géométriques) ont montré comment diviser explicitement le plus grand carré en quatre morceaux qui pouvaient être réarrangés pour former les deux plus petits carrés. La méthode de preuve présentée ci-dessus est souvent appelée la preuve chinoise. Le président des États-Unis, James Garfield, a publié sa propre preuve du théorème de Pythagore en 1876 dans le cadre de son test pour devenir un maçon de haut rang. Au début du XXe siècle, le professeur Elisha Scott Loomis a rassemblé et publié 367 démonstrations différentes du résultat dans son livre The Pythagorean Proposition. Carreler un sol avec des carrés de deux tailles différentes fournit une preuve visuelle surprenante du théorème. (Voir SQUARE.) De nouvelles preuves de ce fameux résultat sont encore découvertes aujourd'hui.

Conséquences du théorème Si un triangle rectangle a des côtés de longueur a, b et c, avec le côté de longueur c opposé à l'angle droit, alors le théorème de Pythago ras affirme que c est plus $2 \quad 2 = un + b 2,$ d'où il découle grand que a et b . Ainsi:

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est bien l'hypoténuse du triangle.
Il est plus long que l'un ou l'autre des deux côtés restants.

Bien que cette observation semble anodine, elle a des conséquences importantes :



Conséquences du théorème de Pythagore

1. La plus courte distance d d'un point P à une droite L est donnée par la longueur de la perpendiculaire de P à L.

   Dans le schéma ci-dessus, tout autre segment de ligne reliant P à L est plus long que d.

   Cette observation permet de prouver tous les THÉORÈMES DU CERCLE standard.

2. Dans tout triangle, la somme des longueurs de deux côtés est supérieure à la longueur du troisième.

   Ce résultat, appelé l' INÉGALITÉ TRIANGULAIRE, suit en traçant une ligne perpendiculaire à partir du sommet du triangle. Dans le schéma ci-dessus à droite, nous avons que a + b est supérieur à c1 + c2 = c.

3. La distance la plus courte entre deux points d'un plan est donnée par une droite.

   L'inégalité triangulaire montre que la ligne reliant directement deux sommets d'un triangle est plus courte que la somme des deux longueurs des côtés restants. Ainsi, si un chemin reliant les points A et B est composé de segments de droite, chaque paire de segments peut être remplacée par un seul segment de droite plus court. L'application répétée de cette procédure remplace finalement le chemin par le chemin en ligne droite reliant A à B. Si, d'autre part, un chemin reliant A à B est courbe, alors on peut approcher le chemin courbe par un chemin composé uniquement de petites lignes droites. -segments de ligne. Comme nous venons de le voir, le chemin direct en ligne droite reliant A à B est plus court que toute approximation de ce type. On peut dire que si l'approximation est faite avec un certain degré de précision, le chemin en ligne droite reliant A à B est également plus court que le chemin courbe.

Théorème de Pythagore généralisé Les formes construites sur les côtés d'un triangle rectangle n'ont pas besoin d'être des carrés pour que le théorème de Pythagore soit vrai. Par exemple, si l'on devait construire des triangles équilatéraux sur chacun des trois côtés d'un triangle rectangle, alors l'aire du grand triangle serait égale à la somme

Machine Translated by Google

des aires des deux petits triangles. La même chose est vraie si l'on devait construire des pentagones, des demi-cercles ou n'importe quelle figure de chaque côté du triangle, tant que les trois figures sont similaires. La raison est simple :

> Soit F une figure d'aire A avec un côté de longueur 1, et considérons un triangle rectangle avec des côtés de longueurs a, b et c avec le côté de longueur c l'hypoténuse. Dessinez des versions à l'échelle de la figure F sur chacun des trois côtés du triangle. Ensuite, comme l'aire est mise à l'échelle de la longueur au carré, l'aire de la grande figure est a 2A et les aires des deux copies plus petites sont b 2A et c 2A. Par la version ordinaire du théorème de Pythagore, nous avons c 2A = a 2A + b 2A.

L'inverse du théorème

La LOI DES COSINS stipule que, pour tout triangle, pas nécessairement un triangle rectangle, avec des longueurs de côté a, b et c, avec le côté opposé c étiqueté C, la relation suivante est vraie :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Ainsi, si un triangle arbitraire devait satisfaire la relation de Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$, il doit en être ainsi que $\cos C$ est égal à zéro, ce qui signifie que C est un angle de 90°. Cela donne la réciproque du théorème de Pythagore :

> Si un triangle arbitraire avec des côtés de longueur a, b et c satisfait alors ce $a^2 + b^2 = c^2$, triangle est un triangle rectangle (avec l'angle droit opposé au côté de longueur c).

Ainsi, par exemple, un triangle avec des côtés de longueurs 3, 4 et 5, est bien un triangle rectangle précisément parce que $3^2 + 4^2 = 5^2$. (Beaucoup de textes élémentaires en mathématiques déclarent sans explication qu'un triangle 3-4-5 est droit.) Une étude des propriétés des angles aigu, obtus et droit dans un TRIANGLE fournit une preuve alternative très élémentaire de l'inverse de Pythagore.

Tout ensemble d'entiers a, b et c satisfaisant la relation $a^2 + b^2 = c^2$ est appelé un TRIPLET DE PYTHAGORE. Les triplets 5, 12, 13 et 20, 21, 29 sont des triplets de Pythagore et forment bien les côtés de deux triangles rectangles.

Voir aussi FORMULE DE DISTANCE ; ESCALADER; SIMILAIRE LES FIGURES.

Triples de Pythagore Un ensemble d'entiers positifs (a,b,c) est appelé un satisfaisant l'équation un triplet de $a^2 + b^2 = c^2$ Pythagore. Par exemple, (3,4,5) et (48,55,73) sont deux ensembles de triplets de Pythagore. L'inverse du THÉORÈME DE PYTHAGORE montre que tout triplet de Pythagore (a,b,c) correspond aux côtés d'un triangle rectangle, avec le côté de longueur c comme hypoténuse. Les architectes égyptiens, par exemple, ont utilisé des cordes nouées pour créer des triangles 3-4-5 et ainsi mesurer avec précision des angles de 90°.

Le problème de trouver des triplets de Pythagore est ancien. Le plus ancien enregistrement connu sur le thème de la théorie des nombres, une tablette d'argile de l'ère babylonienne (vers 1600 avant notre ère), contient un tableau de triangles rectangles à côtés entiers. Le fait que le triplet (4961,6480,8161) soit répertorié suggère que les Babyloniens avaient une méthode générale pour générer des triplets de Pythagore et ne s'appuyaient pas uniquement sur les essais et les erreurs pour les trouver. (Cela suggère également que les érudits de l'époque étaient également intéressés à poursuivre les mathématiques simplement pour le plaisir du sujet.)

Les multiples d'un triplet de Pythagore donné donnent de nouveaux triplets. Par exemple, à partir du triplet (3,4,5) nous obtenons de nouveaux triplets (6,8,10), (9,12,15), (12,16,20) et ainsi de suite.
Dans un certain sens, ces nouveaux triplets de Pythagore sont inintéressants et les chercheurs ont tendance à se concentrer sur les triplets (a, b, c) pour lesquels les nombres a, b et c ne partagent aucun facteur commun (autre que le nombre 1). Ces triplets de Pythagore sont dits primitifs. Par exemple, (5,12,13) est un triplet de Pythagore primitif, mais (60,63,87) ne l'est pas.

Le mathématicien grec EUCLIDE (vers 300 av. J.-C.) dans le livre 10 de son texte LES ÉLÉMENTS a complètement classifié les triplets pythagoriciens primitifs. Il a montré que tout triplet pythagoricien primitif doit être de la forme :

$$(p^2 - q^2,\ 2pq,\ p^2 + q^2)$$

pour certains entiers positifs p et q, un pair, un impair, avec p > q et ne partageant aucun facteur commun. Par exemple, le triplet primitif (3,4,5) est obtenu en posant p = 2 et q = 1. Sa démonstration n'utilisait que les principes de base de l'arithmétique mais était quelque peu compliquée.

En utilisant la théorie des NOMBRES COMPLEXES, cependant, le mathématicien suisse LEONHARD EULER a découvert dans les années 1700 une dérivation élémentaire de ce résultat :

> Supposons que a, b et c sont trois nombres entiers satisfaisant l'équation $a^2 + b^2 = c^2$. Écrivez $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$. Puisque tout nombre complexe

Machine Translated by Google

a une racine carrée, il faut que a +
ib est égal à (p + iq) 2 pour un nombre complexe
p + iq. On a a + ib = (p + iq) $^2 = p^2 2 - q +$
2pqi, d'où il résulte que a = p $^2 –q _^2$
et b = 2pq. Aussi, c $^2 2 = un + b 2 = (p^{22}–q _)^2 +$
$(2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$ donnant c = p $^2 + q^2$. Un
vérifie maintenant que les nombres p et q doivent être
entiers avec les propriétés indiquées.

(Pour terminer la dernière étape, écrivez les nombres entiers $(p^2 + q^2)$ $+ (p^{22}–q _) = 2p 2$ et $(p^2 + q^2) – (p^{22}–q _) = 2q^2$ chacun comme un produit de nombres premiers. Utilisez ceci pour montrer que si p et q ne sont pas eux-mêmes entiers, alors le triplet obtenu n'est pas primitif.)

Tout triplet de Pythagore (a,b,c) est une solution de équation $\left(\frac{un}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 =$. Ainsi, par exemple, $1 \quad \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ est un point sur le CERCLE UNITAIRE $x^{2\,2+y} = 1$ avec rationnel coordonnées, comme le sont $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}$ et $\frac{4961}{8161}, \frac{6480}{8161}$. Ce il y a une infinité de triplés pythagoriciens que le cercle unitaire passe par une infinité de points dans le plan avec les coordonnées rationnelles x et y.

Une étude des FRACTIONS CONTINUES donne une méthode alternative pour générer des triplets de Pythagore. Si (a,b,c) est un triplet (primitif) dont les "jambes" a et b diffèrent par k, alors (2a + b + 2c, a + 2b + 2c, 2a + 2b + 3c) est un nouveau triplet (primitif) avec des jambes qui diffèrent également par k. Par exemple, du triplet (3,4,5), dont les deux premiers termes diffèrent de un, on obtient les nouveaux triplets

(3,4,5) → (21,20,29) → (119,120,169) →…

D'après (5,12,13), dont les deux premiers termes diffèrent de sept, on obtient les nouveaux triplets

(5,12,13) → (55,48,73) → (297,304,425) →…

Cette procédure produira tous les triplets (primitifs) avec des jambes qui diffèrent d'une quantité donnée k.

Bien qu'il existe une infinité de solutions entières à l'équation $a^2 + b 2 = c^2$, Le dernier théorème de Fermat montre qu'il n'y a pas de solutions non nulles au com n pour n équations du panion $a^n + b n = c > 2$.
courbes données par $x^n n + y = 1$ donc ne passe jamais par points de coordonnées rationnelles.

Machine Translated by Google

Q

QED L'abréviation QED est l'abréviation de quod erat demonstrandum, latin pour « qui devait être démontré ». EUCLIDE du troisième siècle avant notre ère a écrit le équivalent grec de cette phrase à la fin de chacun de ses preuves pour indiquer que sa conclusion avait été atteinte. De nombreux mathématiciens suivent encore cette tradition.

Les initiales QEF, pour quod erat faciendum (qui devait être fait), sont parfois ajoutés après l'achèvement d'une construction géométrique, et QEI, pour quod erat inveniendum (qui devait être trouvé), après la réalisation d'un calcul.

quadrant Dans un système de COORDONNEES CARTESIENNES, les deux axes de coordonnées divisent le plan en quatre régions appelées quadrants. Par convention, les quadrants sont numérotés, le premier quadrant étant celui au-dessus de l' axe des x et à droite de l' axe des y (c'est la région dans laquelle x et y sont positifs), et la deuxième, troisième et quatrième quadrants disposés dans le sens antihoraire autour de l'origine.

De nombreux textes de science-fiction populaires décrivent l'espace tridimensionnel comme étant divisé en quatre quadrants. C'est une mauvaise utilisation du terme.

Un quart de la circonférence d'un cercle est parfois appelé un quadrant, de même qu'un quart de l'intérieur d'un cercle (limité par deux rayons perpendiculaires).

Voir aussi OCTANT.

quadratic (quadric) Toute expression, fonction ou équation contenant des variables élevées à la seconde puissance, mais pas de puissance supérieure, est décrite comme quadratique. Ainsi, un polynôme quadratique, par exemple, est un POLY NÔME du second degré, et une équation quadratique est une équation formée en fixant un polynôme quadratique égal à zéro. Une telle équation a la forme ax2 + bx + c = 0 avec a, b et c soit des NOMBRES RÉELS ou COMPLEXES et un non nul.

Des équations quadratiques surviennent souvent lors du calcul les dimensions des rectangles. (Cela explique l'utilisation de le préfixe "quad" dans leur nom, dérivé du latin nom quattuor pour "quatre". Par exemple, dit qu'un un quadrilatère d'aire de 55 pi2 a une longueur de 6 unités de plus que sa largeur conduit à l'équation (donnée en termes de largeur inconnue x) x(x + 6) = 55 qui est la quadratique équation $x^2 + 6x - 55 = 0$. Égyptien antique et bébé érudits loniens de ca. 2000 avant notre ère ont été les premiers à faire face à des problèmes de ce type.

La technique de COMPLÉTER LE CARRÉ fournit une méthode simple pour résoudre toutes les équations quadratiques. Cela conduit également à la fameuse formule quadratique :

Une équation quadratique de la forme ax2 + bx + c = 0 avec a ≠ 0 a des solutions données par :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Par exemple, la formule quadratique montre que $x^2 + 6x - 55 = 0$ a des solutions x = 5 et x = –11. (Le positif solution fournit une réponse acceptable à notre problème quadrangle.)

Machine Translated by Google

La quantité b 2 –4ac est appelé le DISCRIMINANT de l'équation quadratique ax2 + bx + c = 0. La formule quadratique montre que si le discriminant est un nombre réel positif, alors l'équation a deux solutions réelles distinctes.
Si c'est zéro, alors l'équation n'a qu'une racine (double), et si le discriminant est un nombre réel négatif, alors il n'y a pas de solutions réelles à l'équation. (Il existe cependant deux solutions complexes distinctes.) Étant donné deux nombres r1 et r2 , – (r1 + r2)x + r1 r2 = 0 est une équation quadratique avec ces deux nombres comme solutions.
En général, la formule quadratique montre que les deux racines d'une équation quadratique ax2 + bx + c = 0 ont pour somme $-\frac{b}{a}$ et produit $\frac{c}{a}$.

Une fonction quadratique est une fonction de la forme f(x) = ax2 + bx + c avec a ≠ 0. Si les constantes a, b et c sont des nombres réels, alors le graphique d'une fonction quadratique est une PARABOLE, CONCAVE VERS LE HAUT si a est positif et concave vers le bas si a est négatif. Réécriture de l'équation comme suit :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

montre que, si a est positif, la fonction quadratique a b valeur minimale lorsque x = – (Si a est négatif, alors ce 2a produit une valeur maximale pour la fonction.) Le point $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ représente le sommet de la parabole. Le graphique croise deux fois l' axe des abscisses si l'équation quadratique f(x) = ax2 + bx + c = 0 a deux solutions réelles, touche l' axe des abscisses à un tournant si les deux solutions sont égales, et ne croise pas les l'axe des x du tout s'il n'y a pas de solutions réelles.

Les élèves du secondaire apprennent souvent à résoudre des équations quadratiques par un processus de factorisation. On note que le produit de deux termes linéaires Ax + B et Cx + D donne un quadratique

$$(Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + (AD + BC)x + BD$$

avec les coefficients a = AC, b = AD + BC et c = BD.
Ici b est une somme de deux facteurs du produit ac. Cela suggère la procédure suivante :

Pour résoudre une équation quadratique ax2 + bx + c = 0, sélectionnez deux facteurs p et q du produit ac dont la somme est b. (Cela donne pq = ac et p + q = b.) Réécrivez l'équation quadratique comme

$$ax^2 + px + qx + c = 0$$

et effectuer l'algèbre pour factoriser l'équation. Commencez par sélectionner un facteur commun aux deux premiers termes, ax2 et px, et un facteur commun aux deux derniers termes, qx et c.

Par exemple, pour résoudre $8x^2 + 2x - 3 = 0$, on cherche deux facteurs de –24 dont la somme est égale à deux. Ceci suggère les facteurs –4 et 6. En réécrivant, on obtient :

$$8x^2 + 2x - 3 = 8x^2 - 4x + 6x - 3 =$$
$$4x(2x - 1) + 3(2x - 1) = (4x + 3)(2x - 1)$$

Il est maintenant clair que l'équation quadratique $8x^2 + 2x - 3 = (4x + 3)(2x - 1) = 0$ a des solutions $x = -\frac{3}{4}$ et $x = \frac{1}{2}$.

Il est surprenant que si a, b et c sont des nombres entiers, cette méthode ne produira jamais de coefficients fractionnaires. On peut expliquer pourquoi c'est le cas en utilisant des techniques de la THÉORIE DES NOMBRE :

Étant donné une expression quadratique ax2 + bx + c à coefficients entiers, et des entiers p et q avec pq = ac et p + q = b, soit d le PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN de a et p, et e le plus grand diviseur commun de q et c. Alors les nombres $\frac{p}{d}$ et $\frac{q}{e}$ sont des entiers qui n'ont pas de point commun facteurs. Il en est de même pour $\frac{a}{p/d}$ et $\frac{c}{q/e}$. Depuis $\frac{a}{p/d} = \frac{q/e}{c/e}$ ac = pq on a d/e . La fraction $\frac{a}{p/d}$ est présenté sous forme réduite, tout comme la fraction q/e c/ . Puisqu'il s'agit de la même fraction réduite, e leurs numérateurs et dénominateurs correspondent. Par conséquent, $\frac{p}{d} = \frac{q}{e}$ et l'expression $\frac{a}{d} = \frac{c}{e}$. Affacturage quadratique donne maintenant :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + px + qx + c$$

$$= dx\left(\frac{a}{d}x + \frac{p}{d}\right) + e\left(\frac{q}{e}x + \frac{c}{e}\right)$$

Machine Translated by Google

$$= dx \left(\frac{a}{d}x + \frac{c}{e}\right) + e\left(\frac{a}{d}x + \frac{c}{e}\right)$$

$$= (dx + e)\left(\frac{a}{d}x + \frac{c}{e}\right)$$

Il s'agit d'une factorisation à coefficients intégraux.

Pour l'expression quadratique $8x^2 + 2x - 3$, nous choisi p = –4 et q = 6. Alors d = pgcd(8,–4) = 4 et e = pgcd(–3,6) = 3, donnant à nouveau la factorisation $(4x + 3)\left(\frac{8}{4}x + \frac{-3}{3}\right) = (4x + 3)(2x - 1)$.

Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré deux. Par exemple, ax2 + bxy + cy2 est un quadratique forme en deux variables. Une courbe quadratique est une courbe donnée par une équation algébrique du second degré. Pour exemple, un CERCLE, donné par une équation de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, est une courbe quadratique.

Voir aussi HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET DE L'ALGÈBRE (essai).

quadrilatère (quadrilatère, tétragone) N'importe quel POLYGONE à quatre côtés s'appelle un quadrilatère. Par exemple, tout CARRE, TRAPEZE ou PARALLELOGRAMME est un quadrilatère. Les cerfs-volants et les deltoïdes sont des quadrilatères dont les côtés adjacents sont égaux deux à deux.

Si p et q sont les longueurs des diagonales d'un quadrilatère convexe, et θ est l'angle entre eux, alors la SURFACE du quadrilatère est donnée comme la somme des aires des quatre triangles qu'ils créent :

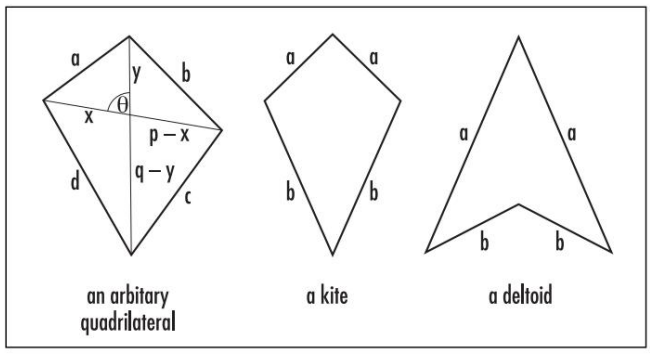
$$\text{zone} = \frac{1}{2}xy\sin(\theta) + \frac{1}{2}x(q-y)\sin(\theta) + \frac{1}{2}(q-y)(p-x)\sin(180^\circ - \theta) + \frac{1}{2}(p-x)y\sin(180^\circ - \theta)$$

$$= \frac{1}{2}pq\sin(\theta)$$

Appliquer la LOI DES COSINS à chacun des quatre triangles et la sommation donne la deuxième équation :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2pq\cos(\theta).$$

(Ici a, b, c et d sont les longueurs des côtés du quadrilatère comme indiqué dans le diagramme.) Résolution de sin(θ) dans



Quadrilatères

la première équation et pour cos(θ) dans la seconde et en remplaçant dans l'équation cos2 (θ)+sin2 (θ) = 1, un l'identité standard en TRIGONOMÉTRIE, donne une version de la FORMULE DE BRETSCHNEIDER pour l'aire d'un quadrilatère:

$$\text{zone} = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}$$

Des arguments analogues montrent que ces deux formules pour la zone de maintien pour les quadrilatères concaves également.

Un quadrilatère est dit quadrilatère cyclique s'il est un POLYGONE CYCLIQUE, c'est-à-dire si ses quatre sommets reposent sur un cercle. Une conséquence des THÉORÈMES DU CERCLE montre que les angles intérieurs opposés d'un quadrilatère cyclique somme à 180°. L'aire d'un quadrilatère cyclique est donnée par la FORMULE DE BRAHMAGUPTA .

Chaque quadrilatère, quelle que soit sa forme, fournit un TESSELLATION du plan, c'est-à-dire des copies de n'importe quel la tuile quadrilatérale peut être utilisée pour couvrir tout le plan sans chevauchement.

Voir aussi CONCAVE/CONVEXE ; THÉORÈME DE PTOLÉMÉE .

quantificateur En anglais, nous rencontrons fréquemment des énoncés contenant les mots all, some et no (or aucun). Ces mots sont appelés quantificateurs. Par exemple, "Tous les livres de mathématiques sont ennuyeux", "Certains lacs contiennent l'eau douce » et « Aucun poète ne joue de l'alto » sont des énoncés quantifiés.

Les mathématiciens réduisent toutes les déclarations quantifiées à deux formes standard en utilisant soit le quantificateur universel : « pour tous », noté $\forall$, ou le quantificateur existentiel : « il existe », noté $\exists$. Par exemple, la déclaration

Machine Translated by Google

que tous les nombres naturels de la forme 2n + 1 sont impairs est écrit:

$$\text{UN}\ n,\ 2n + 1 \text{ est impair}$$

qu'il existe un entier naturel n satisfaisant n × n = n + n s'écrit :

$$n : n \times n = n + n$$

(un deux-points est généralement lu comme "tel que"), et qu'il n'y a pas de nombre naturel n satisfaisant n × n × n = n + n + n comme :

$$\neg(\ \ n : n \times n \times n = n + n + n)$$

Voir aussi ARGUMENT ; NÉGATION.

équation quartique (équation biquadratique) Toute équation POLYNOMIALE de degré quatre de la forme ax4 + bx3 + cx2 + dx + e = 0 avec a ≠ 0 est appelée équation quartique.

Le savant italien LUDOVICO FERRARI (1522-1565), assistant de GIROLAMO CARDANO (1501-1576), fut le premier à trouver une formule arithmétique générale qui résoudrait x dans n'importe quelle équation quartique. Sa méthode a été publiée par Cardano dans l'œuvre épique de 1545 Ars magna (Le grand art). Le mathématicien français RENÉ DESCARTES (1596-1650) a également trouvé une méthode de solution, que nous décrivons brièvement ici.

En divisant par le coefficient dominant a, on peut supposer que l'on travaille avec une quartique de la forme :

$$\text{fois}^4 + Bx3 + Cx2 + Dx + E = 0$$

pour les nombres $B = \frac{b}{\text{un}}$, $C = \frac{c}{\text{un}}$, $\text{ré} = \frac{d}{\text{un}}$, et $E = \frac{e}{\text{un}}$.

Substituer x = y - $\frac{B}{}$ simplifie l'équation 4 en une sans terme cubique :

$$\text{ans}^4 + py2 + qy + r = 0$$

Cette forme de quartique est appelée quartique réduite, et toute solution y de cette équation correspond à une solution x = y – $\frac{b}{}$ de l' équation originale 4a .

Supposons que la quartique réduite puisse être factorisée comme suit, pour un choix approprié de nombres λ, m et n :

$$\text{ans}^4 + py2 + qy + r = (y^2 + \lambda y + m)(y^2 - \lambda y + n)$$

CROCHETS D'EXTENSION et COEFFI D'EQUATION CIENTS donne par conséquent les équations :

$$nmp + = + \lambda^2$$

$$nm = \frac{}{q\ \lambda}$$

$$nm\ r =$$

La sommation des deux premières équations donne n = $\frac{p\ q + \lambda^2 \frac{}{}}{\lambda\ ;\ \text{les}\ 2}$ soustraire donne m = $\frac{p\ q + \lambda^2 \frac{}{}}{\lambda\ ;\ \text{et en}\ 2}$ remplaçant dans le troisième donne, après quelques travaux algébriques, une équation cubique uniquement en fonction de λ^2 :

$$(\lambda^2)^3 + 2p(\lambda^2)^2 + (p^2 - 4r)(\lambda^2) - q^2 = 0$$

LA FORMULE DE CARDANO peut maintenant être utilisée pour résoudre pour λ^2 et donc pour λ, m et n. Ainsi solutions de l'équation quartique :

$$\text{ans}^4 + py2 + qy + r = (y^2 + \lambda y + m)(y^2 - \lambda y + n) = 0$$

peut maintenant être trouvée en résolvant $y^2 + \lambda y + m = 0$ et $y^2 - \lambda y + n = 0$ en utilisant la formule QUADRATIC .

Cette méthode, en principe, est simple, mais très difficile à mettre en pratique. Il montre cependant que, si l'on a la patience, on peut en effet écrire une formule pour la solution d'une équation quartique ax4 + bx3 + cx2 + dx + e = 0 en utilisant uniquement les nombres a, b, c, d , et e, et leurs racines.

Au cours des années 1700, il y avait un grand désir de trouver une formule similaire pour la solution de la quintique (équation du degré cinq). LEONHARD EULER (1707-1783) a tenté de trouver une telle formule, mais a échoué. Il soupçonnait que la tâche était peut-être impossible.

Dans une série d'articles publiés entre les années 1803 et 1813, le mathématicien italien Paolo Ruffini (1765-1822) a développé un certain nombre de résultats algébriques qui suggèrent fortement qu'il ne peut y avoir de procédure pour résoudre une équation générale du cinquième degré ou plus dans un nombre fini d'étapes algébriques. Cette affirmation a en effet été prouvée correcte quelques années plus tard par Norwegian

Machine Translated by Google

mathématicien NIELS HENRIK ABEL (1802-1829). Ainsi, bien qu'il existe une formule quadratique pour résoudre les équations de degré deux, la formule de Cardano pour résoudre les équations de degré trois et les méthodes de Ferrari et de Descarte pour résoudre les équations de degré quatre, il n'y aura jamais de formule générale pour résoudre toutes les équations de degré cinq. ou plus.

Bien sûr, certaines équations de degré cinq peuvent être algébriquement. (Équations de la forme $x^5 - a = 0$, par exemple, ont des solutions $x = \sqrt[5]{a}$.) En 1831, le mathématicien français ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) a complètement classé les équations qui peuvent être ainsi résolues. Les travaux qu'il a menés ont donné naissance à une toute nouvelle branche des mathématiques, aujourd'hui appelée THÉORIE DES GROUPES.

quartile Voir CENTILE.

quaternions Le produit de deux NOMBRES RÉELS non nuls n'est jamais nul, pas plus que le produit de deux NOMBRES COMPLEXES non nuls. On dit que ces deux ensembles de nombres sont des algèbres de division. Puisque chaque nombre complexe a+ib correspond à un point (a,b) dans le plan R2 , la multiplication , com des nombres de plex permet de définir une multiplication dans R2 qui fait de R2 une algèbre à division :

$$(a,b) \times (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

(Remarquez que la multiplication "évidente" donnée par (a,b) × (c,d) = (ac,bd) n'est pas satisfaisante : (1,0) × (0,4), par exemple, donne la réponse zéro .)

Au début du 19e siècle, WILLIAM ROWAN HAMIL TON (1805-1865) se demanda s'il existait une multiplication appropriée pour R3 , ce qui en ferait également une algèbre de division. Malgré tous ses efforts, il n'a jamais été en mesure de proposer une définition appropriée.

En cours de route, cependant, Hamilton a pu fournir une règle de multiplication appropriée pour R4 via l'invention d'un nouveau système de numération appelé les quater nions. Ceux-ci sont constitués des nombres réels ainsi que de trois nouveaux symboles i, j, k, qui, comme la racine carrée de –1, vérifient les relations :

$$je^2 = j^2 = k^2 = -1$$

avec:

$$je \times j = kj \qquad j \times je = -kk$$
$$\times k = je \qquad \times j = -i$$
$$k \times je = j \qquad je \times k = -j$$

Un élément typique des quaternions apparaît comme:

$$a + bi + cj + dk$$

où a,b,c et d sont des nombres réels. La multiplication de deux quaternions est définie par la PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE et les relations décrites ci-dessus. Par exemple,

$$(2 + je) \times (3 + 3j + k) = 6 + 6j + 2k + 3i + 3k - j = 6 + 3i + 5j + 5k$$

Hamilton a pu montrer que les quaternions sont une algèbre de division. Remarquez qu'ils ne satisfont pas la PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE : l'ordre de multiplication affecte la réponse. Par exemple, i × j est différent de j × i.

Dans les années 1950, les mathématiciens ont prouvé que Rn est une algèbre de division uniquement pour n égal à 1, 2, 4 ou 8. Ce sont les nombres réels, les nombres complexes, les quater nions et un autre système appelé les nombres de Cayley (également appelés les octonions). Ces systèmes de numérotation étendus sont parfois appelés numéros hypercomplexes.

Quételet, Lambert Adolphe Jacques (1796-1874)
Statistique flamande , astronomie Né le 22 février 1796 à Gand, en Belgique, Adolphe Quételet est souvent désigné par les historiens des mathématiques comme le père de la statistique moderne. Bien que mathématicien et astronome de formation, Quételet est connu pour son travail de pionnier dans la collecte de données statistiques et son utilisation pour tester les points de vue traditionnels sur des questions de médecine et de criminologie. Son nouveau domaine de « mécanique sociale » a profondément influencé la pensée européenne en sciences sociales.

Élevé à Gand, en Belgique, Quételet a obtenu un doctorat en mathématiques de l'Université de Gand en 1819, après avoir rédigé une thèse sur la théorie des SECTIONS CONIQUES. Après avoir enseigné les mathématiques pendant quatre ans, il s'installe à Paris en 1823 pour entreprendre des études d'astronomie. Au cours de ce travail, il a été initié à la discipline de la théorie des PROBABILITÉS et aux méthodes statistiques particulières que les astronomes utilisaient pour obtenir des mesures précises des phénomènes physiques.
Il commença à se demander si les mêmes techniques s'appliquaient aux affaires humaines. Pour tester cette idée, il a entrepris une étude des données des archives gouvernementales pour analyser la cohérence numérique des crimes. Ce travail a recueilli

Machine Translated by Google

beaucoup d'attention et a stimulé des discussions générales sur la nature du libre arbitre par rapport au déterminisme social. Il poursuit son travail d'analyse de la criminalité puis étendu pour analyser la mortalité, le physique humain et problèmes sociaux. Ce travail a suscité beaucoup de controverse chez les sociologues de l'époque.

Quételet en vint à percevoir la valeur moyenne d'un qualité physique ou mentale humaine, ou d'une qualité générale caractéristique sociétale, comme un « idéal » tangible et réel que la nature essaie de créer, et il a fait valoir que le fait que des individus spécifiques suivent rarement ces normes est à prévoir comme écart statistique habituel. Ses analyses des phénomènes sociaux étaient certainement mathématiquement sophistiqué et lui a beaucoup valu respect en tant que chercheur. Néanmoins, beaucoup de ses les idées étaient controversées. En 1835, il publie un compte rendu détaillé de sa nouvelle science sociale à Sur l'homme et le développement de ses facultés, essai d'une physique sociale (Traité de l'homme, et développement de ses facultés), qui, entre autres choses, a détaillé «l'homme moyen».

L'indice de Quételet (QI) utilisé aujourd'hui, aussi appelé que l'indice de masse corporelle (IMC), est dérivé de L'oeuvre de Quételet. Cet indice d'obésité est défini par la formule:

$$QI = \frac{\text{poids en kilogrammes}}{(\text{hauteur en mètres})^2} = \frac{704 \times \text{poids en livres}}{(\text{hauteur en pouces})^2}$$

Un individu avec une valeur QI supérieure à 30 est considéré comme obèse.

Quételet est décédé à Bruxelles, en Belgique, le 17 février 1874. Il a eu un effet profond sur le développement de statistiques de travail et la mise en forme de l'étude des science. Florence Nightingale considérait son travail de la stature d'une « nouvelle bible ».

Voir aussi HISTOIRE DES PROBABILITÉS ET STATISTIQUES (essai).

quotient En THÉORIE DES NOMBRES et en ARITHMÉTIQUE, le le résultat de la division d'un entier par un autre s'appelle le quotient. Il peut y avoir ou non un reste.
Par exemple, 13 divisé par 4 donne un quotient de 3 et un reste de 1. En général, le quotient d'un entier a divisé par b est un entier q tel que a = bq + r, où r est un nombre entier avec $0 \le r < q$. Le le quotient peut être calculé à l'aide du plancher fonction: $q = \frac{a}{b}$

En dehors de l'arithmétique des nombres entiers, un quotient est signifie simplement le résultat de la division de a par b (et donc la question des restes est discutable). Par exemple, le quotient de $\sqrt{48}$ et 3 est $\sqrt{48}/3 = \sqrt{48/3} \approx 2.309$.

Le polynôme quotient de deux polynômes p(x) et q(x) est un polynôme Q(x) tel que p(x) = Q(x)q(x) + R(x) pour un polynôme R(x) de degré inférieur à celui de q(x). Par exemple, en divisant $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 5$ par $q(x) = x^2 + 2x + 1$ donne un quotient de $Q(x) = x^2 + 1$ et un reste de R(x) = x + 3 :

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 5 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 1) + (x + 3)$$

Un tel calcul peut être accompli par le processus de DIVISION LONGUE.

En calcul, la RÈGLE QUOTIENT fournit un moyen pour différencier le rapport de deux fonctions.

Voir aussi ALGORITHME EUCLIDEEN ; SOL/PLAFOND/ FONCTIONS DE PARTIE FRACTIONNELLE ; ARITHMÉTIQUE MODULAIRE; THÉORÈME DU RESTE ; DIVISION SYNTHÉTIQUE.

règle du quotient La DÉRIVÉE du quotient de deux fonctions est donnée par la règle du quotient :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Par exemple, nous avons $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$. La règle peut être prouvée en utilisant à la fois la RÈGLE DU PRODUIT et la RÈGLE DE LA CHAÎNE : simplement pensez à la quantité $\frac{f(x)}{g(x)}$ comme le produit : $f(x)\cdot(g(x))^{-1}$.
Par conséquent:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = f'(x)(g(x))^{-1} + f(x)(-1)(g(x))^{-2}g'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Machine Translated by Google

$$= \frac{\text{eff}(\text{et})}{g(x)} + f(x)g(x)^{-2}\,g'(x)$$

$$= \frac{\text{eff}(\text{et})}{g(x)} - \frac{\text{eff}(\text{et})\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

qui est la formule de la règle du quotient. C'est beaucoup plus facile juste pour utiliser les règles du produit et de la chaîne pour tout problème à portée de main plutôt que de mémoriser la règle du quotient formule.

Machine Translated by Google

R

mesure en radian Voir ANGLE.

rayon de convergence Voir POWER SERIES.

Ramanujan, Srinivasa Aiyangar (1887–1920) Indien Théorie des nombres Né le 22 décembre 1887 à Erode, État du Tamil Nadu, Inde, Srinivasa Ramanujan est considéré comme l'un des plus grands génies mathématiques de l'Inde. Avec un talent inexplicable pour gérer les SÉRIES et les FRACTIONS CONTINUES, Ramanujan a apporté des contributions significatives au domaine de la THÉORIE DES NOMBRE et a proposé toute une série de formules nouvelles et fondamentalement importantes qui ont depuis trouvé des applications dans de nombreuses branches différentes de la science. On se souvient également de lui pour sa célèbre collaboration avec le grand mathématicien britannique GODFREY HAROLD HARDY (1877-1947).

Ramanujan a excellé dans le domaine des mathématiques au cours de ses premières années d'école. Adolescent, il est tombé sur un petit texte de mathématiques de GC Carr intitulé Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics.
Écrit dans un style concis et n'étant guère plus qu'une liste de 5 000 formules mathématiques, équations et résultats, sans preuves ni explications, Ramanujan a pris sur lui de travailler sur chaque résultat et d'en fournir sa propre explication. À partir de ce moment, Ramanujan ne s'intéressa qu'aux mathématiques. À l'âge de 17 ans, il avait mené ses propres recherches sur les propriétés de la SÉRIE HARMONIQUE et avait calculé la CONSTANTE D'EULER à 15 décimales près.

En 1904, Ramanujan a remporté une bourse pour fréquenter le Government College de Kumbakonam, mais elle a été révoquée l'année suivante parce qu'il a consacré tout son temps aux mathématiques et a négligé ses autres cours.
Il a fréquenté un autre collège à Madras, mais n'a jamais obtenu son diplôme, encore une fois pour ne pas avoir suivi ses cours non mathématiques.

En tant qu'érudit autodidacte, Ramanujan a commencé à publier des résultats dans le Journal of the Indian Mathematic Society. Son brillant article de 1911, « Quelques propriétés des nombres de Bernoulli », sur les NOMBRES DE BERNOULLI lui a valu une attention nationale. Pendant ce temps, Ramanujan subvenait à ses besoins en tant que commis dans un bureau de comptabilité.

Ramanujan s'est vite rendu compte qu'il travaillait à un niveau mathématique qui dépassait l'expertise de quiconque qu'il connaissait en Inde. Encouragé par des amis, il a commencé à écrire aux mathématiciens en Angleterre pour obtenir des conseils. Le célèbre théoricien des nombres Godfrey Hardy du Trinity College de Cambridge, a reçu l'une des lettres de Ramanujan et a été convenablement impressionné par le contenu mathématique qu'elle contenait. En 1914, Hardy amena Ramanujan en Angleterre et commença ainsi leur extraordinaire collaboration.

Hardy a été impressionné par la nature intuitive du travail de Ramanujan. Sans éducation mathématique formelle, Ramanujan n'avait qu'une vague idée de ce qui constituait une preuve mathématique, mais avait néanmoins un sens interne profond de la vérité mathématique et une compréhension étonnante du fonctionnement des nombres.
Une histoire amusante, par exemple, prétend que Hardy

Machine Translated by Google

une fois mentionné à Ramanujan que le numéro du taxi qu'il avait monté ce jour-là était de 1 729, un nombre qu'il pensait être "plutôt ennuyeux". Ramanujan a immédiatement répondu, au contraire, que 1 729 n'est pas du tout ennuyeux, étant le premier de tous les entiers positifs qui peuvent être écrits comme la somme de deux cubes de deux manières différentes. En un instant, Ramanujan s'est en quelque sorte rendu compte que 1 729 est égal à la fois à 123 + 13 et à 103 + 93 et qu'aucun autre nombre inférieur à 1 729 n'a cette double , propriété.

Au cours des 5 années qu'ils ont passées ensemble en Angleterre, Hardy et Ramanujan ont produit un certain nombre de résultats fondamentalement importants en théorie des nombres. Leurs travaux les plus remarquables portaient sur la théorie des PARTITIONS. Pendant ce temps, Ramanujan a obtenu un baccalauréat ès sciences par diplôme de recherche (l'équivalent d'un doctorat) de Cambridge, a été élu membre de la ROYAL SOCIETY de Londres - l'organisme scientifique le plus prestigieux d'Angleterre - et également membre de Trinity Collège.

Malheureusement, Ramanujan souffrait d'une santé extrêmement mauvaise. Après avoir développé la tuberculose, Ramanujan retourna en Inde en 1919 mais mourut 1 an plus tard le 26 avril 1920.

Ramanujan a laissé derrière lui un certain nombre de cahiers inédits remplis de théorèmes et d'affirmations que les mathématiciens ont continué à étudier. Le professeur de mathématiques George Neville Watson (1886-1965) a étudié les cahiers et publié 14 articles, tous sous le titre de Theorems Stated by Ramanujan. Il a également publié 30 articles supplémentaires, tous inspirés du travail de Ramanujan.

nombres aléatoires Une séquence de nombres ayant la propriété qu'aucun nombre suivant dans la séquence ne peut être prédit à partir des éléments précédents est dite aléatoire. Une telle séquence ne suit aucun schéma régulier ou répétitif. Si les nombres répertoriés proviennent d'un pool fini de candidats possibles (par exemple, des nombres à un chiffre de 0 à 9), alors la LOI DES GRANDS NOMBREUX affirme que, à long terme, chaque nombre de ce pool devrait apparaître aussi souvent.

La méthode traditionnelle pour générer des nombres aléatoires consiste à tirer des boules numérotées d'un conteneur.

Il n'est pas possible de générer des quantités vraiment aléatoires avec un ordinateur - tout programme est un ensemble prédéterminé d'instructions - mais il est possible de créer une liste de nombres qui semblent être aléatoires. Les nombres ainsi générés sont appelés pseudo-aléatoires. Le suivi ing sont deux méthodes populaires pour générer des nombres pseudo-aléatoires.

Méthode du carré moyen

Développé en 1946 par JOHN VON NEUMANN (1903–57) et ses collègues alors qu'ils travaillaient sur le Manhattan Projet aux laboratoires de Los Alamos, la méthode du carré du milieu fonctionne comme suit :

1. Sélectionnez un numéro à quatre chiffres qui sera le premier numéro de la séquence. (Ce nombre est appelé la graine de l'algorithme.)
2. Mettez ce nombre au carré pour obtenir un nombre à huit chiffres. (Ajoutez un zéro non significatif si nécessaire.)
3. Utilisez les quatre chiffres du milieu de ce numéro à huit chiffres comme numéro suivant dans la séquence. Répéter.

Le résultat qui apparaît est une liste apparemment aléatoire de nombres entre 0 et 9999. Par exemple, en commençant par la graine 7254, nous obtenons la séquence 6205, 5020, 2004, 1601, 6320, 9424, 8117, … Malheureusement, la méthode du carré du milieu peut produire des suites d'entiers qui tendent vers zéro. Par exemple, en commençant par la graine 1049 on obtient la séquence 1049, 1004, 80, 64, 40, 16, 2, 0, 0, 0,…

Méthode de congruence linéaire

Développée par DH Lehmer en 1951, la méthode de congruence linéaire utilise l'ARITHMÉTIQUE MODULAIRE pour générer une liste de nombres pseudo-aléatoires. Cela fonctionne comme suit :

1. Sélectionnez trois nombres fixes a, b et m, et une valeur initiale x0 (la graine).
2. Étant donné un nombre xn dans la séquence, le nombre suivant xn+1 dans la liste est obtenu en multipliant xn par a, en ajoutant b et en prenant le reste de la division par m :

$$x_{n+1} = ax_n + b \pmod{m}$$

Par exemple, en prenant a = 2, b = 3 et m = 10, avec germe = 1, produit la séquence 1, 5, 3, 9, 1, 5, 3, 9, 1, x0 , … ., qui, malheureusement cycles et est loin d'être pseudo-aléatoire. Bien qu'il ne soit pas possible d'éviter le cyclage avec cette méthode, on peut choisir une valeur extraordinairement grande pour m de sorte que la longueur du cycle produit soit extrêmement longue, et la répétition des nombres ne sera pas rencontrée dans une vie. (Cela crée un

Machine Translated by Google

deuxième problème, cependant, en ce que dans un véritable hasard séquence, les nombres apparaissent en effet plus d'une fois, ce qui est évité ici.) De nombreux ordinateurs utilisent aujourd'hui cette méthode avec le choix m = 231 .

Les nombres pseudo-aléatoires générés par ordinateur sont utilisé dans STATISTICS pour aider à faciliter un échantillonnage impartial d'une POPULATION.

Voir aussi EXEMPLE.

variable aléatoire Voir DISTRIBUTION.

marche aléatoire Dans la théorie de la mécanique statistique, une marche aléatoire est le chemin tracé par une particule en formant une séquence d'étapes unitaires dans laquelle la direction de chaque étape est choisi au hasard. Par exemple, le gaz molécules secouant au hasard dans l'espace sont effectuant efficacement des opérations aléatoires tridimensionnelles des promenades. (Leur mouvement résultant est appelé brownien mouvement, qui peut être utilisé pour expliquer la diffusion.)

Un enfant debout sur un trottoir peut effectuer une marche aléatoire unidimensionnelle en faisant des pas en arrière et en avant selon les résultats du lancer d'une pièce de monnaie (par exemple, "face" signifie un pas en avant d'un pas, "face" un pas reculer d'un pas). Un autre enfant debout dans une grille infi nie de carrés exécute une marche aléatoire bidimensionnelle en faisant un pas d'un endroit vers le nord, le sud, l'est ou ouest selon les jets d'un dé à quatre faces (ou d'un dé ordinaire si les jets de 5 et 6 sont ignorés).

Les joueurs qui parient 1 $ à la fois dans un casino effectuent effectivement des marches aléatoires - le contenu de leur les portefeuilles augmentent et diminuent de façon aléatoire, un unité à la fois.

Nous pouvons nous demander quelles sont les chances qu'un joueur finira par perdre tout son argent? (Ou de manière équivalente, quelle est la probabilité qu'une particule une marche aléatoire unidimensionnelle finira par se déplacer une place derrière "start" ?)

Cette probabilité peut être calculée comme suit. Supposons que le joueur ait N dollars en main et, à chaque tour de jeu, a 50 % de chances de gagner 1 $ et 50 % de chances de perdre 1 $. Soit p le probabilité que le joueur n'aura finalement que N – 1 dollars en main.

Il y a deux façons pour un joueur de perdre ce dollar, soit tout de suite, soit de gagner 1 $ puis éventuellement perdre 2 $ plus tard. Ceci montre:

$$
\begin{aligned}
p &= P_{\text{(finira par perdre 1 \$)}} \\
&= P_{\text{(perdez 1 \$ tout de suite, OU gagnez 1 \$ ET plus tard perdre 2 \$)}} \\
&= P_{\text{(perdre 1 \$)}} + P_{\text{(gagner 1 \$)}} \\
&\quad \times P_{\text{(finira par perdre 2 \$)}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P_{\text{(perdez éventuellement 2 \$)}}
\end{aligned}
$$

Pour perdre 2 $, un joueur doit d'abord perdre 1 $, puis un autre. Ainsi:

$$
\begin{aligned}
&P_{\text{(éventuellement perdre 2 \$)}} \\
&= P_{\text{(éventuellement perdre 1 \$ ET éventuellement perdre un autre 1 \$)}} \\
&= p \times p
\end{aligned}
$$

On a donc l'équation : $(p - 1)2 = 0$, $p = \frac{1}{2} \frac{1}{2} p^2$, c'est, montrant que p = 1. C'est-à-dire avec certitude, un joueur finira par perdre 1 $, et puis un autre, puis un autre, jusqu'à ruine. Ce phénomène s'appelle la RUINE DU JOUEUR .

Le calcul ci-dessus montre que tous les marches aléatoires sionnelles (avec des chances égales de marcher vers l'arrière ou vers l'avant) finissent par revenir à leur position de départ. Les mathématiciens ont montré que les marches aléatoires bidimensionnelles (là encore avec des chances égales de marcher dans l'une des quatre directions) reviennent également éventuellement à leurs positions de départ avec une certitude absolue. Étonnamment, il n'y a que 34% de chances qu'une marche aléatoire tridimensionnelle aura pour la particule revient à sa position de départ.

Voir aussi FONCTION HARMONIQUE.

rang Dans STATISTICS, disposition d'un ensemble d'objets ou les valeurs DATA dans un ordre dicté par la magnitude ou l'importance d'une caractéristique s'appelle un classement des objets. Par exemple, la disposition de 20 hommes par ordre de hauteur est un classement, tout comme la disposition des 10 numéros du plus petit au plus grand. La position d'un objet dans une liste donnée par un classement est appelé le rang de L'object. Un classement pourrait être purement subjectif, comme

Machine Translated by Google

que le classement des tartes dans un concours de dégustation.
LA MÉTHODE DE SPEARMAN et LA MÉTHODE DE KENDALL peuvent être utilisé pour tester le degré d'association entre deux classements différents du même ensemble d'objets.

Dans la théorie MATRIX , le rang de ligne d'une matrice est le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes matrice possède, et son rang de colonne est le maximum nombre de colonnes linéairement indépendantes dont il dispose. Le processus d' ÉLIMINATION GAUSSIENNE montre que ces deux valeurs concordent toujours, et la valeur commune de ces deux rangs est appelé le rang de la matrice. Une matrice m × n est dit de plein rang si son rang est égal au plus petit de m et n. Une matrice carrée de rang plein est inversible.

Voir aussi MATRICE INVERSE ; CORRÉLATION DE RANG.

corrélation de rang Deux méthodes sont couramment utilisées pour déterminer si oui ou non deux schémas de classement sont bien assorti. Par exemple, lors d'un concours de pâtisserie, deux juges pourraient classer cinq tartes comme suit :

	Pomme	Myrtille	Cerise	Dewberry	Sureau
Juge 1	5	2	3	1	4
Juge 2	4	1	2	3	5

Si les juges suivaient des critères purement objectifs, et étaient libres de préférence personnelle dans leurs choix, alors on s'attendrait à deux choix de classement identiques. Si, d'autre part, les juges ont suivi des critères entièrement indépendants, voire aucun critère (au hasard attribuant des rangs), alors on s'attendrait à très peu corrélation entre les deux listes. Les résultats de ce la concurrence semble se situer quelque part entre ces deux extrêmes.

Coefficient de corrélation de rang de Kendall
En 1938, MG Kendall a développé une mesure de rang association donnée par une seule valeur numérique τ, en adoptant des valeurs comprises entre –1 et 1. Une valeur de 1 indique une correspondance parfaite des valeurs de rang ; une valeur de 0 indique aucune cohérence dans les affectations de grade ; et une valeur de –1 désaccord parfait (c'est-à-dire le premier choix d'un juge est le choix le moins favorisé de l'autre juge, et ainsi de suite.)
La valeur numérique τ est calculée en complétant la Etapes suivantes:

1. Réorganisez l'ordre des participants afin que les rangs rendus par le premier juge sont recevables.
2. En regardant maintenant uniquement la deuxième ligne, calculez le score de chaque participant. C'est le nombre de participants à sa droite le rang supérieur moins le nombre de entrants à sa droite de rang inférieur. (Le plus à droite participant se voit attribuer un score de zéro.)
3. Additionnez tous les scores. Appelez cette somme S.
4. Si le nombre de participants est n, alors le maximum somme possible est (n – 1) + (n – 2) +…+ 2 + 1 + 0 = 1– n(n -1). Coefficient de corrélation de rang de Kendall 2 est le rapport de S à cette somme maximale :

$$\tau = \frac{S}{\frac{n-n(\ )1}{2}}$$

Dans notre exemple, l'étape 1 de la procédure donne le tableau réorganisé :

	Dewberry	Myrtille	Cerise	Sureau	Pomme
Juge 1	1	2	3	4	5
Juge 2	3	1	2	5	4

Il y a deux entrants à droite de dewberry avec rang supérieur à 3 (sureau et pomme), et deux inférieure à 3 (myrtille et cerise), ainsi la dewberry a score 0. De même, les scores des tartes restantes sont : myrtille = 3 – 0 = 3, cerise = 2 – 0 = 2, sureau = 0 – 1 = –1, et pomme = 0. La somme totale des scores est S = 0 + 3 + 2 + (–1) + 0 = 4. La somme maximale possible est 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10. Ainsi, la corrélation de rang de Kendall coefficient ici est :

$$\tau = = \frac{4}{dix} \quad 0\ 4.$$

Cette valeur indique que les affectations de rang sont éventuellement incohérentes.

Coefficient de corrélation de rang de Spearman
Un coefficient de rang alternatif a été développé par Charles Spearman en 1904. Il est noté ρ, et est calculé en additionnant les différences au carré du rang

Machine Translated by Google

de chaque participant, puis en comparant le résultat avec la somme maximale possible.

Pour illustrer : dans l'exemple ci-dessus, la pomme a reçu des classements de 5 et 4. La différence de classement au carré est (5 - 4)2 = 12 = 1. De même, la différence de classement au carré pour la myrtille est (2 - 1)2 = 1 , et pour les secteurs restants, dans l'ordre alphabétique, (3 – 2)2 = 1, (1 – 3)2 = 4 et (4 – 5)2 = 1. La somme des cinq différences de rang au carré donne le score total : D2 = 1 + 1 + 1 + 4 + 1 = 8.

Avec n entrants, on peut montrer que le maximum somme possible est $\frac{n(\ )\ 2\ \uparrow\ n}{}$. Il se produit lorsque les rangs 3 attribuée par un juge sont dans l'ordre inverse des rangs attribués par le second. (Pour voir cela, observez comment la quantité D2 change lorsque les rangs de deux entrants sont inversés. Cela montrera que la quantité D2 est la plus grande lorsque, pour toute paire d'entrants, leurs rangs attribués sont dans l'ordre inverse.) Pour n = 5 , la somme maximale possible est de 40.

Le coefficient de corrélation de rang de Spearman est donné par :

$$\rho = - \quad 1\ 2\ \frac{D2}{\text{note maximale possible}}$$

Notez qu'une valeur ρ = 1 se produit lorsque D2 = 0, c'est-à-dire qu'il y a accord parfait. Une valeur ρ = –1 se produit lorsque D2 a la valeur maximale, c'est-à-dire un désaccord parfait.
Dans notre exemple, nous avons $\rho = 1 - 2 \cdot \frac{8}{40} = 0{,}6$. Cette valeur indique à nouveau un certain désaccord et une incohérence dans les deux schémas de classement.

taux de variation Voir CALCUL DIFFÉRENTIEL.

rapport La relation d'une quantité numérique à une autre exprimée sous forme de QUOTIENT de manière à indiquer leurs tailles relatives est appelée un rapport. Nous écrivons a:b pour le rapport d'une quantité a à une quantité b, ou, alternativement, exprimons le rapport comme une FRACTION a/b. Le premier terme d'un rapport a:b est appelé l'antécédent et le second terme le conséquent. Par exemple, le rapport de 10 à 4 s'écrit 10:4 ou 10/4, qui peut être simplifié en 5/2. (Ainsi, le nombre 10 est 2 1/2 fois plus grand que 4.) Ici, 10 est l'antécédent et 4 est le conséquent.

La valeur d'un rapport est inchangée si les deux termes du rapport sont multipliés ou divisés par la même quantité. Par exemple, 10:4, 30:12 et 2,5:1 sont équivalents ratios prêtés. Un rapport dont l'un des termes est égal à 1 est appelé rapport unitaire. Ainsi, 2,5:1, par exemple, est un rapport unitaire.

Si le rapport de deux variables y et x est constant, alors les deux variables sont dites PROPORTIONNELLES.
Par exemple, si y/x a une valeur constante k, alors il doit y avoir le cas où y = kx.

Dans la théorie des PROBABILITÉS , les CHANCES d'un jeu sont exprimées sous forme de ratio. Par exemple, si dans un jeu de hasard, un des résultats possibles est jugé favorable et les b résultats possibles restants défavorables, alors les chances favorables pour le jeu sont le rapport a:b. Ainsi, pour un jeu avec une cote favorable de 3 contre 2, par exemple, trois des cinq résultats sont jugés favorables et il y a 3/5, ou 60 %, de chances de gagner le jeu.

Un nombre qui peut être exprimé comme un rapport de deux nombres entiers est appelé un NOMBRE RATIONNEL. Tous les nombres ne sont pas rationnels. Le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE établit, par exemple, que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Le RATIO TEST est souvent utilisé pour déterminer la convergence d'une SÉRIE infinie.

Dans la théorie des VECTEURS, le théorème du rapport (également connue sous le nom de formule de section) énonce ce qui suit :

> Si un point P divise un segment de ligne AB dans le rapport a:b, alors le vecteur de position p de P est donné en fonction des vecteurs de position a et b de A et B, respectivement, par la formule :
>
> $$p = \frac{un+b\ un}{b+}$$

La notation de rapport pour les nombres peut être étendue pour indiquer les tailles relatives de plus de deux quantités.
Par exemple, le rapport a:b:c indique que le rapport de la première quantité à la seconde est a:b, que le rapport de la deuxième quantité à la troisième est b:c, et que le rapport de la première quantité à le troisième est a:c. Par exemple, les nombres 40, 80 et 200 sont dans le rapport 1:2:5.

Voir aussi NOMBRE D'OR.

fonction rationnelle (expression rationnelle) Toute fonction $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donnée comme un RATIO de deux polynômes p(x) et q(x) est appelée une fonction rationnelle. Une telle fonction est définie à toutes les valeurs x pour lesquelles q(x) ≠ 0. Par exemple, $f(x) = \frac{2\ 2\ 3 - + xx}{2x\ _{-}\ 4}$ est une fonction rationnelle de domaine

Machine Translated by Google

de toutes les valeurs réelles sauf x = 2 et x = –2. N'importe quel célibataire le polynôme p(x) peut être considéré comme la fonction rationnelle $\frac{p(x)}{1}$.

Si, pour une fonction rationnelle f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$, le nom inator q(x) est nul en x = a, alors la fonction a soit une ASYMPTOTE verticale en x = a ou une DISCONTINUITE AMOVIBLE en x = a. Dans ce dernier cas, il faut que le le numérateur p(x) est également nul en x = a. Par exemple, le 5 6 fonction rationnelle $\frac{x^2 - x + 6}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 3}$, bien que non défini à x = 3, égal à la fonction continue x – 2 à toutes les valeurs différentes de 3, et a donc un amovible discontinuité à ce point.

Si une fonction rationnelle f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$ tend vers une limite c comme x → ∞ ou comme x → –∞, alors la droite y = c est une asymptote horizontale pour f. Par exemple, la ligne y = 2 est un 6 5 asymptote horizontale de $\frac{x + 6}{3x - 2}$. (Ecrivez $\frac{6x + 5}{3x - 2} = \frac{x(6 + 5/x)}{x(3 - 2/x)} = \frac{6 + 5/x}{3 - 2/x}$. Cela se rapproche de la valeur $\frac{6}{3} = 2$ comme x → ±∞.)

Toute fonction rationnelle peut être réécrite en termes de FRACTIONS PARTIELLES.

Voir également FONCTION CONTINUE.

rationalisation du dénominateur Le processus d'élimination de tout terme de racine carrée dans le dénominateur d'un expression rationnelle, sans en changer la valeur expression, s'appelle rationaliser le dénominateur. Pour 1 exemple, la quantité peut être rationalisée par $\sqrt{2}$ multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$ pour obtenir : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En général, une expression de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

est rationalisé en multipliant par le conjugué, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, pour produire :

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

Dans les années 1950 et 1960, avant l'avènement de calculatrices de poche, il a été jugé nécessaire de toujours rationaliser le dénominateur d'une expression numérique. Il a l'avantage de faire des calculs relativement direct. Par exemple, même si l'on peut lire d'un livre de tables qui $\sqrt{2}$ est environ 1 1.414, en calculant la valeur approximative de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ via le le processus de DIVISION LONGUE est fastidieux. Cependant, la réécriture $\frac{1}{\sqrt{2}}$ comme $\frac{\sqrt{2}}{2}$ permet de voir immédiatement que cette quantité est simplement la moitié de $\sqrt{2}$, et a donc environ valeur 0,707.

Aujourd'hui, la quantité $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est considérée comme valable expression d'une grandeur numérique, et il n'est absolument pas nécessaire de rationaliser le dénominateur. Malheureusement, de nombreux programmes de mathématiques au secondaire insister pour réécrire de telles expressions, même si le les raisons de le faire sont maintenant obsolètes.

nombres rationnels (rationnels) Tout nombre qui peut être exprimé comme un RATIO, a/b, de deux entiers a et b, avec b ≠ 0, est appelé un nombre rationnel. Par exemple, 2/5 et –6/2 (ce qui équivaut à –3) sont rationnels Nombres. Tout nombre rationnel est une fraction, et comme telles que les règles d'addition, de soustraction, de multiplication et diviser des fractions s'applique aux rationnels. L'ensemble de tous nombres rationnels est noté Q (pour quotient), et le ensemble de tous les rationnels constitue un CHAMP mathématique.

Tout nombre réel dont la représentation décimale finit par se répéter dans un cycle ou se termine (et peut donc être considéré comme contenant un cycle répété de zéros) est un rationnel. Par exemple, multiplier x = 0,34 par 100 34 donne 100x = 34, et donc x = $= \frac{17}{50}$. Multiplication y = 2,3181818… par 10 et par 1 000 puis en soustrayant donne :

$$1000a = 2318.181818\ldots$$
$$10a = 23{,}181818\ldots$$
$$990y = 2295$$

établissant que y = 2295/990 = 51/22. A l'inverse, la processus de DIVISION LONGUE montre que tout rationnel nombre a une expansion décimale qui se répète. (Pour exemple, en divisant 3 par 7, chaque reste qui apparaît

Machine Translated by Google

dans le processus de division longue ne peut être que l'un des sept nombres - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 - et donc, éventuellement, un reste doit apparaître deux fois. Dès que cela se produit, le processus de cycles de division longs.) Ceci établit :

> Les nombres rationnels sont précisément les nombres dont les développements décimaux se répètent.

Ainsi, tout nombre avec un développement décimal non répétitif doit être un NOMBRE IRRATIONNEL. De la même manière, on peut montrer que les rationnels sont précisément les nombres avec des développements de FRACTION CONTINUE .

> Entre deux nombres rationnels et se trouve b $\frac{un}{}$ $\frac{c}{b}$ un autre rationnel - leur point médian $\frac{\frac{un}{b} + \frac{c}{d}}{2}$ et $\frac{bc + bd}{2}$, pour instance. La répétition de ce raisonnement établit :

> Une infinité de nombres rationnels se situent entre deux rationnels donnés.

Nous disons que l'ensemble des rationnels représente un "sous-ensemble dense" de la vraie LIGNE NUMÉRIQUE. De plus, entre deux nombres réels x et y sur la droite numérique, avec x < y, il existe un q rationnel qui se situe entre eux.
(Écrivez x et y sous forme de développements décimaux et choisissez une valeur décimale finale qui se situe entre eux.)

Ces arguments de densité montrent qu'il n'y a pas de plus petit nombre rationnel positif, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de « premier » nombre rationnel sur la droite numérique positive.
Néanmoins, le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845-1918) a montré avec son célèbre ARGUMENT DIAGONAL qu'il est possible de ranger tous les rationnels positifs (et négatifs) dans une liste : q1 ,q2 ,q3 ,… Ceci montre:

> L'ensemble des nombres rationnels est COMPTABLE.

> A l'aide de la GEOMETRIC SERIES $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1 - x}$, nous pouvons maintenant montrer que la quantité espace —1 – x occupée par les rationnels sur la droite numérique est nulle. (Ceci est surprenant étant donné que les rationnels forment un sous-ensemble dense de la ligne.)

> Choisissez x = 1/10 et couvrez le point q1 sur la droite numérique avec un intervalle de longueur x, le point q2 avec un intervalle de longueur $x^2 = 0{,}01$, le point q3 avec un intervalle de longueur $x^3 = 0{,}001$, et ainsi de suite. Ces intervalles sont susceptibles se chevauchent, mais ils n'occupent pas plus de :

$$x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1 - x} = \frac{1}{9}$$

> quantité d'espace au total. Ainsi, l'ensemble des points rationnels occupe au plus un neuvième de la droite des nombres réels.
>
> De même, en travaillant avec x = 1/100, on en déduit que les rationnels occupent au plus 1/99 de l'espace sur la droite numérique, ou au plus 1/999 de l'espace si on travaille avec x = 1/ 1000. En continuant de cette manière, nous sommes obligés de conclure que la quantité totale d'espace occupé par les nombres rationnels est nulle.

Nous disons:

> Les rationnels forment un ensemble avec une mesure de zéro sur la droite des nombres réels.

Étant donné que la droite des nombres est de longueur infinie, nous devons en conclure que "la plupart" des nombres ne sont pas rationnels.

Voir aussi NOMBRE ALGÉBRIQUE ; NOMBRE; RÉEL NOMBRE BERS ; NOMBRE TRANSCENDANTAL.

test de rapport Voir SÉRIE CONVERGENTE.

rayon (demi-droite) La partie d'une ligne droite partant d'un point et se poursuivant indéfiniment dans une direction est appelée rayon. Deux rayons dans un plan commençant au même point créent une figure appelée ANGLE.

nombres réels Il est extraordinairement difficile de définir précisément ce que l'on entend par nombre réel. De nombreux textes standards en mathématiques définissent un nombre réel comme étant n'importe quel NOMBRE RATIONNEL ou n'importe quel NOMBRE IRRATIONNEL. Malheureusement, puisqu'un nombre irrationnel est déclaré être tout nombre qui n'est pas rationnel, on ne sait pas de quel groupe de nombres proviennent les nombres irrationnels. Alternativement, on peut définir un nombre réel comme étant n'importe quel nombre qui peut être exprimé comme une expansion décimale. (Les nombres rationnels sont alors ceux qui ont des développements répétitifs et les irrationnels sont ceux qui n'en ont pas.) La difficulté avec cette approche est qu'il n'est pas clair comment effectuer des opérations arithmétiques sur ces entités. Par exemple, lors de l'addition de deux grands nombres entiers, 769 + 845, disons, on commence par les chiffres les plus à droite, les additionne, porte un

Machine Translated by Google

chiffre si nécessaire, et passe aux chiffres de la colonne suivante un endroit vers la gauche pour répéter ce processus à nouveau. Il n'est donc pas clair comment procéder lorsqu'on lui demande d'ajouter deux développements décimaux infinis. (Quel est le chiffre le plus à droite pour commencer ?)

Au milieu des années 1800, alors que les mathématiciens tentaient d'établir une base théorique solide pour CALCULUS, les chercheurs ont réalisé la nécessité d'une compréhension rigoureuse de ce que l'on entend par « nombre réel ». En particulier, afin de valider les trois théorèmes clés sur lesquels repose le calcul (à savoir, le THÉORÈME DES VALEURS EXTRÊMES , le THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES et le THÉORÈME DES VALEURS MOYENNES), il était essentiel que le système des nombres réels soit prouvé "complet". », en ce sens qu'aucun numéro ne « manque » dans le système. (Par exemple, la racine carrée de 2 est absente de l'ensemble des nombres rationnels).

Le mathématicien français AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) a proposé une définition d'un nombre réel à l'aide de séquences de Cauchy. (Cette approche est basée sur l'idée que chaque nombre irrationnel est la LIMITE d'une séquence de nombres rationnels.) Bien qu'il soit facile d'effectuer des opérations arithmétiques sur des séquences de Cauchy, l'exhaustivité du système de nombres réels créé n'est pas immédiatement claire. En 1872, le savant allemand JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916) a proposé la notion de DEDEKIND CUT comme moyen de définir les nombres réels. Cette approche a l'avantage de rendre visible l'exhaustivité du système des nombres réels, mais l'inconvénient de rendre les manipulations arithmétiques des nombres réels moins naturelles. Néanmoins, les deux approches sont valables et sont utilisées aujourd'hui comme moyen de définir les nombres réels.

Les travaux de GEORG CANTOR (1845-1918), avec son célèbre ARGUMENT DIAGONAL, montrent que la CARDINALITÉ des réels est supérieure à celle des rationnels.
Il n'est donc pas surprenant qu'une approche plus sophistiquée pour comprendre le système des nombres réels soit nécessaire que celle pour comprendre les rationnels.

Aujourd'hui, l'ensemble des nombres réels est noté R et est représenté géométriquement comme l'ensemble des points sur une LIGNE NUMÉRIQUE. Les nombres réels constituent un CHAMP mathématique.

Voir aussi NOMBRE ; PROPRIÉTÉS DE LA COMMANDE.

réciproque (inverse multiplicatif) Le nombre 1 divisé par une quantité est appelé l'inverse de cette quantité. Par exemple, l'inverse de 2 est 1/2, et l'inverse de $x^2 + 1$ est $\frac{1}{x^2+1}$. Le produit d'un quantité et son inverse est toujours 1.

L'inverse de toute FRACTION $\frac{a}{b}$ est le corr b fraction répondante avec numérateur et dénominateur échangé : $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$. L'inverse d'un COMPLEXE NOMBRE x + iy est simplifié en multipliant le numérateur et le dénominateur chacun par le conjugué du nombre complexe :

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

C'est le même processus que RATIONALISER LE DÉNOMINATEUR d'une quantité fractionnaire.

Une équation qui est inchangée (c'est-à-dire qui a le même ensemble de solutions) si les variables de cette équation sont remplacées par leurs inverses est appelée une équation réciproque. Par exemple, $x^2 - 3x + 1 = 0$ est une réciproque équation, puisque remplacer x par $\frac{1}{x}$ donne $\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 0$ qui se simplifie en $1 - 3x + x^2 = 0$.

La série réciproque d'une SÉRIE donnée est la série dont les termes sont les réciproques des termes de la série donnée. Par exemple, toute SÉRIE HARMONIQUE est la série réciproque d'une SÉRIE ARITHMÉTIQUE.

Voir aussi ÉLÉMENT INVERSÉ.

Recorde, Robert (ca. 1510–1558) Algèbre galloise Né à Tenby, Pays de Galles, ca. 1510 (sa date de naissance exacte n'est pas connue), le mathématicien Robert Recorde est connu pour son travail déterminant dans l'établissement de l'enseignement général des mathématiques en Angleterre ainsi que pour l'introduction de l' ALGÈBRE dans ce pays. Recorde a écrit un certain nombre de manuels élémentaires influents, tous écrits en anglais et utilisant tous une terminologie claire et simple. On se souvient également de lui pour avoir inventé le symbole "=" pour désigner les égaux.

Recorde a obtenu un diplôme de médecine de l'Université de Cambridge en 1545 et a pratiqué la médecine à Londres pendant plusieurs années avant d'être nommé arpenteur général des mines et des fonds en Irlande par le roi Édouard VI. Il est à noter que Recorde a produit la première pièce en Angleterre à avoir la date écrite avec

Machine Translated by Google

CHIFFRES HINDOUS-ARABES (les chiffres que nous utilisons aujourd'hui) plutôt que des CHIFFRES ROMAINS.

Maintenir un intérêt pour les mathématiques tout au long sa vie, Recorde a écrit une série de textes pédagogiques en mathématiques. Sa première pièce, The Grounde of Artes, publié en 1543, a discuté des avantages de la Chiffres hindous-arabes et techniques générales d'arithmétique utiles pour le commerce. Il publia plus tard un version étendue de cette œuvre du même nom en 1552, qui a également exploré la théorie des NOMBRES ENTIERS et des NOMBRES RATIONNELS. À cette époque Recorde a également publié Pathwaie to Knowledge, une version abrégée du célèbre ouvrage d'Euclide, LES ÉLÉMENTS.

Recorde est peut-être mieux connu pour son 1557 pièce The Whetstone of Witte, considérée comme le premier texte significatif sur le thème de l'algèbre écrit en anglais. Son titre est un jeu de mots incompréhensible aujourd'hui. Premiers algébristes utilisé le mot latin cosa pour "chose", signifiant la variable inconnue dans une équation. Ce mot étroitement ressemble au mot latin cos pour « pierre à aiguiser », une pierre pour aiguiser les outils. Ainsi, le titre de Recorde fait référence à l'art de l'algèbre comme moyen d'aiguiser son esprit.

Dans ce texte célèbre, Recorde explique la théorie de les équations et l'arithmétique des racines carrées. Il résout Équations QUADRATIQUE (mais rejette les solutions négatives). Il note en particulier que pour une équation de la forme $x^2 = ax - b$, le terme a est égal à la somme des deux racines de l'équation, et le terme b leur produit. (On le voit aujourd'hui en notant que $(x - r1)(x - r2) = x^2 - (r1 + r2)x + r1\,r2$.) C'est dans ce morceau que Recorde introduit le symbole « = » pour l'égalité, notant que le l'utilisation de deux segments de ligne parallèles est appropriée "bicause noe 2 les thynges peuvent être moare equalle.

Recorde est mort à Londres, en Angleterre, en 1558. Le la date exacte du décès n'est pas connue.

rectangle UN QUADRILATERAL avec les quatre angles étant des angles droits s'appelle un rectangle. UN CARRÉ est considéré comme un rectangle.

La SURFACE d'un rectangle est le produit de sa longueur et sa largeur, et son PÉRIMÈTRE est le double de la somme de ces deux quantités :

$$\text{aire} = \text{longueur} \times \text{largeur}$$
$$\text{périmètre} = 2 \times \text{longueur} + 2 \times \text{largeur}$$

Il n'y a que deux rectangles de côtés entiers dont les aires et les périmètres ont le même valeur numérique : le rectangle 3 × 6 d'aire/périmètre 18, et carré 4 × 4 d'aire/périmètre 16.

Les deux DIAGONALES d'un rectangle sont égales en longueur et bissectrice, et le rectangle est le seul quadrilatère avec cette propriété. Les charpentiers mesurent des longueurs diagonales pour vérifier que leur travail est bien anguleux. On peut aussi utiliser cette observation pour dessiner rectangles étonnamment précis au sol en utilisant seulement deux morceaux de corde de longueur égale et un morceau de craie de trottoir : attachez les deux cordes ensemble à leur point médian et tendez-les pour former les deux bissectrices diagonales d'un rectangle. Marquez les extrémités du cordes, ce sont les coins du rectangle, et dessinez ses côtés en utilisant une corde tendue comme guide.

Voir aussi RECTANGLE DORÉ.

relation de récurrence (relation récursive, réduction pour mula) Une équation qui permet de calculer la valeurs successives d'une FONCTION ou d'une SEQUENCE une fois ensemble initial de valeurs est donné est appelé une relation de récurrence. Par exemple, les NOMBRES DE FIBONACCI Fn sont complètement spécifiés par la relation de récurrence Fn = Fn–1 + Fn–2 pour n > 2 une fois qu'on nous dit que F1 = 1 et F2 = 1. Le nombre de coups nécessaires pour résoudre la TOUR DE HANOI PUZZLE avec N disques, T(N), est donné par le relation de récurrence T(N + 1) = 2T(N) + 1 avec T(1) = 1. La relation de récurrence an+1 = an + 3 avec a1 = 7 définit la suite arithmétique 7, 10, 13, 16,…

Dans le CALCUL INTÉGRAL, la méthode d' INTÉGRATION BY PARTS est souvent utilisé pour établir une réduction importante formules. Par exemple, en définissant $u = x^n$ et $v' = e^x$ dans le intégrale ci-dessous établit la relation $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$. L'application répétée de cette formule permet un pour éventuellement évaluer l'intégrale donnée.

D'autres formules de réduction comprennent:

$$\int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$$

$$\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$$

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$$

Voir aussi SYSTEME DYNAMIQUE ; CROISSANCE LOGISTIQUE ; DÉFINITION RÉCURSIVE.

Machine Translated by Google

définition récursive (définition inductive, récursivité)
Une SEQUENCE an est dite définie récursivement si :

1. Le premier terme a0 est donné.
2. Un algorithme pour calculer n'importe quel terme à partir de son prédécesseur est présenté.

Par exemple, la suite des puissances 1, x, x2 peut être définie récursivement par :

$$a0 = 1$$
$$an+1 = xan$$

et la fonction FACTORIELLE n! peut être défini comme :

$$0 ! = 1$$
$$(n +1) ! = (n + 1) \times n!$$

Voir aussi SYSTEME DYNAMIQUE ; RELATION RÉCCURENTE.

forme réduite (termes les plus bas) UNE FRACTION est dite sous forme réduite si son numérateur et son dénominateur n'ont aucun facteur commun (autre qu'un). Par exemple, la fraction 12/25 est sous forme réduite, alors que 14/21 ne l'est pas. (Le numérateur et le dénominateur partagent 7 comme facteur.) L'annulation de tous les facteurs communs au numérateur et au dénominateur d'une fraction réduit la fraction à une forme réduite. Par exemple, 14/21 équivaut à la fraction réduite 2/3.

Les mathématiciens ont prouvé que si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont choisis au hasard, alors la PROBABILITÉ que la fraction résultante soit sous forme 6— réduite est $\frac{6}{\pi^2}$ précisément (environ 61 %).

Voir aussi ANNULATION.

réflexion Voir TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE ; LINÉAIRE TRANSFORMATION.

Regiomontanus (1436–1476) Essai de trigonome allemand, astronomie Né le 6 juin 1436 à Königsberg, Prusse (aujourd'hui Allemagne), le savant Regiomontanus est connu comme l'auteur de De triangulis omnimodis (Sur toutes les classes de triangles), publié à titre posthume en 1533 , qui fut le premier récit moderne de la TRIGONOMÉTRIE en tant que discipline indépendante de l'astronomie. Ce travail a été extrêmement influent dans le renouveau du sujet en Occident.



IOANNIS DE MONTE
REGIO, MATHEMATICI CLARISSIMI, TABVLÆ DIRECTIONVM PROFECtionumq; Horoscopi, Astrologiæ Iudiciariæ, quàm tabulis instrumentisq; innumeris fabricandis vtiles ac necessariæ. Denuo nunc editæ, & pulchriore ordine dispositæ, multisq; in locis emendatæ.

EIVSDEM REGIOMONTANI TABVLA SINVVM, per singula minuta extensa, vniuersam sphæricorum triangulorum scientiam complectens.

ACCESSERVNT HIS TABVLAE ASCENSIONVM obliquarum, à 60. gradu eleuationis poli, vsque ad finem quadrantis: per ERASMVM REINHOLDVM Salueldensem supputatæ.

VVITEBERGAE
Imprimebantur in Officina Typographica Matthæi VVelack.
ANNO M. D. LXXXIV.

Regiomontanus, mathématicien et astronome du XVe siècle, a publié Tabulae, un texte de tables trigonométriques important pour les savants de l'époque. (Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Bien que né Johann Müller, Regiomontanus a pris le nom de sa ville natale. (Königsberg signifie "la montagne du roi", qui se traduit en latin par "Regiomontanus".) Astronome de formation, il est nommé professeur dans le domaine à l'Université de Vienne en 1641 et, sept ans plus tard, est nommé astronome à Le roi Matthias Corvinus de Hongrie.

Jusqu'à cette époque, la trigonométrie n'était considérée que comme une partie de l'astronomie. Bien que conscient de l'utilisation arabe de la fonction tangente, Regiomontanus n'aborde que la fonction sinus dans sa célèbre pièce.
Contrairement aux anciens mathématiciens indiens, il ne considérait pas le sinus comme un rapport, mais plutôt comme la longueur d'un segment de ligne particulier tracé pour un cercle de rayon fixe. En utilisant un cercle de rayon 60 000 unités, Regio montanus a présenté un grand tableau de valeurs de sinus, et

Machine Translated by Google

discuté des moyens de convertir ces valeurs en valeurs appropriées pour un cercle d'un rayon différent. Son travail a également décrit toute la théorie de base de l'essai des trigonomes, ainsi que des applications à la fois à la géométrie plane et sphérique. Le travail de Regiomontanus a été extrêmement influent.

Regiomontanus était un astronome compétent. En 1472, il a fait des observations détaillées d'une comète suffisamment précises pour que les chercheurs l'identifient plus tard comme la comète de Halley. (Halley a été le premier à calculer la longueur de l'orbite de la comète 210 ans plus tard.) Regiomon tanus a également conçu une méthode mathématique pour déterminer la position longitudinale sur la TERRE en utilisant l'emplacement de la Lune dans le ciel. Il mourut à Rome, en Italie, le 8 juillet 1476.

régression Si un DIAGRAMME DE DIFFUSION indique une relation entre deux variables dans une étude scientifique, alors toute tentative de quantification de cette relation est appelée régression. Par exemple, si une expérience donne des points de données (x1 , y1), (x2 , y2), …, (xn , yn), on peut essayer de trouver une formule y = f(x) qui « correspond le mieux » aux données. La MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS cherche à minimiser la somme des carrés :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

en utilisant les techniques de CALCULUS. Cette approche fonctionne particulièrement bien si l'on soupçonne une relation linéaire f(x) = ax + b, mais elle peut aussi être utilisée pour d'éventuelles relations quadratiques f(x) = ax2 + bx + c, et des relations suspectes suivant d'autres formules simples.

Voir aussi COEFFICIENT DE CORRELATION.

relation (relation) Tout appariement entre des éléments d'un ensemble avec certains éléments d'un autre, ou des éléments d'un ensemble avec d'autres éléments du même ensemble, est appelé une relation. Par exemple, considérons l'ensemble de tous les peuples du monde. Alors la correspondance « maternée par » M qui associe à chaque personne sa mère biologique est une relation. Pour l'ensemble des nombres réels, la relation « supérieur à » G déclare que a est lié à b si a est supérieur à b, et la relation « circulaire » C établit x comme lié à y si les deux nombres satisfont l'équation X

$$2\ 2 = 1. + y$$

Si deux membres a et b d'un ensemble sont liés par une relation R, alors on écrit aRb. Par exemple, si la mère de Brian est Joan, alors « Brian M Joan » (c'est-à-dire que Brian est « materné par » Joan). Nous avons aussi que 3G2, puisque 3 est supérieur à 2, et 1C 0, puisque le point (1,0) se trouve sur le cercle unité. (Remarque : la relation "supérieur à" G est généralement notée ">".)

Si la relation discutée est comprise, il est également commode d'écrire deux éléments qui sont liés simplement comme une paire ordonnée. Par exemple, dans la relation maternelle M, nous avons (Brian, Joan), mais pas (Joan, Brian). Les mathématiciens préfèrent généralement la présentation par paire ordonnée d'une relation et définiront en fait une relation comme étant simplement n'importe quelle collection de paires ordonnées.
Ceci a l'avantage que si les éléments en discussion sont des nombres, alors on peut représenter graphiquement les points qui satisfont une relation donnée. Par exemple, sous la relation « supérieur à » G, un couple (a,b) vérifiant cette relation correspond à un point du plan au-dessus de la diagonale y = x. L'ensemble de toutes les paires (x,y) appartenant à la relation circulaire C forme un cercle dans le plan xy.

Une relation est appelée une FONCTION si aucun élément du premier ensemble (première coordonnée) de la relation ne correspond à plus d'un élément du deuxième ensemble (deuxième coordonnée). Par exemple, comme Brian, comme tout être humain, ne peut être associé qu'à une seule mère biologique, la relation « materné par » est une fonction.
Puisque 3 > 2 et 3 > 1, par exemple, la relation « supérieur à » n'est pas une fonction. La relation "cercle" C n'est pas non plus une fonction puisque, par exemple, à la fois (0,1) et (0, -1) appartiennent à la relation. (Nous avons 0C1 et 0C–1.)
Si l'on considère, à la place, la relation "parabolique" P définie comme l'ensemble de tous les points (x, y) qui satisfont $y = x^2$ alors cette relation est une fonction : si xPy1 et xPy2 , alors il faut que y1 = y2 . (On a $y1 = y2 = x^2$.)

erreur relative Si l' ERREUR ou l'incertitude dans la mesure d'une grandeur est exprimée sous la forme d'un rapport à la mesure totale, l'erreur est appelée erreur relative. Par exemple, lorsque 1,2 est utilisé comme approximation pour la quantité 1,16, l'erreur relative est de 0,04/1,16 ≈ 0,034. Si, pour mesurer la hauteur d'un bâtiment à 62 pieds, les ingénieurs ont utilisé un appareil qui mesure au demi-pied près, alors la hauteur du bâtiment devrait être écrite 62 ± 0,5 pied, et l'erreur relative de cette mesure est de 0,5 /62 ≈ 0,008.

Voir aussi ERREUR POURCENTAGE.

Machine Translated by Google

relativement premier (coprime) Deux entiers a et b sont relativement premiers si leur PLUS GRAND FACTEUR COMMUN est 1. Par conséquent, le seul diviseur que les deux nombres ont en commun est 1. Par exemple, 15 et 28 sont relativement premier. Deux nombres consécutifs sont relativement premier.

Les nombres relativement premiers jouent un rôle clé dans la fameux problème de timbre-poste :

> Quelles valeurs d'affranchissement peuvent être obtenues en utilisant 5-timbres cent et 7 cents seulement?

Par exemple, on peut composer une valeur d'affranchissement de 22 cents avec trois timbres de 5 cents et un timbre de 7 cents, mais la quantité 23 cents ne peut pas être ainsi obtenue. Un peut vérifier que chaque quantité 24, 25, 26, 27 et 28 est possible. L'addition de multiples de 5 à chacun de ces nombres montre alors que toute quantité supérieure à 24 est obtenable. (En dessous, on peut vérifier que seul le les valeurs 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21 et 22 peuvent être composé.)

En général, étant donné deux valeurs de tampon a et b, avec valeurs a et b relativement premières, on peut montrer que il existe toujours un nombre N tel que toute quantité N et ci-dessus peut être composé comme une combinaison de timbres de chaque type. Ce résultat n'est pas vrai si a et b ne sont pas relativement premiers.

Les mathématiciens ont montré que la PROBABILITÉ que deux nombres entiers choisis au hasard sont premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}61$.

Voir aussi FACTEUR COMMUN ; FACTEUR; REMPLISSAGE EN CRUCHE PROBLÈME.

théorème du reste Le processus de DIVISION LONGUE montre que si un POLYNOME p(x) de degré n est divisé par un deuxième polynôme q(x) de degré m, on obtient, en dehors d'un terme QUOTIENT Q(x), un reste polynomial R(x) de degré strictement inférieur à m :

$$p(x) = Q(x)q(x) + R(x)$$

Par exemple, en divisant $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ par le polynôme de degré 2 $q(x) = x^2 + 1$ donne un reste de $R(x) = 2x + 1$ de degré 1 :

$$\underset{p(x)}{x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x + 4} = \underset{Q(x)}{(x^2 - 3x + 2)}\underset{q(x)}{(x^2 + 1)} + \underset{R(x)}{(2x + 3)}$$

En particulier, si un polynôme p(x) est divisé par un terme linéaire x – a pour une constante a, le résultat reste doit être un polynôme de degré zéro, c'est-à-dire une constante :

$$p(x) = Q(x)(x - a) + b$$

Mettre x = a dans cette équation montre que p(a) = 0 + b. Ainsi le terme de reste b est simplement la valeur de la polynôme en x = a. Cette observation s'appelle la théorème du reste :

> Si un polynôme p(x) est divisé par le terme x – a, pour une constante a, alors le terme restant est p(a) :

$$p(x) = (x - a)Q(x) + p(a)$$

Par exemple, si $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2x + 4$ est divisé par $x + 1 = x - (-1)$, le reste sera $p(-1) = -1 - 7 - 2 + 4 = -6$.

Le théorème du reste est utile pour trouver le facteurs d'un polynôme. Par exemple, pour le polynôme $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2x + 4$, on a $p(1) = 1 - 7 + 2 + 4 = 0$, indiquant que $(x - 1)$ est un facteur : $x^3 - 2x^2 - 7x + 2x + 4 = (x - 1)Q(x) + p(1) = (x - 1)Q(x)$.

Voir aussi THÉORÈME DES FACTEURS ; THÉO FONDAMENTAL REM D'ALGÈBRE.

discontinuité amovible Voir FONCTION CONTINUE.

Triangle de Reuleaux Voir LARGEUR CONSTANTE.

Papyrus Rhind (Ahmes papyrus) Ce célèbre document est le plus ancien texte mathématique écrit connu exister. Actuellement hébergé au British Museum, ce 18-rouleau de papyrus de 1 mètre de long, 13 pouces de large, remonte à ca. 1650 avant notre ère Le document a été découvert enterré dans le Sables du désert égyptien, près de la Vallée des Rois, dans au milieu des années 1800 par un citoyen égyptien inconnu. Visite de l'Ecossais Alexander Henry Rhind (1833-1863), qui s'intéressait aux antiquités, acheta le papyrus et transporté en Grande-Bretagne.

Le papyrus est une copie d'un ouvrage qui remonte à au moins 200 ans plus tôt. Bien que le texte se compose principalement de problèmes et de solutions numériques, avec une mettant l'accent sur l'application pratique, il est clair que

Machine Translated by Google

Les Égyptiens de l'époque tenaient les mathématiques en haute estime. Le copiste, dont le nom est traduit par Ahmes ou Ahmose, a copié aussi le titre grandiose du papyrus : Rendu précis : L'entrée dans la connaissance de toutes les choses existantes et de tous les secrets obscurs. Le but du texte semble être celui d'un manuel - une série d'exemples et d'exercices organisés pour illustrer certaines compétences et techniques mathématiques. Certains des derniers problèmes discutés, cependant, n'ont aucune application pratique et indiquent clairement un plaisir à étudier les mathématiques pour elles-mêmes.

Voir aussi FRACTIONS ÉGYPTIENNES ; MATHÉMATIQUES ÉGYPTIENNES ; MULTIPLICATION ÉGYPTIENNE.

Échelle de Richter Voir ÉCHELLE LOGARITHMIQUE.

Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826–1866)
Géométrie allemande , analyse, calcul, théorie des nombres Né le 17 septembre 1826 à Breselenz, Hanovre (aujourd'hui Allemagne), Bernhard Riemann est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XIXe siècle.
Ses travaux sur la GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE ont révolutionné la pensée moderne sur l'étude de la forme et de l'espace et ont fourni les outils dont ALBERT EINSTEIN avait besoin pour sa description de l'univers dans la théorie générale de la relativité. Parmi ses nombreuses contributions significatives à ANALYSIS, on se souvient de Riemann pour sa construction de l'intégrale de Riemann, qui, pour la première fois, a étendu la théorie de CALCULUS au-delà du seul domaine des fonctions continues. Riemann a également développé une théorie des fonctions complexes (c'est-à-dire des fonctions dont les entrées et les sorties sont des NOMBRES COMPLEXES) et a étudié les applications du calcul dans ce contexte. En 1859, alors qu'il cherchait une meilleure approximation du nombre de nombres premiers donné par le célèbre THÉORÈME DES NOMBREUX PREMIERS, Riemann découvrit une version généralisée de l' importante FONCTION ZETA de LEON HARD EULER. Il fit une conjecture profonde et perspicace sur les propriétés de cette fonction, l'hypothèse de Riemann, qui, si elle était vraie, fournirait des informations inestimables sur la distribution des nombres premiers. Prouver (ou réfuter) l'hypothèse de Riemann est considéré comme le problème mathématique non résolu le plus important d'aujourd'hui.

Riemann a manifesté un vif intérêt pour les mathématiques dès son plus jeune âge et a été encouragé par le directeur de son lycée à poursuivre dans cette voie d'études. En 1846 Riemann s'inscrit à l'Université de Göttingen pour étudier auprès du mathématicien CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). Étonnamment, même avec Gauss comme membre du corps professoral, Göttingen n'offrait pas un programme solide en mathématiques, et donc, un an plus tard, Riemann a été transféré à l'Université de Berlin, une institution reconnue pour sa force en mathématiques à l'époque. Là-bas, Riemann développa sa théorie générale des variables et des fonctions complexes qui forma plus tard la base d'une grande partie de son important travail.

Après avoir obtenu son diplôme de premier cycle à Berlin, Riemann retourna à Göttingen en 1849 pour terminer une thèse de doctorat sous la direction de Gauss.
Il a obtenu un doctorat. 2 ans plus tard en mathématiques.
Gauss a décrit le travail de thèse de Riemann comme ayant «une originalité glorieusement fertile». En considérant la gamme de sorties d'une fonction complexe comme une surface dans un espace à trois ou même quatre dimensions, Riemann a réussi à lier la théorie du calcul et de l'analyse à l'étude de la forme, de l'espace et de la géométrie. Cette approche novatrice a été immédiatement reconnue comme un tournant important dans l'avancement des mathématiques. Sur la recommandation de Gauss, Riemann a été nommé à un poste à Göttingen et il a commencé à travailler sur son diplôme d'habilitation. Pendant ce temps, Riemann tourna son attention vers l'étude des SÉRIES DE FOURIER et les questions d'intégrabilité. C'est durant cette période que Riemann for mule sa célèbre définition d'une intégrale.

Comme dernière étape pour obtenir son diplôme, Riemann devait donner une conférence publique. Gauss lui a demandé de parler de la théorie de la géométrie, et le 10 juin 1854, Riemann a présenté au monde extérieur son travail révolutionnaire sur la forme et l'espace.

Riemann a conçu une notion générale de distance dans un espace à n dimensions et a développé une théorie des TENSEURS qui lui a permis de définir correctement la forme géométrique. En particulier, Riemann a développé la notion de tenseur de courbure pour mesurer ou définir la déformation de l'espace. Les mathématiques que Riemann présenta ce jour-là se révélèrent être le cadre précis dont Einstein avait besoin pour structurer sa théorie de la relativité générale. Riemann a continué à présenter et à publier des travaux révolutionnaires dans les années qui ont suivi.

Le 30 juillet 1859, Riemann est nommé titulaire de la chaire de mathématiques à Göttingen et, quelques jours plus tard, il est honoré d'être élu à l'Académie des sciences de Berlin. À cette époque, Riemann avait développé un intérêt pour la THÉORIE DES NOMBRE et la distribution des nombres premiers.

Machine Translated by Google

Nombres. Dans un rapport écrit à l'académie, Riemann présenté ses travaux sur la célèbre fonction zêta et sa méthode d'extension de la portée de la fonction à inclure des nombres complexes comme entrées - un autre chef-d'œuvre. Ce travail a complètement changé la direction de recherche mathématique en théorie des nombres pour le siècle qui a suivi. Riemann avait réussi à se connecter les notions de géométrie et d'espace aux fonctions complexes et, maintenant, à l'étude des nombres. Cette réalisation importante a fourni aux mathématiciens les moyens pour traduire les idées et les avancées en une seule champ en résultats et découvertes dans un autre.

Riemann a souffert de problèmes de santé la majeure partie de sa vie et mort de la tuberculose à l'âge de 39 ans à Selasca, Italie, 20 juillet 1866.

angle droit Un ANGLE égal à un quart de tour complet est appelé angle droit. Un tel angle mesure 90° ou est un $\frac{\pi}{2}$ radians. Le coin d'un carré angle droit.

On pourrait dire qu'un angle droit est le "correct" angle à utiliser dans l'architecture et la construction de bâtiments. Les architectes égyptiens de 1500 avant notre ère étaient conscients qu'un triangle 3–4–5 contient un angle droit (l'inverse du THÉORÈME DE PYTHAGORE le montre) et utilisé des cordes nouées 3 + 4 + 5 = 12 unités de long pour construire rapidement ces triangles sur un chantier. Un angle droit est aussi le angle fait si l'on devait faire un virage à droite parfait.

Voir aussi MESURE DE DEGRÉ ; MATHÉMAT ÉGYPTIEN SCI ; MESURE RADIAN.

système droitier/gaucher Dans l'espace à trois dimensions, on identifie l'emplacement des points par faisant référence à un ensemble de trois droites numériques mutuellement perpendiculaires, généralement appelées axes x, y et z, se coupant en un point appelé origine. Il y en a deux manières possibles d'orienter les axes.

Un système de coordonnées xyz est dit droitier si, en prenant la main droite, les abscisses positives pointent dans le direction du pouce, l' axe y positif dans la direction de l'index et l' axe z positif dans la direction direction du majeur (plié). Une coordonnée xyz le système est dit gaucher s'il suit les instructions de ces doigts de la main gauche à la place.

Inverser le sens de l'un des axes, ou la commutation des étiquettes de deux axes quelconques, change l'orient tation du système de coordonnées. Les mathématiciens ont s'est mis d'accord sur la convention de préférer les droitiers systèmes sur les gauchers.

Plus généralement, trois vecteurs a, b et c, en ce que ordre, dans l'espace tridimensionnel forment un droitier système si vous pointez le pouce de la main droite dans direction de a, et l'index dans la direction de b a le vecteur c allongé sur le côté de la paume de la main (c'est la direction dans laquelle le majeur devrait curl pour pointer dans la direction c). Alternativement, les trois vecteurs forment un système droitier si le VECTEUR TRIPLE PRODUIT a· (b × c) est un nombre positif.

Dans un espace à deux dimensions, les axes de coordonnées peuvent à nouveau être orienté dans l'une des deux directions. Un ensemble d' axes de coordonnées xy est dit orienté positivement si une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est nécessaire pour faire tourner le pôle positif. l'axe des x sur l' axe des y positif (en passant par le plus petit angle possible) et orienté négativement si un mouvement dans le sens des aiguilles d'une montre est nécessaire.

Voir aussi COORDONNEES CARTESIENNES ; PRODUIT CROISÉ.

ring Motivés par la question de savoir ce qui fait que l'arithmétique fonctionne comme elle le fait, les mathématiciens ont identifié sept principes clés satisfaits par les opérations de addition et multiplication. Aujourd'hui, les mathématiciens appelons tout système mathématique satisfaisant ces principes de base axiomes un anneau.

Précisément, un anneau est un ensemble R avec deux méthodes pour combiner des éléments de R pour produire de nouveaux éléments de R, généralement appelé addition "+" et multiplication "*", satisfaisant aux règles suivantes :

1. Loi commutative pour l'addition : Pour tous les éléments a et b de R, on a : a + b = b + a.
2. Loi d'addition associative : pour tous les éléments a, b, et c de R, on a : a + (b + c) = (a + b) + c.
3. Existence d'un zéro : L'ensemble R a un élément 0 avec la propriété que a + 0 = 0 + a = a pour tous les éléments a de R.
4. Existence d'inverses additifs : pour chaque élément un dans R il existe un élément, noté –a, tel que a + (–a) = (–a) + a = 0.
5. Loi associative de multiplication : pour tous les éléments a, b et c de R nous avons : a*(b*c) = (a*b)*c.
6. Existence d'un 1 : Il existe un élément 1 de R avec la propriété que a*1 = 1*a = a pour tout a dans R.
7. Lois distributives : pour tous les éléments a, b et c de R on a : a*(b + c) = a*b + a*a et (b + c)*a = b*a + c*a.

Machine Translated by Google

De plus, on dit que l'anneau est commutatif si un huitième axiome est vrai :

8. Loi commutative pour la multiplication : Pour tous les éléments a et b de R, nous avons : a*b = b*a.

Par exemple, l'ensemble des nombres entiers sous addition et multiplication ordinaires est un anneau commutatif. Ainsi, tout résultat connu pour découler abstraitement des huit principes décrits ci-dessus se traduit par un résultat sur les nombres. L'ensemble de toutes les fonctions f de l'ensemble des nombres réels à lui-même satisfait également la définition d'un anneau commutatif, et donc ces résultats se traduisent également par des faits intéressants en théorie des fonctions. Comme exemple simple, il est simple de prouver que l'élément zéro dans un anneau est unique. (Si 0 et 0′ sont tous les deux des zéros, alors, par l'axiome trois, 0 = 0 + 0′ = 0′.) Par conséquent, il n'y a aussi qu'une seule fonction qui peut se comporter comme la fonction zéro.

On peut imposer des conditions supplémentaires à un système. Par exemple, un anneau commutatif est appelé un domaine intégral si un neuvième axiome est vrai :

9. Pas de diviseurs de zéro : Il n'est jamais vrai que deux éléments non nuls a et b de R donnent a*b = 0.

L'ensemble des entiers est un domaine intégral, mais l'ensemble des fonctions ne l'est pas. Par exemple, si f est la fonction qui donne la valeur zéro pour les entrées négatives, et la valeur 1 sinon, et g est la fonction qui donne la valeur zéro pour les entrées positives, et la valeur 1 sinon, alors ni f ni g n'est la fonction zéro, mais leur produit f*g l'est. Tout système en ARITHMÉTIQUE MODULAIRE forme un anneau mais pas nécessairement un domaine intégral.

Par exemple, 2 × 3 = 0 modulo 6.

Un anneau commutatif est appelé corps si, de plus, un 10ème axiome est satisfait :

10. Existence d'inverses multiplicatifs : Pour chaque élément non nul a de R, il existe un élément b tel que a*b = b*a = 1.

L'ensemble des entiers n'est pas un champ. (Le nombre 2, par exemple, n'a pas d'inverse multiplicatif, puisque 1/2 n'est pas un entier.) L'ensemble de tous les nombres réels sous addition et multiplication, cependant, est un champ, tout comme l'ensemble de tous les nombres rationnels et l'ensemble de tous les nombres complexes.

On suppose généralement que les éléments 0 et 1 d'un anneau commutatif ou d'un champ sont différents. Si ces deux les éléments sont les mêmes, c'est-à-dire que si 0 = 1, alors on peut prouver que l'anneau R ne contient que cet élément : R = {0}. Cet anneau est appelé l'anneau trivial.

Voir aussi ALGEBRE ABSTRAITE ; ASSOCIATIF; COMMU PROPRIÉTÉ TATIVE ; PROPRIÉTÉ DISTRIBUTIVE ; GROUPE; THÉORIE DES GROUPES ; QUATERNIONS ; ZÉRO.

Rolle, Michel (1652–1719) Tournesol français Né le 21 avril 1652 à Ambert, en France, Michel Rolle est surtout connu pour le théorème de CALCULS qui porte son nom. Bien que peu remarqué au moment de sa publication, le théorème de Rolle est aujourd'hui considéré comme l'un des principes fondamentaux du sujet.

Rolle a commencé sa carrière comme scribe et assistant d'un avocat. Il avait peu d'éducation formelle mais a poursuivi un intérêt personnel pour les mathématiques toute sa vie.
Il s'installe à Paris en 1675 et se forge rapidement une réputation d'expert en arithmétique. En 1682, il acquit une renommée nationale pour avoir résolu un problème mathématique récréatif posé publiquement par le mathématicien français Jacques Ozanam. En l'honneur de cette réalisation, Rolle a reçu une pension du contrôleur des finances générales de France et l'admission à l'Académie royale des sciences en 1685.

En 1690, il publie l'ouvrage Traité d'algèbre (Traité d'algèbre), un texte sur la théorie des équations, dans lequel, entre autres, il invente et utilise la notation $\sqrt[n]{x}$ pour la nième racine de x. Rolle a également étudié

GÉOMÉTRIE, ALGÈBRE et ÉQUATIONS DIOPHANTINES.
Son célèbre théorème est publié un an plus tard dans un texte obscur et peu remarqué Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitez de tous les degrés .

Il est ironique que Rolle soit aujourd'hui considéré comme une figure principale dans le développement du calcul. Après avoir étudié le sujet émergent, Rolle aurait trouvé la théorie peu convaincante. Il est même allé jusqu'à dire que le calcul n'est rien de plus qu'une "collection d'erreurs ingénieuses". Il mourut à Paris, France, le 8 novembre 1719.

Voir aussi LE THÉORÈME DE ROLLE .

Théorème de Rolle En 1691 mathématicien français MICHEL ROLLE (1652-1719) a établi que si une courbe coupe l' axe des x en deux points a et b, est continue et a une tangente en tout point entre a et

Machine Translated by Google

b, alors il y a au moins un point dans cet intervalle où la tangente à la courbe est horizontale à l' axe x . Dans un langage mathématique plus strict, son orem se lit comme suit :

> Pour toute fonction f(x) continue dans un intervalle fermé [a,b], dérivable dans l'intervalle ouvert (a,b), et vérifiant f(a) = f(b) = 0, il existe au moins une valeur c entre a et b tel que f′(c) = 0. Autrement dit, les zéros d'une fonction différentiable sont toujours séparés par les zéros de la dérivée.

Ce résultat découle facilement du THÉORÈME DES VALEURS EXTRÊMES , qui affirme que toute fonction de ce type atteint une valeur maximale à un emplacement c dans l'intervalle (a, b). La tangente à la courbe doit être horizontale à un tel sommet. (Une étude attentive des valeurs MAXIMUM/MINIMUM l'établit.)

Bien que le théorème de Rolle soit un cas particulier du THÉORÈME DE LA VALEUR MOYENNE, il est habituel de prouver l'orème de Rolle indépendamment et de l'utiliser comme première étape pour prouver le résultat plus général.

Chiffres romains Sur la base d'un système de comptage simple similaire à celui utilisé par les anciens Égyptiens, les marchands de l'empire romain d'environ 500 avant notre ère utilisaient des symboles de lettres pour les puissances de 10 et pour les valeurs intermédiaires de 5, et regroupaient simplement les symboles pour représentent toutes les autres quantités. Les symboles utilisés étaient :

je= 1	
V= 5	
X=10	
L=50	
C 100	=
D 500	=
M 1000	=

L'expression CLXXIII, par exemple, représentait le nombre 100 + 50 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 173.

Bien que l'ordre des symboles n'était pas important, il est devenu la convention de lister les symboles du plus grand au plus petit, de gauche à droite.

Initialement, les symboles D et M ne faisaient pas partie du système romain. Le nombre 1 000 a été écrit (I), et d'autres applications de parenthèses autorisées pour le l'expression de quantités encore plus grandes. Par exemple, ((I)) représentait 10 000 et (((I))) représentait 100 000. Les tailleurs de pierre ont introduit les symboles D et M pour simplifier leur travail.

Les Romains ont également introduit d'autres ornements pour augmenter la valeur d'un symbole numérique. Par exemple, des barres verticales ont été utilisées pour représenter une multiplication par 100, et une barre placée au-dessus du symbole représentait une multiplication par 1 000. Par exemple,

$$|\underline{X}| = 100 \times 10 = 1\,000$$
$$\overline{X} = 1\,000 \times 10 = 10\,000$$
$$|\overline{X}| = 100 \times 1\,000 \times 10 = 1\,000\,000$$

Il n'y avait pas de symbole pour ZÉRO dans le système romain.

Pour éviter la quadruple répétition des symboles (comme dans l'expression CCCCXXXXIIIIII pour 444), un principe soustractif a été introduit au XIIIe siècle :

> Le placement d'une petite valeur immédiatement à gauche d'une valeur supérieure indique que cette petite valeur doit être soustraite de la valeur supérieure.

Ainsi 4 pourrait être écrit comme IV, 90 comme XC et 444 comme CDXLIV. Le principe soustractif était soumis à deux règles :

1. Les symboles V, L et D ne peuvent pas être utilisés comme nombres à soustraire.
2. Un seul symbole I, X ou C peut être placé avant un symbole numérique supérieur.

Ainsi, par exemple, il n'était pas permis d'écrire IIX pour huit. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un véritable SYSTÈME DE PLACE-VALEUR , avec le principe soustractif utilisé, l'ordre des symboles utilisés était désormais important.

Effectuer des opérations d'arithmétique de base avec des chiffres romains est très délicat. Par exemple, la solution du problème d'addition suivant n'est pas immédiate :

XLIV
+ XVII
+ XXIX

Le fait que les marchands européens aient été à l'aise de travailler avec le système de chiffres romains pendant plus d'un millénaire suggère que les savants n'ont pas utilisé le système de chiffres pour effectuer des calculs, seulement pour enregistrer les

Machine Translated by Google

résultats. (L'arithmétique a été effectuée sur une planche de comptage telle qu'un boulier.)

Le système des chiffres romains est resté populaire en Europe occidentale jusqu'au XVIIe siècle. Bien que le système ait finalement été remplacé par le système de CHIFFRES HINDOUS-ARABES que nous utilisons aujourd'hui, il reste toujours une tradition d'utiliser des chiffres romains pour les cadrans d'horloge, pour l'inscription des dates sur les bâtiments et pour les données de droit d'auteur sur les films et les livres, par exemple. .

Voir aussi BASE D'UN SYSTÈME NUMÉRIQUE ; RÉP DÉCIMALE RÉSENTATION ; MATHÉMATIQUES ÉGYPTIENNES ; NOMBRE.

racine (zéro) Toute valeur d'une variable dans une équation qui satisfait l'équation est appelée une racine de l'équation. Par exemple, l'équation 2x + 1 = 7 a la racine x = 3, et l'équation a = 8 a la racine a = 2. Comme toute équation avec une variable x peut être écrite sous la forme f(x) = 0 pour une fonction f, les racines d'une équation sont parfois appelées les "zéros" de la fonction associée f.

Si f(x) est un polynôme, alors l'équation f(x) = 0 est appelée équation polynomiale. La formule QUADRATIQUE montre qu'une équation quadratique ax2 + bx = c = 0 a deux racines données par :

$$x = \frac{bb - \sqrt{-2\,4}}{2\,un}$$

Le THÉORÈME DES FACTEURS montre que si x = r est une racine d'une équation polynomiale f(x) = 0, alors (x – r) est un facteur de f(x). La racine r est appelée racine simple si (x – r) est un facteur de f(x), mais (x – r) est un facteur n'est pas; une racine double si $(x – r)^2$ de f(x), mais (x – r) 3 ne l'est pas ; et, en général, une racine d'ordre n si (x – r) n divise f(x), mais pas $(x – r)^{n+1}$. Par exemple, x = 2 est une racine double de l'équation 2x 3 2 + 12x – 4 = 0, et x = 1/2 est une racine simple. – 9x (Nous avons 2x 3 2 + 12x – 4 = (x – 2)2 (2x – 1).) 9x THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE affirme qu'une équation polynomiale de degré n a précisément n racines (éventuellement complexes) si les racines sont comptées selon leur « multiplicité ». Par exemple, l'équation 2x 3 2 9x compte deux fois, comme il se doit.

+ 12x – 4 = 0 a trois racines, si la solution x = 2 est

Des méthodes numériques telles que la MÉTHODE DE BISECTION et la MÉTHODE DE NEWTON peuvent être utilisées pour trouver les racines des équations avec n'importe quel degré de précision souhaité.

La nième racine d'un nombre a, notée $\sqrt[n]{a}$, est tout valeur x qui satisfait l'équation polynomiale $x^n = un.$

Par exemple, le nombre 2 est une racine 10e de 1 024 (puisque 210 = 1 024), et –1 est une racine sixième de 1, puisque (–1)6 = 1. Si n = 2, alors une nième racine est appelée a RACINE CARRÉE. Si n = 3, alors on l'appelle une RACINE CUBE.

test racine Voir SERIE CONVERGENTE.

rose Une courbe plane en forme d'ensemble de pétales ayant une origine commune s'appelle une rose. En coordonnées polaires, une telle courbe a une équation de la forme r = asin(nθ) ou r = a cos(nθ) pour une constante a et un entier positif n. L'angle θ prend des valeurs comprises entre zéro et 360°, et peut par conséquent donner une valeur négative pour r. Dans ce cas, le point correspondant sur la courbe est tracé à une distance |r| de l'origine dans une direction opposée à celle indiquée par l'angle θ.

Si n est impair, le nombre de pétales qui apparaissent autour de l'origine est n. Si n est pair, alors 2n boucles apparaissent. En 1728, le mathématicien italien Guido Grandi appela ces courbes « rhodonea ».

rotation Voir TRANSFORMATION GEOMETRIQUE; LINÉAIRE TRANSFORMATION.

arrondir Si un nombre a plus de chiffres qu'il n'est possible de le gérer ou de le stocker, il est souvent plus pratique de remplacer le chiffre par le nombre le plus proche avec le nombre de chiffres souhaité. Ce processus est appelé arrondi. Par exemple, le nombre à deux chiffres le plus proche de 68,7 est 69. Ainsi, 68,7 "arrondi à deux chiffres" est 69.

Arrondir 5,237 à une décimale donne 5,2.

Arrondir 453 à la dizaine la plus proche donne 450, tandis que l'arrondir à la centaine la plus proche donne 500.

Il est classique d'« arrondir » si le nombre considéré est équidistant de deux approximations. Par exemple, 9 est considéré comme l'entier le plus proche de 8,5.

Des erreurs peuvent se produire si un nombre est arrondi plus d'une fois. Par exemple, arrondir 78,347 à deux décimales donne 78,35. Si nous décidons plus tard d'arrondir à une décimale, travailler avec 78,35 donne 78,4, alors que le nombre original arrondi à une décimale est 78,3. Il est donc essentiel que tous les processus d'arrondi soient exécutés en une seule étape.

Machine Translated by Google

Le processus consistant simplement à supprimer des chiffres supplémentaires est appelé troncature. Par exemple, lorsqu'ils sont tronqués à une décimale, 1,834 et 1,8999978 deviennent 1,8. Ce processus est également appelé « arrondi vers le bas ».

Voir aussi ERREUR ; SOL/PLAFOND/ PARTIE FRACTIONNELLE LES FONCTIONS; ERREUR D'ARRONDI .

erreur d'arrondi (rounding error) L' ERREUR produite en ARRONDISSANT une valeur à un nombre prescrit de chiffres est appelée erreur d'arrondi. Par exemple, arrondir la quantité 6,42 à la décimale la plus proche donne 6,4, introduisant une erreur de 0,02.

Les erreurs d'arrondi s'amplifient généralement au fur et à mesure que l'on effectue des calculs. Par exemple, arrondi à quatre décimales, cos 1° vaut 0,9998. Cela suggère que $\frac{1}{1 - \cos(1)}$ est égal à 5 000. C'est faux. La bonne valeur de cette quantité est proche de 6 565,8. Comme les calculatrices arrondissent toutes les quantités à huit ou 10 décimales, elles sont également susceptibles d'erreurs d'arrondi et peuvent donner des résultats erronés.

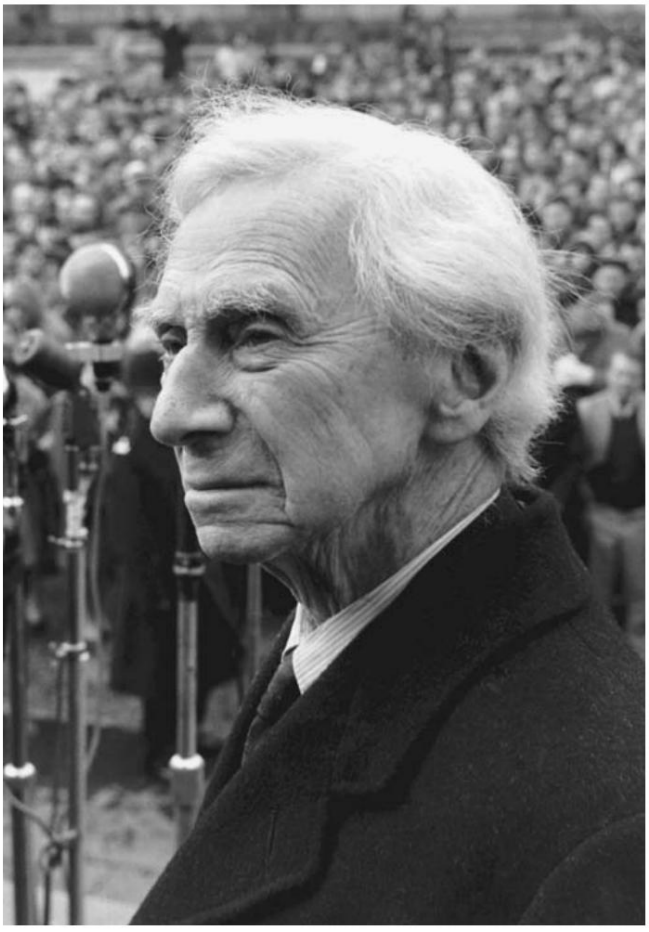
Royal Society (Royal Society of London) Fondée par une charte royale accordée par Charles II en 1660, la Royal Society of London est la plus ancienne institution scientifique au monde encore existante. Sa mission aujourd'hui, comme elle l'était au moment de sa création, est de diffuser les connaissances actuelles sur le monde naturel et de soutenir et de promouvoir la recherche scientifique continue.

Avant l'an 1600, les scientifiques et les érudits communiquaient leurs résultats par la poste, ainsi que par la publication de textes écrits suite à l'invention de l'imprimerie au XVe siècle. Ces formats fixes et rigides ne permettaient pas facilement de tester des idées et de discuter librement de la pensée. Dans une tentative de remédier à cela, en 1620, Francis Bacon (1561-1626) a créé une organisation appelée Novum Organum (Le nouvel instrument) qui a fourni un forum public pour les scientifiques, et d'autres, pour se rencontrer, discuter des idées scientifiques et des découvertes, et de connaître l'état général de la pensée scientifique actuelle. Quarante ans plus tard, la valeur d'une telle organisation fut formellement reconnue et la Royal Society fut créée. Les éminents scientifiques de l'époque ont été nommés membres de la société. SIR ISAAC NEWTON fut président de la société de 1703 à 1727.

Être élu membre de la Royal Society aujourd'hui est considéré comme un honneur vraiment prestigieux. Il y a actuellement 65 lauréats du prix Nobel parmi les 1 300 boursiers et membres étrangers de la Société. Chaque membre a le droit d'utiliser les lettres FRS (fellow Royal Society) après avoir signé son nom. La société maintient un site Web (www.royalsoc.ac.uk).

La tout aussi prestigieuse Académie royale des sciences française a été fondée 6 ans après la formation de la Royal Society.

Russell, Bertrand Arthur William (1872–1970) Fondements britanniques des mathématiques, philosophie Né le 18 mai 1872, à Ravenscroft, Pays de Galles, on se souvient du mathématicien logicien et philosophe Bertrand Russell pour son texte, coécrit avec ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861-1947), Principia Mathematica (1910,



Bertrand Russell, éminent mathématicien du XXe siècle, a été le premier à découvrir une faille fondamentale dans la théorie élémentaire des ensembles. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de Topham/The Image Works)

Machine Translated by Google

1912, 1913), une œuvre monumentale en trois volumes qui tentait de dériver l'ensemble des mathématiques à partir d'hypothèses purement logiques. Bien qu'il n'ait pas été couronné de succès, le travail a eu une grande influence. Russell a également découvert un paradoxe fondamental au cœur de la théorie des ensembles de base, aujourd'hui appelé PARADOXE DE RUSSELL .

Russell a étudié les mathématiques et l'éthique au Trinity College de Cambridge et a développé un intérêt pour les fondements logiques des mathématiques au début de sa carrière.

En 1903, il publie Principles of Mathematics, un texte explorant la prémisse que toutes les mathématiques peuvent être réduites à des énoncés de logique et que toutes les preuves mathématiques peuvent être refondues en preuves dans la théorie de la logique.

C'est au cours de la rédaction de cet ouvrage que Russell a découvert son célèbre paradoxe dans la théorie des ensembles, une découverte qui a clairement montré que davantage de travail était nécessaire pour trouver un fondement logique à toutes les mathématiques.

Son travail suivant, le célèbre Principia Mathematica, a été écrit comme une tentative d'étendre les méthodes de ses Principes à une théorie ramifiée plus générale qui pourrait faire face à tous les paradoxes autoréférentiels inquiétants qui ont surgi dans la théorie des ensembles. Bien que reconnu comme une brillante avancée dans la compréhension des fondements logiques de toutes les mathématiques, le travail a tout de même reçu quelques critiques de la part de la communauté mathématique générale comme étant soit trop ad hoc, trop rigoureux ou trop faible, et que, à tout le moins , encore plus de travail était nécessaire pour atteindre le noble objectif que Russell s'était fixé. En 1930, le mathématicien autrichien KURT GÖDEL (1906-1978) choqua le monde mathématique en prouvant, dans ses théorèmes d'incomplétude, qu'il ne peut y avoir de base logique à toutes les mathématiques du type recherché par Russell et que toute tentative pour trouver un ensemble fondamental d'axiomes sur lesquels fonder toutes les mathématiques est a priori vouée à l'échec.

L'influence de Russell dans le développement de la logique mathématique a été profonde. Il a été élu à la ROYAL SOCIETY en 1908 et a écrit un certain nombre d'articles étonnants dans le domaine tout au long de sa carrière. Russell était un militant politique et a été arrêté plusieurs fois au cours de sa carrière pour ses activités anti-guerre. (Son article de 1919 « Introduction à la philosophie mathématique » a été écrit pendant un séjour de 6 mois en prison.)

Russell a enseigné au City College de New York dans les années 1930 et a également été une figure de proue des manifestations anti-guerre et antinucléaires aux États-Unis.

Russell a également écrit sur un large éventail de sujets humanitaires, y compris la science politique, la science morale et les études religieuses. Il a reçu l'Ordre de Merit en 1949 et a remporté le prix Nobel de littérature en 1950 pour ses écrits collectifs défendant « les idéaux humanitaires et la liberté de pensée ».

Russell est décédé à Plas Penrhyn, au Pays de Galles, le 2 février 1970.

Paradoxe de Russell (antinomie de Russell) En 1902, le mathématicien et philosophe BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872–1970) découvrit un défaut fondamental au cœur de la THÉORIE DES ENSEMBLES. Habituellement, les ensembles ne sont pas membres d'eux-mêmes. Par exemple, si D représente l'ensemble de tous les chiens, alors D, étant un ensemble, n'est pas lui-même un chien. Appelons ces ensembles « normaux ». Russell a noté, cependant, que tous les ensembles ne sont pas normaux. Par exemple, si S représente l'ensemble de tous les ensembles, alors S est lui-même un ensemble et appartient donc à S. L'ensemble de toutes les choses qui ne sont pas des chiens est également nor

Soit N l'ensemble de tous les ensembles normaux. Autrement dit, N est l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas membres d'eux-mêmes. Demandez maintenant : est -ce que N est normal ? Si la réponse est oui, alors N est normal, ce qui en fait un élément de N, ce qui est précisément ce que signifie être non normal. Si la réponse est non, alors N est non normal, ce qui signifie que N est un élément de N, l'ensemble de tous les ensembles normaux. Nous avons:

N normal N non normal
N non normal N normal

L'ensemble N ne peut être ni normal ni non normal.

Cette contradiction s'appelle le paradoxe de Russell, et sa découverte a déjoué les tentatives des mathématiciens d'utiliser la théorie des ensembles comme base fondamentale de toutes les mathématiques. Il a également suggéré que toutes les mathématiques pourraient être défectueuses si même la plus simple des théories mathématiques - la théorie des ensembles - est fondamentalement contradictoire.

Russell a également présenté plusieurs versions alternatives de son paradoxe, dont le fameux « paradoxe du barbier » qu'il a présenté en 1919 :

> Un barbier dans une certaine ville a une pancarte qui dit : « Je rase tous ces hommes, et seulement ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ?

En essayant de répondre à cette question, on s'enlise dans le même type d'impasse logique que le paradoxe originel.

En 1910, Russell, avec l'aide d' ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861-1947), a publié le premier volume d'un gigantesque traité en trois volumes qui tentait de

Machine Translated by Google

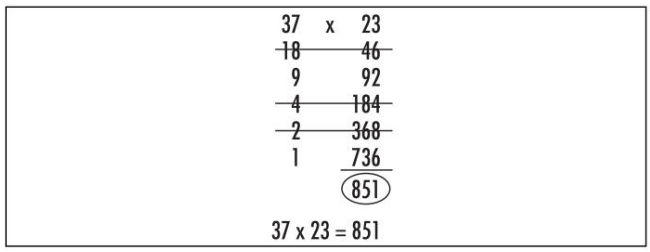
contourner les problèmes soulevés par le paradoxe et trouver une base logique à toutes les mathématiques. Il a introduit une notion de « type », exigeant que les ensembles et les phrases en mathématiques appartiennent à une structure hiérarchique. Au niveau le plus bas, il y a des déclarations sur des éléments individuels. Au niveau suivant, il y a des phrases sur des ensembles d'éléments individuels, et ensuite, des phrases sur des ensembles d'ensembles d'éléments individuels, et ainsi de suite. De plus, aucune phrase n'est autorisée à être au même niveau que son sujet. Par conséquent, toute déclaration qui se réfère à elle-même (comme la définition de l'ensemble N) n'est tout simplement pas autorisée dans cette structure hiérarchique. Cette approche contourne certainement les paradoxes autoréférentiels, mais de nombreux membres de la communauté mathématique ont cependant estimé que ce construit n'était pas particulièrement satisfaisant.

Observez que le paradoxe du barbier est facilement résolu en notant que le barbier pourrait être en dehors de l'ensemble des hommes, à savoir, le barbier pourrait être une femme. La théorie des types de Rus sell a tenté d'imiter cette solution en ramenant les ensembles « hors d'eux-mêmes » à travers la notion de hiérarchie. Les mathématiciens d'aujourd'hui tentent plutôt de développer une théorie mathématique du «contexte» où le cadre dans lequel les déclarations sont faites est considéré comme important.

Multiplication russe Aussi connue sous le nom de multiplication paysanne, la méthode de multiplication suivante serait originaire de Russie.

1. En tête de deux colonnes avec les chiffres que vous souhaitez multiplier.
2. Divisez progressivement de moitié les chiffres de la colonne de gauche (en ignorant les restes) tout en doublant les chiffres de la colonne de droite. Réduisez la colonne de gauche à un.
3. Supprimez toutes les lignes avec un nombre pair à gauche colonne.
4. Additionnez tous les nombres survivants dans la colonne de droite. Cette somme est le produit souhaité.

La clé pour comprendre pourquoi cette méthode fonctionne est de noter que chaque nombre peut être écrit comme une somme de



Multiplication russe

les puissances de 2 : 1,2,4,8,16,32,… Par exemple, 37 = 32 + 4 + 1. Que 37 soit impair montre que le nombre 1 est présent dans cette expression. Réduire de moitié le nombre deux fois (sans tenir compte des restes) produit :

$$37 = 32 + 4 + 1 \rightarrow 16 + 2 \rightarrow 8 + 1 = 9$$

Que la réponse soit impaire indique que 4 est présent dans l'expression de 37 en tant que somme de puissances de deux. Cette réduction de moitié trois fois de plus produit la prochaine réponse impaire (correspondant à 37 réduit de moitié cinq fois en tout) indique que 32 est également présent. Ainsi, l'apparition de nombres impairs dans la colonne de gauche indique quelles puissances de deux sont utilisées pour construire le nombre 37. Pour la multiplication, notez que :

$$\begin{aligned} 37 \times 23 &= (32 + 4 + 1) \times 23 \\ &= 32 \times 23 + 4 \times 23 + 1 \times 23 = 25 \times \\ &\quad 23 + 22 \times 23 + 20 \times 23 \end{aligned}$$

Ainsi, le produit souhaité est obtenu en additionnant l'effet du doublement du nombre 23 zéro, deux et cinq fois. Ceci est accompli à l'étape 4 de la procédure.

Cette méthode fonctionne bien sûr pour n'importe quelle paire de nombres entiers que vous souhaitez multiplier. C'est une méthode efficace de multiplication, et de nombreux ordinateurs sont programmés pour calculer les produits de cette façon.

Voir aussi MULTIPLICATION ÉGYPTIENNE ; MULTIPLICATION ÉLISABÉTHANE ; MULTIPLICATION DES DOIGTS ; MULTIPLICA TION ; LES OS DE NAPIER .

Machine Translated by Google

S

Saccheri, Girolamo (1667–1733) Géométrie italienne Né le 5 septembre 1667 à San Remo, Gênes, on se souvient de Girolamo Saccheri pour sa publication de 1733 Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclide nettoyé de toute souillure), dans laquelle il tenta de prouver le POSTULAT PARALLÈLE d'Euclide comme conséquence du reste des POSTULATS D'EUCLIDE . Bien que Saccheri ait échoué dans cette tentative, il a failli être le premier à découvrir une GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE.

Saccheri a été ordonné prêtre jésuite en 1694 et a enseigné la philosophie et la théologie dans divers collèges jésuites à travers l'Italie. Il a poursuivi les mathématiques comme un intérêt extérieur pendant un certain nombre d'années avant d'être nommé chaire de mathématiques à Pavie en 1699.

Comme de nombreux érudits à travers les millénaires l'avaient également cru, Saccheri était convaincu que le cinquième postulat d'Euclide, le postulat parallèle, pouvait être déduit comme une conséquence logique des quatre axiomes restants.
Même s'il était conscient que personne n'avait réussi à démontrer que c'était bien le cas, Saccheri s'est rendu compte qu'une autre approche, indirecte, pouvait être adoptée. Il a raisonné ainsi :

> Imaginez une géométrie dans laquelle les quatre premiers axiomes d'Euclide sont vrais, mais le cinquième axiome est faux. Si le cinquième postulat peut effectivement être prouvé à partir des quatre premiers, alors nous aurions une géométrie avec une CONTRADICTION inhérente : le cinquième axiome est à la fois vrai et faux. Il faut donc étudier une théorie de la géométrie dans laquelle le postulat parallèle est faux et chercher une contradiction.

Saccheri a suivi ce plan et en a parlé dans son célèbre texte de 1733, mais n'a jamais trouvé la contradiction qu'il cherchait. Un peu plus d'un siècle plus tard, le mathématicien hongrois JÁNOS BOLYAI (1802-1860) et le savant russe NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792-1856), avec leurs découvertes de la GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE, ont prouvé de manière indépendante qu'aucune contradiction ne sera jamais découverte. Bien que Saccheri ait développé la théorie mathématique de la géométrie hyperbolique dans une large mesure, on ne peut lui attribuer le mérite de sa découverte : il n'a jamais réalisé qu'il s'agissait d'une théorie mathématique cohérente à part entière. Néanmoins, le travail de Saccheri est honoré de manière appropriée dans le domaine, avec de nombreux résultats et théorèmes qui lui sont correctement attribués. Il mourut à Milan, en Italie, le 25 octobre 1733.

échantillon Voir POPULATION ET ÉCHANTILLON.

espace d'échantillonnage L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience ou d'une action est appelé un espace d'échantillonnage. Par exemple, en lançant un dé, six scores sont possibles, donnant à l'espace d'échantillonnage l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6}. L'espace d'échantillonnage pour lancer une pièce deux fois est l'ensemble {face|face, face|face, face|face, face|face}.

Un espace échantillon peut être infiniment grand. Par exemple, l'action d'enregistrer les tailles des individus a un tableau continu de valeurs pour son espace d'échantillonnage - des valeurs entre 12 pouces et 100 pouces, disons - avec toutes les valeurs fractionnaires possibles.

Voir aussi ÉVÉNEMENT ; PROBABILITÉ.

Machine Translated by Google

scalaire Dans l'analyse VECTORIELLE , toute quantité qui est un nombre réel et non un vecteur est appelée un scalaire. Par exemple, le nombre 2 est le coefficient scalaire du vecteur v dans l'expression vectorielle 2v. Le produit scalaire de deux vecteurs (également appelé leur produit scalaire) est une règle permettant de multiplier deux vecteurs pour obtenir un résultat scalaire.

En physique, tout nombre ou mesure qui n'implique pas le concept de direction est appelé un scalaire.
Par exemple, la longueur, la masse, l'énergie et la température sont des grandeurs scalaires. La notion de vitesse est aussi une grandeur scalaire, mais celle de VITESSE ne l'est pas.

Dans la théorie MATRICE , les entrées d'une matrice sont parfois appelées scalaires. Une matrice carrée avec toutes les entrées hors de la diagonale principale égale à zéro et toutes les entrées sur la diagonale principale égale en valeur est appelée une matrice scalaire. Une telle matrice est un multiple scalaire de la MATRICE D'IDENTITÉ I.

échelle Deux figures géométriques sont dites mises à l'échelle l'une de l'autre s'il est possible de faire correspondre les points d'une figure avec des points de la seconde de telle sorte que, si P et Q sont deux points quelconques de la première figure et P ′ et Q′ sont les points correspondants de la seconde, alors le rapport des longueurs |PQ| : |P′Q′| est toujours la même valeur fixe positive k. (Le nombre k est appelé le facteur d'échelle.) LES FIGURES SIMILAIRES sont des figures à l'échelle.
Toute figure agrandie ou réduite produite par un photocopieur moderne est une version à l'échelle de la figure originale.

Si une figure géométrique est agrandie d'un facteur d'échelle k, alors toutes les longueurs de cette image augmentent (ou diminuent si 0 < k < 1) d'un facteur k. Tous les ANGLE de cette figure restent inchangés. Par conséquent, si un rectangle a × b est agrandi d'un facteur d'échelle k, alors la figure résultante reste un rectangle et a des côtés ka et kb. Par conséquent, la SURFACE de la figure a augmenté d'un facteur k 2 . Comme la notion d'aire d'un rectangle définit notre notion d'aire pour toutes les figures géométriques (telles qu'un triangle, un polygone ou un cercle), nous avons que les aires de toutes les figures augmentent, lors de la mise à l'échelle, du facteur k 2 . De même, puisqu'un prisme rectangulaire de dimensions a × b × c évolue pour devenir un prisme rectangulaire de dimensions ka × kb × kc, les volumes de tous les solides géométriques, lors de la mise à l'échelle, augmentent d'un facteur k 3

.

Ces observations ont des conséquences intéressantes sur le monde naturel. Par exemple, la quantité de perte de chaleur subie par un mammifère est proportionnelle à la quantité de surface qu'il a en contact avec l'air, considérant que la quantité de nourriture qu'un animal doit manger dans afin de générer de la chaleur corporelle dépend du volume de muscle qu'il possède. Lorsque la surface augmente d'un facteur k 2 et le volume d'un facteur k 3 , les grands mammifères possèdent un rapport surface/volume inférieur à celui des petits mammifères. Ainsi, les grands mammifères (comme les ours polaires) sont mieux adaptés aux conditions arctiques que les petits mammifères (comme les écureuils) - ils perdent moins de chaleur par unité de masse corporelle et nécessitent moins de nourriture (par rapport à leur masse) pour maintenir une production de chaleur suffisante. Les manchots royaux de l'Antarctique sont nettement plus gros que leurs homologues d'autres régions du monde. Autre exemple, la vitesse à laquelle un poisson peut se déplacer est régie par le volume de muscle qu'il possède. Les gros poissons ont l'avantage d'avoir un rapport surface/volume plus petit que les petits poissons. Non seulement ils ont plus de puissance musculaire, mais ils subissent également moins de friction de surface avec l'eau environnante (par unité de muscle) que leurs homologues plus petits.

En mathématiques, l'étude de l'échelle joue un rôle important dans la définition de la DIMENSION et est utilisée pour analyser les FRACTALES. Dans un autre contexte, les repères sur les axes d'un GRAPHIQUE D'UNE FONCTION constituent « l'échelle » du diagramme. Changer l'échelle des axes a pour effet équivalent d'agrandir ou de réduire le graphique lui-même. Les marques sur une règle sont également appelées une échelle, et mesurer le même objet avec deux règles d'échelles différentes équivaut à mesurer deux versions à l'échelle de la figure avec une seule règle.

diagramme de dispersion (diagramme de dispersion, graphique de Galton) Si une étude scientifique enregistre des informations numériques sur deux caractéristiques des individus ou des événements examinés (telles que la taille et la pointure des adultes participants, ou la température et la pression auxquelles certains événements climatiques se produisent), alors que DATA peut être représenté dans un diagramme de dispersion. Plus précisément, si la paire (xi ,yi) représente les deux faits numériques enregistrés sur le ième individu, alors le point (xi ,yi) est tracé sur les COORDONNÉES CARTÉSIENNES. Un diagramme de dispersion est le graphique résultant lorsque tous les points sont affichés. Les points ne sont pas reliés par des lignes.

Un diagramme de dispersion indiquera toute relation entre les variables x et y . Si les points semblent se situer près d'une ligne droite, on dit qu'ils sont linéairement corrélés. On peut alors effectuer un test mathématique pour déterminer le degré de corrélation en calculant le

Machine Translated by Google

valeur d'un COEFFICIENT DE CORRELATION. Si les points semblent se trouver sur un autre type de courbe, alors ils ne sont pas corrélés linéairement. Les variables qui ne sont pas corrélées produiront probablement un diagramme avec des points dispersés au hasard sur le graphique. Si tous les points sauf un semblent suivre une courbe bien définie, alors ce point exceptionnel est appelé un OUTLIER.

Voir aussi MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

notation scientifique (notation exponentielle, forme standard) Un nombre x est dit écrit en notation scientifique s'il est exprimé par un nombre compris entre 1 et 10 multiplié par une puissance de 10 :

$$x = p \times 10n$$

avec $1 \le p < 10$ et n un entier, positif ou négatif.
Par exemple, le nombre 547 s'écrit 5,47 × 102 en notation scientifique. Le nombre 0,00106 s'écrit 1,06 × 10–3 .

La notation scientifique est utile pour écrire, comparer et manipuler des nombres très grands et très petits.
Par exemple, Sir Henry Cavendish a calculé la masse de la Terre en 1798 à 6 600 000 000 000 000 000 000 tonnes. Ce nombre s'écrit de manière compacte 6,6 × 1021 .
Le diamètre d'un noyau atomique est d'environ 0,000000000000075 ou 7,5 × 10–14 m.

La puissance de 10 utilisée en notation scientifique indique le nombre de fois que 10 est utilisé comme facteur si l'exposant est positif, ou le nombre de fois que 1/10 est utilisé comme facteur si l'exposant est négatif. Par exemple, 3,2 × 103 est 3,2 × 10 × 10 × 10, ce qui équivaut à 3 200, et 0,0402 est le nombre 4,02 divisé par 10 deux fois, et donc 0,0402 = 4,02 × × =4,02 × 10–2 .

1—10 1—10

Lorsque la valeur d'une grandeur est exprimée en notation scientifique, alors la puissance de 10 utilisée est appelée l'ordre de grandeur de la grandeur. Par exemple, la vitesse de la lumière est de 3,00 × 108 m/sec et la vitesse du son dans l'air est de 3,32 × 102 m/sec. Nous pouvons facilement voir que la lumière est environ 106 ou 1 million de fois plus rapide que le son. Le diamètre de la galaxie de la Voie Lactée est de l'ordre de 1020 m.

En écrivant la mesure d'une grandeur en notation scientifique, on suppose que tous les chiffres enregistrés sont significatifs. Cela rend l' ERREUR de la mesure apparente. Les calculatrices utilisent le symbole E pour afficher une quantité en notation scientifique. Par exemple, sur un calculator, l'expression 1.2345E37 doit être interprétée comme 1.2345 × 1037. La lettre E est une abréviation pour "exposant".

sécante Une ligne qui coupe une courbe, généralement en plusieurs points, est appelée une sécante de la courbe. Si la sécante coupe la courbe en deux points, le segment de droite entre les deux points d'intersection s'appelle une ACCORD de la courbe.

En géométrie planaire, le théorème de la sécante fait référence à la propriété selon laquelle les longueurs de deux sécantes à un cercle satisfont a(a + b) = c(c + d).

Ceci est prouvé en identifiant des triangles similaires via les THÉORÈMES DU CERCLE et en établissant la correspondance $\frac{c}{a+b} = \frac{un}{c+d}$.

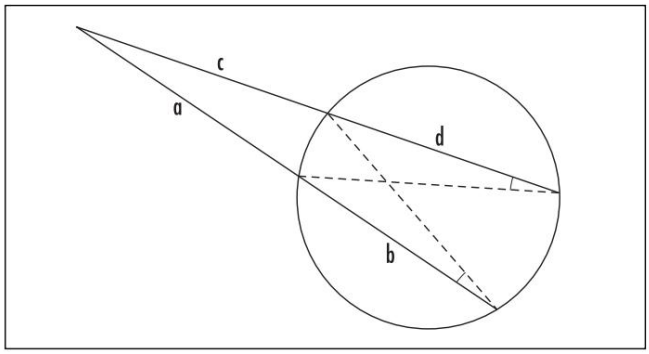
En trigonométrie, l'inverse de la fonction cosinus s'appelle la fonction sécante. Il est généralement écrit sec x. Dans un triangle rectangle, il est égal au rapport de la longueur de l'hypoténuse à celle du côté adjacent à l'angle x.

méthode de la sécante Voir MÉTHODE DE NEWTON .

sélection Voir COMBINAISON.

autoréférence Une phrase qui se réfère à elle-même est appelée une déclaration autoréférentielle. Par exemple, l'énoncé « Cette phrase comporte cinq mots » est autoréférentiel.

Les énoncés autoréférentiels peuvent être problématiques car il est souvent difficile de déterminer leur véracité ou



Théorème des deux sécantes

Machine Translated by Google

mensonge. Bien que l'énoncé ci-dessus soit clairement vrai, la valeur de vérité de « Cette phrase est fausse », par exemple, n'est pas claire : elle ne peut pas être vraie, car alors l'énoncé dit qu'il est faux, ni ne peut être faux, car alors le l'énoncé est vrai ! (Cet exemple constitue la base du PARADOXE DU MENTEUR .) L'énoncé « Cette phrase est vraie » est tout aussi problématique : elle peut être à la fois vraie et fausse. Les énoncés autoréférentiels sont interdits dans les systèmes formels de logique.

Le mathématicien autrichien KURT GÖDEL (1906-1978) a utilisé intelligemment une déclaration autoréférentielle pour prouver ses célèbres théorèmes d'incomplétude.

Voir aussi LOGIQUE FORMELLE ; L'INCOMPÉTITUDE DE GÖDEL THÉORÈME; PROBLÈME D'ARRÊT ; LE PARADOXE DE JOURDAIN .

carré semi-magique Un tableau carré de nombres dans lequel la somme des nombres dans n'importe quelle ligne ou colonne est la même est appelé un carré semi-magique. (Le tableau est dit "entièrement magique" si, en plus, les nombres de chacune des deux diagonales s'additionnent également à cette même somme.)
La somme commune des lignes et des colonnes du tableau est appelée la somme magique du tableau. Par exemple, le tableau

235
370
505

est un carré semi-magique de somme magique 10. (Ce tableau, cependant, n'est pas un CARRÉ MAGIQUE).

Les carrés semi-magiques ont un certain nombre de propriétés remarquables dans la théorie de l'algèbre MATRICIELLE . Par exemple, supposons que A et B soient des carrés semi-magiques de même taille avec des sommes magiques a et b, respectivement.
Considérez chacun comme une matrice. Alors:

1. La somme matricielle A + B est à nouveau un carré semi-magique, de somme magique a + b.
2. Le produit matriciel AB est à nouveau un produit semi-magique carré, de somme magique ab.
3. L'inverse A–1, s'il existe, est encore semi-magique, de somme magique 1/a.

Ces affirmations peuvent être prouvées en définissant J comme la matrice carrée avec toutes les entrées égales à un et en notant qu'une matrice carrée A est semi-magique avec une somme magique a si, et seulement si, AJ = aJ = JA.

Il n'existe pas de "rectangle semi-magique" si l'on insiste pour que toutes les entrées soient des nombres positifs. Supposons, par exemple, qu'un tableau comporte n lignes et m colonnes et que les entrées de chaque ligne et colonne totalisent a. Ensuite, en additionnant chacune des n lignes, la somme des entrées dans tout le tableau doit être na. De la même manière, l'addition de chacune des m colonnes montre que la somme des entrées de l'ensemble du tableau doit également être ma. Par conséquent, nous devons avoir n = m. Si l'on autorise des entrées nulles ou négatives, alors les rectangles semi-magiques sont possibles, mais la somme magique doit nécessairement être nulle.

séquence (progression) Un ensemble de nombres disposés dans une liste, chaque numéro de la liste étant spécifié sans ambiguïté, est appelé une séquence. Par exemple, la séquence 3, 5, 7, 9, 13 énumère cinq nombres spécifiques, et la séquence 1, 4, 7, 10, 13, 16, … indique une liste infinie de nombres, chaque nombre étant supérieur de 3 à son prédécesseur. Les nombres d'une séquence sont appelés ses termes ou éléments.

Parfois, les termes d'une séquence sont spécifiés sous forme de formule. Par exemple, la suite 2, 5, 10, …, $n^2 + 1$, … indique que le nième terme de la suite est donné comme un de plus que le nombre au carré. Une suite avec un nombre fini de termes est appelée une suite finie ; un avec une infinité de termes est une suite infinie. Une suite dont le nième terme est donné par an est notée {an }, soit quelque 1 fois (an). Par exemple, { } représente la séquence

$$1 - 1 + \frac{1}{n}, \ldots$$

; {{–1}n } la séquence –1,1,–1,1,… ; et $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

$\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$ la séquence $x, \frac{2x}{2!}, \frac{2x}{3!}, \frac{2x}{4!}$.

Une séquence peut également être spécifiée via une RELATION DE RÉCURRENCE. Par exemple, la suite des NOMBRES DE FIBONACCI {FN} est donnée par Fn+2 = Fn+1 + Fn avec F1 = 1 et F2 = 1.

Une suite a1 , a2 , a3 , … est dite converger vers un nombre L si les nombres an se rapprochent de plus en plus de L à mesure que n devient grand. Une telle suite est appelée une SEQUENCE CONVERGENTE, et la quantité L vers laquelle elle converge est appelée la LIMITE de la suite. Par exemple, $1 - \frac{2}{3}$ la suite $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ converge vers la valeur 1. Les suites convergentes jouent un rôle important en mathématiques. Par exemple, un NOMBRE IRRATIONNEL peut être considéré comme une limite d'une séquence de nombres rationnels

Machine Translated by Google

Nombres. (Par exemple, $\sqrt{2}$ est la limite de la suite 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142,…) Ainsi, il est possible de définir une quantité élevée à une puissance irrationnelle comme une limite de puissances rationnelles, qui sont bien définies . (Par exemple, $3^{\sqrt{2}}$ est la limite de la suite $3^{1}, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, \ldots$ = $100\sqrt{141}$.) Toute somme infinie qui est une SÉRIE peut être considérée comme une LIMITE d'une séquence de SOMMES PARTIELLES, et tout PRODUIT INFINI peut être considéré comme la limite d'une séquence de produits partiels.

Voir aussi SÉQUENCE ARITHMÉTIQUE ; BONDIR; GÉOMET SÉQUENCE RIC ; SÉQUENCE HARMONIQUE.

série Une somme de nombres s'appelle une série. La somme pourrait être finie, comme 2 + 4 + 6 + 8 + 10, par exemple, ou elle pourrait être une somme infinie, comme pour 2 + 5 + 8 + 11 + … un par exemple. Chaque nombre de la somme est appelé 14 + terme de la série.

En 1755, LEONHARD EULER introduit l'utilisation de la lettre grecque sigma Σ (S pour « somme ») pour abréger l'écriture d'une série. Par exemple, la somme des premiers cinq nombres pairs peuvent être écrits $\sum_{n=1}^{5} 2n$ et la somme de tous les nombres 1 inférieurs à un multiple de trois comme $\sum_{n=1}^{\infty} (3n - 1)$. (Voir RÉSUMÉ.)

Il n'y a pas de difficultés conceptuelles avec la notion de somme juste une collection finie de nombres. Cependant, comprendre ce que nous entendons par une somme infinie est une question délicate - de telles sommes peuvent présenter des caractères très différents. Certaines séries ne s'ajoutent clairement pas à une valeur finie (comme pour 2 + 5 + 8 + 11 + 14, …, par exemple), alors que l'on pourrait soutenir que d'autres séries infinies le font. (Le fait de marcher d'un côté de la pièce à l' autre , par exemple, suggère que la série $+ + 8^{1-} + 16^{1-} + + 32^{1-}$ « ajoute » à la valeur 1 : première marche à mi-chemin de la pièce, puis la moitié de la distance restante, puis la moitié de la distance restante, et ainsi de suite.)

Dans certains cas, la situation n'est pas du tout claire. Par exemple, la série 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + … de termes positifs et négatifs semble osciller : un nombre pair de termes s'additionne à zéro, un nombre impair à 1, et il ne semble pas possible d'attribuer une seule somme à cette série.
(Certains mathématiciens dans le passé ont fait valoir que la somme de cette série devrait être 1 une valeur comprise entre zéro et 1.) /2 ,

Ces différents comportements de séries infinies ont causé beaucoup de confusion aux érudits au cours des siècles. Les choses n'ont été correctement résolues que lorsque AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857) a introduit la notion de LIMITE et a pu l'appliquer à l'étude de l'infini.

sommes. On dit aujourd'hui qu'une série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} un = a1 +$ a2 + a3 +… converge vers une valeur finie L si la SEQUENCE des SOMMES PARTIELLES :

S1 = a1
S2 = a1 + a2
S3 = a1 + a2 + a3

tend vers L dans la limite quand n → ∞. Par exemple, la série infinie

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

a des sommes partielles :

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S = + = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{4}$$

$$S = + + = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{7}{8}$$

$$S = + + + = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{15}{16}$$

qui se rapprochent de la valeur 1. En ce sens on dit que le sens 1 somme $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$ cependant, ajouter les termes de la série est égal à 1. (Dans une pratique ne fait que nous rapprocher de plus en plus de la valeur 1 : on peut jamais l'atteindre. Nous sommes physiquement limités par le fait que nous ne pouvons pas continuer à ajouter des termes indéfiniment.)

Une série infinie qui converge est appelée une série convergente. Toute série qui ne converge pas vers une valeur finie (soit parce que la valeur de la somme semble infinie, soit parce que les sommes partielles oscillent) est dite divergente. Il existe un certain nombre de tests pour déterminer si une série converge ou non. (Voir SÉRIE CONVERGENTE.)

Machine Translated by Google

Chaque expansion décimale infinie peut être considérée comme 3
comme une série infinie. Par exemple, 0 3333 L = + $\frac{3}{\text{dix}}$ $\frac{3}{100}$
++ + $\frac{3}{1000}$ $\frac{3}{10000}$, et la série converge vers
valeur 1/3.

Voir aussi SÉRIE ALTERNÉE ; SÉRIE ARITHMÉTIQUE ;
SÉRIE EXPONENTIELLE ; SÉRIE GÉOMÉTRIQUE; GREGOIRE
SÉRIE; SÉRIE HARMONIQUE ; SÉRIE MACLAURIN ; POUVOIR
SÉRIE; SOMMES DES POUVOIRS ; SÉRIE TAILLEUR ; LE PARA DE ZÉNO
DOXES ; FONCTION ZETA.

Théorie des ensembles En gros, un ensemble est une collection de
des objets ou des nombres spécifiés d'une manière bien définie.
Chaque élément de l'ensemble est appelé un élément, ou un membre,
de l'ensemble. Par exemple, "chien" est un élément de l'ensemble
de mammifères. Si une entité a est un élément d'un ensemble S, on
écrivons a S. Si a n'appartient pas à S, on écrit a S.

Les ensembles sont généralement spécifiés soit en énumérant les
éléments de l'ensemble entre un ensemble d'accolades "{ }", soit en énumérant un
quelques éléments de l'ensemble pour indiquer un motif. Par exemple
{a,e,i,o,u} est l'ensemble constitué des cinq voyelles de
l'alphabet, et {3,6,9,12,…} est l'ensemble de tous les multiples
de 3. Il peut également être possible de définir un ensemble comme composé
d'éléments d'une collection universelle qui satisfont un
certaine propriété. Par exemple, {x R|x > 5} désigne le
ensemble de tous les nombres réels supérieurs à 5. (Certains
les mathématiciens préfèrent utiliser deux-points ":" au lieu d'un
barre verticale dans cette notation.)

L'ordre dans lequel les éléments d'un ensemble sont listés
est immatériel. Par exemple, {A,6,*} et {*,6,A} sont les
même ensemble. De même, les éléments d'un ensemble sont listés sans
répétition. Par exemple, l'ensemble {a, a, a, a, a} est l'ensemble avec
un seul élément a. L' ENSEMBLE VIDE est l'ensemble qui ne contient
aucun élément.

Deux ensembles sont réputés égaux s'ils possèdent exactement
les mêmes éléments. Par exemple, les ensembles {2,4,6,8,…}
et {n|n est un nombre compté divisible par 2} sont égaux
ensembles. Un ensemble A est dit sous-ensemble d'un ensemble B si
tout élément de A est aussi membre de B. On écrit A B si on
sont certains que les deux ensembles ne sont pas égaux, et AB si
l'égalité des ensembles est possible. Par exemple, l'ensemble de tous
multiples de 4 est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les multiples de 2.

Bien que la notion intuitive d'un ensemble en tant que collection
d'objets est aussi ancienne que le genre humain, l'idée d'un ensemble
comme un concept mathématique formel n'a pas été proposé jusqu'à
le 19ème siècle. Dans son développement de BOOLEAN ALGE BRA, le
mathématicien britannique GEORGE BOOLE (1815-1864)
introduit la notion d'ensemble comme outil fondamental pour
l'étude de la LOGIQUE FORMELLE. mathématicien allemand
GEORG CANTOR (1845-1918), dans ses tentatives de comprendre le
fondement de toutes les mathématiques, en vint à
considèrent les ensembles comme encore plus basiques et fondamentaux que les
notion de « nombre ». Cantor a correctement formalisé une théorie des
manipulations d'ensembles et a introduit la frappe
notion de CARDINALITE. Son travail l'a conduit à de profondes
aperçu de la nature des ensembles finis et infinis, conduisant
lui d'étendre le concept de nombre pour inclure plus
plus d'un type d' INFINITY.

Définir les opérations
Il existe un certain nombre de manipulations d'ensembles de base, chacune
qui peut être représenté par un DIAGRAMME DE VENN.

Intersection d'ensemble : l'intersection de deux ensembles A et B,
noté A ∩ B, est l'ensemble des éléments communs à
à la fois A et B. Par exemple, si A = {0,2,4,6,8,10,12}
et B = {0,3,6,9,12,15}, alors A ∩ B = {0, 6, 12}. Deux
les ensembles sans éléments en commun sont dits disjoints.
L'intersection de deux ensembles disjoints est l'ensemble vide.

Set Union: L'union de deux ensembles A et B, notée
A B, est l'ensemble de tous les éléments qui apparaissent soit dans
A ou en B, ou les deux. Par exemple, dans le précédent
exemple nous avons A B = {0,2,3,4,6,8,10,12,15}.
Si deux ensembles A et B contiennent chacun un nombre fini
d'éléments, alors le nombre d'éléments dans A B
est égal au nombre d'éléments dans A plus le nombre
d'éléments dans B moins le nombre d'éléments dans A
∩ B. (Cette soustraction neutralise le double comptage des éléments
appartenant aux deux ensembles.) Cette
la formule est une instance de l' inclusion générale
PRINCIPE D'EXCLUSION.
Les notions d'intersection d'ensembles et d'union d'ensembles
peut être étendu à des considérations incluant plus
que deux ensembles.

Complément d'ensemble : si un ensemble A est un sous-ensemble d'un ensemble B, alors
le complément de A dans B, aussi appelé différence d'ensemble et
noté B – A, est l'ensemble de tous les éléments de B
qui n'appartiennent pas à A. Par exemple, si A = {1,3,5}
et B = {1,2,3,4,5,6}, alors B - A = {2,4,6}. LES LOIS DE DE MOR
GAN expliquent comment le complément d'ensemble interagit
avec intersections et unions d'ensembles.

Difficulté philosophique
En 1902, mathématicien et philosophe britannique
BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872–1970)

Machine Translated by Google

stupéfait la communauté mathématique avec sa construction d'un paradoxe simple, aujourd'hui appelé RUSSELL'S PARADOXE, qui montre que notre compréhension naïve de la notion d'ensemble est fondamentalement erronée. Bien que Cantor croyait que la théorie des ensembles est le fondement de où toutes les mathématiques sont construites, il est devenu clair mathématiciens que le concept d'ensemble et ce qu'il les moyens d'être un « élément de » doivent rester des termes indéfinis. Dans les décennies qui suivirent, des mathématiciens comme ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871–1953) ont tenté de développer une théorie axiomatique des ensembles (basée sur des termes indéfinis) dont le succès évite complètement le paradoxe de Russell. A ce jour, pas tous mathématiciens s'accordent à dire que cet objectif n'a pas encore été atteint.

Voir aussi ARGUMENT ; AXIOME DE CHOIX ; CARDINAL ITY ; PRODUIT CARTÉSIEN; DIFFÉRENCE; FINI.

problème des sept ponts de Königsberg Voir GRAPHIQUE THÉORIE.

sexagésimal Voir BASE D'UN SYSTÈME DE NOMBRE.

Shanks, William (1812–1882) Calcul britannique
Né le 25 janvier 1812 à Northumberland, en Angleterre, on se souvient de William Shanks pour ses calculs extraordinairement précis de constantes mathématiques, le tout fait à la main. Shanks a évalué les LOGA RITHM naturels des nombres 2, 3, 5 et 10, chacun à 137 décimales, publia un tableau de tous les nombres premiers jusqu'à 60 000 et évalua toutes les puissances de deux. de la forme 212n+1 pour n de 1 à 60. Il a aussi évalué e et la CONSTANTE D'EULER γ à un grand nombre de décimales, mais il est surtout connu pour son calcul de π à plusieurs centaines de décimales. Il publie ce résultat en 1873.

On sait peu de choses sur la vie de Shanks. Ses méthodes de le calcul n'était essentiellement rien de plus qu'un question de patience et de FORCE BRUTE. Par exemple, Shanks a utilisé l'identité suivante pour calculer 707 chiffres de π :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ bronzer}^{-1} \frac{1}{5} - \text{bronzer}^{-1} \frac{1}{239}$$

en utilisant la SÉRIE GREGORY $\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$. En remplaçant les valeurs et en commençant à calculer les chiffres de π.

En 1946, le mathématicien anglais DF Ferguson utilisé l'identité alternative pour calculer également π :

$$\frac{\pi}{4} = 3 \text{ bronzer} 11\frac{1}{4} - \text{bronzer} \frac{1}{20} + \text{bronzer} \frac{1}{1985}$$

Il a noté que Shanks avait fait une erreur dans le 528th place et a continué à calculer correctement π à 808 décimales.

Shanks est décédé à Houghton-le-Spring, en Angleterre, en 1882. La date exacte du décès n'est pas connue.

Voir aussi E; PI.

Shannon, Claude Elwood (1916–2001) Américain
Théorie de l'information Né le 30 avril 1916 à Michigan, on se souvient de Claude Elwood Shannon comme le fondateur du domaine de la THÉORIE DE L'INFORMATION. Son article fondateur, « The Mathematical Theory of Communication », publié avec Warren Weaver en 1949, les principes de la science de la communication et introduit l'idée révolutionnaire que l'information (images, mots, sons) pourraient être transmis avec succès à travers un fil sous la forme d'une séquence de 0 et de 1. (En haut à ce moment-là, on a pensé qu'il faudrait transmettre des ondes électromagnétiques par des fils à accomplir cet exploit.) Cet article a introduit le terme peu pour la première fois. Shannon a également développé un moyen mathématique pour mesurer le contenu de l'information d'un message.

Shannon a obtenu un diplôme de premier cycle en mathématiques et de génie électrique de l'Université du Michigan en 1936. Il a obtenu un doctorat travailler au Massachusetts Institute of Technology de 1940 et a travaillé sur la construction d'un premier type d'ordinateur mécanique. Il a démontré, pour la première temps, qu'il est possible de combiner l'algèbre booléenne avec des relais électriques et des circuits de commutation pour créer un machine capable de "faire" de la logique mathématique.

En 1941, Shannon rejoint AT&T Bell Telephones en New Jersey en tant que mathématicien de recherche et a publié son œuvre célèbre 7 ans plus tard. Cette pièce comprenait également la base mathématique de la détection d'erreur : en ajoutant

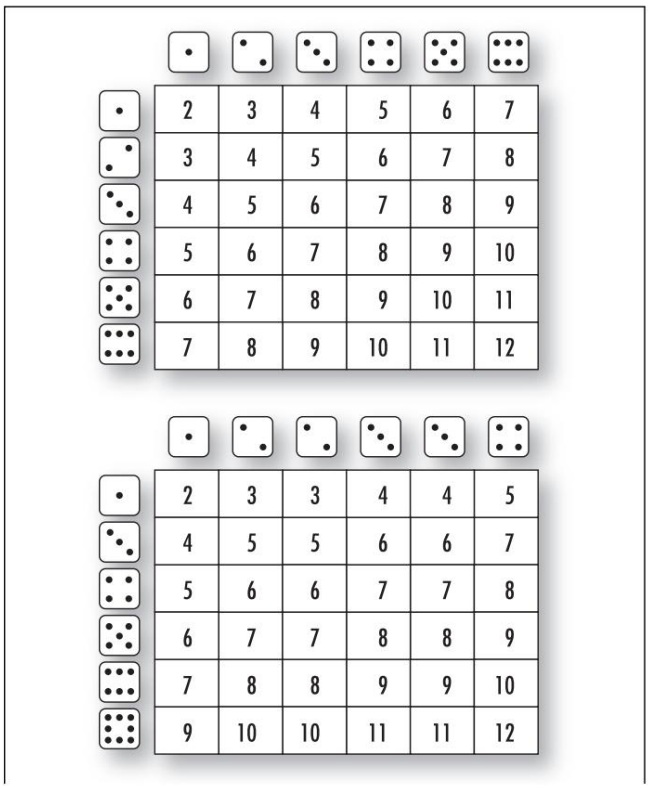
Machine Translated by Google

bits supplémentaires à un message, Shannon a montré qu'il est possible de détecter et de corriger les erreurs qui se produisent lors de la transmission des messages à cause du bruit.

Shannon a accepté un poste de professeur au Mas sachusetts Institute of Technology en 1957, mais est resté consultant chez Bell Telephones. Il a poursuivi ses travaux sur l'algèbre booléenne, l'appliquant au nouveau domaine de l'intelligence artificielle. Shannon a produit les premiers programmes efficaces de jeu d'échecs.

Shannon a reçu de nombreuses distinctions pour son travail, dont la médaille nationale des sciences en 1966 et la médaille d'or de l'Audio Engineering Society en 1985. Il est décédé à Medford, Massachusetts, le 24 février 2001.

Dés Sicherman Une paire de dés avec des faces renumérotées 1, 2, 2, 3, 3, 4 et 1, 3, 4, 5, 6, 8 sont appelés dés Sicherman, du nom de leur découvreur, le colonel George Sicher, homme de Buffalo, New York. Ces dés ont une propriété remarquable : la PROBABILITÉ de lancer une somme particulière (de 2 à 12) avec les dés de Sicherman correspond à la probabilité de lancer cette même somme avec un



Comparaison des dés ordinaires avec les dés de Sicherman

paire de dés standard. Ainsi, les dés Sicherman peuvent être utilisés dans les jeux de dés sans affecter les chances du jeu.

Les tableaux ci-dessous montrent tous les résultats possibles du lancer d'une paire de dés standard (en haut) et d'une paire de dés Sicherman (en bas), 36 combinaisons en tout pour chaque paire. Toutes les sommes apparaissent également souvent dans chaque tableau, et donc en effet toutes les probabilités de somme sont identiques. (Les deux tables possèdent trois 10, par exemple. Les chances de lancer un 10 sont donc les mêmes pour chaque paire : $\frac{3}{36}$ ou $\frac{1}{12}$).

Les dés de Sicherman sont uniques : il n'y a pas d'autre moyen de renuméroter les faces de deux cubes avec des entiers positifs donnant deux dés avec les mêmes probabilités de somme que les dés standards.

Les dés tétraédriques (chaque dé ayant la forme d'un TÉTRAÈDRE) ayant des faces étiquetées 1, 2, 2, 3 et 1, 3, 3, 5 produisent les mêmes probabilités de somme que les dés tétraédriques ordinaires étiquetés 1, 2, 3, 4 et 1, 2, 3, 4.

crible d'Ératosthène (crible d'Eratosthène) Bien qu'il n'y ait pas de formule connue pour générer des nombres PREMIERS , il existe une méthode simple pour « filtrer » les nombres premiers entre 1 et n'importe quel nombre donné N. La procédure s'appelle le crible d'Eratosthène et est attribué au savant du IIIe siècle ÉRATOSTHÈNE DE CYRÈNE, un contemporain grec d' EUCLIDE (vers 300–260 avant notre ère).
La méthode se déroule comme suit :

1. Énumérez tous les entiers positifs de 2 à N.
2. Laissez le chiffre 2, mais rayez chaque deuxième chiffre après celui-ci. Cela supprime tous les multiples de 2 supérieurs à 2.
3. Laissez le prochain nombre restant, 3, mais rayez tous les troisièmes nombres après (s'ils ne sont pas déjà supprimés). Cela supprimera tous les multiples de 3 supérieurs à 3.
4. Laissez le prochain nombre restant, 5, et supprimez tous ses multiples.
5. Continuez ce processus en allant toujours au prochain nombre restant et en barrant les multiples de celui-ci qui se produisent plus loin dans la liste.
6. Les nombres entiers non supprimés à la fin de ce processus sont les nombres premiers entre 2 et N.

Tout nombre k dans la liste qui n'est pas premier peut être factorisé, k = a × b, et sera donc supprimé lors de l'examen des multiples de a, par exemple. Seuls les nombres de la liste qui ne sont pas pris en compte, c'est-à-dire les nombres premiers, survivront.

Machine Translated by Google

Tout NOMBRE COMPOSITE plus petit que N a au moins un facteur premier plus petit que la racine carrée de N. (Un nombre k plus petit que N ne peut pas être factorisé comme $k = a \times b$ avec a et b plus grands que $\sqrt{N}$.) Cela montre que lors de l'exécution de cette procédure, il suffit de supprimer les multiples de nombres premiers inférieurs à la racine carrée de N. Par exemple, pour trouver tous les nombres premiers de 2 à 100, supprimez seuls les multiples de 2, 3, 5 et 7 de la liste. Cette observation simplifie considérablement la procédure.

Dans les années 1800, l'astronome polonais Yakov Kulik a utilisé cette méthode pour trouver tous les nombres premiers entre 1 et 100 000 000. Il lui a fallu plus de 20 ans pour achever la tâche. Malheureusement, la bibliothèque à laquelle Kulik a donné son manuscrit a perdu les pages qui énuméraient les nombres premiers qu'il a découverts entre 12 642 000 et 22 852 800.

chiffres significatifs Voir ERREUR.

figures similaires Deux figures géométriques sont similaires si elles ont la même forme mais pas nécessairement la même taille. (Les images en miroir sont autorisées.) Plus précisément, deux POLYGONES sont similaires si, sous une certaine correspondance entre leurs côtés et leurs sommets, les angles intérieurs correspondants sont égaux et les côtés correspondants diffèrent en rapport d'un facteur constant. La constante de proportionnalité est appelée facteur d'échelle.

Par exemple, deux carrés quelconques sont similaires. Si la longueur du côté d'un carré est le double de la longueur du côté de l'autre, disons, alors les deux figures ont un facteur d'échelle de 2. Toute figure agrandie ou réduite en taille, à l'aide d'un photocopieur par exemple, produit une nouvelle figure semblable à la première.

Deux TRIANGLES sont semblables si :

1. Les trois angles intérieurs d'un triangle correspondent aux angles intérieurs de l'autre.

Cela s'ensuit, puisque la LOI DES SINS montre que les côtés correspondants auront aussi le même rapport. Ceci est souvent appelé la règle AAA.

2. Trois côtés d'un triangle sont proportionnels, par le même facteur d'échelle, aux trois côtés de l'autre.

Cette fois, la LOI DES SINS montre que les trois angles correspondants sont égaux.

3. Un angle d'un triangle est égal à un angle de l'autre, et les côtés formant l'angle dans l'un sont proportionnels aux mêmes côtés dans l'autre.

La LOI DES COSINS montre que les tiers des côtés des triangles sont dans la même proportion.

L'identification de triangles similaires est souvent l'étape clé pour prouver des résultats géométriques. Les THÉORÈMES DU CERCLE, LE THÉORÈME DE PTOLÉMÉE et le théorème SECANT , par exemple, le démontrent.

Deux cercles quelconques sont similaires. Ce constat explique pourquoi la valeur π est la même pour tous les cercles.

Deux figures similaires avec un facteur d'échelle de 1 sont appelées FIGURES CONGRUEUSES. Une figure composée de parties similaires à la figure entière est un FRACTALE.

Voir aussi AAA/AAS/ASA/SAS/SSS ; GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE.

intérêt simple Voir INTÉRÊT.

Simpson, Thomas (1710–1761) Tournesol britannique Né le 20 août 1710 dans le Leicestershire, en Angleterre, on se souvient de Thomas Simpson en mathématiques uniquement pour la règle qui porte à tort son nom.

Avec une éducation limitée, Simpson a commencé sa carrière en tant qu'astrologue professionnel et homme de confiance. Après un malheureux incident en 1733 qui l'obligea à quitter son comté natal du Leicestershire, Simpson accepta un poste d'enseignant du soir à Derby. Son intérêt pour les mathématiques se développe alors.

Simpson a publié des articles mathématiques dans le Ladies 'Diary et s'est rapidement forgé une réputation d'érudit compétent dans le domaine du calcul . En 1737, il écrivit A New Treatise of Fluxions et suivit ce travail avec la publication de quatre textes plus influents au cours des 6 années suivantes. Son écriture lui a valu une renommée considérable en Angleterre à l'époque. En 1743, il est nommé deuxième maître de mathématiques à l'Académie royale militaire et en 1735, il est élu membre de la ROYAL SOCIETY.

Plus tard dans sa carrière, alors qu'il travaillait toujours comme professeur de mathématiques, Simpson a également publié trois manuels élémentaires à succès : Algebra (1745), avec 10 éditions en anglais ; Géométrie (1747), avec six éditions anglaises, cinq éditions françaises et une édition néerlandaise ; et Trig onometry (1748), avec cinq éditions anglaises.

Machine Translated by Google

LA RÈGLE DE SIMPSON , comme on l'appelle aujourd'hui, est apparue dans son texte de 1743 Mathematical Dissertations. Que son nom se soit attaché à une technique qu'il n'a manifestement pas inventée, mais simplement décrite, témoigne de l'influence et de la popularité de son écriture. Simpson est décédé à Market Bosworth, en Angleterre, le 14 mai 1761.

Règle de Simpson Voir INTÉGRATION NUMÉRIQUE.

équations linéaires simultanées Une équation est dite linéaire si chaque terme de l'équation contenant une variable contient une seule variable élevée à la puissance première. Par exemple, $3x + 4 = 6$ et $2x + 7y – z = 11$ sont des équations linéaires (mais $2xy + z = 5$ et $3x + 4 = 6$, par exemple, ne le sont pas). Un ensemble d'équations linéaires à plusieurs variables devant être vraies simultanément pour une certaine valeur de ces inconnues est appelé un système d'équations linéaires simultanées. Par exemple, les équations

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 16 \\ 2x – y &= 1 \end{aligned}$$

forment une paire d'équations linéaires simultanées. Cette paire a pour solution $x = 2$ et $y = 3$.

Il existe un certain nombre de méthodes pour résoudre des paires d'équations linéaires simultanées.

Méthode d'élimination : multiplier chaque équation par une quantité appropriée de sorte que les coefficients de l'une des variables correspondent. La solution du système apparaît alors facilement si l'on soustrait les deux équations. Par exemple, pour résoudre

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 3x – y &= 11 \end{aligned}$$

multiplier la première équation par 3 pour obtenir le couple équivalent :

$$\begin{aligned} 3x + 9y &= 21 \\ 3x – y &= 11 \end{aligned}$$

La soustraction donne l'équation : $(3x + 9y) – (3x – y) = 21 – 11$, c'est-à-dire $10y = 10$, indiquant que y est égal à 1. Puisque $x + 3y = 7$, nous voyons maintenant que x doit être égal à 4.

Méthode de substitution : Résolvez pour l'une des variables dans une équation et insérez le résultat dans la deuxième équation. Par exemple, pour le couple

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 3x – y &= 11 \end{aligned}$$

la première équation donne $x = 7 – 3y$. La substitution dans la deuxième équation donne $3 (7 - 3y) - y = 11$, c'est-à-dire $21 - 10y = 11$, ou, encore une fois, que $10y = 10$. La solution du système suit comme indiqué dans la méthode précédente.

Méthode de mise en équation : Résolvez les deux équations pour une variable et égalisez les résultats. Dans notre exemple, la première équation donne $x = 7 – 3y$ et la seconde, $x = \frac{11 + y}{3}$. L'équation donne $7 – 3y = \frac{11 + y}{2}$, ou $21 - 9y = 11 + y$. La résolution de y donne $y = 1$, d'où il s'ensuit que $x = 4$.

On peut aussi chercher une SOLUTION GRAPHIQUE. Une telle approche montre que toute paire d'équations linéaires simultanées a une solution unique (comme pour la paire ci-dessus), aucune solution ou une infinité de solutions. Il est impossible qu'une paire d'équations linéaires ait exactement deux solutions distinctes, par exemple.

Le processus d' ÉLIMINATION GAUSSIENNE fournit les moyens de résoudre des systèmes d'équations linéaires à plus de deux inconnues. Cette approche donne des résultats clés sur la théorie des matrices et l'étude des
ALGÈBRE LINÉAIRE.

Voir aussi HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET DE L'ALGÈBRE (essai); MATRICE; SYSTÈME D'ÉQUATIONS.

point singulier (singularité) Tout point sur une courbe auquel il n'y a pas une seule TANGENTE bien définie à la courbe est appelé un point singulier. Il se peut que la courbe se croise en ce point, auquel cas il y a deux tangentes à la courbe, ou que le point soit un CUSP ou un POINT ISOLÉ, par exemple.

Voir aussi DOUBLE POINT.

Unités SI Adopté en 1960 par un accord international, le Système International d'Unités (unités SI) est un système cohérent d'unités utilisées à des fins scientifiques. Il est basé sur sept unités de base fondamentales dont le mètre (m), le kilogramme (kg) et la seconde (s) pour mesurer la longueur, la masse et le temps, respectivement, sont les

Machine Translated by Google

les plus courantes en mathématiques. Il existe deux unités supplémentaires : le radian utilisé pour mesurer l'ANGLE et le stéradian pour mesurer un ANGLE SOLIDE. En multipliant et/ou en divisant ces éléments de base et supplémentaires unités, d'autres unités dérivées sont obtenues. Par exemple, l'unité de surface est le « mètre carré » (mètre fois mètre), et l'unité de vitesse est "mètre par seconde" (mètre divisé par seconde). Il existe 18 unités dérivées spécifiques qui ont leurs propres noms, comme un Newton (N) pour un mesure de la force (exprimée en kilogrammes fois mètre par seconde au carré). Le tableau suivant répertorie les éléments de base et unités supplémentaires et leurs symboles.

Quantité	Nom	Symbole
longueur	mètre	m
masse	kilogramme	kg
temps	seconde	s
quantité de	Kelvin	K
température d'une substance	taupe	mol
courant électrique	ampère	UN
intensité	candela	CD
lumineuse angle	radian	super
(supplémentaire) angle solide (supplémentaire)	stéradien	sr

Les multiples et les fractions d'unités sont définis en multiples de 1 000 et sont désignés par des préfixes ou des symboles spéciaux. Celles-ci sont présentées dans le tableau ci-dessous. Par exemple, 1 mégaampère équivaut à 106 ampères et 1 millimètre équivaut à 10–3 mètres.

1024 yotta- (Y) grec : okákis : huit fois (24 = 8 × 3)
1021 zetta- (Z) Grec : heptákis : sept fois (21 = 7 × 3)
1018 examen (E) Grec : hexákis : six fois (18 = 6 × 3)
1015 peta- (P) Grec : pentákis : cinq fois (15 = 5 × 3)
1012 téra- (T) Grec : téras : monstre
109 giga- (G) grec : gíg– as : géant
106 méga- (M) grec : mégas : grand
103 kilo- (k) grec : chílioi : mille
10–3 milli- (m) Latin : mille : mille
10–6 micro- (μ) Grec : m_ikrós : petit
10–9 nano- (n) Grec : n_anos : nain
10–12 pico- (p) Italien : piccolo : petit
10–15 femto- (f) Danois : femten : 15
10–18 atto- (a) Danois : atten : 18
10–21 zepto- (z) Grec : heptákis : sept fois
10–24 yocto- (y) grec : oktákis : huit fois

Les préfixes supplémentaires suivants sont également souvent utilisés :

102	hecto-	(h)	Grec : hekaton : cent
10	déca-	(da)	Grec : déka : dix
10–1	déci-	(d)	Latin : décim : dix
10–2	centi-	(c)	Latin : centum : cent

Le système métrique, un système d'unités de quantification de mesure en termes de puissances de 10, a d'abord été établi en 1790 par un comité spécial des poids et mesures de l'Académie française des sciences. Étonnamment, bases autres que 10 ont été sérieusement envisagées au temps. (Il y avait des arguments pour utiliser le duodécimal système de base 12, ainsi que la considération d'une base 11, espérant profiter de la base PRIME .)
Au fur et à mesure des progrès scientifiques réalisés au cours des siècles, les système métrique a été étendu pour inclure des mesures du courant électrique, de l'intensité lumineuse, de la température et grandeurs moléculaires. Ce système étendu d'unités SI décrit a été adopté lors de la 11e Conférence générale internationale des poids et mesures en 1960.
Des ajustements mineurs au système ont été apportés lors de réunions ultérieures.

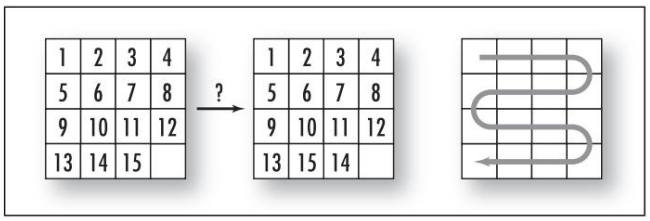
lignes obliques Deux lignes droites non parallèles dans un espace tridimensionnel sont obliques si elles ne se coupent pas. Non paire de lignes obliques se trouvent dans un plan commun.

asymétrie Mesure du degré d'asymétrie d'un DISTRIBUTION est appelée son asymétrie. Si une distribution a une courte queue à gauche et une longue à droite, alors on l'appelle positivement asymétrique, et négativement faussé si la situation est inversée.

Voir aussi STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

slide 15 puzzle (Boss puzzle, quinze puzzle) En 1878 célèbre casse-tête américain Sam Loyd (1841-1911) a présenté son "Boss puzzle", aujourd'hui appelé la diapositive 15 puzzle. Le jeu se compose de 15 tuiles, numérotées une à 15, tenus dans un cadre 4 × 4 avec un espace laissé libre. Les tuiles peuvent glisser horizontalement ou verticalement dans la cellule vide, mais tous les mouvements sont confinés au plan du cadre. Le défi est de convertir le donné disposition des tuiles montrées en haut à gauche de celle montrée

Machine Translated by Google



Diapositive quinze puzzle

en haut à droite, avec les tuiles « 14 » et « 15 » inversées. Loyd a offert un prix de 1 000 $ à la première personne soumettant une solution correcte.

Il s'avère, comme Loyd le savait bien, que cette énigme est impossible à résoudre. La théorie des PER MUTATIONS paires et impaires explique pourquoi.

En suivant le chemin serpentin indiqué ci-dessus et en ignorant l'emplacement de la cellule vide, on peut enregistrer n'importe quel arrangement de tuiles sous forme de liste des nombres 1 à 15. Par exemple, l'arrangement initial des tuiles apparaît comme la liste :

1 2 3 4 8 7 6 5 9 10 11 12 15 14 13

Puisqu'un nombre plus grand apparaît neuf fois à gauche d'un nombre plus petit, cette liste représente une permutation impaire des nombres 1 à 15.
Notez que si l'on fait glisser une tuile horizontalement pendant le déroulement du jeu, la liste correspondante représentant l'arrangement des tuiles ne change pas. Si, d'autre part, on fait glisser une tuile verticalement, le numéro de cette tuile décale d'un nombre pair de places vers le haut ou vers le bas la liste qui représente l'arrangement des tuiles. Le décalage d'une place vers la gauche ou vers la droite peut être effectué par une seule transposition, de deux places vers la gauche ou la droite peut être effectué par deux transpositions, et ainsi de suite. Ainsi, le résultat du décalage d'un nombre pair de places vers la gauche ou vers la droite est le résultat de l'application d'un nombre pair de transpositions, préservant ainsi l'uniformité ou l'impair de l'arrangement des tuiles. En jouant au jeu, alors - étant donné que l'arrangement initial des tuiles correspond à une permutation impaire - l'arrangement des tuiles restera à jamais une permutation impaire. Il est alors impossible d'obtenir la disposition qu'appelle le but du puzzle, à savoir 1 2 3 4 8 7 6 5 9 10 11 12 14 15 13, une permutation paire.

Les mathématiciens ont montré que tous les arrangements de tuiles qui correspondent à des permutations impaires des nombres 1 à 15 peuvent en fait être obtenus par le jeu du jeu.

règle à calcul On peut effectuer des additions simples à l'aide de deux règles ordinaires. Pour calculer 2,7 + 3,5, par exemple, placez la fin (position "0") d'une règle à l'emplacement 2,7 le long de la deuxième règle. Ensuite, lisez 3,5 unités le long de la première règle. L'étiquette correspondante sur la deuxième règle est alors la somme souhaitée 6.2.

Le mathématicien écossais JOHN NAPIER (1550-1617) a découvert les LOGARITHMES vers le tournant du 17e siècle. Ces fonctions ont la propriété remarquable de convertir des calculs de multiplication en calculs d'addition plus simples : log(N × M) = logN + logM.

En 1622, le mathématicien anglais WILLIAM OUGHTRED (1574-1660) s'est rendu compte que deux règles coulissantes, avec des étiquettes placées en ÉCHELLE LOGARITHMIQUE, effectueraient physiquement l'addition de logarithmes, et permettraient ainsi de simplement "lire" le résultat de toute multiplication souhaitée. . (A titre d'exemple très simple, imaginons que nous souhaitions calculer 100 × 1 000 avec une paire de règles loga rithmiques en base 10. Notez alors que la marque avec l'étiquette 100 est placée à 2 pouces le long de la règle, et la marque étiquetée 1 000 3 pouces . le long de la règle. La somme 2 + 3 est, bien sûr, de 5 pouces le long de la règle. Mais cette cinquième position est étiquetée 10 000, qui est en fait le produit 100 × 1 000.)

Le dispositif mécanique d'Oughtred composé de deux règles coulissantes s'appelle une règle à calcul. L'appareil a été inspiré par les travaux du savant anglais Edmund Gunter (1581-1626), qui avait utilisé une seule règle et une paire de pointeurs pour accomplir le même exploit.

Les règles à calcul étaient populaires jusque dans les années 1970 avant l'avènement de la calculatrice de poche.
Voir aussi LES OS DE NAPIER .

pente (pente, pente) La pente d'une ligne est une mesure de sa pente. Cela peut être déterminé de plusieurs façons :

1. Numériquement : Deux quantités sont dites linéairement liées si un changement d'unité dans une quantité produit un changement constant dans l'autre. La valeur de ce changement constant est la pente de la relation. Par exemple, le tableau suivant montre le bénéfice réalisé pour une entreprise qui vend des widgets.

Machine Translated by Google

Nbre de widgets	0	1	2	3	4	5
vendus Bénéfice (en dollars)	0	15	30	45	60	75

La relation est certainement linéaire, car chaque widget supplémentaire vendu produit la même augmentation de 15 $ en bénéfice réalisé. Cette relation a une pente de 15. Notez que en vendant deux widgets supplémentaires, le profit est augmenté de 30 $, et en vendant trois widgets supplémentaires, le profit augmente de 45 $, et ainsi de suite. En particulier, le rapport de l'augmentation du profit à l'augmentation de la production est toujours la même: $\frac{45-3}{30-2} = \frac{30}{2} = 15$. En général, si deux quantités x et y sont linéairement liées, la pente de la relation est calculé comme suit :

$$\text{pente} = \frac{\text{changement des valeurs y}}{\text{modification des valeurs x}}$$

En particulier, si la valeur x1 produit la valeur de sortie y1 et x2 la sortie y2 , alors :

$$\text{pente} = \frac{a_2 - a_1}{x_2 - x_1}$$

2. Graphiquement : tracer les points d'une relation linéaire produit un graphique en ligne droite. La pente de la ligne est déterminé en plaçant la pointe d'un crayon à n'importe quel endroit sur la ligne, en le déplaçant horizontalement d'une unité vers la droite et en mesurant le distance verticale que la pointe du crayon doit parcourir dans l'ordre pour revenir à la ligne. Un mouvement vertical vers le haut est considéré comme positif et une verticale descendante mouvement négatif. Représenter graphiquement les points de l'exemple wid get/profit montre à nouveau que ce relation a une pente de 15.

Peu importe le point sur la ligne que l'on choisit initialement : tous les emplacements donnent la même valeur pour le pente par cette méthode. (Ce n'est vrai que pour les graphiques en ligne droite.) On peut également faire une course horizontale d'un longueur différente de 1 pour produire une valeur différente pour la montée qu'il faut prendre pour revenir au graphique. Le rapport "monter sur courir", cependant, adoptera toujours le même valeur. On demande souvent aux élèves de l'école de mémoriser ce slogan comme définition de la pente :

$$\text{pente} = \frac{\text{changement des valeurs y}}{\text{modification des valeurs x}} = \frac{\text{"augmenter"}}{\text{"courir"}}$$

Si (x1 , y1) et (x2 , y2) sont deux points quelconques sur la droite, alors nous pouvons interpréter la quantité x2 – x1 comme une course avec augmentation correspondante y2 - y1 et donc, encore une fois, nous voyons que la pente est donnée par :

$$\text{pente} = \frac{a_2 - a_1}{x_2 - x_1}$$

Une droite a une pente positive si, en se déplaçant de gauche à à droite, la droite monte en valeur, pente négative si elle diminue de valeur (donc un pas d'unité horizontalement vers le droit nécessite une hausse négative pour revenir à la droite), et pente nulle si elle est horizontale.

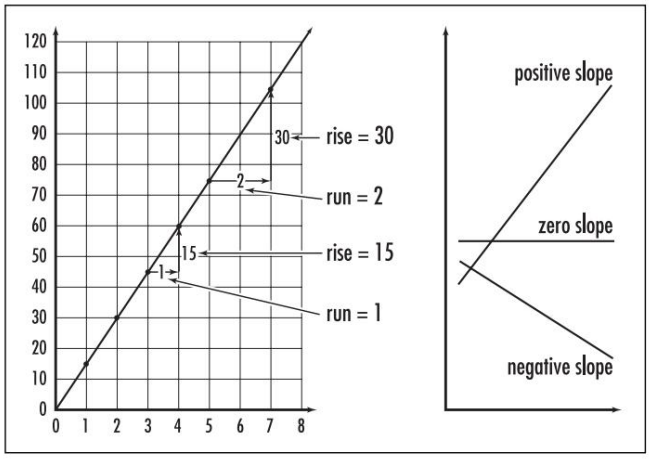
Les panneaux de signalisation routière utilisent souvent une version de ce interprétation de la pente pour avertir les conducteurs de la pente de la route. Par exemple, un panneau indiquant « 15 % 7 miles suivants » avertit les conducteurs que pour chaque mile parcouru pendant les 7 milles suivants, l'altitude de la route chute de 0,15 mille. (La pente de la route est donc de -0,15.)

3. Algébriquement : L' EQUATION D'UNE LIGNE est généralement écrit sous la forme y = mx + b, où m et b sont Nombres. Nous voyons qu'une augmentation de la valeur x de 1 l'unité entraîne une augmentation de la valeur y de m unités :

$$\text{Si } x \to x + 1, \text{ alors } y = mx + b \to m(x + 1) + b$$
$$= (mx + b) + m = y + m.$$

Ainsi la pente de la droite est m. Nous avons:

La pente d'une droite est simplement le coefficient de la variable x dans l'équation y = mx + b.



Pente

Machine Translated by Google

Deux lignes différentes avec la même pente sont PARAL LEL. Par exemple, les droites y = 2x + 3 et y = 2x – 5 sont parallèle. Si deux droites PERPENDICULAIRES ont des pentes m1 et m2 respectivement, alors la relation suivante est vraie :

$$m1 \cdot m2 = -1$$

On peut le voir en traçant les segments de ligne horizontaux et verticaux pour la course et la montée pour le premier droite (et donc m1 = $\frac{\text{augmenter}}{\text{courir}}$), puis en faisant pivoter cette image 90° dans le sens antihoraire. Dans cette nouvelle image, ce qui était la course est maintenant une montée pour une ligne perpendiculaire, et ce qui était une montée est maintenant une course pointant vers la montée direction. Ainsi m2 = – $\frac{\text{opposée}}{\text{courir}} = -\frac{1}{m1}$.

Le CALCUL DIFFÉRENTIEL traite de la question de définir la pente pour les courbes qui ne sont pas des lignes droites.

Voir aussi COLLINAIRE ; PENTE; TANGENTE.

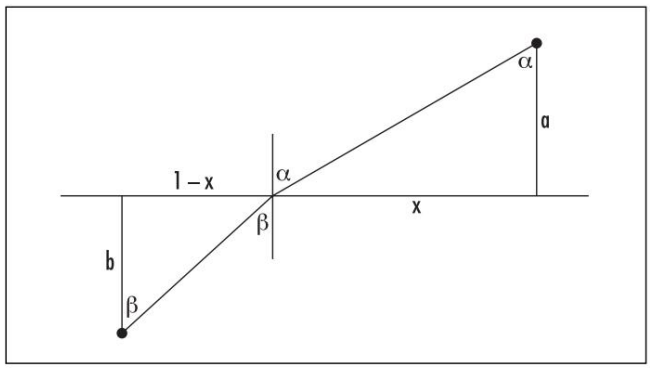
Loi de Snell Ce principe, décrit pour la première fois en 1621 par Le mathématicien néerlandais Willebrord van Roijen Snell, est mieux expliqué par l'étude d'une OPTIMISATION problème. Nous l'exprimons ici dans un cadre moderne.

Un sauveteur part au secours d'un nageur en détresse. Le nageur qui se noie, cependant, n'est pas directement devant la bouée de sauvetage mais à un angle le long du rivage. Pour atteindre le nageur, la bouée de sauvetage doit courir sur le sable et ensuite plongez dans l'eau et nagez à la rescousse. UN question se pose : comme la bouée de sauvetage peut courir beaucoup plus vite qu'elle ne peut nager, vers quel point le long du rivage doit-elle courir de sorte que le total le temps qu'il faut pour atteindre le nageur est au minimum ?

Étonnamment, le chemin en ligne droite entre la station de sauvetage et le nageur n'offre pas l'itinéraire le plus rapide.

Pour analyser ce problème, soit a, b, α et β les distances et les angles indiqués. Pour plus de facilité, supposons que le déplacement horizontal entre la bouée de sauvetage et le le nageur est de 1 unité. Supposons également que la vitesse de la bouée de sauvetage à terre est de r mètres par seconde, et dans l'eau, s mètres par seconde. On veut trouver la longueur x le long de la rive qui produit un chemin nécessitant le moins de le temps de suivre.

D'après le THÉORÈME DE PYTHAGORE , le total distance parcourue par la bouée de sauvetage sur le rivage est $\sqrt{a^2 + x^2}$ mètres.



loi de Snell

Comme la vitesse est égale à la distance dans le temps, cela prend un total de $\frac{\sqrt{\text{hache}^{2}+2}}{r}$ secondes pour terminer. De la même façon, on voit que la bouée de sauvetage sera dans l'eau $\frac{\sqrt{b^2 + -(1\ X)^2}}{s}$ avant d'atteindre le nageur. Ainsi, pour cette position x le long du rivage, le temps total T(x) mis pour atteindre le nageur est donné par :

$$T(x) = \frac{\sqrt{\text{hache}^{2}+2}}{r} + \frac{\sqrt{b2 + -(1\ x)^2}}{s}$$

secondes. Nous utilisons maintenant les techniques de CALCULUS pour trouver un minimum local pour cette fonction. (Voir MAXIMUM/ LE MINIMUM.)

Un minimum local de cette fonction ne peut se produire que si la dérivée première de cette fonction est nulle. Ce donne :

$$T'(x) = \frac{x}{Rax\sqrt{22,21}} - \frac{1-x}{qn\sqrt{\quad + (\quad x)^2}} = 0$$

Le test de la dérivée seconde montre qu'il s'agit bien correspondent à un minimum. Ainsi, la solution optimale à ce problème se produit lorsque la quantité $\frac{x}{Rax\sqrt{2\,2+}}$ équivaut à $\frac{1-x}{qn\sqrt{12x+(-)^2}}$. Remarquez dans le schéma que $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{\text{hache}^{2}+2}}$ et $\sin\beta = \frac{1-x}{\sqrt{\text{boîtes}^{2}(\ )}}$ Ainsi, le sauveteur doit courir jusqu'à la position sur le rivage de telle sorte que

Machine Translated by Google

les angles α et β satisfont la relation fondamentale sin

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{\text{péché}\,\beta}{s}$$

En général nous avons :

Si la vitesse de déplacement à travers un milieu est s unités par seconde, et par seconde moyen est de r unités par seconde, alors l'optimum itinéraire de déplacement à travers une frontière séparant les deux milieux se produisent lorsque l'angle d'incidence α et l'angle de réfraction β satisfont la relation:

$$\frac{\text{péché}\,\alpha}{r} = \frac{\text{péché}\,\beta}{s}$$

Ce principe est aujourd'hui appelé loi de réfraction de Snell. Snell a observé qu'un faisceau de lumière se déplaçant d'un milieu à l'autre, disons, de l'air à l'eau, obéit à ce loi. Lumière d'une couleur, c'est-à-dire d'une couleur particulière longueur d'onde, voyagera à travers le même milieu à une vitesse différente de celle d'un faisceau d'un autre couleur, et aura donc son propre angle de réfraction. Pour cette raison, la lumière blanche - la composition de toutes les couleurs - se sépare en un arc-en-ciel de couleurs à l'échange d'un nouveau média. Les gouttelettes d'eau suspendu dans l'air après un orage séparer les couleurs de la lumière du soleil de cette manière pour produire un grand arc-en-ciel visible du sol.

bulles de savon Le film d'une solution savonneuse est élastique et a la propriété de toujours "se replier sur lui-même" pour créer une surface de moindre surface possible. Notant qu'une bulle de savon, contenant un volume fixe d'air, adopte toujours la forme d'une SPHÈRE fournit une démonstration physique des éléments tridimensionnels suivants variante du PROBLÈME ISOPERIMETRIQUE :

De toutes les figures à volume fixe, la sphère a la plus petite surface.

Mathématicien polonais Hermann Schwarz (1843-1921) fourni une preuve mathématique de cette observation en 1882.

De nombreuses questions fondamentales sur les arrangements de bulles séparant plus d'une chambre d'air ne sont pas résolues. En 2000, les mathématiciens Frank Morgan, Michael Hutchings, Manuel Ritoré et Antonio Ros ont dirigé pour prouver que la double bulle familière vue dans la nature (deux portions d'une sphère attachées à une frontière courbe séparant les deux volumes) est bien la forme de surface totale minimale pour une configuration englobant deux chambres à air. Le problème de triple bulle correspondant reste ouvert.

angle solide Tout comme un ANGLE en deux dimensions l'espace est la mesure de la quantité de longueur d'une unité CERCLE "coupé" par deux rayons décrivant l'angle, un l'angle solide dans l'espace tridimensionnel est la quantité de surface d'une SPHÈRE unitaire interceptée par un faisceau de rayons émanant du centre de la sphère. Un solide l'angle n'a pas besoin d'avoir une forme particulière ; il est défini par la nappe d'un CONE, qui peut être de n'importe quelle forme.

L'unité de mesure d'un angle solide s'appelle un stéra dian. Comme la surface d'une sphère est 4π(1)2 , il y a sont un total de 4π stéradians autour d'un point de l'espace. Le mesure d'un hémisphère est · $4\pi\frac{1}{2} = 2\pi$ stéradians.

Les angles solides sont utilisés en physique pour mesurer la fraction de l'émission totale de rayonnement d'un source dans l'espace. Par exemple, la Terre, de rayon environ 6370 km, expose une superficie totale de 1–

· 4π(6370)2 km2 vers le Soleil à tout moment. Comme le 2 distance de la Terre au Soleil est d'environ 150 millions de km, on a que la Terre occupe la fraction $\frac{\frac{1}{2}(4\pi 6370)^2}{(4\pi 150\,10^{6})^2} \approx \frac{1}{1\,110\,000\,000}$ de la surface aire de sphère autour du Soleil de rayon 150 millions de km. L'angle solide de la Terre par rapport au Soleil est cette fraction des 4π stéradians complets de l'espace autour de la Soleil. Notez que cette fraction est extrêmement petite. Vie sur Terre est soutenu par moins de 1 milliardième de la énergie totale émise par le Soleil.

L'angle polyédrique d'un POLYÈDRE est le solide angle de la région formée en projetant une face du polyèdre sur une sphère unité.

solide de révolution Si la région sous une courbe y = f(x) entre x = a et x = b est tourné d'un tour autour de l' axe x, il génère un figure appelée solide de révolution. Plus généralement, tout figure dans le plan tourné autour d'une ligne dans le plan qui ne coupe pas la figure produit un solide de révolution.

Machine Translated by Google

Par exemple, la rotation d'un demi-cercle autour de son diamètre produit une SPHÈRE. La rotation d'un cercle autour d'un axe qui ne coupe pas le cercle produit un TORUS.

Le CALCUL INTEGRAL est utilisé pour calculer le volume d'un solide de révolution. Pour le cas d'une courbe y = f(x) au-dessus d'un intervalle [a,b] tourné autour de l' axe des x, subdiviser [a,b] en petits segments donnés par les points a,x1 ,x2 ,…, xn ,b .
La région sous la courbe est approchée comme une collection de rectangles de hauteurs f(xi) et de largeurs (xi+1 – xi).
Lorsqu'il est tourné, chacun de ces rectangles produit un disque de rayon f(xi) et de largeur (xi+1 – xi), et par conséquent de volume π(f(xi))2 . (xi+1 – xi). Le volume du solide en question est alors bien approché par la somme de ces volumes individuels. L'utilisation d'approximations de plus en plus fines montre qu'à la limite le vrai volume V du solide de révolution est donné par l'intégrale :

$$V = \int_{un}^{b} \pi(f(x))2\, dx$$

On peut utiliser cette méthode d'intégration, dite méthode du disque, pour montrer, par exemple, que le volume de une sphère de rayon r est donnée par $\pi r \frac{4-}{3}^{3}$ (Utilisez la fonction $y = \sqrt{r\,2\,2 - x}$ sur l'intervalle [–r,r].) Pour les solides issus de courbes tournantes autour de l' axe y, une technique d'intégration analogue, appelée méthode de la coque cylindrique, est utilisée pour calculer les volumes.

En approximant une section de la courbe y = f(x) comme une série de segments de droite, en faisant tourner chaque segment autour de l' axe des x et en calculant la surface de chaque petit tronc de cône qui en résulte, on peut montrer que la surface S d'un solide de révolution est donnée par l'intégrale :

$$S = \int_{un}^{b} 2\pi f(x)\, dx\, \sqrt{1 + (f'(x))2}$$

(Cela suppose que la dérivée f'(x) est une fonction continue.) Par exemple, on peut utiliser cette formule pour montrer que la surface d'une sphère de rayon r est $4\pi r^{2}$.

Au milieu du IVe siècle de notre ère, sans l'aide du calcul intégral formel, le mathématicien grec PAPPUS D' ALEXANDRIE a fait deux belles découvertes géométriques.

> Si une figure dans le plan tourne autour d'un axe qui ne coupe pas la figure, alors le volume du solide de révolution produit est égal au produit de l'aire de la région et de la distance parcourue autour de l'axe par le centre de gravité de la figure.

> Si un segment d'une courbe dans un plan tourne autour d'un axe qui ne coupe pas le segment, alors la surface du solide de révolution produit est égale au produit de la LONGUEUR D'ARC du segment et de la distance parcourue autour de l'axe par le centre de gravité du segment.

Le centre de gravité d'une figure plane ou d'un segment de courbe est son CENTRE DE GRAVITÉ ou point d'équilibre si nous imaginons la figure plane comme étant constituée d'un matériau uniformément dense ou le segment courbe d'un fil uniformément dense.
Le centre de gravité d'un cercle, considéré comme une figure plane, par exemple, est son centre. Le centroïde de sa circonférence est aussi son centre.

Si un cercle de rayon r avec le centre R unités de l' axe x est tourné autour de l' axe x, la distance parcourue par le centroïde est 2πR. Par conséquent, d'après le théorème de Pappus, le volume V et la surface S du tore produit sont :

$$V = (\pi r^{2}) \times (2\pi R) = 2\pi\, {}^{2}r\, 2R$$

et

$$S = (2\pi r) \times (2\pi R) = 4\pi\, {}^{2}\, rR$$

Voir aussi HYPERBOLOÏDE ; THÉORÈMES DE PAPPUS ; PARABOLOÏDE.

solution par radicaux S'il est possible d'exprimer une solution à une équation POLYNOMIALE en termes de COEFFICIENTS qui apparaissent dans l'équation sous l'application d'un nombre fini d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et d'extractions de racines, alors nous disons que nous avoir une solution par radicaux. Par exemple, les deux solutions d'une équation QUADRATIQUE $ax2 + 2\,4\,bb - \pm -$ $bx + c = 0$ sont donnés par des $x = \frac{\sqrt{\quad}}{2\,un}$. Ceux-ci sont solutions par radicaux. LA FORMULE DE CARDANO montre que toute solution d'une ÉQUATION CUBIQUE est une solution par radicaux, et les travaux de LUDOVICO FERRARI (1522-1565) ont montré qu'il en est de même de toute ÉQUATION QUARTIQUE.
Certes, certaines équations du cinquième degré ont des solutions par radicaux $\sqrt[5]{}$ (la solution de xa, est une solution par radicaux), mais la question générale de savoir si oui ou non les solutions de toutes les équations du cinquième degré (ou supérieur) sont des solutions par radicaux est restée une question importante. question non résolue depuis plusieurs siècles. Cette question équivaut à se demander s'il existe ou non

Machine Translated by Google

existe une formule générale apparentée à la formule quadratique pour les équations quadratiques qui résout toutes les équations du cinquième degré (ou supérieur).

Les travaux d' ÉVARISTE GALOIS (1811–1832) ont fourni les premières étapes importantes vers la compréhension des propriétés générales des solutions aux équations polynomiales, et le mathématicien norvégien NIELS HENRIK ABEL (1802–29) a fourni la première preuve qu'il ne peut y avoir de formule générale pour la solution des équations du cinquième degré via des radicaux. Ceci est surprenant étant donné que le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE assure que chaque équation du cinquième degré a précisément cinq solutions. Le résultat d'Abel montre donc qu'en général, toutes les solutions ne peuvent pas être exprimées en termes d'une application finie d'opérations arithmétiques simples sur les coefficients de l'équation.

Comme mentionné précédemment, certaines quintiques spéciales ont des solutions par radicaux. Par exemple, ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) a montré que les solutions d'une équation du cinquième degré de la forme :

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

(ce polynôme est aujourd'hui connu sous le nom de quin tique de De Moivre) a cinq solutions données par :

$$x = -\frac{a}{5} + \omega^k \sqrt[5]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^5}{3125}}} + \omega^{-k} \sqrt[5]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^5}{3125}}}$$

où est une racine cinquième de l'unité et k passe par 0, 1, 2, 3 et 4.

Voir aussi GIROLAMO CARDANO ; RACINE CUBE /RACINE NTH ; RACINE CARRÉE; NICCOLÒ TARTAGLIA.

Méthode de Spearman Voir CORRÉLATION DE RANG.

sphère La surface fermée dans l'espace tridimensionnel constituée de tous les points situés à une distance fixe r d'un point donné O est appelée une sphère. La longueur r est appelée le rayon de la sphère, et le point O le centre de la sphère. La FORMULE DISTANCE montre que si O a pour COORDONNEES CARTESIENNES O = (a,b,c), alors l'équation d'une sphère est donnée par :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Il est souvent commode de considérer une sphère comme centrée autour de l'origine, auquel cas son équation se réduit simplement à $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. C'est l'analogue tridimensionnel de l'équation d'un CERCLE de rayon r en deux dimensions : $x^2 + y^2 = r^2$. (L'analogue unidimensionnel, $x^2 = r^2$, donne deux points $x = r$ et $x = -r$, sur la ligne, et l'analogue à quatre dimensions donné par $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ est une hypersphère dans la quatrième DIMENSION.)

Tout plan passant par le centre d'une sphère divise la sphère en deux hémisphères. La courbe d'intersection d'un tel plan avec la sphère est un cercle à la surface de la sphère appelé grand cercle. (L'équateur de la TERRE, par exemple, est un grand cercle.) Tout autre cercle dessiné sur la surface de la sphère est appelé un petit cercle.

Tout segment de ligne reliant deux points sur la surface de la sphère et passant par le centre de la sphère est appelé un DIAMÈTRE, et les deux extrémités de n'importe quel diamètre sont appelées POINTS ANTIPODAUX. Le célèbre théorème de Borsuk-Ulam affirme ce qui suit :

> Si f et g sont deux fonctions continues quelconques à la surface d'une sphère (comme la température de l'air et la pression de l'air à la surface de la Terre), alors il doit exister une paire de points antipodaux P et Q tels que f(P) = f(Q) et g(P) = g(Q).

La sphère peut être considérée comme un SOLIDE DE RÉVOLUTION, obtenu en faisant tourner un cercle autour de son diamètre d'un tour complet. Ainsi, les THÉORÈMES DE PAPPUS montrent que le VOLUME V et la surface A d'une sphère de rayon r sont donnés par les formules :

$$A = \pi r^2 \cdot 3^2$$

$$A = 4\pi r^2$$

Ces formules peuvent également être obtenues par les techniques de CALCUL INTÉGRAL. (Le calcul montre également que le volume d'une hypersphère à quatre dimensions de rayon r est $V = \pi r^4 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4$.) On peut aussi utiliser le calcul pour établir la résultat surprenant suivant :

> Si une miche de pain sphérique est coupée en n tranches d'épaisseur égale, alors la surface de

Machine Translated by Google

la croûte sur chaque tranche est la même. (Supposons que les tranches soient parallèles, chacune perpendiculaire à un diamètre fixe du pain.)

La région d'une sphère délimitée entre deux plans parallèles s'appelle un segment sphérique ou une zone. Si le rayon de la sphère est r et la distance entre les deux plans est h, alors la surface de la zone est 2πrh. (Remarquez que cette formule est en effet indépendante de l'endroit où les deux plans tranchent la sphère.) Le solide obtenu en faisant tourner un secteur d'un cercle autour du diamètre du cercle est appelé un secteur sphérique, et un coin sphérique est n'importe quel segment d'une sphère borné entre deux grands cercles.

Un TRIANGLE SPHÉRIQUE est une région de la surface d'une sphère délimitée par des arcs de trois grands cercles, et la trigonométrie sphérique est l'étude des triangles sphériques et des angles formés par l'intersection de grands cercles. L'étude de la GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE montre que les trois angles de tout triangle sphérique totalisent plus de 180°. Un polygone sphérique est la figure formée à la surface d'une sphère par trois ou plusieurs arcs de grands cercles. Les mathématiciens ont montré que la somme des angles d'un polygone sphérique à n côtés a une valeur supérieure à 180 (n - 2) °, mais pas supérieure à 180 n °.

Le célèbre théorème de la boule poilue affirme qu'il est impossible de construire un CHAMP VECTORIEL continu nulle part nul à la surface d'une sphère.

Une seule sphère divise l'espace tridimensionnel en deux régions : un intérieur et un extérieur. Deux sphères qui se croisent divisent l'espace en quatre régions (la région intérieure aux deux sphères, deux régions chacune intérieure à une sphère mais pas l'autre, et la région externe externe), trois sphères qui se croisent divisent l'espace en huit régions, quatre sphères divisent l'espace en 16 régions et cinq sphères en 30 régions. En général, N sphères qui se coupent mutuellement divisent l'espace en

$$N^3 - (N^2 - 3N + 8)$$

régions distinctes. (Ainsi, par exemple, 10 sphères peuvent être disposées dans l'espace pour produire 260 régions distinctes.)

Dans l'espace à n dimensions, le nombre maximal de sphères non sécantes (ou hypersphères) d'un rayon fixe r qui peuvent être disposées autour d'une sphère centrale à chaque contact ou "embrassement" de la sphère centrale est appelé le nombre de baisers à n dimensions. (Il est également appelé numéro de contact, numéro de coordination, ligancy ou numéro de Newton.) Comme il est possible d'organiser deux lignes segments à chaque extrémité d'un segment de ligne donné, le nombre de baisers unidimensionnel est 2. On peut disposer six (mais pas sept) cercles autour d'un cercle donné, et donc le nombre de baisers bidimensionnel est 6. SIR ISAAC NEW TON (1642 –1727) croyait à juste titre que le nombre de baisers en trois dimensions est 12 (bien que ce fait n'ait été correctement prouvé qu'à la fin du 19e siècle).

Dans l'espace tridimensionnel, il n'y a que trois motifs périodiques (c'est-à-dire autorépétitifs) pour empiler une collection infinie de sphères identiques. Chaque arrangement est appelé un emballage. Le "réseau cubique à faces centrées" organise les sphères en couches, chaque sphère étant entourée de seulement quatre sphères dans cette couche. Les "réseaux cubiques et hexagonaux" organisent les sphères de manière à ce que chaque sphère d'une couche soit entourée de six autres sphères à l'intérieur de cette couche. (Les deux garnissages diffèrent par la façon dont une troisième couche de sphères est placée par rapport à une première couche.) La densité d'un garnissage est la fraction d'espace occupée par les sphères. Le cubique et l'hexagone les garnissages ont chacun une densité de $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ ≈ 74,05 %.

En 1611, le mathématicien et astronome allemand JOHANNES KEPLER (1571–1630) a conjecturé que les garnissages cubiques et hexagonaux sont les plus denses possibles. Ce n'est qu'en 1998 qu'il a finalement été prouvé que c'était le cas.

Le célèbre THÉORÈME DES QUATRE COULEURS affirme qu'il suffit de quatre couleurs pour peindre n'importe quelle carte à la surface d'une sphère. LE THÉORÈME D'EULER montre que si v est le nombre de sommets dans une telle carte, e le nombre d'arêtes entre les pays, et r est le nombre de régions définies par la carte, alors v – e + r = 2.

Comme le film de savon est élastique et veut «se replier sur lui-même», toute bulle de savon contenant un volume d'air fixe adopte une forme qui minimise la surface. Le fait que les bulles de savon soient sphériques fournit une démonstration physique de la variation tridimensionnelle suivante du PROBLÈME ISOPERIMETRIQUE :

De toutes les figures dans l'espace tridimensionnel d'un volume fixe, la sphère a le moins de surface zone.

Voir aussi PROJECTION DE MERCATOR ; OBLAT/PRO TARD ; BULLES DE SAVON; ANGLE SOLIDE; COORDONNÉES SPHÉRIQUES ; TORUS.

coordonnées sphériques (coordonnées polaires sphériques) Dans l'espace tridimensionnel, la position d'un point P peut

Machine Translated by Google

décrit par trois coordonnées ρ, θ et , appelées coordonnées sphériques de P, où ρ est la distance de P à l'origine O d'un repère CARTESIEN , θ est l'angle entre l' axe des abscisses et la projection de la droite segment reliant O à P sur le plan xy (mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir de l' axe x), et est l'angle entre l' axe z et le segment de droite reliant O à P. L'angle θ, appelé longitude, prend une valeur comprise entre zéro et 360°, et l'angle , appelé colatitude, prend une valeur comprise entre zéro et 180°. Les angles peuvent également être présentés en RADIAN MEASURE.

Les coordonnées sphériques sont utiles pour décrire des surfaces avec une symétrie sphérique autour de l'origine. Par exemple, l'équation d'une sphère de rayon 5 est simplement ρ = 5. (Comme les angles θ et varient dans leurs plages autorisées, les points d'une sphère sont décrits.) La surface définie par l'équation θ = c , pour une certaine constante c (permettant à ρ et de varier), est un DEMI-PLAN vertical avec un côté le long de l' axe z, et la surface = c est une nappe d'un CONE circulaire droit.

Un point P de coordonnées sphériques (ρ,θ,) a coordonnées cartésiennes correspondantes (x,y,z) données par :

x = ρ sin cos θ y
= ρ sin sin θ
z = ρ cos

Pour voir cela, projetez le segment de droite de longueur ρ reliant O à P sur le plan xy. Appelons la longueur de ce segment de droite r. Ensuite, selon les formules de conversion COORDONNÉES POLAIRES , nous avons x = r cosθ et y = r sinθ. (Examinez le triangle rectangle dans le plan xy avec le segment de longueur r comme hypoténuse.) Selon le triangle rectangle dans un plan vertical, avec ce segment de droite de longueur r comme base, le segment de droite reliant O à P sur la longueur ρ comme hypoténuse, et une jambe verticale de longueur z, nous avons cos = et cos = r = ρ sin$\frac{r}{\rho}$, et les formules$\frac{z}{\rho}$. Ainsi z = ρ cos et de conversion suivent maintenant.

Pour convertir des coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques, utilisez :

$$\rho = \sqrt{xyz^{222} = ++}$$

$$\theta = {}_{\text{bronzer}}{}^{-}1\ \frac{y}{X}$$

$$= {}_{\text{parce que}}{}^{-}1\ \frac{z}{\rho} = {}_{\text{parce que}}{}^{-}1\ \frac{z}{\sqrt{222 + + xyz}}\ .$$

(La première équation découle de la FORMULE DE DISTANCE standard.)

Une triple intégrale de la forme $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ sur un volume V décrit en coordonnées cartésiennes se convertit en l'intégrale correspondante :

$$\iiint_V f(\rho\sin\ \cos\theta,\ \rho\sin\ \sin\theta,\ \rho\cos\ )\ \rho^{\ 2}\sin\ d\rho\,d\theta\,d$$

en coordonnées sphériques. L'apparition du terme ρ sin dans ^{2} l'intégrande suit pour des raisons analogues à l'apparition de r dans la conversion d'une DOUBLE INTÉGRALE de coordonnées cartésiennes planaires en coordonnées polaires.

Par exemple, en utilisant la mesure en radians, le volume V d'une sphère de rayon R peut être calculé comme suit :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_S 1\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi\,d\theta\,d\phi\,d\rho \\ &= \int_0^R \int_0^{\pi} 2\pi\rho^2 \sin\phi\,d\phi\,d\rho \\ &= \int_0^R 4\pi\rho^2\,d\rho \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3\ . \end{aligned}$$

Voir aussi COORDONNÉES CYLINDRIQUES.

géométrie sphérique (géométrie elliptique, géométrie riemannienne) Découverte en 1856 par le mathématicien allemand GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866), puis légèrement modifiée par FELIX KLEIN (1849-1925), la géométrie sphérique est NON-EUCLIDIENNE GEOMETRIE dans laquelle le fameux POSTULAT PARALLELE échoue de la manière suivante :

> Par un point donné non sur une ligne donnée, il n'y a pas de lignes parallèles à cette ligne donnée.

Riemann a utilisé la surface d'une SPHÈRE comme modèle de cette géométrie en interprétant la ligne de mots comme signifiant un grand cercle sur la sphère. Étant donné que dans une théorie de la géométrie, deux lignes sont censées se croiser en un seul point (et pourtant deux grands cercles se croisent en deux POINTS ANTIPODAUX), il convient alors d'interpréter le mot point en géométrie sphérique comme une paire antipodale de points sur le surface. Dans ce cadre, il est maintenant également vrai que deux points distincts déterminent une ligne unique.

Machine Translated by Google

Riemann et Klein ont prouvé que tous sauf le cinquième LES POSTULATS D'EUCLIDE tiennent dans ce modèle et, de plus, que ce modèle est cohérent (c'est-à-dire exempt de CONTRA DICTIONS). Ceci établit que le postulat parallèle ne peut être déduit logiquement en conséquence de la axiomes restants proposés par Euclide.

En géométrie sphérique, tous les angles des triangles totalisent plus de 180°, et le rapport de la circonférence de tout cercle à son diamètre est supérieur à π (et cela la valeur varie d'un cercle à l'autre).

Voir aussi GEOMETRIE EUCLIDEENNE; GÉOMÈTRE HYPERBOLIQUE ETRY; AXIOME DE PLAYFAIR .

triangle sphérique Une figure à trois côtés sur la surface d'une SPHÈRE délimitée par les arcs de trois grands cercles est appelé triangle sphérique. Contrairement aux triangles plans, les les angles d'un triangle sphérique ne totalisent pas la valeur constante de 180°. En fait, la somme des angles est toujours supérieur à 180° et pouvant aller jusqu'à 540°. (Ce se produit lorsque les trois côtés du triangle sphérique se trouvent sur le même grand cercle.)

Un triangle sphérique rectangle a au moins un angle droit. Un triangle birectangulaire contient deux angles droits et un triangle trirectangulaire a trois angles droits. (Pour exemple, tout triangle qui relie le pôle Nord à deux points sur l'équateur de la Terre est birectangulaire. Un tel triangle peut aussi être trirectangulaire si les points sur l'équateur sont positionnés de manière appropriée.) Une sphère triangle sans angle droit est appelé oblique.

Si les angles d'un triangle sphérique sont A, B et C, mesurée en degrés, alors la surface du triangle est donnée par la formule :

$$\text{zone} = \frac{\pi R^2}{180}\left(A + B + C - 180\right)$$

Ici R est le rayon de la sphère. La quantité A + B + C - 180, généralement noté E, est appelé le sphérique excès du triangle. Si les trois longueurs latérales du triangle sont données par a, b et c, alors l'excès sphérique peut également être calculé via le remarquable suivant pour mula découvert par le mathématicien suisse Simon Lhuilier (1750-1840) :

$$\text{bronzer}\frac{E}{4} = \sqrt{\text{bronzer}\left(\frac{a+b+c}{4}\right)\text{bronzer}\left(\frac{a+b-c}{4}\right)\tan\left(\frac{a+b+c}{4}\right)\tan\left(\frac{a+b-c}{4}\right)\tan\left(\frac{a-b+c}{4}\right)\tan\left(\frac{-a+b+c}{4}\right)}$$

spirale d'Archimède (spirale d'Archimède) étudiée par le grand ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 BCE) dans son ouvrage On Spirals, une spirale d'Archimède est la courbe tracée par un point tournant autour d'un pointe à une vitesse angulaire constante tout en s'éloignant de ce point à une vitesse constante. (Par exemple, c'est le chemin tracé par une mouche marchant radialement vers l'extérieur depuis le centre d'un disque rotatif uniforme.) L'équation de une telle spirale a une forme simple en COORDONNEES POLAIRES :

$$r = a\theta$$

où a est une constante positive.

Une courbe donnée par une équation de la forme $r = a\theta^{n}$ est appelée une spirale hyperbolique. Ces courbes ont été étudiées par Johann Bernoulli de la célèbre FAMILLE BERNOULLI.

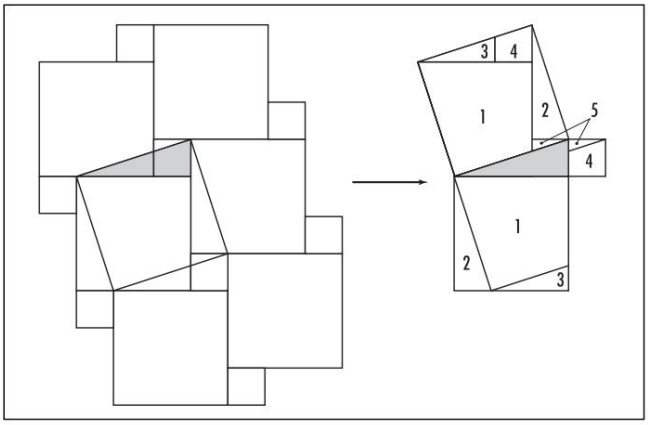
Les courbes de la forme $r = a\theta^{\frac{1}{n}}$ apparaissent étroitement enveloppées spirales. Une courbe donnée par logr = aθ est appelée spirale mic logarithmique.

Voir aussi NOMBRE D'OR.

carré En géométrie, un carré est une figure plane avec quatre côtés droits égaux et quatre angles droits intérieurs. C'est à la fois un RECTANGLE, un PARALLELOGRAMME, et un losange.

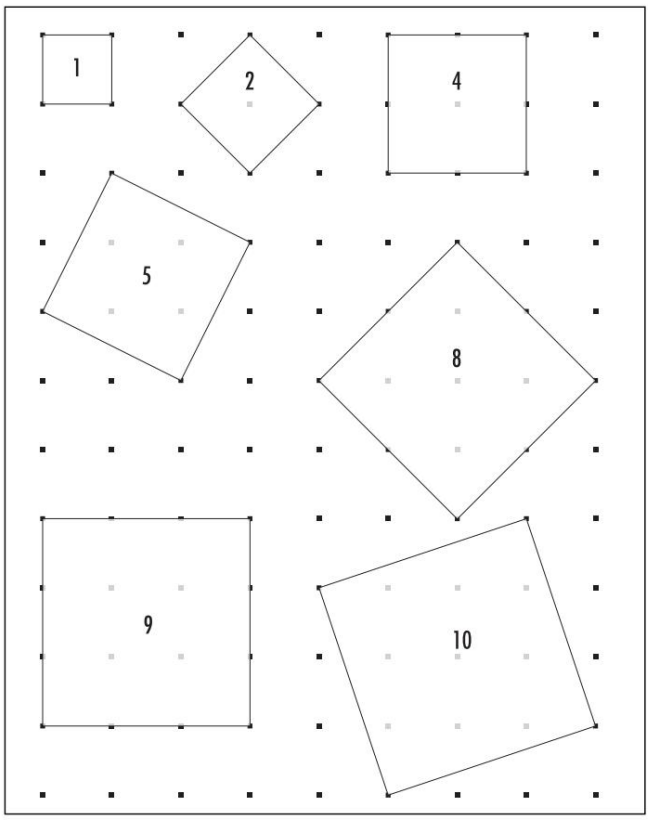
Un carré de côté x a AIRE $x \times x = x^2$, ce qui explique le terme de quadrature pour l'opération de élever un nombre ou une variable à la puissance seconde.

Les carrés sont des solutions aux PROBLÈMES ISOPERIMÉTRIQUES du type classique suivant :



Théorème de Pythagore

Machine Translated by Google



Carrés sur un treillis

Un agriculteur souhaite construire un enclos rectangulaire avec 400 pieds de clôture. Quelle forme de rectangle donne la plus grande surface pour cette longueur de clôture donnée ?

La réponse est un stylo carré de 100 × 100. Tout autre angle rectiligne aura un côté plus court que 100 pieds, disons 100 - x pieds, une largeur plus longue, 100 + x pieds, et par conséquent aire de 2 pieds2 de (100 - x)(100 + x) = 10 000 – x, qui est moins que la surface du stylo carré.

Un carré est l'un des trois POLYGONES réguliers qui fournit une TESSELLATION du plan. Deux carrés de tailles différentes recouvrent également le plan. Une telle tessellation contient en elle une preuve purement visuelle de PYTHAGORE THÉORÈME.

À l'aide d'une feuille de papier millimétré, on peut dessiner des carrés d'aires 1, 2, 4, 5, 8, 9 et 10 unités, tous avec des sommets sur les points de réseau du papier, mais pas des carrés d'aires 3, 6 ou 7 unités.

Le théorème de Pythagore montre qu'on peut tracer un carré d'aire N si, et seulement si, N est de la forme N = a + b 2 2 pour certains entiers a et b. Par exemple, 9 = 32 + 02 et 5 = 22 + 12 (La longueur du côté d'un carré d'aire 5 s'étend sur 2 unités de large et 1 unité sur.) Étonnamment, cet ensemble de nombres satisfait la PROPRIÉTÉ DE FERMETURE sous multiplication.

Voir aussi NUMÉROS CHIFFRÉS ; THÉORÈME.

nombres carrés Voir NUMÉROS FIGURÉS.

racine carrée Un nombre x qui, multiplié par lui-même, produit un nombre donné a est appelé le carré racine du nombre a. Si $x^2 = a$, alors on écrit $x = \sqrt{a}$. Par exemple, 3 est une racine carrée de 9, puisque 3 × 3 = 9, et zéro est une racine carrée de zéro, puisque 0 × 0 = 0. Géométriquement, la racine carrée de une quantité positive a est la longueur du côté d'un carré dont l'aire est a.

L'invention le symbole $\sqrt{\ }$, appelé signe radical, car l'extraction des racines carrées est attribuée au mathématicien allemand Christoff Rudolff (1499-1545).
Le nom du symbole vient du mot latin radix pour « racine ». Toute quantité apparaissant sous un signe radical est appelée radicande. Par exemple, dans l'équation $\sqrt{169} = 13$, 169 est le radicande et 13 est la racine carrée.

Toute équation de la forme $x^2 = a$ avec $a \neq 0$ a deux solutions distinctes. Ainsi, tout nombre différent de zéro a deux racines carrées distinctes. Par exemple, 3 et –3 sont tous deux des racines carrées de 9. Par convention, si a est une quantité positive, alors $\sqrt{a}$ est utilisé pour désigner la racine positive et $-\sqrt{a}$ a la racine carrée négative. Par exemple, nous écrivons $\sqrt{9} = 3$ même si –3 est aussi une racine carrée valide de 9.

Une étude des EXPOSANTS montre qu'il convient de définir un nombre élevé à la demi-puissance comme signifiant la racine carrée de ce nombre. Que cette racine soit positive ou négative n'est pas défini. Ainsi, par exemple, $9^{\frac{1}{2}} = \pm 3$.

Les tentatives de définition des racines carrées des nombres négatifs conduisent à l'invention du NUM COMPLEXE BERS. Dans le domaine des nombres complexes, chaque nombre (sauf zéro) a exactement deux racines carrées.

La racine carrée de tout nombre CONSTRUCTIBLE est à nouveau constructible. Ainsi, étant donné un segment de droite de longueur a tracé sur une page, il est possible de construire à partir de celui-ci un deuxième segment de droite de longueur $\sqrt{a}$ en utilisant uniquement les outils simples d'une règle et d'un compas.

Le mathématicien grec THÉODORE DE CYRÈNE (env. 425 avant notre ère) a utilisé des arguments géométriques simples pour prouver

Machine Translated by Google

que les nombres de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{17}$ (en sautant $\sqrt{4}$ = 2, $\sqrt{9}$ = 3 et $\sqrt{16}$ = 4) sont chacun irrationnels. Plus généralement, on peut utiliser le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE pour montrer que la racine carrée d'un entier positif a est un NOMBRE RATIONNEL si, et seulement si, a est un carré parfait (c'est-à-dire a = b 2 pour certains nombre entier b). LA MÉTHODE DE HERON fournit une méthode pour calculer la racine carrée de tout réel positif à tout degré de précision prescrit.

L'inégalité racine carrée stipule que pour tout nombre entier positif n nous avons :

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

Un exercice d'algèbre établit la validité de cette déclaration.

Bien que les déclarations :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

et

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

sont valables pour tous les nombres a et b (avec b ≠ 0 dans la seconde deuxième équation), l'équation $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, en général n'est pas correcte. (Remplacer dans les valeurs a = 9 et b = 16, par exemple.)

Voir aussi RACINE CUBE /RACINE NTH ; MATRICE D'IDENTITÉ; SOLUTION PAR DES RADICAUX ; SOURDE.

la quadrature du cercle (circle squaring, the quadrature of the circle) L'un des problèmes de l'antiquité (comme DUPLICATING THE CUBE et TRISECTING AN ANGLE) d'un intérêt considérable pour les érudits grecs classiques est la tâche de construire un carré de même aire qu'un cercle donné dans le plan. Les seuls outils autorisés dans la construction sont un compas et une règle (c'est-à-dire une règle sans marquage).

Le problème trouve son origine dans les débuts des mathématiques. Les anciens érudits égyptiens de 1650 avant notre ère décrivent dans le PAPYRUS RHIND une construction d'un carré d'aire presque égale à celle d'un cercle. (La construction est « exacte » si l'on travaille avec valeur 256/81 ≈ 3,1605 pour π.) Le savant HIPPOCRATE DE CHIOS (vers 440 av. J.-C.) s'est intéressé au problème et a développé plusieurs méthodes pour « élever au carré » une LUNE, une forme faite d'arcs de cercles, mais n'a pas réussi à élever au carré le cercle lui-même. ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 avant notre ère) a utilisé sa courbe la SPIRALE D' ARCHIMÈDE pour quadriller le cercle, fournissant une solution au problème en utilisant des outils plus avancés que la règle et le compas seuls. APOLLONIUS DE PERGE (env. 262-190 avant notre ère) a également résolu le problème avec l'introduction de courbes spéciales et de techniques avancées. Cependant, le problème de la construction d'un carré de la zone souhaitée en utilisant uniquement une règle et un compas n'a pas été résolu.

Le problème a acquis une notoriété considérable au cours des siècles qui ont suivi. Des chercheurs indiens, chinois et arabes ont également tenté de résoudre le défi et ont réussi à trouver des solutions au problème si l'on utilisait diverses valeurs approximatives pour π. Le problème a été étudié par les savants européens de la Renaissance, et il est devenu un problème d'étude populaire pour les mathématiciens amateurs au cours des 18e et 19e siècles. Les novices qui travaillaient sur le défi devinrent connus sous le nom de « circle squarers » et recherchèrent souvent la gloire en soumettant des solutions supposées au problème à la prestigieuse ROYAL SOCI ETY de Londres. À la fin des années 1700, fatiguée d'être inondée d'un grand nombre de thèses fastidieuses et incorrectes sur le sujet, la société a interdit toute considération de prétendues « preuves » de la quadrature du cercle. L'Académie française des sciences a emboîté le pas peu de temps après.

Si nous supposons que le rayon du cercle donné est r, alors on nous demande de produire un carré de côté a tel que $a^2 = \pi r^2$. Cela réduit essentiellement le problème à celui de construire une longueur $\sqrt{\pi}$ unités de long à l'aide d'une règle et d'un compas.

La théorie des nombres CONSTRUCTIBLES montre que n'importe quelle quantité de longueur rationnelle peut être construite, et que si deux longueurs l1 et l2 peuvent être produites, alors leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient peuvent également l'être, ainsi que la racine carrée de chaque quantité. . Si l'on utilise une valeur rationnelle comme approximation de π, il n'est alors pas surprenant que l'on puisse produire des solutions au problème en utilisant cette valeur approchée. De plus, si π lui-même est un nombre rationnel, alors on s'attendrait à ce qu'il soit possible de résoudre le problème. Comme aucune solution n'avait jamais été trouvée, les chercheurs ont commencé à soupçonner que π est irrationnel.

Au milieu des années 1600, le mathématicien écossais JAMES GREGORY (1638-1675), dans ses études sur les séries infinies,

Machine Translated by Google

tenté de montrer que π est non seulement irrationnel, mais, de plus, que c'est un NOMBRE TRANSCENDANTAL. Ce établirait, une fois pour toutes, que √ π ne peut pas être construit. Malheureusement, Gregory n'a pas réussi cet objectif. Ce n'est qu'un siècle plus tard que mathématicien allemand JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777) ont réussi à prouver que π est irrationnel, et un autre siècle après que CARL LOUIS FERDI NAND VON LINDEMANN (1852-1939) a finalement prouvé dans 1880 que π est bien transcendantal. En conséquence, Lindemann avait prouvé que le problème de la quadrature le cercle est insoluble.

Il est intéressant de noter qu'en 1914 SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN (1887–1920) a utilisé une construction de règle et de compas semblable à la quadrature d'un cercle pour trouver l'approximation remarquable suivante pour π correct à la neuvième décimale :

$$\pi \approx + 9^2 \quad \frac{19^2}{22}^{\frac{1}{4}}$$

règle de compression (résultat sandwich) Cette règle affirme que si une fonction f(x) est prise en sandwich entre deux autres fonctions g(x) et h(x), au moins pour des valeurs x proches de a nombre a (c'est-à-dire que nous avons g(x) ≤ f(x) ≤ h(x)), et si limx→a g(x) = L et limx→a h(x) = L, alors ce doit être le cas où limx→a f(x) existe et est également égal à L. Pour exemple, les inégalités $1 - x \le f(x) \le 1 + x^2$ impliquer que limx→0 f(x) = 1.

Peut-être l'application la plus importante du $\frac{\sin x}{x}$, qui la règle de compression est le calcul de la limite qui se pose lors du calcul de la DÉRIVÉE de la fonction sinus. Dans le diagramme ci-dessous, nous remarquons que le secteur est pris en sandwich entre deux triangles rectangles. Ici l'angle x est donné en RADIAN MESURE. Nous avons:

$$\text{aire du petit triangle rectangle} = \tfrac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$$\text{aire du secteur} = 2 \cdot \pi 1 \frac{X}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(Ceci est le rayon de $\frac{X}{2\pi}$ de l'aire d'un cercle complet de fraction 1), et

$$\text{aire du grand triangle rectangle} \cdot 1 \cdot \tan x.$$

Sur la photo, on voit que $\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x \le \frac{X}{2} \le \frac{1}{2} \cdot \tan x$, qui peut être réécrit : $\cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$.

Puisque limx→0cosx = 1 et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, il s'ensuit de la règle de compression selon laquelle $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$ existe et vaut 1.
Cela prouve:

Si x est mesuré en radians, alors $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Si x est mesuré en degrés, alors l'aire du secteur est $\frac{x}{360} \cdot \pi$. En poursuivant l'argument ci-dessus donné par montre que, pour x mesuré en degrés, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$)

Soit dit en passant, la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ suit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}$$

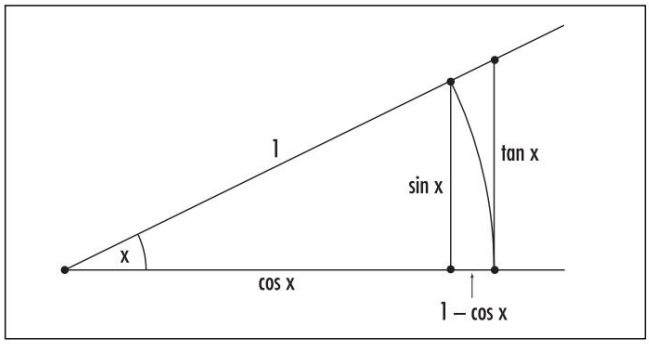
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

$$= -1 \cdot \frac{0}{1+1}$$

$$= 0$$



Comparer les zones

Machine Translated by Google

Ce résultat clé, nécessaire pour calculer la dérivée de
la fonction cosinus, peut également être établie géométriquement en
utilisant la règle de compression et le diagramme ci-dessus. (Pour x mesuré
en degrés, nous avons aussi cos x – 1

limx→0 = 0.) X

Enfin, notons que limx→0 $\frac{\text{bronzer x}}{X}$ = limx→0 $\frac{\text{péché x}}{X}$

· $\frac{1}{\text{parce que x}}$ 1- = 1 (Pour x mesuré en degrés nous avons = 1 · 1

limx→0 $\frac{\text{bronzer x}}{X}$ = $\frac{\pi}{180}$.)

Voir aussi APOTHÈME ; E; LIMITE.

écart type Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

statistiques La statistique est la branche des mathématiques concernée
par les méthodes de collecte, de tabulation et de
résumer des faits chiffrés (c'est ce qu'on appelle descriptif
statistiques), et pour faire des inférences et des prédictions
sur la base de ces faits (statistiques inférentielles). Les informations
numériques recueillies sont appelées DONNÉES, et un fait numérique
individuel sur les données est appelé une statistique.

Par exemple, une étude médicale pourrait enregistrer les
hauteurs de 100 enfants, tous âgés de 8 ans. La taille moyenne de
les enfants seraient un exemple de statistique.
Une autre statistique serait la plus grande taille enregistrée
ou la gamme des hauteurs observées. Porter un jugement
sur la base des données qu'un autre enfant en dehors de la
l'étude est de taille anormale serait un exemple de
l'utilisation des données à des fins inférentielles.

Le mot statistik a été inventé par les Allemands
politologue Gottfried Achenwall (1719-1772) à
signifie "un résumé de l'état des choses". C'est basé sur
le verbe latin stare signifiant « se tenir debout ».

Les statistiques sont un outil indispensable utilisé dans la pratique
tous les aspects de la vie d'aujourd'hui. Les prévisions météorologiques sont basées
sur les méthodes d'inférence statistique, par exemple, comme le sont
l'efficacité évaluée de nouveaux médicaments, de nouveaux médicaments
procédures et autres pratiques de santé. Les statistiques sont utilisées
largement dans le gouvernement, les affaires et le commerce pour
analyser les sondages d'opinion, les stratégies de campagne et de publicité,
les opérations commerciales, le contrôle de la pollution et d'autres
préoccupations environnementales, par exemple, ainsi que dans
recherche scientifique et études économiques, politiques et sociologiques.
Les compagnies d'assurance analysent les TABLES DE VIE pour
faire des déductions et fixer les taux d'assurance. Au tournant
de chaque décennie, chaque ménage aux États-Unis est
tenu de remplir un court questionnaire de recensement. Les décisions du
gouvernement sur la répartition de la représentation et des fonds sont
fondées sur les résultats du recensement. Dans
De plus, un petit pourcentage de ménages doit remplir un questionnaire
plus long, à partir duquel d'autres inférences statistiques sur l'ensemble de
la population sont faites. Dans
loisirs, de nombreux amateurs de sport suivent des analyses statistiques pour
évaluer les performances de l'équipe et des joueurs.

Parce que les statistiques imprègnent tant de domaines de la vie,
l'étude du sujet fait maintenant partie intégrante de nombreux
cursus du lycée.

Voir aussi HISTOIRE DES PROBABILITÉS ET STATISTIQUES
(essai); POPULATION ET ÉCHANTILLON ; STATISTIQUES : DESCRIPTIF
TIVE ; STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

statistiques : descriptives La science de la collecte, de la tabulation et de
la synthèse des informations numériques
obtenu à partir d'études observationnelles ou expérimentales est
appelées statistiques descriptives. Par exemple, un médecin
étude pourrait enregistrer les groupes sanguins de 100 militaires
intronisés et présenter les informations obtenues sous forme de listes
ou des tableaux, ou peut-être visuellement via des tableaux, des graphiques ou
des diagrammes de fréquence comme décrit ci-dessous. Caractéristiques générales
des DONNÉES, comme le groupe sanguin le plus courant
observé, ou la forme de la distribution de fréquence
observé, peut être utilisé pour décrire et résumer
information. Fournir des descriptions générales des données
permet de tirer des conclusions sur une population particulière dans son
ensemble. A titre d'exemple simple, on pourrait
extrapoler et en déduire qu'un certain pourcentage de la
la population mondiale entière a un groupe sanguin particulier.

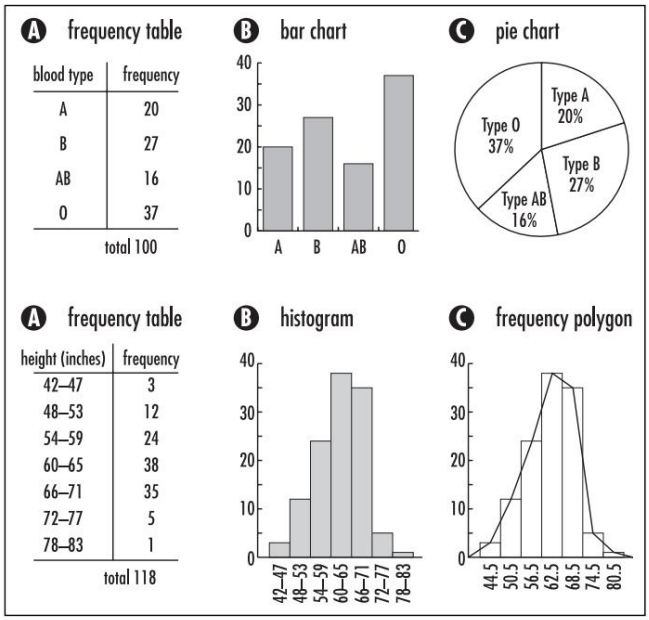
Dans l'exemple ci-dessus, les mesures prises sont
descriptives et se répartissent en catégories précises : type A, type
B, type AB et type O. Une telle étude est dite catégorielle. Une étude
numérique, cependant, recueille
informations sur les participants (comme la taille, l'âge ou
poids), et placer les données dans des catégories est une question
de choix. Par exemple, on peut souhaiter organiser le
âges des patients hospitalisés dans un hôpital métropolitain très fréquenté
catégories de décennie (0-10 ans, 11-20 ans et
ainsi de suite) ou une autre division pratique. Les mesures de hauteur, par
exemple, peuvent adopter une
tableau de valeurs, y compris les valeurs fractionnaires. Une étude sur
les taux de croissance humaine pourraient avoir ses données organisées en
catégories de plages de hauteur, par exemple, 60,1 à 65,0 pouces,
65,1 à 70,0 pouces, et ainsi de suite.

Machine Translated by Google

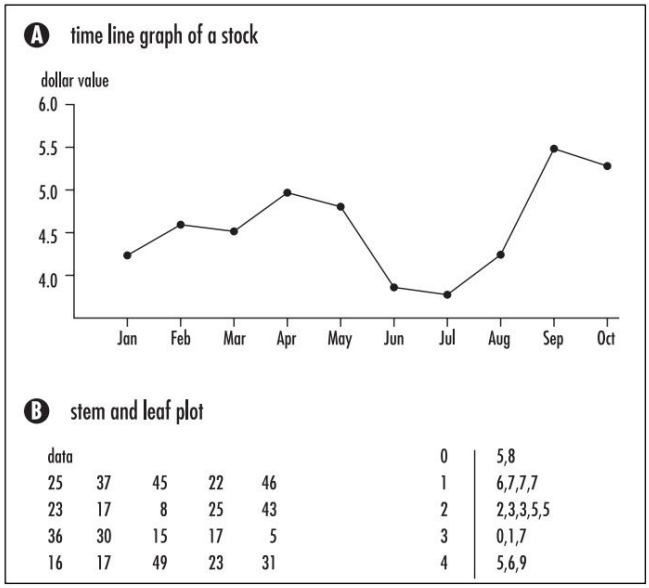
Une fois les catégories établies, il existe un certain nombre de méthodes standard pour présenter et résumer les données.

Modes de présentation des
données Une distribution de fréquence est un tableau ou un graphique visuel qui montre la fréquence (nombre) d'individus dans chaque catégorie possible considérée. Par exemple, sur les 100 intronisés de l'armée testés ci-dessus, supposons que 20 ont le groupe sanguin A, 27 le groupe sanguin B, 16 le groupe sanguin AB et 37 le groupe sanguin O. Ces informations peuvent être résumées dans un tableau.

Cette distribution de fréquence peut également être présentée visuellement. Un graphique à secteurs (également appelé graphique à secteurs) est un cercle divisé en sections, une pour chaque catégorie, et chacune avec une surface proportionnelle à la fréquence de cette catégorie. Un diagramme à barres est un graphique avec des barres verticales représentant la fréquence d'occurrence pour chaque catégorie. Si les données sont catégorielles, les barres sont espacées pour souligner la nature distincte des catégories descriptives. Si les données présentées sont numériques, les barres sont dessinées sans espaces pour indiquer que les données proviennent d'une plage de valeurs numériques, et aussi pour indiquer comment les données ont été regroupées. Dans ce cas, le graphique à barres est appelé un histogramme.



Représentation des données



Tracer des données

Un polygone de fréquence est similaire à un histogramme sauf qu'une ligne brisée est tracée pour relier le point médian de chaque classe considérée à la hauteur de la barre verticale de cette classe. Par convention, la ligne est tracée touchant l'axe horizontal des deux côtés de la distribution.

Un graphique de séries chronologiques décrit la nature d'une mesure prise sur une période de temps. Les valeurs des actions, par exemple, sont souvent représentées par des graphiques chronologiques. Un tel diagramme ne représente cependant pas une distribution de fréquence.

Les tableaux de valeurs de nombres entiers sont parfois résumés au moyen de diagrammes à tiges et à feuilles. Chaque nombre est divisé en deux parties : le chiffre des unités (la « feuille ») et l'ensemble de chiffres à sa gauche (la « tige »). Dans une colonne, toutes les tiges sont répertoriées et les feuilles correspondantes sont disposées dans une deuxième colonne à droite.

Façons de résumer les données
Les statisticiens observent trois caractéristiques générales pour résumer les données numériques.

1. La forme générale d'un histogramme : Le tableau suivant montre quelques formes courantes de distribution de fréquence. Les distributions se conforment rarement à des formes exactes, mais les statisticiens trouvent toujours utile de décrire la nature générale de la distribution.

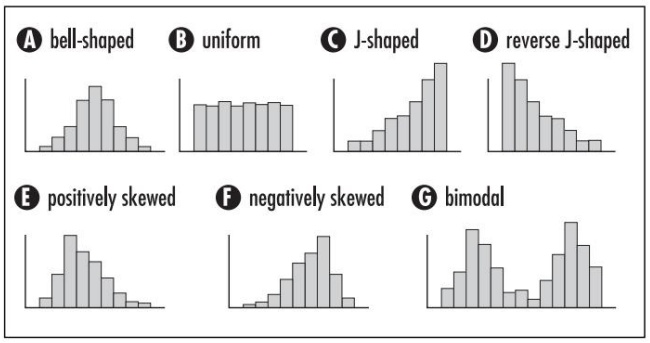
Machine Translated by Google

Une distribution en forme de cloche a un seul pic et est approximativement symétrique des deux côtés du pic. Une distribution uniforme présente un nombre égal de mesures dans chaque catégorie, et les distributions en forme de J et en forme de J inversé présentent des tendances croissantes et décroissantes. Si une distribution a un seul pic, mais n'est pas symétrique, alors elle est dite asymétrique positivement ou négativement. Si une distribution a deux pics distincts, elle est dite bimodale. (Par exemple, l'incidence des membres cassés par rapport à l'âge est bimodale, puisque les accidents ont tendance à se produire plus fréquemment chez les enfants et les personnes âgées que chez le reste de la population.)

2. Mesures de tendance centrale : Une mesure de « tendance centrale » est une mesure unique qui, dans un certain sens, est typique de l'ensemble des données. Il représente le « centre » approximatif de la distribution des fréquences. Quatre mesures sont couramment utilisées.

un. La moyenne ou la moyenne, généralement désignée par la lettre grecque μ, est trouvée en additionnant toutes les valeurs de données et en divisant par le nombre total de mesures. Elle équivaut à la MOYENNE ARITHMÉTIQUE des valeurs de données.

Par exemple, la moyenne des quatre valeurs de données 4, 5, 8, 8 est : $\mu = \frac{4588 +++}{4} = 6\ 25\ .\ .$ Si dans un autre étudie la valeur 6 apparaît 37 fois et la valeur 9 $37\ 6\ 20\ 9 \times + \times$ la moyenne est : ≈ 7,05. En $\mu = \frac{\text{apparaît 20 fois,}}{57}$ général, si une valeur de données x1 apparaît f1 fois, la valeur de données x2 un total de f2 fois, et ainsi de suite jusqu'à la valeur de données xn apparaissant un total de fn fois, alors la moyenne est donnée par :



Classification des distributions

$$\mu = \frac{fxfx\ fx\times ff\ f\times 1\ 12\ 2}{+++\ 1\ 2\ \cdot\ \ \ \ \ n\ \ \ n} \qquad n$$

La somme des différences de chaque valeur de données de la moyenne est toujours nulle. Par exemple, pour le premier jeu de données présenté ci-dessus, nous avons (4 – 6,25) + (5 – 6,25) + (8 – 6,25) + (8 – 6,25) = 0.

La moyenne est la mesure la plus utilisée de tendance centrale. (Voir aussi VALEUR ATTENDUE.)

b. Le mode est la valeur dans l'ensemble de données qui se produit le plus souvent. Par exemple, à partir des 10 valeurs de données 3, 6, 5, 3, 1, 6, 5, 3, 8, 3, le mode est 3, et pour 4, 5, 8, 8, le mode est 8. Une distribution peut avoir plus d'un mode si deux scores ou plus surviennent un nombre égal de fois.

Le mode est utilisé lorsque le cas le plus typique d'une étude est souhaité. Pour les données non numériques, le mode est la seule mesure de tendance centrale disponible.

c. La médiane est la valeur médiane d'une séquence de valeurs de données, une fois qu'elles sont classées de la plus petite à la plus grande. Par exemple, la médiane de l'ensemble de données 3, 3, 5, 6, 7, 16, 16, 19, 37 est 7. Si l'ensemble de données contient un nombre pair d'entrées, la moyenne des deux valeurs du milieu est prise comme médiane. Par exemple, la médiane de 4, 5, 8, 8 est $\frac{5 + 8}{2}$ = 6,5. La médiane est utile pour trouver la valeur au centre de la distribution. Il divise les données en deux groupes de taille égale.

d. Le milieu de gamme d'un ensemble de données est trouvé en prenant les valeurs moyennes des valeurs de données les plus petites et les plus grandes qui se produisent. Par exemple, le milieu de gamme de 4 + 8 , l'ensemble de données 4, 5, 8, 8 est $\frac{4 + 8}{2} = 6$. Le milieu de gamme fournit une estimation rapide d'une valeur centrale. Il est facile à calculer, mais est fortement affecté par des valeurs extrêmement faibles ou élevées dans l'ensemble de données.

3. Mesures de dispersion : Afin d'interpréter dans quelle mesure une mesure de tendance centrale est susceptible de représenter un groupe entier de valeurs de données, les statisticiens doivent également calculer une mesure de dispersion. Les valeurs de données regroupées autour d'une valeur centrale peuvent être bien

Machine Translated by Google

résumées par leur moyenne ou leur médiane, mais un ensemble de valeurs de données dispersées sur une large gamme de valeurs n'est pas bien représenté par une seule mesure de tendance centrale. Par exemple, les deux ensembles de données 4.1, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 0.1, 0.3, 1.3, 7.8, 11.6 ont tous deux une moyenne de 4.22. Cela fournit une bonne valeur représentative pour le premier ensemble de données, mais pas pour le second.

Les mesures statistiques habituelles de la dispersion sont données comme suit :

un. La plage d'un ensemble de données est la différence entre les valeurs les plus basses et les plus élevées de l'ensemble. Par exemple, la plage de l'ensemble de données 4, 5, 8, 8 est 8 - 4 = 4.

La plage est une mesure très simpliste de la dispersion et ne révèle aucune information sur la façon dont les valeurs des données sont distribuées. Il est également fortement affecté par des valeurs extrêmement faibles ou élevées dans l'ensemble de données. Cependant, la plage est souvent une mesure utile dans les problèmes pratiques quotidiens. Par exemple, les prévisions météorologiques donnent généralement la plage de températures à prévoir pour la journée.

b. L'écart d'une seule valeur de données est la différence entre cette valeur et la moyenne de l'ensemble de données, écrite sous la forme d'une quantité positive. Par exemple, dans l'ensemble de données 4, 5, 8, 8 avec une moyenne de 6,25, l'écart de la valeur de données 5 est |5 – 6,25| = 1,25, et la valeur de données 8 a un écart |8 – 6,25| = 1,75.

L'écart moyen de toutes les valeurs de données donne une bonne mesure de la dispersion globale. Par exemple, l'ensemble de données 4, 5, 8, 8 a un écart moyen :

$$\frac{|\quad|+|\quad|+|\quad|+|4-6.25|+|5-6.25|+|8-6.25|+|8-6.25|}{4}$$

$$=\frac{2.25+1.25+1.75+1.75}{4}=1.75$$

Un point subtil doit être noté. Étant donné n valeurs de données $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on calcule d'abord la moyenne μ, puis les n écarts : $|x_1-\mu|, |x_2-\mu|, \ldots, |x_n-\mu|$. Une fois que les n–1 premières de ces quantités sont calculées (et celles-ci peuvent s'avérer être de n'importe quelle valeur), la valeur de la nième quantité est cependant forcée – l'ensemble de données doit se conformer à une moyenne μ. Il n'y a donc que n – 1 calculs "indépendants" à faire. Pour cette raison, les mathématiciens choisissent de diviser la somme des écarts par n – 1 plutôt que n. Ainsi, une mesure de dispersion pour l'ensemble de données 4, 5, 8, 8, par exemple, est

$$\frac{|\quad|+|\quad|+|\quad|+|4-6.25|+|5-6.25|+|8-6.25|+|8-6.25|}{3}$$

≈ 2,33. Si le nombre de valeurs de données est important, la division par n - 1 plutôt que n aura peu d'effet.

c. Lors de la mesure de la dispersion, les valeurs absolues sont mathématiquement difficiles à travailler (en particulier en ce qui concerne les manipulations théoriques requises dans CALCULUS). Pour cette raison, les mathématiciens préfèrent travailler avec des écarts au carré (donnant à nouveau des quantités positives), et appliquer plus tard la racine carrée si désiré.

La variance d'un ensemble de données est la somme de tous les écarts au carré, divisée par un de moins que le nombre de valeurs de données. Par exemple, la variance des quatre valeurs de données 4, 5, 8, 8 avec une moyenne de 6,25 est :

$$\frac{(4-6.25)^2+(5-6.25)^2+(8-6.25)^2+(8-6.25)^2}{3}$$

$$=4.25$$

La variance est généralement désignée par le symbole σ^2 (lire « sigma au carré »). Pour n valeurs de données, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il est donné par la formule :

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n-1}$$

Étant donné que les écarts sont au carré, plus une valeur de données est éloignée de la moyenne, plus son effet sur la taille de la variance est prononcé.

d. Désigné par la lettre grecque σ, l'écart-type d'un ensemble de données est la racine carrée de sa variance. Par exemple, l'écart-type des quatre valeurs de données 4, 5, 8, 8 est $\sigma=\sqrt{4.25}\approx 2.06$. En général, pour n valeurs de données $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'écart-type est donné par la formule :

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n-1}}$$

L'écart type est beaucoup plus couramment utilisé que la variance comme mesure de la dispersion. Elle est exprimée dans les mêmes unités que les valeurs de données (pouces, si les mesures sont des hauteurs pour

Machine Translated by Google

exemple, ou grammes si ce sont des poids) plutôt que les unités au carré, comme cela est requis pour la variance.

Dans une DISTRIBUTION NORMALE, environ 68 % des valeurs des données se situent à moins d'un écart type de la moyenne (de chaque côté), 95 % à moins de deux écarts-types, et 99,7 pour cent dans les trois. C'est ce qu'on appelle la règle 68–95–99,7. Cela montre que l'écart type donne effectivement une bonne indication de l'ampleur des valeurs de données dans une distribution dispersé. Un petit écart type, par exemple, indique que 68 % des valeurs de données sont étroitement regroupés autour de la moyenne.

Voir aussi DIFFUSION ; CENTILE ; DIAMÈTRE DE DIFFUSION GRAMME; STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

statistique : inférentielle La science du dessin général Les conclusions sur une population basées uniquement sur des informations numériques recueillies auprès d'un échantillon de cette population sont appelées statistiques inférentielles. (Voir POPULATION ET ÉCHANTILLON.) Par exemple, une étude médicale pourrait observez que 16 des 100 intronisés dans l'armée ont un groupe sanguin UN B. On pourrait alors en déduire qu'environ un sixième de la population mondiale appartient à ce groupe sanguin.

Une assertion ou une conjecture sur une caractéristique numérique d'une population est appelée une hypothèse. Par exemple, l'affirmation « un sixième de la population mondiale est de groupe sanguin AB » est une hypothèse qui semble soutenu par l'étude médicale décrite ci-dessus. C'est pas clair, cependant, si une autre étude de 600 collèges seniors, dont 79 étaient du groupe sanguin AB, soutient également la demande.

Un test statistique est une procédure mathématique qui permet de déterminer, à un certain degré de confiance, que les résultats d'un étude étayent une hypothèse. L'allégation testée pour l'acceptation ou le rejet s'appelle l'hypothèse nulle. Le l'hypothèse alternative est l'assertion à accepter si l'hypothèse nulle est réputée fausse.

Les principes des tests statistiques sont bien résumés dans l'exemple suivant :

Supposons que quelqu'un reçoive une pièce de monnaie. Nous souhaitons déterminer si la pièce est juste ou non, c'est-à-dire si lancer une tête est tout aussi probable que lancer une queue. On prend comme hypothèse nulle la déclaration, "La pièce est juste" et alternative hypothèse, "La pièce est biaisée." Pour tester le hypothèse disons que nous lançons la pièce 10 fois. Supposons que nous obtenions 10 têtes d'affilée. Quoi doit-on conclure ?

Comme les chances de lancer 10 têtes d'affilée avec un pièces équitables sont très faibles - la probabilité que cela se produise est $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0.1\%$ — nous conclurions peut-être que la pièce est biaisée. Mais il y a une petite chance qu'une foire coin aurait pu néanmoins produire ce résultat. Refléter ce degré d'incertitude, on peut dire qu'on arrive au conclusion que la pièce est biaisée avec un "99,9% niveau de confiance. » Le test statistique réalisé ici était un calcul de probabilité. Nous en sommes venus à accepter le nul hypothèse avec un niveau de confiance de 99,9 %.

Le rejet d'une hypothèse nulle alors qu'en fait elle était vrai est connu comme une erreur de type I (peut-être la pièce était juste). Si l'hypothèse nulle est acceptée malgré étant faux, une erreur de type II est commise. Un niveau de confiance (ou niveau de signification) d'un test statistique est le probabilité de commettre une erreur de type I. A 95 pour cent niveau de confiance est généralement jugé acceptable. (Comme une note latérale, les chances de lancer neuf têtes parmi un des séries de 10 lancers sont $10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10}{1024} \approx 1\%$ Si en notre expérience, c'est ce que nous avons observé, puis nous conclurait à nouveau que la pièce est biaisée, avec un 99 niveau de confiance en pourcentage. Observer huit têtes parmi une série de 10 lancers conduit à la même conclusion avec un niveau de confiance de 95,6 %.)

Le THÉORÈME CENTRAL-LIMITE fournit les moyens pour effectuer des tests statistiques utiles à l'analyse d'enquêtes et de sondages publics. Nous présentons ici deux exemples illustrant deux applications courantes.

1. Estimation de la proportion de la population :

Dans un récent sondage Gallup, 1 500 personnes ont été interrogées et 45 % d'entre elles ont convenu que les impôts sur l'essence devrait être augmenté. Dans quelle mesure ce chiffre représente-t-il la vraie proportion de toutes les personnes dans ce pays qui partagent ce point de vue ?

Soit p le pourcentage vrai (mais inconnu) d'Américains qui croient que les taxes sur l'essence devraient être soulevé. Notre tâche est de trouver la valeur de p. Tout ce que nous devons travailler avec est l'observation qu'un échantillon de 1 500 personnes ont produit une proportion pˆ de 45 pour cent cette vue.

Machine Translated by Google

Le théorème de la limite centrale stipule que, pour de nombreux échantillons différents de 1 500 personnes, la statistique pˆ variera en valeur selon une distribution normale de moyenne p et écart type $\sqrt{\frac{p(100-p)}{N}}$ où, dans ce cas, N = 1 500. Comme la valeur de N est grande, l'écart-type est petit, ce qui signifie que toutes les valeurs de pˆ seront étroitement regroupés autour de la valeur moyenne p. Dans particulier, ceci établit, comme on s'y attendait, que pˆ = 45 pour cent est une bonne estimation pour p. La clé est de maintenant demander, à quel point ?

De l'étude de la DISTRIBUTION NORMALE, la La règle 68–95–99,7 indique que 95 % des mesures de pˆ sont comprises dans une distance de deux écarts par rapport à la moyenne p. Autrement dit, il y a 95 % de chances que notre mesure de pˆ = 45 % se situe dans la plage des valeurs $p - 2\sqrt{\frac{p(100-p)}{1500}}$ pour $p + 2\sqrt{\frac{(100-p)}{p\ 1500}}$ (Cette plage de valeurs contient également p, bien sûr, en son centre.)

En guise d'approximation, nous y substituons pour les mulae la valeur pˆ = 45 % pour p :

$$p - 2\sqrt{\frac{p(100-p)}{1500}} \approx \hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(100-\hat{p})}{1500}}$$

$$= 45 - 2\sqrt{\frac{45\ 55}{1500}} \approx 42.4$$

$$p + 2\sqrt{\frac{p(100-p)}{1500}} \approx \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(100-\hat{p})}{1500}}$$

$$= 45 + 2\sqrt{\frac{45\ 55}{1500}} \approx 47.6$$

Cela donne une plage de valeurs [42.4, 47.6] qui, dans cette approximation, et avec environ 95 pour cent niveau de confiance, contient la vraie valeur de proportion p. Nous appelons cette plage de valeurs un intervalle de confiance à 95 %. Si ces calculs ont été effectués sur un grand nombre de résultats de l'enquête (tous impliquant 1 500 personnes) puis nous serait sûr que près de 95 pour cent des intervalles produits contiennent la vraie proportion de population p.

2. Estimation d'une moyenne de population :

Dans une étude médiatique, 680 jeunes adultes, âgés de 21 à 25 ans, ont été soumis à un test sur l'actualité. Les scores au test allaient de 0 à 500, indiquant un éventail de connaissances sur le sujet. Le le score moyen était m = 170 (et le score standard l'écart était de 80). Sur la base de cet échantillon, que dire de la connaissance moyenne niveau (score) μ de la population de l'ensemble des 19 millions de jeunes adultes ?

Le théorème de la limite centrale stipule que, pour de nombreux échantillons différents de 680 jeunes adultes passant le test, la le score moyen m variera en valeur selon une distribution normale de moyenne μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Ici σ est l'écart type pour l'ensemble de la population (inconnu) et N est la taille de l'échantillon (N = 680). Puisque la valeur de N est grande, l'écart type sera petit. Cela $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ signifie deux choses : que la moyenne m = 170 est susceptible d'être proche de la vraie valeur moyenne μ, et qu'en utilisant l'écart-type de 80 observé dans l'échantillon comme approximation de la vraie valeur σ ne modifiera pas sérieusement nos calculs. Cela dit, la règle 68-95-99.7 stipule qu'il y a 95 pour cent chance que notre valeur observée m = 170 tombe dans deux écarts-types de la vraie valeur moyenne μ. Comme une approximation, alors, on évalue :

$$\mu \approx 2 \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad 170\ 2\ \frac{80}{\sqrt{680}} \quad 163\ 9$$

$$\mu + 2 \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad 170\ 2\ 176\ 1\ \frac{80}{\sqrt{680}} \quad .$$

donnant un intervalle de confiance à 95 % de [163,9, 176,1] pour ce que serait le score moyen si l'ensemble population devait passer le test.

En 1908, WILLIAM SEALY GOSSET (1876-1937), publiant sous le pseudonyme « Student », fait une analyse précise de la distribution des valeurs moyennes distributions normales. Si σˆ est l'écart type d'un échantillon de taille N, Gosset a calculé la distribution de valeurs pour la moyenne de l'échantillon m auxquelles on pourrait s'attendre en utilisant σˆ comme approximation de l'écart type réel σ de la population. En particulier, il décrit la distribution du Z-SCORE de la moyenne m :

$$\frac{m - \mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}}$$

Machine Translated by Google

Ceci est connu aujourd'hui sous le nom de distribution t de Student (avec N - 1 degrés de liberté). Le test t de Student est utilisé pour tester si une différence dans les moyennes de deux échantillons différents est statistiquement significative. Par exemple, une étude pourrait indiquer que la taille moyenne de 100 joueurs de basketball sélectionnés au hasard est supérieure de 8 pouces à la taille moyenne de 100 joueurs de baseball. Le test t de Student testerait l'hypothèse, "Les deux échantillons ont été tirés de la même population normale." Si la valeur de 8 po était jugée trop élevée, l'hypothèse serait rejetée et la différence des moyennes serait considérée comme significative.

Le test F teste si oui ou non deux échantillons proviennent de la même population en se concentrant plutôt sur la VARIANCE de chaque échantillon. Si deux échantillons de tailles N1 et N2 proviennent de la même population normale, alors le rapport de leurs variances $\frac{^2\sigma_1}{^2\sigma_2}$ doit être approximativement égal à 1. La distribution F tabule les valeurs de ces rapports, et le test F détermine si le rapport observé pour deux échantillons particuliers a une valeur acceptable.

Voir aussi TEST DU CHI CARRÉ ; COEFFI DE CORRÉLATION CIENT.

Steiner, Jakob (1796–1863) Géométrie suisse Né le 18 mars 1796 à Utzenstorf, en Suisse, le mathématicien Jakob Steiner est connu pour ses contributions fondamentales à l'étude de la GÉOMÉTRIE PROJECTIVE et pour ses travaux sur la solution du célèbre ISOPERIMET RIC PROBLÈME. Une collection de points géométriques est aujourd'hui nommée en son honneur, STEINER POINTs, pour reconnaître son travail d' OPTIMISATION géométrique.

Steiner n'a eu aucune éducation formelle précoce. On dit qu'il n'a commencé à lire et à écrire qu'à l'âge de 14 ans et qu'il n'a fréquenté aucune école avant l'âge de 18 ans.
Au cours de la dernière partie de son adolescence, cependant, Steiner a démontré un talent pour les mathématiques, ce qui lui a valu d'être admis à l'école Johann Heinrich Pestalozzi à Yverdon, en Suisse. À peine 2 ans après être entré à l'école en tant qu'étudiant, il a été embauché comme professeur de mathématiques à l'école.

Steiner entre à l'Université de Heidelberg en 1818 et est transféré à l'Université de Berlin 3 ans plus tard pour poursuivre une carrière de chercheur en mathématiques. Son travail novateur en géométrie a été dûment noté par les mathématiciens de l'époque. Steiner a reçu un doctorat honorifique de l'Université de Königsberg et le poste de chaire de mathématiques à l'Université de Berlin en 1834. Il a occupé ce poste pour le reste de sa vie. Il mourut à Berlin le 1er avril 1863.

Un certain nombre de configurations finies en géométrie projective sont nommées en son honneur, ainsi qu'une surface géométrique, la surface de Steiner, qui a la propriété que chacun de ses plans tangents tranche la surface en une paire de SECTIONS CONIQUES . Son influence sur le développement de l'optimisation géométrique fut profonde.

Point de Steiner Étant donné trois points A, B et C dans le plan, un point de Steiner pour ce système est un point P dont la somme des distances AP + BP + CP est minimale. Qu'un tel point existe toujours a été établi pour la première fois par le mathématicien suisse JAKOB STEINER (1796–1863). Il a prouvé que ce point se produit à l'endroit où l'angle entre chacun des segments de ligne AP, BP et CP est de 120°. Pour voir cela, supposons d'abord que le point P est placé à une distance fixe de C de sorte qu'il se trouve sur un cercle avec C comme centre. Ensuite, une étude d' OPTIMISATION montre que l'emplacement sur le cercle qui minimise la somme AP + BP + CP se produit au point P où les lignes AP et BP font des angles égaux avec la ligne tangente au cercle en P. Ainsi la solution de ce version restreinte du problème se produit lorsque les angles entre les segments de ligne AP, BP et CP sont égaux. La même chose se produit pour une solution avec P à une distance fixe de A ou P à une distance fixe de B. Comme la solution du problème général résout simultanément chaque version restreinte du problème, les trois angles doivent être égaux.

Comme les trois angles totalisent 360°, chacun doit donc être égal à 120°.

Le point de Steiner résout le problème de construction de route suivant :

> Quelle conception d'un système routier relie trois villes en utilisant la longueur totale minimale de route ?

La solution est une conception qui relie chaque ville par un segment de route rectiligne directement au point Steiner des trois villes.

Steiner a également analysé les problèmes de construction de routes impliquant plus de trois villes. Il a montré que étant donné N villes, N ≥ 3, il faut introduire N – 1 points particuliers entre les villes et tracer des segments de droite entre ces points et les villes de telle sorte que :

Machine Translated by Google

1. Chaque ville est reliée à un point Steiner 2. Chaque point Steiner a trois routes partant de
elle, également espacées de 120°.

Voir aussi PROBLEME ISOPERIMETRIQUE.

diagramme à tiges et à feuilles (diagramme à tiges) Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIF.

projection stéréographique Considérons un PLAN tangent à une SPHÈRE touchant la sphère en son pôle sud S.
Ensuite, on peut mapper des points sur la surface de la sphère à des points sur le plan en traçant des lignes droites du pôle nord N de la sphère à travers des points sur la surface, et en les continuant jusqu'à ce qu'ils interceptent le plan. Chaque point, à l'exception du pôle nord lui-même, est ainsi mappé sur un point du plan. Cette transformation géométrique d'une sphère dans un plan s'appelle la projection stéréographique.

Chaque point du plan correspond à un point unique sur la sphère, les points de plus en plus éloignés de S sur le plan correspondant à des points de plus en plus proches de N sur la sphère. En ce sens, la sphère peut être considérée comme topologiquement équivalente à un plan avec un seul point supplémentaire bien défini de l'infini qui lui est attaché. Si le plan est considéré comme une représentation du plan des NOMBRES COMPLEXES, alors la sphère dans cette construction est généralement appelée une sphère de Riemann pour honorer le travail du mathématicien allemand GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) dans ce domaine.

Une projection stéréographique est un CONFORMAL MAP PING. Cela signifie qu'il préserve les angles entre les courbes qui se croisent sur la surface de la sphère. Les grands cercles sur la sphère, non passant par N, sont mappés sur des cercles dans le plan, et les grands cercles passant par N sont mappés sur des lignes droites. Pour cette raison, les géomètres jugent souvent approprié de considérer les lignes droites comme des types particuliers de cercles.

Une projection gnomonique projette des points sur l'hémisphère sud d'une sphère sur un plan tangent à S en traçant des lignes droites du centre de la sphère à travers des points sur la surface, et en les continuant jusqu'à ce qu'ils interceptent le plan. Dans ce modèle, chaque point sur l'équateur de la sphère représente un "point de l'infini" différent attaché au plan.

Voir aussi PROJECTION DE MERCATOR ; PROJECTION.

Stevin, Simon (1548–1620) Arithmétique flamande, ingénierie Né en Flandre, aujourd'hui en Belgique, en 1548 (sa date de naissance exacte n'est pas connue), Simon Stevin est surtout connu pour The Tenth, son texte influent de 1585 qui préconise et explique la utilisation des décimales dans toutes les mathématiques et la comptabilité. Bien qu'il n'ait pas inventé le système décimal (il avait été utilisé par les Arabes deux siècles auparavant), son exposé sur le sujet a convaincu les spécialistes de l'époque de son mérite en tant qu'approche de la manipulation des fractions et des nombres réels.

Stevin a commencé sa carrière en tant que comptable et commis au bureau des impôts avant d'entrer à l'Université de Leiden à l'âge de 35 ans. Ses travaux sur la mécanique et l'ingénierie lui ont valu une notoriété en tant qu'expert en hydrostatique et en mathématiques connexes. Stevin a écrit 11 textes au total tout au long de sa carrière universitaire, couvrant des sujets d'arithmétique, d'algèbre, de trigonométrie, de géographie et de navigation. Dans son texte Principes de l'art de peser, Stevin analyse l'addition géométrique des forces, développant une approche qui simplifie les mathématiques de la mécanique. Cette approche a également constitué la base de la théorie de l'analyse VECTOR développée 200 ans plus tard - Stevin avait essentiellement correctement défini l'addition vectorielle.

Stevin a également reconnu que la distance à laquelle un objet tombe dans un laps de temps fixe est indépendante du poids de l'objet. Cette découverte est normalement attribuée au savant GALILEO GALILEI (1564–1642), mais Stevin était parvenu à la même conclusion 3 ans avant que Galileo ne rapporte ses découvertes.

Au XVe siècle, les mathématiciens de Perse, de Chine et d'Inde utilisaient le système décimal pour représenter les fractions. Stevin a reconnu les avantages du système et a soutenu, dans son article The Tenth, que l'addition de fractions décimales est tout aussi simple que l'addition de nombres entiers. (Sommer 0,73 et 0,25, par exemple, n'est pas plus difficile que d'ajouter 73 à 25).

Il n'a cependant pas utilisé de point décimal dans son travail, choisissant d'écrire 34,875, par exemple, comme 340817253, encerclant les chiffres 0, 1, 2 et 3 pour indiquer que les chiffres à gauche sont multipliés par ces puissances d'un -10e.
(Le mathématicien écossais JOHN NAPIER (1550–1617) est responsable de la vulgarisation de l'utilisation de la virgule décimale.)

Écrire tous les nombres sous forme de fractions décimales avait pour effet psychologique profond de placer tous les nombres sur un pied d'égalité, pour ainsi dire. Le nombre π, par exemple, écrit 3,141 (au moins comme approximation)

Machine Translated by Google

n'apparaît pas plus important ou spécial que tout autre nombre réel, 6,234 ou 84,668, par exemple. Un érudit à l'époque a qualifié tous les nombres de "tout aussi ennuyeux".

On se souvient aussi de Stevin pour avoir introduit et popularisé les symboles « + », « - » et » pour plus, « √ soustraction, ainsi que l'opération de la racine carrée. Il est mort à La Haye, Pays-Bas, ca. Mars 1620.

La formule de Stirling La formule surprenante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{!n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

montre que pour de grandes valeurs de n, la fonction $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ est une très bonne approximation du FACTORIEL n!. Cette équation limite s'appelle la formule de Stirling. Bien que nommée d'après le mathématicien écossais James Stirling (1692–1770), la formule a été découverte par le mathématicien français ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) alors qu'il tentait d'écrire une formule pour la courbe de DISTRIBUTION NORMALE . Stirling a écrit un article influent sur les séries infinies qui a aidé De Moivre à découvrir ce résultat.

La formule peut être dérivée de WALLIS'S PROD UCT. Nous présentons ici un argument simple qui donne une idée de la façon dont le résultat pourrait être vrai. Notant que ln n! s'écrit comme une somme de logarithmes, on a :

$$\text{Dans}=!\ \ln \ln + 2 \quad {}_{\text{dans}}\, n \approx \sum_{k=1}^{n} \ln k \int_1^n \ln x\,dx$$

L'évaluation de l'intégrale, à l'aide de l'INTEGRATION PAR PARTIES, donne :

$$\int_1^n \ln x\,dx = x \ln x - x\Big|_1^n = n \ln n - n + 1 \approx n \ln n - n$$

Ainsi ln n! ≈ ln(n n) – n, ce qui donne $!\approx nn\,n\,ne = \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Un plus argument raffiné donne le résultat de Stirling.

Test t de Student Voir STATISTIQUES : INFERENTIELLES.

sous-factorielle Dans son étude de 1878 sur les PERMUTATIONS, mathématicien W. Allen Whitworth a introduit le notion de sous-factorielle. Maintenant notée $n_¡$, la nième sous-factorielle d'un entier n est donnée par

$$!n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

avec $0_¡$ mis égal à 1. (Voir FACTORIAL.) La valeur $n_¡$ est obtenue en multipliant le nombre sous-factoriel précédent par n et en ajoutant (–1)n. Ainsi:

$$1_¡ = 1 \times 0_¡ - 1 = 1 \times 1 - 1 = 0\ 2_¡ = 2 \times 1_¡ + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1\ 3_¡ = 3 \times 2_¡ - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2\ 4_¡ = 4 \times 3_¡ + 1 = 4 \times 2 + 1 = 9$$

Par exemple. Une étude du nombre e montre que ratio $\frac{n_¡}{n!}$ se rapproche de la valeur lorsque $\frac{1}{e}$ n devient grand.

Les sous-factorielles apparaissent dans l'étude de certains permuta tions appelées dérangements.

Voir aussi É.

substitution Le fait de remplacer toutes les occurrences d'une variable par une autre variable, expression ou valeur numérique est appelé substitution. Par exemple, pour évaluer le $x^2 - 2x + 3$ pour expression x = 5, il suffit de remplacer tous occurrences de x avec la valeur 5. Cela donne la valeur correspondante de 18 pour l'expression. (On dit qu'on a « substitué la valeur 5 à x ».) On peut aussi substituer d'autres quantités à x. Par exemple, remplacer chaque occurrence de x par la quantité y – 1 donne l'expression $(y - 1)^2 + 2(y - 1) + 3$, qui se simplifie en $y^2 + 2$. (Cette substitution particulière s'avère fructueuse, $x^2 - 2x + 3$ 2 y car il précise maintenant que l'expression x^2 n'adoptera jamais une valeur inférieure à 2, et que l'expression n'est égale à cette valeur minimale que lorsque y = 0, c'est-à-dire lorsque x = 1.) Des techniques de substitution sont utilisées pour résoudre les ÉQUATIONS LINÉAIRES.

La méthode de substitution peut être appliquée simultanément à plus d'une variable dans une équation. Par exemple, la AIRE A d'un triangle de côtés a, b et c, avec un angle θ entre les côtés de longueurs a et b,

est donnée par $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$. La LOI DES COSINS affirme $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. La résolution de sin θ et cos θ dans chaque expression et la substitution des résultats dans l'équation $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ donne la FORMULE DE HERON .

La racine carrée de 2 satisfait l'équation :

Machine Translated by Google

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

La substitution de cette formule en elle-même plusieurs fois donne l' expansion de FRACTION CONTINUE suivante pour $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Voir aussi INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION ; TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

règle de substitution pour l'intégration Voir INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION.

soustraction Le processus de recherche de la DIFFERENCE de deux nombres s'appelle la soustraction. Dans l' ARITHMÉTIQUE élémentaire des nombres entiers, la soustraction peut être considérée comme le processus de suppression d'un sous-ensemble d'un ensemble. Par exemple, si trois pommes sont retirées d'un ensemble de huit pommes, il reste cinq pommes. On écrit 8 – 3 = 5.

Dans un contexte plus général, la soustraction est mieux définie comme l'opération inverse de l'addition : la différence a – b est définie comme étant une quantité qui, ajoutée à b, donne la réponse a. Ici a est appelé la diminution, b la soustraction et le résultat a – b la différence. (Ainsi, la soustraction plus la différence donne la diminution.) Dans certains contextes, il est commode de considérer la soustraction simplement comme l'addition de NOMBRES NÉGATIFS. Par exemple, la différence 8 – 3 peut être considérée comme une somme 8 + (–3).

Le processus de soustraction ne satisfait pas la PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE. Par exemple, 8 – 3 ne donne pas le même résultat que 3 – 8. (Ceci est clair si l'on réécrit ces différences en termes de sommes de quantités négatives : 8 + (–3) et 3 + (–8) sont des sommes de deux paires de nombres différentes.)

Le SYSTÈME DE PLACE-VALEUR que nous utilisons aujourd'hui pour écrire des nombres simplifie le processus de soustraction de grands nombres entiers. Par exemple, soustraire 216 de 589 donne 5 – 2 = 3 unités de 100, 8 – 1 = 7 unités de 10, et 9 – 6 = 3 unités de 1. Ainsi, 589 – 216 = 373. Ce processus est toujours valable même si l'on rencontre des quantités négatives d'unités. Par exemple, 463 – 198 peut être calculé comme 3 |–3| –5, où les barres verticales sont utilisées pour séparer les puissances de 10. « Emprunter » 1 unité de 100 à la première colonne, qui équivaut à 10 unités de 10 dans la deuxième colonne, nous permet de réécrire cela sous la forme 2 |7| –5. Emprunter 1 unité de 10 à la deuxième colonne, ce qui équivaut à 10 unités simples dans la troisième colonne, nous permet maintenant de réécrire cela sous la forme 2 |6| 5. Nous avons donc : 463 – 198 = 265.

Les élèves des écoles apprennent généralement un algorithme qui a un emprunt de chiffres au début du processus de résolution d'un problème de soustraction plutôt que de laisser ce travail comme étape finale. L'une ou l'autre méthode est valide.

Le processus de soustraction peut être étendu aux FRACTIONS (complétées à l'aide du calcul des DÉNOMINATEURS COMMUNS), aux NOMBRES RÉELS, aux NOMBRES COMPLEXES, aux VECTEURS et aux MATRICES.

La différence de deux fonctions à valeurs réelles f et g est la fonction f – g, dont la valeur à toute entrée x est la différence des sorties de f et g à cette entrée : (f – g) + 2x et g(x) (x) = f(x) – g(x). Par exemple, si $f(x) = x = 5x + 2 + 2x - 5x - 7 = x^2 - 3x - 7$. 7, alors (f – g)(x) = x

Les formules de soustraction dans TRIGONOMETRY affirment :

$$\text{péché}(x - y) = \text{péché} \cos \cos \text{péché}$$

$$\cos(x - y) = \cos \cos \sin \sin$$

$$\text{bronzer}(x - y) = \frac{\text{bronzer} - \text{bronzer}}{1 + \text{bronzer bronzer}}$$

Le mathématicien FIBONACCI (vers 1175-1250) a introduit le terme moins pour la soustraction dans son texte de 1202 Liber abaci (Le livre de l'abaque), que les savants ont plus tard abrégé en m– dans leur propre travail. Il a été suggéré que la lettre "m" a peut-être été abandonnée plus tard pour laisser la barre "-" comme symbole de choix pour la soustraction. Ce symbole est apparu pour la première fois sous forme imprimée dans le livre de 1489 de Johannes Widman Behennde und hüpsche Rechnung auf fall Kauffmannschaften (Calculs soignés et pratiques pour tous les commerçar

Voir aussi ARITHMÉTIQUE.

condition suffisante Voir CONDITION—NÉCESSAIRE ET SUFFISANT.

sommation Le processus de recherche de la somme d'une collection de nombres s'appelle la sommation. Mathématiciens

Machine Translated by Google

s'intéressent souvent aux problèmes impliquant la somme d'un grande collection de quantités, et une notation compacte pour écrire de telles sommes est utile. La lettre grecque Σ (représentant « S » pour « somme »), la notation dite sigma inventé par le mathématicien suisse LEONHARD EULER en 1755, peut être utilisé pour exprimer la somme des nombres a1 ,a2 ,…,an comme $\sum_{k=1}^{n}$. On lit cet ak comme "la somme de k = 1 à n de ak ," et la calcule via la procédure suivante :

> Ecrire les termes ak , d'abord avec k remplacé par 1, puis avec k remplacé par 2, en s'arrêtant à k remplacé par n. Additionnez tous les termes écrit: $\sum_{k=1}^{n} ok = a1 + a2 + \cdots + un$

Ainsi, par exemple, l'expression $\sum_{k=1}^{4} k^2$ représente le somme 12 + 22 + 32 + 42, ce qui vaut 30.

La lettre k utilisée comme indice dans la notation sigma est appelé l'indice de sommation et est une VARIABLE MANNEQUINE : n'importe quelle autre lettre pourrait être utilisée à sa place. Pour exemple, les expressions $\sum_{r=1}^{4} r^2$ et $\sum_{n=1}^{4} n^2$ représentent également la même somme 12 + 22 + 32 + 42.

Une sommation n'a pas besoin de commencer par l'indice k = 1. Pour exemple, l'expression $\sum_{k=dix}^{12} (kk^3 - ^2)$ représente la somme (103 – 102) + (113 – 112) + (123 – 122). Une sommation pourrait contenir un seul terme, comme pour $\sum_{k=5}^{5} k^2 = 25$, pour exemple. Toute somme du formulaire $\sum_{kilomètres}^{n} ok$ avec n < m est considéré comme vide et vaut zéro. Enfin, les sommes alternées de signe peuvent être représentées en introduisant un facteur de la forme (–1)k–1. Par exemple, $\sum_{k=1}^{5} 1( ) - ^{k-11}$ à k est égal $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

Les sommations satisfont aux deux propriétés de base suivantes :

$$\sum_{kilomètres}^{n} ( )kab\ une \pm = \sum_{kilomètres}^{n} \sum_{k} \pm \sum_{kilomètres}^{n} b_k$$

$$\sum_{kilomètres}^{n} (ca\ e_k) \qquad \sum_{kilomètres}^{n} un_k$$

où c est une constante. (Ces déclarations sont manifestement vrai lorsque les sommations sont écrites en toutes lettres.)

La notation sigma est également utilisée pour désigner SERIES, c'est-à-dire des sommes infinies :

$$\sum_{k=1}^{\infty} = un\ aaa1k3$$

Par exemple, la SÉRIE GÉOMÉTRIQUE peut s'écrire : $\sum_{k=0}^{\infty} = x^k + + 1 + 2\ 3\ xxx$. Si –1 < x < 1, alors il a valeur $\frac{1}{1 - x}$, auquel cas on peut écrire : $\sum_{k=0}^{\infty} = x^k \quad \frac{1}{1 - x}$.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), monnayeur de CALCULUS, utilisait un « S » allongé, ∫, à la fois pour la somme d'une séquence d'entiers et comme un signe d'intégration (qu'il considérait comme une sommation continue).

Voir aussi SÉRIE ARITHMÉTIQUE ; SÉRIE CONVERGENTE ; PRODUIT INFINI ; SOMMES DES POUVOIRS.

sommes de puissances Les formules suivantes, appelées les des sommes de puissances, donner des équations simples pour sommes des premiers nombres comptés, carrés et cubiques. Ils peuvent facilement être prouvés par la méthode de INDUCTION:

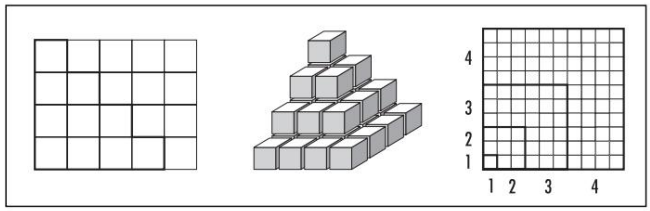
$$123 = + + + \quad n \quad \frac{nn(+1)}{2}$$

$$123 + + + + \quad n \quad \frac{+(nn n12 1 +)}{(6}$$

$$123 + + + \quad n \quad \frac{nn1(+)^2}{4}$$

Il est également possible d'établir géométriquement ces formules.

La validité de la première formule peut être vue par divisant une grille n × (n + 1) de carrés en deux « cages d'escalier », chacune représentant la même somme 1 + 2 + 3 +…+ n. Cela donne:



Calculer des sommes de puissances

Machine Translated by Google

$$2\times(1+2+3+\ldots+n)=n\times(n+1)$$

Dans le même ordre d'idées, on peut montrer que six copies d'un "escalier" tridimensionnel s'empilent pour former un boîte rectangulaire n × (n + 1) × (2n + 1), établissant ainsi la validité de la formule de la somme des carrés. Enfin, chaque région en forme de L dans une sous-division (1 + 2 +…+ n) × (1 + 2 +…+ n) carré a une aire donnée par a nombre de cubes. La somme de ces domaines établit la formule de la somme des cubes.

ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 av. J.-C.) connaissait la formule de la somme des n premiers comptages Nombres. Les érudits arabes, qui traduisirent et préservèrent les ouvrages d'Archimède, furent ainsi également conscient du résultat. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) aurait découvert la même chose pour mula en tant qu'élève, employant une astuce astucieuse de écrire la même somme en avant et en arrière. (C'est maintenant considéré comme une technique standard dans l'étude de SÉQUENCES ARITHMÉTIQUES.)

En 1713, le mathématicien suisse Jacques Bernoulli de la célèbre FAMILLE BERNOULLI recherchait un général formule de la somme des premières kèmes puissances : $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$. Il a remarqué que cette somme apparaît comme le coefficient de x^k dans la SÉRIE TAYLOR de

$$k!(1 + e^{x} + e^{2x} + \ldots\ldots + e^{nx})$$

(Pour voir cela, écrivez chaque terme e^{MX} en série $1 + mx + \frac{m^2x^2}{2!} + \ldots$ Puis additionnez et collectez tous les termes l'expression x^k contenant .) En utilisant la formule pour le somme d'une SEQUENCE GEOMETRIQUE, cette expression peut être réécrit comme suit :

$$k!\frac{(e^{x})^{n+1}-1}{e^{x}-1}=k!\,\frac{e^{(n+1)x}-1}{x}\,\frac{x}{e^{x}-1}$$

Le premier facteur ici est k!, et la série de Taylor de la le deuxième facteur est simple :

$$\frac{e^{(n+1)x}-1}{x}=1+\frac{2}{2!}x+\frac{(n+1)^2}{3!}x^2+\cdots$$

Malheureusement, la série de Taylor du troisième facteur est difficile à calculer. Bernoulli a décidé d'écrire simplement :

$$\frac{x}{e^{x}-1}=B_0+B_1x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\cdots$$

pour certains nombres B0 , B1 , B2 , … encore à déterminer. Compte tenu de cela, il s'ensuit maintenant que $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ est le coefficient de x^k dans le produit :

$$k!\left(n+\frac{(n+1)^2}{2!}x+\frac{(n+1)^3}{3!}x^2+\cdots\right)\left(B_0+B_1x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\cdots\right)$$

Étendre les parenthèses et identifier le coefficient de x^k dans ce produit conduit finalement au remarquable formule:

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\frac{(nB+1)^{k+1}-B^{k+1}}{k+1}$$

où une quantité Br doit être interprétée comme la valeur Br .

Les nombres B0 , B1 , B2 , … sont aujourd'hui connus sous le nom de Les nombres de Bernoulli, et leurs valeurs sont données par :

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\ldots$$

avec Bk = 0 pour toutes les valeurs impaires de k supérieures à 1. Ainsi, à titre d'exemple, nous avons à nouveau :

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(nB+1)^3-B^3}{3}$$

$$=\frac{B_0n^3+3B_1n^2+3B_2n+B_3-B_3}{3}$$

$$=\frac{n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Les nombres de Bernoulli ont depuis été étudiés largement, et bon nombre de leurs propriétés sont maintenant bien compris. Ces chiffres font leur apparition dans évaluer la FONCTION ZETA à des valeurs paires. Plus précisément, les mathématiciens ont montré que :

Machine Translated by Google

490 euros

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1} B_{2m} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}$$

Cela donne, par exemple, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

surd Une expression numérique contenant des nombres irrationnels qui proviennent uniquement de l'opération consistant à prendre des racines carrées ou supérieures est appelée surd. Par exemple, $\sqrt{5}$, $3\sqrt{2} - \sqrt{7}$, et $4^{\frac{2}{5}}$ sont tous surds. (Cependant, l'irrationnel le nombre e + ln 2, par exemple, ne contient pas de racines et n'est donc pas un surd.) Un surd pur ne contient que des termes racines irrationnels (tels que $\sqrt{11} + \sqrt[4]{13}$, par exemple) et un mixte surd contient à la fois des termes rationnels et irrationnels (tels que $3\sqrt{2}$, comme $4\sqrt{7}$, par exemple).

Le conjugué d'un surd qui est la somme de deux termes est la différence de ces deux mêmes termes. Pour exemple, le conjugué de $2\sqrt{3} + 4\sqrt{5}$ est $2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$. Si les racines carrées sont concernées, alors le produit d'un surd et de son conjugué est toujours un nombre rationnel.
Cette observation est utilisée dans le processus de RATIO NALISATION DU DÉNOMINATEUR d'une expression rationnelle compliquée.

Surds de la forme $\frac{a \pm \sqrt{b}}{c}$, où a, b et c sont les entiers, avec b pas un carré parfait, sont parfois appelés surds quadratiques. Le terme surd est rarement utilisé aujourd'hui et est généralement considéré comme obsolète.

syllogisme Voir ARGUMENT.

symétrie Une figure ou une expression est dite symétrique si des parties de celle-ci peuvent être échangées sans changer la figure ou l'expression dans son ensemble. Par exemple, une figure géométrique telle que la lettre "W" peut être divisée en deux parties, la moitié gauche et la moitié droite, qui peuvent être interchangées via une RÉFLEXION autour d'une ligne verticale pour laisser la forme générale de la figure inchangée . On dit que cette figure a une symétrie de réflexion autour d'une droite verticale. De la même manière, la lettre "C" a une symétrie de réflexion autour d'une ligne horizontale et la lettre "S" a une symétrie de ROTATION autour de son point central. La figure d'un CERCLE a une symétrie de réflexion autour de toute ligne qui passe par son centre et une symétrie de rotation à travers n'importe quel degré de rotation sur son centre. Un CUBE a une symétrie de réflexion autour de n'importe quel plan passant par son centre parallèle à l'une de ses faces.

Une figure géométrique est dite avoir une symétrie de rotation n fois autour d'un axe de rotation si elle est symétrique autour d'une rotation de $\frac{360°}{n}$ autour de cet axe. Par exemple, un pentagone régulier a une symétrie de rotation quintuple autour d'une ligne passant par son centre PERPENDICULAIRE à la page sur laquelle la figure est dessinée. Un TÉTRAÈDRE a une symétrie de rotation triple autour d'un axe qui passe par l'un de ses sommets, et une symétrie de rotation double autour d'un axe qui passe par les milieux de deux arêtes opposées.

L'équation x^2 variables + 2 est symétrique dans les xy + y x et y, ce qui signifie que l'échange des deux variables produit une nouvelle équation équivalente à l'originale. En général, une fonction f de plusieurs variables est dite totalement symétrique si l'échange de deux variables quelconques ne modifie pas la fonction : f(x1 ,…,xi ,…, xj ,…,xn) = f(x1 ,…, xj ,…, xi ,…, xn) pour toutes les valeurs i et j.

L'ensemble de toutes les PERMUTATIONS de n lettres x1 ,x2 ,…,xn forme un GROUPE appelé groupe symétrique d'ordre n. Toute équation POLYNOMIALE p(x) = 0 est symétrique par rapport aux permutations des racines de l'équation. Si le polynôme est complètement factorisé (comme c'est possible selon le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÉE BRA), alors tout réarrangement des racines de l'équation $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = 0$ ne signifie pas modifier l'équation.

Une FONCTION y = f(x) dont le graphe est symétrique par rapport à l' axe des ordonnées par une réflexion est dite paire. Celle qui est symétrique par rapport à une rotation de 180° autour de l'origine est dite impaire. Les fonctions paires satisfont f(–x) = f(x) pour toutes les valeurs x, et les fonctions impaires f(–x) = –f(x).

Une MATRICE carrée A est dite symétrique si, pour chaque valeur appropriée i et j, l'entrée de la ième ligne et de la jème colonne correspond à l'entrée de la jème ligne et de la ième colonne : Aij = Aji.

Une RELATION est dite symétrique si x étant lié à y signifie que y est également lié à x. Par exemple, « est un frère de » est une relation symétrique entre les personnes. (Si Lashana est le frère de Terell, alors Terell est aussi le frère de Lashana.) La relation « est une sœur de », cependant, n'est pas symétrique.

Une figure ou une expression qui n'est pas symétrique est dite asymétrique.

Voir aussi FONCTIONS PAIRES ET IMPAIRES ; FRISE MODÈLE.

Machine Translated by Google

division synthétique Voir MULTIPLICATION NICHÉE.

système d'équations Un ensemble d'équations dans plusieurs inconnues - doivent être vraies pour des valeurs particulières de ces inconnues - s'appelle un système d'équations. Pour exemple, les trois équations

$$2x - 3xy + z = 11$$
$$3x(y + z) = z^2 (x + y)$$
$$x^3 + y^3 = 17 + z$$

a la solution x = 1, y = 2 et z = 2. Géométriquement, chaque équation représente une courbe ou une surface dans l'espace, et une solution du système d'équations est une solution commune point d'intersection de ces surfaces. Il est possible pour un système d'équations sans solutions. (Pour exemple, il n'y a clairement pas de valeurs de x et y pour quel $x^2 + y = 1$ et $y^2 + x = 2$.)

Résoudre un système arbitraire d'équations, voire pas du tout possible, est généralement une tâche très difficile. Souvent, un mathématicien aura recours à des méthodes graphiques et recherchera pour une SOLUTION GRAPHIQUE. Dans des cas particuliers, une méthode de SUBSTITUTION pourrait s'avérer utile. Par exemple, considérons les équations :

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x - y = 1$$

La résolution de y dans la deuxième équation donne y = x –1. L'insertion de cette valeur dans la première équation donne un Équation QUADRATIQUE en x, à savoir $x^2 + (x – 1)2 = 25$. Cela peut être réécrit $2x^2 – 2x + 1 = 25$ ou comme $2x – 2x – 24 = 0$. La résolution de x donne deux solutions, avec des valeurs correspondantes pour y. Nous avons x = 4 et y = 3 comme une solution, et x = –3 et y = –4 comme une autre. (Graphiquement, nous avons trouvé l'emplacement des deux points où la droite x – y = 1 coupe le CERCLE $x^2 + y^2 = 25$.)

L'étude de l'ALGÈBRE LINÉAIRE et le processus de L'ÉLIMINATION GAUSSIENNE fournit des moyens efficaces et simples pour résoudre des systèmes de LINÉAIRE SIMULTANÉ. ÉQUATIONS.

Voir aussi RÈGLE DE CRAMER ; HISTOIRE DES ÉQUATIONS ET ALGEBRE (essai).

Machine Translated by Google

J

tangente Une ligne droite qui touche une courbe sans la couper à cet emplacement est appelée une ligne tangente à la courbe, et l'emplacement auquel la ligne et la courbe se touchent est appelé le point de contact. Cela dit, cependant, cela ne doit pas être considéré comme la définition précise d'une ligne tangente. En général, une ligne tangente est autorisée à avoir plus d'un point de contact, peut couper la courbe en des points autres que le point de contact et peut même couper la courbe au point de contact si ce point est aussi un point de contact. POINT D'INFLEXION. Pour inclure ces possibilités, les mathématiciens définissent la ligne tangente à une courbe en termes de LIMITE :

> La ligne tangente à une courbe en un point P est la position limite d'une ligne passant par P et passant par un deuxième point Q sur la courbe lorsque ce point Q glisse vers P.

Mais même cette définition présente quelques difficultés, car il se peut que la position limite ne soit pas bien définie. Il n'y a pas de ligne tangente unique au coin d'un carré, par exemple.

Une courbe est dite lisse si chaque point de celle-ci a une ligne tangente bien définie à ce point. La théorie du CALCUL DIFFÉRENTIEL est utilisée pour trouver la PENTE d'une droite tangente à une courbe.

Si une courbe se croise, des noms spéciaux sont donnés au point d'intersection en fonction du comportement des lignes tangentes à ce point. Un point d'auto-intersection est appelé nœud (ou crunoeud) s'il existe sont deux lignes tangentes distinctes en ce point, et un point tac si les deux lignes tangentes coïncident.

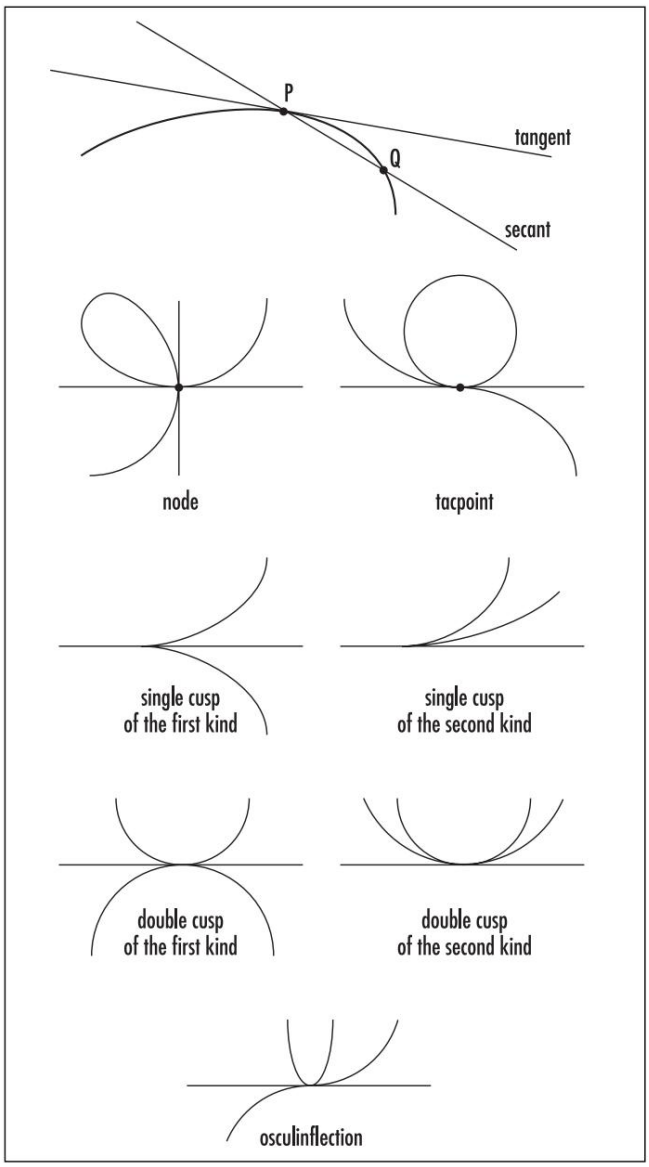
Si deux branches différentes d'une courbe se touchent en un point et ont une ligne tangente commune en ce point, alors ce point est appelé un point de rebroussement. Une seule cuspide a deux branches qui se rencontrent et se terminent en un point, et une double cuspide a deux branches qui se poursuivent chacune par le point de contact. Une cuspide est classée comme étant de « première espèce » si les branches de la courbe appartiennent à des côtés opposés de la tangente, ou de « seconde espèce » si elles se trouvent du même côté (au moins près du point de contact) . Si une branche d'une double cuspide a un point d'inflexion au point de contact, alors la double cuspide est appelée osculinflexion.

Un plan tangent à une surface est un plan qui touche la surface sans la traverser. Cette définition informelle peut être ajustée et précisée en considérant la position limite des plans passant par trois points sur la surface. Si une SPHÈRE solide repose sur une table, par exemple, la surface de la table est un plan tangent pour le solide. Au point de contact, tous les points proches de ce point se trouvent du même côté du plan tangent. Un point sur une surface est appelé point de selle si les points proches se trouvent de chaque côté du plan tangent en ce point. (La forme de la surface à un tel point ressemble à la selle d'un cheval.)

En géométrie, deux figures sont dites tangentes en un point P si elles se touchent, mais ne se coupent pas, en P. En TRIGONOMÉTRIE, la tangente d'un angle A, notée tan(A), est le rapport $\frac{\text{péché}(A)}{\cos(A)}$.

Voir aussi NORMALE À UNE SURFACE ; PARABOLOÏDE.

Machine Translated by Google



Tangentes, sécantes et points de contact

Tartaglia, Niccolò (1499–1557) Algèbre italienne
à Brescia, Italie, en 1499 (sa date de naissance exacte n'est pas
connu), le savant Niccolò Tartaglia est connu comme l'un
des premiers mathématiciens à découvrir le long-recherché
solution de l' ÉQUATION CUBIQUE générale. Sa méthode était
publié, sans autorisation, par GIROLAMO CARDANO
(1501-1576), à qui il avait révélé les détails en confidence. Tartaglia
a également publié le texte influent en trois volumes General trattato
di numeri et misure (Traité
sur les nombres et les mesures), et fut le premier italien
chercheur pour traduire et publier le célèbre traité d'Euclide
LES ÉLÉMENTS.

Tartaglia, né Niccolò Fontana, n'était qu'un garçon
lorsque les Français ont envahi sa ville natale en 1512. Pendant le
massacre, Tartaglia a reçu une épée sévère
blessures à la mâchoire et au palais et a été laissé pour mort dans un
cathédrale. Il a survécu, mais par la suite ne pouvait parler que
difficilement, d'où son surnom, Tartaglia, signifiant
"bègue."

A la Renaissance, les érudits sont pour la plupart soutenus par
de riches mécènes et doivent prouver leur talent en
vaincre d'autres savants dans des compétitions publiques. Pour
pour cette raison, les mathématiciens garderaient leurs méthodes
secret. En 1535, Tartaglia découvrit un moyen de résoudre
équations cubiques de la forme $x^3 + ax2 = b$ et a commencé
faire connaître son exploit. Auparavant, SCIPIONE DEL
FERRO (1465-1526) avait révélé à son élève Anto nio Maria Fiore
(vers 1506-1560) une méthode pour résoudre



Niccolò Tartaglia, un éminent mathématicien du XVIe siècle, a trouvé une méthode générale de résolution des équations cubiques.
(Photo publiée avec l'aimable autorisation du Science Museum, Londres/
Topham HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

cubes de type $x^3 + cx = d$. En quête de gloire, Fiore chal a prêté Tartaglia à un débat et lui a présenté 30 questions d'un type qu'il était sûr que Tartaglia serait incapable de répondre. Aux premières heures du 13 février, 1535, le jour du débat, l'inspiration vint à Tartaglia, et il découvrit une méthode générale qui résolu les deux types d'équations. Tartaglia a remporté le test con avec facilité.

La nouvelle de la victoire de Tartaglia parvint à Cardano, qui, avec son assistant LUDOVICO FERRARI (1522-1565), fut travailler sur la solution de l' ÉQUATION QUARTIQUE. Ce travail nécessitait la connaissance de la solution cubique, et donc Cardano a demandé à Tartaglia des détails sur ses méthodes. Après de nombreuses supplications, Tartaglia a finalement révélé son solution à Cardano, sous la promesse que les méthodes restent secrètes. Après avoir découvert qu'un autre scientifique, Scipione del Ferro, avait mis au point des méthodes identiques des décennies plus tôt, Cardano a rompu cette promesse et publié la solution, ainsi que la solution à la quartique, dans son texte 1545 texte Ars magna (Le grand art). Une âpre dispute entre Tartaglia, Cardano et Ferrari s'ensuivit. Aujourd'hui, pour honorer les réalisations des deux hommes, la formule de la solution du cubique s'appelle la formule de Cardano-Tartaglia.

Tartaglia est décédée à Venise, en Italie, le 13 décembre 1557.

tautochrone Voir CYCLOÏDE.

tautologie Dans la LOGIQUE FORMELLE, un énoncé composé qui ne peut pas être faux en raison de sa structure est appelé une tautologie. Par exemple, « Si toutes les planètes sont fait de fromage, alors Mars est fait de fromage » est vrai quelle que soit la validité des déclarations des composants que "toutes les planètes sont faites de fromage" et "Mars est fait de fromage. Les tautologies sont vraies uniquement à cause de les lois de la logique et non à cause de faits connus sur le monde. Ce sont donc des déclarations qui ne contiennent que des informations définitionnelles.

Voir aussi LOIS DE LA PENSÉE ; TABLE DE VÉRITÉ.

Taylor, Brook (1685–1731) Né au calcul britannique le 18 août 1685, à Edmonton, en Angleterre, on se souvient aujourd'hui du mathématicien Brook Taylor pour son contributions importantes au développement de CALCU LUS. Dans son texte de 1715 Methodus incrementorum directa et inversa (Méthodes directes et indirectes d'incrémentation), Taylor a formulé des méthodes pour développer des fonctions en séries infinies. Ceux-ci sont aujourd'hui connus sous le nom de SÉRIE TAYLOR. Taylor a également inventé la technique de INTÉGRATION PAR PIÈCES.

Taylor est diplômé du St. John's College, Cam bridge, en 1709 avec un diplôme supérieur en mathématiques, après avoir déjà écrit son premier article mathématique 1 an plus tôt. Malgré son jeune âge Taylor rapidement s'est forgé une réputation d'expert dans le domaine du calcul. Il a été élu à la prestigieuse SOCIÉTÉ ROYALE en 1712 et a été immédiatement nommé à un comité spécial chargé de statuer sur la question de savoir si c'était SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) ou GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) qui avait découvert le THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL qui unit différenciation avec intégration.

Malgré l'attachement de son nom à la technique, Taylor n'a pas été le premier à développer une théorie de expansions de fonctions infinies. Plusieurs décennies plus tôt JAMES GREGORY (1638-1675), Johann Bernoulli (1667–1748) de la célèbre FAMILLE BERNOULLI, ABRA HAM DE MOIVRE (1667–1754), et d'autres avaient indépendamment découvert des variantes de l'expansion de Taylor théorème. (Taylor n'était pas au courant de cet ensemble de travaux lorsqu'il écrivit son célèbre texte de 1715.) La signification d'expansions en série infinies, cependant, n'était pas correctement reconnu jusqu'à 40 ans après la mort de Taylor quand, en 1772, mathématicien français influent JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813) le proclamait important principe de base du calcul différentiel.

En tant que chercheur polyvalent, Taylor a également écrit sur des sujets de physique expérimentale et théorique. Il publie des articles sur le magnétisme, les thermomètres, les vibrations les cordes, l'action capillaire et les lois mathématiques dictant le mouvement des planètes. Il a inventé l'alternative méthodes de calcul des logarithmes et d'approximation solutions aux équations algébriques. En 1715, il publia également Linear Perspective, un texte influent décrivant les fondements mathématiques de la GÉOMÉTRIE PROJECTIVE et le rôle du point de fuite dans l'art. Il mourut en Londres, Angleterre, le 29 décembre 1731.

Série de Taylor De nombreuses fonctions, telles que la trigonométrie fonctions et fonctions exponentielles et logarithmiques, sont difficiles à manipuler, alors que l'addition, la soustraction,

Machine Translated by Google

et multiplier les fonctions POLYNOMIALES est relativement direct. En 1715, le mathématicien anglais BROOK TAYLOR a travaillé pour approximer des fonctions compliquées avec des polynômes simples.

Supposons qu'il soit effectivement possible d'approximer un fonction compliquée f(x) en tant que polynôme :

$$f(x) \approx a0 + a1x + a2x^2 + \ldots\ldots + anx^n$$

On analyse la situation en constatant d'abord que placer x = 0 dans cette formule donne :

$$f(0) = a0 + 0 + 0 + \cdots + 0$$

Cela montre que l'approximation peut être rendue exacte, au moins à x = 0, en posant a0 = f(0). Pour déterminer le coefficient a1 , différenciez une fois puis fixez x = 0 :

$$f'(x) = 0 + a1 + 2a\,2x + 3a3x^2 + \cdots + nanx^{n-1}$$
$$f'(0) = a1$$

Cela montre que a1 = f′(0) est un bon choix. C'est-à-dire par en définissant a1 comme étant cette valeur, non seulement les valeurs des fonction et polynôme correspondent en x = 0, mais les pentes des deux graphiques correspondent également à x = 0.

En différenciant un autre instant et en posant x = 0 (c'est-à-dire c'est-à-dire, faire correspondre les dérivées secondes) donne :

$$f''(x) = 2a2 + 2 \cdot 3a3x + \cdots + n(n-1)anx^{n-2}$$
$$f''(0) = 2a2$$

et ainsi $un2 = \frac{F''(0)}{}$. En continuant ainsi on obtient : 2

$un3 = \frac{F'''(0)}{3!}$, , $unn = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$.

Ainsi une bonne approximation de la fonction f(x), à moins autour de la valeur x = 0, serait le polynôme :

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \frac{F'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(f^n)0()}{n!}x^n$$

Plus le degré utilisé par le polynôme est élevé, meilleure sera l'approximation. Ainsi le meilleur polynôme de tous serait un polynôme de degré infini,
c'est-à-dire une POWER SERIES :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Les mathématiciens ont prouvé que si f peut effectivement être différenciée infiniment de fois, alors cette «approximation» est exacte pour la plage de valeurs vers laquelle converge la série (appelée son RAYON DE CONVERGENCE), c'est-à-dire le fonction est vraiment égale à la somme infinie exprimée sur la partie droite de la formule. Cette formule est appelée série de Taylor.

A titre d'exemple, considérons la fonction $f(x) = e^x$. Différencier et substituer en x = 0 donne :

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$$

et ainsi $xe^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$. Une étude des séries de puissance montre que cette série a un rayon de convergence infini, et donc cette équation est valable pour toutes les valeurs de x.

La série de Taylor de f(x) = sin x est donnée par :

$$f(x) = \sin(x) \qquad F(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \qquad F'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad F''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \qquad F'''(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad F^{(4)}(0) = 0$$

$$\text{péché } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

De la même manière,

$$\text{parce que } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} + 1 \quad x = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{(valable uniquement pour } -1 < x < 1\text{)}$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{(valable uniquement pour } -1 < x \le 1\text{)}$$

Étant donné que les calculatrices portatives sont programmées uniquement pour additionner, soustraire, multiplier et diviser, les séries de Taylor font il est possible de calculer les valeurs de fonctions compliquées.

Machine Translated by Google

(Notant que les calculatrices n'affichent que huit ou 10 décimales, il suffit d'utiliser les premiers termes de la série de Taylor pour obtenir des réponses suffisamment précises.)

Pour approximer une fonction proche d'une valeur x = a différente de zéro, on utilise un polynôme de la forme : $+\ldots$ En $(x - a) + a2 (x - a) + a3 (x - a)$ pareil technique utilisant a0 + a1 de dérivation et de substitution en x = a donne :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

C'est ce qu'on appelle une série de Taylor "centrée en x = a". Les séries de Taylor, comme discuté ci-dessus, centrées en x = 0 sont parfois appelées séries de Maclaurin. En 1742, le mathématicien écossais COLIN MACLAURIN (1698-1746) écrivit un texte influent dans lequel il décrivait les méthodes de Taylor. Si Maclaurin n'a pas prétendu avoir découvert ces séries centrées en zéro (il a lui-même reconnu qu'elles ne sont qu'un cas particulier des résultats généraux de Taylor), les érudits honorent néanmoins son travail en associant son nom à ces séries particulières.

Talyor a mené ses travaux au début des années 1700, mais on sait que d'autres chercheurs, tels que JAMES GRE GORY (1638-1675), ont utilisé les séries de puissance de la même manière des décennies plus tôt.

Voir aussi ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ; MERCATOR'S EXPANSION.

tenseur Tout comme un VECTEUR est une quantité mathématique qui décrit des translations dans un espace à deux ou trois dimensions, un tenseur est une quantité mathématique utilisée pour décrire des transformations générales dans un espace à n dimensions. Précisément, si les emplacements des points dans l'espace à n dimensions sont donnés dans un système de coordonnées par $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ et dans un système de coordonnées transformé par $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ (il est pratique d'utiliser des exposants plutôt que des indices), alors un « tenseur contravariant de rang 1 » est une quantité T, à composantes simples, qui se transforme selon la règle :

$$T^{i}_{\text{nouveau}} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{r}} T^{r}$$

(Les coefficients sont ici des DÉRIVÉES PARTIELLES.) Ainsi, par exemple, si le changement de coordonnées est une translation, yi = xi + ai pour certains nombres ai , il s'ensuit que $T^{i}_{\text{nouveau}} = T^{i}$. Cela signifie que la quantité T est une quantité, à n composantes, inchangée par les translations. Autrement dit, T est bien un vecteur.

Des règles de transformation plus compliquées sont autorisées pour les quantités dont les composants sont donnés par deux exposants ou plus (ou même des indices). ALBERT EIN STEIN (1879–1955) a utilisé l'analyse tensorielle dans sa théorie générale de la relativité.

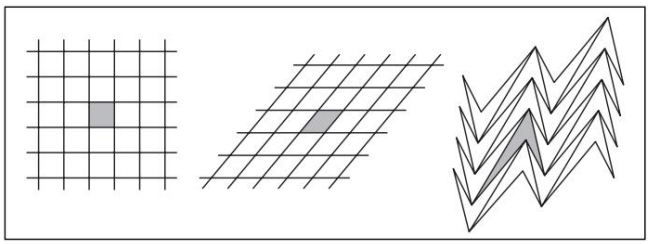
pavage (recouvrement, pavage) Un recouvrement du PLAN avec des formes géométriques s'appelle un pavage ou un pavage. Habituellement, les formes, appelées tuiles, sont des POLYGONES et le motif produit est, dans un certain sens, répétitif. Chaque point du plan doit être couvert par une tuile, et deux tuiles ne peuvent se croiser que le long de leurs bords. Un emplacement où trois arêtes ou plus se rencontrent en un point est appelé un sommet de la tessellation. (On suppose généralement que les tuiles voisines se rencontrent sur toute la longueur de leur bord commun.)

Une tessellation régulière utilise des polygones réguliers congruents, tous d'un même type, comme tuiles. Par exemple, une tuile carrée peut être utilisée pour couvrir un plan, comme indiqué ci-dessous. Quatre arêtes se rencontrent à chaque sommet de la tessellation. (Notez que quatre angles de 90° s'ajoutent à un total de 360° autour de ce sommet.) Un triangle équilatéral recouvre également le plan (six triangles, contenant des angles de 60°, s'ajustent autour d'un sommet), tout comme l'hexagone régulier. (Trois hexagones, contenant des angles de 120°, s'ajustent autour d'un sommet.) Comme aucun autre polygone régulier n'a de valeurs d'angle appropriées pour s'ajuster autour d'un sommet, ce sont les seuls pavages réguli

Une tessellation semi-régulière utilise des polygones réguliers congruents de plusieurs types, disposés de sorte que la disposition des polygones autour de chaque sommet de la tessellation soit identique. Par exemple, on peut paver le plan avec des hexagones réguliers et des triangles équilatéraux de sorte que chaque hexagone soit entouré de six triangles et chaque triangle de trois hexagones pour produire une mosaïque semi-régulière. Les mathématiciens ont prouvé qu'il n'y a que huit pavages semi-réguliers du plan. (Si l'on abandonne la restriction selon laquelle l'arrangement des polygones autour de chaque sommet doit être identique, alors il y a une infinité de tels pavages.)

Une tessellation monoédrique est une tessellation qui utilise des copies congruentes d'un seul type de tuile (pas nécessairement

Machine Translated by Google



Tessellations

un polygone régulier). Le diagramme ci-dessus montre que tout PARALLELOGRAMME pave le plan. Comme deux copies d'un même triangle s'emboîtent pour former un parallélogramme, on a :

Tout triangle fournit une mosaïque monoédrique du plan.

En déformant la tessellation monoédrique avec des grammes parallèles, on peut montrer :

Tout quadrilatère, concave ou convexe, fournit une tessellation monohédrique du plan.

Tous les pentagones ou tous les hexagones ne carreleront pas le plan. Dans sa thèse de doctorat de 1918, le mathématicien Karl Reinhardt (1895-1941) a classé les hexagones qui font des tuiles et a découvert qu'ils se répartissaient en trois types de base. À ce jour, personne ne sait combien de classes de pentagones convexes pavage le plan. (Quatorze types ont actuellement été identifiés.) Reinhardt a prouvé qu'aucun polygone convexe à sept côtés ou plus ne pave le plan.

Une mosaïque du plan à l'aide de deux CARRÉS de tailles différentes fournit une preuve visuelle étonnamment élégante du THÉORÈME DE PYTHAGORE .

tétraèdre (pyramide triangulaire) Toute figure solide (POLYÈDRE) à quatre faces triangulaires est appelée tétraèdre. Si les quatre faces sont des triangles équilatéraux congrus, alors la figure est dite régulière.

La hauteur h et le volume V d'un tétraèdre régulier de longueur d'arête a sont donnés par :

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,a$$

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2}\,a^3$$

et un tel tétraèdre régulier s'adapte parfaitement à l'intérieur d'un cube de longueur de côté $\frac{a}{\sqrt{2}}$. (Choisissez un sommet du cube et tracer des diagonales sur les trois faces entourant ce sommet. Celles-ci coïncident avec les trois arêtes d'un tétraèdre piégé.)

Bien qu'il soit possible d'empiler un nombre fini de petits cubes ensemble pour former un cube plus grand, il est impossible de réaliser un exploit similaire pour les tétraèdres réguliers : aucun tétraèdre régulier n'est une union de tétraèdres réguliers plus petits.

La somme des n premiers NOMBRES TRIANGULAIRES est appelée le nième nombre tétraédrique. Par exemple, le cinquième nombre tétraédrique est 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35.

Si nous plaçons des réseaux triangulaires de 1, 3, 6, 10 et 15 points les uns au-dessus des autres en utilisant la troisième dimension dans l'espace, le réseau de points produit est un tétraèdre, expliquant le nom de ces NOMBRES FIGURÉS . La formule générale pour le nième nombre tétraédrique est $\frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$. Les nombres tétraédriques apparaissent comme l'une des diagonales du TRIANGLE DE PASCAL .

Voir aussi NET ; SOLIDE PLATONIQUE.

Thalès de Milet (vers 625-547 av. J.-C.) Géométrie grecque , Philosophie Né dans la région de Milet, en Asie Mineure (aujourd'hui la Turquie), Thales est considéré comme le premier scientifique et philosophe de l'histoire occidentale, au moins dans le sens d'être le premier savant à qui des découvertes scientifiques et mathématiques particulières ont été attribuées. Plutôt que de s'appuyer sur la mythologie et la religion pour expliquer le monde naturel, Thales a recherché des principes rationnels dans la science. Ce travail l'a amené à rechercher également des principes unificateurs en géométrie et, à ce titre, il a été le premier érudit à tenter de dériver des faits géométriques par des processus de déduction et de raisonnement logique. Il a établi, par exemple, des propositions géométriques fondamentales telles que "les angles de base de tout triangle isocèle sont égaux" et "l'angle dans un demi-cercle est un angle droit".

On sait peu de choses sur la vie de Thales et tous ses textes écrits ont été perdus. Néanmoins, les érudits qui ont suivi Thales ont fait de nombreuses références à ses réalisations et à son approche de l'étude du monde.

Le philosophe grec PROCLUS (vers 450 CE) a affirmé que Thales avait acquis ses connaissances mathématiques auprès d'érudits égyptiens, et des siècles plus tard, Hieronymus, un étudiant d'Aristote, a écrit que Thales mesurait la

Machine Translated by Google

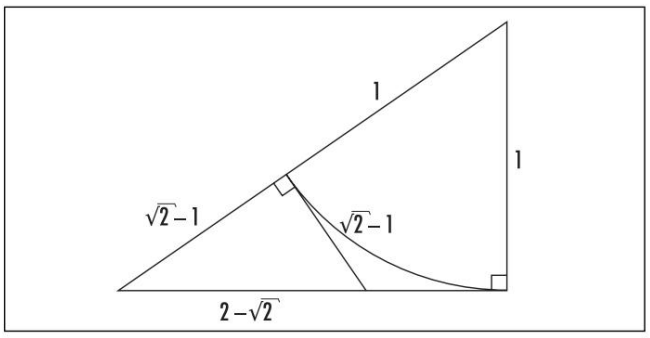
hauteur des pyramides en observant la longueur des ombres. (Les historiens considèrent aujourd'hui cela comme une preuve que Thales connaissait les principes des triangles similaires.) L'historien grec Hérodote (vers 485 avant notre ère) a écrit que Thales avait correctement prédit l'éclipse du soleil en 585 avant notre ère (bien que certains érudits suggèrent aujourd'hui que cela n'a peut-être été qu'une supposition chanceuse).

Aristote a écrit sur la vision du monde de Thales dans son texte Métaphysique. Apparemment, Thales croyait que la Terre était un disque plat flottant sur un océan infini d'eau. Il a utilisé cette théorie pour donner une explication rationnelle de la raison pour laquelle les tremblements de terre se produisent.

Théodore de Cyrène (vers 465-398 av. J.-C.) Géométrie grecque , théorie des nombres Né à Cyrène (aujourd'hui Shahhat, Libye), on se souvient de Théodore pour son travail sur les NOMBRES IRRATIONNELS, prouvant que non seulement $\sqrt{2}$ irrationnel, mais $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$, ainsi que les racines de toutes les autres quantités non carrées jusqu'à 17.

Théodore est noté comme ayant enseigné au grand philosophe PLATON (vers 428–348 avant notre ère) le sujet des mathématiques. Platon décrivit plus tard une grande partie de l'œuvre de Théodore dans son texte Théétète, et c'est principalement à travers ce document que nous savons quoi que ce soit de la vie et de l'œuvre de Théodore. Nous y apprenons, par exemple, que Théodore a également étudié l'astronomie, la musique et l'arithmétique.

Malheureusement, Platon n'a pas décrit la méthode par laquelle Théodore a prouvé que ses quantités étaient irrationnelles, et les historiens d'aujourd'hui se demandent pourquoi Theodorus a arrêté son travail avec le nombre $\sqrt{17}$. C'est probablement que Theodorus a développé une série d'arguments qui dépendaient fortement du nombre particulier étudié et n'a pas réussi à développer une approche générale



Prouver que la racine carrée de deux est irrationnelle

qui a traité tous les chiffres d'un seul coup. Ceci est d'autant plus curieux que la preuve arithmétique standard de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ était bien connue des savants de son époque, preuve qui peut très facilement être généralisée à des nombres autres que 2. (Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, alors $2 = \frac{a^2}{b^2}$ un nombre pair de fois dans la factorisation première de a 2 et un nombre impair de fois dans la factorisation de $2b^2$.) On peut aussi établir l'irrationalité

de $\sqrt{2}$ géométriquement comme suit :

L' ALGORITHME EUCLIDIEN montre que deux longueurs géométriques sont COMMENSURABLES (de rapport rationnel) si la soustraction répétée, à son tour, de la plus petite longueur de la plus longue produit finalement deux segments de même longueur. Ainsi, deux longueurs pour lesquelles ce processus continue indéfiniment doivent être d'un rapport irrationnel. En notant cela, considérons des segments de droite de longueur 1 et de longueur $\sqrt{2}$ formant un triangle rectangle isocèle. Avec un arc de cercle, construisons un segment de droite de longueur $\sqrt{2} – 1$, la différence de ces deux longueurs. Considérons maintenant les deux segments de longueurs 1 et $\sqrt{2} – 1$. Dessinez un deuxième triangle rectangle de côté de longueur $\sqrt{2} – 1$ gle a une longueur de $2 – \sqrt{2}$ ence de la $2 – 1$ comme indiqué. L'hypoténuse de son trian deuxième paire de $2 = 1 – (\sqrt{2} – 1)$, la différence longueurs. Comme ce processus peut être répété indéfiniment, en soustrayant toujours la plus petite longueur de la plus longue, il doit arriver que les deux quantités originales, 1 et $\sqrt{2}$, soient de rapport irrationnel.

De nombreux historiens pensent que Théodore a peut-être développé des arguments géométriques spécifiques de ce type, en utilisant des triangles, des pentagones et des 17-gons, par exemple, pour montrer que les nombres qu'il considérait sont irrationnels.

théorème (proposition) Un énoncé en mathématiques qui s'est avéré vrai s'appelle un théorème. Le nom vient du mot grec theórema signifiant « un sujet de contemplation ».

Souvent, les théorèmes sont classés en fonction de leur importance. Un lemme est un théorème auxiliaire, c'est-à-dire un résultat prouvé vrai en vue d'établir ultérieurement un résultat plus important. (En grec, lemme signifie « une chose prise ».) Un corollaire est un théorème de conséquence immédiate, c'est-à-dire un résultat qui découle d'une

Machine Translated by Google

théorème précédemment établi nécessitant peu ou pas d'explications supplémentaires. Une conjecture, en revanche, est une affirmation qui n'a pas encore été prouvée ou réfutée. La séquence de résultats suivante illustre ces idées :

> Lemme : Un nombre naturel au carré est soit divisible par quatre, soit laisse un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 4.

Preuve : Soit a un nombre naturel. Si a est pair, alors il peut être écrit sous la forme a = 2m pour un certain nombre m. Par conséquent, $a^2 = 4m^2$ est divisible par 4. Si, au contraire, a est impair, alors a = 2m + 1 pour un certain nombre m, et donc $a^2 = (2m + 1)2 = 4m2 + 4m + 1$ vaut 1 plus qu'un multiple de 4.

> Théorème : Si un nombre N est égal à la somme de deux, N = un reste de 0, $^2 + b^2$, alors N laisse soit un carré, 1 ou 2, mais pas 3, lorsqu'il est divisé par 4.

Preuve : D'après le lemme, a 2 laisse un reste de 0 ou 1 lorsqu'il est divisé par 4, tout comme le nombre b 2 . Il est impossible que les deux restes totalisent un reste de 3.

> Corollaire : Il est impossible d'écrire 2 867 039 comme la somme de deux nombres carrés.

Preuve : Ce nombre laisse un reste de 3 lorsqu'il est divisé par 4.

> Conjecture : Il est possible d'écrire 3 457 417 105 comme la somme de deux nombres carrés.

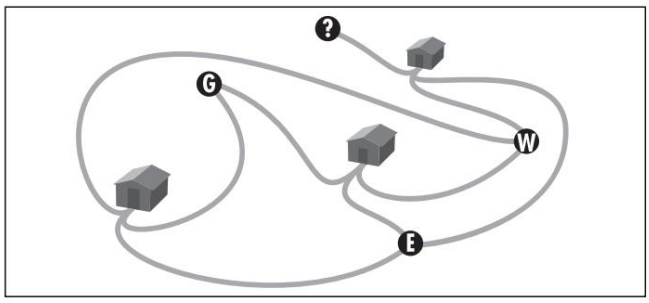
Cela reste à prouver ou à réfuter.

Voir aussi CARRÉ.

problème des trois services Un casse-tête classique met le lecteur au défi de connecter trois maisons à chacune des trois entreprises de services publics - eau, électricité et gaz - un tuyau entre chaque maison et chaque entreprise, de telle manière qu'aucune ligne ou réseau ne se croise.

Il s'avère que cette énigme ne peut être résolue si les bâtiments sont situés sur un plan. Un argument heuristique simple donne une idée de pourquoi c'est le cas :

> Toute solution au problème serait un schéma de six maisons et neuf tuyaux, divisant le plan en régions. Il semble que chaque région doit être délimitée par quatre tuyaux. S'il y a R régions, alors 4R représente le nombre total de tuyaux dans l'image, compté deux fois (chaque tuyau borde deux régions). Ainsi 4R = 18, suggérant qu'il doit y avoir un nombre non entier de régions. Cette absurdité démontre l'impossibilité de la tâche.



Le problème des trois utilités

Étonnamment, le puzzle peut être résolu si l'on dessine les trois maisons et les trois compagnies à la place sur la surface d'un TORUS. (On peut vérifier cela en utilisant un marqueur pour dessiner les chiffres sur un bagel, par exemple.)

Voir aussi GRAPH.

graphique de série chronologique Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

topologie (situs d'analyse, géométrie de la feuille de caoutchouc) L'étude des propriétés des formes géométriques et des surfaces qui restent inchangées lorsque les formes de ces objets sont déformées par une DÉFORMATION continue (telle que l'étirement, le rétrécissement ou la torsion) est appelée topologie. A la différence d'un géomètre classique, un topologue ne s'intéresse pas aux questions de distances et d'angles, mais ne s'intéresse qu'aux positions relatives des points. Tout ce qui est requis d'une transformation topologique est que les points qui commencent proches les uns des autres restent relativement proches les uns des autres. De ce point de vue, un cercle et un carré (de n'importe quelle taille) sont topologiquement équivalents, puisque l'un peut être continuellement déformé dans l'autre, et un certain nombre de propriétés géométriques s'appliquent également bien à l'un ou l'autre objet. Par exemple, l'énoncé « Supprimer un point d'un cercle produit

Machine Translated by Google

un segment de droite » est valable pour toute la classe d'objets topologiquement équivalents à un cercle.

Toute transformation qui nécessite de perforer ou de déchirer une surface, ou de joindre deux parties disjointes d'une figure, n'est pas considérée comme une action topologique valable. (Déchirer une surface, par exemple, sépare des points qui étaient proches.) Comme il est impossible de déformer une SPHÈRE en TORE sans perforer la surface, ces deux formes ne sont pas topologiquement équivalentes. Comme autres exemples, les lettres majuscules C, M et Z sont topologiquement équivalentes, tout comme les lettres D, O, P et R, mais aucune lettre du premier groupe n'est topologiquement équivalente à une lettre du second. Aucune lettre de l'alphabet n'est topologiquement équivalente à la lettre B (autre que le B majuscule lui-même).

L'étude de la topologie a commencé avec LEONHARD EULER (1707-1783) et son analyse du célèbre PROBLÈME DES SEPT PONTS DE KÖNIGSBERG. Le mathématicien CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) a examiné la distorsion des nœuds et des propriétés invariantes qui apparaissent dans l'étude de la GÉOMÉTRIE PROJECTIVE. En 1895, le mathématicien français HENRI POINCARÉ (1854-1912) a examiné ces travaux et publié cinq articles, posant un cadre théorique pour une étude formelle de la topologie.

La discipline de la topologie ponctuelle tente de saisir la notion de « proximité » sans faire mention de la distance. Dans cette approche théorique, on dispose d'un ensemble X et d'une collection spécifiée de sous-ensembles appelés ensembles ouverts, qui, dans un certain sens, sont censés représenter les points jugés « proches » les uns des autres. Ces sous-ensembles doivent satisfaire trois propriétés de base :

1. L'ensemble vide Ø et l'ensemble X sont réputés ouvrir.
2. Si A et B sont deux ensembles ouverts, alors leur intersection A ∩ B est aussi un ensemble ouvert.
3. L'union de toute collection d'ensembles ouverts est une autre ensemble ouvert.

Tout ensemble X avec une collection de sous-ensembles classés comme ouverts satisfaisant les trois propriétés énoncées est appelé un espace topologique. Par exemple, l'ensemble des nombres réels avec des unions d' intervalles ouverts comme ensembles ouverts est un espace topologique. Il en va de même pour l'ensemble X = {a,b,c,d} avec les sous-ensembles Ø, {a}, {b,c,d} et X comme ensembles ouverts. Deux espaces topologiques sont dits équivalents s'il existe une correspondance entre les points d'un espace et les points de l'autre de sorte que les ensembles ouverts d'un espace correspondent aux ensembles ouverts de l'autre.

Voir aussi THÉORIE DES NŒUDS ; BANDE DE MOBIUS.

tore (anneau d'ancrage, beignet) Une surface courbe fermée possédant un seul trou semblable à la surface d'un beignet ou d'un tube intérieur est appelée un tore (pluriel : tores). Un tore peut être considéré comme un SOLIDE DE REVOLUTION obtenu en faisant tourner un cercle dans un plan d'un tour complet autour d'une droite qui ne coupe pas le cercle. (Ce cercle est appelé le cercle générateur.) Ainsi, le THÉO REMS de PAPPUS montre que le VOLUME V et la SURFACE A d' un tore sont donnés par les formules :

$$V = 2\pi\ 2a\ 2b$$
$$A = 4\pi\ 2ab$$

où a est le rayon du cercle tourné autour d'une ligne, et b est la distance du centre du cercle à cette ligne. Ces formules peuvent également être obtenues par les techniques de CALCUL INTÉGRAL Dans un système de COORDONNÉES CARTÉSIENNES , si le cercle de rayon a est positionné dans le plan yz avec le centre à la position b le long de l' axe y et est tourné autour de l' axe z , alors l'équation du tore résultant produit est donnée par :

$$\sqrt{xyb\ z\ 2\ 2\ +\ -}\qquad {}^{2}_{un}\ 2\ 2\ +\ =$$

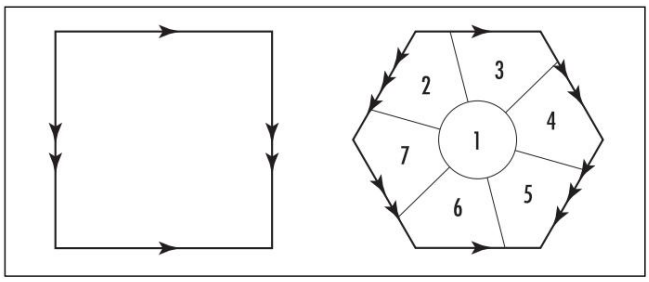
Cela découle du THÉORÈME DE PYTHAGORE appliqué à un triangle rectangle dans le cercle générateur lorsqu'il est tourné vers une position telle que les coordonnées x, y et z d'un point sur le tore soient (x, y, z). (Examinez le triangle droit de hauteur z avec le rayon a comme hypoténuse.)

Si θ désigne l'angle d'un point sur le cercle générateur, et l'angle de rotation de ce cercle générateur autour de l' axe z, alors on obtient les ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES suivantes pour le tore :

$$x = (b + a\cos\theta)\cos\qquad y$$
$$= (b + a\cos\theta)\sin\qquad z =$$
$$a\sin\theta$$

Chaque point sur le cercle générateur d'un tore, lorsqu'il est tourné autour de l'axe z, trace un cercle. Ainsi un

Machine Translated by Google



Construire un tore

tore peut être considéré comme le PRODUIT CARTESIEN de deux cercles : chaque point d'un tore correspond à une paire de points, un sur un cercle (le cercle générateur) et un second sur un deuxième cercle (le cercle tracé par ce point sur le cercle générateur). cercle). L'ensemble de toutes les positions possibles d'une aiguille des heures et d'une aiguille des minutes sur une horloge, chacune correspondant à un cercle complet de valeurs, décrit un ensemble de résultats topologiquement équivalents à un tore.
(Les physiciens diraient que "l'espace des phases" des deux aiguilles d'une horloge est un tore.)

On peut physiquement construire un tore en cousant ensemble les côtés opposés d'une feuille de caoutchouc carrée comme indiqué. (Il faut être sûr d'aligner les directions des flèches indiquées.) Coudre ensemble les côtés opposés d'un hexagone produit également un tore.

Cette dernière construction montre qu'il est possible de produire une conception de sept régions sur un tore de sorte que chaque région partage une portion de frontière avec chacune des six régions restantes. Ainsi certaines cartes sur un tore nécessitent sept couleurs à peindre si l'on veut s'assurer que les régions voisines sont toujours de couleurs distinctes.
Les mathématiciens ont prouvé que la situation n'est jamais pire que cela : sept couleurs suffiront toujours pour colorer une carte toroïdale, quelle que soit la complexité de cette carte.

Étant donné un tore perforé en caoutchouc, tel qu'une chambre à air avec un petit trou, il est physiquement possible d'étirer le trou et de retourner la surface à travers ce trou. Étonnamment, la surface résultante est un autre tore. Un tore double est une surface fermée avec deux trous. L'éversion d'un double tore à travers une perforation de sa surface donne à nouveau la même surface, un autre double tore, et le même résultat est vrai pour les triples tores et les multiples tores avec n'importe quel nombre de trous.

Voir aussi THÉORÈME DES QUATRE COULEURS ; SPHÈRE.

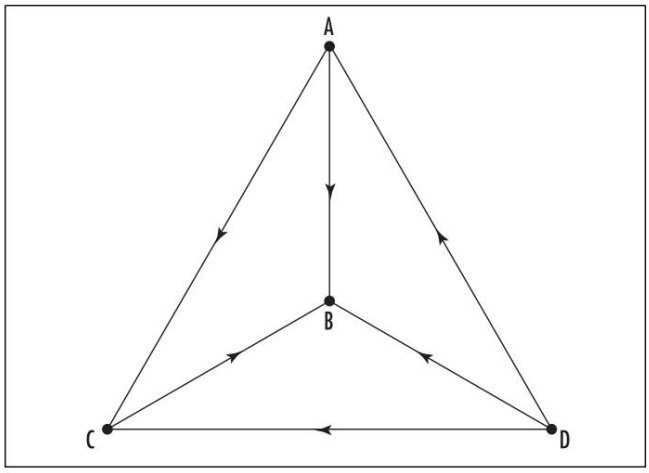
tournoi (tournoi à la ronde, diagramme complet) Une compétition entre un ensemble d'équipes est appelée un tournoi si chaque paire possible d'équipes joue exactement un match, et chaque match joué se solde par une victoire pour une équipe et une défaite pour l'autre . (C'est-à-dire qu'aucune égalité n'est autorisée.) Mathématiquement, un tournoi entre n joueurs est un GRAPHE à n sommets, avec des arêtes tracées entre chaque paire de points possibles, dirigées par des flèches pointant d'un sommet à l'autre. Ici, chaque sommet représente une équipe, et une arête pointant du sommet A au sommet B indique une victoire de l'équipe A sur l'équipe B. Le diagramme ci-dessous, par exemple, représente un tournoi entre quatre équipes, A, B, C et D. .

Nous voyons que l'équipe A a perdu contre l'équipe D mais a battu les équipes B et C.

Un graphe sur n sommets avec une arête entre chaque paire possible de sommets dirigés par une flèche est appelé un graphe orienté complet ou simplement un digraphe complet sur n sommets.

Structurellement, il n'y a essentiellement qu'un seul digraphe complet possible sur deux sommets (bien que, en termes de jeu d'équipe, il y ait deux interprétations possibles : soit une équipe A bat une équipe B, soit l'équipe B bat l'équipe A). Pour n égal à 3, 4, 5, 6 et 7, il existe respectivement 2, 4, 12, 56 et 456 digraphes complets différents sur n sommets.

Toute équipe qui a battu toutes les autres équipes dans un tournoi est appelée une source ou un émetteur, et toute équipe qui a perdu contre toutes les autres équipes est appelée un puits ou un récepteur.
(Ces noms reflètent l'interprétation alternative d'un



Représenter un tournoi

Machine Translated by Google

digraph comme un diagramme de flux d'informations.) Dans l'exemple ci-dessus, l'équipe D est une source et l'équipe B est un puits. Il est impossible qu'un tournoi possède deux sources différentes ou deux puits différents. Un tournoi n'a pas besoin de posséder ni source ni puits.

Chaque tournoi possède un CHEMIN HAMILTONIEN. Cela signifie qu'il est possible de trouver un chemin à travers le diagramme d'un digraphe complet qui commence à un sommet et suit les arêtes dans des directions qui respectent les flèches pour visiter chaque autre sommet exactement une fois. Par exemple, dans le schéma ci-dessus, le trajet D → A → C → B représente un chemin hamiltonien. Alternativement, un chemin hamiltonien peut être interprété simplement comme une liste de toutes les équipes qui ont joué dans un ordre tel que la première équipe de la liste bat la deuxième, la deuxième équipe de la liste bat la troisième, et ainsi de suite. L'exemple suivant illustre une méthode générale pour construire une telle liste (ou, de manière équivalente, un chemin hamiltonien) pour n'importe quel tournoi.

Considérez le tableau suivant décrivant les résultats d'un tournoi avec cinq équipes, A, B, C, D et E :

A a battu BC a battu B C a battu DD a battu E
A temps CB temps DE temps C
D bat AB bat E
Un battement E

et considérez les équipes une par une afin de créer une liste appropriée. Écrivez d'abord A. Maintenant, si l'équipe B bat A, alors il est permis d'écrire B à gauche de A. Ce n'est cependant pas le cas, et donc B doit être écrit à droite de A. Notre liste, jusqu'à présent, apparaît : A B .

Considérez maintenant l'équipe C et demandez : « C a-t- il battu A ? » Comme la réponse est non, nous n'avons pas le droit d'écrire C immédiatement à gauche de A. C a-t- il battu B ? Oui. Ainsi, nous sommes autorisés à écrire C à la gauche immédiate de B. Notre liste jusqu'à présent se lit comme suit : AC B. (Nous avons que A bat C et C bat B.)

Considérez maintenant l'équipe D et recherchez la première équipe sur la liste partiellement construite que D a battue. C'est l'équipe A. Cela conduit à la nouvelle liste : DAC B.

Considérons enfin l'équipe E. La première équipe sur cette liste partiellement construite que E a battu est C. Cela nous permet de placer E entre A et C pour pro

Duce la liste complète : DAEC B. Notez qu'il a bien la propriété que chaque équipe de la liste bat celle qui lui succède. Cette liste représente un circuit hamiltonien dans le digraphe approprié.

Le nombre total de parties jouées dans un tournoi avec N joueurs est donné par la formule :

$$\frac{N\,N(\,)-1}{2}$$

(Chacune des N équipes joue N – 1 parties, mais ce double compte le nombre total de parties jouées.) C'est le (N – 1)ème NOMBRE FIGURÉ triangulaire.

Si N est impair, il est toujours possible de construire un exemple de tournoi entre N équipes dans lequel chaque équipe a le même nombre de victoires. Cet exploit ne peut être accompli si N est pair. (Si chaque équipe a w gagne, alors N × w représente le nombre total de jeux joué. Par conséquent, nous devons avoir est $w = \frac{N-1\ .}{2}$Ce une formule invalide si N est pair.)

tour de Hanoï (tours de Hanoï, tour de Brahma)
Considérez trois pôles et une collection de disques de tailles différentes, tous placés initialement sur un pôle par ordre de taille, du plus grand en bas au plus petit en haut. Un ancien défi exige que tous les disques soient transférés sur un pôle différent de telle sorte que :

1. Un seul disque est déplacé à la fois.
2. Aucun disque ne repose jamais sur un autre disque de plus petite taille.

Une version à huit disques de ce puzzle a été brevetée et vendue comme jouet par Edouard Lucas en 1883. Il a appelé le puzzle la Tour de Hanoï et a écrit que le jeu était basé sur une "tour de Brahma" dans laquelle les prêtres devaient relever le défi. de déplacer 64 disques d'un pôle à l'autre sous les mêmes restrictions, en ne déplaçant qu'un seul disque par jour. La légende prétendait que le monde finirait le jour où la tâche serait terminée.

Un puzzle contenant seulement un ou deux disques est facilement résolu. Si l'on connaît une méthode pour résoudre le puzzle avec N disques, alors la solution de la version (N + 1)-disque s'ensuit facilement : transférer les N disques supérieurs sur un pôle via la méthode connue, déplacer le grand (N + 1))ème disque sur le pôle vide, et transférez les N disques sur le pôle contenant le grand disque. Si T(N) désigne le nombre

Machine Translated by Google

nombre de mouvements nécessaires pour résoudre la version N-disque du puzzle, il découle de la procédure ci-dessus que :

$$T(N + 1) = T(N) + 1 + T(N)$$
$$= 2T(N) + 1$$

avec T(1) = 1 et T(2) = 3. Cette RELATION DE RÉCURRENCE a pour solution :

$$T(N) = 2N – 1$$

Cela montre que la version 64 disques du puzzle nécessite 264 - 1 = 18 446 744 073 709 551 615 coups.
Selon la légende, la fin du monde surviendra donc dans environ 5,05 × 1016 ans.

Si l'on souhaite transférer N disques vers un pôle spécifique, alors on commence à résoudre le puzzle en déplaçant le plus petit disque vers le pôle souhaité si N est impair mais vers le troisième pôle si N est pair.

Si nous numérotons les N disques 1, 2,…, N du plus petit au plus grand, alors le tableau suivant montre l'ordre dans lequel les disques sont déplacés pour résoudre les cinq premières petites versions du puzzle :

N	Solution
1	1
2	1, 2,
3	1 1, 2, 1, 3, 1, 2,
4	1 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1
5	1, 2 , 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1 , 3, 1, 2, 1

Chaque ligne du tableau est générée en répétant deux versions de la solution précédente et en insérant le nombre N au centre. Étonnamment, le rième nombre dans n'importe quelle séquence représentant une solution au puzzle est égal à 1 de plus que l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise le nombre r. Par exemple, la plus grande puissance de 2 qui divise 12 est 22 et 2 + 1 = 3 est le 12ème nombre dans n'importe quelle séquence représentant une solution au puzzle.
Puisque 16 = 24 est la plus grande puissance de 2 qui divise le nombre 10 000, cette observation montre également que les prêtres Brah man déplaceront le disque 4 + 1 = 5 le jour 10 000.

tractrice (courbe équitangentielle, tracteur) Si l'on fait glisser l'extrémité avant d'un vélo le long d'une trajectoire rectiligne, alors la trajectoire tracée par la roue arrière (en supposant que la roues du vélo étaient initialement décalées) forme une courbe appelée la tractrice. Cette courbe a la propriété que l'extrémité de chaque segment de ligne de longueur fixe (la longueur du vélo) TANGENT à la courbe rencontre le chemin en ligne droite.

La courbe a été étudiée pour la première fois par le physicien hollandais Christiaan Huygens (1629–1695), qui a décrit le chemin en termes d'objet traîné par une longueur fixe de ficelle. Il a inventé le nom "tractrix" pour le chemin, le dérivant du mot latin trahere signifiant "traîner". La courbe est aussi parfois appelée «hund kurve» (en allemand pour «hound curve»), inspirée de l'image d'un chien réticent traîné en laisse par un propriétaire insistant.

trajectoire La trajectoire d'un objet ou d'une particule en mouvement est appelée sa trajectoire. La trajectoire d'une particule est souvent décrite par des ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES. Par exemple, les équations x(t) = cos(t) et y(t) = sin(t) donnent, à chaque instant t, les abscisses et y d'une particule dont la trajectoire est un CERCLE UNITAIRE. La trajectoire d'une balle lancée en l'air est une PARABOLE inversée, en supposant que les effets de la résistance de l'air peuvent être ignorés.

Le terme trajectoire est également utilisé dans la théorie des SYSTÈMES DYNAMIQUES comme nom alternatif pour l' ORBITE d'un point.

nombre transcendantal Voir NOMBRE ALGÉBRIQUE.

transformation Toute FONCTION ou application qui change une quantité en une autre est appelée une transformation. Bien que le terme soit essentiellement synonyme du terme fonction, il n'est généralement utilisé que dans le contexte de la géométrie, où l'on parle d'une TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE et d'une TRANSFORMATION DE COORDONNÉES.

La notation matricielle est souvent utilisée pour décrire les transformations géométriques du plan. Un point du plan est représenté par une colonne VECTEUR $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ et un géométrique transformation sous la forme d'une matrice 2 × 2 A. L'effet de la transformation géométrique est donné par la multiplication matricielle. Par exemple, application des matrices 2 × 2 suivantes

$$\begin{matrix} 1 & \theta\cos & -\sin\theta \\ -1 & \sin\theta & \theta\cos \end{matrix} \quad \begin{matrix} dix \\ 0\,0 \end{matrix}$$

Machine Translated by Google

a pour effet, respectivement, de refléter des points à travers l' axe des x, en faisant pivoter les points autour de l'origine à travers un angle θ, et en projetant des points sur l'axe des x.

En algèbre, un changement dans la forme d'un expression, sans changer sa validité, est appelée une transformation. Par exemple, l'action d' EXPANSION BRACKETS transforme l'expression $y = (x + 1)2$ en l'expression équivalente $y = x^2 + 2x + 1$.

Voir aussi TRANSFORMATION AFFINE ; TRANS LINÉAIRE FORMATION; PROJECTION.

transformation de coordonnées (transformation de axes) En géométrie de coordonnées, il est souvent pratique de modifier la position d'un ensemble d'axes de coordonnées, soit en une ROTATION ou une TRANSLATION, pour simplifier l'expression d'une courbe donnée à l'étude. Par exemple, considérez la courbe donnée par l'équation $x^2 – 6x + y^2 + 4a = 3$. Par COMPLÉTANT LE CARRÉ, cette équation peut être réécrite :

$$(x – 3)2 + (y + 2)2 = 16$$

Réglage $X = x – 3$ et $Y = y + 2$ cela donne :

$$X2 + Y^2 = 16$$

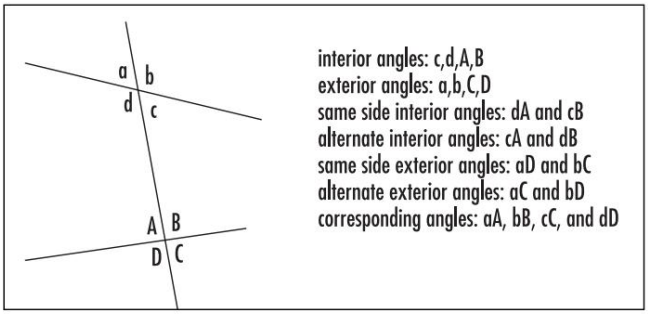
identifiant la courbe comme un CERCLE de rayon quatre. Dans ce processus, nous avons, en effet, introduit deux nouveaux axes de coordonnées, X et Y, chacun une translation de l'un des axes x et y d'origine . L'origine du nouveau système de coordonnées se trouve à l'endroit où X = 0 et Y = 0, c'est-à-dire au point (3,–2).

Modification de l'utilisation de CARTESIAN COORDI NATES en COORDONNÉES POLAIRES, ou, en trois dimensions géométrie, en COORDONNÉES SPHÉRIQUES ou COORDONNÉES CYLINDRIQUES, est également considérée comme une transformation de coordonnées.

Voir aussi AXES PRINCIPAUX ; TRANSFORMATION.

traduction Voir TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE.

transversale (traverse) Une ligne coupant deux ou plusieurs d'autres lignes est appelée une sécante. Lorsqu'une transversale coupe seulement deux autres lignes, huit angles sont formés. Le quatre angles situés entre les deux lignes sont appelés angles intérieurs, et les quatre angles situés à l'extérieur sont appelés angles extérieurs. Des noms spéciaux sont donnés aux paires d'angles, comme indiqué dans le schéma suivant :



Les angles associés à une sécante

Selon le POSTULAT PARALLELE, deux lignes coupés par une sécante sont parallèles si et seulement si deux les angles intérieurs alternés sont égaux (ou, de manière équivalente, si deux angles correspondants sont égaux).

trapèze/trapèze UN QUADRILATERAL avec deux côtés parallèles s'appelle un trapèze aux États-Unis et un trapèze au Royaume-Uni. Les choses sont déroutant, pour une figure à quatre côtés sans deux côtés parallèle est appelé un trapèze aux États-Unis et un trapèze au Royaume-Uni. Nous suivons l'utilisation aux États-Unis des termes ici.

L'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

où b1 et b2 sont les longueurs des deux parallèles bords, et h est la distance qui les sépare. (Voir ZONE.) La ligne médiane ou médiane d'un trapèze est le segment de droite qui joint les POINTS MILIEUX des côtés non parallèles. Un exercice de géométrie montre qu'il a une longueur $m = \frac{1}{2}(b1 + b2)$. (Utilisez des triangles similaires.) Ainsi, l'aire d'un trapèze est la même que celle d'un RECTANGLE de longueur m et largeur h.

Si les deux côtés non parallèles d'un trapèze sont égaux de longueur (et non eux-mêmes parallèles), on appelle alors les figure un trapèze isocèle.

Voir aussi CHIFFRES SIMILAIRES.

règle trapézoïdale Voir INTÉGRATION NUMÉRIQUE.

Machine Translated by Google

problème du voyageur de commerce Un problème mathématique basé sur une situation réelle, appelé problème du voyageur de commerce, peut être énoncé comme suit :

> Il existe un certain nombre de villes reliées deux à deux par des autoroutes. Les distances de tous les trajets autoroutiers entre les villes sont précisées. Planifiez un trajet qui passe par toutes les villes et revient au point de départ tout en minimisant la distance totale parcourue.

Alternativement, on peut essayer de minimiser les frais de déplacement pour se déplacer d'une ville à l'autre, ou le temps nécessaire pour effectuer l'ensemble du trajet, par exemple. Le désir de trouver les routes efficaces telles que celles-ci est un problème pratique important. Cela peut entraîner des économies financières importantes pour les entreprises de transport et d'autres types d'industries.

Le problème du voyageur de commerce équivaut au défi de trouver un circuit hamiltonien de moindre distance dans un GRAPH - un défi dans le domaine du GRAPH THÉORIE.

Une méthode pour résoudre le problème du voyageur de commerce consiste simplement à lister tous les itinéraires possibles et à voir lequel est le plus efficace. Nous pouvons compter le nombre d'itinéraires à vérifier comme suit :

> Supposons qu'il y ait n villes en tout. À partir d'une ville, il y a n - 1 choix pour la prochaine ville à visiter. Après avoir atteint cette ville, il y a n - 2 choix pour quelle ville visiter en second, et ainsi de suite, jusqu'au choix final d'une ville à visiter avant de revenir pour commencer. En notant que, pour les besoins de ce problème, parcourir une route dans le sens aller équivaut à parcourir cette route dans le sens inverse, nous avons donc un total de ( ) n −1 ! itinéraires possibles en tout à considérer. 2

(Cet argument utilise le PRINCIPE DE MULTIPLICATION.) Pour les plus petites valeurs de n, ce nombre est petit et il est tout à fait possible de programmer un ordinateur pour vérifier toutes les routes possibles, mais pour tout problème pratique de taille raisonnable, cette formule donne un nombre extraordinairement grand. Par exemple, le problème pour seulement 20 villes donne déjà plus de 60 quadrillions d'itinéraires différents à considérer. Même les ordinateurs les plus rapides d'aujourd'hui sont incapables de nous aider à trouver l'itinéraire le plus efficace dans un laps de temps raisonnable.

Ce qui est recherché est un ALGORITHME gérable qui fonctionne dans un laps de temps raisonnable. Une approche possible consiste à utiliser l'algorithme du plus proche voisin :

> En partant d'une ville, visitez d'abord la ville la plus proche, puis visitez la ville la plus proche qui n'a pas encore été visitée, et ainsi de suite. Retournez à la ville de départ lorsqu'aucun autre choix n'est disponible.

Un ordinateur peut facilement être programmé pour exécuter cet algorithme rapidement. Malheureusement, bien que facile à mettre en œuvre, on sait que cette procédure peut ne pas nécessairement fournir la route la plus efficace dans l'ensemble.

Il reste un problème non résolu quant à savoir s'il existe une procédure simple qui est garantie de produire l'itinéraire optimal à chaque fois qu'elle est essayée. La plupart des mathématiciens pensent qu'un tel algorithme ne sera jamais trouvé.

Voir aussi NP COMPLET ; RECHERCHE OPÉRATIONNELLE.

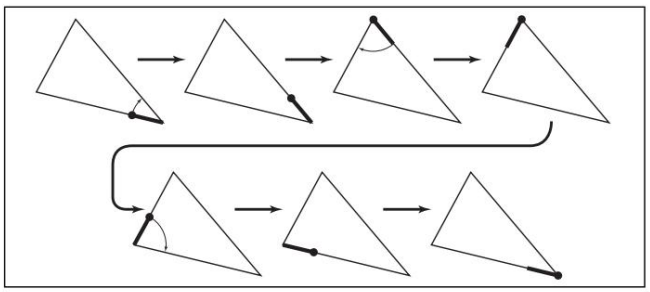
arbre Voir GRAPH.

triangle (trigon) Un POLYGONE à trois côtés s'appelle un triangle. Précisément, un triangle est la figure géométrique fermée formée par trois segments de droite (les côtés du triangle) joignant trois points non colinéaires dans le plan (les sommets du triangle). Chaque triangle contient trois ANGLES intérieurs.

Le POSTULAT PARALLÈLE montre que la somme des trois angles intérieurs d'un triangle est de 180°. Cela peut également être démontré physiquement avec un tour de crayon :

> Dessinez un grand triangle sur une feuille de papier et placez un crayon dans un coin du triangle contre un côté. Prenez note de la direction dans laquelle pointe le crayon.
>
> Faites pivoter le crayon de l'angle donné par le coin dans lequel il se trouve. Faites ensuite glisser le crayon le long du côté du triangle jusqu'au deuxième angle du triangle. (Remarquez que cette action de glissement ne modifie pas la direction dans laquelle le crayon pointe actuellement.) Faites pivoter le crayon à travers ce deuxième angle, en vous assurant de rester à l'intérieur du triangle.
> Faites maintenant glisser le crayon le long du deuxième côté du triangle pour le positionner au troisième angle du triangle. Faites pivoter le crayon à travers ce troisième angle et faites glisser le crayon dans sa position d'origine. Remarquez que le crayon pointe maintenant dans la direction opposée à son début.

Machine Translated by Google



Tourner un crayon à l'intérieur d'un triangle

Cette démonstration montre que l'effet net de faire tourner un crayon à travers chacun des trois angles d'un triangle consiste à faire tourner le crayon d'un demi-tour. Ainsi, les trois angles du triangle totalisent bien 180°. De plus, il est clair que cet argument serait travailler pour n'importe quel triangle que l'on pourrait dessiner. Un argument similaire montre que la somme des angles dans tout quadrilatère est de 360° dans tout polygone à cinq côtés, 540°, et, dans général, la somme des angles dans n'importe quelle forme à N côtés est (N -2) × 180°.

Les triangles sont classés selon le rapport longueurs de leurs côtés : Un triangle est scalène si chaque côté est de longueur différente, isocèle si au moins deux côtés sont de longueur égale et équilatérale si les trois côtés sont les même longueur. Une étude du principe SAS montre que les angles OPPOSÉS aux deux côtés égaux en longueur dans un triangle isocèle ont la même mesure. En tant qu'équilatéral triangle est aussi isocèle, il s'ensuit qu'un équilatéral triangle est ÉQUIANGULAIRE, c'est-à-dire que les trois angles ont la même mesure (de 60°).

Les triangles peuvent alternativement être classés selon leurs angles. Un triangle aigu a ses trois angles moins plus de 90° de mesure, un triangle rectangle contient exactement un angle égal à 90°, et un triangle obtus contient un angle de mesure supérieur à 90°. (Il n'est pas possible qu'un triangle possède deux angles obtus.)

Si l'image d'un triangle est orientée de sorte qu'un côté du triangle est horizontal, alors ce côté est appelé le base du triangle. La hauteur du triangle est la distance verticale entre la base de la figure et le sommet du triangle qui ne repose pas sur la base. Une étude de AREA montre que, s'il est orienté de manière appropriée, l'intérieur d'un triangle occupe la moitié de l'intérieur du rectangle qui entoure le triangle, avec la base comme un côté du rectangle. Ainsi l'aire d'un triangle est donnée par la formule:

$$\text{zone} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$$

Si les trois côtés du triangle sont de longueurs a, b et c, alors LA FORMULE DE HERON montre aussi que l'aire de le triangle est donné par :

$$\text{aire} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

où $s = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre du triangle.

Le théorème de Pythagore montre que si un triangle rectangle a des côtés a, b et c, avec les côtés a et b entourant l'angle droit, puis a $a^2 + b^2 = c^2$. Le L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE en découle.

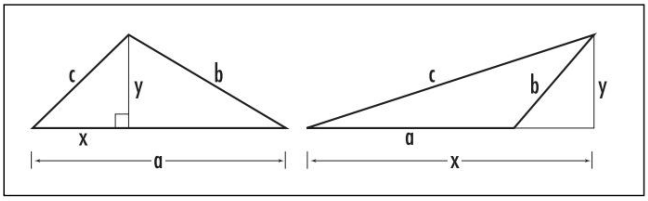
Pour un triangle arbitraire de côtés a, b et c, si l'angle entre les côtés a et b est aigu (c'est-à-dire moins à 90°), puis un $a^2 + b^2 > c^2$. Si, en revanche, le l'angle entre les côtés a et b est obtus (supérieur à 90°), puis un $a^2 + b^2 < c^2$. Cela découle de la LOI DE COSINS. On peut aussi le voir algébriquement comme suit :

Pour le schéma ci-dessous à gauche, l'angle entre les faces a et b sont aiguës. On a clairement a > x et b > y, et donc a $a^2 + b^2 > x^2 + y^2 = c^2$. Pour le dia = gramme en bas à droite, l'angle entre les côtés a et b est obtus. On a clairement x > a. Par conséquent:

$$\begin{aligned} c^2 &= x^2 + y^2 \\ &= x^2 + (b^2 - (x - a)^2) \\ &= b^2 + 2ax - a^2 \\ &< b^2 + 2a \cdot a - a^2 = b^2 + a^2 \end{aligned}$$

Ces observations fournissent une preuve de la CONVERSE de Théorème de Pythagore :

Si, pour un triangle de côtés a, b et c, nous avons un $a^2 + b^2 = c^2$, alors le triangle est un rectangle triangle avec un angle droit entre les côtés de longueur a et b.



Établir la réciproque du théorème de Pythagore

Machine Translated by Google

(Il ne peut pas être le cas que l'angle entre les côtés a et b est aigu, car alors a ^{2} + b 2 qui n'est pas vrai. L'angle entre ces deux côtés ne peut pas non plus être obtus. La seule possibilité qui reste est que ces deux côtés entourent un angle droit.)

Pour un triangle rectangle ou un triangle obtus, ces les observations montrent que le côté le plus long d'un tel triangle est opposé au plus grand angle du triangle. Le LA LOI DES SINES peut être utilisée pour prouver que cela est vrai même pour les triangles aigus :

> Dans tout triangle, le côté le plus long du triangle est opposé au plus grand angle du triangle.

Propriétés spéciales des triangles

Il existe un certain nombre de propriétés surprenantes des triangles digne de mention.

1. Lignes et simultanéité

Une ligne PERPENDICULAIRE qui passe par le POINT MILIEU d'un côté donné d'un triangle est appelée une bissectrice perpendiculaire du triangle, et une ligne perpendiculaire qui passe par le sommet opposé au côté donné est appelée altitude du triangle. Une étude de l'équidistance (Voir ÉQUIDISTANCE) montre que les trois bissectrices perpendiculaires de tout triangle passent par une point commun (appelé centre circonscrit du triangle), comme le font les trois hauteurs de tout triangle (à travers un point appelé orthocentre du triangle). C'est, chaque ensemble de trois lignes est CONCURRENT.

UNE MEDIANE D'UN TRIANGLE est une ligne reliant un sommet d'un triangle au milieu du côté opposé ce triangle. Il est possible de prouver que les trois médianes de tout triangle sont également concourantes. (Le commun point d'intersection est appelé le centre de gravité du triangle.) Le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783) ont montré que le centroïde, l'orthocentre et le centre circonscrit de tout triangle est en ligne droite, aujourd'hui appelée la LIGNE EULER.

Une étude de l'équidistance montre également que les trois les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.

2. Triangles équilatéraux

Choisissez n'importe quel point P à l'intérieur d'un triangle équilatéral et calculer la somme des distances de ce point à chacun des trois côtés du triangle. Alors cette somme est égal à la valeur de la hauteur du triangle, peu importe où est placé le point P. (Pour voir cela, supposons que le triangle équilatéral a pour côté b. Étiquetez les sommets du triangle A, B et C. Tracez des segments de droite reliant P à chaque sommet du triangle. Alors l'aire A du triangle, $A = \frac{1}{2}bh$ où h est la hauteur du triangle équilatéral, est la somme des aires des trois triangles ABP, ACP et BCP. Soient h1 , h2 et h3 être les hauteurs de ces trois triangles, respectivement. Nous avoir $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bh1 + \frac{1}{2}bh2 + \frac{1}{2}bh3$ donnant $h1 + h2 + h3 = h$.)

3. Les carrelages

N'importe quel triangle peut être utilisé pour une TESSELLATION du plan.

4. Théorème de Napoléon

Empereur français Napoléon Bonaparte (1769-1821) aurait découvert le résultat surprenant suivant :

> Étant donné un triangle arbitraire, tracez un triangle équilatéral à l'extérieur de chaque côté du Triangle. Alors les centres de ces trois triangles équilatéraux forment un autre triangle équilatéral, appelé triangle Napoléon externe de le triangle d'origine. De plus, si nous retournons chaque triangle équilatéral de sorte qu'il se trouve maintenant à l'intérieur du triangle d'origine, puis les centres de ces triangles forment à nouveau un triangle équilatéral, appelé le triangle intérieur Napoléon. La différence des domaines de l'externe et de l'interne
>
> Les triangles de Napoléon sont égaux à l'aire du triangle d'origine.

5. Triangles entiers

Un triangle est dit triangle entier si chaque longueur de côté du triangle est un nombre entier. Ainsi tout triangle qui est formé en disposant des allumettes, disons, sans casser les allumettes, est un triangle entier. Il est intéressant de compter le nombre de triangles entiers que l'on peut créer avec un nombre fixe d'allumettes. Par exemple, il existe quatre triangles entiers différents avec périmètre 11 : un triangle 5-5-1, un triangle 5-4-2, un 5-3-3 triangle et un triangle 4-4-3. Étonnamment, le comte diminue si vous ajoutez une allumette supplémentaire à la collection : on ne peut faire que trois triangles différents avec périmètre 12 (à savoir, triangles 5-5-2, 5-4-3 et 4-4-4).

Machine Translated by Google

Les mathématiciens ont prouvé que le nombre de triangles entiers différents que l'on peut faire avec n allumettes est donnée par la formule $\left\langle \frac{n^2}{48} \right\rangle$ si n est pair, et $\left\langle \frac{(n+3)^2}{48} \right\rangle$ si n est impair, où les parenthèses sont utilisées pour indiquer arrondir à l'entier le plus proche.

Le triangle entier 5-12-13 (un triangle rectangle) a la propriété que la valeur numérique de son aire est la identique à son périmètre : A = 30, P = 30. Le triangle 6-8-10 est le seul autre triangle rectangle entier avec ce propriété. Si l'on relâche la condition d'avoir raison, alors il existe de nombreux triangles non rectangles avec cette propriété. Par exemple, un triangle 7-15-20 a une aire et périmètre chacun avec la valeur numérique 42. (Utilisez la formule de Heron pour calculer son aire.)

On peut alternativement rechercher une paire d'entiers triangles partageant la même valeur pour le périmètre et même valeur pour l'aire. Encore une fois, il existe de nombreuses paires de ce type. Par exemple, les triangles 14-18-29 et 8-25-28 chacun ont un périmètre de 61 et une aire de $210\sqrt{22}$. Le 45-94-94 et 49-84-100 partagent également le même périmètre et le même endroit.

Voir aussi AAA/AAS/ASA/SAS/SSS ; BASE D'UN POLYGONE/POLYÈDRE; LE PARADOXE DE BERTRAND ; CERCLE; ÉQUILATÉRAL; CHIFFRES NUMÉROS ; HYPOTÉNUSE; PÉDALE TRIANGLE; CHIFFRES TRIANGULAIRES.

inégalité triangulaire La proposition selon laquelle la somme de les longueurs de deux côtés quelconques d'un TRIANGLE sont supérieures que la longueur du troisième côté s'appelle le triangle inégalité. Ainsi, si a, b et c sont les trois longueurs de côté d'un triangle, alors chacune des relations suivantes est vraie :

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

Ce résultat découle de la conséquence de PYTHAGORE THÉORÈME. La proposition inverse est également vraie : Si trois nombres a, b et c satisfont les trois relations ci-dessus, il est alors possible de tracer un triangle de côtés a, b et c. (Pour voir cela, tracez un segment de ligne de de longueur a, tracez un cercle de rayon b avec au centre un point d'extrémité du segment de droite, et un cercle de rayon c avec le deuxième point final comme centre. Les trois relations s'assurer que ces cercles se coupent en un point P. Alors P est le sommet d'un triangle abc de côté a comme base.) Ainsi la construction d'un triangle 7-9-12, pour exemple, est possible, mais la construction d'un 16-23-40 triangle n'est pas. (Le nombre 40 est supérieur à 16 + 23.)

Si l'une des relations ci-dessus est remplacée par une égalité, a = b + c, par exemple, alors le triangle correspondant est dégénéré, ce qui signifie que ses trois sommets se trouvent dans a ligne droite. Cette observation peut être utilisée comme suit :

> Si la distance : d'Adélaïde à Darwin est 3 200 km, d'Adélaïde à Brisbane c'est 1 200 km, de Brisbane à Canberra est de 600 km, et de Canberra à Darwin est de 1 400 km, puis on ne peut qu'en déduire que les quatre villes se trouvent sur la même ligne droite.

L'inégalité triangulaire peut être reformulée comme suit :

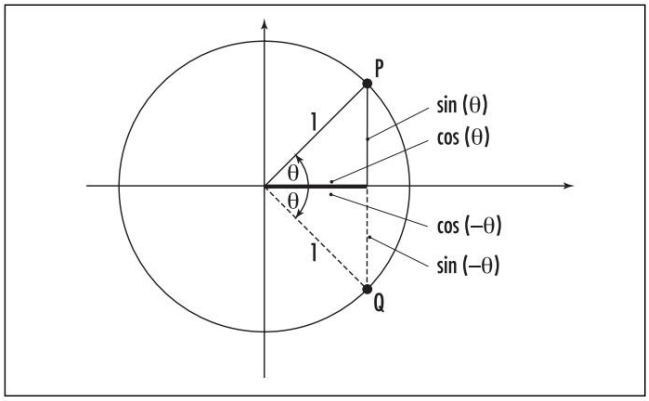
> La longueur d'un côté d'un triangle est inférieure plus de la moitié du périmètre du triangle.

(En ajoutant a aux deux côtés de la première inégalité, pour exemple, donne 2a < a + b + c. La bonne quantité est la périmètre du triangle.) Cette caractérisation permet un pour identifier rapidement tous les triangles avec des côtés entiers ayant un périmètre donné (comme fait avec des allumettes, par exemple). Par exemple, avec 11 allumettes, une peut faire quatre triangles donnés par les triplets 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3 et 4-4-3. (Chaque nombre est inférieur à la moitié de 11.) Étonnamment, le décompte diminue si l'on ajoute une autre allumette à la collection - il n'y a que trois triangles entiers de périmètre 12 : 5-5-2, 5-4-3, et 4-4-4. Les mathématiciens ont montré que le nombre de triangles que l'on peut produire avec n allumettes est $\left\langle \frac{n^2}{48} \right\rangle$ si n est pair et $\left\langle \frac{(n+3)^2}{48} \right\rangle$ si n est impair, où le les crochets pointus indiquent un arrondi à l'entier le plus proche.

nombres triangulaires Voir NOMBRES FIGURÉS.

trigonométrie Contrairement à son nom, la théorie de la trigonométrie est mieux motivée comme une théorie sur les CIR CLE, pas sur les triangles. (Ceci, en fait, correspond à l'histoire développement du sujet.) En partant du cercle le plus simple qu'on puisse imaginer, à savoir un cercle de rayon 1 centré autour de l'origine, on définit deux fonctions, sinus et cosinus, simplement comme les coordonnées x et y d'un

Machine Translated by Google



Le sinus et le cosinus d'un angle positif et d'un angle négatif

point sur ce cercle situé à un angle particulier θ. C'est devenu la convention de mesurer les angles par rapport à l' axe x positif, avec un angle positif interprété comme un virage dans le sens antihoraire et un angle négatif comme un virage dans le sens horaire. La coordonnée y d'un point sur le cercle est le sinus (en abrégé « sin ») de l'angle auquel ce point se trouve, et la coordonnée x est le cosinus de la valeur associée (en abrégé « cos »). Ainsi un point P situé à l'angle θ a pour coordonnées P = (cos(θ), sin(θ)).
Un point Q situé à l'angle –θ a pour coordonnées Q = (cos(–θ), sin(–θ)).

On voit sur le schéma que les fonctions sinus et cosinus satisfont les relations :

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

Aussi, LE THÉORÈME DE PYTHAGORE donne (sin(θ))2 + (cos(θ))2 = 1. En suivant la convention d'écriture (sin(θ))n comme sinnθ, ceci se lit comme suit :

$$\sin 2\theta + \cos 2\theta = 1$$

Notez que l'ajout ou la soustraction d'un multiple de 360° (ou, si vous utilisez une mesure en radians, tout multiple de 2π) à un angle ne change pas l'emplacement du point sur le CERCLE UNITAIRE qu'il représente . Nous avons:

$$\cos(\theta + 360k) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360k) = \sin\theta$$

pour tout nombre entier k.

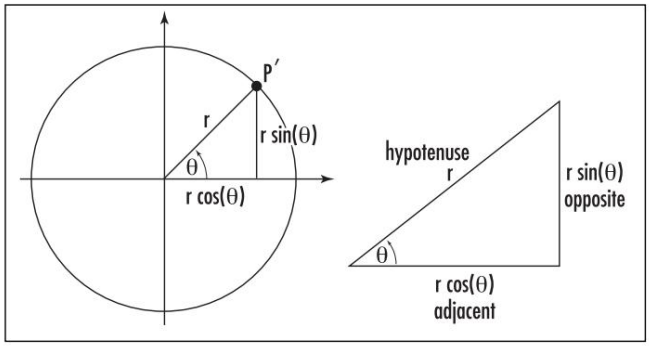
Il est possible de calculer le sinus et le cosinus de certains angles simples. Par exemple, un point situé à l'angle θ = 0 degrés se trouve à la position (1,0), et donc cos(0) = 1 et sin(0) = 0. De même, le point à l'angle θ = 90° a pour coordonnées (0,1) donnant cos(90) = 0 et sin(90)
= 1. Un point à l'angle θ = 45° se trouve à un sommet d'un triangle rectangle isocèle, montrant que les valeurs sinus et cosinus pour 45° sont égales. Le théorème de Pythagore dit nous que $\cos(45) = \sin(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De même, un point à l'angle θ = 60 se situe au sommet d'un demi-équilatéral triangle de côté 1. On obtient $\cos(60) = \frac{1}{2}$ et par Théorème de Pythagore, $\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces valeurs sont inversé pour un angle de 30°.

Connexion aux grands cercles et aux triangles Si l'on agrandit le diagramme du cercle unitaire d'un facteur d'ÉCHELLE r, alors toutes les longueurs de ce diagramme augmentent de ce facteur r. Par conséquent, les coordonnées d'un point P' situé à un angle θ sur un cercle de rayon r (toujours centré autour de l'origine) sont données par les valeurs cos θ et sinθ multipliées par r. On a P′ = (r cos θ, r sin θ).

Dans le diagramme se trouve un triangle rectangle avec un angle θ et une hypoténuse égale à r. Le côté opposé à l'angle θ a une longueur r sinθ, et le côté restant adjacent à l'angle a une longueur r cos θ. Notez que le rapport "opposé sur l'hypoténuse" a pour valeur sin θ :

$$\frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{r \sin\theta}{r} = \sin\theta$$

De même, le rapport "adjacent sur hypoténuse" donne cosθ :



Relier la trigonométrie aux triangles

Machine Translated by Google

Histoire de la trigonométrie

Depuis les temps les plus reculés, géomètres, architectes, navigateurs et astronomes ont utilisé les TRIANGLES pour déterminer distances qui ne pouvaient pas être mesurées directement. Cela a donné naissance au sujet que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de trigonométrie. Il y a des problèmes dans le texte égyptien antique, le RHIND PAPYRUS d'environ 1650 avant notre ère, qui appellent à la détermination des angles d'inclinaison des faces pyramidales en utilisant l'équivalent de la fonction cotangente que nous utilisons aujourd'hui, et une tablette d'argile babylonienne d'environ 1700 avant notre ère contient une table de val sécante ues pour les 15 angles compris entre 30° et 45°. Le philosophe grec THALES DE MILETUS (vers 600 avant notre ère) aurait utilisé des triangles similaires pour déterminer la hauteur de la pyramide de Khéops en comparant la longueur de son ombre avec la longueur de l'ombre d'une tige insérée dans le sol.

ÉRATOSTHÈNE DE CYRÈNE (vers 250 av. J.-C.) a calculé la circonférence de la TERRE en utilisant les longueurs des ombres et un simple argument géométrique sur les angles.

Les astronomes grecs de l'Antiquité croyaient que le les étoiles et les planètes du ciel nocturne se déplaçaient le long des arcs circulaires d'une sphère céleste géante, et ils ont travaillé pour développer des modèles qui prédisent avec précision le mouvement de ces objets sur la sphère. Plutôt que de formuler les choses en termes d'angles, ce qui s'est avéré difficile, les astronomes grecs ont choisi de travailler avec des mesures de longueurs droites étroitement liées aux angles, à savoir les longueurs des ACCORDS des CERCLES.

Hipparque de Rhodes (vers 200 avant notre ère) a construit une table de telles longueurs d'accord pour un cercle de circonférence 21 600 = 360 × 60 unités (ce qui correspond à 1 unité de circonférence pour chaque minute d'arc).

Au deuxième siècle de notre ère, le mathématicien CLAUDIUS PTOLEMY a écrit le premier traité approfondi sur la théorie des accords et leur utilisation pour obtenir des informations sur les "triangles sphériques", c'est-à-dire les triangles formés par de grands arcs de cercle à la surface d'une sphère. En plus d'élaborer des théorèmes, Ptolémée a expliqué comment construire des tables de valeurs d'accords et a présenté sa propre liste de valeurs d'accords pour tous les angles entre zéro et 180° par incréments d'un demi-degré.

La prochaine étape importante dans le développement de la trigonométrie s'est produite en Inde. Les érudits du cinquième siècle de notre ère avaient alors découvert que travailler avec des demi-accords pour des demi-angles simplifiait grandement la théorie des accords et ses applications à l'astronomie. Comme le montre la figure de droite, cette approche est presque la même construction que la fonction sinus d'aujourd'hui. Alors que nous considérons le sinus comme un rapport de longueurs (la longueur de la demi-corde au rayon), les érudits indiens ont interprété le sinus comme la longueur réelle de la demi-corde. Ils ont appelé cette longueur jy a-ardha ou simplement jy a,.

Bien sûr, les jy a, valeur d'un angle différé pour des cercles de différentes tailles. Les chercheurs ARYABHATA, BH et ASKHARA II, et d'autres ont développé des techniques étonnamment sophistiquées pour calculer les valeurs des demi-accords.

Les savants arabes du 10e siècle s'intéressaient beaucoup aux travaux indiens. Le mathématicien Abu al-Wafa (vers 950) de Bagdad a systématisé les théorèmes et les preuves de la trigonométrie indienne et a préparé son propre tableau complet des valeurs des demi-accords. On pense également qu'il a inventé la fonction tangente, qu'il a appelée «l'ombre», et peut-être les fonctions sécante et cosécante. (Pourtant, tous étaient considérés comme des longueurs spécifiques, et non comme des rapports de longueurs.) Les érudits arabes ne savaient pas comment

$$\frac{\text{adj.}}{\text{hype}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

Comme tout triangle rectangle peut être considéré comme provenant d'un cercle de rayon égal à la longueur de l'hypoténuse, on peut utiliser ces rapports comme définitions du sinus et du cosinus d'un angle θ donné. C'est l'approche habituellement adoptée dans les textes d'introduction sur le sujet. Les chercheurs ont donné des noms aux six rapports qui apparaissent dans un triangle rectangle contenant un angle θ :

$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\text{bronzer}\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj.}} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\theta\,\text{s} = \frac{\text{hype}}{\text{adj.}} = \frac{r}{r\cos\theta} = \frac{1}{\text{parce que}\,\theta}$$

$$\text{scc}\,\theta = \frac{\text{hype}}{\text{opp}} = \frac{r}{r\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\text{lit bébé}\theta = \frac{\text{adj.}}{\text{opp}} = \frac{\theta\, r\cos}{r\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Ici, tan signifie tangente, sec pour sécante, csc pour cose cant et cot pour cotangente. Ces noms viennent du constat suivant :

Soit P un point du cercle unité situé à un angle θ. Tracez une tangente verticale à la

Machine Translated by Google

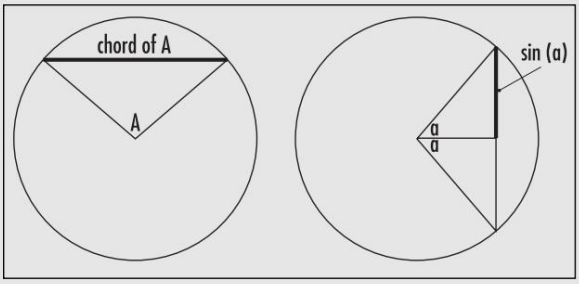
traduisent le mot sanskrit jy a, dans leurs textes et écrivent simplement jiba comme une approximation proche.

Au 12ème siècle, les savants européens ont commencé à traduire les ouvrages arabes et se sont rapidement familiarisés avec la vaste théorie de la trigonométrie. Interprétant à tort jiba comme le mot arabe jaib signifiant « crique » ou « baie », les traducteurs ont écrit l'équivalent latin sinus comme nom de la quantité de demi-accord. De là, nous avons le nom "sinus".

Le célèbre érudit FIBONACCI (vers 1170-1250) a également beaucoup voyagé dans les pays arabes et a écrit sur leur trigonométrie dans son célèbre ouvrage Practica geometriae.

Vers 1464, l'astronome et mathématicien allemand REGIOMONTANUS (1436-1476) a compilé De triangulis omnimodis, un recueil de trigonométrie de l'époque. Ce travail a été extrêmement influent et, au cours des décennies suivantes, d'autres textes sur le sujet sont apparus. Le mathématicien allemand Georg Joachim Rhaeticus (1514-1574) a publié, en 1551, le Canon doc trinae triangulorum, qui définissait, pour la première fois, les six fonctions trigonométriques de base et expliquait comment les relier aux triangles rectangles sans faire référence aux cercles. . Le médecin danois Thomas Fincke (1561–1656), dans son ouvrage Geometriae rotundi , a inventé les termes tangente et sécante et a développé d'autres formules trigonométriques fondamentales. Le mot trigonométrie lui-même a été inventé par le mathématicien allemand Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613) dans son traité Trigonometria : sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus. À cette époque, la trigonométrie était certainement considérée comme un sujet de recherche mathématique valable, indépendant des applications à l'astronomie.

Le sujet s'est également avéré utile dans l'étude de l'algèbre. Mathématicien français FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603)



Accords et demi-accords

ont montré, par exemple, que l'on pouvait résoudre certaines équations cubiques en faisant des substitutions trigonométriques. Sa célèbre formule pour π peut être dérivée avec l'utilisation répétée de fonctions trigonométriques.

Jusqu'à présent, les valeurs sinusoïdales, ainsi que les autres valeurs trigonométriques, étaient toujours considérées comme des longueurs de ligne réelles et non comme des rapports de longueurs. Après l'invention de CALCU LUS, LEONHARD EULER (1707-1783) s'est rendu compte qu'il est approprié de penser au sinus non pas comme une longueur physique, mais plutôt comme une fonction d'angle indépendante de la longueur. Il a suggéré que cela pourrait être accompli en mettant à l'échelle tous les cercles considérés en cercles unitaires, une opération qui équivaut à diviser toutes les quantités par le rayon du cercle. Ainsi, pour la première fois, toutes les quantités trigonométriques ont été considérées comme des rapports. En 1748, Euler a écrit Introductio in analysin infinito rum, qui est devenu le manuel dominant sur le thème de la trigonométrie pour le siècle qui a suivi. Il énonce essentiellement les principes de la trigonométrie tels que nous les considéro

cercle au point M = (1,0). Prolongez davantage le rayon OP jusqu'à ce qu'il rencontre la tangente en Q. Alors tan θ est la longueur du segment de droite tangente MQ et sec θ est la longueur de la sécante au cercle OQ.

La division de l'identité de Pythagore sin2θ + cos2θ = 1 par cos2θ et par sin2θ donne les identités :

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Les formules d'addition et de soustraction

Le diagramme de la page suivante montre que deux copies congruentes d'un triangle rectangle contenant un angle A et deux copies d'un deuxième triangle rectangle contenant un angle B peut être disposé dans un même grand rectangle de deux manières différentes.

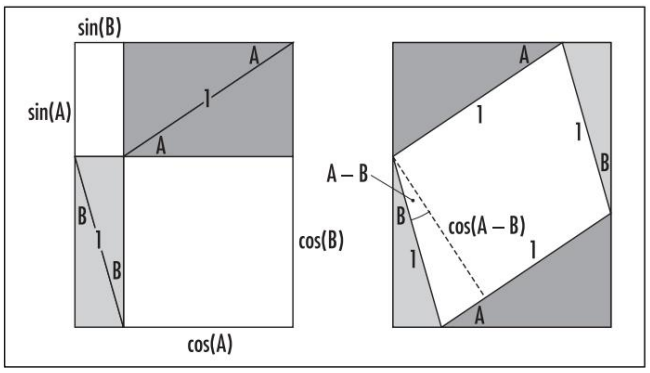
L' AIRE de la région entourant les quatre triangles, qui doit être la même pour chaque diagramme, peut être calculée comme la somme des aires de deux rectangles ou comme l'aire d'un PARALLELOGRAMME de base de longueur 1 et de hauteur de longueur cos(A - B). Cela donne la formule de différence pour les cosinus :

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

En substituant -B à B, on obtient la formule d'addition des cosinus :

$$\cos(A + B) = \cos A \cos(-B) + \sin A \sin(-B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

Machine Translated by Google



Prouver la formule de la différence

Alternativement, placez l'angle A à l'autre coin de chacun des triangles contenant cet angle, et utilisez la mêmes schémas de quatre triangles disposés en rectangle. Cela donne les formules de somme et de différence pour les sinus :

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

Ces formules découlent également facilement de EULER'S FOR MULA. Nous avons également les formules d'addition et de soustraction suivantes pour la fonction tangente :

$$\text{bronzer}(AB+) + \frac{\text{bronzer}\,UN + \text{bronzer}\,B}{1 - \text{bronzer}\,UN \cdot \text{bronzer}\,B}$$

$$\text{bronzer}(AB-) \frac{\text{bronzer}\,UN - \text{bronzer}\,B}{1 + \text{bronzer}\,UN \cdot \text{bronzer}\,B}$$

Ceux-ci sont obtenus en écrivant tan(A + B) = sin(A + B)/ cos(A + B), par exemple.

Voir aussi FORMULE DE DE MOIVRE ; DÉRIVÉ; SON CONCERT DE TRIGONOMÉTRIE (essai); FONCTIONS HYPERBOLIQUES; FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSÉES ; TAILLEUR SÉRIE.

trinôme Toute expression algébrique composée de trois termes, tels que a + b + c ou l'expression quadratique ax2 + bx + c, est appelé un trinôme.

Voir aussi MONOMIAL ; BINÔME; POLYNÔME.

produit vectoriel triple Il existe deux manières de base de combiner les opérations DOT PRODUCT et CROSS PRODUCT sur les VECTEURS pour former un produit de trois vecteurs tridimensionnels a, b et c.

La combinaison a · (b × c) est appelée le scalaire triple produit des trois vecteurs. Le résultat de ce opération est un nombre réel (scalaire) qui est positif si a, b, et c forment un système droitier et est négatif si, au lieu de cela, ils forment un système gaucher. Changer le l'ordre des vecteurs dans ce triple produit peut changer l'orientation du système concerné. Nous avons:

$$\text{une} \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) = -b \cdot (a \times c)$$
$$= -a \cdot (c \times b) = -c \cdot (b \times a)$$

Le triple produit scalaire a une belle interprétation géométrique :

> La valeur absolue du triple produit scalaire est égal au volume du PARALLELEPIPED formé par les vecteurs a, b et c.

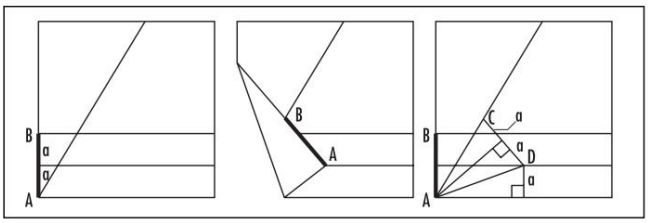
Pour le voir, notez que b × c est un vecteur perpendiculaire à la base du parallélépipède formé par les deux vecteurs b et c. Si θ est l'angle entre ce vecteur et a, alors la hauteur du parallélépipède est la valeur absolue valeur de |a| cos(θ). Puisque, d'après le produit croisé, l'aire de la base est donnée par |b × c | on a ça le volume du parallélépipède est : base × hauteur = |a||b × c || cos(θ)|, qui est précisément la formule de la valeur absolue du produit scalaire : a · (b × c).

Un exercice d'algèbre montre que le triplet scalaire produit de trois vecteurs peut être calculé en prenant le DÉTERMINANT de la MATRICE 3×3 dont les lignes sont les entrées des vecteurs a, b et c, respectivement.

Le triple produit vectoriel de trois vecteurs est défini être la combinaison : a × (b × c). Le résultat est un vecteur qui est perpendiculaire à b × c, ainsi qu'à a. Comme b × c est perpendiculaire au plan formé par b et c, il s'ensuit que a × (b × c) appartient au plan bc.

Voir aussi SYSTÈME DROITE/GAUCHE .

trisectrice d'un angle Un des problèmes de l'antiquité (comme DUPLIQUER LE CUBE et ÉQUATRER LE CERCLE) d'un intérêt considérable pour les savants grecs classiques



Trisectrice d'un angle

Machine Translated by Google

était la tâche de développer une procédure générale qui diviserait un angle donné en trois parties égales. L'origine de ce problème est inconnue, bien que cela semble une question naturelle à poser étant donné que la procédure de bissectrice de n'importe quel angle est relativement simple. (Étant donné un angle défini par deux rayons, tracez l'arc de cercle centré au sommet de l'angle pour trouver deux points sur les rayons à égale distance de ce sommet. Dessinez maintenant des cercles de rayon fixe avec des centres à chacun de ces deux La ligne reliant le sommet de l'angle au point d'intersection des deux cercles est une bissectrice d'angle.)

À l'aide d'un compas et d'une règle, c'est-à-dire d'une règle avec des longueurs spécifiques marquées le long, HIPPOCRATE DE CHIOS (vers 440 avant notre ère) a développé une solution générale simple au problème, tout comme ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 avant notre ère) quelque 200 ans plus tard. À cette époque, dans un souci de défi intellectuel accru, les chercheurs ont décidé d'ajouter la restriction selon laquelle seuls les outils primitifs d'une règle droite sans marquage et d'un compas pouvaient être utilisés dans la solution. La difficulté du problème a considérablement augmenté. APOLLONIUS DE PERGA (vers 262-190 avant notre ère) a trouvé une solution au problème en utilisant uniquement les outils de base en supposant qu'une HYPERBOLA pouvait être dessinée. Malheureusement, cela n'a pas été considéré comme une hypothèse recevable. Le problème est resté l'un des plus grands défis non résolus depuis deux millénaires.

Au début des années 1800, les mathématiciens se sont concentrés sur le problème spécifique de la trisection d'un angle de 60°, ou, de manière équivalente, sur le problème de la construction d'un angle de 20° en utilisant uniquement la règle et le compas. En particulier, si un tel angle peut être produit, alors il est possible de construire un segment de droite de longueur x = cos20 (comme l'une des branches d'un triangle rectangle avec un angle de 20°). L'identité trigonométrique cos(3θ) = 4cos3 (θ) – 3cos(θ), en notant que cos(60) = 1/2, montre que la longueur x doit satisfaire l'équation : 8x 3 – 6x – 1 = 0.

La théorie des nombres CONSTRUCTIBLES montre que toute quantité de longueur rationnelle peut être construite avec la règle et le compas, et que si deux longueurs l1 et l2 peuvent être produites, alors leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient le peuvent aussi, ainsi que la racine carrée de chaque quantité. Les mathématiciens ont montré que toute solution x à l'équation ci-dessus ne peut pas être rationnelle et, de plus, en 1837, le mathématicien français Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) a prouvé qu'un tel nombre x n'est pas constructible. Ainsi, le problème général de la trisection d'un angle est insoluble.

Il est intéressant de noter que dans le domaine de l'origami, en utilisant uniquement l'outil de pliage de papier, il est possible de trisecter n'importe quel angle aigu donné. Supposons que l'angle est placé dans le coin inférieur gauche A d'une feuille de papier carrée, un rayon définissant l'angle étant le bord inférieur de la feuille, et l'autre rayon, appelez-le L, un pli dans le papier. Pliez un pli d'une hauteur arbitraire parallèle au bord inférieur et pliez un deuxième pli parallèle à la moitié de cette hauteur. Appelez la distance entre ces deux plis a, et le point sur le bord gauche à la hauteur 2a point B. Prenez le coin inférieur gauche de la feuille et pliez le papier de sorte que le point B se trouve sur le pli L (appelez l'emplacement de ce point C) et de sorte que le point A se trouve sur le pli à la hauteur a, pour définir un point D. La ligne reliant A à D est précisément le tiers de l'angle d'origine.

(Pour voir pourquoi cela fonctionne, notez que le THÉORÈME DE PYTHAGORE établit que les segments de droite AD et BD ont la même longueur. Par la symétrie du pliage, la longueur AC est la même que la longueur AD, établissant que le triangle CAD est isocèle. Dessinez la bissectrice de ce triangle à partir de A. Cela produit un diagramme avec trois triangles rectangles congruents, montrant que l'angle en A est en effet divisé en trois parties égales.)

Paradoxe de Tristram Shandy Ce paradoxe sur l'infini est dérivé du roman de 1760 de Lawrence Sterne, Tristram Shandy, qui prétend faire partie de l'autobiographie du protagoniste. Dans ce document, le héros Shandy observe qu'il lui a fallu deux ans pour décrire ses deux premiers jours, et conclut ainsi qu'il lui sera impossible de terminer l'autobiographie dans son intégralité. Le philosophe et mathématicien BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUS SELL (1872-1970) a souligné que si l'auteur était immortel, cependant, il serait capable d'atteindre son objectif, en écrivant toujours au même rythme de progression. (Bien sûr, cela prendrait un temps infini pour le faire.) Russell a soutenu qu'une vie d'une durée infinie contient autant d'années que de jours.

Voir aussi CARDINALITE ; L'HÔTEL INFINI DE HILBERT ; INFINI; PARADOXE.

solution triviale Toute solution à un problème qui est évidente, ou sans intérêt dans le contexte donné, est appelée une solution triviale. Par exemple, la célèbre équation de n a une solution triviale et x = 1, y = 0, z = 1 , et la $x^n + y^n = z^n$ $x = 0, y = 0, z = 0$

Machine Translated by Google

équation différentielle $y \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \sin(y) = 2\sqrt{y}$ a solution triviale y = 0. Toute solution à un problème qui peut présenter un intérêt est appelé non trivial. Par exemple, le équation $x^3 - 2x = 0$ a une solution non triviale $x = \sqrt{2}$.

Le mot trivial vient du mot latin triv ium, le nom médiéval des trois moins compliqués.
des sept disciplines enseignées dans les universités médiévales : grammaire, rhétorique et logique. (Le reste quatre matières : arithmétique, astronomie, géométrie et musique - étaient connus sous le nom de quadrivium.)

Les mathématiciens utilisent souvent le mot trivial pour décrire un résultat qui demande peu ou pas d'effort pour prouver. Par exemple, que tout multiple de 4 est divisible par 2 serait considéré comme un résultat trivial.

table de vérité Dans le domaine de la LOGIQUE FORMELLE, le calcul propositionnel est le nom donné à l'analyse des valeurs de vérité d'énoncés compliqués construits à partir de énoncés liés entre eux par les connecteurs et ; ou; si … puis … ; et si, et seulement si (appelés, respectivement, les CONJONCTION, la DISJONCTION, le CONDITIONNEL, et le BICONDITIONNEL). On peut aussi considérer la NEGA TION d'un énoncé.

Par exemple, l'énoncé « La lune est ronde et est fait de fromage vert » est un énoncé composé composé de deux déclarations plus simples ("La lune est ronde" et "La lune est faite de fromage vert") lié ensemble via le connecteur et. La valeur de vérité du l'énoncé dans son ensemble dépend de la valeur de vérité de deux déclarations individuelles dont il est composé.

Dans les symboles, les déclarations sont généralement représentées comme les lettres minuscules (p,q,r, par exemple), et les connecteurs qui les combinent sont notés :

p et q : pq
p ou q : p q
Si p alors q : $p \rightarrow q$
p si, et seulement si, q : $p \leftrightarrow q$
pas p : $\neg p$

Une instruction composée est une instruction construite à partir d'instructions plus simples via des connecteurs. Par exemple,

$$p\ (q \rightarrow r) \text{ et } p\ (\neg p)$$

sont des énoncés composés. (Les parenthèses sont utilisées pour indiquer l'ordre dans lequel les connecteurs doivent être appliqué.) Par exemple, si p est l'énoncé « La lune est rond », q l'énoncé « La lune est faite de vert fromage », et r l'énoncé « La lune est comestible », alors p (q → r) peut être interprété comme "La lune est rond ET, SI la lune est faite de fromage vert, ALORS c'est comestible. L'énoncé p (¬p) peut être interprété comme "La lune est ou n'est pas ronde."

Une table de vérité est une table montrant la valeur de vérité d'un énoncé (typiquement un énoncé composé) compte tenu des valeurs de vérité possibles des énoncés simples dont il est composé. Les valeurs de vérité des connecteurs de base sont donnée comme suit :

p	q	p q	p q		$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T		J	J	J
T	F	F		J	F	F
F	T	F		J	J	F
F	F	F		F	J	J

p	¬p
J	F
F	J

(Les valeurs de vérité présentées ici sont motivées par l'intuition. Voir CONJONCTION, DISJONCTION, CONDITIONNEL, BICONDITIONNEL et NÉGATION pour plus de détails.) La valeur de vérité de tout énoncé composé est maintenant complètement déterminé. La procédure est mécanique. Par exemple, l'énoncé composé p (q → r) a la table de vérité suivante, donnée en gras :

p	q	r	p			v	(q —> r)
T	T	T	T				T T T
T	T	F	T				F T F F
T	F	T	T				T F T
T	F	F	T				T F T F
F	T	T	F				F T T T
F	T	F	F				F T F F
F	F	T	F				F F T T
F	F	F	F				F F F T
						(4)	(5) (1) (3) (2)

Machine Translated by Google

(Les chiffres au bas du tableau indiquent les
ordre dans lequel les colonnes ont été calculées. Colonne 5
affiche les valeurs de vérité possibles de l'énoncé p (q
→ r) dans son ensemble.) Ainsi, si nous considérons que p et r sont vrais et
q faux, par exemple, alors nous devons conclure que p (q
→ r) dans son ensemble est vrai. (Rangée trois du tableau.)

La table de vérité pour p (¬p) est :

p	p	^	(¬p)
J	J	J	F
F	F	J	J
	(1)	(3)	(2)

Un énoncé composé qui est vrai quel que soit le
valeurs de vérité de ses déclarations composantes (c'est-à-dire une
qui a T pour chaque ligne de sa table de vérité) est appelé un
TAUTOLOGIE. Ainsi p (¬p), par exemple, est une tautologie. On
peut aussi vérifier que (p q) → (r p) est
autre exemple de tautologie.

Une instruction composée qui est toujours fausse est appelée
une contradiction. Par exemple, p (¬p) et [(p → q)
p] → (¬q) sont des contradictions.

Deux énoncés composés sont logiquement équivalents
s'ils ont les mêmes valeurs de vérité dans les
rangées de leurs tables de vérité. Par exemple, on peut vérifier
que p → q et (¬p) q ont des tables de vérité identiques et
sont donc logiquement équivalents. La notion d'un tel
l'équivalence est liée au biconditionnel.

Voir aussi ARGUMENT ; LOIS DE LA PENSÉE.

tournant Un point sur un graphe différentiable y =
f(x) où f′(x) = 0 et f′(x) change de signe est appelé un
tournant. Un tel point est soit un maximum local
ou minimum pour le graphique.

Voir aussi MAXIMUM LOCAL/ MINIMUM LOCAL.

nombres premiers jumeaux Deux nombres impairs consécutifs,
qui sont PREMIERS, sont appelés nombres premiers jumeaux. Par exemple,
les paires 3 et 5, 17 et 19, et 10 006 427 et
10 006 429 sont des nombres premiers jumeaux. Les mathématiciens soupçonnent
qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers jumeaux, mais
sont incapables de le prouver pour un fait. Cela reste un
célèbre défi non résolu.

Les plus grands nombres premiers jumeaux connus, à partir de l'année
2002, sont 665551035 × 2 80025 – 1 et 665551035 ×
2 80025 + 1.

Deux nombres premiers différents de 4, comme 19 et 23 pour
exemple, sont appelés cousins premiers. Il existe d'autres noms
informels pour les paires de nombres premiers qui diffèrent de six, huit,
10 et 12. Le nom « nombres premiers jumeaux » a été inventé par les
Mathématicien allemand Paul Stäckel (1892-1919).

Le triple « 3, 5, 7 » est le seul ensemble de trois nombres
impairs consécutifs qui sont chacun premiers. (Tout triple de
les nombres impairs consécutifs doivent contenir un nombre
divisible par 3. Si le premier nombre impair du triple est
un de plus qu'un multiple de 3, puis la seconde impaire
nombre du triplet est un multiple de 3. Si le premier nombre du
triplet est deux de plus qu'un multiple de trois,
alors le troisième nombre impair est divisible par 3.)

puzzle à deux cartes Le puzzle classique suivant est
souvent utilisé pour démontrer la nécessité d'être prudent lors de
l'exécution de calculs de PROBABILITÉ :

> Deux cartes - une rouge des deux côtés, l'autre
> rouge d'un côté et noir de l'autre—sont
> placé dans un sac. Le sac est secoué, et un
> la carte est retirée. Vous voyez que l'un des visages de ce
> la carte est rouge. Quelle est la probabilité que le
> le verso de cette carte est noir ?

On est tenté de répondre à moitié - après tout, le
chances de sélectionner la carte rouge/noire est de 1 sur 2.
Cependant, ce raisonnement néglige une subtilité : le casse-tête est
en réalité un de PROBABILITÉ CONDITIONNELLE, et nous
on leur demande de déterminer la probabilité de sélectionner
la carte bicolore étant donné que le visage que nous voyons est
rouge. Comme il y a trois faces rouges dont une seule contient du
noir sur son revers, on en déduit qu'il y a
en fait seulement un tiers des chances que ce soit la carte bicolore.
Cette conclusion surprenante peut être vérifiée en réalisant
l'expérience plusieurs fois.

Voir aussi THÉORÈME DE BAYES ; LE COMTE DE KRUSKAL ;
PROBLÈME DE MONTY HALL.

Machine Translated by Google

tu

opération unaire Une opération ou une règle qui s'applique à des éléments uniques d'un ensemble pour produire d'autres éléments (mais pas nécessairement différents) de l'ensemble est appelée opération unaire. Par exemple, la règle qui prend la valeur absolue d'un nombre réel peut être considérée comme une opération unaire sur l'ensemble des nombres réels. L'opération qui reflète les formes géométriques autour de l' axe des x est une opération unaire sur l'ensemble de toutes les figures géométriques du plan. Cependant, la règle qui associe chaque figure géométrique à son aire, par exemple, n'est pas une opération unaire sur cet ensemble, puisque les résultats sont des nombres, pas d'autres figures géométriques. Une opération unaire peut être considérée comme une FONCTION d'un ensemble vers le même ensemble.

Voir aussi OPÉRATION BINAIRE ; OPÉRATION.

solution unique Une équation est dite avoir une solution unique s'il n'y a qu'une seule valeur possible de la ou des variables décrites dans l'équation qui rend l'équation vraie. Par exemple, l'équation x + 4 = 7 a le = 0 a
solution unique x = 3, et l'équation a la solution ^{2} + b 2
unique, dans le domaine des nombres réels, (a,b) = (0,0). D'autre part, l'équation x a plus d'une solution (x peut être 3 ou ^{2} – 9 = 0
-3), et l'équation x Des arguments géométriques peuvent parfois ^{44} être utilisés pour 2 ans 6 = –7 n'a pas de solutions réelles. +

déterminer si un système d'équations a ou non une solution unique. Par exemple, le couple d'équations

$$2x + 4y = 5x$$
$$+ 3y = 8$$

représente deux droites de pentes différentes. Comme deux lignes non parallèles doivent se croiser en un point unique, il existe une solution unique au système. Un système de trois équations représentant trois plans dans l'espace n'a de solution unique que si ces trois plans se rencontrent en un seul point.

Parfois, une solution est appelée essentiellement unique si le terme unicité se réfère uniquement à la structure sous-jacente du problème et que les variations de la solution n'affectent pas le contenu mathématique. Par exemple, le

solution de l' EQUATION DIFFERENTIELLE $\frac{dx}{}$ = x est essentiellement unique. Une solution est x^{2}, et tout autre $\frac{1}{2}$

solution à ce problème ne diffère de celui-ci que par l'ajout d'une constante. En ARITHMÉTIQUE MODULAIRE, x = 43 est, essentiellement, la solution unique à :

$$x \equiv 3 \pmod 5$$
$$x \equiv 7 \pmod{12}$$

Toute autre solution au problème diffère de 43 par un multiple de 60.

cercle unité Le cercle de rayon 1 centré à l'origine est appelé cercle unité. En COORDONNÉES CARTÉSIENNES , il a l'équation x Le ^{2} ^{2} = 1. + y

cercle unitaire joue un rôle fondamental dans le développement de la TRIGONOMÉTRIE : le cosinus et le sinus d'un angle θ sont définis comme étant respectivement les coordonnées x et y d'un point sur un cercle unitaire situé un bronzage

Machine Translated by Google

angle θ par rapport à l' axe des x. Par conséquent, les ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES du cercle unitaire sont x = cos θ et y = sin θ, avec θ comme paramètre.

inconnue (indéterminée, variable) Une quantité dont la valeur est à déterminer est appelée une inconnue. En mathématiques, trouver la valeur d'une inconnue nécessite généralement de résoudre une équation. Pour l'équation 2x + 5 = 13, par exemple, la variable x est l'inconnue. Alge bra montre que cette inconnue vaut 4.

Dans les temps anciens, les érudits décrivaient les inconnues et les équations les reliant par des mots. Égyptien antique les érudits ont utilisé le mot tas pour une quantité inconnue, et de nombreuses autres cultures ont simplement utilisé le mot chose.
Le savant arabe MUHAMMAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı (ca. 780–850), dont le titre de livre Hisab al-jabr w'al muq– abala vient le mot algèbre, a utilisé le mot shai pour signifier un quantité inconnue. Lorsque son célèbre livre a été traduit en latin, les mots res et causa (selon le traducteur) ont été utilisés pour shai.

Les érudits allemands de la Renaissance ont traduit causa par coss, que les Anglais ont adopté, appelant l'étude des équations et des quantités inconnues "l'art cossique".
Ce nom pour l'algèbre a été populaire pendant de nombreuses décennies. Cela signifie littéralement "l'art des choses".

Machine Translated by Google

V

Vallée-Poussin, Charles-Jean de la (1866–1962) Analyse belge , Théorie des nombres Né le 14 août 1866 à Louvain, Belgique, Charles-Jean de la Vallée Poussin est connu comme l'un des deux mathématiciens qui, indépendamment a prouvé le fameux THÉORÈME DES NOMBREUX PREMIERS conjecturé pour la première fois par CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). Le deuxième mathématicien à prouver le résultat fut le mathématicien français JACQUES HADAMARD (1865-1963). Même si les deux chercheurs ont appliqué la théorie des fonctions complexes à la FONCTION ZETA pour établir le résultat, les deux preuves ont utilisé des arguments logiques très différents.

Vallée-Poussin a étudié les mathématiques à l'Université de Louvain, à l'Université de Berlin et à l'Université de Paris avant d'accepter un poste de professeur à Louvain, où il est resté pour le reste de sa carrière. Il se spécialisa dans le domaine de l'ANALYSE et reçut le prix d'une couronne de l'Académie Royale de Belgique pour son travail sur les ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES en 1892. À cette époque, Vallée-Poussin étudiait des techniques nouvellement développées dans l'analyse complexe et arriva à la réalisation, en 1896, que toutes les pièces étaient en place pour développer une preuve de la conjecture des nombres premiers de Gauss. (Hadamard est arrivé à la même réalisation la même année.) Vallée-Poussin a également poussé les choses plus loin pour apporter des contributions significatives à l'étude générale de la fonction zêta de Riemann et de l'hypothèse de Riemann ainsi qu'à d'autres préoccupations en analyse. En 1903, il publie un texte très populaire Cours d'analyse sur ces sujets, écrit à la fois pour le débutant et l'expert dans le domaine. (Vallée-Poussin a écrit le d'introduction en gros caractères et entrecoupées de discussions sur des points techniques avancés en petits caractères.) Au cours des années suivantes, il écrivit quatre éditions révisées du texte, ainsi que le livre Intégrales de Lebesgue, qui est considéré comme une extension de la pièce.

Vallée-Poussin a reçu de nombreuses distinctions tout au long de sa carrière, notamment l'élection à l'Académie belge, à l'Académie américaine des arts et des sciences, à l'Institut de France et à l'Académie nationale américaine des sciences. En 1928, après avoir occupé pendant 35 ans la chaire de mathématiques à l'Université de Louvain, le roi de Belgique lui confère le titre de baron. Vallée-Poussin était aussi un commandant de la Légion d'honneur et président d'honneur de l'Union mathématique internationale. Il mourut à Louvain le 2 mars 1962.

Voir aussi GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN.

variable Un symbole, tel que x, y, z ou n, utilisé dans les équations algébriques pour représenter une quantité dont la valeur n'est pas connue ou spécifiée est appelé une variable. Par exemple, dans l'expression $x + x^2 = 6$, le symbole x représente un nombre inconnu dont la somme avec son carré est égale à 6. (Les méthodes d'ALGÈBRE peuvent être appliquées pour montrer que x doit être soit 2 soit –3.)

Les variables sont utilisées pour codifier les opérations numériques. Par exemple, l'opération de mise au carré des 10 premiers entiers 1,2,3,…,10. les nombres peuvent s'écrire « $y = n^2$ Dans cette expression, la valeur de la variable n n'est pas

Machine Translated by Google

spécifié, mais nous sommes informés qu'il doit s'agir d'un nombre entier compris entre 1 et 10 inclus. La valeur de la variable y n'est pas non plus précisée, mais on nous dit que sa valeur dépend de la valeur choisie pour n. Pour cette raison, y est appelée une variable dépendante : une fois qu'une valeur pour n a été déclarée, une valeur pour y suit alors. La variable n est appelée variable indépendante car sa valeur n'est liée aux valeurs d'aucune autre variable.

Deux ou plusieurs variables sont également dites indépendantes si la valeur choisie d'une variable n'a pas d'effet sur la valeur possible de la seconde. Par exemple, si x représente le prix d'une livre de sucre un jour donné et y le nombre d'étudiants en mathématiques à l'université, alors x et y sont des variables indépendantes. Si chaque étudiant en mathématiques devait acheter une livre de sucre, alors l'argent total dépensé, z = xy, est une nouvelle variable. Ici, z n'est pas indépendant de x ou y.

En algèbre, les symboles sont aussi souvent utilisés pour désigner des quantités dont les valeurs sont supposées connues. Par exemple, dans l'expression ax + b = 0, on suppose que a et b sont des nombres spécifiés et que x est la valeur à déterminer . (Nous avons x = - .) Ici, nous suivons une convention, d'abord établie par RENÉ DESCARTES (1596-1650), stipulant que les lettres minuscules à la fin de l'alphabet (telles que x, y et z) doivent représenter l'inconnu quantités et lettres minuscules du début de l'alphabet (telles que a, b et c) quantités connues. (Les lettres du milieu de l'alphabet doivent être interprétées via le contexte.)

Voir aussi CONSTANTE ; FONCTION; HISTOIRE D'EQUATIONS ET ALGEBRE (essai).

variance Voir STATISTIQUES : DESCRIPTIVE.

vecteur En physique et en ingénierie, il est souvent approprié de décrire des grandeurs physiques, telles que la vitesse ou la force, en termes de grandeur et de direction. Par exemple, la vitesse du vent est complètement spécifiée par un seul nombre qui spécifie sa magnitude (force du vent), mais la vitesse du vent fait référence à la fois à la vitesse du vent et à la direction dans laquelle l'air se déplace. La force gravitationnelle agit sur les objets à la surface de la Terre avec une amplitude (force) dépendant de la masse de l'objet et dans une direction tirant l'objet vers le centre de la Terre. Toute quantité spécifiée à la fois par une grandeur et une direction est appelée un vecteur.

Les vecteurs sont généralement représentés sous forme de segments de ligne avec des flèches indiquant la direction du vecteur. La longueur du segment de droite indique l'amplitude du vecteur. Par exemple, un vecteur plan de magnitude 2 dans la direction est est dessiné dans le plan sous la forme d'un segment de ligne horizontale de 2 unités de long, avec une flèche pointant vers la droite. L'emplacement auquel ce segment de ligne commence n'a pas d'importance. Tous les segments de droite de 2 unités de long pointant vers la droite représentent le même vecteur. Ainsi, on est libre de translater un vecteur vers n'importe quelle position de départ dans le plan, tant que la longueur du vecteur et sa direction restent inchangées.

Un vecteur est généralement indiqué dans les manuels par des lettres en gras. Par exemple, le symbole a peut représenter un vecteur et b un autre. Cependant, dans certains textes, et souvent dans des notes manuscrites, il est d'usage de souligner des lettres ou d'utiliser des barres ou des flèches pour indiquer que les grandeurs représentées sont vectorielles : a, a. Le a, ou grandeur ou longueur d'un vecteur a est noté | parfois comme un).

Un vecteur peut être spécifié par une paire ordonnée de nombres. Par exemple, le vecteur de magnitude 2 dans la direction est peut être représenté par le couple : a = <2,0>. Ce vecteur « transporte les particules » 2 unités vers la droite, et aucune unité vers le haut ou vers le bas. Le vecteur b = <1,1> "porte les particules" 1 unité vers la droite et 1 unité vers le haut. Cela représente le vecteur de magnitude $\sqrt{2}$ (la longueur de la diagonale du carré unité) dans la direction nord-est.

Le vecteur c = <–1,–1> est le même vecteur mais pointant dans la direction opposée. Le vecteur 0 = <0,0> est appelé le vecteur zéro et représente une quantité sans grandeur ni direction.

L'utilisation de crochets angulaires pour désigner les vecteurs est courante en physique et en ingénierie, bien que certains textes utilisent des parenthèses pour représenter les vecteurs. Cela peut prêter à confusion, car les parenthèses sont également utilisées pour désigner des points dans le plan.

Si P = (p1 , p2) et Q = (q1 , q2) représentent deux points du plan, alors un vecteur qui « transporte une particule » de la position P à Q est donné par : <q1 – p1 ,q2 – p2> . Ce vecteur est parfois noté $\overrightarrow{PQ}$. Le point P est appelé le point initial du vecteur et Q est le point terminal.
(Cependant, gardez à l'esprit qu'un vecteur n'est pas fixé à un emplacement spécifique. Tout vecteur de même longueur et direction que $\overrightarrow{PQ}$ représente le même vecteur, même si les points initial et terminal peuvent être différents.)

Si a = < a1 ,a2 > est un vecteur, alors les nombres a1 et a2 sont appelés les composantes du vecteur. La durée

Machine Translated by Google

du vecteur est donnée par le THÉORÈME DE PYTHAGORE : $|a| = \sqrt{a1^2 + a2^2}$, qui est, bien sûr, la FORMULE DE DISTANCE dans ce nouveau réglage.

Les vecteurs dessinés dans le plan sont dits bidimensionnels. Les vecteurs tridimensionnels, donnés par des triplets de nombres, représentent des quantités avec une amplitude et une direction dans un espace tridimensionnel. SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) a inventé le terme vecteur pour ces quantités dans son livre Lectures on Quater nions. Le nom est basé sur le mot latin vectus, le participe parfait de vehere, qui signifie « porter ».

Opérations sur les vecteurs

L'addition de vecteurs combine deux vecteurs (ou plus) pour produire un nouveau vecteur, appelé vecteur résultant. Pour additionner deux vecteurs a et b, positionnez le vecteur b (sans changer sa grandeur ou sa direction) de manière à ce que son point initial soit au point terminal de a. La résultante a + b est le vecteur qui « transporte les particules » du point initial de a au point terminal de b. Géométriquement, c'est le vecteur qui correspond à l'hypoténuse du triangle formé par a et b.

Algébriquement, si a = <a1 ,a2> et b = <b1 , b2>, alors a + b = <a1 + b1 , a2 + b2>.(Si a « décale les particules » a1 unités vers la droite et b décale les particules b1 unités vers la droite, alors l'effet combiné a+b déplace les particules a1 + b1 vers la droite. De même pour le mouvement vertical combiné.)

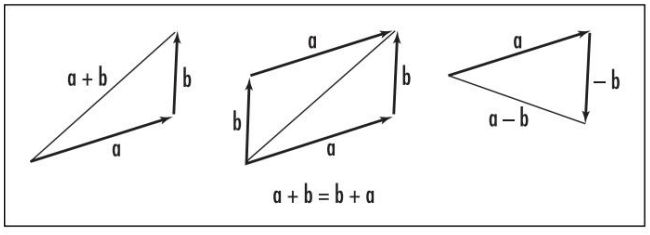
De l'un ou l'autre point de vue, nous voyons que l'addition vectorielle est COMMUTATIVE :

$$une + b = b + une$$

On peut aussi vérifier que l'addition vectorielle est ASSOCIATIVE :

$$une + (b + c) = (a + b) + c$$

et que le vecteur zéro agit comme un élément d'identité : a + 0 = a = 0 + a.



Opérations vectorielles

La multiplication scalaire multiplie les vecteurs par des nombres pour produire de nouveaux vecteurs. Dans l'analyse vectorielle, il est d'usage de se référer aux nombres comme des scalaires. Si a est un vecteur et r un scalaire, alors ra est le vecteur avec :

• Même sens que a si r > 0 • Sens opposé à a si r < 0 • Longueur |ra| égal à |r| |a|

Algébriquement, si a = <a1 ,a2>, alors ra = <ra1 ra2>. Ainsi, par exemple, si a = <6,–8>, alors $\frac{1}{2}$a = <3,– 4> est le vecteur moitié moins long, pointant dans la même direction ; –a = <–6,8> est le vecteur de même longueur mais pointant en sens inverse ; et 0a = <0,0> = 0 est le vecteur zéro.

La soustraction vectorielle est effectuée en ajoutant un vecteur au négatif de l'autre. Par exemple, si a et b sont des vecteurs, alors le vecteur a – b est le résultat de l'ajout de –b à a. Géométriquement, cela correspond à inverser la direction du vecteur b et à placer ce vecteur inversé de point initial au point terminal de a, comme illustré ci-dessous. Nous avons : a + (–a) = 0.

Les opérations d'addition de vecteurs et de multiplication scalaire satisfont à un certain nombre de règles de base, produisant un système mathématique appelé ESPACE VECTORIEL.

Il existe deux types standards de multiplication sur les vecteurs. Ce sont le PRODUIT POINTU et la CROIX PRODUIT.

Un vecteur de longueur 1 est appelé vecteur unitaire. Dans un espace à deux dimensions, il existe deux vecteurs unitaires standard i = <1,0> et j = <0,1>. Tout vecteur bidimensionnel a = < a1 ,a2 > peut être écrit comme une combinaison (linéaire) de ces deux vecteurs unitaires :

$$a = < a1 ,a2 > = a1 <1,0> +a2 < 0,1 > = a1 i+a2 j$$

De même, dans l'espace tridimensionnel, il existe trois vecteurs unitaires standard : i = <1,0,0>, j = <0,1,0> et k = <0,0,1>. Ceux-ci forment également une BASE pour l'espace des vecteurs tridimensionnels. Les physiciens préfèrent souvent représenter les vecteurs comme des combinaisons des vecteurs unitaires standard.

Voir aussi ORTHOGONAL ; LOI PARALLELOGRAMME; VECTEUR DE POSITION; PROJECTION; TENSEUR ; CVE TRIPLE PRODUIT TOR ; ÉQUATION VECTORIELLE D'UNE LIGNE ; VECTEUR ÉQUATION D'UN PLAN ; CHAMP VECTORIEL ; ESPACE VECTORIEL.

équation vectorielle d'une droite L'équation d'une LIGNE dans un espace à deux dimensions peut s'écrire sous la forme :

Machine Translated by Google

y = mx + b. Malheureusement, il n'y a pas d'équation analogue pour une ligne située dans un espace tridimensionnel.
Remarquez cependant que si P = (p1 ,p2 ,p3) et Q = (q1 ,q2 ,q3) sont deux points sur la droite, alors $u = \overrightarrow{PQ}$ = <q1 – p1 ,q2 – p2 ,q3 – p3> est un VECTEUR avec une direction le long de la ligne, et tout autre point sur la ligne peut être trouvé en plaçant un multiple scalaire de u à la position P. C'est-à-dire l'équation :

$$P + tu = (p1 + t(q1 – p1), p2 + t(q2 – p2), p3 + t(q3 – p3)) = (1 – t)P + tQ$$

avec t variant sur tous les nombres réels, décrit tous les points de la droite. C'est ce qu'on appelle l'équation vectorielle de la droite. (Techniquement, on devrait travailler avec le vecteur de position p = <p1 ,p2 ,p3> plutôt qu'avec le point P = (p1 ,p2 ,p3), de sorte que la somme à gauche de l'équation ci-dessus soit l'addition de deux comme les quantités.)

La formule y = mx + b, décrivant l'équation d'une ligne dans le plan, peut également être considérée comme une équation vectorielle. Ici, les points (x,y) sur la droite sont donnés par :

$$(0,b) + x(1,m)$$

où (0,b) est un point de la droite (l' ordonnée à l'origine) et u = < 1,m > est la direction que prend la droite (1 pas au-dessus et m pas au-dessus).

équation vectorielle d'un plan L'équation mathématique d'un plan est une formule de la forme :

$$hache + par + cz = d$$

où a, b, c et d sont des nombres. Tout point (x,y,z) satisfaisant cette équation est un point sur un plan avec VECTOR n = < a,b,c > comme NORMAL AU PLAN.

Pour dériver cette formule, soit P = (p1 ,p2 ,p3) un point sur un plan donné et n = < a,b,c > un vecteur perpendiculaire au plan. Pour trouver l'équation de tout autre point Q = (x,y,z) sur ce plan, notez que la POSITION $\overrightarrow{PQ}$ = < x – p1 , y – p2 , z – p3 > se trouve dans le plan VECTEUR perpendiculaire à n . Le et est par conséquent DOT PROD est donc nul. Cela donne l'équation :
UCT n ·

$$< a,b,c > · < x – p1 ,y – p2 ,z – p3 > = a(x – p1) + b(y – p2) + c(z – p3) = 0$$

qui peut être réécrit :

$$hache + par + cz = d$$

où d est juste un nombre.

Notez que les composants de n apparaissent comme les coefficients des variables dans l'équation. Cela permet de "lire" rapidement les vecteurs normaux aux plans. Par exemple, le plan 2x – 3y + 4z = 10 a un vecteur normal n = < 2, –3, 4 >, tout comme le plan 2x – 3y + 4z = 6. Le plan y = 0 a un vecteur normal n = < 0 ,1,0 >.

Pour trouver l'équation du plan de vecteur normal n = < 2,2,1 >, disons, et passant par le point P = (5,–1,3), commencez par écrire l'équation partielle : 2x + 2y + z = ré. Pour trouver d, substituez les coordonnées du point P. Dans cet exemple, nous avons : d = 2,5 + 2·(–1) + 3 = 11, et donc ce plan a pour équation 2x + 2y + z = 11.

champ vectoriel Une fonction qui attribue à chaque point de l'espace un VECTEUR s'appelle un champ vectoriel. Par exemple, les courants de vent à la surface de la Terre forment un champ vectoriel à la surface de la Terre : à chaque endroit où se trouve un vecteur qui décrit la vitesse et la direction du vent. Dans l'espace tridimensionnel, il existe un champ vectoriel gravitationnel, donné par la force et la direction de la force gravitationnelle, qu'une masse unitaire subirait lorsqu'elle serait placée à chaque emplacement dans l'espace. L'intensité et la direction de la force varient d'un point à l'autre.

Le théorème de la boule poilue affirme que tout champ vectoriel variant en douceur sur la surface d'une sphère, avec des vecteurs tangents à la sphère, doit avoir au moins un vecteur qui est le vecteur zéro. Il montre, par exemple, qu'à tout instant, il doit y avoir un endroit sur la surface de la Terre où la vitesse horizontale du vent est nulle. Elle montre également qu'il est impossible de peigner tous les poils d'une balle de tennis à plat contre la surface de la balle de manière lisse et uniforme sans jamais produire une mèche. Cette deuxième interprétation explique le nom du théorème.

Voir aussi CURL ; DIV.

espace vectoriel L'ensemble des VECTEURS bidimensionnels ou tridimensionnels est équipé de deux opérations fondamentales : l'addition de vecteurs et la multiplication scalaire (c'est-à-dire une multiplication par des nombres réels). Ces deux opérations obéissent aux règles suivantes :

Machine Translated by Google

1. L'addition vectorielle est COMMUTATIVE :

$$a + b = b + a$$

2. L'addition vectorielle est ASSOCIATIVE :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

3. Il existe un vecteur nul 0 tel que :

$$a + 0 = a$$

4. Tout vecteur a a un –a négatif tel que :

$$a + (–a) = 0$$

5. Pour tout vecteur a on a :

$$1.a = a$$

6. Si r est un scalaire et a et b sont des vecteurs, alors :

$$r(a + b) = ra + rb$$

7. Si r et s sont des scalaires et a est un vecteur, alors :

$$(r + s)a = ra + sa$$

8. Si r et s sont des scalaires et a est un vecteur, alors :

$$(rs)a = r(sa)$$

Un espace vectoriel est tout ensemble V pour lequel il est possible de définissent une notion d'addition (c'est-à-dire une règle qui combine deux éléments de l'ensemble V pour produire un nouvel élément de V) et de multiplication scalaire (c'est-à-dire une moyenne multiplier les éléments de V par des nombres) de sorte que au-dessus de huit règles s'appliquent. Certes, l'ensemble de tous les vecteurs bidimensionnels forme un espace vectoriel, tout comme le ensemble de tous les vecteurs tridimensionnels, mais des exemples de les espaces vectoriels n'ont pas besoin d'être de ce type. Par exemple, laissez V soit l'ensemble de toutes les fonctions de l'ensemble de tous les réels nombres à l'ensemble des nombres réels. On peut ajouter n'importe deux fonctions f et g :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et multiplier les fonctions par des nombres :

$$(rf)(x) = rf(x)$$

On vérifie que les huit règles ci-dessus sont vérifiées (ici 0 est la fonction qui prend la valeur constante zéro), faisant de V un espace vectoriel. De plus, l'ensemble de toutes les matrices 3 × 3 est un espace vectoriel (on peut additionner deux matrices et multiplier matrices par des scalaires), comme l'est l'ensemble de tous les NOMBRES COMPLEXES. (On peut additionner deux nombres complexes et on peut multiplier des nombres complexes par des nombres réels.)

Les propriétés des vecteurs et leurs manipulations algébriques ont été largement étudiées par les chercheurs depuis des siècles. Que les mathématiciens ont isolé les huit clés propriétés qui font que les vecteurs fonctionnent comme ils le font permet d'appliquer immédiatement tout ce qui est connu sur les vecteurs de n'importe quel système, aussi abstrait soit-il peut-être, qui satisfait à ces huit règles de base. Par exemple, les mathématiciens ont prouvé que tout espace vectoriel doit avoir une BASE. Par conséquent, il doit y avoir une base pour l'ensemble de toutes les fonctions et pour l'ensemble de tous les 3×3 matrices. Identifier une base possible pour l'ensemble de tous fonctions conduit à une étude des SÉRIES DE FOURIER.

Voir aussi GROUPE ; LINÉAIREMENT DÉPENDANT ET INDE PENDANT.

vitesse L'étude du mouvement examine trois notions fondamentales : la distance, la vitesse et l'accélération.

La distance parcourue par un objet en mouvement (également appelé son déplacement) est la longueur totale du chemin qu'il déplacé le long. Si l'objet se déplace le long d'une ligne droite chemin, alors son mouvement est dit rectiligne. (Mouvement qui n'est pas rectiligne est appelé curviligne.) Si, en plus d'être rectiligne, un objet parcourt des distances égales D en des périodes de temps égales T, alors son mouvement est dit uniforme. C'est le type de mouvement le plus facile à analyser. Dans ce cadre, le rapport $\frac{D}{T}$ est constante et est appelée la vitesse (uniforme) v de l'objet, $v = \frac{D}{J}$, et l'image d'un graphique de vitesse en fonction du temps est une ligne horizontale à la hauteur v. La formule D = v × T, par coïncidence, est l'équation de l'aire du rectangle de largeur T et hauteur v. Cela montre, dans ce scénario simple au moins, que le déplacement est égal à la surface sous le graphique de vitesse.

Si, en mouvement rectiligne, la vitesse d'un objet change avec le temps, comme lorsqu'une voiture accélère de l'arrêt à vitesse sur autoroute, l'analyse de la vitesse et du déplacement est plus compliquée. Si f(t) désigne la position

Machine Translated by Google

de l'objet au temps t, alors la quantité f(t + h) – f(t) représente le changement de position de l'objet du temps t à un temps ultérieur t + h. La vitesse moyenne de l'objet sur cette période est donnée par :

$$\frac{\text{temps de changement}}{\text{de position pris}} = \frac{pi(hhpi + - ( )}{}$$

Le calcul de la vitesse moyenne sur des intervalles de temps de plus en plus petits, c'est-à-dire en prenant des valeurs de h de plus en plus petites dans la formule ci-dessus, donne la vitesse "réelle" de l'objet au temps t telle que lue par un compteur de vitesse, par exemple. Nous avons:

$$\text{vitesse instantanée} = \lim_{h\,0\,\rightarrow} \frac{pi-hhpi ( ) () +}{}$$

Ceci, bien sûr, est la formule de la DÉRIVÉE de la fonction de distance f(t).

> Pour un objet se déplaçant en ligne droite, la vitesse instantanée de l'objet est la dérivée de la formule de distance. Autrement dit, la vitesse instantanée est le taux instantané de changement de position.

Approchez maintenant l'aire sous un graphique de vitesse en fonction du temps sous la forme d'un ensemble de rectangles étroits. Puisque, comme nous l'avons vu, l'aire de chaque rectangle représente la distance parcourue sur une petite période de temps, la somme de ces aires donne une approximation de la distance totale parcourue par l'objet. L'utilisation de rectangles de plus en plus étroits donne des approximations de mieux en mieux. Dans la LIMITE , nous avons :

> Pour un objet se déplaçant en ligne droite, l' INTEGRAL de la fonction de vitesse donne la distance totale parcourue. C'est-à-dire que la distance parcourue est l'aire sous le graphique vitesse-temps.

Si un objet en mouvement suit une trajectoire courbe, alors on attribue généralement à la vitesse non seulement une grandeur, mais aussi une direction de mouvement. C'est-à-dire que la vitesse est considérée comme un VECTEUR. Le terme vitesse est utilisé pour désigner la distance parcourue par unité de temps, et la vitesse est ce nombre avec une indication quant à la direction dans laquelle ce mouvement se produit.

Le taux de changement de vitesse est appelé accélération. Sa grandeur est donnée par la dérivée première de vitesse (et, par conséquent, la dérivée seconde du déplacement). Il est également considéré comme un vecteur et se voit attribuer une direction.

L'accélération a est la dérivée première de la vitesse et la dérivée seconde de la distance :

$$\text{un} = \frac{d}{dt}(\text{distance de vitesse}) = \frac{d^2}{\text{jours}}( )$$

Les physiciens suivent souvent la notation de SIR ISAAC NEWTON qui désigne la différenciation par rapport au temps par un point et le déplacement par la lettre s. On a : a = v = s.¨ Si la position d'un mobile est donnée

par un ensemble d' ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES x = x(t) et y = y(t), alors le vecteur position de l'objet est le vecteur < x(t),y(t)>, sa vitesse est le vecteur < ·x(t), · y(t)>, et son accélération est le vecteur <x¨(t), ÿ(t)>.

Les scientifiques de la NASA utilisent parfois le terme jerk pour désigner le taux de changement d'accélération. Les astronautes accélérant à une vitesse uniforme seront repoussés dans leurs sièges avec une force constante, ce qui conduira à une conduite en douceur. Toute modification de la valeur de l'accélération entraîne des modifications des pressions de force.

L'accélération due à la pesanteur, notée g, est l'accélération avec laquelle un objet tombe librement sur la terre sans être gêné par la résistance de l'air. Pendant de nombreux siècles, on a cru que les objets plus massifs tomberaient plus vite que les objets plus légers, mais en 1638, GALILEO GALILEI (1564-1642) a démontré, par la théorie et par l'expérience, que ce n'est pas le cas : tous les objets qui tombent accélèrent à le même taux quelle que soit leur masse. (Si l'accélération dépendait de la masse, à quelle vitesse tomberaient deux corps en chute libre de masse différente liés ensemble ?) La valeur acceptée pour g est de 9,80665 m/sec/sec, mais cette amplitude varie à différents endroits de la Terre en raison du fait que la Terre n'est pas une sphère parfaite.

(Aux pôles sa valeur est de 9,8321 m/sec2 et à l'équateur de 9,7799 m/sec2 .)

Venn, John (1834–1923) Logique britannique , théorie des probabilités Né le 4 août 1834 à Hull, en Angleterre, on se souvient du logicien John Venn pour avoir introduit et popularisé l'utilisation de diagrammes de cercles superposés comme moyen de représenter les relations entre les ensembles. Bien que de tels diagrammes aient été utilisés des décennies plus tôt par GOT TFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) et LEONHARD

Machine Translated by Google

EULER (1707-1783) en tant qu'outil d'analyse des ARGUMENTS, ce n'est qu'à la publication du livre de Venn en 1881 Symbolic Logic que la pratique consistant à utiliser de tels diagrammes est devenue courante. Aujourd'hui, ces diagrammes sont nommés en son honneur.

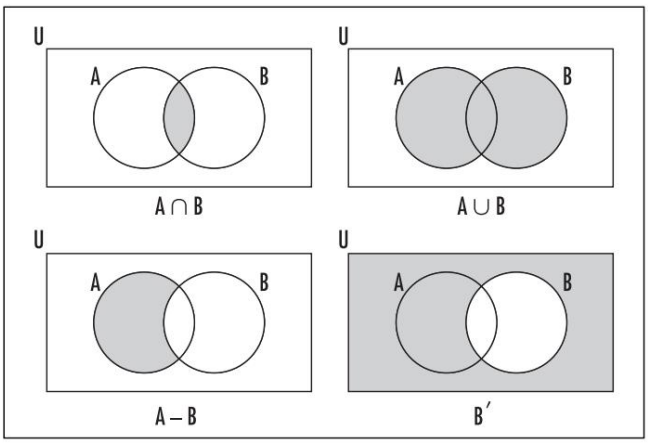
Venn est diplômé du Gonville and Caius College de Cambridge en 1857 après avoir étudié la théologie et les arts libéraux. Après avoir travaillé comme prêtre ordonné pendant plusieurs années, Venn retourna dans la même institution en 1862 pour accepter un poste de chargé de cours en sciences morales.
Pendant ce temps, il s'intéressa à la logique et à la théorie des PROBABILITÉS , et développa une « théorie des fréquences » des probabilités, qu'il publia en 1866 dans sa Logique du hasard. Ce travail a grandement influencé le développement de la théorie des statistiques. Quinze ans plus tard, Venn publia Symbolic Logic, qu'il suivit avec The Principles of Empirical Logic en 1889. Venn fut élu membre de la ROYAL SOCIETY en 1883.

Après la publication de son travail sur la logique, Venn a changé d'intérêt et s'est mis à rechercher et à écrire un compte rendu complet de l'histoire de Gonville et Caius College. Ce fut une tâche ardue et un seul volume de l'ouvrage fut publié avant sa mort, le 4 avril 1923.

Les diagrammes de Venn ont eu un effet profond sur l'enseignement des mathématiques modernes. Ils sont souvent utilisés comme un dispositif pour encourager la pensée logique au stade précoce du développement intellectuel d'un enfant et sont une caractéristique standard dans un programme d'études élémentaires.
Voir aussi DIAGRAMME DE VENN.

Diagramme de Venn Un diagramme dans lequel des ensembles mathématiques sont représentés par des cercles superposés à l'intérieur d'une frontière représentant l'ensemble universel est appelé un diagramme de Venn. Ces diagrammes fournissent des représentations graphiques pratiques des relations entre les ensembles. Par exemple, dans le schéma ci-dessus à droite, un ensemble universel U est représenté par l'intérieur d'un rectangle, et deux sous-ensembles A et B de U comme les intérieurs de deux cercles superposés à l'intérieur du rectangle. L'intersection A ∩ B, l'union A B, le complément de B dans A, noté A – B, et le complément universel de B, noté B′, par exemple, sont facilement apparents.

Par exemple, si U est l'ensemble de tous les insectes, A est le sous-ensemble de tous les papillons et B est le sous-ensemble de tous les insectes bleus, alors la région ombrée A ∩ B représente tous les papillons bleus, A B tous les insectes qui sont soit bleu ou



Opérations d'ensemble

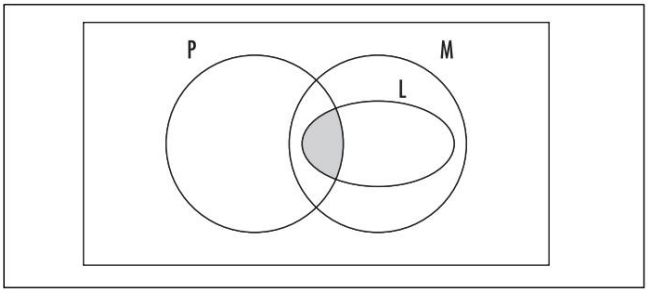
sont un papillon, A – B tous les papillons qui ne sont pas bleus, et B′ tous les insectes qui ne sont pas bleus.

Il est possible de démontrer la validité d'un ARGUMENT à l'aide d'un diagramme de Venn. Considérons, par exemple, le raisonnement suivant :

> Tous les logiciens sont des mathématiciens. Certains philosophes sont logiciens. Par conséquent, certains philosophes sont des mathématiciens.

Dans l'ensemble universel de toutes les personnes, soit L l'ensemble des logiciens, M l'ensemble des mathématiciens et P l'ensemble des philosophes. La première prémisse de l'argument affirme que L est un sous-ensemble de M, et la seconde que les ensembles P et L ont une intersection non vide. Cela conduit à un diagramme de Venn de la forme ci-dessous.

Il est maintenant évident que P et L ne peuvent se croiser qu'à l'intérieur de M, établissant ainsi la validité de la conclusion. Le mathématicien allemand GOTTFRIED



Un diagramme de Venn

Machine Translated by Google

WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) et le grand LEON HARD EULER (1707–83) ont chacun utilisé des diagrammes similaires à ceux-ci pour analyser les arguments. Dans le contexte de FOR MAL LOGIC , les diagrammes de Venn sont souvent appelés EULER

DIAGRAMMES.

Un seul ensemble A divise l'ensemble universel en deux morceaux disjoints, A et son complément A′. Deux sous-ensembles A et B divisent généralement l'ensemble universel en quatre morceaux disjoints : A ∩ B, A′ ∩ B, A ∩ B′ et A′ ∩ B′. (Ce n'est pas le cas, cependant, si A est un sous-ensemble de B, B est un sous-ensemble de A, ou si A et B ne se coupent pas.) Trois sous-ensembles A, B et C, dans leur disposition la plus générale, diviser l'ensemble universel en huit morceaux disjoints. (Le diagramme produit peut être utilisé pour illustrer les LOIS DE DE MORGAN .)

Il n'est pas possible de dessiner un diagramme de quatre cercles superposés pour représenter quatre sous-ensembles généraux A, B, C et D de manière à faire apparaître les 16 pièces disjointes de l'ensemble universel. Pour cette raison, les diagrammes de Venn ne sont généralement utilisés que pour illustrer les relations entre seulement deux ou trois ensembles.

Voir aussi THÉORIE DES ENSEMBLES ; JEAN VENN.

Viète, François (Franciscus Vieta) (1540–1603) Algèbre française Né à Fontenay-le-Comte, France, en 1540 (sa date de naissance exacte n'est pas connue), le savant François Viète est souvent appelé « le père de l'algèbre. ” Son œuvre influente de 1591 In artem analyticam isagoge (Introduction aux arts analytiques) est considérée comme l'un des premiers textes occidentaux sur le sujet. Sa pratique consistant à utiliser les lettres comme symboles des inconnues a représenté un premier pas vers le développement de la notation algébrique moderne et lui a permis de faire des progrès significatifs dans le domaine. Viète a également apporté d'importantes contributions au domaine de la TRIGONOMÉTRIE.

Viète n'a jamais été employé comme mathématicien professionnel. Diplômé de l'Université de Poitiers en 1560, il entame une carrière d'avocat, mais décide rapidement de changer de métier en acceptant un poste de précepteur privé en 1564. Dans ce rôle, il s'intéresse aux mathématiques et se forge rapidement une réputation de un érudit compétent. Viète donna occasionnellement des cours de mathématiques dans des instituts d'enseignement supérieur et, en 1589, fut employé par le roi Henri IV de France pour décoder les messages secrets envoyés à l'ennemi de l'État, Philippe II d'Espagne.

Son premier ouvrage publié, Canon mathematicus seu ad triangula (Le canon mathématique appliqué aux triangles), parut en 1579 et se voulait une introduction à l'astronomie mathématique. Dans ce document, Viète a utilisé les six principales fonctions trigonométriques pour résoudre des problèmes liés aux triangles plans et sphériques, a répertorié des tables de valeurs pour ces fonctions et a expliqué les mathématiques derrière la construction de ces tables. Plus tard, en 1593, Viète écrivit deux autres textes sur le thème de la trigonométrie, Zeteticorum libri quinque (Algèbre tome cinq), imitant le cinquième livre de l'Arithmétique de DIOPHANTE , et Variorum de rebus mathematicis responsorum (Divers problèmes mathématiques), qui contient son célèbre formule pour π en tant que produit infini de radicaux. Il a également donné des conférences sur les problèmes classiques de la DUPLICATION DU CUBE et de la TRISECTION D'UN ANGLE.

Aujourd'hui, Viète est surtout connu pour ses progrès en algèbre tels que présentés dans son célèbre texte Isagoge de 1591, qui a clairement démontré la valeur de la manipulation des lettres comme symboles pour des quantités connues et inconnues comme moyen de résoudre des problèmes algébriques. Viète a également introduit une notation améliorée pour les carrés, les cubes et d'autres puissances, ainsi que le terme coefficie Avec sa nouvelle approche de l'algèbre, Viète s'est attaqué avec succès à un certain nombre de problèmes que les savants classiques n'avaient pas été en mesure de résoudre. Viète est mort à Paris, France, le 23 février 1603.

Voir aussi COEFFICIENT ; LA FORMULE DE VIÈTE .

Formule de Viète (formule de Vieta) En 1593, le mathématicien français FRANÇOIS VIÈTE découvrit la formule remarquable suivante reliant π à un produit infini de radicaux :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{}\right)\sqrt{} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{}}\right)\sqrt{} \times \cdots$$

Sa formule est établie en faisant un usage répété des formules à double angle de la TRIGONOMÉTRIE :

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

Commencez par écrire :

Machine Translated by Google

$$\sin(\theta) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2^2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^2}$$

$$= \ldots$$

$$= 2^n\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}$$

Alors:

$$\frac{\theta}{\sin(\theta)} = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}.$$

En utilisant la formule du double angle pour le cosinus, cela peut être réécrit :

$$\frac{\theta}{\sin(\theta)} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta)}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta)}}\cdots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta)}}}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}$$

toujours à n termes radicaux. Mettre $\theta = \frac{\pi}{2}$. Depuis $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, cela donne:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

et puisque, selon la SQUEEZE RULE, $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$

comme $x \to 0$, la formule de Viète suit.

Voir aussi PI, PRODUIT DE WALLIS .

vinculum Au XVe siècle, il était courant de placer une ligne horizontale au-dessus, ou parfois en dessous, d'un groupe de termes dans une expression pour indiquer que ces termes devaient être traités comme une unité dans l'évaluation de cette expression. La ligne horizontale s'appelait un vinculum. Aujourd'hui, nous utilisons des parenthèses pour indiquer l'ordre des opérations. Par exemple,

$$x - y + z = x - (y + z)$$

L'utilisation du vinculum est apparue pour la première fois dans le manuscrit de 1484 Le triparty en la science des nombres (Tri party dans la science des nombres) écrit par le médecin français Nicola Chuquet (1445–1488). Au fur et à mesure du développement des presses à imprimer, les parenthèses ont été adoptées afin de faciliter la composition.

Aujourd'hui, un vinculum est principalement utilisé pour indiquer décimales répétitives (par exemple, la $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ avec quantité 142857 considérée comme une unité répétitive) et pour désigner le conjugué complexe d'un NOMBRE COMPLEXE.

La barre horizontale utilisée pour écrire les fractions est aussi parfois appelée vinculum. Il peut également être considéré comme un dispositif pour indiquer quels termes doivent être traités comme une unité. Par exemple, dans $\frac{x+y}{3}$ le l'expression la quantité entière "x + y" doit être divisée par trois, pas x seul ni y seul. Ainsi $\frac{x+y}{3} = \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$.

volume En gros, le volume d'un objet ou d'une région en trois dimensions est "la quantité d'espace qu'il occupe". Une telle définition fait appel à la compréhension intuitive. En général, cependant, il est très difficile d'expliquer précisément ce que nous entendons par « espace » et la « quantité » de celui-ci occupé. Comme pour la notion d' AREA, il s'agit d'un problème sérieux, comme le démontre le paradoxe Banach-Tarski qui surgit dans l'étude attentive de ce sujet.

Dans tous les cas, étant donné une certaine compréhension de ce que nous entendons par "aire", il est naturel de définir alors le "volume" d'un objet simple avec des parois verticales de hauteur h et une base d'aire A comme étant simplement le produit A × h :

volume = aire de la base × hauteur

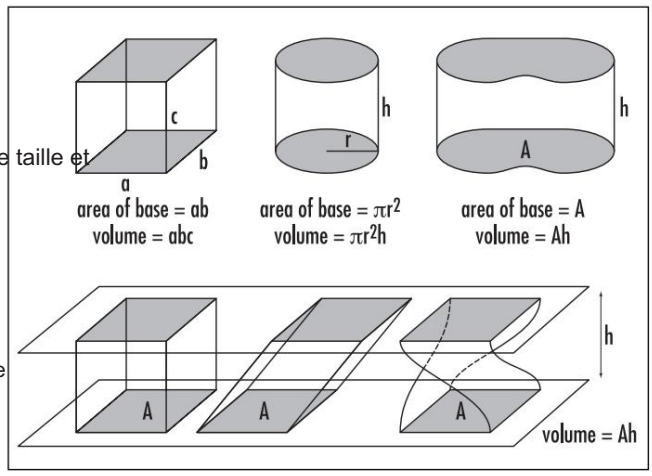
Par exemple, une boîte rectangulaire a unités de largeur, b unités de profondeur et c unités de hauteur a une base d'aire a × b et donc un volume donné par a × b × c. Un cylindre de hauteur h avec

Machine Translated by Google

base circulaire de rayon r a une aire de base πr 2 et donc un volume πr 2h.

Ce point de vue imagine des volumes aussi bien approximés par des empilements de fines couches de « volume », chacune étant une coupe horizontale de solide de même taille et forme comme base. Comme un jeu de 52 cartes empilées pour produire une boîte rectangulaire, le volume d'une pile de feuilles ne change pas si le pieu est de travers : la forme du le pont peut changer, mais pas son volume. Cette observation a été notée pour la première fois par le mathématicien italien du XVIIe siècle BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647). Il conduit à une principe général, aujourd'hui appelé PRINCIPE DE CAVALIERI :

> Des solides de hauteur égale ont des volumes égaux si des coupes faites par des plans parallèles à la base au même distance de la base ont des aires égales.



Le volume des chiffres

Les techniques de CALCUL INTÉGRAL sont utilisées pour calculer des volumes. Les méthodes ici ne sont vraiment pas différentes de l'approximation des solides comme des piles de fines cartes ou, peut-être, comme des collections de petites boîtes (dont les volumes sont connus) et en prenant la LIMIT comme meilleure et de meilleures approximations sont faites.

Par exemple, supposons qu'un solide ait une hauteur h et que l'aire d'une coupe faite par un plan parallèle à la la base à la hauteur x est A(x). Imaginez que nous coupons le solide en « cartes » fines aux positions 0 = x0 < x1 < … xn–1 < xn = h. Alors le volume V du solide peut être bien approximé comme la somme des volumes de cartes de surface de base A(xi) et xi , c'est-à-dire . Prenant) $AV \tilde{} \sum_{i=0}^{n-1} x\,(i)\,i$ largeur $xi+1 -$ la limite car de plus en plus de valeurs entre 0 et h sont choisi (c'est-à-dire que des cartes de plus en plus fines sont utilisées) donne le vrai volume du solide sous forme d'intégrale :

$$V = \int_0^h A(x)dx$$

Par exemple, la section transversale d'une sphère de rayon r à une distance x du plan passant par l'équateur $\sqrt{r}$ 2 tor est un cercle de rayon et d'aire $\pi(r \quad + x^2 \quad -x_{_}^2)$. Ainsi le volume d'une sphère de rayon r vaut :

$$v = \int_{-r}^{r} \pi r^2 dx = \left(\quad\right) = \frac{4}{3}\pi$$

Toute section transversale d'un CONE dont la base a une forme arbitraire est une version à l'échelle de la même forme plane. A mi-distance du sommet du cône, la croix section a une aire correspondant au quart de l'aire de la base. À un tiers de la distance du sommet, la section transversale a une aire égale au neuvième de l'aire de la base. En général, si le l'aire de la base est A et la hauteur du cône est h, puis l'aire de la section transversale à une distance x de le sommet a une aire $A(x) = A \times \frac{x}{h}^2$. Le volume de tout cône de base d'aire A et de hauteur h est donc :

$$AV = \int_0^h \frac{x}{h}^2 dx = Ah\frac{1}{3}$$

Le volume d'un FRUSTUM peut être calculé de la même manière chemin.

Le mot volume vient du latin volumen, signifiant "faire défiler", où la taille ou le volume d'un livre a finalement conduit à l'utilisation du mot pour la taille ou masse de n'importe quel objet.

Voir aussi DOUBLE INTÉGRALE ; ESCALADER; SOLIDE DE RÉVOLUTION.

Machine Translated by Google

O

Wallis, John (1616–1703) Tournesol britannique Né le
23 novembre 1616, dans le Kent, Angleterre, mathématicien
On se souvient de John Wallis pour ses contributions substantielles
au développement précoce de CALCULUS, qui a posé
les bases de SIR ISAAC NEWTON (1642–1727)
pour ensuite développer pleinement le sujet. Ses contributions à
la mécanique a également aidé Newton à formuler les lois de
mouvement. Il était considéré comme le plus grand mathématicien
anglais de son temps.

Wallis était peu exposé aux mathématiques pendant
la première partie de sa vie. Il a obtenu un baccalauréat ès arts
diplôme en 1637 et une maîtrise en 1640 en théologie et a été
ordonné ministre en 1640.

Par hasard, alors qu'il travaillait comme aumônier pendant
l'époque des troubles civils en Angleterre, Wallis a découvert
qu'il pouvait facilement déchiffrer les messages codés que les
paroissiens partageaient avec lui. Cela a démontré un talent pour
pensée mathématique, et Wallis fut bientôt embauché par
les parlementaires à décoder les messages royalistes.

Pendant ce temps, Wallis lisait les œuvres de
JOHANNES KEPLER et BONAVENTURA CAVALIERI et
d'autres, et a développé un intérêt à développer le
idées de calcul infinitésimal développées par ces
auteurs. En 1656, Wallis écrivit son texte influent Arith metica
infinitorum (série Infinite), qui contient,
parmi beaucoup de choses, sa célèbre formule de produit pour $\frac{\pi}{2}$.
Wallis a également étudié et écrit sur les sujets de CONIC
SECTIONS et ALGÈBRE. Il a été le premier à expliquer
la signification des puissances nulles, négatives et fractionnaires



John Wallis, éminent mathématicien du XVIIe siècle,
utilisé des infinitésimaux pour développer d'importantes techniques de calcul. Sir
Isaac Newton a construit une grande partie de son développement du calcul sur
les idées de Wallis. (Photo publiée avec l'aimable autorisation de la Science
Museum, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

$(x^0 x ,,) \bar{n}^m$ $\frac{n}{}$ et a été l'un des premiers savants à permettre des solutions négatives et complexes aux équations. Il a fait valoir que le nombre i, représentant le carré racine de –1, a sa place dans les applications réelles des mathématiques. Wallis a également introduit le symbole ∞ pour l'infini.

En plus de travailler comme mathématicien chercheur, Wallis a également apporté d'importantes contributions en tant que historien des mathématiques. Il a restauré plusieurs anciens textes grecs et a présenté une étude complète de l'histoire de l'algèbre dans son ouvrage de 1685 Treatise on Algèbre. Il est décédé à Oxford, en Angleterre, en novembre 8, 1703.

Wallis a contribué à façonner l'ensemble du cours des travaux mathématiques en Angleterre pendant la dernière partie du 17e siècle et a ouvert la voie à Newton pour développer son idées. En conséquence, la Grande-Bretagne est devenue le centre de la recherche mathématique à la fin des années 1600 et l'est restée. jusqu'à l'influence de LEONHARD EULER (1707-1783) et les membres de la FAMILLE BERNOULLI ont mis l'accent retour en Europe continentale au milieu des années 1700.

Voir aussi PRODUIT DE WALLIS .

Produit de Wallis En 1656 mathématicien anglais JOHN WALLIS a découvert le remarquable suivant expression pour le nombre en tant que PRODUIT INFINI :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}$$

Il a découvert ce résultat en essayant de calculer INTÉGRALES de la forme

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx$$

avec n pas nécessairement un entier. (Par exemple, lorsque $n = \frac{1}{2}$, quatre fois cette intégrale est égale à l'aire d'un cercle.) Le travail de LEONHARD EULER (1707-1783) sur la FONCTION ZETA conduit également à une preuve de Wallis produit, celui qui est relativement simple à suivre.

La formule de Wallis a conduit son collègue anglais LORD WILLIAM BROUNCKER (1620-1684) pour découvrir l'étonnante formule de FRACTION CONTINUE suivante pour π :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + L}}}}$$

Voir aussi PI.

Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897) Analyse allemande Né le 31 octobre 1815, le savant allemand Karl Weierstrass est resté dans les mémoires comme une figure de proue dans le domaine de l' ANALYSE mathématique. Tout au long de sa carrière, il a souligné la nécessité de rigueur absolue, et, à la suite des efforts d' AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857), s'emploie à introduire de très des définitions précises des notions fondamentales de l'étude de CALCULS. Il a développé la fameuse définition ε – δ d'une LIMITE que nous utilisons aujourd'hui, ainsi qu'une clarification précise du sens de continuité, de convergence, et de DIFFÉRENTIELS. Pour illustrer que la compréhension intuitive seule ne suffit jamais, Weierstrass a présenté des exemples de fonctions pathologiques qui sont continues mais n'ont pas de lignes tangentes bien définies. Weierstras aussi a résolu le célèbre PROBLÈME ISOPERIMETRIQUE avec son "calcul des variations".

Weierstrass entre à l'Université de Bonn en 1834 pour poursuivre des études en droit et en finance, mais il n'a jamais terminé le programme, choisissant plutôt de suivre un Études de mathématiques à l'Académie théologique et philosophique de Münster en 1839. Il débute sa carrière universitaire comme professeur provincial de mathématiques.

Tout en enseignant, Weierstass a publié un certain nombre de articles sur l'étude des fonctions réelles et complexes. Le La majeure partie de ses premiers travaux est passée inaperçue de la communauté des mathématiciens, et ce n'est qu'à la publication de sa pièce de 1854 Zur Theorie der Abelschen Functio nen (Sur la théorie des fonctions abéliennes) que le génie de Weier Strass en tant que mathématicien a été reconnu. Il a immédiatement reçu un doctorat honorifique de l'Université de Königsberg et a obtenu un un an de congé de l'école pour poursuivre des études supérieures en mathématiques. Il n'est jamais retourné à l'enseignement scolaire, cependant. En 1856, à l'âge de 40 ans, Weierstrass accepté un poste de professeur à l'Université de Berlin, qu'il conserva pour le reste de sa vie.

Machine Translated by Google

Weierstrass a apporté d'importantes contributions à la étude des POWER SERIES et de leur convergence, et de LES SERIES DE FOURIER et leurs applications aux problemes de géométrie et mécanique. En donnant une définition précise d'une limite, Weierstrass a complètement révolutionné compréhension mathématique des principes fondateurs du CALCUL et de l'analyse moderne. Dans un sens très réel, Weierstrass a établi les normes de rigueur que tous les mathématiciens suivent encore aujourd'hui.

Dans l'étude des SÉRIES CONVERGENTES, le test de comparaison montre que la fonction :

$$\text{effet}(\bar{}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{péché}(\pi n x^2)}{\pi n^2}$$

converge pour toute valeur de x. (Comparer avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) Weierstrass a pu montrer, en outre, que cette fonction est continue, mais qu'elle n'a pas de dérivée à toute valeur irrationnelle de x. C'était peut-être son plus exemple célèbre d'une fonction pathologique qui est continue mais ne possède pas de ligne tangente significative à presque tous les points. Que de telles fonctions existent, comme l'a souligné Weier Strass, démontre en effet la nécessité de soin sans compromis dans le développement des détails dans tout travail théorique. Jules Henri Poincaré (1854-1912) admiré son « unité de pensée » sur cette question.

Weierstrass est décédé à Berlin, en Allemagne, en février 19, 1897.

ensemble bien ordonné Un ENSEMBLE ORDONNÉ A est dit bien ordonné si chaque sous-ensemble non vide de A a un petit membre est. Par exemple, l'ensemble des nombres naturels est bien ordonné : pour tout ensemble de nombres naturels on se soucie pour décrire, il y aura un plus petit membre de cet ensemble. D'autre part, l'ensemble de tous les entiers n'est pas bien commandé. Par exemple, le sous-ensemble d'entiers négatifs n'a pas de plus petit membre.

En 1904, le mathématicien allemand ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871-1953) a prouvé que tout l'ensemble commandé peut être bien commandé si l'on le souhaite pour modifier l'ordre sur cet ensemble. Par exemple, l'ensemble de tous les entiers peuvent être rendus bien ordonnés si l'on arrange eux comme suit :

0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, 4,…

(Le "plus petit" élément de l'ensemble de tous les entiers négatifs, par exemple, est maintenant -1.) Zermelo devait invoquer un AXIOME DE CHOIX controversé pour prouver cette affirmation.

Whitehead, Alfred North (1861–1947) Logique britannique , Physique théorique, Philosophie Né le 15 février 1861, dans le Kent, en Angleterre, Alfred Whitehead est surtout connu en mathématiques pour son ouvrage en trois volumes Prin cipia Mathematica, écrit en collaboration avec l'anglais logicien BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872-1970). Whitehead et Russell espéraient faire dériver l'ensemble des mathématiques de principes purement logiques.

Whitehead entre au Trinity College de Cambridge en 1880 pour étudier les mathématiques appliquées. Il a travaillé et enseigné dans ce domaine pendant 12 ans avant que ses intérêts ne se tournent même vers les mathématiques pures et les principes fondamentaux de la matière. En 1891, il commença travailler sur Treatise on Universal Algebra, un projet qui lui a pris sept ans pour terminer. En même temps, Bertrand Russell est entré au collège en tant qu'étudiant de premier cycle et Whitehead l'a immédiatement reconnu comme un philosophe brillant et mathématicien compétent. Leur collaboration sur Principia Mathematica a débuté en 1900 et était initialement destiné à être un volume travail. La découverte par Russell en 1901 de sa célèbre théorie des ensembles paradoxes obligent cependant les deux hommes à réévaluer le projet et étendre l'ouvrage à un traité en trois volumes. Ces volumes ont été publiés de 1910 à 1913.

Pendant ce temps, Whitehead a également publié d'autres matériel, y compris des textes projectifs et descriptifs géométrie et un aperçu général populaire des mathématiques, An Introduction to Mathematics. Whitehead aussi écrit des articles sur la philosophie des sciences et propose un point de vue alternatif à la théorie d' ALBERT EINSTEIN de la relativité dans son livre de 1922 Le principe de la relativité. Le travail n'a pas été bien compris et a été largement ignoré.

Whitehead a travaillé comme chargé de cours à Cambridge pendant plus de 30 ans avant d'accepter un poste de chaire de philosophie à l'Université de Harvard en 1924. Il est resté jusqu'à sa retraite en 1937. Il mourut à Cambridge, Massachusetts, 10 ans plus tard, le 30 décembre 1947.

nombre entier UN NOMBRE NATUREL est parfois appelé nombre entier. Les choses sont confuses

Machine Translated by Google

parce que de nombreux chercheurs en mathématiques aiment aussi se référer à zéro comme un nombre entier, et certains aiment aussi considère tout entier négatif comme un nombre entier. Il y a pas de convention standard en place à cet égard. Il est certain, cependant, qu'aucun mathématicien ne considérerait un nombre qui n'est pas un entier un nombre entier.

Voir aussi NOMBRE ; LA THÉORIE DU NOMBRE.

Wiles, Andrew John (1953–) Algébrique britannique théorie des nombres Né le 11 avril 1953 à Cam bridge, en Angleterre, le mathématicien Andrew Wiles a acquis une renommée internationale en 1994 en tant que premier résoudre l'un des problèmes mathématiques les plus insaisissables et les plus difficiles de tous les temps, LE DERNIER THÉORÈME DE FERMAT . Ce problème notoire, posé par le numéro français l'oriste PIERRE DE FERMAT (1601-1665), stipule que le équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières positives si n est un entier supérieur à 2. Trouver une preuve de cette affirmation apparemment simple s'est avérée être un défi extraordinairement difficile, qui a frustré les mathématiciens professionnels et amateurs pendant bien plus de 300 ans.

Depuis la première lecture du dernier théorème de Fermat à l'âge de 10 ans, Wiles rêvait de le résoudre. Dans sa jeunesse, il a d'abord essayé des approches qu'il pensait Fermat aurait pu suivre en pensant au théorème lui-même. Cela s'est avéré inutile. Au collège, Wiles étudié le travail des grands 18e et 19e siècles chercheurs qui avaient travaillé sur le problème, espérant glaner des idées sur la façon dont on pourrait aborder le défi. Poursuivant les mathématiques plus loin, Wiles est entré Clare College, Cambridge, et en 1980, a reçu un doctorat en mathématiques. En 1982, Wiles s'est rendu au États-Unis pour occuper un poste de professeur à l'université de Princeton, New Jersey.

Bien que la thèse de Wiles et les premiers travaux de recherche n'était pas directement lié à la résolution du dernier orème de Fermat, Wiles apprit plus tard quelques développements importants qui reliaient la solution possible du problème avec certaines nouvelles approches en courbe elliptique théorie, sujet de sa thèse. A cette nouvelle, Wiles abandonné tous les intérêts de recherche non liés pour se concentrer exclusivement sur la résolution du théorème. Travail depuis 7 ans droit, essentiellement en isolement, Wiles modifié et adapté les avancées nouvellement développées dans de nombreux domaines disparates champs pour tracer une voie qui, espérons-le, conduirait à une solution au problème. En 1993, au milieu d'une vague de grand engouement médiatique, Wiles a annoncé à la communauté mathématique qu'il avait réussi. Subséquent examen attentif de son travail, cependant, a révélé une subtile, mais endommageant, erreur, et tout a été pensé pour être perdu.

Après encore 18 mois d'efforts concertés, avec Avec l'aide de son collègue Richard Taylor de l'Université de Cam bridge, Wiles a réussi à trouver un moyen de contourner l'erreur et de produire, enfin, un preuve sans faille du fameux résultat. La preuve de la théorème apparaît dans un volume de 1995 des Annals of Mathématiques. Il représente l'une des plus grandes réalisations intellectuelles du XXe siècle.

Wiles a remporté de nombreux prix pour sa réalisation, dont le prix Wolf en 1995, le prix Wolfskehl en 1997, le prix Cole de l'American Mathematical Society en 1997, et le prix King Faisal en 1998. Parce qu'il avait dépassé la limite d'âge de 40 ans, Wiles n'a pas reçu de MÉDAILLE FIELDS pour son travail, mais il a été honoré d'une plaque d'argent lors de la cérémonie de remise de la médaille Fields en 1998. Wiles réside actuellement à Princeton, New Jersey.

Machine Translated by Google

Z

Zénon d'Élée (vers 490-425 av. J.-C.) Philosophie grecque Né à Élée, Luciana (aujourd'hui le sud de l'Italie), le philosophe grec Zénon est connu pour son invention d'un certain nombre de PARADOXes qui ont considérablement influencé et remis en question la perception grecque de la grandeur, mouvement et continuité. La question de savoir si oui ou non la matière et le temps sont composés de parties fondamentales indivisibles (« atomes ») intéressait beaucoup les philosophes de l'époque. Zeno a réussi à concevoir une variété d'arguments convaincants qui semblent prouver que tout point de vue que l'on souhaite adopter ne peut être correct. Quatre de ses paradoxes en particulier ont acquis une certaine notoriété.
Ils sont restés non résolus pendant plus de deux millénaires.

Essentiellement, rien n'est connu de la vie de Zénon, à l'exception de ce qui peut être glané dans les écrits de PLATON dans son dialogue Parménide. Nous y apprenons que Zénon a étudié à l'école éléatique de philosophie sous la direction du fondateur Parménide. Cette secte a analysé le concept de monisme, l'idée que "tout est un" et que le changement et le mouvement ne sont que des illusions et ne font pas partie d'une réalité éternelle. On pense que Zeno n'a écrit qu'un seul texte, sa collection de 40 paradoxes sur la nature du temps, de l'espace et du mouvement. Le texte, malheureusement, n'a pas survécu, et nous apprenons son contenu à travers les écrits des autres. ARISTOTE décrit les quatre paradoxes célèbres dans son ouvrage Physique.

Voir aussi LES PARADOXES DE ZENO .

Les paradoxes de Zénon

Dans ses études, le philosophe grec ZENO OF ELEA a proposé 40 PARADOXES qui défient notre compréhension du temps, de l'espace et du mouvement. Quatre de ses paradoxes ont attiré une attention considérable pour être particulièrement gênants.

En ce qui concerne le temps et l'espace, il y a deux possibilités : soit ces grandeurs peuvent être divisées en parties de plus en plus petites un nombre illimité de fois (c'est-à-dire que l'espace et le temps forment chacun un continuum), soit il existe une unité fondamentale indécomposable de chacun qui ne peut plus être divisé (semblable à la notion que la matière est composée de particules indivisibles). Les deux premiers paradoxes célèbres de Zénon soutiennent que le mouvement est impossible si le premier point de vue est adopté, tandis que les deux derniers soutiennent que le mouvement est à nouveau impossible si la dernière perspective est adoptée. Ses paradoxes sont les suivants :

1. Dichotomie : Supposons que le temps et l'espace soient chacun infiniment divisibles.

Pour traverser la pièce, il faut d'abord atteindre le point médian. Mais pour cela, il faut arriver au point au quart du chemin. Mais pour aller aussi loin, il faut passer par le point un huitième du chemin, et avant cela, le point 1/16e du chemin.

Comme cette division peut être faite indéfiniment, il semble alors que nous ne pouvons jamais commencer notre marche à travers la pièce - nous pouvons jamais atteindre un premier point de notre voyage. Le mouvement est donc impossible.

2. Achille et la tortue : Supposons que le temps et l'espace sont divisibles à l'infini.

Machine Translated by Google

Achille et une tortue participent à une course où
la tortue a une longueur d'avance. Considérez Achille
circonstance. Pour dépasser la tortue, il doit d'abord
atteindre la position de départ de la tortue. À ce moment-là, la tor
toise aura, bien sûr, changé de position. Pour dépasser la tortue,
Achille doit atteindre
cette deuxième position, et, encore une fois, au moment où il le fait
ainsi la tortue se sera déplacée plus loin. En continuant ainsi, on voit
qu'il est impossible pour Achille
jamais dépasser la tortue, peu importe à quelle vitesse
il se déplace.

3. Le paradoxe de la flèche : supposons que le temps et
l'espace chacun est composé d'unités fondamentales
discrètes.

Considérez une flèche en vol. À n'importe quel fondamental
unité de temps, la flèche occupe une position instantanée particulière
dans l'espace. A ce moment, il est indistinct d'une flèche immobile
occupant le même
emplacement dans l'espace pendant cette même unité de temps. Comment
alors est-ce que le mouvement est perçu ?

4. Le paradoxe du stade : supposons que le temps
et l'espace sont chacun composés de discrets
unités fondamentales.

Imaginez deux coureurs dans un stade se déplaçant en face
directions à partir de la même position de départ. Supposons que le
coureurs se déplacent chacun à une vitesse équivalente à une
distance fondamentale d'espace pour chaque unité fondamentale de
temps. Demandez maintenant : « Que voit un coureur quand il regarde
derrière son épaule ? La réponse : son adversaire se déplaçant de 2
unités d'espace en 1 unité de temps. Nous ne pouvons que conclure
qu'il doit y avoir une unité plus petite que la
unité de temps supposée indivisible qui correspond à
juste 1 unité de ce mouvement.

Quelques commentaires s'imposent. Il est à noter
que de nombreux textes ont tenté de résoudre le problème de Zénon
paradoxe de la dichotomie en arguant que le fait que nous
peut traverser une pièce prouve que la somme infinie 1

(SERIES) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ … converge vers la valeur finie

1. Ceci, cependant, n'est pas pertinent pour l'argument proposé dans
ce premier paradoxe. Zeno suggère à la place
qu'il est impossible de construire une telle somme infinie en
en commençant par le "mauvais bout", pour ainsi dire. (La construction
d'une somme infinie est cependant appropriée pour analyser le
deuxième paradoxe.)

Certains chercheurs suggèrent que le troisième paradoxe de Zénon est
une première étape importante dans l'étude des INFINITESIMAUX
et les problèmes de CALCUL DIFFÉRENTIEL. La norme d

formule pour la vitesse est $v = \frac{d}{t}$, où d est la distance
parcouru et t le temps nécessaire pour le faire. A un 0 particulier
instant, cela conduit à l'équation dénuée de sens $v = \frac{0}{0}$.
Ici, dit-on, Zénon indique la mathématique
difficulté des infinitésimaux, le même problème qui était
pour hanter les inventeurs du calcul deux millénaires plus tard.

Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand (1871–1953)
Allemand Théorie des ensembles, Physique Né le 27 juillet 1871, à
Berlin, Allemagne, le mathématicien Ernst Zermelo est
connu pour avoir fondé l'axiomatique SET THEORY. Dans
1908, il publie un ensemble de sept axiomes destinés à
dépasser les paradoxes posés par BERTRAND ARTHUR
WILLIAM RUSSELL (1872-1970) en théorie des ensembles, et à
fournir, pour la première fois, une base rigoureuse et logique pour le
sujet en développement. les axiomes de Zermelo,
bien que modifiés plus tard par d'autres mathématiciens, ont
est resté le point de départ sur lequel beaucoup ont continué
travail sur ce sujet a été basé.

Zermelo a obtenu un doctorat en mathématiques de
l'Université de Berlin en 1894 après avoir terminé une thèse explorant
les questions de calcul, le calcul des variations et leurs applications à
la physique. Il a continué
travailler dans ce domaine à l'université pendant 3 heures supplémentaires
ans avant de déménager à Göttingen pour étudier l'hydrodynamique.
Il a été nommé maître de conférences à Göttingen pour
ses recherches exceptionnelles dans ce domaine.

A l'époque ailleurs en Europe, les mathématiciens
tentaient de donner un sens à l'œuvre controversée
proposée par le mathématicien allemand GEORG CANTOR
(1845-1918). Le mathématicien allemand DAVID
HILBERT (1862-1943), dans sa célèbre conférence parisienne de
1900, cité la résolution du CONTINUUM de Cantor
L'HYPOTHÈSE comme la question la plus difficile et la plus importante
du XXe siècle. Zermelo a été captivé par le
problème quand il l'a appris, et a commencé à consacrer tout
son temps et ses efforts pour le résoudre. Il s'est vite rendu compte qu'un
première étape vers la résolution de la conjecture générale serait
pour établir une seconde des affirmations de Cantor, à savoir que
n'importe quel ensemble peut être un ENSEMBLE BIEN ORDONNÉ.

Zermelo a publié son premier recueil de résultats sur
ce sujet en 1901 avec l'article « Über die Addition
transfiniter Cardinalzahlen » (Sur l'ajout de

Machine Translated by Google

cardinaux transfinis), et 2 ans plus tard a réussi à prouver la conjecture bien ordonnée dans son article de 1904 "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann"
(Preuve que chaque ensemble peut être bien commandé). Son succès lui a valu une renommée internationale et une reconnaissance en tant que brillant mathématicien. L'Université de Göttingen lui a immédiatement décerné un poste de professeur titulaire.

En 1905, laissant de côté les travaux ultérieurs sur l'hypothèse du continu, Zermelo commença la tâche d'axiomatiser la théorie des ensembles. En identifiant un petit ensemble d'hypothèses de base sur le sujet, il espérait résoudre certains des paradoxes sur les ensembles infinis qui surgissaient dans le sujet. Malheureusement, il a trouvé nécessaire d'inclure un « axiome de l'infini » affirmant, essentiellement, que des ensembles infinis existent, ainsi que l' AXIOME DE CHOIX extraordinairement controversé, qui affirme qu'il est toujours possible de sélectionner, d'un seul coup, un objet. de chaque ensemble dans n'importe quelle collection infinie d'ensembles. Les mathématiciens étaient mal à l'aise avec chacune de ces hypothèses à l'époque. De plus, malgré ses efforts, Zermelo n'a pas été en mesure de prouver que les axiomes qu'il avançait étaient exempts de contradictions. D'autres mathématiciens ont alors commencé à travailler sur cette tâche, et quelque 15 ans plus tard, en 1922, les mathématiciens Adolf Fraenkel et Tho ralf Skolem ont développé indépendamment un système raffiné de 10 axiomes qui ont été jugés suffisamment bons.

Zermelo a quitté Göttingen en 1910 pour prendre un rendez-vous en tant que chaire de mathématiques à l'Université de Zurich, où il est resté pendant 6 ans. Zermelo a passé le reste de sa vie à Fribourg. Il y mourut le 21 mai 1953.

Voir aussi LE PARADOXE DE RUSSELL .

zéro (naught) Le nombre de comptage, noté 0, utilisé pour signifier qu'aucun objet n'est présent est appelé zéro. Ce nombre a la propriété arithmétique que son addition à tout autre nombre ne change pas ce nombre : a + 0 = a = 0 + a pour toutes les valeurs a. Ainsi, zéro sert d' ÉLÉMENT D'IDENTITÉ additif en arithmétique. Zéro est le seul nombre réel qui n'est ni POSITIF ni négatif.

Ce n'est que récemment dans l'histoire des mathématiques que le zéro a été reconnu comme une entité mathématique valable et importante. Aux temps de l'Antiquité, on pensait que les nombres ne représentaient que des comptages ou des grandeurs de quantités. Ainsi, s'il n'y avait pas d'objets à compter, il n'y avait pas de nombre à considérer (et donc parler de zéro comme nombre n'avait par conséquent aucun sens). L'ancien Les érudits égyptiens et grecs n'ont jamais utilisé le zéro dans leurs calculs. Les anciens Babyloniens ont été les premiers à utiliser une notion de zéro en l'utilisant, dans un certain sens, comme espace réservé pour exprimer de grands nombres (tout comme nous utilisons des zéros aujourd'hui pour distinguer entre 102 et 12.) Le mathématicien hindou BRAHMAGUPTA (vers 598 –665) est reconnu aujourd'hui comme étant le premier chercheur à reconnaître le zéro comme un nombre valide et à l'utiliser dans des calculs arithmétiques. Son idée a ensuite été développée par MUHAM MAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı (vers 780–850) dans son célèbre développement d'une théorie de l'algèbre. Le mathématicien italien FIBONACCI (vers 1170–1250) a popularisé une grande partie des travaux d' al-Khw– arizm –ı en Europe occidentale, mais ce n'est qu'à la Renaissance que la notion de zéro a finalement été considérée comme un concept valide.

L'arithmétique impliquant zéro peut être gênante.
Bien que n'importe quel nombre puisse être multiplié par zéro (pour produire la réponse zéro), aucun nombre ne peut être divisé par zéro. Par exemple, il ne peut y avoir de réponse au problème de division 1 ÷ 0. (Si 1/0 = x, alors la multiplication par le dénominateur donne le résultat absurde : 1 = x × 0 = 0.) La quantité 0/0 est également réputé indéterminé. (On pourrait soutenir que la réponse à ce problème de division est 17, puisque 0 = 17 × 0, ou, du même coup, que la réponse est 2 puisque 0 = 2 × 0. Il n'y a pas de solution unique bien définie à 0 ÷ 0.)

Un nombre compté est considéré même s'il peut s'écrire comme la somme de deux nombres entiers égaux. Puisque zéro est égal à 0 + 0, il s'ensuit que zéro est un nombre pair.

L'étude des EXPOSANTS montre qu'il convient de définir x comme étant 1 pour tout nombre réel x différent de zéro. (Par exemple, 20 = 1 et 1730 = 1.)
Bien qu'il soit vrai que limx→0 +x = 1, il n'est pas valide de supposer que 00 est également égal à 1. (Cette LIMITE n'existe pas si l'on admet les NOMBRES COMPLEXES dans nos considérations, et donc la notion d'élever zéro à la la puissance nulle est problématique dans ce cadre.) Une étude du FACTORIEL montre qu'il convient de définir 0 ! = 1.

Une racine d'une fonction est parfois appelée un zéro de la fonction. Une fonction nulle est une fonction dont la sortie est toujours nulle. Par exemple, la fonction f(x) = $\frac{\text{bûche}\sqrt{2-x^2}}{2x}$ défini sur des valeurs positives de x est toujours zéro. En THÉORIE DES JEUX, un jeu à somme nulle est un jeu dans lequel une victoire pour un ou plusieurs joueurs est toujours contrebalancée par des pertes pour les joueurs restants. Une matrice nulle est une MATRICE dont toutes les entrées sont nulles.

Machine Translated by Google

Le nombre 286 est la plus grande puissance de 2 connue dont le développement décimal ne contient aucun chiffre égal à zéro. (Remarquez que 210 = 1024, par exemple, a un deuxième chiffre égal à zéro.) Toutes les puissances de deux jusqu'à 2 46 000 000 ont été vérifiées.

Voir aussi MATHÉMATIQUES BABYLONIENNES ; PAIR ET IMPAIR NOMBRES; MATHÉMATIQUES GRECQUES ; MATHÉMATIQUES INDIENNES.

fonction zêta En 1740, le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707-1783) a étudié les séries infinies de la forme :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Le TEST INTÉGRAL montre que cette série converge si s est un nombre réel supérieur à 1. Euler a appelé cette fonction, définie pour des valeurs s > 1, la fonction zêta.

Cette fonction est intimement liée à la distribution des nombres PRIME . Pour voir cela, rappelez-vous que le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE affirme que chaque nombre est un produit d'un ensemble unique de nombres premiers. Ainsi, dans EXPANDING BRACKETS pour le produit infini suivant, en sélectionnant un terme de chaque ensemble de parenthèses, chaque entier apparaît une fois, et une seule fois, dans la somme infinie qui en résulte :

$$(1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots)(1 + 5^{-s} + 7^{-s} + \cdots)(1 + 11^{-s} + \cdots)$$
$$= 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 2^{-2s} + 5^{-s} + 2^{-s}3^{-s} + 7^{-s} + \cdots$$

Bien que cet argument ne soit pas mathématiquement précis, les mathématiciens ont montré qu'il est valide d'effectuer cette procédure sur les réciproques de tous les nombres impliqués, même lorsqu'ils sont élevés à qch puissance. Par conséquent:

$$\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5^s} + \cdots\right)\cdots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

La formule d'une SÉRIE GÉOMÉTRIQUE montre que cette équation peut être réécrite :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \times \cdots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

donnant ainsi une formule alternative pour la fonction zêta en tant que produit infini sur tous les nombres premiers p :

$$\zeta(s) = \prod_{\text{tous les nombres premiers } p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Euler a réussi à calculer la valeur de la fonction zêta pour certaines valeurs de s. Il a montré, par exemple, que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$, et $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$. (Il a continué cette liste jusqu'à ζ(26).)

Ci-dessous, nous montrons comment Euler a calculé ζ(2). À ce jour, on sait extrêmement peu de choses sur les valeurs de la fonction zêta sur les nombres entiers impairs.

En 1859, le mathématicien allemand GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) a montré que la fonction zêta est bien définie même si l'argument s vaut 1 un NOMBRE COMPLEXE. Il a montré la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge si la partie réelle de s est supérieure à 1, et il est possible d'étendre la définition de la fonction pour incorporer toutes les valeurs complexes de s. Pour cette raison, la fonction zêta est souvent aussi appelée fonction zêta de Riemann.

Riemann était particulièrement intéressé à localiser les zéros de la fonction zêta, c'est-à-dire à trouver les valeurs de s qui donnent ζ(s) = 0. Il a montré que la fonction n'a pas de zéros si Re(s) ≥ 1, que ses seuls zéros dans Re(s) ≤ 0 sont à s = –2, –4, –6,…, et qu'il a une infinité de zéros dans 0 < Re(s) < 1. Il les a appelés les « zéros non triviaux ». Riemann a fait remarquer qu'il est raisonnable de croire que tous les zéros non triviaux se trouvent sur la ligne Re (z) = 1/2, mais n'a offert aucune preuve. Ce commentaire désinvolte est devenu l'une des conjectures non résolues les plus célèbres de tous les temps. Les mathématiciens l'appellent l'hypothèse de Riemann, et prouver sa véracité ou sa fausseté aurait de profondes implications sur l'étude de la THÉORIE DES NOMBRE. (Par exemple, une partie cruciale de la démonstration du THÉORÈME DES NOMBREUX PREMIERS repose sur la démonstration que ζ(s) ≠ 0 pour Re(s) = 1.)

Machine Translated by Google

Calcul d'Euler de ζ(2)

Nous montrons ici comment Euler a établi la formule $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$. Bien que l'argument ne soit pas mathématiquement rigoureux, les mathématiciens ont prouvé plus tard que les questions soulevées dans cette approche pouvaient être mathématiquement fondées.

Considérons la fonction sinx avec son nombre infini de zéros aux emplacements 0, ± π, ± 2π, ± 3π,… La SÉRIE DE TAYLOR de la fonction sinus est :

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

que nous considérerons comme un polynôme de degré infini avec la même collection infinie de racines.

Le THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE affirme que tout polynôme se factorise en termes linéaires, un terme pour chaque racine de l'équation. En supposant que le théorème reste valable pour des polynômes infinis on doit alors avoir :

$$\text{péché } x = -\frac{x}{\pi}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\cdots$$

ou, en divisant par x :

$$\frac{\text{péché } x}{x} = -\frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\cdots$$

(Ici nous avons écrit le facteur correspondant à la racine x = π, par exemple, comme $1 - \frac{x}{\pi}$ plutôt que x – π. Ceci est fait pour s'assurer que, en développant les parenthèses pour le côté droit de la deuxième expression, le résultat donne un terme constant égal à 1, comme requis.) En combinant des paires de termes, nous avons :

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Envisagez maintenant de développer les crochets du côté droit de cette expression pour obtenir des termes qui donnent la x^2. Cela ne peut se produire qu'en sélectionnant un x^2 quantité x terme d'un ensemble de parenthèses et le terme 1 de toutes les parenthèses restantes. Cela donne:

$$-\frac{1}{\pi^2}x^2 - \frac{1}{4\pi^2}x^2 - \frac{1}{9\pi^2}x^2 - \cdots = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)\frac{1}{\pi^2}x^2$$

D'après le membre de gauche de cette expression, cette quantité doit être égale à $-\frac{1}{3!}x^2 = -\frac{1}{6}x^2$, conduisant ainsi à La formule d'Euler :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

En bonus, reprenez l'équation :

$$\frac{\text{péché } x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots$$

$$1 - \frac{1}{4\pi^2}x^2 + \frac{1}{25\pi^2}x^4 - \cdots$$

et mettre $x = \frac{\pi}{2}$. Cela donne:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots$$

qui fonde le PRODUIT WALLIS :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

Voir aussi THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRE; BERNOULLI NOMBRES; SÉRIE FOURIER ; SOMMES DES POUVOIRS.

Zhu Shijie Voir CHU SHIH-CHIEH.

Machine Translated by Google

z-score (z-value) Si un ensemble de DATA a une moyenne μ et écart type σ, puis le score z d'un
la valeur de données x est donnée par :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Cette transformation convertit les valeurs de données d'un défini dans un autre ensemble de valeurs avec une moyenne de 0 et un écart-type de 1. Il permet de comparer efficacement deux ensembles de données indépendants ou plus. Par exemple: un groupe de majors de musique de collège de première année reçoit examens d'interprétation, de théorie et de composition. Un étudiant, John, souhaite juger de la façon dont il s'en est sorti chacune des catégories. Le tableau suivant résume les résultats :

Catégorie	Écart-type moyen Score de John		
Performance	730	40	670
Théorie	380	35	450
Composition	640	25	660

Les scores z de John sont :

$$\text{Performance} : z = \frac{670 - 730}{40} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Théorie} : z = \frac{450 - 380}{35} = 2$$

$$\text{Composition} : z = \frac{660 - 640}{25} = \frac{4}{5}$$

Bien que John ait obtenu son score le plus élevé en performance, ce score est de 11/2 écart type en dessous du note moyenne dans cette catégorie. Malgré le faible nombre, John a obtenu le meilleur score en théorie, obtenant un score standard de 2 déviations au-dessus de ses camarades de classe.

Si l'on pense qu'un ensemble de données est distribué normalement avec la moyenne μ et l'écart type σ, la conversion en valeurs z permet de comparer les données avec la norme distribution normale. Par exemple, pour calculer la probabilité qu'une mesure prise au hasard tombe dans une plage de valeurs [a,b], on calcule l'aire sous la normale standard au-dessus de l'intervalle $[a, b]$ courbe $\frac{a-\mu}{\sigma}$ $\frac{b-\mu}{\sigma}$.

Cela peut être trouvé en regardant un tableau des cumuls valeurs de distribution (z) et calcul de la différence

$$\varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Voir aussi DISTRIBUTION NORMALE ; STATISTIQUES: DESCRIPTIF.

Zu Chongzhi (Tsu Chung Chi) (ca. 430–500) Calcul chinois , astronomie Né à Fan-yang (maintenant Hopeh), Chine, le savant Zu Chongzhi est connu pour son invention du calendrier Daming, son calcul très précis d'une valeur pour π, et son dérivation de la formule du volume d'une sphère en utilisant une méthode équivalente à celle découverte par l'italien mathématicien BONEVENTURA CAVALIERI (1598–1647) un plein millénaire plus tard.

Zu Chongzhi a développé un intérêt pour l'astronomie à un âge précoce. Jeune érudit, il remarqua une différence entre la position de l'ombre d'un cadran solaire et celle du calendrier en usage en Chine à l'époque, ce qui le motiva à travaillent depuis de nombreuses années sur un système de calendrier amélioré. Ce travail a été achevé en 462, mais ce n'est qu'à 510, grâce aux efforts de son fils, que le Daming calendrier a été officiellement adopté.

Tournant son attention vers les mathématiques, Zu Chongzhi a travaillé pour calculer une valeur précise pour le rapport d'une circonférence d'un cercle à son diamètre, π. Notant, pour commencer, que la circonférence d'un hexagone est trois fois son diamètre, et qu'en coupant son coins pour créer un dodécagone donne un rapport légèrement plus grand que 3, Zu Chongzhi a continué à raser les coins pour finalement produire un polygone à 192 côtés, ce qui, comme il l'a mesuré, a donné un rapport circonférence / diamètre de 355/113. Cela représente une valeur approximative de π avec une précision de six décimales. Tel la précision n'a pas été dépassée pendant encore 1 000 ans. Il est à noter que Zu Chongzhi a fait son impressionnant calculs sans l'aide d'un ABACUS (non utilisé dans Chine jusqu'aux années 1100) ou tout autre type de calcul appareil.

A travers les écrits des érudits ultérieurs, les historiens ont déterminé que Zu Chongzhi a écrit au moins 51 travaux. Malheureusement, aucun ne survit aujourd'hui. Zu Chongzhi est honoré aujourd'hui comme l'un des rares mathématiciens chinois à ont une caractéristique lunaire qui porte son nom - un cratère de 28 kilomètres de large situé à 20 ° au nord de l'équateur lunaire.

Machine Translated by Google

Machine Translated by Google

ANNEXE I

CHRONOLOGIE

Californie. 50 000 avant notre ère

Des ossements d'animaux gravés de marques de pointage prouvent que les peuples paléolithiques d'Europe centrale étaient capables compter.

Californie. 15 000 avant notre ère

Des os d'animaux encochés découverts au Moyen-Orient fournissent une preuve supplémentaire d'un comptage précoce.

Californie. 3000 avant notre ère

Les anciens Égyptiens améliorent le système de comptage et conçoivent un système de numération qui permet l'expression de grands nombres avec seulement quelques symboles.

Californie. 2600 avant notre ère

La Grande Pyramide de Gizeh est construite par les Égyptiens.

Californie. 1800 avant notre ère

Les érudits babyloniens développent un SYSTÈME de numération en base 60 PLACE-VALUE . Avec lui, ils effectuent des travaux arithmétiques complexes, résolvent des équations QUADRATIQUE et calculent des TRIPLES DE PYTHAGORE.

Californie. 1650 avant notre ère

Le scribe égyptien Ahmes fait une copie d'un ancien manuel de mathématiques sur un rouleau de papyrus. L'antiquaire britannique Alexander Henry Rhind (1833-1863) a acheté le rouleau sur un marché égyptien en 1858, et le rouleau est aujourd'hui connu sous le nom de RHIND PAPYRUS. Le texte détaille la méthode de calcul de l'aire d'un cercle et d'autres formes géométriques de base, la méthode de "fausse position" pour résoudre les équations linéaires de base, et une technologie nique pour trouver la pente d'une pyramide. La valeur 256/81 ≈ 3,1605 est utilisée pour π.

Californie. 600 avant notre ère

Les érudits indiens écrivent les Sulba sultras, un ensemble de textes d'enseignement religieux fournissant des méthodes géométriques détaillées pour la construction de retables. Les mathématiques décrites dans les textes comprennent des formules pour les aires des formes géométriques de base ainsi que pour les volumes des prismes et des cylindres.

Californie. 585 avant notre ère

Le mathématicien grec THALES DE MILETUS fonde la première école connue de philosophie et de mathématiques.
Thales développe sept propositions géométriques importantes, annonçant l'exigence de rigueur et de preuve de la pensée mathématique grecque.

Californie. 569 avant notre ère

Naissance de PYTHAGORE de Samos. Vers 510 avant notre ère, Pythagore fonde une société philosophique et mathématique secrète qui comprend à la fois des hommes et des femmes.
Les Pythagoriciens sont notés comme les premiers à fournir une preuve de ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de THÉO REM de PYTHAGORE et sont crédités de la découverte de l'IRRATIONNEL Nombres.

Californie. 450 avant notre ère

ZENO OF ELEA propose une série de paradoxes qui défient les notions d'espace, de temps et de mouvement.

Californie. 387 avant notre ère

Le philosophe grec PLATON (vers 428-348 av. J.-C.) fonde l'Académie à Athènes. Son insistance sur le fait que les mathématiques

Machine Translated by Google

faire partie intégrante d'une éducation formelle élève le statut des mathématiques dans le monde occidental.

Californie. 386 avant notre ère

L'oracle de Délos dit aux habitants d'Athènes que pour mettre fin à une peste, ils doivent doubler la taille de l'autel en forme de cube du dieu Apollon. Ceci pose le problème de DUPLIQUER LE CUBE.

Californie. 370 avant notre ère

EUDOXE DE CNIDE (vers 400-350 av. J.-C.) développe une « méthode d'épuisement » pour déterminer les aires de figures courbes simples. La méthode est un précurseur de la notion de LIMITE développée dans CALCULUS au XVIIIe siècle .

Californie. 350 avant notre ère

ARISTOTE (vers 384-322 avant notre ère) analyse la structure des ARGUMENTS et du raisonnement logique pour développer des idées fondamentales dans le domaine de la LOGIQUE FORMELLE.

Californie. 310 avant notre ère

Le souverain Ptolémée Soter fonde la Bibliothèque d'Alexandrie.
Il reste le centre de l'apprentissage intellectuel depuis plus de 700 ans.

Californie. 300 avant notre ère

Le géomètre grec EUCLIDE résume toutes les connaissances mathématiques connues à son époque dans LES ÉLÉMENTS. La méthode de déduction logique et de rigueur qu'il propose reste aujourd'hui le paradigme de la pensée mathématique.

Californie. 240 avant notre ère

ARCHIMÈDE DE SYRACUSE (vers 287-212 avant notre ère) utilise la méthode de l'épuisement pour calculer l'aire sous une section d'une PARABOLE. Il apporte également des contributions fondamentales aux domaines de la géométrie, de l'ingénierie, de l'astronomie et de l'hydrostatique. Il découvre une méthode de calcul de la valeur π avec une précision quelconque et montre, en particulier, que ses valeurs sont comprises entre 3 10/71 et 3 1/7.

Californie. 230 avant notre ère

ÉRATOSTHÈNE DE CYRÈNE (vers 275-195 av. J.-C.) calcule la circonférence de la TERRE à 28 500 milles. Il développe le TAMIS D' ERATOSTHENES pour le calcul des nombres PREMIERS .

Californie. 220 avant notre ère

APOLLONIUS DE PERGE (vers 262-190 av. J.-C.) développe l'étude des SECTIONS CONIQUES. Il développe également une théorie des ÉPICYCLES pour modéliser le mouvement planétaire.

Californie. 214 avant notre ère

La construction de la Grande Muraille de Chine commence.

Californie. 150 avant notre ère

Hipparque de Nicée (vers 190-126 avant notre ère) développe des idées de départ dans la théorie de la TRIGONOMÉTRIE. Il utilise la géométrie pour calculer les distances du Soleil et de la Lune à la Terre.

Californie. 100 avant notre ère

Les savants chinois écrivent JIUZHANG SUANSHU (Neuf chapitres sur les arts mathématiques). Le texte comprend des solutions aux équations linéaires et QUADRATIQUE , le calcul des aires et des volumes, un énoncé du THÉORÈME DE PYTHAGORE et l'utilisation de NÉGATIF.

NOMBRES.

Californie. 140

L'astronome grec CLAUDIUS PTOLEMY écrit l' Almagest, l'ouvrage le plus influent en astronomie mathématique jusqu'au XVIe siècle. Il comprend un tableau de valeurs d'accords équivalent à un tableau moderne de sinus.

Il utilise la valeur 377/120 pour π.

Californie. 250

Le mathématicien grec DIOPHANTE D' ALEXANDRIE écrit Arithmetica. Il est le premier à utiliser des symboles pour représenter des quantités inconnues.

Californie. 320

PAPPUS D' ALEXANDRIE tente de raviver l'intérêt pour la poursuite grecque classique des mathématiques. Il écrit Synagoge (Collections) comme guide des grandes œuvres grecques.

Californie. 370

HYPATIA (ca. 370–415), la première femme nommée dans l'histoire des mathématiques, est née. Elle devient directrice de l'école platonicienne d'Alexandrie.

Californie. 475

Naissance de l'astronome et mathématicien indien ARYABHATA (vers 476-550). Il développe des méthodes pour extraire des racines carrées, additionner des séries arithmétiques et calculer des valeurs d'accords. Il utilise la valeur 3,1416 pour π.

Californie. 480

Le savant chinois ZU CHONGZHI (430–500) utilise la valeur 355/113 pour π.

Machine Translated by Google

Californie. 600

Les érudits hindous inventent la REPRÉSENTATION DÉCIMALE, la méthode de numération que nous utilisons aujourd'hui pour représenter les nombres.

Californie. 640

Le mathématicien et astronome hindou BRAHMAGUPTA (vers 598–665) introduit les NOMBRES NÉGATIFS et le concept de ZÉRO en tant que nombre dans l'ARITHMÉTIQUE.

641

La bibliothèque d'Alexandrie est incendiée.

Californie. 775

Les érudits arabes commencent à traduire les grandes œuvres grecques et indiennes en arabe.

Californie. 830

MUHAMMAD IBN M– USS– A AL-KHW– ARIZM– ı (ca. 780–850) écrit deux textes influents fondateurs du domaine ALGE BRA. Al-Khw– arizm– ı promeut également l'utilisation du système hindou de base 10 de l' ARITHMETIQUE.

850

Le mathématicien indien Mahavira écrit le Ganita Sera Samgraha (Le compendium de l'arithmétique), le premier texte indien consacré uniquement au thème des mathématiques.

1079

Le savant persan OMAR KHAYYAM (vers 1048-1131) calcule la durée de l'année à 365,24219858156 jours, à la sixième décimale près.

1202

Le théoricien italien des nombres FIBONACCI (vers 1170-1250) écrit Liber abaci (Le livre de l'abaque), introduisant les CHIFFRES HINDOUS-ARABES en Europe occidentale.
Fibonacci découvre également la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

1360

La mathématicienne française NICOLE ORESME (vers 1323-1382) découvre que l'aire sous une courbe de vitesse correspond à la distance parcourue.

1482

La première édition imprimée du texte d'Euclide LES ÉLÉMENTS est produite à Venise, en Italie. Il devient le manuel le plus traduit et publié de tous les temps.

1498

Le savant allemand Johannes Widmann (1462-1498) écrit l'arithmétique mercantile dans laquelle les symboles "+" et apparaissent sous forme "-" imprimée pour la première fois.

1533

Le savant allemand REGIOMONTANUS (1436-1476) publie le premier traité moderne complet sur le thème de TRIGONOMÉTRIE.

Californie. 1541

Le mathématicien italien NICCOLÒ TARTAGLIA (vers 1499-1557) découvre une méthode générale pour résoudre les ÉQUATIONS CUBIQUES. Il raconte sa méthode, en confidence, à GIROLAMO CARDANO (1501-1576) et LUDOVICO FERRARI (1522-1565), qui en publient les détails sans son consentement. Ferrari découvre une méthode pour résoudre les ÉQUATIONS QUARTIQUES.

1557

Le mathématicien gallois ROBERT RECORDE (vers 1510-1558) introduit le symbole « = » pour l'égalité dans le premier texte d'algèbre au monde imprimé en anglais.

1585

Le mathématicien néerlandais SIMON STEVIN (1548-1620) introduit la notation décimale pour les fractions.

1591

Le mathématicien français FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603) écrit In artem analyticam isagoge (Introduction aux arts analytiques), établissant les principes de l'ALGÈBRE moderne et de la notation algébrique moderne.

1594

Le mathématicien écossais JOHN NAPIER (1550–1617) commence ses travaux sur les techniques arithmétiques qui ont finalement conduit à la découverte des LOGARITHMES. Il publie son ouvrage en 1614.

1609

L'astronome et mathématicien allemand JOHANNES KEPLER (1571-1630) observe que les planètes se déplacent sur des orbites elliptiques. Le scientifique italien GALILEO GALILEI (1564–1642) améliore l'invention du télescope et commence ses propres observations astronomiques.

1622

Le mathématicien britannique WILLIAM OUGHTRED (1574-1660) invente la règle à calcul. Il introduit le symbole « × » pour la multiplication et les abréviations « sin » et « cos » pour le sinus et le cosinus, respectivement.

Machine Translated by Google

1629

Le mathématicien français PIERRE DE FERMAT (1601-1665) utilise l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques mais ne publie pas ses résultats. Le mathématicien et philosophe français RENÉ DESCARTES (1596-1650) développa plus tard des techniques similaires et est aujourd'hui considéré comme le fondateur de cette approche.

1635

Le mathématicien italien BONAVENTURA CAVALIERI (1598–1647) introduit une méthode des indivisibles pour comparer les volumes (précurseur des méthodes de CALCUL INTÉGRAL) et le PRINCIPE DE CAVALIERI .

Californie. 1637

FERMAT présente la THÉORIE DES NOMBRES moderne. Il écrit un problème en marge d'un texte qui confond les mathématiciens depuis des siècles. LE DERNIER THÉORÈME DE FERMAT a finalement été résolu par ANDREW WILES en 1994.

1639

Le mathématicien français GIRARD DESARGUES (1591-1661) publie un traité sur sa GÉOMÉTRIE PROJECTIVE nouvellement découverte. Le travail est essentiellement ignoré pendant 200 ans.

1654

Le mathématicien BLAISE PASCAL (1623-1662) entame une correspondance avec FERMAT sur les questions de jeux de hasard. À travers cinq lettres consécutives, ils créent ensemble la théorie de la PROBABILITÉ.

1662

La ROYAL SOCIETY de Londres est créée. Le mathématicien britannique LORD WILLIAM BROUNCKER (1620-1684) est élu premier président.

1666

SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) développe le CALCUL DIFFÉRENTIEL et INTÉGRAL mais ne publie ses résultats qu'en 1711.

1673

Le mathématicien allemand GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) développe le CALCUL DIFFÉRENTIEL et INTÉGRAL indépendamment de NEWTON. Leibniz commence à publier ses résultats en 1684, et Newton l'accuse de plagiat. Une dispute amère entre les deux hommes s'ensuit, durant quatre décennies.

1687

Sous l'impulsion de l'astronome Edmund Halley, Newton publie Principia, aujourd'hui considéré comme l'un des plus grands travaux scientifiques de tous les temps. Newton décrit ses lois du mouvement et la LOI DU CARRÉ INVERSÉ pour la gravitation.

1693

Halley compile la première série de TABLES DE VIE et utilise les STATISTIQUES pour analyser les taux de natalité et de mortalité.

1696

Le savant français MARQUIS DE GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE L'HÔPITAL (1661–1704) publie le premier manuel sur CALCULUS.

1703

NEWTON est élu président de la ROYAL SOCIETY de Londres. Huit ans plus tard, après une enquête officielle, la société conclut que Newton, et non LEIBNIZ, est le véritable inventeur de CALCULUS. Il est révélé plus tard que Newton, en tant que président, a écrit la proclamation finale.

Le verdict n'est pas considéré comme valide aujourd'hui.

1718

Le mathématicien français ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) publie la Doctrine des Chances, le texte le plus avancé sur la théorie des PROBABILITÉS de son temps.

De Moivre développe plus tard le résultat aujourd'hui connu sous le nom de FORMULE DE STIRLING .

1736

Le mathématicien suisse LEONHARD EULER (1707–1783) résout le PROBLÈME DES SEPT PONTS DE KÖNIGSBERG, établissant ainsi les domaines de la TOPOLOGIE et de la THÉORIE DES GRAPHES. Tout au long de sa vie, Euler découvre également, parmi de nombreuses réalisations, le nombre e, sa célèbre formule reliant les fonctions trigonométriques à ce nombre, les valeurs spécifiques de la FONCTION ZETA, et, en géométrie, la LIGNE D'EULER. Euler introduit également la notion de FONCTION et popularise l'utilisation du symbole π pour le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

1742

CHRISTIAN GOLDBACH (1690–1764) écrit à EULER en posant le problème connu depuis sous le nom de CONJECTURE DE GOLDBACH .

1748

MARIA GAËTANA AGNESI (1718-1799) publie son étude en deux volumes sur les mathématiques élémentaires et avancées.

1750

Le mathématicien suisse GABRIEL CRAMER (1704–1752) publie la RÈGLE DE CRAMER .

Machine Translated by Google

1767

Le mathématicien allemand JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777) prouve que π est irrationnel.

1795

La France adopte le système métrique.

John Playfair (1748–1819) publie une forme équivalente du célèbre POSTULAT PARALLÈLE, aujourd'hui connu sous le nom d' AXIOME DE PLAYFAIR .

1797

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) prouve le THÉORÈME FUN DAMENTAL DE L'ALGÈBRE. Tout au long de sa vie, Gauss, parmi de nombreuses réalisations, dérive la MÉTHODE DES MOINS CARRÉS, classe les polygones réguliers CONSTRUCTIBLES et apporte des contributions fondamentales à la THÉORIE DES NOMBRE, à la GÉOMÉTRIE, aux STATISTIQUES, à la physique mathématique et à l'astronomie.

1799

L'arpenteur norvégien Casper Wessel (1745–1818) publie l'équivalent d'un DIAGRAMME D'ARGAND comme moyen de représenter les NOMBRES COMPLEXES. Le comptable et mathématicien français JEAN ROBERT ARGAND (1768-1822) développe la même méthode en 1806.

1812

Le mathématicien et inventeur britannique CHARLES BABBAGE (1791–1871) construit la première calculatrice mécanique. En 1823, Babbage obtient des fonds pour construire le « moteur de différence », le premier ordinateur numérique, mais le projet n'est jamais achevé.

Californie. 1820

L'algébriste norvégien NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) prouve qu'il ne peut y avoir de formule générale semblable à la célèbre formule quadratique qui résout toutes les équations polynomiales du cinquième degré. Peu de temps après, le mathématicien français ÉVARISTE GALOIS (1811–1832) commence à travailler pour classer les équations du cinquième degré et plus qui peuvent être ainsi résolues et fonde par conséquent le champ de GROUPE. THÉORIE.

1821

Le mathématicien français AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) développe la notion de LIMITE comme une tentative de placer CALCULUS sur une base mathématique solide. Cette idée est ensuite affinée par le savant allemand KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897).

1822

Le mathématicien français JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830) publie un traité sur la théorie de la chaleur et développe la notion de SÉRIE DE FOURIER.

1829

Le mathématicien russe NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) et le mathématicien hongrois JÁNOS BOLYAI (1802–60) découvrent indépendamment la GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE.

1843

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) découvre les QUATERNIONS. Deux ans plus tard, ARTHUR CAYLEY (1821-1895) découvre les octoniens.

1844

JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) découvre le premier exemple de NOMBRE TRANSCENDANTAL.

1854

Le savant britannique GEORGE BOOLE (1815-1864) établit le domaine de la logique symbolique avec son développement de l'ALGÈBRE BOOLÉENNE.

Le mathématicien allemand GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) propose une approche universelle de la géométrie. Il découvre la GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE. Il fait plus tard des avancées significatives dans la théorie des nombres et l'étude des nombres PRIME .

1858

AOÛT FERDINAND MÖBIUS (1790–1868) et Johann Benoît Listing découvrir en toute autonomie le MÖBIUS GROUPE.

mathématicien allemand JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831-1916) propose la notion de DEDEKIND CUT comme moyen de bien définir le REAL NOMBRES.

CAYLEY introduit la notion de MATRICE dans l'étude de l'algèbre.

1872

FELIX CHRISTIAN KLEIN (1849-1925) unifie les domaines de la géométrie avec son « programme Erlanger ». Il découvre également la BOUTEILLE KLEIN.

1873

WILLIAM SHANKS (1812-1882) calcule à la main les 607 premières décimales de π. Il est correct jusqu'à la 527e place.

Machine Translated by Google

1874

GEORG CANTOR (1845–1918) développe la THÉORIE DES ENSEMBLES et sa théorie de la CARDINALITÉ.

1882

FERDINAND VON LINDEMANN (1852-1939) prouve que π est transcendantal et donc que le défi de la QUADRATURE DU CERCLE est impossible.

1883

Françoise-Edouard-Anatole Lucas (1842-1891) invente le puzzle TOUR DE HANOI .

1896

JACQUES HADAMARD (1865-1963) et CHARLES DE LA VALLÉE-POUSSIN (1866-1962) prouvent indépendamment le THÉORÈME DES NOMBREUX PREMIERS conjecturé pour la première fois par GAUSS en 1792.

1899

Le mathématicien allemand DAVID HILBERT (1862–1943) fournit un traitement axiomatique complet d' EUCLIDEAN GÉOMÉTRIE.

1900

Au Congrès international des mathématiciens de Paris, HILBERT présente sa fameuse liste de 23 problèmes pour défier les érudits du XXe siècle.

1901

HENRI LÉON LEBESGUE (1875-1941) introduit une nouvelle approche révolutionnaire du CALCUL INTÉGRAL.

1903

Le mathématicien suédois Nils Fabian Helge von Koch (1870–1924) présente la COURBE DE KOCH, le premier exemple d'objet qui sera plus tard classé comme FRACTALE.

1904

JULES-HENRI POINCARÉ (1854-1912) conjecture que tout objet tridimensionnel partageant les mêmes caractéristiques topologiques qu'une SPHÈRE doit bien être une sphère.

1905

ALBERT EINSTEIN (1879–1955) écrit cinq articles révolutionnaires dans le domaine de la physique mathématique.
Les deux derniers articles développent sa célèbre théorie spéciale de la relativité. Einstein publie sa théorie générale de la relativité en 1916.

1910

BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872–1970) et Alfred North Whitehead (1861–1947) commencent le pub lication de leurs Principia Mathematica en trois volumes , une tentative ambitieuse de dériver toutes les mathématiques par des principes logiques à partir d'un petit ensemble de principes de base. AXIOM.

1913

Le mathématicien indien SRINIVASA AIYANGAR RAMANU JAN (1887–1920) entame une collaboration de cinq ans avec le mathématicien britannique GODFREY HAROLD HARDY (1877–1947).

1921

La mathématicienne allemande AMALIE NOETHER (1882-1935) publie sa théorie des ANNEAUX, orientant la recherche en algèbre loin de l'étude du calcul vers l'étude des structures abstraites.

1925

SIR RONALD AYLMER FISHER (1890–1962) publie Statistical Methods for Research Workers, un ouvrage influent qui fournit la base de la conception expérimentale moderne.

1928

James Alexander (1888–1971) développe le polynôme d'Alexander, le premier invariant de la THÉORIE DES NŒUDS. Par la suite, John Conway a défini le polynôme de Conway en 1968, et Vaughn Jones le polynôme de Jones en 1985.

1931

KURT GÖDEL (1906-1978) étourdit la communauté mathématique en établissant une paire d'"incomplets les orèmes". Gödel prouve que dans tout système logiquement rigoureux, il y aura nécessairement des déclarations qui ne peuvent être ni prouvées ni réfutées. Le but poursuivi par RUSSELL et Whitehead s'avère inatteignable.

1938

CLAUDE ELWOOD SHANNON (1916–2001) établit que l'ALGÈBRE BOOLÉENNE peut être appliquée avec succès à la conception informatique. Il fonde le domaine de la THÉORIE DE L'INFORMATION en 1949.

1944

Le mathématicien hongrois-américain JOHN VON NEU MANN (1903–57) et l'économiste américain Oskar Mor genstern (1902–77) ont fondé la THÉORIE DES JEUX.

1963

Edward Lorenz développe la théorie du CHAOS .

Machine Translated by Google

1976

En utilisant 1 200 heures de temps d'ordinateur, Kenneth Appel et Wolfgang Haken prouvent le QUATRE COULEURS THÉORÈME.

1978

Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman développent le système de chiffrement à clé publique RSA.

1979

Benoit Mandelbrot découvre le COFFRET MANDELBROT. Il fonde plus tard le domaine de la géométrie FRACTALE .

Sous l'instigation du pape Jean-Paul II, l'Église catholique romaine ouvre ses dossiers sur les procès galiléens.
L'Église annule sa condamnation du 17ème siècle de l'érudit en 1992.

1994

ANDREW WILES, avec l'aide de Richard Taylor, démontre le DERNIER THÉORÈME DE FERMAT .

1998

Thomas Hales utilise des méthodes informatiques pour établir la conjecture de JOHANNES KEPLER de 1611 selon laquelle l'empilement serré cubique et l'empilement serré hexagonal de sphères sont les empilements de sphères les plus denses. Les mathématiciens sont incapables de vérifier la preuve sans l'aide d'un ordinateur.

1999

Hales prouve la «conjecture en nid d'abeilles», qui stipule que toute partition du plan en régions de surface égale a un périmètre égal à la conception d'un nid d'abeilles.

Yasumasa Kanada de l'Université de Tokyo calcule π à 206 158 430 000 décimales.

2000

Michael Hutchings, Frank Morgan, Manuel Ritoré et Antonio Ros prouvent la remarquable conjecture de la « double bulle » dans la théorie des BULLES DE SAVON. Ils établissent que la conception de surface minimale qui enferme deux volumes fixes est bien la configuration « à double bulle » que l'on observe dans la nature.

2003

Tomás Oliveira e Silva vérifie que la CONJECTION DE GOLDBACH est vraie pour tous les nombres pairs entre quatre et 6 × 1016 .

Michael Shafer découvre que le nombre à 6 320 430 chiffres 220 996 011 – 1 est PRIME. Il s'agit du plus gros prime et du 40ème MERSENNE PRIME connu à ce jour.

2004

Martin Dunwoody annonce à la communauté mathématique qu'il a peut-être prouvé la conjecture de Poincaré. Les mathématiciens attendent les détails de sa preuve.

Machine Translated by Google

ANNEXE II

BIBLIOGRAPHIE ET RESSOURCES WEB

Imprimer

Abbot, EA Flatland: Une romance aux multiples dimensions. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1991.

Abbott, JC, éd. Les papiers Chauvenet: une collection d'articles explicatifs primés en mathématiques . Washington, DC : Mathematical Association of America, 1978.

Ahlfors, Lars V. Analyse complexe. 3e éd. New York: McGraw-Hill, 1979.

Aigner, Martin, et Günter M. Ziegler. Preuves de la Livre. New York : Springer-Verlag, 1999.

Almgren, FJ, Jr. et JE Taylor. "Géométrie des films de savon." Scientific American 235, non. 1 (1976): 82–93.

Anderson, I. Un premier cours de mathématiques combinatoires. Oxford, Royaume-Uni : Clarendon Press, 1974.

Angel, Allen R. et Stuart R. Porter. Une enquête sur les mathématiques avec applications . 6e éd. Boston : Addison-Wesley, 2001.

Anne, C. "Les fractions égyptiennes et le problème de l'héritage." Le College Mathematics Journal 29, no. 4 (1998): 296–300.

Anton, Howard, Irl Bivens et al. Calculus : Brève édition. 7ème éd. New York : John Wiley & Fils, 2002.

Apostol, Tom M., et Hubert E. Chrestenson et al., eds. Un siècle de calcul, partie 1, 1894–1968, et Un siècle de calcul, partie 2, 1969–1991. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 1992.

Appel, Kenneth et Wolfgang Haken. "La solution du problème de la carte en quatre couleurs." Scientific American 237, non. 4 (1977) 108–121.

Arnold, BH Concepts intuitifs en topologie élémentaire. Englewood, NJ : Prentice-Hall, 1962.

Ash, J. Marshall et Solomon W. Golomb. "Carrelage de rectangles déficients avec des trominos." Mathématiques Magazine 77, no. 1 (2004): 46–55.

Atiyah, MF et IG MacDonald. Introduction à l'algèbre commutative. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1969.

Averbach, Bonnie et Orin Chein. Résolution de problèmes par les mathématiques récréatives. New York : Douvres, 1980.

Ball, WW Rouse et HSM Coxeter. Récréations et essais mathématiques. 12e éd. Toronto : Presses de l'Université de Toronto, 1974.

Barnsley, MF Fractales Partout. San Diego : Presse académique, 1988.

Barr, Stephen. Expériences en topologie. New York : Douvres, 1964.

Beckman, Petr. Une histoire de π. 3e éd. New York: St. Martin's Press, 1971.

Belcastro, Sarah-Marie et Thomas C. Hull. "Classification des motifs de frise sans utiliser de groupes." Le College Mathematics Journal 33, no. 2 (2002): 93–98.

Benjamin, Arthur T. et Jennifer J. Quinn. Des preuves qui comptent vraiment. Washington, DC : Mathematical Association of America, 2003.

Berlinghoff, William P., et Fernando Q. Gouvêa. Mathématiques à travers les âges : une histoire douce pour les enseignants et les autres. Farmington, Maine : Éditeurs d'Oxton House, 2002.

Binmore, K. Fun and Games : Un texte sur la théorie des jeux. Lexington, Massachusetts : Heath, 1992.

Blitzer, Robert. Penser Mathématiquement. 2e éd. Upper Saddle River, NJ : Prentice-Hall, 2003.

Bondi, C., éd. Nouvelles applications des mathématiques. Londres: Penguin Books, 1991.

Machine Translated by Google

Borowski, EJ et JM Borwein. Le dictionnaire de mathématiques Harper Collins. New York : Harper Collins, 1991.

Brams, SJ et AD Taylor. Division des foires : de la coupe du gâteau à la résolution des litiges. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press, 1996.

Bruno, Leonard C. Math et mathématiciens : l'histoire des découvertes mathématiques dans le monde. Vol. 1, AH et Vol. 2, I–Z. Farmington Hills, Michigan : Groupe Gale, 1999.

Bunch, Bryan. Erreurs et paradoxes mathématiques. Nouveau York : Douvres, 1982.

Cajori, Florian. Une histoire des notations mathématiques . Nouveau York : Douvres, 1993.

do Carmo, Manfredo P. Géométrie différentielle des courbes et des surfaces. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, 1976.

Chang, Gengzhe et Thomas W. Sederberg. Encore et encore. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 1997.

Chartrand, Gary. Introduction à la théorie des graphes. New York : Douvres, 1977.

Clapham, Christophe. Le dictionnaire concis d'Oxford des mathématiques. 2e éd. Oxford, Royaume-Uni : Oxford University Press, 1996.

Cohen, I. Bernard et George E. Smith, éds. Le compagnon de Cambridge à Newton. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press, 2002.

Conway, John H. La forme sensuelle (quadratique). Assisté de Francis YC Fung. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 1997.

Conway, John H., et Richard Guy. Le livre des nombres. New York : Springer-Verlag, 1996.

Courant, Richard et Herbert Robbins. Qu'est-ce que les Mathématiques ? 2e éd. Révisé par Ian Stewart. Oxford, Royaume-Uni : Oxford University Press, 1996.

Cristal, David, éd. L'Encyclopédie de Cambridge. Pont Cam, Royaume-Uni: Cambridge University Press, 1990.

Davenport, H. L'Arithmétique Supérieure : Une Introduction à la Théorie des Nombres. New York : Douvres, 1983.

Davis, Philip J., et Reuben Hersh. L'expérience mathématique. Harmondsworth, Royaume-Uni : Penguin Books, 1981.

Denes, J. Carrés latins et leurs applications. New York : presse académique, 1974.

Devaney, Robert L. Un premier cours sur les systèmes dynamiques chaotiques, la théorie et l'expérience. Reading, Massachusetts : Addison Wesley, 1992.

———. Chaos, fractales et dynamiques : expériences informatiques en mathématiques. Menlo Park, Californie : Addison-Wesley, 1990.

Devaney, Robert L. et L. Keene, éd. Chaos et fractales : les mathématiques derrière l'infographie. Providence, RI : American Mathematical Society, 1989.

Devlin, Keith. La joie des ensembles. 2e éd. New York : Springer Verlag, 1993.

Doyle, Peter G., et J. Laurie Snell. Marches aléatoires et réseaux électriques. Washington, DC : Mathematical Association of America, 1984.

Dunham, Guillaume. Voyagez à travers Genius. New York : Jean Wiley & Fils, 1990.

———. L'univers mathématique: un voyage alphabétique à travers de grandes preuves, problèmes et personnalités . New York : John Wiley & Fils, 1994.

Eves, Howard W. Cercles mathématiques. Vol. 1. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 2003.

Farris, FA et NK Rossing. "Frises de corde tissée." Mathématiques Magazine 72, no. 1 (1999): 32–38.

Firby, PA, et CF Gardiner. Topologie de surface. 2e éd. New York : Ellis Horwood, 1991.

Fisher, Stephen D. Variables complexes. 2e éd. New York : Douvres, 1990.

Fomin, Dmitri et Sergey Genkin et al. Cercles mathématiques (expérience russe). Providence, RI : Société mathématique américaine, 1996.

Freund, John E., et Gary A. Simon. Statistiques : un premier cours. 5e éd. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1991.

Garner, Martin. Codes, chiffres et écriture secrète. Nouveau York : Douvres, 1972.

———. Musique fractale, Hypercards, et plus encore. New-York : W. H. Freeman et Co. 1992.

———. Mathématiques, Magie et Mystère. New York : Douvres, 1956.

———. Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers… et le retour du Dr Matrix. New York : WH Freeman, 1989.

Garfunkel, Salomon. À toutes fins pratiques. 5e éd. New York : WH Freeman, 2000.

Gibson, Carol, éd. Les faits sur fichier Dictionnaire de Mathe matiques. New York: faits enregistrés, 1985.

Gillespie, Charles Coulston, éd. Dictionnaire de bibliographie scientifique. New York : Les fils de Charles Scribner, 1972.

Giordano, Frank R. et Maurice D. Weir et al. Un premier cours de modélisation mathématique. 2e éd. Pacific Grove, Californie : Brooks/ Cole, 1997.

Goldman, Jay R. La reine des mathématiques : un guide historiquement motivé de la théorie des nombres. Wellesley, Massachusetts : A. K. Peters, 1998.

Golomb, Solomon W. Polyominos : énigmes, modèles, problèmes et emballages. 2e éd. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1994.

Gorini, Catherine A. Le manuel des faits sur la géométrie des fichiers. New York : faits enregistrés, 2003.

Graham, Ronald et Donald Knuth et al. Mathématiques concrètes. 2e éd. Boston : Addison-Wesley, 1994.

Grinstead, CM et LJ Snell. Introduction aux probabilités. 2e éd. Providence, RI : Société mathématique américaine, 1997.

Machine Translated by Google

Gullberg, Jan. Mathématiques de la naissance des nombres. Nouveau York : WW Norton & Co. 1997.

Guy, Richard et Robert E. Woodrow, éd. Le côté plus léger des mathématiques. Washington, DC : Mathematical Association of America, 1994.

Hadlock, Charles Robert. Théorie des champs et ses problèmes classiques. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 2000.

Hall, Nina, éd. Exploring Chaos: A Guide to the New Science of Disorder. New York : WW Norton & Co. 1991.

Hardy, GH et EM Wright. Introduction à la théorie des nombres. 5e éd. Oxford, Royaume-Uni : Oxford University Press, 1979.

Hass, J. "Conjecture générale à double bulle dans R3 résolue." Concentrez-vous, non. 5 (2000): 4–5.

Herstein, IN Sujets d'algèbre. 2e éd. New York : Jean Wiley & Fils, 1975.

Hildebrandt, S., et A. Tromba. Mathématiques et forme optimale. New York: Livres américains scientifiques, 1985.

Colline, Victor E., IV. "Le président Garfield et le théorème de Pythagore." Math Horizons, (février 2002): 7–9.

Hoffmann, Paul. L'homme qui n'aimait que les chiffres. New York : Hyperion, 1998.

Honsberger, Ross. Ingéniosité en mathématiques. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 1970.

———. Diamants mathématiques. Washington, DC : Mathematical Association of America, 2003.

———. Gemmes mathématiques. Washington, DC : Mathemati cal Association of America, 1973.

———. Plus de Morceaux Mathématiques. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 1991.

Honsberger, Ross, éd. Prunes mathématiques. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique.

Hull, Thomas. "Une note sur le pliage de papier" impossible "." Amer ican Mathematical Monthly 103, no. 3 (1996): 242–243.

Jacobs, Konrad. Invitation aux mathématiques. Princeton, New Jersey : Presse de l'Université de Princeton, 1992.

James, Ian. Mathématiciens remarquables : d'Euler à von Neumann. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press, 2002.

Kac, Mark et Stanislaw M. Ulam. Mathématiques et Logique. New York : Douvres, 1968.

Kaplan, Robert et Ellen Kaplan. L'art de l'infini : les plaisirs des mathématiques. Oxford, Royaume-Uni : Oxford University Press, 2003.

Kay, David C. College Geometry : Une approche de découverte. 2e éd. Boston : Addison-Wesley, 2001.

Kim, Scott. "Hyperspace: haut, dehors et loin." Découvrez 23, non. 10 (octobre 2002), 82.

Kolmogorov, AN et SV Fomine. Introduction à l'analyse réelle. Traduit et édité par Richard A. Silverman. New York : Douvres, 1970.

Konhauser, Joseph DE et Dan Velleman et al. Dans quel sens le vélo est-il allé ? … Et d'autres mystères mathématiques intrigants. Washington, DC : Mathematical Association of America, 1996.

Maor, Éli. Le manuel de calcul des faits sur le fichier. New York: Faits au dossier, 2003.

———. Vers l'infini et au-delà : une histoire culturelle de l'infini. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1987.

Massey, William S. Un cours de base en topologie algébrique. New York : Springer-Verlag, 1991.

McDaniel, Michel. "Noeuds à vous." Math Horizons, (novembre 2003): 9–12.

Meisters, GH "Le rythme de l'algorithme du jour de la semaine de Lewis Carroll." Math Horizons, (novembre 2002): 24–25, 34.

Mesterton-Gibbons, Michael. Une approche concrète de la modélisation mathématique. New York : John Wiley & Fils, 1995.

Morgan, Franck. "Double bulle plus de problème." Mathématiques Horizons, (novembre 2000) : 2, 30–31.

Mnatsakanian, M. "Anneaux annulaires de surfaces égales." Math Horizons, (novembre 1997): 5–8.

Neilson, William Allan, éd. Dictionnaire biographique de Webster. Springfield, Massachusetts : G. & C. Merriam Company, 1976.

Nelson, David, éd. Le Dictionnaire Penguin de Mathématiques. 2e éd. Londres: Penguin Books, 1998.

Nelson, Roger B. "Peintures, carrelages et épreuves." Math Horizons, (novembre 2003): 5–8.

Newman, James R. Le monde des mathématiques: une petite bibliothèque de la littérature mathématique d'A'h-mosé le Scribe à Albert Einstein. Redmond, Washington : Tempus Books, 1956.

Olivastro, Dominique. Puzzles anciens : casse-tête classiques et autres jeux mathématiques intemporels des 10 derniers siècles. New York: Bantum Books, 1993.

Minerai, Oystein. Théorie des nombres et son histoire. New York : Douvres, 1976.

Pasles, Paul C. "Quelques carrés magiques de distinction." Mathématiques Horizons, (février 2004): 10–12.

Paulos, John Allen. Au-delà de la numératie. New York : Knopf, 1991.

———. L'innumératie : l'analphabétisme mathématique et ses conséquences séquences. New York : Colline et Wang, 1988.

Peterson, I. Le touriste mathématique : instantanés des mathématiques modernes. New York : WH Freeman, 1988.

———. Islands of Truth: Une croisière mystère mathématique . New York : WH Freeman, 1990.

———. "Travail et ennuis sur les doubles bulles." Science Nouvelles 148 (1995): 101.

Philips, Antoine. "Transformer une surface à l'envers." Scientifique Américain 214 (1964): 112–120.

Porkess, Roger. Le dictionnaire de statistiques HarperCollins. New York : HarperCollins, 1991.

Machine Translated by Google

Pouvoirs, David L. Problèmes de valeur aux limites. 3e éd. Fort Worth, Texas : Harcourt Brace College Publishers, 1987.

Rademacher, Hans et Otto Toeplitz. Le plaisir des maths. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1957.

Rucker, R. La quatrième dimension : vers une géométrie de réalité supérieure. Boston : Houghton Mifflin, 1984.

Roudin, Walter. Analyse réelle et complexe. 3e éd. New York : McGraw Hill, 1987.

Saari, DG, et F. Valognes. "Géométrie, vote et para doxes." Mathématiques Magazine 71, no. 4 (1998): 243–259.

Saaty, TL et PC Kainen. Le problème des quatre couleurs : assauts et conquêtes. New York : Douvres, 1986.

Sharpes, Donald K. Fondements éducatifs avancés pour les enseignants. New York : RoutledgeFalmer, 2002.

Shashkin, Yu A. Points fixes. Providence, RI : Société mathématique américaine, 1991.

Shifrin, Théodore. Algèbre abstraite : une approche géométrique. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1996.

Simmons, George F. Calcul avec géométrie analytique. 2e éd. New York : McGraw Hill, 1996.

Singh, Simon. L'énigme de Fermat. New York : Maison aléatoire, 1997.

Smart, James R. Géométries modernes. 5e éd. Pacific Grove, Californie : Brooks/Cole, 1998.

Sondheimer, Ernst et Alan Rogerson. Nombres et infinité : un compte rendu historique des concepts mathématiques. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press, 1981.

Stein, Sherman K., et Anthony Barcellos. Calcul et géométrie analytique. 5e éd. New York : McGraw Hill, 1992.

Stewart, Ian. Concepts de mathématiques modernes. New York : Douvres, 1995.

Stewart, James. Calcul à une seule variable. 3ème. Pacifique Grove, Californie : Brooks/Cole, 1995.

Strafflin, P. Théorie des jeux et stratégie. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 1993.

Tanton, James. "Une douzaine de questions sur un beignet." Mathématiques Horizons, (novembre 1998): 26–31.

———. "Une douzaine de questions sur le problème isopérimétrique." Math Horizons, (février 2003): 23–26.

———. "Une douzaine de questions sur les puissances de deux." Math Horizons , (septembre 2001): 5–10.

———. "Une douzaine de questions sur les carrés et les cubes." Math Horizons, (septembre 2000): 29–34.

———. "Une douzaine de raisons pour lesquelles 1 = 2." Math Horizons, (février 1999): 21–25.

———. Résolvez ceci : activités mathématiques pour les étudiants et les clubs. Washington, DC : Association mathématique d'Amérique, 2001.

———. "Les jeunes étudiants abordent les triangles entiers." Se concentrer 22, non. 5 (2002): 4–6.

Todd, Déborah. Le manuel d'algèbre des faits sur le dossier . New York : faits enregistrés, 2003.

Vakil, Ravi. Une mosaïque mathématique : régularités et résolution de problèmes. Burlington, Ont. : Brendan Kelly Publishing, 1996.

Chariot, Stan. Le paradoxe de Banach-Tarski. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press, 1985.

Weeks, JR La forme de l'espace. New York : Marcel Decker, 1985.

West, Beverly Henderson et Ellen Norma Griesbach et al. L'Encyclopédie de Mathématiques Prentice-Hall. Engle Wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1982.

Sites Internet

Bogomolny, Alexandre. « Coupez le nœud ! » Disponible en ligne. URL : http://www.cut-the-knot.org. Consulté le 15 juin 2004. Une ressource complète d'énigmes et de jeux mathématiques interactifs.

Calwell, Chris. "Le plus grand nombre premier connu par année : une brève histoire." Disponible en ligne. URL : http://www.utm.edu/research/primes/notes/by_year.html. Consulté le 1er mai 2004. Chris Caldwell donne un historique détaillé de la recherche de grands nombres premiers et tient les lecteurs au courant des découvertes en cours.

Département d'économie de la New School for Social Research. "Le site Web de l'histoire de la pensée économique." Disponible en ligne. URL : http://cepa.newschool.edu/het/home. htm. Consulté le 20 avril 2004. Ce site propose un examen complet de l'évolution de la pensée et des pratiques économiques.

Université Drexel. "Forum Mathématiques". Disponible en ligne. URL : http://mathforum.org. Consulté le 20 avril 2004. Ce site convivial offre un service interactif de questions-réponses pour les étudiants et les enseignants en mathématiques, ainsi qu'une foule de ressources mathématiques, d'essais et de discussions classés par sujet.

Frazier, Kendrick. "Un esprit en jeu : une entrevue avec Martin Gardner." Comité pour l'investigation scientifique des revendications du paranormal. Disponible en ligne. URL : www.csicop.org/si/9803/gardner.html. Consulté en mars 1998. Une entrevue approfondie avec le mathématicien récréatif Martin Gardner.

Grissinger, Arthur. "Stratégie de résolution de problèmes de Polya." Disponible en ligne. URL : www.lhup.edu/agrissin/polya.htm. Consulté le 23 avril 2004. Ce site présente un bref résumé des stratégies de résolution de problèmes proposées par George Polya.

Joyce, David. "Mathématiques en Chine." Disponible en ligne. URL : http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/china.html. Consulté le 17 septembre 1995. David Joyce donne un aperçu détaillé du développement des mathématiques en Chine.

Machine Translated by Google

Kadon Enterprises, Inc. "Inventeur du jeu : Martin Gardner". Disponible en ligne. URL :http://www.gamepuzzles.com/martin.htm. Consulté le 20 avril 2004. Ce site présente un court article sur la vie et l'œuvre de Martin Gardner.

Kimberling, Clark. « Études biographiques ». Disponible en ligne. URL : http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud. Consulté le 20 avril 2004. Clark Kimberling fournit un certain nombre d'essais biographiques approfondis sur des mathématiciens célèbres.

Loy, Jim. "Trisection d'un angle." Disponible en ligne. URL : http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm. Consulté le 23 avril 2004. Ce site présente, avec des explications détaillées, les diverses techniques qui ont été proposées au cours des siècles pour trisecter des angles arbitraires.

Académie des mathématiques en ligne. "Encyclopédie mathématique interactive des royaumes platoniciens." Disponible en ligne. URL : http://www. mathacademy.com. Consulté le 23 avril 2004. Ce site propose des citations mathématiques, de brèves notes historiques et des discussions sur des concepts mathématiques.

Miller, Jeff. "Les premières utilisations connues de certains des mots des mathématiques." Disponible en ligne. URL : http://membres. aol.com/jeff570/mathword.html. Consulté le 23 avril 2004. Ce vaste site tente de repérer la première utilisation des termes mathématiques actuels.

———. "Les premières utilisations connues de divers symboles mathématiques." Disponible en ligne. URL : http://members.aol.com/jeff570/mathsym.html. Consulté le 23 avril 2004. Ce site tente d'identifier la première utilisation d'un symbole mathématique donné et de fournir la date et le nom du document dans lequel il est apparu pour la première fois.

O'Connor, John et Edmund Robertson eds. "Archives d'histoire des mathématiques MacTutor." Disponible en ligne. URL : http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history. Consulté le 20 avril 2004. Ce site pro primé vids la collection la plus complète d'essais historiques et biographiques actuellement disponible.

Sandifer, C. Edward. "Page d'accueil d'Ed Sandifier." Disponible en ligne. URL : http://vax.wcsu.edu/~sandifer/homepage.html. Consulté le 16 janvier 2004. Ed Sandifer est un expert de la vie et de l'œuvre de Leonhard Euler et fournit une mine d'informations inestimables sur ce célèbre érudit sur ce site Web.

Verrill, H. "Origami Trisection d'un angle." Disponible en ligne. URL : http://hverrill.net/origami/. Consulté le 24 juin 2002. Ce site donne un aperçu accessible de l'utilisation des mathématiques en origami.

Pays de Galles, Jimmy et Larry Sanger, fndrs. "Wikipédia: L'Encyclopédie Libre: Mathématiques." Disponible en ligne. URL : http://en.wikipedia.org/wiki/Mathématiques. Consulté le 15 juin 2004. Ce site sert de ressource conviviale sur des sujets mathématiques.

Weisstein, Éric. "Le monde de la biographie scientifique d'Eric Weisstein." Disponible en ligne. URL : http://scienceworld.wolfram.com/biography. Consulté le 20 avril 2004. Ce site fournit des informations biographiques sur une longue liste de mathématiciens célèbres.

———. "Mathmonde". Disponible en ligne. URL : http://monde mathématique.wolfram.com. Consulté le 22 avril 2004. Peut-être la ressource mathématique la plus complète actuellement disponible sur le Web, cette encyclopédie en ligne fournit des informations détaillées sur presque tous les aspects de la recherche mathématique actuelle.

Wilkins, David R. "L'histoire des mathématiques." Disponible en ligne. URL : http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath. Consulté le 23 avril 2004. Ce site fournit un répertoire de sites Web du monde entier qui se rapportent à l'histoire des mathématiques, ainsi que des biographies de certains mathématiciens des XVIIe et XVIIIe siècles.

Machine Translated by Google

ANNEXE III

LES ASSOCIATIONS

Les organisations suivantes fournissent des informations sur les mathématiques, la recherche en mathématiques et l'enseignement des mathématiques susceptibles d'intéresser les étudiants et les enseignants.

American Mathematical Society, 201 Charles Street, Providence, RI 02904-2294. Téléphone : (800) 321 4267. Site Web : www.ams.org.

Association pour les femmes en mathématiques, 4114 Computer and Space Sciences Building, College Park, Md. 20742-2461. Téléphone : (301) 405 7892. Site Web : www.awm-math.org.

Société mathématique du Canada, 577 King Edward, Suite 109, Ottawa, Ont., Canada K1N 6N5. Téléphone : (613) 562 5702. Site Web : www.cms.math.ca.

Clay Mathematics Institute, One Bow Street, Cambridge, Mass. 02138. Téléphone : (617) 995 2600. Site Web : www.claymath.org.

Société mathématique européenne, Département de mathématiques, PO Box 4 (Yliopistonkatu 5), 00014 Université d'Helsinki, Finlande. Téléphone : 3589 1912 2883. Site Internet : www.emis.de.

Institut de mathématiques et de ses applications, 400 Lind Hall, 207 Church Street, SE, Minneapolis, Minn. 55455-0436. Téléphone : (612) 624 6066. Site Internet : www.ima.umn.edu.

Institute of Mathematical Statistics, PO Box 22718, Beach wood, Ohio 44122. Téléphone : (216) 295 2340. Site Web : www.imstat.org.

International Mathematical Union, Institute of Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, NJ 08540. Téléphone : (609) 683 7605. Site Web : www.mathunion.org.

Société internationale des arts, des mathématiques et de l'architecture, Département de mathématiques, Université d'Albany, 1400 Washington Avenue, Albany, NY 12222. Téléphone : (518) 442 3300. Site Web : www.isama.org.

Institut international de statistique, PO Box 950, 2270 AZ Voorburg, Pays-Bas. Téléphone : 31 70 3375737. Site Web : www.cbs.nl/isi.

Société mathématique de Londres, De Morgan House, 57–58 Russell Square, Londres WC1B 4HS. Téléphone : 020 7637 3686. Site Internet : www.lms.ac.uk.

Math Circle, PO Box 313, Jamaica Plane, Mass. 02130. Téléphone : (617) 519 6397. Site Web : www.themathcir cle.org.

Association mathématique d'Amérique, 1529 Eighteenth Street NW, Washington, DC 20036-1385. Téléphone : (800) 741 9415. Site Web : www.maa.org.

Institut de recherche en sciences mathématiques, 17 Gauss Way, Berkeley, Californie 94720-5070. Téléphone : (510) 642 0143. Site Web : www.msri.org.

Mathematics Foundation of America, 129 Hancock Street, Cambridge, Mass. 02139. Téléphone : (510) 525 7931. Site Web : www.mfoa.org.

Math Forum, 3210 Cherry Street, Philadelphie, Pennsylvanie. 19104. Téléphone : (800) 756 7823. Site Web : www.mathforum.org.

Conseil national des professeurs de mathématiques, 1906 Association Drive, Reston, Va. 20191-1502. Téléphone : (703) 620 9840. Site Internet : www.nctm.org.

Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center, Philadelphie, Pennsylvanie. 19104-2688. Téléphone : (215) 382 9800. Site Internet : www.siam.org.

St. Mark's Institute of Mathematics, 25 Marlborough Road, Southborough, Mass. 01772. Téléphone : (508) 786 6126. Site Web : www.stmarksschool.org.

Machine Translated by Google

INDICE

Les numéros de page en gras indiquent les entrées principales. Les numéros de page en italique indiquent des illustrations ou des schémas.

UN

AAA (angle-angle-angle) règle 1, 463
AAS (angle-angle-côté) règle 1
boulier 2, 2–3, 56, 74, 260
Abel, Niels Henrik 3, 10, 84, 215, 241, 405, 431–432 et solutions aux équations polynomiales 471
Groupes abéliens 3, 5, 83, 241
Prix Abel 3
abscisse 62
convergence absolue 3–4, 248, 337 test pour 3–4, 104
erreur absolue 167
fréquence absolue 206
maximum/minimum absolu 330, 331 valeur
absolue (module) 4–5, 131, 133, 142, 310, 328–329 du nombre complexe 25, 86
algèbre abstraite 5, 10, 314, 354–355
groupe abstrait 68
nombre abondant 389
Académie Française 8
accélération 523
Rendu précis (Ahmes) 447
Achille et la tortue (paradoxe) 532–533 acnode. Voir point isolé Acosta, José de 260 actuariat 5, 312
angle aigu 5–6, 14
triangle aigu 506
addend 6
addition 5, 6, 205
formules d'addition (trigonométrie) 6, 41–42
loi d'addition 344, 367
carré magique d'addition-multiplication 327, 328 règle d'addition, en théorie des probabilités 415–416, 416
fonction additive 6
élément d'identité additif (zéro) 6, 257
inverse additif et anneaux 448

Adleman, Leonard 111
géométrie affine 6–7, 339
transformation affine 7
Agnesi, Maria Gaëtana 7–8, 58
Ahmes (Ahmose) 155, 447
Papyrus Ahmes. Voir Rhind papyrus
Alembert, Jean Le Rond d' 8, 8–9, 209 et série de Fourier 202
Théorème d'Alembert, d'. Voir théorème fondamental de l'algèbre
0 (aleph nul) 60–61
Alexander, James Waddell 295–296
Polynôme d'Alexander 295–296
algèbre 9–11
et géométrie 124
L'Algèbre (Bombelli) 47–48
Algèbre (Simpson) 463
courbe algébrique 114
fonction algébrique 11
notation algébrique 51
nombre algébrique 11, 60, 97 et la théorie analytique des nombres 360
structure algébrique 11
algèbre de la logique, Boole 48
Algèbre avec arithmétique et Mensurations (Colebrook) 42
algorithme 11, 294
Al-jam' w'al-tafriq ib hisab al hind (al-Khw¯arizmı¯) 293
Almageste (Ptolémée) 421
carré alphamagique 328, 328
angles intérieurs/extérieurs alternés 504
séries harmoniques alternées 248, 409
nœud alterné 295 série alternée 11–12 test de série alternée 12, 104–105 altitude 12–13, 105 de la concurrence du triangle de 12 , 12–13, 165 et ligne d'Euler 174-175, 507
numéros amiables 13, 18, 423
Analemme (Ptolémée) 422
analogique vs numérique 135–136
Analyse des infiniment petits (L'Hôpital) 40, 310
analyse 13, 423
Analyse par quantitatum série (Newton) 353 analyse situs. Voir topologie Analysis situs (Poincaré) 398 « The Analyst » (Berkeley) 58 moteur analytique, Babbage 32 géométrie analytique 13, 347 théorie analytique des nombres 13, 139–140, 360, 411 analytique 27 anneau d'ancrage. Voir théorème auxiliaire du tore 498–499 angle 13–15, 14, 276, 441 45º (octant) 363 d'élévation/dépression 14 d'inclinaison 261

bissectrice d'angle 46, 260
équerres 50, 519 trisection d'angle. Voir trisection d'un angle Annales de Mathématiques (revue) 25 Annals of Eugenics (revue) 387
Annals of Mathematics 531
anneau 15, 89, 94, 177
annulation anormale 56 primitive 94–95, 211, 360

antidifférenciation 15, 133, 272

antinomie. Voir le paradoxe de Russell

Machine Translated by Google

points antipodaux (antipodes) 15, 471, 473
antisymétrie 365 apex
(apex) 15, 91, 423
Apollonios de Perge 15–16, 76, 78, 93, 105, 115, 136–137, 189, 239, 252, 253, 476
et
duplication du cube 149
et trisectrice d'un angle 513
Cercle d'Apollonios 16
Théorème d'Apollonius 16
apothème (rayon court) 16, 403
Appel, Kenneth 200–201, 420
mathématiques appliquées
17 fonctions convenablement agréables 315
approximation 17
Mathématiques arabes 17–18
Arbogast, Louis 249 arc
18, 76
Solides d'Archimède 398
Spirale d'Archimède 239, 400, 474
Archimède 18, 18–21, 19, 20, 91, 93, 105, 115, 173, 180, 213, 238–239, 270, 272, 476
et les
solides d'Archimède 398 sur la
médaille Fields 194 et
sa spirale 474 et les
polyèdres semi-réguliers 404
et somme des n premiers nombres 489
et trisectrice d'un angle 513
Vis à eau d'Archimède 20, 21
Archytas 21–22, 172
longueur d'arc 22, 470
zone 22–25, 23, 24 de
l'anneau 15 de
formes de base 23, 23–24, 156, 248, 293
du cercle 76, 222, 392
des figures courbes 172
de l'ellipsoïde 161–162
comme concept mal défini 22–23, 24,
526 du polygone
403 du quadrilatère, Formule de Bretschneider
pour 52–53, 430
d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, formule de Brahmagupta pour 51–
52 du rectangle 443
du carré 474 du
trapèze 504 du
triangle 486
fonctions hyperboliques d'aire 281
Argand, Jean-Robert 25, 86
Diagramme d'Argand 25, 86, 359
argument 25–26, 86, 199, 524–525
Aristote 26–27, 238, 270, 309, 532 et
logique formelle 25–26, 199
Paradoxe de la roue d'Aristote 375 arithmétique 27
Arithmétique (Diophante) 137–138, 189, 190, 239, 253, 525
Arithmetica infinitorum (Valais) 528
Arithmetica universalis (Newtons) 353
Arithmetices principia, nova methodo exposita (Peano) 385
inégalité arithmétique-moyenne géométrique 219, 333
moyenne arithmétique
333 L'arithmétique des logarithmes (Briggs) 53–54
séquence arithmétique 28, 139–140
série arithmétique 28
arrangement. Voir permutation array
28 arrow
paradox, Zeno's 533 Ars
conjectandi (Jacob Bernoulli) 39–40, 414 Ars
magna (Cardano) 10, 47, 59–60, 112, 190–191, 494 Artin, Emil
52 A¯ ryabhata
(mathématicien indien) 17, 28–29, 264, 392 A¯ ryabhatiya
(A¯ ryabhata) 28–29
ASA (angle-côté-angle) règle 1
"Alors que j'allais à St. Ives" 156
propriété associative 29, 83 de l'addition 5 en
algèbre booléenne 49 et
groupes 241 de matrices 223
et ordre d'opération 366 et
anneaux 448
d'addition vectorielle 520, 522
astroid 115
Astronomiae physicae et geometryae elementa (D. Gregory) 240
Astronomia nova (Kepler) 292
asymétrique 490
asymptote 29–30, 234, 440 série
asymptotique 39 atto-
(10-18) 465
attracteur 150
augend 6
automate 30, 30–31, 37, 350–351
fonctions automorphes 398
moyenne. Voir axiome moyen
(moyenne) (postulat) 31, 170, 314
axiome du choix 31, 530, 534

B

Babbage, Charles 32, 32–33, 322
Moteur de différence de Babbage 33
Mathématiques babyloniennes 9, 33–35, 249, 425, 426, 428
Bacon, Francis 452
Manuscrit de Bakhshali 264
point d'équilibre. Voir centre de gravité
La balancitta (Galileo) 213
Banach, Stefan 24, 35
Paradoxe Banach-Tarski 24–25, 35, 374, 526
ornement de bande. Voir frise
modèle
barbier paradoxe 374-375, 453-454
Barbier, Joseph 95
histogramme 479, 479
"Le problème de la négociation" (Nash) 347
Barrow, Isaac 35–36, 36, 54
Der barycentrische Calcül (Möbius) 339
base de l'exposant 180
base du système numérique 36–38, 37
base du polygone/polyèdre 38, 506
logarithmes de base 10 53
Bayes, Rev. Thomas 38–39
théorème de Bayes 39, 302
portant 39
Behennde unnd hüpsche Rechnung auf fall Kauffmannschaften (Widman) 6, 487 bel
118 Bell,
Alexander Graham 118 cloche-
distribution en forme 356, 480, 480 Berkeley,
George 58 Bernays,
Paul 250 Famille
Bernoulli 39–40, 50, 284, 529 Bernoulli,
Daniel 40, 107, 202 Bernoulli, Jacob
39–40, 58, 414
Bernoulli, Jacob (II) 40
Bernoulli, Jacques 65-66, 489
Bernoulli, Jean 40, 58, 107, 114, 272, 310, 474, 494
Bernoulli, Jean (II) 40
Bernoulli, Jean (III) 40
Bernoulli, Nicolas (I) 40
Bernoulli, Nicolas (II) 40
numéros de Bernoulli 40, 435, 489
L'inégalité de Bernoulli 267–268
Paradoxe de Berry 374–375
Bertrand, Louis François 40, 71
Conjecture de Bertrand 167
Paradoxe de Bertrand 40, 40–41, 75, 374, 417
"Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann" (Zermelo) 533–534
Bha¯skara II (Bhaskaracharya) 10, 17, 41–42, 264, 392
et nombres négatifs 348 biais
42
biconditionnel (« si, et seulement si ») 42, 91, 514
point de bifurcation 151
Bijaganita (Bha¯skara) 41–42
bijection 209
distribution bimodale 480, 480
recherche de ligne binaire. Voir méthode de
bissection nombres binaires 30, 42–43,
88, 150 opération binaire 43, 257, 279 annulation comme 56–
59 fermeture
comme 79 propriété commutative comme 83
Formule de Binet 193
binôme 43
coefficient binomial 45, 64–65, 80, 418
distribution binomiale 43–44, 44, 143, 180
expansion binomiale 44–45
théorème binomial 18, 44–45, 80–81, 219, 309, 364
Biométrie (journal) 387
équation biquadratique. Voir équation quartique
triangle birectangulaire 474
méthode de
bissection (recherche de ligne dichotomique, recherche de ligne
binaire) 45–
46, 277,
451 bissectrice 46 bits
461 Blatzer, Richard 47 indice de masse corporelle
(IMC). Voir index Quételet
Bohlen numéros 195 Bolyai,
János 46–47, 171, 219, 255,
318, 355, 455 Bolzano, Bernard Placidus 47, 276
Théorème de Bolzano. Voir le théorème des valeurs intermédiaires

Machine Translated by Google

Bombelli, Raphaël 47–48, 50, 113
Boole, George 10, 48, 48–49, 199, 309, 460 Algèbre booléenne 49, 460, 461–462 carré frontière 328, 328 Borel, Félix Edouard Émile 216, 307 Anneaux de Borromée 49, 49 Borsuk, Karol 15 Borsuk-Ulam théorème 15, 471 Bosse, Abraham 124 Boss puzzle. Voir diapositive 15 puzzle borné 49–50 borné dessus/ dessous, définition de 50 Bourbaki, Nicolas 50, 168 accolades 50, 460 problème brachistochrone 39, 114, 310 crochets 50–51, 366 Brahe, Tycho 292 Brahmagupta 9, 51, 114, 264, 348, 534 Formule de Brahmagupta 51–52, 53, 249, 264, 430 Brahmasphutasiddhanta (Brahmagupta) 51, 264 tresse 52, 52 groupe de tresse 52 largeur 309 Formule de Bretschneider 52–53 Briggs, Henri 53–54, 320, 346 Logarithmes briggsiens 53 Brinkley, Jean 245 Association britannique pour la Avancement des sciences 68 Bromhead, Sir Edward 239-240 Brouillon projet d'une atteinte aux evenemens des recontres du cone avec un plan (Desargues) 123–124 Brouncker, Lord William 54, 529 Brouwer, Luitzen Egbertus Jan 198 Théorème du point fixe de Brouwer 198 Mouvement brownien 158 force brute 54–55, 461 Buffon, Georges 55 Problème de Buffon-Laplace. Voir Problème d'aiguille de Buffon Problème d'aiguille de Buffon 55, 55, 302, 393 Bürgi, Jobst 320 Buridan, Jean 368 effet papillon 151

C

coupe de gâteau. Voir juste division Calandrini, Giovanni Ludovico 107
calculatrice mécanique 382, 383
calcul 7, 8–9, 56, 100, 320 histoire de 57–58, 67, 126, 325, 368 et optimisation 365 et loi de Snell de réfraction 468–469 calcul des variations, Weierstrass 284, 529
calendrier, chinois 537 annulation 56–59 loi d'annulation, pour les fractions 204–205
Canon doctrinae triangulorum (Rhéticus) 511
Annonce Canon mathematicus seu triangle (Viète) 525
Cantor, Georg 11, 59, 203, 208, 270, 297, 533 sur la cardinalité 60–62, 129–130, 271, 460–461 et hypothèse du continu 100 sur l'infini 47 et théorie des nombres 63, 359, 367–368, 441, 442
Chanteur ensemble 203
Cardano, Girolamo (Jérôme Cardan) 10, 47, 59–60, 112, 190–191, 431, 494 et nombres imaginaires 87 et nombres négatifs 348–349 et théorie des probabilités 413, 414, 417 Formule de Cardano 112–113, 431, 470, 494 cardinalité 60–62, 100, 106, 129–130, 209, 270, 359 et théorie des nombres 123, 359, 368, 442 cardioïde 62, 115 Carr, GC 435 « chiffres porteurs » 2, 6 coordonnées cartésiennes (coordonnées orthogonales) 62–63, 105, 114, 124, 226, 275, 504 de cardioïde 62 vs coordonnées cylindriques 115 et direction cosinus 138 par rapport aux coordonnées polaires 400 quadrants dans 428 du tore 500
Produit cartésien (produit croisé, produit direct externe, ensemble de produits, produit direct d'ensemble) 63
Espace cartésien. Voir euclidien espace
Cassini, Giovanni Domenico 370
Castillon, Johann 62
chassant les neuf 63–64
Catalan, Eugène Charles 64
Conjecture catalane 64 Numéros caténaires 64–65
caténaire 65–66, 255
Cauchy, Augustin-Louis 47, 66, 66–67, 103, 287, 529 et définition de la limite 269, 312, 459 et théorème de la valeur moyenne 335 et théorie des nombres 442
Équations de Cauchy-Riemann 67
Inégalité de Cauchy-Schwarz 268
Séquence de Cauchy 442
Cavalieri, Bonaventura Francesco 57, 67, 74, 293, 527, 528
Principe de Cavalieri 57, 67–68, 115, 412, 527, 537
Cayley, Arthur 68, 200
Théorème de Cayley-Hamilton 68–69
Nombres Cayley 359, 432
supports plafond/sol 51
fonction plafond (fonction plus petit entier) 198
théorème centre-limite 69–70
centre de gravité 18–19, 69, 372, 470 centre de masse par rapport au centre de gravité 69
centile. Voir angle central
percentile 77, 77 théorème angle central/angle périphérique 77, 77 théorème limite centrale 143, 401, 482–483 et distribution normale 356 projection centrale 418 tendance centrale, mesures de 480
centroïde 335, 372, 470, 507 Ceva, Giovanni 70 Théorème de Ceva 70 Ceyuan Haijing (Li Ye) 318 chaîne 365–366 règle de chaîne
70–71, 88, 133, 138, 258, 274, 281, 282, 378, 433– 434 changement de variable. Voir intégration : par substitution chaos 71, 151, 203 jeu du chaos 204
featurea universalis 309 polynôme caractéristique 68–69, 156 vecteur caractéristique. Voir vecteur propre
Tchebychev (Tchebychev), Pafnuty Lvovitch 71, 72, 167, 415
Polynômes de Tchebychev 71
Théorème de Chebyshev 71, 72, 304
Chen, Jing-Run 230
Chêng Ta-wei 325
échiquier 224 poulet (jeu) 218, 413, 413
Ch'in Chiu-shao 72, 73 Mathématiques chinoises 72–74
Preuve chinoise 425
Théorème du reste chinois 73
test du chi carré 74–75, 98, 386, 415
ensemble de choix 31 accord 75, 76, 457, 510, 511
Accords en cercle (Ménélas) 336
théorèmes d'accords 78
valeurs d'accords, Hipparque 239
Chou pei suan ching (anonyme) 73, 425
Chudnovsky, Grégoire et David 393
Chuquet, Nicola 526 Chu Shih-Chieh (Zhu Shijie) 73-74, 75, 383 cercle 75-76, 92, 136, 141-142, 166, 188 surface de 24, 24 diamètre de 130 excentricité de 155 cercles de proportion et l'instrument horizontal (Oughtred) 369 quadrature du cercle. Voir quadrature du cercle cercle théorèmes 75, 76–78, 114, 425, 430 inversion circulaire 225 centre circonscrit 78, 338, 507 cercle circonscrit 76, 78, 165, 303–304, 321, 354
circonférence du cercle 75–76 de la terre 29
circonscrire / inscrire 78 "C1 Isometric Imbeddings" (Nash) 347
cissoïde 136–137
clarté 66–67, 529–530 Clavis mathematicae (Oughtred) 344, 370 calcul d'horloge 92, 340–341 courbe fermée 114 demi-plan fermé 243–244 demi-espace fermé 243–244 intervalle fermé 184, 276, 278 propriété de fermeture 79 de l'addition 5 et groupes 241 de matrices 222 cluster échantillonnage 407
coefficient 79, 404, 525
Cogitata physico-mathematica (Mersenne) 338 Cohen, Paul 101 Colebrook, HJ 42
conjecture de Collatz 79

Machine Translated by Google

Les Mathématiques Collectées
Papiers d'Arthur Cayley 68
Collection (Pappus) 13, 253
colinéaire 79–80, 233
Colson, John
Combinaison 7–8 (sélection,
arrangement non ordonné)
80–82
coefficient combinatoire 45,
384
combinatoire 82, 243
commensurable 82, 172, 238
dénominateur commun 82–83
différence commune 28
diviseur commun 83
facteur commun 83
fraction commune 205
multiple commun 83, 305 notions
communes 170 rapport
commun 223 groupe
commutatif 83 propriété
commutative 83 d'addition 5 en
booléen algèbre
49 des produits scalaires
148 et groupes 241 de la
multiplication 10,
344 et quaternions 432 et
anneaux 448–449 et
soustraction 487 de
l'addition vectorielle 520,
522 anneau commutatif 449
test
de comparaison 4, 103
compas et règle 95
complément (opération ensembliste)
460
angles complémentaires 14
digraphe complet. Voir
tournoi
graphe orienté complet 501 graphe
complet 233 induction
complète. Voir induction loi
de
complétude 367 propriété
de complétude, des nombres réels
47 complétant
le carré 84, 84,
428
conjugué complexe du nombre
complexe 526
espace euclidien complexe 170
fraction complexe 206
nombres complexes (C) 85–87, 219,
358–359, 408, 522
compléter le carré et
84
et la formule d'Euler 176
histoire de 25, 47–48, 245, 398
et cercles sécants 76
multiplication de 86
propriétés d'ordre et 367
coordonnées polaires de 86
et triplets de Pythagore 426
réciproque de 442
en trigonométrie 121–122 et
fonction zêta 535–536
composants d'un vecteur 519
composé 87, 186, 409 nombre
composé 87, 463 composition
(des fonctions) 69–70, 87–88,
274, 280 composition (des
matrices) 330 intérêt composé 153–
154, 275–276 énoncé composé 514
–515
Comptes Rendu (journal) 66 ordinateur
88. Voir aussi calculatrice,
mécanique et algèbre
booléenne 49 et chemin
critique 109 histoire de 32–
33, 167, 321, 351 concave
88 polygone concave 402
concave
haut/concave
bas 89, 89, 429
concentrique 89 "A Concise Outline
of the
Fondements de la géométrie »
(Lobachevsky) 318
conclusion (du syllogisme) 27
concurrent 89, 261, 335, 338, 399,
507
conditionnel (énoncé « si . . .
alors ») 89–90, 514
convergence conditionnelle 4,
104
équation conditionnelle 163
série conditionnellement convergente
4
probabilité conditionnelle 39, 90–
91, 263
condition—nécessaire et
suffisant 91
cône 91
application conforme
(transformation équiangulaire,
transformation isogonale) 91, 337,
485
congruence 92
transformation de congruence.
Voir isométrie
angles congruents 14
figures congruentes 92, 463
triangles congruents 1–2
tronc conique 207 hélice
conique 248
Les Coniques (Apollonius de
Perga) 15–16, 93, 253
sections coniques 18, 76, 92–93, 93,
123–124, 149, 238, 419 conjecture
31, 499 conjugué de
nombre complexe 86–87 conjugué
de
somme/différence
131
conjugué de surd 490
conjonction (instruction "et") 93–94,
514 circuit de
conjonction 94 connecté 94
graphe connexe 233
cohérent 94
constant 94
constant d'intégration 94–95, 272, 273
largeur
constante 75, 95, 130 constructible
95–97, 97, 149, 218, 238, 403, 475,
476 , 513 constructivisme 297
numéro de contact 472
contingence tableau 98,
98 suite fraction 98–100,
487
calcul de π utilisant 54 et
définition du nombre réel
441
nombre d'or comme 231
et triplets de Pythagore 427
continuité, définis par Cauchy
66
« Continuité et irrationnel
Nombres » (Dedekind) 119
fonction continue 88, 100, 184, 276,
386 intérêt
composé en continu 276 variable
aléatoire
continue
143
hypothèse de continuum 59, 62, 100–
101, 250, 533 intégrale
de contour (intégrale curviligne,
intégrale de ligne) 101, 239 ligne
de
contour 101
contradiction 94, 101, 170, 171,
228, 229, 473
contrapositif 101–102, 265
raisonnement contrapositif 26
convergence 66, 324
séquence convergente 102,
312, 458
série convergente 3, 12,
102–105, 182, 240, 260, 409,
459, 530 test du
rapport d'Alembert 8,
223
inverse 105, 506
convexe 88
polygone convexe 402
Conway, John Horton 296
coopérer contre défaut,
dans le dilemme du prisonnier
412 géométrie des coordonnées 63,
368 coordonnées 105, 399
numéro de coordination 472
théorie copernicienne 214
coprime. Voir relativement premier
coin 403
corollaire 498–499
corrélation et test du chi carré 74–
75 coefficient
de corrélation 79, 106, 107, 306–
307, 386, 456–457 angles
correspondants 504
fonction cosécante 510
fonction cosinus 139, 509, 510 règle
cosinus. Voir loi des cosinus "l'art
cossique" 10, 517 fonction
cotangente 510 dénombrable
11, 106, 348, 441 nombre
dénombrable. Voir nombre naturel ;
nombre entier contre-exemple
107, 120,
229
moyenne contre-harmonique 333
nombre de comptage. Voir nombre
naturel
Cours d'analyse (Cauchy) 66 Cours
d'analyse (Vallée Poussin)
518 A Course of
Pure Mathematics (Hardy) 246 cousins
premiers 515
covariance 106, 107,
306 couvrant. Voir tessellation
Cramer, Gabriel 107–108
Règle de Cramer 107, 108–109,
223, 282 Crelle, August Leopold 3
Crelle's
Journal 3 chemin critique 109,
109 point critique 331
produit croisé (produit
vectoriel) 63, 110,
520 cryptographie 111, 410 , 525
cube (hexaèdre)
111–112, 115, 396, 397 nombres
cubiques 195 racine cubique 112,
451 équation
cubique 34, 84, 112–
114 discriminant de 141
histoire de 59-60,
190–191, 493–494
réseau cubique 472
coudée 309
fonction de distribution
cumulative 143
tablettes cunéiformes 33, 34
courbure
144 courbe 114,
314 courbes, classification de Cramer
de 108
intégrale curviligne. Voir
cuspide intégrale
de contour 492,
493 cycle (théorie des graphes)
233 groupe cyclique
295 polygone cyclique
114 quadrilatère cyclique 78, 264,
430
cycloïde 114–115, 310
cylindre 115, 411
coordonnées cylindriques 115,
504
hélice cylindrique 248
Données D 116, 478
Données (Euclide) 169

Machine Translated by Google

formule des jours de la semaine 116–118
décibel 118
représentation décimale 36–38, 72–73, 260, 264, 370, 485 déclinaison 261, 261 décomposition 118–119
De configurationibus qualitatum et motuum (Oresme) 368
décrémenter 262
Decker, Ézéchiel de 54
Dedekind, Julius Wilhelm Richard 58, 119, 120, 172–173, 270, 367, 442
Dedekind coupe 119–120, 172–173, 262, 277, 367
et nombres réels bornés 50
et définition du nombre réel 442 et théorème des valeurs extrêmes 184
De déterminantantibus fonctionnalibus (Jacobi) 287
logique déductive 420 Aristote et 26
raisonnement déductif 120–121
défaut contre coopération, dans le dilemme du prisonnier 412 déférent, de cycloïde 115
nombre déficient 389
intégrale définie 148–149, 275
déformation 121
Degen, Ferdinand 3, 5
hyperbole dégénérée 373
quadriques dégénérées 411
degrés (mesure d'angle) 14 degrés d'un polynôme 121, 404
degré d'un sommet (valence) 121, 233
degrés de liberté 121 Dehn, Max 165 Problème de l'autel de Delian. Voir duplication du cube
deltoïde 430, 430 De methodis serierum et fluxionum (Newton) 352
De Moivre, Abraham 85, 107, 121–122, 471, 486, 494
et distribution normale 356, 414, 486
La formule de De Moivre (De l'identité de Moivre) 85, 122
Quintique de De Moivre 471
Démonstration d'une méthode pour resoudre les égalitez de tous les degrez (Rolle) 449
"Démonstration d'un théorème sur les fractions continue périodiques » (Galois) 215
De Morgan, Auguste 122-123, 200, 265, 270, 349
Lois de De Morgan 123, 460, 525
dénominateur 204
sous-ensemble dense 441 dénombrable (énumérable, dénombrable) 123 ensembles dénombrables 59, 60–62, 100, 106 événements dépendants 262–263 variable dépendante 519 dérangement 390–391, 486
De ratiociniis in ludo aleae (Huygens) 414
dérivée 132, 132, 198, 262, 271–272, 418 et calcul de la vitesse et de l'accélération 523
premier et deuxième, et graphique 234
Désargues, Girard 123–124, 270, 391, 418, 419
Théorème de Desargues 124, 270, 391, 419
Descartes, René 10, 57, 124–125, 125, 180, 189, 431–432, 519 et numéros amiables 13
et géométrie analytique 13 et géométrie coordonnée 62–63, 226, 235 et formule d'Euler-Descartes 177
et nombres imaginaires 87
Règle des signes de Descartes 124, 125-126
statistiques descriptives. Voir statistiques : déterminant descriptif 126–128, 223, 281–282, 287, 309 fonction déterminante 108 De triangulis omnimodis (Regiomontanus) 444, 511 déviation 481 diagonale 128–129, 376, 402, 443
argument diagonal 59, 60, 100, 106, 123, 129, 129–130 , 359, 441–442 carré latin diagonal 302 Dialogo (Galileo) 214 diamètre 75, 76, 130, 471 losange 376, 474
dé, tétraèdre 462 ligne dichotomique recherche. Voir le paradoxe de la dichotomie de la méthode de bissection , celui de Zeno 533
Le problème de Didon 130, 284
Dieudonné, Jean 288
"Die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefurdete Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen » (Einstein) 158
différence 130–131, 487
moteur de différence, Babbage 32–33, 33
formule de différence 511–512, Machine à 512 différences. Voir la différence de moteur de différence de deux cubes 131
différence de deux carrés 9, 131, 257
différentiel 131–132, 132, 310
différentiel et Intégral Calcul (Babbage) 32 calcul différentiel 56, 132–134, 226, 308–309 vs calcul intégral 211–212 équations différentielles 134–135, 234, 252, 299, 309, 385, 399 et fractions partielles 380
géométrie différentielle 226
différenciation 133, 309
chiffres 135–136
numérique vs. analogique 135–136 extraction de chiffres 183 dièdre 136
angle dièdre 136
dilatation 225, 278, 317
dimension 136
dimension d'une matrice. Voir l'ordre d'une matrice
Dioclès 136–137
Équations diophantiennes 54, 99, 137, 239, 250, 289–290, 360 Diophante 9, 137–138, 180, 189–191, 239, 252–253 nombre dirigé. Voir dérivée directionnelle entière 138–139, 233 cosinus de direction 138
nombres de direction 138
rapports de direction 138
solides directement congruents 92 preuve directe 139, 265, 420 raisonnement direct 26
directrice 155 du cône 91 du cylindre 115 de la parabole 373
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 139– 140, 172, 208, 337, 394 Principe de Dirichlet. Voir principe casier méthode disque 470 fonctions discontinues 100
Discorsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze (Galileo) 213 discret 140 mathématiques discrètes 167 transformation discrète 140 discriminant 84, 140–141, 429
discriminant d'événements cubiques 113 disjoints. Voir disjonction d'événements mutuellement exclusifs (instruction "ou") 141, 514
circuit de disjonction 141
raisonnement disjonctif 26
dispersion, mesures de 480–482
déplacement 141
Disquisitiones arithmeticae (Gauss) 218–219
distance du point à la ligne 142 du point au plan 142 et vitesse 522–523 formule de distance 22, 75, 141–142, 310 , 520 distribution 72, 142–143, 143, 197, 218 chi carré 74–75
propriété distributive 143–144 en algèbre booléenne 49 des produits scalaires 148 et multiplication élisabéthaine 160
Pythagoriciens et 9 et quaternions 432 et anneaux 448 div (opérateur de divergence) 144 divergent 144 séquence divergente 102
série divergente 240, 459
proportion divine. Voir doré rapport
règles de divisibilité 92, 144–146
division 146, 205
diviseur de zéro 147
Doctrine of Change (De Moivre) 122
dodécaèdre 396, 397 donut. Voir produit scalaire du tore (produit intérieur, produit scalaire) 110, 136, 138, 147–148, 520 formule à double angle 525 double cuspide 492, 493 double intégrale 148, 239, 400, 473
double pointe 148
double racine 140, 451
double tore 501
doublement du cube 149
principe du tiroir. Voir la dualité du principe du casier en géométrie projective 124
Dudeney, Henry Ernest 165
variable fictive 148–149, 488
duplication du cube 18, 21, 97, 136–137, 149, 166, 172, 239, 525
Dürer, Albrecht 149–150, 231, 232, 325, 391 dyadique 150 fraction
dyadique 43 système
dynamique 71, 88, 150–151, 203, 296 dynamique 299

Machine Translated by Google

E

e (excentricité de la conique) 155
e (nombre d'Euler) 11, 152–154, 154, 173, 283, 300, 301, 314 terre 154–155, 166 excentricité 89
excentricité 155, 161, 254, 373
échelon forme 220
arête
  sur le graphique 233 du polyèdre 403
Fractions égyptiennes (fractions unitaires) 155, 156, 192, 206
Mathématiques égyptiennes 155–156, 423, 428, 497
Multiplication égyptienne 155, 156
valeur propre 156–157, 282
vecteur propre (vecteur e, vecteur latent, vecteur caractéristique, vecteur propre) 156–157, 282

“Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen” (Einstein) 158
Einstein, Albert 157, 157–159, 227, 255, 398, 447, 496, 530 élasticité,
mathématiques de 227–228

« Élémens d'arithmétique universelle » (Kramp) 187
théorie élémentaire des nombres 359–360
opérations élémentaires 364
opérations élémentaires sur les lignes 220–222
Elemente de Mathematik (Blazer) 47
Les éléments (Euclide) 1, 78, 159, 168–169, 171, 172, 183, 226, 238–239, 252, 253, 270
  compas et
    règle en 95 et fondements des mathématiques 200
    nombres parfaits en 389
    Solides platoniciens en 396–397
Éléments de géométrie (Legendre) 308
Éléments de mathématiques (Bourbaki) 50
Éléments d'arithmétique (De Morgan) 122
Éléments de géométrie (Ménélas) 336
Éléments de géométrie (Playfair) 377
méthode d'élimination. Voir Élimination gaussienne
Multiplication élisabéthaine 159–160, 160, 404 ell 309
ellipse 92–93, 93, 137, 155, 160, 160–161, 239 propriété de réflexion de 365 ellipsoïde 161–162, 411 cône elliptique 411 cylindre elliptique 411 géométrie elliptique.
Voir sphérique géométrie
elliptique paraboloïde 374, 411
ensemble vide (ensemble nul, Ø) 162, 257, 267, 460
Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts, et des métiers (d'Alembert) 8
points terminaux, de courbe 114 énumérable. Voir dénombrable
Enumeratio linearum tertii ordinis (Newton) 353 division juste
sans envie 188 épicycle 115
épicycloïde 115
Épiménide 311
égalité 162 signe
égal (=) 442
coefficient d'équivalence 162, 380, 405
assimilant parties réelles et imaginaires 162–163 équation
163 équation de droite 163–164
équiangulaire 164–165, 166, 506
polygone équiangulaire 402
transformation équiangulaire.
Voir cartographie conforme
équidécomposable 165, 165
équidistant 76, 78, 165–166, 260
équilatéral 164, 166, 285, 506 polygone
équilatéral 402 "Points d'équilibre dans les jeux à N personnes" (Nash) 347 ensembles
équipotents (équipollents, équinumérables) 60 courbe
équitangentielle. Voir

équivalence tractrice
371 nœuds équivalents 295–296
ensembles équivalents 60 Ératosthène 154, 166–167, 462, 510 Tamis d'Ératosthène 462–463 Erdös, Paul 167, 393 Nombre d'Erdös 167 erreur 167–168, 197, 451, 457 détection d'erreur 4 61–462
erreur somme des carrés 306
Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (Argand) 25
Essai sur les sections coniques (Pascal) 382
"Essai sur l'application de l'Analyse mathématique à la Théorie de l'électricité et Magnétisme » (Vert) 239
Essai sur le principe de Population (Malthus) 407
"Un essai vers la résolution d'un Problème dans la doctrine de Chances » (Bayes) 38
Euclide 1, 78, 168-169, 172, 183, 224, 226, 238-239, 252, 253, 265, 270, 314, 324, 410 et compas et
  règle 95 définition du point 399 et logique formelle 199, 250 et fondements des mathématiques 200 et théorème fondamental de l'arithmétique 210 et nombres parfaits 389 et solides de Platon 396–397 et mathématiques pures 422 et
  triplets de Pythagore 426

Algorithme euclidien 11, 82, 159, 169–170, 210, 237 Géométrie euclidienne 170, 409 axiomes dans 31 Hilbert sur 250 vs géométrie non euclidienne 294
  et règle SAS 2
Espace euclidien (espace cartésien, n-espace) 170
Euclide ab omni naevo vindicatus (Saccheri) 455
Euclide de Mégare (philosophe) 168
Postulats d'Euclide 6–7, 159, 170–171, 226, 255, 455, 474
  Voir aussi postulat parallèle
Preuve d'Euclide de l'infinitude des nombres premiers 159, 171–172, 238, 265, 410
Eudoxe 26, 57, 172–173
Euler, Leonhard 10, 107, 120, 140, 152, 161–163, 173, 173–174, 175, 180, 182, 185, 208, 284, 300, 431, 523–525, 529
  et fractions continues 99 et intérêts composés en continu 276
  et le dernier théorème de Fermat 190
  et fondements des mathématiques 200
  et géométrie 6, 64, 80 et conjecture de Goldbach 229–230
  et théorie des graphes 235–236
  et théorie des nombres 13, 18, 187, 202, 247, 283, 349, 389, 426 et
  fonction de partition 381 et pi (π) 393
  et topologie 500 et cercle unitaire dans trigonométrie 511 et
  fonction zêta 105, 447, 535–536 Circuit d'Euler 233 Formule d'Euler-Descartes. Voir Théorème d'Euler
Diagrammes d'Euler 26, 362
Circuit d'Euler 235–236 Chemin d'Euler 235 Droite d'Euler 80, 174, 174–175, 354, 507 Brique d'Euler 174 Constante d'Euler 174, 175, 175, 247 , 283, 461 Formule d'Euler 85–8 6, 122, 152, 163, 174, 175–176, 182, 185, 209, 236, 314
  et logarithmes 320 Problème de division polygonale d'Euler, nombres de Catalan et 65 Polynôme d'Euler 174 Carrés d'Euler 303 Théorème d'Euler (formule d'Euler Descartes) 80, 174, 176–177, 177, 233, 278–279, 358, 404, 472 Fonction indicatrice d'Euler 174 e-vecteur. Voir fonctions vecteurs propres paires 177, 490 nombres pairs 177–178 événement 178, 413, 417
exa- (1018) 465 excercle 261, 354 milieu exclu, loi de 304 Exercitatio geometrya (D. Gregory) 240
Exercitationes geometryae sex (Cavalieri) 67
sous-ensembles exhaustifs 371 quantificateur existentiel (« il existe ») 430–431
parenthèses élargies 9, 131, 162, 179, 179 , 404, 431
  et théorème binomial 45 et propriété distributive 143 et multiplication élisabéthaine 160
valeur attendue (moyenne, espérance, μ) 179–180, 334 exposant 180–181, 263, 366, 475
fonction exponentielle 152–153, 181, 181–182
inégalités exponentielles 268
notation exponentielle. Voir notation scientifique
série exponentielle 182
temps exponentiel 405
expression 182
angle extérieur 182, 182–183, 504, 504
théorème de l'angle extérieur 182, 183, 183, 377

Machine Translated by Google

produit direct externe. Voir
Extraction du produit
cartésien 183–184
extrapolation 184, 278, 405 rapport
extrême et moyen. Voir le théorème
des valeurs
extrêmes du nombre d'or 49, 119,
184, 330, 442 extremum
184

F

face 185, 403
angle de face 185
réseau cubique à faces centrées 472
face du graphe 185
polyèdre à facettes 404
facteur 185–186
factoriel 80, 174, 186–187, 444,
486
factorisation 118–119, 187 facteur
théorème 187 arbre
factoriel 210
Fagnano, Giovanni 387
division équitable (coupe de
gâteau)
187–188 sophisme de l'inverse
26 sophisme de l'inverse 26
fausse position, méthode de 9,
156
Faltings, Gerd 190
Avion Fano 419, 419
Farey, Jean 188
Séquence Farey (série)
188–189
al-Farisi 18 F-
distribution 484
rétroaction 150
femto- (10-15) 465
Ferguson, DF 461
Fermat, Pierre de 138, 139–
140, 189, 272, 410, 531 et nombres
amicaux 13 et géométrie des
coordonnées 63, 226, 234-235
et nombres figurés
66, 287
et histoire du calcul 57 petit
théorème de 342 et théorie
des probabilités 413, 414,
417
Dernier théorème de Fermat 137,
138, 139–140, 189–190, 227,
531
Petit théorème de Fermat 342
Ferrari, Ludovic 10, 60,
190–191, 431–432, 470, 494
Ferro, Scipione del (Ferreo, dal
Ferro) 10, 59–60, 112, 191, 493–
494
Feuerbach, Karl Guillaume 354
Fibonacci 10, 155, 156,
191-192, 409, 511 et
chiffres hindous-arabes
251 et signe
moins 487 et zéro 534
Nombres de Fibonacci 192–193,
193, 197, 384, 443, 458 et
nombre d'or 231 et
polyominos 406 champ 5,
85, 442 Fields,
John Charles 194 Fields
médailles 193–194, 531 quinze
puzzle. Voir diapositive 15 casse-
tête
nombres figurés 66, 99, 194, 194–
195, 287, 381, 389, 423 Fincke,
Thomas 511 multiplication
des doigts 195–196 fini 196, 270
différences finies
33, 75, 196–197

induction finie. Voir induction
géométrie projective finie 419
ensembles finis
106 Fiore, Antonio Maria 493–494 test
de la dérivée première 331–332
Fisher, Sir Ronald Aylmer 197–
198, 387, 415 symétrie
de rotation quintuple
490
problème des cinq pierres
43 point fixe 198
supports plancher/plafond 51
fonction plancher (fonction du plus
grand nombre
entier) 198 mécanique des fluides 8, 144, 248,
299
flux 144
fluxion 57–58, 198, 309, 352 corde
focale 198 rayon
focal 198 foyer
(foyers) 155, 199 d'une
ellipse 161
d'hyperbole 253, 253–254 de
parabole 373 de
paraboloïde 374 pied
(unité de longueur) 309 champ
de force 101 Ford,
Lester R. 188 logique
formelle (logique symbolique) 25,
89–90, 94, 101, 199, 238, 304–
305 Aristote et
26 expressions en
182 fondées par Boole
48 Gödel et 228–229
théorie des ensembles et
460 formule 199–200
Formulario mathematico
(Peano) 385
fondements des mathématiques
47, 200
théorème des quatre couleurs
55, 200–201, 420, 472
et bande de Möbius 340 et
tore 501 quatre
éléments (terre, air, feu, eau) 397

Fourier, Jean-Baptiste Joseph 139,
201, 202, 208
Série de Fourier 139–140, 177,
201–203, 202, 307, 522, 530
quatrième dimension 136
fractale 136, 203–204, 204, 456,
463 formes
fractales et
paradoxe de Banach-Tarski
24
et chaos 71
fraction 146, 204–206, 341, 358,
439, 444 en
notation binaire 43
réciproque de 442
dimensions fractionnaires 136
exposant fractionnaire 181, 368
parenthèses de partie fractionnaire
51 fonction de partie fractionnaire 98,
198
Fraenkel, Adolf 534
Français, Jacques, et les
nombres complexes 25
Franklin, Benjamin 325
équations de liberté. Voir les
équations paramétriques
Frege, Gottlob 199
fréquence 206
distribution de fréquence 479
polygone de fréquence 479, 479
table de fréquence 479, 479
fréquence théorie des
probabilités, nombres amis
de Venn 524. Voir motif de frise des
nombres
amicaux 206, 206–207 tronc 207 F-
test 484 groupe
linéaire
complet 222–223 tour complet
14, 362, 390 fonction 139,
173, 207–209, 208, 445 analyse
fonctionnelle
35 fonction d'une fonction.
Voir
fonction de
composition d'une règle de fonction.
Voir le
principe fondamental de la
règle de la chaîne du comptage.
Voir
principe de multiplication propriété
fondamentale
du plus petit temps 189 théorème fondamental de
algèbre 85, 112, 186–187, 209–
210, 359, 405, 451
et équations polynomiales 471
preuves de 10, 25, 218 et
fonction zêta 536
théorème fondamental de
arithmétique 83, 118–119,
186–187, 210–211, 283, 409,
439, 476
démontrée par Gauss 218
et fonction zêta 535
théorème fondamental du
calcul 133, 153, 211–212, 240, 272,
494 formulé par
Leibniz 308 dans l'histoire du
calcul 57–58
théorème fondamental des
isométries 212, 284
logique floue 212, 305
théorie des ensembles flous 212

g

Galilée, Galilée 65, 93, 114, 125,
213–215, 214, 270, 485, 523

Gallai, Tibor 80
méthode galère 159
Galois, Évariste 10, 215, 242, 288,
432, 471
Galton, Sir François 215-216,
415
Graphique de Galton. Voir
diagramme
de dispersion gambler's ruin
216, 437 théorie des jeux 216–218,
346–348, 350–351, 415
fonction gamma 174, 187
Gardner, Martin 218
Garfield, James 425
Garnier, René 288
Gauss, Carl Friedrich 119, 140,
218–219, 226, 268
et théorème fondamental
d'algèbre 209 et
géométrie 47, 97, 355–356
et théorie
des groupes 242 et théorie
des nœuds 295 et théorie
des nombres 10, 25, 28, 87, 195,
287, 359, 489
et nombres premiers 243, 410–
411, 518 et
probabilité 356, 414 et topologie
500
Élimination gaussienne
(pivotante) 119, 219–222, 282,
288, 438, 491
Gelfond, Aleksandr 11 forme
générale d'une équation
222
groupe linéaire général 222–223,
314
maximum/minimum général
331
théorie générale de la relativité
158
General trattato di numeri et misure
(Tartaglia) 493 cercle
générateur 500 générateur
91, 115 géodésique
219, 223 dôme
géodésique 223
Géographie (Ptolémée) 422
Geometriae pars universalis (J.
Grégoire) 240
Geometriae rotundi (Fincke)
511
Géométrique organique
(Maclaurin) 324
distribution géométrique 44
moyenne géométrique 333

Machine Translated by Google

progression géométrique. Voir séquence géométrique
séquence géométrique 223–224, 489
séries géométriques 103, 163, 409, 441, 488
transformation géométrique 224–225, 258, 316, 503
La géométrie (Descartes) 63, 124–125, 226
"Géométrie Untersuchungen" (Lobachevsky) 318
géométrie 124, 125, 225–228, 238–239
Géométrie (Simpson) 463
Germain, Marie-Sophie 190, 226–228 giga-
(109) 465
Girard, Albert 209, 398
réflexion glissante 206, 225, 228
maximum/minimum global 330
gnomon 228
projection gnomonique 485
Godel, Kurt 31, 101, 199, 200, 228–229, 453, 458
L'incomplétude de Gödel théorèmes 101, 199, 229, 250, 458
Goldbach, Christian 229, 230, 410
La conjecture de Goldbach 229–230, 250, 359, 410
nombre d'or 193, 230–231, 388–389
rectangle d'or 231–232, 232 triangle
d'or 232 Goodwin, EJ
394 googol/googolplex
232, 389 Gosset, William Sealy
232, 387, 415, 483
degré 233
grade. Voir gradient
de pente 14
gradient 139, 233, 466–468, 467
Carré gréco-latin 302–303
Grandi, Guido 451
graphique (réseau) 94, 233, 233, 501
solution graphique 163, 234, 491
graphe de fonction 114, 207, 234–235, 275, 368 théorie
des graphes 82, 174, 235–236, 245, 505 Graunt,
John 312, 415 gravitation,
théorie de 399–400 grand cercle
223, 314 plus grand
diviseur commun (plus grand facteur commun) 82, 169–170, 236–237, 290, 305, 446 fonction du plus
grand entier. Voir la fonction plancher
Alphabet grec 237, 237
Mathématiques grecques 9, 237–239
Vert, George 239-240
Grégoire, David 240
Grégoire, Jacques 57, 240, 241, 476–477, 494, 496
Grégoire série 11-12, 241, 325, 393, 461
Paradoxe de Grelling 374–375
La Terre d'Artes (Recorde) 443
groupe 59, 241–242, 252, 279, 398, 490 théorie
des groupes 5, 10, 215, 242, 288, 299, 350, 432
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kolmogorov) 296
Grundlagen der Geometrie (Hilbert) 171, 250
Grundlagen der Mathematik (Hilbert et Bernays) 250 gr 310
Gunter, Edmond 369, 466

H

puzzle de mercier 165
Hadamard, Jacques 243, 411, 518
Haidao suanjing (Liu Hui) 73 boule
poilue théorème 472, 521
Haken, Wolfgang 200–201, 420
demi-accord 511
demi-cône 91–93, 473
demi-ligne. Voir
rayon demi-ouvert intervalle
278 demi-plan 94, 235, 243–244, 267, 473
demi-espace 243–244
Hall, Monty 343 Hall,
Philip 244 Halley,
Edmund 5, 312, 353, 445
La comète de Halley 445
Correspondance de Hall (mariage) théorème 244
problème d'arrêt 88, 244
Hamilton, sir William Rowan 10, 87, 236, 244–245, 359, 432, 520
Circuit hamiltonien 236, 505
chemin hamiltonien 236, 502
théorème ham-sandwich 245 main
(unité de longueur) 309 poignée
de main lemme 121, 236, 245
poignées de main à travers une table problème 65
Hardy, Godfrey Harold 246, 381, 435–436 fonction
harmonique 246 moyenne
harmonique 21, 333 séquence
harmonique (progression) 246–247
série harmonique 4, 104–105, 174, 247–248, 368, 409 Haros, C.
188 problème de
hache 391 al-Haytham 18
Heawood, Percy
200–201 hauteur du cône 91 du cylindre 115 du
pentagramme 388
du prisme 412 du
tétraèdre 497
du triangle 506
Heisenberg,
Werner 68 hélice 114, 248
hémisphère 471
Hermite, Charles
11, 154, 301, 314 Hérodote 498
Heron
248–249 Formule
de Heron 52–53, 78,
248, 249, 336, 486, 506, 508
Heron's Method 34–35, 183, 248, 249, 285, 353, 476 Hertz (HZ)
206 Hertz, Heinrich
158 Heumann, Casper
312 HexaDecimal Notation
135 hexagonal lattice 472
hexahed. Voir hiérarchie
du cube 454 Hieronymus
497–498
arithmétique supérieure.
Voir théorie des nombres dérivée
supérieure 249 facteur
commun le plus élevé. Voir le plus grand diviseur commun
Hilbert, David 137, 170, 171, 199, 229, 249–250, 355, 533 Les
axiomes de Hilbert 171
Le paradoxe de l'hôtel infini de Hilbert 250–251, 269
L'espace de Hilbert
250 Les chiffres hindous-arabes 191–192, 251, 2 63 , 370,
451 Hipparque 510
Hippase 172, 283
Hippocrate 251–252, 322–323, 476, 513
Hippocrate lune 251 Hisab
al-jabr w'al muqa¯bala (al-Khwa¯rizmı¯) 10, 17, 251, 293, 517
histogramme 143, 479, 479
Histoire naturelle et morale de las Indes (Acosta) 260
HOMFLYPT polynôme 296 homogène
252 homomorphisme
252 homotopie 398–399
nid d'abeille 292, 372
Horner, William George 72
Comment le résoudre (Pólya) 401
hundkurve 503
Hutchings, Michel 469
Huygens, Christiaan 114–115, 180, 414, 503
Hydrodynamique (Daniel Bernoulli) 40
hydrodynamique 140
hydrostatique 18–19, 20
Hypatie 239, 252–253
hyperbole 30, 92–93, 93, 137, 155, 189, 239, 253, 253–254, 513 cosinus
hyperbolique 65–66, 254–255 cylindre
hyperbolique 411 fonctions
hyperboliques 254, 254–255, 369 géométrie
hyperbolique 219, 227, 255, 318, 355–356, 455
paraboloïde hyperbolique 374, 411
sinus hyperbolique 254
spirale hyperbolique 474
hyperboloïde 255–256, 256
hyperboloïde à une/deux nappes 411
nombres hypercomplexes 432
hypercube 112, 256
hypersphère 136, 471
hypocycloïde 115
hypoténuse 77, 256, 509
Hypothèse physica nova (Leibniz) 309
test d'hypothèse 143

je

i (racine carrée de –1) 85, 173, 358–359, 529 i
(vecteur unitaire) 520
Ibrahim ibn Sinan 18
icosaèdre 232, 396, 397
“Idealtheorie in Ringbereichen” (Noether) 355
identité 163, 257, 304
élément d'identité 257, 258, 279, 295, 366 additif
534 multiplicatif
344 matrice d'identité
(matrice unitaire) 128, 257, 257–258, 281 propriété d'identité
222, 241 image (gamme) 207,
258, 481 nombres imaginaires 87.
Voir aussi nombres complexes
(C) différenciation implicite 258–259
fonction implicite 259
facteur impropre 186
fraction impropre 205
intégrale impropre (intégrale sans restriction, intégrale infinie) 104, 144, 259–260
Dans artem analyticam isagoge (Viète) 525
Mathématiques incas 260
centre 260
pouces
309 cercle intérieur 260–261, 354 inclinaison 261, 261

Machine Translated by Google

plan incliné 261 principe
d'inclusion-exclusion 48–49, 261, 391, 460 nombres
incomposites 409 croissant/
décroissant 89, 261–262 incrément
262 intégrale
indéfinie 95, 272, 275
indépendants. Voir axiome

indépendant disjoint par paires 171, 262 événements indépendants 91, 178, 262–263,
417 variable indépendante 519 indéterminée. Voir équation
inconnue indéterminée 263 index
(indices) 263. Voir aussi indice
d'exposant de sommation 488
Mathématiques indiennes 263–265
preuve indirecte (preuve par contradiction, reductio ad absurdum) 139, 171, 265, 336, 420
induction 122, 126, 176–177, 261, 265–267, 270, 420
définition inductive. Voir définition récursive
raisonnement inductif 120–121 Indus pouce 263 inégalité
267–268 inférence 268,
415 statistiques
inférentielles. Voir statistiques : inférentiel infini 196 infini
intégral. Voir
ordre infini intégral incorrect 406 produit
infini 144, 268–269,
312, 459 série infinie 102, 324, 351, 368, 439
infinitésimal 47, 57–58, 67, 269, 271, 533 infini
(∞) 269–270 , 529 point d'inflexion (inflexion) 89, 89,
270, 492 théorie de l'information
271 fonction injective 209 produit intérieur. Voir
produit scalaire inrayon 260
inscrire/circonscrire 78

théorèmes d'angle inscrit 77, 77–78 cercle
inscrit 387 valeur
instantanée 271
vitesse instantanée 523 nombre
entier (nombre dirigé, nombre signé) 271, 358 triangle entier
507–508 intégrale 66, 180,
380, 447,
523
calcul intégral 22, 24, 56, 133, 271-273, 272, 308-309 et la méthode d'Archimède
épuisement 18
vs calcul différentiel 211–212 et
calcul de volume 470, 527
domaine
intégral 449 « Intégrale, longueur, aire » (Lebesgue) 307
Intégrales de Lebesgue (Vallée Poussin) 518
test intégral, pour série convergente 104
intégrande 148–149, 273, 274, 360
intégration 15, 133, 272 par
parties 95, 273–274, 443, 486 par
substitution (changement de variable, règle de substitution pour l'intégration) 274–275, 287

intercept 275
intercept forme 164, 275 intérêt 275–276 angle
intérieur 276, 504, 504 théorème des valeurs intermédiaires
(théorème de Bolzano) 100, 184, 276–277, 367, 442
méthode de la bissection et 46
Preuve de Bolzano de 47 et Dedekind coupe 119 et
théorème du sandwich au jambon 245
in history of calculus 58 and logarithmic function 320

interpolation 184, 405. Voir aussi formule de Lagrange
intersection 144, 460
intervalle 278
Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (Cramer) 107–108 « Introduction to Mathematical Philosophy » (Russell)
453 Une introduction aux mathématiques
(Whitehead) 530

« Introduction à la doctrine des fluxions » (Bayes) 38–39 invariant 278–279 élément
inverse 279–280 fonction
inverse (application inverse, fonction inverse) 280–281

fonctions hyperboliques inverses 281
cartographie inverse. Voir la matrice inverse
de la fonction inverse 222, 280, 281–282
propriété inverse 5, 49, 223, 241
loi du carré inverse 282
fonctions trigonométriques inverses 280–281, 282–283
inversion dans un cercle 225
Une enquête sur les lois de la pensée (Boole) 48 nombres
irrationnels 59, 238, 283, 358, 423
et définition du nombre réel 441–442
Les doutes de Kronecker sur 297
Les travaux de Théodore sur 498
polynôme irréductible 186 Isagoge
ad locos planos et solidos (Fermat) 189, 226 transformation
isogonale. Voir cartographie conforme point isolé
(acnode) 283 isométrie
(transformation de congruence) 140, 283–284

isomorphisme 284
inégalité isopérimétrique 268
problèmes isopérimétriques 130, 284–285, 469, 472, 474–475, 484–485, 529 trapèze
isocèle (trapèze) 285, 504 triangle isocèle
238, 285, 285, 506 "Ist die Trägheit eines
Körpes von seinem Energieinhalt abhängig?" (Einstein) 158
Istituzioni analitiche (Agnesi)

7
intégrale itérée 148
itération 150–151, 285–286
Iverson, Kenneth 198

J

j (i des ingénieurs) 85
j (vecteur unitaire) 520
Jacobi, Carl Gustav Jacob 287-288
Déterminants jacobiens 287
Jacquard, Joseph-Marie 33
secousse 523
Jiuzhang suanshu (anonyme) 73, 226
Jones, Vaughn 295-296
Jones, Guillaume 393
Polynôme de Jones 296
Jordan, Marie Ennemond Camille 288, 307
Jordanie, Guillaume 288
Jordanie forme canonique 288
Théorème de la courbe de Jordan 76, 288
Problème Josèphe 288–289
Paradoxe de Jourdain 289
Journal de Mathématiques Purs et Appliqués (Journal de Liouville) 317
Journal pour pur et appliqué Mathématiques (journal de Crelle) 3
Répartition en J 480, 480
problème de remplissage des cruches 137, 170, 289–290
Julia, Gaston Maurice 203-204
Ensemble Julia 203–204
Jungius, Joachim 65

K

k (vecteur unitaire dans un espace tridimensionnel) 520
al-Kashi, Jamshid Mas'ud 18, 291, 392 Kasner,
Edward 232 Kempe,
Alfred Bray 200 Kendall, MG 438 Coefficient de
Kendall 438 Méthode de
Kendall 438 Kepler,
Johannes 93, 291– 293, 292, 396, 397, 472, 528 Lois de Kepler,
Newton et 353

La clé de l'arithmétique (al Kashi) 291
Khandakhadyaka (Brahmagupta) 51
Khayyám, Omar. Voir Omar Khayyám
al-Khwa¯rizmı¯, Muhammad ibn Mu¯ sa¯ 9, 10–11, 17, 251, 293–294, 517, 534 kilo-
(103) 465
cinématique 27, 213
cerf- volant 430,
430 Klarner, David 406
Constante de Klarner 406
Klein, Felix Christian 294, 314, 355, 473–474 Bouteille
de Klein 200–201, 294–295, 339–340 Groupe de
Klein-quatre (viergruppe) 295
théorie des nœuds 295, 295–296
Koch, Nils Fabian Helge de 203
Courbe de Koch 203
Kolmogorov, Andreï Nikolaïevitch 296
Kramp, Christian 187
Kremer, Gerhard (Mercator) 337
Kronecker, Léopold 296-297
Le décompte de Kruskal 297–298
Kulik, Yakov 463

L

Laczovich, Miklov 165
exposants échelonnés 65
Lafforgue, Laurent 194
Lagrange, Joseph-Louis 99, 201, 249, 278, 299–300, 379, 399, 414 et théorie
des groupes 242 et histoire
du calcul 58 et théorème de la valeur moyenne 334
et nombres carrés 195 et série Taylor 494

Machine Translated by Google

Formule de Lagrange 120, 278, 300, 405
Théorème de Lagrange 299
Lagrangien (unité) 300
Description lagrangienne 300
Multiplicateurs lagrangiens 300
Lambert, Johann Heinrich 283, 300–301, 392, 477
Landa, Diego de 332
Langland, Robert 194
Laplace, Pierre-Simon, marquis de 69, 245, 301–302, 356, 399, 414
Opérateur de Laplace 302
Transformée de Laplace 302
vecteur latent. Voir vecteur propre
surface latérale 115
Carré latin 174, 302–303 latitude
105, 154, 337 réseau 366
méthode de
réseau 159 point de
réseau 164, 166 polygone
de réseau 164–165, 166 loi des
moyennes 303, 304 loi de
conservation de l'énergie 309
loi de continuité 309 loi des
cosinus 5–6, 16, 78, 303, 303–304, 506 loi du tiers
exclu 304 loi de la chute des corps
213 loi de l'identité 304 loi des
grands nombres 71–72,
303, 304, 399, 414–415, 436
loi de non-contradiction 304 loi des
sinus 1–2, 78, 303, 303–304, 463, 507 loi du levier
18, 69, 304 lois de la gravité 353
lois du mouvement
planétaire 291–293 lois de la pensée
26, 304–305 paradoxe de l'avocat
374–375 coefficient dominant
305 plus petit dénominateur commun
83
plus petit commun multiple 83, 305
fonction du plus petit entier. Voir la méthode
des moindres carrés de la
fonction plafond 107, 218, 302, 305–307, 308, 445 Lebesgue, Henri-Léon
58, 307 LeBlanc, Louis
227 Leçons sur les séries trigonométriques (Lebesgue) 307

Lectiones geometryae (Barrow) 36
Lectures on Quaternions (Hamilton) 520
dérivé gauche 307–308
système gaucher 369, 448 identité
gauche 257 gauche/
droite, limite du 313 Legendre,
Adrien-Marie 187, 308
Polynômes de Legendre 308
Symbole de Legendre 308
Lehmer, DH 436 Leibniz,
Gottfried Wilhelm 122, 208, 308, 308–309, 523–525 et notation
calcul 249,
488
et différentiel 132
et découverte du calcul 57–58, 211, 227, 240, 272, 352, 494 et des
intégrales doubles 148 et de la logique formelle 199, 228 Série
de Leibniz. Voir Gregory série

Théorème de Leibniz 418
lemme 498–499
longueur 309–310
lentille
76 Léonard de Pise. Voir Fibonacci
Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Poincaré) 399
Faisons un marché ! (jeu télévisé) 343
principe de la boîte aux lettres. Voir principe
casier « Une lettre sur une série asymptotique
» (Bayes) 39 Lettres à une princesse allemande
(Euler) 174 leviers et poulies
19–20 L'Hôpital, Guillaume François, marquis de 40, 58, 310 Règle
de L'Hôpital 40, 310 –311 Lho shu
carré 325, 326 Lhuilier, Simon
474 paradoxe du menteur
289, 311, 374, 458
Liber abaci (Fibonacci) 156, 191–192
Liber de ludo aleae (Cardano) 414
Liber quadratorum (Fibonacci) 192
tables de mortalité (tables de mortalité) 311–
312, 415
ligance 472 vraisemblance 197
Lilavati (Bha¯skara) 41–42 limite
312–313
d'Alembert et 8–9
et la théorie analytique des nombres 13
Travail de Bolzano sur 47
et règle de la chaîne 70–71 ε - δ définition de 529 et
définition de la dérivée tangente 492
comme 132
conçu par Cauchy 66 dans l'histoire du calcul 58
Lindemann, Carl Louis
Ferdinand von 11, 297, 313–314, 393, 477 ligne 314,
315
algèbre linéaire 314, 491
méthode de congruence linéaire 436–437
équation linéaire 34, 156, 163, 314–315
interpolation linéaire 277–278
linéairement dépendant/ indépendant 315
Perspective linéaire (Taylor) 494
programmation linéaire 316
transformation linéaire 7, 316–317
intégrale de ligne. Voir intégrale de
contour Liouville, Joseph 11, 59, 215, 317–318
Constante de Liouville (numéro de Liouville) 11, 317
Listing, Johann 295, 339, 340
Littlewood, John 246 Liu
Hui 73 Li Ye
(Li Chi, Li Zhi) 73, 318 Géométrie
Lobatchevskienne. Voir géométrie hyperbolique Lobachevsky,
Nikolai Ivanovich 46–47, 171, 219, 227, 255, 318, 355, 377, 455

maximum/minimum local 330–331, 331, 468 locus
(loci) 319 logarithme
247, 252, 284, 319–320, 342, 411, 461, 466 histoire de 53–54, 55, 291–293, 345–346 de la matrice
157 différenciation
logarithmique 258–259 fonction

logarithmique 152–153, 153, 320–321, 337 graphique
logarithmique 235 échelle
logarithmique 118, 321, 369, 466 spirale
logarithmique 39, 474
Logarithmorum chilias prima (Briggs) 54
logiquement équivalent 515
portes logiques 88
Logique du hasard (Venn) 524
division longue 37, 37–38, 38, 146, 349, 404, 433 longitude
105, 154–155, 337, 445
long rayon 321
Loomis, Elisha Scott 425 boucle
(théorie des graphes) 233
Lorentz, Hendrik 398
Lovelace, Augusta Ada 33 ans, 321–322, 322
termes les plus bas. Voir forme réduite
Loyd, Sam 465–466
losange 376, 474
Lucas, Edouard 502 lune
251–252, 322, 322–323 Lyapunov, Aleksandr Mikhailovich
69, 356, 415

M

Maclaurin, Colin 107–108, 324, 496 série
Maclaurin. Voir la série Taylor

Madhava de Sangamagramma 264, 324–325
constante magique 325
carré de division magique 327, 327
carré de multiplication magique 327, 327
rectangle magique 328, 328
carré magique 149, 149–150, 325, 325–328, 326, 327 magnitude
328–329 al-Mahani 18
arc majeur 18
prémisse
majeure 27 Malthus,
Thomas 407 Mandelbrot,
Benoit 204 Mandelbrot set 204
Manière universelle de
Mr.
Désargues (Bosse) 124
cartographie. Voir fonction
Markov, Andrei 415
Chaînes de Markov 296
L'analyse mathématique de la logique (Boole) 48
"Contribution mathématique à la théorie de l'évolution" (Pearson) 387
Dissertations Mathématiques (Simpson) 464
induction mathématique. Voir induction «
The Mathematical Theory of Communication » (Shannon et Weaver) 461 A
Mathematician's Apology (Hardy) 246
Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (von Neumann) 351 matrix
(matrices) 109, 119, 126–128, 221–222, 314, 329 addition

matricielle 329–330 algèbre
matricielle 68, 458 matrice
inverse. Voir matrice inverse

multiplication matricielle 241, 330
opérations matricielles 329–330
Matyasevic, Yuri 137
stratégie maximin 217
maximum/minimum 89, 133, 310, 330–332, 331
Mathématiques mayas 332–333
McManus, Chris 118
moyenne (moyenne) 44, 333–334, 480, 537
moyenne. Voir la valeur attendue la valeur
moyenne 334 le théorème de la valeur moyenne 22, 94–95, 119, 184, 211, 262, 311, 334–335, 442, 450

Machine Translated by Google

Mesure d'un cercle (Archimède) 18
mesures de tendance centrale 480
mesures de dispersion 480–482
théorie des mesures 58, 307
Mécanique analytique (Lagrange) 299
Mécanique céleste (Laplace) 67, 245
Mechanica (Euler) 173, 393
mécanique 8
médiane 174–175, 480
médiane du triangle 335, 335–336, 338, 507
Meditationes algebraicae (Waring) 229
méga- (106) 465
Mélancolie (Dürer) 149, 325
« Mémoire sur les équations algébriques » (Abel) 5
« Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques » (Lambert) 300
« Un mémoire sur la géométrie Représentation de l'imaginaire Chiffres" (English) 25
Mémoire sur la théorie de Matrices (Cayley) 68
Menabrea, Louis 322
Ménélas 17, 336
Théorème de Ménélas 70, 336, 336
Mercator (cartographe). Voir Kremer, Gerhard
Mercator, Nicolaus (mathématicien) 337
Expansion de Mercator 4, 337
Projection de Mercator 91, 337
Méré, Chevalier de 414
méridien 154–155
Mersenne, Marin 189, 337–338, 389
Mersenne prime 338, 389, 410
Métaphysique (Aristote) méthode 498 mètres
465. Voir algorithme
méthode d'épuisement 18, 20, 57, 67, 172
méthode des indivisibles 67
Methodus incrementorum directe et inverse (Taylor) 494

Metrica (Héron) 248, 249 micro-
(10-6) 465 méthode
du carré moyen 436 point médian
76, 338 milieu de
gamme 480
Mihailescu, Preda 64
milles 309–310
milli- (10-3) 465
stratégie minimax 217
théorème minimax 218
le minimum. Voir arc mineur maximum/
minimum 18
prémisse mineure 27
minuend 487
signe moins 131, 398, 486, 487

minute (mesure d'angle) 14
Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Napier) 346
Miscellanea analytica (De Moivre) 122
stratégie mixte (théorie des jeux) 217–218
surd mixte 490
Miyoshi, Kazunori 393
Moebius, August Ferdinand 338–339, 340
Bande de Möbius (bande) 294–295, 339–340, 340, 369
Fonction Moebius 339
Formule d'inversion de Möbius 339
mode 480
arithmétique modulaire 59, 71–72, 92, 147, 174, 218, 340–342, 436
module. Voir valeur absolue
monic 305
Tessellation monoédrique 496–497
Monomial 342
Monomino 406
Monte Carlo Méthode 342–343
Monty Hall Problème 343
Mordell Conjecture 190
Morgan, Frank 469
Morgenstern, Oskar 216, 350–351
Morley, Frank 343
Morgan's Theorem 343
Morrison, Nathan 296 tables
de mortalité. Voir les tables de survie choix multiple 81–82 multiplicande 344
multiplication 5, 86, 86, 146, 205, 343–344, 370 loi de
multiplication 367 principe de multiplication (principe fondamental du comptage) 344 et permutations 391 règle de
multiplication pour les exposants 180–181 dans théorie des probabilités 416, 416–417
identité multiplicative 257 inverse
multiplicatif 449 multiplicateur
344 analyse
multivariée 197 mutuellement
exclusives. Voir événements mutuellement
exclusifs disjoints par paires (événements disjoints)
344 mutuellement orthogonaux 302
Mysterium cosmographicum (Képler) 292

N

Nakayama, Kazuhiko 393 nano-
(10-9) 465
Napier, Jean 74, 293, 319–320, 345, 345–346, 466
Os de Napier (tiges) 74, 346, 346, 347
Les formules de Napier 346
inégalité de Napier 268
Théorème de Napoléon 507
nappe 91–93, 473
Nash, Jean 346–348, 415
Équilibre de Nash 413
Naturel et politique Observations faites sur le Factures de mortalité (Graunt) 312
nombre naturel 106, 129, 348, 358, 385 Voir aussi le nombre entier
zéro. Voir zéro
Nave, Hannibal 191
nombre de baisers n-dimensionnels 472
espace à n dimensions 68, 472
algorithme du plus proche voisin 505
négation (instruction 'non') 348, 514
coordonnées négatives 63
infini négatif 121 orienté
négativement 369, 448 biaisé
négativement 465, 480, 480
nombres négatifs 48, 51, 348–349, 358, 408
pente négative 467
moyenne néo-pythagoricienne
333 multiplication imbriquée 349, 349–350, 350,
405 net (comptabilité)
350 net (géométrie) 350, 350
net (des hypercubes) 256
poids net 350
réseau. Voir graphique
Neumann, John von 350–351, 393
élément neutre. Voir élément d'identité
Nouvelles expériences concernant les vides (Pascal) 382
Newton, Sir Isaac 93, 122, 125, 132, 169, 180, 282, 292, 324, 351–353, 352, 452, 523, 528 et théorème binomial 45 et découverte de calcul 57–58, 211, 227, 240, 272, 308–309, 352, 494 et fluxions 198 et coordonnées polaires 63, 400 et numéro de baiser tridimensionnel 472
Newton numéro 472
Quotient de Newton 132, 360
Méthode de Newton 46, 249, 286, 353–354, 451
Troisième loi du mouvement de Newton 9
Un nouveau traité des fluxions (Simpson) 464
Neyman, Jerzy 354
symétrie de rotation d'ordre n 490
n-gon 97, 402
Nicomaque de Gérasa 389
cercle à neuf points 354
nœud 148, 233, 493
Noether, Amalie (Emmy) 10, 354–355 n-
omino 406 non-
contradiction, loi de 304 « Jeux non coopératifs » (Nash) 347
quadriques non dégénérées 411
temps polynomial non déterministe 357
ensemble non vide
162 géométrie non euclidienne 159, 171, 227, 255, 314, 355–356, 377, 473–474 découverte de 46, 318, 455 vs. géométrie euclidienne 294 non
mesur capable ensembles
24 non négatifs 408
non positifs 408
décimaux non répétitifs 441
solution non triviale 514
théorie des jeux à somme non nulle
347 distribution normale 69–70, 72, 122, 143, 356, 356–357, 414, 482, 483, 486 normale
à une courbe 357
normale à un plan 357
normale à une surface 357
"Note sur l'application de Machines à la Calcul de Astronomique et Tables mathématiques » (Babbage) 32–33
« Note sur une équation aux différences finies » (catalan) 64

Notions sur la machine analytique de Charles Babbage (Menabrea) 322 Nova
methodus pro maximis et minimis (Leibniz) 309 Nova
stereometria doliorum (Kepler) 292–293 Novum
Organum (Bacon) 452 NP complete
88, 357–358 n-polyomino 406
n- espace. Voir
espace euclidien nième groupe
dièdre 242 groupe linéaire
général d'ordre n (GLn) 222–223 racine d'ordre n
451

Machine Translated by Google

groupe symétrique d'ordre n 490

nième racine

112 nième racine de l'unité
358 nième terme test

103 n-uplet

358 angle nul 14

ensemble nul. Voir
l'ensemble vide

numéro 358–359 machine à

base de nombres 30 ligne

numérique 359, 441, 442 puzzle de

dénomination numérique 54–55

systèmes de nombres 358–359
théorie des nombres 82, 139–
140, 159, 167, 191,
337–338, 359 –360, 429–430

dénombrable. Voir
numérateur dénombrable 204

différenciation numérique 360 intégration numérique 360–362

O

obelus (%) 146

sphéroïde aplati 154, 362

oblique 362

angle oblique 362 cône

oblique 362 cylindre

oblique 115 pyramide

oblique 423 angle obtus

14, 362 triangle obtus 362,
506 avers 362 octaèdre 396 ,
397

octant 363

octonions 359, 432

fonctions impaires 177, 490
nombres impaires 177–178

cotes (probabilité) 363, 439

Oeuvres complètes d'Augustin
Cauchy 67

Oeuvres de Camille Jordan
288

problème d'officier 302–303

Omar Khayyam (Umar al
Kha¯yyami¯) 18, 227,
363–364

"Sur une curieuse propriété de
Fractions vulgaires » (Farey)
188

« Sur une nouvelle méthode de
Théorie élémentaire des nombres »
(Erdös) 167

Sur les miroirs brûlants (Dioclès)
136

Sur les conoïdes et les sphéroïdes
(Archimède) 18

Sur les divisions (Euclide) 169
Fonction « un à un » 209

Sur les corps flottants
(Archimède) 18–19

Sur le raisonnement dans un jeu de dés
(Huygens) 180

Sur les spirales (Archimède) 474

Sur l'économie de
Machines et produits manufacturés
(Babbage) 33

« Sur le problème du plus
Tests efficaces de statistique
Hypothèses » (Neyman) 354

« De la propagation de la chaleur
dans les corps solides
» (Fourier) 201

Sur la sphère et le cylindre
(Archimède) 18, 173

« Sur la théorie des groupes
Selon la symbolique
Équation θ n = 1" (Cayley)
68

fonction « sur » 208 demi-

plan ouvert 243–244 demi-

espace ouvert 243–244

intervalle ouvert 278

opération 364

priorité opérationnelle. Voir ordre
d'opération recherche
opérationnelle (OR) 33,
364

opposés 364

angles opposés 364

solides congruents opposés 92 Optica

promota (J. Gregory)
240

Optique (Euclide) 169

Optique (Ptolémée) 422

optique, Newton et 353 Optiks

(Newton) 353 optimisation

133, 161, 285, 316, 364, 364–365
et histoire du calcul 57
et triangles inscrits 387 et loi de
réfraction de Snell 468 Steiner et
484–485 von
Neumann et 350
OR. Voir orbite de
recherche opérationnelle

(séquence d'itérations) ordre 150.

Voir ordre de permutation, du

polyomino 406 partition

ordonnée 380–381 ensemble

ordonné 365–366, 367,

530

ordre d'une matrice (dimension
d'une matrice) 258, 366

ordre du groupe 366

ordre de grandeur 329 ordre

d'opération (précédence
opérationnelle) 366–367 propriétés

d'ordre 267, 367 nombres

ordinaux 367–368 ordonnée 62

Oresme, Nicole 63, 208, 234,
368

orientation 369

origami 513

origine 105, 359

orthant 363

triangle orthique 387

orthocentre 12, 354, 387, 507

orthogonal 369, 391

orthogonal. Voir la règle 369
des

coordonnées cartésiennes d'Osborne

osculation (tacnode) 148

osculinflexion 492, 493

Oughtred, William 344, 369–
370, 370, 466 aberration

370 ovale 370

ovales de

Cassini 370

Ozanam, Jacques 449

P

sphères d'emballage 472

roue à aubes 174

Paganini, Nicolò 13

disjoints par paires (indépendants,
mutuellement exclusifs) 371

Aigrette 13, 57, 239, 253, 371–
372, 470

Le problème de Pappus 372

Théorèmes de Pappus 372–373,
470, 471
et tore 500

parabole 92–93, 93, 137, 155,
189, 239, 373, 373, 429 comme

trajectoire 213, 503

cylindre parabolique 411

paraboloïde 101, 235, 373–
374

paradoxe 374–375, 412, 532 et
mathématiques pures 422–
423

"Paradoxien des Unendlichen"
(Bolzano) 47

parallèle 375–376, 376, 377

parallélépipède (parallélépipède)
376

et triple produit scalaire de trois
vecteurs 512

parallélogramme 376, 430, 474 aire
de 23, 23 produit
croisé (vecteur) comme 110
loi

du parallélogramme
(règle du parallélogramme)
376, 376–

377 parallélotope 376

postulat parallèle (cinquième postulat
d'Euclide) 159, 227, 239, 255,
375, 377, 377–378, 378, 473
et altitudes
du triangle 12–13

et angles du triangle 505 inverse
du théorème de l'angle extérieur
183 et euclidien
vs non
Géométrie euclidienne
170–171, 318, 355–356
Omar Kayyám et 18 364

projection parallèle 418

équations paramétriques (équations
de liberté) 164, 378, 386 et
longueur d'arc de la courbe 22
de la cardioïde 62
du cercle 75, 95
d'hélices 95 de
bande de Möbius 340 de
tore 500 de
cercle unitaire 517

parenthèses 50–51, 519 parité

378–379

Parménide 532

Parménide (Platon) 532

dérivée partielle 138, 233,
239, 259, 379

équations aux dérivées partielles,
d'Alembert et 8–9

fractions partielles 162,
379–380

ensemble partiellement ordonné 365–
366 somme partielle 102, 380,
459 et limite 312

partition 358, 380–381, 436 fonction

de partition 381

Pascal, Blaise 74, 189, 381–
382, 382, 383 sur la
cycloïde 310 et
histoire du calcul 57 et théorème
de Pappus 372–373

et théorie des probabilités
413, 414, 417

Distribution de Pascal 44

Triangle de Pascal 45, 65, 195, 196,
382–385, 384, 497
et combinaison 80–81

fonctions pathologiques 529

Chemin vers la connaissance
(Recorde) 443

matrice des gains 217

Peano, Giuseppe 265, 385

Courbe de Peano 385, 385–386

Postulats de Peano 31, 265,
271, 385, 386

Pearson, ES 354

Pearson, Karl 106, 107,
215–216, 386, 386–387, 415

multiplication paysanne. Voir
cercle de pédale de

multiplication russe, du triangle

387 triangle de pédale

387 Pell, John

54 équation de Pell 54

tour de crayon 505–506,
506

pendules 114–115, 213

Penny Cyclopedia 122

pentagone 285

pentagramme (pentacle,
pentalpha, pentagramme) 230,
387–388, 388, 424

pourcentage 388

pourcentage d'erreur 388–389

centile (centile, quartile) 389

nombre parfait 18, 174, 338, 389,
423–424 périgone

(angle rond) 14, 362, 390

périmètre

390, 403, 443 doublement de

période 151

Machine Translated by Google

fonction périodique 390
péripatétique 27
angle périphérique 77, 77
permillage 388
permutation 82, 127, 186, 209, 390–391, 490 groupe
de permutation 68
perpendiculaire 369, 391, 468
bissectrice perpendiculaire 46, 174–175, 338, 391, 507
perspective 149–150, 391–392, 419 peta-
(1015) 465 Phédon
(Platon) 396 phyllotaxie
193 Physique
(Aristote) 532 physique,
aristotélicienne 27 pi (π) 55,
392–394 approximations
de 20, 28–29, 291 , 537
irrationnel 283, 300,
477 non constructible 97
transcendantal 11, 301,
313–314, 393, 477 Piazzi,
Giuseppe 219 pico-
(10-12) 465 camembert
(graphique) 479, 479
casier principe 394–395 Pitiscus,
Bartholomée 511 pivotant. Voir
système de valeur de position
d'élimination gaussienne 6,
51, 155, 192,
251, 359, 487 courbe plane 114
graphe planaire 233
Planck, Max 158 plan
80, 315, 395 géométrie
plane 170 lieux plans
(Apollonius) 189 Platon
166, 238 , 395–396, 397,
498, 532 Solides platoniques 159,
232, 238, 291–292, 395, 396,
396–398, 404,
424 Platonicus (Eratosthenes) 166
Playfair, John 171, 227,
355, 376, 377 Playfair
axiome 46, 171, 227, 355, 376, 377
parcelle 398 Plouffe, Simon 183
plus 398
symbole plus/moins 398 signe plus
398, 486
Pneumatica
(Heron) 248–249
Poincaré,
Jules Henri 255, 314, 398–
399 , 500 , 530 Disque
de Poincaré 255 Conjecture de
Poincaré 399 point 399 point de
contact (point de tangence)
399 point d'inflexion.
Voir point d'inflexion forme point-
pente, de
l'équation de la ligne 164
Poisson, Siméon-Denis 44, 71, 399–400, 414–415
Loi de Poisson 44, 399–400

graphique en coordonnées polaires
235 coordonnées polaires 22, 39,
63, 400, 400–401, 504
de cardioïde 62
de nombres complexes 86,
86
de spirale logarithmique 474
de rose 451
forme polaire 176
Polignac, Alphonse de 107
Pólya, George 401–402
polychore 403
polygone 119, 149, 402–403,
403
aire de 23, 24
cercle circonscrit à 78
convexité de 88
angles extérieurs de 182 et
pavage 496–497 problème de
division de polygone 64 angle
polyédrique 469 polyèdre
88, 128–129, 176–177, 185,
236, 403–404 polynôme
404–405
équations polynomiales
163,
215
temps polynomial 405
polyomino 405–406, 406
polytope 403
Poncelet, Jean Victor 419
population et échantillon
406–407
moyenne de population
483 modèle de population
182, 407–
408 vecteur de position 395,
408 positif 408
positivement orienté 369, 448
positivement asymétrique 465, 480,
480
pente positive 467
problème du timbre-poste 446
postulat (axiome) 31, 170,
409
potentiel 239
série de puissance 121, 324, 399,
409, 495, 530
Problèmes P vs problèmes NP
357–358
Practica geometriae
(Fibonacci) 511
précision 66–67, 409, 529–
530
« Essai préliminaire et élémentaire
sur l'algèbre en tant que
science du temps pur »
(Hamilton) 245
prémisse 409
données primaires
116 nombre premier 409–
410, 461 factorisation premier 187
nombres premiers 186, 389
et conjecture de Bertrand 71,
167 vs
nombres composés 87 et
factorisation 186–187 et théorème
fondamental de l'arithmétique
83, 186–187 infinitude
de 171–
172 travaux de Mersenne
sur 338 théorème des nombres
premiers 71, 219, 410, 410–411,
447 , 535 preuves de 167, 243, 518
axes principaux 411 Principia
(Newton) 293, 351–
353, 352 Principia Mathematica
(Russell et Whitehead) 453,
530
Principia philosophie
(Descartes) 125
Le principe de relativité
(Tête blanche) 530
Les principes de l'empirique
Logique (Venn) 524
Principes de mathématiques
(Russell) 453
Principes de l'Art de
Pesée (Stevin) 485
Analytique antérieure et postérieure
(Aristote) 27
prisme 403, 411–412
prismatoïde 412
prismoïde 412
dilemme du prisonnier 218, 412,
412–413
probabilité 122, 143, 189, 243,
262–263, 413–418 et
fonctions harmoniques 246
Le travail de Kolmogorov
sur 296
Méthode de Monte Carlo
342–343
Problème de Monty Hall 343 et
événements mutuellement
exclusifs 344
cotes et 363
Pascal et 382
et permutations 391
Poisson et 399–400
Quételet et 432–433 et
marches aléatoires 437
et théorie des ensembles
178 et casse-tête à deux cartes
515 fonction de densité de probabilité
143
modèles de probabilité 416
arbre de probabilité 415–416, 416
procédure. Voir l'algorithme
Proclus 171, 239, 497
produit de la matrice 330
produit règle 133, 273, 309, 418,
433–434
ensemble de produits. Voir
produit cartésien
progression. Voir séquence
harmonique
vecteur projeté 418–419
projection 337, 391–392, 418–
419
géométrie projective 123–124, 270,
339, 372, 382, 409, 418, 419
prolate
sphéroïde 362 preuve 420
preuve par
contradiction. Voir preuves
indirectes,
défectueuses que 0
= 1 29 que 1 =
2 4, 248, 337 que 1 est le
plus grand entier 284
que tous les chevaux sont de la
même couleur
266–267 que la lune est faite
de fromage
90 facteur propre 186
fraction propre 205
proprement divergent 144
vecteur propre. Voir proportion
vecteur propre 149, 230–232, 370
proportionnel 420–421, 439
proposition 421
Protagoras 374
test de la série p
104 nombres pseudopremiers
410 pseudosphère
300 Ptolémée 239, 253, 392, 421,
421–422 , 510
Théorème de Ptolémée 52, 422,
422
cryptographie à clé publique 111
mathématiques pures 159, 168,
422–423
pure surd 490
pyramide 403, 423
tronc de pyramide 207
Pythagore 9, 57, 172, 230, 238,
387, 396, 423, 423–424,
425
Théorème de Pythagore 159,
165–166, 208, 226, 238, 256,
314, 424, 424–426, 425, 506
en
mathématiques babyloniennes
34–35
en mathématiques chinoises 73
inverse de 506, 506–507 et
formule de distance 141 et loi
de cosinus 303 et de
coordonnées polaires 400 et de
triplets de Pythagore 426
pavage et 474, 475, 497 et
vecteurs 520
La proposition de Pythagore
(Loomis) 425
Triples de Pythagore 99, 137, 162–163, 190, 226, 360, 422, 426–427

Machine Translated by Google

Q

CQFD 159, 428
QEF/QEI 428 QI.
Voir l'index Quételet Qin
Jiushao. Voir Ch'in Chiu shao

quadrilatère. Voir quadrilatère
quadrant 363, 428
quadratique 428–430
courbe quadratique 430
équations quadratiques 163, 373, 443
forme quadratique 430
formule quadratique 84, 200, 451
quadrature du cercle. Voir quadrature du cercle
Quadrature de la Parabole (Archimède) 18
quadrilatère 88, 376, 430, 430
quadruple (4-tuple) 358
quantificateur 199, 430–431
quantique (quanta) 158
mécanique quantique 159
équation quartique 59–60, 84, 190–191, 431–432 quartile.
Voir quaternions centiles
241, 244–245, 359, 432 Quételet, Lambert
Adolphe Jacques 415, 432–433
Indice de Quételet (QI) 433
quintessence 397 équation
quintique 3 quipu 260
quotient 85, 146, 204,
433 règle du
quotient 133, 433–4 34

R

radian 14, 115, 465, 477 radian
mesure 473, 509 signe radical
475 rayon 76 rayon-accord
théorème 78, 78 rayon de
convergence 495 base 36–38
Rahn, Johann
Heinrich 146 Ramanujan, Srinivasa
246, 381, 435–436, 477 aléatoire
41 nombres aléatoires
436–437
échantillonnage aléatoire 407
marche aléatoire 246, 437
gamme. Voir image rang
437–438 corrélation
des rangs 438–
439 ranonculoïde 115 rapport
146, 420, 439
fonction rationnelle
(expression) 439–440

rationaliser le dénominateur 85, 440, 442, 490
nombres rationnels (Q) 106, 129, 358, 440–441, 443
par rapport aux nombres algébriques 11 définissable
comme rapport 439 et définition du nombre
réel 441–442 dénumérabilité de 123 discrétion de
140 test de rapport 103, 182, 439 théorème de
rapport 439
données brutes 116
rayon (demi-droite) 441 « Variétés algébriques réelles » (Nash) 347
ligne réelle. Voir les nombres
réels de droite numérique (R) 106, 129–130, 358, 441–442 et Dedekind coupent
119–120
et Euclide 172
non dénombrabilité du récepteur 123 501–502
« Recherches sur diverses
applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des
nombres » (Dirichlet) 140
réciproque 442
équation réciproque 442
Recorde, Robert 162, 442–443
rectangle 185, 376, 443, 474 aire de 23, 23 vs
trapèze 504
rectangulaire (cartésien) coordonnées 62–63, 105
relation de récurrence (relation récursive, formule de réduction) 443, 458
définition récursive (définition inductive, récursivité) 444 forme
réduite (termes inférieurs) 444
réduction à l'absurde. Voir
formule de
réduction de preuve
indirecte. Voir relation
de récurrence angle
rentrant 276 réflexion 198, 206, 283–284, 490
en cercle 225 et
isométrie 212 en ligne 224–225 en un point
225 propriété de
réflexion d'ellipse 365
de parabole 373,
373 angle de réflexe 14,
362
« Réflexions sur la cause
générale des vents » (d'Alembert) 8
réflexivité 365
Regiomontanus 444–445, 511
régression 107, 445
ligne de régression 306
polygone régulier 164, 166, 402
polyèdre régulier. Voir Tessellation
solide platonique régulière
496 "Rein Analytischer Beweis" (Bolzano) 47
Reinhardt, Karl 497
Relación de las cosas de Yucatán (Landa) 332
relation (relation) 445 complément
relatif 131 erreur relative 445 fréquence relative
206 relativement premier
439–172, 174, 446 maximum/minimum
relatif
330–331, 331
reste 433 reste
théorème 187, 446 discontinuité
amovible 440 décimales répétitives
440–441, 526
mouvement rétrograde 173
triangle de Reuleaux 95
fonction inverse. Voir l'inverse fonction
distribution en J inversé 480, 480

Rhaeticus, Georg Joachim 511

Rhind, Alexander Henry 446 Rhind
papyrus 9, 155–156, 392, 446–447, 476, 510 rhomboïde 376
losange (losange)
376, 474 Richter, Charles 321
Échelle de Richter 321
Riemann, Georg
Friedrich 58, 227, 270, 272, 355, 447–448, 473–474, 485, 535
Hypothèse de Riemann 243, 246,
250, 447 Géométrie riemannienne. Voir
géométrie sphérique Intégrale de Riemann 58, 447
Sphère de Riemann 485
Fonction zêta de Riemann.
Voir fonction zêta angle droit 14, 226, 448 cône
circulaire droit 473 cylindre
droit 115 dérivée droite 307–
308 système droitier
369, 448 règle de la main
droite 110 identité droite 257 droite/gauche, limite à partir
de la 313 pyramide
droite 423 quandrangulaire droite
prisme 411

triangle rectangle sphérique 474
triangle rectangle 506
principe du triangle rectangle.
Voir l'anneau de théorème
de Pythagore 5, 144, 252, 271, 354–355, 448–
449 Ringel, Gerhard 200
montée sur course (pente) 467
Ritoré, Manuel 469
Rivest, Ron 111
Roberval, Gilles Personne de 57
Rolle, Michel 449
Théorème de Rolle 184, 335, 449–450
Chiffres romains 155, 192, 251, 450–451 racine
(zéro) 451, 534 test racine
103–104 Ros, Antonio
469 rose 451 rotation
206, 225,
278, 283 –284, 317, 490
angle rond. Voir périgon
arrondi 451–452 erreur
d'arrondi (arrondi) 452

tournoi à la ronde. Voir tournoi
Société royale de Londres 452
Méthode de cryptage RSA 111
problème élastique 247–248
géométrie de la feuille de caoutchouc.
Voir topologie Rudolff,
Christoff 475 Ruffini, Paolo 10,
72, règle 431, 68-95-99.7
356 Russell, Bertrand Arthur William 199, 229, 452, 452–453 , 460–461, 530, 533 Paradoxe
(antinomie) de Russell 200 , 374, 453–454, 460–461 Multiplication
russe (multiplication paysanne) 43, 156, 454, 454

S

Saccheri, Girolamo 171, 227, 455
point de selle 217, 492
saillant 276
angle intérieur/extérieur du même côté
504 échantillon
143 moyenne
d'échantillon 333 espace d'échantillon 178, 413, 417, 455
Le Sand Reckoning (Archimède) 19
résultat sandwich. Voir la règle de compression
Règle SAS (côté-angle-côté) 1–2, 463, 506
Scalaire 456
multiplication scalaire 329, 520 produit
scalaire. Voir produit scalaire
produit triple scalaire 512
échelle 36–38, 456
facteur d'échelle
463 scalène
506 dispersion 481

Machine Translated by Google

diagramme de dispersion (diagramme de dispersion, graphique de Galton) 106, 456–457
Schickard, Wilhelm 382
Schnirelmann, L. 230
schubfachprinzip. Voir principe casier
Schwarz, Hermann 469 notation scientifique 125, 168, 457
hélice à vis 174 sécante 457, 493, 510 sécante
théorème 1, 457, 457 seconde (mesure de l'angle) 14 données secondaires 116 test de dérivée seconde 332 bissectrice de segment 46 Segner, JA 64 sélection. Voir combinaison autoréférence 244, 457–458 carré semi-magique 327, 458 demi-grand axe 161 demi-axe mineur 161 polyèdre semi-régulier 404 pavage semi-régulier 496 séquence (progression) 458–459

séquence (ensemble totalement ordonné, chaîne) 365–366 série 459–460, 488 ensemble complément 460 ensemble produit direct. Voir intersection d'ensembles de produits cartésiens 460 opérations ensemblistes 524 théorie des ensembles 144, 422–423, 460–461 et axiome de choix 31 comme algèbre booléenne 49 et lois de De Morgan 123 différence en 131 et probabilité 178 et paradoxe de Russell 453–454 von Neumann et 350 tentative de Zermelo d'axiomatiser 534 paradoxes de la théorie des ensembles 530 union d'ensembles 460 problème des sept ponts de Königsberg 235, 235, 500 nombres sexagésimaux 33–34 ombres 149
Shamir, Adi 111
Shanks, William 392, 461
Shannon, Claude Elwood 271, 461–462 rayon court. Voir l'apothème Shushu jiuzhang (Ch'in) 72 Méthode siamoise 327 Sicherman, colonel George 462 Dés de Sicherman 462, 462 Sidereus nuncius (Galileo) 213 Sierpinski, Vaclav 203 Triangle de Sierpinski 203–204, 204
tamis d'Eratosthène 410, 462–463
notation sigma 459, 488 sigma au carré 481 nombre signé. Voir chiffres entiers significatifs 168, 409 chiffres similaires 456, 463 triangles similaires 1–2 fraction simple 205 intérêt simple 275 racine simple 451 simplification, par annulation 56
Simpson, Thomas 463–464
Règle de Simpson 361, 464
équations linéaires simultanées 219–220, 234, 282, 315, 464, 486, 491 et déterminant de la matrice 126–128 résolu par la règle de Cramer 108–109, 128 fonction sinusoïdale 291, 509, 510–511 , 511 histoire de 28–29, 51, 444–445

règle des sinus. Voir la loi des sinus

pointe unique 492, 493
singularité 464
point singulier 464 puits 501–502 Sirotta,
Milton 232 unités SI 464–465 68-95-99.7 règle 356 Siyuan Yujian (Chu Shih Chieh) 383 courbe oblique 114 lignes obliques 465 asymétrie 465
Skolem, Thoralf 534 slide 15 puzzle (boss puzzle, quinzième puzzle) 391, 465–466, 466 règle à calcul 369–370, 466 pente (pente, pente) 132, 466–468, 467 forme d'interception de pente 164 surface lisse ou non lisse 357 Snell, Willebrord van Roijen 468–469 Loi de réfraction de Snell 365, 468, 468–469 bulles de savon 469, 472 Socrate 374

système solaire, stabilité mathématique de 296 angle solide 15, 469 géométrie solide 170 solide de révolution 57, 372, 382, 469–470, 500 solution par radicaux 3, 215, 470–471

Soma cube 218
"Quelques propriétés de Les nombres de Bernoulli" (Ramanujan) 435 source 501–502
courbe de remplissage d'espace 385
Spearman, Charles 438
Coefficient de Spearman 438–439
Méthode de Spearman 438
Théorie restreinte de la relativité 158
Gravité spécifique 18
Vitesse par rapport à la vitesse 519 Sphaerica (Menelaus) 336 Sphère 76, 136, 166, 471–472 Connectivité de 94 Diamètre de 130 Carte à quatre couleurs sur 200–201 grand cercle comme "droite" 314 volume de, par rapport au cylindre 20, 91, 115 remplissage sphérique 292, 472 coordonnées sphériques 472–473, 504 excès sphérique 474 géométrie sphérique 225–226, 227, 270, 323, 355–356, 472, 473–474 hélice sphérique 248 segment sphérique 472 triangle sphérique 472, 474 sphéroïde 161
spirale d'Archimède 372, 474, 476
spirales dans la nature 193 jeu de division 279, 279 carré 430, 474–475 crochets 50–51 matrice carrée 329 modèle carré 416, 416–417 nombres carrés 194, 194–195 pyramide carrée 423 racine carrée 157, 249, 451, 475–476, 486 quadrature du cercle (carrure du cercle, quadrature du cercle) 97, 238–239, 251–252, 313–314, 393, 476–477

règle de compression (résultat sandwich) 16, 321, 477, 477–478, 526
Règle SSS (côté-côté-côté) 1–2, 463
Stäckel, Paul 515
paradoxe du stade 533
problème de montée d'escalier 65 écart-type 44, 386, 481–482 vs moyenne et score z 537
forme standard. Voir scientifique notation
Méthodes statistiques pour Chercheurs (Fisher) 197, 415
statistiques 414, 437, 478 descriptives 116, 478–482 inférentielles 143, 268, 354, 478, 482–484 Bayes et 38–39 et théorème de la limite centrale 69–70

Steiner, Jakob 284, 484 Point de Steiner 484–485 Surface de Steiner 484 polyèdre étoilé 404 diagramme à tiges et à feuilles 479, 479 stéradian 15, 465, 469 projection stéréographique 485 Stevin, Simon 485–486 Stifel, Michael 180, 348–349 Stirling formule 122, 486
angle droit 14, 362 règle et compas 95 échantillonnage stratifié 407 strictement croissant/décroissant 261–262
distribution t de Student 484 test t de Student 415, 484 substitution 486 sous-factorielle 486–487, 491 règle de substitution pour l'intégration. Voir intégration : par substitution soustraction 146, 205, 487 soustraire 487 doublement successif 156
Sulbasutram 425 sommation (Σ) 173, 487–488
sommation, indice de 148 sommation problème 65 sommes de puissances 51, 488, 488–490 angles supplémentaires 14 surd 490 fonction surjective 208 « Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents » (Banach, Tarski) dés les fonctions s'arrêtent » (Lebesgue) 307 Su-yuan yu-chien (Chu Shih Chieh) 73–74, 75 syllogisme 27 logique symbolique. Voir logique formelle

Logique symbolique (Venn) 524
différence symétrique 131
symétrie 206–207, 490
Synagoge (Pappus) 239, 371–372
Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics (Carr) 435 Synopsis palmariorum matheseos (Jones) 393 Syntaxis mathematic (Ptolemy) 421–422

échantillonnage systématique 407 système d'équations 121, 491
« Systèmes de lignes droites dans un plan » (Hamilton) 245

Machine Translated by Google

J

Tabulae (Regiomontanus) 444
tacnode (osculation) 148
tacpoint 493
Tait, Peter 295
point de tangence. Voir point de contact
tangente (géométrique) 492, 493
tangente (trigonométrique) 132, 492, 510
plan tangent 492
théorèmes de tangente 76–77, 77
Tarski, Alfred 24, 35
Tartaglia, Niccolò 10, 60, 112, 190–191, 493, 493–494
diagramme de tâche 109 propriété tautochrone des pendules 114–115, 299
tautologie 494, 515
Taylor, ruisseau 240, 274, 324, 325, 494, 495
Taylor, Richard 190, 531
Séries de Taylor 152, 182, 240–241, 268, 271, 315, 324–325, 337, 409, 494–496 et approximation 16
convergence de 45
Le travail de Chebyshev sur 71 et la formule d'Euler 175
et théorème binomial général 45 et histoire du calcul 57 et permutations 391 de la fonction sinus 536
Tchebyshev. Voir la technique Chebyshev. Voir algorithm
tensor 447, 496
The Tenth (Stevin) 485
tera- (1012) 465
tessellation (recouvrement, carrelage) 403, 430, 475, 496–497, 497, 507
tesseract 256 « The Testing of Statistical Hypotheses in Relation to Probabilities A A priori" (Neyman) 354
tétragone. Voir dés quadrilatères tétraédriques 462
numéros tétraédriques 195, 497
tétraèdre 165, 396, 397, 403, 423, 497
tétromino 406
Algèbre de Teutsche (Rahn) 146
Thabit ibn Qurra 18
Thalès 238, 423, 497–498, 510
Théétète (Platon) 498
La grammaire des sciences (Pearson) 387
Théodore 82, 283, 475–476, 498
Théon d'Alexandrie 252–253
Théorème de Théon de Smyrne 99 (proposition) 498–499
théorème de Thales 77
Théorèmes énoncés par Ramanujan (Watson) 436
Theoria motus corporum coelestium (Gauss) 219
Théorie analytique de la chaleur (Fourier) 201
Théorie analytique des probabilités (Laplace) 301, 415
Théorie des parallèles (Lambert) 300
« Théorie des opérations linéaires » (Banach) 35
La théorie des jeux et Comportement économique (de Neumann et Morgenstern) 216, 350–351
La théorie des nombres (Hardy et Wright) 246
« Théorie des systèmes de rayons » (Hamilton) 245
problème à trois corps 299 coordonnées tridimensionnelles 63, 363
vecteurs tridimensionnels 520
symétrie de rotation triple 490
problème à trois utilités 233, 499, 499
pavage. Voir tessellation
Timée (Platon) 396, 397
temps, comme quatrième dimension 136, 256 graphe chronologique 479, 479 espace topologique 500 topologie 121, 307, 339, 499–500 Torricelli, Evangelista 114 tore 94, 399, 470, 500–501
Formule d'Euler pour 236
Théorème d'Euler et 177 et théorème de la courbe de Jordan 76, 288 et problème des trois utilités 499 ensemble totalement ordonné 365–366 tournoi (tournois à la ronde, digraphe complet) 501, 501–502 tours de Hanoï (Brahma) 443, 502–503 tractrice (courbe équitangentielle, tracteur) 503
Traité analytique des sections coniques (L'Hôpital) 310
Traité d'algèbre (Rolle) 449
Traité de dynamique (d'Alembert) 8
Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés (Lagrange) 299
Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides (d'Alembert) 8
Traité de mécanique céleste (Laplace) 301
Traité des propriétés des figures (Poncelet) 419
Traité des substitutions et des équations algébriques (Jordanie) 288
trajectoire 503
courbe transcendantale 114
nombres transcendantaux 11, 59, 297, 301, 317–318, 477
nombres transfinis 368
transformation 503–504 loi transitive 367
raisonnement transitif 26
translation 206, 225, 283–284
transmetteur 501–502
transposition de matrice 330
transposition 390
transversale 336, 375, 377, 504, 504
trapèze (trapèze) 23 , 24 , 430 , 504 règle
trapézoïdale d'intégration 360–361 problème du voyageur de commerce 55, 505
traverse 504, 504
Traité des Fluxions (Maclaurin) 324
Un traité d'algèbre (Maclaurin) 324
Traité d'algèbre (Wallis) 529
Traité sur la démonstration des problèmes d'algèbre (Omar Khayyám) 363
Traité sur les proportions humaines (Dürer) 231 Traité sur l'accord et le sinus (al-Kashi) 291 Traité sur l'équilibre des liquides (Pascal) 382 Traité sur l'algèbre universelle (Whitehead) 530 arbre (théorie des graphes) 233 triangle (trigon) 114, 505–508 aire de 23, 23, 249 diamètre de 130 droite d'Euler dans 174–175 angles extérieurs de 182–183 inégalité triangulaire 267, 425, 506, 508 nombres triangulaires 194 , 194–195, 349, 405, 497 trichotomie loi 31, 365, 367 trigone. Voir triangle Trigonometria (Pitiscus) 511 fonctions trigonométriques 254, 369
trigonométrie 16, 28, 239, 444–445, 508–512, 516–517
Trigonométrie (Simpson) 463
Trigonométrie et Double Algèbre (De Morgan) 122
trinôme 512
Le tripty en la science des nombres (Chuquet) 526
triple (3-uplet) 358
triple intégrale 148
triple tore 501
triple produit vectoriel 376, 448, 512
triangle trirectangulaire 474
trisectrice d'un angle 97, 239, 291, 372, 512, 512–513, 525
Paradoxe de Tristram Shandy 269, 513
trivial 183, 514
anneau trivial 449
solution triviale 513–514
tromino 406
troncature 452
table de vérité 25, 514, 514–515, 515
pour les biconditionnels 42 pour la conjonction 94 pour les contrapositifs 101–102 pour la disjonction 141 pour l'hypothétique 90, 90 pour la négation 348
Tsu Chung Chi. Voir Zu Chongzhi
Turing , Alan . -
théorème sécant 457, type 457 , en théorie des ensembles 454

U

"Über die Ajout transfinisseur Cardinalzahlen » (Zermelo) 533–534
« Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen » (Riemann) 227 « Über die Stabilität des Gleichgewichts » (Dirichlet) 140
Über die Zahl (Lindemann) 314
"Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" (Einstein) 158
Ulam, Stanislaw 15
opération unaire 364, 516
intervalle illimité 278
incertitude et erreur 167–168
fraction indéfinie 205–206
paradoxe du quiz inattendu (suspendu) 374–375, 375

Machine Translated by Google

distribution uniforme 480, 480
mouvement uniforme
522 union (fonctionnement fixe) 144, 460
théorème de factorisation unique. Voir théorème fondamental de l'arithmétique
solution unique 516
rapport unitaire 439
unité cercle 427, 516–517
unité règle du dénominateur
204 unité fraction. Voir la matrice
d'unité des fractions

égyptiennes. Voir identité matrice unité
sphère 469 calcul universel 199 langage universel 199
mathématiques universelles 199

quantificateur universel (« pour tous ») 430–431 inconnu (indéterminé, variable) 517 arrangement non ordonné. Voir combinaison
partition non ordonnée 381
intégrale sans restriction. Voir l'intégrale
incorrecte "Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik" (Dirichlet) 140

valence V. Voir degré d'un sommet
Vallée-Poussin, Charles-Jean de la 411, 518
Varahamihira 264
variable 517, 518–519
variance 106, 306, 481, 484
Variorum de rebus mathématicis responsorum (Viète) 525
Veblen, Oswald 288
vecteur 14, 142, 147, 164, 310, 519–520
et colinéarité 80
décomposition de 119
vecteur addition 376, 520
équation vectorielle de la ligne 520–521 du plan 521
champ vectoriel 101, 521
multiplication vectorielle 329, 520
opérations vectorielles 520 produit vectoriel. Voir espace vectoriel produit croisé 5, 71, 201, 243, 315, 520, 521–522 soustraction vectorielle 520 produit vectoriel triple de trois vecteurs 512
vélocité 132, 408, 519, 522–523 Venn, John 523–524 diagramme de Venn 123, 524, 524–525 Verhulst, Pierre-François 408 sommet 91, 233, 403, 505 angles verticaux 364 cordes vibrantes 8, 299 viergruppe. Voir groupe de Klein-four Viète, François (Franciscus Vieta) 10, 113–114, 348–349, 511, 525 La formule de Viète (Vieta's formule) 231, 393, 511, 525–526
vinculum 81, 526
Vinogradoff, Ivan 230
Vlacq, Adriaan 54, 320
Voevodsky, Vladimir 194
volume 526–527, 527 du cône 91, 173, 293, 527 du cube 111 du cylindre 115 , 156 de tronc 207, 527 comme concept mal défini 526 de parallélépipède 376 de solides de Platon 397 de prisme 412 de pyramide 173, 293, 423 de solides de même hauteur 67–68 de sphère 293 de sphère contre cylindre 20, 91, 115 du tétraèdre 497 von Neumann, John 216, 218, 415, 436
Vorlesungen über Zahlentheorie (Dirichlet) 140

théorie des vortex, fraction 125
vulgaire de Descartes 205

O

Waerden, Bartel Leendert van der 355 al-
Wafa, Abu 510
Wallace, William 165
portefeuille paradoxe 375
Wallis, Jean 63, 180, 269, 370, 528, 528–529 et nombres complexes 25
Produit de Wallis 269, 393, 486, 528, 529, 536
motif de papier peint 207
Wantzel, Pierre Laurent 149, 513
Waring, Edward 229
déformation de l'espace
447 Watson, George Neville 436
transitivité faible 365
Weaver, Warren 461
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm 5, 58, 284, 297, 312, 529–530
Inégalité des produits de Weierstrass 268
ensemble bien ordonné 530, 533 Wessel, Casper 25, 86 La pierre à aiguiser de Witte (Recorde)
443 Whitehead, Alfred North 199, 229, 452–454, 530
Whitworth, W. Allen 486
nombre entier 443, 530–531. Voir aussi nombre naturel
Widman, Johannes 6, 131, 398, 487 Wiles, Andrew John 190, 531

Théorème de Wilson 299
mot (tresses) 52
Wright, EM 246

Oui

Yang Hui 325
ans, longueur 333, 363
Yi, Tien-Lien 71
yocto- (10-24) 465
Yorke, James 71
yotta- (1024) 465
Youngs, JWT 200

Z

Zadeh, Lofti 212
Zahlbericht (Hilbert) 250
Zénon 57, 238, 270, 532
Paradoxes de Zénon 269, 532–533
zepto- (10-21) 465
Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand 31, 350, 461, 530, 533–534 zéro
(nul) 5, 6, 41, 51, 332, 534–535
dans l'algèbre booléenne 49 comme exposant 534 factoriel de 534 sur la droite numérique 359 comme nombre contre espace réservé
51, 293 et anneaux
448 zéro fraction 205
zéro matrice 147, 534 zéro de la fonction. Voir racine jeu à somme nulle 217, 534 terme zéro, de la série 223 fonction zêta 105, 174, 243, 246, 250, 393, 447–448, 489, 535–536 et preuves de nombre premier théorème des nombres 518
Zeteticorum libri quinque (Viète) 525
zetta- (1021) 465
Zhu Shijie. Voir Chu Shih Chieh
zone 472
z-score (valeur z) 357, 483, 537

Zu Chongzhi (Tsu Chung Chi) 74, 392, 537
"Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Einstein) 158

Zur Theorie der Abelschen Fonctionen (Weierstrass) 529