



Messung von Eigenspannungen mit Crack Compliance Methoden: Ein schlecht gestelltes inverses Problem mit einem Kernel in geschlossener Form

Marco Beghini und Tommaso Grossi *



DICI – Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale, Università di Pisa, 56122 Pisa, Italien;

marco.beghini@unipi.it *

Korrespondenz: tommaso.grossi@ing.unipi.it

Zusammenfassung: Mit Hilfe von Relaxationsmethoden können Restspannungen erhalten werden, indem ein progressiver Schnitt oder ein Loch in eine Probe eingebracht und die dadurch entstehenden Dehnungen oder Verschiebungen gemessen und berechnet werden. Wenn der Schnitt als kontrollierter rissähnlicher Defekt betrachtet werden kann, können die entspannten Dehnungen durch Ausnutzung des Überlagerungsprinzips von Bueckner durch ein gewichtetes Integral der durch den Schnitt freigesetzten Restspannung modelliert werden. Um Restspannungen zu bewerten, muss eine Integralgleichung gelöst werden. Aus praktischer Sicht basiert die Lösung normalerweise auf einer Diskretisierungstechnik, die die Integralgleichung in ein lineares System algebraischer Gleichungen umwandelt, deren Lösungen zumindest aus rechnerischer Sicht leicht zu erhalten sind. Das lineare System ist jedoch oft erheblich schlecht konditioniert. In diesem Artikel wird gezeigt, dass seine schlechte Konditionierung tatsächlich eine Folge einer viel tieferen Eigenschaft der zugrunde liegenden Integralgleichung ist, die sich auch in der diskretisierten Umgebung widerspiegelt. Tatsächlich ist das ursprüngliche Problem schlecht gestellt. Die Unstetigkeit ist alles andere als eine mathematische Sophisterei; tatsächlich beeinflusst es auch die Eigenschaften des diskretisierten Systems erheblich. Insbesondere führt es zum sogenannten Bias-Varianz-Kompromiss, einer Eigenschaft, die viele experimentelle Verfahren betrifft, bei denen der Analytiker gezwungen ist, einen gewissen Bias einzuführen, um eine Lösung zu erhalten, die nicht von Messrauschen überlagert wird. Sofern er nicht durch solide und vernünftige physikalische Annahmen über einige Eigenschaften der Lösung gestützt wird, ist der eingeführte Bias wiederum potenziell unendlich und beeinträchtigt jede Technik zur Quantifizierung von Unsicherheiten. Zur Unterstützung dieser Themen wird ein veranschaulichendes Zahlenbeispiel unter Verwendung der Rissnachgiebigkeitsmethode (auch als Schlitzmethode bekannt) vorgestellt. Die Verfügbarkeit der Gewichtsfunktion der linearen elastischen Bruchmechanik für das Problem ermöglicht eine vollständig analytische Formulierung der ursprünglichen Integralgleichung, mit der ein Bias aufgrund der numerischen Approximation des physikalischen



Zitat: Beghini, M.; Grossi, T.

Messung von Eigenspannungen mit Crack

Compliance Methoden: Eine

Schlecht gestelltes inverses Problem mit einem

Geschlossener Kernel. Appl. Mech. **2024**,

5, 475–489. <https://doi.org/10.3390/applmech5030027>

Erhalten: 1. Juni 2024

Überarbeitet: 5. Juli 2024

Akzeptiert: 10. Juli 2024

Veröffentlicht: 14. Juli 2024



Copyright: © 2024 bei den Autoren.

Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel

vertrieben unter den Bedingungen und

Bedingungen der Creative Commons

Namensnennungslizenz (CC BY)

([https://creativecommons.org/licenses/by/](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

4.0/).

Schlüsselwörter: Reststress; Entspannungsmethoden; schlechte Pose; schlechte Konditionierung; inverse Probleme

1. Einleitung

Bei der Messung von Spannungen, die durch äußere Lasten auf ein Bauteil erzeugt werden, steht selten eine Methode zur direkten Messung der Spannungen zur Verfügung. Viel häufiger wird eine indirekte Messung durchgeführt, beispielsweise durch Aufzeichnen der Verformungsfelder, die durch die Anwendung der äußeren Lasten in Bezug auf eine Konfiguration erzeugt werden, bei der (manchmal implizit) angenommen wird, dass sie nicht vorhanden sind [1]. Dehnungsmessstreifen messen beispielsweise Verformungen, die auf den Moment des Aufklebens bezogen sind; berührungslose Methoden wie die digitale Bildkorrelation (DIC) [2–6] oder die elektronische Speckle-Muster-Interferometrie (ESPI) [7–9] messen Änderungen in den Verschiebungsfeldern durch Vergleich eines Anfangs- und eines Endzustands. Konstitutive Modelle des Materials – normalerweise elastisch – werden dann verwendet, um die Spannungen zu rekonstruieren. Im Falle von Eigenspannungen, die in Abwesenheit äußerer Lasten wirken und in erster Linie entstehen, um die Verträglichkeit der während des Produktionsprozesses entstehenden Verschiebungsfelder wiederherzustellen, fehlt gerade ein ungespannter Referenzzustand. Und genau in diesem Fehlen liegt die grundsätzliche Schwierigkeit bei der Messung. Beugungsmethoden [11] befassen sich mit diesem Problem, indem sie den absoluten Abstand der Kristallgitterebenen messen und ihn mit einem Referenzwert vergleichen, der für

das spezifische Material mit geeigneten Techniken. Dieser Prozess liefert die durch die Spannungen verursachte Verformung, die dann ihre Berechnung mit geeigneten konstitutiven Modellen ermöglicht. Relaxationsverfahren hingegen erzeugen physikalisch einen spannungsfreien Zustand, indem sie einen Teil des Bauteilbereichs entfernen oder abtrennen [12–19]. Diese Aktion setzt bestimmte Spannungskomponenten auf Null, was zu messbaren Verformungen führt, die mit den zuvor wirkenden Restspannungswerten korreliert werden können. Mit anderen Worten wird der Prozess, der normalerweise für durch äußere Lasten verursachte Spannungen verwendet wird, metaphorisch umgekehrt durchgeführt, wobei die Verformung gemessen wird, die durch das Entfernen der zu messenden Spannungen entsteht.

Aus technologischen Gründen ist es oft nicht möglich, auf das gesamte Verformungsfeld zuzugreifen, was eine punktweise Bestimmung der vollständigen Spannungsfelder ermöglichen würde. Stattdessen sind nur Messungen bestimmter Verformungskomponenten innerhalb eines Teilbereichs der analysierten Probe während des Schneid- oder Abtragungsprozesses verfügbar. Bei der Verwendung von Dehnungsmessstreifen liefert jedes Raster eine annähernd punktweise Messung einer einzelnen Verformungskomponente. Bei Vollfeldtechniken wird bestenfalls die Verformung der äußeren Oberflächen des Bauteils gemessen, wobei die räumliche Auflösung begrenzt ist und vom jeweiligen Messinstrument abhängt.

Dank des Überlagerungsprinzips von Bueckner [20] ist es dennoch möglich, die Spannungen zu rekonstruieren, indem man wie folgt vorgeht. Man geht davon aus, dass die zu messenden Restspannungen zum Bereich einer geeigneten Funktionsbasis [21] gehören (oft stückweise konstante Funktionen oder Polynome). Dann wird die Linearität des elastischen Problems ausgenutzt, um die Verformungshistorien zu erzeugen, die der gewählten Spannungsbasis entsprechen. Schließlich wird diese lineare Beziehung invertiert, um die erforderlichen Spannungen aus den gemessenen Verformungen zu erhalten.

Die Tatsache, dass durch Relaxationsmethoden hervorgerufene Verformungen durch die Summierung der einzelnen Beiträge jedes punktwisen Wertes des Spannungsfelds berechnet werden können, wird im Allgemeinen durch eine Integralgleichung dargestellt, deren typische Form die folgende ist:

$$\ddot{y}(h) = \int_0^h A(h, z) \ddot{y}(z) dz \quad (1)$$

wobei h die geometrischen Eigenschaften der Domänentrennung (wie etwa die Länge eines Schnitts) charakterisiert, während z als räumliche Koordinate in der Probe fungiert. Tatsächlich besagt Gleichung (1), dass bei einer gegebenen Schnittlänge h die erzeugten Verformungen eine gewichtete Summe – mit Gewichten bezeichnet als $A(h, z)$ – der durch den Schnitt gelockerten Restspannungen sind, da die Bauteilnachgiebigkeit Punkt für Punkt von der Stelle abhängt, an der die Spannungen entfernt werden [17,22–24]. $A(h, z)$ wird üblicherweise als Einflussfunktion, Kalibrierungsfunktion oder Kernel des Problems bezeichnet; in einer diskreten Umgebung wird es zu dem, was allgemein als Kalibrierungsmatrix des Problems bezeichnet wird. Natürlich hängt die tatsächliche Form von Gleichung (1) vom spezifischen Problem ab, obwohl diese mathematische Struktur im Allgemeinen beibehalten wird.

Wie aus der Literatur über Eigenspannungen bekannt ist, ist die Ermittlung von Spannungen aus Verformungen nach Gleichung (1) ein Problem, das die Genauigkeit der verwendeten Messinstrumente erheblich in Frage stellt, da die resultierende Berechnung oft extrem empfindlich auf Eingabefehler reagiert [25]. Formal würde man sagen, dass das Problem sehr schlecht konditioniert ist.

Die Autoren wiesen in [26,27] darauf hin, dass die Unstetigkeit des Problems eigentlich nur ein Symptom einer anderen (und wohl wichtigeren) mathematischen Eigenschaft ist, die als Unstetigkeit bezeichnet wird und die aus der mathematischen Literatur bekanntermaßen Gleichung (1) betrifft. Ihr Hauptmerkmal besteht in einem Mangel an Kontinuität der Lösung ausgehend von den Ausgangsdaten, was aus praktischer Sicht zu Lösungen mit potenziell unendlichen Fehlern führt, die von Messinstrumenten mit endlichen Konfidenzintervallen erhalten werden.

In den früheren Arbeiten der Autoren [28–31] konzentrierte sich die Diskussion auf die Bohrlochmethode, bei der die Gleichung genau mit Gleichung (1) übereinstimmt. In diesem Beitrag wird gezeigt, dass eine wichtige Klasse von Eigenspannungsmessverfahren, die aus der Bruchmechanik entlehnt sind und unter dem Namen Rissnachgiebigkeitsmethoden laufen, unter denselben Effekten leidet, obwohl die Gleichung, auf der sie basieren, leicht von Gleichung (1) abzuweichen scheint. In dieser Hinsicht zielt die Arbeit darauf ab, das Verständnis der mathematischen Grundlagen zu verbessern, auf denen die Methode basiert.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: • In

Abschnitt 2 werden Rissnachgiebigkeitsmethoden und ihre grundlegenden Gleichungen vorgestellt.

Dabei wird auf einige grundlegende Konzepte der Bruchmechanik zurückgegriffen, um so zur Gleichung des Problems bezüglich der Rekonstruktion von Eigenspannungen zu gelangen.

- In Abschnitt 3 werden die erhaltenen Gleichungen verwendet, um einige numerische Experimente durchzuführen, die die besonderen Merkmale der Fehlstellung aufdecken.
- In Abschnitt 4 werden die praktischen Konsequenzen für den Analytiker erörtert, der bei einer Eigenspannungsmessung mit ungünstigen Situationen umgehen muss.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1. Rissnachgiebigkeitsmethoden

Eine der intuitivsten Möglichkeiten, einen Teil einer Komponente für eine Eigenspannungsanalyse mechanisch abzutrennen, ist wohl die Einführung eines Schnitts, der zwei neue Oberflächen erzeugt, auf denen der Zugvektor zwangsweise Null ist. Die entsprechende Eigenspannungsmesstechnik wurde ursprünglich als Rissnachgiebigkeitsmethode [16] bezeichnet und wurde erst in den darauffolgenden Jahren als Schlitzmethode [32] bekannt. Wenn die Linearität des Problems gilt, gilt auch das Überlagerungsprinzip von Bueckner [20], sodass die durch den Schnitt erzeugten Verformungsfelder denen entsprechen, die durch die Anwendung von Zugkräften mit entgegengesetztem Vorzeichen zu den ursprünglich auf die erzeugten Oberflächen wirkenden erzeugt werden (Abbildung 1).

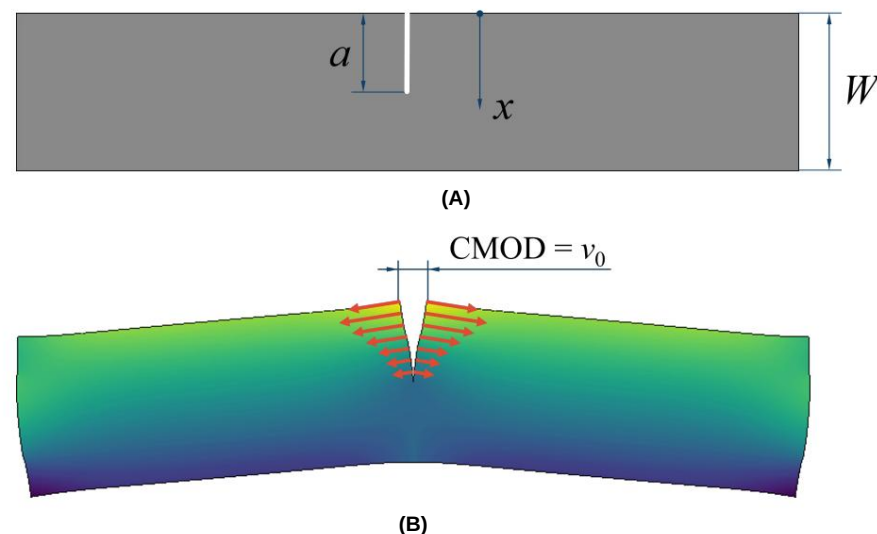


Abbildung 1. Eine klassische Anwendung des Überlagerungsprinzips von Bueckner. In eine Probe wird in einem Bereich, in dem Zugeigenspannungen vorhanden sind, ein Schnitt eingebracht. Diese Aktion erzeugt Verschiebungsfelder, die denen entsprechen, die mit dem in der Abbildung dargestellten einfachen elastischen Randproblem erhalten werden, wobei die angewendeten Zugkräfte einfach das Vorzeichen umgekehrt haben. (a): Benennung der geometrischen Variablen: Risslänge a , räumliche Koordinate x und Probenbreite W . (b): Äquivalentes Randwertproblem, farbcodiert nach der Größe der Verschiebungen entlang der Normalen der Rissfläche. Zugkräfte werden als rote Pfeile dargestellt.

Dank der breiten Verfügbarkeit von Finite-Elemente-Analysen (FE) hat sich der Stand der Technik für Relaxationsmethoden dahingehend entwickelt, dass die Kalibrierungsmatrix des Problems direkt in diskreter Form durch numerische Simulationen generiert wird – wie in Abbildung 2 –, obwohl diese Entwicklung manchmal dazu geführt haben mag, dass die ursprüngliche mathematische Natur des Problems übersehen wurde. Aufgrund ihrer hohen Genauigkeit werden Dehnungsmessstreifen normalerweise auf der Vorder- oder Rückseite angebracht, um Dehnungen an der Probenoberfläche aufzuzeichnen, anstatt Verschiebungsmessgeräte zu verwenden. Unabhängig davon, ob tatsächlich Verschiebungs- oder Dehnungsmessungen durchgeführt werden, wird ein lineares System erhalten. Wie in [26,27]

eine diskrete Realisierung einer Integralgleichung wie Gleichung (1), die dann alle ihre grundlegenden Probleme behält.

Bevor FE-Analysen zum Standard für die Konstruktion von Kalibrierungsmatrizen wurden, hatten Rissnachgiebigkeitsmethoden den großen Vorteil, dass sie die Verwendung theoretischer Ergebnisse aus der Bruchmechanik zur Formulierung der Lösungsgleichungen des Problems ermöglichten [33,34]. Tatsächlich gehören die Lösungsfelder, die einem ebenen Riss in einem halbunendlichen oder rechteckigen Bereich entsprechen, zu den häufigsten Ergebnissen der Bruchmechanik [35], mit denen eine Gleichung wie Gleichung (1) erhalten werden kann, ohne auf numerische Berechnungen zurückgreifen zu müssen.

Beispielsweise ist für eine gegebene Rissflächennormaltraktion $\ddot{y}(x)$ der Spannungsintensitätsfaktor (SIF) für ein 2D-Randwertproblem, das einen Riss der Länge a enthält, kann durch die folgende Gleichung berechnet werden [35]:

$$KI(a) = \int_0^A h(a, x) \ddot{y}(x) dx \quad (2)$$

wobei $h(a, x)$ eine Gewichtsfunktion (WF) ist, die nachweislich nur von der Geometrie des gerissenen Körpers abhängt. Wie Rice [36] gezeigt hat, kann $h(a, x)$ effektiv wie folgt berechnet werden, wenn $KI(a)$ und die Rissflächenverschiebung $v(a, x)$ – gemessen von der unverformten Rissoberfläche – für eine gegebene Mode I- Belastung bekannt sind

$$x) h(a, x) = \frac{E^y}{KI(a)} \frac{\ddot{y}v(a, x)}{\ddot{y}a} \quad (3)$$

Erinnern Sie sich daran, dass E^y hängt davon ab, ob ebene Spannungs- oder ebene Dehnungsbedingungen angenommen werden.

Da $h(a, x)$ für viele 2D- Geometrien leicht verfügbar ist – im schlimmsten Fall durch eine Reihenentwicklung – , kann man die Gleichungen (2) und (3) verwenden, um die Beziehung zwischen den gewünschten Restspannungen und anderen messbaren Größen aufzuschreiben . Wenn beispielsweise nach und nach ein längerer Riss eingeführt wird, kann man die SIF mit einer beliebigen Technik (wie der photoelastischen Methode [33]) messen und sie mit $\ddot{y}(x)$ über Gleichung (2) korrelieren , die selbst eine sehr ähnliche mathematische Struktur wie Gleichung (1) hat . Tatsächlich sind sie beide Integralgleichungen erster Art nach Volterra [37].

Alternativ kann man die Rissöffnungsverschiebung (CMOD) $2v(a, 0)$ messen und sie mit den Restspannungen korrelieren, indem man wie folgt vorgeht. Aus Gleichung (3) erhält man

$$v(a, 0) \ddot{y} v0(a) = \frac{1}{E^y} \int_0^A h(s, 0) KI(s) ds \quad (4)$$

Durch Einsetzen von $KI(s)$ aus Gleichung (2) und Umstellen:

$$v0(a) = \frac{1}{E^y} \int_0^A h(s, 0) \int_0^s h(s, t) \ddot{y}(t) dt ds \quad (5)$$

$$v0(a) = \frac{1}{E^y} \int_0^A \int_0^s h(s, 0) h(s, t) \ddot{y}(t) dt ds \quad (6)$$

Dann kann man definieren

$$\ddot{y}(a, x) \ddot{y} h(a, 0) h(a, x) \quad (7)$$

und schreibe

$$v0(a) = \frac{1}{E^y} \int_0^A \int_0^s \ddot{y}(s, t) \ddot{y}(t) dt ds \quad (8)$$

Dies ist eine weitere Integralgleichung, die $\ddot{y}(x)$ und die messbare Größe $v0(a)$ in Beziehung setzt, wenn auch etwas komplexer als Gleichung (2). Die Kernelfunktion $\ddot{y}(a, x)$ hat Einheiten von $1/\text{Länge}$ und behält einige Eigenschaften von Gewichtsfunktionen bei, darunter eine integrierbare Singularität bei $x = a$.

Gleichung (8) erfordert keine FE-Analysen zur Ermittlung der Eigenspannungen – da $\ddot{y}(a, x)$ in der Regel verfügbar ist – und ist von großer praktischer Bedeutung, da Rissöffnungsverschiebungen

Messgeräte sind in Laboratorien, in denen Bruchmechanik -Experimente durchgeführt werden, weit verbreitet. Trotz der offensichtlichen Unterschiede zu Gleichung (1) und ihrer vollständig analytischen Formulierung zeigt der nächste Abschnitt, dass dieses Problem immer noch schlecht gestellt ist.

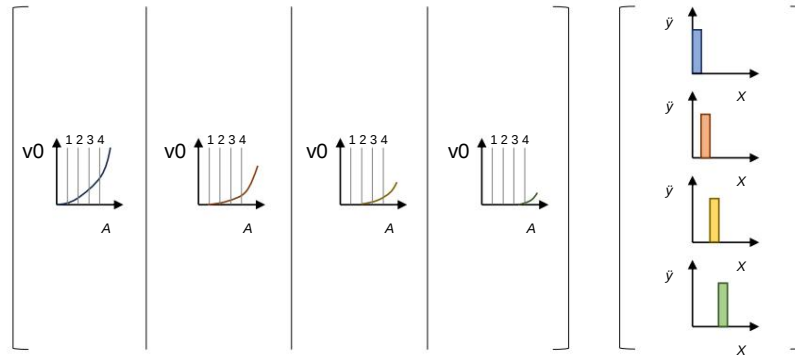


Abbildung 2. Standardverfahren zum Erstellen der Kalibrierungsmatrix in einer diskretisierten Version von Gleichung (1). Für jedes Element der gewählten Spannungsbasis – die in diesem Fall den Satz stückweise konstanter Spannungsverteilungen umfasst – werden die entsprechenden Verschiebungen oder Dehnungen, die aus einem hypothetischen Durchlauf desselben Messvorgangs resultieren, simuliert und als Spalten der Kalibrierungsmatrix aufgezeichnet. Anschließend können unter Ausnutzung des Überlagerungsprinzips der linearen Elastizität die Verschiebungen/Dehnungen, die jedem Element des gewählten Spannungsraums entsprechen, durch eine lineare Kombination der Spalten der Kalibrierungsmatrix simuliert werden. Jedes Element der Spannungsbasis ist

mit einer anderen Farbe dargestellt.

2.2. Schlechte Pose

Eine besondere Eigenschaft von Gleichung (8) besteht darin, dass sie als Tiefpassfilter für Schwingungen von $\ddot{y}(x)$ entlang ihrer Definitionsebene fungiert. Dies ist auch aus physikalischer Sicht intuitiv. Der CMOD-Wert wird durch kurzzeitige Schwankungen der auf die Rissflächen ausgeübten Spannungen nur minimal beeinflusst, da das Saint-Venant-Prinzip [38] sicherstellt, dass Randbedingungen mit den gleichen resultierenden Einwirkungen auf einer gegebenen Dimensionsskala Deformationsfelder erzeugen, deren Unterschiede auf einen vergleichbar großen Bereich beschränkt sind. Folglich beeinflussen Zugkräfte mit stark oszillierendem Verhalten den CMOD hauptsächlich durch ihre über längere Dimensionsskalen gemittelten Werte, ohne dass lokal selbstausgleichende Spitzen das Ergebnis beeinflussen.

Diese intuitive Aussage hat auch eine formale mathematische Erklärung. Die Riemann-Das Lebesgue-Lemma (siehe [39]) stellt sicher, dass, wenn $\ddot{y}(a, x)$ auf seiner Definitionsmenge integrierbar ist, dann

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^A \ddot{y}(a, t) \sin(Nt) dt = 0 \quad (9)$$

$\ddot{y} \in [0, a_{\max}]$

In ähnlicher Weise kann durch Anwendung des Lebesgue'schen Satzes der dominierten Konvergenz [40] eine weitere Aussage gezeigt werden, dass die Integration einer Verschwindenfunktion für $N \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, so dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^A \int_0^s \ddot{y}(s, t) \sin(Nt) dt ds = \lim_{N \rightarrow \infty} vN(a, 0) \quad (10)$$

$\ddot{y} \in [0, a_{\max}]$

Dieses scheinbar abstrakte mathematische Merkmal hat enorme praktische Auswirkungen. Für jede positive reelle Zahl k können wir durch Wahl eines ausreichend großen N eine Restspannung $(a, 0)$ auf dem gemessenen $\ddot{y}$ -Verteilung $\ddot{y}(x) = k \sin(Nx)$, das einen beliebig geringen (aber nicht Null-) Effekt hat v CMOD erzeugen. Aufgrund der Problemlinearität bedeutet dies, dass die gemessenen Proben $(a, 0)$ eine andere Lösung v gestört werden kann, die sich von der wahren Lösung um k erhalten, die durch eine beliebig niedrige Größe $\sin(Nx)$ unterscheidet, die wiederum durch die anfängliche Wahl von k beliebig hoch gemacht werden kann.

Der resultierende Effekt ist eine unendliche Empfindlichkeit gegenüber den Eingangsfehlern: durch beliebig kleine Messstörungen kann der Lösungsfehler nicht durch irgendeine

Ungleichheit. Ein mathematisches Problem, das diesen Effekt zeigt, wird als schlecht gestelltes Problem bezeichnet. Wie in Abschnitt 3 erläutert, wird das Problem in unendlichdimensionalen Funktionsräumen jedoch selten analytisch gelöst, da das übliche Lösungsverfahren eine Diskretisierungsphase umfasst, auf die dann numerische Berechnungen folgen.

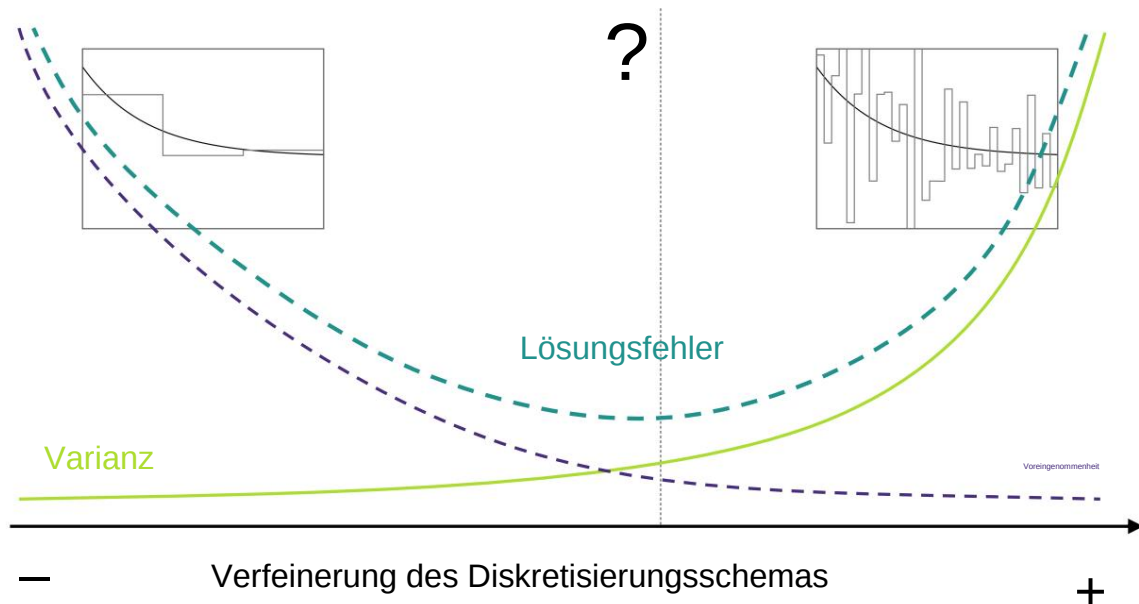


Abbildung 3. Bildliche Darstellung des Bias-Varianz-Kompromisses, mit dem der Restspannungsanalytiker bei der Wahl des Diskretisierungsschemas typischerweise konfrontiert ist. Mit zunehmender Anzahl der in der Basis, die die Spannungen umfasst, zulässigen Freiheitsgrade nimmt die Varianz der Lösung (hellgrüne Kurve) in Bezug auf die Empfindlichkeit gegenüber Messfehlern zu. In einem Versuch, diese Empfindlichkeit durch Begrenzung der Freiheitsgrade zu verringern, wird ein Bias (blaue Kurve) in die Lösung eingeführt. Wenn sowohl die Varianz als auch der Bias beobachtbar wären, könnte das Diskretisierungsschema gewählt werden, das die „beste“ Lösung erzeugt (d. h. das Minimum der türkisfarbenen Kurve); der Bias ist jedoch nicht direkt beobachtbar.

Durch die Erfassung einer endlichen Anzahl von Messpunkten und die Darstellung der Lösung mit einer endlichen Anzahl von Koordinaten wird nur eine endlichdimensionale Annäherung an das ursprüngliche Problem gelöst. Bei diesem neuen Problem kann die Fehlerempfindlichkeit nicht unendlich sein – die Dimensionsskala der in der Lösung zulässigen Schwingungen kann nicht unbegrenzt abnehmen –, sie kann jedoch hoch genug sein, um die Genauigkeit der verwendeten Messinstrumente auf die Probe zu stellen. In diesem Fall spricht man von einem schlecht konditionierten Problem, das lediglich eine Folge der Diskretisierung eines schlecht gestellten Problems ist.

Das auffälligste Merkmal eines schlecht gestellten Problems ist jedoch der unterschiedliche Grad der Fehlkonditionierung, der davon abhängt, wie sehr das diskretisierte Problem dem ursprünglichen Problem ähnelt. Je mehr dies der Fall ist, desto stärker ist das resultierende Problem fehlkonditioniert. Um die Fehlkonditionierung zu zähmen, ist es verlockend, eine gröbere Diskretisierung mit nur wenigen Freiheitsgraden zu wählen, was jedoch zur Lösung eines verzerrten Problems führt. Schließlich wird ein sogenannter Bias-Varianz-Kompromiss definiert, der in Abbildung 3 dargestellt und in Abschnitt 4 anhand des vorgeschlagenen numerischen Experiments erörtert wird.

3. Numerische Untersuchungen

Um die theoretische Diskussion mit einem praktischen Zahlenbeispiel zu verbinden, wird folgende Verteilung der Zugeigenspannungen in einer langen Platte mit der Breite W wie in Abbildung 1 dargestellt:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(525 + 580 \frac{x}{B} \right) & 0 \leq \frac{x}{B} \leq 0,125 \\ 275 + 550 \frac{x}{B} & 0,125 < \frac{x}{B} \leq 0,875 \\ \frac{1}{2} \left(5325 - 580 \frac{x}{B} \right) & \frac{x}{B} > 0,875 \end{cases} \quad (\text{MPa}) \quad (11)$$

Eine Darstellung der angenommenen Spannungsverteilung ist in Abbildung 4 dargestellt. Gleichung (11) wird erhalten, indem ein hypothetischer Vierpunktbiegeversuch durchgeführt wird, der deutlich über der Streckgrenze eines Materials mit einem perfekt plastischen konstitutiven Modell liegt, und dann die aufgebrachte Last entfernt wird, wobei die Restspannungen mit der Aufgabe zurückbleiben, die Planarität des Abschnitts aufrechtzuerhalten. Das Problem besteht darin, die Restspannungsverteilung im Intervall $0 < x/B < 0,75$ durch die Rissnachgiebigkeitsmethode zu rekonstruieren, indem ein Schnitt in die Platte und Messen des CMOD während des Schnittfortschritts.

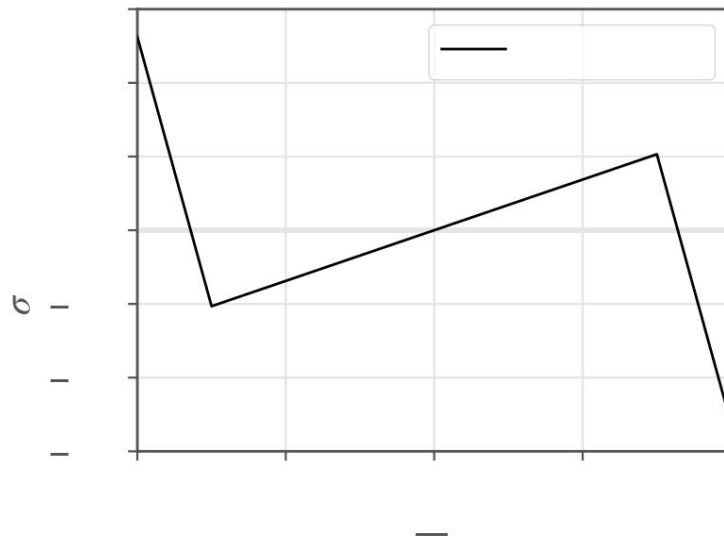


Abbildung 4. Im vorgeschlagenen numerischen Experiment verwendete Restspannungsverteilung, definiert durch Gleichung (11).

Die Einflussfunktion für dieses Problem ist aus [41] entnommen, wo sie als gekürzte Reihenentwicklung wiedergegeben wird:

$$h(a, x) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sum_{k=1}^5 F_k \left(\frac{A}{B}, \frac{xk1}{\sqrt{a}} \right) \frac{1}{A} \quad (12)$$

wobei F_k eine dimensionslose algebraische Funktion, deren Koeffizienten im Buch tabellarisch aufgeführt sind. Die entsprechende Kernfunktion $\tilde{y}(a, x) = h(a, 0)h(a, x)$ des Integraloperators in Gleichung (8) ist in Abbildung 5 angegeben. Durch Einbeziehung der Gleichungen (11) und (12) in Gleichung (8) erhält man den theoretischen CMOD $2v_0(a)$ als Funktion der Länge a des in die Probe eingebrachten Schnitts, wie in Abbildung 6 dargestellt.

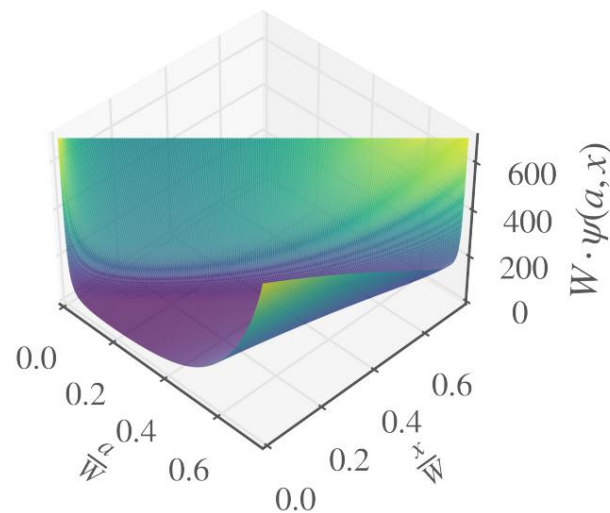


Abbildung 5. Diagramm der Kernfunktion $\ddot{y}(a, x)$, die verwendet wird, um den CMOD aus den bekannten Restspannungen entlang des eingeführten Risses durch eine doppelte Integration zu berechnen. Mit Einheiten von $1/\text{Länge}$ wird sie mit $1/W$ normalisiert. Die Kernfunktion ist auf der dreieckigen Domäne $0 \leq x < a < W$ definiert und weist eine integrierbare Singularität entlang ihrer Diagonale $x = a$ auf. Die X- und Y- Koordinaten werden durch die Probenbreite normalisiert; im Diagramm sind sowohl a als auch x auf $0,75 W$ begrenzt, was dem vorgeschlagenen numerischen Experiment entspricht. Das Oberflächendiagramm ist entsprechend der Z-Koordinate farbcodiert.

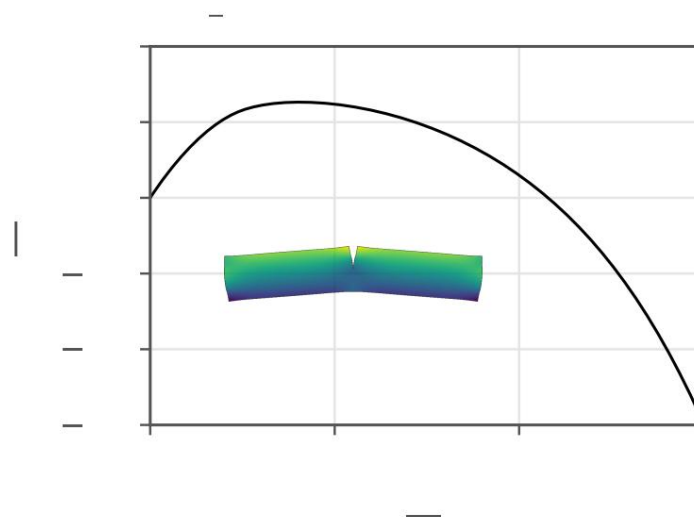


Abbildung 6. Normalisierter CMOD, der der durch Gleichung (11) definierten Restspannungsverteilung entspricht, nach einem progressiven Schnitt der normalisierten Länge $a/W < 0,75$ in einer langen Platte in ebener Dehnung. Da der eingeführte Schnitt eine Dicke ungleich Null hat, ist ein negativer CMOD zulässig und führt nicht automatisch zu einer Risschließung. Die Probe ist nach der Größe der Verschiebungen entlang der Rissflächennormalen farbcodiert.

Da $\ddot{y}(a, x)$ in geschlossener Form vorliegt, erlaubt Gleichung (8) die Berechnung des CMOD, der jeder beliebigen Verteilung entspannter Restspannungen $\ddot{y}(x)$ entspricht, durch eine doppelte Integration einer Funktion, eine Operation, die auch manuell analytisch durchgeführt werden kann. Das praktische Problem besteht jedoch darin, $v_0(a)$ zu messen und $\ddot{y}(x)$ zu finden, was eine Umkehrung des in Gleichung (8) definierten Operators erfordert. Leider gibt es, mit wenigen Ausnahmen, keinen analytischen Ausdruck dieser inversen Beziehung, also einen Ausdruck in geschlossener

, das die Bestimmung von $\ddot{y}(x)$ aus $v_0(a)$ ermöglicht, ist im Allgemeinen nicht verfügbar. Daher wird auch hier das Schema aus Abbildung 2 übernommen.

Es wird ein endlichdimensionaler Spannungsraum gewählt, der von einer geeigneten Basis aufgespannt wird. Anschließend wird die Kalibrierungsmatrix für das diskretisierte Problem berechnet, indem die CMOD entsprechend den Elementen der Spannungsbasis bei einer festen Anzahl von Schnittlängen ausgewertet wird. Der einzige Unterschied zum üblichen Stand der Technik der Schlitzmethode besteht darin, dass dieser Vorgang hier analytisch durchgeführt werden kann, ohne auf FE-Analysen zurückzugreifen. Formal ausgedrückt: Wenn $\ddot{y} = [\ddot{y}_1(z), \ddot{y}_2(z), \dots, \ddot{y}_n(z)]$ die gewählte n-dimensionale Basis ist und $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ der Vektor der m Schnittlängen ist, bei denen die CMOD untersucht wird, kann man eine Matrix definieren

$$A_{ij} = \int_0^{Kl} \int_0^s \ddot{y}(s, t) \ddot{y}_j(t) dt ds \quad (13)$$

so dass für eine gegebene Restspannungsverteilung $\ddot{y}(x) = \sum_{j=1}^N \ddot{y}_j \ddot{y}_j(x)$ die folgende Beziehung gilt:

$$\begin{aligned} v(a_i, 0) &= \int_0^{Kl} \int_0^s \ddot{y}(s, t) \ddot{y}_j(t) dt ds \\ &= \int_0^{Kl} \int_0^s \ddot{y}(s, t) \sum_{j=1}^N \ddot{y}_j \ddot{y}_j(t) dt ds \\ &= \sum_{j=1}^N \ddot{y}_j \int_0^{Kl} \int_0^s \ddot{y}(s, t) \ddot{y}_j(t) dt ds \\ &= \sum_{j=1}^N \ddot{y}_j A_{ij} \end{aligned} \quad (14)$$

Durch Aufzeichnen der gemessenen CMODs in einem Array $\mathbf{v} = [v(a_1, 0), v(a_2, 0), \dots, v(a_m, 0)]$ und Sammeln der Koordinaten der Restspannungsverteilung in Bezug auf die gewählte Basis $\ddot{y} = [\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_n]$ wird ein lineares System erhalten, das die Diskretisierung der Gleichung (8) darstellt:

$$A\ddot{y} = \mathbf{v} \quad (15)$$

Schließlich wird Gleichung (15) im Allgemeinen mit der Methode der kleinsten Quadrate gelöst, indem man nach der Lösung sucht, die die aufgezeichneten Messpunkte am besten approximiert. Tatsächlich ist es recht üblich, die statistischen Vorteile auszunutzen, die sich aus der Verwendung von mehr Abtastpunkten als unbedingt notwendig ergeben [16].

In dieser Analyse werden zwei unterschiedliche Spannungsräume verwendet, da sie in der Eigenspannungsforschung weit verbreitet sind: der Raum der stückweise konstanten Funktionen und der Raum der Polynome, die üblicherweise als Integralmethode [21] bzw. Potenzreihenmethode [42] bezeichnet werden. Um den Bias-Varianz-Kompromiss zu untersuchen, wird eine feste Anzahl von 32 untersuchten Schnittlängen angenommen, während die Spannungsbasisdimension zwischen 1 und 32 variiert wird; bei der Integralmethode wird dies durch Erhöhen der Anzahl der Berechnungsintervalle erreicht, während dies bei der Potenzreihenmethode durch Hinzufügen von Termen höherer Ordnung in der Polynomentwicklung erreicht wird.

Nur für die numerischen Berechnungen wird $W = 20$ mm angenommen, während der Standardfehler des CMOD-Messinstruments mit $1 \mu\text{m}$ angenommen wird. Der wahre CMOD – ermittelt durch die direkte Anwendung von Gleichung (8) – wird dann an den geprüften Schnittlängen abgetastet und mit einem iid-Gauß-Rauschen gestört, dessen Standardabweichung dem angenommenen Fehler entspricht. Insgesamt werden 1000 zufällige Störungen des wahren CMOD abgetastet und eine gleiche Anzahl von Ergebnissen in Bezug auf die ermittelten Eigenspannungen erhalten. Darüber hinaus werden für jedes Diskretisierungsschema

zwei zusätzliche Lösungen berechnet: • Die ideale Lösung, also diejenige, die perfekten, fehlerfreien CMOD-Messungen entspricht. • Die beste Lösung, also das Element der gewählten Spannungsbasis, das die wahre Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten annähert.

Alle Ergebnisse sind in den Abbildungen 7 und 8 zusammengefasst und entsprechen jeweils der Anwendung der Integralmethode und der Potenzreihenmethode.

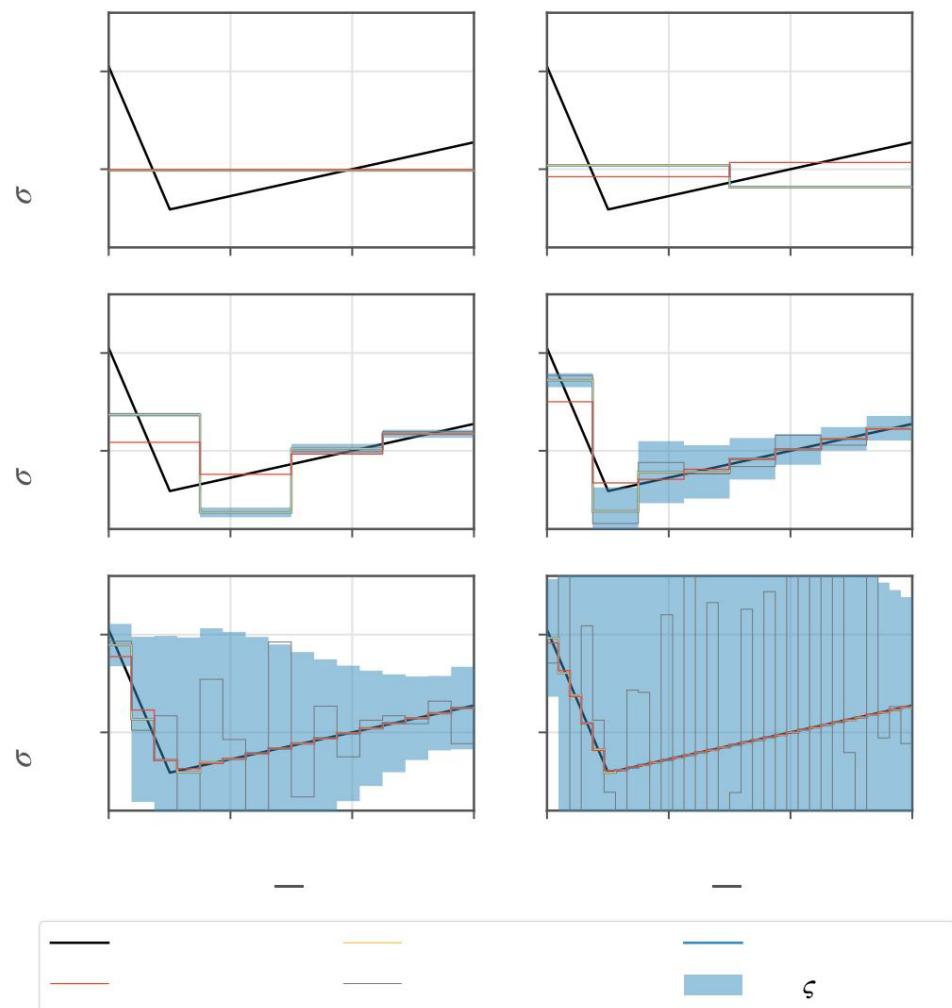


Abbildung 7. Ergebnisse der numerischen Experimente, die durch Verwendung des endlichdimensionalen Spannungsraums, der aus stückweise konstanten Funktionen besteht, erhalten wurden. Insgesamt werden 1000 zufällige Störungen des theoretischen CMOD, der $\ddot{y}(x)$ entspricht, erzeugt, das durch Gleichung (11) definiert ist, dann werden die Restspannungslösungen durch Invertieren des in Gleichung (15) angegebenen linearen Systems ermittelt. Die beste Lösung ist diejenige, die der wahren Lösung am besten nahe kommt; die ideale Lösung ist diejenige, die mit fehlerfreien Messungen erhalten würde. Bei niedrigdimensionalen Diskretisierungen ist die Varianz der erhaltenen Lösung gering, aber der Spannungsraum selbst ist nicht in der Lage, die wahre Lösung darzustellen, wodurch eine Verzerrung eingeführt wird; außerdem entspricht die ideale Lösung nicht einmal der besten. Bei hochdimensionalen Diskretisierungen konvergiert die ideale Lösung zur wahren, aber die Verteilung der erhaltenen Lösungen weist eine praktisch unbrauchbare Varianz auf.

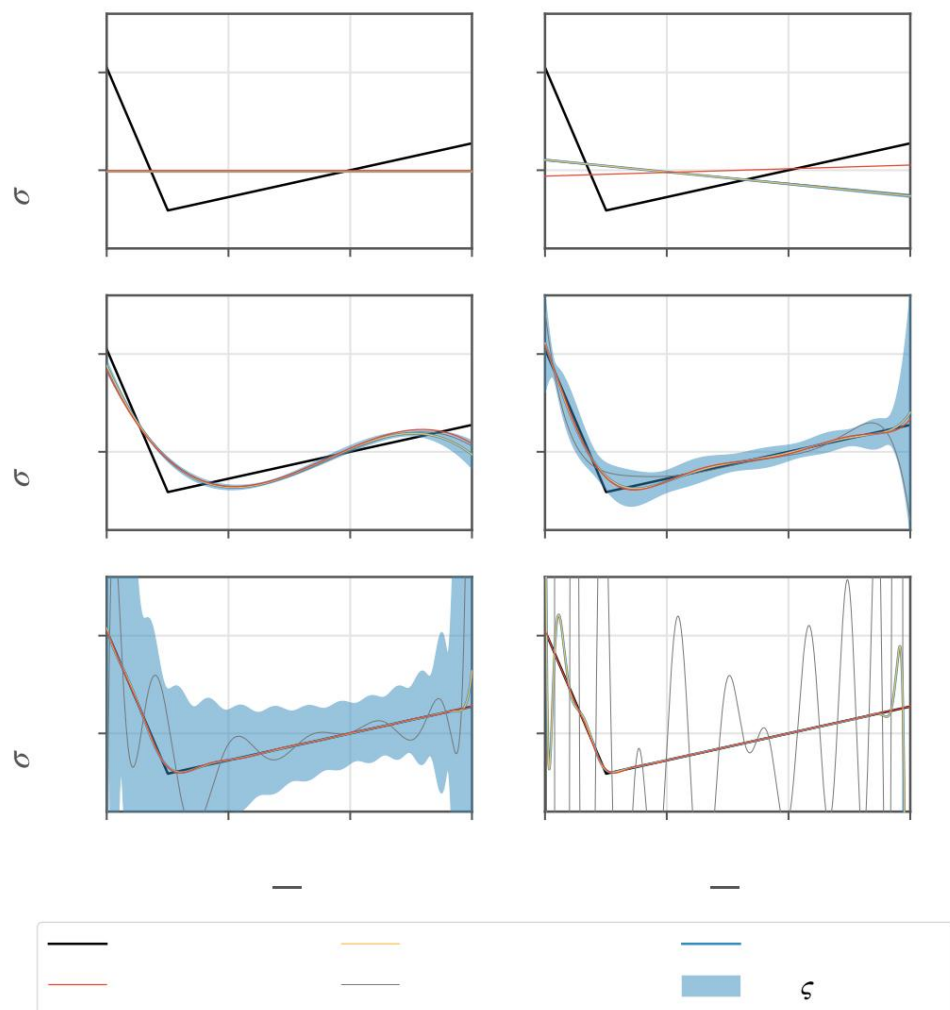


Abbildung 8. Ergebnisse der numerischen Experimente, die durch Verwendung des endlichdimensionalen Spannungsraums bestehend aus Polynomen erzielt wurden. Insgesamt werden 1000 zufällige Störungen des theoretischen CMOD entsprechend $\tilde{y}(x)$, definiert durch Gleichung (11), erzeugt, dann werden die Restspannungslösungen durch Invertieren des in Gleichung (15) angegebenen linearen Systems ermittelt. Die beste Lösung ist diejenige, die der wahren Lösung am besten nahe kommt; die ideale Lösung ist diejenige, die mit fehlerfreien Messungen erzielt würde. Bei niedrigdimensionaler Diskretisierung ist die Varianz der erhaltenen Lösung gering, aber der Spannungsraum selbst ist nicht in der Lage, die wahre Lösung darzustellen, wodurch eine Verzerrung entsteht; außerdem entspricht die ideale Lösung nicht einmal der besten. Bei hochdimensionalen Diskretisierungen konvergiert die ideale Lösung zur wahren Lösung, aber die Verteilung der erhaltenen Lösungen weist eine praktisch unbrauchbare Varianz auf.

4. Diskussion

Die Abbildungen 7 und 8 veranschaulichen das deutlichste Symptom der Unstetigkeit eines inversen Problems. Wenn die Anzahl der Freiheitsgrade in der endlichdimensionalen Diskretisierung gering ist, ist die Fehlerempfindlichkeit gering und die Lösungen sind weitgehend unabhängig von Messrauschen. Die gewählte Basis ist jedoch nicht in der Lage, die wahre Lösung korrekt darzustellen, sodass das erhaltene Ergebnis eine Verzerrung aufweist – die möglicherweise gefährlich ist, wenn es um die strukturelle Sicherheit geht – im Vergleich zum exakten Ergebnis. Wie in [27] angemerkt, ändert sich die Situation nicht, selbst wenn die erhaltene Lösung als die beste Darstellung des exakten Ergebnisses innerhalb der gewählten Basis interpretiert wird, was im Fall der Integralmethode mit dem Durchschnitt der wahren Lösung über ein Berechnungssubintervall übereinstimmen würde. Wie in den Abbildungen gezeigt, ist sogar die Lösung, die fehlerfreien Messungen entspricht, im Vergleich zur besten Darstellung des exakten Ergebnisses im gewählten endlichdimensionalen Spannungsraum verzerrt.

Um den Fehler zu verringern, kann die Zahl der Freiheitsgrade erhöht werden, sodass die endlichdimensionale Lösung eine praktisch vernünftige Annäherung an den ursprünglichen unendlichdimensionalen Raum darstellt. Nichtsdestotrotz führt dies wiederum zu einem Inversionsprozess, der extrem empfindlich auf Messfehler reagiert, und damit zu einer Lösungsvarianz, die jedes erhaltene Ergebnis praktisch unbrauchbar macht. Dies ist in der Literatur seit langem bekannt, auch in Bezug auf andere Relaxationsmethoden, die nicht unbedingt die Einführung eines rissähnlichen Schnitts in der Probe erfordern [43–45]. Intuitiv ausgedrückt bringt mehr Freiheitsgrade das diskretisierte Problem näher an sein ursprünglich schlecht gestelltes Gegenstück heran, das unendlich empfindlich auf Eingabefehler reagiert. Beachten Sie, dass dieser Effekt nicht von einer unvollständigen Kenntnis des Integraloperators abhängt – wie dies bei einer numerischen Schätzung [46] der Fall ist –, weil in diesem Beispiel der Operator des direkten Problems analytisch bekannt ist. Dies ist der Hauptgrund, warum die Methode der Riss-Compliance in diesen Aspekten besonders aufschlussreich ist; dennoch hätten ähnliche Überlegungen auch für die Schichtabtragsmethode [13] und für die Sachs-Bohrmethode [12] angestellt werden können, deren Integrationskern analytisch bekannt ist.

Wie in Abbildung 3 dargestellt, besteht das größte Problem bei der Unstetigkeit darin, dass die Verzerrung nicht beobachtbar ist. Durch die Berechnung mehrerer Lösungen – wie in diesem Fall – kann man die Variabilität der Lösung in Bezug auf den Eingangsfehler feststellen. Aufgrund der Linearität von Gleichung (15) können die Eingangsfehler auch theoretisch durch das Inversionsverfahren fortgepflanzt werden. Man kann jedoch nie die Verzerrung kennen, die durch das gewählte Lösungsverfahren eingeführt wird; zum Beispiel kann eine gegebene konstante Lösung gleichermaßen einer tatsächlich konstanten echten Restspannungslösung oder einer beliebig variierenden Verteilung entsprechen, die kausal dieselbe diskretisierte Lösung ergibt.

Dieser Aspekt ist besonders dramatisch, wenn Konfidenzintervalle für die Lösung konstruiert werden. Es können nur Konfidenzintervalle relativ zur idealen Lösung (d. h. entsprechend perfekten Messungen) konstruiert werden, aber der praktische Nutzen dieser Konstruktion ist im Wesentlichen gleich Null, da nicht einmal garantiert ist, dass die ideale Lösung mit der besten Annäherung an die wahre Lösung im gewählten Raum übereinstimmt. Das Risiko besteht darin, dass der Analytiker in dem Bemühen, engere Konfidenzintervalle zu erreichen, implizit beschließt, die Verzerrung der erhaltenen Lösung zu erhöhen, ohne dass dies in den Ergebnissen sichtbar wird.

Es gibt auch alternative Techniken, die darauf abzielen, das Problem zu regularisieren, d. h. die Varianz der Lösung zu reduzieren. Die bekannteste davon ist wohl die Tikhonov-Regularisierung [47–49]. Keine dieser Techniken ist jedoch immun gegen den Bias-Varianz-Kompromiss, wie in [26,27] diskutiert. Tatsächlich führen sie auch einen Bias in die Lösung ein, der nicht a priori quantifiziert werden kann.

Für die Probleme, die durch die Unstetigkeit eines inversen Problems und den daraus resultierenden Bias-Varianz-Kompromiss entstehen, gibt es nur eine Lösung: die Gewinnung zusätzlicher Informationen durch physikalische Methoden, die a priori belegen, dass die Lösung eine bestimmte Form haben und/oder bestimmte wohldefinierte Beschränkungen erfüllen muss. Beachten Sie, dass diese Information nicht allein aus den mathematischen Gleichungen abgeleitet werden kann. Nur in diesem Fall, unter der Annahme eines endlichdimensionalen Lösungsraums, der diese Bedingungen einhält, wird kein Bias eingeführt und jede Quantifizierung von Unsicherheiten kann als streng angesehen werden. Dies ist gleichbedeutend mit der Behauptung, dass die Fehlerempfindlichkeit nicht die Wahl des Diskretisierungsschemas bestimmen sollte, sondern vielmehr das Gegenteil. Physikalische Annahmen bestimmen das Diskretisierungsschema, das dann seine entsprechende Empfindlichkeit gegenüber Eingabefehlern ergibt und Anforderungen an die Messinstrumente festlegt. Wenn diese Anforderungen nicht erfüllt werden können, ist die Messung aus technischer Sicht nicht durchführbar.

Wenn der Spannungsanalytiker beispielsweise aufgrund bestimmter Fakten behaupten kann, dass die Verteilung der Eigenspannungen über die gesamte Dicke einigermaßen linear ist (was möglicherweise durch die Wiederherstellung von Fernfeldinkompatibilitäten im Verschiebungsfeld eines schlanken Balkens verursacht wird), besteht kein Grund zur Annahme, dass die Lösung zum Raum der Polynomfunktionen ersten Grades gehört. Außerdem ist die mit einer so geringen Anzahl von Freiheitsgraden verbundene Varianz im Allgemeinen eher begrenzt.

5. Schlussfolgerungen

Die wichtigsten Punkte des Artikels sind nachstehend aufgeführt:

- Die Unstetigkeit des Problems der Rekonstruktion von Restspannungen aus Messungen der Rissöffnungsverschiebung nach einem in die Probe eingeführten fortschreitenden Schnitt wird aufgezeigt und klar von seiner allgemeineren Eigenschaft der Unstetigkeit unterschieden.
- Anhand eines Zahlenbeispiels wird der typische Indikator eines schlecht gestellten Problems, nämlich der Bias-Varianz-Kompromiß, zusammen mit seinen möglicherweise verheerenden Konsequenzen für die Fähigkeit, Unsicherheiten streng zu quantifizieren, dargestellt. Daher ist es äußerst wichtig, seine Existenz zu erkennen und Maßnahmen zu vermeiden, die die Qualität der Lösung nur scheinbar verbessern.
- Wie in früheren Arbeiten der Autoren betont, wird erneut unterstrichen, dass keine mathematische Maschinerie die unendliche Empfindlichkeit gegenüber Eingabefehlern, die schlecht gestellten Problemen innewohnt, dauerhaft überwinden kann. Die Lösung muss in der Physik des Problems gefunden werden, indem man auf Informationen abzielt, die es ermöglichen würden, die Lösungsvarianz zu zähmen, ohne signifikante und vor allem nicht berechenbare Bias einzuführen.

Beiträge der Autoren: Konzeptualisierung: MB, TG; Methodik: MB, TG; Untersuchung: MB, TG; Schreiben – Originalentwurf: TG; Schreiben – Überprüfung und Bearbeitung: MB; Betreuung: MB. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu.

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: In dieser Studie wurden keine neuen Daten erstellt oder analysiert. Die Datenfreigabe ist für diesen Artikel nicht anwendbar.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Abkürzungen

In diesem Manuskript werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

CMOD	Rissöffnungsverschiebung
FE	Finite Elemente
SIF	Spannungsintensitätsfaktor
WF	Gewichtsfunktion

Verweise

1. Timoshenko, S. Geschichte der Festigkeitslehre: Mit einem kurzen Überblick über die Geschichte der Elastizitätstheorie und der Baustatik; Courier Corporation: North Chelmsford, MA, USA, 1983.
2. Schajer, GS; Winiarski, B.; Withers, PJ Messung von Eigenspannungen beim Bohren von Löchern mit Artefaktkorrektur mittels Vollfeld- DIC. Exp. Mech. **2013**, *53*, 255–265. [\[CrossRef\]](#)
3. Baldi, A. Messung von Eigenspannungen mittels Lochbohren und integrierten digitalen Bildkorrelationstechniken. Exp. Mech. **2014**, *54*, 379–391. [\[CrossRef\]](#)
4. Harrington, JS; Schajer, GS Messung struktureller Spannungen durch Bohren von Löchern und DIC. Exp. Mech. **2017**, *57*, 559–567. [\[Querverweis\]](#)
5. Hagara, M.; Trebuřna, F.; Pástor, M.; Huřnady, R.; Lengvarský, P. Analyse der Aspekte der Quantifizierung von Eigenspannungen mittels 3D-DIC in Kombination mit einer standardisierten Bohrlochmethode. Measurement **2019**, *137*, 238–256. [\[CrossRef\]](#)
6. Salehi, SD; Rastak, MA; Shokrieh, MM; Barrallier, L.; Kubler, R. Vollflächige Messung von Eigenspannungen in Verbundwerkstoffen mithilfe der Techniken des inkrementellen Schlitzens und der digitalen Bildkorrelation. Exp. Mech. **2020**, *60*, 1239–1250. [\[CrossRef\]](#)
7. Petzing, JN; Tyrer, JR Neueste Entwicklungen und Anwendungen in der elektronischen Speckle-Muster-Interferometrie. J. Strain Anal. Eng. Des. **1998**, *33*, 153–169. [\[CrossRef\]](#)
8. Schajer, GS; Steinzig, M. Vollflächige Berechnung von Bohrlocheigenspannungen aus Daten der elektronischen Speckle-Muster-Interferometrie. Exp. Mech. **2005**, *45*, 526–532. [\[CrossRef\]](#)

9. Gubbels, WL; Schajer, GS Entwicklung einer 3D-Digitalbildkorrelation mit einer einzelnen Farbkamera und diffraktiver Speckle- Projektion. *Exp. Mech.* **2016**, 56, 1327–1337. [\[CrossRef\]](#)
10. Schajer, GS; Prime, MB; Withers, PJ Warum ist es so schwierig, Eigenspannungen zu messen? *Exp. Mech.* **2022**, 62, 1521–1530. [\[Querverweis\]](#)
11. Noyan, IC; Cohen, JB *Residual Stress: Messung durch Beugung und Interpretation*; Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2013.
12. Sachs, G.; Espey, G. Die Messung von Eigenspannungen in Metall. *Iron Age* **1941**, 148, 148.
13. Treuting, RG; Read, WT Eine mechanische Bestimmung der biaxialen Eigenspannung in Blechen. *J. Appl. Phys.* **1951**, 22, 130–134. [\[CrossRef\]](#)
14. Beaney, EM Genaue Messung der Eigenspannung an jedem Stahl mit der Mittellochmethode. *Strain* **1976**, 12, 99–106. [\[Querverweis\]](#)
15. Schajer, GS Anwendung von Finite-Elemente-Berechnungen zur Messung von Eigenspannungen. *J. Eng. Mater. Technol.* **1981**, 103, 157–163. [\[Querverweis\]](#)
16. Prime, MB Messung der Eigenspannung durch sukzessive Verlängerung eines Schlitzes: Die Crack Compliance-Methode. *Appl. Mech. Rev.* **1999**, 52, 75–96. [\[CrossRef\]](#)
17. Prime, MB Querschnittskartierung von Eigenspannungen durch Messen der Oberflächenkontur nach einem Schnitt. *J. Eng. Mater. Technol.* **2001**, 123, 162–168. [\[CrossRef\]](#)
18. Schajer, GS *Praktische Methoden zur Messung von Eigenspannungen*; John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 2013.
19. Schajer, GS Lochexzentrizitätskorrektur für Messungen von Eigenspannungen beim Bohren von Löchern. *Exp. Mech.* **2022**, 62, 1603–1613. [\[Querverweis\]](#)
20. Bueckner, HF Neues Prinzip zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren. *Z. Für Angew. Math. Mech.* **1970**, 50, 529–546.
21. Schajer, GS; Prime, MB Verwendung inverser Lösungen zur Messung von Eigenspannungen. *J. Eng. Mater. Technol.* **2006**, 128, 375. [\[Querverweis\]](#)
22. Schajer, GS Messung ungleichmäßiger Eigenspannungen mit der Bohrlochmethode. Teil I Spannungsberechnung Verfahren. *J. Eng. Mater. Technol.* **1988**, 110, 338–343. [\[CrossRef\]](#)
23. Schajer, GS Messung ungleichmäßiger Eigenspannungen mit der Bohrlochmethode. Teil II Praktische Anwendung der Integrale Methode. *J. Eng. Mater. Technol.* **1988**, 110, 344–349. [\[CrossRef\]](#)
24. Schajer, GS; Prime, MB Extrapolation der Restspannungslösung für die Schlitzmethode unter Verwendung von Gleichgewichtsbeschränkungen. *J. Eng. Mater. Technol.* **2007**, 129, 227–232. [\[CrossRef\]](#)
25. Schajer, GS; Altus, E. Fehleranalyse bei der Spannungsberechnung für inkrementelle Messungen der Restspannung beim Bohren von Löchern. *J. Eng. Mater. Technol.* **1996**, 118, 120–126. [\[CrossRef\]](#)
26. Beghini, M.; Grossi, T.; Prime, M.; Santus, C. Unzulänglichkeiten und der Bias-Varianz-Kompromiss bei der Messung von Eigenspannungen Lösungen. *Exp. Mech.* **2023**, 63, 495–516. [\[CrossRef\]](#)
27. Beghini, M.; Grossi, T. Auf dem Weg zu einer zuverlässigen Quantifizierung der Unsicherheit bei Eigenspannungsmessungen mit Relaxationsmethoden: Die Ermittlung durchschnittlicher Eigenspannungen ist ein wohlgestelltes Problem. *Exp. Mech.* **2024**, 64, 851–874. [\[CrossRef\]](#)
28. Beghini, M.; Bertini, L.; Cococcioni, M.; Grossi, T.; Santus, C.; Benincasa, A. Regularisierung von Eigenspannungsmessungen bei Bohrungen mit exzentrischen Löchern: Ein Ansatz mit Einflussfunktionen. *J. Mater. Eng. Perform.* **2024**, 1–7. [\[CrossRef\]](#)
29. Beghini, M.; Grossi, T.; Santus, C. Validierung eines Dehnungsmessstreifen-Rosettenaufbaus an einer freitragenden Probe: Anwendung auf eine Kalibrierung Prüfstand für Eigenspannungen. *Mater. Today: Proc.* **2023**, 93, 719–724. [\[CrossRef\]](#)
30. Beghini, M.; Grossi, T.; Santus, C.; Valentini, E. Eine Kalibrierbank zur Validierung systematischer Fehlerkompensationsstrategien bei Bohrlochmessungen . In *Proceedings der 11.–11. Internationalen Konferenz des ICRS zu Eigenspannungen*, Nancy, Frankreich, 27.–30. März 2022. [\[CrossRef\]](#)
31. Beghini, M.; Grossi, T.; Santus, C.; Seralessandri, L.; Gulisano, S. Messungen der Eigenspannung an einer tiefgewalzten Aluminiumprobe durch Röntgenbeugung und Lochbohren, validiert auf einem Kalibrierstand. *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* **2023**, 1275, 012036. [\[CrossRef\]](#)
32. Cheng, W.; Finnie, I. *Messung der Eigenspannung und das Schlitzverfahren*; Mechanical Engineering Series; Springer: New York, NY, USA, 2007.
33. Vaidyanathan, S.; Finnie, I. Bestimmung von Restspannungen aus Messungen des Spannungsintensitätsfaktors. *J. Basic Eng.* **1971**, 93, 242–246. [\[CrossRef\]](#)
34. Schindler, HJ; Cheng, W.; Finnie, I. Experimentelle Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren aufgrund von Eigenspannungen. *Exp. Mech.* **1997**, 37, 272–277. [\[CrossRef\]](#)
35. Anderson, TL *Bruchmechanik: Grundlagen und Anwendungen*; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2017.
36. Rice, JR Einige Bemerkungen zu elastischen Spannungsfeldern an Rissspitzen. *Int. J. Solids Struct.* **1972**, 8, 751–758. [\[CrossRef\]](#)
37. Lamm, PK Eine Übersicht über Regularisierungsmethoden für Volterra-Gleichungen erster Art. In *Übersichten über Lösungsmethoden für inverse Probleme*; Colton, D., Engl, HW, Louis, AK, McLaughlin, JR, Rundell, W., Hrsg.; Springer Wien: Wien, Österreich, 2000; Seiten 53–82.
38. von Mises, R. Über das Saint Venant-Prinzip. *Bull. Am. Math. Soc.* **1945**, 51, 555–562. [\[CrossRef\]](#)
39. Goldberg, RR *Methoden der reellen Analyse*; Oxford und IBH Publishing: Delhi, Indien, 1970.
40. Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, 3. Auflage; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 1987.
41. Wu, XR; Carlsson, J. *Gewichtsfunktionen und Spannungsintensitätsfaktorlösungen*; Pergamon Press: Oxford, UK, 1991.

42. Prime, MB; Hill, MR Unsicherheit, Modellfehler und Ordnungsauswahl für reihenerweiterte, inverse Restspannungslösungen. J. Eng. Mater. Technol. **2006**, *128*, 175–185. [\[CrossRef\]](#)
43. Zuccarello, B. Optimale Berechnungsschritte zur Bewertung von Eigenspannungen mit der inkrementellen Bohrmethode. Exp. Mech. **1999**, *39*, 117–124. [\[CrossRef\]](#)
44. Zuccarello, B. Optimierung der Tiefeninkrementverteilung bei der Ringkernmethode. J. Strain Anal. Eng. Des. **1996**, *31*, 251–258. [\[Querverweis\]](#)
45. Olson, MD Messanordnung zur Eigenspannungsabbildung mittels Schlitzten. Exp. Mech. **2022**, *62*, 393–402. [\[CrossRef\]](#)
46. Schajer, GS Kompakte Kalibrierungsdaten für Messungen der Eigenspannung beim Bohren von Proben mit begrenzter Dicke. Exp. Mech. **2020**, *60*, 665–678. [\[CrossRef\]](#)
47. Tikhonov, AN; Goncharsky, AV; Stepanov, VV; Yagola, AG Numerische Methoden zur Lösung schlecht gestellter Probleme; Springer Niederlande: Dordrecht, Niederlande, 1995. [\[CrossRef\]](#)
48. Schajer, GS Bohrloch-Eigenspannungsprofilierung mit automatischer Glättung. J. Eng. Mater. Technol. **2007**, *129*, 440–445. [\[Querverweis\]](#)
49. Smit, TC; Reid, R. Tikhonov Regularisierung für die vollständig gekoppelte Integralmethode des inkrementellen Bohrens. Exp. Mech. **2024**, *64*, 275–290. [\[CrossRef\]](#)

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.