

Una clase de ecuaciones diferenciales para fusionar la optimización cinemática de los movimientos con la invariancia geométrica.

3 de septiembre de 2014

Félix Poliakov

Abstracto

Los estudios neurocientíficos de la ejecución de los movimientos similares a los de un dibujo generalmente analizan la representación neural de las características geométricas (p. ej., dirección, forma) o temporales (p. ej., velocidad) de las trayectorias en lugar de la representación de la trayectoria como un todo. Este trabajo trata sobre las ideas matemáticas detrás de la división y fusión de características geométricas y temporales que caracterizan los movimientos biológicos. Las primitivas de movimiento supuestamente facilitan la eficiencia de la representación de los movimientos en el cerebro y cumplen con diferentes criterios para los movimientos biológicos, entre ellos la suavidad cinemática y la restricción geométrica. Se emplea el criterio para la "suavidad máxima" de las trayectorias de orden arbitrario n , $n = 3$ es el caso del modelo de sacudidas mínimas. Derivo una clase de ecuaciones diferenciales obedecidas por trayectorias de movimiento para las cuales las trayectorias máximamente suaves de orden n tienen velocidad constante. La velocidad es invariante bajo una clase de transformaciones geométricas. Las soluciones de las ecuaciones presumiblemente sirven como candidatas para primitivas de movimiento geométrico. La velocidad aquí se define como la tasa de acumulación de medidas geométricas a lo largo de la ruta dibujada. La medida geométrica puede elegirse para que sea un arco en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, el modelo de ley de potencia de dos tercios corresponde a la velocidad constante por partes del arco equiafín acumulado. La clase derivada de ecuaciones diferenciales consta de dos partes. La primera parte es idéntica para todas las parametrizaciones geométricas del camino. La segunda parte es específica de la parametrización y es necesaria para identificar si una solución de la primera parte representa realmente una curva. Se proporcionan los contraejemplos correspondientes. Se presentan ecuaciones en diferentes geometrías en el plano y en el espacio y sus soluciones conocidas. La clase derivada de ecuación diferencial es una herramienta novedosa para descubrir candidatos para primitivas de movimiento geométrico.

Palabras clave: primitivas de movimiento geométrico — representación compacta — geometría diferencial afín — aspectos temporales del movimiento — parábola — espiral logarítmica — círculo — tornillo parabólico — tornillo elíptico

Departamento de Matemáticas, Universidad Bar Ilan, Ramat-Gan 5290002, Israel
felix@math.biu.ac.il

1. Introducción

Varios estudios neurocientíficos han analizado las características geométricas de los movimientos biológicos (p. ej., acciones similares a las de un dibujo) y su representación en el cerebro. En particular, se encontró que las neuronas individuales y las poblaciones neuronales en la corteza motora estaban sintonizadas con la dirección del movimiento [24, 61, 60, 62, 45, 44]. Estudios de diferentes tipos de movimientos dirigidos a un objetivo, por ejemplo. los movimientos hacia los objetivos, los movimientos secuenciales de la mano o los movimientos que siguen caminos prescritos indicaron que el orden en serie del submovimiento¹, los "aspectos del movimiento" (es decir, los aspectos de la forma del movimiento y la ubicación del objetivo) y los fragmentos de movimiento están representados en la actividad cortical [34, 1, 2, 33, 63, 32]. Evidencia del papel importante de la geometría no euclidiana, y en particular equi-afín [50, 51, 54, 41, 12, 52, 53, 55, 42, 16, 9, 43] y afín [4], en la producción y se proporcionó la percepción del movimiento biológico. Se propuso la invariancia de escala en la representación neuronal de los movimientos de escritura a mano [30]. La superposición de transformaciones equiafinas y el escalado constituye el grupo de transformaciones afines. Se sugirió que los movimientos biológicos se pueden representar en varias geometrías [4].

La idea de composicionalidad del movimiento, es decir, la representación de movimientos complejos basados en un "alfabeto" limitado de submovimientos primitivos, se analiza en numerosos estudios de control motor. La existencia de primitivas motoras se demostró a nivel de las fuerzas producidas por los músculos que actúan sobre las extremidades [5, 27, 49, 37, 47, 48, 25, 26], a nivel de las sinergias musculares [67, 11, 31, 36, 10], a nivel de cinemática de movimiento [46, 20, 7, 39, 59, 57, 17, 21, 58], y a nivel de unidades de cálculo en el sistema sensoriomotor [68, 65]. La descomposición de movimientos complejos en primitivos también se implementó para los movimientos del brazo del pulpo [71]. Los resultados de los trabajos recientes [13, 14] proporcionan indicaciones adicionales de que los movimientos aparentemente continuos pueden representarse en el cerebro en cierto nivel jerárquico de manera discreta.

Las formas parabólicas se sugirieron como bloques de construcción geométricos de movimientos complejos similares a dibujos basados en modelos matemáticos y análisis de datos cinemáticos y neurofisiológicos del comportamiento de los monos [54, 52, 53, 55]. Se sugirió que las trayectorias de movimiento complejas pueden estar compuestas por la concatenación de formas de tipo parabólico. Las transformaciones afines aplicadas a los segmentos parabólicos dan como resultado segmentos parabólicos. Además, cualquier segmento parabólico se puede obtener a partir de un segmento parabólico arbitrario mediante una transformación afín única. Entonces, la secuencia de formas parabólicas concatenadas se puede obtener aplicando una secuencia de transformaciones afines a una sola plantilla parabólica [52] y, por lo tanto, simplificando la representación de movimientos complejos en el cerebro. Tal representación podría significar que el movimiento geométrico primitivo es un conjunto de transformaciones dotadas de una forma geométrica primitiva sobre la que se aplican las transformaciones. En la Figura 9a de [55] se muestra un ejemplo de una curva parabólica por partes que se asemeja a la trayectoria de movimiento real realizada por un mono.

Aquí desarrollo aún más herramientas matemáticas destinadas a encontrar formas geométricas primitivas. Las trayectorias a lo largo de esas formas primitivas estarían de acuerdo con

¹Significado orden serial de implementación de cierta entidad geométrica.

diferentes modelos que describen el movimiento biológico. Las clases de formas primitivas que presumiblemente componen trayectorias más complejas son invariantes bajo las clases de transformaciones geométricas y, por lo tanto, pueden proporcionar una representación compacta de trayectorias de movimiento complejas en el cerebro.

2 Requisitos previos para el problema matemático de los estudios de control motor

Se observó que las trayectorias planas de la mano son suaves, mientras que la suavidad se definió como la minimización de la tasa de cambio de aceleración integrada al cuadrado, también llamada sacudida de movimiento [35, 22], a saber:

$$\int_0^T \left(\frac{d^3 x}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 y}{dt^3} \right)^2 dt. \quad (2.1)$$

La información sobre la trayectoria del movimiento se puede dividir en dos partes: (1) especificación geométrica llamada también ruta de movimiento y (2) especificación temporal definida por una función que relaciona cada momento de tiempo con la ubicación en la ruta de movimiento. La especificación temporal está completamente determinada por la velocidad de movimiento a lo largo del camino. En los trabajos originales sobre el modelo de sacudidas mínimas [35, 22], la trayectoria máximamente suave está restringida por un punto inicial, un punto vía por el cual debe pasar la ruta y el punto final. Por lo tanto, el criterio de minimización del funcional de costos en (2.1) está dotado de la restricción geométrica puntual sobre la trayectoria óptima que pasa por uno o más puntos de vía.

Por lo tanto, en la formulación original del modelo, todo el camino continuo de la trayectoria se puede revelar simultáneamente con la identificación de la velocidad de movimiento². El modelo de tirones mínimos es ampliamente utilizado y mencionado en diferentes Estudios de control motor.

De acuerdo con el modelo de tirones mínimos restringidos [66] movimientos de la mano Tienen a maximizar la suavidad del dibujo (minimizan el costo de sacudidas)

$$\int_0^T \left(\frac{d^3 x(\sigma_{eu}(t))}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 y(\sigma_{eu}(t))}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 z(\sigma_{eu}(t))}{dt^3} \right)^2 dt \quad (2.2)$$

para la trayectoria prescrita $\{x(\sigma_{eu}), y(\sigma_{eu}), z(\sigma_{eu})\}$. Es decir, la ruta de movimiento ya se proporciona como entrada para el procedimiento de optimización y se debe encontrar el perfil de velocidad para resolver el problema de optimización. La curva tridimensional ejecutada en el funcional de costo (2.2) está parametrizada con longitud de arco euclidiana

$$\sigma_{eu}(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} d\tau \quad (2.3)$$

² Los componentes $x(t)$ e $y(t)$ de las trayectorias restringidas por puntos vía y minimizando el costo funcional (2.1) están compuestos por partes de polinomios de quinto orden con respecto al tiempo, las derivadas de tercer orden de $x(t)$, $y(t)$ son continuas [22].

con el punto que denota la diferenciación con respecto al tiempo t .

Ejemplo 2.1. La trayectoria $r(t) = r(\sigma_{eu}(t)) = [x(\sigma_{eu}(t)), y(\sigma_{eu}(t)), z(\sigma_{eu}(t))]$ está completamente determinada por la parametrización geométrica (sin involucrar el tiempo) $r(\sigma_{eu})$ y parametrización temporal del parámetro geométrico $\sigma_{eu}(t)$ (o, de manera equivalente, velocidad estrictamente no negativa σ'_{eu}). Aquí el parámetro geométrico σ_{eu} es la longitud euclidiana de la curva que se mapea continuamente en una curva diferenciable 3 veces.

A partir de ahora, la diferenciación con respecto al parámetro geométrico σ se denota con números primos y entre paréntesis, mientras que la diferenciación con respecto al tiempo t hasta el orden 3 se denota con puntos. La diferenciación de orden superior con respecto al tiempo se denota con la notación más común para la diferenciación (d/dt): d^2f/dt^2 , d^3f/dt^3 , $f^{(k)}(\sigma) \equiv f^{(k)}(\sigma)$, $f''(\sigma) \equiv f''$, f'''

$$\begin{aligned} f'(\sigma) &\equiv \frac{df}{d\sigma} & \frac{(\sigma)}{d\sigma^2} &\equiv \frac{d^2\sigma}{d\sigma^2} & \frac{(\sigma)}{d\sigma^3} &\equiv \frac{d^3\sigma}{d\sigma^3} & \dots \\ f(\sigma(t)) &\equiv \frac{df}{dt} f(\sigma(t)) \equiv \frac{df}{dt}, & \frac{d^2f}{dt^2} &\equiv \frac{d^2f}{dt^2}, & \frac{d^3f}{dt^3} &\equiv \frac{d^3f}{dt^3} \end{aligned}$$

La notación se recordará más adelante en el texto.

La ley de potencia de dos tercios es otro modelo cinemático de los movimientos de la mano. Describe una relación entre las propiedades geométricas de la trayectoria del movimiento y la velocidad del movimiento a lo largo de esa trayectoria. Las observaciones empíricas del modelo de ley de potencia de dos tercios se interpretaron como evidencia de la segmentación del movimiento [40]. La ley de potencia de dos tercios también se demostró en estudios de percepción visual [69, 41, 12, 9]. La segmentación de los movimientos de la mano basada en los poderes de la curvatura de la trayectoria se analizó recientemente en [15].

El modelo de ley de potencia de dos tercios es equivalente a la afirmación de que la velocidad equiafin⁴ (4.2) de los movimientos de dibujo es constante por partes [18, 50, 29, 19]: $\sigma_{ea} = \text{const.}$ Con base en resultados empíricos relacionados con el modelo de ley de potencia de dos tercios y su interpretación en términos de geometría diferencial, los arcos equiafinos y afines se han convertido en una parametrización relevante en el análisis de los movimientos biológicos y su representación neuronal [18, 50, 51, 54, 52, 19, 55, 53, 16, 42, 4, 9, 43].

En [70] se analizó la comparación de las predicciones de la sacudida mínima y los modelos de ley de potencia de dos tercios para varias formas geométricas. Velocidad euclidiana σ_{eu} minimizando el costo funcional con un orden arbitrario de suavidad

$$\int_0^T \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 dt \quad (2.4)$$

³La parametrización geométrica con un arco invariante en cierta geometría se denomina parametrización natural; σ_{eu} es arco en geometría euclidiana.

⁴ Los antecedentes de las nociones de geometría equiafin que se utilizan en este trabajo se pueden encontrar en otros lugares, p. [64, 28]. En particular, se introducen en la parte "Antecedentes" de [51] y el Capítulo 2 de [52] junto con su relación con la ley de potencia de dos tercios y en el Apéndice A de [52].

se comparó con los datos experimentales para movimientos planares punto a punto⁵

[56]. Predicciones aproximadas de trayectorias de movimiento, es decir, velocidad de movimiento a lo largo de trayectorias geométricas predefinidas, que minimizan el costo funcional con orden arbitrario n (2.4) a lo largo de una serie de trayectorias periódicas y se compararon con las predicciones de la ley de potencia de dos tercios y los datos experimentales [56].

En el caso del modelo de sacudidas mínimas con restricciones ($n = 3$), el problema de encontrar los caminos para los cuales las trayectorias máximamente suaves satisfacen los dos tercios. Se estudió el modelo de ley de potencia utilizando la parametrización de un camino con equi-affine arco [54, 52]. La condición necesaria para tales caminos se obtuvo en una forma de el sistema de dos ecuaciones diferenciales [54, 52]. Las soluciones conocidas son cualquier función vectorial bidimensional que describa formas parabólicas y círculos [54, 52] y un caso específico de espiral logarítmica [6, 55]. Trayectorias de tirones mínimos a lo largo de caminos parabólicos dan valor cero al costo (2.1) [51, 52]. Conocido soluciones no parabólicas (círculo y espiral logarítmica específica) no proporcionan costo cero

Cualquier curva se puede parametrizar geoméricamente en infinitas formas diferentes. maneras. La parametrización ampliamente conocida se basa en la longitud de arco euclidiana. En general, la parametrización geométrica de una curva se puede implementar a través de un mapeo continuo de un parámetro escalar en la curva.

Ejemplo 2.2. Una curva sin puntos de inflexión se puede parametrizar con el integral de velocidad euclidiana ponderada con curvatura euclidiana elevada a cierto

grado: $\sigma_{\text{ejemplo}}(t) = \int_0^t \sigma'(\tau) \cdot \text{eu}(\tau) \cdot [\text{ceu}(\sigma \text{eu}(\tau))]^\beta d\tau$. Esta parametriza geométrica ción es legítima para cualquier β . Es la medida del arco euclidiano cuando $\beta = 0$ y medida del arco equiafín cuando $\beta = 1/3$.

El ejemplo de arco σ del ejemplo 2.2 es invariante bajo transformaciones euclidianas. Sin embargo, cuando $\beta = 0$ no es igual a la longitud euclidiana, que es la integral de la invariante diferencial de primer orden en el grupo de planos euclidianos transformaciones. Más adelante en el texto también considero arcos en otros subgrupos del grupo de transformaciones afines.

En este trabajo se considera el problema de encontrar trayectorias cuyas trayectorias máximamente suaves proporcionen acumulación de parámetros geométricos con velocidad constante para un orden arbitrario de suavidad n . Se deriva una clase de ecuaciones diferenciales que describen dichas trayectorias. El sistema de dos ecuaciones diferenciales corresponde a cada orden de suavidad n . Sistemas de especial interés y sus soluciones se presentan a continuación. Parte de las soluciones se presentan por primera vez aquí. y algunos se conocen de trabajos anteriores que utilizaron parametrización equi-afín [51, 52, 6, 55].

⁵Los modelos cinemáticos para movimientos punto a punto en el plano generalmente asumen que la trayectoria del movimiento es una línea recta, la velocidad y la aceleración del movimiento en los puntos inicial y final del movimiento la trayectoria es cero.

3 Sistemas de ecuaciones diferenciales, caso general

Considere n veces la curva diferenciable $r_L(\sigma) = (x_1(\sigma), x_2(\sigma), \dots, x_L(\sigma))$ en L espacio dimensional, $\sigma \in [0, \Sigma]$. Sea, sin limitación de generalidad, $\sigma(t)$ estrictamente creciente y n veces función derivable de $t \in [0, T]$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(T) = \Sigma$. El funcional de costo de la derivada cuadrática media [56] asociado con la derivada de orden n de la curva y su parametrización $\sigma(t)$ se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J\sigma(r_L, n) &= \int_0^T \left(\frac{d^n x_1(\sigma(t))}{dt^n}^2 + \frac{d^n x_2(\sigma(t))}{dt^n}^2 + \dots + \frac{d^n x_L(\sigma(t))}{dt^n}^2 \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{d^n r_L(\sigma(t))}{dt^n} \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1 Trayectorias de movimiento que proporcionan trayectorias óptimas con velocidad constante

Dada la parametrización geométrica σ de la trayectoria r (una curva a lo largo de la cual se "dibuja" la trayectoria) en un espacio L -dimensional, denoto con $\tilde{\sigma} = r_{L,n}(t)$ la parametrización temporal de "dibujar" la trayectoria que proporciona un costo mínimo $J\sigma(r_L, n)$ bajo restricciones en el límite:

$$k\sigma' \quad \sigma'(0) = \sigma'(T) = \Sigma/T, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{d^n r_L(\sigma(t))}{dt^n} \right) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

$$\sigma^{**} = r_{L,n}(t) = \arg \min_{\sigma \in [0, T]} J\sigma(r_L, n), \quad t \in [0, T],$$

el punto denota la diferenciación con respecto al tiempo t . La solución del problema de optimización $r_{L,n}(t)$: ción sin restricciones en el límite se denota como σ^*

$$\sigma^* = r_{L,n}(t) = \arg \min_{\sigma \in [0, T]} J\sigma(r_L, n). \quad (3.3)$$

Para una dimensión dada del espacio L y el orden de diferenciación n , mi objetivo es encontrar las curvas para las cuales la solución del problema de optimización con restricciones (3.2) proporciona una velocidad constante de "dibujar" la curva:

$$A^* = r_L : \sigma^{**} = \text{norte}, \quad L_{r_L, n}(t) = \text{constante} = \frac{\Sigma}{T}. \quad (3.4)$$

También se considera el problema de identificar las curvas bajo el mismo criterio de optimalidad pero sin las condiciones de contorno de (3.2):

$$A_n, L = r_L : \sigma^* = \text{norte}, \quad L_{r_L, n}(t) = \text{constante} = \frac{\Sigma}{T}. \quad (3.5)$$

⁶La función $\sigma(t)$ debe ser estrictamente monótona. Aquí se considera el caso de una función estrictamente creciente, sin embargo, se pueden obtener los mismos resultados para una función estrictamente decreciente.

Las soluciones del problema de optimización (3.3) para las curvas de la clase $A_{n, L}$ satisfacen las condiciones de contorno establecidas en (3.2) por definición y ambos problemas de optimización minimizan el mismo funcional de costo. Por lo tanto todas las soluciones (curvas) pertenecientes al conjunto $A_{n, L}$ pertenecen al conjunto $A_{n, L}^{\sim}$.

$$A_{n, L} \subset A_{n, L}^{\sim} \quad (3.6)$$

Entonces, las condiciones necesarias derivadas para las curvas de la clase $A_{n, L}^{\sim}$ son realmente cumplidas por las curvas de ambas clases: $A_{n, L}^{\sim}$ y $A_{n, L}$.

Introducir un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 nr}{d\sigma^2} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j y_j \frac{d^{n-j} r}{d\sigma^{n-j}} \cdot \frac{d^{n+j} r}{d\sigma^{n+j}} = \text{constante} \quad (3.7)$$

$$\sigma'(t) \|\dot{\gamma}(\sigma)\| = v(t) \|\dot{\gamma}(\sigma)\| = 1,$$

punto entre dos vectores denota su producto escalar. La diferenciación de ambos lados de la ecuación superior en (3.7) implica un sistema en el que la ecuación superior está representada simplemente por el producto escalar de las derivadas de primer y $(2n)$ orden del vector de posición con respecto al parámetro geométrico σ :

$$\frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{d^2 nr}{d\sigma^2} = 0 \quad (3.8)$$

$$\sigma'(t) \|\dot{\gamma}(\sigma)\| = v(t) \|\dot{\gamma}(\sigma)\| = 1.$$

Considero las curvas de las clases $A_{n, L}^{\sim}$ y $A_{n, L}$ como candidatas a primitivas de movimiento geométrico. Los sistemas (3.7), (3.8) pueden usarse como una herramienta para identificar tales curvas como sigue del principal resultado matemático de este trabajo:

Proposición 3.1. Las curvas de los conjuntos $A_{n, L}^{\sim}$ y $A_{n, L}$ definidas en (3.4) y (3.5) respectivamente necesariamente satisfacen las ecuaciones superiores en los sistemas (3.7) y (3.8).

La Proposición 3.1 se demuestra en el Apéndice A. Se muestran ejemplos de los sistemas (3.7) y (3.8) junto con soluciones conocidas para diferentes parametrizaciones geométricas en las secciones 4, 5 en las ecuaciones (4.3), (4.10), (4.13), (4.18), (4.22), (5.3), (5.4).

Una serie de notas importantes sobre los sistemas (3.7) y (3.8) y las curvas pertenecientes a los conjuntos $A_{n, L}^{\sim}$ y $A_{n, L}$ se presentan a continuación.

1. La ecuación superior en los sistemas (3.7) y (3.8) es independiente de la parametrización geométrica de una curva. La ecuación se deriva del criterio de máxima suavidad de la trayectoria (3.2) basado en la ecuación de Euler Poisson para problemas variacionales. Casos particulares de la parte superior

La ecuación diferencial para curvas planas cuando $n = 2, 3, 4$ y para un n arbitrario se proporcionan⁷ en la Tabla 1. La ecuación superior en los sistemas es invariante bajo transformaciones euclidianas arbitrarias debido a la invariancia euclidiana del producto escalar.

2. La ecuación inferior en los sistemas (3.7) y (3.8) depende de la elección de la parametrización geométrica. El lado izquierdo de la ecuación inferior y el parámetro geométrico σ de los sistemas son invariantes bajo la misma clase de transformaciones geométricas⁸. Cuando se resuelve el sistema (3.7) o (3.8) para identificar las curvas candidatas de los conjuntos A^* y A_n, L , la condición formalizada por la ecuación inferior garantiza que la solución de la ecuación superior es de hecho una curva en el espacio dimensional L y es consistente con la parametrización σ . El ejemplo 3.2 a continuación demuestra una solución de la ecuación superior que no es consistente con la parametrización σ y, por lo tanto, no representa una curva. En los casos en que una función vectorial parametrizada con algún σ describa una curva, se puede probar si la curva cumple la condición necesaria para pertenecer a las clases definidas en (3.4), (3.5). Para ello sólo hay que comprobar si la expresión vectorial satisface la ecuación superior de cualquiera de los sistemas (3.7), (3.8) porque la ecuación inferior se satisface automáticamente para las curvas existentes.
3. El uso de condiciones de transversalidad además de la ecuación superior en los sistemas (3.7) y (3.8) puede proporcionar una condición necesaria más restringida para que una curva pertenezca al conjunto A_n, L .
4. La siguiente condición suficiente para las curvas del conjunto A^* A_n, L se formuló anteriormente para el caso del costo de sacudida mínimo ($n = 3$) [52]:

$$\begin{aligned} & \text{'''2} - 2r r'' \cdot r' (4) + 2r' \cdot r'' (5) = \text{const} \geq 0 \cdot r \\ & \min_{0 \leq \sigma \leq \Sigma} 9r + 2r''^2 \cdot r' - 24r'' \cdot r''' = \text{constante} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

El lado izquierdo de las ecuaciones superiores en el sistema (3.9) es idéntico al lado izquierdo de la ecuación superior en la condición necesaria (3.7) y está restringido con la restricción del signo de la constante en el lado derecho.

⁷Los funcionales de costo $J\sigma(rL, n)$ para las curvas planar ($L = 2$) y espacial ($L = 3$) se usaron en diferentes estudios de control motor para órdenes de diferenciación n igual a 2-4, ej. [35, 22, 70, 66, 54, 56, 52, 3, 55].

⁸Por ejemplo, si el parámetro σ es la longitud euclidiana, la ecuación es invariante bajo las transformaciones euclidianas. Si el parámetro σ es un arco equiafin, entonces la ecuación inferior del sistema es invariante bajo transformaciones equiafin.

Orden	Ecuación, caso ejemplar o general - 2x 'x	Derivada de la ecuación x 'x (4)	Comentarios sobre la ecuación	Soluciones conocidas cuando σ es un arco equiafin
2	$x''^2 + y''^2 - 2x'x'(3) - 2y'y'(3) = \text{const}$	$+ y'y'(4) = 0$	Caso de criterio planar de "aceleración mínima" en la teoría de Control Motor	Parábolas
3	$x''^2 + y''^2 - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x'(5) + 2y'y'(5) = \text{constante}$	$x'x'(6) + y'y'(6) = 0$	Caso de "tirón mínimo" plano criterio en la teoría del control motor	2D: Parábolas, círculos [52, 55], espiral logarítmica [6, 55]. 3D: línea de tornillo parabólico [52, 55]. 3D: línea de tornillo elíptica
4	$x^{(4)2} + y^{(4)2} - 2x^{(4)}x^{(5)} - 2y^{(4)}y^{(5)} + 2x''x(6) + 2y''y(6) - 2x'x'(7) - 2y'y'(7) = \text{constante}$	$x'x'(8) + y'y'(8) = 0$	Caso de "minimum-snap" planar criterio en la teoría del control motor	2D: parábolas, círculos, espiral logarítmica 3D: líneas de tornillo parabólico y elíptico
...	...	...		
nota	$x^{(n)2} + y^{(n)2} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (x^{(n-j)}x^{(n+i)} + y^{(n-j)}y^{(n+i)}) = \text{constante}$ $\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j r^{(n-j)}r^{(n+i)} = \text{constante}$	$x'x'(2n) + y'y'(2n) = 0$ $r_{-}r_{-}(2n) = 0$	Ecuación para caso plano. Espacio L-dimensional. Para curvas 3D L = 3.	Para $L \leq n$, $r = \{x_1, \dots, x_L\}$ p. $x_k(\sigma) = \frac{k \sigma}{k!}$, $k = 1, \dots, L$; σ es arco equiafin en dimensión L.

Tabla 1: Ecuación superior en los sistemas (3.7), (3.8) que necesariamente cumplen las curvas pertenecientes a las clases $A^{\sim}$ y A_n , L respecto a σ . El punto entre $_{\text{note, i}}$ dos vectores definida en (3.4) y (3.5) respectivamente. Los primos y el orden de diferenciación entre paréntesis corresponden a la derivada entre paréntesis en la fila correspondiente al caso n denota el producto escalar de los vectores. Los detalles sobre las soluciones planas mencionadas en la Tabla 1 se proporcionan en la Tabla 2. Las soluciones espaciales se analizan en la Sección 5.

Ejemplo 3.2.⁹ La derivada temporal del arco equiafin llamado velocidad equiafin $\equiv v_{ea} =$ como sigue: σ' . La derivada temporal de la longitud de arco euclidiana se define como $\sigma' \equiv v_{eu} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. La curvatura euclidiana en algún punto de la trayectoria se calcula de la siguiente manera:

$$c_{eu} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{v_{cada}^3}{v_{UE}^3}$$

y por lo tanto

$$v_{ea} = v_{eu} c_{eu}^{1/3}.$$

Considere la parametrización con la curvatura euclidiana elevada a la potencia β :

$$\tilde{\sigma}^\beta \equiv v_{eu} c_{eu}^\beta = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2-3\beta/2} (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^\beta. \quad (3.10)$$

El parámetro geométrico correspondiente es igual a la velocidad integrada:

$$\tilde{\sigma}^\beta(t) = \int_{\tau=0}^t v_{\tilde{\sigma}^\beta} d\tau$$

que es una función estrictamente monótona para la curva sin puntos de inflexión (aunque no necesariamente representa un arco de curva en alguna geometría).

Por lo tanto, $\tilde{\sigma}^\beta$ es una parametrización legítima de una curva sin puntos de inflexión.

Obviamente, la función vectorial

$$x = \tilde{\sigma}^\beta, y = \tilde{\sigma}^{\beta/2}$$

satisface las ecuaciones de la Tabla 1 para $n \geq 2$ ya que las derivadas de x, y con respecto a $\tilde{\sigma}^\beta$ a partir del orden 3 son todas cero. Sin embargo, si se considera que la parametrización lineal de $\tilde{\sigma}^\beta$ con respecto al tiempo significa velocidad constante, digamos $\tilde{\sigma}^\beta = t$, entonces $x = t, y = t^{2/2}$, lo que implica $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 1$. En su vez, usar $t = \tilde{\sigma}^\beta$ en (3.10) implica

$$v_{\tilde{\sigma}^\beta} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2-3\beta/2} \cdot 1^\beta = (1 + \tilde{\sigma}^{\beta/2})^{1/2-3\beta/2} = 1 \text{ cuando } \beta = 1/3.$$

Entonces hay una contradicción entre la parametrización de la función vectorial y la parametrización geométrica de la curva que aparentemente podría estar definida por esta función vectorial. Por lo tanto la función vectorial $\{x = \tilde{\sigma}^\beta, y = \tilde{\sigma}^{\beta/2}\}$ no representa una curva parametrizada por $\tilde{\sigma}^\beta$ cuando $\beta = 1/3$, mientras que el caso $\beta = 1/3$ corresponde a una parametrización con arco equiafin.

4 Arco en las geometrías de grupo afín en el plano y algunos de sus subgrupos

Se analizaron diferentes tipos de invariancia en los estudios de acción y percepción del movimiento. Por ejemplo, se suponen movimientos de la mano punto a punto.

⁹ Los antecedentes de las nociones geométricas que se utilizan en el ejemplo 3.2 se pueden encontrar en otros lugares, p. en [64, 28]. Se introducen en el marco del control motor en el Capítulo 2 de [52].

para producir trayectorias casi rectas. Tales formas corresponden a la invariancia euclidiana; Se analizaron movimientos más complejos en los marcos de geometrías equiafinas y afines, las referencias a los trabajos correspondientes se presentan en la Introducción. En esta sección presento los sistemas (3.7), (3.8) para el caso del modelo de tirones mínimos ($n = 3$) suponiendo una velocidad constante de acumulación de arco en diferentes geometrías. Las expresiones para la velocidad del arco de acumulación que se presentan a continuación se basan en los resultados de [64]. La información sobre la relación entre el sistema de ecuaciones derivado (3.7) y las soluciones candidatas se resume en la Tabla 2.

Los sistemas de ecuaciones presentados en esta sección representan casos particulares del sistema (3.7). Los casos particulares correspondientes del sistema (3.8) pueden obtenerse simplemente reemplazando la ecuación superior con el producto escalar de las derivadas de primer y sexto orden del vector de posición con respecto al arco correspondiente.

4.1 Grupo equiafín

Las transformaciones equiafinas de coordenadas involucran 5 parámetros independientes y son de la forma:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + a \\ y' &= \gamma x + \delta y + b, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1. \quad (4.1)$$

La velocidad de acumulación del arco equiafín se calcula de la siguiente manera [64]:

$$\sigma'_{\text{equiafín}} = \frac{x' x'' + y' y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}^{1/3} \quad (4.2)$$

El sistema (3.7) para $n = 3$ (caso del modelo de tirones mínimos) en el plano se convierte en [51, 52, 55]:

$$\frac{d^2 \sigma}{ds^2} = \text{constante}, \quad x''(4) - 2y''y'(4) + 2x'x'(5) + 2y'y'(5) + y \quad (4.3)$$

donde la diferenciación se implementa con respecto al arco equiafín

$$\sigma_{ea} = \int_0^t \sigma'_{ea}(\tau) d\tau. \quad (4.4)$$

El sistema (4.3) se reescribe en (4.10) para el caso en que la curvatura equiafín de una curva es una función conocida del arco equiafín. Los resultados para las soluciones candidatas (parábola, círculo, espiral logarítmica [55]) son los siguientes:

1. La parábola se parametriza con arco equiafín, hasta un trans equiafín $ea/2$. La clase de formación, como sigue: $x = \sigma_{ea}$, $y = \sigma$ parábolas constituye una solución obvia de (4.3) invariante bajo transformaciones afines arbitrarias [52, 55]. Dibujar parábolas con velocidad equiafín constante minimiza el costo funcional (3.1) y proporciona un costo cero [51].

2. El círculo se parametriza con arco equiafin de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \kappa^{-3/4} \cdot \cos(\sqrt{\kappa \sigma} \sigma) \\ y &= y_0 + \kappa^{-3/4} \cdot \sin(\sqrt{\kappa \sigma} \sigma) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aquí $\kappa \sigma$ es la curvatura equiafin [64, 28, 8] (los antecedentes necesarios para el marco actual se proporcionan en [52]):

$$\kappa \sigma = x'' y''' - x''' y'' \quad (4.6)$$

La curvatura equiafin es una constante positiva para elipses que incluyen círculos, cero para parábolas y constante negativa para hipérbolas [64]. El círculo es una solución no invariante bajo transformaciones equiafinas arbitrarias, sin embargo, los círculos son soluciones invariantes bajo transformaciones euclidianas (4.20) (traslación y rotación) [52, 55].

3. La espiral logarítmica se puede parametrizar con ángulo polar:

$$x = \text{const} \cdot \exp(\beta) \cos \theta, \quad y = \text{const} \cdot \exp(\beta) \sin \theta \quad (4.7)$$

Introduciendo la parametrización con arco equiafin de (4.2) e integrando

$$d\sigma/d\theta = (\text{const}^2 (1 + \beta^2))^{1/3} \cdot e^{2\beta/3}$$

resultados en:

$$\sigma(\theta) = \ln \frac{2\beta}{\beta^2} - 1/3 + 1 \cdot (\text{const}^2 (1 + \beta^2))^{1/3}$$

que se puede sustituir en (4.7) para implicar las expresiones para $x(\sigma)$, $y(\sigma)$. Aparentemente, (4.7) es solución para (4.3) solo para el caso $\beta = \pm 3/\sqrt{7}$ [6, 55].

Las derivadas de primer y tercer orden del vector de posición de una curva plana $r(\sigma)$ con respecto al arco equiafin son paralelas. El paralelismo sigue de la identidad $x = 1$ que, en particular, aparece en el sistema (4.3). Aparentemente, la curvatura equiafin (4.6) de una curva es un factor de escala entre las derivadas de primer y tercer orden del vector de posición:

$$r'''(\sigma) + \kappa(\sigma) r'(\sigma) = 0$$

lo que implica la posibilidad de expresar derivadas de orden superior del vector $r(\sigma)$ en términos de sus derivadas de primer y segundo orden cuando la curvatura equiafin es una función conocida de la longitud equiafin. En particular,

$$r^{(6)} = r''(3\kappa''(\sigma) + \kappa^2(\sigma)) + r'(\kappa'''(\sigma) + 4\kappa'(\sigma)\kappa(\sigma)).$$

Por tanto, la derivada de primer orden de la ecuación superior del sistema (4.3) ($r = 0$) se puede reescribir

$$r \cdot r^{(6)} = (r' \cdot r'')(3\kappa''(\sigma) + \kappa^2(\sigma)) + r'^2(\kappa'''(\sigma) + 4\kappa'(\sigma)\kappa(\sigma)) = 0. \quad (4.8)$$

Notando que $r'' = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} (r'^2)$, la ecuación (4.8) implica que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} (r'^2 - r'^2) = \frac{2\kappa''(\sigma) + 4\kappa'}{3\kappa''(\sigma) + \kappa^2(\sigma)} r' . \quad (4.9)$$

Después de integrar (4.9), el sistema (4.3) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r'^2(\sigma) &= r'^2(0) \exp[-2(F(\sigma) - F(0))] \\ y'' - x'y' &= 1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

dónde

$$F(\sigma) = \frac{\kappa'' + 4\kappa'}{2(3\kappa'' + \kappa^2)} \sigma .$$

4.2 Grupo afín

Las transformaciones afines de coordenadas involucran 6 parámetros independientes y son de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y + a \\ y_1 &= \gamma x + \delta y + b, \end{aligned} \quad \alpha\beta\gamma\delta \neq 0. \quad (4.11)$$

La velocidad de acumulación de arco afín se calcula de la siguiente manera¹⁰:

$$\sigma'_a = \frac{3\sigma^3 \cdot \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + 12\sigma^3 \cdot \frac{x''}{y'} \frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} - 5 \frac{x' \ddot{x}}{y' \ddot{y}}}{9\sigma^6} = \sigma' \sqrt{\kappa}, \quad (4.12)$$

donde σ' es la velocidad equiafín (4.2) y κ es la curvatura equiafín (4.6). El sistema (3.7) para $n = 3$ en el plano se convierte en

$$x'^2 + y'^2 - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y'y(5) = \text{constante},$$

$$\frac{3(x'y'' - x''y') \cdot \frac{x'}{y'} \frac{x(4)}{y(4)} + 12(x'y'' - x''y') \cdot \frac{x''}{y'} \frac{x'''}{y'''} - 5 \frac{x' \ddot{x}}{y' \ddot{y}}}{9(x'y'' - x''y')^2} = 1. \quad (4.13)$$

Aquí se implementa la diferenciación con respecto al arco afín σ . Los resultados de las soluciones candidatas (parábola, círculo, espiral logarítmica) son los siguientes:

1. La longitud afín de la parábola es cero, igual que la longitud euclídea de la línea recta es cero o la longitud euclídea de un punto es cero. Por lo tanto, probar si las parábolas son soluciones del sistema (4.13) no tiene sentido. La curvatura afín de la parábola no está definida.

¹⁰La fórmula para la velocidad de acumulación de arco afín en [64] contiene un error de imprenta y, por lo tanto, es diferente de (4.12).

2. Círculo. Observando que el arco afín es la raíz cuadrada integrada de la curvatura equiafín ($\sigma a = \sqrt{\kappa a} d\sigma a$ [64]) y que la curvatura equiafín de un círculo $-1/2$ es una constante positiva, se obtiene inmediatamente para un círculo: $\sigma a = \kappa a \sigma a$. Sustituyendo en (4.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \kappa \frac{-3/4}{\sqrt{9+\beta^2}} \cdot \cos(\sigma a) \\ &= y_0 + \kappa \frac{-3/4}{\sqrt{9+\beta^2}} \cdot \sin(\sigma a) \text{ y} \end{aligned} \quad (4.14)$$

que es solución del sistema (4.13). Los círculos constituyen soluciones no invariantes bajo transformación afín arbitraria. La clase de círculos es invariante bajo transformaciones euclidianas y escala uniforme.

3. Espiral logarítmica. La velocidad de acumulación del arco afín de la espiral aritmética logarítmica (4.7) con respecto al cambio del ángulo polar es la siguiente

$$\begin{aligned} \text{constante de flujo } d\sigma a/d &= \frac{\sqrt{9+\beta^2}}{3}. \text{ Así que sin limitación de generalidad} \\ &= \frac{3}{9+\beta^2} \sigma a. \text{ La expresión de la espiral logarítmica (4.7) se convierte en} \end{aligned}$$

$$x(\sigma a) = \text{const} \cdot \exp \beta \sqrt{\frac{3}{9+\beta^2}} \sigma a \cos \sqrt{\frac{3}{9+\beta^2}} \sigma a \quad (4.15)$$

$$y(\sigma a) = \text{const} \cdot \exp \beta \sqrt{\frac{3}{9+\beta^2}} \sigma a \sin \sqrt{\frac{3}{9+\beta^2}} \sigma a.$$

La espiral logarítmica satisface el sistema (4.13) para β que son soluciones de la ecuación: $5 - 5\beta + \beta^3 = 0$ y existen 3 soluciones reales $\beta = \pm 5 \pm 2\sqrt{5}$.

4.3 Grupo afín al centro

Las transformaciones de coordenadas afines al centro involucran 4 parámetros independientes y son de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y \\ &= \gamma x + \delta y, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \alpha &\beta \gamma \\ \delta & \end{aligned} = 0. \quad (4.16)$$

La velocidad de acumulación del arco afín al centro se calcula de la siguiente manera [64]:

$$\sigma' = \frac{\sigma'^2}{x x' y y'} \quad (4.17)$$

El sistema (3.7) para $n = 3$ en el plano se convierte en

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y'y(5) = \text{constante}, \\ &\frac{yx'y'' - x''y}{xy' - x'y} = 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

La diferenciación se implementa con respecto al arco centro-afín σ_{ca} .

Los resultados de las soluciones candidatas (parábola, círculo, espiral logarítmica) son los siguientes:

1. Parábola. La ecuación (4.17) implica que las coordenadas de una parábola parametrizada con longitud afín al centro, hasta una transformación afín al centro, son: $x(\sigma_{ca}) = 1/\text{const} \cdot \exp(\sigma_{ca}/\sqrt{2})$, $y(\sigma_{ca}) = 1/(2\text{const}^2) \cdot \exp(\sqrt{2}\sigma_{ca})$. Estas expresiones no satisfacen la ecuación superior del sistema (4.18).
2. Círculo. Usando la parametrización de un círculo con longitud equiafín como en (4.5), la ecuación (4.17) implica, sin limitación de generalidad, que para un círculo la velocidad centroafín está relacionada con la velocidad equiafín de la siguiente manera:

$$\sigma'_{\text{centro}} = k_{ea} \cdot \sigma'_{\text{equiafín}} \cdot 1/8$$

La curvatura equiafín de un círculo es una constante positiva. Por lo tanto, dibujar un círculo con una velocidad afín al centro constante es equivalente a dibujar un círculo con una velocidad equiafín constante. Entonces, el sistema (4.18) se cumple para cualquier círculo, ya que los círculos satisfacen el sistema de ecuaciones correspondiente para la parametrización equiafín.

3. Espiral logarítmica. El cálculo directo basado en (4.17) implica que la velocidad de acumulación del arco afín al centro con respecto al cambio del ángulo polar de (4.7) es la siguiente constante $d\sigma_{ca}/d\theta = 1 + \beta^2$. Sin

limitación de generalidad = mic $\frac{1}{1 + \beta^2} \sigma_{ca}$. La expresión para el logaritmo
espiral (4.7) se convierte en

$$\begin{aligned} x(\sigma_{ca}) &= \text{const} \cdot \exp \beta \cdot \frac{1}{1 + \beta^2 \sigma_{ca} \cos} \\ y(\sigma_{ca}) &= \text{const} \cdot \exp \beta \cdot \frac{1}{1 + \beta^2 \sigma_{ca} \sin} \end{aligned} \quad (4.19)$$

La espiral logarítmica satisface el sistema (4.18) para $\beta = \pm 5 \pm 2\sqrt{5}$. ¿Son los mismos β que en el caso del grupo afín!

4.4 grupo euclidiano

Las transformaciones euclidianas de coordenadas son 3-paramétricas, son de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) + a \\ y_1 &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) + b \end{aligned} \quad (4.20)$$

La velocidad de acumulación del arco euclidiano, que es una noción estándar de velocidad tangencial cuya integral es igual a la longitud de la trayectoria dibujada, se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma'_{\text{UE}} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (4.21)$$

El sistema (3.7) para $n = 3$ en el plano se convierte en

$$\frac{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}{2\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - 2\ddot{x}^2(4) - 2\ddot{y}^2(4) + 2\dot{x}\dot{y}(5) + 2\dot{y}\dot{x}(5) = \text{constante}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}{2\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1.$$

La diferenciación se implementa con respecto al arco euclidiano σ_{eu} . Los resultados de las soluciones candidatas (parábola, círculo, espiral logarítmica) son los siguientes:

1. Parábola. La ecuación (4.21) implica que las coordenadas de una parábola parametrizada con longitud euclidiana, hasta la transformación euclidiana, se derivan de las siguientes dos ecuaciones: $\sigma_{eu}(x) = 0.5x\sqrt{x+1} + 0.5\ln(x+\sqrt{x+1})$, $y(x) = x^2/2$. Estas expresiones no satisfacen el sistema (4.22) y, por lo tanto, el movimiento con velocidad euclidiana constante a lo largo de la parábola no minimiza el tirón. También se puede concluir el mismo resultado del hecho de que la trayectoria de dibujar una parábola con velocidad equiafin constante (que minimiza el tirón) es diferente de la trayectoria de dibujar la misma forma con velocidad euclidiana constante, por supuesto, las duraciones de ambas trayectorias son iguales.
2. Círculo. El movimiento con velocidad euclidiana constante a lo largo de un círculo es equivalente al movimiento con velocidad angular constante, por lo tanto, también es equivalente al movimiento con velocidad equiafin constante. Entonces el sistema (4.22) se cumple para círculos.
3. Espiral logarítmica. El cálculo directo basado en (4.7) y (4.21) implica que la velocidad de acumulación de la longitud del arco euclidiano con respecto al cambio del ángulo polar es la siguiente expresión $d\sigma_{eu}/d\beta = 1 + \beta^2 \exp(\beta^2)$.

Sin limitación de generalidad $\beta = \ln$ $\frac{\beta}{1 + \beta^2} \sigma_{eu} / \beta$. el expreso
sion para la espiral logarítmica (4.7) se convierte en

$$\begin{aligned} x(\sigma_{eu}) &= \text{constante} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sigma_{eu} \cos \ln \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sigma_{eu} / \beta \\ y(\sigma_{eu}) &= \text{constante} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sigma_{eu} \text{pecado} \ln \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sigma_{eu} / \beta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

1 La espiral logarítmica satisface el sistema (4.22) para $\beta = \pm \sqrt{5}$. Estos valores $\sqrt{5}$ de β son diferentes de los valores de β en los casos en que se acumulan arcos equiafines, afines o afines al centro con velocidad constante mientras se minimiza el funcional de costo.

4.5 Pseudosoluciones

Llamo pseudosolución a una función vectorial que satisface la ecuación superior del sistema (3.7) pero no satisface la ecuación inferior del sistema. En

en otras palabras, la función vectorial no representa una curva para una parametrización geométrica dada. El ejemplo 3.2 demostró una función vectorial que es una solución en parametrización equiafin y solo una pseudo-solución en un conjunto de otras parametrizaciones. Aparentemente, hay más ejemplos de este tipo. Cuando $\beta = \pm 5 \pm 2 \sqrt{5}$ (los mismos valores de β se obtuvieron en los casos de logarítmica espiral parametrizada con arcos afines o afines al centro) los siguientes dos vectores funciones:

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= \cos(\sigma) \cosh(\beta\sigma) \\ y(\sigma) &= \sin(\sigma) \cosh(\beta\sigma) \end{aligned}$$

(4.24)

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= \cos(\sigma) \sinh(\beta\sigma) \\ y(\sigma) &= \sin(\sigma) \sinh(\beta\sigma) \end{aligned}$$

(4.25)

satisfacen la ecuación superior en el sistema (3.7) pero no representan una curva parametrizado por alguno de los anteriores (equiafin, afin, centroafin, euclidianas) parametrizaciones.

4.6 Resumen de soluciones planas conocidas y algunas pseudosoluciones

Los resultados de la sección 4 para las soluciones candidatas y pseudosoluciones en 2 las dimensiones y el orden de la suavidad de la trayectoria n = 3 se resumen en la Tabla 2.

Objeto	invariancia	Equi-afin arco	Afin arco	Euclidiano afin al centro arco	
Parábola	Afin	Cualquier	Irrelevante	Ninguno	Ninguno
Círculo	- Euclidiana - Escalado uniforme	Cualquier	Cualquier	Cualquier	Cualquier
Logarítmica - Espiral euclidiana (4.7) "espiral cosh" (4.24)	- Escala uniforme $\pm 3/\sqrt{7 \pm 5 \pm 2 \sqrt{5}}$	Cuando $\beta = \pm 5 \pm 2 \sqrt{5}$	Cuando $\beta = \pm 5 \pm 2 \sqrt{5}$	Cuando $\beta = \pm 5 \pm 2 \sqrt{5}$	Cuando $\beta = \pm 5 \pm 2 \sqrt{5}$
"espiral sinh" (4.25)		Pseudo-solución	Pseudo-solución	Pseudo-solución	Seudo-solución

Tabla 2: Soluciones conocidas y dos pseudosoluciones del sistema (3.7) y (3.8)) en plano para orden de suavidad de trayectoria n = 3 y param eterizaciones geométricas invariantes en grupo afin y tres de sus subgrupos. Invariancia de la clase de curvas y el valor del parámetro β de la espiral logarítmica son indicado.

4.7 Condición suficiente

La condición suficiente (3.9) para que una curva pertenezca al conjunto A^* definido en (3.4) se cumple para parábolas y círculos. Para la espiral logarítmica, la condición suficiente se satisface solo para una parte de los valores de β de la Tabla 2, como se demuestra en la Tabla 3. Las espirales logarítmicas con valores de β en la Tabla 3 son soluciones del problema de minimización (3.2) con condiciones de contorno¹¹ (pueden ser soluciones del problema de minimización sin condiciones de contorno pero esto no ha sido probado). Se debe implementar una prueba diferente para espirales logarítmicas con valores de β que no aparecen en la Tabla 3 para identificar si realmente pertenecen al conjunto A^* .

n, l

	Equi-afín arco	Afín arco	Euclidiano afín al centro arco
β	$3/\sqrt{7}$	$-5 \pm \sqrt{5} - 5 \pm \sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$

Tabla 3: Espiral logarítmica con los valores de β en la tabla satisfacen la condición suficiente (3.9) para el problema de optimización (3.2) con condiciones de contorno.

5 Soluciones en espacio para parametrización con Arco equiafín 3D

Las transformaciones equiafines de coordenadas en el espacio involucran 11 parámetros independientes y son de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, & y_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + b, & z_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + c, \\ x_2 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, & y_2 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + b, & z_2 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + c, \\ x_3 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, & y_3 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + b, & z_3 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + c, \end{aligned} \quad (5.1)$$

La velocidad de acumulación del arco equiafín espacial se calcula de la siguiente manera [64]:

$$\sigma_{ea3}^2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{y} & \ddot{y} \\ \ddot{z} & \ddot{z} & \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

El sistema (3.7) para $n = 3$ en el espacio se convierte en

$$\begin{aligned} & \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - 2\ddot{x}\ddot{x} - 2\ddot{y}\ddot{y} - 2\ddot{z}\ddot{z} + 2\ddot{x}\ddot{x} + 2\ddot{y}\ddot{y} + 2\ddot{z}\ddot{z} = \text{constante}, \\ & \frac{\ddot{x}}{\ddot{z}} = \frac{\ddot{x}}{\ddot{z}}, \quad \frac{\ddot{y}}{\ddot{z}} = \frac{\ddot{y}}{\ddot{z}}, \quad \frac{\ddot{z}}{\ddot{z}} = 1, \end{aligned} \quad (5.3)$$

¹¹Las condiciones necesarias (3.7), (3.8) se satisfacen con las soluciones de optimización problemas: 1) con condiciones de contorno (3.2) y 2) sin condiciones de contorno (3.3).

o, después de derivar ambos lados de la ecuación superior en (5.3)

$$x'x''(6) + y'y''(6) + z'z''(6) = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = 1.$$

La diferenciación se implementa con respecto al arco equiafin espacial

$$\sigma e a^3 = \int_0^t \sigma' e a^3(\tau) d\tau. \quad (5.5)$$

Las siguientes dos curvas son soluciones conocidas del sistema (5.4).

1. La línea de tornillo parabólico [52] se parametriza con arco equiafin espacial, hasta una transformación equiafin espacial, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= \sigma e a^3 \\ y &= \sigma e a^3 / 2 \\ z &= \sigma e a^3 / 6. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Obviamente, la línea de tornillo parabólico es una solución invariante bajo transformaciones equi-afines espaciales arbitrarias. La clase de líneas de tornillo parabólico es invariable bajo transformaciones afines espaciales arbitrarias.

2. La línea de tornillo elíptica se parametriza con arco espacial equiafin, hasta un transformación espacial equiafin, como sigue:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cos \alpha - 1/3 \sigma e a^3 \\ y &= \alpha \sin \alpha - 1/3 \sigma e a^3 \\ z &= \alpha - 1/3 \sigma e a^3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Las transformaciones euclidianas espaciales y la escala uniforme espacial de las líneas de tornillo elípticas también constituyen soluciones del sistema (5.3). Las transformaciones equi afines arbitrarias de la línea de tornillo elíptica de la forma (5.7) no serán necesariamente soluciones del sistema (5.3).

Condición suficiente (3.9) para el problema de optimización con fronteras (3.2) $12+3\sqrt{6}/10$ se cumple para la línea de tornillo parabólico cuando $\sigma e a^3$ está fuera del intervalo $\frac{12-3\sqrt{6}}{10}, \frac{12+3\sqrt{6}}{10}$. La línea de tornillo elíptica pertenece a la clase de soluciones del problema de optimización con condiciones de contorno ya que satisface la condición suficiente (3.9).

6 Más casos

Ciertas soluciones para una serie de casos específicos de la ecuación se han considerado anteriormente: dimensión $L = 2, 3$; suavidad de la trayectoria (de orden 3); y

parametrización en 4 geometrías. En primer lugar, puede haber más soluciones para las ecuaciones consideradas. En segundo lugar, otros casos de la ecuación, por ejemplo. cuando el orden de suavidad de la trayectoria $n = 4$, podría poseer tanto las conocidas para $n = 3$ como otras soluciones. En caso de parametrización equiafin, todas las parábolas y círculos son soluciones para el caso $n = 4$, al igual que en el caso de $n = 3$. Sin embargo solución de la clase de espirales logarítmicas (con $\beta = \pm(43 \pm 4\sqrt{97})$) es diferente de la espiral logarítmica que es solución para el caso $n = 3$ ($\beta = \pm 3/\sqrt{7}$). La consideración de sistemas de ecuaciones bajo diferentes combinaciones de dimensión, orden de suavidad de trayectoria y parametrización geométrica podría conducir a más soluciones cuya candidatura a ser primitivas de movimiento geométrico puede analizarse más a fondo.

7 Epílogo

La siguiente idea de un destacado matemático del siglo XX, Andrey Kolmogorov, anticipó la idea sobre la existencia de primitivos de movimiento geométrico [38]: “Si nos dirigimos a la actividad humana – consciente, pero sin seguir las reglas de la lógica formal, es decir, intuitiva o actividad seme-intuitiva, por ejemplo a las reacciones motoras, encontraremos que la alta perfección y nitidez del mecanismo del movimiento continuo se basa en los movimientos del tipo geométrico continuo ... Se puede considerar, sin embargo, que esto no es una objeción radical contra los mecanismos discretos. Lo más probable es que la intuición de las curvas continuas en el cerebro se realice en base al mecanismo discreto”.¹²

En mi opinión, la idea de Kolmogorov significa que la representación de las curvas en el cerebro se basa en primitivas geométricas que forman parte de los “mecanismos discretos”. La forma de representar las “curvas continuas en el cerebro” que en realidad están compuestas por primitivas geométricas podría ir más allá de la planificación de trayectorias y corresponder también a procesos de percepción e imaginación geométrica. Además, especulo que en cierto nivel jerárquico de los procesos cognitivos, los “mecanismos discretos” de los movimientos complejos y el habla se cruzan. Las observaciones de la representación de baja dimensión de los movimientos de garabatos de monos con primitivas parabólicas y la concatenación de segmentos parabólicos relacionados con la recompensa en trayectorias complejas [53] respaldan la viabilidad de esta especulación.

ANEXOS

Una derivación de la Proposición 3.1

Se da la parametrización geométrica σ de una curva. La regla $\sigma(t)$ de acumular σ con el tiempo a lo largo de la curva es estrictamente monótona y derivable tantas veces como sea necesario. Observando que existe una correspondencia biunívoca entre t y σ , para la función $\sigma(t) \in [0, \Sigma]$ defina una función inversa $t = \tau(\sigma) \in [0, T]$.

¹²Traducido del ruso por FP.

Se utiliza la siguiente notación:

$$v \equiv v(\sigma) \equiv \frac{d}{dt} \sigma(t) \Big|_{t=\tau(\sigma)} \equiv \sigma'(t) \Big|_{t=\tau(\sigma)}.$$

Además, la siguiente propiedad basada en la regla de la cadena se usa para una función diferenciable f :

$$\frac{d}{dt} f(\sigma(t)) = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \equiv v' \cdot \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \quad (\text{A.1})$$

donde prima denota diferenciación con respecto a σ . Así, por ejemplo, dos derivadas de orden superior de σ con respecto al tiempo serán:

$$\begin{aligned} w = w(\sigma) &\equiv \frac{d^2}{dt^2} \sigma(t) \Big|_{t=\tau(\sigma)} = \frac{d}{dt} [v(\sigma(t))] \Big|_{t=\tau(\sigma)} = v \frac{dv}{d\sigma} \equiv v' v \quad (\text{A.2}) \\ j = j(\sigma) &\equiv \frac{d^3}{dt^3} \sigma(t) \Big|_{t=\tau(\sigma)} = v \frac{d^2 w}{d\sigma^2} \equiv v'' v + v' v'. \end{aligned}$$

Sin limitación de generalidad, se implementarán derivaciones adicionales para trayectorias en 2 dimensiones. Las derivaciones para las trayectorias en 3 o más dimensiones son idénticas. Así que considere $J\sigma(rL, n)$ de (3.1) con $L = 2$ y use (A.1) para implementar el cambio de variables:

$$\begin{aligned} J\sigma(r2, n) &= \int_0^T \left(\frac{d nx(\sigma(t))}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d ny(\sigma(t))}{dt} \right)^2 dt = \quad (\text{A.3}) \\ &= \int_0^T \frac{1}{v} \left(\frac{d nx(\sigma(t))}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d ny(\sigma(t))}{dt} \right)^2 d\sigma = \\ &= \int_0^T \frac{1}{v} \ln(x', x'', \dots, y', y'', \dots, y(n); v, v', \dots, v(n-1)) d\sigma, \end{aligned}$$

donde $\ln$ denota la expresión parametrizada con σ :

$$\ln \equiv \left(\frac{d nx(\sigma(t))}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d ny(\sigma(t))}{dt} \right)^2 \Big|_{t=\tau(\sigma)}. \quad (\text{A.4})$$

Por ejemplo:

Ejemplo A.1. En el caso de $n = 3$, se tiene:

$$J\sigma(r_2, 3) = \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt = \int_0^1 \frac{1}{v} (x''^2 + y''^2) v^6 + 9(x''^2 + y''^2) w^{2-2v} + (x'^2 + y'^2)_{jj}^2 + 6(x'''x'' + y'''y'') v^4 w + 2(x'''x' + y'''y') v^3 + 6(x''x' + y''y') v w_j d\sigma = \int_0^1 \frac{1}{v} \cdot I_3(x', x'', x'''; y', y'', y'''; v, v', v'') d\sigma$$

con w, j de (A.2).

Abordo los problemas de optimización (3.2) y (3.3) con un método estándar del cálculo de variaciones, la ecuación de Euler-Poisson (EP) con multiplicador de Lagrange (ej. [23]). El multiplicador de Lagrange (λ) se utiliza para garantizar que el

velocidad de acumulación del arco es factible: $\int_0^1 \frac{d\sigma}{v} = T$.

$$\begin{aligned} EP(E_n/v) &= \frac{\partial(\text{pulgadas}/v)}{\partial v} - \frac{d}{d\sigma} \frac{(\partial(\ln/v)) \partial v'}{\partial \sigma^2} + \frac{d^2}{d\sigma^2} \frac{\partial(\ln/v) \partial v'}{\partial v} - \dots \quad (A.5) \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\sigma^{n-1}} \frac{\partial(\ln/v)}{\partial v^{(n-1)}} + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} = \\ &= v(2n-3)(\dots) + v(2n-4)(\dots) + \dots + v'(\dots) \\ &+ v^{2n-2}(\dots) + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} = 0. \quad (A.6) \end{aligned}$$

Todas las derivadas de v en las expresiones entre corchetes $(\dots)$ en (A.6) tienen un orden menor que el orden de la derivada de v multiplicando los corchetes. Nótese que el término en (A.6) v^{2n-2v} representa el valor de la velocidad elevado a $2n - 2$ y no el orden de la derivada. Entonces la expresión

$$v^{2n-2v}(\dots) + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v}$$

es la única parte de (A.6) que no contiene derivadas de v . Denotemos con μ_n la expresión entre paréntesis multiplicada por v para que la ecuación de Euler-Poisson (A.6) pueda reescribirse como sigue:

$$EP(I) = v(2n-3)(\dots) + v(2n-4)(\dots) + \dots + v'(\dots) + v^{2n-2} \mu_n + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} = 0 \quad (A.7)$$

ahora como un

Ejemplo A.2. Considere el caso del criterio de mínimo tirón, en otras palabras, la suavidad de tercer orden. Utilizando derivaciones idénticas a las utilizadas en

[52], la ecuación de Euler-Poisson correspondiente a (A.6) será la siguiente:

$$v^{(4)} \cdot (\dots) + v^{(3)} \cdot (\dots) + v^{(2)} \cdot (\dots) + 4 + v \cdot (x^{(2)} + y^{(2)} - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y' \cdot y(5)) + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} = 0.$$

Aquí

$$= x^{(2)} + y^{(2)} - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y' \cdot y(5).$$

La v deseable para la solución óptima es constante, según (3.4).

Por lo tanto, todas las derivadas de v son cero y la ecuación de Euler-Poisson para la v deseada se reduce a lo siguiente:

$$v^{2n-2} \mu_n - \frac{\lambda}{2v} = 0.$$

Como se indicó anteriormente, v , λ son constantes, por lo tanto, bajo el supuesto de $v = 0$, que obviamente tiene lugar,

$$\mu_n = \text{const.} \quad (\text{A.8})$$

Proposición A.3.

$$\mu_n = x^{(n)} + y^{(n)} - 2x^{(n-1)}x^{(n+1)} + y^{(n-1)}y^{(n+1)} + 2x^{(n-2)}x^{(n+2)} + y^{(n-2)}y^{(n+2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2x^{(1)}x^{(2n-1)} + y^{(1)}y^{(2n-1)},$$

o más formalmente

$$\mu_n = x^{(n)} + y^{(n)} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i x^{(n-i)}x^{(n+i)} + y^{(n-i)}y^{(n+i)}, \quad (\text{A.9})$$

que es la versión bidimensional de la ecuación superior en el sistema (3.7).

Prueba. Para encontrar la expresión de μ_n implemente la diferenciación en la ecuación de Euler-Poisson (A.5). Aparentemente, el argumento del funcional de costos de (A.3),

$$\frac{d n x(\sigma(t))}{d t n}^2 + \frac{d n y(\sigma(t))}{d t n}^2$$

se puede dividir en las partes x e y , por lo tanto, el argumento funcional I_n de la ecuación de Euler-Poisson también se puede dividir:

$$I_n = I_{n,x} + I_{n,y} = \frac{d n x(\sigma(t))}{d t n}^2 + \frac{d n y(\sigma(t))}{d t n}^2 \quad (\text{A.10})$$

El resultado de la diferenciación en la parte x

$$I_{n,x} = \frac{d n x(\sigma(t))}{d t n}^2 \quad (\text{A.11})$$

es idéntico al resultado de la derivación en la parte y In, $y = \frac{d ny(\sigma(t))}{dtn}^2$ $t=\tau(\sigma)$

hasta el nombre del argumento (x siendo reemplazada por y).

Entonces, sin limitación de generalidad, implemento la prueba solo para la parte x y necesito probar que

$$\begin{aligned} (E - P) \frac{en x}{v} &= (E - P) \frac{1}{v} \frac{d nx(\sigma(t))}{dtn}^2 = \\ &= v^{2n-2} x^{(norte)} - 2x(n-1)x(n+1) + 2x(n-2)x(n+2) + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2x'x(2n-1) \\ &+ v'(\dots) + v''(\dots) + \dots + v^{(n)}(\dots) + \lambda x \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} \end{aligned} \quad (A.12)$$

El resultado de que la parte y sea idéntica a (A.12) con el reemplazo adecuado de los términos x con los términos y descritos anteriormente implicará inmediatamente la igualdad (A.9) que estoy demostrando.

Ahora la expresión para $d nx(\sigma(t))/dtn$ será reescrita y parametrizada con σ . Las derivadas temporales de $x(\sigma(t))$ parametrizadas por σ se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x'|_{t=\tau(\sigma)} &= \frac{dx}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=\tau(\sigma)} = x'v \\ x''|_{t=\tau(\sigma)} &= v \cdot x'|_{t=\tau(\sigma)} = x''v^2 + x''vv \\ \dots x|_{t=\tau(\sigma)} &= v \cdot x'|_{t=\tau(\sigma)} = x''v^3 + 3x''v''_{2v} + x'v'v^2 + v(X'v). \end{aligned}$$

Se puede demostrar por inducción que

$$\frac{d nx(\sigma(t))}{dtn} \Big|_{t=\tau(\sigma)} = v^{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} x^{(n-k)} v^{(k-1)} (n) + xv + \sum_{y_0, j>0} v^{(j)} v^{(j)} (\dots). \quad (A.13)$$

Las expresiones denotadas por $(\dots)$ y multiplicadas por $v^{(i)}v^{(j)}$ en (A.13) son irrelevantes en nuestras deducciones como su contribución a la suposición se pondrá a cero bajo el de velocidad constante In, x ($v = \text{const}$).

La expresión (A.13) implica para la derivada al cuadrado:

$$\begin{aligned} \frac{d nx(\sigma(t))}{dtk}^2 \Big|_{t=\tau(\sigma)} &= v^{2n-2} \sum_{k=2}^{n-1} x^{(n-k)} v^{(k-1)} + xv^{(n)} \\ &+ \sum_{y_0, j>0} v^{(j)} v^{(j)} (\dots) = \sum_{y_0, j>0} v^{(j)} v^{(j)} (\dots) \\ &+ v^{2n-2} x^{(norte)} v^2 + 2vx(n)n \sum_{k=2}^{n-1} x^{(n-k)} v^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (A.14)$$

Entonces para $\ln, x$ de (A.11)

$$\frac{\partial \ln x}{\partial v} = v^{2n-1} \cdot x^{(n)} + 2 \cdot v^{2n-2} \cdot x^{(n)} \sum_{k=2}^n x^{(n-k-1)} v^{(k-1)} + \dots \quad (A.15)$$

y la ecuación de Euler-Poisson (A.6) para $\ln, x/v$ será la siguiente:

$$\begin{aligned} (E - P) \quad \frac{\partial \ln x}{\partial v} &= \lambda x \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} + (2n-1)v^{2n-2} x^{(n)} - 2 \frac{d}{d\sigma} v^{2n-2v} \cdot x^{(n)} \cdot x^{(n-1)} \\ &+ 2 \frac{d^2}{d\sigma^2} v^{2n-2} x^{(n)} \cdot x^{(n-2)} + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{v^{n-1}}{d\sigma^{n-1}} x^{(n)} \cdot v + \dots + v(y_0) \cdot \dots = \\ &v(y_0) \cdot \dots + \lambda x \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} + (2n-1)v^{2n-2} x^{(n)} + \\ &2 \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{v^{k-1}}{d\sigma^{k-1}} v^{2n-2v} \cdot x^{(n)} \cdot x^{(n-k-1)} \quad (A.16) \end{aligned}$$

Los valores de los coeficientes binomiales en (A.16) forman una rebanada del triángulo de Pascal sin dos números en el límite. Una propiedad del triángulo de Pascal que presento en otra parte implica que

$$\begin{aligned} (2n-1)v^{2n-2} x^{(n)} + 2 \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{v^{k-1}}{d\sigma^{k-1}} v^{2n-2v} \cdot x^{(n)} \cdot x^{(n-k-1)} = \\ v^{2n-2v} x^{(n)} - 2x^{(n-1)}x^{(n+1)} + 2x^{(n-2)}x^{(n+2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2x^{(n)}x^{(2n-1)} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} (E - P) \quad \frac{\partial \ln x}{\partial v} &= v(y_0) \cdot \dots + \lambda x \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} + v^{2n-2} x^{(n)} - 2x^{(n-1)}x^{(n+1)} + \\ &2x^{(n-2)}x^{(n+2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2x^{(n)}x^{(2n-1)}, \end{aligned}$$

lo que completa la prueba de la Proposición A.3, lo que significa que la Proposición 3.1 es verdadera. $\square$

Referencias

- [1] Bruno B. Averbeck, David A. Crowe, Matthew V. Chafee y Apostolos P. Georgopoulos, Actividad neuronal en la corteza prefrontal durante la copia de formas geométricas 1. Las células individuales codifican la forma, la secuencia y los parámetros métricos, *Experimental Brain Research* 150 (2003), no. 2, 127–141.
- [2] ———, Actividad neuronal en la corteza prefrontal durante la copia de formas geométricas 2. Descodificación de segmentos de forma de conjuntos neuronales, *Experimental Brain Research* 150 (2003), no. 2, 142–153.
- [3] Shay Ben-Itzhak y Amir Karniel, El criterio de aceleración mínima con restricciones implica el control bang-bang como un principio subyacente para las trayectorias óptimas de los movimientos de alcance del brazo, *Neural Computation* 20 (2008), no. 3, 779–812.
- [4] Daniel Bennequin, Ronit Fuchs, Alain Berthoz y Tamar Flash, El tiempo de movimiento y la invariancia surgen de varias geometrías, *PLoS Comput Biol* 5 (2009), no. 7.
- [5] Emilio Bizzi, Ferdinando A. Mussa-Ivaldi y Simon Giszter, Cálculos subyacentes a la ejecución del movimiento: una perspectiva biológica, *Science* 253 (1991), no. 5017, 287–291.
- [6] Ido Bright, Planificación de movimiento a través de la optimización, tesis de maestría, Departamento de Ciencias de la Computación y Matemáticas Aplicadas, Instituto de Ciencias Weizmann, 2007.
- [7] E Burdet y TE Milner, Cuantización de movimientos humanos y aprendizaje de movimientos precisos, *Biol Cybern* 78 (1998), 307 – 318.
- [8] Eugeniu Calabi, Peter J. Olver y Allen Tannenbaum, Geometría afín, flujos de curvas y aproximaciones numéricas invariantes, *Adv. en matemáticas*. 124 (1996), 154–196, [www: http://www.math.umn.edu/olver/papers.html](http://www.math.umn.edu/olver/papers.html).
- [9] A Casile, E Dayan, V Caggiano, T Hendler, T Flash y MA Giese, Codificación neuronal de invariantes cinemáticos humanos durante la observación de acciones, *Cereb Cortex* 20 (2010), no. 7, 1647–55.
- [10] A d'Avella, A Portone, L Fernandez y F Lacquaniti, Control de movimientos de alcance rápido mediante combinaciones de sinergia muscular, *J Neurosci* 26 (2006), 7791 – 7810.
- [11] A d'Avella, P Saltiel y E Bizzi, Combinaciones de sinergias musculares en la construcción de un comportamiento motor natural, *Nat Neurosci* 6 (2003), 300 – 308.
- [12] Eran Dayan, Antonino Casile, Nava Levit-Binnun, Martin Giese, Talma Hendler y Tamar Flash, Representaciones neuronales de las leyes cinemáticas del movimiento: evidencia del acoplamiento entre acción y percepción, *Proc Natl Acad Sci USA* 104 (2007), 20582 – 20587.

- [13] Adam S. Dickey, Yali Amit y Nicholas G. Hatsopoulos, Codificación neuronal heterogénea de movimientos correctivos en la corteza motora, *Frontiers in Neural Circuits* 7 (2013), Artículo 51.
- [14] Laura Dipietro, Howard Poizner y Hermano I. Krebs, Dinámica espaciotemporal del procesamiento de corrección motora en línea revelado por electroencefalografía de alta densidad, *Journal of Cognitive Neuroscience* 26 (2014), no. 9, 196–1980.
- [15] Dominik Endreas, Yaron Meirovitch, Tamar Flash y Martin A. Giese, Segmentación del lenguaje de señas en primitivas motoras con agrupamiento bayesiano, *Front Comput Neurosci.* 7 (2013), núm. 68.
- [16] Pollick FE, Maoz U, Handzel AA, Giblin PJ, Sapiro G y Flash T, Movimientos tridimensionales del brazo a una velocidad equiafín constante, *Cortex* 45 (2009), 325–39.
- [17] A. Fishbach, SA Roy, C. Bastianen, LE Miller y JC Houk, Propiedades cinemáticas de las correcciones de errores en línea en el mono, *Experimental Brain Research* 164 (2005), no. 4, 442–457.
- [18] Tamar Flash y Amir A. Handzel, Geometría diferencial afín de las trayectorias de los brazos humanos, *Resúmenes de la Sociedad para la Neurociencia* (1996).
- [19] ———, Análisis de geometría diferencial afín de los movimientos del brazo humano, *Biological Cybernetics* 96 (2007), no. 6, 577–601.
- [20] Tamar Flash y Ealan Henis, Modificación de la trayectoria del brazo durante el alcance de objetivos visuales, *Journal of Cognitive Neuroscience* 3 (1991), no. 3, 220–230.
- [21] Tamar Flash y Binyamin Hochner, Motores primitivos en vertebrados e invertebrados, Opinión actual en neurobiología 15 (2005), 1–7.
- [22] Tamar Flash y Neville Hogan, La coordinación de los movimientos del brazo: un modelo matemático confirmado experimentalmente, *The Journal of Neuroscience* 5 (1985), no. 7, 1688–1703.
- [23] I. Gelfand y S. Fomin, Cálculo de variaciones, *Dover Books on Mathe Matemáticas*, 2000.
- [24] Apostolos P. Georgopoulos, John F. Kalaska, Roberto Caminiti y Joe T. Massey, Sobre las relaciones entre la dirección de los movimientos bidimensionales del brazo y la descarga celular en la corteza motora de los primates, *The Journal of Neuroscience* 2 (1982), no. 11, 1527–1537.
- [25] S Giszter, V Patil y CHart, Primitives, premotor drives, and pattern generation: una perspectiva computacional y neuroetológica combinada, *Prog Brain Res* 165 (2007), 323 – 346.

- [26] [SF Giszter y CB Hart, Motor primitivo y sinergias en la médula espinal y después de una lesión: el estado actual del juego, Annals of the New York Academy of Sciences \(2013\), 114 - 126.](#)
- [27] [Simon F. Giszter, Ferdinando A. Mussa-Ivaldi y Emilio Bizzi, Campos de fuerza convergentes organizados en la médula espinal de la rana, The Journal of Neuroscience 13 \(1993\), no. 2, 467–491.](#)
- [28] Heinrich W. Guggenheimer, Geometría diferencial, Dover, Nueva York, 1977.
- [29] [Amir A. Handzel y Tamar Flash, Métodos geométricos en el estudio del control motor humano, Cognitive Studies, Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society 6 \(1999\), no. 3, 309–321.](#)
- [30] [Naama Kadmon Harpaz, Tamar Flash e Ilan Dinstein, Codificación de movimiento invariable a escala en el sistema motor humano, Neuron 81 \(2014\), 452– 462.](#)
- [31] [CB Hart y SF Giszter, Modular premotor drives and unit bursts as primitives for frog motor behaviors, journal=J Neurosci, volumen=24, año=2004, páginas=5269 – 5282 .](#)
- [32] [Nicholas G. Hatsopoulos y Yali Amit, Sintetizando representaciones de fragmentos de movimiento complejo de conjuntos corticales motores, J Physiol Paris 106 \(2012\), 112 – 119.](#)
- [33] [Nicholas G. Hatsopoulos, Qingqing Xu y Yali Amit, Codificación de fragmentos de movimiento en la corteza motora, J Neuroscience 27 \(2007\), no. 19, 5105 – 5114.](#)
- [34] [S. Hocherman y SP Wise, Efectos de la trayectoria del movimiento de la mano sobre la actividad cortical motora en monos rhesus despiertos que se comportan, Experimental Brain Research 83 \(1991\), no. 2, 285–302.](#)
- [35] [N. Hogan, Un principio organizador para una clase de movimientos voluntarios, J. Neurosci. 83 \(1984\), núm. 2, 2745–2754.](#)
- [36] [YP Iavnenko, RE Poppele y F Lacquaniti, Cinco patrones básicos de activación muscular explican la actividad muscular durante la locomoción humana, J. Physiol 556 \(2004\), 267 – 282.](#)
- [37] [William J. Kargo y Simon F. Giszter, Corrección rápida de movimientos dirigidos mediante la suma de primitivas de campo de fuerza, Journal of Neuroscience 20 \(2000\), no. 1, 409–426.](#)
- [38] Andrey Kolmogorov, Matemáticas: ciencia y profesión, Nauka, Moscú, 1988.
- [39] [HI Krebs, ML Aisen, BT Volpe y N. Hogan, Cuantización de movimientos continuos de brazos en humanos con lesiones cerebrales, Actas de la Academia Nacional de Ciencias de EE. UU. 96 \(1999\), no. 8, 4645–4649.](#)

- [40] Francesco Lacquaniti, Carlo Terzuolo y Paolo Viviani, El derecho relativo los aspectos cinemáticos y figurativos de los movimientos del dibujo, *Acta Psychologica* 54 (1983), 115–130.
- [41] Nava Levit-Binnun, Edna Schechtman y Tamar Flash, Sobre las similitudes entre la percepción y la producción de trayectorias elípticas, *Experimental Brain Research* 172 (2006), no. 4, 533–55.
- [42] Uri Maoz, Alain Berthoz y Tamar Flash, Movimiento de manos tridimensional complejo sin restricciones y velocidad equiafin constante, *J Neurophysiol* 101 (2009), núm. 2, 1002–15.
- [43] Uri Maoz y Tamar Flash, Movimiento y velocidad equiafin constante espacial percepción, *J Neurophysiol* 111 (2014), no. 2, 336–49.
- [44] Daniel W. Moran y Andrew B. Schwartz, Actividad cortical motora durante los movimientos de dibujo: representación de la población durante el trazado en espiral, *Revista de neurofisiología* 82 (1999), 2693–2704.
- [45] ———, Representación de la actividad cortical motora de la velocidad y la dirección durante ellegando, *Diario de Neurofisiología* 82 (1999), 2676–2692.
- [46] P Morasso y FA Mussa Ivaldi, Trayectoria de formación y caligrafía: una modo computacional, *Biol Cybern* 45 (1982), 131 – 142.
- [47] FA Mussa-Ivaldi y E Bizzi, Aprendizaje motor a través de la combinación de primitivos, *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci* 355 (2000), 1755–1769.
- [48] FA Mussa-Ivaldi y SA Solla, Primitivas neuronales para control de movimiento, *IEEE J Ocean Eng* 29 (2000), 640 - 650.
- [49] Richard Nichols, Una perspectiva biomecánica sobre los mecanismos espinales de la acción muscular coordinada: un principio de arquitectura, *Acta Anatomia* 151 (1994), 1–13.
- [50] Frank E. Pollick y Guillermo Sapiro, La velocidad afín constante predice la Ley de potencia de 1/3 de percepción y generación de movimiento plano, *Vision Research* 37 (1997), núm. 3, 347–353.
- [51] Felix Polyakov, Análisis de garabatos de monos durante el aprendizaje en el marco de trabajo de modelos de movimiento plano de la mano, Departamento de Ciencias de la Computación y Matemáticas Aplicadas, Instituto Weizmann de Ciencias (2001).
- [52] ———, Primitivos de movimiento e invariantes en movimientos de garabatos de monos: análisis y modelado matemático de la cinemática del movimiento y las actividades neuronales, Departamento de Ciencias de la Computación y Matemáticas Aplicadas, Instituto de Ciencias Weizmann (2006).
- [53] Felix Polyakov, Rotem Drori, Yoram Ben-Shaul, Moshe Abeles y Tamar Flash, una representación compacta de los movimientos de dibujo con secuencias de primitivas parabólicas, *PLoS Computational Biology* 5 (2009), no. 7.

- [54] Felix Polyakov, Tamar Flash, Moshe Abeles, Yoram Ben-Shaul, Rotem Drori y Zoltan Nadasdy, Análisis de la planificación del movimiento y el aprendizaje en los movimientos de garabatos de monos, Actas de la décima conferencia bienal de la Sociedad Internacional de Grafonomía. La Universidad de Nijmegen, Nijmegen, Países Bajos. (2001), 78–83.
- [55] Felix Polyakov, Eran Stark, Rotem Drori, Moshe Abeles y Tamar Flash, Primitivas de movimiento parabólico y estados corticales: fusión de la optimización con la invariancia geométrica, Biological Cybernetics 100 (2009), no. 2, 159–184.
- [56] Magnus JE Richardson y Tamar Flash, Comparación de los movimientos suaves de los brazos con la ley de potencia de dos tercios y la hipótesis relacionada del control segmentado, Journal of Neuroscience 22 (2002), no. 18, 82018211.
- [57] B Rohrer y N Hogan, Evitar descomposiciones de submovimientos espurios: un algoritmo globalmente óptimo, Biol Cybern 89 (2003), 190 – 199.
- [58] _____, Evitar descomposiciones de submovimientos espuriosii: un algoritmo scattershot , Biol Cybern 94 (2006), 409 – 414.
- [59] TD Sanger, Movimientos del brazo humano descritos por una superposición de componentes principales de baja dimensión, J Neurosci 20 (2000), 1066 – 1072.
- [60] Andrew B. Schwartz, Representación cortical directa del dibujo, Science 265 (1994), 540–542.
- [61] _____, Actividad motora cortical durante los movimientos de dibujo: representación de la población durante el trazado sinusoidal, Journal of Neurophysiology 70 (julio de 1992), no. 1, 28–36.
- [62] Andrew B. Schwartz y Daniel B. Moran, Actividad cortical motora durante los movimientos de dibujo: representación de la población durante el rastreo de lemniscatas, Revista de neurofisiología 82 (1999), no. 5, 2705–2718.
- [63] Maryam M. Shanechi, Rollin C. Hu, Marissa Powers, Gregory W. Wornell, Emery N. Brown y Ziv M. Williams, Partición de la población neuronal y una interfaz cerebro-máquina concurrente para la función motora secuencial, Nat Neurosci. 15 (2012), núm. 2.
- [64] PA Shirokov y AP Shirokov, Geometría diferencial afín, GIFML, Moscú, 1959, edición alemana: Geometría diferencial afín, Teubner, 1962.
- [65] Kurt A. Thoroughman y Reza Shadmehr, Aprendizaje de la acción a través de la combinación adaptativa de primitivas motoras, Nature 407 (2000), 742–747, Interesante.
- [66] Emanuel Todorov y Michael I. Jordan, La maximización de la suavidad a lo largo de un camino predefinido predice con precisión los perfiles de velocidad de los movimientos complejos del brazo , Revista de Neurofisiología 80 (1998), no. 2, 696–714.

- [67] [MC Tresch, P Saltiel y E Bizzi, La construcción del movimiento por la médula espinal, Nat Neurosci 2 \(1999\), 162 – 167.](#)
- [68] [EJ van Zuylen, CC Gielen y JJ van der Gon Denier, Coordinación y activación no homogénea de los músculos del brazo humano durante los pares isométricos, J Neurophysiol 60 \(1988\), 1523 – 1548.](#)
- [69] [P. Viviani y N. Stucchi, Los movimientos biológicos parecen uniformes: evidencia de interacciones motoras-perceptuales, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance 18 \(1992\), no. 3, 603–623.](#)
- [70] [Paolo Viviani y Tamar Flash, Mínimo tirón, ley de potencia de dos tercios e isocronía: enfoques convergentes para la planificación del movimiento, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance 21 \(1995\), no. 1, 233–242.](#)
- [71] [Ido Zelman, Myriam Titon, Yoram Yekutieli, Shlomi Hanassy, Binyamin Hochner y Tamar Flash, Descomposición cinemática y clasificación de los movimientos del brazo del pulpo, Frontiers in Computational Neuroscience 7 \(2013\).](#)