

Trois problèmes en robotique

JM Sélég

École d'informatique, de systèmes d'information et de mathématiques

Université de la rive sud

Londres SE1 0AA, Royaume-Uni

Abstrait

Trois problèmes assez différents en robotique sont étudiés à l'aide de la même technologie
nique de la théorie de la vis. Le premier problème concerne les systèmes de ressorts. Le
la fonction potentielle est différenciée dans la direction d'une vis arbitraire pour trouver
la position d'équilibre. Le deuxième problème est presque identique en termes de
calculs, la solution des moindres carrés au problème de trouver le mouvement rigide
subie par un corps ne disposant que de données sur des points du corps est recherchée. Dans le
troisième problème le jacobien d'une plate-forme de Stewart est trouvé. Encore une fois, cela est atteint
en différenciant par rapport à une vis. De plus, les propriétés de second ordre de la
les deux premiers problèmes sont étudiés. Le hessien des dérivées secondes est calculé et
par conséquent, les propriétés de stabilité des positions d'équilibre du système de ressort sont
trouvé.

Notation

$\mathbb{R}^n$ espace euclidien à n dimensions.

RP3 Espace projectif tridimensionnel.

SE(3) Le groupe des mouvements euclidiens propres en 3 dimensions, c'est-à-dire un corps rigide
mouvements.

SO(3) Le groupe des rotations en 3 dimensions.

R Une matrice de rotation 3×3 .

M Une matrice 4×4 représentant une transformation rigide, parfois appelée homographie
représentativité.

a, b Les vecteurs de position des points dans l'espace tridimensionnel.

$\tilde{a}$, $\tilde{b}$ Points dans l'espace à 3 dimensions représentés comme des points dans l'espace à 4 dimensions, dans
forme partitionnée, $\tilde{a}^J = (\tilde{a}^J, 1)$ par exemple.

A, B vecteurs tridimensionnels représentés par des matrices antisymétriques 3×3 , de sorte que $Ax =$
 $a \times x$ pour tout vecteur x.

I3 La matrice d'identité 3×3 .

λ Constante du ressort.

J Matrice jacobienne 6×6 .

Matrice de rigidité K 6×6 .

S Matrice 4×4 représentant un élément d'algèbre de Lie ou une vis.

W 6× 1 vecteur représentant une clé, c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel dual à

l'algèbre de Lie.

1. Introduction

Lorsque Ball écrivit son traité [1] à la fin du 19e siècle, Sophus Lie fut bref

parler de ce qu'il appelait des « groupes continus ». Si Ball était au courant du travail de Lie, ce ne serait peut-être pas le cas

était évident qu'il avait un lien avec le sien depuis que Lie s'intéressait à

symétries des équations différentielles. C'est Klein qui introduisit plus tard l'idée que

ces «groupes de Lie» pourraient être considérés comme des symétries géométriques. C'était après les deux

Ball et Lie étaient morts que la «théorie du mensonge» a commencé à trouver sa place au cœur de la modernité

géométrie. En particulier, les travaux de Killing et Cartan sur les algèbres de Lie étaient très

fluide. Pour plus de détails sur l'histoire de la théorie de Lie, voir [2]. Avec le recul, cela peut

On voit que les vis finies de Ball étaient simplement des éléments d'un groupe de Lie : le groupe des

transformations euclidiennes propres dans $\mathbb{R}^3$. Les torsions ou moteurs étaient des éléments de la

Algèbre de Lie de ce groupe. Celles-ci sont aussi parfois appelées vis infinitésimales

bien que plus précisément les vis de Ball puissent être identifiées avec des éléments du projet

espace tif formé à partir de l'algèbre de Lie. Ce sont les lignes à travers l'origine dans le mensonge

algèbre.

De nombreux autres éléments de la théorie de Lie étaient également présents dans la théorie de la vis de Ball. Mais

peut-être leur importance n'a-t-elle pas été pleinement appréciée. Par exemple, le produit Lie ou

Le support de mensonge est simplement le produit croisé de vis. Pour Ball, ce n'était qu'une géométrie

opération, l'analogue du produit vectoriel de vecteurs tridimensionnels.

Certains auteurs se réfèrent à la théorie de la vis et aux méthodes des groupes de Lie comme si elles étaient différentes approches. L'avis de cet auteur est qu'il n'y a pas de distinction entre eux, vis la théorie est simplement la spécialisation de la théorie de Lie au groupe des transformées de corps rigides tions. Cependant, le nom de théorie de la vis reste utile. En tant que raccourci descriptif et c'est aussi un rappel que c'est Ball qui a élaboré presque toute la théorie avant Lie les groupes ont été inventés !

Une grande partie de la robotique s'intéresse aux mouvements rigides. En cinématique et dynamique ics les mouvements rigides à la fois la charge utile et les liens du robot sont étudiés. En robotique vision un problème courant est de récupérer le mouvement rigide subi par la caméra à partir des images qu'il a prises. Par conséquent, le groupe de mouvements de corps rigides est un objet central en robotique. À ce jour, la théorie de la vis a été très utilisée dans la cinématique des robots où elle était introduit par la communauté des mécanismes. Il commence à être utilisé dans la dynamique et le contrôle des robots, mais n'est en aucun cas la méthode de premier choix dans ces domaines. Dans vision robot ces techniques sont peu connues. Un des buts de ce travail est de démontrer que ces méthodes ont une applicabilité universelle aux problèmes de robotique et de montrer qu'une grande variété de problèmes en robotique partagent un thème sous-jacent.

Ce travail utilise le fait qu'un groupe de Lie est une variété différentielle. Pour minimiser un fonction lisse sur un tel espace la machinerie des multiplicateurs de Lagrange n'est pas nécessaire. Il est possible de travailler directement sur le collecteur, il n'est pas nécessaire de penser au groupe comme intégré dans l'espace cartésien, comme l'impliquerait l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange.

La différenciation le long des champs de vecteurs tangents peut être utilisée pour trouver des équations pour un points stationnaires d'une fonction. Les champs vectoriels les plus pratiques à utiliser sont ceux de gauche champs invariants sur le groupe. Ce sont simplement des éléments de l'algèbre de Lie du groupe,

Figure 1 : Un corps rigide suspendu par un système de ressorts

les torsions ou les vis. Par conséquent, cette technique pourrait être considérée comme «différenciant le long une vis».

2 ressorts

Considérons un corps rigide supporté par un système de ressorts, voir figure 1. Supposons en outre que les ressorts ont une longueur naturelle de 0, obéissent à la loi de Hooke et peuvent à la fois pousser et tirer.

Les constantes de ressort λ_i , des ressorts peuvent être différentes. La gravité sera ignorée ici pour la simplicité. Cependant, il n'est pas difficile de voir comment il pourrait être intégré dans un modèle sophistiqué, soit en modifiant la fonction de potentiel qui est dérivée ci-dessous ou en modifiant les équations d'équilibre pour inclure la clé due à la gravité.

Soit $\mathbf{a}^J = (\mathbf{a}_J, 1)$ être les points où les ressorts sont fixés au sol ou cadre, et $\mathbf{b}^T = (\mathbf{b}_T, 1)$ les points d'attache correspondants sur le corps rigide lorsque le corps est dans une configuration "maison" standard. Si le corps subit une rigidité mouvement vers lequel les points d'attache se déplaceront,

$$\mathbf{b}_T' = \mathbf{R} \mathbf{b}_T$$

qui sera abrégé en $\mathbf{b}_T' = \mathbf{M} \mathbf{b}_T$. La première question que l'on peut se poser à ce sujet

La situation est la suivante : existe-t-il une configuration d'équilibre pour le corps rigide ?

Le problème est de minimiser l'énergie potentielle du système de ressort, ceci est donné

par la fonction suivante,

$$\Phi = 2 - \sum_i \lambda_i (a_i - Mb_i) - \sum_j a_j - Mb_j.$$

Remarquons que cette fonction est définie sur le groupe $SE(3)$, soit $\Phi : SE(3) \rightarrow \mathbb{R}$, comme M

varie sur le groupe différentes valeurs du résultat potentiel.

Si ce n'était qu'une fonction sur $\mathbb{R}^n$ les points stationnaires seraient trouvés en calculant

les dérivées partielles puis en les mettant à zéro. La méthode standard de traitement

ce problème serait de minimiser les éléments de la matrice en utilisant des multiplicateurs de Lagrange pour

tenir compte de la contrainte que la matrice doit être un élément de groupe.

Cependant, la méthode la plus simple pour les fonctions sans contraintes peut être imitée en utilisant

une théorie multiple. Pour trouver les points stationnaires d'une fonction définie sur une variété

la fonction doit être différenciée le long des champs vectoriels sur la variété. Comme d'habitude le

résultats est mis à zéro, puis les équations résultantes sont résolues pour trouver les points stationnaires.

Pour que cela fonctionne, un ensemble de champs vectoriels qui couvrent l'espace de tous les champs vectoriels sur le

collecteur est nécessaire.

Comme la variété considérée est la variété sous-jacente d'un groupe de Lie,

un tel ensemble complet de champs vectoriels est toujours disponible. Les éléments de l'algèbre de Lie

considérés comme des champs vectoriels invariants à gauche peuvent être utilisés.

Pour différencier le long d'un champ vectoriel la valeur de la fonction en deux points est com

pared, la position courante et une position un peu éloignée le long d'un chemin tangent au

champ vectoriel, alors la limite de la différence entre les valeurs de la fonction à ces

points voisins est pris au fur et à mesure que le chemin devient de plus en plus court.

Laisser:

$$S = \begin{pmatrix} \Omega v & \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

soit un élément d'algèbre de Lie ou une vis donnée dans la représentation 4×4 . Ici Ω est un 3×3

matrice anti-symétrique correspondant à un vecteur ω , soit $\Omega x = \omega \times x$ pour tout vecteur

x .

Si M est un élément de groupe écrit dans la représentation 4×4 , alors l'action de S sur M , est donné par la traduction à gauche,

$$M(t) = e^{tSM}.$$

Cela emmène M le long d'un chemin tangent au champ vectoriel défini par S . En prenant la dérivée

le long du chemin puis en fixant $t = 0$ donne,

$$\partial S M = S M.$$

Par conséquent, la dérivée du potentiel est donnée par,

$$\partial S \Phi = - \sum_i \lambda_i a_i^{-1} - M b_i^{-1} \sum_j S M b_j^{-1}.$$

Pour l'équilibre, cela doit disparaître pour S arbitraire. Par conséquent, S doit être séparé, donc

considérer le terme,

$$S M b_i^{-1} = \frac{\omega \times (R b_i + t) + v}{0} = \frac{-R B_i R^T - T I_3}{0} \frac{\omega}{v}.$$

où I_3 est la matrice identité 3×3 et B_i est la matrice anti-symétrique correspondant

à b_i .

En remplaçant cela dans l'équation d'équilibre et en utilisant le fait que S et donc ω et v sont arbitraires, le résultat suivant est obtenu,

$$\sum_i \lambda_i a_i^{-1} - M b_i^{-1} \sum_j \frac{-R B_i R^T - T I_3}{0} = 0.$$

Après une petite manipulation, cette équation matricielle produit 2 équations vectorielles,

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{a}_i \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{R} \mathbf{b}_i - \mathbf{t}) = 0 \quad (1)$$

et

$$\sum_i \lambda_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{R} \mathbf{b}_i - \mathbf{t}) = 0 \quad (2)$$

Si les poids λ_i sont tous égaux, alors l'équation 2 dit que la transformation optimale

mappe les centroïdes des points a aux points b. Une autre façon de dire cela est qu'à

une configuration d'équilibre les centres de gravité des deux ensembles de points doivent coïncider. À

continuer, choisir l'origine des coordonnées de sorte que le centre de gravité des points b se trouve au

origine, $\sum_i \lambda_i \mathbf{b}_i = 0$. Le vecteur de translation est maintenant donné par l'équation (2) comme,

$$\mathbf{t} = \frac{\sum_i \lambda_i \mathbf{a}_i \sum_i \lambda_i}{\sum_i \lambda_i}.$$

Dans la forme ci-dessus, l'équation (1) n'est pas très facile à traiter, une forme plus traitable est

la représentation 3×3 . Un petit calcul confirme que la matrice antisymétrique

correspondant à un produit vectoriel $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$, est donnée par $\mathbf{q} \mathbf{p}^T - \mathbf{p} \mathbf{q}^T$. Ainsi, sous cette forme, le

l'équation devient,

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{R} \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i^J - \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^J \mathbf{R}^J = 0,$$

où le résultat que $\mathbf{t} = \sum_i \lambda_i \mathbf{a}_i / \sum_i \lambda_i$ a été utilisé. Maintenant, en écrivant, $\mathbf{P} = \sum_i \lambda_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^J$ $\mathbf{Q} = \sum_i \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^J$

l'équation devient ;

$$\mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{T} \quad (3)$$

Ceci montre que la matrice $\mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{T}$ est symétrique. Soit donc $\mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{T} = \mathbf{Q}$ où $\mathbf{Q}$ est sym

métrique, alors,

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{R}.$$

Cela décompose la matrice P comme le produit d'une matrice symétrique avec un propre orthogonale. Il s'agit essentiellement de la décomposition polaire de la matrice. Avis que la décomposition polaire $P = RQ'$ vérifie aussi l'équation, la matrice de rotation R ici c'est la même que ci-dessus mais la matrice symétrique $Q' = R^T Q R$ est simplement congruent à la matrice symétrique d'origine. Donc, en ce qui concerne la solution pour R , il y a n'y a pas de différence entre ces solutions. En effet la décomposition polaire d'une matrice le divise en une matrice orthogonale et une matrice symétrique non négative. Ici un bon une matrice orthogonale et une matrice symétrique sont requises. Si la matrice orthogonale de la la décomposition polaire de P est une réflexion puis la multiplication par -1 donne une rotation. Plus des détails sur la décomposition polaire d'une matrice peuvent être trouvés dans [3], par exemple.

La décomposition polaire donne une solution, mais cette solution n'est pas unique. Laisser $P = QR_p$ soit la décomposition polaire de P , substituons-la maintenant dans l'équation (3),

$$R^T P Q = Q R_p R^T \quad (3)$$

En écrivant $R_i = R^T P Q$ l'équation devient,

$$R_i Q R_i = Q.$$

Supposons que v soit dans la direction de l'axe de rotation de R_i , de sorte que $R_i v = v$, postmul tiply l'équation ci-dessus par v donne,

$$R_i Q v = Q v.$$

Donc $Q v$ est le long de l'axe de R_i et donc,

$$Q v = \mu v,$$

pour une constante μ . Toute solution pour la rotation R_i doit avoir son axe de rotation

aligné avec un vecteur propre de Q .

Les angles de rotation possibles peuvent être trouvés en considérant l'action sur le propre vecteurs de Q , en utilisant le fait que les vecteurs propres d'une matrice symétrique sont mutuellement orthogonal. Si la matrice P est non singulière alors il est bien connu que la polaire de la composition est unique. Si les valeurs propres de Q sont toutes différentes et ont également des grandeurs alors les seuls angles possibles sont 0 et π . Cela donne quatre solutions en tout, $R_i = I_3$ est la solution trouvée ci-dessus, c'est-à-dire que R est simplement la rotation de la polaire de composition. Les trois autres solutions pour R_i sont des rotations de π radians autour des trois vecteurs propres de Q . Il y a donc en tout quatre solutions pour la rotation $R = R_P R_i$.

Dans chaque

cas R_P est la rotation issue de la décomposition polaire de P et R_i sont comme ci-dessus, les rotations de π autour du i ème vecteur propre de Q , avec la quatrième solution donnée par $R_0 = I_3$. Avis que les quatre rotations forment un sous-groupe discret du groupe des rotations, ce sous-groupe est le quadrigroupe de Klein bien connu $Z_2 \times Z_2$.

Si l'une des conditions ci-dessus est brisée, P est singulier, deux des valeurs propres de Q sont égaux, ou une paire de valeurs propres somme à zéro, alors il y a plus de solutions. Pour exemple, si une paire de valeurs propres de Q somme à zéro alors toute rotation autour du reste vecteur propre satisfera l'équation pour R_i .

Le fait que, dans le cas général, quatre points fixes de l'énergie potentielle fonction ont été trouvés n'est pas surprenant. La théorie de Morse étudie la relation entre les variétés et les points critiques des fonctions définies sur celles-ci, voir [4]. Les points critiques, ou points stationnaires ici, correspondent à des cellules dans une décomposition cellulaire tion du collecteur. La variété dont il est question ici est la variété sous-jacente de la

groupe de rotation $SO(3)$, il s'agit de l'espace projectif tridimensionnel, RP^3 . Le la décomposition cellulaire minimale de RP^3 a quatre cellules, de dimensions 0, 1, 2 et 3 voir [5, p. 105]. Par conséquent, une fonction générale sur $SO(3)$ aura un minimum de 4 points critiques points. De plus, l'indice des points critiques, le nombre de valeurs propres négatives de sa matrice hessienne, donne la dimension de la cellule correspondante. Ainsi, sans aucune calculs ultérieurs, on saura que les quatre points critiques comprennent un maxi local mame, un minimum local et deux types de points de selle. Le problème de trouver quel solution est le minimum sera abordé plus tard.

Ce qui précède montre qu'en général, c'est-à-dire lorsque la matrice P est non singulière, la système de ressort de la figure 1 a une position d'équilibre stable unique. De plus, le système tem aura trois positions d'équilibre instables. Ce résultat ne dépend pas de la nombre ou disposition des ressorts tant que $\det(P) \neq 0$.

3 Mouvement rigide à partir de données ponctuelles

Envisagez un système de vision ou un système de télémétrie, qui peut mesurer l'emplacement de points en 3 dimensions. Imaginez qu'un corps rigide ait un certain nombre de points avec des position. Le corps est soumis à un mouvement rigide inconnu et les positions des les points sont mesurés. Ces mesures contiendront des erreurs et la question à se poser abordée ici est la suivante : Comment estimer le mouvement rigide subi par le corps ?

Soit b_i les positions des points connus et les points mesurés correspondants a_i .

Écrivez la transformation rigide inconnue sous la forme M , puis la fonction,

$$\Phi = \sum_i \|a_i - Mb_i\|^2 = \sum_j \|a_j - Mb_j\|^2,$$

représente la somme des carrés des différences entre les points mesurés et leurs positions idéales (sans bruit). Choisir M pour minimiser cette fonction donne un 'moins estimation des carrés pour la transformation rigide. Cette fonction est presque identique à la fonction d'énergie potentielle étudiée dans la section précédente, les seules différences sont un facteur global de un demi et que tous les λ_i ont été fixés à 1.

L'histoire de ce problème est très intéressante. Le problème de trouver la rotation est clairement la partie intéressante et a été résolue pour la première fois par MacKenzie en 1957 [6]. Il rencontré ce problème dans le contexte de la cristallographie. En 1966, Wahba a trouvé le même problème en étudiant l'orientation de satellites artificiels, [7]. En 1976, Moran résolu le problème en utilisant des quaternions, [8]. La motivation ici est venue de la géologie, en particulier le mouvement des plaques tectoniques. Dans le cadre de la fabrication, Nadas trouvé et résolu le problème en 1978, [9]. Ici, l'application était à la manufac ture de substrats céramiques pour puces de silicium. Dans la communauté de la vision robotique, le problème est généralement attribué à Horn [10], voir par exemple [11, Chap. 5].

La solution donnée ci-dessus est peut-être un peu plus simple que les arguments standard qui impliquent une minimisation contrainte, les contraintes étant utilisées pour exprimer fait que les matrices doivent se trouver dans le groupe.

Les solutions standard n'ont pas toujours été en termes de décomposition polaire. En fait (au moins), deux autres descriptions de la solution sont possibles.

Pour calculer la décomposition polaire d'une matrice, des textes sur l'analyse numérique recommande de commencer par la décomposition en valeurs singulières de la matrice, voir pour examen ple [12]. Par conséquent, il n'est pas vraiment surprenant que la solution à notre problème puisse être obtenue directement à partir d'une décomposition en valeurs singulières.

Rappelez-vous, de la section ci-dessus que $R^T P T = P R^T$, doit être résolu pour la rotation

matrice R , où $P = \sum_{i=1}^J \lambda_i a_i a_i^T$. De plus, rappelez-vous que,

$$P = Q R P,$$

où Q était symétrique. Par conséquent, Q peut être diagonalisé comme $Q = U D U^T$ avec U orthog

diagonale onale et D . Maintenant écris,

$$P = U D U^T R P = U D V^T,$$

T où $V = U^T R$ est toujours orthogonal. Il s'agit simplement de la décomposition en valeurs singulières de

P . Pour le dire autrement, supposons que la décomposition en valeurs singulières de P est $P = U D V^T$

alors les quatre solutions sont $R = U V^T R$.

Une autre forme de la solution peut être dérivée comme suit, commencer par la polaire de composition de P ,

$$P = Q R P,$$

où Q est une matrice symétrique. La postmultiplication de cette équation par sa transposée donne,

$$P P^T = Q^2. \text{ Enfin, en remplaçant } Q \text{ donne,}$$

$$R = (P P^T)^{-1/2} P R.$$

Il existe plusieurs racines carrées différentes de la matrice $(P P^T)$ qui pourraient être prises ici,

le choix est limité par l'exigence selon laquelle le déterminant de R doit être égal à 1.

signifie que l'unique racine carrée positive doit être prise, voir [3, p. 405].

Considérons enfin ici le déterminant de la matrice P . Un résultat classique nous dit que la décomposition polaire d'une matrice P est unique si P est non singulière, voir [3, p. 413]

Par exemple. La décomposition polaire classique, décompose la matrice P en un ou matrice orthogonale et matrice symétrique semi-définie positive. Ici un orthogonal propre matrice et une matrice symétrique (pas nécessairement positive-semi-définie) sont nécessaires, cela n'affecte pas l'unicité de la solution.

Ainsi, le déterminant de la matrice P défini ci-dessus, doit être étudié. À simplifier la discussion en supposant que les raideurs de ressort λ_i ont toutes été fixées à 1.

Lorsqu'il y a moins de trois ressorts ou paires de points, le déterminant est toujours singulier. Pour trois paires de points, un calcul simple révèle,

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_1 a_2 a_3)(b_1 b_2 b_3),$$

ici le triple produit scalaire a été écrit comme, $a \cdot (b \times c) = (abc)$.

La généralisation à n paires de points donne,

$$\det(P) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (a_i a_j a_k)(b_i b_j b_k).$$

Ceci est certainement singulier si tous les points a ou tous les points b se trouvent sur un plan passant par le origine.

4 Matrice jacobienne pour les plateformes de Stewart

Considérons une plate-forme générale de Stewart. Ce manipulateur a six pattes reliées en paire allèle. Chaque jambe se compose d'un actionneur hydraulique entre une paire de sphériques passifs les articulations. Les six pieds relient la base ou le sol à une plate-forme mobile. En ajustant le longueurs des six jambes à l'aide des actionneurs hydrauliques, la plate-forme peut être manœuvrée avec six degrés de liberté. Voir figure 2.

Figure 2 : Une plate-forme General Stewart

Pour les manipulateurs parallèles, c'est la cinématique inverse qui est simple, tandis que la cinématique avant est difficile. Supposons que la position et l'orientation du plate-forme est donnée, les longueurs de jambe sont simples à trouver. Soit a_i la position du centre de l'articulation sphérique au sol appartenant à la i -ème jambe. En configuration maison la position correspondante du centre commun sur la plate-forme sera, b_i . Alors maintenant le la longueur de la i ème jambe, ou plutôt son carré, peut s'écrire,

$$\|b_i - a_i\|^2 = \|M^{-1}b_i - a_i\|^2 \quad j = 1, \dots, 6.$$

Comme d'habitude M est une transformation rigide, cette fois le mouvement qui prend la plate-forme de retour à la position actuelle. Notez que les longueurs de jambe peuvent être considérées comme des fonctions sur le groupe, mais il est plus courant de les considérer comme des composants d'une cartographie du groupe à l'espace des longueurs des jambes, $SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^6$. Un point dans $\mathbb{R}^6$ est donné en coordonnées comme $(l_1, l_2, \dots, l_6)$. C'est le jacobien de cette cartographie qui est recherché. Faire ceci la dérivée des longueurs de jambe est prise,

$$\frac{d\|b_i - a_i\|^2}{dt} = 2\|b_i - a_i\| \frac{d\|b_i - a_i\|}{dt} = 2\|b_i - a_i\| \frac{d}{dt} \|M^{-1}b_i - a_i\| = 2\|b_i - a_i\| \frac{d}{dt} \|M^{-1}b_i - a_i\|.$$

Réorganiser cela donne,

$$\frac{d\|b_i - a_i\|^2}{dt} = 2\|b_i - a_i\| \frac{d}{dt} \|M^{-1}b_i - a_i\| = 2\|b_i - a_i\| \frac{d}{dt} \|M^{-1}b_i - a_i\| = 2\|b_i - a_i\| \frac{d}{dt} \|M^{-1}b_i - a_i\|.$$

Cela donne le taux de joint de chaque jambe en tant que fonction linéaire de la vis de vitesse du

plate-forme. Le jacobien J est la matrice satisfaisant la formule,

$$\begin{pmatrix} \dot{l}_1 \\ \vdots \\ \dot{l}_6 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix}.$$

On peut donc voir que les lignes de cette matrice jacobienne sont simplement,

$$-\frac{1}{(a_i \times b_i) \cdot l_i} (b_i - a_i)^T, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Il s'agit de la clé donnée par une force unitaire dirigée le long de la i ème jambe.

Considérons un système de ressorts comme dans la section 2. Supposons qu'il n'y ait que six ressorts.

On peut maintenant montrer que le jacobien associé à la position d'équilibre est singulier. Pour voir cela, considérons les équations (1) et (2), qui définissent la position d'équilibre, arranger les choses de sorte que la position d'équilibre soit la position de référence et donc $R = I_3$ et $t = 0$ alors les équations deviennent,

$$\sum_i \lambda_i a_i \times b_i = 0,$$

et

$$\sum_i \lambda_i (a_i - b_i) = 0.$$

En terme de jacobien pour une plate-forme de Stewart correspondante, c'est-à-dire celle dont la jambe les longueurs correspondent aux longueurs des ressorts, on voit que les rangs des Les jacobiens sont linéairement dépendants et donc la matrice est singulière.

Le problème de cinématique avant pour une plate-forme Stewart consiste à déterminer la position et l'orientation de la plate-forme compte tenu des longueurs de jambes. Il est bien connu que, pour un ensemble de longueurs de jambe, il existe un nombre fini de solutions différentes, en général 40. Les solutions sont appelées différentes poses ou postures de la plate-forme. Remplacement

les jambes avec des ressorts, il est clair que la fonction potentielle aura la même valeur dans chacune de ces poses ou postures puisque la fonction ne dépend que des longueurs des ressorts. Cependant, aucune de ces positions ne sera un minimum de la fonction potentielle puisque, comme on l'a vu plus haut, la position d'équilibre stable est unique.

5 La matrice de rigidité

Les problèmes présentés dans les trois dernières sections sont bien connus et ont été résolus par de nombreuses méthodes différentes. L'avantage des méthodes de la théorie des vis étudiées ici est qu'il est relativement facile d'étudier les dérivées supérieures.

Sachez tout d'abord qu'il est possible de trouver la clé grâce aux ressorts. En général un la clé est un vecteur de forces et de couples à 6 dimensions,

$$W = \begin{pmatrix} \tau \\ F \end{pmatrix},$$

où τ est un moment autour de l'origine et F est une force. Notez que les clés ne sont pas Éléments d'algèbre de Lie mais éléments de l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie. Généralement la force due à un potentiel est donnée par son gradient. Il en est de même ici, en termes de la dérivée extérieure d , $W = -d\Phi$. Appariement de la clé avec une vis arbitraire S donne,

$$W(S) = -d\Phi(S) = -\partial S\Phi,$$

voir [13, §. 4.20] par exemple. Ces calculs ont déjà été effectués dans la section 2 ci-dessus, la clé est donnée par,

$$W = \begin{pmatrix} \sum_i \lambda_i a_i \times (a_i - R b_i - t) \\ \sum_i \lambda_i (a_i - R b_i - t) \end{pmatrix},$$

cela pourrait, bien sûr, aussi avoir été déduit de la mécanique élémentaire.

Pour les systèmes de ressorts de la section 2, un objet important est la matrice de rigidité de la système. Dans cette section, la matrice de rigidité est calculée en prenant les dérivées secondes de la fonction potentielle.

Un déplacement infinitésimal du corps est représenté par une vis. La clé produit par un déplacement s est donné par $W = Ks$, où K est la matrice de rigidité.

La matrice de rigidité est la hessienne de la fonction potentielle, c'est-à-dire sa matrice de dérivées partielles du second ordre, voir [14, Ch 5]. Ceci n'est valable qu'à l'équilibre position.

Il y a eu des tentatives dans la littérature robotique pour étendre ces idées à des non configurations d'équilibre, voir par exemple Griffis et Duffy [15] et Zefran et Kumar [16]. Dans ce travail, cependant, la définition classique de la matrice de rigidité sera être utilisé.

Maintenant, écrivez le résultat ci-dessus pour la clé comme

$$W = \sum_i \lambda_i \begin{bmatrix} A_i^T & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_i - M \tilde{b}_j \end{bmatrix}.$$

La différenciation le long d'une vis arbitraire donne,

$$\partial SW = \sum_i \lambda_i \begin{bmatrix} A_i^T & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R B_i R^J + T & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix},$$

en utilisant le résultat de la section 2. Par conséquent, la matrice de rigidité est,

$$K = \sum_i \lambda_i (A_i R B_i R^J + A_i T) + \sum_i \lambda_i A_i \begin{bmatrix} R B_i R^J + T \\ I_3 \end{bmatrix}.$$

Cette fois choisir l'origine au point $\sum_i \lambda_i a_i$ puis utiliser l'équilibre

condition 2 pour simplifier la matrice de rigidité à,

$$K = \begin{pmatrix} \sum_i \lambda_i A_i R_i B_i R_i^T & 0 \\ 0 & \sum_i \lambda_i I_3 \end{pmatrix}.$$

C'est un résultat particulièrement soigné mais c'est un peu surprenant à première vue. Le terme

$\sum_i \lambda_i I_3$ dans le coin inférieur droit signifie que le système a la même rigidité dans

direction, indépendamment de la raideur des ressorts individuels et de leur disposition.

Cela est dû à l'hypothèse que les sources ont une longueur naturelle nulle.

Ensuite, le problème de trouver l'indice des points critiques trouvés est passé en revue. Pour

brièveté que la question, lequel des points critiques est un minimum du potentiel

l'énergie, c'est-à-dire un équilibre stable, sera considérée. C'est-à-dire : laquelle des solutions

pour R donne une matrice de rigidité K avec toutes les valeurs propres positives ? Remarquez que trois des

les valeurs propres de K sont simplement $\sum_i \lambda_i$, et ceci est positif si les constantes de ressort λ_i sont toutes

positif. Il suffit donc d'étudier les valeurs propres du bloc supérieur gauche de

K . Après quelques manipulations, cela peut être écrit en termes de matrice P ou de sa polaire

décomposition,

$$\sum_i \lambda_i A_i R_i B_i R_i^T = R P T + \text{Tr}(R P T) I_3 = R_i Q + \text{Tr}(R_i Q) I_3.$$

Ici $\text{Tr}()$ représente la trace de la matrice. Maintenant cette matrice a les mêmes vecteurs propres

comme $R_i Q$ et donc comme Q , en se rappelant que R_i était soit l'identité soit une rotation de π

autour d'un vecteur propre de Q . Supposons donc que les valeurs propres de Q soient μ_1 , μ_2 et μ_3

avec les vecteurs propres correspondants e_1 , e_2 et e_3 . En supposant que R_i est une rotation autour de

vecteur propre e_i , les valeurs propres des matrices peuvent être trouvées en considérant l'action

sur les vecteurs propres e_1 , e_2 et e_3 . Les valeurs propres pour $R_0Q + \text{Tr}(R_0Q)I_3$ sont,

$$(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3), \quad (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3), \text{ et } (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3).$$

Une seule autre matrice doit être considérée puisque les autres ne sont que des permutations cycliques

tions, les valeurs propres de $R_1Q + \text{Tr}(R_1Q)I_3$ sont,

$$(2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3), \quad (\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3), \text{ et } (\mu_1 - \mu_2 - 2\mu_3).$$

Maintenant, il n'y a que deux cas à considérer, si $\det(P) > 0$ alors Q est défini positif

et ainsi sont toutes ses valeurs propres. Dans ce cas, il est facile de voir que le point critique

représenté par R_0 sera le minimum. C'est la solution $R = R_p$.

Dans l'autre cas $\det(P) < 0$, la décomposition polaire classique nous donne un résultat positif

matrice symétrique définie et une réflexion. En les multipliant par -1 , on obtient une rotation

et une matrice symétrique définie négative. C'est-à-dire que Q a toutes les valeurs propres négatives. Comme

supposons que ces valeurs propres ont pour ordre $0 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$, c'est-à-dire que μ_1 est la valeur propre

valeur de plus petite amplitude, alors la matrice, $R_1Q + \text{Tr}(R_1Q)I_3$ aura tous des valeurs positives

valeurs propres et donc R_1 correspond au minimum du potentiel. Donc en général,

si $\det(P) < 0$ la solution minimale est donnée par $R = R_p R_i$, où R_i est une rotation de π

sur le vecteur propre de Q avec la valeur propre de plus petite grandeur.

6. Conclusions

Le concept unifiant les trois problèmes étudiés dans ce travail est l'idée de fonctions

défini sur le groupe de transformations de corps rigides. Il a été possible de trouver le

points stationnaires des fonctions et classer ces points critiques. Cela implique une

technique simple de différenciation le long d'une vis.

Les résultats concordent avec ceux de Kanatani [11, Chap. 5], ses méthodes étaient, peut-être, un peu plus élégant que le précédent. Les méthodes utilisées ici sont plus générales, toutes les points critiques de la fonction potentielle ont été trouvés, pas seulement le minimum et avec un peu plus d'effort l'index de chacun d'eux aurait pu être trouvé.

Ces idées sont au cœur du sujet de la théorie de Morse, un domaine d'étude qui relie les points critiques des fonctions définies sur une variété à la topologie de la variété lui-même. Dans ce cas, la topologie de la variété, la variété sous-jacente du groupe $SO(3)$, est bien connu, et cela peut être utilisé pour dire quelque chose sur le point critique de la fonction potentielle.

Le problème des ressorts est un peu artificiel en ce ressorts avec zéro naturelle longueur de l'oural ont été utilisés. Cela simplifie les calculs. Il est possible de répéter la plupart des analyses ci-dessus utilisant des ressorts avec une longueur naturelle finie, voir [17]. Le nombre de points critiques devient maintenant un problème très difficile mais sera toujours limité par la topologie du groupe.

Le problème de l'estimation d'un mouvement rigide à partir de données ponctuelles est raisonnablement réaliste. L'utilité de l'estimation dépendra de la distribution des erreurs pour les points. Il existe des résultats à ce sujet dans la littérature, voir [18]. Il semble y avoir beaucoup de place pour de nouvelles recherches dans cette direction.

Il n'y a eu ici que l'espace pour jeter un bref coup d'œil sur les implications pour la Plate-forme Stewart. Certes en utilisant la technique de différenciation le long d'une vis les propriétés d'accélération de la plate-forme Stewart ont pu être calculées. Cependant, l'habituel des difficultés sur la définition géométrique d'une dérivée seconde surgissent ici. En particulier circonstances, il est clair ce qu'il faut faire, par exemple, il n'est pas trop difficile de trouver

la dynamique d'une plateforme de Stewart, voir [19]. Encore une fois, cela semble être une zone fertile pour développements futurs.

Les références

- [1] Ballon RS. La théorie des vis. Cambridge University Press, Cambridge, 1900.
- [2] T. Hawkins. La naissance de la théorie des groupes de Lie. Intelligence Mathématique, 16(2), p. 6–17 1994.
- [3] RA Horn et CR Johnson. Analyse matricielle, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [4] J. Milnor. Théorie de Morse. Princeton University Press, New Jersey, 1969.
- [5] M. Greenberg. Conférences sur la topologie algébrique. WA Benjamin Inc., New York, 1967.
- [6] JK MacKenzie. L'estimation d'une relation d'orientation. Acte. Crist., 10, pp. 62–62 1957.
- [7] G. Wahba. Section sur les problèmes et les solutions : une estimation des moindres carrés du satellite attitude. SIAM rev, 8, pp.384–385, 1966.
- [8] PAP Moran. Quaternions, mesure de Haar et estimation de ro paléomagnétique tation. Dans J. Gani (éd.), Perspectives in Prob. and Stats., pp. 295–301, Applied Fiducie de probabilité, Sheffield 1975.

[9] A. Nadas. Estimation des moindres carrés et du maximum de vraisemblance du mouvement rigide.

Rapport de recherche IBM, RC6945, IBM, Yorktown Heights, NY, 1978.

[10] Klaxon BKP. Solution de forme fermée d'orientation absolue utilisant des quaternions unitaires.

Journal de la société optique d'Amérique, A-4: 629–642, 1987.

[11] K. Kanatani. Calcul géométrique pour la vision industrielle. Presse Clarendon, Bœuf

Ford, 1993.

[12] WH Press, SA Teukolsky, WT Vetterling et BP Flannery. Numérique

Recettes en C : l'art du calcul scientifique 2e éd. La presse de l'Université de Cambridge,

Cambridge, 1992.

[13] BF Schutz. Méthodes géométriques de la physique mathématique. Université de Cambridge

City Press, Cambridge, 1980.

[14] VI Arnold. Méthodes géométriques de la mécanique classique, volume 60 de Grad

uate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, 1978.

[15] M. Griffis et J. Duffy. Modélisation de la rigidité globale d'une classe de simples compliant

couplage. Théorie des mécanismes et des machines, 28(2):207–224, 1993.

[16] M. Zefran et V. Kumar. Connexion affine pour la matrice de rigidité cartésienne.

Dans Actes de la conférence internationale IEEE 1997 sur la robotique et Au

tation, Albuquerque, NM, pages 1376–1381.

[17] JM Sélig. La matrice de rigidité spatiale à partir de ressorts étirés simples dans Pro

les actes de la conférence internationale IEEE 2000 sur la robotique et l'automatisation,

Californie de San Francisco, pp.3314–3319, 2000.

- [18] GS Watson. Statistiques des rotations, dans les notes de cours en mathématiques, Springer Verlag, 1379, pp.398-413, 1989.
- [19] JM Selig et PR McAre. Constrained Robot Dynamics II : Machines parallèles
Journal of Robotic Systems, 16, pp.487–498, 1999.