



Статья

Измерение ос таточных напряжений методами определения трещин:
Некорректная обратная задача с ядром закрытой формы

Марко Бегини и Томмазо Гросси *



DICI — Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale, Пизанский университет, 56122 Пиза, Италия

marco.beghini@unipi.it *

Адрес для переписки: tommaso.grossi@ing.unipi.it

Аннотация. С помощью методов релаксации ос таточные напряжения могут быть получены путем создания прогрессивного разреза или отверстия в образце, а также путем измерения и определения возникающих в результате деформаций или смещений. Если разрез можно считать контролируемым дефектом, пох ожим на трещину, то, используя принцип суперпозиции Бюкнера, ослабленные деформации можно смоделировать с помощью взвешенного интеграла ос таточного напряжения, снимаемого разрезом. Для оценки ос таточных напряжений необходимо решить интегральное уравнение. С практической точки зрения решение обычно ос новано на методе дискретизации, который преобразует интегральное уравнение в линейную систему алгебраических уравнений, решения которой можно легко получить, по крайней мере, с вычислительной точки зрения. Однако линейная система часто оказывается существенно плохо обусловленной. В этой статье показано, что его плохая обусловленность на самом деле является следствием гораздо более глубокого свойства ос новного интегрального уравнения, которое отражается также в дискретизированной ситуации. На самом деле их одна задача некорректна. Эта некорректность — не что иное, как математическая жесткость; действительно, это глубоко влияет на свойства дискретизированной системы. В частности, это вызывает так называемый компромисс между предвзятостью и дисперсией, с войс тво, которое влияет на многие экспериментальные процедуры, в которых аналитик вынужден вносить некоторую предвзятость, чтобы получить решение, которое не подавляется шумом измерений. В свою очередь, если оно не подкреплено здравыми и разумными физическими предположениями о некоторых войс твах решения, вносящая погрешность потенциально бесконечна и ухудшает любой метод количественной оценки неопределенности. В поддержку этих тем представлено наглядный численный пример с использованием метода ответов трещинам (также известного как разрезание). Наличие весовой функции линейно-упругой механики разрушения для задачи позволяет полностью аналитически сформулировать их одно интегральное уравнение, с помощью которого предотвращается погрешность из-за численной аппроксимации.



Цитирование: Бегини, М.; Гросси, Т.

Измерение ос таточных напряжений

методами податливости трещин:

Некорректная обратная задача с

Ядро закрытой формы. Прил. Мех. 2024, 5,

475–489. <https://doi.org/10.3390/applmech5030027>

appliedmech5030027

Поступила: 1 июня 2024 г.

Пересмотрено: 5 июля 2024 г.

Принято: 10 июля 2024 г.

Опубликовано: 14 июля 2024 г.



Копирайт: © 2024 авторов.

Лицензия MDPI, Базель, Швейцария

Эта статья находится в открытом доступе.

распространяется на условиях

лицензии Creative Commons

Лицензия с указанием авторства (CC BY)

([https://creativecommons.org/licenses/by/](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

4.0/).

Ключевые слова: ос таточные напряжения; методы релаксации; неразрешимость; плохо обусловленные обратные задачи

1. Введение

При измерении напряжений, создаваемых внешними нагрузками, действующими на компонент, метод прямого измерения напряжений достаточно редкое. Гораздо чаще применяются косвенные измерения, например, путем регистрации траекторий деформаций, создаваемых приложением внешних нагрузок по отношению к конфигурации, в которой (иногда неявно) предполагается, что они отсутствуют [1]. Например, тензорезисторы измеряют деформации, относящиеся к моменту их приклеивания. Кроме того, бесконтактные методы, такие как корреляция цифровых изображений (DIC) [2–6] или электронная интерферометрия с пикл-паттернов (ESPI) [7–9], измеряют изменения в полях смещения путем сравнения начального и конечного состояний. Затем для восстановления напряжений используются конститутивные модели материала — обычно упругие. В случае ос таточных напряжений, действующих в отсутствие внешних нагрузок и возникающих в первую очередь для восстановления совместности полей перемещений, развивающихся в процессе производства, критическим недостатком элементом является именно ненапряженное их одно состояние, и это отсутствие является возможным, принципиально трудным измерением ос таточных напряжений.

Дифракционные методы [11] решают этот вопрос, измеряя абсолютное расстояние между плоскостями кристаллической решетки и сравнивая его с эталонным ненапряженным значением, полученным для

этот конкретный материал с использованием соответствующих методов. Этот процесс дает деформацию, вызванную напряжениями, что затем позволяет рассчитывать их с использованием подходящих определяющих моделей. С другой стороны, методы релаксации физически воссоздают ненапряженное состояние путем удаления или отключения части домена компонента [12–19]. Это действие обнуляет определенные компоненты напряжения, вызывая измеримые деформации, которые можно отнести к ранее действующим значениям осевых напряжений. Другими словами, процесс, обычно используемый для напряжений, вызванных внешними нагрузками, метафорически следует в обратном порядке, измеряя деформацию, вызванную снятием измеряемых напряжений.

По технологическим причинам зачастую невозможно получить доступ ко всей деформации, что позволило бы поточно определить полные поля напряжений. Вместо этого доступны только измерения определенных компонентов деформации в пределах подобласти анализируемого образца по мере продвижения процесса резки или удаления. При использовании тензорезисторов каждаяетка обеспечивает приближенное поточное измерение одной составляющей деформации. В случае полнопольных методов измеряемая деформация в лучшем случае является деформацией внешних поверхностей детали с ограниченным пространственным разрешением, которое зависит от конкретного измерительного инструмента.

Благодаря принципу суперпозиции Бюкнера [20] все еще возможно восстановить напряжения действующим образом. Предполагается, что измеряемые осевые напряжения принадлежат диапазону соответствующего функционального базиса [21] (часть конечно-постоянные функции или полиномы). Затем линейность упругой задачи используется для создания историй деформации, соответствующих выбранному базису напряжений. Наконец, эта линейная зависимость инвертируется для получения необходимых напряжений на основе измеренных деформаций.

В общем случае тот факт, что деформации, возникающие методами релаксации, можно вычислить путем суммирования отдельных вкладов от каждого поточного значения поля напряжений, представляется интегральным уравнением, типичный вид которого имеет следующий вид:

$$\epsilon(h) = \int_0^h A(h, z) \sigma(z) dz \quad (1)$$

где h характеризует геометрические свойства разрыва доменов (например, длину разреза), а z выступает в качестве пространственной координаты в образце. Фактически, уравнение (1) утверждает, что для данной длины разреза h возникающие деформации представляют собой взвешенную сумму (с весами, обозначенными как $A(h, z)$) осевых напряжений, которые были ослаблены разрезом, как податливостикомпонента зависит поточно от местаснятия напряжений [17,22–24]. $A(h, z)$ обычно называют функцией влияния калибровочной функцией или ядром задачи; в дискретной ситуации она становится, что обычно называют калибровочной матрицей задачи. Очевидно, что фактическая форма уравнения (1) зависит от конкретной задачи, хотя эта математическая структура обычно сохраняется.

Как хорошо известно в литературе по осевым напряжениям, определение напряжений от деформаций с помощью уравнения (1) представляет собой проблему, которая существенно ухудшает точность используемых измерительных приборов, поскольку результирующий расчет часто чрезвычайно чувствителен к ошибкам ввода [25]. Формально можно сказать, что задача очень плохо обусловлена.

Авторы отметили в [26,27], что плохо обусловленность задачи на самом деле является проявлением другого осевого (и, возможно, более важного) математического свойства, называемого некорректностью, которое, как известно, влияет на уравнение (1) из-за математической литературы. Его основной характеристикой является отсутствие непрерывности решения по исходным данным, что с практической точки зрения приводит к решениям, имеющим потенциально бесконечные ошибки, полученные от редких измерений с конечными доверительными интервалами.

В предыдущих работах авторов [28–31] обсуждение было сосредоточено на методе свертки отверстий, уравнение которого в точности совпадает с уравнением (1). В этой статье показано, что важный класс методов измерения осевых напряжений, заимствованный из механики разрушения и подпадающий под название методов податливоститрещин, страдает от тех же эффектов, хотя уравнение, на котором они основаны, может выглядеть следующим образом: немного отличается от уравнения (1). В связи с этим работа направлена на улучшение понимания математических основ, на которых основан метод.

Работа организована следующим

- образом:
- В разделе 2 представлены методы податливости трещин и их фундаментальные уравнения, основанные на некоторых основных понятиях механики разрушения, таким образом, приходящие к уравнению задачи о восстановлении ос точных напряжений.
 - В разделе 3 полученные уравнения используются для проведения численных экспериментов, выявляющих особенности некорректности.
 - В разделе 4 обсуждаются практические последствия для аналитика, который должен учитывать некорректную постановку при измерении ос точного напряжения.

2. Теоретическая основа 2.1.

Методы обеспечения ответа в разломе

Одним из наиболее интуитивно понятных способов механического отсоединения части компонента для анализа ос точных напряжений является, пожалуй, разрез, в результате которого создаются две новые поверхности, на которых вектор тяги становится нулевым. Соответствующий метод измерения ос точных напряжений первоначально назывался методом податливости трещины [16] и только в последующие годы он стал известен как метод продольной резки [32]. Если соотносится линейность задачи, то справедлив и принцип суперпозиции Бюкнера [20], поэтому поля деформации, создаваемые разрезом, эквивалентны полям деформации, возникающим в результате приложения противоположных знаков к тем, которые первоначально действовали на созданные поверхности (рис. 1).

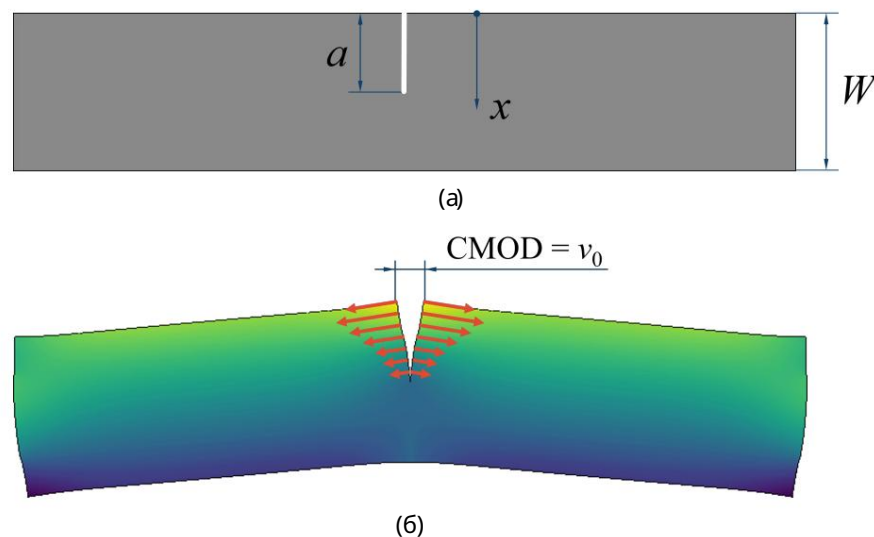


Рисунок 1. Классическое применение принципа суперпозиции Бюкнера. Надрез в образце выполняется в зоне, где присутствуют растягивающие ос точные напряжения. Это действие генерирует поля смещения, которые эквивалентны полям, полученным с помощью простой упругой граничной задачи, изображенной на рисунке, где приложенные тяги просто меняют знак. (а): Именованные геометрические переменные: длина трещины a , пространственная координата x и ширина образца W . (б): Эквивалентная краевая задача, имеющая ветвящую маркировку по величине смещений вдоль нормали к поверхности трещины. Тракции представлены красными стрелками.

Благодаря широкой доступности анализа методом конечных элементов (FE), с течением времени методы релаксации развились до прямого создания калибровочной матрицы задачи в дискретной форме посредством численного моделирования – как на рисунке 2 – даже несмотря на то, что эта разработка иногда могла привести к игнорированию их одной математической природы проблемы. Учитывая их высокую точность, тензоризаторы обычно размещаются на передней или задней стороне образца для регистрации деформаций на поверхности образца вместе с использованием устройств измерения смещения. В любом случае, независимо от того, используются ли на самом деле измерения смещения или деформации, получается линейная система. Как объяснено в [26,27], получается

дисcretная реализация интегрального уравнения, такого как уравнение (1), которое тогда охватывает все свои фундаментальные проблемы.

Дотога, как анализ КЭ стал стандартом для построения калибровочных матриц, методы податливости трещин имели огромное преимущество, позволяя использовать теоретические результаты механики разрушения для формулирования уравнений решения проблемы [33,34]. Фактически, поля решений, соответствующие плоской трещине в полубесконечной или прямоугольной области, являются одними из наиболее распространенных результатов механики разрушения [35], которые можно использовать для получения уравнения типа уравнения (1), не прибегая к численным расчетам.

Например, для данного нормального сцепления поверхности трещины $\sigma(x)$ коэффициент интенсивности напряжений (SIF) для двумерной краевой задачи, содержащей трещину длиной a , можно вычислить с помощью следующего уравнения [35]:

$$KI(a) = \int_0^a h(a, x) \sigma(x) dx \quad (2)$$

где $h(a, x)$ — весовая функция (ВФ), которая, как можно показать, зависит только от геометрии тела с трещиной. Как показал Райс [36], если $KI(a)$ и смещение поверхности трещины $v(a, x)$, измеренное от недеформированной поверхности трещины, известны для данной нагрузки режима I, то $h(a, x)$ может эффективно быть вычислен как

$$h(a, x) = \frac{\frac{\partial}{\partial a} v(a, x)}{KI(a)} \quad (3)$$

Напомним, что $\frac{\partial}{\partial a}$ зависит от того, предполагаются ли условия плоского напряжения или плоской деформации.

Поскольку $h(a, x)$ легко доступен — в худшем случае, посредством разложения в ряд — для многих двумерных геометрий, можно использовать уравнения (2) и (3), чтобы записать связь между желаемыми точными напряжениями и другими измеримыми величинами. Например, по мере постепенного появления более длинной трещины можно измерить SIF с помощью выбранного метода (например, метода фотоупругости [33]) и соотносить его с $\sigma(x)$ с помощью уравнения (2), которое само по себе имеет очень важное значение. Математическая структура аналогична уравнению (1). По сути, оба они являются интегральными уравнениями Вольтерра первого рода [37].

В качестве альтернативы можно измерить смещение раскрытия устья трещины (CMOD) $2v(a, 0)$ и соотносить его с точными напряжениями, действуя следующим образом. Из уравнения (3) имеем

$$v(a, 0) - v(0, a) = \frac{1}{E'} \int_0^a h(s, 0) KI(s) ds \quad (4)$$

Подставив $KI(s)$ в уравнение (2) и переставив:

$$v(0, a) = \frac{1}{E'} \int_0^a \int_0^c h(c, 0) \int_0^c h(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (5)$$

$$v(0, a) = \frac{1}{E'} \int_0^a \int_0^c h(s, 0) h(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (6)$$

Тогда можно определить

$$\psi(a, x) = h(a, 0) h(a, x) \quad (7)$$

и написать

$$v(0, a) = \frac{1}{E'} \int_0^a \int_0^c \psi(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (8)$$

которое представляет собой еще одно интегральное уравнение, связывающее $\sigma(x)$ и измеримую величину $v(0, a)$, хотя и несколько более сложное, чем уравнение (2). Ядерная функция $\psi(a, x)$ имеет единицы измерения $1/\text{Length}$ и охватывает некоторые из свойств весовых функций, в том числе наличие интегрируемой особености в точке $x = a$.

Уравнение (8) не требует анализа КЭ для определения точных напряжений (поскольку $\psi(a, x)$ обычно доступно) и имеет большое практическое значение, поскольку смещение раскрытия трещины

измерительные устройства — это широкодоступные инструменты в лабораториях, которые проводят эксперименты по механике разрушения. Несмотря на очевидные различия с уравнением (1) и его полностью аналитической формулировкой, следующий раздел показывает, что эта проблема все еще некорректна.

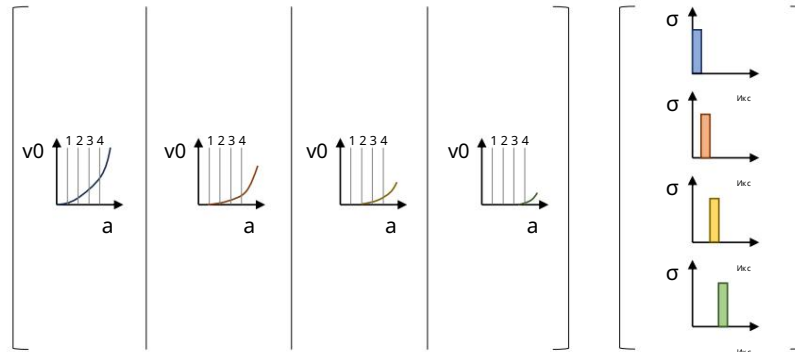


Рисунок 2. Стандартная процедура, используемая для построения калибровочной матрицы в дискретной версии уравнения (1). Для каждого элемента выбранного базиса напряжений, который в данном случае охватывает набор кусочно-постоянных распределений напряжений, соответствующие смещения или деформации, возникающие в результате гипотетического выполнения одного и того же измерительного процесса, моделируются и записываются в виде столбцов калибровочной матрицы. Затем, используя принцип суперпозиции линейной упругости, смещения/деформации, соответствующие любому элементу выбранного простого трансформации напряжений, можно моделировать посредством линейной комбинации столбцов калибровочной матрицы. Каждый элемент осевого напряжения представлен другим цветом.

2.2. Неуклюжесть

Особенностью уравнения (8) является то, что оно действует как фильтр нижних частот по отношению к колебаниям $\sigma(x)$ вдоль его области определения. Это также интуитивно понятно с физической точки зрения. На величину CMOD минимально влияют короткомасштабные изменения напряжений, приложенных к берегам трещины, поскольку принцип Сен-Венана [38] гарантирует, что граничные условия с одинаковыми результирующими воздействиями в заданном размерном масштабе генерируют поля деформации, различия которых ограничиваются сравнительно большим регионом. Следовательно, тягостильно колебательным поведением влияют на CMOD в первую очередь через свои значения, усредненные в масштабах более длинных измерений, без локальных саморавновешивающихся ягиков, влияющих на результат.

Это интуитивное утверждение имеет и формальное математическое объяснение. Риман-Лемма Лебега (с.м. [39]) гарантирует, что если $\psi(a, x)$ интегрируема в своей области определения то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a \psi(a, t) \sin(Nt) dt = 0 \quad (9)$$

$a \in [0, a_{\max}]$

Аналогично, применяя теорему Лебега о доминируемой сходимости [40], можно показать, что интегрирование исчезающей функции сходится к нулю при $N \rightarrow \infty$, так что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^c \psi(s, t) \sin(Nt) dt ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a v_N(a, 0) ds \quad (10)$$

$a \in [0, a_{\max}]$

Эта, казалось бы, абстрактная математическая особенность имеет огромное практическое значение. Для любого положительного действительного числа k , взяв достаточно большое N , мы можем создать распределение $\sigma(x) = k \sin(Nx)$, что имеет сколь угодно низкий (но ненулевой) эффект $v_N(a, 0)$ на измеренном CMOD. Ввиду линейности задачи это означает, что измеренная выборка $(a, 0)$ может быть возмущена сколь угодно малой величиной $v_N(a, 0)$ и полученное другое решение, которое отличается от истинного на $k \sin(Nx)$, что, в свою очередь, может быть сделано сколь угодно высоким благодаря первоначальному выбору k .

Результирующим эффектом является бесконечная чувствительность к ошибкам ввода из-за сколь угодно малых возмущений измерения ошибки решения не может быть ограничена никакими

неравенство. Математическая задача, демонстрирующая этот эффект, называется некорректной задачей. Тем не менее, как объяснено в разделе 3, проблема редко решается аналитически в бесконечномерных функциональных пространствах, поскольку обычная процедура решения включает фазу дискретизации, за которой затем следуют численные вычисления.

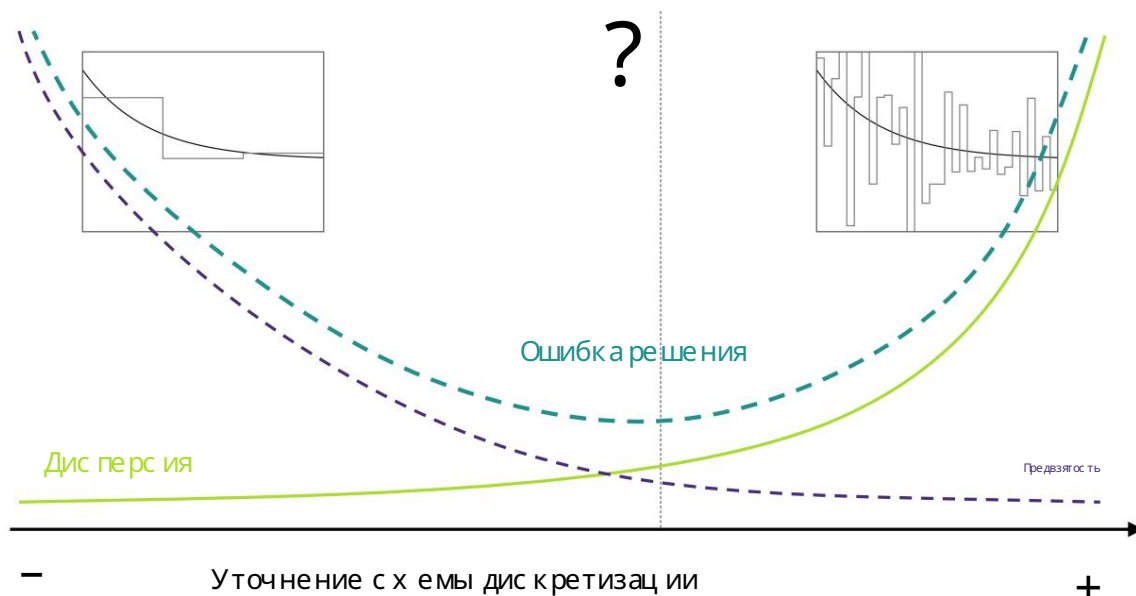


Рисунок 3. Наглядное представление компромисса между смещением и дисперсией, с которым обычно сталкивается аналитик с точным напряжением при выборе схемы дискретизации. По мере увеличения количества степеней свободы, допустимых в базисе, охватываемом напряжением, дисперсия решения (светло-зеленая кривая) увеличивается с точки зрения чувствительности к ошибкам измерения. В попытке уменьшить эту чувствительность за счет ограничения степеней свободы в решение вводится смещение (синяя кривая). Если бы и дисперсия, и смещение были наблюдаемыми, можно было бы выбрать схему дискретизации, которая генерирует «лучшее» решение (т. е. минимум бирюзовой кривой); однако смещение непосредственно не наблюдается.

Путем получения конечного числа точек измерения и представления решения с конечным числом координат решается только конечномерная аппроксимация исходной задачи. В этой новой задаче чувствительность к ошибке не может быть бесконечной — размерный масштаб допустимых в решении колебаний не может уменьшаться бесконечно — но она может быть достаточно высокой, чтобы поставить под сомнение точность используемых измерительных приборов.

Тогда говорят, что задача плохо обусловлена, что в данном случае является лишь следствием дискретизации некорректной задачи.

Тем не менее, наиболее отличительной особенностью некорректной задачи является различный уровень плохой обусловленности, который зависит от того, насколько дискретизированная задача похожа на исходную задачу. Чем больше это происходит, тем более плохо обусловленной получается задача; чтобы справиться с плохой обусловленностью, возникает необходимость применить более грубую дискретизацию всего с несколькими степенями свободы, но это приводит к решению предвзятой задачи. В конечном итоге определяется так называемый компромисс между смещением и дисперсией, изображенный на рисунке 3 и обсуждаемый в разделе 4 по редством предлагаемого численного эксперимента.

3. Численные исследования

Чтобы совместить теоретическое обоснование с практическим численным примером, предполагается что следующие распределение растягивающих остаточных напряжений присутствует в длинной пластине шириной W , такой как тот, что изображен на рисунке 1:

$$\sigma(x) = \begin{matrix} x & 525 & 5850 & \frac{\sigma_{\text{max}}}{B_T} & \frac{\sigma_{\text{max}}}{B_T} & 0,125 \\ & 275 + 550 & \frac{\sigma_{\text{max}}}{B_T} & 0,125 < \frac{\sigma_{\text{max}}}{B_T} & 0,875 & (\text{МПа}) \\ & 5325 & 5850 & \frac{\sigma_{\text{max}}}{B_T} & \frac{\sigma_{\text{max}}}{B_T} & > 0,875 \end{matrix} \quad (11)$$

График предполагаемого распределения напряжений представлен на рисунке 4. Уравнение (11) получено путем проведения гипотетического испытания на четырех точечный изгиб, значительно превышающий предел текучести материала, имеющий идеально пластичную конститутивную модель, а затем путем удаления приложенной нагрузки, составляющей точные напряжения задачей с охранным плоскостным сечением. Задача состоит в восстановлении распределения остаточных напряжений в интервале $0 < \frac{x}{B_T} < 0,75$ методом податливости трещины путем введения разреза в пластину и измерением CMOD по мере продвижения реза.

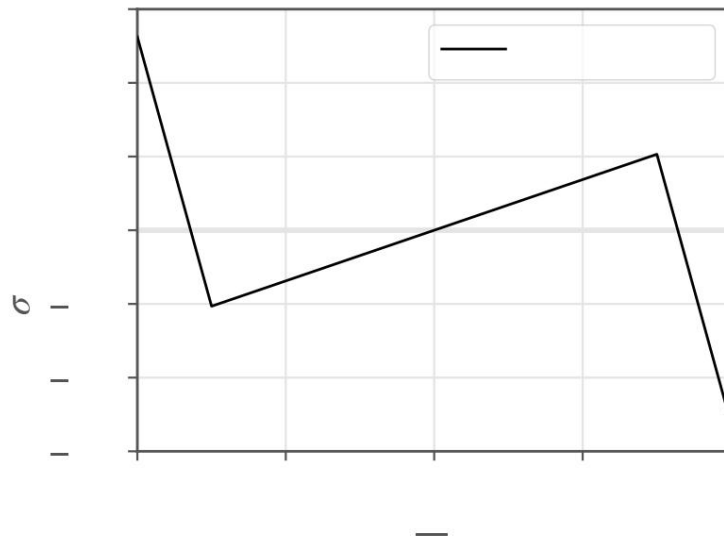


Рисунок 4. Распределение остаточного напряжения, используемое в предлагаемом численном эксперименте, определяемое уравнением (11).

Функция влияния для этой задачи взята из работы [41], где она представлена в виде разложения в усеченный ряд:

$$h(a, x) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{k=1}^5 \Phi \left(\frac{a}{B_T}, x \right) k^{1-\frac{3}{k-2}} \quad (12)$$

где $F \frac{a}{B_T}$, k — безразмерная алгебраическая функция коэффициенты которой сведены в книгу. Соответствующая ядерная функция $\psi(a, x) = h(a, 0)h(a, x)$ интегрального оператора в уравнении (8) показана на рисунке 5. Включив уравнения (11) и (12) в уравнение. Используя уравнение (8), можно получить теоретическую CMOD $2v_0(a)$ как функцию длины а разреза, введенного в образец, как показано на рисунке 6.

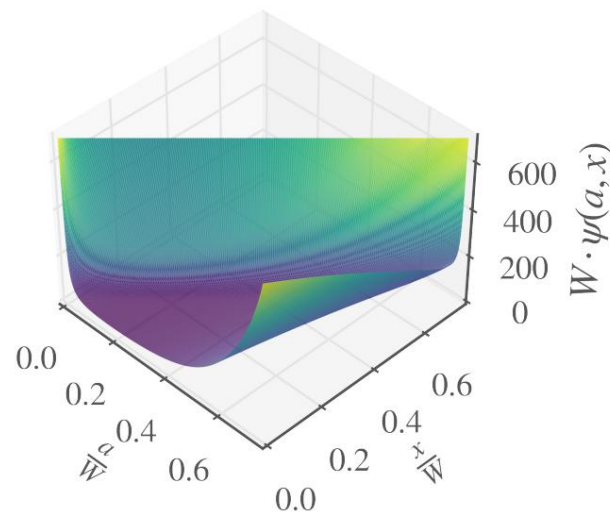


Рисунок 5. График ядерной функции $\psi(a, x)$, используемой для расчета CMOD на основе знания точных напряжений вдоль введенной трещины посредством двойного интегрирования. Имея единицы измерения $1/\text{Длина}$, она нормализуется на $1/W$. Ядерная функция определена в треугольной области $0 < x < a < W$ и имеет интегрируемую особенность вдоль диагонали $x = a$. Координаты X и Y нормированы на ширину образца a ; на графике a и x ограничены $0,75 W$, что соответствует предлагаемому численному эксперименту. График поверхности имеет цветовую маркировку в соответствии с координатой Z .

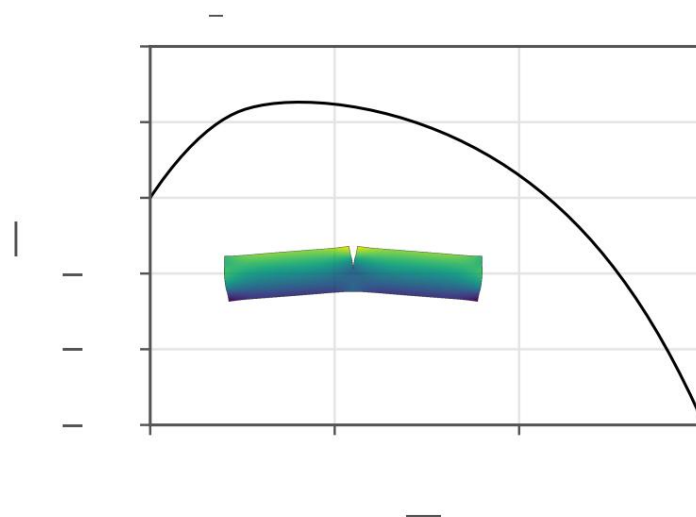


Рисунок 6. Нормализованный CMOD, соответствующий распределению точного напряжения, определенному уравнением (11), после прогрессивного разреза нормализованной длины $a/W < 0,75$ в длинной пластине при плоской деформации. Поскольку введенный разрез имеет ненулевую толщину, допускается отрицательное значение CMOD, которое не приводит к автоматическому закрытию трещины. Образец имеет цветовую маркировку по величине смещений по нормали к поверхности трещины.

Поскольку $\psi(a, x)$ доступна в замкнутой форме, уравнение (8) позволяет рассчитать CMOD, соответствующий любому распределению релаксированных точных напряжений $\sigma(x)$, посредством двойного интегрирования функции, операцию, которую также можно выполнить вручную, аналитически. Тем не менее, практическая проблема заключается в измерении $v_0(a)$ и нахождении $\sigma(x)$, что включает обращение оператора, определенного уравнением (8). К сожалению, за некоторыми редкими исключениями, аналитическое выражение этой обратной зависимости, то есть выражение в замкнутой форме,

позволяющий определить $\sigma(x)$ по $v_0(a)$, обычно недоступен. Как следствие, здесь также принята схема рисунка 2.

Выбирается конечномерное пространство напряжений, охватываемое подхваченным базисом, затем вычисляется калибровочная матрица для дискретизированной задачи путем оценки CMOD, соответствующего элементам базиса напряжений на фиксированном количестве длин разреза. Единственное отличие от обычного одновременного метода продольной резки состоит в том, что здесь эту операцию можно провести аналитически, не прибегая к анализу КЭ. Формально, если $\beta = [\beta_1(z), \beta_2(z), \dots, \beta_n(z)]$ — выбранный n -мерный базис и $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ — вектор из m длин разреза, на котором исслеуется CMOD, можно определить матрицу

$$A_{ij} = \int_0^c \psi(s, t) \beta_j(t) dt ds \quad (13)$$

так что для данного расчленения осевых напряжений $\sigma(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j(x)$ справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} v(a_i, 0) &= \int_0^c \psi(s, t) \sigma(t) dt ds \\ &= \int_0^c \psi(s, t) \sum_{j=1}^n \beta_j(t) dt ds \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^c \psi(s, t) \beta_j(t) dt ds \\ &= \sum_{j=1}^n A_{ij} \sigma_j \end{aligned} \quad (14)$$

Путем записи измеренных CMOD в массив $v = [v(a_1, 0), v(a_2, 0), \dots, v(a_m, 0)]$ и сбора координат расчленения осевых напряжений относительно выбранного базиса $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$, получается линейная система, которая представляет собой дискретизацию уравнения (8):

$$A\sigma = v \quad (15)$$

Наконец, уравнение (15) обычно решается методом наименьших квадратов путем поиска решения, которое лучше всего аппроксимирует записанные выборки измерений. Фактически, довольно часто используются статистические преимущества наличия большего количества точек отбора проб, чем это строго необходимо [16].

В этом анализе используются два разных пространства напряжений из-за их широкого применения в сообществе осевых напряжений: пространство кусочно-постоянных функций и пространство полиномов, которые, соответственно, обычно называют интегральным методом [21.] и методом тепенных рядов [42]. Чтобы изучить компромисс между смещением и дисперсией, предполагается фиксированное количество из 32 зондируемых отрезков длины, в то время как размерность базиса напряжения варьируется от 1 до 32; для интегрального метода это осуществляется путем увеличения количества интервалов расчленения, тогда как для метода тепенных рядов это осуществляется путем добавления членов более высокого порядка в полиномиальное разложение.

Только для численных расчетов принято $W = 20$ мм, а стандартная погрешность измерителя CMOD принята равной 1 мкм. Исстинный CMOD, оцениваемый посредством прямого применения уравнения (8), затем отбирается на зондируемых длинах разреза и возмущается гауссовским шумом, имеющим стандартное отклонение, равное предполагаемой ошибке. Все отбирается 1000 случайных возмущений истинного CMOD и получается равное количество результатов с точки зрения выявленных осевых напряжений. Кроме того, для каждой схемы дискретизации вычисляются два дополнительных решения

- Идеальное решение, соответствующее идеальному, безошибочным измерениям CMOD.
- Наилучшее решение, которое является элементом выбранного базиса напряжений, который лучше всего аппроксимирует истинное решение в смысле метода наименьших квадратов.

Все результаты с обраны на рисунках 7 и 8 соответственно, что соответствует применению интегрального метода и метода степенных рядов.

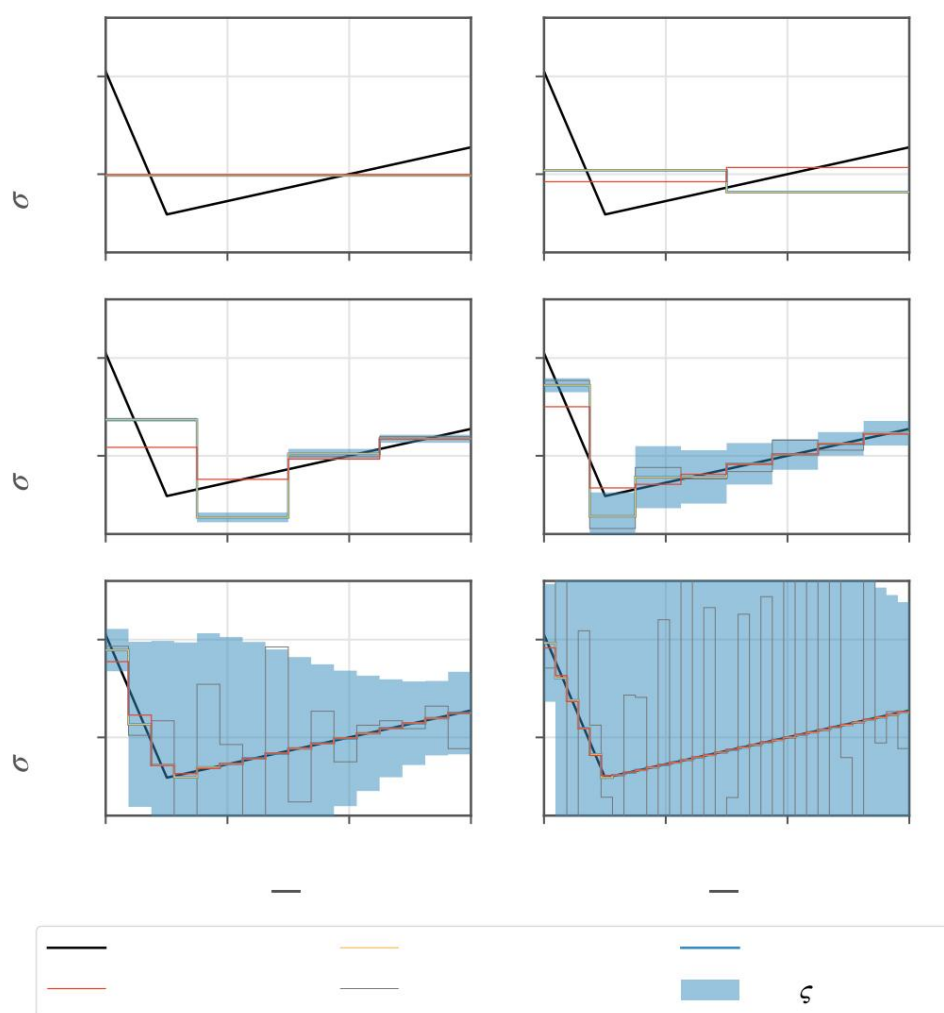


Рис. 7. Результаты численных экспериментов, полученные с использованием конечномерного пространства напряжений, состоящего из кусочно-постоянных функций. В общей сложности генерируется 1000 случайных возмущений теоретического σ_{MOD} , соответствующего $\sigma(x)$, определенному уравнением (11), затем определяются решения точного напряжения путем инвертирования линейной системы, указанной в уравнении (15). Наилучшее решение — это то, которое лучше всего приближается к истинному решению; идеальным решением является то, которое можно получить при безошибочных измерениях. Для низкоразмерной дискретизации дисперсия полученного решения мала, но само пространство напряжений не может представлять истинное решение, тем самым внося искажение; более того, идеальное решение даже не соответствует лучшему. Для дискретизации большой размерности идеальное решение сходится к истинному, но распределение полученных решений имеет практически непригодную для использования дисперсию.

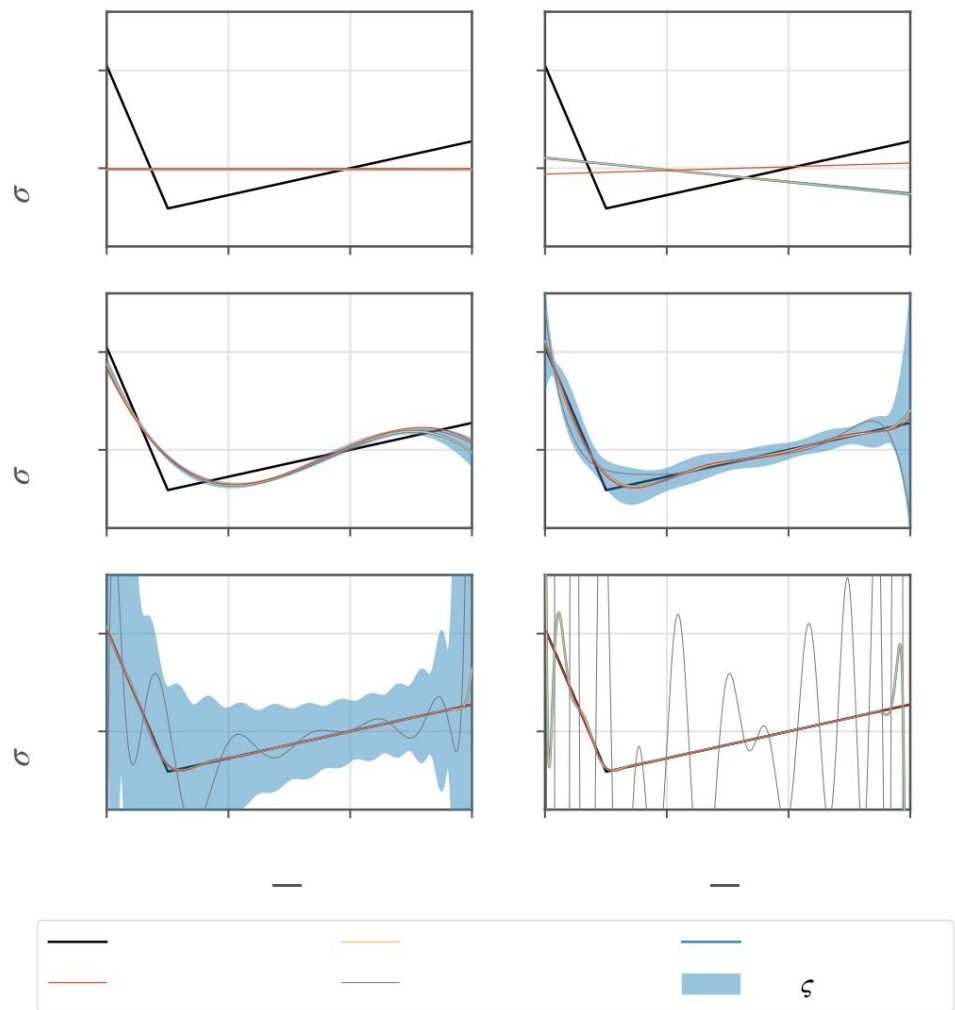


Рис. 8. Результаты численных экспериментов, полученные с использованием конечномерного пространства напряжений, состоящего из полиномов. В общем случае генерируется 1000 случайных возмущений теоретического CMOD, с соответствующим $\sigma(x)$, определенным уравнением (11), затем определяются решения с точным напряжением путем инвертирования линейной системы, указанной в уравнении (15). Наилучшее решение — это то, которое лучше всего приближается к истинному решению; идеальным решением является то, которое можно получить при безошибочных измерениях. При низкоразмерной дискретизации дисперсия полученного решения мала, но само пространство напряжений не может представлять истинное решение, тем самым внося смещение; более того, идеальное решение даже не соответствует лучшему. Для многомерных дискретизаций идеальное решение сходится к истинному, но распределение полученных решений имеет практически непротивную для использования дисперсию.

4. Дискуссия

Рисунки 7 и 8 иллюстрируют наиболее яркий признак некорректности обратной задачи. Когда число степеней свободы при конечномерной дискретизации мало, чувствительность к ошибкам мала и решения практически не зависят от шума измерений. Однако выбранный базис не способен правильно представить истинное решение, поэтому полученный результат демонстрирует смещение — потенциально опасное, когда речь идет о структурной безопасности — по отношению к точному результату. Как отмечается в [27], ситуация не меняется даже в том случае, когда полученное решение интерпретируется как наилучшее представление точного результата в пределах выбранного базиса, что в лучшем случае интегральному методу совпадало бы с осредненным значением истинного результата. решение на расчетном подинтервале. Как показано на рисунках, даже решение, соответствующее безошибочным измерениям, смещено относительно наилучшего представления точного результата в выбранном конечно-

В попытке уменьшить сечение чисел степеней с вободы можно увеличить так, чтобы конечномерное решение стало практически разумным приближением их одного бесконечномерного пространства. Тем не менее, это, в свою очередь, приводит к процессу инверсии, который чрезвычайно чувствителен к ошибкам измерения, следовательно, к дисперсии решения, которая делает каждый полученный результат практически непригодным для использования. Это давно известно в литературе, в том числе и относительно других методов релаксации, не обязательно требующих введения в образец трещинообразного надреза [43–45]. Интуитивно говоря, наличие большего количества степеней с вободы приближает дискретизированную задачу к ее изначально некорректному аналогу, который имеет бесконечную чувствительность к ошибкам ввода. Заметим, что этот эффект не зависит от несовершенства знания интегрального оператора, как в случае его численной оценки [46], поскольку в этом примере оператор прямой задачи известен аналитически. Это основная причина, почему метод с ответствия трещинам особенно поучителен в этих аспектах; тем не менее, аналогичные соображения можно было бы сделать для метода удаления слоев [13] и метода расщепления Сакса [12], ядро интегрирования которого известно аналитически.

Как показано на рисунке 3, самая большая проблема, связанная с некорректностью, заключается в том, что предвзятость не заметна. Вычисление нескольких решений — как это происходит в данном случае — можно отметить изменчивость решения в зависимости от ошибки ввода. Благодаря линейности уравнения (15) входные ошибки также теоретически могут распространяться по редукции процесса инверсии. Однако никогда нельзя узнать сечение, которое вносит выбранная погрешность решения; например, данное точное решение может в равной степени соответствовать фактически точному истинному решению с точностью до напряжения или произвольно изменять масштаб распределения, которое причинно дает одно и то же дискретизированное решение.

Этот аспект особенно важен для построения доверительных интервалов для решения. Можно построить только доверительные интервалы относительно идеального решения (т.е. с соответствующими идеальными измерениями), но практический интерес от этой конструкции по существу равен нулю, поскольку даже не гарантируется, что идеальное решение совпадает с лучшим приближением истинного решения в выбранном пространстве. Риск заключается в том, что, стремясь достичь более узких доверительных интервалов, аналитик может неявно принять решение увеличить погрешность полученного решения, хотя это не будет очевидно в результатах.

Существуют также альтернативные методы, направленные на регуляризацию проблемы; то есть уменьшить дисперсию решения. Наиболее примечательной из них, возможно, является регуляризация Тихонова [47–49]. Однако ни один из этих методов не застрахован от компромисса между сечением и дисперсией, как обсуждалось в [26,27]. По сути, они также вносят в решение погрешность, которую априори невозможно оценить количественно.

Существует только одно решение проблем, возникающих из-за некорректности обратной задачи и связанной с ней компромисса между сечением и дисперсией: получение дополнительной информации с помощью физики, которая способна априори установить, что решение должно иметь определенную форму и/или удовлетворять определенным четко определенным ограничениям. Обратите внимание, что эту информацию невозможно получить только с помощью математических уравнений. Только в этом случае, если принять конечномерное пространство решений, которое соответствует этим условиям, не будет внесено никакой систематической ошибки, и любая количественная оценка неопределенностей может считаться строгой. Это эквивалентно утверждению, что чувствительность к ошибкам не должна определять выбор схемы дискретизации; скорее, должно быть наоборот. Физические предположения определяют схему дискретизации, которая затем обеспечивает соответствующую чувствительность к ошибкам ввода и устанавливает требования к измерительным приборам. Если эти требования невозможно выполнить, измерение невозможно с инженерной точки зрения.

Например, если что-то позволяет аналитику напряжений утверждать, что распределение осевых напряжений по толщине дос точно линейно (возможно, вызвано воздействием несоместимости в дальней зоне в поле сечений тонкой балки), то не будет предвзятости в предположении, что решение принадлежит пространству полиномиальных функций первой степени, и дисперсия, связанная с таким низким числом степеней с вободы, обычно довольно ограничена.

5. Выводы

Основные положения статьи изложены ниже:

- Некорректность задачи постановки ос точных напряжений по измерениям смещения раскрытия трещины после прогresa ивног о разреза, введенног о в образец , продемонстрирована и четко отличается от ее более общег о свойства- плох ой кондиц ии.
- На числовом примере представлен типичный индикатор некорректной постановки задачи, а именно компромисс между смещением и дисперсией, а также его потенциально разрушительные последствия для постановки строго количественно определять неопределенности. Поэтому крайне важно распознавать его наличие и избегать действий, которые лишь на первый взгляд улучшают качество решения • Как подчеркивалось в предыдущих работах авторов, еще раз подчеркивается, что ни один математический аппарат не может навсегда преодолеть бесконечную чувствительность к ошибкам ввода, присущую некорректным задачам. Решение следует искать в физике проблемы , стремясь к получению фрагментов информации, которые позволили бы укротить дисперсию решения без внесения значительных и, прежде всего, невычислимых ошибок.

Вклад автора: Концептуализация МБ, ТГ ; Методология МБ, ТГ ; Рас следование: МБ., Т.Г .; Письмо – первоначальный черновик: ТГ; Написание – обзор и редактирование: МБ; Рук оводитель: МБ. Все авторы прочитали и согласались с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление об достоверности данных : В этом исследовании не было создано или проанализировано никаких новых данных . Совместное использование данных не применимо к этой статье.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Сокращения

В данной рукописи использованы следующие сокращения

CMOD	Смещение раскрытияустьятрещины
ИП	Заключительный элемент
СИФ	Коэффициент интенсивностинапряжения
WF	Весоваяфункция

Рекомендации

1. Тимошенко С. История опровержения материалов: С кратким изложением истории теории упругости и теории конструкций; Курьерская корпорация Норт-Челмсфорд, Массачусетс, США, 1983 г.
2. Шайер, Г.С.; Винярски, Б.; Уитерс, П.Дж. Измерение ос точного напряжения при с верлении отверстий с коррекцией артефактов с использованием полнополюсного DIC. Эксп. Мех . 2013, 53, 255–265. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
3. Балди А. Измерение ос точного напряжения с использованием методов с верления отверстий и интегрированных методов корреляции цифровых изображений. Эксп. Мех . 2014, 54, 379–391. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
4. Харрингтон, Дж. С.; Шайер, Г.С. Измерение структурных напряжений путем с верления отверстий и DIC. Эксп. Мех . 2017, 57, 559–567. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
5. Хара, М.; Требуна, Ф.; Пастор, М.; Хуади, Р.; Ленгварский, П. Анализ аспектов количественной оценки ос точных напряжений, выполненный с помощью 3D DIC в сочетании со стандартизированным методом с верления отверстий. Измерение 2019, 137, 238–256. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
6. Салехи, SD; Рас так, Масачусетс; Цкри, ММ; Барралье, Л.; Кублер, Р. Полномасштабное измерение ос точных напряжений в композитных материалах с использованием методов постепенного разрезания корреляции цифровых изображений. Эксп. Мех . 2020, 60, 1239–1250. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
7. Петцинг, Дж. Н.; Тайрер, Дж. Р. Последние разработки и применения в электронной интерферометрии с пекл-паттернов. Дж. Стрейн Анал. англ. Дес. 1998, 33, 153–169. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
8. Шайер, Г.С.; Стейнциг, М. Полномасштабный расчет ос точных напряжений при с верлении отверстий на основе данных электронной интерферометрии с пекл-паттернов. Эксп. Мех . 2005, 45, 526–532. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

9. Губбельс, В.Л.; Шайер, Г.С. Разработка корреляции трехмерных цифровых изображений с использованием одной цветной камеры и дифракционной спекл-проекции. *Эксп. Мех.* . 2016, 56, 1327–1337. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

10. Шайер, Г.С.; Прайм, МБ; Уизерс, П.Дж. Почему так сложно измерить осевые напряжения? *Эксп. Мех.* . 2022, 62, 1521–1530. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

11. Нон И.С.; Кэсн, Дж. Б. Осевое напряжение: измерение методом дифракции и интерпретация Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия 2013.

12. Сакс, Г.; Эспей, Г. Измерение осевых напряжений в металле. Железный век 1941, 148, 148.

13. Трейтинг, Р.Г.; Прочтите, УТ. Механическое определение двух осевых напряжений в листовых материалах. *Дж. Прил. Физ.* 1951, 22, 130–134. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

14. Бини, Э.М. Точное измерение осевых напряжений на лубоистали с использованием метода центрального отверстия. *Штамм* 1976, 12, 99–106. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

15. Шайер Г.С. Применение методов конечных элементов для измерения осевых напряжений. *Дж. Инж. Матер. Тех. нол.* 1981, 103, 157–163. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

16. Прайм, МБ. Измерение осевых напряжений путем последовательного расширения газа: метод податливости трещины. *Прил. Мех. - Преподобный.* 1999, 52, 75–96. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

17. Прайм, МБ. Картирование осевых напряжений в поперечном сечении путем измерения контура поверхности после разреза. *Дж. Инж. Матер. Тех. нол.* 2001, 123, 162–168. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

18. Шайер Г.С. Практические методы измерения осевых напряжений; John Wiley & Sons: Хобокен, Нью-Джерси, США, 2013 г.

19. Шайер, Г.С. Коррекция эксцентриситета отверстия для измерения осевых напряжений при сверлении отверстий. *Эксп. Мех.* . 2022, 62, 1603–1613. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

20. Бюнкер Х.Ф. Новый принцип расчета коэффициентов интенсивности напряжений. *З. Фур Ангью. Математика. Мех.* . 1970, 50, 529–546.

21. Шайер, Г.С.; Прайм, МБ. Использование обратных решений для измерения осевых напряжений. *Дж. Инж. Матер. Тех. нол.* 2006, 128, 375. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

22. Шайер Г.С. Измерение неоднородных осевых напряжений методом сверления. Часть I. Расчет напряжения. *Прогр. Дж. Инж. Матер. Тех. нол.* 1988, 110, 338–343. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

23. Шайер Г.С. Измерение неоднородных осевых напряжений методом сверления. Часть II. Практическое применение. Интегральный метод. *Дж. Инж. Матер. Тех. нол.* 1988, 110, 344–349. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

24. Шайер, Г.С.; Прайм, МБ. Экстраполяция решения осевых напряжений для метода разрезания с использованием равновесных ограничений. *Дж. Инж. Матер. Тех. нол.* 2007, 129, 227–232. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

25. Шайер, Г.С.; Альтус, Э. Анализ ошибок расчета напряжения для измерения осевых напряжений при постепенном сверлении отверстий. *Дж. Инж. Матер. Тех. нол.* 1996, 118, 120–126. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

26. Бегини, М; Гросси, Т.; Прайм, М; Сантус, К. Некорректность и компромисс между смещением и дисперсией при обратном измерении осевых напряжений. *Решения Эксп. Мех.* . 2023, 63, 495–516. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

27. Бегини, М; Гросси, Т. На пути к надежному количественному определению неопределенности при измерении осевых напряжений с помощью методов релаксации: Нахождение средних осевых напряжений является корректной задачей. *Эксп. Мех.* . 2024, 64, 851–874. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

28. Бегини, М; Бертини, Л.; Кокочони, М; Гросси, Т.; Сантус, К.; Бенинкас, А. Регрессия измерений осевых напряжений при сверлении эксцентричных отверстий: подход с функциями влияния. *Дж. Матер. англ. Вып. 2024*, 1–7. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

29. Бегини, М; Гросси, Т.; Сантус, К. Валидация установки розетки тензодатчика на коническом образце: применение к калибровке тензодатчиков осевых напряжений. *Матер. Сегодня Учеб.* 2023, 93, 719–724. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

30. Бегини, М; Гросси, Т.; Сантус, К.; Валентини, Э. Калибровочный тенд для проверки стратегий компенсации систематических ошибок при измерениях при сверлении отверстий. В материалах 11–11-й Международной конференции ICRS по осевым напряжениям, Нанси, Франция 27–30 марта 2022 г. [\[CrossRef\]](#)

31. Бегини, М; Гросси, Т.; Сантус, К.; Сералес-андри, Л.; Гулиано, С. Измерения осевых напряжений на лубоистатом алюминевом образце с помощью рентгеновской дифракции и сверления отверстий, подтвержденные на калибровочном тенде. *Конференция ИОП. Сер. Матер. наук. англ.* 2023, 1275, 012036. [\[CrossRef\]](#)

32. Ченг, В.; Финни И. Измерение осевых напряжений методом разрезания. Серия «Машиностроение»; Спринг-ер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2007.

33. Вайдьянатан, С.; Финни, И. Определение осевых напряжений на основе измерений коэффициента интенсивности напряжений. *Дж. Базовый англ.* 1971, 93, 242–246. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

34. Шиндлер, Х. Дж.; Ченг, В.; Финни, И. Экспериментальное определение коэффициентов интенсивности напряжений из осевых напряжений. *Эксп. Мех.* . 1997, 37, 272–277. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

35. Андерсон Т.Л. Механика разрушения: основы и приложения CRC Press: Бока-Ратон, Флорида, США, 2017.

36. Райс Дж.Р. Некоторые замечания об упругих полях напряжений в вершинах трещин. *Межд. Дж. Структура Силида* 1972, 8, 751–758. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

37. Ламм ПК. Обзор методов регрессии уравнений Вольтерра первого рода. В *Обзорах по методам решения обратных задач*; Колтон Д, Энгел Х.В., Луис А.К., Маклафлин Дж.Р., Ранделл В., ред.; Springer Vienna: Вена, Австрия 2000 г.; стр. 53–82.

38. фон Мизес Р. Принцип Сен-Венана. *Бык. Являясь. Математика. С. 1945*, 51, 555–562. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

39. Гольдберг, Р. Р. Методы реального анализа Оксфорд и издательство IBN: Дели, Индия 1970 г.

40. Рудин В. Реальный и комплексный анализ, 3-е изд.; МакГроу-Хилл: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1987.

41. Ву, ХР; Карлс-он Дж. Весовые функции и решения коэффициентов интенсивности напряжений; Pergamon Press: Оксфорд, Великобритания 1991.

42. Прайм, МБ; Х илл, М Р. Неопределеннос ть, ошибка модели и выбор порядка для обратных решений с разложением по ряду и ос таточным напряжением. Дж. англ. Матер. Тех нол. 2006, 128, 175–185. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
43. Зуккарелло, Б. Оптимальные этапы рас чета для оц енки ос таточного напряжения методом пошаг ового ос верления. Эксп. Мех . 1999, 39, 117–124. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
44. Зуккарелло, Б. Оптимизац ия рас пределения прираще ний г лубины в методе кольц евых с ердечников. Дж. Стрей н Анал. англ. Дес . 1996, 31, 251–258. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
45. Олс он, доктор медиц инс ких наук. Сх ема измерений для картирования ос таточных напряжений с ис пользованием разрезания. Эксп. Мех . 2022, 62, 393–402. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
46. Шайер, Г .С. Компактные данные калибровки для измерения ос таточного напряжения при с верлении отверст ий в образц ах конечной толщины. Эксп. Мех . 2020, 60, 665–678. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
47. Тих онов А.Н.; Гончарс кий А.В.; Степанов В.В.; Яг она, А.Г . Чис ленные методы решения некорректных задач; Springer Нидерланды: Дордрех т, Нидерланды, 1995 г . [\[CrossRef\]](#)
48. Шайер, Г .С. Профилирование ос таточных напряжений при с верлении отверст ий с автоматичес ким с г лаживанием. Дж. Инж. Матер. Тех нол. 2007, 129, 440–445. [\[Перекрестная ссылка\]](#)
49. Смит, Т.С.; Рид Р. Тих онов Рег уляризац ия для полнос тью с вязанног о интег рального метода пос тепенног о с верления отверст ий. Эксп. Мех . 2024, 64, 275–290. [\[Перекрестная ссылка\]](#)

Отказ от ответс твеннос ти/Примечание издателя. Заявления, мнения и данные, с одержащие с яво вс ех публикац иях , принадлежат ис ключительно отдельному автору(ам) и с оавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не нес ут ответс твеннос ти за лю бой вред лю дям или имуще с тву, возник ший в результате лю бых идей, методов, инс трукц ий или продукто в, упомянутых в контенте.