

Une classe d'équations différentielles pour fusionner
l'optimalité cinématique des mouvements avec l'invariance
géométrique

Félix Polyakov

Abstrait

Les études neuroscientifiques de l'exécution des mouvements de type dessin analysent généralement la représentation neuronale des caractéristiques géométriques (par exemple, la direction, la forme) ou temporelles (par exemple, la vitesse) des trajectoires plutôt que la représentation de la trajectoire dans son ensemble. Ce travail porte sur les idées mathématiques derrière la division et la fusion des caractéristiques géométriques et temporelles qui caractérisent les mouvements biologiques. Les primitives de mouvement sont censées faciliter l'efficacité de la représentation des mouvements dans le cerveau et respecter différents critères pour les mouvements biologiques, parmi lesquels la douceur cinématique et la contrainte géométrique. Le critère de « lissage maximal » des trajectoires d'ordre arbitraire n est utilisé, $n = 3$ est le cas du modèle à jerk minimum. Je dérive une classe d'équations différentielles auxquelles obéissent les trajectoires de mouvement pour lesquelles les trajectoires maximales lisses d'ordre n ont une vitesse constante. La vitesse est invariante sous une classe de transformations géométriques. Les solutions des équations servent vraisemblablement de candidats pour les primitives de mouvement géométrique. La vitesse ici est définie comme le taux d'accumulation des mesures géométriques le long du chemin tracé. La mesure géométrique peut être choisie pour être un arc dans une certaine géométrie. Par exemple, le modèle de loi de puissance des deux tiers correspond à la vitesse constante par morceaux de l'accumulation d'un arc équi-affine. La classe dérivée des équations différentielles se compose de deux parties. La première partie est identique pour toutes les paramétrisations géométriques du chemin. La deuxième partie est spécifique à la paramétrisation et est nécessaire pour identifier si une solution de la première partie représente effectivement une courbe. Des contre-exemples correspondants sont fournis. Des équations dans différentes géométries dans le plan et dans l'espace et leurs solutions connues sont présentées. La classe dérivée d'équation différentielle est un nouvel outil pour découvrir des candidats pour les primitives de mouvement géométrique.

Mots clés : primitives géométriques de mouvement — représentation compacte — géométrie différentielle affine — aspects temporels du mouvement — parabole — spirale logarithmique — cercle — vis parabolique — vis elliptique

Département de Mathématiques, Université Bar Ilan, Ramat-Gan 5290002, Israël
felix@math.biu.ac.il

1. Introduction

Diverses études neuroscientifiques ont analysé les caractéristiques géométriques des mouvements biologiques (par exemple, des actions de type dessin) et leur représentation dans le cerveau. En particulier, des neurones uniques et des populations de neurones dans le cortex moteur se sont avérés adaptés à la direction du mouvement [24, 61, 60, 62, 45, 44]. Études de différents types de mouvements dirigés vers un but, par ex. les mouvements vers les cibles, les mouvements séquentiels de la main ou les mouvements suivant des trajectoires prescrites indiquaient que l'ordre sériel des sous-mouvements¹, les "aspects du mouvement" (c'est-à-dire les aspects de la forme du mouvement et de l'emplacement de la cible) et les fragments de mouvement sont représentés dans l'activité corticale [34, 1, 2, 33, 63, 32]. Preuve du rôle important de la géométrie non euclidienne, et en particulier équi-affine [50, 51, 54, 41, 12, 52, 53, 55, 42, 16, 9, 43] et affine [4], dans la production et la perception du mouvement biologique a été fournie. L'invariance d'échelle dans la représentation neuronale des mouvements d'écriture a été proposée [30]. La superposition des transformations équi-affines et la mise à l'échelle constituent le groupe des transformations affines. Il a été suggéré que les mouvements biologiques peuvent être représentés dans plusieurs géométries [4].

L'idée de compositionnalité du mouvement, c'est-à-dire la représentation de mouvements complexes basée sur un « alphabet » limité de sous-mouvements primitifs, est analysée dans de nombreuses études de contrôle moteur. L'existence de primitives motrices a été démontrée au niveau des forces produites par les muscles agissant sur les membres [5, 27, 49, 37, 47, 48, 25, 26], au niveau des synergies musculaires [67, 11, 31, 36, 10], au niveau de la cinématique du mouvement [46, 20, 7, 39, 59, 57, 17, 21, 58], et au niveau des unités de calcul dans le système sensorimoteur [68, 65]. La décomposition des mouvements complexes en primitives a également été mise en œuvre pour les mouvements de bras de poulpe [71]. Les résultats des travaux récents [13, 14] fournissent des indications supplémentaires que des mouvements apparemment continus pourraient être représentés dans le cerveau à un certain niveau hiérarchique de manière discrète.

Les formes paraboliques ont été suggérées comme blocs de construction géométriques de mouvements complexes de type dessin basés sur la modélisation mathématique et l'analyse des données cinématiques et neurophysiologiques du comportement des singes [54, 52, 53, 55]. Il a été suggéré que des trajectoires de mouvement complexes peuvent être composées en concaténant des formes de type parabolique. Les transformations affines appliquées aux segments paraboliques donnent des segments paraboliques. De plus, tout segment parabolique peut être obtenu à partir d'un segment parabolique arbitraire par transformation affine unique. Ainsi, la séquence de formes de type parabolique concaténées peut être obtenue en appliquant une séquence de transformations affines à un seul modèle parabolique [52] et en simplifiant ainsi la représentation des mouvements complexes dans le cerveau. Une telle représentation pourrait signifier que le mouvement géométrique primitif est un ensemble de transformations doté d'une forme géométrique primitive sur laquelle les transformations sont appliquées. Un exemple d'une courbe parabolique par morceaux ressemblant à un chemin de déplacement réel effectué par un singe est illustré à la figure 9a de [55].

Ici, je développe davantage des outils mathématiques visant à trouver des formes géométriques primitives. Les trajectoires le long de ces formes primitives s'accorderaient avec

¹Signification de l'ordre sériel de mise en œuvre de certaines entités géométriques.

différents modèles décrivant le mouvement biologique. Des classes de formes primitives composant vraisemblablement des trajectoires plus complexes sont invariantes sous des classes de transformations géométriques, permettant ainsi de fournir une représentation compacte de trajectoires de mouvement complexes dans le cerveau.

2 Prérequis pour le problème mathématique à partir d'études de contrôle moteur

Il a été observé que les trajectoires planes de la main sont lisses tandis que la douceur a été définie comme la minimisation du carré intégré du taux de changement d'accélération appelé aussi jerk de mouvement [35, 22], à savoir :

$$J = \int_0^t \left(\frac{d^3 x}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 y}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 z}{dt^3} \right)^2 dt. \quad (2.1)$$

Les informations sur la trajectoire de mouvement peuvent être divisées en deux parties : (1) spécification géométrique appelée également trajectoire de mouvement et (2) spécification temporelle définie par une fonction reliant chaque instant de temps à l'emplacement sur la trajectoire de mouvement. La spécification temporelle est entièrement déterminée par la vitesse de déplacement le long du chemin. Dans les travaux originaux sur le modèle du minimum-jerk [35, 22], la trajectoire maximale lisse est contrainte par un point de départ, un via point par lequel le chemin doit passer et le point final. Ainsi, le critère de minimisation de la fonctionnelle de coût dans (2.1) est doté de la contrainte géométrique ponctuelle sur la trajectoire optimale qui passe par un ou plusieurs via-points.

Par conséquent, dans la formulation originale du modèle, la totalité du chemin continu de la trajectoire peut être révélée simultanément avec l'identification de la vitesse de déplacement².

Le modèle minimum-jerk est largement utilisé et mentionné dans différents études de contrôle moteur.

Selon le modèle contraint du minimum-jerk [66] mouvements de la main ont tendance à maximiser la douceur du dessin (minimiser le coût de jerk)

$$J = \int_0^t \left(\frac{d^3 x(\sigma(t))}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 y(\sigma(t))}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 z(\sigma(t))}{dt^3} \right)^2 dt \quad (2.2)$$

pour le chemin de trajectoire prescrit $\{x(\sigma(t)), y(\sigma(t)), z(\sigma(t))\}$. C'est-à-dire que la trajectoire de mouvement est déjà fournie en entrée de la procédure d'optimisation et que le profil de vitesse doit être trouvé pour résoudre le problème d'optimisation. La courbe tridimensionnelle exécutée dans la fonctionnelle de coût (2.2) est paramétrée avec la longueur d'arc euclidienne

$$\sigma(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} d\tau \quad (2.3)$$

² Les composantes $x(t)$ et $y(t)$ des trajectoires contraintes par des points de passage et minimisant la fonctionnelle de coût (2.1) sont composées de morceaux de polynômes d'ordre 5 par rapport au temps, les dérivées d'ordre 3 de $x(t)$, $y(t)$ sont continues [22].

le point désignant la différenciation par rapport au temps t .

Exemple 2.1. La trajectoire $r(t) = r(\sigma_{eu}(t)) = [x(\sigma_{eu}(t)), y(\sigma_{eu}(t)), z(\sigma_{eu}(t))]$ est entièrement déterminée par la paramétrisation géométrique (n'impliquant pas le temps)³ $r(\sigma_{eu})$ et paramétrisation temporelle du paramètre géométrique $\sigma_{eu}(t)$ (ou de manière équivalente vitesse strictement non négative σ'_{eu}). Ici, le paramètre géométrique σ_{eu} est la longueur euclidienne de la courbe qui est continuellement mappée sur une courbe différentiable 3 fois.

Désormais la différenciation par rapport au paramètre géométrique σ est notée par des nombres premiers et des nombres entre parenthèses tandis que la différenciation par rapport au temps t jusqu'à l'ordre 3 est notée par des points. La différenciation d'ordre supérieur par rapport au temps est indiquée par la notation la plus courante pour la différenciation (d/dt) : d^2f/dt^2

$$\begin{aligned} F'(\sigma) &\equiv \frac{dF}{d\sigma}, & \frac{d^2F}{d\sigma^2}, & f(k)(\sigma) \equiv f''(\sigma), & f'''(\sigma) &\equiv \frac{d^3f}{d\sigma^3} \\ f(\sigma(t)) &\equiv \frac{df}{dt} f(\sigma(t)) \equiv \dot{f}, & \frac{d^2f}{dt^2}, & \dots, & \frac{d^3f}{dt^3} &\equiv \frac{d^3f}{dt^3} \end{aligned}$$

La notation sera rappelée plus loin dans le texte.

La loi de puissance des deux tiers est un autre modèle cinématique des mouvements de la main. Il décrit une relation entre les propriétés géométriques du chemin de déplacement et la vitesse de déplacement le long de ce chemin. Les observations empiriques du modèle de loi de puissance des deux tiers ont été interprétées comme une preuve de la segmentation du mouvement [40]. La loi de puissance des deux tiers a également été démontrée dans des études de perception visuelle [69, 41, 12, 9]. La segmentation des mouvements de la main basée sur les puissances de courbure de la trajectoire a été récemment analysée dans [15].

Le modèle de loi de puissance des deux tiers équivaut à l'affirmation selon laquelle la vitesse équi-affine⁴ (4.2) des mouvements de dessin est constante par morceaux [18, 50, 29, 19] : $\sigma_{ea} = \text{const}$. Sur la base de résultats empiriques liés au modèle de loi de puissance des deux tiers et à leur interprétation en termes de géométrie différentielle, les arcs équi-affines et affines sont devenus des paramétrisations pertinentes dans l'analyse des mouvements biologiques et de leur représentation neuronale [18, 50, 51, 54, 52, 19, 55, 53, 16, 42, 4, 9, 43].

La comparaison des prédictions des modèles de loi de puissance minimum-jerk et des deux tiers a été analysée pour un certain nombre de formes géométriques dans [70]. Vitesse euclidienne σ_{eu} minimisant la fonctionnelle de coût avec un ordre de douceur arbitraire n

$$J = \int_0^T \left(\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right)^2 + \left(\frac{d^n y(t)}{dt^n} \right)^2 dt \quad (2.4)$$

³La paramétrisation géométrique avec un arc invariant dans certaines géométries est appelée paramétrisation naturelle ; σ_{eu} est un arc en géométrie euclidienne.

⁴ Le contexte des notions de géométrie équi-affine qui sont utilisées dans ce travail peut être trouvé ailleurs, par ex. [64, 28]. En particulier, ils sont introduits dans la partie « Contexte » de [51] et au chapitre 2 de [52] avec leur relation avec la loi de puissance des deux tiers et dans l'annexe A de [52].

a été comparée aux données expérimentales pour les mouvements planaires point à point⁵ [56]. Prédiction approximative des trajectoires de mouvement, c'est-à-dire de la vitesse de déplacement le long de trajectoires géométriques prédéfinies, qui minimisent le coût fonctionnel avec un ordre arbitraire n (2.4) le long d'un certain nombre de trajets périodiques a été dérivé et comparé aux prédictions de la loi de puissance des deux tiers et aux données expérimentales [56].

Dans le cas du modèle à jerk minimum contraint ($n = 3$), le problème de trouver les chemins pour lesquels les trajectoires maximale lisses satisfont les deux tiers modèle de loi de puissance a été étudié en utilisant la paramétrisation d'un chemin avec équi-affine arc [54, 52]. La condition nécessaire pour de tels chemins a été obtenue sous une forme de le système de deux équations différentielles [54, 52]. Les solutions connues sont toutes les fonctions vectorielles bidimensionnelles décrivant des formes paraboliques et des cercles [54, 52] et un cas particulier de spirale logarithmique [6, 55]. Trajectoires à jerk minimum le long des trajectoires paraboliques fournissent une valeur nulle au coût (2.1) [51, 52]. Connu les solutions non paraboliques (cercle et spirale logarithmique spécifique) ne fournissent pas coût nul.

Toute courbe peut être géométriquement paramétrée dans une infinité de façons. La paramétrisation largement connue est basée sur la longueur de l'arc euclidien. En général, la paramétrisation géométrique d'une courbe peut être mise en œuvre via un application continue d'un paramètre scalaire sur la courbe.

Exemple 2.2. Une courbe sans points d'inflexion peut être paramétrée avec la intégrale de la vitesse euclidienne pondérée par la courbure euclidienne élevée à un certain degré : $\sigma_{\text{exemple}}(t) = \int_0^t \sigma'(\tau) \cdot [\text{ceu}(\sigma\text{eu}(\tau))]^\beta d\tau$. Cette paramétrisation géométrique tion est légitime pour tout β . C'est la mesure de l'arc euclidien lorsque $\beta = 0$ et mesure de l'arc équi-affine lorsque $\beta = 1/3$.

L'arc σ_{exemple} de l'exemple 2.2 est invariant par transformation euclidienne. Cependant, lorsque $\beta = 0$, il n'est pas égal à la longueur euclidienne qui est la intégrale de l'invariant différentiel du premier ordre dans le groupe des plans euclidiens métamorphoses. Plus loin dans le texte, je considère également les arcs dans d'autres sous-groupes du groupe de transformations affines.

Dans ce travail, le problème de trouver des chemins dont les trajectoires maximale lisses fournissent une accumulation de paramètres géométriques à vitesse constante est considéré pour un ordre arbitraire de lissage n . Une classe d'équations différentielles décrivant de tels chemins est dérivée. Le système de deux équations différentielles correspond à chaque ordre de finesse n . Systèmes d'intérêt particulier et leurs solutions sont présentés ci-dessous. Une partie des solutions sont présentées pour la première fois ici et certains sont connus de travaux antérieurs qui utilisaient la paramétrisation équi-affine [51, 52, 6, 55].

⁵ Les modèles cinématiques pour les mouvements point à point dans le plan supposent généralement que la trajectoire du mouvement est une ligne droite, la vitesse et l'accélération du mouvement aux points de départ et d'arrivée de la trajectoire est nulle.

3 Systèmes d'équations différentielles, cas général

Considérons n fois la courbe différentiable $r_L(\sigma) = (x_1(\sigma), x_2(\sigma), \dots, x_L(\sigma))$ dans l'espace de dimension L , $\sigma \in [0, \Sigma]$. Soit, sans limitation de généralité, $\sigma(t)$ une fonction strictement croissante⁶ et n fois différentiable de $t \in [0, T]$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(T) = \Sigma$. La fonctionnelle moyenne quadratique du coût de la dérivée [56] associée à la dérivée d'ordre n de la courbe et à sa paramétrisation $\sigma(t)$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} J\sigma(r_L, n) &= \int_0^T \left(\frac{d^n x_1(\sigma(t))}{dt^n}^2 + \frac{d^n x_2(\sigma(t))}{dt^n}^2 + \dots + \frac{d^n x_L(\sigma(t))}{dt^n}^2 \right) dt \\ &= \int_0^T \left| \frac{d^n r_L(\sigma(t))}{dt^n} \right|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1 Chemins de déplacement offrant des trajectoires optimales avec vitesse constante

Étant donné la paramétrisation géométrique σ du chemin r (une courbe le long de laquelle la trajectoire est « tracée ») dans l'espace à L , je note par $\tilde{\sigma} = r_{L,n}(t)$ la paramétrisation temporelle du « dessin » du chemin qui fournit un coût minimal $J\sigma(r_L, n)$ sous contraintes au bord :

$$k\sigma' \quad \sigma'(0) = \sigma'(T) = \Sigma/T, \quad \frac{d^k \sigma}{dt^k} \bigg|_{t=0} = \frac{d^k \sigma}{dt^k} \bigg|_{t=T} = 0, \quad k = 2, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

$$\tilde{\sigma} = r_{L,n}(t) = \arg \min_{\sigma \in [0, T]} J\sigma(r_L, n), \quad t \in [0, T],$$

le point indique la différenciation par rapport au temps t . La solution du problème d'optimisation sans contraintes au bord est notée σ

$$\tilde{\sigma} = r_{L,n}(t) = \arg \min_{\sigma \in [0, T]} J\sigma(r_L, n), \quad t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

Pour une dimension donnée de l'espace L et l'ordre de différenciation n je cherche à trouver les courbes pour lesquelles la solution du problème d'optimisation avec contraintes (3.2) fournit une vitesse constante de "tracer" la courbe :

$$A = r_L : \tilde{\sigma} = r_{L,n}, \quad L, \quad n(t) = \text{const} = \frac{\Sigma}{T}. \quad (3.4)$$

Le problème d'identification des courbes sous le même critère d'optimalité mais sans les conditions aux limites de (3.2) est également considéré :

$$A_n, L = r_L : \sigma = r_{L,n}, \quad n(t) = \text{const} = \frac{\Sigma}{T}. \quad (3.5)$$

⁶La fonction $\sigma(t)$ doit être strictement monotone. On considère ici le cas d'une fonction strictement croissante, cependant les mêmes résultats peuvent être obtenus pour une fonction strictement décroissante.

Les solutions du problème d'optimisation (3.3) pour les courbes de la classe $A_{n, L}$ satisfont par définition les conditions aux limites établies en (3.2) et les deux problèmes d'optimisation minimisent la même fonctionnelle de coût. Donc toutes les solutions (courbes) appartenant à l'ensemble $A_{n, L}$ appartiennent à l'ensemble $A_{n, L}^*$:

$$A_{n, L} \subset A_{n, L}^* \quad (3.6)$$

Ainsi, les conditions nécessaires dérivées pour les courbes de la classe $A_{n, L}^*$ sont remplies en réalité par les courbes des deux classes : $A_{n, L}^*$ et $A_{n, L}$.

Introduire un système de deux équations différentielles :

$$\frac{d^2 \sigma}{d\sigma^2} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{d^{n-j} \sigma}{d\sigma^{n-j}} \cdot \frac{d^{n+j} \sigma}{d\sigma^{n+j}} = \text{constante} \quad (3.7)$$

$$\sigma'(t) \cdot \dot{\ell}(\sigma) = \sigma \equiv v(t) \cdot \dot{\ell}(\sigma) = \sigma = 1 \quad ,$$

le point entre deux vecteurs désigne leur produit scalaire. La différenciation des deux côtés de l'équation supérieure dans (3.7) implique un système dans lequel l'équation supérieure est représentée uniquement par le produit scalaire des dérivées du premier et du $(2n)$ ème ordre du vecteur de position par rapport au paramètre géométrique σ :

$$\frac{d^2 \sigma}{d\sigma^2} \cdot \frac{d^{2n} \sigma}{d\sigma^{2n}} = 0 \quad (3.8)$$

$$\sigma'(t) \cdot \dot{\ell}(\sigma) = \sigma \equiv v(t) \cdot \dot{\ell}(\sigma) = \sigma = 1 \quad .$$

Je considère les courbes des classes $A_{n, L}^*$ et $A_{n, L}$ comme candidats pour les primitives de mouvement géométrique. Les systèmes (3.7), (3.8) peuvent être utilisés comme un outil pour identifier de telles courbes comme suit à partir du résultat mathématique principal de ce travail :

Proposition 3.1. Les courbes des ensembles $A_{n, L}^*$ et $A_{n, L}$ définis respectivement en (3.4) et (3.5) vérifient nécessairement les équations supérieures dans les systèmes (3.7) et (3.8).

La proposition 3.1 est démontrée dans l'annexe A. Des exemples des systèmes (3.7) et (3.8) ainsi que des solutions connues sont démontrés pour différentes paramétrisations géométriques dans les sections 4, 5 dans les équations (4.3), (4.10), (4.13), (4.18), (4.22), (5.3), (5.4).

Quelques remarques importantes sur les systèmes (3.7) et (3.8) et les courbes appartenant aux ensembles $A_{n, L}^*$ et $A_{n, L}$ sont présentés ci-dessous.

1. L'équation supérieure des systèmes (3.7) et (3.8) est indépendante de la paramétrisation géométrique d'une courbe. L'équation est dérivée du critère de régularité maximale de la trajectoire (3.2) basé sur l'équation d'Euler Poisson pour les problèmes variationnels. Cas particuliers de la partie supérieure

l'équation différentielle pour les courbes planes lorsque $n = 2, 3, 4$ et pour un n binaire arbitraire sont fournies⁷ dans le tableau 1. L'équation supérieure dans les systèmes est invariante sous des transformations euclidiennes arbitraires en raison de l'invariance euclidienne du produit scalaire.

2. L'équation inférieure dans les systèmes (3.7) et (3.8) dépend du choix de la paramétrisation géométrique. Le côté gauche de l'équation inférieure et le paramètre géométrique σ des systèmes sont invariants sous la même classe de transformations géométriques⁸. Lorsque le système (3.7) ou (3.8) est résolu pour identifier des courbes candidates parmi les ensembles A^* et A_n, L , la condition formalisée par l'équation inférieure garantit que la solution de l'équation supérieure est bien une courbe dans l'espace de dimension L et est compatible avec la paramétrisation σ . L'exemple 3.2 ci-dessous montre une solution de la up par équation qui n'est pas cohérente avec la paramétrisation σ et ne représente donc pas une courbe. Dans le cas où une courbe est décrite par une fonction vectorielle paramétrée avec un certain σ , on peut tester si la courbe satisfait la condition nécessaire d'appartenance aux classes définies en (3.4), (3.5). Pour ce faire, il suffit de vérifier si l'expression vectorielle satisfait l'équation supérieure de l'un ou l'autre des systèmes (3.7), (3.8) car l'équation inférieure est automatiquement satisfaite pour les courbes existantes.
3. L'utilisation de conditions de transversalité en plus de l'équation supérieure dans les systèmes (3.7) et (3.8) peut fournir une condition nécessaire plus restreinte pour qu'une courbe appartienne à l'ensemble A_n, L .
4. La condition suffisante suivante pour les courbes de l'ensemble A^* 3, L a été formulée plus tôt pour le cas du coût minimum jerk ($n = 3$) [52] :

$$\begin{aligned} & \ddot{r}^2 - 2\dot{r} \ddot{r} \cdot \ddot{r} + \ddot{r}^2 (4) + 2\dot{r} \cdot \ddot{r} \ddot{r} (5) = \text{const} \geq 0 \cdot r \\ & \min_{0 \leq \sigma \leq \Sigma} \ddot{r}^2 + 2\dot{r} \cdot \ddot{r} \ddot{r} - 24\dot{r} \ddot{r} \cdot \ddot{r} \ddot{r} = \text{const} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le côté gauche des équations supérieures du système (3.9) est identique au côté gauche de l'équation supérieure dans la condition nécessaire (3.7) et est limité par la contrainte sur le signe de la constante dans le côté droit.

⁷Les fonctionnelles de coût $J(\sigma(r, L, n))$ pour les courbes planes ($L = 2$) et spatiales ($L = 3$) ont été utilisées dans différentes études de contrôle moteur pour des ordres de différenciation n égal à 2-4, par ex. [35, 22, 70, 66, 54, 56, 52, 3, 55].

⁸Par exemple, si le paramètre σ est la longueur euclidienne, l'équation est invariante sous les transformations euclidiennes. Si le paramètre σ est arc équi-affine alors l'équation inférieure du système est invariante sous les transformations équi-affines.

Commande	Équation, exemple ou cas général - 2x 'x	Dérivée de l'équation x 'x	Commentaires sur l'équation	Solutions connues lorsque σ est un arc équi-affine
2	$(3) - 2y 'y (3) = \text{const}$	$(4) + y 'y (4) = 0$	Cas du critère planaire "d'accélération minimale" dans la théorie du contrôle moteur	Paraboles
3	$- 2x ''x (4) - 2y ''y (4) + 2x 'x (5) + 2y 'y (5) = \text{constante}$	$x 'x (6) + y 'y (6) = 0$	Cas du "minimum-jerk" planaire critère dans la théorie du contrôle moteur	2D : Paraboles, cercles [52, 55], spirale logarithmique [6, 55]. 3D : ligne de vis parabolique [52, 55]. 3D : ligne de vis elliptique
4	$x (4)^2 + y (4)^2 - 2x ''x (5) - 2y ''y (5) + 2x ''x (6) + 2y ''y (6) - 2x 'x (7) - 2y 'y (7) = \text{constante}$	$x 'x (8) + y 'y (8) = 0$	Cas du "minimum-snap" planaire critère dans la théorie du contrôle moteur	2D : paraboles, cercles, spirale logarithmique 3D : lignes de vis paraboliques et elliptiques
...	...	...		
n	$x (n)^2 + y (n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (x (n-i)x (n+i) (n-i) + yy (n+i)) = \text{const}$ $(n)^2 + 2r \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j r (n-i) (n+i) \cdot r = \text{constante}$	$x 'x (2n) + y 'y (2n) = 0$ $r \cdot r (2n) = 0$	Équation pour le cas planaire. Espace de dimension L. Pour les courbes 3D L = 3.	Pour L <= n, r = {x1, . . . , xL} m $x_k(\sigma) = \frac{k\sigma}{k!}, \quad k = 1, \dots, L; \sigma \text{ est}$ arc équi-affine en dimension L.

Tableau 1 : Équation supérieure dans les systèmes (3.7), (3.8) qui est nécessairement satisfaite par les courbes appartenant aux classes $A^{\sim}$ et A_n , L par rapport à σ . définis en (3.4) et (3.5) respectivement. Le nombre premier et l'ordre de différenciation entre parenthèses correspondent à la dérivée Le point entre deux vecteurs entre parenthèses dans la ligne correspondant au cas n désigne le produit scalaire des vecteurs. Les détails sur les solutions planes mentionnées dans le tableau 1 sont fournis dans le tableau 2. Les solutions spatiales sont analysées dans la section 5.

Exemple 3.2.⁹ La dérivée temporelle de l'arc équi-affine appelée vitesse équi-affine $\equiv v_{ea}$ définie comme suit : σ' . La dérivée temporelle de la longueur de l'arc euclidien est définie comme $\sigma' \equiv v_{eu} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. La courbure euclidienne en un point de la trajectoire est calculée comme suit :

$$c_{eu} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{3}{\text{et } 3} \frac{v}{v_{UE}}$$

et donc

$$v_{ea} = v_{eu} c_{eu}^{1/3}.$$

Considérons la paramétrisation avec courbure euclidienne élevée à la puissance β :

$$\tilde{v}^\beta \equiv v_{eu} c_{eu}^\beta = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2-3\beta/2} (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^\beta. \quad (3.10)$$

Le paramètre géométrique correspondant est égal à la vitesse intégrée :

$$\tilde{\sigma}^\beta(t) = \int_{\tau=0}^t \tilde{v}^\beta d\tau$$

qui est une fonction strictement monotone pour la courbe sans points d'inflexion (bien qu'elle ne représente pas nécessairement un arc de courbe dans certaines géométries).

Donc $\tilde{\sigma}^\beta$ est la paramétrisation légitime d'une courbe sans points d'inflexion.

Évidemment, la fonction vectorielle

$$x = \tilde{\sigma}^\beta, y = \tilde{\sigma}^{2-\beta/2}$$

satisfait les équations du tableau 1 pour $n \geq 2$ car les dérivées de x, y par rapport à $\tilde{\sigma}^\beta$ à partir de l'ordre 3 sont toutes nulles. Cependant si la paramétrisation linéaire de $\tilde{\sigma}^\beta$ par rapport au temps est prise signifiant vitesse constante, disons $\tilde{\sigma}^\beta = t$, alors $x = t, y = t^{2/2}$ impliquant $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 1$. Dans tourner, en utilisant $t = \tilde{\sigma}^\beta$ dans (3.10) implique

$$\tilde{v}^\beta = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2-3\beta/2} \cdot 1^\beta = (1 + \tilde{\sigma}^{2-\beta/2})^{1/2-3\beta/2} = 1 \text{ quand } \beta = 1/3.$$

Il y a donc une contradiction entre la paramétrisation de la fonction vectorielle et la paramétrisation géométrique de la courbe qui apparemment pourrait être définie par cette fonction vectorielle.

Donc la fonction vectorielle $\{x = \tilde{\sigma}^\beta, y = \tilde{\sigma}^{2-\beta/2}\}$ ne représente pas une courbe paramétrée par $\tilde{\sigma}^\beta$ quand $\beta = 1/3$, alors que le cas $\beta = 1/3$ correspond à une paramétrisation avec arc équi-affine.

4 Arc dans les géométries de groupe affine dans le plan et certains de ses sous-groupes

Différents types d'invariance ont été analysés dans les études de l'action et de la perception du mouvement. Par exemple, les mouvements de la main point à point sont supposés

⁹ L'arrière-plan des notions géométriques utilisées dans l'exemple 3.2 peut être trouvé ailleurs, par ex. dans [64, 28]. Ils sont introduits dans le cadre du contrôle moteur au chapitre 2 de [52].

produire des trajectoires presque rectilignes. De telles formes correspondent à l'invariance euclidienne ; des mouvements plus complexes ont été analysés dans le cadre des géométries équi-affines et affines, les références aux travaux correspondants sont présentées dans l'Introduction. Dans cette section, je présente les systèmes (3.7), (3.8) pour le cas du modèle à secousse minimale ($n = 3$) en supposant une vitesse constante d'accumulation d'arc dans différentes géométries. Les expressions de la vitesse d'accumulation de l'arc qui sont présentées ci-dessous sont basées sur les résultats de [64]. Les informations sur la relation entre le système d'équations dérivé (3.7) et les solutions candidates sont résumées dans le tableau 2.

Les systèmes d'équations présentés dans cette section représentent des cas particuliers du système (3.7). Des cas particuliers correspondants du système (3.8) peuvent être obtenus simplement en remplaçant l'équation supérieure par le produit scalaire des dérivées d'ordre 1 et 6 du vecteur de position par rapport à l'arc correspondant.

4.1 Groupe équi-affiné

Les transformations équi-affines de coordonnées font intervenir 5 paramètres indépendants et sont de la forme :

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + a \\ y' &= \gamma x + \delta y + b, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \alpha &\beta \\ \gamma &\delta \end{aligned} = 1. \quad (4.1)$$

La vitesse d'accumulation de l'arc équi-affine est calculée comme suit [64] :

$$\sigma'_{ch} = \frac{x' x''}{y' y''}^{1/3} \quad (4.2)$$

Le système (3.7) pour $n = 3$ (cas du modèle minimum-jerk) dans le plan devient [51, 52, 55] :

$$2x''' + y'' = \frac{2}{3} \sigma'^2_{ch} (4x' - 2y') + 2x'x''(5) + 2y'y''(5) \quad (4.3)$$

où la différenciation est mise en œuvre par rapport à l'arc équi-affine

$$\sigma_{ea} = \int_0^t \sigma'_{ea}(\tau) d\tau. \quad (4.4)$$

Le système (4.3) est réécrit dans (4.10) pour le cas où la courbure équi-affine d'une courbe est une fonction connue de l'arc équi-affine. Les résultats pour les solutions candidates (parabole, cercle, spirale logarithmique [55]) sont les suivants :

1. La parabole est paramétrée avec un arc équi-affine, jusqu'à un trans équi-affine ea /formation, comme suit : $x = \sigma_{ea}$, $y = \sigma_{ea}^2$.
2. La classe des paraboles constitue une solution évidente de (4.3) invariant sous des transformations affines arbitraires [52, 55]. Dessiner des paraboles avec une vitesse équi-affine constante minimise la fonctionnelle de coût (3.1) et fournit un coût nul [51].

2. Le cercle est paramétré avec un arc équi-affiné comme suit :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \kappa^{-3/4} \cdot \cos(\sqrt{\kappa \sigma} \sigma) \\ y &= y_0 + \kappa^{-3/4} \cdot \sin(\sqrt{\kappa \sigma} \sigma) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ici $\kappa \sigma$ est une courbure équi-affine [64, 28, 8] (le contexte nécessaire pour le cadre actuel est fourni dans [52]) :

$$\kappa \sigma = x'' y''' - x''' y'' \quad (4.6)$$

La courbure équi-affine est constante positive pour les ellipses incluant des cercles, nulle pour les paraboles et constante négative pour les hyperboles [64]. Le cercle est une solution non invariante sous des transformations équi-affines arbitraires, cependant les cercles sont des solutions invariantes sous des transformations euclidiennes (4.20) (translation et rotation) [52, 55].

3. La spirale logarithmique peut être paramétrée avec un angle polaire :

$$x = \text{const} \cdot \exp(\beta) \cos \theta, \quad y = \text{const} \cdot \exp(\beta) \sin \theta \quad (4.7)$$

Introduction de la paramétrisation avec arc équi-affine de (4.2) et intégration

$$e^{d\sigma/d\theta} = (\text{const}^2 (1 + \beta^2))^{1/3} \cdot 2\beta^{-1/3}$$

résulte en:

$$\sigma(\theta) = \ln 2\beta^3 - \frac{2\beta\sigma}{2} - 1/3 + 1 \cdot (\text{const}^2 (1 + \beta^2))^{1/3}$$

qui peut être substitué dans (4.7) pour impliquer les expressions pour $x(\sigma)$, $y(\sigma)$. Apparemment, (4.7) n'est solution de (4.3) que pour le cas $\beta = \pm 3/\sqrt{7}$ [6, 55].

Les dérivées 1ère et 3ème ordre du vecteur position d'une courbe plane $r(\sigma)$ par rapport à l'arc équi-affine sont parallèles. Le parallélisme suit de l'identité $x = 1$ qui, en particulier, apparaît dans le système (4.3). Apparemment, la courbure équi-affine (4.6) d'une courbe est un facteur d'échelle entre les dérivées 1ère et 3ème ordre du vecteur position :

$$r'''(\sigma) + \kappa(\sigma)r'(\sigma) = 0$$

ce qui implique la possibilité d'exprimer des dérivées d'ordre supérieur du vecteur $r(\sigma)$ en fonction de ses dérivées du 1er et du 2ème ordre lorsque la courbure équi-affine est une fonction connue de longueur équi-affine. En particulier,

$$r^{(6)} = r''(3\kappa''(\sigma) + \kappa^2(\sigma)) + r'(\kappa'''(\sigma) + 4\kappa'(\sigma)\kappa(\sigma)) \quad (6)$$

Par conséquent, la dérivée première de l'équation supérieure du système (4.3) ($r = 0$) peut être réécrite

$$r \cdot r^{(6)} = (r' \cdot r'')(3\kappa''(\sigma) + \kappa^2(\sigma)) + r'^2(\kappa'''(\sigma) + 4\kappa'(\sigma)\kappa(\sigma)) = 0 \quad (4.8)$$

Notant que $r'''' = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma_{ea}} (r')^2$, l'équation (4.8) implique que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma_{ea}} (r')^2 = -r' \frac{2\kappa''(\sigma_{ea}) + 4\kappa'}{3\kappa''(\sigma_{ea}) + \kappa'2(\sigma_{ea})} \quad (4.9)$$

Après intégration (4.9) le système (4.3) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} 2r'(\sigma_{ea}) &= r'x'^2(0) \exp[-2(F(\sigma_{ea}) - F(0))] \\ y'' - x'y' &= 1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

où

$$F(\sigma_{ea}) = \frac{\kappa'' + 4\kappa'}{2(3\kappa'' + \kappa')} d\sigma_{ea}.$$

4.2 Groupe Affine

Les transformations affines de coordonnées font intervenir 6 paramètres indépendants et sont de la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y + a, & y_1 &= \gamma x + \delta y + b, \\ \alpha\beta &= 0, & \delta & \neq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La vitesse d'accumulation d'arc affine est calculée comme suit¹⁰ :

$$\sigma'_{un} = \frac{3\sigma_{ch}^3 \cdot \frac{xd}{dt} \frac{4y}{dt} + 12\sigma_{ch}^3 \cdot \frac{x''}{y'} \frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} - 5 \frac{x'}{y'} \frac{\ddot{x}}{\ddot{y}}^2}{9\sigma_{ch}^6} = \sigma_{ea} \sqrt{\kappa_{ea}}, \quad (4.12)$$

où σ_{ea} est la vitesse équi-affine (4.2) et κ_{ea} est la courbure équi-affine (4.6). Le système (3.7) pour $n = 3$ dans le plan devient

$$r''^2 + yx'' - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y'y(5) = \text{const},$$

$$\frac{3(x'y'' - x''y') \cdot \frac{x'}{y'} \frac{x(4)}{y(4)} + 12(x'y'' - x''y') \cdot \frac{x''}{y'} \frac{x'''}{y'''} - 5 \frac{x'}{y'} \frac{x'''}{y'''}^2}{9(x'y'' - x''y')^2} = 1. \quad (4.13)$$

Ici la différenciation est mise en œuvre par rapport à l'arc affine σ_a . Les résultats pour les solutions candidates (parabole, cercle, spirale logarithmique) sont les suivants :

1. La longueur affine de la parabole est nulle, de même que la longueur équi-affine de la ligne droite est nulle ou la longueur euclidienne d'un point est nulle. Par conséquent, tester si les paraboles sont des solutions du système (4.13) n'a pas de sens. La courbure affine de la parabole n'est pas définie.

¹⁰La formule de la vitesse d'accumulation d'arc affine dans [64] contient une faute d'impression et est donc différente de (4.12).

2. Cercle. Constatant que l'arc affine est la racine carrée intégrée de la courbure équi-affine ($\sigma a = \sqrt{\kappa a}$ [64]) et que la courbure équi-affine d'un cercle $-1/2$ est une constante positive on obtient immédiatement pour un cercle : $\sigma a = \kappa a \sigma a$. En remplaçant dans (4.5) on obtient :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \kappa \frac{-3/4}{\text{ch}} \cdot \cos(\sigma a) \\ y &= y_0 + \kappa \frac{-3/4}{\text{ch}} \cdot \sin(\sigma a) \end{aligned} \quad (4.14)$$

qui est solution du système (4.13). Les cercles constituent des solutions non invariantes sous transformation affine arbitraire. La classe des cercles est invariante sous les transformations euclidiennes et la mise à l'échelle uniforme.

3. Spirale logarithmique. La vitesse d'accumulation de l'arc affine de la spirale arithmétique logarithmique (4.7) par rapport à l'évolution de l'angle polaire est la suivante constante inférieure $d\sigma a/d = \frac{9 + \beta^2}{3}$. Donc sans limitation de généralité $= \frac{3}{9 + \beta^2} \sigma a$. L'expression de la spirale logarithmique (4.7) devient

$$\begin{aligned} x(\sigma a) &= \text{const} \cdot \exp \beta \sqrt{\frac{3}{9 + \beta^2}} \sigma a \cos \sqrt{\frac{3}{9 + \beta^2}} \sigma a \\ y(\sigma a) &= \text{const} \cdot \exp \beta \sqrt{\frac{3}{9 + \beta^2}} \sigma a \sin \sqrt{\frac{3}{9 + \beta^2}} \sigma a \end{aligned} \quad (4.15)$$

La spirale logarithmique satisfait le système (4.13) pour β qui sont des solutions de l'équation : $5 - 5\beta + \beta^3 = 0$ et il existe des solutions réelles $\beta = \pm 5 \pm 2\sqrt{5}$.

4.3 Groupe centre-affiné

Les transformations affines au centre des coordonnées font intervenir 4 paramètres indépendants et sont de la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y \\ y_1 &= \gamma x + \delta y, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0. \quad (4.16)$$

La vitesse d'accumulation d'arc affine au centre est calculée comme suit [64] :

$$\sigma_{\text{centre}} = \frac{\sigma_{\text{ch}}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (4.17)$$

Le système (3.7) pour $n = 3$ dans le plan devient

$$\begin{aligned} 2x''' - y'''' - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y'y(5) &= \text{const} + yx \\ -x''y' &= 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

La différenciation est mise en œuvre par rapport à l'arc affine au centre σa .

Les résultats pour les solutions candidates (parabole, cercle, spirale logarithmique) sont les suivants :

1. Parabole. L'équation (4.17) implique que les coordonnées d'une parabole paramétrée avec une longueur affine au centre, à une transformation affine au centre près, sont : $x(\sigma a) = 1/\text{const} \cdot \exp(\sigma a/\sqrt{2})$, $y(\sigma a) = 1/(2\text{const}^2) \cdot \exp(\sqrt{2}\sigma a)$. Ces expressions ne satisfont pas l'équation supérieure du système (4.18).
2. Cercle. En utilisant la paramétrisation d'un cercle de longueur équi-affine comme dans (4.5), l'équation (4.17) implique, sans limitation de généralité, que pour un cercle la vitesse centre-affine est liée à la vitesse équi-affine comme suit :

$$\sigma'_{\text{centre}} = k \exp^{1/8} \cdot \sigma'_{\text{ch}}.$$

La courbure équi-affine d'un cercle est constante positive. Par conséquent, dessiner un cercle avec une vitesse centre-affine constante équivaut à dessiner un cercle avec une vitesse équi-affine constante. Ainsi le système (4.18) est satisfait pour tout cercle car les cercles satisfont le système d'équations correspondant pour la paramétrisation équi-affine.

3. Spirale logarithmique. Le calcul direct basé sur (4.17) implique que la vitesse d'accumulation de l'arc affine au centre par rapport à la modification de l'angle polaire de (4.7) est la constante suivante $d\sigma a/d = 1 + \beta^2$. Sans limitation de généralité = spirale $\frac{1}{1 + \beta^2} \sigma a$. L'expression du logarithme mic (4.7) devient

$$\begin{aligned} x(\sigma a) &= \text{const} \cdot \exp \beta \frac{1}{1 + \beta^2 \sigma a \cos} & y(\sigma a) &= \text{const} \cdot \exp \beta \frac{1}{1 + \beta^2 \sigma a \sin} \end{aligned} \quad (4.19)$$

La spirale logarithmique satisfait le système (4.18) pour $\beta = \pm 5 \pm 2\sqrt{5}$. Ce sont les mêmes β que dans le cas du groupe affine !

4.4 Groupe euclidien

Les transformations euclidiennes de coordonnées sont 3-paramétriques, elles sont de la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) + a \\ y_1 &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) + b \end{aligned} \quad (4.20)$$

La vitesse d'accumulation de l'arc euclidien qui est une notion standard de vitesse tangentielle dont l'intégrale est égale à la longueur de la trajectoire tracée se calcule comme suit :

$$\sigma'_{\text{UE}} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (4.21)$$

Le système (3.7) pour $n = 3$ dans le plan devient

$$\begin{aligned} 2x'''' + y'''' - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y'y(5) &= \text{const}, \\ 2x' + y'^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

La différenciation est implémentée par rapport à l'arc euclidien σ_{eu} . Les résultats pour les solutions candidates (parabole, cercle, spirale logarithmique) sont les suivants :

1. Parabole. L'équation (4.21) implique que les coordonnées d'une parabole paramétrée avec la longueur euclidienne, jusqu'à la transformation euclidienne, sont dérivées des deux équations suivantes : $\sigma_{eu}(x) = 0,5x\sqrt{x+1} + 0,5\ln(x+\sqrt{x+1})$, $y(x) = x^2/2$. Ces expressions ne satisfont pas le système (4.22) et donc le mouvement à vitesse euclidienne constante le long de la parabole ne minimise pas le jerk. Le même résultat peut également être conclu du fait que la trajectoire de dessin de la parabole à vitesse équi-affine constante (ce qui minimise l'à-coup) est différente de la trajectoire de dessin de la même forme à vitesse euclidienne constante, bien sûr les durées des deux trajectoires sont égaux.
2. Cercle. Le mouvement à vitesse euclidienne constante le long d'un cercle est équivalent au mouvement à vitesse angulaire constante donc il est aussi équivalent au mouvement à vitesse constante équi-affine. Donc le système (4.22) est satisfait pour les cercles.
3. Spirale logarithmique. Le calcul direct basé sur (4.7) et (4.21) implique que la vitesse d'accumulation de la longueur de l'arc euclidien par rapport à la modification de l'angle polaire est l'expression suivante $d\sigma_{eu}/d\theta = 1 + \beta^2 \exp(\beta \theta)$.

Sans limitation de généralité $\theta = \ln \frac{\beta}{1 + \beta^2} \sigma_{eu} / \beta$. L'expression pour la spirale logarithmique (4.7) devient

$$\begin{aligned} x(\sigma_{eu}) &= \text{const} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{1+\beta^2}} \sigma_{eu} \cos \ln \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sigma_{eu} / \beta \\ y(\sigma_{eu}) &= \text{const} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{1+\beta^2}} \sigma_{eu} \sin \ln \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sigma_{eu} / \beta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

1 Spirale logarithmique satisfait le système (4.22) pour $\beta = \pm \sqrt{5}$. Ces valeurs de β sont différentes des valeurs de β dans les cas où des arcs équi-affines, affines ou centrés affines sont accumulés à vitesse constante alors que la fonctionnelle de coût est minimisée.

4.5 Pseudosolutions

J'appelle pseudo-solution une fonction vectorielle qui satisfait l'équation supérieure du système (3.7) mais ne satisfait pas l'équation inférieure du système. Dans

autrement dit la fonction vectorielle ne représente pas une courbe pour un paramétrage géométrique donné. L'exemple 3.2 a démontré une fonction vectorielle qui est une solution en paramétrisation équi-affine et seulement une pseudo-solution dans un ensemble d'autres paramétrisations. Apparemment, il y a plus d'exemples de ce genre. Quand $\beta = \pm 5 \pm 2 \sqrt{5}$ (les mêmes valeurs de β ont été obtenues dans les cas de spirale paramétrée avec des arcs affines ou affines au centre) les deux vecteurs suivants les fonctions:

$$\begin{aligned}x(\sigma) &= \cos(\sigma) \cosh(\beta\sigma) \\ y(\sigma) &= \sin(\sigma) \cosh(\beta\sigma),\end{aligned}$$

(4.24)

$$\begin{aligned}x(\sigma) &= \cos(\sigma) \sinh(\beta\sigma) \\ y(\sigma) &= \sin(\sigma) \sinh(\beta\sigma),\end{aligned}$$

(4.25)

satisfont l'équation supérieure du système (3.7) mais ne représentent pas une courbe paramétré par l'un des éléments mentionnés ci-dessus (équi-affine, affine, affine au centre, paramétrisations euclidiennes).

4.6 Résumé pour les solutions planes connues et quelques pseudo-solutions

Les résultats de la section 4 pour les solutions et pseudo-solutions candidates en 2 les dimensions et l'ordre de régularité de la trajectoire n = 3 sont résumés dans le tableau 2.

Objet	Invariance	Équi-affiné arc	Affiné arc	Euclidien affine au arc	centre arc
Parabole	Affiné	N'importe lequel	Non pertinent	Aucun	Aucun
Cercle	- Euclidien - Mise à l'échelle uniforme	N'importe lequel	N'importe lequel	N'importe lequel	N'importe lequel
Logarithmique - Spirale euclidienne (4.7) "cosh spiral" (4.24) "sinh	- Mise à l'échelle uniforme	Quand $\beta = \pm 3/\sqrt{7} \pm 5 \pm 2\sqrt{5} \pm 5 \pm 2\sqrt{5} \pm 1/\sqrt{5}$	Quand $\beta = \pm 3/\sqrt{7} \pm 5 \pm 2\sqrt{5} \pm 5 \pm 2\sqrt{5} \pm 1/\sqrt{5}$	Quand $\beta = \pm 3/\sqrt{7} \pm 5 \pm 2\sqrt{5} \pm 5 \pm 2\sqrt{5} \pm 1/\sqrt{5}$	—
spiral" (4.25)		Pseudo-solution	Pseudo-solution	Pseudo-solution	Pseudo-solution

Tableau 2 : Solutions connues et deux pseudo-solutions du système (3.7) et (3.8)) dans le plan pour un ordre de régularité de trajectoire n = 3 et des paramétrisations géométriques invariantes dans le groupe affine et trois de ses sous-groupes. Invariance de la classe de courbes et la valeur du paramètre β de la spirale logarithmique sont indiqué.

4.7 Condition suffisante

La condition suffisante (3.9) pour qu'une courbe appartienne à l'ensemble A^* défini en (3.4) est satisfaite pour les paraboles et les cercles. Pour la spirale logarithmique, la condition suffisante n'est satisfaite que pour une partie des valeurs de β du tableau 2, comme démontré dans le tableau 3. Les spirales logarithmiques avec des valeurs de β dans le tableau 3 sont des solutions du problème de minimisation (3.2) avec des conditions aux limites¹¹ (elles peuvent être des solutions du problème des minimisations sans conditions aux limites mais cela n'a pas été prouvé). Différents tests doivent être mis en œuvre pour les spirales logarithmiques avec des valeurs de β ne figurant pas dans le tableau 3 afin d'identifier si elles appartiennent bien à l'ensemble A^* .

n, L

	Équi-affiné arc	Affiner arc	Euclidien affine au centre
β	$3/\sqrt{7}$	$-5 \pm \sqrt{5} - 5 \pm \sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$

Tableau 3 : Spirale logarithmique avec les valeurs de β dans le tableau satisfaisant la condition suffisante (3.9) pour le problème d'optimisation (3.2) avec conditions aux limites.

5 Solutions dans l'espace pour le paramétrage avec Arc équi-affiné 3D

Les transformations équi-affines de coordonnées dans l'espace font intervenir 11 paramètres indépendants et sont de la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a \\ y_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + b \\ z_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + c, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = 1. \quad (5.1)$$

La vitesse d'accumulation de l'arc spatial équi-affine est calculée comme suit [64] :

$$\sigma_{ea3}^2 = \frac{\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{pmatrix}}{1/6} \quad (5.2)$$

Le système (3.7) pour $n = 3$ dans l'espace devient

$$\begin{aligned} 2x''' + y''' - 2x''x(4) - 2y''y(4) - 2z''z(4) + 2x'x(5) + 2y'y(5) + 2z'z(5) &= \text{constante}, \\ \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{pmatrix} &= 1, \end{aligned} \quad (5.3)$$

¹¹Les conditions nécessaires (3.7), (3.8) sont satisfaites par les solutions des deux problèmes : 1) avec conditions aux limites (3.2) et 2) sans conditions aux limites (3.3).

ou, après différenciation des deux membres de l'équation supérieure dans (5.3)

$$x'x''(6) + y'y''(6) + z'z''(6) = 0, \\ \frac{x''}{x'} \frac{y''}{y'} \frac{z''}{z'} = 1. \quad (5.4)$$

La différenciation est mise en œuvre par rapport à l'arc spatial équi-affine

$$\sigma_{ea3} = \int_0^t \sigma'_{ea3}(\tau) d\tau. \quad (5.5)$$

Les deux courbes suivantes sont des solutions connues du système (5.4).

1. La ligne de vis parabolique [52] est paramétrée avec un arc spatial équi-affine, jusqu'à une transformation spatiale équi-affine, comme suit :

$$x = \sigma_{ea3} \\ y = \sigma_{ea3}^2 / 2 \quad z = \sigma_{ea3}^3 / 6. \quad (5.6)$$

De toute évidence, la ligne de vis parabolique est une solution invariante sous des transformations équi-affines spatiales arbitraires. La classe des lignes de vis paraboliques est invariante sous des transformations affines spatiales arbitraires.

2. La ligne de vis elliptique est paramétrée avec un arc spatial équi-affine, jusqu'à une transformation spatiale équi-affinée, comme suit :

$$x = \alpha \cos \alpha - 1/3 \sigma_{ea3} \quad y = \alpha \\ \sin \alpha - 1/3 \sigma_{ea3} \quad z = \alpha \\ -1/3 \sigma_{ea3}. \quad (5.7)$$

Les transformations euclidiennes spatiales et la mise à l'échelle uniforme spatiale des lignes de vis elliptiques constituent également des solutions du système (5.3). Les transformations équi affines arbitraires de la ligne de vis elliptique de la forme (5.7) ne seront pas nécessairement des solutions du système (5.3).

Condition suffisante (3.9) pour le problème d'optimisation aux bornes (3.2) $12+3\sqrt{6} \frac{10}{10}$ est satisfaite pour la ligne en vis parabolique lorsque σ_{ea3} est en dehors de $\frac{12-3\sqrt{6}}{10}$ l'intervalle La ligne en vis elliptique appartient à la classe des solutions du problème d'optimisation avec conditions aux limites car elle satisfait la condition suffisante (3.9).

6 Plus de cas

Certaines solutions pour un certain nombre de cas particuliers de l'équation ont été envisagées ci-dessus : dimension $L = 2, 3$; régularité de trajectoire (d'ordre 3) ; et

paramétrisation en 4 géométries. Tout d'abord, il peut y avoir plus de solutions pour les équations considérées. Deuxièmement, d'autres cas de l'équation, par ex. lorsque l'ordre de régularité de la trajectoire $n = 4$, pourrait posséder à la fois des solutions connues pour $n = 3$ et d'autres solutions. En cas de paramétrisation équi-affine, toutes les paraboles et cercles sont solutions pour le cas $n = 4$, comme dans le cas $n = 3$. Cependant solution de la classe des spirales logarithmiques (avec $\beta = \pm(43 \pm 4\sqrt{97})$) est différente de la spirale logarithmique qui est solution pour le cas $n = 3$ ($\beta = \pm 3/\sqrt{7}$). Considérer des systèmes d'équations sous différentes combinaisons de dimension, d'ordre de régularité de trajectoire et de paramétrisation géométrique pourrait conduire à plus de solutions dont la candidature pour être des primitives de mouvement géométrique peut être analysée plus en détail.

7 Postface

L'idée suivante d'un éminent mathématicien du XXe siècle, Andrey Kolmogorov, a anticipé l'idée de l'existence de primitives de mouvement géométrique [38] : « Si nous nous tournons vers l'activité humaine – consciente, mais ne suivant pas les règles de la logique formelle, c'est-à-dire intuitive ou activité semi-intuitive, par exemple aux réactions motrices, nous découvrirons que la haute perfection et la netteté du mécanisme du mouvement continu reposent sur les mouvements de type géométrique continu ... On peut cependant considérer que ce n'est pas une objection radicale contre les mécanismes discrets. Très probablement, l'intuition des courbes continues dans le cerveau est réalisée sur la base du mécanisme discret ».12

Selon moi, l'idée de Kolmogorov signifie que la représentation des courbes dans le cerveau est basée sur des primitives géométriques qui font partie des « mécanismes discrets ». La manière de représenter les "courbes continues dans le cerveau" qui sont en fait composées de primitives géométriques pourrait aller au-delà de la planification des trajectoires et correspondre également aux processus de perception et à l'imagination géométrique. De plus, je suppose qu'à un certain niveau hiérarchique des processus cognitifs, les "mécanismes discrets" des mouvements complexes et de la parole se croisent. Les observations de la représentation en basse dimension des mouvements de gribouillage des singes avec des primitives paraboliques et la concaténation liée à la récompense des segments paraboliques en trajectoires complexes [53] soutiennent la faisabilité de cette spéculation.

ANNEXES

Une dérivation de la proposition 3.1

La paramétrisation géométrique σ d'une courbe est donnée. La règle $\sigma(t)$ d'accumulation de σ avec le temps le long de la courbe est strictement monotone et différentiable autant de fois que nécessaire. Notant qu'il existe une correspondance biunivoque entre t et σ , pour la fonction $\sigma(t)$ $[0, \Sigma]$ définir une fonction inverse $t = \tau(\sigma)$ $[0, T]$.

12Traduit du russe par FP.

La notation suivante est utilisée:

$$v \equiv v(\sigma) \equiv \frac{d}{dt}\sigma(t) \Big|_{t=\tau(\sigma)} \equiv \sigma'(t) \Big|_{t=\tau(\sigma)}.$$

De plus, la propriété suivante basée sur la règle de la chaîne est utilisée pour une fonction différentiable f :

$$\frac{d}{dt}f(\sigma(t)) = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \equiv v f' \equiv \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \quad (\text{A.1})$$

où prime désigne la différenciation par rapport à σ . Ainsi, par exemple, deux dérivées d'ordre supérieur de σ par rapport au temps seront :

$$w = w(\sigma) \equiv \frac{d^2}{dt^2}\sigma(t) \Big|_{t=\tau(\sigma)} = \frac{d}{dt} [v(\sigma(t))] \Big|_{t=\tau(\sigma)} = v \frac{dv}{d\sigma} \quad (\text{A.2})$$

$$j = j(\sigma) = \sigma(t) \frac{d^3}{dt^3} \Big|_{t=\tau(\sigma)} = v \frac{dw}{d\sigma} = v''v = 2 + vv'.$$

Sans limitation de généralité, d'autres dérivations seront mises en œuvre pour des trajectoires en 2 dimensions. Les dérivations pour les trajectoires en 3 dimensions ou plus sont identiques. Considérons donc $J\sigma(rL, n)$ de (3.1) avec $L = 2$ et utilisons (A.1) pour implémenter le changement de variables :

$$J\sigma(r2, n) = \int_0^J \left(\frac{d nx(\sigma(t))}{dtn} \right)^2 + \left(\frac{d ny(\sigma(t))}{dtn} \right)^2 dt = \quad (\text{A.3})$$

$$\int_0^J \frac{1}{v} \left(\frac{d nx(\sigma(t))}{dtn} \right)^2 + \left(\frac{d ny(\sigma(t))}{dtn} \right)^2 d\sigma =$$

$$\int_0^J \frac{1}{v} \text{Dans}(x', x'', \dots, x^{(n)}; y', y'', \dots, y^{(n)}; v, v', \dots, v^{(n-1)}) d\sigma,$$

où $\ln$ désigne l'expression paramétrée par σ :

$$\text{Dans} \equiv \left(\frac{d nx(\sigma(t))}{dtn} \right)^2 + \left(\frac{d ny(\sigma(t))}{dtn} \right)^2 \Big|_{t=\tau(\sigma)}. \quad (\text{A.4})$$

Par exemple:

Exemple A.1. Dans le cas $n = 3$, on a :

$$J\sigma(r2, 3) = \int_0^J (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) dt = \frac{1}{v} \sum_0 (x''^2 + y''^2) v^6 + 9(x''^2 + y''^2) w^{22v} + (x''^2 + y''^2)_{jj}^2 + 6(x'''x'' + y'''y'') v^4 w + 2(x'''x' + y'''y') v^3 + 6(x''x' + y''y') v w_j d\sigma = \frac{1}{v} \cdot I_3(x', x'', x'''; y', y'', y'''; v, v', v'') d\sigma$$

avec w, j de (A.2).

J'aborde les problèmes d'optimisation (3.2) et (3.3) avec une méthode standard issue du calcul des variations, l'équation d'Euler-Poisson (EP) avec multiplicateur de Lagrange (eg. [23]).

Le multiplicateur de Lagrange (λ) est utilisé pour garantir que la

la vitesse d'accumulation de l'arc est réalisable :

$$\sum_0 \frac{d\sigma}{v} = T.$$

$$\begin{aligned} PE(\ln/v) &= \frac{\partial(\ln/v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \sigma} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial(\ln/v)}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial \sigma^2} + \frac{2j}{d\sigma^2} \frac{\partial(\ln/v)}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial \sigma} - \dots \quad (A.5) \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\sigma^{n-1}} \frac{\partial(\ln/v)}{\partial v^{(n-1)}} + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} = \\ &= v(2n-3)(\dots) + v(2n-4)(\dots) + \dots + v(\dots) \\ &+ v^{2n-2}(\dots) + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} = 0. \quad (A.6) \end{aligned}$$

Toutes les dérivées de v dans les expressions entre parenthèses $(\dots)$ dans (A.6) ont un ordre inférieur à l'ordre de la dérivée de v multipliant les parenthèses. Notez que le terme dans (A.6) v^{2n-2} représente la valeur de la vitesse à la puissance $2n - 2$ et non l'ordre de la dérivée. Donc l'expression

$$v^{2n-2}(\dots) + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v}$$

est la seule partie de (A.6) qui ne contient pas de dérivées de v . Notons un l' expression entre parenthèses multipliée par v afin que l'équation d'Euler-Poisson (A.6) puisse être réécrite comme suit :

$$EP(I) = v(2n-3)(\dots) + v(2n-4)(\dots) + \dots + v(\dots) + v^{2n-2} + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} = 0 \quad (A.7)$$

Maintenant en tant que

Exemple A.2. Considérons le cas du critère du minimum-jerk, c'est-à-dire la régularité d'ordre 3. En utilisant des dérivations identiques aux dérivations utilisées dans

[52], l'équation d'Euler-Poisson correspondant à (A.6) sera la suivante :

$$v''' \cdot (\dots) + v'' \cdot (\dots) + v' \cdot (\dots) + 4 + v \cdot (x''^2 + y''^2 - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y'y(5)) + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} = 0.$$

Ici

$$= x''^2 + y''^2 - 2x''x(4) - 2y''y(4) + 2x'x(5) + 2y'y(5).$$

Le v souhaitable pour la solution optimale est constant, selon (3.4).

Par conséquent, toutes les dérivées de v sont nulles et l'équation d'Euler-Poisson pour le v souhaité se réduit à ce qui suit :

$$v^{2n-2} \mu_n - \frac{\lambda}{2v} = 0.$$

Comme dit plus haut, v , λ sont constants, donc sous l'hypothèse $v = 0$ qui a bien évidemment lieu,

$$\mu_n = \text{const.} \quad (\text{A.8})$$

Proposition A.3.

$$\mu_n = x^{(n)^2} + y^{(n)^2} - 2x^{(n-1)}x^{(n+1)} + y^{(n-1)}y^{(n+1)} + 2x^{(n-2)}x^{(n+2)} + y^{(n-2)}y^{(n+2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2x^{(1)}x^{(2n-1)} + y^{(1)}y^{(2n-1)},$$

ou plus formellement

$$\mu_n = x^{(n)^2} + y^{(n)^2} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j x^{(n-j)}x^{(n+j)} + y^{(n-j)}y^{(n+j)}, \quad (\text{A.9})$$

qui est la version bidimensionnelle de l'équation supérieure du système (3.7).

Preuve. Afin de trouver l'expression de μ_n , implémentez la différentiation dans l'équation d'Euler-Poisson (A.5). Apparemment, l'argument de la fonctionnelle de coût de (A.3),

$$\frac{d n x(\sigma(t))}{d t n}^2 + \frac{d n y(\sigma(t))}{d t n}^2$$

peut être divisé en parties x et y et donc l'argument fonctionnel $\ln$ de l'équation d'Euler-Poisson est également fractionnable :

$$E_n = E_{n, x} + E_{n, y} = \frac{d n x(\sigma(t))}{d t n}^2 + \frac{d n y(\sigma(t))}{d t n}^2 \quad t=\tau(\sigma) \quad (\text{A.10})$$

Le résultat de la différenciation dans la partie x

$$E_{n, x} = \frac{d n x(\sigma(t))}{d t n}^2 \quad t=\tau(\sigma) \quad (\text{A.11})$$

est identique au résultat de la différenciation dans la partie y In, $y = \frac{d nx(\sigma(t))}{dtn} \bigg|_{t=\tau(\sigma)}$ jusqu'au nom de l'argument (x étant remplacé par y).

Donc, sans limitation de généralité, j'implémente la preuve pour la partie x uniquement et j'ai besoin de prouver que

$$\begin{aligned} (E - P) \frac{D_{\text{ans}, x}}{v} &= (E - P) \frac{1}{v} \frac{d nx(\sigma(t))}{dtn} \bigg|_{t=\tau(\sigma)}^2 = \\ &= v^{2n-2} x^{(n)}{}^2 - 2x^{(n-1)} x^{(n+1)} + 2x^{(n-2)} x^{(n+2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2x^{(n-1)} \\ &+ v' (\dots) + v'' (\dots) + \dots + v^{(n)} (\dots) + \lambda x \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} \end{aligned} \quad (A.12)$$

Le résultat pour la partie y étant identique à (A.12) avec un remplacement correct des termes x par les termes y décrits ci-dessus impliquera immédiatement l'égalité (A.9) que je prouve.

Maintenant, l'expression pour $d nx(\sigma(t))/dtn$ sera réécrite et paramétrée avec σ . Les dérivées temporelles de $x(\sigma(t))$ paramétrées par σ sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned} x' \big|_{t=\tau(\sigma)} &= \frac{dx}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \bigg|_{t=\tau(\sigma)} = x' v \\ x'' \big|_{t=\tau(\sigma)} &= v \cdot x' \big|_{t=\tau(\sigma)} = x'' v^2 + x' v' \\ \dots x^{(n)} \big|_{t=\tau(\sigma)} &= v \cdot x^{(n-1)} \big|_{t=\tau(\sigma)} = x^{(n)} v^3 + 3x^{(n-1)} v' v^2 + x^{(n-2)} v'^2 v + x^{(n-1)} v'' v^2 + v (X' v) \end{aligned}$$

On peut montrer par induction que

$$\frac{d nx(\sigma(t))}{dtn} \bigg|_{t=\tau(\sigma)} = v^{n-1} \sum_{k=2}^n \sum_{j=0}^{n-k} x^{(n-k-j)} v^{(j)} v^{(k-j)} + x^{(n)} v^{(n)} \quad (A.13)$$

Les expressions notées $(\dots)$ et multipliées par $v^{(i)} v^{(j)}$ dans (A.13) ne sont pas pertinentes dans nos dérivations en tant que contribution à $\ln x$ sera mis à zéro sous le hypothèse de vitesse constante ($v = \text{const}$).

L'expression (A.13) implique pour la dérivée au carré :

$$\begin{aligned} \frac{d nx(\sigma(t))}{dtk} \bigg|_{t=\tau(\sigma)}^2 &= v^{2n-2} \sum_{k=2}^n \sum_{j=0}^{n-k} x^{(n-k-j)} v^{(j)} v^{(k-j)} + x^{(n)} v^{(n)} \\ &+ \sum_{j=0}^{n-k} v^{(i)} v^{(j)} (\dots) = \sum_{j=0}^{n-k} v^{(i)} v^{(j)} (\dots) \\ &+ v^{2n-2} x^{(n)} v^2 + 2v x^{(n)} v^{(n)} \sum_{k=2}^n \sum_{j=0}^{n-k} x^{(n-k-j)} v^{(j)} v^{(k-j)} \end{aligned} \quad (A.14)$$

Donc pour $\ln, x$ de (A.11)

$$\frac{\text{Dans } x}{v} = v^{2n-1} \cdot x^{(n)}^2 + 2 \cdot v^{2n-2} \cdot x^{(n)} \sum_{k=2}^n x^{(n-(k-1))} v^{(k-1)} + \sum_{j \in \mathbb{N}, j > 0} v^{(j)} \cdot x^{(j)} \quad (\text{A.15})$$

et l'équation d'Euler-Poisson (A.6) pour $\ln, x/v$ sera la suivante :

$$\begin{aligned} (\text{E} - \text{P}) \quad \frac{\text{Dans } x}{v} &= \lambda x \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} + (2n-1)v^{2n-2} x^{(n)}^2 - 2 \frac{n}{2} \cdot \frac{d}{d\sigma} v^{2n-2v} \cdot x^{(n)} \cdot x^{(n-1)} \\ &+ 2 \frac{n}{3} \cdot \frac{d^2}{d\sigma^2} v^{2n-2} x^{(n)} \cdot x^{(n-2)} + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{j^{n-1}}{d\sigma^{n-1}} x^{2n-2} x^{(n)} v \cdot \dots + \sum_{j \in \mathbb{N}, j > 0} v^{(j)} \cdot x^{(j)} = \\ &\sum_{j \in \mathbb{N}, j > 0} v^{(j)} \cdot x^{(j)} + \lambda x \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} + (2n-1)v^{2n-2} x^{(n)}^2 + \\ &\sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{n}{k} \cdot \frac{d^{k-1}}{d\sigma^{k-1}} v^{2n-2v} \cdot x^{(n)} \cdot x^{(n-(k-1))} \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Les valeurs des coefficients binomiaux dans (A.16) forment une tranche de triangle de Pascal sans deux nombres à la frontière. Une propriété du triangle de Pascal que j'introduis ailleurs implique que

$$\begin{aligned} (2n-1)v^{2n-2} x^{(n)}^2 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{n}{k} \cdot \frac{d^{k-1}}{d\sigma^{k-1}} v^{2n-2v} \cdot x^{(n)} \cdot x^{(n-(k-1))} = \\ v^{2n-2v} x^{(n)}^2 - 2x^{(n-1)}x^{(n+1)} + 2x^{(n-2)}x^{(n+2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2x^{(n)}x^{(2n-1)} \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} (\text{E} - \text{P}) \quad \frac{\text{Dans } x}{v} &= \sum_{j \in \mathbb{N}, j > 0} v^{(j)} \cdot x^{(j)} + \lambda x \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} + v^{2n-2} x^{(n)}^2 - 2x^{(n-1)}x^{(n+1)} + \\ &2x^{(n-2)}x^{(n+2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2x^{(n)}x^{(2n-1)}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition A.3 signifiant que la proposition 3.1 est vraie. $\square$

Les références

- [1] Bruno B. Averbeck, David A. Crowe, Matthew V. Chafee et Apostolos P. Georgopoulos, Activité neurale dans le cortex préfrontal lors de la copie de formes géométriques 1. Les cellules individuelles codent la forme, la séquence et les paramètres métriques, *Experimental Brain Research* 150 (2003), no. 2, 127–141.
- [2] ———, Activité neuronale dans le cortex préfrontal lors de la copie de formes géométriques 2. décodage de segments de forme à partir d'ensembles neuronaux, *Experimental Brain Research* 150 (2003), no. 2, 142–153.
- [3] Shay Ben-Itzhak et Amir Karniel, Le critère d'accélération minimale avec contraintes implique le contrôle bang-bang comme principe sous-jacent pour les trajectoires optimales des mouvements d'atteinte des bras, *Neural Computation* 20 (2008), no. 3, 779–812.
- [4] Daniel Bennequin, Ronit Fuchs, Alain Berthoz et Tamar Flash, Moment du mouvement et invariance surgissent de plusieurs géométries, *PLoS Comput Biol* 5 (2009), no. 7.
- [5] Emilio Bizzi, Ferdinando A. Mussa-Ivaldi et Simon Giszter, Calculs sous-jacents à l'exécution du mouvement : une perspective biologique, *Science* 253 (1991), no. 5017, 287-291.
- [6] Ido Bright, Planification du mouvement par l'optimisation, Thèse de maîtrise, Département d'informatique et de mathématiques appliquées, Institut Weizmann des sciences, 2007.
- [7] E Burdet et TE Milner, Quantification des mouvements humains et apprentissage des mouvements précis, *Biol Cybern* 78 (1998), 307 – 318.
- [8] Eugeniu Calabi, Peter J. Olver et Allen Tannenbaum, Géométrie affine, flux de courbes et approximations numériques invariantes, *Adv. en mathématiques*. 124 (1996), 154–196, [www : http://www.math.umn.edu/olver/papers.html](http://www.math.umn.edu/olver/papers.html).
- [9] A Casile, E Dayan, V Caggiano, T Hendler, T Flash et MA Giese, Neuronal encoding of human kinematic invariants during action observation, *Cereb Cortex* 20 (2010), no. 7, 1647–55.
- [10] A d'Avella, A Portone, L Fernandez et F Lacquaniti, Contrôle des mouvements rapides par combinaisons de synergie musculaire, *J Neurosci* 26 (2006), 7791 – 7810 .
- [11] A d'Avella, P Saltiel, et E Bizzi, Combinaisons de synergies musculaires dans la construction d'un comportement moteur naturel, *Nat Neurosci* 6 (2003), 300 – 308.
- [12] Eran Dayan, Antonino Casile, Nava Levit-Binnun, Martin Giese, Talma Hendler et Tamar Flash, Représentations neuronales des lois cinématiques du mouvement : preuves du couplage action-perception, *Proc Natl Acad Sci USA* 104 (2007), 20582 –20587.

- [13] Adam S. Dickey, Yali Amit et Nicholas G. Hatsopoulos, Codage neuronal hétérogène des mouvements correctifs dans le cortex moteur, *Frontiers in Neural Circuits* 7 (2013), article 51.
- [14] Laura Dipietro, Howard Poizner et Hermano I. Krebs, Dynamique spatio-temporelle du traitement de correction motrice en ligne révélée par l'électroencéphalographie à haute densité, *Journal of Cognitive Neuroscience* 26 (2014), no. 9, 196–1980.
- [15] Dominik Endreas, Yaron Meirovitch, Tamar Flash et Martin A. Giese, Segmentation du langage des signes en primitives motrices avec binning bayésien, *Front Comput Neurosci.* 7 (2013), n. 68.
- [16] Pollick FE, Maoz U, Handzel AA, Giblin PJ, Sapiro G et Flash T, Mouvements de bras tridimensionnels à vitesse constante équi-affine, *Cortex* 45 (2009), 325–39.
- [17] A. Fishbach, SA Roy, C. Bastianen, LE Miller et JC Houk, Propriétés cinématiques des corrections d'erreurs en ligne chez le singe, *Experimental Brain Research* 164 (2005), no. 4, 442–457.
- [18] Tamar Flash et Amir A. Handzel, Géométrie différentielle affine des trajectoires du bras humain, *Résumés de la Société des neurosciences* (1996).
- [19] ———, Analyse géométrique différentielle affine des mouvements du bras humain, *Biological Cybernetics* 96 (2007), no. 6, 577–601.
- [20] Tamar Flash et Ealan Henis, Modification de la trajectoire du bras lors de l'atteinte de cibles visuelles, *Journal of Cognitive Neuroscience* 3 (1991), no. 3, 220–230.
- [21] Tamar Flash et Binyamin Hochner, Primitifs moteurs chez les vertébrés et les invertébrés, *Current Opinion in Neurobiology* 15 (2005), 1–7.
- [22] Tamar Flash et Neville Hogan, La coordination des mouvements du bras : un modèle mathématique confirmé expérimentalement, *The Journal of Neuroscience* 5 (1985), no. 7, 1688–1703.
- [23] I. Gelfand et S. Fomin, Calcul des variations, *Dover Books on Mathematics*, 2000.
- [24] Apostolos P. Georgopoulos, John F. Kalaska, Roberto Caminiti et Joe T. Massey, Sur les relations entre la direction des mouvements bidimensionnels du bras et la décharge cellulaire dans le cortex moteur des primates, *The Journal of Neuroscience* 2 (1982), no. 11, 1527–1537.
- [25] S Giszter, V Patil et C Hart, Primitives, premotor drives, and pattern generation: a combination computational and neuroethological perspective, *Prog Brain Res* 165 (2007), 323 – 346.

- [26] [SF Giszter et CB Hart, Primitives motrices et synergies dans la moelle épinière et après une blessure - l'état actuel des choses, Annals of the New York Academy of Sciences \(2013\), 114 - 126.](#)
- [27] [Simon F. Giszter, Ferdinando A. Mussa-Ivaldi et Emilio Bizzi, Champs de force convergents organisés dans la moelle épinière de la grenouille, The Journal of Neuro science 13 \(1993\), no. 2, 467–491.](#)
- [28] [Heinrich W. Guggenheimer, Géométrie différentielle, Douvres, New York, 1977.](#)
- [29] [Amir A. Handzel et Tamar Flash, Méthodes géométriques dans l'étude du contrôle moteur humain, Études cognitives, Bulletin de la Société japonaise des sciences cognitives 6 \(1999\), no. 3, 309–321.](#)
- [30] [Naama Kadmon Harpaz, Tamar Flash et Ilan Dinstein, Encodage de mouvement invariant à l'échelle dans le système moteur humain, Neuron 81 \(2014\), 452–462 .](#)
- [31] [CB Hart et SF Giszter, Commandes prémotrices modulaires et rafales unitaires comme primitives pour les comportements moteurs de la grenouille, journal = J Neurosci, volume = 24, année = 2004, pages = 5269 - 5282 .](#)
- [32] [Nicholas G. Hatsopoulos et Yali Amit, Synthesizing complex movement fragment representations from motor cortical ensembles, J Physiol Paris 106 \(2012\), 112 – 119.](#)
- [33] [Nicholas G. Hatsopoulos, Qingqing Xu et Yali Amit, Codage des fragments de mouvement dans le cortex moteur, J Neuroscience 27 \(2007\), no. 19, 5105-5114 .](#)
- [34] [S. Hocherman et SP Wise, Effets de la trajectoire du mouvement de la main sur l'activité corticale motrice chez les singes rhésus éveillés et se comportant, Experimental Brain Research 83 \(1991\), no. 2, 285–302.](#)
- [35] [N. Hogan, Un principe organisateur pour une classe de mouvements volontaires, J. Neurosci. 83 \(1984\), n. 2, 2745–2754.](#)
- [36] [YP Iavnenko, RE Poppele et F Lacquaniti, Cinq modèles d'activation musculaire de base expliquent l'activité musculaire pendant la locomotion humaine, J. Physiol. 556 \(2004\), 267 - 282.](#)
- [37] [William J. Kargo et Simon F. Giszter, Correction rapide des mouvements visés par sommation des primitives de champ de force, Journal of Neuroscience 20 \(2000\), no. 1, 409–426.](#)
- [38] [Andrey Kolmogorov, Mathématiques – science et profession, Nauka, Moscou, 1988.](#)
- [39] [HI Krebs, ML Aisen, BT Volpe et N. Hogan, Quantification des mouvements continus des bras chez les humains atteints de lésions cérébrales, Actes de l'Académie nationale des sciences des États-Unis 96 \(1999\), no. 8, 4645–4649.](#)

- [40] Francesco Lacquaniti, Carlo Terzuolo et Paolo Viviani, La loi relative
les aspects cinématiques et figuratifs des mouvements de dessin, *Acta Psychologica*
54 (1983), 115–130.
- [41] Nava Levit-Binnun, Edna Schechtman et Tamar Flash, Sur les similitudes entre la
perception et la production de trajectoires elliptiques, *Experimental Brain Research*
172 (2006), no. 4, 533–55.
- [42] Uri Maoz, Alain Berthoz et Tamar Flash, Mouvement de la main tridimensionnel sans contrainte
complexe et vitesse équi-affine constante, *J Neurophysiol*
101 (2009), n. 2, 1002–15.
- [43] Uri Maoz et Tamar Flash, Vitesse et mouvement équi-affines constants spatiaux
perception, *J Neurophysiol* 111 (2014), no. 2, 336–49.
- [44] Daniel W. Moran et Andrew B. Schwartz, Activité corticale motrice pendant les mouvements
de dessin : représentation de la population pendant le traçage en spirale,
Tourillon de neurophysiologie 82 (1999), 2693–2704.
- [45] ———, Représentation de l'activité corticale motrice de la vitesse et de la direction pendant
atteignant, *Journal of Neurophysiology* 82 (1999), 2676–2692.
- [46] P Morasso et FA Mussa Ivaldi, Trajectory formation and handwriting: a
mode de calcul, *Biol Cybern* 45 (1982), 131 – 142.
- [47] FA Mussa-Ivaldi et E Bizzi, Apprentissage moteur par la combinaison de
primitives, *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci* 355 (2000), 1755–1769.
- [48] FA Mussa-Ivaldi et SA Solla, Neural primitives for motion control, *IEEE*
J Ocean Eng 29 (2000), 640 – 650.
- [49] Richard Nichols, Une perspective biomécanique sur les mécanismes spinaux de l'action
musculaire coordonnée : un principe d'architecture, *Acta Anatomia* 151
(1994), 1–13.
- [50] Frank E. Pollick et Guillermo Sapiro, La vitesse affine constante prédit la
Loi de puissance 1/3 de la perception et de la génération du mouvement planaire, *Vision Research*
37 (1997), n. 3, 347–353.
- [51] Felix Polyakov, Analysis of monkey scribbles during learning in the frame work of modelsof
planar hand motion, Department of Computer Science
et mathématiques appliquées, Institut Weizmann des sciences (2001).
- [52] ———, Primitives et invariants de mouvement dans les mouvements de gribouillage du singe :
Analyse et modélisation mathématique de la cinématique du mouvement et des activités
neuronales, Département d'informatique et de mathématiques appliquées, Institut Weizmann
des sciences (2006).
- [53] Felix Polyakov, Rotem Drori, Yoram Ben-Shaul, Moshe Abeles et Tamar
Flash, une représentation compacte des mouvements de dessin avec des séquences de
primitives paraboliques, *PLoS Computational Biology* 5 (2009), no. 7.

- [54] Felix Polyakov, Tamar Flash, Moshe Abeles, Yoram Ben-Shaul, Rotem Drori et Zoltan Nadasdy, Analyse de la planification du mouvement et de l'apprentissage dans les mouvements de gribouillage des singes, Actes de la dixième conférence biennale de la Société internationale de graphonomie. L'Université de Nimègue, Nimègue, Pays-Bas. (2001), 78–83.
- [55] Felix Polyakov, Eran Stark, Rotem Drori, Moshe Abeles et Tamar Flash, Primitives de mouvement parabolique et états corticaux : fusion de l'optimalité avec l'invariance géométrique, *Biological Cybernetics* 100 (2009), no. 2, 159–184.
- [56] [Magnus JE Richardson et Tamar Flash, Comparaison des mouvements de bras lisses avec la loi de puissance des deux tiers et l'hypothèse de contrôle segmenté connexe, *Journal of Neuroscience* 22 \(2002\), no. 18, 82018211.](#)
- [57] [B Rohrer et N Hogan, Éviter les décompositions de sous-mouvements parasites : un algorithme globalement optimal, *Biol Cybern* 89 \(2003\), 190 – 199.](#)
- [58] [_____, Éviter les décompositions de sous-mouvements parasitesii : un algorithme de dispersion, *Biol Cybern* 94 \(2006\), 409 – 414.](#)
- [59] [TD Sanger, Mouvements du bras humain décrits par une superposition à basse dimension des composantes principales, *J Neurosci* 20 \(2000\), 1066 – 1072.](#)
- [60] Andrew B. Schwartz, Représentation corticale directe du dessin, *Science* 265 (1994), 540–542.
- [61] [_____, Activité corticale motrice pendant les mouvements de dessin: représentation de la population pendant le tracé sinusoïdal, *Journal of Neurophysiology* 70 \(juillet 1992\), no. 1, 28–36.](#)
- [62] [Andrew B. Schwartz et Daniel B. Moran, Activité corticale motrice pendant les mouvements de dessin : représentation de la population pendant le traçage des lemniscates, *Journal of Neurophysiology* 82 \(1999\), no. 5, 2705–2718.](#)
- [63] [Maryam M. Shanechi, Rollin C. Hu, Marissa Powers, Gregory W. Wornell, Emery N. Brown et Ziv M. Williams, Neural population partitioning and a concurrent brain-machine interface for sequential motor function, *Nat Neurosci.* 15 \(2012\), n. 2.](#)
- [64] PA Shirokov et AP Shirokov, Géométrie différentielle affine, GIFML, Moscou, 1959, édition allemande : Géométrie différentielle affine, Teubner, 1962.
- [65] [Kurt A. Thoroughman et Reza Shadmehr, Apprentissage de l'action par combinaison adaptative de primitives motrices, *Nature* 407 \(2000\), 742–747, Intéressant.](#)
- [66] [Emanuel Todorov et Michael I. Jordan, La maximisation de la douceur le long d'une trajectoire prédéfinie prédit avec précision les profils de vitesse des mouvements complexes du bras, *Journal of Neurophysiology* 80 \(1998\), no. 2, 696–714.](#)

- [67] [MC Tresch, P Saltiel, et E Bizzi, La construction du mouvement par la moelle épinière, Nat Neurosci 2 \(1999\), 162 – 167.](#)
- [68] [EJ van Zuylen, CC Gielen et JJ van der Gon Denier, Coordination et activation inhomogène des muscles du bras humain pendant les couples isométriques, J Neurophysiol 60 \(1988\), 1523 - 1548.](#)
- [69] [P. Viviani et N. Stucchi, Les mouvements biologiques semblent uniformes : preuves d'interactions motrices-perceptives, Journal of Experimental Psychology : Human Perception and Performance 18 \(1992\), no. 3, 603–623.](#)
- [70] [Paolo Viviani et Tamar Flash, Minimum-jerk, loi de puissance des deux tiers et isochronie : approches convergentes de la planification des mouvements, Journal of Experimental Psychology : Human Perception and Performance 21 \(1995\), no. 1, 233–242.](#)
- [71] [Ido Zelman, Myriam Titon, Yoram Yekutieli, Shlomi Hanassy, Binyamin Hochner et Tamar Flash, Décomposition cinématique et classification des mouvements du bras de la pieuvre, Frontiers in Computational Neuroscience 7 \(2013\).](#)