

Tres problemas en robótica

JM Selig

Escuela de Computación, Sistemas de Información y Matemáticas

Universidad de la orilla sur

Londres SE1 0AA, Reino Unido

Abstracto

Se estudian tres problemas bastante diferentes en robótica utilizando la misma tecnología. El primer problema se refiere a los sistemas de resortes. El nique de la teoría del tornillo. El primer problema se refiere a los sistemas de resortes. El función potencial se deriva en la dirección de un tornillo arbitrario para encontrar la posición de equilibrio. El segundo problema es casi idéntico en términos de cálculos, la solución de mínimos cuadrados al problema de encontrar el movimiento rígido sufrido por un cuerpo dado que solo se buscan datos sobre puntos en el cuerpo. En el tercer problema se encuentra el jacobiano de una plataforma de Stewart. Nuevamente esto se logra diferenciando con respecto a un tornillo. Además, las propiedades de segundo orden de la Se estudian los dos primeros problemas. Se calcula la arpillera de las segundas derivadas y por tanto, las propiedades de estabilidad de las posiciones de equilibrio del sistema de resortes son encontró.

Notación

$\mathbb{R}^n$ Espacio euclidiano n-dimensional.

$\mathbb{RP}^3$ Espacio proyectivo tridimensional.

$SE(3)$ El grupo de movimientos euclidianos propios en 3 dimensiones, es decir, cuerpo rígido
movimientos

$SO(3)$ El grupo de rotaciones en 3 dimensiones.

R Una matriz de rotación de 3×3 .

M Una matriz de 4×4 que representa una transformación rígida, a veces llamada homogene
nueva representación.

a, b Los vectores de posición de los puntos en el espacio tridimensional.

$\tilde{a}, \tilde{b}$ Puntos en un espacio tridimensional representados como puntos en un espacio tetradimensional, en
forma dividida, $\tilde{a}^T = (a^T, 1)$ por ejemplo.

A, B vectores tridimensionales representados como matrices antisimétricas de 3×3 , de modo que $Ax =$
 $a \times x$ para cualquier vector x .

I_3 La matriz identidad 3×3 .

λ Constante de resorte.

Matriz jacobiana J 6×6 .

Matriz de rigidez K 6×6 .

S Matriz de 4×4 que representa un elemento o tornillo del álgebra de Lie.

$W \times 1$ vector que representa una llave inglesa, que es un elemento del espacio vectorial dual a
el álgebra de mentira.

1. Introducción

Cuando Ball escribió su tratado [1] a fines del siglo XIX, Sophus Lie fue escrito
hablando de lo que él llamó 'grupos continuos'. Si Ball supiera del trabajo de Lie, puede que no
ha sido obvio que tenía alguna conexión con la suya ya que Lie estaba interesado en
simetrías de ecuaciones diferenciales. Fue Klein quien más tarde introdujo la idea de que
estos 'grupos de mentiras' podrían considerarse como simetrías geométricas. fue despues de los dos
Ball y Lie habían muerto que la 'teoría de la mentira' comenzó a encontrar su lugar como central para la teoría moderna.
geometría. En particular, el trabajo de Killing y Cartan sobre el álgebra de Lie fue muy interesante.
fluido Para más detalles de la historia de la teoría de Lie ver [2]. En retrospectiva, puede
ser visto que los tornillos finitos de Ball eran simplemente elementos de un grupo de Lie: el grupo de
transformaciones euclidianas propias en $\mathbb{R}^3$. Los giros o motores eran elementos de la
Lie álgebra de este grupo. Estos también se denominan a veces tornillos infinitesimales.
aunque más precisamente los husillos de bolas se pueden identificar con elementos del proyecto
espacio tivo formado a partir del álgebra de Lie. Esas son las líneas a través del origen en la Mentira.
álgebra.
Muchos otros elementos de la teoría de Lie también estaban presentes en la teoría del tornillo de Ball. Pero
tal vez su importancia no se apreció plenamente. Por ejemplo, el producto de mentira o
El soporte de mentira es simplemente el producto cruzado de los tornillos. Para Ball, esto era solo una forma geométrica.
operación, el análogo del producto vectorial de vectores tridimensionales.

Algunos autores se refieren a la teoría de Screw y a los métodos del grupo de Lie como si fueran diferentes enfoques. La opinión de este autor es que no hay distinción entre ellos, tornillo

La teoría es simplemente la especialización de la teoría de Lie al grupo de transformación de cuerpo rígido.

ciones. Sin embargo, el nombre teoría del tornillo sigue siendo útil. Como abreviatura descriptiva y

también es un recordatorio de que fue Ball quien elaboró casi toda la teoría antes de Lie

¡Se inventaron los grupos!

Gran parte de la robótica se ocupa de los movimientos rígidos. En cinemática y dinámica.

Se estudian los movimientos rígidos tanto de la carga útil como de los eslabones del robot. en robot

visión un problema común es recuperar el movimiento rígido experimentado por la cámara

de las imágenes que ha tomado. Por lo tanto, el grupo de movimientos de cuerpo rígido es un objeto central

en robótica. Hasta la fecha, la teoría del tornillo se ha utilizado mucho en la cinemática de robots, donde fue

introducido por la comunidad de mecanismos. Se empieza a utilizar en la dinámica

y control de robots, pero de ninguna manera es el método de primera elección en estas áreas. En

robot vision estas técnicas son poco conocidas. Uno de los objetivos de este trabajo es

demonstrar que estos métodos tienen una aplicabilidad universal a problemas en robótica

y mostrar que una amplia variedad de problemas en robótica comparten un tema subyacente.

Este trabajo utiliza el hecho de que un grupo de Lie es una variedad diferencial. Para minimizar un

función suave en tal espacio no se necesita la maquinaria de los multiplicadores de Lagrange.

Es posible trabajar directamente sobre lo múltiple, no es necesario pensar en el grupo como

incrustado en el espacio cartesiano, como implicaría el uso de multiplicadores de Lagrange.

La diferenciación a lo largo de campos de vectores tangentes se puede usar para encontrar ecuaciones para un

puntos estacionarios de una función. Los campos vectoriales más convenientes para usar son los de la izquierda.

campos invariantes en el grupo. Estos son simplemente elementos del álgebra de Lie del grupo,

Figura 1: Un cuerpo rígido suspendido por un sistema de resortes

los giros o tornillos. Por lo tanto, esta técnica podría considerarse como "diferenciar a lo largo un tornillo".

2 resortes

Considere un cuerpo rígido soportado por un sistema de resortes, vea la figura 1. Suponga además que los resortes tienen longitud natural 0, obedecen la ley de Hooke y pueden tanto empujar como tirar. Las constantes elásticas λ_i de los resortes pueden ser diferentes. Aquí se ignorará la gravedad por simplicidad. Sin embargo, no es difícil ver cómo se podría incorporar de una manera más modelo sofisticado, ya sea modificando la función potencial que se deriva a continuación o cambiando las ecuaciones de equilibrio para incluir la torsión debida a la gravedad.

Sea $\mathbf{a}_i^T = (\mathbf{u}_i^T, 1)$ ser los puntos donde los resortes se unen al suelo o marco, y $\mathbf{b}_i^T = (\mathbf{b}_i^T, 1)$ los puntos de fijación correspondientes en el cuerpo rígido cuando el cuerpo está en alguna configuración estándar de 'casa'. Si el cuerpo sufre una rigidez movimiento al que se moverán los puntos de unión,

$$\mathbf{b}_{yo}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{b}_i^T,$$

que se abreviará como $\mathbf{b}_i^T = \mathbf{M} \mathbf{B}_i^T$. La primera pregunta que se puede hacer al respecto

situación es: ¿Existe una configuración de equilibrio para el cuerpo rígido?

El problema es minimizar la energía potencial del sistema de resortes, esto se da

por la siguiente función,

$$\Phi = \frac{1}{2} - \sum_i \lambda_i \tilde{a}_i - M \tilde{b}_i^T \tilde{a}_i - M \tilde{b}_i.$$

Nótese que esta función está definida sobre el grupo $SE(3)$, es decir $\Phi : SE(3) \rightarrow \mathbb{R}$, como M

varía sobre los diferentes valores del grupo del resultado potencial.

Si esto fuera solo una función en $\mathbb{R}^n$ los puntos estacionarios se encontrarían calculando

las derivadas parciales y luego ponerlas a cero. El método estándar de abordar

este problema sería minimizar los elementos de la matriz utilizando multiplicadores de Lagrange para

tenga en cuenta la restricción de que la matriz debe ser un elemento de grupo.

Sin embargo, el método más simple para funciones sin restricciones se puede imitar usando

alguna teoría múltiple. Para encontrar los puntos estacionarios de una función definida en una variedad

la función debe diferenciarse a lo largo de campos vectoriales en la variedad. como de costumbre el

Los resultados se establecen en cero y luego se resuelven las ecuaciones resultantes para encontrar los puntos estacionarios.

Para que esto funcione, un conjunto de campos vectoriales que abarcan el espacio de todos los campos vectoriales en el

se requiere múltiple.

Como la variedad en consideración es la variedad subyacente de un grupo de Lie,

un conjunto tan completo de campos vectoriales siempre está disponible. Los elementos del álgebra de Lie

se pueden utilizar campos vectoriales invariantes a la izquierda.

Para derivar a lo largo de un campo vectorial el valor de la función en dos puntos es com

recortada, la posición actual y una posición a poca distancia a lo largo de un camino tangente a la

campo vectorial, entonces el límite de la diferencia entre los valores de la función en estos

los puntos vecinos se toman a medida que el camino se hace más y más corto.

Dejar:

$$S = \begin{pmatrix} \Omega v & \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sea un elemento de álgebra de Lie o tornillo dado en la representación 4×4 . Aquí Ω es un 3×3 matriz antisimétrica correspondiente a un vector ω , es decir $\Omega x = \omega \times x$ para cualquier vector x .

Si M es un elemento de grupo escrito en la representación 4×4 , entonces la acción de S en M , viene dada por la traslación a la izquierda,

$$M(t) = m^{\dagger} S M.$$

Esto lleva a M a lo largo de un camino tangente al campo vectorial definido por S . Tomando la derivada a lo largo del camino y luego establecer $t = 0$ da,

$$\partial S M = S M.$$

Por lo tanto, la derivada del potencial está dada por,

$$\partial S \Phi = -\sum_i \lambda_i \tilde{a}_i - M b_i^T S M b_i^T.$$

Para el equilibrio, esto debe desaparecer para S arbitrario. Por lo tanto, S debe separarse, por lo que considerar el término,

$$S M b_i^T = \begin{pmatrix} \omega \times (R b_i + t) + v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R B_i R^T - t I_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix},$$

donde I_3 es la matriz identidad 3×3 y B_i es la matriz antisimétrica correspondiente a b_i .

Sustituyendo esto en la ecuación de equilibrio y usando el hecho de que S y por lo tanto ω y v son arbitrarios, se obtiene el siguiente resultado,

$$\sum_i \lambda_i \tilde{a}_i - M b_i^T \begin{pmatrix} -R B_i R^T - t I_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Después de un poco de manipulación, esta ecuación matricial produce 2 ecuaciones vectoriales,

$$\sum_i \lambda_i a_i \times (a_i - R b_i - t) = 0 \quad (1)$$

y

$$\sum_i \lambda_i (a_i - R b_i - t) = 0 \quad (2)$$

Si los pesos λ_i son todos iguales, entonces la ecuación 2 dice que la transformación óptima

asigna los centroides de los puntos a a los puntos b . Otra forma de decir esto es que en

una configuración de equilibrio los centroides de los dos conjuntos de puntos deben coincidir. A

proceder, elegir el origen de coordenadas para que el centroide de los puntos b se encuentra en el

origen, $\sum_i \lambda_i b_i = 0$. El vector de traslación ahora viene dado por la ecuación (2) como,

$$t = \frac{\sum_i \lambda_i a_i}{\sum_i \lambda_i}.$$

En la forma anterior, la ecuación (1) no es muy fácil de manejar, una forma más manejable es

la representación 3×3 . Un pequeño cálculo confirma que la matriz antisimétrica

correspondiente a un producto vectorial $p \times q$, está dada por $qp^T - pq^T$. Por lo tanto en esta forma el

la ecuación se convierte en,

$$\sum_i \lambda_i R b_i a_i^T - a_i b_i^T R^T = 0,$$

donde se ha utilizado el resultado de que $t = \sum_i \lambda_i a_i / \sum_i \lambda_i$. Ahora, escribiendo, $P = \sum_i \lambda_i a_i a_i^T$, esto

la ecuación se convierte en;

$$R P T = P R^T \quad (3)$$

Esto demuestra que la matriz $P R T$ es simétrica. Entonces, sea $P R T = Q$ donde Q es sym

métrico, entonces,

$$P = Q R.$$

Esto descompone la matriz P como el producto de una matriz simétrica con un

uno ortogonal. Esta es esencialmente la descomposición polar de la matriz. Aviso

que la descomposición polar $P = RQ'$ también satisface la ecuación, la matriz de rotación R

aquí es lo mismo que arriba pero la matriz simétrica $Q' = R TQR$ es simplemente congruente

a la matriz simétrica original. Entonces, en lo que respecta a la solución para R , hay

No hay diferencia entre estas soluciones. De hecho, la descomposición polar de una matriz

la divide en una matriz ortogonal y una matriz simétrica no negativa. Aquí un adecuado

Se requiere una matriz ortogonal y una simétrica. Si la matriz ortogonal de la

la descomposición polar de P es un reflejo y luego multiplicar por -1 da una rotación. Más

los detalles sobre la descomposición polar de una matriz se pueden encontrar en [3], por ejemplo.

La descomposición polar da una solución, pero esta solución no es única. Dejar

$P = QR_p$ sea la descomposición polar de P , ahora sustituya esto en la ecuación (3),

$$T R R^T P Q = Q R_p R^T.$$

Escribiendo $R_i = R R^T$ la ecuación se convierte en,

$$R_i Q R_i = Q.$$

Suponga que v está en la dirección del eje de rotación de R_i , de modo que $R_i v = v$, postmul

tiplying la ecuación anterior por v da,

$$R_i Q v = Q v.$$

Por lo tanto, $Q v$ se encuentra a lo largo del eje de R_i y, por lo tanto,

$$Q v = \mu v,$$

para alguna μ constante. Cualquier solución para la rotación R_i debe tener su eje de rotación alineado con un vector propio de Q .

Los posibles ángulos de rotación se pueden encontrar considerando la acción sobre el eigen vectores de Q , utilizando el hecho de que los vectores propios de una matriz simétrica son mutuamente ortogonal. Si la matriz P no es singular entonces es bien sabido que la polar de la composición es única. Si los valores propios de Q son todos diferentes y también tienen diferentes magnitudes entonces los únicos ángulos posibles son 0 y π . Esto da cuatro soluciones en total, $R_i = I_3$ es la solución que se encuentra arriba, es decir, R es simplemente la rotación de la polar de composición. Las otras tres soluciones para R_i son rotaciones de π radianes sobre los tres vectores propios de Q . Así que en total hay cuatro soluciones para la rotación $R = R_P R_i$. En cada caso R_P es la rotación de la descomposición polar de P y R_i son como arriba, las rotaciones de π sobre el vector propio i -ésimo de Q , con la cuarta solución dada por $R_0 = I_3$. Aviso que las cuatro rotaciones forman un subgrupo discreto del grupo de rotaciones, este subgrupo es el bien conocido grupo de cuatro de Klein $Z_2 \times Z_2$.

Si alguna de las condiciones anteriores se rompe, P es singular, dos de los valores propios de Q son iguales, o un par de valores propios suman cero, entonces hay más soluciones. Para ejemplo, si un par de valores propios de Q suman cero, entonces cualquier rotación sobre el resto El vector propio satisfará la ecuación para R_i .

El hecho de que, en el caso general, cuatro puntos estacionarios de la energía potencial función se han encontrado no es sorprendente. La teoría de Morse estudia la relación entre las variedades y los puntos críticos de las funciones definidas en ellas, véase [4]. El puntos críticos, o puntos estacionarios aquí, corresponden a células en una descomposición celular ción de la variedad. La multiplicidad en cuestión aquí es la multiplicidad subyacente de la

grupo de rotación $SO(3)$, se sabe que es un espacio proyectivo tridimensional, RP^3 . El descomposición celular mínima de RP^3 tiene cuatro celdas, con dimensiones 0, 1, 2 y 3 véase [5, pág. 105]. Por lo tanto, una función general en $SO(3)$ tendrá un mínimo de 4 críticos puntos. Además, el índice de los puntos críticos, el número de valores propios negativos de su matriz hessiana, da la dimensión de la celda correspondiente. Así, sin ningún cálculos posteriores, se sabrá que los cuatro puntos críticos comprenden un máximo local mamá, un local mínimo y dos tipos de puntos de silla. El problema de encontrar cuál La solución es el mínimo se abordará más adelante.

Lo anterior muestra que en general, es decir cuando la matriz P es no singular, la El sistema de resorte de la figura 1 tiene una posición de equilibrio estable única. Además, el sistema tem tendrá tres posiciones de equilibrio inestables. Este resultado no depende de la número o disposición de los resortes siempre que $\det(P) \neq 0$.

3 Movimiento rígido a partir de datos puntuales

Considere un sistema de visión o un sistema de búsqueda de rango, que puede medir la ubicación de puntos en 3 dimensiones. Imagine que un cuerpo rígido tiene un número de puntos con conocidos posición. El cuerpo está sujeto a un movimiento rígido desconocido y las posiciones de los se miden los puntos. Estas medidas contendrán errores y la pregunta a ser abordado aquí es: ¿Cómo se puede estimar el movimiento rígido experimentado por el cuerpo?

Sean las posiciones de los puntos conocidos $\tilde{b}_i$ y los puntos medidos correspondientes $\tilde{a}_i$.

Escriba la transformación rígida desconocida como M , luego la función,

$$\Phi = \sum_i \|\tilde{a}_i - M\tilde{b}_i\|^2$$

representa la suma de los cuadrados de las diferencias entre los puntos medidos y sus posiciones ideales (sin ruido). Elegir M para minimizar esta función da un 'menos estimación de cuadrados para la transformación rígida. Esta función es casi idéntica a la función de energía potencial estudiada en la sección anterior, las únicas diferencias son un factor global de la mitad y que todos los λ 's se han puesto a 1.

La historia de este problema es muy interesante. El problema de encontrar la rotación es claramente la parte interesante y fue resuelto por primera vez por MacKenzie en 1957 [6]. Él se encontró con este problema en el contexto de la cristalografía. En 1966 Wahba encontró el mismo problema al estudiar la orientación de los satélites artificiales, [7]. En 1976 Morán re-resolvió el problema usando cuaterniones, [8]. La motivación aquí vino de la geología, en particular el movimiento de las placas tectónicas. En el contexto de la fabricación, Nadas encontró y volvió a resolver el problema en 1978, [9]. Aquí la aplicación fue para el fabricante de sustratos cerámicos para chips de silicio. En la comunidad de visión robótica el problema suele atribuirse a Horn [10]; por ejemplo, véase [11, cap. 5].

La solución dada arriba es, quizás, un poco más simple que los argumentos estándar que implican una minimización restringida, siendo las restricciones utilizadas para expresar el hecho de que las matrices deben estar en el grupo.

Las soluciones estándar no siempre han sido en términos de descomposición polar. De hecho (al menos), son posibles otras dos descripciones de la solución.

Para calcular la descomposición polar de una matriz, textos sobre análisis numérico recomiendan comenzar con la descomposición en valores singulares de la matriz, ver para el examen [12]. Por lo tanto, no es una verdadera sorpresa que la solución a nuestro problema se pueda obtener directamente de una descomposición en valores singulares.

Recuerde, de la sección anterior que $R^T P T = P R^T$, debe resolverse para la rotación

matriz R , donde $P = \sum_i \lambda_i a_i a_i^T$. Además, recuerda que,

$$P = Q R P,$$

donde Q era simétrico. Por lo tanto, Q se puede diagonalizar como $Q = U D U^T$ con U ortog

onal y D diagonal. Ahora escribe,

$$P = U D U^T R P = U D V^T,$$

donde $V = U^T R$ sigue siendo ortogonal. Esta es simplemente la descomposición en valores singulares de

P . Para decirlo de otra manera, supongamos que la descomposición en valores singulares de P es $P = U D V^T$

entonces las cuatro soluciones son $R = U V^T U^T$.

Otra forma para la solución se puede derivar de la siguiente manera, comience con el polar de composición de P ,

$$P = Q R P,$$

donde Q es una matriz simétrica. Posmultiplicar esta ecuación por su transpuesta da,

$$P P^T = Q^2. \text{ Finalmente sustituyendo por } Q \text{ se obtiene,}$$

$$R = (P P^T)^{-1/2} P R^T.$$

Hay varias raíces cuadradas diferentes de la matriz $(P P^T)$ que podrían tomarse aquí,

la elección está limitada por el requisito de que el determinante de R debe ser 1. Esto

significa que se debe tomar la única raíz cuadrada positiva, ver [3, p. 405].

Finalmente, consideremos aquí el determinante de la matriz P . Un resultado clásico nos dice que la descomposición polar de una matriz P es única si P no es singular, véase [3, pág. 413]

Por ejemplo. La descomposición polar clásica, descompone la matriz P en una o

matriz togonal y matriz simétrica semidefinida positiva. Aquí una ortogonal propia

Se necesita una matriz y una matriz simétrica (no necesariamente semidefinida positiva), esta

no afecta la unicidad de la solución.

Por tanto, es necesario investigar el determinante de la matriz P definida anteriormente. A

Simplifique la discusión, suponga que todas las rigideces de los resortes λ_i se han establecido en 1.

Cuando hay menos de tres resortes o pares de puntos, el determinante siempre es

singular. Para tres pares de puntos, un cálculo directo revela,

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^T = (a_1 a_2 a_3)(b_1 b_2 b_3),$$

aquí el triple producto escalar se ha escrito como, $a \cdot (b \times c) = (abc)$.

Generalizando esto a n pares de puntos da,

$$\det(P) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (a_i a_j a_k)(b_i b_j b_k).$$

Ciertamente esto es singular si todos los puntos a o todos los puntos b están en un plano a través de la

origen.

4 Matriz jacobiana para plataformas de Stewart

Considere una plataforma general de Stewart. Este manipulador tiene seis patas conectadas a la par.

alelo Cada pata consta de un actuador hidráulico entre un par de esféricos pasivos

articulaciones Las seis patas conectan la base o suelo a una plataforma móvil. Al ajustar el

longitudes de las seis patas utilizando los actuadores hidráulicos se puede maniobrar la plataforma

con seis grados de libertad. Ver figura 2.

Figura 2: Una plataforma general Stewart

Para los manipuladores paralelos, la cinemática inversa es sencilla, mientras que la cinemática directa es difícil. Suponga que la posición y la orientación del se da la plataforma, las longitudes de las piernas son fáciles de encontrar. Sea a_i la posición del centro de la junta esférica en el suelo perteneciente a la i -ésima pata. En la configuración de casa la posición correspondiente del centro de articulación en la plataforma será, b_i . Así que ahora el la longitud del i -ésimo cateto, o más bien su cuadrado, se puede escribir,

$$l_i^2 = \|a_i - Mb_i\|^2 \quad i = 1, \dots, 6.$$

Como siempre, M es una transformación rígida, esta vez el movimiento que toma la plataforma de inicio a la posición actual. Observe que las longitudes de las piernas se pueden considerar como funciones en el grupo, sin embargo, es más común pensar en estos como componentes de un mapeo del grupo al espacio de longitudes de piernas, $SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^6$. Un punto en $\mathbb{R}^6$ se da en coordenadas como $(l_1, l_2, \dots, l_6)$. Es el jacobiano de este mapeo lo que se busca. Hacer esto se toma la derivada de las longitudes de las piernas,

$$\frac{dl_i}{dt} = 2l_i \dot{l}_i = -2 a_i^T b_i \dot{M}^T S b_i$$

Reorganizar esto da,

$$\dot{l}_i = \frac{1}{l_i} b_i^T - a_i^T \dot{M}^T S b_i = \frac{1}{l_i} (a_i \times b_i)^T \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix}$$

Esto da la tasa conjunta de cada pierna como una función lineal del tornillo de velocidad de la

plataforma. La jacobiana J es la matriz que satisface la fórmula,

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_6 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}.$$

Entonces se puede ver que las filas de esta matriz jacobiana son simplemente,

$$\frac{1}{l_i} (a_i \times b_i)^T, (b_i - a_i)^T, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Esta es la llave dada por una fuerza unitaria dirigida a lo largo de la i -ésima pata.

Considere un sistema de resortes como en la sección 2. Suponga que solo hay seis resortes.

Ahora se puede demostrar que el jacobiano asociado con la posición de equilibrio es singular. Para ver esto, considere las ecuaciones (1) y (2), que definen la posición de equilibrio, arreglar las cosas de modo que la posición de equilibrio sea la posición de referencia y, por lo tanto,

$R = I_3$ y $t = 0$ entonces las ecuaciones se convierten en,

$$\sum_i l_i a_i \times b_i = 0,$$

y

$$\sum_i l_i (a_i - b_i) = 0.$$

En términos del jacobiano para una plataforma de Stewart correspondiente, es decir, una cuya pierna longitudes corresponden a las longitudes de los resortes, se puede ver que las filas de los jacobianos son linealmente dependientes y, por lo tanto, la matriz es singular.

El problema de cinemática directa para una plataforma Stewart es determinar la posición y orientación de la plataforma dadas las longitudes de las piernas. Es bien sabido que, para un determinado conjunto de longitudes de pierna hay un número finito de soluciones diferentes, en general 40. Difieren Las soluciones ent se denominan diferentes poses o posturas de la plataforma. reemplazando

las piernas con resortes es claro que la función potencial tendrá el mismo valor en cada una de estas poses o posturas ya que la función solo depende de las longitudes de las muelles. Sin embargo, ninguna de estas posiciones será mínimos de la función potencial ya que, como se ha mostrado anteriormente, la posición de equilibrio estable es única.

5 La matriz de rigidez

Los problemas presentados en las últimas tres secciones son bien conocidos y han sido resueltos por muchos métodos diferentes. La ventaja de los métodos de la teoría del tornillo estudiados aquí es que es relativamente fácil estudiar derivadas superiores.

Primero tenga en cuenta que es posible encontrar la llave debido a los resortes. En general un llave es un vector de 6 dimensiones de fuerzas y pares,

$$W = \begin{pmatrix} \tau \\ F \end{pmatrix},$$

donde τ es un momento con respecto al origen y F es una fuerza. Tenga en cuenta que las llaves no son Elementos del álgebra de mentira pero elementos del espacio vectorial dual al álgebra de mentira. Generalmente la fuerza debida a un potencial viene dada por su gradiente. Lo mismo es cierto aquí, en términos de la derivada exterior d , $W = -d\Phi$. Emparejamiento de la llave con un tornillo arbitrario S da,

$$W(S) = -d\Phi(S) = -\partial S\Phi,$$

ver [13, §. 4.20] por ejemplo. Estos cálculos ya se han hecho en el apartado 2 arriba, la llave está dada por,

$$W = \frac{\sum_i \lambda_i a_i \times (a_i - R b_i - t)}{\sum_i \lambda_i (a_i - R b_i - t)},$$

esto, por supuesto, también podría haberse deducido de la mecánica elemental.

Para los sistemas de resortes de la sección 2, un objeto importante es la matriz de rigidez del sistema. En esta sección, la matriz de rigidez se calcula tomando las segundas derivadas de la función potencial.

Un desplazamiento infinitesimal del cuerpo está representado por un tornillo. la llave inglesa producido por un desplazamiento s viene dado por $W = Ks$, donde K es la matriz de rigidez.

La matriz de rigidez es la hessiana de la función potencial, es decir, su matriz de Derivadas parciales de segundo orden, ver [14, Capítulo 5]. Esto sólo es válido en un equilibrio posición.

Ha habido intentos en la literatura de robótica para extender estas ideas a no configuraciones de equilibrio, ver por ejemplo Griffis y Duffy [15] y Zefran y Kumar [16]. En este trabajo, sin embargo, la definición clásica de la matriz de rigidez será ser usado.

Ahora escribe el resultado anterior para la llave inglesa como

$$W = \sum_i \lambda_i \begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ \tilde{b}_i \end{bmatrix} - M \tilde{b}_i^T \tilde{y}_0$$

Diferenciar esto a lo largo de un tornillo arbitrario da ,

$$\partial SO = \sum_i \lambda_i \begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R B_i R^T + T & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix},$$

usando el resultado de la sección 2. Por lo tanto, la matriz de rigidez es,

$$K = \sum_i \lambda_i (A_i R B_i R^T + A_i T) \sum_i \lambda_i A_i \\ \sum_i \lambda_i (R B_i R^T + T) \sum_i \lambda_i I_3$$

Esta vez elige que el origen esté en el punto $\sum_i \lambda_i a_i$ y luego usa el equilibrio

condición 2 para simplificar la matriz de rigidez a,

$$K = \begin{pmatrix} \sum_i \lambda_i A_i R_i B_i R_i^T & 0 \\ 0 & \sum_i \lambda_i I_3 \end{pmatrix}.$$

Este es un resultado particularmente bueno, pero es un poco sorprendente a primera vista. El término $\sum_i \lambda_i I_3$ en la esquina inferior derecha significa que el sistema tiene la misma rigidez en cualquier dirección, independientemente de la rigidez de los resortes individuales y su disposición.

Esto se debe a la suposición de que los manantiales tienen una longitud natural cero.

A continuación se revisa el problema de encontrar el índice de los puntos críticos encontrados. Para brevedad sólo la pregunta, cuál de los puntos críticos es un mínimo del potencial energía, es decir, se considerará un equilibrio estable. Es decir: ¿cuál de las soluciones para R da una matriz de rigidez K con todos los valores propios positivos? Note que tres de los valores propios de K son simplemente $\sum_i \lambda_i$, y esto es positivo si las constantes de resorte λ_i son todas positivas. Entonces, solo es necesario estudiar los valores propios del bloque superior izquierdo de K . Después de un poco de manipulación, esto se puede escribir en términos de la matriz P o su polar descomposición,

$$\sum_i \lambda_i A_i R_i B_i R_i^T = R P T + \text{Tr}(R P T) I_3 = R_i Q + \text{Tr}(R_i Q) I_3.$$

Aquí $\text{Tr}()$ representa la traza de la matriz. Ahora esta matriz tiene los mismos vectores propios como $R_i Q$ y por lo tanto como Q , recordando que R_i era la identidad o una rotación de π sobre un vector propio de Q . Supongamos que los valores propios de Q son μ_1 , μ_2 y μ_3 con los vectores propios correspondientes e_1 , e_2 y e_3 . Suponiendo que R_i es una rotación sobre vector propio e_i , los valores propios de las matrices se pueden encontrar considerando la acción

en los vectores propios e_1 , e_2 y e_3 . Los valores propios para $R_0Q + \text{Tr}(R_0Q)I/3$ son,

$$(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3), \quad (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3), \text{ y } (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3).$$

Solo se necesita considerar otra matriz ya que las otras son solo permutas cíclicas

ciones, los valores propios de $R_1Q + \text{Tr}(R_1Q)I/3$ son,

$$(2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3), \quad (\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3), \text{ y } (\mu_1 - \mu_2 - 2\mu_3).$$

Ahora solo hay dos casos a considerar, si $\det(P) > 0$ entonces Q es positivo-definido

y así también lo son todos sus valores propios. En este caso es fácil ver que el punto crítico

representado por R_0 será el mínimo. Esta es la solución $R = R_p$.

En el otro caso $\det(P) < 0$, la descomposición polar clásica nos da un positivo

matriz simétrica definida y una reflexión. Multiplicando estos por -1 da una rotación

y una matriz simétrica definida negativa. Es decir, Q tiene todos los valores propios negativos. Como

suponga que estos valores propios tienen el orden $0 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$, es decir, μ_1 es el valor propio

valor de menor magnitud, entonces la matriz, $R_1Q + \text{Tr}(R_1Q)I/3$ tendrá todos los positivos

valores propios y, por lo tanto, R_1 corresponde al mínimo del potencial. Entonces, en general,

si $\det(P) < 0$ la solución mínima viene dada por $R = R_p R_i$, donde R_i es una rotación de π

sobre el vector propio de Q con valor propio de menor magnitud.

6. Conclusiones

El concepto que unifica los tres problemas estudiados en este trabajo es la idea de funciones

definido en el grupo de transformaciones de cuerpo rígido. Ha sido posible encontrar la

puntos estacionarios de las funciones y clasificar estos puntos críticos. Esto implica un

técnica sencilla de diferenciación a lo largo de un tornillo.

Los resultados concuerdan con los de Kanatani [11, Cap. 5], sus métodos fueron, quizás, un poco más elegante que el anterior. Los métodos usados aquí son más generales, todos los se han encontrado puntos críticos de la función potencial, no sólo el mínimo y con un poco más de esfuerzo se podría haber encontrado el índice de cada uno de ellos.

Estas ideas son fundamentales para el tema de la teoría de Morse, un campo de estudio que relaciona los puntos críticos de las funciones definidas en una variedad a la topología de la variedad sí mismo. En este caso, la topología de la variedad, la variedad subyacente del grupo $SO(3)$, es bien conocido, y esto puede usarse para decir algo sobre el punto crítico de la función potencial.

El problema de los manantiales es un poco artificial en el sentido de que manantiales con cero natural. Se ha utilizado la longitud ural. Esto simplifica los cálculos. Es posible repetir la mayor parte del análisis anterior utiliza resortes con una longitud natural finita, ver [17]. el número de puntos críticos ahora se convierte en un problema muy difícil, pero aún estará limitado por la topología del grupo.

El problema de estimar un movimiento rígido a partir de datos puntuales es razonablemente realista. La utilidad de la estimación dependerá de la distribución de errores para los valores medidos. puntos. Hay algunos resultados sobre esto en la literatura, ver [18]. Parece ser mucho margen para futuras investigaciones en esta dirección.

Sólo ha habido espacio aquí para echar un breve vistazo a las implicaciones para el plataforma Stewart. Ciertamente usando la técnica de diferenciar a lo largo de un tornillo el podrían calcularse las propiedades de aceleración de la plataforma Stewart. Sin embargo, lo habitual aquí surgen dificultades en la definición geométrica de una segunda derivada. En particular circunstancias está claro lo que debe hacerse, por ejemplo, no es demasiado difícil encontrar

la dinámica de una plataforma Stewart, véase [19]. Una vez más, esta parece ser un área fértil para futuros desarrollos.

Referencias

- [1] Pelota RS. La teoría de los tornillos. Prensa de la Universidad de Cambridge, Cambridge, 1900.
- [2] T. Hawkins. El nacimiento de la teoría de los grupos de Lie. *inteligencia matematica*, 16(2), págs. 6–17 1994.
- [3] RA Horn y CR Johnson. Análisis matricial, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [4] J. Milnor. Teoría de Morse. Prensa de la Universidad de Princeton, Nueva Jersey, 1969.
- [5] M. Greenberg. Conferencias sobre topología algebraica. WA Benjamin Inc., Nueva York, 1967.
- [6] JK Mackenzie. La estimación de una relación de orientación. *Acta. Cristal.*, 10, págs. 62–62 1957.
- [7] G.Wahba. Sección de problemas y soluciones: Estimación por mínimos cuadrados del satélite actitud. *SIAM rev*, 8, págs. 384–385, 1966.
- [8] PAP Morán. Cuaterniones, medida de Haar y estimación de ro paleomagnético tación En J. Gani (ed.), *Perspectives in Prob. and Stats.*, págs. 295–301, Applied Confianza de la probabilidad, Sheffield 1975.

[9] A. Nadas. Mínimos cuadrados y estimación de máxima verosimilitud del movimiento rígido.

Informe de investigación de IBM, RC6945, IBM, Yorktown Heights, NY, 1978.

[10] Cuerno BKP. Solución de forma cerrada de orientación absoluta utilizando cuaterniones unitarios.

Revista de la Sociedad Óptica de América, A-4:629–642, 1987.

[11] K. Kanatani. Computación geométrica para visión artificial. Clarendon Press, buey

vado, 1993.

[12] WH Press, SA Teukolsky, WT Vetterling y BP Flannery. Numérico

Recetas en C: el arte de la computación científica 2ª ed. Prensa de la Universidad de Cambridge,

Cambridge, 1992.

[13] BF Schutz. Métodos Geométricos de la Física Matemática. Universidad de Cambridge

City Press, Cambridge, 1980.

[14] VI Arnold. Métodos geométricos de mecánica clásica, volumen 60 de Grad.

uate Textos en Matemáticas. Springer-Verlag, Nueva York, 1978.

[15] M. Griffis y J. Duffy. Modelado de rigidez global de una clase de simple compatible

acoplamiento. Teoría de mecanismos y máquinas, 28(2):207–224, 1993.

[16] M. Zefran y V. Kumar. Conexión afin para la matriz de rigidez cartesiana.

En Actas de la Conferencia Internacional IEEE de 1997 sobre Robótica y Au

tomation, Albuquerque, NM, páginas 1376–1381.

[17] JM Selig. La matriz de rigidez espacial de Simple Stretched Springs In Pro

actas de la Conferencia Internacional IEEE 2000 sobre Robótica y Automatización,

San Francisco CA, págs. 3314–3319, 2000.

- [18] GS Watson. Estadísticas de rotaciones, en apuntes de matemáticas, Springer Verlag, 1379, págs. 398-413, 1989.
- [19] JM Selig y PR McAree. Dinámica de robots restringida II: Máquinas paralelas
Journal of Robotic Systems, 16, págs. 487–498, 1999.