

Skript zur Vorlesung Kinematik

Dr.-Ing. Zdena Sant

INHALT

1	EINFÜHRUNG.....	4
2	KINEMATIK EINES TEILCHENS.....	9
2.1	Geschwindigkeit.....	10
2.2	Beschleunigung	11
2.2.1	Klassifizierung der Bewegung	12
2.3	Orthogonale Transformation	14
2.3.1	Orthogonale Transformation von Vektorgößen.....	14 Geschwindigkeit
2.3.2	in Matrixform unter Verwendung der orthogonalen Transformation.....	16 Beschleunigung
2.3.3	in Matrix Form unter Verwendung der orthogonalen Transformation	16
2.4	Teilchen im zylindrischen Koordinatensystem - $r, \dot{\varphi}, z$	17
2.4.1	Der Ortsvektor	17
2.4.2	Die Geschwindigkeit.....	17
2.4.3	Die Beschleunigung.....	18
2.4.4	Sonderfälle.....	18
2.5	Partikelflugbahn.....	19
2.5.1	Geradlinige Bewegung.....	19
2.5.2	Krummlinige Bewegung.....	20
2.6	Harmonische Bewegung.....	20
2.6.1	Zusammensetzung harmonischer Bewegungen in gleicher Richtung	22
2.6.2	Zusammensetzung zweier senkrechter harmonischer Bewegungen.....	23
2.7	Bewegung einer Menge von Teilchen	23
3	FESTKÖRPERBEWEGUNG.....	24
3.1	Translationsbewegung eines Festkörpers.....	24
3.1.1	Untersuchung kinematischer Größen	24
3.2	Drehung eines Festkörpers um eine feste Achse.....	25
3.2.1	Ermitteln der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes.....	26
3.2.2	Ermitteln der Beschleunigung eines beliebigen Punktes B.....	27
3.2.3	Konsequenzen der Festkörperkinematik (<i>die geometrische Abhängigkeit</i>)	29
3.3	Universelle ebene Bewegung.....	31
3.3.1	Die Position.....	31

3.3.2 Die Geschwindigkeit.....	32
3.3.3 Der Pol der Bewegung.....	33
3.3.4 Ermittlung der Beschleunigung	35
3.3.5 Das momentane Zentrum der Beschleunigung – der Pol der Beschleunigung.....	37
3.4 Mittelpunkt der Flugbahnkrümmung.....	38
3.5 Kombinierte Bewegung	41
3.5.1 Kinematische Größen durch kombinierte Bewegung.....	42
3.5.2 Die Geschwindigkeit.....	42
3.5.3 Die Beschleunigung.....	42
3.5.4 Coriolis-Beschleunigung	43
3.5.5 Finden des Bewegungspols durch kombinierte Bewegung	44
3.6 Kugelbewegung eines Körpers	45
3.7 Universelle Raumbewegung eines Körpers	47
4 SYSTEM DER KÖRPER.....	48
4.1 Gleichzeitige Drehungen um gleichzeitige Achsen	48
4.2 Gleichzeitige Drehungen um parallele Achsen.....	49

1. EINLEITUNG

Design und Analyse sind zwei wichtige Aufgaben im Ingenieurwesen.

Unter **Designprozess** versteht man die Synthese von Größe, Form und Material während der Vorschlagsphase

Zur Erfüllung der geforderten Aufgabe werden Eigenschaften und Anordnungen der Teile vorgegeben.

Bei der Analyse handelt es sich um eine Technik bzw. eine Reihe von Werkzeugen, die eine kritische Bewertung eines bestehenden oder vorgeschlagenen Entwurfs ermöglichen, um dessen Eignung für die Aufgabe zu beurteilen.

Synthese ist also ein Ziel, das durch Analyse erreicht werden kann.

Der Maschinenbauingenieur beschäftigt sich mit vielen unterschiedlichen Aufgaben, die mit vielfältigen Arbeitsweisen einhergehen Prozesse, die als technologischer Prozess bezeichnet werden.

Technologische Prozesse umfassen den Transport von Material, die Erzeugung und Umwandlung von Energie sowie den Transport von Informationen. Alle diese Prozesse erfordern mechanische Bewegung, die von Maschinen ausgeführt wird.

Um eine geeignete Konstruktion von Maschinen und Mechanismen erstellen zu können, muss die Beziehung zwischen der Geometrie und Bewegung der Teile einer Maschine/eines Mechanismus und den Kräften, die die Bewegung verursachen, untersucht werden. Somit ist die Mechanik als Wissenschaft in den Entwurfsprozess eingebunden.

Die Mechanik stellt die Wissenschaft dar, die Statik, Dynamik und Materialmechanik umfasst.

Die Statik ermöglicht die Analyse stationärer Systeme, während sich **die Dynamik** mit Systemen befasst, die sich mit der Zeit ändern. Wie Euler vorschlug, kann die Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers in zwei Teile unterteilt werden, den geometrischen Teil und den mechanischen Teil. Innerhalb des geometrischen Teils **Kinematik**

Die Übertragung des Körpers von einer Position in die andere wird ohne Rücksicht auf die Ursachen der Bewegung untersucht. Die Veränderung wird durch analytische Formeln dargestellt.

Kinematik ist also eine Untersuchung der Bewegung ohne die Kräfte, die diese Bewegung erzeugen beschrieben durch Position, Verschiebung, Rotation, Geschwindigkeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

In der Kinematik gehen wir davon aus, dass alle untersuchten Körper starre Körper sind, ihre Verformung also vernachlässigbar ist und keine wichtige Rolle spielt und die einzige Änderung, die in diesem Fall berücksichtigt wird, die Änderung der Position ist.

Die von uns verwendete Terminologie hat eine präzise Bedeutung und umfasst alle Wörter, die wir verwenden, um uns auszudrücken, während wir miteinander kommunizieren. Um sicherzustellen, dass wir die Bedeutung verstehen, steht uns ein Thesaurus/Glossar zur Verfügung. Insbesondere in Bereichen, in denen die Terminologie nicht sehr klar ist, ist es sinnvoll, bestimmte Begriffe zu klären.

Struktur stellt die Kombination starrer Körper dar, die durch Gelenke miteinander verbunden sind, um starr zu sein. Daher verrichtet die Struktur keine Arbeit und wandelt die Bewegung nicht um. Die Struktur kann von Ort zu Ort bewegt werden, verfügt jedoch über keine innere Beweglichkeit (keine Relativbewegung zwischen ihren Mitgliedern).

Maschinen und Mechanismen – ihr Zweck besteht darin, relative interne Bewegung bei der Übertragung zu nutzen Kraft oder transformierende Bewegung.

Maschine – Gerät, das dazu dient, Kräfte zu verändern, zu übertragen und zu lenken, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen.

Mechanismus – der mechanische Teil einer Maschine, der die Funktion hat, Bewegungen und Kräfte von der Energiequelle auf einen Ausgang zu übertragen. Der Mechanismus überträgt die Bewegung vom Antrieb oder der Eingangsverbindung auf den Mitnehmer oder die Ausgangsverbindung.

Planarer Mechanismus – jedes Teilchen des Mechanismus zeichnet ebene Kurven im Raum und alle Kurven liegen in parallelen Ebenen. Die Bewegung ist auf den zweidimensionalen Raum beschränkt und das Verhalten aller Teilchen kann in ihrer wahren Größe und Form aus einer einzigen Richtung beobachtet werden. Daher können alle Bewegungen grafisch interpretiert werden. Die meisten Mechanismen sind heutzutage planare Mechanismen, daher konzentrieren wir uns auf sie.

Kugelmechanismus – jedes Glied hat einen stationären Punkt, wenn sich das Gestänge bewegt, und die stationären Punkte aller Glieder liegen an einer gemeinsamen Stelle. Somit zeichnet jeder Punkt eine Kurve auf der Kugeloberfläche und alle Kugeloberflächen sind konzentrisch.

Räumlicher Mechanismus – unterliegt keiner Einschränkung der relativen Bewegung der Partikel. Jeder Mechanismus, der ein kinematisches Schraubenpaar enthält, ist ein räumlicher Mechanismus, da die relative Bewegung des Schraubenpaares spiralförmig ist.

Der Mechanismus besteht normalerweise aus:

Rahmen – typischerweise einem Teil, das keine Bewegung zeigt.

Verbindungen – den einzelnen Teilen des Mechanismus, die die starre Verbindung zwischen zwei oder mehr Elementen verschiedener kinematischer Paare herstellen. (Federn können nicht als Verbindungsglieder betrachtet werden, da sie elastisch sind.)

Das kinematische Paar (KP) stellt die Verbindung zwischen Gliedern dar, die die relative Bewegung mithilfe der Gegenfläche steuert. Daher sind einige Bewegungen eingeschränkt, während andere zulässig sind.

Die Anzahl der zulässigen Anträge wird über die Mobilität des KP beschrieben. Es wird davon ausgegangen, dass die Passflächen eine perfekte Geometrie haben und zwischen den Passflächen kein Spiel besteht.

Gelenk – bewegliche Verbindung zwischen Gliedern, auch kinematisches Paar genannt (Bolzen, Gleitgelenk, Nockengelenk), das der Bewegung Beschränkungen auferlegt. Die **kinematische**

Kette wird aus mehreren Gliedern gebildet, die durch Gelenke beweglich miteinander verbunden sind. Die kinematische Kette kann je nach Organisation der verbundenen Glieder geschlossen oder geöffnet werden.

Einfache Verbindung – ein starrer Körper, der nur zwei Gelenke enthält

Komplexe Verbindung – ein starrer Körper, der mehr als zwei Gelenke enthält

Aktuator – ist die Komponente, die den Mechanismus antreibt

Letztes Jahr haben wir begonnen, über die Grundlagen der Mechanik – Statik zu sprechen und später über die Übertragung der Kräfte und deren Wirkung auf die Elemente der Struktur/Maschine. Unsere Berechnung der Kräfte basierte ausschließlich auf der Statik und ging zu Beginn davon aus, dass die Kräfte auf die Struktur wirken oder sehr langsam wirken, sodass sie keine dynamische Wirkung auf die Struktur haben.

Diese Situation ist weit von der realen Welt entfernt, da es auf der Welt nichts Stationäres gibt. (Geben Sie mir eine feste Punkt und ich werde die Welt verändern. *Archimedes* 287 v. Chr. – 212 v. Chr. (griechischer Mathematiker, Physiker)

Die Kinematik beschäftigt sich mit der Art und Weise, wie sich Dinge bewegen. Es ist eine Untersuchung der Bewegungsgeometrie beinhaltet die Bestimmung von Position, Weg, Geschwindigkeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Diese Untersuchung erfolgt ohne Berücksichtigung des auf einen Aktuator wirkenden Kraftsystems.

Ein Aktuator ist ein mechanisches Gerät zum Bewegen oder Steuern eines Mechanismus oder Systems.

Daher sind die Grundgrößen der Kinematik Raum und Zeit, wie sie in der Statik definiert sind.

Kinematik beschreibt die Bewegung eines Objekts im Raum unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit.

Die Bewegung wird durch drei kinematische Größen beschrieben:

Der Ortsvektor gibt **die aktuelle Position** eines bestimmten Punktes im Raum an.

Die zeitliche Änderungsrate des Ortsvektors beschreibt **die Geschwindigkeit** des Punktes.

Beschleunigung – die zeitliche Änderungsrate der Geschwindigkeit

Alle Größen – Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung – sind Vektoren, die im Hinblick auf Folgendes charakterisiert werden können:

Änderung einer Skalargröße – gleichförmige Bewegung

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung

Harmonische Bewegung

Charakter der Flugbahn – 3D (Bewegung im Raum)

2D (planare Bewegung)

Der Trajektorientyp kann wie folgt angegeben werden: Geradlinige Bewegung

Drehung

Universelle ebene Bewegung

Sphärische Bewegung

Universelle Raumbewegung

Komplexe Bewegung

Die Menge unabhängiger Koordinaten im Raum beschreibt die Position eines Körpers als Zeit

Funktion definiert somit die **Bewegung eines Körpers**.

Die **Anzahl der unabhängigen Koordinaten** entspricht dem Freiheitsgrad des Objekts oder der Menge gekoppelter Körper und wird als Beweglichkeit des Objekts ausgedrückt.

Mobilität – die Anzahl der Freiheitsgrade, die der Mechanismus besitzt. Die Anzahl der unabhängigen Koordinaten (Eingaben) ist erforderlich, um alle Glieder des Mechanismus in Bezug auf den Referenzrahmen/das Koordinatensystem

Für planaren Mechanismus: präzise zu J

Für den Weltraummechanismus: $DOF_i = 6 - \sum_{i=1}^n DOF_i$

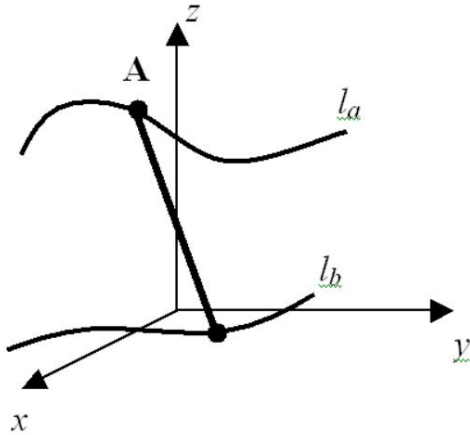
Kinematisches Diagramm – ist eine „abgespeckte“ Skizze des Mechanismus (nur Skelettform).

Die Abmessungen, die die Bewegung des Mechanismus beeinflussen, werden angezeigt.

Partikel – ist ein Modellkörper mit sehr kleinen/vernachlässigbaren physikalischen Abmessungen im Vergleich zum Radius seiner Bahnkrümmung. Dem Teilchen kann eine Masse zugeordnet sein, die bei der kinematischen Analyse keine Rolle spielt.

Wie finde ich den Freiheitsgrad?

1. Betrachten Sie eine unbeschränkte Linie, die sich im Raum bewegt



Der nicht durchdringende Zustand zwischen Punkten

A, B

$$\overline{AB} = \text{konst.} = l$$

Anzahl der Freiheitsgrade für eine Linie in 3D: zwei Punkte

$$\Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \text{ DOF,}$$

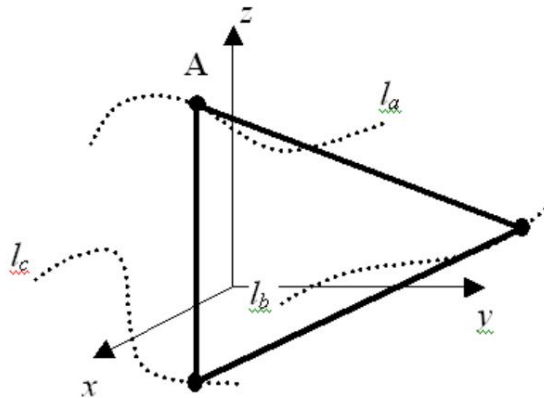
nicht durchdringende Bedingung: $\overline{AB} = l$

Somit ist $i = 6 - 1 = 5 \text{ DOF}$

Fazit: Ein freier Link AB verfügt über fünf Freiheitsgrade bei der Bewegung im Raum.

2. Betrachten Sie einen unbeschränkten Körper im Raum

Wie viele Punkte beschreiben die Position eines Körpers?



Drei Punkte: $3 \cdot 3 = 9 \text{ DOF}$

Nicht durchdringender Zustand (starrer Körper

vorausgesetzt): $\overline{AB} = \text{konst.}; \overline{AC} = \text{konst.}; \overline{BC} = \text{konst.}$
also $m = 3$

$$\text{Und } 6 - i = 3 \cdot 3 - 3 = 6 \text{ DOF}$$

Fazit: Ein freier Festkörper hat sechs Freiheitsgrade bei der Bewegung im Raum.

Um den DOF bewerten zu können, muss das **kinematische Diagramm** des Mechanismus erstellt werden.

Diagramme sollten in einem Maßstab gezeichnet werden, der proportional zum tatsächlichen Mechanismus in der gegebenen Position ist.

Die Konvention besteht darin, Verbindungen beginnend mit dem Referenzrahmen als Nummer eins zu nummerieren, während die Verbindungen mit Buchstaben versehen werden sollten.

Die gewählte Strategie sollte darin bestehen, an der realen Gruppe von Körpern: dem Rahmen,
dem Aktuator und allen anderen Verbindungen, allen

Gelenken

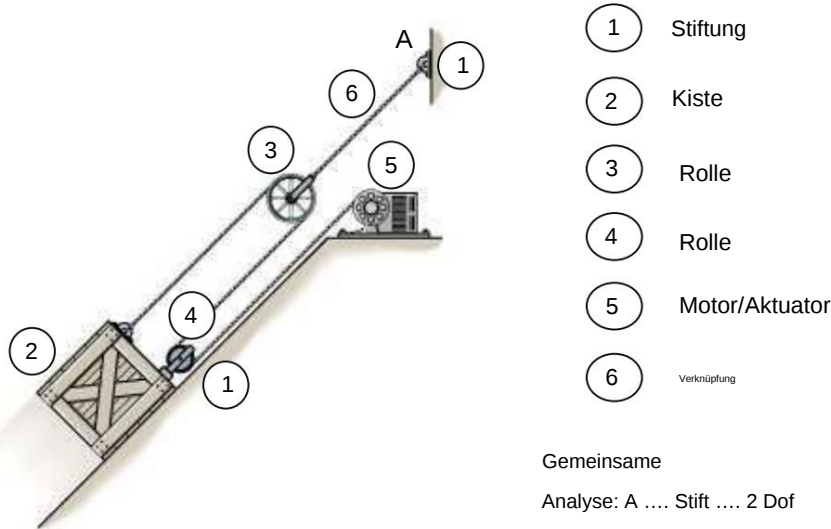
alle interessierenden

Punkte zu identifizieren und das kinematische Diagramm gemäß der Konvention zu zeichnen.

Sobald wir die Mobilität (Freiheitsgrade) ausgewertet haben, können wir den entsprechenden Satz unabhängiger Koordinaten (Parameter) identifizieren und mit der kinematischen Analyse des Mechanismus beginnen

Fahren Sie mit der Unteraufgabe fort: a)

Definieren Sie den Referenzrahmen (Basisraum, in dem die Bewegung beschrieben wird). b) Definieren Sie die Position eines Punktes/Teilchens in Bezug auf den Referenzrahmen. c) Beschreiben Sie die Art der Bewegung (eingeschränkt oder unbeschränkt) d) Schreiben Sie die nicht durchdringenden Bedingungen auf. e) Definieren Sie die unabhängigen Koordinaten. f) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit und Beschleunigung

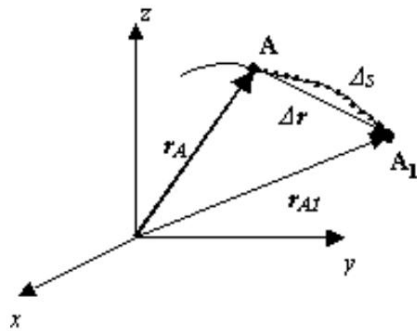


$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{r}}_3 + \dot{\mathbf{r}}_4 + \dot{\mathbf{r}}_5 + \dot{\mathbf{r}}_6$$

Die kinematische Analyse der gesamten Menge verbundener Körper kann durchgeführt werden, wenn wir in der Lage wären, die Bewegung jedes Segments/Körpers zu beschreiben und dann die kinematischen Größen am interessierenden Punkt in der erforderlichen Position oder Zeit zu identifizieren.

Beginnen wir also mit der Kinematik eines Teilchens, das im Diagramm als Punkt dargestellt ist.

2 KINEMATIK EINES TEILCHENS



Der Positionsvektor $\mathbf{r}_A$ beschreibt die Position eines Partikels/Punktes A in Bezug auf das Referenzsystem (CS x, y, z).

Der Charakter eines Ortsvektors hängt vom beliebigen Koordinatensystem ab

Im Moment hat der Punkt A eine Position

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

während des Zeitintervalls Δt der Punkt bewegt sich zu einer neuen

Position A_1 , die durch einen Positionsvektor $\mathbf{r}_{A1}$ beschrieben werden kann

$$\mathbf{r}_{A1} = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$$

Dabei gilt: $\Delta \mathbf{r}$... stellt das Positionsvektorkrement im Zeitintervall dar.

Δs ... stellt das Trajektorieninkrement im Zeitintervall dar

Der **Abstand** stellt das Maß der momentanen Punktposition in Bezug auf den Ursprung dar.

Die **Flugbahn/der Pfad** des jeweiligen Punktes sind die Orte aller momentanen Positionen dieses Punktes.

Der **Einheitsvektor** der Flugbahn:

$$\hat{\mathbf{t}} \dots \text{Einheitsvektor in Tangentenrichtung} \quad \hat{\mathbf{t}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Dann

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d}{ds} (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{dx}{ds}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{ds}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{ds}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{Wo } \frac{dx}{ds} = \cos \hat{\mathbf{t}}_x; \quad \frac{dy}{ds} = \cos \hat{\mathbf{t}}_y; \quad \frac{dz}{ds} = \cos \hat{\mathbf{t}}_z$$

sind die Richtungskosinuswerte der Tangente an die Flugbahn und die Winkel $\hat{\mathbf{t}}_x, \hat{\mathbf{t}}_y, \hat{\mathbf{t}}_z$ sind

die Winkel zwischen den Achsen x, y, z und dem Tangentenvektor $\hat{\mathbf{t}}$

$\hat{\mathbf{n}}$... Einheitsvektor in der Normalenrichtung zur Flugbahn hat eine positive Ausrichtung zum

Mittelpunkt der Flugbahnkrümmung

$$\hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\mathbf{t}}}{\Delta s} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$$

unter Berücksichtigung des Flugbahnkrümmungsradius R dann

$$ds \cdot R \cdot d\hat{\mathbf{t}} = \Delta \mathbf{r} \quad \text{Und} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}$$

daher $\hat{\mathbf{n}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \cdot R$. Ersetzt ds wir bekommen

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \cdot R = R \frac{d^2 x}{ds^2} \hat{\mathbf{i}} + R \frac{d^2 y}{ds^2} \hat{\mathbf{j}} + R \frac{d^2 z}{ds^2} \hat{\mathbf{k}}$$

Wo: $R \frac{dx^2}{ds^2} = \cos \gamma_n$; $R \frac{dy^2}{ds^2} = \cos \gamma_n$; $R \frac{dz^2}{ds^2} = \cos \gamma_n$ sind die Richtungskosinusse der
normal zur Flugbahn und γ_n ; γ_n ;
 γ_n sind die Winkel zwischen den Achsen x, y, z und der Normalen

Im Falle einer 3D-Bewegung ist die Trajektorie eine 3D-Kurve, daher muss ein dritter Einheitsvektor in binormaler Richtung definiert werden:

b ... Einheitsvektor in binormaler Richtung zur Flugbahn ist so ausgerichtet, dass

Die positive Richtung des binormalen Vektors bildet zusammen mit der Normale und der Tangente ein rechtsorientiertes Senkrechtsystem.

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}$$

2.1 GESCHWINDIGKEIT

Ist die zeitliche Änderungsrate des Positionsvektors.

Die durchschnittliche Änderungsgeschwindigkeit ist definiert als $\mathbf{v}_{\text{Avr}} = \frac{\dot{\mathbf{y}} \mathbf{R}}{\dot{\mathbf{y}} \tau}$

Unser Interesse besteht darin, eine Momentangeschwindigkeit zu finden, die den Grenzfall der Durchschnittsgeschwindigkeit darstellt. Das Zeitlimit für die Berechnung der momentanen Geschwindigkeit nähert sich

Die momentane Geschwindigkeit ist definiert als: $\mathbf{v} = \lim_{\dot{\mathbf{y}} \tau \rightarrow 0} \frac{\text{Null. } \dot{\mathbf{y}} \mathbf{R}}{\dot{\mathbf{y}} \tau} = \frac{D\mathbf{R}}{dt} \mathbf{R}$

Welche Richtung hat die momentane Geschwindigkeit?

Der gesunde Menschenverstand oder besser gesagt die Intuition legt nahe, dass die Geschwindigkeit die Tangentenrichtung zu hat die Flugbahn. Lassen Sie uns diese Aussage mathematisch beweisen:

$$\mathbf{v} = \lim_{\dot{\mathbf{y}} \tau \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{y}} \mathbf{R}}{\dot{\mathbf{y}} \tau} \cdot \frac{\dot{\mathbf{y}} \mathbf{S}}{\dot{\mathbf{y}} \tau} = \lim_{\dot{\mathbf{y}} \tau \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{y}} \mathbf{R}}{\dot{\mathbf{y}} \tau} \cdot \lim_{\dot{\mathbf{y}} \tau \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{y}} \mathbf{S}}{\dot{\mathbf{y}} \tau} = \frac{D\mathbf{R}}{ds} \frac{ds}{dt} \dot{\mathbf{y}} \mathbf{S} = \dot{\mathbf{y}} \mathbf{v}$$

$$\text{seit } \dot{\mathbf{S}} = \lim_{\dot{\mathbf{y}} \tau \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{y}} \mathbf{S}}{\dot{\mathbf{y}} \tau} = \frac{ds}{dt} \mathbf{v}$$

Einen Positionsvektor haben, der wie folgt definiert ist: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

dann kann die Geschwindigkeit durch ihre Komponenten beschrieben werden, denn:

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{R}}{dt} = \frac{D}{dt} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

wobei v_x, v_y, v_z Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der Achsen des Koordinatensystems sind.

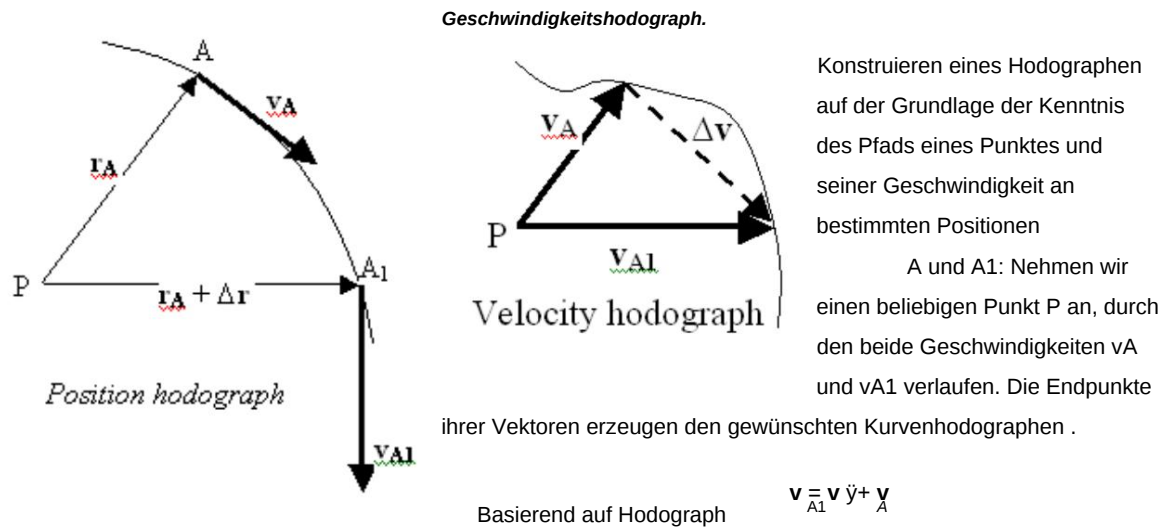
Der Betrag/Modul der Geschwindigkeit: $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

mit Richtungskosinus: $\cos \gamma_v = \frac{v_x}{|\mathbf{v}|}$ $\cos \gamma_v = \frac{v_y}{|\mathbf{v}|}$ $\cos \gamma_v = \frac{v_z}{|\mathbf{v}|}$

2.2 BESCHLEUNIGUNG

Die Beschleunigung einer Positionsänderung ist die zeitliche Geschwindigkeitsänderungsrate.

Um den Ausdruck für die Beschleunigung abzuleiten, müssen wir ein sogenanntes Geschwindigkeitsvektordiagramm zeichnen



Die **durchschnittliche Beschleunigung** wird angegeben als
$$a_{avr} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Die **momentane Beschleunigung** wird als Grenzwert der durchschnittlichen Beschleunigung für das Zeitintervall angegeben $\Delta t \rightarrow 0$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} \quad \text{wobei}$$

Die Richtung der Beschleunigung kann aus ermittelt werden

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{D}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \mathbf{\hat{v}} \right) = \frac{D}{dt} \frac{ds}{dt} \mathbf{\hat{v}} + \frac{ds}{dt} \frac{D\mathbf{\hat{v}}}{dt}$$

Daher
$$\mathbf{a} = \frac{D}{dt} \frac{ds}{dt} \mathbf{\hat{v}} + \frac{ds}{dt} \frac{D\mathbf{\hat{v}}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{\hat{v}} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{\hat{v}}}{dt}$$

Da die Richtung der Normalen gegeben ist als $\mathbf{n} = \frac{1}{R} \frac{D\mathbf{\hat{v}}}{dt}$ dann können wir ersetzen $\frac{D\mathbf{\hat{v}}}{dt} = \frac{\mathbf{n}}{R}$ Wo

R stellt den aktuellen Krümmungsradius dar. Daher:

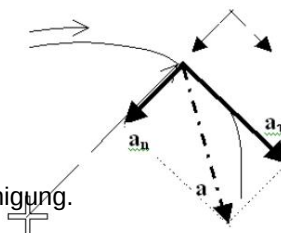
$$\mathbf{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{\hat{v}} + \frac{ds}{dt} \frac{\mathbf{n}}{R} = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{\hat{v}} + \frac{v^2}{R} \mathbf{\hat{n}} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$$

Wo $\mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R} \mathbf{\hat{n}}$ ist Die

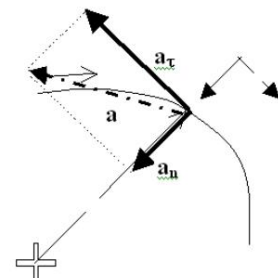
Beschleunigung in Normalrichtung und

$\mathbf{a}_T = \frac{dv}{dt} \mathbf{\hat{v}}$ ist die

Tangentialkomponente der Beschleunigung.



Accelerated motion



Decelerated motion

Gleichmäßig beschleunigte/verzögerte Bewegung

Mathematische Beschreibung: eine Konstante.

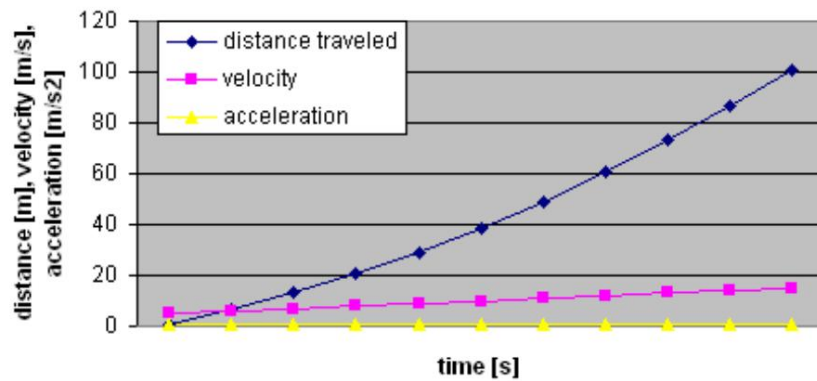
Falls die Tangente die Richtung der x -Achse annimmt, dann ist eine Konstante. Und $A_x = \frac{dv_x}{dt}$ daher

$$\ddot{x} = a_x \quad \text{zur Lösung führt} \quad v_x = a_x t + v_0$$

gleichzeitig $\frac{dx}{dt} = v_x$ also $\int v_x dt = \int (a_x t + v_0) dt$ das ergibt die Lösung:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Die Lösung führte zu einer Gleichung der Flugbahn des Punktes, ausgedrückt als Funktion der Zeit.



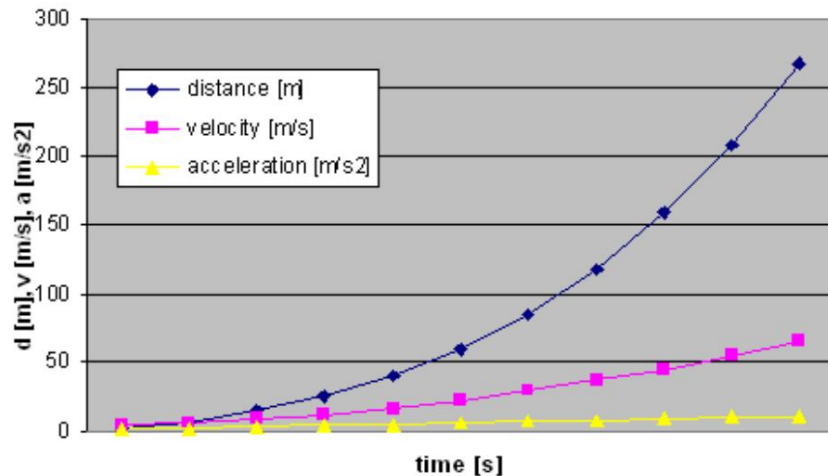
Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung

Mathematische Beschreibung: $a = kt$ (die Funktion könnte anders definiert werden)

Also $\ddot{x} = kt$ also $\int \ddot{x} dt = \int kt dt$ mit Lösung $\dot{x} = \frac{1}{2} kt^2 + v_0$

$\dot{x} = \frac{1}{2} kt^2 + v_0$ seit $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ dann $\int \dot{x} dt = \int (\frac{1}{2} kt^2 + v_0) dt$ das ergibt das

Trajektoriegleichung $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6} kt^3$



Bewegung mit anderen Änderungen kinematischer Größen

In diesem Fall wird die Beschleunigung als Funktion anderer Größen angegeben $a = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$

2.3 Orthogonale Transformation

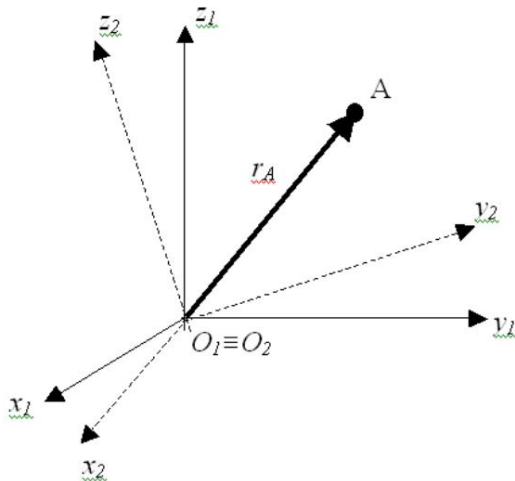
Man sieht sehr deutlich, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung direkt vom Ortsvektor abhängen.

Die Positionsvektorform variiert je nach Art des Koordinatensystems. Somit sind im rechtwinkligen Koordinatensystem (x, y, z) die kinematischen Größen in Vektorform:

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k} \quad (\text{Positionsvektor})$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}_x \mathbf{i} + \dot{r}_y \mathbf{j} + \dot{r}_z \mathbf{k} = \mathbf{v} \quad (\text{Geschwindigkeit})$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{r}_x \mathbf{i} + \ddot{r}_y \mathbf{j} + \ddot{r}_z \mathbf{k} = \mathbf{a} \quad (\text{Beschleunigung})$$



Der Punkt A sei mit seinem Ursprung dem bewegten Koordinatensystem y, z zugeordnet.

mit einem festen Koordinatensystem zusammenfallen $x, y, z; 1 \ 1 \ 1$
 $O_1 \equiv O_2$

Die Vektorform einer Position des Punktes A in CS1:

$$\mathbf{r}_1^A = r_{1x}^A \mathbf{i}_1 + r_{1y}^A \mathbf{j}_1 + r_{1z}^A \mathbf{k}_1$$

und in CS2:

$$\mathbf{r}_2^A = r_{2x}^A \mathbf{i}_2 + r_{2y}^A \mathbf{j}_2 + r_{2z}^A \mathbf{k}_2$$

in Matrixform: $\mathbf{r}_1^A = \begin{bmatrix} r_{1x}^A \\ r_{1y}^A \\ r_{1z}^A \end{bmatrix}$ Und $\mathbf{r}_2^A = \begin{bmatrix} r_{2x}^A \\ r_{2y}^A \\ r_{2z}^A \end{bmatrix}$;

oder $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_1$ Und $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_2$

Um den Positionsvektor $\mathbf{r}$ in CS1 auszudrücken, muss der Vektor transformiert werden. Dieser Prozess ist namens **Orthogonale Transformation von Vektorgößen**

2.3.1 Orthogonale Transformation von Vektorgößen

Die mathematische Operation verwendet die Matrixform eines Vektors.

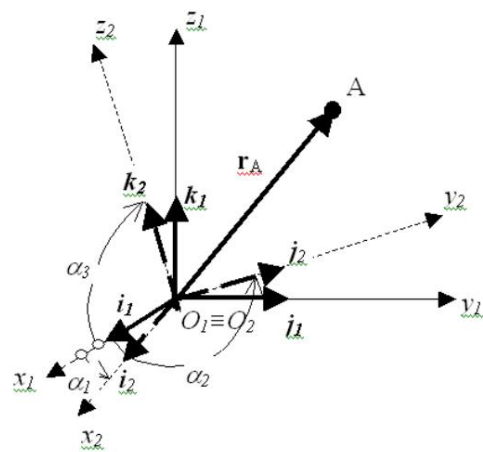
Der CS1 ist mit einem Basisrahmen/-raum verbunden, der als fester Referenzrahmen dient nicht bewegen.

Der bewegliche Punkt A ist mit CS2 verbunden, der sich relativ zum Referenzrahmen bewegt.

Somit ist die Position des Punktes A in CS1

$$\mathbf{r}_1^A = r_{1x}^A \mathbf{i}_1 + r_{1y}^A \mathbf{j}_1 + r_{1z}^A \mathbf{k}_1 \quad \text{und in CS2}$$

$$\mathbf{r}_2^A = r_{2x}^A \mathbf{i}_2 + r_{2y}^A \mathbf{j}_2 + r_{2z}^A \mathbf{k}_2$$



Wie interpretieren wir den Positionsvektor r_2^A in CS1?

Die Aufgabe besteht darin, den Vektor r_2^A zu projizieren in CS1.

Somit wird der Vektor r_2^A projiziert in x_1 -Richtung:

$$x_1^A = r_2^A \cdot i_1 = i_1 \cdot (x_1^A i_1 + x_2^A i_2 + x_3^A i_3) = x_1^A$$

Wo: $\cos \gamma_1 = i_1 \cdot i_1 = 1$

$\cos \gamma_2 = j_1 \cdot i_1 = 0$

$\cos \gamma_3 = k_1 \cdot i_1 = 0$

Daher $x_1^A = r_2^A \cdot i_1 = x_1^A \cdot 1 + x_2^A \cdot 0 + x_3^A \cdot 0 = x_1^A$

$x_2^A = r_2^A \cdot j_1 = x_1^A \cdot 0 + x_2^A \cdot 1 + x_3^A \cdot 0 = x_2^A$

$x_3^A = r_2^A \cdot k_1 = x_1^A \cdot 0 + x_2^A \cdot 0 + x_3^A \cdot 1 = x_3^A$

$x_4^A = r_2^A \cdot i_2 = x_1^A \cdot 0 + x_2^A \cdot 0 + x_3^A \cdot 0 = 0$

Das Umschreiben dieser drei Gleichungen in Matrixform ergibt

$$\begin{bmatrix} x_1^A \\ x_2^A \\ x_3^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \\ \cos \gamma_4 & \cos \gamma_5 & \cos \gamma_6 \\ \cos \gamma_7 & \cos \gamma_8 & \cos \gamma_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^A \\ x_2^A \\ x_3^A \end{bmatrix}$$

Wo $C_{21} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \\ \cos \gamma_4 & \cos \gamma_5 & \cos \gamma_6 \\ \cos \gamma_7 & \cos \gamma_8 & \cos \gamma_9 \end{bmatrix}$

Die analoge Transformation von CS1 in CS2 ergibt:

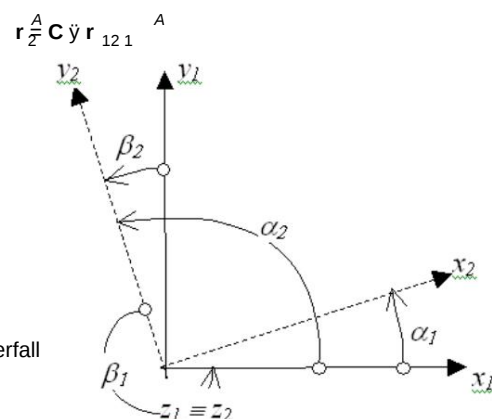
wo γ

$$C_{12} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \\ \cos \gamma_4 & \cos \gamma_5 & \cos \gamma_6 \\ \cos \gamma_7 & \cos \gamma_8 & \cos \gamma_9 \end{bmatrix}$$

Und $C_{12}^T = C_{21}$

Die ebene Bewegung ist zu jedem Zeitpunkt der Bewegung ein Sonderfall

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{x} ; & \ddot{x}_2 &= \frac{\ddot{x}}{2} ; & \ddot{x}_3 &= \frac{\ddot{x}}{2} \\ \ddot{x}_1 &= \frac{3}{2} \ddot{x} ; & \ddot{x}_2 &= \ddot{x} ; & \ddot{x}_3 &= \frac{\ddot{x}}{2} \end{aligned}$$



$$\ddot{y}_1 = \frac{\ddot{y}}{2} \quad \ddot{y}_2 = \frac{\ddot{y}}{2} \quad \ddot{y}_3 = 0$$

Und

$$C_{21} = \begin{pmatrix} \ddot{y} \cos \varphi \sin \varphi & \ddot{y} \cos \varphi \cos \varphi & \ddot{y} \sin \varphi \\ \ddot{y} \sin \varphi \sin \varphi & \ddot{y} \sin \varphi \cos \varphi & \ddot{y} \cos \varphi \\ \ddot{y} \sin \varphi \cos \varphi & \ddot{y} \cos \varphi \cos \varphi & \ddot{y} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Sobald der Positionsvektor in Matrixform ausgedrückt wird und die orthogonale Transformation verwendet wird, können Geschwindigkeit und Beschleunigung in derselben Form ausgedrückt werden.

2.3.2 Geschwindigkeit in Matrixform unter Verwendung der orthogonalen Transformation

Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Positionsvektors (

$$\dot{\mathbf{r}}_1^A = \frac{D}{dt} \mathbf{C}_{21}^A \mathbf{r}_2^A$$

Wenn der Punkt A seine Position in Bezug auf den Ursprung CS2 nicht ändert, dann $r_2^A = \text{konst.}$ Und daher $\dot{r}_2^A = 0$ Und $\mathbf{v} = \mathbf{C}_{21}^A \dot{\mathbf{r}}_2^A$

2.3.3 Beschleunigung in Matrixform unter Verwendung der orthogonalen Transformation

Die Beschleunigung ist also die erste Ableitung der Geschwindigkeit und eine zweite Ableitung des Ortsvektors

$$\ddot{\mathbf{r}}_1^A = \dot{\mathbf{C}}_{21}^A \mathbf{r}_2^A + \mathbf{C}_{21}^A \ddot{\mathbf{r}}_2^A$$

Wenn der Punkt A seine Position in Bezug auf den Ursprung CS2 nicht ändert, dann $r_2^A = \text{konst.}$ Und daher $\ddot{r}_2^A = 0$ und somit $\ddot{\mathbf{r}}_1^A = \dot{\mathbf{C}}_{21}^A \mathbf{r}_2^A$

2.4 TEILCHEN IM ZYLINDRISCHEN KOORDINATENSYSTEM - $r, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}$

2.4.1 Der Ortsvektor

in CS2 $\mathbf{r}^A = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$ $\mathbf{e}_k = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{z}}$

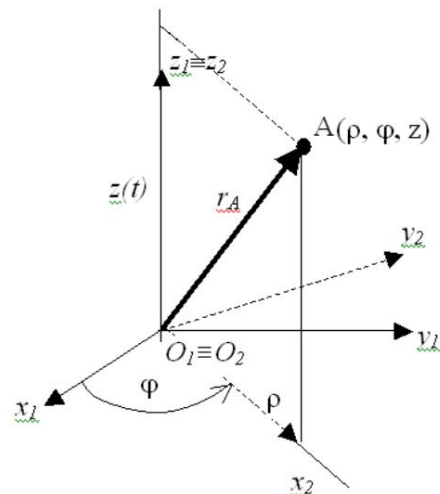
In Matrixform $\mathbf{R}_2^A = \begin{pmatrix} \dot{r} & r\dot{\varphi} & \dot{z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Somit ist $\mathbf{r} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}_{21}^A$ und da $\dot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}_{21}^A = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

in Vektorform: $\mathbf{r}_1^A = \dot{r} \cos \varphi \mathbf{e}_1 - r \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \dot{z} \mathbf{e}_3$



2.4.2 Die Geschwindigkeit

In Vektorform ausgedrückt $\mathbf{v}_2^A = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z$

wobei der Einheitsvektor $\mathbf{e}_2$ konstant bleibt (Größe und Richtung ändern sich nicht mit $\dot{\varphi}$).
Zeit), daher $\dot{\mathbf{e}}_2 = 0$

Der Einheitsvektor $\mathbf{e}_2$ dreht sich in der Ebene x, y um den Ursprung, daher ist die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{e}}_2$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \frac{D\mathbf{e}_2}{dt} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$\frac{D\mathbf{e}_2}{dt} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ stellt den Quervektor senkrecht zum Einheitsvektor $\mathbf{e}_2$ dar.

Somit ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_2^A = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z$

Wo $\dot{r} \mathbf{e}_r$ repräsentiert die radiale Komponente der Geschwindigkeit.

$r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ repräsentiert die transversale Komponente der Geschwindigkeit

$\dot{z} \mathbf{e}_z$ stellt die z-Komponente der Geschwindigkeit dar

in Matrixform: die Transponierungsgeschwindigkeit in CS2 $\mathbf{v}_2^T = [\dot{r} \quad r\dot{\varphi} \quad \dot{z}]$

$$\mathbf{v}_2^T = \begin{pmatrix} \dot{r} & r\dot{\varphi} & \dot{z} \end{pmatrix} \mathbf{C}_{21}^T = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi & \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi & \dot{z} \end{pmatrix}$$

2.4.3 Die Beschleunigung

in Vektorform $\mathbf{a}_2^A = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \left(\ddot{\varphi} \mathbf{i} + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j} \right) = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$

$$\mathbf{a}_2^A = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2 = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$$

$$\mathbf{a}_2^A = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2 = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$$

Wo: $\frac{D\mathbf{j}_2}{dt} = \dot{\varphi} \mathbf{j}_1$

Dadurch wird Beschleunigung erreicht $\mathbf{a}_2^A = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2 = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$

$$\mathbf{a}_2^A = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2 = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$$

Wo $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}$ stellt die Radialbeschleunigung dar

$(\ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2) = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2$ stellt die Querbeschleunigung dar

$\ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2$ stellt die Beschleunigung in Richtung der z-Achse dar

in Matrixform:

$$\mathbf{a}_2^A = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ \ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

In dieser Präsentation haben wir den Winkel φ mit der Winkelvektorkoordinate, also der

Winkelgeschwindigkeit und $\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \mathbf{j}_1$

der Winkelbeschleunigung, verknüpft $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_1$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_1 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$$

2.4.4 Sonderfälle

a) $z=0, \ddot{\varphi} = \text{const.}, (\ddot{\varphi})$

Das Teilchen (der Punkt A) ist nur auf die Ebene x,y beschränkt und bewegt sich so, dass die Flugbahn des Punkt A ist ein Kreis in der Ebene x,y.

Die im vorherigen Absatz in allgemeinen Koordinaten ausgedrückte Geschwindigkeit und Beschleunigung beträgt:

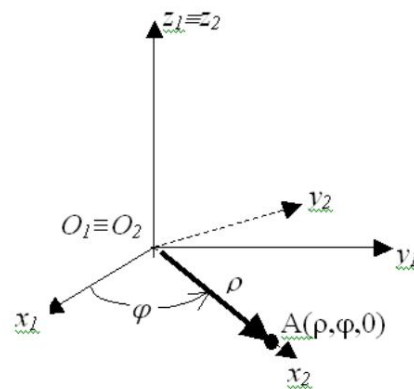
$$\mathbf{v}_2^A = \dot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2 = \dot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$$

$$\mathbf{a}_2^A = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2 = \ddot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$$

Also für unseren speziellen Fall in CS2:

$$\mathbf{v}_2^A = \dot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2 = \dot{\varphi} \mathbf{j}_2 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$$

$$\text{in CS1: } \mathbf{v}_1^A = \dot{\varphi} \mathbf{j}_1 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2 = \dot{\varphi} \mathbf{j}_1 + \dot{\varphi}^2 \mathbf{j}_2$$



und Beschleunigung in CS2: $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \mathbf{e}_2 + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_2$

Wo $\ddot{r} = \frac{A}{r}$ stellt die Normalbeschleunigung dar, die immer auf die ausgerichtet ist
Krümmungsmittelpunkt der Flugbahn

$\ddot{\varphi} = \frac{A}{r^2}$ stellt die Tangentialkomponente einer Beschleunigung dar

in CS1: $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} (\cos \varphi \mathbf{j}_1 - \sin \varphi \mathbf{i}_1) + r \ddot{\varphi} (\sin \varphi \mathbf{j}_1 + \cos \varphi \mathbf{i}_1)$

Wo $\ddot{r} \cos \varphi = a_{rx}$ ist die x-Komponente der Normalbeschleunigung in CS1

$\ddot{r} \sin \varphi = a_{ry}$ ist die y-Komponente der Normalbeschleunigung in CS1

$r \ddot{\varphi} \cos \varphi = a_{\varphi x}$ ist die x-Komponente der Tangentialbeschleunigung in CS1

$r \ddot{\varphi} \sin \varphi = a_{\varphi y}$ ist die y-Komponente der Tangentialbeschleunigung in CS1

b) $\mathbf{z} = 0, \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\varphi}(t)$

Das Teilchen (der Punkt) bewegt sich in der Ebene x,y und die Beschreibung des Problems verwendet Polarkoordinaten $(\ddot{r}, \ddot{\varphi})$.

2.5 TEILCHENFLUGBAHN

Die Bewegung könnte hinsichtlich der Flugbahn wie folgt klassifiziert werden:

2.5.1 Geradlinige Bewegung

Die Position eines Punktes wird als Funktion der krummlinigen Koordinaten s beschrieben: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$

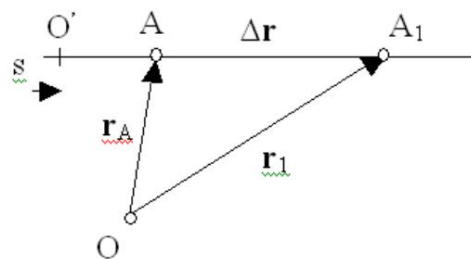
Wo $\frac{D\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}_s$ Und $\mathbf{e}_s^2 = 1$

Die notwendige Bedingung für eine geradlinige Bewegung ist
gegeben als: $\ddot{\mathbf{r}} = \text{const.}$

Die Geschwindigkeit wird angegeben

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{D\mathbf{r}}{ds} = \dot{s} \mathbf{e}_s$$

und Beschleunigung: $\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{D}{dt} \left(\dot{s} \mathbf{e}_s \right) = \ddot{s} \mathbf{e}_s + \dot{s} \frac{D\mathbf{e}_s}{dt}$



Wenn: $\ddot{s} = \text{const.}$ daher $0 \neq \ddot{s} = \dots$ gleichmäßige geradlinige Bewegung
 $\ddot{s} \neq \text{const.}$ daher $0 \neq \ddot{s} \neq \ddot{s} \dots$ beschleunigte geradlinige Bewegung
 für $\ddot{s} = \text{const.}$ dann gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung
 für $\ddot{s} \neq \text{const.}$ dann ungleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung

2.5.2 Krummlinige Bewegung

Im Falle einer krummlinigen Bewegung ist $\mathbf{r} = r(s)$ und $\mathbf{s} = s(t)$ und die Geschwindigkeit wird ausgedrückt als:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Wo $\frac{ds}{dt} = v$ sowie $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ const. da der Einheitsvektor

ändert seine Richtung

Die Beschleunigung beträgt:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$$

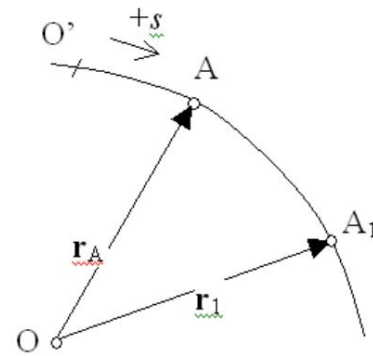
Für den Fall, dass:

A) $\frac{ds}{dt} = \text{const}$. Dann $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

daher $\mathbf{a} = \frac{1}{\rho} v^2 \mathbf{n}$ und der Punkt bewegt sich gleichmäßig entlang der kreisförmigen Flugbahn

Geschwindigkeit . b) $\frac{ds}{dt} \neq \text{const}$ Dann $\frac{d^2s}{dt^2} \neq 0$ und die Bewegung ist ungleichmäßig beschleunigt oder

$\frac{ds}{dt} = \text{const}$. Wo $\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} + \frac{dv}{dt} \mathbf{s}$ Bewegung wird gleichmäßig beschleunigt



2.6 HARMONISCHE BEWEGUNG

Die Bewegung eines Punktes (Teilchens), die durch die Gleichung $x = A \sin(\omega t + \phi)$ beschrieben wird

Wo A wird, repräsentiert die Amplitude (max. Abweichung von der neutralen Position)
 ω [m] repräsentiert die Kreisfrequenz [s⁻¹]
 ϕ repräsentiert die Phasenverschiebung
 x [rad] repräsentiert die momentane Entfernung des Teilchens

wird als **harmonische Bewegung** bezeichnet

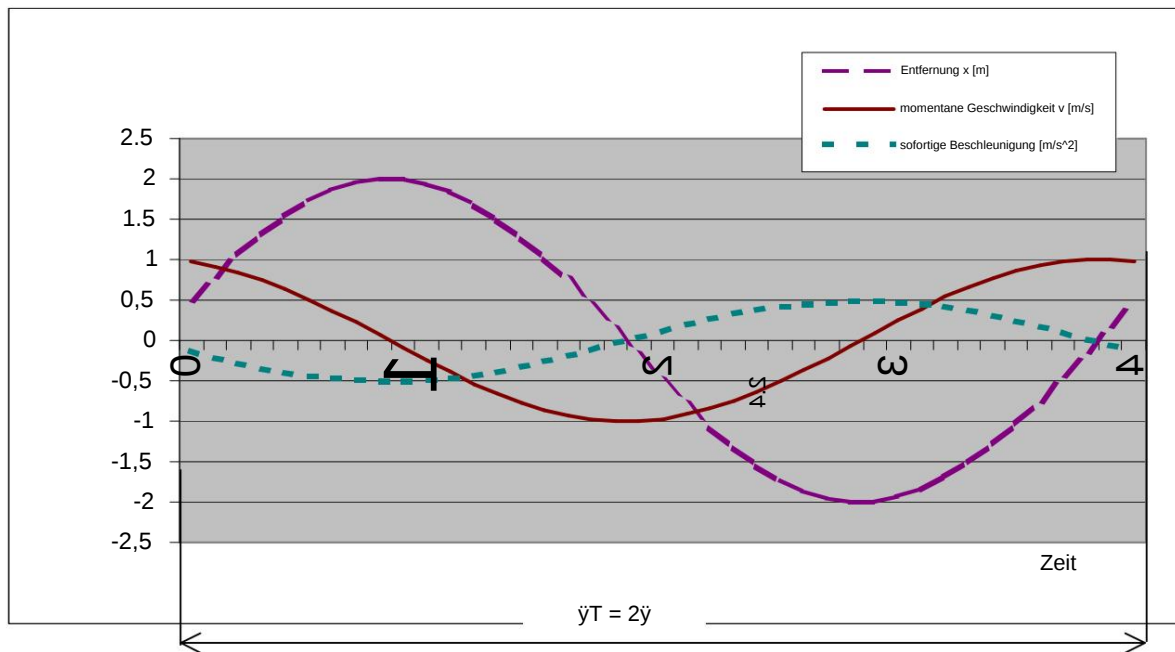
Die Geschwindigkeit wird in diesem Fall wie folgt angegeben: $v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \phi)$ und

Die Beschleunigung ergibt sich aus: $a = \frac{dv}{dt} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

Für die Anfangsbedingungen: $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$, $a = a_0$ sind die kinematischen Größen:

$$x_0 = A \sin \phi ; \quad v_0 = A \omega \cos \phi ; \quad a_0 = -A \omega^2 \sin \phi$$

Die grafische Interpretation der harmonischen Bewegung kann als Gleichrichtung aller dargestellt werden kinematische Größen in der Zeit



Wobei T den Zeitraum darstellt $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [s] also Frequenz $F = \frac{1}{T}$ [Hz]

Die Amplitude der Bewegung kann durch $x_0 = A \sin$ ausgedrückt werden und $v_0 = A \omega \cos$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{Und} \quad \sin \omega t = \frac{x_0}{A} \quad \cos \omega t = \frac{v_0}{A \omega}$$

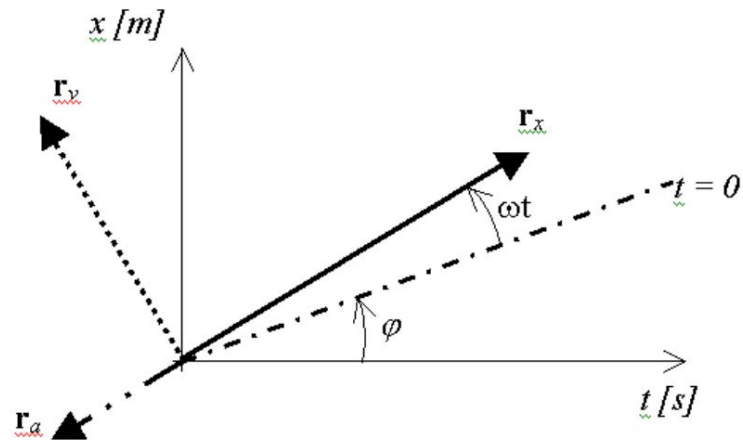
Somit können die kinematischen Größen als Funktion des rotierenden Vektors r_x , r_v , r_a ausgedrückt werden

Wo

$$|r_x| = A;$$

$$|r_v| = A \omega;$$

$$|r_a| = A \omega^2$$



2.6.1 Zusammensetzung harmonischer Bewegungen in gleicher Richtung

a) Wenn $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = \dots = \ddot{y}_n = \ddot{y}$ dann

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\ddot{y} t + \varphi_1) = e^{i(\ddot{y} t + \varphi_1)} A_1 \\ x_2 &= A_2 \sin(\ddot{y} t + \varphi_2) = e^{i(\ddot{y} t + \varphi_2)} A_2 \\ &\vdots \\ x_n &= A_n \sin(\ddot{y} t + \varphi_n) = e^{i(\ddot{y} t + \varphi_n)} A_n \end{aligned}$$

Die resultierende Bewegung ist wiederum eine harmonische Bewegung, beschrieben als:

$$x = \sum_{j=1}^N \ddot{y}_j = \sum_{j=1}^N A_j \sin(\ddot{y} t + \varphi_j) = \sum_{j=1}^N A_j e^{i(\ddot{y} t + \varphi_j)} = e^{i\ddot{y} t} \sum_{j=1}^N A_j e^{i\varphi_j} = e^{i\ddot{y} t} A_v$$

$$x = A_v e^{-i(\ddot{y} t + \varphi_v)}$$

Wenn wir $t = 0$ ersetzen, erhalten

$$x = A_v e^{-i\varphi_v}$$

Von dort erhalten wir die endgültige Amplitude und Phasenverschiebung

$$A_v = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N A_j \cos \varphi_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N A_j \sin \varphi_j \right)^2}$$

$$\text{Und } \varphi_v = \frac{\sum_{j=1}^N A_j \sin \varphi_j}{\sum_{j=1}^N A_j \cos \varphi_j}$$

b) Wenn $\ddot{y}_1 \neq \ddot{y}_2 \neq \dots \neq \ddot{y}_n$

dann wird jede Bewegung durch eine eigene Gleichung beschrieben

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\ddot{y}_1 t + \varphi_1) = e^{i(\ddot{y}_1 t + \varphi_1)} A_1 \\ x_2 &= A_2 \sin(\ddot{y}_2 t + \varphi_2) = e^{i(\ddot{y}_2 t + \varphi_2)} A_2 \\ &\vdots \\ x_n &= A_n \sin(\ddot{y}_n t + \varphi_n) = e^{i(\ddot{y}_n t + \varphi_n)} A_n \end{aligned}$$

und die endgültige Bewegung wird durch die Gleichung beschrieben:

$$x = \sum_{j=1}^N \ddot{y}_j = \sum_{j=1}^N A_j \sin(\ddot{y}_j t + \varphi_j) = \sum_{j=1}^N A_j e^{i(\ddot{y}_j t + \varphi_j)}$$

Die aus harmonischen Bewegungen mit unterschiedlichen Winkelfrequenzen zusammengesetzte Endbewegung ist keine harmonische Bewegung, da die resultierende Amplitude nicht konstant ist.

Für den Fall, dass $\ddot{y}_1 = \frac{2\pi n_1}{T}$ und $\ddot{y}_2 = \frac{2\pi n_2}{T}$ und gleichzeitig das Verhältnis

$$\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ ist ein rationales}$$

Die resultierende Bewegung wird als **periodische Bewegung bezeichnet**.

2.6.2 Zusammensetzung zweier senkrechter harmonischer Bewegungen

Die Bewegung zweier Teilchen, die sich in zwei senkrechten Richtungen bewegen, wird durch Gleichungen definiert:

$$x = x_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{Und} \quad y = y_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y = y_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{Und} \quad x = x_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

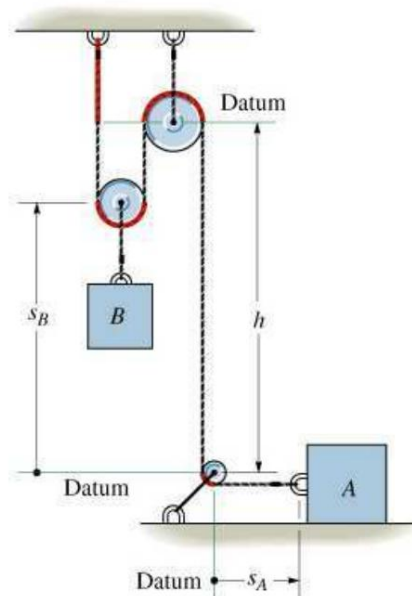
Diese Gleichungen definieren Kurven, die als Lissajous-Bild bekannt sind.

Die Lösung ist recht anspruchsvoll und sprengt unseren Rahmen.

Die relativ einfachen Lösungen existieren für Sonderfälle, wenn $\omega_1 = \omega_2$ und die Annahme $A_1 = A_2$

was zur Ellipsengleichung auf konjugierten Achsen führt.

2.7 BEWEGUNG EINES TEILCHENSATZES



Eine Menge von Partikeln kann entweder eine verbundene Menge oder Partikel oder eine Anzahl von zwei oder mehr nicht verbundenen Partikeln sein, die sich im selben Bezugssystem bewegen.

Daher muss die Beziehung zwischen Partikeln berücksichtigt werden. Nehmen wir den Fall der Teilchen A und B wie im Diagramm dargestellt: Beide Teilchen

sind über ein nicht dehnbares Kabel verbunden über die Riemenscheiben getragen. Dies führt zu einer undurchdringlichen Bedingung zwischen ihnen:

$$s_A + 2s_B = \text{konstant}$$

Die zusätzliche Länge des Seils zwischen dem oberen Bezugspunkt und der Decke sowie der Teil des Seils, der die Rollen umschließt, bleiben während der Bewegung konstant und spielen daher für die kinematische Beschreibung keine Rolle.

Die Untersuchung der Mobilität der Teilchenmenge würde die Anzahl der unabhängigen Teilchen bestimmen Koordinaten, die in unserem Fall $i=1$ sind

Der Weg eines Teilchens A ist nicht identisch mit dem Weg des Teilchens B und die Beziehung zwischen ihnen muss anhand der beteiligten Gelenke beschrieben werden. Abgesehen von der Bedingung, dass keine Durchdringung vorliegt, muss daher die Stütze bei A sowie die Stützen für die Riemenscheiben und den Körper B berücksichtigt werden.

Mit der Grundbedingung der indehnbaren Länge können wir die Beziehung auswerten zwischen den Geschwindigkeiten der Teilchen A und B als zeitliche Ableitung des I. Daher

$$v_A + 2v_B = 0$$

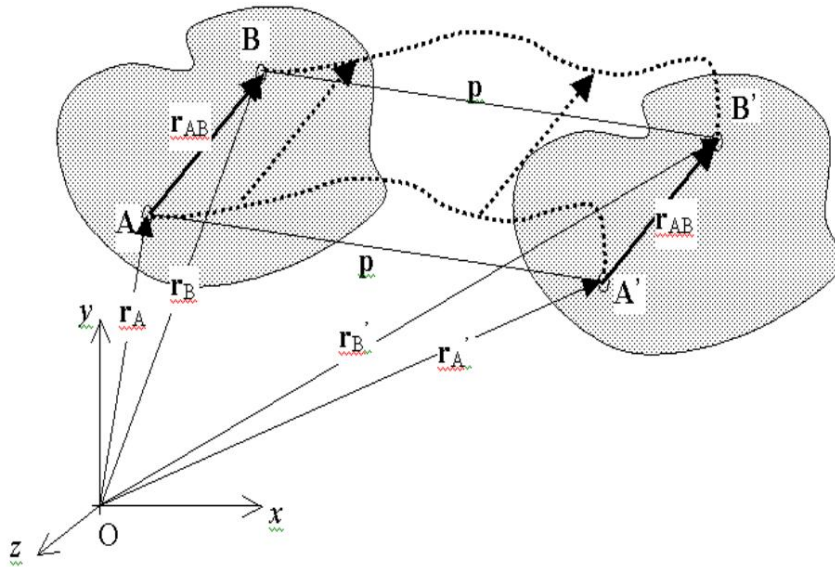
Dann können wir daraus schließen, dass sich das Teilchen A in positiver Richtung (vom Bezugspunkt weg) bewegt

in Richtung s_A) bewegt sich das Teilchen B mit Geschwindigkeit nach oben $v_B = -\frac{v_A}{2}$.

3 FESTKÖRPERBEWEGUNG

Wie bereits erwähnt, ist der in der Kinematik verwendete Modellkörper wiederum nicht verformbar, daher folgt der Abstand zwischen zwei Punkten A, B auf einem Festkörper der mathematisch ausgedrückten Regel: $AB = \text{const}$.

3.1 TRANSLATIONSBEWEGUNG EINES FESTKÖRPERS



Es wird die Position und Flugbahn zweier Punkte A, B untersucht.

Wenn zwei bewegliche Punkte ihre zeichnen Flugbahnen in zwei paralleler Ebenen, daher sind ihre Flugbahnen parallele Kurven. Die Positionsänderung von Punkt A nach A' und B nach B' wird durch parallele Vektoren $\mathbf{p}$ beschrieben. Die Vorschubbewegung ist *geradlinig*

(durchgezogene Linie) wenn Vektor $\mathbf{p}$ ist

eine gerade Linie und *krummlinig*, wenn es sich um eine Kurve handelt (gepunktete Linie).

Die Positionsänderung des Punktes A beträgt $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{p}$

des Punktes B $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_B + \mathbf{p}$

Daher

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{BA} \quad \text{oder neu} \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$$

angeordnet. Indem wir die Vektoren $\mathbf{r}_B$ und $\mathbf{r}_B'$ in Bezug auf den Referenzpunkt A/A' ausdrücken, können wir die vorherige Aussage über parallele Vektoren $\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_{B'A'} = \text{const}$ beweisen.

3.1.1 Untersuchung kinematischer Größen

Position

Punkt A ist der Referenzpunkt, der dem Körper zugeordnet ist mit bewegtem CS2 (x_2, y_2, z_2). Die Position eines Punktes B wird angegeben als

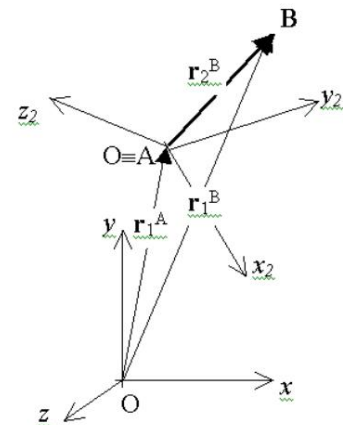
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{BA}$$

Und $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{BA} \cos \gamma_1 + \mathbf{r}_{BA} \cos \gamma_2 + \mathbf{r}_{BA} \cos \gamma_3$

24

Dr.-Ing. Zdenka Sant

10/2009



somit ist die Position des Punktes B in CS1

$$\begin{aligned} x_1^B &= x_1^A + J_{21}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_1 + J_{22}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_2 + J_{23}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_3 \\ y_1^B &= y_1^A + J_{21}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_1 + J_{22}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_2 + J_{23}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_3 \\ z_1^B &= z_1^A + J_{21}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_1 + J_{22}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_2 + J_{23}^{BA} \cos \ddot{\gamma}_3 \end{aligned}$$

oder in Matrixform $\mathbf{r}_1^B = \mathbf{r}_1^A + \mathbf{C}_{21}^{BA} \mathbf{r}_1^A$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{C}_{21}$ enthält die Kosinuswerte aller Winkel zwischen den Achsen des Koordinatensystems. Da alle Vektoren parallel bleiben, sind die Winkel zwischen bestimmten Achsen konstant. daher $\mathbf{C}_{21}^{BA} = \text{konst.}$

Geschwindigkeit

In Vektorform wird die Geschwindigkeit von Punkt B wie folgt angegeben:

$$\mathbf{v}_1^B = \frac{d\mathbf{r}_1^B}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1^A + \mathbf{r}_1^{BA}) = \mathbf{v}_1^A + \mathbf{v}_1^{BA} \quad \text{seit dem } r_1^{BA} = \text{konst.}$$

In Matrixform: $\mathbf{v}_1^B = \mathbf{r}_1^A + \mathbf{C}_{21}^{BA} \mathbf{v}_1^A$

und $\mathbf{C}_{21}^{BA} = 0$ seit $\mathbf{C}_{21}^{BA} = \text{konst.}$

Somit ist die endgültige Matrixform: $\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A$

Beschleunigung

In Vektorform wird die Beschleunigung des Punktes B wie folgt angegeben:

$$\mathbf{a}_1^B = \frac{d\mathbf{v}_1^B}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_1^A + \mathbf{v}_1^{BA}) = \mathbf{a}_1^A + \mathbf{a}_1^{BA} \quad \text{seit } v_1^{BA} = 0$$

In Matrixform: $\mathbf{a}_1^B = \mathbf{a}_1^A$

3.2 ROTATION EINES FESTKÖRPERS UM EINE FESTE ACHSE

Wenn zwei Punkte eines bewegten Festkörpers stationär sind, dann

$$\mathbf{r}_{O_1 O_2} = \text{konst.}$$

Dann dreht sich der Festkörper um eine Achse, die durch diese Punkte O_1 und O_2 verläuft.

Die Positionsvektoren beschreiben ihre Position in CS1 durch

$$\mathbf{r}_{O_1} = \text{konst.}, \mathbf{r}_{O_2} = \text{konst.}$$

Jeder Punkt auf der durch die Punkte O1 und O2 angegebenen Linie kann beschrieben werden als

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O1O} + \mathbf{r}_{O2O} \ddot{y}$$

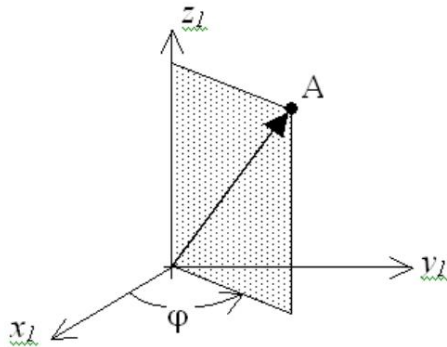
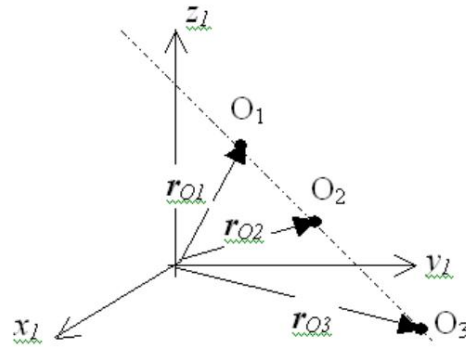
und die Geschwindigkeit des Punktes O3 wird durch die erste Ableitung seiner Position erhalten, also

$$\mathbf{v}_{O3} = \mathbf{v}_{O1} + \mathbf{v}_{O2} \ddot{y} = 0$$

Fazit: Es gibt unendlich viele Punkte, die darauf liegen die durch die Punkte O1 und O2 angegebene Linie, die eine Geschwindigkeit von Null haben.

Die Orte aller Punkte, die eine Geschwindigkeit von Null haben, sind

wird als **Rotationsachse bezeichnet**.



Die Bahn eines Punktes A, der in der um die Achse z rotierenden Ebene (x,z) liegt, ist ein Kreis mit dem Radius $\ddot{y}$, der der Projektion des Ortsvektors $\mathbf{r}_A$ in die x,y- Ebene entspricht.

Die momentane Position eines Punktes A hängt vom Zeitpunkt ab Drehwinkel $\ddot{y} = \ddot{y}(t)$ Weiter weisen wir dieser Winkelkoordinate eine Vektorgröße zu, die der Rechte-Hand-Regel folgt.

Die Winkelgeschwindigkeit, die die Änderungsrate der Winkelkoordinate beschreibt, wird ausgedrückt als

der Durchschnittswert der Winkelgeschwindigkeit: $\ddot{y} = \frac{\ddot{y} \ddot{y}}{\ddot{y} \tau}$

Die momentane Winkelgeschwindigkeit wird wie folgt angegeben: $\lim_{\ddot{y} \tau \rightarrow 0} \frac{\ddot{y} \ddot{y}}{\ddot{y} \tau} = \frac{D\ddot{y}}{dt}$ also $\ddot{y} = \dot{\ddot{y}} = \mathbf{e} \ddot{y}$

Auf die gleiche Weise können wir die Winkelbeschleunigung ausdrücken.

Die durchschnittliche Beschleunigung wird angegeben als: $\ddot{y} = \frac{\ddot{y} \ddot{y}}{\ddot{y} \tau}$ Und

Sofortige Beschleunigung ist $\lim_{\ddot{y} \tau \rightarrow 0} \frac{\ddot{y} \ddot{y} \ddot{y}}{\ddot{y} \tau} = \frac{D\ddot{y}}{dt} \ddot{y}$

also $\ddot{y} = \ddot{y} = \mathbf{e} \ddot{y}$

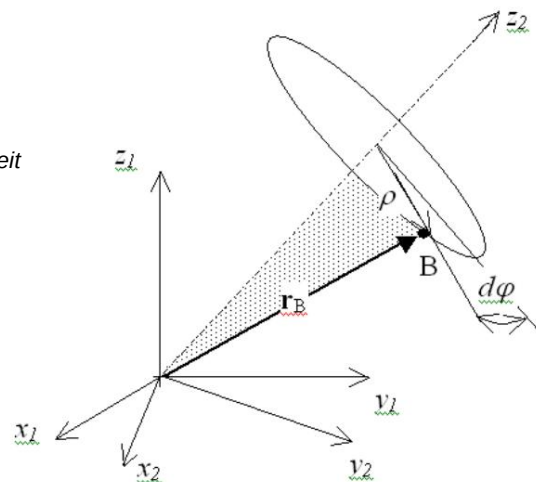
Wenn sich der Festkörper um eine feste Achse dreht, haben alle Punkte des Körpers die gleiche Winkelgeschwindigkeit und Beschleunigung.

3.2.1 Ermitteln der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes

Der Punkt B ist am rotierenden Festkörper befestigt

Dann ist die **Position eines Punktes B** in CS2 gegeben als

$$\mathbf{r}_B = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$



oder in Bezug auf den Punkt O', um den sich der Punkt B mit Radius dreht

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r} + \mathbf{r}'$$

Punkt B bewegt sich auf der Kreisbahn in der Zeit Δt um Abstand d

$$dr = d\dot{\gamma} \dot{\gamma} \quad \dot{\gamma} \dot{\gamma} r_B \sin \dot{\gamma}$$

in Vektorform: $d\mathbf{r} = d\dot{\gamma} \mathbf{r}_B = d\dot{\gamma} \mathbf{r} \times \dot{\gamma}$

da die Vektoren $\mathbf{r}$ und $\dot{\gamma}$ in derselben Ebene liegen und zusammen mit dem Vektor $\dot{\gamma}$ die Ebene bilden, zu der das Pfadinkrement $d\mathbf{r}$ orthogonal (senkrecht) ist.

Somit ist **die Geschwindigkeit des Punktes**

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{B \dot{\gamma}}{dt} \times \mathbf{r}_B = \dot{\gamma} \times \mathbf{r}_B = \dot{\gamma} \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \dot{\gamma} \times \mathbf{r} + \dot{\gamma} \times \mathbf{r}'$$

das Modul der Geschwindigkeit: $|\mathbf{v}_B| = \dot{\gamma} \dot{\gamma} r_B \sin \dot{\gamma} = \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}$

oder im Vektor von:

$$\mathbf{v}_B = \dot{\gamma} \times \mathbf{r}_B = \dot{\gamma} \times (\mathbf{r}_x \hat{i} + \mathbf{r}_y \hat{j} + \mathbf{r}_z \hat{k}) = \dot{\gamma} (\mathbf{r}_y \hat{i} - \mathbf{r}_x \hat{j}) + \dot{\gamma} (\mathbf{r}_z \hat{j} - \mathbf{r}_y \hat{k}) + \dot{\gamma} (\mathbf{r}_x \hat{k} - \mathbf{r}_z \hat{i})$$

Dann $\mathbf{v}_B = \dot{\gamma} \hat{i} + \dot{\gamma} \hat{j} + \dot{\gamma} \hat{k}$ mit Modul $|\mathbf{v}_B| = \sqrt{\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^2} = \sqrt{3} \dot{\gamma}$

Die Ausrichtung der linearen Geschwindigkeit wird durch die **Rechte-Hand-Regel vorgegeben**: Fasst man die Rotationsachse mit der rechten Hand so, dass der Daumen in Richtung der Winkelgeschwindigkeit zeigt, zeigen die Finger die Geschwindigkeitsrichtung des jeweiligen Punktes eines Körpers an.

Wenn die Position des Punktes B in Matrixform ausgedrückt wird

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{C} \mathbf{r}$$

dann ist die Geschwindigkeit also die erste Ableitung der Position

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{C} \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{C}} \mathbf{r} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}}$$

Da der Punkt B an CS2 befestigt ist und sich mit diesem dreht

$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_2$ const. und seine erste Ableitung ist gleich Null.

Die Geschwindigkeit des Punktes B wird angegeben als $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{C}} \mathbf{r}_B = \dot{\mathbf{C}} \mathbf{r}_2$

Die erste Ableitung der Transformationsmatrix $\dot{\mathbf{C}}_{21} = \dot{\mathbf{C}}_{21} = \dot{\mathbf{C}}_{21}$

und schlussendlich $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{C}}_{21} \mathbf{r}_2 = \dot{\mathbf{C}}_{21} \mathbf{r}_2$

3.2.2 Ermitteln der Beschleunigung eines beliebigen Punktes B

In Vektorform: $\mathbf{a}_B = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{C}} \mathbf{r}_B) = \ddot{\mathbf{C}} \mathbf{r}_B + \dot{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{r}}_B$

und gleichzeitig $\mathbf{a}_B = \ddot{\gamma} \times \mathbf{r}_B + \dot{\gamma} \times \mathbf{v}_B$

Da sich der Punkt B auf der Kreisbahn bewegt, hat die Beschleunigung zwei Komponenten
Tangentiale Komponente

$$\mathbf{a}_B^T = \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und normale Beschleunigung

$$\mathbf{a}_B^N = -\frac{v^2}{r} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = -\frac{v^2}{r} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = -\frac{v^2}{r} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Ihre Module sind:

$$|\mathbf{a}_B| = \sqrt{\ddot{r}^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} = \ddot{r} \sqrt{1 + \frac{v^4}{r^2 \ddot{r}^2}} \quad \text{oder} \quad |\mathbf{a}_B| = \ddot{r} \sqrt{1 + \frac{v^4}{r^2 \ddot{r}^2}}$$

In Matrixform:

$$\mathbf{a}_B = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

was dazu führt

$$\mathbf{a}_B = \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

dann ist die zweite Ableitung der Transformationsmatrix:

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Somit beträgt die Beschleunigung des Punktes B

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) \mathbf{r} = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) \mathbf{r} = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) \mathbf{r}$$

wobei die erste Komponente die Tangentialbeschleunigung darstellt

$$\mathbf{a}_B = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und die zweite Komponente stellt die Normalbeschleunigung dar

$$\mathbf{a}_B = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Der Bewegungsverlauf wird durch die Tangentialbeschleunigung erfasst

$$\ddot{r} = \frac{Dv}{dt}$$

Es kann zwei Situationen geben:

A) $\ddot{\gamma} = \text{konst.} \quad \ddot{\gamma} = 0$

Daher $A^N = 0$ Und $A^N = \ddot{\gamma} \cdot \gamma^2 = \frac{v^2}{\gamma}$

Diese Eigenschaften stellen **eine gleichmäßige Bewegung** des Teilchens **auf dem Kreis** dar.
Die auftretende Beschleunigung ist die Normalbeschleunigung.

B) $\ddot{\gamma} = \text{konst.} \quad \ddot{\gamma} \neq 0$

In diesem Fall kann die Winkelbeschleunigung $\ddot{\gamma}$ sein:

i) $\ddot{\gamma} = \text{konst.}$ daher $\ddot{\gamma} \cdot \gamma = \ddot{\gamma} \cdot \gamma = \text{konst.}$ (unter der Annahme $\ddot{\gamma} = \text{konst.}$)

Diese Eigenschaften repräsentieren eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung auf der Kreisbahn
– **gleichmäßig beschleunigte Rotation.**

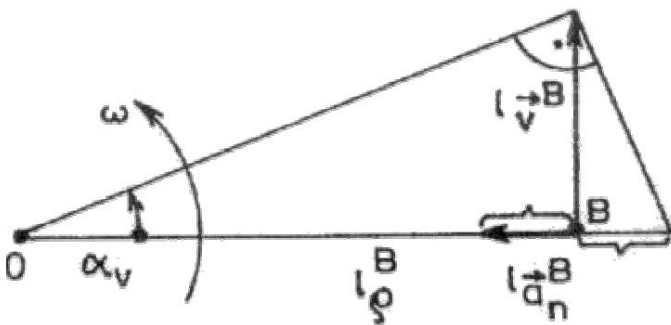
ii) $\ddot{\gamma} \neq \text{konst.}$ daher $\ddot{\gamma} \cdot \gamma \neq \ddot{\gamma} \cdot \gamma = \text{konst.}$

Diese Eigenschaften stellen eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung auf dem Kreis dar,
ungleichmäßig beschleunigte Rotation.

In beiden Fällen erfolgt die normale Beschleunigung. $A^N = \ddot{\gamma} \cdot \gamma^2 = \frac{v^2}{\gamma}$

3.2.3 Konsequenzen der Festkörperkinematik (die geometrische Abhängigkeit)

Um die grafische Lösung für kinematische Größen bereitzustellen, müssen wir Geschwindigkeit und Beschleunigung in grafischer Form aufzeichnen. Zu diesem Zweck müssen die Längen- und Geschwindigkeitsskalen angegeben werden, während die restlichen Skalen berechnet werden.



Wo l_B stellt die Länge von dar
der Radiusvektor γ

$l_B = \gamma$ also $\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma} \cdot \gamma$

und Geschwindigkeit $v = \omega \cdot \gamma$

Daher ist der Winkel γ_v gegeben als

$\gamma_v = \frac{l_B}{\gamma} \cdot \frac{v}{\ddot{\gamma}} = \frac{l_B}{\gamma} \cdot \frac{\omega \cdot \gamma}{\ddot{\gamma}} = \frac{l_B}{\gamma} \cdot \frac{\omega}{\ddot{\gamma}} = \frac{l_B}{\gamma} \cdot k_v$

Wo k_v ist eine Geschwindigkeitsskalenkonstante.

Da alle Punkte auf dem Körper die gleiche Winkelgeschwindigkeit $\ddot{\gamma}$ haben, können wir daraus schließen – **Satz zu Geschwindigkeiten:**

$\ddot{\gamma}$

Beschleunigung – die grafische Lösung

Es müssen eine Tangential- und eine Normalkomponente der Beschleunigung aufgezeichnet werden

Die Normalkomponente der Beschleunigung:

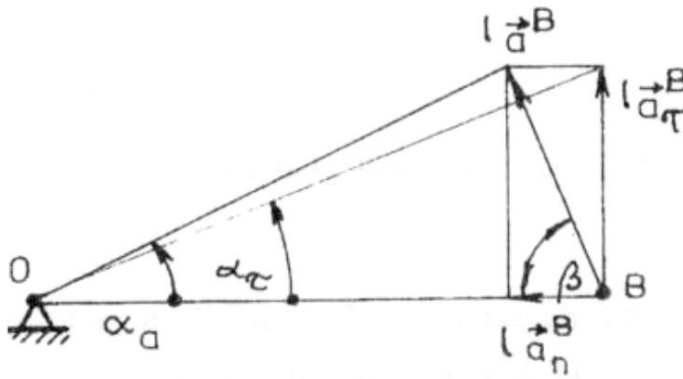
$$A_N = \frac{v^2}{r} \quad \text{somit folgt aus Euklids Gesetz über die Höhe im Dreieck}$$

die grafische Konstruktion der Normalbeschleunigung.

Der Beschleunigungsmaßstab muss berechnet werden!!

daher $A_N = \frac{f_v^2}{s_l \cdot \ddot{\gamma}} = s_l \cdot \ddot{\gamma}$ Wo $I_{\text{ein}} = \frac{l_v^2}{l_{\ddot{\gamma}}}$ Und $s_A = \frac{s_v^2}{s_l}$

Die Tangentialkomponente der Beschleunigung: $\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}$



Die Richtung der Tangentialkomponente entspricht der Richtung der Geschwindigkeit, daher ist eine weitere Analogie zur Geschwindigkeit offensichtlich.

$$\ddot{\gamma}_{A_y} = \frac{l_{A_y}}{l_{\ddot{\gamma}}} = \frac{a/s}{\ddot{\gamma}} = \frac{l}{s_A} \ddot{\gamma} \quad k_{A_y}$$

wo k_A ist eine Tangentiale Beschleunigungsskalenkonstante.

Da alle Punkte auf dem Körper die gleiche Winkelbeschleunigung $\ddot{\gamma}$ haben, können wir daraus schließen:

Satz zur Tangentialbeschleunigung:

$$\ddot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}$$

Die Gesamtbeschleunigung ergibt sich aus der Summe ihrer Komponenten $\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$

$$\ddot{\gamma} = \frac{A_y}{A_N} = \frac{\ddot{\gamma}}{\ddot{\gamma}^2} = \frac{\ddot{\gamma}}{\ddot{\gamma}^2} \quad k_A$$

wobei k_A die Skalenkonstante der Gesamtbeschleunigung darstellt.

Da $\ddot{\gamma}$ und $\ddot{\gamma}$ für alle Punkte des Körpers konstant sind, schließen wir: Die

Gesamtbeschleunigung des Punktes auf dem rotierenden Festkörper bildet einen Winkel $\ddot{\gamma}$ gegenüber seiner Normalen auf die Flugbahn, die für alle Punkte des Körpers konstant bleibt.

Und schließlich können wir basierend auf dem Hintergrund abschließen: $\ddot{\gamma}_A = \frac{l_{A_y}}{l_{\ddot{\gamma}} \cdot l_{mm}} = \frac{\ddot{\gamma}}{1 \cdot \ddot{\gamma}^2}$

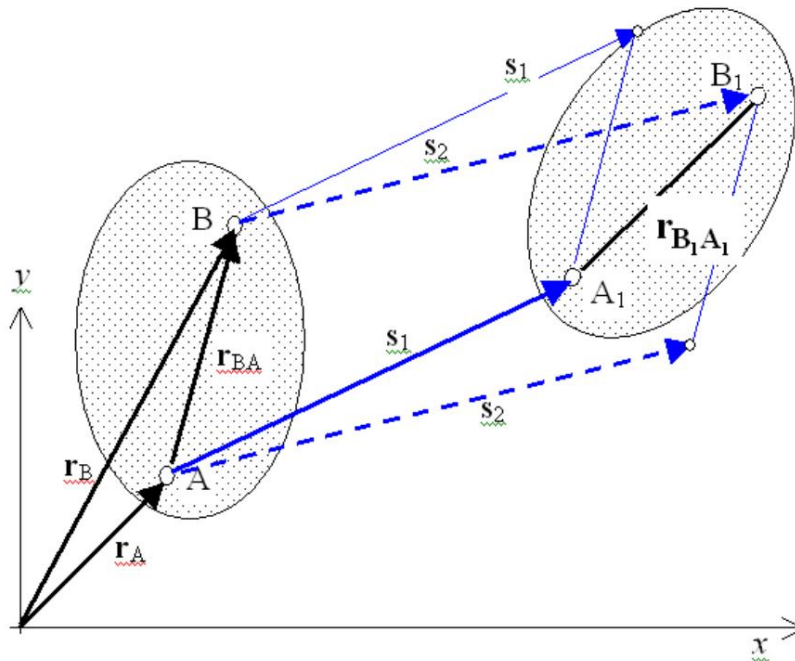
zusammen mit den für alle Punkte des Körpers gleichen winkelkinematischen Größen $\ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}$:

$$\ddot{\gamma}$$

3.3 UNIVERSELLE PLANARE BEWEGUNG

Wenn sich alle Punkte eines Körpers in Ebenen parallel zur festen (stationären) Grundebene bewegen, spricht man von einer ebenen Bewegung des Körpers.

Wenn die Trajektorien aller Punkte, die auf der Linie senkrecht zu dieser Ebene liegen, ebene Kurven sind dann ist die Bewegung eine universelle ebene Bewegung.



Die Ausgangsposition des Körpers wird durch die Punkte A, B beschrieben. Ein Positionsvektor für Punkt B unter Verwendung eines Referenzpunkts A als beschreibt Ausgangsposition Position eines Körpers:

$$\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

Während des Zeitintervalls t ändert sich ihre Position zu einem neuen Standort A1 und B1 also $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{A1} - \mathbf{r}_{B1}$

Wie auf dem Diagramm zu sehen

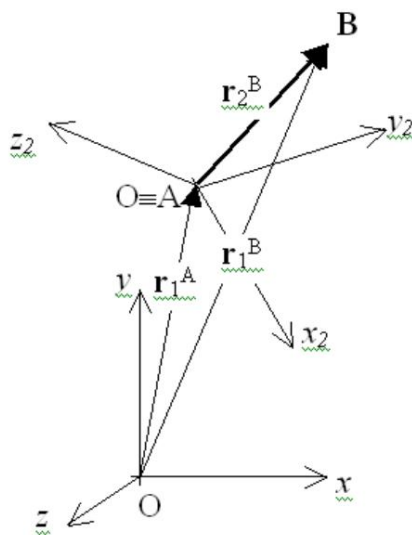
$$\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_{B1} - \mathbf{r}_{A1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{BA}$$

welche

bedeutet, dass der Vektor seine Ausrichtung ändert, nicht jedoch seine Größe.

Daher können wir uns die universelle ebene Bewegung als eine Folge von Translationsbewegungen vorstellen gefolgt von einer Rotation, die kurz ausgedrückt werden könnte als: GPM = TM + RM. Hinweis: Beide Bewegungen finden gleichzeitig statt und dieser Ansatz ist nur imaginär.



3.3.1 Die Position

des Punktes B kann in Vektor- oder Matrixform ausgedrückt werden:

$$\mathbf{r}_{B1} = \mathbf{r}_{A1} + \mathbf{r}_{BA}$$

unter Verwendung der Transformationsmatrix $\mathbf{C}_{21}$:

$$\mathbf{r}_{B1} = \mathbf{r}_{A1} + \mathbf{C}_{21} \mathbf{r}_{BA}$$

das führt zu zwei Gleichungen in Vektorform:

$$\begin{aligned} x_1^B &= x_1^A + x_1^{BA} \cos \theta - y_1^A \sin \theta \\ y_1^B &= y_1^A + x_1^A \sin \theta + y_1^{BA} \cos \theta \end{aligned}$$

oder in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} x_1^B \\ y_1^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^A \\ y_1^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{BA} \\ y_1^{BA} \end{bmatrix}$$

3.3.2 Die Geschwindigkeit

eines Punktes B kann ausgedrückt werden:

in Vektorform: $\mathbf{v}_1^B = \mathbf{r}_1^A + \left(\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}_1^A + \mathbf{r}_1^{BA} \right) \right) = \mathbf{v}_1^A + \frac{d}{dt} \mathbf{r}_1^{BA}$

daher $\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \dot{\gamma} \times \mathbf{r}_1^{BA}$

oder in Matrixform: $\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \frac{d}{dt} \mathbf{r}_1^{BA} = \mathbf{v}_1^A + \mathbf{C}_{11}^{BA} \dot{\gamma} \mathbf{r}_1^{BA}$

$\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \mathbf{C}_{11}^{BA} \dot{\gamma} \mathbf{r}_1^{BA}$

Es gibt eine Drehung des Punktes B in Bezug auf den Punkt A, daher sagen wir, dass es eine Relativbewegung des Punktes B um den Punkt A.

Daher $\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \dot{\gamma} \times \mathbf{r}_1^{BA}$

wobei $\dot{\gamma}$ die Winkelgeschwindigkeit einer Relativbewegung in Bezug auf den Punkt A darstellt.

Die relative Winkelgeschwindigkeit ist für alle Punkte des Körpers konstant, also: $\dot{\gamma} = \frac{v^{BA}}{BA} = \frac{v^{CA}}{CA} = \text{const.}$

Dann können wir die Komponenten der Geschwindigkeit erhalten:

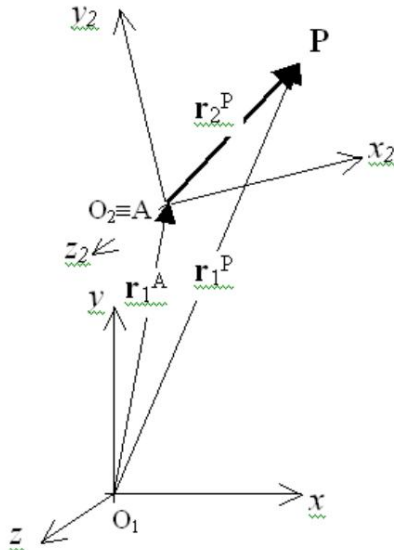
$$\begin{aligned} \dot{\gamma} v_x^B &= \dot{\gamma} v_x^A + \dot{\gamma} \rho \sin \theta \\ \dot{\gamma} v_y^B &= \dot{\gamma} v_y^A + \dot{\gamma} \rho \cos \theta \\ \dot{\gamma} v_z^B &= \dot{\gamma} v_z^A + \dot{\gamma} \rho \sin \theta \end{aligned}$$

Grafische Lösung:

Die Geschwindigkeit eines Punktes A ist bekannt, daher müssen wir die Geschwindigkeit am Punkt B anhand der Vektorgleichung ermitteln: $\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \dot{\gamma} \times \mathbf{r}_1^{BA}$

3.3.3 Der Bewegungspol

Wenn $\ddot{\gamma}$ dann gibt es nur einen Punkt auf dem Körper, der im Moment die Geschwindigkeit Null hat und gehört zum sich bewegenden Körper (oder der an dem sich bewegenden Körper befestigten Ebene). Dieser Punkt wird als **momentanes Rotationszentrum** oder Bewegungspol bezeichnet.



Die Position eines Pols P ist gegeben als:

$$\mathbf{r}_1^P = \mathbf{r}_1^A + \mathbf{r}_1^{PA}$$

in Matrixform: ${}^P_1 \mathbf{r}_1^T = {}^P_1 \mathbf{r}_1^T + {}^P_1 \mathbf{r}_1^{PA}$

Dann ist die Geschwindigkeit des Pols: $\mathbf{v}_1^P = \mathbf{v}_1^A + \mathbf{v}_1^{PA}$

da die lineare Geschwindigkeit an diesem Ort also Null ist

$$\mathbf{v}_1^P = \mathbf{v}_1^A + \ddot{\gamma} \mathbf{r}_1^{PA}$$

Für einen beliebigen Referenzpunkt würden wir ähnliches erhalten

Antwort:

$$0 = \mathbf{v}_1^B + \ddot{\gamma} \mathbf{r}_1^{PB} \Rightarrow \mathbf{v}_1^B = -\ddot{\gamma} \mathbf{r}_1^{PB}$$

Die Position des Pols eines sich bewegenden Körpers ermitteln GPM müssen wir die Geschwindigkeitsgleichung mit der Winkelgeschwindigkeit multiplizieren

Daher $0 = \ddot{\gamma} \times \mathbf{v}_1^A + \ddot{\gamma} \times \mathbf{r}_1^A \quad ({}^PA)$

Die Gleichung in eine Form umwandeln

$$0 = \ddot{\gamma} \times \mathbf{v}_1^A + \ddot{\gamma} \times \mathbf{r}_1^A \quad ({}^PA)$$

beim Gleichsetzen $\ddot{\gamma} \times \mathbf{r}_1^A = 0$ Und $\ddot{\gamma} \times \mathbf{v}_1^A = \ddot{\gamma}^2$

wir bekommen $0 = \ddot{\gamma} \times \mathbf{v}_1^A + \ddot{\gamma}^2 \mathbf{r}_1^{PA}$

von wo aus wir den Polpositionsvektor gleichsetzen

$$\mathbf{r}_1^{PA} = \frac{\ddot{\gamma} \times \mathbf{v}_1^A}{\ddot{\gamma}^2} = \frac{\mathbf{v}_1^A \times \ddot{\gamma}}{\ddot{\gamma}^2} = \frac{1}{\ddot{\gamma}^2} \mathbf{v}_1^A \times \ddot{\gamma} \quad \text{mit } \mathbf{v}_1^A = \frac{1}{\ddot{\gamma}} \left[\ddot{\gamma} \mathbf{v}_1^A + \mathbf{J}_1(\ddot{\gamma} \mathbf{v}_1^A) \right]$$

Grafische Lösung:

Basierend auf $\vec{v}_1 = \dot{y}_1$ und

Die Geschwindigkeit $\vec{v}^A$ ist bekannt und

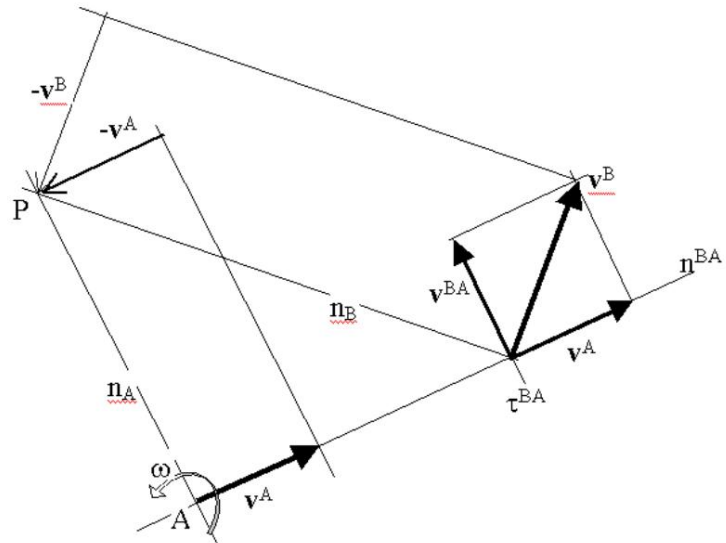
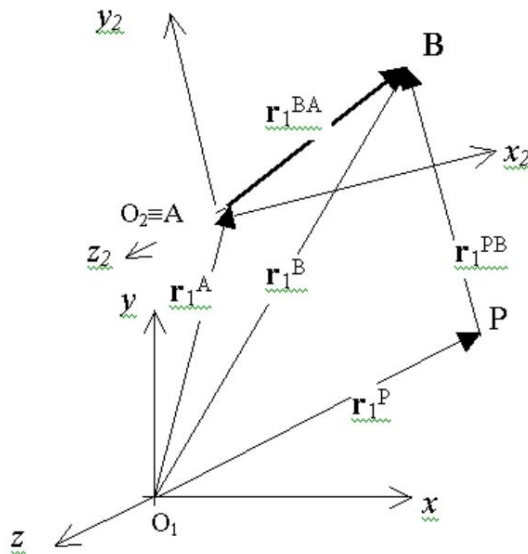
Geschwindigkeit am Punkt B ist

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_1^{BA}$$

Wenn wir also die Geschwindigkeit kennen, kennen wir die Richtung einer Normalen zu die Flugbahn.

Der Bewegungspol liegt am

Schnittpunkt der Normalen n_A und n_B .

**Ermitteln der Geschwindigkeit anhand des Pols**

Position eines Punktes B

$$\vec{r}_{11}^{BP} = \vec{r} + \vec{r}$$

oder

$$\vec{r}_1^B = \vec{r}_1 + \vec{r}_1^{BP}$$

Dann ist die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_1^B = \vec{v}_1 + \vec{v}_1^{BP}$$

Da die Geschwindigkeit des Pols Null ist, erhalten wir

$$\vec{v}_1^B = \vec{C} \vec{r}_1^{BP}$$

in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \cos \dot{y} \\ \dot{y}_1 \sin \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \cos \dot{y} \\ \dot{y}_1 \sin \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

das würde dazu führen

$$\dot{v}_1^B = \dot{y}_1^{BP} \quad \text{Und} \quad \dot{v}_1^B = \dot{y}_1^{BP}$$

Somit ergibt sich die Endgeschwindigkeit

$$|\vec{v}_1^B| = \sqrt{(\dot{y}_1^{BP})^2 + (\dot{y}_2^{BP})^2} = \sqrt{(\dot{y}_1^{BP})^2 + (\dot{y}_2^{BP})^2} = \dot{y}_1^{BP}$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{v}_1^B}{R_1^{BP}}$$

Dann ist die Winkelgeschwindigkeit

Aus diesem Ergebnis folgt die Interpretation für die grafische Lösung:

$$\dot{y} = \frac{\dot{v}_1^B}{R_1^{BP}} = \frac{\dot{v}_1^B}{R_1^{BP}} = \dot{y} \quad \text{also geben} \quad \tan \dot{y} = \frac{1}{k_v}$$

Abschluss:

$$\ddot{y}$$

3.3.4 Analytische Ermittlung der Beschleunigung

Den Ortsvektor und die Geschwindigkeit v_1 haben wir bereits gefunden

$$\mathbf{r}_1^B = \mathbf{r}_1^A + \mathbf{r}_{11}^{BA}$$

$$\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \mathbf{v}_{11}^{BA}$$

wobei die Geschwindigkeit v_{11}^{BA} stellt die relative Bewegung des Punktes B um den Punkt A dar, die ausgedrückt werden kann als

$$\mathbf{v}_{11}^{BA} = \dot{\gamma} \times \mathbf{r}_{11}^{BA} \quad \text{in Vektorform bzw.}$$

$$\mathbf{v}_{11}^{BA} = \mathbf{C}_{11}^{BA} \dot{\gamma} \mathbf{r}_{11}^{BA} \quad \text{in Matrixform.}$$

Da wir das bewiesen haben $\mathbf{a} = \dot{\gamma} \mathbf{r} = \ddot{\gamma}$

$$\mathbf{a}_1^B = \mathbf{a}_1^A + \mathbf{a}_{11}^{BA}$$

Wir können die Beschleunigungsgleichung ableiten

Wobei die Beschleunigung der relativen Bewegung eines Punktes B um Punkt A zwei Komponenten hat, da die relative Bewegung die Drehung mit einem festen Punkt bei A ist.

Daher $\mathbf{a}_{11}^{BA} = \dot{\gamma} \times \mathbf{r}_{11}^{BA} + \gamma v_{11}^{BA}$ in Vektorform. Die Beschleunigung in der Matrixform ist a

Ergebnis der Ableitung:

$$\mathbf{r}_1^B = \mathbf{r}_1^A + \mathbf{r}_{11}^{BA}$$

$$\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \dot{\gamma} \mathbf{C}_{11}^{BA} \mathbf{r}_{11}^{BA}$$

$$= \dot{\gamma} \mathbf{C}_{11}^{BA} \mathbf{r}_{11}^{BA} + \mathbf{v}_1^A$$

im Falle eines Festkörpers $\gamma_{BA} = 0$ da sich der Abstand zwischen den Punkten A und B also nicht ändert

$$\mathbf{a}_{11}^{BA} = \mathbf{A} \ddot{\gamma} \mathbf{C}_{11}^{BA} \mathbf{r}_{11}^{BA} + \dot{\gamma} \dot{\gamma} \mathbf{C}_{11}^{BA} \mathbf{r}_{11}^{BA}$$

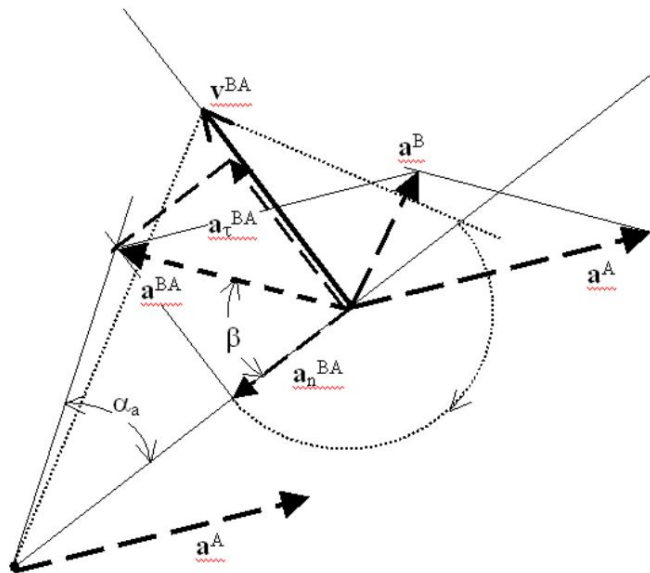
$$\mathbf{a}_1^B = \mathbf{a}_1^A + (\mathbf{A} + \dot{\gamma}) \ddot{\gamma} \mathbf{r}_{11}^{BA}$$

Wo $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_x & 0 & \ddot{\gamma}_z & \ddot{\gamma}_j \\ \ddot{\gamma}_z & 0 & \ddot{\gamma}_x & \ddot{\gamma}_j \\ \ddot{\gamma}_j & \ddot{\gamma}_j & \ddot{\gamma}_x & 0 \end{pmatrix}$ stellt die halbsymmetrische Winkelmatrix dar

Beschleunigung

Grafisch

Um die Beschleunigung zu ermitteln, verwenden wir die Leitgleichung



$$a^B = a^A + a^{BA}$$

Die Beschleunigung eines Punktes A ist gegeben und die Beschleunigung der Relativbewegung von Punkt B wird durch zwei Komponenten (tangential und normal) in den jeweiligen Richtungen zur Bahn des Punktes B beschrieben.

Die Normalkomponente des wird aus dem Beschleunigung a^{BA} Bekannten ermittelt

Geschwindigkeit v^{BA} (grafisch mittels Euklidisches Dreieck).

Somit ist im Moment der Winkel γ zwischen der Endbeschleunigung der Relativbewegung und der Normalen auf die

Der Weg der Relativbewegung ist gegeben durch

$$\ddot{\gamma} = \frac{a^{BA}}{v^{BA}} = \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma^2} \quad \text{const.}$$

Abschluss:

Die Endbeschleunigung der Relativbewegung um Punkt A bildet eine Winkelnormalkomponente $\ddot{\gamma}$ mit dem der Beschleunigung, die für alle Punkte des Körpers, die sich mit Relativbewegung bewegen, konstant ist.

Auf ähnliche Weise können wir die Tangentialkomponente der Beschleunigung und des Endeffekts beobachten Beschleunigung. Somit ist dieser Winkel gegeben durch:

$$\tan \gamma = \frac{a_t^{BA}}{a_n^{BA}} = \frac{\ddot{\gamma} \cdot \frac{I_{A_y}^2}{v^2}}{\ddot{\gamma} \cdot \frac{I_{A_N}^2}{v^2}} \quad \text{Wo} \quad I_{\gamma} = \frac{I_v^2}{I_{\text{ein}}}$$

Da $\ddot{\gamma}$ und γ im gegebenen Zeitintervall für alle Punkte des starren Körpers konstant sind, gilt auch der $\tan \gamma = \text{konst.}$

Abschluss:

Die Endpunkte der Tangentialkomponenten der Beschleunigung für alle Punkte des Körpers werden vom Rotationszentrum aus unter demselben Winkel gesehen.

3.3.5 Das momentane Zentrum der Beschleunigung – der Pol der Beschleunigung

Ebenso wie für den Pol der Geschwindigkeit P gibt es einen Pol der Beschleunigung Q, den Punkt, der im Moment keine Beschleunigung hat.

Die Beschleunigung für diesen Pol Q ist gegeben durch:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} + \dot{\gamma} \mathbf{r} + \ddot{\gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{r} \quad (1)$$

Multiplikation mit $\dot{\gamma}$ von links

$$\dot{\gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \dot{\gamma} \times (\dot{\gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{r}) + \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 \quad (2)$$

wir erhalten

$$0 = \dot{\gamma} \times \mathbf{a} + \dot{\gamma}^2 \mathbf{r} + \ddot{\gamma} (\dot{\gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{r})$$

) und Ersetzen des Ausdrucks

$$\dot{\gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \dot{\gamma}^2 \mathbf{r} + \ddot{\gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{a} + \dot{\gamma}^2 \mathbf{r}_1$$

wir finden

Die

Positionsvektor des Pols der Beschleunigung

$$\mathbf{r}_{1Q} = \frac{\dot{\gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \dot{\gamma}^2 \mathbf{r}_1}{\dot{\gamma}^2 + \ddot{\gamma}^2}$$

Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit dem Ausdruck für den Geschwindigkeitspol

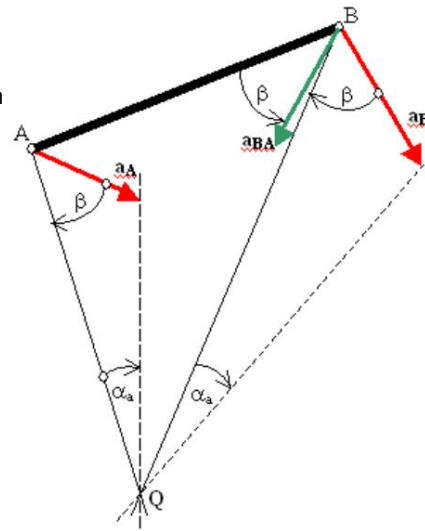
$$\mathbf{r}_{1P} = \frac{\dot{\gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{a}_1}{\dot{\gamma}^2}$$

zeigt, dass diese beiden Ausdrücke unterschiedlich sind, also sind die beiden Pole unterschiedlich und wir können daraus schließen:

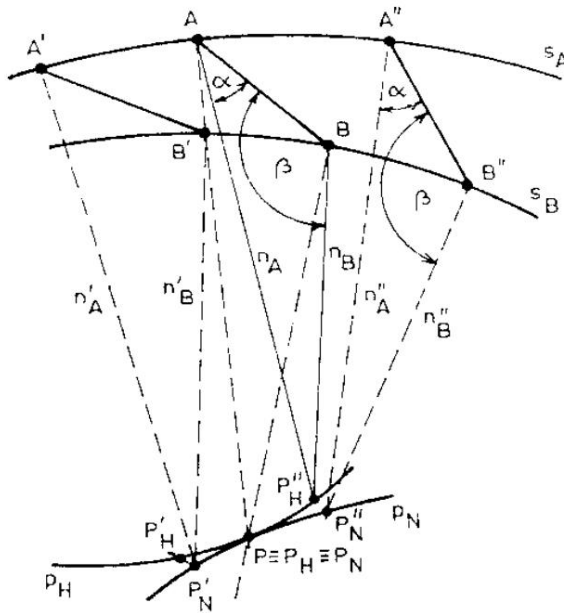
Der Pol der Beschleunigung ist nicht identisch mit dem Pol der Geschwindigkeit

Wenn $\dot{\gamma} = 0$ und $\ddot{\gamma} \neq 0$ dann gibt es einen Punkt auf dem sich bewegende Ebene mit der Beschleunigung $\mathbf{a}^Q = 0$.

Dieser Punkt liegt am Schnittpunkt von Linien, die mit den Richtungen der Gesamtbeschleunigung jedes einzelnen Punktes auf der sich bewegenden Ebene einen Winkel $\dot{\gamma}$ bilden.



3.4 ZENTRUM DER FLUGKÜMMUNG



Der Körper, der sich mit der universellen ebenen Bewegung bewegt, wird durch zwei Punkte A und B und ihre Flugbahnen s_A und s_B definiert, die die Punkte in der Ebene zeichnen. Somit kann jederzeit die Position des Geschwindigkeitspols ermittelt werden, der im Schnittpunkt zweier Normalen liegt.

Der Körper ist mit dem beweglichen CS2 verbunden und die Positionen aller momentanen Geschwindigkeitspole erzeugen eine pH -Kurve – der Ort aller dieser Positionen wird **bewegte Polode** genannt während die Pole, die mit der stationären festen Ebene CS1 verbunden sind, eine Kurve mit dem Symbol pN erzeugen – die **feste Polode**.

Somit können wir uns die universelle ebene Bewegung als eine Bewegung vorstellen, die durch das Abrollen der Ortskurve der Pole pH (verbunden mit der sich bewegenden Ebene) erzeugt wird

der Ort der Pole pN (verbunden mit dem festen Rahmen).

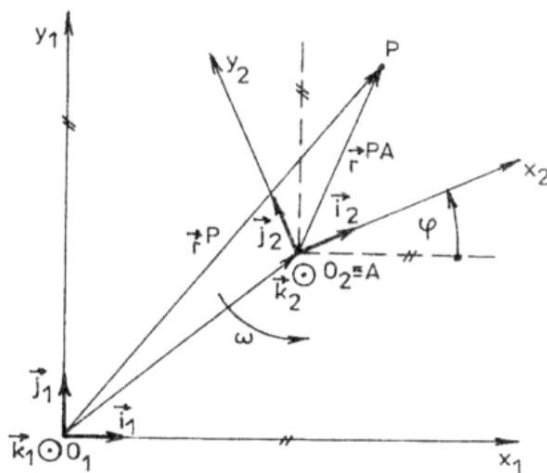
Die Polgeschwindigkeit beschreibt die Änderungsgeschwindigkeit der Polposition.

Es ist möglich, die Änderungsrate des Positionsvektors mithilfe des Referenzpunkts A in Bezug auf den festen Rahmen zu ermitteln

$$\mathbf{v}_N^P = +^A \frac{\ddot{y} \mathbf{a} \ddot{y} \dot{x}^A}{\dot{y}^2} \mathbf{A}$$

Und für den Pol, der mit der sich bewegenden Ebene verbunden ist

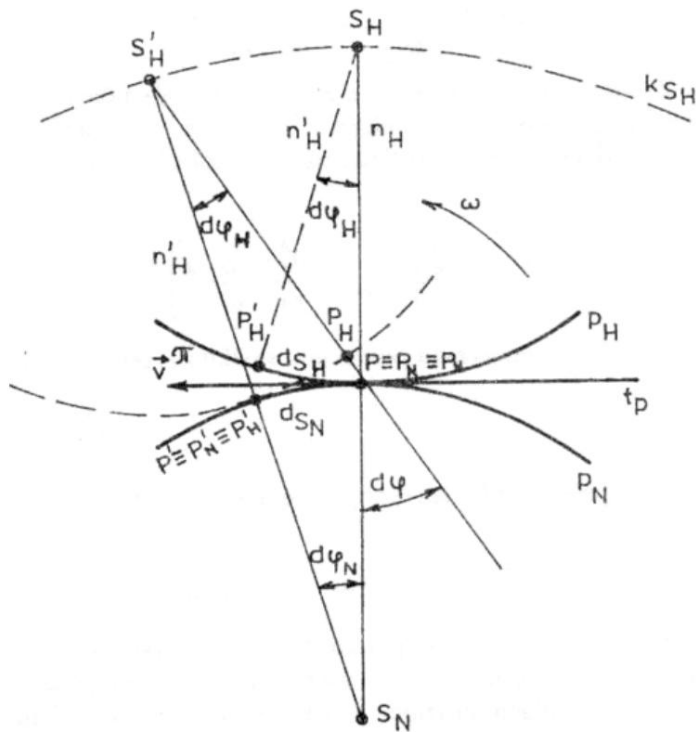
$$\mathbf{v}_H^P = +^A \frac{\ddot{y} \mathbf{a} \ddot{y} \dot{x}^A}{\dot{y}^2} \mathbf{A}$$



Da die abgeleiteten Gleichungen der Polgeschwindigkeiten identisch sind, können wir ein Symbol $\mathbf{v}$ zuweisen, ihre sind Pol der Geschwindigkeit und schließen daraus:

Der Punkt, an dem sich beide Ortskurven pN und pH zu diesem Zeitpunkt berühren, ist der Bewegungspol P (das momentane Rotationszentrum) und an diesem Punkt haben die beiden Kurven eine gemeinsame Tangente tp .

Die Polgeschwindigkeit als Änderungsrate der Polposition liegt auf der Tangente tp .



Die Aufgabe besteht darin, die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes zu untersuchen oder die Geschwindigkeit und Beschleunigung des gesamten Körpers zu bestimmen. Die Punkte des sich bewegenden Körpers zeichnen Trajektorien, sodass jeder Punkt des Körpers zu diesem Zeitpunkt durch seine Normale zur Bewegung und den Radius davon gekennzeichnet ist Flugbahn.

Beim Aufbau der Normalkomponente der Beschleunigung

$$N \frac{1}{\ddot{y}} \dot{s}^2 = A_N$$

der Krümmungsmittelpunkt des

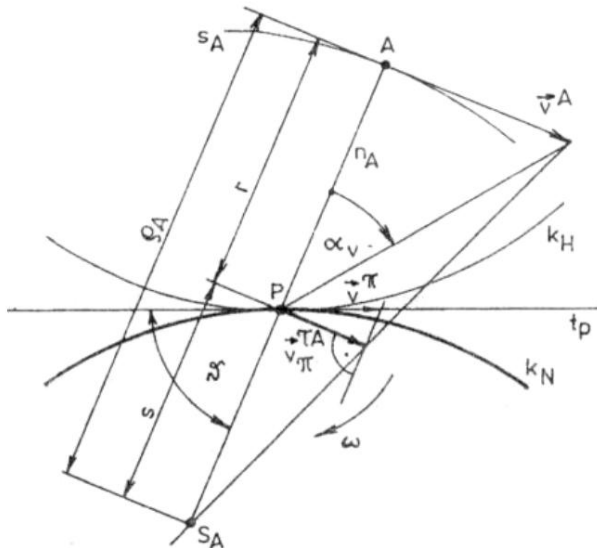
Zur Ermittlung des Radius ist eine Flugbahn erforderlich

Um den Krümmungsmittelpunkt zu finden

Wir können verschiedene Methoden anwenden.

Hier werden nur zwei Methoden vorgestellt: a)

analytisch – **Euler-Savary-Gleichung**



Der Krümmungsmittelpunkt S_A , der dem Punkt A auf dem sich bewegenden Körper zugeordnet ist, der die Flugbahn s_A zeichnet, ist bekannt. So können wir die Polgeschwindigkeit mithilfe der grafischen Hartman-Methode ermitteln, um dies zu zeigen

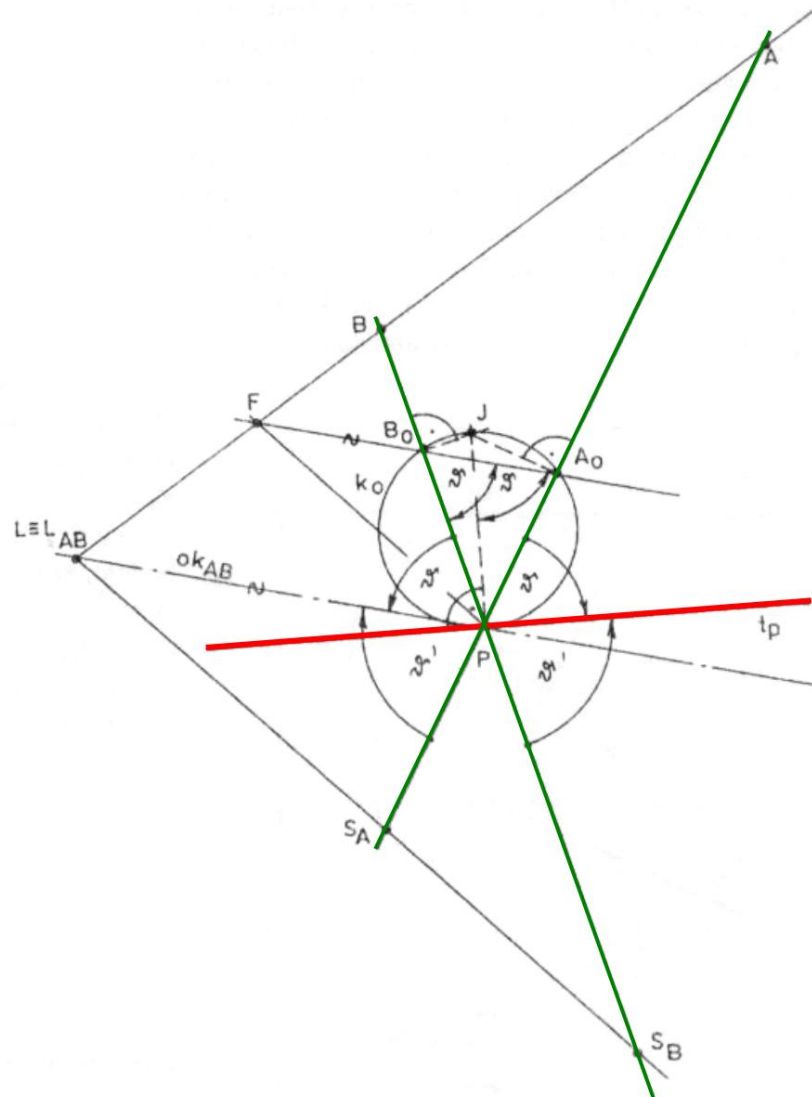
$$\frac{\text{Ein } v}{\ddot{y}_A} = \frac{V_y^A}{Sr} + \frac{r\ddot{v}}{\ddot{y}} + \frac{S \ddot{\text{Sünde}} \ddot{y}}{S}$$

$$\frac{\ddot{y}}{V_y} = \ddot{\gamma} + \frac{rS^+}{rS} \ddot{\text{Sünde}} \ddot{y} + 1 \frac{\ddot{y}}{\ddot{y} Sr} + \frac{1 \ddot{y}}{\ddot{y} \ddot{\text{Sünde}} \ddot{y}} = \ddot{y}$$

was **die Euler-Savary-Gleichung** darstellt

Wird in analytischen Lösungen verwendet, um den Mittelpunkt zu finden Krümmung.

b) Grafische Methode nach Bobillier



Der Winkel zwischen der Normalen eines Punktes und der Kollineationsachse ist derselbe wie der Winkel, der zwischen der Normalen des anderen Punktes und der Tangente an die Orte der Polpositionen in entgegengesetzter Richtung gemessen wird.

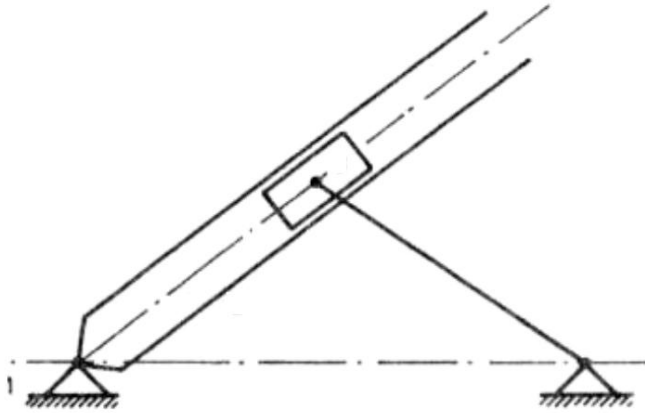
Es gibt zwei Aufgaben:

1. Die Tangente t_p und ein Paar konjugierter Punkte A, SA sind bekannt und der Krümmungsmittelpunkt der Trajektorie des Punktes C muss identifiziert werden.
2. Die beiden Paare konjugierter Punkte A, SA und B, SB sind bekannt und der Krümmungsmittelpunkt der Flugbahn des Punktes C muss identifiziert werden.

3.5 KOMBINIERTE BEWEGUNG

Der Mechanismus besteht aus einer Anzahl von Körpern, die entweder eine ebene oder räumliche Bewegung ausführen, die als Kombination der Relativbewegung zwischen Körpern und Körpern beschrieben werden könnte

Antriebs-/Tragebewegung des Aktuators des Systems relativ zum Bezugssystem.



Analyse der Bewegung jedes Körpers im Mechanismus:

B1 – Referenzrahmen

B2 –

B3 –

B4 –

Bewegung der daran befestigten Körper

Der Frame wird als Rotation identifiziert

mit dem festen Drehpunkt bei

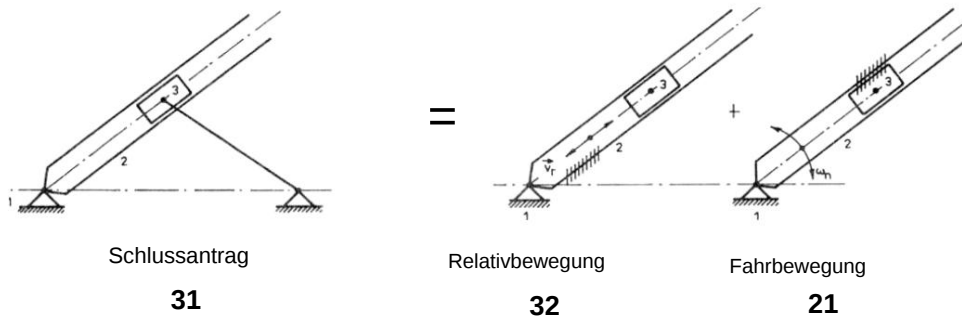
O21 oder O41, also wird die Körperbewegung

durch Winkelgeschwindigkeit und Beschleunigung,

$\dot{\gamma}$ bzw. $\ddot{\gamma}$, definiert. Im Falle einer einfachen Bewegung wie Rotation oder Translation können wir die Trajektorie problemlos identifizieren und so die kinematischen Größen problemlos auswerten. Im Falle einer planaren oder räumlichen Bewegung des Körpers ist die Flugbahn keine einfache Kurve und daher kann es schwierig sein, die kinematischen Größen zu ermitteln.

Deshalb führen wir die auf kombinierter Bewegung basierende Strategie ein und implementieren eine imaginäre Aufteilung der komplexen Bewegung in zwei Bewegungen: die Bewegung des Referenzpunkts und die Drehung um den Referenzpunkt.

Wir können es uns vorstellen



Dies könnte durch eine symbolische Gleichung erfasst werden $31 = 32 + 21$

Und kinematische Größen können für den identifizierten Punkt B ausgedrückt werden als

Daher

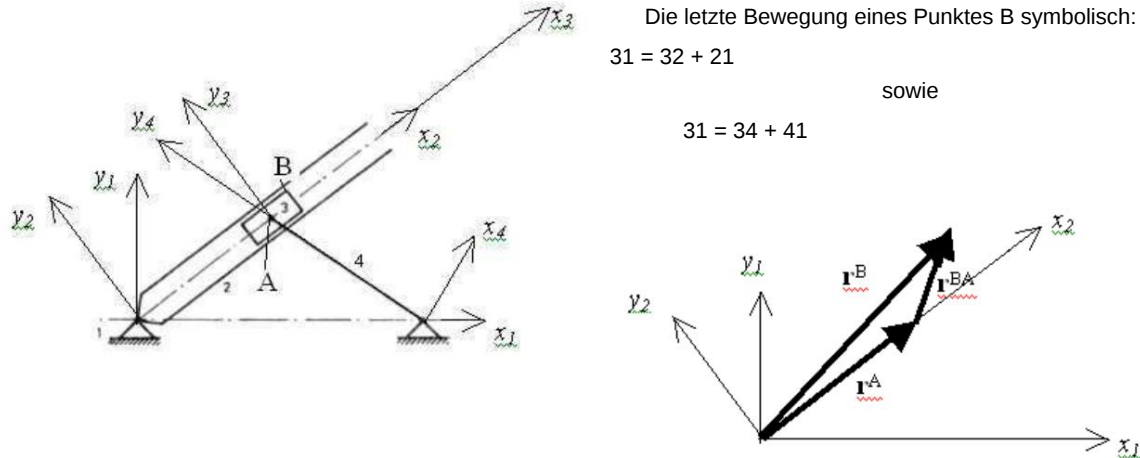
$$v_{31}^B = v_{32}^B + v_{21}^B$$

Aber

$$a_{31}^B = a_{32}^B + a_{21}^B + a_{kor}^B$$

Um diese Aussage zu beweisen, müssen wir die Geschwindigkeit im Punkt B definieren

3.5.1 Kinematische Größen durch kombinierte Bewegung



Der Ortsvektor eines Punktes B ist:

$$\mathbf{r}_1^B = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2^{BA} = \mathbf{r}_1 + i_{22}^{BA} x_2 + j_{22}^{BA} y_2$$

3.5.2 Die Geschwindigkeit

eines Punktes B:

$$\mathbf{v}_1^B = \dot{\mathbf{r}}_1^B = \dot{\mathbf{r}}_1 + i_{22}^{BA} \dot{x}_2 + j_{22}^{BA} \dot{y}_2$$

wo $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{y}}_1 \times \mathbf{r}_1$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{y}}_1 \times \mathbf{r}_1$$

Durch Einsetzen und Umstellen erhalten wir die Gleichung der Endgeschwindigkeit am Punkt B ausgedrückt

in CS1 $\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \dot{\mathbf{y}}_1 \times (i_{22}^{BA} x_2 + j_{22}^{BA} y_2) + i_{22}^{BA} \dot{x}_2 + j_{22}^{BA} \dot{y}_2$ Wo

der Ausdruck $\mathbf{v}_1^A + \dot{\mathbf{y}}_1 \times (i_{22}^{BA} x_2 + j_{22}^{BA} y_2)$ stellt die Geschwindigkeit dar, die durch das Fahren

Bewegung. Punkt B würde sich mit der Fahrgeschwindigkeit v_{21} bewegen, wenn es virtuell mit der Bewegung verbunden ist Ebene 2 (CS2)

der Ausdruck $i_{22}^{BA} \dot{x}_2 + j_{22}^{BA} \dot{y}_2$ stellt die relative Geschwindigkeit von Punkt B in Bezug auf den Punkt A. Damit bestätigen wir die vorherige Gleichung

$$\mathbf{v}_1^B = \mathbf{v}_1^A + \mathbf{v}_2^B$$

3.5.3 Die Beschleunigung

des Punktes B ist ein Produkt der Geschwindigkeitsableitung

$$\mathbf{a}_1^B = \frac{D}{dt} \mathbf{v}_1^B = \frac{D}{dt} (\mathbf{v}_1^A + \dot{\mathbf{y}}_1 \times (i_{22}^{BA} x_2 + j_{22}^{BA} y_2) + i_{22}^{BA} \dot{x}_2 + j_{22}^{BA} \dot{y}_2)$$

$$= \mathbf{a}_1^A + \dot{\mathbf{y}}_1 \times (i_{22}^{BA} \dot{x}_2 + j_{22}^{BA} \dot{y}_2) + \dot{i}_{22}^{BA} \dot{x}_2 + \dot{j}_{22}^{BA} \dot{y}_2 + i_{22}^{BA} \ddot{x}_2 + j_{22}^{BA} \ddot{y}_2$$

$$= \mathbf{a}_1^A + \dot{\mathbf{y}}_1 \times (\dot{x}_2 i_{22}^{BA} + \dot{y}_2 j_{22}^{BA}) + (\dot{i}_{22}^{BA} \dot{x}_2 + \dot{j}_{22}^{BA} \dot{y}_2) + i_{22}^{BA} \ddot{x}_2 + j_{22}^{BA} \ddot{y}_2$$

Daher $\mathbf{a}_1^B = \mathbf{a}_1^A + \dot{\mathbf{y}}_1 \times (\dot{x}_2 i_{22}^{BA} + \dot{y}_2 j_{22}^{BA}) + (\dot{i}_{22}^{BA} \dot{x}_2 + \dot{j}_{22}^{BA} \dot{y}_2) + i_{22}^{BA} \ddot{x}_2 + j_{22}^{BA} \ddot{y}_2$

Wo der Ausdruck

$${}^B \mathbf{a} = {}^A \mathbf{a} \ddot{\gamma}_{21} \mathbf{1}_{21} (\text{ich } \mathbf{j}^{BA} \mathbf{x} + 2 \mathbf{z}^{BA}) \ddot{\alpha} \ddot{\gamma} \mathbf{i} + \mathbf{x} \times \mathbf{x} + \mathbf{x} \ddot{\alpha} \mathbf{1} (\mathbf{j}^{BA} \mathbf{J}_2 \mathbf{z}^{BA})$$
 stellt die Beschleunigung dar
 der Antriebsbewegung im Punkt B

$\frac{B}{C} 2 \ddot{\gamma} \mathbf{ia} = \mathbf{v}_{21} \times (2 \mathbf{v}_{x}^{BA} + \mathbf{J}_{2J}^{BA})$ stellt die Coriolis-Beschleunigung aufgrund der antreibenden Winkelbewegung und der linearen Geschwindigkeit der Relativbewegung dar

$\mathbf{a}_{32}^B = \mathbf{i} + a_{22}^{BA} x \mathbf{j}$ stellt die Beschleunigung der Relativbewegung am Punkt B dar

Abschließend können wir schlussfolgern, dass beim Ausdrücken der Endbeschleunigung durch kombinierte Bewegung (Antrieb und Relativbewegung) von Körpern eine Komponente namens Coriolis-Beschleunigung eingeführt werden muss.

3.5.4 Coriolis-Beschleunigung

Coriolis-Beschleunigung ausgedrückt in Vektorform: $a_C^B = x^2 \ddot{y} \mathbf{v}_{21}^B$

Und in Matrixform: $2 \mathbf{a}^B = {}_{21}\mathbf{G} \mathbf{v} {}_{21}^{BA} = 2 \mathbf{y}^{BA}$

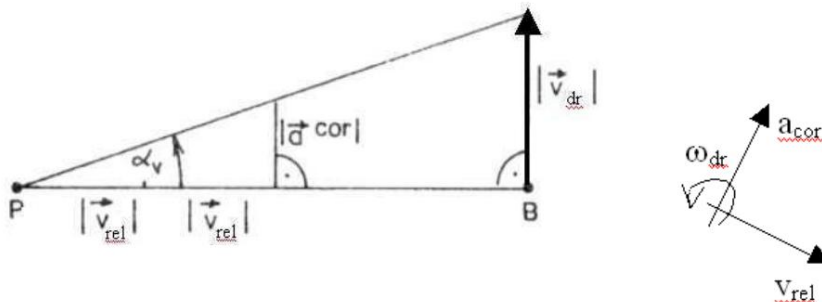
Die Coriolisbeschleunigung drückt die Richtungsänderung der Relativgeschwindigkeit aufgrund der rotierenden Antriebsbewegung und gleichzeitig die Änderungsgröße der Antriebsgeschwindigkeit aufgrund der Relativbewegung am Referenzpunkt aus.

Analyse der Gleichung, die die Coriolis-Beschleunigung ausdrückt:

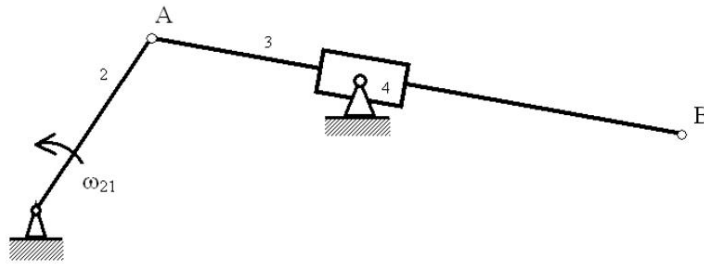
Die Coriolis-Beschleunigung hat einen von Null verschiedenen Wert $a_C \neq 0$, wenn:

- 1) $\dot{\gamma} \neq 0$ Die Antriebsbewegung liegt in Form einer Rotation, GPM, Kugelbewegung vor oder GSM
- 2) $v_{rel} \neq 0$ die Relativbewegung zwischen Körpern existiert $\dot{\gamma} \neq 0$ $\dot{\gamma}$ $\dot{\gamma}$ dr
 v_{rel} der Winkel zwischen Winkel- und Lineargeschwindigkeit ist ungleich 0 und $\dot{\gamma}$

Die Richtung und Ausrichtung der Coriolisbeschleunigung ergibt sich aus der Drehung der Relativgeschwindigkeit in Richtung der Antriebsbewegung um einen Winkel $\ddot{\gamma}/2$.



3.5.5 Finden des Bewegungspols durch kombinierte Bewegung



Analyse des Systems:

B2 – RM

B3 – GPM

B4 – RM

Somit drehen sich die Körper B2 und B4 um den festen Drehpunkt O21 bzw. O41. Somit sind die beiden Punkte O21 und O41 die Rotationspole für B2 bzw. B4.

Somit liegt der Pol von B3 im Schnittpunkt zweier Normalen zur Flugbahn. Die Normale n_A wird durch zwei Punkte gegeben – O21 und A. Der Punkt B zeichnet eine universelle ebene Kurve mit unbekanntem Krümmungsmittelpunkt.

Unter Anwendung des Prinzips der kombinierten Bewegung können wir symbolisch für die Bewegung von B3 schreiben:

$$31 = 32 + 21$$

wobei 32 den Pol der Relativbewegung von B3 in Bezug auf B2 beschreibt und

21 beschreibt den Pol der Antriebsbewegung von B2 in Bezug auf den Rahmen (B1)

Wenn wir daher Bewegungspole auf B3 anwenden, erhalten wir die Richtung der Normalen, die symbolisch aufgezeichnet werden kann als: $n_{31} = O_{32} + O_{21}$

Die zweite symbolische Gleichung, die die kombinierte Bewegung von B3 aufzeichnet, lautet $31 = 34 + 41$

Somit ist die zweite Normale für B3: $n_{31} = O_{34} + O_{41}$

Abschluss:

Der Pol von Endbewegung, Relativbewegung und Antriebsbewegung liegt auf einer Linie.

3.6 SPHÄRISCHE BEWEGUNG EINES KÖRPERS

Definition der sphärischen Bewegung:

Der Körper bewegt sich sphärisch, wenn ein Punkt des Körpers zu jedem Zeitpunkt stationär bleibt.

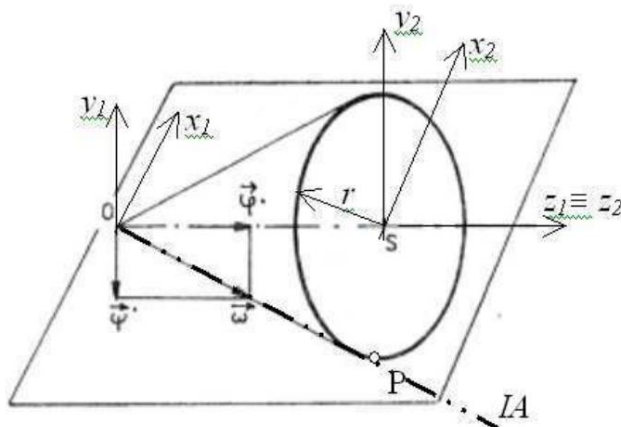
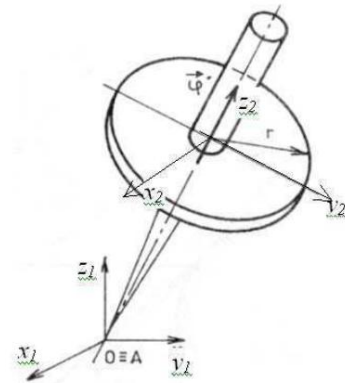
Die Punkte auf dem Körper haben einen konstanten Abstand vom Mittelpunkt O , daher sind ihre Bahnen Kugelkurven, Kurven, die auf Kugeln mit gemeinsamem Mittelpunkt O liegen.

Ein Punkt des Körpers bleibt während der Bewegung zu jedem Zeitpunkt stationär, daher wird die neue Position des Körpers durch eine einzige Drehung um die Achse bestimmt, die durch den stationären Punkt verläuft.

Diese Achse wird als momentane Rotationsachse bezeichnet

fällt mit dem Vektor der Gesamtwinkelgeschwindigkeit zusammen. Punkte auf der momentanen Rotationsachse haben zu diesem Zeitpunkt eine lineare Geschwindigkeit von Null.

Also der Kegel mit dem Grundradius r , der auf der Ebene rollt $\dot{\psi}$ teilt mit dieser Ebene jeweils eine einzige Linie, die momentane **Drehachse**. Diese Linie stellt den Kontaktbereich zwischen der Kegeloberfläche und der Ebene dar, über die der Kegel rollt.



Wenn wir die Kegelbewegung auf der Ebene beobachten, können wir die Bewegung als Drehung um die z_2 -Achse der Kegelsymmetrie (die natürliche Drehachse) mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ und die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ senkrecht zur Ebene, $\dot{\phi}$ um die Achse, die durch das Stationäre verläuft, beschreiben Punkt auf dem Körper (y_1 -Achse).

Indem wir das zweite Koordinatensystem mit einem sich bewegenden Körper verknüpfen, können wir ihn identifizieren

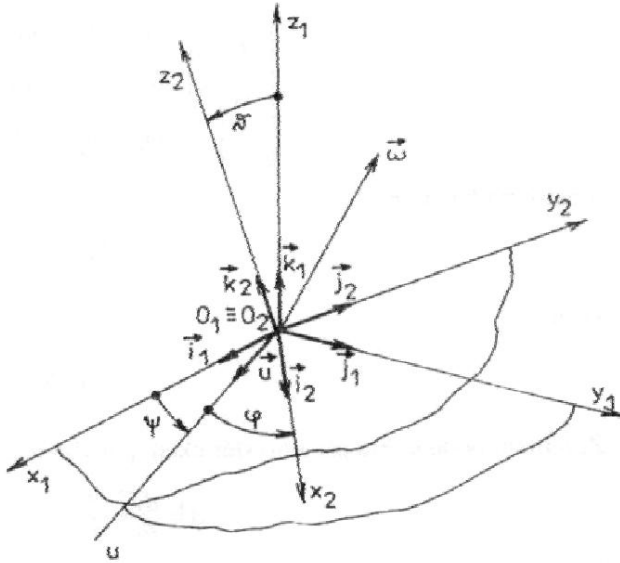
drei Winkel, sogenannte Euler-Winkel:

- $\dot{\psi}$ Der Nutationswinkel – beschreibt die Abweichung der natürlichen Achse eines Körpers (z_2) von der (z_1) -Achse des festen Koordinatensystems.
- $\dot{\phi}$ Der Präzessionswinkel beschreibt die Positionsänderung der natürlichen Achse eines Kegels in Bezug auf CS_1
- $\dot{\theta}$ Der natürliche Rotationswinkel beschreibt die Positionsänderung eines Punktes auf dem Körper in Bezug auf CS_2

Die Gesamtwinkelgeschwindigkeit ist eine Resultierende aus der Nutations-, Präzessions- und natürlichen Rotationsgeschwindigkeit. Die Richtung der Winkelgeschwindigkeit stimmt mit der momentanen Drehachse (IA) überein.

Daher: $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_2 + \dot{\phi} \vec{e}_1 + \dot{\theta} \vec{e}_3$

Die Gesamtwinkelgeschwindigkeit im Rechteck CS1 wird als $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_x \mathbf{i} + \dot{\gamma}_y \mathbf{j} + \dot{\gamma}_z \mathbf{k}$ aufgezeichnet



Da die Winkelgeschwindigkeiten mit bestimmten Drehachsen zusammenfallen, müssen wir sie daher in CS1 umwandeln

Empfangen der Komponenten der Gesamtwinkelgeschwindigkeit:

$$\dot{\gamma}_x = \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \psi + \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \psi$$

$$\dot{\gamma}_y = \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \psi + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \psi$$

$$\dot{\gamma}_z = \dot{\gamma} \cos \alpha$$

Die Winkelbeschleunigung:

$$\ddot{\gamma} = \frac{D}{dt} \dot{\gamma} = \frac{D}{dt} (\mathbf{e}_y \dot{\gamma}) = \frac{D\mathbf{e}_y}{dt} \dot{\gamma} + \mathbf{e}_y \frac{D\dot{\gamma}}{dt}$$

Wo

$$\frac{D\mathbf{e}_y}{dt} = \dot{\gamma} \mathbf{e}_z \text{ stellt die Richtungsänderung der Winkelgeschwindigkeit } \dot{\gamma} \text{ dar}$$

Die Richtung von $\dot{\gamma}_1$ ist senkrecht zur enthaltenen Ebene $\dot{\gamma}_2$ und $\mathbf{e}$ während die Orientierung ist gegeben durch die Rechte-Hand-Regel.

Die zweite Komponente der Winkelbeschleunigung $\ddot{\gamma} = \mathbf{e}_z \frac{D\dot{\gamma}}{dt}$ liegt auf der natürlichen Rotationsachse

Daher $\ddot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 = +1/2$ daher gilt dies nicht für die Richtung der endgültigen Winkelbeschleunigung

fallen mit der Richtung der Gesamtwinkelgeschwindigkeit zusammen.

Die gesamte Winkelbeschleunigung im Rechteck CS1 wird als $\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}_x \mathbf{i} + \ddot{\gamma}_y \mathbf{j} + \ddot{\gamma}_z \mathbf{k}$ aufgezeichnet

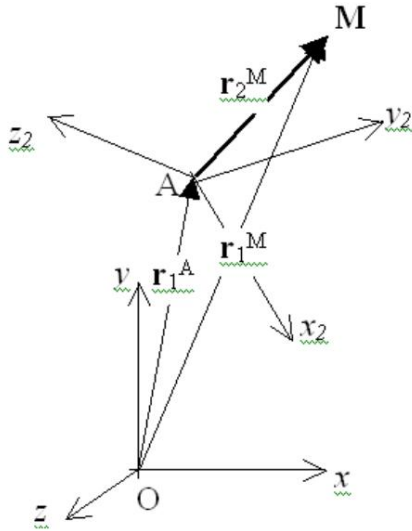
$$\ddot{\gamma}_x = \ddot{\gamma} \sin \alpha \sin \psi + \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \psi$$

3.7 UNIVERSELLE RAUMBEWEGUNG EINES KÖRPERS

Definition:

Die Flugbahnen von Punkten auf dem Körper, die sich mit universeller Raumbewegung bewegen, sind universell Raumkurven. Daher wird die Art der Bewegung als universelle Raumbewegung bezeichnet.

Ähnlich wie wir die universelle ebene Bewegung beschrieben haben, können wir uns vorstellen, dass die endgültige Bewegung des Körpers aus der Translation und der sphärischen Bewegung des Körpers besteht, während die Translation und Rotation die Bewegungen sind, die in Bezug auf den Referenzpunkt auf dem Körper beschrieben werden.



Wenn der Punkt A der stationäre Punkt während der Kugelbewegung ist, können wir diesen Punkt als geeigneten Referenzpunkt für die Beschreibung der endgültigen Bewegung des Körpers auswählen.

Dann ist die Position des Punktes M auf dem bewegten Körper angegeben

als:
$$\mathbf{r}_1^{MA} = \mathbf{r}_1^A + \mathbf{r}_1^{MA}$$

und die Geschwindigkeit und Beschleunigung in CS1 in Vektorform:

$$\mathbf{v}_1^{MA} = \mathbf{v}_1^A + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{r}_1^{MA}$$

$$\mathbf{a}_1^{MA} = \mathbf{a}_1^A + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{r}_1^{MA} + \ddot{\mathbf{y}} \times \mathbf{r}_1^{MA} + \dot{\mathbf{y}} \times \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{r}_1^{MA}$$

wobei $\dot{\mathbf{y}}$ und $\ddot{\mathbf{y}}$ momentane kinematische Größen sind

in Matrixform:

$$\mathbf{r}_1^{MA} = \mathbf{r}_1^A + \mathbf{C}_{11} \mathbf{r}_1^{MA}$$

$$\mathbf{v}_1^{MA} = \mathbf{v}_1^A + \mathbf{C}_{11} \mathbf{r}_1^{MA}$$

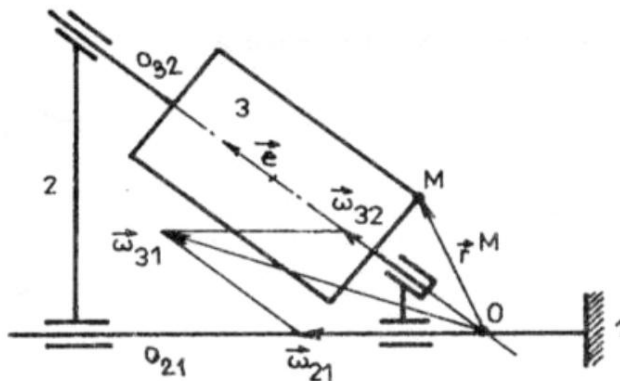
$$\mathbf{a}_1^{MA} = \mathbf{a}_1^A + \mathbf{C}_{11} \mathbf{r}_1^{MA} + \mathbf{C}_{11} \dot{\mathbf{r}}_1^{MA} = \mathbf{a}_1^A + \mathbf{A}_{11} \dot{\mathbf{r}}_1^{MA} + \mathbf{r}_1^{MA}$$

4 KÖRPERSYSTEM

Die Strategie zur Bewertung kinematischer Größen für einen einzelnen Körper kann auch auf ein Körpersystem erweitert werden. Wie bereits erwähnt, kann die universelle Bewegung eines bestimmten Körpers durch eine kombinierte Bewegung beschrieben werden, die auf der Relativ- und Antriebsbewegung basiert. Beide Bewegungen, die Antriebs- und die Relativbewegung, können beliebiger Art sein – Translation, Rotation und universelle ebene Bewegung usw.

Somit können die kinematischen Größen für ein Körpersystem auf die gleiche Weise ausgedrückt werden. Vor der Beschreibung der Bewegung eines bestimmten Körpers ist es nützlich, wenn nicht sogar notwendig, das gesamte System zu analysieren, das kinematische Paar zwischen Körpern zu beschreiben, die Beweglichkeit des Systems zu identifizieren, den Aktuator des Systems zu identifizieren und so die unabhängige Koordinate zu definieren. Definieren Sie schließlich die Art der Bewegung jedes Körpers im System.

4.1 GLEICHZEITIGE DREHEN UM GLEICHZEITIGE AXEN



Der Körper B3 dreht sich um seine natürliche Rotationsachse o_{32} (die Orte aller Punkte, die in Bezug auf B3 stationär bleiben), während die Achse o_{32} auf dem Körper B2 positioniert ist, der sich um seine Rotationsachse o_{21} dreht.

Punkt O ist jederzeit stationär, daher bewegt sich der Körper B3 mit einer sphärischen Bewegung, die durch die symbolische Gleichung als kombinierte Bewegung $31 = 32 + 21$ interpretiert werden könnte

$$\vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}$$

Somit können wir für die Geschwindigkeit des Punktes M schreiben

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{O21} + \vec{\omega}_{32} \times \vec{r}_{O32} = \vec{\omega}_{31} \times \vec{r}_{O31}$$

und schlussendlich

Somit ist die Endwinkelgeschwindigkeit die Summe der Winkelgeschwindigkeit der Relativ- und Antriebsbewegung. Der Vektor der Endwinkelgeschwindigkeit fällt mit der momentanen Drehachse zusammen.

$$\text{Die gesamte Winkelbeschleunigung} \quad \ddot{\gamma}_{31} = \frac{D}{dt} (\dot{\gamma}_{31}) = \frac{D}{dt} (\dot{\gamma}_{32} + \dot{\gamma}_{21})$$

Ersetzt die Endwinkelgeschwindigkeit

$$\ddot{\gamma}_{31} = \frac{D}{dt} (\dot{\gamma}_{32} + \dot{\gamma}_{21}) = \frac{d}{dt} (\ddot{\gamma}_{32} + \ddot{\gamma}_{21})$$

$$\text{Dann beträgt die Gesamtwinkelbeschleunigung} \quad \ddot{\gamma}_{31} = \ddot{\gamma}_{32} + \ddot{\gamma}_{21}$$

$$W_0 \frac{d}{dt} e^{\tilde{y}_{32} \tilde{x}_{32}} = \frac{De_{32}}{dt} e^{\tilde{y}_{32} \tilde{x}_{32}} - \frac{d\tilde{y}_{32}}{dt} = \left(\tilde{x}_{21} \tilde{x}_{32} \tilde{y}_{32} - \tilde{x}_{32} \tilde{y}_{21} \right) e^{\tilde{y}_{32} \tilde{x}_{32}}$$

Und $\frac{d}{dt} e_{21}^{21} = e_{21} \frac{d\gamma_{21}}{dt} = e_{21} \dot{\gamma}_{21}$

daher wird die Endbeschleunigung angegeben als

$\bar{y} \bar{y} \bar{y} \bar{y} \bar{y}$
 $\frac{1}{31}$
 $\frac{1}{32}$
 $\frac{1}{21}$
 $\frac{1}{32}$

Die letzte Komponente in der Gleichung ist als Resale-Winkelbeschleunigung bekannt

$$\ddot{y}_{21} \ddot{y}_{32} \ddot{y}_{s} = x$$

Die Bedingung für die Existenz der Resal-Beschleunigung: $\ddot{y}dr \ddot{y} 0$

ýrel ý 0

ÿ ÿ dr rel

Die gleichzeitigen Rotationen in Matrixform:

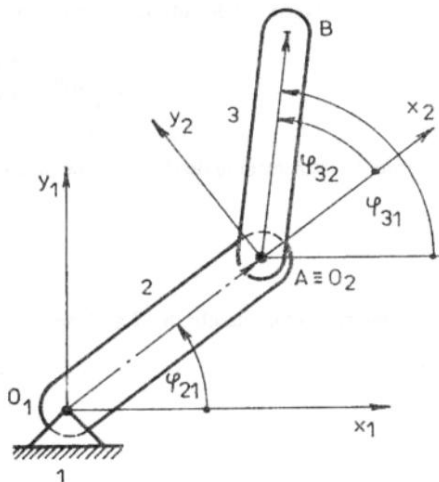
Winkelgeschwindigkeit:

$$\ddot{\gamma}_{31} = \ddot{\gamma}_{32} + \ddot{\gamma}_{21}$$

Winkelbeschleunigung:

$$\ddot{\gamma}_{31} = \ddot{\gamma}_{32} + \ddot{\gamma}_{21}$$

4.2 GLEICHZEITIGE DREHUNGEN UM PARALLELACHSEN



Untersuchung kinematischer Größen eines Mechanismus
oder ein Teil davon erfordert die Berücksichtigung des gesamten
Aufbaus von Körpern und Einschränkungen. Daher besteht der
erste Schritt darin, die Mobilität anhand von Einschränkungen zu
analysieren, den Akteur zu identifizieren, der die Bewegung des
Systems steuert, und die Bewegung jedes Körpers zu identifizieren.

Das gegebene System besteht aus:

B1 – festem Rahmen

B2 – rotierendes Glied

B3 – universelle ebene Bewegung

Die Beschränkungen, die die Bewegung des Systems begrenzen, sind zwei Stifte, die beide am B2 befestigt sind

B2 dreht sich um sein stationäres Rotationszentrum O1 und seine Punkte zeichnen ebene Kurven – konzentrische Kreise.

B3 dreht sich um den Drehpunkt O2 , der B3 mit B2 verbindet

Somit ist die Relativbewegung die Drehung von B3 in Bezug auf B2 mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{32}$ und die Antriebsbewegung ist die Drehung von B2 in Bezug auf das Fundament B1 mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{21}$.

Daher:

mit Gesamtwinkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{32} + \dot{\gamma}_{21}$ $\mathbf{k}$
 und Winkelbeschleunigung $\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}_{32} + \ddot{\gamma}_{21}$ $\mathbf{k}$ seit $\frac{0}{\text{Res. 21 32}} \ddot{\gamma} =$

Somit können die kinematischen Größen für einen bestimmten Punkt B in Vektorform ausgedrückt werden:

für Position:

$$\mathbf{r}_{11}^{BA} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{11}^{BA}$$

für Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_1 + \dot{\gamma}_{21} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{11}^{BA} + \dot{\gamma}_{32} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{21}^{BA}$$

zur Beschleunigung:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_1 + \ddot{\gamma}_{21} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{11}^{BA} + \dot{\gamma}_{21} \mathbf{k} \times (\dot{\gamma}_{21} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{11}^{BA}) + \ddot{\gamma}_{32} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{21}^{BA} + \dot{\gamma}_{32} \mathbf{k} \times (\dot{\gamma}_{32} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{21}^{BA}) + 2 \dot{\gamma}_{21} \dot{\gamma}_{32} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{21}^{BA}$$

oder in Matrixform

für Position: $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_1 + \mathbf{C}_{11}^{BA} \mathbf{r}_1 + \mathbf{C}_{21}^{BA} \mathbf{r}_2$ Wo $\mathbf{C}_{11}^{BA} = \mathbf{C}_{11}^{BA}$ $\mathbf{C}_{21}^{BA} = \mathbf{C}_{21}^{BA}$
 $\mathbf{C}_{11}^{BA} = \mathbf{C}_{11}^{BA}$ $\mathbf{C}_{21}^{BA} = \mathbf{C}_{21}^{BA}$

für Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_1 + \mathbf{C}_{11}^{BA} \dot{\gamma}_{21} \mathbf{r}_1 + \mathbf{C}_{21}^{BA} \dot{\gamma}_{32} \mathbf{r}_2$$

zur Beschleunigung:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_1 + \mathbf{C}_{11}^{BA} (\ddot{\gamma}_{21} \mathbf{r}_1 + \dot{\gamma}_{21}^2 \mathbf{r}_1) + \mathbf{C}_{21}^{BA} (\ddot{\gamma}_{32} \mathbf{r}_2 + \dot{\gamma}_{32}^2 \mathbf{r}_2) + 2 \dot{\gamma}_{21} \dot{\gamma}_{32} \mathbf{C}_{21}^{BA} \mathbf{r}_2$$

Die Analyse der Bewegungsmöglichkeit zeigt zwei Fälle:

1. Gleichzeitige Drehungen mit gleicher Richtung der Winkelgeschwindigkeit. 2.

Gleichzeitige Drehungen mit Winkelgeschwindigkeiten in entgegengesetzter Richtung

In beiden Fällen ist die resultierende Bewegung eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{31}$

Maschinenbauingenieure stehen vor Problemen im Zusammenhang mit gleichzeitigen Drehungen um parallele Achsen in zahlreichen Anwendungen wie Getrieben, Planetengetrieben usw.