

Глава 3

ПЕРЕДНЯЯ КИНЕМАТИКА: ДЕНАВИТ-ХАРТЕНБЕРГ СОГЛАШЕНИЕ

В этой главе мы разрабатываем прямые или конфигурационные кинематические уравнения для жестких роботов. Проблема прямой кинематики связана с взаимосвязью между отдельными соединениями робота-манипулятора и положением и ориентацией инструмента или исполнительного органа. Говоря более формально, задача прямой кинематики состоит в том, чтобы определить положение и ориентацию рабочего органа по заданным значениям совместных переменных робота. Переменными соединениями являются углы между звеньями в случае вращательных или вращательных соединений и удлинение звена в случае призматических или скользящих соединений. Задачу прямой кинематики следует противопоставить задаче обратной кинематики, которая будет изучаться в следующей главе и которая связана с определением значений совместных переменных, которые обеспечивают желаемое положение и ориентацию рабочего органа робота.

3.1 Кинематические цепи

Как описано в главе 1, робот-манипулятор состоит из набора звеньев, соединенных между собой различными соединениями. Соединения могут быть как очень простыми, например, вращающееся или призматическое соединение, так и более сложными, например, шарнирное соединение. (Вспомним, что шарнирное соединение похоже на шарнир и допускает относительное вращение вокруг одной оси, а призматическое соединение допускает линейное движение вдоль одной оси, а именно растяжение или сжатие.) Разница между двумя ситуациями заключается в том, что в первом случае сустав имеет только одну степень свободы движения: угол поворота в случае вращательного шарнира и величину линейного смещения в случае призматического шарнира. Напротив, шаровой шарнир имеет две степени свободы. В этой книге предполагается, что все суставы имеют только одну степень свободы. Обратите внимание, что предположение

не влечет за собой никакой реальной потери общности, поскольку такие суставы, как шаровидный сустав (две степени свободы) или сферическое запястье (три степени свободы), всегда можно рассматривать как последовательность одной степени свободы. суставы свободы со звеньями нулевой длины между ними.

В предположении, что каждый шарнир имеет одну степень свободы, действие каждого шарнира можно описать одним действительным числом: углом поворота в случае вращательного шарнира или смещением в случае призматического шарнира. соединение. Целью прямого кинематического анализа является определение кумулятивного эффекта всего набора совместных переменных. В этой главе мы разработаем набор соглашений, обеспечивающих систематическую процедуру выполнения этого анализа. Конечно, можно провести прямой кинематический анализ даже без соблюдения этих соглашений, как мы сделали для примера двухзвенного плоского манипулятора в главе 1. Однако кинематический анализ n-звенного манипулятора может быть чрезвычайно сложным и введенные ниже соглашения значительно упрощают анализ. Более того, они порождают универсальный язык, на котором инженеры-роботы могут общаться.

Робот-манипулятор с n суставами будет иметь n + 1 звено, так как каждое сочленение соединяет два звена. Пронумеруем соединения от 1 до n, а звенья пронумеруем от 0 до n, начиная с основания. Согласно этому соглашению, соединение i соединяет ссылку i - 1 со ссылкой i. Будем считать положение сустава i фиксированным относительно звена i - 1. Когда шарнир i приводится в действие, звено i перемещается. Следовательно, звено 0 (первое звено) неподвижно и не двигается при срабатывании сочленений. Конечно, сам робот-манипулятор может быть мобильным (например, он может быть установлен на мобильной платформе или на автономном транспортном средстве), но мы не будем рассматривать этот случай в настоящей главе, так как с ним можно легко справиться, немного расширив методы. представлены здесь. И с я

совместной, мы связываем совместную переменную, обозначаемую q_i. В случае вращательного шарнира q_i — угол поворота, а в случае призматического шарнира q_i — смещение шарнира:

$$Ци = \begin{matrix} \theta i : \text{соединение } i \text{ вращающееся} \\ d i : \text{соединение } i \text{ призматическое} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Для выполнения кинематического анализа к каждому звену жестко привязана система координат. В частности, мы присоединяем o_ix_iy_iz_i к ссылке i. Это означает, что при любом движении робота выполняется, координаты каждой точки на звене i являются постоянными при выражении в системе координат i. Кроме того, когда шарнир i приводится в действие, звено i и прикрепленная к нему рама, o_ix_iy_iz_i, испытывают результирующее движение. Рамка o₀x₀y₀z₀, прикрепленная к основанию робота, называется инерциальной рамой. На рис. 3.1 показана идея жесткого крепления рам к звеньям в случае локтевого манипулятора.

Теперь предположим, что A_i — однородная матрица преобразования, выражающая положение и ориентацию o_ix_iy_iz_i относительно o_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}. Матрица A_i не постоянна, а изменяется при изменении конфигурации робота. Однако предположение о том, что все суставы вращательные или призматические, означает, что A_i является функцией только одной переменной сустава, а именно q_i. Другими словами,

$$A_i = A_i(q_i). \quad (3.2)$$

3.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

63

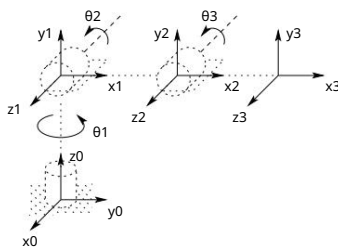


Рисунок 3.1: Координатные рамки, прикрепленные к коленчатому манипулятору.

Теперь однородная матрица преобразования, выражающая положение и ориентацию ${}^{0}x_j y_j z_j$ относительно ${}^{0}x_i y_i z_i$, по соглашению называется матрицей преобразования и обозначается $T_{i,j}^n$. Из главы 2 мы видим, что

$$\begin{aligned} T_{i,j}^n &= A_i + 1A_i + 2 \dots A_j - 1A_j, \text{ если } i < j = I, \\ T_{i,i}^n &= I \text{ если } i = j = 1 \\ T_{i,j}^n &= (T_{j,i}^n)^{-1} \text{ если } j > i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из того, как мы жестко прикрепили различные кадры к соответствующим звеньям, следует, что положение любой точки рабочего органа, выраженное в кадре n , является константой, не зависящей от конфигурации робота. Обозначим положение и ориентацию рабочего органа по отношению к инерциальной или базовой системе координат с помощью трехвектора (который дает координаты ${}^0_{n,n}$ начала координат рабочего органа по отношению к n и определить однородное преобразование базовый кадр) и матрица вращения $3 \times 3 R_0$ n , матрица

$$H = \begin{pmatrix} {}^0_{n,n} & R_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Тогда положение и ориентация рабочего органа в инерциальной системе отсчета определяются выражением

$$H = T_{n,0}^0 = A_1(q_1) \dots A_n(q_n). \quad (3.5)$$

Каждое однородное преобразование A_i имеет вид

$$A_i = \begin{pmatrix} R_i & {}^0_{i,i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Следовательно

$$T_{i,j}^n = A_{i+1} \dots A_j = \begin{pmatrix} R_{i,j} & {}^n_{i,j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

64 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

Матрица R_i выражает ориентацию ${}^{0}x_j y_j z_j$ относительно ${}^{0}x_i y_i z_i$ и задается вращательными частями А-матриц как

$$P_{i,j}^n = P_{i,i+1}^n \dots R_{i,j}^n. \quad (3.8)$$

Координатные векторы 0 задаются рекурсивно формулой j

$${}^n_{0,j} = {}^n_{j,j} {}^n_{j-1,j} + R_{i,j}^n {}^n_{i,j-1}, \quad (3.9)$$

Эти выражения будут полезны в главе 5, когда мы будем изучать матрицы Якоби.

В принципе, это все, что нужно для кинематики вперед! Определить функции $A_i(q_i)$ и перемножить их по мере необходимости. Однако можно добиться значительной оптимизации и упрощения, введя дополнительные соглашения, такие как представление соединения Денавита-Хартенберга, и это является целью оставшейся части главы.

3.2 Представительство Денавит Хартенберг

Хотя можно провести весь анализ в этой главе, используя произвольный фрейм, прикрепленный к каждой ссылке, полезно быть систематическим в выборе этих фреймов. Обычно используемым соглашением для выбора систем отсчета в роботизированных приложениях является соглашение Денавита Хартенберга или DH. В этом соглашении каждое однородное преобразование A_i представляется как произведение четырех основных преобразований

$$A_i = Rot_z, \theta_i Trans_z, d_i Trans_x, a_i Rot_x, q_i \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} {}^{i-1}_i A_i &= \begin{pmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 & 0 & c\theta_i & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_i & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & s\theta_i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & d_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}^{i-1}_i A_i &= \begin{pmatrix} c\theta_i & s\theta_i & c a_i & s\theta_i & s a_i & a_i c\theta_i & s\theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_i & c a_i & c\theta_i & s a_i & a_i s\theta_i & d_i & 0 & c a_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s a_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где четыре величины θ_i a_i являются параметрами, связанными с звеном i и соединением i . Четырем параметрам a_i и θ_i в (3.10) обычно присваиваются названия: длина звена, поворот звена, смещение звена и угол соединения соответственно. Эти названия происходят от конкретных аспектов геометрического соотношения между двумя системами координат, как станет очевидным ниже. Поскольку матрица A_i является функцией одной переменной, получается, что три из четырех величин являются постоянными для данного звена, а четвертый параметр, θ_i для вращательного шарнира и d_i для призматического шарнира, является совместной переменной.

Из главы 2 видно, что произвольную однородную матрицу преобразования можно охарактеризовать шестью числами, такими, например, как три числа для указания

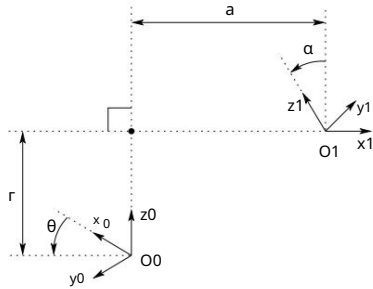


Рисунок 3.2: Система координат, удовлетворяющая предположениям DH1 и DH2.

четвертый столбец матрицы и три угла Эйлера, чтобы указать верхнюю левую матрицу вращения 3×3 . В представлении DH, напротив, всего четыре параметра. Как это возможно? Ответ заключается в том, что хотя система i должна быть жестко прикреплена к звену i , у нас есть значительная свобода в выборе начала координат и координатных осей системы координат. Например, нет необходимости, чтобы начало координат o_i кадра i располагалось на физическом конце канала i . На самом деле нет необходимости даже размещать кадр i внутри физического соединения; кадр i мог бы лежать в свободном пространстве — до тех пор, пока кадр i жестко прикреплен к звену i . Грамотно выбрав начало координат и оси координат, можно сократить количество необходимых параметров с шести до четырех (а в некоторых случаях даже меньше). В разделе 3.2.1 мы покажем, почему и при каких условиях это можно сделать, а в разделе 3.2.2 мы покажем, как именно выполнять назначения системы координат.

3.2.1 Проблемы существования и уникальности

Ясно, что любое произвольное однородное преобразование невозможно представить, используя только четыре параметра. Поэтому начнем с определения того, какие именно однородные преобразования могут быть выражены в виде (3.10). Предположим, что нам даны два кадра, обозначенные кадрами 0 и 1 соответственно. Тогда существует уникальная однородная матрица преобразования A , которая переводит координаты из кадра 1 в координаты кадра 0. Теперь предположим, что два кадра имеют две дополнительные функции, а именно:

(DH1) Ось x_1 перпендикулярна оси z_0

(DH2) Ось x_1 пересекает ось z_0

как показано на рисунке 3.2. В этих условиях мы утверждаем, что существуют единственные числа a , d , θ , α такие, что

$$A = \text{Rot}_z, \theta \text{Trans}_z, d \text{Trans}_x, a \text{Rot}_x, \alpha. \quad (3.11)$$

Конечно, поскольку θ и α являются углами, мы действительно имеем в виду, что они уникальны с точностью до кратных 2π . Чтобы показать, что матрица A может быть записана в этой форме, запишите A как

$$A = \begin{bmatrix} R_{01} & \begin{matrix} a \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

и пусть r_i обозначает i -й столбец матрицы вращения R_{01} . Сейчас мы рассмотрим последствия двух ограничений DH.

Если (DH1) выполняется, то x_1 перпендикулярен z_0 , и мы имеем $x_1 \cdot z_0 = 0$. Выражая это ограничение относительно $o_0x_0y_0z_0$, используя тот факт, что r_1 является представлением единичного вектора x_1 относительно системы координат 0, мы получаем

$$0 = x_1 \cdot z_0 = r_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$= [r_{11}, r_{21}, r_{31}]^T \cdot [0, 0, 1]^T \quad (3.14)$$

$$= r_{31}. \quad (3.15)$$

Поскольку $r_{31} = 0$, нам нужно только показать, что существуют единственные углы θ и α такие, что

$$P_{11}^0 = R_{x, \theta} R_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta c\alpha & s\theta s\alpha \\ s\theta & c\theta c\alpha & c\theta s\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Единственная информация, которой мы располагаем, это то, что $r_{31} = 0$, но этого достаточно. Во-первых, поскольку каждая строка и столбец R_{01} должны иметь единичную длину, $r_{31} = 0$ означает, что

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1, \\ r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Следовательно, существуют единственные θ , α такие, что

$$(r_{11}, r_{21}) = (c\theta, s\theta), \quad (r_{32}, r_{33}) = (s\alpha, c\alpha). \quad (3.18)$$

Как только θ и α найдены, обычно показывается, что остальные элементы R_{01} должны иметь форму, показанную в (3.16), используя тот факт, что R_{01} является матрицей вращения.

Далее, предположение (DH2) означает, что смещение между o_0 и o_1 может быть выражено как линейная комбинация векторов z_0 и x_1 . Это можно записать как $o_1 = o_0 + dz_0 + ax_1$. Опять же, мы можем выразить это отношение в координатах $o_0x_0y_0z_0$, и мы получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac\theta \\ as\theta \\ d \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Объединяя приведенные выше результаты, получаем (3.10) требуемое. Таким образом, мы видим, что четырех параметров достаточно для задания любого однородного преобразования, удовлетворяющего ограничениям (DH1) и (DH2).

Теперь, когда мы установили, что каждая однородная матрица преобразования, удовлетворяющая приведенным выше условиям (DH1) и (DH2), может быть представлена в виде (3.10), мы фактически можем дать физическую интерпретацию каждой из четырех величин в (3.10). Параметр a представляет собой расстояние между осями z_0 и z_1 и измеряется вдоль оси x_1 . Угол α — это угол между осями z_0 и z_1 , измеренный в плоскости, нормальной к x_1 . Положительный смысл для α определяется от z_0 до z_1 по правилу правой руки, как показано на рис. 3.3.

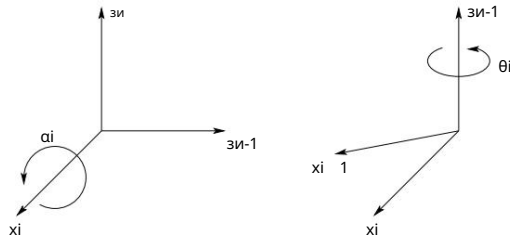


Рисунок 3.3: Положительный смысл для α_i и θ_i .

параметр d — расстояние между началом координат o_0 и пересечением оси x_1 с точкой z_0 , измеренной вдоль оси z_0 . Наконец, θ — это угол между x_0 и x_1 , измеренный в плоскости, нормальной к z_0 . Эти физические интерпретации окажутся полезными при разработке процедуры задания систем координат, удовлетворяющих ограничениям (DH1) и (DH2), и сейчас мы обратим внимание на разработку такой процедуры.

3.2.2 Назначение систем координат

Для данного робота-манипулятора всегда можно выбрать кадры $0, \dots, n$ таким образом, что выполняются два вышеуказанных условия. В определенных обстоятельствах это потребует размещения начала координат кадра i в месте, которое может не удовлетворять интуитивно, но обычно это не так. При чтении изложенного ниже материала важно помнить, что выбор различных систем координат не уникален, даже если он ограничен вышеуказанными требованиями. Таким образом, возможно, что разные инженеры получат разные, но одинаково правильные назначения системы координат для звеньев робота. Однако очень важно отметить, что конечный результат (т. е. матрица T назначения кадров промежуточных звеньев (в предположении, что системы координат для звена n совпадают). Мы $T_{0,n}^0$) будет одинаковым независимо от начнем с вывода общей процедуры. Затем мы обсудить различные общие частные случаи, когда возможно дальнейшее упрощение однородной матрицы преобразования.

Для начала отметим, что выбор z_i произвольный. В частности, из (3.16) мы видим, что, выбирая подходящим образом α_i и θ_i , можно получить любое произвольное направление для z_i . Таким образом, для нашего первого шага мы назначаем оси $z_0, \dots, z_n$ интуитивно приятным способом. В частности, мы назначаем z_i осью срабатывания сустава $i + 1$. Таким образом, z_0 — ось срабатывания сустава 1, z_1 — ось срабатывания сустава 2 и т. д. Рассмотрим два случая: (i) если шарнир $i + 1$ вращающийся, то z_i — ось вращения шарнира $i + 1$; (ii) если сустав $i + 1$ призматический, z_i является осью перемещения шарнира $i + 1$. Сначала может показаться немного запутанным связывать z_i с суставом $i + 1$, но вспомним, что это удовлетворяет соглашению, которое мы установили в разделе 3.1, а именно, что шарнир i фиксируется относительно кадра i , и что когда шарнир i приводится в действие, звено i и связанная с ним система координат $o_i x_i y_i z_i$ испытывают результирующее движение.

После того, как мы установили оси Z для ссылок, мы устанавливаем базовый кадр. Выбор базовой рамы почти произволен. Мы можем выбрать начало координат o_0 базовой системы координат в качестве любой точки на z_0 . Затем мы выбираем x_0, y_0 любым удобным способом, лишь бы полученный репер был правым. Это устанавливает кадр 0.

Как только кадр 0 установлен, мы начинаем итеративный процесс, в котором мы определяем кадр i , используя кадр $i - 1$, начиная с кадра 1. Рисунок 3.4 будет полезен для понимания процесса, который мы сейчас описываем.

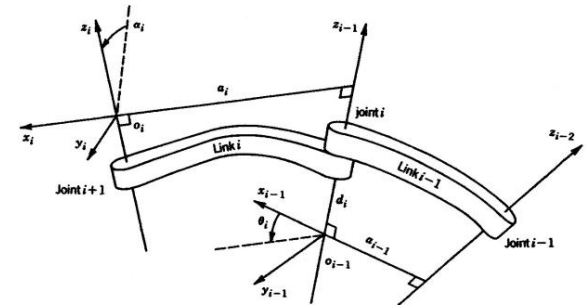


Рисунок 3.4: Назначение кадра Денавита-Хартенберга.

Для построения системы i необходимо рассмотреть три случая: (i) оси z_{i-1} и z_i не компланарны, (ii) оси z_{i-1} и z_i пересекаются, (iii) оси z_{i-1} и z_i параллельны. Заметим, что в обоих случаях (ii) и (iii) оси z_{i-1} и z_i компланарны. Такая ситуация на самом деле довольно распространена, как мы увидим в разделе 3.3. Рассмотрим теперь каждый из этих трех случаев.

(i) z_{i-1} и z_i не компланарны: если z_{i-1} и z_i не компланарны, то существует единственный отрезок прямой, перпендикулярный обеим z_{i-1} и z_i , такой, что он соединяет обе прямые и имеет минимальную длину.

Строка, содержащая эту общую нормаль к z_{i-1} и z_i , определяет x_i

и точка, где эта линия пересекает z_i , является началом координат o_i . По построению выполняются оба условия (DH1) и (DH2), и вектор от o_{i-1} до o_i является линейной комбинацией z_{i-1} и x_i . Спецификация кадра i завершается выбором оси u_i для формирования правого кадра. Поскольку выполняются предположения (DH1) и (DH2), матрица однородного преобразования A_i имеет вид (3.10).

(ii) z_{i-1} параллельна z_i : если оси z_{i-1} и z_i параллельны, то между ними существует бесконечно много общих нормалей, и условие (DH1) не определяет x_i полностью.

В этом случае мы можем выбрать начало координат где угодно вдоль z_i . Часто выбирают o_i для упрощения получающихся уравнений. Затем выбирается ось x_i либо направленная от o_i к z_{i-1} вдоль общей нормали, либо противоположная этому вектору. Обычный метод выбора o_i состоит в том, чтобы выбрать нормаль, проходящую через o_{i-1} , в качестве оси x_i ; o_i — это точка, в которой эта нормаль пересекает z_i . В этом случае d_i будет равно нулю.

Как только x_i зафиксировано, u_i определяется, как обычно, по правилу правой руки. Так как оси z_{i-1} и z_i параллельны, то a_i в этом случае будет равно нулю.

(iii) z_{i-1} пересекает z_i : в этом случае x_i выбирается нормально к плоскости, образованной z_i и z_{i-1} . Положительное направление x_i произвольно. Наиболее естественным выбором начала координат o_i в этом случае является точка пересечения z_i и z_{i-1} . Однако достаточно любой удобной точки на оси z_i . Обратите внимание, что в этом случае параметр a_i равен 0.

Эта конструктивная процедура работает для кадров $0, \dots, n-1$ в n -звенном роботе. Для завершения построения необходимо указать кадр n . Окончательную систему координат $o_n p_n z_n$ обычно называют конечным рабочим органом или станиной инструмента (см. рис. 3.5). Происхождение

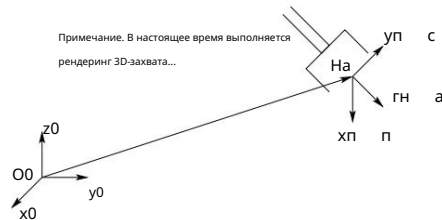


Рисунок 3.5: Назначение рамы инструмента.

чаще всего располагается симметрично между пальцами захвата. Единичные векторы вдоль осей x_p , u_p и z_p обозначены как p , s и a соответственно. Терминология возникает из-за того, что направление a является направлением приближения в том смысле, что захват обычно приближается к объекту вдоль направления a . Точно так же направление s — это направление скольжения, направление, вдоль которого пальцы захвата скользят, открываясь и закрываясь, а p — это направление, нормальное к плоскости, образованной точками a и s .

В современных роботах конечным движением сустава является поворот рабочего органа на θ_p , и две последние оси сустава, z_{p-1} и z_p , совпадают. В этом случае преобразование между последними двумя системами координат представляет собой перемещение вдоль z_{p-1} на расстояние d_p , за которым следует (или предшествует) поворот на θ_p радиан вокруг z_{p-1} . Это важное наблюдение, которое упростит вычисление инверсной кинематики в следующей главе.

Наконец, отметим следующий важный факт. Во всех случаях, независимо от того, является ли рассматриваемый шарнир вращательным или призматическим, величины a_i и d_i всегда постоянны для всех i и характерны для манипулятора. Если соединение i призматическое, то θ_i также является константой, а d_i является i -й совместной переменной. Точно так же, если соединение i является вращательным, то d_i является постоянным, а θ_i является i -й переменной соединения i .

3.2.3 Резюме

Мы можем обобщить описанную выше процедуру, основанную на соглашении DH, в следующем алгоритме для получения прямой кинематики для любого манипулятора.

Шаг 1: Найдите и обозначьте оси соединения $z_0, \dots, z_{n-1}$.

Шаг 2: Установите базовую раму. Установите начало координат в любом месте оси z_0 . x_0 и y_0 — оси выбраны удобно, чтобы образовать правую рамку.

Для $j = 1, \dots, n-1$, выполнить шаги с 3 по 5.

Шаг 3: Найдите начало координат o_i , где общая нормаль к z_i и z_{i-1} пересекает z_i . Если z_i пересекает z_{i-1} , найдите o_i на этом пересечении. Если z_i и z_{i-1} параллельны, расположите o_i в любом удобном месте вдоль z_i .

Шаг 4: Установите x_i вдоль общей нормали между z_{i-1} и z_i через o_i или в направлении нормали к плоскости z_{i-1} и z_i , если z_{i-1} и z_i пересекаются.

Шаг 5: Установите u_i , чтобы завершить правую рамку.

Шаг 6: Установите раму рабочего органа на $x_p z_p$. Предполагая, что p -й шарнир является вращательным, установите $z_p = a$ вдоль направления z_{p-1} . Установите исходную точку удобно вдоль z_p , предпочтительно в центре захвата или на кончике любого инструмента, который может быть у манипулятора. Установите $u_p = s$ в направлении закрытия захвата и установите $x_p = p$ как $s \times a$. Если инструмент не является простым захватом, установите x_p и u_p так, чтобы было удобно сформировать правую рамку.

Шаг 7: Создайте таблицу параметров ссылки a_i , d_i , θ_i , ϕ_i .

a_i = расстояние по x_i от o_i до пересечения осей x_i и z_{i-1} . d_i = расстояние по z_{i-1} от o_{i-1} до пересечения осей x_i и z_{i-1} . d_i является переменной, если шарнир i призматический.

θ_i = угол между z_{i-1} и z_i , измеренный относительно x_i (см. рис. 3.3).

θ_i = угол между x_{i-1} и x_i , измеренный относительно z_{i-1} (см. рис. 3.3). θ_i является переменной если сустав i вращается.

Шаг 8: Сформируйте однородные матрицы преобразования A_i , подставив вышеуказанные параметры в (3.10).

Шаг 9: Форма $T_n^0 = A_1 \cdots A_n$. Затем это дает положение и ориентацию инструмента кадр, выраженный в базовых координатах.

3.3 Примеры

В соглашении DH единственным переменным углом является θ , поэтому мы упрощаем обозначения, записывая c_i вместо $\cos \theta_i$ и т. д. Мы также обозначаем $\theta_1 + \theta_2$ через θ_{12} , а $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ через c_{12} и так далее. В следующих примерах важно помнить, что соглашение DH, хотя и является систематическим, по-прежнему допускает значительную свободу выбора некоторых параметров манипулятора. Это особенно верно в случае параллельных осей суставов или когда задействованы призматические суставы.

Пример 3.1. Плоский локтевой манипулятор.

Рассмотрим плоскую руку с двумя звеньями на рис. 3.6. Оси соединения z_0 и z_1 перпендикулярны

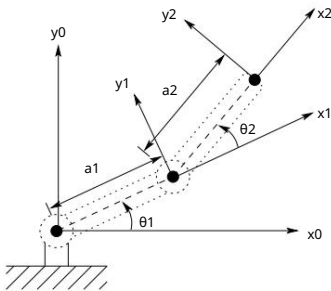


Рисунок 3.6: Двухзвенный планарный манипулятор. Все оси Z указывают за пределы страницы и не показаны на рисунке.

страница. Мы устанавливаем базовый кадр $o_0x_0y_0z_0$, как показано. Начало выбрано в точке пересечения оси z_0 со страницей, а направление оси x_0 совершенно произвольно. Как только базовый кадр установлен, кадр $o_1x_1y_1z_1$ фиксируется, как показано соглашением DH, где начало координат o_1 находится на пересечении z_1 и страницы. Окончательный кадр $o_2x_2y_2z_2$ фиксируется путем выбора начала координат o_2 в конце ссылки 2, как показано на рисунке. Параметры канала показаны в таблице 3.1. А-матрицы определяются из (3.10) как

Таблица 3.1: Параметры звена для двухзвенного планарного манипулятора.

Ссылка	a_i	d_i	θ_i	a_1	0	0	θ	a_2
1	0	0	θ					1
2								2

* переменная

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & a_1 c_1 & s_1 c_1 \\ 0 & a_1 s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 & s_2 c_2 \\ 0 & a_2 s_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Таким образом, Т-матрицы имеют вид

$$T_1^0 = A_1. \quad (3.24)$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Обратите внимание, что первые две записи последнего столбца T_2^0 компоненты x и y начало координат o_2 в базовой системе отсчета; то есть,

$$\begin{aligned} x &= a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ y &= a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \quad (3.26)$$

- координаты рабочего органа в базовой раме. Вращательная часть Т ориентации рамы T_2^0 дает $o_2x_2y_2z_2$ относительно базовой рамы.

Пример 3.2. Трехзвенный цилиндрический робот

Рассмотрим теперь трехзвенный цилиндрический робот, символически представленный на рис. 3.7. Мы устанавливаем o_0 , как показано на стыке 1. Обратите внимание, что размещение начала координат o_0 вдоль z_0 , а также направление оси x_0 произвольны. Наш выбор точки o_0 наиболее естественен, но o_0 можно было бы с таким же успехом разместить на стыке 2. Ось x_0 выбрана перпендикулярно странице. Затем, поскольку z_0 и z_1 совпадают, начало координат o_1 выбирается на стыке 1, как показано. Ось x_1 нормальна к странице, когда $\theta_1 = 0$, но, конечно, ее направление изменится, поскольку θ_1 является переменной величиной. Поскольку z_2 и z_1 пересекаются, начало координат o_2 находится на этом пересечении. Направление x_2

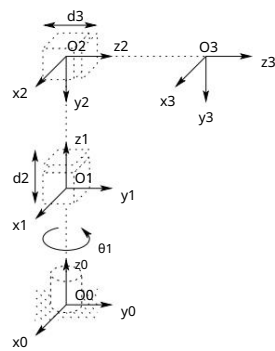


Рисунок 3.7: Трехзвенный цилиндрический манипулятор.

Таблица 3.2: Параметры звена трехзвенного цилиндрического манипулятора.

Ссылка на ай	qi	di	θi	d1
1	0	0	θ	1
2	0	90 д 2 0 *	0	0
3	д 3	*	0	0

* переменная

параллельно x1, так что θ2 равно нулю. Наконец, третий кадр выбирается в конце ссылки 3, как показано.

Параметры связи теперь показаны в таблице 3.2. Соответствующие матрицы A и T

и

$$A1 = \begin{pmatrix} c1 & s1 & 0 & 0 & s1 \\ c1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^0 = A1A2A3 = \begin{pmatrix} c1 & 0 & s1 & s1d3 \\ s1 & 0 & c1d3 & 0 \\ d2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & d1 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

1

Пример 3.3 Сферическое запястье

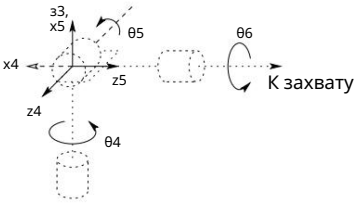


Рисунок 3.8: Назначение сферического каркаса запястья.

Сферическая конфигурация запястья показана на рис. 3.8, в которой оси суставов z3, z4, z5 пересекаются в точке o. Параметры Денавита-Хартенберга приведены в таблице 3.3. Стэнфордский манипулятор является примером манипулятора с таким запястьем. На самом деле следующий анализ применим практически ко всем сферическим запястьям.

Покажем теперь, что последние три совместные переменные, θ4, θ5, θ6, являются углами Эйлера φ, θ, ψ соответственно относительно системы координат oЗ3з3з3. Чтобы увидеть это, нам нужно только вычислить

3.3. ПРИМЕРЫ

75

Таблица 3.3: Параметры DH для сферического запястья.

Ссылка ай	a_i	d_i	θ_i
4	0	90 0 0	4
5	0	90 0 0	5
6	0	0	d6 0 6

* переменная

матрицы A4, A5 и A6 с использованием таблицы 3.3 и выражения (3.10). Это дает

$$A_4 = \begin{bmatrix} c4 & 0 & s4 & 0 \\ c4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c5 & 0 & c5 & 0 \\ s5 & 0 & c5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c6 & s6 & 0 & 0 \\ c6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Умножение этих значений дает

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} R_3^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$
$$\begin{bmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4c6 & c4s5 & c4s5d6 \\ s4c5c6 + c4s6 & s4c5s6 + c4c6 & s4s5 & s4s5d6 \\ s5c6 & c5c6 & c5 & c5d6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сравнение вращающейся части R_3^3 с преобразованием угла Эйлера (2.51) показывает, что $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ действительно могут быть идентифицированы как углы Эйлера ϕ, θ и ψ относительно система координат $o3x3y3z3$.

Пример 3.4 Цилиндрический манипулятор со сферическим запястьем

Предположим, что теперь мы присоединяем сферическое запястье к цилиндрическому манипулятору из примера 3.3.2, как показано на рис. 3.9. Обратите внимание, что ось вращения шарнира 4 параллельна z_2 и, таким образом, совпадает с осью z_3 из примера 3.3.2. Смысл этого в том, что мы можем

76 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

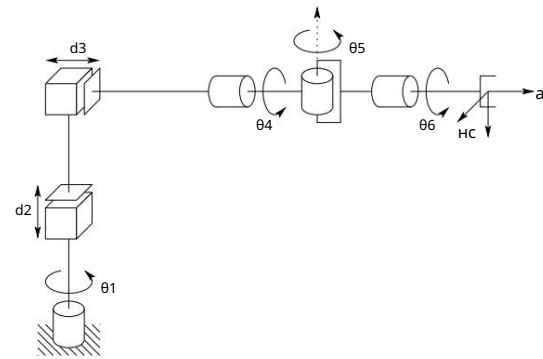


Рисунок 3.9: Цилиндрический робот со сферическим запястьем.

немедленно объединить два предыдущих выражения (3.28) и (3.32), чтобы получить прямое кинематика как

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3 \quad (3.33)$$

с T_3^0 (3.28) и T_6^3 дается (3.32). Поэтому прямая кинематика этого манипулятор описывается

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} r11 & r12 & r13 & dx \\ r21 & r22 & r23 & dy \\ r31 & r32 & r33 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$
$$\begin{bmatrix} c1 & 0 & s1 & s1d1 \\ c1 & 0 & c1 & c1d3 \\ 0 & 1 & 0 & d1 + d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4c6 & c4s5 & c4s5d6 \\ s4c5c6 + c4s6 & s4c5s6 + c4c6 & s4s5 & s4s5d6 \\ s5c6 & c5c6 & c5 & c5d6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. ПРИМЕРЫ

77

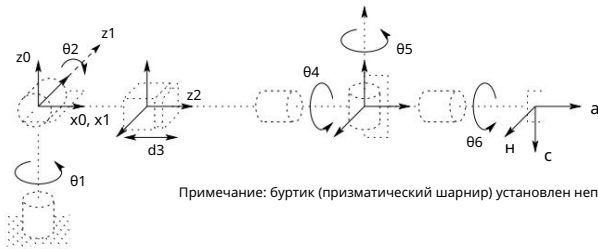
где

$$\begin{aligned}r_{11} &= c1c4c5c6 - c1s4s6 + s1s5c6 \\r_{21} &= s1c4c5c6 - s1s4s6 - c1s5c6 \\r_{31} &= s4c5c6 - c4s6 \\r_{12} &= c1c4c5s6 - c1s4c6 - s1s5c6 \\r_{22} &= s1c4c5s6 - s1s4s6 + c1s5c6 \\r_{32} &= c4c5c6 - c4c6 \\r_{13} &= c1c4s5 - s1c5 \\r_{23} &= c1c4c5 + c1c5 \\r_{33} &= s4s5 \\dx &= c1c4s5d6 - s1c5d6 - s1d3 \\dy &= s1c4s5d6 + c1c5d6 + c1d3 \\dz &= s4s5d6 + d1 + d2.\end{aligned}$$

Обратите внимание, что большая часть сложности прямой кинематики для этого манипулятора возникает из-за ориентации рабочего органа, в то время как выражение для положения руки из (3.28) довольно простое. Предположение о сферическом запястье не только упрощает здесь вывод прямой кинематики, но и значительно упрощает задачу обратной кинематики в следующей главе.

Пример 3.5 Стэнфордский манипулятор

Теперь рассмотрим Стэнфордский манипулятор, показанный на рис. 3.10. Этот манипулятор является



Примечание: буртик (призматический шарнир) установлен неправильно.

Рисунок 3.10: Назначение системы координат ДН для манипулятора Stanford.

пример сферического (РРП) манипулятора со сферическим запястьем. Этот манипулятор имеет смещение в плечевом суставе, что несколько усложняет задачи как прямой, так и обратной кинематики.

78 ГЛАВА 3. Прямая кинематика: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

Таблица 3.4: Параметры ДН для Stanford Manipulator.

Связь	d_i	a_i	θ_i	α_i	β_i
1	d_2	0	θ_1	0	0
2	0	a	0	θ_2	0
3	0	0	0	0	θ_3
4	0	0	θ_4	0	0
5	d_6	0	0	0	θ_5
6	0	0	0	0	0

* совместная переменная

Сначала мы устанавливаем совместные системы координат, используя соглашение ДН, как показано. параметры ссылки приведены в таблице 3.4.

Матрицы A_i легко вычислить как

$$A_1 = \begin{bmatrix} c1 & 0 & s1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c2 & 0 & s2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c4 & 0 & s4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c6 & s6 & 0 & 0 & c6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.3. ПРИМЕРЫ

79

T_6^0 затем дается как

$$T_6^0 = A1 \cdots A6 \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} r11 & r12 & r13 & dx \\ r21 & r22 & r23 & dy \\ r32 & r33 & dz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

где

$$\begin{aligned} r11 &= c1[c2(c4c5c6 - s4s6) - s2s5c6] - d2(s4c5c6 + c4s6) & r21 &= \\ s1[c2(c4c5c6 - s4s6) - s2s5c6] + c1(s4c5c6 + c4s6) & r31 &= \\ s2(c4c5c6 - s4s6) - c2s5c6 & r12 &= \\ c1[-c2(c4c5s6 + s4c6) + s2s5s6] - s1(-s4c5s6 + c4c6) & r22 &= \\ s1[-c2(c4c5s6 + s4c6) + s2s5s6] + c1(-s4c5s6 + c4c6) & r32 &= \\ s2(c4c5s6 + s4c6) + c2s5s6 & r13 &= \\ c1(c2c4s5 + s2c5) - s1s4s5 & r23 &= \\ s1(c2c4s5 + s2c5) + c1s4s5 & r33 &= \\ -s2c4s5 + c2c5 & dx &= c1s2d3 \\ -s1d2 + d6(c1c2c4s5 + c1c5s2 - s1s4s5) & dy &= s1s2d3 + c1d2 \\ + d6(c1s4s5 + c2c4s1s5 + c5s1s2) & dz &= c2d3 + d6(c2c5 - c4s2s5). \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

Пример 3.6 Манипулятор SCARA

В качестве другого примера общей процедуры рассмотрим манипулятор SCARA на рис. 3.11. Этот манипулятор, представляющий собой абстракцию робота AdeptOne на рис. 1.11, состоит из руки RRP и запястья с одной степенью свободы, движение которых представляет собой перекал вокруг вертикальной оси. Первым шагом является определение местоположения и маркировка осей соединения, как показано на рисунке. Поскольку все оси соединений параллельны, у нас есть некоторая свобода в размещении начала координат. Истоки расположены так, как показано для удобства. Устанавливаем ось x_0 в плоскости страницы, как показано. Это совершенно произвольно и влияет только на нулевую конфигурацию манипулятора, то есть на положение манипулятора при $\theta_1 = 0$.

Совместные параметры приведены в Таблице 3.5, а A-матрицы следующие.

80 ГЛАВА 3. Прямая кинематика: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

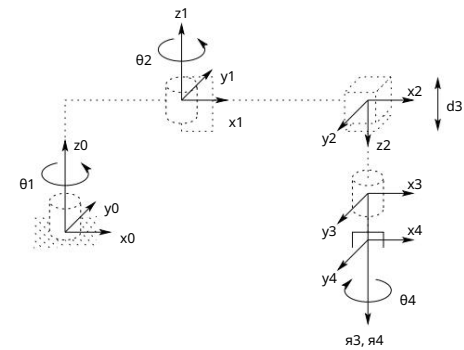


Рисунок 3.11: Назначение системы координат DH для манипулятора SCARA.

Таблица 3.5: Совместные параметры для SCARA.

Ссылка	а _й	α _й	д _и	θ _й
1		0	0	
2	a1	a2	180°	0
3	0	0	0	d4
4				

* совместная переменная

$$A1 = \begin{bmatrix} c1 & s1 & 0 & a1 & c1 & 0 \\ c1 & a1 & s1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$A2 = \begin{bmatrix} c2 & s2 & 0 & a2 & c2 & s2 & c2 \\ 0 & a2 & s2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$A3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 \\ 0 & 1 & & \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$A4 = \begin{bmatrix} c4 & s4 & 0 & 0 & c4 & 0 \\ c4 & 0 & 0 & 1 & d4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Таким образом, прямые кинематические уравнения имеют вид

$$T_4^0 = A_1 \cdots A_4 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 c_4 + s_1 c_2 s_4 & c_1 c_2 s_4 + s_1 c_2 c_4 & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 c_4 + c_1 c_2 s_4 & s_1 c_2 s_4 + c_1 c_2 c_4 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (3.49)$$

Глава 4

ОБРАТНАЯ КИНЕМАТИКА

В предыдущей главе мы показали, как определить положение рабочего органа и его ориентацию в терминах совместных переменных. В этой главе рассматривается обратная задача нахождения совместных переменных с точки зрения положения рабочего органа и его ориентации. Это задача обратной кинематики, и она, вообще говоря, сложнее, чем задача прямой кинематики.

В этой главе мы начнем с формулировки общей обратной задачи кинематики. После этого мы опишем принцип кинематической развязки и то, как его можно использовать для упрощения обратной кинематики большинства современных манипуляторов. Используя кинематическую развязку, мы можем независимо рассматривать задачи положения и ориентации. Мы описываем геометрический подход к решению задачи позиционирования, а параметризацию угла Эйлера используем для решения задачи ориентации.

4.1. Общая задача обратной кинематики.

Общая задача инверсной кинематики может быть сформулирована следующим образом. Для заданного 4×4 однородного преобразования

$$H = \begin{pmatrix} P & o & 0 \\ 1 & & \end{pmatrix} SE(3) \quad (4.1)$$

при $R \in SO(3)$ найти (одно или все) решения уравнения

$$T_n^o(q_1, \dots, q_n) = H \quad (4.2)$$

где

$$T_n^o(q_1, \dots, q_n) = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n). \quad (4.3)$$

Здесь H представляет желаемое положение и ориентацию рабочего органа, и наша задача состоит в том, чтобы найти значения совместных переменных $q_1, \dots, q_n$ так, чтобы $T_n^o(q_1, \dots, q_n) = H$.

Уравнение (4.2) приводит к двенадцати нелинейным уравнениям от n неизвестных переменных, которые можно записать в виде

$$T_{ij}(q_1, \dots, q_n) = h_{ij}, \quad 4 \leq i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, \quad (4.4)$$

где T_{ij} , h_{ij} относятся к двенадцати нетривиальным элементам T_n^o и H соответственно. (Поскольку и T , и нижняя строка обоих T_n^o и H равны $(0, 0, 0, 1)$, четыре из шестнадцати уравнений, представленных T (4.2) тривиальны.)

Пример 4.1.

Вспомните манипулятор Stanford из примера 3.3.5. Предположим, что желаемое положение и ориентация конечного кадра задается

$$H = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & b_{yx} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & o_{y1} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & u_{n1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Чтобы найти соответствующие совместные переменные θ_1 , θ_2 , d_3 , θ_4 , θ_5 и θ_6 , мы должны одновременно решить следующую систему нелинейных тригонометрических уравнений (ср. (3.43) и (3.44)):

$$\begin{aligned} c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= r_{11} s_1[c_2 \\ (c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= r_{21} - s_2(c_4c_5c_6 \\ s_4s_6) - c_2s_5c_6 &= r_{31} c_1[- c_2(c_4c_5s_6 \\ + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(- s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= r_{12} s_1[- c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) \\ + s_2s_5s_6] + c_1(- s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= r_{22} s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 = \\ r_{32} c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 &= r_{13} \\ s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 &= r_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2c_4s_5 + c_2c_5 &= r_{33} \\ c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5) &= o_x s_1s_2d_3 \\ + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) &= o_y c_2d_3 + d_6(c_2c_5 \\ c_4s_2s_5) &= u_{n1}. \end{aligned}$$

Уравнения в предыдущем примере, конечно, слишком сложны для решения непосредственно в замкнутой форме. Так обстоит дело с большинством роботов-манипуляторов. Поэтому нам необходимо разработать эффективные и систематические методы, использующие особую кинематическую структуру манипулятора. В то время как задача прямой кинематики всегда имеет единственное решение, которое можно получить, просто оценивая прямые уравнения, задача обратной кинематики может иметь решение, а может и не иметь. Даже если решение существует, оно может быть или не быть уникальным.

Кроме того, поскольку эти прямые кинематические уравнения в общем случае являются сложными нелинейными функциями совместных переменных, может быть трудно получить решения, даже если они существуют.

При решении обратной задачи кинематики нас больше всего интересует решение уравнений в замкнутой форме, а не численное решение. Поиск решения в закрытой форме означает поиск явного отношения:

$$q_k = f_k(h_{11}, \dots, h_{34}), k = 1, \dots, n. \tag{4.6}$$

Решения закрытой формы предпочтительнее по двум причинам. Во-первых, в некоторых приложениях, таких как отслеживание сварочного шва, местоположение которого определяется системой технического зрения, обратные кинематические уравнения должны решаться с высокой скоростью, скажем, каждые 20 миллисекунд, и наличие выражений в замкнутой форме, а не итеративный поиск практическая необходимость. Во-вторых, кинематические уравнения в общем случае имеют несколько решений. Наличие решений закрытой формы позволяет разработать правила выбора конкретного решения из нескольких.

Практический вопрос о существовании решений обратной задачи кинематики зависит как от технических, так и от математических соображений. Например, движение шарнирных соединений может быть ограничено менее чем полным поворотом на 360 градусов, так что не все математические решения кинематических уравнений будут соответствовать физическим реализуемым конфигурациям манипулятора. Будем считать, что заданное положение и ориентация таковы, что существует хотя бы одно решение уравнения (4.2). Как только решение математических уравнений определено, его необходимо дополнительно проверить, чтобы увидеть, удовлетворяет ли оно всем ограничениям на диапазоны возможных движений суставов. Для наших целей в дальнейшем будем считать, что данная однородная матрица H в (4.2) соответствует конфигурации в рабочем пространстве манипулятора с достижимой ориентацией. Это тогда гарантирует, что полученные математические решения соответствуют достижимым конфигурациям.

4.2 Кинематическая развязка

Хотя общая проблема обратной кинематики довольно сложна, оказывается, что для манипуляторов, имеющих шесть шарниров, причем последние три шарнира пересекаются в точке (например, Стэнфордский манипулятор выше), можно разделить задачу обратной кинематики на две части. более простые задачи, известные соответственно как кинематика инверсного положения и кинематика инверсной ориентации. Иными словами, для манипулятора с шестью степенями свободы со сферическим запястьем обратная задача кинематики может быть разделена на две более простые задачи, а именно: сначала найти положение пересечения осей запястья, далее называемое центром запястья, а затем определение ориентации запястья.

Для конкретности предположим, что имеется ровно шесть степеней свободы и что последние три шарнирные оси пересекаются в точке o_c . Выразим (4.2) в виде двух систем уравнений, представляющих уравнения вращения и уравнения положения

$$P_o^o(q_1, \dots, q_6) = R \tag{4.7}$$

$$o_c(q_1, \dots, q_6) = o \tag{4.8}$$

где o и R — желаемое положение и ориентация рамки инструмента, выраженная по отношению к мировой системе координат. Таким образом, нам даны o и R , и необходимо решить обратную задачу кинематики относительно $q_1, \dots, q_6$.

Предположение о сферическом запястье означает, что оси z_3, z_4 и z_5 пересекаются в точке o_c , и, следовательно, начало координат o_4 и o_5 , определяемое DH-соглашением, всегда будет в центре запястья o_c . Часто o_3 тоже будет на o_c , но это не обязательно для нашего последующего развития. Важным моментом этого допущения для инверсной кинематики является то, что движение последних трех звеньев вокруг этих осей не изменит положение o_c , и, таким образом, положение центра запястья, таким образом, является функцией только первых трех суставных переменных.

Начало рамки инструмента (желательные координаты которой задаются буквой o) просто получается путем переноса расстояния d_6 по z_5 от o_c (см. Таблицу 3.3). В нашем случае z_5 и z_6 являются одной и той же осью, а третий столбец R выражает направление z_6 относительно базовой рамы. Таким образом, у нас есть

$$\begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_6 R \tag{4.9}$$

Таким образом, чтобы рабочий орган робота находился в точке с координатами, заданными o , и с ориентацией рабочего органа, заданной $R = (r_{ij})$, необходимо и достаточно, чтобы центр запястья o_c имел заданные координаты k

$$\begin{bmatrix} o_{xc} \\ o_{yc} \\ o_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - d_6 R \tag{4.10}$$

и что ориентация рамы o_c по отношению к основанию задается R . Если компоненты положения рабочего органа o обозначаются o_x, o_y, o_z , а компоненты центра запястья o_c обозначаются x_c, y_c, z_c , то (4.10) дает соотношение

$$\begin{matrix} x_c & \text{был} & -d_6 r_{13} \\ y_c & \text{ой} & -d_6 r_{23} \\ z_c & \text{унция} & -d_6 r_{33} \end{matrix} \tag{4.11}$$

Используя уравнение (4.11), мы можем найти значения первых трех совместных переменных. определяет преобразование ориентации R Это зависит только от этих первых трех совместных переменных. Теперь мы можем определить ориентацию рабочего органа относительно системы координат o_3 из выражения

$$P = P_o \quad P_o = P_{o_c} \tag{4.12}$$

как

$$P_o^{-1} = (P_o^{-1} \quad 1) R = (R_o^{-1})^T P. \tag{4.13}$$

Как мы увидим в разделе 4.4, последние три угла соединения можно найти как набор углов Эйлера, соответствующих R_o . Заметим, что правая часть (4.13) полностью известна, так как R задано, а R_o можно вычислить, если известны первые три совместных переменных. Идея кинематической развязки проиллюстрирована на рис. 4.1.

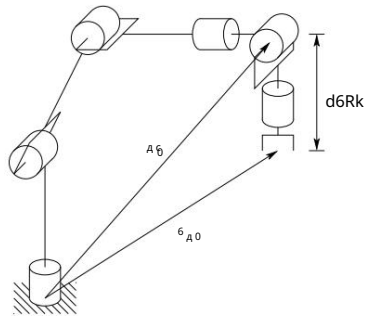


Рисунок 4.1: Кинематическая развязка.

Краткое содержание

Для этого класса манипуляторов определение инверсной кинематики можно свести к следующему алгоритму.

Шаг 1: Найдите q_1, q_2, q_3 так, чтобы центр запястья o_c имел координаты, заданные формулой

$${}^0o_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = o - d_6 R \quad (4.14)$$

Шаг 2: Используя объединенные переменные, определенные на шаге 1, оцените $R\theta$.

Шаг 3: Найдите набор углов Эйлера, соответствующих матрице вращения

$$P_6^3 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1R = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T P. \quad (4.15)$$

4.3 Инверсное положение: геометрический подход

Для общих кинематических устройств, которые мы рассматриваем, мы можем использовать геометрический подход, чтобы найти переменные q_1, q_2, q_3 , соответствующие o , заданному (4.10). Мы ограничиваем наше рассмотрение геометрическим подходом по двум причинам. Во-первых, как мы уже говорили, большинство современных конструкций манипуляторов кинематически просты и обычно состоят из одной из пяти основных конфигураций из главы 1 со сферическим запястьем. Действительно, отчасти из-за сложности общей задачи обратной кинематики конструкции манипуляторов развились до их нынешнего состояния. Во-вторых, существует несколько методов, которые могут решить общую задачу обратной кинематики для произвольных конфигураций. Поскольку читатель, скорее всего, столкнется с конфигурациями роботов

рассматриваемого здесь типа дополнительные трудности, связанные с рассмотрением общего случая, кажутся неоправданными. Читатель обращается к ссылкам в конце главы для рассмотрения общего случая.

В общем случае сложность обратной задачи кинематики возрастает с увеличением числа ненулевых параметров звена. Для большинства манипуляторов многие из $a_i d_i$ равны нулю, a_i равны 0 или $\pm\pi/2$ и т. д. Особенно в этих случаях наиболее простым и естественным является геометрический подход. Проиллюстрируем это несколькими важными примерами.

Шарнирная конфигурация

Рассмотрим локтевой манипулятор, показанный на рис. 4.2, с компонентами o на x_c, y_c, z_c . Спроецируем o_c на плоскость $x_0 y_0$, как показано на рис. 4.3.

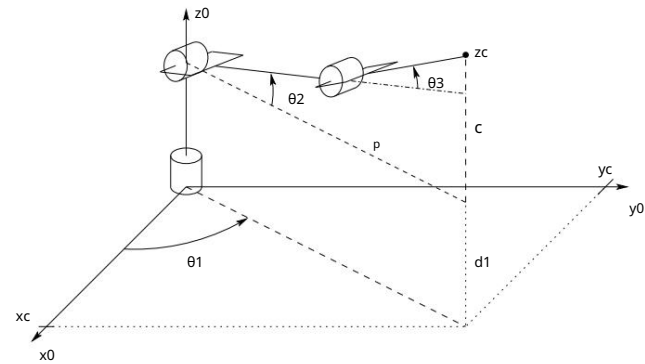


Рисунок 4.2: Локтевой манипулятор.

Мы видим из этой проекции, что

$$\theta_1 = A \tan(x_c, y_c), \quad (4.16)$$

в которой $A \tan(x, y)$ обозначает функцию арктангенса с двумя аргументами. $\tan(x, y)$ определен для всех $(x, y) \neq (0, 0)$ и равен единственному углу θ , такому что

$$\text{потому что } \theta = \frac{\arcsin}{(\arcsin^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \text{грех } \theta = \frac{y}{(\arcsin^2 + y^2)^{1/2}}. \quad (4.17)$$

Например, $\arctan(1, 1) = \frac{\pi}{4}$, в то время как $A \tan(1, 1) = \frac{3\pi}{4}$.
Обратите внимание, что второе допустимое решение для θ_1

$$\theta_1 = \pi + A \tan(x_c, y_c). \quad (4.18)$$

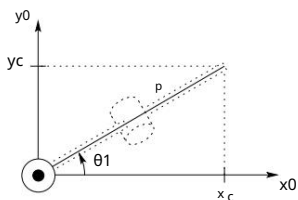


Рисунок 4.3: Проекция центра запястья на плоскость $x_0 - y_0$.

Конечно, это, в свою очередь, приведет к различным решениям для θ_2 и θ_3 , как мы увидим ниже.

Эти решения для θ_1 действительны, если только $x_c = y_c = 0$. В этом случае (4.16) не определено, а манипулятор находится в сингулярной конфигурации, показанной на рис. 4.4. В этом положении

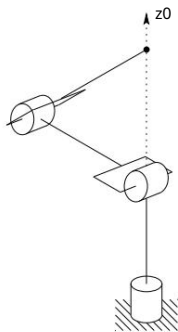


Рисунок 4.4: Сингулярная конфигурация.

центр запястья ос пересекает z_0 ; следовательно, любое значение θ_1 оставляет ос фиксированным. Таким образом, существует бесконечно много решений для θ_1 , когда ос пересекает z_0 .

Если есть смещение $d = 0$, как показано на рисунке 4.5, то центр запястья не может пересекать z_0 . В этом случае, в зависимости от того, как были назначены параметры ДН, мы будем иметь $d_2 = d$ или $d_3 = d$. В этом случае, вообще говоря, будет только два решения для θ_1 . Они соответствуют так называемым конфигурациям левой руки и правой руки, как показано на рисунках 4.6 и 4.7. На рис. 4.6 показана конфигурация левой руки. Из этого рисунка мы видим геометрически, что

$$\theta_1 = \varphi - \alpha \quad (4.19)$$

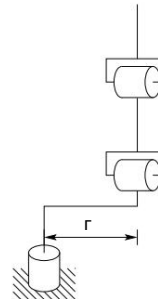


Рисунок 4.5: Локтевой манипулятор со смещенным плечом.

где

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) \quad (4.20)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{d_2}{d_3}\right) \quad (4.21)$$

$$= \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) - \arctan\left(\frac{d_2}{d_3}\right)$$

Второе решение, даваемое конфигурацией правой руки, показанной на рис. 4.7, определяется выражением

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) + \arctan\left(\frac{d_2}{d_3}\right) \quad (4.22)$$

Чтобы увидеть это, обратите внимание, что

$$\theta_1 = \alpha + \beta = \varphi \quad (4.23)$$

$$\arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) = \beta = \varphi - \alpha \quad (4.24)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) - \arctan\left(\frac{d_2}{d_3}\right) \quad (4.25)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) - \arctan\left(\frac{d_2}{d_3}\right) \quad (4.26)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) - \arctan\left(\frac{d_2}{d_3}\right) \quad (4.27)$$

которые вместе означают, что

$$\beta = \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) - \arctan\left(\frac{d_2}{d_3}\right) \quad (4.28)$$

поскольку $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ и $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$.

Чтобы найти углы θ_2 , θ_3 для локтевого манипулятора при заданном θ_1 , рассмотрим плоскость, образованную вторым и третьим звеньями, как показано на рис. 4.8. Поскольку движение ссылок

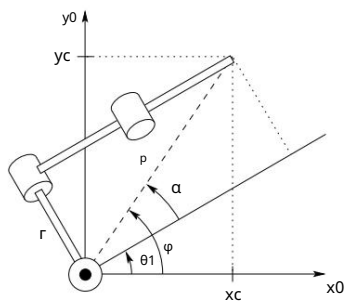


Рисунок 4.6: Конфигурация левой руки.

два и три плоские, решение аналогично решению двухзвеного манипулятора из главы 1. Как и в нашем предыдущем выводе (ср. (1.8) и (1.9)) мы можем применить закон косинусов, чтобы получить

$$\cos \theta_3 = \frac{r^2 + p^2 - d^2}{2rp} \quad (4.29)$$

Так как $r^2 = x_c^2 + y_c^2$ и $s = zc$. Следовательно, θ_3 определяется выражением

$$\theta_3 = \arccos \left(\frac{r^2 + p^2 - d^2}{2rp} \right) \quad (4.30)$$

Точно так же θ_2 задается как

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{y_c}{x_c} \right) - \arctan \left(\frac{p \sin \theta_3}{r + p \cos \theta_3} \right) \quad (4.31)$$

Два решения для θ_3 соответствуют положению с поднятым локтем и положению с опущенным локтем соответственно.

Примером локтевого манипулятора со смещением является PUMA, показанный на рис. 4.9. Как показано, есть четыре решения кинематики инверсного положения. Они соответствуют ситуациям: левая рука — локоть вверх, левая рука — локоть вниз, правая рука — локоть вверх и правая рука — локоть вниз. Мы увидим, что существует два решения для ориентации запястья, что дает в общей сложности восемь решений инверсной кинематики для манипулятора PUMA.

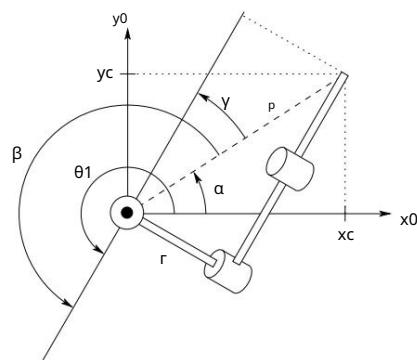


Рисунок 4.7: Конфигурация правой руки.

Сферическая конфигурация

Затем мы решим кинематику инверсного положения для сферического манипулятора с тремя степенями свободы, показанного на рис. 4.10. Как и в случае с локтевым манипулятором, первой переменной сустава является базовое вращение, и решение дается как

$$\theta_1 = \arctan(x_c, y_c) \quad (4.32)$$

при условии, что x_c и y_c не равны нулю. Если x_c и y_c равны нулю, конфигурация по-прежнему сингулярна, и θ_1 может принимать любое значение.

Угол θ_2 взят из рисунка 4.10 как

$$\theta_2 = \arctan(r, s) + \frac{\pi}{2} \quad (4.33)$$

где $r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ и $s = zc$. Как и в случае с локтевым манипулятором, второе решение выражением

$$\theta_1 = \pi + \arctan(x_c, y_c); \quad (4.34)$$

Линейное расстояние d_3 находится как

$$d_3 = \sqrt{r^2 + c^2} \pm \sqrt{y_c^2 + (zc \pm d_1)^2} \quad (4.35)$$

Решение с отрицательным квадратным корнем для d_3 не учитывается, и, таким образом, в этом случае мы получаем два решения обратной кинематики положения, пока центр запястья не пересекает z_0 . Если есть смещение, то будут конфигурации левой и правой руки, как в случае с локтевым манипулятором (задача 4-12).

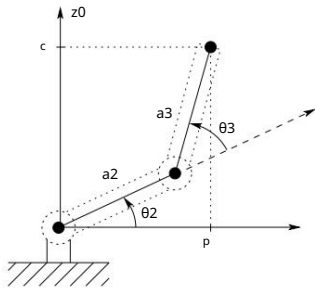


Рисунок 4.8: Проецирование на плоскость, образованную звеньями 2 и 3.

4.4 Обратная ориентация

В предыдущем разделе мы использовали геометрический подход для решения обратной позиционной задачи. Это дает значения первых трех суставных переменных, соответствующих заданному положению начала запястья. Обратная задача ориентации теперь заключается в нахождении значений последних трех совместных переменных, соответствующих заданной ориентации относительно системы отсчета $o3x3y3z3$. Для сферического запястья это можно интерпретировать как задачу нахождения набора углов Эйлера, соответствующих заданной матрице поворота R . Напомним, что уравнение (3.32) показывает, что матрица поворота, полученная для сферического запястья, имеет тот же вид, что и матрица поворота матрица преобразования Эйлера, заданная в (2.52). Следовательно, мы можем использовать метод, разработанный в разделе 2.5.1, для определения трех углов сустава сферического запястья. В частности, мы находим три угла Эйлера, ϕ , θ , ψ , используя уравнения (2.54) – (2.59), а затем используем отображение

$$\begin{aligned}\theta_4 &= \phi, \\ \theta_5 &= \theta, \theta_6 \\ &= \psi.\end{aligned}$$

Пример 4.2 Шарнирный манипулятор со сферическим запястьем

Параметры DH для назначения рамы, показанные на рисунке 4.2, сведены в таблицу 4.1. Умножение соответствующих матриц A_i дает матрицу R_0 для шарнирного или коленчатого манипулятора как

$$R_0 = \begin{bmatrix} c1c23 & c1s23 & s1 \\ s1c23 & s1s23 & c1 \\ c23 & c23 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

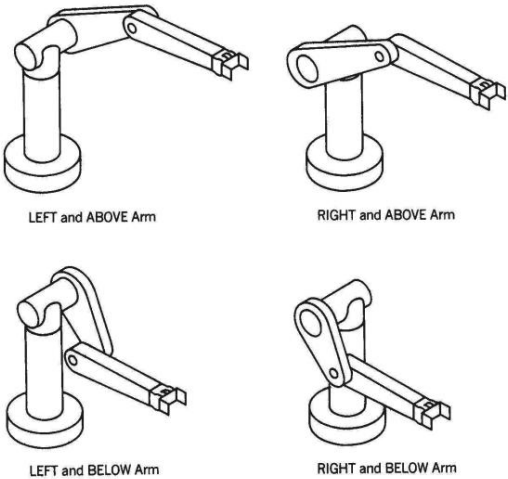


Рисунок 4.9: Четыре решения обратной кинематики положения для манипулятора PUMA.

Таблица 4.1: Параметры звена шарнирного манипулятора на рис. 4.2.

Связь	a_i	α_i	d_i	θ_i	0	90	d_1
1		θ	1				
2	a_2	0	0	θ		2	
3	a_3	0	0	θ			3

* переменная

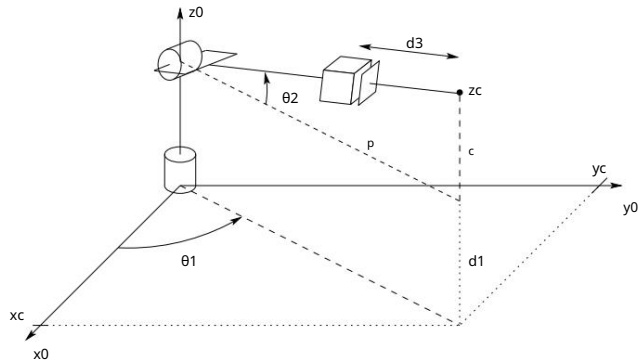


Рисунок 4.10: Сферический манипулятор.

Матрица R_3 $_6 = A_4 A_5 A_6$ задается как

$$\begin{pmatrix} p_3 \\ p_6 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 \\ s_5 c_6 & c_5 c_6 & c_5 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Таким образом, уравнение, которое необходимо решить для последних трех переменных, имеет вид

$$P_3 = (p_3 \ 0 \ 0)^T P \quad (4.38)$$

и решение угла Эйлера может быть применено к этому уравнению. Например, три уравнения задается третьим столбцом в приведенном выше матричном уравнении, задается выражением

$$c_4 s_5 = c_1 c_2 s_3 r_{13} + s_1 c_2 s_3 r_{23} + s_2 s_3 r_{33} \quad (4.39)$$

$$s_4 s_5 = c_1 s_2 s_3 r_{13} + s_1 s_2 s_3 r_{23} + c_2 s_3 r_{33} \quad (4.40)$$

$$c_5 = s_1 r_{13} + c_1 r_{23} \quad (4.41)$$

Следовательно, если не оба выражения (4.39), (4.40) равны нулю, то из (2.54) получаем θ_5 и (2.55) как

$$\theta_5 = A \tan(c_1 r_{13} + c_1 r_{23}, \pm 1 \sqrt{(s_1 r_{13} + c_1 r_{23})^2}) \quad (4.42)$$

Если в (4.42) выбран положительный квадратный корень, то θ_4 и θ_6 определяются (2.56) и (2.57), соответственно, как

$$\theta_4 = A \arctan(c_1 c_2 s_3 r_{13} + s_1 c_2 s_3 r_{23} + s_2 s_3 r_{33}, c_1 s_2 s_3 r_{13} + s_1 s_2 s_3 r_{23} + c_2 s_3 r_{33}) \quad (4.43)$$

$$\theta_6 = A \tan(s_1 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} + c_1 r_{22}) \quad (4.44)$$

Аналогично получаются остальные решения. Если $s_5 = 0$, то общие оси z_3 и z_5 равны коллинеарны. Это сингулярная конфигурация, и можно определить только сумму $\theta_4 + \theta_6$. Один решение состоит в том, чтобы выбрать θ_4 произвольно, а затем определить θ_6 , используя (2.62) или (2.64).

Пример 4.3. Резюме решения локтевого манипулятора

Подводя итог предыдущему развитию, запишем одно решение обратной кинематики коленчатого манипулятора с шестью степенями свободы, показанного на рис. 4.2, имеет отсутствие суставных смещений и сферическое запястье.

Данный

$$O = \begin{pmatrix} \text{бык} \\ \text{ou} \\ \text{ушн} \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

затем с

$$x_c = \text{бык} - d_6 r_{13} \quad (4.46)$$

$$y_c = \text{ou} - d_6 r_{23} \quad (4.47)$$

$$z_c = \text{oz} - d_6 r_{33} \quad (4.48)$$

набор совместных переменных DH определяется выражением

$$\theta_1 = A \tan(x_c, y_c) \quad (4.49)$$

$$\theta_2 = A \tan(c_2 + y_c^2, d_2, z_c) \quad A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \quad (4.50)$$

$$\theta_3 = A \tan(c_2 + y_c^2, d_2, z_c) \quad (4.51)$$

$$\text{где } D = \frac{a_2^2 + y_c^2 + a_3^2 + r_{23}^2}{2a_2 a_3} \quad (4.51)$$

$$\theta_4 = A \arctan(c_1 c_2 s_3 r_{13} + s_1 c_2 s_3 r_{23} + s_2 s_3 r_{33}, c_1 s_2 s_3 r_{13} + s_1 s_2 s_3 r_{23} + c_2 s_3 r_{33}) \quad (4.52)$$

$$\theta_5 = A \tan(s_1 r_{13} + c_1 r_{23}, \pm 1 \sqrt{(s_1 r_{13} + c_1 r_{23})^2}) \quad (4.53)$$

$$\theta_6 = A \tan(s_1 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} + c_1 r_{22}) \quad (4.54)$$

Другие возможные решения оставляем в качестве упражнения (задача 4-11).

Пример 4.4 Манипулятор SCARA

В качестве другого примера рассмотрим манипулятор SCARA с прямой кинематикой. определяется T_4^0 из (3.49). Тогда обратная кинематика задается как множество решений уравнения

$$\begin{pmatrix} c_{12} c_4 + s_{12} s_4 & s_{12} c_4 & c_{12} s_4 & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} c_4 & c_{12} s_4 & c_{12} c_4 & s_{12} s_4 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_3 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Прежде всего отметим, что, поскольку SCARA имеет только четыре степени свободы, не каждое возможное H из $SE(3)$ допускает решение (4.55). На самом деле мы легко можем видеть, что решение (4.55) не существует, если R не имеет вида

$$P = \begin{pmatrix} c\alpha & c\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

и если это так, то сумма $\theta_1 + \theta_2 - \theta_4$ определяется выражением

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \alpha = A \tan(r_{11}, r_{12}). \quad (4.57)$$

Проецирование конфигурации манипулятора на плоскость $x_0 y_0$ сразу дает ситуацию, показанную на рис. 4.11.

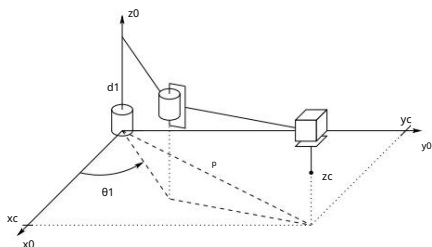


Рисунок 4.11: Манипулятор SCARA.

Отсюда мы видим, что

$$\theta_2 = A \tan c_2, \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (4.58)$$

где

$$c_2 = \frac{2a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_1a_2} \quad (4.59)$$

$$\theta_1 = A \tan(\theta_2, \theta_4) = A \tan(a_1 + a_2 c_2, a_2 s_2). \quad (4.60)$$

Тогда мы можем определить θ_4 из (4.57) как

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \theta_1 + \theta_2 - \alpha \\ &= \theta_1 + \theta_2 - A \tan(r_{11}, r_{12}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Наконец, d_3 задается как

$$d_3 = d_1 + d_2. \quad (4.62)$$