



БРНО ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСОКАЯ УЧЕБНАЯ ТЕХНИКА В БРНЕ

МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФАКУЛЬТ СТРОИТЕЛЬНЫХ ИНСТРУКЦИЙ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УСТАВ МАТЕМАТИКА

ПРИМЕНЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ В РОБОТОТЕ КИНЕМАТИКА

ПРИЛОЖЕНИЕ QUATERNION® V KINEMATICE ROBOTU

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

ДИПЛОМНАЯ ЦЕНА

АВТОР

АВТОРСКАЯ ЦЕНА

Диана Доктор

РУКОВОДИТЕЛЬ

VEDOUĆÍ PRÁCE

док. Инж. Радомил Матушек, доктор философии.

БРНО 2019



Спецификация магистерской диссертации

Отделение:	Институт математики
Студент:	Диана Доктор
Программа обучения:	Прикладные науки в технике
Область исследования:	Математическая инженерия
Руководитель:	док. Инж. Радомил Матушек, доктор философии.
Академический год:	2018/19

В соответствии с Законом №. 111/1998 относительно университетов и НО правил обучения и экзаменов, вы
В магистерской диссертации директора института была задана следующая тема:

Применение кватернионов в кинематике роботов

Краткая характеристика задачи:

Эта диссертация посвящена полезности кватернионного представления кинематики для робототехники.
Приложения. И прямая, и обратная кинематика для робота-манипулятора выводятся с использованием кватернионы.

Цели магистерской диссертации:

Обзор роботов 6DOF и моделей прямой и инверсной кинематики для проектирования управления.
Современное состояние управления роботами с использованием алгебры кватернионов.
Моделирование робота (Универсальный робот) и практическое применение программирования.

Рекомендуемая библиография:

СИСИЛИАНО, Бруно и ХАТИБ, Усама, изд. Справочник Springer по робототехнике. 2-е издание. Берлин:
Спрингер, [2016]. ISBN 978-3-319-32550-7.

Срок сдачи магистерской диссертации установлен Расписанием 2018/19 учебного года.

В Брно,

ЛС

проф. РНДр. Йозеф Шлапал, CSc.
директор института

док. Инж. Ярослав Католицкий, доктор философии.
декан ФМЭ

Абстрактный

Эта диссертация посвящена полезности применения кватернионов для представления кинематики роботов. Он начинается с демонстрации связи кватернионов с более широко известными комплексными числами и того, как они могут представлять вращения в трех измерениях. Затем вводятся двойственные кватернионы, представляющие как трехмерное вращение, так и перенос. Затем он будет использоваться для получения прямой и обратной кинематики, в частности, для универсального робота UR3, который представляет собой роботизированную руку с 6 степенями свободы. Наконец, будет продемонстрировано реальное применение двойных кватернионов в программировании роботов.

Ключевые слова

кватернионы, двойные кватернионы, робототехника, универсальный робот, UR3, прямая кинематика, инверсная кинематика, трехмерные вращения

ДОКТОР, БД Применение кватернионов в кинематике роботов. Брно: Брненский технологический университет, машиностроительный факультет, 2019. 105 с. Научный руководитель дипломной работы проф. док. Инж. Радомил Матоусек, доктор философии.

Я заявляю, что я написал эту дипломную работу «Применение кватернионов в кинематике роботов» самостоятельно под руководством моего научного руководителя, проф. док. Инж. Радомил Матоусек, доктор философии, и помощь от Ing. Роман Парак, а также с использованием источников, перечисленных в библиографии.

31 мая 2019 г.

Диана Б. Доктор

Я хотел бы посвятить эту диссертацию, во-первых, моему отцу Матео, который вырастил меня таким, какой я есть сегодня, человеком, полным надежд и мечтаний, и людям, стоящим за программой InterMaths, которые дали мне множество шансов осуществить эти мечты.

Диана Б. Доктор

Содержание

1. Введение	13
2 Комплексные числа 2.1	15
История комплексных чисел	15
2.2 Комплексная система счисления.	16
2.2.1 Определение.	16
2.2.2 Умножение комплексных чисел.	16
2.3 Графическое представление $z = C \dots$	17
2.4 Свойства комплексных чисел.	18
2.4.1 Норма и аргумент $z = C \dots$	18
2.4.2 Комплексное сопряжение $z = C \dots$	18
2.4.3 Алгебраические правила для комплексных чисел.	19
2.4.4 Добавление комплексных чисел.	20
2.4.5 Умножение комплексных чисел.	20
2.5 Вращения в комплексной плоскости.	22
3 Кватернионы 3.1	23
История кватернионов.	23
3.2. Кватернионная система счисления.	26
3.2.1 Определение.	26
3.2.2 Кватернионные представления.	26
3.2.3. Законы умножения кватернионов.	27
3.3. Свойства кватернионов.	28
3.3.1 Кватернионное сопряжение.	28
3.3.2 Норма кватерниона.	28
3.3.3 Единица кватерниона.	28
3.3.4 Инверсия кватерниона.	28
3.3.5 Сложение и вычитание кватернионов.	29
3.3.6 Умножение и деление кватернионов.	29
3.3.7. Обобщенные свойства кватернионов.	30
3.4 Трехмерное вращение с использованием кватернионов.	31

3.4.1 Трехмерные представления вращения				
3.4.2 Преобразования кватернионов.				36
3.5 Двойственные кватернионы.				38
3.5.1 Определение.				38
3.5.2 Инверсия двойственного кватерниона.				38
3.5.3. Умножение двойственного кватерниона. . .				39
3.5.4. Преобразование двойственным кватернионом. .				39
4 Применение кватернионов к универсальному роботу UR3				41
4.1 Универсальный робот - UR3.				41
4.2 Прямая кинематика двойственными кватернионами.				42
4.2.1 Представления трансформации суставов.				42
4.2.2 Расчет прямой кинематики UR3 . .				44
4.3 Обратная кинематика двойственными кватернионами.				45
4.3.1 Представления трансформаций суставов.				45
4.3.2 Продукты трансформации суставов.				46
4.3.3 Преобразование рамок основания в запястья .				47
4.3.4 Трансформация рамок плеча в запястье.				53
4.3.5 Соединительные углы Решения				56
4.4 Практическое применение программирования.				57
4.4.1 Параметры Денавита-Хартенберга.				57
4.4.2 Приложение для программирования на Python.				58
4.5 Проверка результатов.				71
5 Выводы и рекомендации				75
5.1 Заключение.				75
5.2 Рекомендация.				77
Приложения				79
Универсальный робот UR3				
Технические характеристики				81
B Продукты трансформации для Base toWrist 3				85
C Продукты для трансформации плеча в запястье 1				97
D Список таблиц и рисунков				101

Глава 1

Введение

Концепция робототехники существовала еще в древние времена. Однако сам термин «робот» был придуман только в XX веке и возник в Чехии. Впервые он был представлен Чехией.

драматург Карел Чапек в своей пьесе «Универсальные роботы Россум (RUR)», премьера которой состоялась в Праге в 1920-х годах. Однако на самом деле именно брат Карела, Йозеф Чапек, был изобретателем термина «робот», происходящего от славянского слова «робота», что означает подчиненный или принудительный труд [2]. Пьеса быстро приобрела такое влияние, что термин «робот» был затем добавлен в английский язык и с тех пор используется в художественной литературе, а также в научных исследованиях. В современную эпоху мы называем роботом созданную человеком машину, которая может выполнять работу и имитировать действия, выполняемые людьми. Мы видели различные применения роботов, которые чаще всего используются в обрабатывающей промышленности. Наиболее перспективным их применением будут исследования моря и космоса.

Моделирование робота — это то, где в игру вступает кинематика робота. Формулировка правильной кинематики робота важна для анализа его поведения и управления им. Роботы состоят из суставов и звеньев. Двумя наиболее распространенными типами соединений являются вращательные и призматические соединения. Эти суставы выполняют вращения и переводы соответственно. Мы можем сравнить вращательные суставы с человеческими суставами, такими как суставы в плече, локте, запястьях и коленях. Робот также определяется своими степенями свободы. Это соответствует всем возможным движениям его суставов. Плоский робот описывается как имеющий три степени свободы. Это потому, что он может двигаться только в плоскости.

Это влево или вправо, вперед или назад. Другая степень свободы — это вращение, которое можно совершать в плоскости. Если робот также может совершать движения вверх и вниз, что является дополнительной осью движения, то теперь у него есть четыре степени свободы. Если робот также может менять свою позу (положение

Глава 1 Введение

и ориентацию) посредством вращения вокруг другой оси в плоскости, то он также добавляет к своим степеням свободы. Эти вращения чаще всего известны как тангаж, рыскание и крен. Если робот может выполнять все эти перемещения и вращения, то он имеет максимально шесть степеней свободы.¹ Кинематика робота —

это изучение всех возможных движений робота без учета сил, вызывающих эти движения, как указано в [21]. и [12].

Кинематику можно разделить на прямую и инверсную кинематику. Прямая кинематика определяет положение рабочего органа с учетом углов сустава. Это может быть легко получено, и решение всегда уникально. Однако его дополнение, обратную кинематику, как правило, гораздо сложнее вывести, поскольку она определяет углы суставов, необходимые для определенной позы. Уравнения нелинейны и могут иметь особенности. Помимо этого, может существовать также несколько решений. Наше приложение включает проверку этих решений; однако определение оптимального решения не входит в задачи исследования.

Кинематика робота в основном описывается трансформацией, выполняемой каждым из суставов робота. Эти преобразования разбиваются на повороты и переводы.

Роботизированный сустав может выполнять только поступательное движение, такое как призматические суставы, что означает, что он не влияет на ориентацию рабочего органа, а только на его положение. Существует также соединение, которое может выполнять оба типа поворотных соединений. Эти суставы не только изменяют ориентацию рабочего органа, но также могут изменять его положение. Например, если этот шарнир соединен со звеном с рабочим органом. Эта связь представляет собой перемещение между этой соединительной рамой и рамой рабочего органа. Таким образом, вращение шарнира также повлияет на длину перемещения относительно базовой системы координат, а также на ориентацию рабочего органа.

Для вращений существуют различные способы их представления. Наиболее распространенными способами являются матрицы вращения, углы Эйлера, представление оси-угла и единичные кватернионы. Это исследование сосредоточено на единичных кватернионах, которые дают нам элегантное и компактное представление вращения. В то время как матрицы вращения 3×3 требуется 9 элементов для представления поворота, кватернионам нужно только 4. Однако это представление до сих пор не используется так часто, как однородные преобразования в робототехнике. Это может быть из-за того, что у нас мало знаний об кватернионах. Кватернионы являются расширением комплексных чисел. Таким образом, чтобы понять основную идею кватернионов, нам сначала нужно понять концепцию комплексных чисел. Цель этого исследования — облегчить понимание взаимосвязи между кватернионами и комплексными числами и показать, как кватернионы, особенно двойственные кватернионы, могут наилучшим образом представлять преобразования в трехмерном пространстве.

¹ Из курса edX: «Робототехника: кинематика и математические основы» в [1]

Глава 2

Комплексные числа

Прежде чем мы начнем изучение кватернионов, нам нужно будет вспомнить основные идеи и некоторые важные свойства комплексных чисел, которые очень полезны для понимания концепции кватернионов. Сначала мы начнем с объяснения причины, по которой были сформулированы комплексные числа, а затем перейдем к описанию этой системы счисления. Затем мы обсудим важные свойства комплексных чисел, определив их в алгебраическом, а также в геометрическом смысле.

1

2.1 История комплексных чисел

Система действительных чисел $\mathbb{R}$ возникла в результате поиска системы, включающей рациональные числа и обеспечивающей решения различных полиномиальных уравнений. Однако существуют некоторые полиномиальные уравнения, такие как $x^2 + 2x + 2 = 0$, которым не может удовлетворять никакое действительное число x . Использование квадратичной формулы
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 дает формальные выражения для двух решений системы $ax^2 + bx + c = 0$; но в случаях приведенных выше уравнений эта формула включает квадратные корни из отрицательных чисел, которые ранее не были определены. К шестнадцатому веку итальянский математик Джеронимо Кардано начал рассматривать этот тип уравнений и подчеркивал необходимость как отрицательных, так и «комплексных чисел». Он заметил, что если эти выражения разложить на множители по 1 со свойством $1 \cdot 1 = 1$, они действительно удовлетворяют как решения этих уравнений. Теперь мы используем общепринятое обозначение $i = \sqrt{-1}$ для таких выражений, что $i^2 = -1$.

¹ Содержание этой главы, включая изображения, взято из книги «Основной комплексный анализ» Дж. Э. Марсдена и М. Дж. Хоффмана [18].

2.2 Комплексная система счисления

Мы начнем с определения комплексного числа и объяснения правила умножения комплексных чисел, которое необходимо для понимания умножения кватернионов.

2.2.1 Определение

Система комплексных чисел, обозначаемая $\mathbb{C}$, представляет собой множество² который $\mathbb{R}$, плоскость $\mathbb{R}^2$, состоящую из всех упорядоченных пар (x, y) действительных чисел вместе с обычными правилами сложения векторов,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (2.1)$$

и скалярное умножение на действительное число a ,

$$a(x, y) = (ax, ay) \quad (2.2)$$

и с добавленной операцией комплексного умножения, определяемой,

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \quad (2.3)$$

Для представления комплексных чисел мы сначала идентифицируем действительные числа x как точки на действительной оси x и y как точки на мнимой оси y , где единичная точка $(0, 1)$ представляет i . Итак, теперь мы можем представить комплексное число как $(x, y) = x + iy$, что является более стандартной записью. Таким образом, один символ, такой как $z = a + ib$, также может использоваться для обозначения комплексного числа, где $\operatorname{Re} z = a$ называется действительной частью, а $\operatorname{Im} z = b$ называется мнимой частью. Следовательно, действительное число — это комплексное число z , где $\operatorname{Im} z = b = 0$. Если же наоборот, $\operatorname{Re} z = a = 0$, то мы имеем чисто мнимое число. Обозначение $z \in \mathbb{C}$ означает, что z принадлежит множеству комплексных чисел.

2.2.2 Умножение комплексных чисел

Чтобы вывести правило умножения комплексных чисел,

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (2.4)$$

мы используем стандартные обозначения для комплексных чисел (a, b) и (c, d) , а затем, применяя свойство $i^2 = -1$, получаем:

$$\begin{aligned} (a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd = ac + i(ad + bc) - bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.3 Графическое представление z $\mathbb{C}$

Как мы указали в определении, комплексное число также можно рассматривать как двумерный вектор в $\mathbb{R}^2$ от начала координат до точки на плоскости xy с координатами, заданными действительной и мнимой частями комплексного числа. См. рис. 4.6.

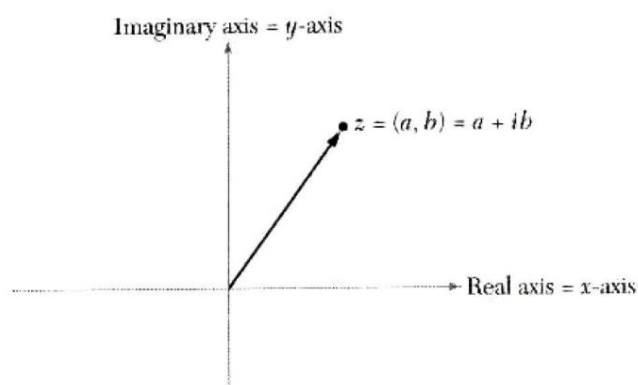


Рисунок 2.1: Векторное представление $z = a + ib$ с $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Im} z = b$.

Полярные координаты и экспоненциальное представление. Запишем комплексное число в форме полярных координат, взяв длину r вектора $(a, b) = a + ib$ как $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Затем мы предполагаем, что вектор образует положительный угол θ с действительной осью, где $0 \leq \theta < 2\pi$. См. рис. 2.2.

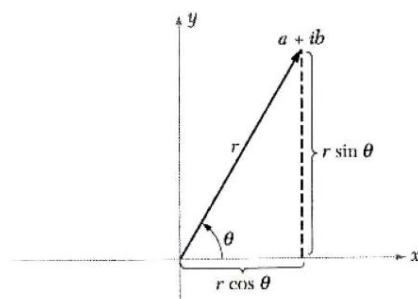


Рисунок 2.2: Представление в полярных координатах комплексного числа $z = a + ib$ с длиной r и углом θ .

По SOHCA TOA мы получаем, что $\tan \theta = \frac{b}{a}$ где $a = r \cos \theta$ и $b = r \sin \theta$, поэтому имеем,

$$z = a + ib = r \cos \theta + i(r \sin \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (2.6)$$

Мы получили экспоненциальную форму, используя формулу Эйлера, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

2.4 Свойства комплексных чисел

В этом разделе мы представим все основные и важные свойства комплексных чисел, необходимые для понимания соответствующих свойств кватернионов.

2.4.1 Норма и аргумент $z \in \mathbb{C}$

На рис. 2.2 вектор, представляющий комплексное число $z = a + ib$, имеет длину r , которую также можно обозначить как $|z|$ и называется нормой z . Формальный расчет определяется следующим образом:

$$|r| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.7)$$

Угол θ называется аргументом z и обозначается $\arg z = \theta$. Формальный расчет определяется следующим образом:

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} \quad (2.8)$$

2.4.2 Комплексное сопряжение $z \in \mathbb{C}$

Если задано комплексное число $z = a + ib$, то $\bar{z}$, называемое комплексно-сопряженным числом z , определяется как $\bar{z} = a - ib$. Геометрически это можно изобразить как отражение действительной оси x , как показано на рис. 2.3.

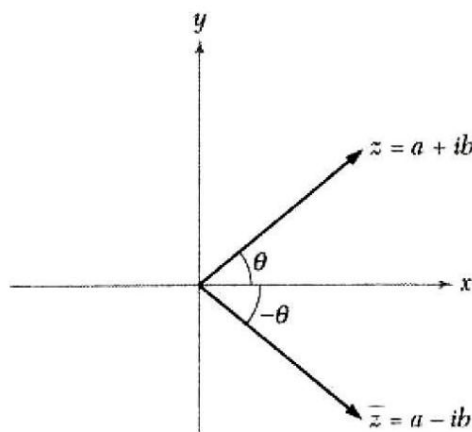


Рисунок 2.3: Комплексное сопряжение.

Следовательно, в форме полярных координат комплексное сопряжение также может быть представлено с использованием той же величины, но противоположного угла.

2.4.3 Алгебраические правила для комплексных чисел

В этом разделе мы покажем, что все обычные алгебраические правила работы с действительными числами можно применить и к комплексным числам.

Дополнительные правила

Комплексные числа z и w удовлетворяют следующим правилам сложения:

1. $g + h = h + g$
2. $z + (w + s) = (z + w) + s$
3. $g + 0 = g$
4. $g + (-g) = 0$

Правила умножения

Комплексные числа z и w удовлетворяют следующим правилам умножения:

1. $zw = wz$
2. $(zw)s = z(ws)$
3. $1z = z$
4. $g(g^{-1}) = 1$ для $z \neq 0$

Мы можем решить для мультипликативного обратного $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$ по:

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{b^2 + a^2} + i \frac{a}{b^2 + a^2} \quad (2.9)$$

Следовательно, для $z = a + ib \neq 0$ мы можем написать:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (2.10)$$

Распределительное право

Комплексные числа z , w и s удовлетворяют следующим правилам распределения:

$$z(w + s) = zw + zs \quad (2.11)$$

Здесь важно отметить, что, как и действительные числа, комплексные числа также удовлетворяют ассоциативным, коммутативным и дистрибутивным свойствам сложения и умножения. Мы сравним этот случай со случаем кватернионных операций, который будет обсуждаться в следующей главе.

2.4.4 Добавление комплексных чисел

Мы можем проиллюстрировать сложение комплексных чисел как сложение двумерных векторов, представляющих два комплексных числа. Эта операция показана на рис. 2.4.

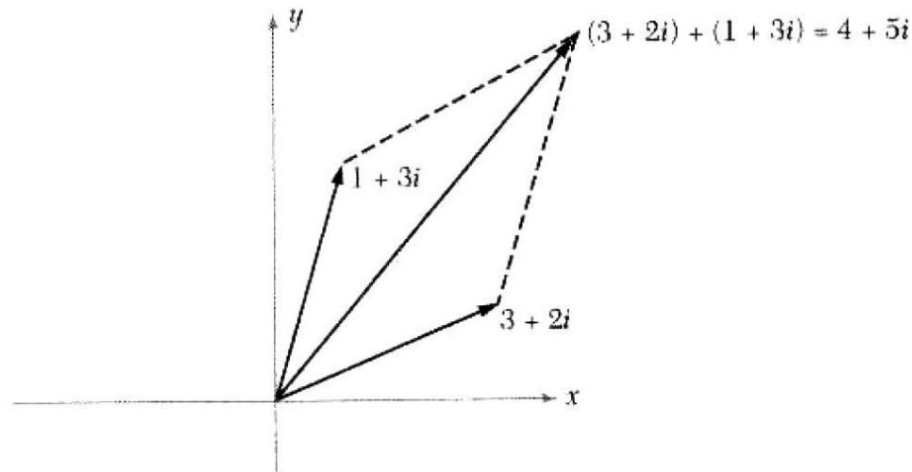


Рисунок 2.4: Сложение комплексных чисел $3 + 2i$ и $1 + 3i$.

Это же представление можно также использовать для вычитания комплексных чисел, где также можно использовать сложение путем добавления первого вектора к отражению в начале координат другого вектора.

2.4.5 Умножение комплексных чисел

Представление комплексного числа в полярной координате или экспоненциальной форме помогает понять произведение двух комплексных чисел в геометрическом смысле. Если мы допустим $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, мы имеем,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \cdot \sin \theta_1)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Обратите внимание, что мы применили следующие тригонометрические формулы для суммы и разности произведений косинусов и синусов углов:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (2.13)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1 \quad (2.14)$$

2.4. Свойства комплексных чисел

Предложение. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 мы предлагаем, что

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ и } \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi} \quad (2.15)$$

Это означает, что произведение двух комплексных чисел — это комплексное число, длина которого равна произведению длин двух перемноженных комплексных чисел, а аргумент равен сумме аргументов этих двух комплексных чисел. Этот продукт можно проиллюстрировать на рис. 2.5 и в примере на 2.6.

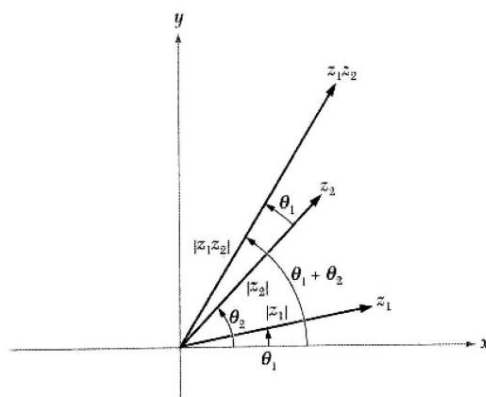


Рисунок 2.5: Умножение комплексных чисел z_1 и z_2 .

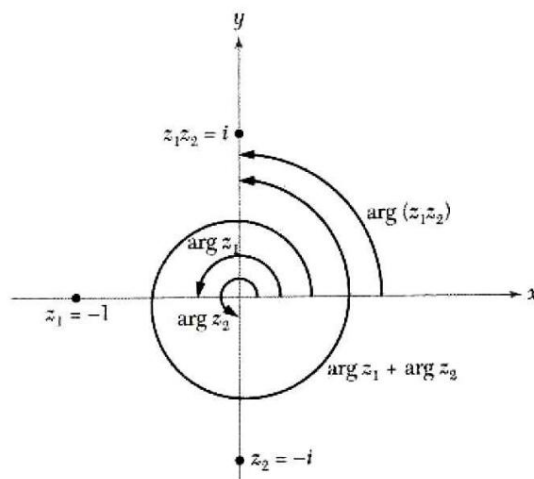


Рисунок 2.6: Умножение комплексных чисел -1 и $-i$.

2.5 Вращения в комплексной плоскости

Умножение комплексных чисел также можно анализировать с помощью отображения ψ_z , которое представляет умножение на z , такое что $\psi_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, и определяется как $\psi_z(w) = wz$. По предложению действие этой карты состоит в том, чтобы повернуть комплексное число w на угол, равный $\arg z$, против часовой стрелки и растянуть его длину на коэффициент $|z|$. Это видно на рис. 2.7, а также в предыдущем примере на рис. 2.6.

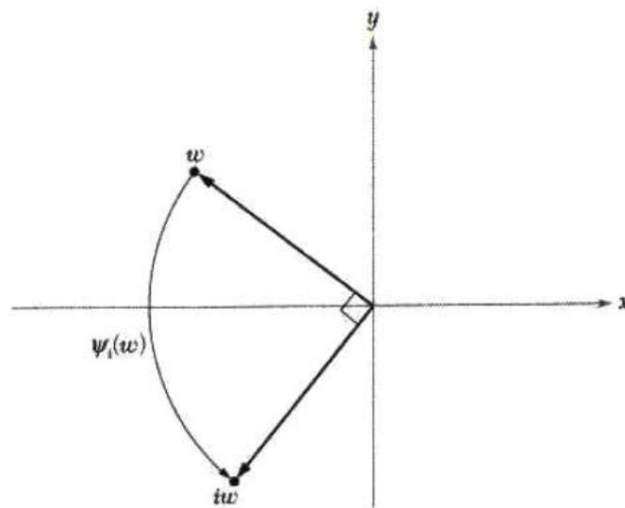


Рисунок 2.7: Умножение wz , где $z = i$.

В следующей главе мы начнем с обсуждения кватернионов и того, как их умножение также может представлять повороты в трех измерениях.

Глава 3

Кватернионы

В этой главе основное внимание уделяется кватернионам и их основным свойствам. Мы начнем с подробного описания драматического открытия кватернионов и того, как в свое время она потрясла мир математики. Затем мы перейдем к определению и важным свойствам кватернионов, которые дадут нам общее представление об этой системе счисления. Это также важно чтобы показать, как кватернионы могут представлять вращения в трех измерениях и как это связано с другими представлениями вращения. Наконец, мы обсудим о двойных кватернионах и о том, как они используются в робототехнике.

3.1 История кватернионов

Как мы видели в предыдущей главе, комплексные числа моделируют двумерное пространство, имея действительную и мнимую части, которые соответствуют к плоскости xu , в которой умножение и сложение этих чисел все еще происходят в одном и том же пространстве. В течение многих лет ирландский математик Виллиан Роуэн Гамильтон пытался смоделировать трехмерное пространство, в котором такая же структура. Он пытался представить это с помощью реального и двухмерного изображения мнимой части, но она не удовлетворяла той структуре, которую он хотел получить. Его сын, Уильям Эдвард Гамильтон, часто спрашивал его о его успехах. при умножении троек, на что он ответил бы, что может только сложить или вычитать их, но никогда не умножайте. [24]

Самый известный акт математического вандализма. Прорыв наступил 16 октября 1843 года, когда Гамильтон шел по Брум-Бридж (ныне Брум-Бридж) в Дублине. У него была вспышка озарения и не мог не вырезать в мост следующие уравнения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (3.1)$$

Глава 3. Кватернионы

В своем журнале [10] Гамильтон подробно описал этот момент, написав следующее:

«16 октября — что выпало на понедельник и день Совета Ирландской королевской академии — я шел на заседание, и твоя мать шла со мной вдоль Королевского канала, к которому она возможно, поехал; и хотя время от времени она разговаривала со мной, тем не менее в моем уме бродил какой-то скрытый поток мыслей, который дал, наконец, результат, о котором не будет преувеличением сказать, что я сразу почувствовал его важность. Электрическая цепь, казалось, замкнулась; и вспыхнула искра, вестник (как я сразу же предвидел) многих долгих лет определенно направленных мыслей и работы, моей собственной, если пощадить, и, во всяком случае, со стороны других, если мне даже будет позволено прожить достаточно долго, чтобы отчетливо сообщить об открытии. Я также не мог устоять перед побуждением — каким бы нефилософским оно ни было — вырезать ножом на камне Броэм-Бридж, когда мы проходили мимо, фундаментальную формулу с символами i, j, k ; а именно, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, которое содержит решение задачи».

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Его открытие этих законов умножения также стало определяющим моментом в истории алгебры. В этот момент он понял, что необходимо четвертое измерение, и позже он ввел термин кватернион для обозначения реального пространства, состоящего из элементов $1, i, j$ и k , подчиняющихся вышеуказанным законам умножения.

Его резьба со временем стерлась, но на мосту была установлена мемориальная доска, чтобы заменить ее и увековечить открытие в истории математики.



Рисунок 3.1: Портрет сэра Уильяма Роуэна Гамильтона¹

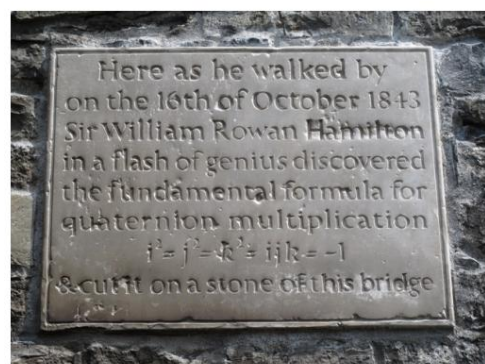


Рисунок 3.2: Мемориальная доска, посвященная открытию кватернионов.²

3.1. История кватернионов

12 Согласно точным словам Гамильтона [10],

«Кватернион может быть символически определен как четырехчленное выражение вида $q = w + ix + jy + kz$, в котором w, x, y, z — четыре скаляра или обычные алгебраические величины, а i, j и k — это три новых символа, подчиняющиеся всем законам, содержащимся в приведенной выше формуле, и поэтому не подчиняющиеся всем обычным правилам алгебры».

Гамильтон определил кватернионы как частное двух векторов. Кватернионы, являющиеся системой чисел, не удовлетворяющей обычному коммутативному правилу умножения, неизбежно встретили некоторое сопротивление в математическом мире, когда они были впервые обнаружены и объяснены Гамильтоном. Соперничество между теми, кто предпочитает кватернионы, и теми, кто предпочитает векторы в качестве физических обозначений, вылилось в войну между сторонниками кватернионов и сторонниками векторных представлений, причем некоторые даже называли кватернионы чистым злом.

С введением кватернионов открылись новые алгебраические возможности, такие как повторное открытие октав или октонионов, алгебра в восьми измерениях Джона Т. Грейвса, сделанная путем успешного обобщения кватернионов. Другим хорошо известным результатом кватернионов является их обобщение на более высокие измерения Уильямом Клиффордом, который разработал способ построения алгебр из квадратичных форм, поэтому кватернионы Гамильтона возникают как эта алгебра, более известная как алгебра Клиффорда.

С середины 1880-х годов кватернионы начали вытесняться векторным анализом, который описывал те же явления, что и кватернионы, но концептуально был проще и понятнее. Однако кватернионы возродились с конца 20 века из-за их полезности для описания пространственных вращений. Это связано с тем, что кватернионы дают элегантный способ описания и вычисления поворотов, который компактен и более эффективен в вычислительном отношении и позволяет избежать блокировки карданного подвеса, которая возникает, когда степень свободы теряется при применении определенных поворотов. Углы Эйлера, в частности, подвержены этой механической проблеме.

По этим причинам кватернионы до сих пор используются в компьютерной графике, компьютерном зрении, робототехнике, теории управления, обработке сигналов, управлении ориентацией, квантовой механике и многих других областях, связанных с работой в трехмерном пространстве.

¹[https://en.wikipedia.org/wiki/Уильям Роуэн Гамильтон](https://en.wikipedia.org/wiki/Уильям_Роуэн_Гамильтон) 2010-800-этикетка/

3.2 Система счисления кватернионов

Мы начнем с определения кватерниона и его расширенных законов умножения, как это также сформулировано в [13].

3.2.1 Определение

Кватернионы - это набор, определенный как

$$H = \{w + ix + jy + kz \mid w, x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad (3.2)$$

который представляет собой множество, состоящее из всех чисел, которые могут быть в форме,

$$q = w + ix + jy + kz, \text{ где } w, \quad (3.3)$$

x, y и z — действительные числа, а i, j и k — то, что мы называем фундаментальными единицами кватерниона, которые представляют три мнимых измерения.

3.2.2 Кватернионные представления

Стандартная четвертичная форма. Кватернион обычно представляется с использованием его стандартной кватернионной формы, записанной как

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (3.4)$$

в котором все переменные соответствуют тем же интерпретациям, что и в определении.

Скалярная и векторная формы. Помимо стандартной формы, кватернион также может быть описан как состоящий из скалярной части и векторной части, где в приведенном выше случае часть кватерниона, $q_1i + q_2j + q_3k$, представляет векторную часть, а q_0 — скалярную часть. Это может быть представлено в так называемой скалярной векторной форме, записанной как

$$d = (d_0, \mathbf{d}) \quad (3.5)$$

где q_0 называется скалярной частью, а вектор $\mathbf{q}$ представляет собой трехмерный вектор, образованный мнимой частью кватерниона, и называется векторной частью.

Кватернион без вещественной части называется чистым кватернионом или векторным кватернионом, а кватернион без мнимых частей тогда эквивалентен соответствующему ему вещественному числу, что подразумевает, что действительные и комплексные числа являются подмножеством кватернионов. $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset H)$

3.2. Кватернионная система счисления

3.2.3 Законы умножения кватернионов

Эти единицы кватерниона i , j и k , как указано ранее, удовлетворяют следующим правилом умножения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (3.6)$$

который расширяется до следующих законов умножения:

$$ij = k = -ji \quad (3.7)$$

$$jk = i = -kj \quad (3.8)$$

$$ki = j = -ik \quad (3.9)$$

Эти законы обобщены в таблице 4.1.

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i		-1	k	$-j$
j		k	-1	i
k		$-j$	i	-1

Таблица 3.1: Таблица умножения кватернионов

Их также можно визуализировать на диаграмме, показанной на рис. 3.3.³

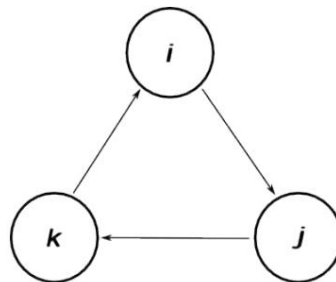


Рисунок 3.3: Диаграмма умножения кватернионов

Как видно из таблицы и диаграммы выше, умножение кватернионные единицы не коммутативны ($ij \neq ji$). Если умножить эти единицы идут против потока на диаграмме, произведение будет отрицательным соответствующий продукт в нормальном потоке. Это будет понятно больше ясно, как только мы обсудили представление вращений кватернионами.

³<http://hforsten.com/quaternion-roots-of-modern-vector-calculus.html>

3.3 Свойства кватернионов

В этом разделе мы представим все основные и важные свойства кватерниона, заданного как $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, как это также указано в [17].

3.3.1 Кватернионное сопряжение

Кватернион, сопряженный с q , задается отрицанием его векторной части, показанной как

$$q^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k = (q_0, -q) \quad (3.10)$$

3.3.2 Норма кватерниона

Норма кватерниона, также называемая величиной, представляет собой длину кватерниона от начала координат. Это определяется:

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (3.11)$$

3.3.3 Единица кватерниона

Кватернион называется единичным кватернионом, если его норма равна 1, т. е.

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1 \quad (3.12)$$

Нормализация. Любой кватернион можно нормализовать, чтобы преобразовать его в единичный кватернион. Это делается путем деления кватерниона на его величину или норму, например:

$$\hat{q} = \frac{q}{|q|} = \frac{q_0 + q_1i + q_2j + q_3k}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \quad (3.13)$$

3.3.4 Инверсия кватерниона

Обратное (обратное) значение кватерниона может быть вычислено с помощью

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} = \frac{q_0 - q_1i - q_2j - q_3k}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (3.14)$$

В этом можно убедиться, используя определение нормы ($|q|^2 = qq^*$),

$$qq^{-1} = q \frac{q^*}{|q|^2} = \frac{qq^*}{|q|^2} = \frac{|q|^2}{|q|^2} = 1 \quad (3.15)$$

3.3.5 Сложение и вычитание кватернионов

Сложение кватернионов следует тому же правилу, что и в комплексных числах, которое выполняется по компонентам. Если мы рассмотрим данный кватернион q и другой кватернион p , заданный как,

$$p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \quad (3.16)$$

Тогда их сумма определяется выражением

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \quad (3.17)$$

Это же правило применяется и к вычитанию кватернионов, таких что (3.18)

$$p - q = (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1)i + (p_2 - q_2)j + (p_3 - q_3)k$$

3.3.6 Умножение и деление кватернионов

Произведение двух кватернионов должно удовлетворять фундаментальным законам, которые были сформулированы в начале, наряду со свойством некоммутативности для умножения. Таким образом, произведение кватернионов p и q определяется выражением

$$pq = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &= p_0q_0 + (p_0q_1 + p_1q_0)i + (p_0q_2 + p_2q_0)j + (p_0q_3 + p_3q_0)k \\ &\quad + (p_1q_2)ij + (p_2q_1)ji + (p_2q_3)jk + (p_3q_2)kj + (p_3q_1)ki + (p_1q_3)ik + (p_1q_1)i^2 + \\ &\quad (p_0q_1 + p_1q_0)i^2 + (p_2q_2)j^2 + (p_3q_3)k^2 \\ &\quad + p_1q_0i + (p_0q_2 + p_2q_0)j + (p_0q_3 + p_3q_0)k + (p_1q_2)(ik) + (p_2q_1)(-k) + \\ &\quad (p_2q_3)(i) + (p_3q_2)(-i) + (p_3q_1)(j) + (p_1q_3)(-j) + (p_1q_1)(-1) + (p_2q_2)(-1) + (p_3q_3)(-1) = p_0q_0 \\ &\quad p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 \\ &\quad p_3q_2)i \\ &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)k \end{aligned}$$

Это сложный способ получения произведения двух кватернионов. Существует гораздо более простой способ, который включает в себя использование скалярной и векторной формы кватерниона и применение точечного и векторного произведения для векторов. Это делается

$$\text{следующим образом: } pq = (p_0, p)(q_0, q) = p_0q_0 - p \cdot q + p_0q + q_0p + p \times q \quad (3.20)$$

Для деления между кватернионами это можно сделать, взяв мультипликативный обратный делителю такой, что

$$\frac{p}{p} = pq^{-1} \quad (3.21)$$

и применение вышеуказанного метода для умножения двух кватернионов.

4 На это сложение и умножение кватернионов ссылаются из [6]

3.3.7 Обобщенные свойства кватернионов

Здесь перечислены общие свойства кватернионов.

Дополнительные свойства

Кватернионы q , p и r удовлетворяют следующим свойствам сложения:

- Замыкание: $p + q \in \mathbb{H}$
- Ассоциативность: $p + (q + r) = (p + q) + r$
- Коммутативность: $p + q = q + p$
- Идентичность: $p + 0 = 0 + p = p$
- Сумма: $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k$
- Разность: $p - q = (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1)i + (p_2 - q_2)j + (p_3 - q_3)k$

Свойства умножения

Кватернионы q , p и r удовлетворяют следующим свойствам умножения:

- Замыкание: $pq \in \mathbb{H}$
- Ассоциативность: $(pq)r = p(qr)$
- Некоммутативность: $pq \neq qp$
- Дистрибутивность: $p(q + r) = pq + pr$
- Обратное: если $q \neq 0$, то $q^{-1} \in \mathbb{H}$ такое, что $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$
- Произведение: $pq = p_0q_0 - p \cdot q + p_0q + q_0p + p \times q$
- Деление: $p/q = pq^{-1}$

Сопряженный: $\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$

Норма: $\|q\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$

Единица кватерниона: $\|q\| = 1$ и $p = 0$, $\|p\| = 0$ является единичным кватернионом

Обратно: $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ тогда для единичного кватерниона u , $\|u\| = 1$, $u^{-1} = \bar{u}$

Скалярный продукт: $p \cdot q = p_0q_0 + q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3$

3.4 3D-повороты с использованием кватернионов

В этом разделе мы покажем, как единичные кватернионы могут представлять вращения в трех измерениях, и как это соотносится с другими представлениями вращения. ⁵

3.4.1 3D-представления вращения

Концепция выражения вращения в трех измерениях в виде математической формулировки распространяется на классическую механику, где кинематика вращения — это наука об описании чисто вращательного движения объекта с помощью чисел.

Согласно теореме Эйлера о вращении общее перемещение твердого тела с одной фиксированной точкой описывается вращением вокруг оси. Более того, это вращение можно однозначно описать минимум тремя параметрами. Существуют различные способы представления трехмерных вращений, некоторые из которых требуют более трех параметров, даже если все они имеют только три степени свободы. Здесь подробно описаны наиболее часто используемые представления вращения, и каждое из них обсуждается.

Представление матрицы вращения

Мы знаем, что двумерные вращения могут быть представлены матрицей

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

где θ — угол поворота вокруг начала координат. Наличие единственного параметра угла также означает, что вращение плоскости имеет только одну степень свободы.

В трех измерениях мы имеем дело с поворотами вокруг главных осей x , y и z .

Вращение вокруг оси x соответствует вращению в плоскости yz .

С другой стороны, вращение вокруг оси y соответствует вращению в плоскости xz , а вращение вокруг оси z соответствует вращению в плоскости xy .

Эти вращения представлены следующими матрицами:

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

⁵Этот подраздел представляет собой подборку материалов из следующих источников: [5][6][8][9][17].

Глава 3. Кватернионы

$$R_{\text{ай}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$R_{\text{з}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

В общем, если мы рассмотрим твердое тело с тремя закрепленными на нем ортогональными единичными векторами (также называемыми базисом). Задание координат этого базиса в его текущем повернутом положении в терминах опорных неповернутых координатных осей будет описывать применяемое к нему вращение. Эти три единичных вектора r_1 , r_2 и r_3 , состоящие из 3 координат каждый, дают в общей сложности 9 параметров. Эти параметры образуют матрицу 3×3 , которая называется матрицей вращения.

Элементы матрицы вращения определяются следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$R^T = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Матрица вращения обладает следующими особыми свойствами:

1. Столбцы матрицы вращения представляют собой ортогональные единичные векторы.
2. Строки матрицы вращения также являются ортогональными единичными векторами.
3. Транспонирование матрицы вращения является ее обратной, $R^T = R^{-1}$. Таким образом, $R R^T = R^T R = I$.
4. Определитель матрицы вращения равен +1.

Общее трехмерное вращение достигается путем объединения этих матриц вращения в единую матрицу путем умножения матриц. Поскольку умножение матриц не является коммутативным, важно отметить порядок поворотов, например,

$$R_x R_y R_z = R_z R_y R_x \quad (3.28)$$

Это означает, что вращение сначала вокруг оси x , а затем вокруг оси y , а затем по оси z не приводит к такому же вращению, как вращение сначала вокруг оси z , затем вокруг оси y , а затем по оси x . Это свойство согласуется с тем, что повороты также не коммутативны. Окончательная матрица будет иметь три угловых параметра из каждой матрицы вращения, что соответствует наличию трех степеней свободы (эти угловые параметры часто называют углами Эйлера $[\phi, \theta, \psi]$).

Выполнение умножения матрицы на вектор между матрицей вращения и вектором в пространстве приводит к вращению этого вектора в пространстве при сохранении его длины. Это можно выразить как:

$$\mathbf{g}' = \mathbf{R} \mathbf{z} \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{g}'$ — вектор $\mathbf{z}$, повернутый матрицей вращения $\mathbf{R}$.

Возможность объединения нескольких поворотов в одну матрицу и простота применения поворота к вектору делают матрицу поворота полезным и популярным способом представления поворотов, даже если он менее точен, чем другие представления.

Представление углов Эйлера

Углы Эйлера исторически являются наиболее популярным представлением вращения, где общее вращение описывается как последовательность вращений вокруг трех ортогональных осей координат, а именно осей x , y и z . Идея, лежащая в основе углов Эйлера, состоит в том, чтобы разделить вращение на три более простых вращения $[\phi, \theta, \psi]$, соответствующих вращениям вокруг главных осей и обычно называемых тангажом, рысканием и креном.

Определение углов Эйлера не уникально, и соглашения зависят от системы отсчета, осей и последовательности применения поворотов. Следовательно, для глобальной системы отсчета поворот ϕ по оси x , за которым следует поворот θ по фиксированной оси y , а затем поворот ψ по фиксированной оси z , может быть представлен в матрице вращения формируются путем предварительного умножения последующих вращений (для локальной системы отсчета выполняется постумножение). Это можно выразить следующим образом: $\mathbf{R}_{xyz} = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Углы Эйлера стали наиболее распространенным способом представления вращения твердого тела в трехмерном пространстве, поскольку его проще всего использовать и понимать. Однако основные недостатки углов Эйлера, такие как подверженность карданному замку и низкая точность интегрирования постепенных изменений во времени, побудили исследователей использовать другие представления вращения, такие как единичные кватернионы, как способ эффективного представления вращений.

Глава 3. Кватернионы

Представление оси-угла

Теорема Эйлера о вращении подразумевает, что любое вращение можно выразить как одно вращение вокруг некоторой оси. Таким образом, более обобщенным выражением вращения является представление оси-угла, которое выражается просто как

$$\text{rot}(\mathbf{n}, \theta), \text{ где } \mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \text{ и } \theta \in \mathbb{R} \quad (3.31)$$

Ось вращения $\mathbf{n}$ определяется как любой единичный вектор в трехмерном пространстве, который не изменяется при вращении, а угол θ представляет собой величину вращения вокруг этой оси, которая следует правилу правой руки для определения положительного направления вращения.

Чтобы повернуть вектор $\mathbf{z}$ на $\mathbf{z}'$ используя представление ось-угол, мы применяем Формула вращения Родригеса определяется как

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cos \theta + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}) (1 - \cos \theta) + (\mathbf{z} \times \mathbf{n}) \sin \theta \quad (3.32)$$

Обратите внимание, что если ось не является одной из главных осей, обычно трудно определить ось вращения. Кроме того, объединение двух последовательных поворотов, представленных углом оси, не является простым, и лучше использовать матрицу поворота или умножение кватерниона, чтобы получить окончательный поворот, а затем преобразовать его в представление угла оси.

Представление единицы кватерниона

Единичный кватернион $q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$ определяется как кватернион с единичной нормой такой, что

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1 \quad (3.33)$$

Представление вращения единичным кватернионом обычно осуществляется путем преобразования других представлений вращения в кватернионы и его нормализации. Для представления ось-угол $\text{rot}(\mathbf{n}, \theta)$, где ось вращения задается единичным вектором $\mathbf{n}$, а угол поворота задается θ , его эквивалентное кватернионное представление формулируется как

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) \quad (3.34)$$

Важно отметить, что q и $-q$ эквивалентны одному и тому же вращению, даже если их представления ось-угла различны. Это связано с тем, что поворот на угол θ вокруг оси $\mathbf{n}$ аналогичен повороту на угол $2\pi - \theta$ вокруг оси $-\mathbf{n}$.

3.4. 3D-повороты с использованием кватернионов

Для последовательностей поворотов, представленных несколькими кватернионами, получить окончательный поворот кватерниона так же просто, как и для матриц вращения.

Если нам дана последовательность вращений кватернионов $q_1, q_2, \dots, q_n$, окончательное вращение q_F вычисляется простым получением произведения кватернионов с учетом порядка вращения и типа системы отсчета.

Таким образом, для локальной системы отсчета имеем

$$q_F = q_1 q_2 \dots q_n \quad (3.35)$$

Для поворота трехмерного вектора p в p' на q начальный вектор p сначала представляется как чистый кватернион, имеющий только векторную часть в виде мнимой части и нулевую действительную часть. Чтобы получить p' к начальному вектору p применяется следующее:

$$p' = q p q^{-1}, \text{ где } q^{-1} \text{ является обратным } q \quad (3.36)$$

В качестве примера у нас есть следующий поворот, показанный на рис. 3.4, где мы хотим повернуть вектор, представляющий точку $(2, 1, 1)$ вдоль оси z , $\text{rot}(z, 90^\circ)$. Затем повернутый вектор определяется с помощью приведенной выше формулы на 90° и применения правил умножения единиц кватерниона i, j и k . Это приведет к другому чистому кватерниону, который затем представляет повернутый вектор.

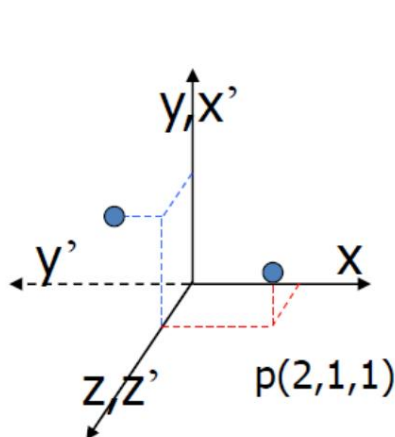


Рисунок 3.4: Вращение вектора $(2, 1, 1)$ из [22]

$$p = 0 + 2i + 1j + 1k = 2i + j + k \quad (3.37)$$

$$q = \cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right) + i \sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right) = 0 + 1i = i \quad (3.38)$$

$$q^{-1} = \cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right) - i \sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right) = 0 - 1i = -i \quad (3.39)$$

$$p' = q p q^{-1} = -i + 2j + k \quad (3.40)$$

Следовательно, координаты вектора $(2, 1, 1)$, повернутого на 90° по оси z , равны $(-1, 2, 1)$.

3.4.2 Преобразования кватернионов

Имея дело с единичными кватернионами, необходимо научиться преобразовывать другие представления вращения в единичные кватернионы и обратно. В этом исследовании мы ограничиваем наши преобразования только тем, что мы будем использовать для получения кинематики робота, применяя концепцию кватернионов.

Единичный кватернион = Матрица вращения

Преобразование кватерниона $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ в матрицу вращения

R задается следующей матрицей:

$$R(q) := \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Каждый элемент матрицы R обозначается через r_{ij} для $i, j = 1, 2, 3$.

Единичный кватернион = Матрица вращения

Чтобы получить обратное отображение, проверив взаимосвязь элементов R с коэффициентами кватернионов (q_0, q_1, q_2, q_3), можно получить четыре различных обратных отображения. Некоторые из этих отображений будут давать сложные результаты.

Поэтому мы используем следующие условия (в зависимости от параметров R), чтобы определить, какое отображение использовать:

а) Если $r_{22} > r_{33}, r_{11} > r_{22}, r_{11} > r_{33}$, то

$$q(R) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}) / (1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}) \\ (r_{31} - r_{13}) / (1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}) \\ (r_{12} - r_{21}) / (1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

б) Если $r_{22} < r_{33}, r_{11} > r_{22}, r_{11} > r_{33}$, то

$$q(R) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (r_{23} - r_{32}) / (1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}) \\ (r_{12} + r_{21}) / (1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}) \\ (r_{31} + r_{13}) / (1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

⁶В нашем приложении мы, в частности, использовали преобразование матрицы вращения и представления оси-угла в единичные кватернионы.

в) Если $r_{22} > r_{33}$, $r_{11} < r_{22}$, $r_{11} < r_{33}$, то

$$D(R) = 2 \begin{pmatrix} (r_{31} - r_{13})/(1 - r_{11} + r_{22} - r_{33})^{1/2} & (r_{12} + r_{21})/(1 - r_{11} + r_{22} - r_{33})^{1/2} & (1 - r_{11} + r_{22} - r_{33})^{1/2} \\ (r_{23} + r_{32})/(1 - r_{11} + r_{22} - r_{33})^{1/2} & (1 - r_{11} + r_{22} - r_{33})^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

г) Если $r_{22} < r_{33}$, $r_{11} < r_{22}$, $r_{11} < r_{33}$, то

$$D(R) = 2 \begin{pmatrix} (r_{12} - r_{21})/(1 - r_{11} - r_{22} + r_{33})^{1/2} & (r_{31} + r_{13})/(1 - r_{11} - r_{22} + r_{33})^{1/2} & (1 - r_{11} - r_{22} + r_{33})^{1/2} \\ (r_{23} + r_{32})/(1 - r_{11} - r_{22} + r_{33})^{1/2} & (1 - r_{11} - r_{22} + r_{33})^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Выбор среди этих отображений помогает уменьшить неточность, избегая ситуаций, в которых знаменатель близок к нулю.

Единица кватерниона = ось-угол

Кватернион q , эквивалентный повороту θ вокруг единичного вектора n в трехмерном пространстве, представленном углом оси $\text{rot}(n, \theta)$, определяется как

$$q(\theta, n) := (\cos(\frac{\theta}{2}) \text{ п } \text{грех}(\frac{\theta}{2})) \quad (3.46)$$

Обратите внимание, что мы рассматриваем только единичные векторы, $\|n\| = 1$, в этом преобразовании.

Единица Кватернион = Ось-Угол

Для обратного отображения единичного кватерниона q в представление ось-угол $\text{rot}(n, \theta)$ мы сначала рассмотрим $q = q_1 q_2 q_3$, которое является векторной частью q . Представление ось-угол может быть вычислено следующим образом:

$$\theta = 2 \arccos(q_0) \quad (3.47)$$

$$n = \frac{A}{\|A\|} \quad (3.48)$$

Таким образом, угол поворота θ можно легко вычислить по первому члену данного единичного кватерниона, а ось вращения n можно получить, просто нормализовав векторную часть (мнимую часть) единичного кватерниона.

3.5 Двойственные кватернионы

Кватернионы могут представлять трехмерные вращения, как мы видели в предыдущем обсуждении. Однако при работе с преобразованиями в трех измерениях также может иметь место смещение или перемещение, которое наша текущая форма кватерниона не может представить. В этом разделе мы представим концепцию двойных кватернионов, которая преодолевает этот предел и будет использоваться на протяжении всего исследования.

3.5.1 Определение

Двойные кватернионы позволяют представить как вращение, так и смещение в одном векторе преобразования. Для единичного кватерниона q , который представляет соответствующее вращение, и для вектора p , записанного как чистый кватернион, который представляет соответствующее смещение, наиболее распространенная форма, используемая в робототехнике двойного кватерниона, задается парой кватернион-вектор,⁷

$$Q(q, p) = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \langle k_x, k_y, k_z \rangle + \langle p_x, p_y, p_z \rangle \quad (3.49)$$

Для части кватерниона мы используем преобразование из представления поворота оси-угла в единичный кватернион. Таким образом, θ задает угол поворота, а $\langle k_x, k_y, k_z \rangle$ обозначает ось вращения. Векторная часть — это просто вектор смещения, заданный $p = \langle p_x, p_y, p_z \rangle$.

Ясно, что для преобразования без вращения и только смещения двойственный кватернион представлен как:

$$Q(q, p) = ([1, \langle 0, 0, 0 \rangle], \langle p_x, p_y, p_z \rangle) \quad (3.50)$$

где $[1, \langle 0, 0, 0 \rangle]$ представляет кватернион единичной идентичности.

3.5.2 Инверсия двойственного кватерниона

Обратное к двойственному кватерниону $Q(q, p)$ обозначается как:

$$Q^{-1} = ([q^{-1}], \langle -q^{-1} p \rangle) \quad (3.51)$$

кватернион¹ обозначает обычный обратный кватернион q . Следовательно, для a , где $q = [s, v]$, векторная часть также может быть записана как

$$a^{-1} p = p + [2s(v \times (-p)) + 2v \times (v \times (-p))] \quad (3.52)$$

Обратите внимание, что p — это чистый кватернион (нулевая действительная часть) и, следовательно, тоже вектор.

⁷ Двойственные кватернионы обычно определяются с помощью двойственных чисел, таких, 2 где $Q = q + \epsilon r = 0$. Это ясно описано в [14].

3.5.3 Умножение двойственного кватерниона

В двойственных кватернионах последовательность вращений и смещений представлена путем умножения их соответствующих представлений двойного кватерниона. Таким образом, для преобразований $Q_1(q_1, p_1)$, за которыми следует $Q_2(q_2, p_2)$ для локальной системы координат, их дуальное кватернионное произведение определяется выражением:

$$Q_1 Q_2 = (q_1, p_1) (q_2, p_2) = ([q_1 \quad q_2], \langle q_1 \quad p_2 \quad q_1^{-1} + p_1 \rangle) \quad (3.53)$$

где часть кватерниона представляет собой просто умножение между кватернионами q_1 и q_2 , а часть вектора также может быть записана как

$$q_1 \quad p_2 \quad q_1^{-1} + p_1 = p_2 + 2s_1(v_1 \times p_2) + 2v_1 \times (v_1 \times p_2) + p_1 \quad (3.54)$$

где $q_1 = [s_1, v_1]$, а p_2 — чистый кватернион, который также действует как вектор.

Анализ операции для части перевода двойного кватерниона показывает, что последующий перевод сначала поворачивается на предыдущий поворот, а результирующий повернутый перевод затем добавляется к текущему переводу.

3.5.4 Преобразование двойственным кватернионом

Преобразование вектора с помощью двойных кватернионов следует почти тому же процессу, что и умножение двух двойных кватернионов. Если у нас есть окончательное преобразование, заданное двойственным кватернионом,

$$QF = ([w, \langle a, b, c \rangle], \langle p_x, p_y, p_z \rangle) \quad (3.55)$$

где $[w, \langle a, b, c \rangle] = qF$ и $\langle p_x, p_y, p_z \rangle = pF$, а начальный вектор, подлежащий преобразованию, задается формулой

$$v = \langle v_x, v_y, v_z \rangle \quad (3.56)$$

Мы получаем преобразованный (повернутый и перемещенный) вектор v' по формуле $v' = \langle v'_x, v'_y, v'_z \rangle$

$$v' = (qF \quad v \quad q \quad \Phi^{-1}) + pF \quad (3.57)$$

Таким образом, вектор преобразуется с помощью двойственных кватернионов, сначала поворачивая его, используя кватернионную часть qF (представляющую вращение) двойственного кватерниона, а затем переводя его, добавляя к нему векторную часть pF (представляющую перевод) двойственного кватерниона. Этот процесс аналогичен тому, как применяется преобразование с использованием матриц преобразования.

В следующей главе мы продемонстрируем применение двойных кватернионов, используя их для получения как прямой, так и обратной кинематики робота с практическим применением на универсальном роботе UR3.

Глава 4

Применение кватернионов к Универсальный робот UR3

Основная цель этого исследования — научиться применять концепцию кватернионов для управления движениями роботов. В этом исследовании мы будем работать с универсальным роботом UR3 и получим его прямую и обратную кинематику, используя кватернионы. В конце этой главы протестировано и представлено фактическое программирование вычислений для кинематики UR3.

4.1 Универсальный робот — UR3

Universal Robot UR3 — это коллаборативный робот-манипулятор. Он имеет шесть степеней свободы (6DOF) и состоит из шести вращающихся суставов, обычно называемых (1) основанием, (2) плечом, (3) локтем, (4) запястьем 1, (5) запястьем 2 и (6) запястьем 3, каждое с рабочим диапазоном 360 градусов.¹



Рисунок 4.1: Универсальный робот UR3

¹Технические характеристики робота можно найти в Приложении А.

4.2 Прямая кинематика с помощью двойных кватернионов

Прямая кинематика, как правило, легче вычисляется, чем ее аналог, и то же самое касается ее вычисления с помощью двойных кватернионов. Наша цель — определить окончательную ориентацию и положение рабочего органа с учетом всех углов соединения. По сути, есть как минимум два способа получить прямую кинематику с использованием двойных кватернионов. Он может начинаться либо с матрицы вращения, либо с представления оси-угла. Любой из этих двух приведет к одному и тому же конечному вращению, но каждый использует разные координаты для начальной позиции ТСР. В этом исследовании мы будем использовать подход с представлением «ось-угол».²

4.2.1 Представления трансформации суставов

Учитывая кинематическую структуру робота UR3 в нулевом положении, мы получаем двойные кватернионы, представляющие преобразование в каждом суставе, путем получения сначала представления оси-угла каждого сустава по отношению к базовой раме и устанавливаем его как первую часть нашего двойного кватерниона и вторую часть, получив перевод из текущего совместного кадра в следующий:³

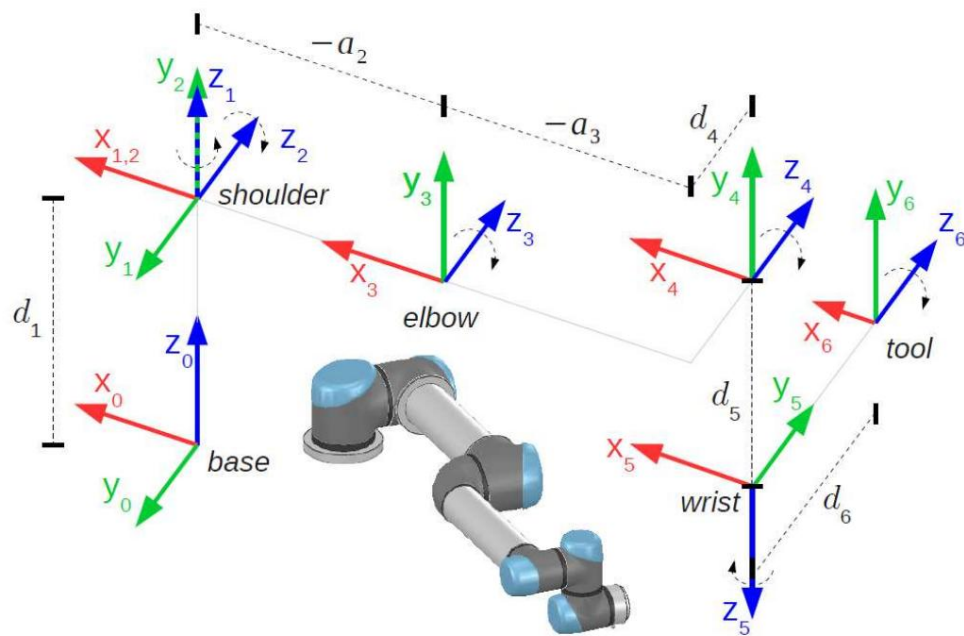


Рисунок 4.2: Кинематическая структура UR3 в нулевом положении ($\theta_{1,2,3,4,5,6} = 0$) [3].

²Это исследование следует подходу, использованному в [4] и [15].

³Обычное соглашение о выводе кинематики для UR3 можно найти в [3] и [11].

4.2. Прямая кинематика с помощью двойных кватернионов

Обратите внимание, что ось Z представляет собой ось вращения, и мы следуем Правилу правой руки для определения положительного направления вращения на каждой оси вращения. Мы будем представлять оси z относительно координаты оси базовой рамы.

Для UR3 нам также даются следующие параметры DH:4

я	α_{i-1}	a_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	$\alpha_1 = 90^\circ$	300	0	θ_2
3	θ_3	a_2		
4	0	a_3	d_4	θ_4
5	$\alpha_4 = 90^\circ$	0	d_5	θ_5
6	$\alpha_5 = 90^\circ$	0	d_6	θ_6

Таблица 4.1: Параметры UR3 Denavit-Hartenberg

Для первого шарнира в поворотной части имеем угол поворота θ_1 и наша ось вращения z_1 совмещена с базовой осью z_0 . Для часть перевода, начиная с базовой рамы к плечевой раме, есть представляет собой смещение d_1 по оси z. Следовательно, наш двойственный кватернион для Первый сустав представлен:

$$Q_1 = \text{потому что } \frac{\theta_1}{2}, \text{ грех } \frac{\theta_1}{2} < 0, 0, 1 >, < 0, 0, d_1 >$$

Для второго шарнира угол поворота равен θ_2 , а наша ось вращения z_2 равна теперь параллельно оси y_0 базовой рамы. Что касается части перевода, мы должны проанализировать, что вращение второго сустава приведет к перемещению по оси x_0 и оси z_0 , которая зависит от a_2 и θ_2 . Поэтому, у нас есть:

$$Q_2 = \text{потому что } \frac{\theta_2}{2}, \text{ грех } \frac{\theta_2}{2} < 0, 1, 0 >, < a_2 \cos \theta_2, 0, a_2 \sin \theta_2 >$$

Для третьего шарнира угол поворота равен θ_3 , а наша ось вращения z_3 , так же, как z_2 , параллелен оси y_0 базовой рамы. Для перевода часть, вращение третьего шарнира приведет к перемещению по оси x_0 и ось z_0 , которая зависит от a_3 и θ_3 . Помимо этого, чтобы добраться до В четвертом суставе также имеется смещение d_4 по оси y_0 . Таким образом:

$$Q_3 = \text{потому что } \frac{\theta_3}{2}, \text{ грех } \frac{\theta_3}{2} < 0, 1, 0 >, < a_3 \cos \theta_3, d_4, a_3 \sin \theta_3 >$$

Параметры 4DH обсуждаются и иллюстрируются в разделе 4.4.1.

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Для четвертого шарнира угол поворота равен θ_4 , а наша ось вращения z_4 , такая же, как z_2 и z_3 , параллельна оси y_0 базовой рамы. Для поступательной части вращения четвертого шарнира приведет к перемещению по осям x_0 и z_0 , что зависит от d_5 и θ_5 . Таким образом, мы имеем:

$$Q_4 = \text{потому что } \frac{\theta_4}{2}, \text{ грех } \frac{\theta_4}{2} < 0, 1, 0 > , < d_5 \sin \theta_4, 0, d_5 \cos \theta_4 >$$

Для пятого шарнира угол поворота равен θ_5 , а наша ось вращения z_5 параллельна оси z_0 базовой рамы. Для поступательной части вращения пятого шарнира приведет к перемещению по осям x_0 и y_0 , которое зависит от d_6 и θ_5 . Таким образом, мы имеем:

$$Q_5 = \text{потому что } \frac{\theta_5}{2}, \text{ грех } \frac{\theta_5}{2} < 0, 0, 1 > , < d_6 \sin \theta_5, d_6 \cos \theta_5, 0 >$$

Для шестого и последнего шарнира угол поворота равен θ_6 , а наша ось вращения z_6 параллельна оси y_0 базовой рамы. Перевода нет, так как это последний кадр. Таким образом, мы имеем:

$$Q_6 = \text{потому что } \frac{\theta_6}{2}, \text{ грех } \frac{\theta_6}{2} < 0, 1, 0 > , < 0, 0, 0 >$$

Представление преобразований двойственными кватернионами имеет аналогичную концепцию с матрицами преобразования. Основное отличие состоит в том, что двойственные кватернионы более компактны, так что нам нужно всего 7 компонентов, тогда как для матриц преобразования мы используем $4 \times 4 = 16$ компонентов.

4.2.2 Расчет прямой кинематики UR3

После получения соответствующих двойных кватернионов для каждого сустава мы берем их произведения, начиная с базовой рамы и до конечной рамы, чтобы получить окончательный двойственный кватернион, представляющий окончательное преобразование и прямую кинематику робота. Таким образом, мы имеем,

$$Q_{FK} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot Q_5 \cdot Q_6 \quad (4.1)$$

Для этого подхода координаты точки, подлежащей преобразованию, также должны быть относительно базовой системы координат. Следовательно, во время преобразования точка вращается частью вращения КФК, а затем перемещается своей частью перемещения, начиная с базовой системы отсчета.

4.3 Инверсная кинематика с помощью двойных кватернионов

Вывод обратной кинематики требует больше работы и анализа, чем прямой кинематики. Нам придется применить концепцию преобразований двойственными кватернионами, иметь дело со сложными тригонометрическими уравнениями и геометрически проанализировать преобразования, выполняемые каждым шарниром в работе, и то, как каждое из них влияет на координаты последующих каркасов суставов. Наша цель в инверсной кинематике состоит в том, чтобы определить углы сочленения, необходимые для перемещения конечного эффектора в желаемое положение и ориентацию, которые задаются окончательным преобразованием $QFK = ([w, < a, b, c >], < p_x, p_y, p_z >)$.

4.3.1 Представления трансформаций суставов

Чтобы начать с вывода инверсной кинематики, нам нужны двойственные кватернионы, представляющие преобразование, выполняемое каждым шарниром Q_i для $i = 1 \dots 6$, которые мы уже вывели для прямой кинематики выше, а также их соответствующие двойные кватернионы инверсии, Q_i^{-1} .

Двигаясь дальше, мы будем использовать следующие представления для длинных уравнений: $\cos \theta_i = c_i$, $\sin \theta_i = s_i$, $\cos \frac{\theta_i}{2} = c_{\frac{i}{2}}$, $\sin \frac{\theta_i}{2} = s_{\frac{i}{2}}$.

Таким образом, для каждого сустава имеем:

$$\begin{aligned} Q_1 &= ([c_1 + s_1 k, < d_1 k >]) \\ Q_2 &= ([c_2 + s_2 j, < a_2 c_2 i + a_2 s_2 k >]) \\ Q_3 &= ([c_3 + s_3 j, < a_3 c_3 i + d_4 j + a_3 s_3 k >]) \\ Q_4 &= ([c_4 + s_4 j, < d_5 s_4 i + d_5 c_4 k >]) \\ Q_5 &= ([c_5 + s_5 k, < d_6 s_5 i + d_6 c_5 j >]) \\ Q_6 &= ([c_6 + s_6 j, < 0 >]) \end{aligned}$$

и обратные как:

$$\begin{aligned} Q_1^{-1} &= ([c_1 - s_1 k, < d_1 k >]) = \\ Q_2^{-1} &= ([c_2 - s_2 j, < a_2 i >]) \\ Q_3^{-1} &= ([c_3 - s_3 j, < a_3 i + d_4 j >]) = ([c_4 + \\ Q_4^{-1} &= ([c_4 - s_4 j, < d_5 k >]) \\ Q_5^{-1} &= ([c_5 - s_5 k, < d_6 i >]) = ([c_6 + \\ Q_6^{-1} &= ([c_6 - s_6 j, < 0 >]) \end{aligned}$$

Мы будем использовать представления двойного кватерниона обоих этих суставов, чтобы получить взаимосвязь между последующими комбинациями преобразований.

4.3.2 Продукты трансформации суставов

Используя двойственные кватернионы Q_i ($i = 1 \dots 6$), обозначающие кинематику преобразования, которые описывают пространственные отношения между последующими системы координат и Q_i как их соответствующие инверсии, мы сначала определяем двойственное произведение кватернионов M_i как:

$$M_i = Q_i^{-1} Q_{i+1}, \text{ где } i = 1 \dots 6 \quad (4.2)$$

Для $i = 6$ имеем $M_6 = Q_6$. Следовательно, у нас есть M_i как,

$$\begin{aligned} M_6 &= Q_6 \\ M_5 &= Q_5^{-1} M_6 = Q_5^{-1} Q_6 \\ M_4 &= Q_4^{-1} M_5 = Q_4^{-1} Q_5^{-1} Q_6 \\ M_3 &= Q_3^{-1} M_4 = Q_3^{-1} Q_4^{-1} Q_5^{-1} Q_6 \\ M_2 &= Q_2^{-1} M_3 = Q_2^{-1} Q_3^{-1} Q_4^{-1} Q_5^{-1} Q_6 \\ M_1 &= Q_1^{-1} M_2 = Q_1^{-1} Q_2^{-1} Q_3^{-1} Q_4^{-1} Q_5^{-1} Q_6 \end{aligned}$$

Затем мы определяем другое дуальное произведение кватернионов N_i следующим образом:

$$N_{i+1} = Q_i^{-1} N_i, \text{ где } i = 1 \dots 6 \quad (4.3)$$

Для $i = 0$ мы определяем N_1 как кватернион окончательного преобразования, что означает,

$$N_1 = [R_w, T_w] = ([w, a, b, c], [p_x, p_y, p_z])$$

Следовательно, имеем N_i as,

$$\begin{aligned} N_1 &= [P_B, T_B] \\ N_2 &= Q_1^{-1} N_1 = Q_1^{-1} * [P_B, T_B] \\ N_3 &= Q_2^{-1} N_2 = Q_2^{-1} Q_1^{-1} * [P_B, T_B] \\ N_4 &= Q_3^{-1} N_3 = Q_3^{-1} Q_2^{-1} Q_1^{-1} * [P_B, T_B] \\ N_5 &= Q_4^{-1} N_4 = Q_4^{-1} Q_3^{-1} Q_2^{-1} Q_1^{-1} * [P_B, T_B] \\ N_6 &= Q_5^{-1} N_5 = Q_5^{-1} Q_4^{-1} Q_3^{-1} Q_2^{-1} Q_1^{-1} * [P_B, T_B] \end{aligned}$$

Ясно, мы можем видеть, что M_1 и N_1 просто эквивалентны прямой кинематике КФК. Дальнейший анализ состава каждого из этих преобразований между двойственными кватернионными произведениями M и N подразумевает, что $M_i = N_i$. Поэтому, их соответствующие члены также должны быть равны.

Следующим шагом является приравнивание каждого соответствующего двойственного кватерниона между M_i и N_i , которые дадут нам несколько уравнений, которые мы можем использовать для вычисления для обратной кинематики.

4.3.3 Преобразование рамок основания в запястья

Вычисление продуктов преобразования M_i и N_i , где $(a \quad i \quad b)$, приведет нас к уравнениям $((b - a) + 1) \times 7 \times 2$, где множители представляют количество преобразований $(b(a - 1))$, количество слагаемых в двойственном кватернионе (7) и для M и N соответственно. Мы приравниваем условия для каждого соответствующего продукта преобразования и получаем $((b - a) + 1) \times 7$ уравнений, и мы пытаемся найти взаимосвязь между некоторыми из этих уравнений и манипулировать ими, чтобы иметь возможность явно решать для углов соединения.

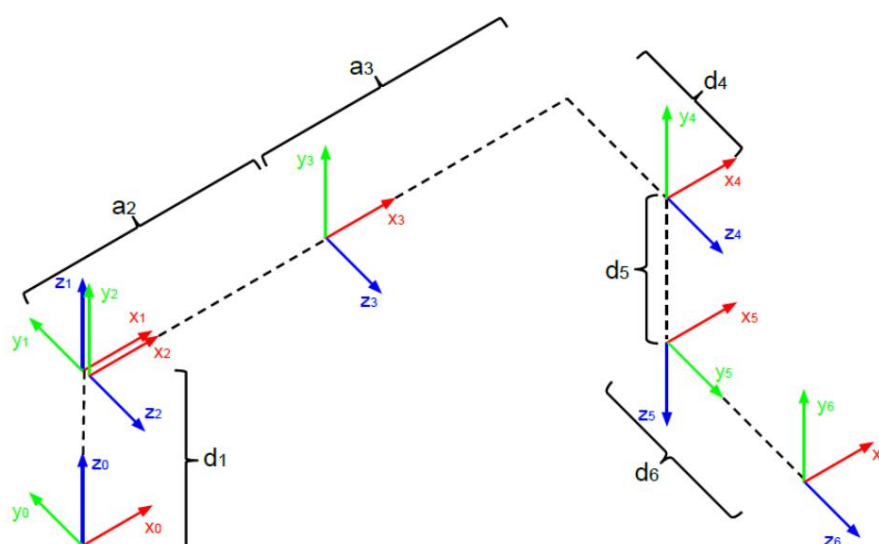


Рисунок 4.3: Система координат UR3 ($\theta_1, 2, 3, 4, 5, 6 = 0$) из [11].

Преобразование кадра 1 (основание) в кадр 6 (запястье 3)

Следуя [4] и [15], мы должны начать сначала с преобразования основания в запястье 3. Это приведет нас к 84 уравнениям, где $(1 \quad i \quad 6)$. Приравняем соответствующие продукты превращения и члены между M_i и N_i . Эти уравнения перечислены в Приложении В. Простота получения прямого уравнения для расчета углов сочленения зависит от конструкции робота. В случае UR3 нет уравнений, которые могли бы напрямую вывести значение любого угла сустава. Мы можем найти уравнение для θ_5 , а затем для θ_6 , но для их решения нам нужно θ_1 . Мы можем применять численные методы для оценки значений углов соединения, но в нашем случае нам нужны точные значения. Чтобы решить эту проблему, мы можем применить геометрический подход, который обычно используется для получения инверсной кинематики робота, и перейти к следующему преобразованию — преобразованию основания в запястье 2.

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Преобразование кадра 1 (основа) в кадр 5 (запястье 2)

Наша главная мотивация для перехода к этому преобразованию — найти θ_1 . Геометрический подход заключается в том, чтобы найти взаимосвязь между углами суставов и смещениями. На рисунке ниже показано соотношение между углом сустава θ_1 и координатами кадра 1 (основание) и кадра 5 (запястье 2).

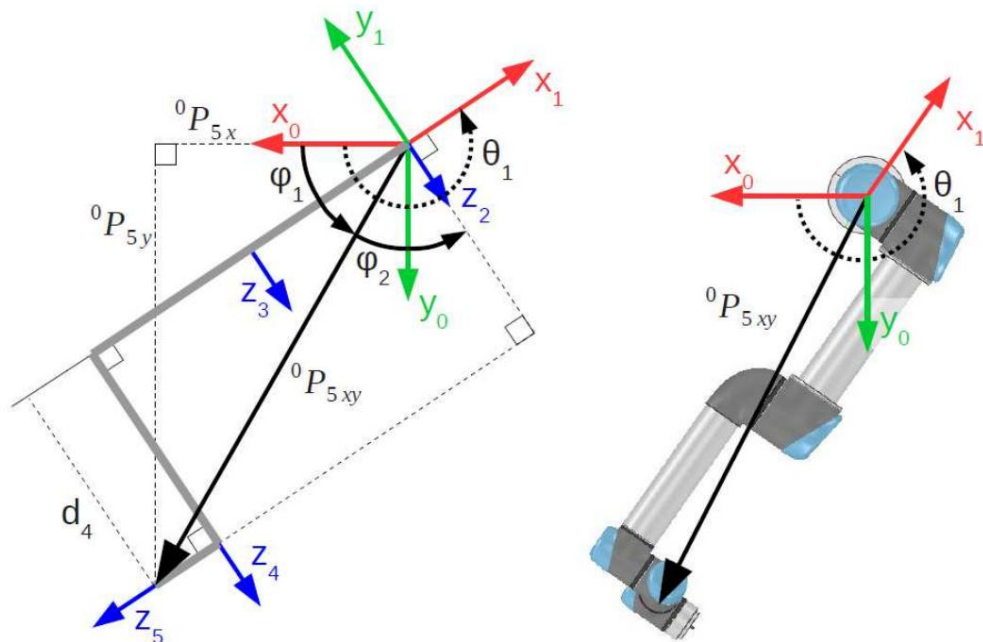


Рисунок 4.4: Структура робота UR3 от кадра 1 до кадра 5 (из [3])

Как мы видим, можно будет определить значение θ_1 , используя смещение между кадром 1, Q_1 , и кадром 5, Q_5 . Преобразование основания в запястье 2 приведет нас к 70 уравнениям, где $(1 \leq i \leq 5)$. К счастью, вместо повторного вычисления этих преобразований мы можем использовать предыдущее преобразование и взять N_1 в N_5 , поскольку они просто эквивалентны. Единственная разница в том, что мы работаем с координатами в кадре 5. Таким образом, нам нужно будет только сделать перевод из координат кадра 6 в кадр 5. Что касается продуктов прямого преобразования, мы должны начать с M_5 , а не с M_6 . Это можно сделать, просто установив $M_5 = Q_5$ и переведя в ноль. Приравнявая члены M_5 к соответствующим им элементам в N_5 и применяя тригонометрические тождества, мы получим нашу формулу для θ_1 .

Это позволит нам затем решить для θ_5 и θ_6 , используя уравнения, которые мы получили от преобразования кадра 1 (основа) в кадр 6 (запястье 3).

Получение угла соединения θ_1 (основание)

Чтобы вывести формулу для θ_1 , мы можем сначала перевести координаты в последнем кадре (запястье 3) обратно в кадр 5 (запястье 2) и использовать их в формуле, которая будет извлечена из продуктов преобразования. Чтобы вернуться к кадру 5, мы анализируем преобразования запястья 3 (Q6) и запястья 2 (Q5) и их вклад в окончательное преобразование QFK.

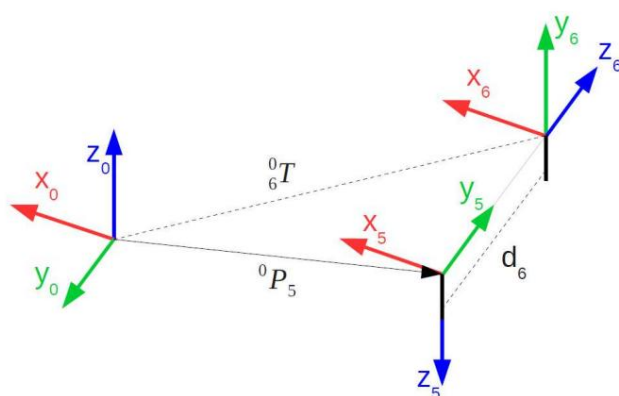


Рисунок 4.5: Перевод из кадра 6 (запястье 3) в кадр 5 (запястье 2)[3]

Кадр 5 (Запястье 2) Трансформация:

$$Q5 = ([\bar{c}5 \quad s\bar{5}k], < d6s5i \quad d6c5j >)$$

Кадр 6 (Запястье 3) Трансформация:

$$Q6 = ([\bar{c}6 \quad s\bar{6}j], < 0 >)$$

Окончательная трансформация: кадр 1 (основа) в кадр 6 (запястье 3).

$$QFK = Q1 \quad Q2 \quad Q3 \quad Q4 \quad Q5 \quad Q6 = Q1 \quad 6$$

Ясно, что Q6 не выполняет никаких переводов, только вращение. Следовательно, наше положение рабочего органа уже определено в преобразовании до Q5. Таким образом, для части перевода (p) QFK мы имеем

$$\begin{aligned} (QFK)p &= (Q1 \quad 6)p = (Q1 \quad 5)p \\ &= (Q1 \quad Q2 \quad Q3 \quad Q4 \quad Q5)p \end{aligned} \quad (4.4)$$

Обратите внимание, что нам нужны координаты в кадре 5, и мы имеем дело только с переводной частью двойственного кватерниона.

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Нам нужно отменить перевод, сделанный Q5. Мы делаем это, используя его инверсию,

$$Q_5^{-1} = ([-c_5 + i s_5 k], [d_5 i])$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} (Q_5 Q_4)^{-1} &= (Q_4^{-1} Q_5^{-1})^T \\ &= (Q_4^{-1} Q_5^{-1})^T \\ &= (Q_4^{-1})^T \end{aligned} \quad (4.5)$$

У нас пока нет значения для θ_5 , поэтому мы не можем полностью построить Q5, но, поскольку мы имеем дело только с частью перевода, нам это на самом деле не нужно. Вместо этого мы можем установить произвольное значение его кватернионной части и определить только часть перевода. Напомним, что определение части трансляции из двойного кватернионного умножения определяется без использования qB,

$$(QA QB)p = [qA pB + qA^{-1} pA] \quad (4.6)$$

Поскольку $(Q_5 Q_4)p = (Q_4^{-1})^T p$, мы можем иметь

$$(Q_5 Q_4)^{-1} p = [x_5 i + y_5 j + z_5 k + p_5] \quad (4.7)$$

$$z_5 k = (Q_4^{-1})^T p \quad (4.8)$$

где $\langle x_5, y_5, z_5 \rangle$ — координаты в кадре 5 относительно кадра 1.

Теперь, чтобы вычислить θ_1 , нам нужны продукты двойного преобразования кватернионов для преобразования основания в запястье 2. Как мы заявили в нашем анализе, мы можем просто использовать (B.13) $M_{56} = N_{56}$, где член $\cos \theta_5$ исключен.

Поэтому,

$$\begin{aligned} 0 &= y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 + d_4 y \cos \theta_1 \\ \theta_1 - x \sin \theta_1 &= -d_4 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Применим следующее тригонометрическое тождество

$$a \sin \theta + b, \text{ потому что } \theta = c$$

$$\theta = \text{atan2}(a, b) \pm \text{atan2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad (4.10)$$

А теперь мы используем координаты из кадра 5 для вывода формулы для θ_1 ,

$$\theta_1 = \text{atan2}(-x_5, y_5) \pm \text{atan2}\left(\frac{x_5}{\sqrt{x_5^2 + y_5^2}}, \frac{y_5}{\sqrt{x_5^2 + y_5^2}}\right), \quad (4.11)$$

Мы рассматриваем два значения для θ_1 , соответствующие вращению базового сустава при установке плеча либо влево, либо вправо.

4.3. Обратная кинематика с помощью двойных кватернионов

Получение угла соединения θ_5 (запястье 2)

Теперь, когда нам дано θ_1 , мы можем использовать ту же пару уравнений из двойственного продукта преобразования кватерниона для преобразования основания в запястье 3 (В.13), но без исключения члена для вывода уравнения для θ_5 ,

$$\begin{aligned} \underline{M_{56} = H_{56}} \\ d_6 \cos \theta_5 = y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 + d_4 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Мы можем напрямую вычислить θ_5 по формуле

$$\theta_5 = \pm \arccos \frac{x_6 \sin \theta_1 - y_6 \cos \theta_1 - d_4}{d_6} \quad (4.13)$$

Мы рассматриваем два значения θ_5 для вращения в запястье 2, соответствующие чтобы запястье было либо вверх, либо вниз.

Получение угла соединения θ_6 (запястье 3)

Теперь у нас есть θ_1 и θ_5 , тогда мы можем использовать пары уравнений (Б.29), (Б.30), (Б.31) и (Б.32) также из продуктов двойственного кватернионного преобразования для Преобразование основания в запястье 3 для получения уравнения для θ_6 ,

$$\begin{aligned} \underline{M_{21} = H_{21}} \\ \text{потому что } \frac{\theta_5}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6}{2} = \text{ш потому что } \frac{\theta_1}{2} + \text{с грех } \frac{\theta_1}{2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \underline{M_{22} = H_{22}} \\ \text{грех } \frac{\theta_5}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6}{2} = \text{потому что } \frac{\theta_1}{2} + \text{б грех } \frac{\theta_1}{2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \underline{M_{23} = H_{23}} \\ \text{потому что } \frac{\theta_5}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6}{2} = - \text{грех } \frac{\theta_1}{2} + \text{б потому что } \frac{\theta_1}{2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \underline{M_{24} = H_{24}} \\ \text{грех } \frac{\theta_5}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6}{2} = \text{ш грех } \frac{\theta_1}{2} + \text{с cos } \frac{\theta_1}{2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Используя тригонометрические тождества (сумма углов), они эквивалентны:

$$c^{-(2+3+4)}c^{-6} - s^{-(2+3+4)}s^{-6} = \frac{wc^{-1} + cs^{-1}}{c^{-5}} = a \quad (4.18)$$

$$s^{-(2+3+4)}c^{-6} - c^{-(2+3+4)}s^{-6} = \frac{ac^{-1} + bs^{-1}}{c^{-5}} = \beta \quad (4.19)$$

$$s^{-(2+3+4)}c^{-6} + c^{-(2+3+4)}s^{-6} = \frac{as^{-1} - bc^{-1}}{c^{-5}} = \gamma \quad (4.20)$$

$$c^{-(2+3+4)}c^{-6} + s^{-(2+3+4)}s^{-6} = \frac{ws^{-1} - cs^{-1}}{c^{-5}} = \delta \quad (4.21)$$

Умножение (4.18) на s^{-6} даст нам,

$$c^{-(2+3+4)}c^{-6}s^{-6} - s^{-(2+3+4)}s^{-6} \frac{2}{6} = as^{-6} \quad (4.22)$$

А умножение (4.19) на s^{-6} даст нам:

$$c^{-(2+3+4)}c^{-6} \frac{2}{6} - c^{-(2+3+4)}s^{-6}c^{-6} = \beta c^{-6} \quad (4.23)$$

Получение суммы этих двух уравнений даст нам,

$$s^{-(2+3+4)}c^{-6} \frac{2}{6} - c^{-2} \frac{2}{6} = -s^{-(2+3+4)}c^{-6} = as^{-6} + \beta c^{-6} \quad (4.24)$$

Тогда, умножая (4.20) на s^{-6} , мы получим

$$c^{-(2+3+4)}c^{-6} \frac{2}{6} + c^{-(2+3+4)}s^{-6}c^{-6} = \gamma c^{-6} \quad (4.25)$$

А умножение (4.21) на s^{-6} даст нам:

$$c^{-(2+3+4)}c^{-6}s^{-6} - s^{-(2+3+4)}s^{-6} \frac{2}{6} = \delta s^{-6} \quad (4.26)$$

Получение суммы этих двух уравнений даст нам,

$$s^{-(2+3+4)}c^{-6} \frac{2}{6} - c^{-2} \frac{2}{6} = -s^{-(2+3+4)}c^{-6} = \gamma c^{-6} - \delta s^{-6} \quad (4.27)$$

Мы можем вычесть уравнения (4.24) и (4.27), чтобы получить следующее упрощенное уравнение, в котором неопределенным является только θ_6 :

$$as^{-6} + \beta c^{-6} = \gamma c^{-6} - \delta s^{-6} \quad s^{-6}(\alpha + \delta) = -c^{-6}(\gamma - \beta)$$

Преобразование этого уравнения для решения для θ_6 даст нам следующую формулу:

$$\theta_6 = 2 \arctan 2(\gamma - \beta, \alpha + \delta) \quad (4.28)$$

Существует только одно значение для θ_6 , которое соответствует вращению запястья 3 в суставе.

4.3.4 Преобразование рамок плеча в запястье

Теперь нам осталось определить только θ_2 , θ_3 и θ_4 . Обратите внимание, что их соответствующие суставы образуют 3R-плоский манипулятор, как показано на рисунке. ниже,

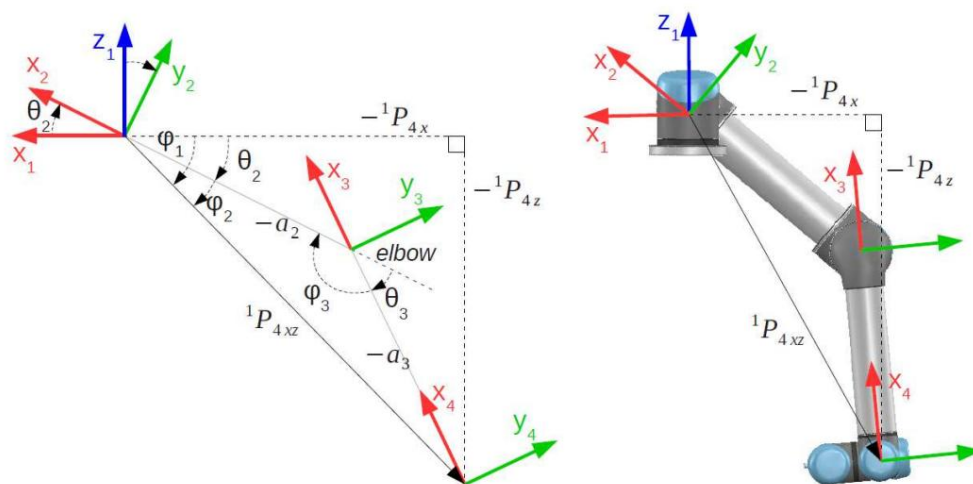


Рисунок 4.6: 3R-планарный манипулятор, образованный соединениями UR3 со 2 по 4 из [3].

Следовательно, мы можем получить продукты преобразования M_i и N_i , где (2 я 4). Это приведет нас к 42 уравнениям. Приравняв члены для каждого соответствующего продукта трансформации, мы получаем $\frac{42}{2} = 21$ уравнение и мы пытаемся найти взаимосвязь между некоторыми из этих уравнений и манипулируем ими, чтобы получить возможность явного решения для наших оставшихся углов соединения, чтобы они были определенными.

Таким образом, у нас есть следующее двойственное кватернионное представление для каждого сустава:

$$\begin{aligned} Q_2 &= ([\bar{c}_2 \quad \bar{s}_2], \langle a_2 c_2 i + a_2 s_2 k \rangle) \\ Q_3 &= ([\bar{c}_3 \quad \bar{s}_3], \langle a_3 c_3 i + d_4 j + a_3 s_3 k \rangle) \\ Q_4 &= ([\bar{c}_4 \quad \bar{s}_4], \langle 0 \rangle) \end{aligned}$$

и обратные как:

$$\begin{aligned} Q_2^{-1} &= ([c_2 \quad s_2], \langle -a_2 c_2 i - a_2 s_2 k \rangle) \\ Q_3^{-1} &= ([c_3 \quad s_3], \langle -a_3 c_3 i - d_4 j - a_3 s_3 k \rangle) \\ Q_4^{-1} &= ([c_4 \quad s_4], \langle 0 \rangle) \end{aligned}$$

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Таким образом, наш продукт преобразования двойного кватерниона M_i формулируется как:

$$\begin{aligned} M_4 &= Q_4 \\ M_3 &= Q_3 \quad M_4 = Q_3 \quad Q_4 \\ M_2 &= Q_2 \quad M_3 = Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \end{aligned}$$

И двойное кватернионное произведение N_i как:

$$\begin{aligned} N_2 &= Q_2 = [w_4, < a_4, b_4, c_4 >], < x_4, y_4, z_4 > \\ N_3 &= Q_1^{-1} \quad N_2 = Q_1^{-1} \quad Q_2 \quad Q_4 \\ N_4 &= Q_1^{-1} \quad N_3 = Q_1^{-1} \quad Q_2^{-1} \quad Q_4 \end{aligned}$$

Эти уравнения перечислены в Приложении С.

Помимо этого, нам также нужно будет перевести наши базовые координаты и окончательные координаты, поскольку мы работаем только с кадром 2 (плечо) в кадр 4 (запястье 1). Чтобы перевести координаты, мы используем ту же технику, что и при определении координат для θ_1 ,

$$\begin{aligned} Q_{FK} &= Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 = Q_1 \quad Q_6 \quad (4,29) \\ Q_1^{-1} \quad Q_{FK} &= Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad = Q_2 \quad Q_6 \quad (4,30) \\ Q_1^{-1} \quad Q_{FK} \quad Q_6^{-1} &= Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad = Q_2 \quad Q_5 \quad (4,31) \\ Q_1^{-1} \quad Q_{FK} \quad Q_6^{-1} \quad Q_5^{-1} &= Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad = Q_2 \quad Q_4 \quad (4,32) \end{aligned}$$

Обратите внимание, что мы уже можем полностью сформировать Q_1 , Q_5 и Q_6 . Для Q_4 нам нужно только вернуть его перевод. Для этого воспользуемся его инверсией Q_1^{-1} так же, как и в предыдущем переводе. У нас есть,

$$Q_4^{-1} = ([\bar{c}_5 + \bar{s}_5 k], < d_6 i >)$$

И мы возвращаем перевод,

$$\begin{aligned} (Q_2 \quad Q_4 \quad Q_1^{-1})p &= (Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_4)p \quad (4.33) \\ &= (Q_2 \quad Q_3)p \\ &= (Q_2 \quad Q_3)p \end{aligned}$$

Получаем координаты переводной частью этого продукта,

$$\begin{aligned} (Q_2 \quad Q_4 \quad Q_1^{-1})p &= < q_4^2 * p_4^{-1} * (q_4^2)^{-1} + p_4^2 > \quad (4.34) \\ &= < x_4 i + y_4 j + z_4 k > \end{aligned}$$

где $< x_4, y_4, z_4 >$ — координаты в кадре 4 относительно кадра 2.

4.3. Обратная кинематика с помощью двойных кватернионов

Получение угла соединения θ_3 (колени)

Чтобы вывести формулу для θ_3 , мы используем уравнения (C.19) и (C.21) в

Преобразование плеча в запястье 1 вместе с ранее вычисленным

координаты $\langle x_4, y_4, z_4 \rangle$.

$$\underline{M_{25} = H_{25}}$$

$$a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \cos \theta_2 = x_4 \quad (4.35)$$

$$\underline{M_{27} = H_{27}}$$

$$a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 = z_4 \quad (4.36)$$

Возведение этих двух уравнений в квадрат и их сложение даст нам,

$$a_3^2 + 2a_2a_3 \cos \theta_3 + a_2^2 = x_4^2 + z_4^2 \quad (4.37)$$

Теперь мы можем напрямую вычислить θ_3 с помощью

$$\theta_3 = \pm \arccos \frac{x_4^2 + z_4^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (4.38)$$

Мы рассматриваем два значения для θ_3 , которые соответствуют вращению в локтевом суставе. либо вверх, либо вниз.

Получение угла соединения θ_2 (плечо)

Поскольку у нас уже есть θ_3 , мы можем вычислить θ_2 , используя уравнения (C.12)

и (C.14) также в Преобразовании Плеча в Запястье 1 с использованием того же координаты.

$$\underline{M_{35} = H_{35}}$$

$$a_3 \cos \theta_3 = a_2 + x_4 \cos \theta_2 + z_4 \sin \theta_2 \quad (4.39)$$

$$\underline{M_{37} = H_{37}}$$

$$a_3 \sin \theta_3 = x_4 \sin \theta_2 + z_4 \cos \theta_2 \quad (4.40)$$

И, используя аналогичные манипуляции, мы можем напрямую вычислить θ_2 следующим образом:

$$\theta_2 = \arctan2(z_4(a_2 + a_3 \cos \theta_3) - x_4a_3 \sin \theta_3, x_4(a_2 + a_3 \cos \theta_3) + z_4a_3 \sin \theta_3) \quad (4.41)$$

Мы рассматриваем одно значение для θ_2 , которое соответствует вращению плеча.

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Получение угла соединения θ_4 (запястье 1)

Зная θ_3 и θ_2 , мы можем вычислить θ_4 , используя уравнения (C.1) и (C.3) и вращательную часть преобразования Q_2 , заданную как $q_4 = w_4 + a_4i + b_4j + c_4k$

$$\begin{aligned} & \overline{M41} = \overline{H41} \\ & \text{потому что} \quad \frac{\theta_4}{2} = w_4 \cos \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} - b_4 \sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} & \overline{M43} = \overline{H43} \\ & \sin \frac{\theta_4}{2} = w_4 \sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} + b_4 \cos \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Мы можем напрямую вычислить θ_4 следующим образом:

$$\theta_4 = 2 \arctan \left(\frac{w_4 \sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} + b_4 \cos \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}}{w_4 \cos \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} - b_4 \sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}} \right) \quad (4.44)$$

Мы рассматриваем одно значение для θ_4 , которое соответствует вращению запястья 1 в суставе.

4.3.5 Решения по угловым соединениям

Использование уравнений (4.11), (4.13), (4.28), (4.38), (4.41) и (4.44) позволит нам вычислить комбинацию углов ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$), которая будет давать нам желаемое преобразование Q_1 . Каждый из наших углов соединения из этих уравнений имеет следующее количество возможных значений:

$$\begin{array}{ccc} \theta_1 \times 2 & \theta_2 \times 1 & \theta_3 \times 2 \\ \theta_4 \times 1 & \theta_5 \times 2 & \theta_6 \times 1 \end{array}$$

Таким образом, всего имеется $2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 8$ возможных комбинаций угла сустава. По-прежнему необходимо выполнять некоторую фильтрацию этих значений в нашем практическом программном приложении, потому что все еще может случиться так, что только некоторые из этих комбинаций дадут нам точное желаемое преобразование. В данном исследовании это делается с использованием принципа прямой кинематики. Теперь у нас есть входные данные в виде углов соединения из нашей текущей комбинации, и мы получаем их соответствующее преобразование,

$$Q_1(\theta_1) Q_2(\theta_2) Q_3(\theta_3) Q_4(\theta_4) Q_5(\theta_5) Q_6(\theta_6) = Q_{FK} \quad (4.45)$$

Мы проверяем, эквивалентно ли это преобразование нашему желаемому преобразованию, где нам также необходимо учитывать некоторые небольшие расхождения из-за численных ошибок. Эта процедура демонстрируется в нашем программном приложении.

4.4 Практическое применение программирования

Приложение для программирования Python для получения прямого и обратного кинематика UR3 представлена в этом разделе.

4.4.1 Параметры Денавита-Хартенберга

Параметры Денавита-Хартенберга UR3 приведены в следующей таблице:

UR3				
Kinematics	theta [rad]	a [m]	d [m]	alpha [rad]
Joint 1	0	0	0.1519	$\pi/2$
Joint 2	0	-0.24365	0	0
Joint 3	0	-0.21325	0	0
Joint 4	0	0	0.11235	$\pi/2$
Joint 5	0	0	0.08535	$-\pi/2$
Joint 6	0	0	0.0819	0

Таблица 4.2: Параметры Денавита-Хартенберга для UR3 из [20]

Эти параметры описываются следующей диаграммой:

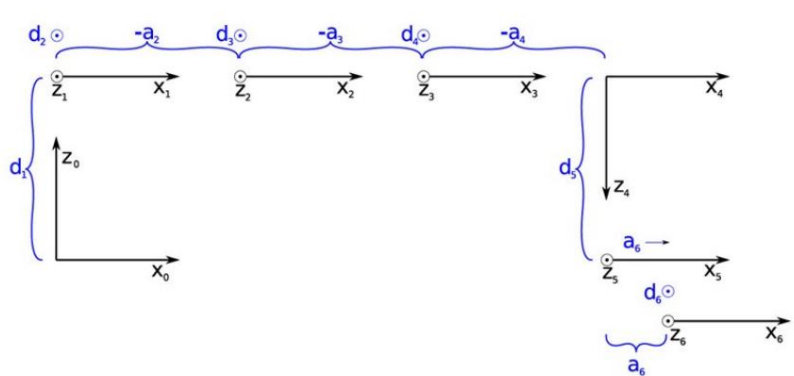


Рисунок 4.7: Диаграмма параметров DH UR3 из [20]

Настройка параметров DH в программе осуществляется в порядке, указанном в таблице.

4.1 с использованием значений, приведенных в таблице 4.2.

```

1 # UR3 Денавит-Хартенберг Параметры
2 d знак равно [0.1519, 0, 0.24365, 0.21325, 0.11235, 0.08535, 0.0819],
3 a = [0, 0.24365, 0.21325, 0, 0, 0, 0],
альфа a = [0, pi/2, 0, 0, pi/2, -pi/2, 0]

```

5Использование и вывод параметров Денавита-Хартенберга можно найти в [23]

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

4.4.2 Приложение для программирования на Python

Мы используем библиотеку `urx python` для связи и управления роботом UR3.

```
1 URL импорта
2 из urx импортировать urrobot
3 роб = urx . Робот ( " 1 4 7. 2 2 9. 1 3 2. 2 4 9" ) #IP-адрес UR3
```

IP-адрес робота UR3 можно увидеть на вкладке «О программе» в UR3.

Графический пользовательский интерфейс Polyscope.

Двойной класс кватернионов

Сначала мы определяем наш объект двойного кватерниона. Как мы описали, он состоит из двух кватернионов, где первый кватернион представляет вращение, а второй кватернион представляет перевод. Библиотека `pyquaternion` используется для определения этих объектов кватерниона, и мы создали класс для двойного Кватернион, следующий свойствам, которые мы перечислили в главе о кватернионах. умножение двойственных кватернионов также определено в этом классе после свойства, которые мы перечислили в главе о двойственном кватернионе.

```
1 класс DualQuaternion:
2 # Я инициализирую двойной кватернион
3     def __init__(self, q):
4         self.q = q
5         self.p = 0
6
7 # Двойное умножение кватернионов
8     def multiply(self, dq):
9         # Для вращающейся части
10        q1 = self.q
11        d2 = dq.q
12
13        # Для части перевода
14        p1 = self.p
15        p2 = dq.p
16
17        return DualQuaternion ( q1 * d2, q1 * p2 + q1 . сопряженное * p1 )
18
19 # Проверяет равенство двойных кватернионов
20     def equals(self, dq):
21        # Для вращающейся части
22        q1 = self.q . вектор
23        d2 = dq.q . вектор
24
25        # Для части перевода
26        p1 = self.p . вектор
27        p2 = dq.p . вектор
28
```

```

29 # Проверяет равенство
30 print ( "\nСравнение двойных кватернионов: " )
31 напечатать ( "Вращение : , q1 , " «~»
32 печать ( " , p2 )
33
34 если ( ( np . allclose ( p1 , p2 , atol=1e - 03)
35 или np . allclose ( p2 , p1 , atol=1e - 03)) )
36 и ( np . allclose ( q1 , q2 , atol=1e - 03)
37 или np . allclose ( q2 , q1 , atol=1e - 03)) ) :
38 вернуть Истина
39 вернуть F al se
40
41 # Трансформирует пространство
42 def трансформировать (я, поза):
43 # Повернутая поза
44 ro tP ose = сам . к . вращать (позе) ,
45 print ( "\nAfter R ota ti on : ro tP ose ) ,
46
47 # Т ранняя поза
48 Trans p ose = self . п . вектор + ro tP ose
49 print ( "After Trans sl a ti on: tran sP ose")
50
51 обратная передача

```

При вращении вектора мы использовали метод `ruquaternion rotate`, поскольку он также нормализует кватернион перед применением поворота. Это делается в следующие коды в библиотеке `ruquaternion`:

```

1 def поворот (собственный вектор):
2     Поворот 3D-вектора на угол поворота, сохраненный в
3     Объект кватерниона.
4
5     Параметры:
6     вектор: 3-вектор , заданный как любая упорядоченная последовательность
7     из 3 действительных чисел соответствуют значениям ux и z .
8     Некоторые типы, которые распознаются отдельно: массивы numpy
9     , списки и кортежи.
10    3-вектор также может быть представлен
11    Кватернионный объект who 'sscalarpartis 0 и vectorpartis
12    искомый красный 3 вектор .
13    Таким образом, можно вызвать «Кватернион. вращать (q
14    ) ' с другим объектом в качестве входных данных .
15
16    Возвращает:
17    Повернутый вектор вернулся того же типа, что и был
18    указанный на входе .
19
20    Рай сес:
21    TypeError: если какой-либо из элементов вектора не может быть
22    преобразовано в арельное число.

```

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

```

15      Значение ошибки: if ' вектор 3- ' не может быть истолковано как
      векторный объект кватерниона.
16      """
17
18      if isinstance (вектор, кватернион):
19          вернуть себя . вращать кватернион ( вектор )
20      q = кватернион (вектор=вектор)
21      a = сам. повернуть кватернион ( q ) . вектор
22      if isinstance ( список векторов ):
23          л = [ x вместо x в ]
24          вернуть л
25      elif isinstance ( vectorl = [ x for , т пл е ):
26          x in a ]
27          return tu pl e ( l )
28      еще :
29          вернуть _
30
31  def вращать кватернион (самостоятельно, q):
32      Вращение водного вектора по сохраненному вращению.
33
34      Параметры:
35      q : Вектор, который нужно повернуть , in quater ni в форме ( 0 +
      xi + yj + kz )
36
37      Возвращает:
38      Объект Quaternion, представляющий повернутый вектор
      in quater ni от ( 0 + xi + yj + kz )
39
40      себя . нет rm али ce ( )
41      вернуть себя q * self . сопряженный
42
43  def no rm али se (я):
44      """ Ob jec tis gu ar an teed to be au ni t quater ni on after
      зову это
45      операция, ЕСЛИ объект не соответствует кватерниону
      ( 0 ) """
46
47      если не сам. единица измерения ( ):
48          п = сам . норма
49          если п > 0:
50              себя . д = я . p/n

```

Отметим также, что в предыдущем коде мы определили, как определить, есть ли два двойные кватернионы примерно равны. Мы использовали метод `allclose` библиотека `numpy`, которая проверяет, равны ли два массива по элементам в пределах толерантности. Мы делаем это для инверсной кинематики, когда хотим отфильтровать полученные комбинации углов их соответствующими преобразованиями и мы должны учитывать численные ошибки, которые могут возникнуть при вычислениях.

Кинематика вперед

Для прямой кинематики наша цель — определить конечное преобразование (ориентация и положение) рабочего органа робота с учетом его сочленений. угловые повороты. Во-первых, нам нужно получить текущие углы сочленения нашего робота. Мы делаем это с помощью метода `getj` из библиотеки `urx`.

```
1 # Получает текущую совместную строку
```

```
2 звонка = ограбить. получить ( )
```

Это возвращает значение шести углов сустава, начиная с основания до запястья.

3. Мы также определяем два подхода к получению двойственного кватерниона. Один из представление оси-угла (AA) и матрицей преобразования (TM).

Мы определяем различные начальные координаты TCP для каждого из этих подходов.

```
1 # Установить начальное положение TCP в пространстве на основе соответствующего
рамка
```

```
2 TCP_endf = np. массив ( [ 0.3 TCP_basef = np. , 0 , 0.2 ] ) # на основе конечного кадра ( 0 , 0 , 1 )
массив ( [ 0 - , 0.2 , 0 ] ) # на основе базового кадра ( 0 , 1 , 0 )
```

Причина этого в том, что для первого подхода, основанного на AA, мы должны рассмотреть Координаты TCP относительно базового кадра. И для TM

подход, мы должны рассматривать координаты TCP относительно его кадра.

Метод прямой кинематики теперь вызывает вывод двойной кватернионы для каждого шести суставов на основе выбранного подхода и вычисления последний двойной кватернион, представляющий окончательное преобразование путем умножения их в порядке трансформации (стыков).

```
1 # Получает текущую позицию с использованием прямой кинематики
```

```
2 def getforward kin ematics (ответы, звенящие звуки):
```

```
3
4     print ( "\nТекущие углы соединения: " , звенит)
```

```
5
6 # Получает соответствующие двойные четверти для каждого сустава
из их представления «угол-ось»
```

```
7     если ( ответ == "AA" ) :
8         print ( "\nПолучение прямой кинематики из угла-оси
Представление . . . ) _
```

```
9         DualQuatList = производный от AA ( jangles ) _
10        Initialpose_ = TCP_basef _
```

```
11 # Получает соответствующие двойные четверти для каждого сустава
из их трансформационных матриц
```

```
12     Элиф ( Ответ == "TM" ) :
13         print ( "\nПолучение прямой кинематики из преобразования
Матрица . . . ) _
```

```
14         DualQuatList = получить Du al Qua t erni on от TM ( jangles ) _
15         начальная поза = окончание TCP
```

```
16     еще :
17         print ( «Неверный ввод!» )
```

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

```

18     возвращаться
19
20 # Вычисляет окончательный двойственный кватернион с помощью multiplying the
    Двойной Quaternion s
21 FKDualQuat = двойной кватернион ( )
22 для dq в DualQuatList:
23     ФКДуалКват = ФКДуалКват . мульт ( dq )
24
25     print ( "\nForward Kinematics ( by Dual Quaternion ) : \n ( [ "
        FKDualQuat . q , " ] , , FKDualQuat . p , ">" )
26
27 # Преобразование исходной позиции путем умножения кватерниона на вектор
28     print ( "\n Исходные координаты TCP ( atzeropose ) : initialpose )
        -
29     курс = FKDualQuat . трансформировать (инициализировать)
30     print ( "\nTransformed TCP Coordinates : \n" , np . round ( currpose
        , 3 ))
31
32     вернуть FKDualQuat

```

Результатом этого метода является текущая поза или TCP-координаты объекта. робот после того, как он был преобразован (повернут и перемещен) и с относительно базовой рамы.

Двойные кватернионы из представления осей и углов

Вывод прямой кинематики с помощью подхода «ось-угол»
сделано в методе получения двойного quat из AA:

```

1 # Получение двойственного кватерниона из угла и оси вращения
2 def derive_dual_quat_from_AA ( jangles ) :
3 # Получает совместные сообщения от текущей позиции
4     тета = звон
5
6 # Установить перевод для каждого сустава
7     транс = ([[0 d [0]], 0 a [2] * cos                                # P1
8         ( тета [1] ), [ a [3] * cos                                0 , a [2] * грех ( тета [1] )] , # P2
9         ( тета [2] ), [ d [4] * sin                                d [3] a [3] * sin ( тета [2] )] , # P3
10        ( тета [3] ), [ d [5] sin                                0 , d [4] * потому что ( тета [3] )] , # P4
11        ( тета [4] ), [ 0 0 ]])                                d[5] cos(тета[4]), 0] , # P5
12        , 0 ,                                                # P6
13
14 # Построение двойных кватернионов
15     DQList = [ ]
16     аль p = 0
17
18     для меня in range ( 6 ) :
19         # Строит ду аль кватер ни на
20         qscalar = cos ( тета [ i ] / 2 )

```

4.4. Практическое приложение для программирования

```

21     аль р += альфа а [ я ]
22     qвектор = np. многослойный (sin (theta [i]/2), al p)) [ 0 , sin(al p),           потому что (
23
24     quatRot = np. конкатенация ([[qscalar], qvector))
25
26     DualQuat = DualQuaternion (Quaternion (quatRot), Quaternion (
27     вектор = транс [ я ] ) )
28     print ( "Двойственный кватернион: (" , ДуалКват. q , " , " , DualQuat . p , ">
29     ) _
30
31     # S разорвал двойной кватернион в список
32     DQList . добавить (DualQuat)
33
34     вернуть DQList

```

Чтобы вычислить окончательное преобразование, мы сначала определяем перевод для каждый сустав. Это соответствует переводной части наших двойственных кватернионов в котором используются параметры Денавита-Хартенберга (a , d , θ). Тогда мы построим кватернионы вращения для всех шести суставов, используя углы от робота и соответствующий ему кватернион перевода производными переводами. переменная alp следует за параметром α в параметрах DH, и мы используем это при определении оси вращения. Это может иметь значения 0 или $\frac{\pi}{2}$ которые сделает любой из терминов $-\sin(alp)$ и $\cos(alp)$ равным нулю или ± 1 . Затем, мы создаем объект двойного кватерниона, комбинируя эти два кватерниона. Наконец, мы сохраняем эти двойные кватернионы в список и возвращаем его к предыдущему метод, который выполняет преобразование.

Двойные кватернионы из матрицы преобразования

Другой подход к получению прямой кинематики может заключаться в преобразовании матрица. Это делается в методе получения двойного quat от TM. Обычно соглашение о получении прямой кинематики заключается в использовании матриц вращения и векторы переноса, которые объединяются в матрицу преобразования (4x4). Из этой матрицы преобразования мы можем преобразовать ее в двойной кватернион путем преобразования матриц вращения (3x3) в единичные кватернионы и векторов переноса (3x1) в виде чистого кватерниона. Матрица вращения в кватернион преобразование обсуждалось в разделе 3.4.2. Для матрицы преобразования мы следуйте его выводу в [3] и [16].

```

1 # Получает двойную четверть для каждого сустава
2 производных Du al Qu a t e r n i o n от TM (jangles):
3     print ( «Вычисление матрицы трансформаций от Denavit-Hartenberg
4     Параметры. . . ) _
5 # Получает совместные сообщения от текущей позиции
6     тета = звон
7 # Получает матрицы преобразования для каждых 6 кадров

```

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

```

7 T = np.zeros(6, dtype=float)
8
9 Построение двойных кватернионов
10 DQList = []
11
12 для меня in range(6):
13     T[j] знак равно ([ [ потому что ( тета [ я ] ), - грех ( тета [ я ] ), а [ я ] ] [ грех ( тета [ я ] ),
14                     [ я ] ] потому что ( альфа [ я ] ), потому что ( тета [ я ] ) потому что (
15                     альфа [ я ] ), -sin(альфа [ я ] ), -sin(альфа [ я ] ) d[j] [ грех(тета[я]) * грех(альфа[я]),,
16                     потому что ( тета [ я ] ) грех (
17                     альфа [ я ] ), потому что (альфа [ я ] ), потому что (альфа [ я ] ) d [ я ] ],
18                     [ 0 , 0 , 0 , 1 ] ] )
19
20     print ( "\nTransformation Matrix for Frame", j, " is ", DualQuat[j], "\n")
21     T[i]
22
23     # Получает дуальный кватернион из преобразования
24     Матрица
25     DualQuat = DualQuaternion (Quaternion (матрица = T[i]),
26     Кватернион ( вектор = T [ i ] [ 0 : 3 ] , 3 ))
27     print ( "Двойственный кватернион: ([", DualQuat.q, "], DualQuat.p, "> ) _
28
29     # S разорвал двойной кватернион в список
30     DQList . добавить (DualQuat)
31
32 вернуть DQList

```

Как и в предыдущем подходе, мы сохраняем двойные кватернионы в список и передать его первому методу, выполняющему преобразование. Окончательный двойной кватернион, представляющий окончательное преобразование, будет отличаться от другой подход. Это потому, что при выводе с помощью AA мы основываем двойные кватернионы только на базовой системе отсчета, в то время как для подхода ТМ каждый двойственные кватернионы выводятся по отношению к их собственным системам отсчета. В любом из При этих подходах конечные координаты TCP всегда будут одинаковыми.

Практическое применение

Для приложения мы используем запись метода pose, которая принимает текущую положение робота и записывает его в текстовый файл. Коэффициенты этого двойного кватернион, полученный из углов суставов робота, затем сохраняется в тексте файл. В текстовый файл можно записать несколько поз. Помимо этого, прямая кинематика также используется для фильтрации комбинаций углов, полученных в инверсную кинематику, проверяя, соответствует ли их преобразование желаемое преобразование записано в текстовом файле.

Инверсная кинематика

Для инверсной кинематики наша цель состоит в том, чтобы определить углы сочленения, которые будут дать нам желаемую позу (вращение и перевод). Таким образом, нам теперь дано окончательное преобразование, и мы используем его для получения значений соответствующих шести углов соединения. Мы используем метод обратной кинематики для выполнения вывод. Начнем с определения координат в кадре 6 (запястье 3). и соответствующие координаты в кадре 5 (запястье 2).

```

1 # Выводит объединенные сигналы из инверсной кинематики
2 def getinversekinematics (желаемая_поза):
3     print ( "\nDe si red Pose : требуемая поза . q ,           желаемая поза . п ) ;
4 # Желаемая трансформация от кадров 1 до 6
5 DQ16 = желаемая поза
6 # Рота ти на партии
7     w6 = HD16. д [ 0 ]
8     a6 = HQ16. д [ 1 ]
9     b6 = CB16. д [ 2 ]
10    c6 = HQ16. д [ 3 ]
11 # Тран сл а ти на части
12    x6 = DQ16. п [1];
13    y6 = DQ16. п [ 2 ] ;
14    z6 = DQ16. п [3];
15
16 # Удалить переход из кадра 5
17    DQ5i = двойной кватернион ( п = кватернион ( вектор = [0 , д [ 5 ] , 0 ] ) )
18    DK15p = DK16. мульти (DQ5i)
19    x5 = DQ15p . п [ 1 ]
20    y5 = DQ15p . п [ 2 ]
21    z5 = DQ15p . п [ 3 ]

```

Перевод с Wrist 3 на Wrist 2 был продемонстрирован в Разделе 4.3.3.

Расчет базы (θ_1)

Для вычисления θ_1 мы использовали уравнение (4.11):

$$\theta_1 = \text{atan2}(x_5, y_5) \pm \text{atan2}\left(x \sqrt{\frac{z_5^2}{5} + y \frac{z_5^2}{5} + d_4^2}, d_4\right)$$

Это выражается следующим кодом,

```

1 # Вычислить возможные значения для Theta 1
2     тета 1 =[]
3     t 1 1 = atan2 ( x5, y5)+atan2 ( sqrt ( x5^2+y5^2 d [3]^2 ), d [3])
4     t 1 2 = atan2 ( x5, y5 ) -atan2 ( sqrt ( x5^2+y5^2 d [3]^2 ), d [3])
5 # ( База ) Тета 1 : 2 значения
6     тета 1 . добавить ( т 1 1 )
7     тета 1 . добавить ( т 1 2 )

```

Это дает не более двух возможных значений θ_1 .

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Расчет для запястья 2 (θ_5)

Для расчета θ_5 мы использовали уравнение (4.13):

$$\theta_5 = \pm \arccos \frac{x_6 \sin \theta_1 + y_6 \cos \theta_1 + d_4}{d_6}$$

Это выражается следующим кодом,

```

1 # Вычислить возможные значения для Theta 5
2   тета 1 5 = []
3   for t 1 in theta 1 : # Для каждого значения Theta 1
4       # Учитывайте экспрессию для Theta 5
5       exp5 = (x6 sin(t1) + y6 cos(t1) + d[3])/d[5]
6       # Проверяет, есть ли в домене for arccos
7       если (exp5 <= 1 и exp5 >= -1):
8           t 5 = acos ( exp5 )
9       elif (округление ( exp5 ) <= 1 и округление ( exp5 ) >= -1):
10          t 5 = acos (раунд ( exp5 ))
11          еще : продолжение
12      # (Запястье 2) Тета 5: 2 значения
13      тета 1 5 . добавить ( [ t 1 t 5 ] )
14      тета 1 5 . добавить ( [ t 1 , t 5 ] )

```

Мы считаем, что $\arccos$ имеет домен только $[-1, 1]$. Поэтому для предотвращения ошибки времени выполнения, мы округляем значения и проверяем, находятся ли они сейчас внутри этого домена. Это снова дает два возможных значения для θ_5 .

Расчет для запястья 3 (θ_6)

Для вычисления θ_6 мы использовали уравнение (4.28):

$$\theta_6 = 2 \arctan 2(\gamma, \alpha + \delta)$$

где,

$$\alpha = \frac{w c^{-1} + c s^{-1}}{c^{-5}} \quad \beta = \frac{a c^{-1} + b s^{-1}}{c^{-5}} \quad \gamma = \frac{a s^{-1} - b c^{-1}}{c^{-5}} \quad \delta = \frac{w s^{-1} - c c^{-1}}{c^{-5}}$$

Это выражается следующим кодом,

```

1 # Вычислить возможные значения для Theta 6
2   тета 1 5 6 = []
3   для t 1 t 5 в тета 1 5 :
4       т 1 = т 1 т 5 [ 0 ]
5       т 5 = т 1 т 5 [ 1 ]
6
7   # Избегает сингулярности для Theta 6
8   если ( t 5 == 0 ) :

```

4.4. Практическое приложение для программирования

```

9      t156 = [t1, t5, 0]
10     если t156 не в тета156:
11         тета156.добавить(t156)
12     продолжать
13
14     # Учтите экспрессию для Theta 6
15     tm1 = ((w6 * cos(t1/2) + c6 * sin(t1/2)) / cos(t5/2))
16     tm2 = ((a6 * cos(t1/2) + b6 * sin(t1/2)) / sin(t5/2))
17     tm3 = ((a6 * sin(t1/2) - b6 * cos(t1/2)) / cos(t5/2))
18     tm4 = ((w6 * sin(t1/2) - c6 * cos(t1/2)) / sin(t5/2))
19
20     # (Запятые 3) Тета 6: 1 Значение
21     t6 = 2 * atan2(tm3, tm2 * tm1 + tm4)
22     тета156.добавить([t1, t6], t5,

```

Это дает только одно возможное значение для θ_6 .

Теперь, чтобы определить следующие углы. Нам нужно выполнить перевод снова. Нам нужно получить преобразование из кадра 2 (плечо) в кадр 4 (Запятые 1), поэтому нам нужен Q2 → 4. Это обсуждалось в разделе 4.3.4.

```

1 # Получение преобразования из кадра 2 в кадр 4
2 DQ24f = []
3 для t156 в тета156:
4     t1 = t156[0]
5     t5 = t156[1]
6     t6 = t156[2]
7     # Получает обратную двойную четверть суставов 1 6, 5,
8     d1 = np. concatenate([(cos(t1/2)], np.multiply(sin(t1/2),
9     [0, 0, 1]))
10     DQ1i = Двойной кватернион (кватернион(q1), кватернион(вектор
11     =[0, 0, d[0]]))
12     d5 = np. concatenate([(cos(t5/2)], np.multiply(sin(t5/2),
13     [0, 0, 1]))
14     DQ5i = Двойной кватернион (кватернион(q5), кватернион(вектор = [0,
15     d[5], 0]))
16     q6 знак равно np. объединить([(cos(t6/2)], np.multiply(sin(t6/2),
17     [0, 1, 0]))
18     DQ6i = Двойной кватернион (кватернион(q6), кватернион(вектор
19     =[0, 0, 0]))
20     # Получает преобразование из кадра 2 в кадр 6
21     DQ26 = DQ1i. мульт(DQ16)
22     # Получение преобразования от кадра 2 к кадру 5
23     DK25 = DK26. мульти(DQ6i)
24     # Получает преобразование из кадра 2 в кадр 4
25     DK24 = DK25. мульти(DQ5i)
26     # Удалить Translation из кадра 4
27     DQ4i = DualQuaternion(p=Quaternion(vector=[0, DQ24f.append(0, r[4]))
28     ([DQ24. mult(DQ4i), t156])

```

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Для каждой комбинации углов θ_1 , θ_5 и θ_6 мы получаем их соответствующие двойственный кватернион инвертирует Q_1, Q_{15} и Q^{-1}_6 . Мы используем эти инверсии, чтобы вывести преобразование Q_2 4. Затем мы возвращаем перевод, сделанный Q_4 , также используя его обратный Q_4 . Затем преобразования сохраняются в список вместе с набором углов $[\theta_1, \theta_5, \theta_6]$, которые их породили. Все это будет использоваться при расчете остальных углов шарнира.

Расчет для локтя (θ_3)

Для вычисления θ_3 мы использовали уравнение (4.38):

$$\theta_3 = \pm \arccos \frac{\frac{a_4^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} - \frac{a_3^2}{2} - a^2}{2a_2a_3}$$

Это выражается следующим кодом,

```

1 # Вычислить возможные значения для Theta 3
2   та 1 3 5 6 q = []
3   для dq в DQ24f:
4       w4 = dq [ 0 ] . д [ 0 ]
5       b4 = dq [ 0 ] . д [ 2 ]
6       x4 = dq [ 0 ] . п [ 1 ]
7       y4 знак равно dq [ 0 ] . п [ 2 ]
8       z4 знак равно dq [ 0 ] . п [ 3 ]
9       q4 = [ w4 b4 , , x4, y4, , z4 ]
10
11      т 1 = dq [ 1 ] [ 0 ]
12      т 5 = dq [ 1 ] [ 1 ]
13      т 6 = dq [ 1 ] [ 2 ]
14
15  # Учитывайте экспрессию для Theta 3
16  exp3 = (( x4 2+z4 2) a [3] 2 a[2] 2)/(2 a[2] a[3])
17
18  # Проверяет, есть ли в домене forarccos
19  если ( exp3<=1 и exp3>= -1):
20      т 3 = acos ( exp3 )
21  elif (округление ( exp3 )<=1 и округление ( exp3 )>= -1):
22      т 3 = acos (раунд ( exp3 ))
23  еще : продолжение
24
25  # ( Локоть ) Тета 3 : 2 Значения
26  та 1 3 5 6 q . добавить ( [ т1 т5 та 1,3,5,6,q . , , д4 ] )
27  добавить ( [ т1 , т3 , , т5 т6,д4])

```

То же самое с θ_5 , мы также считаем, что результаты находятся внутри области $\arccos$. Это дает не более двух возможных значений для θ_3 .

4.4. Практическое приложение для программирования

Расчет плеча (θ_2)

Для вычисления θ_2 мы использовали уравнение (4.41):

$$\theta_2 = \text{atan2}(z_4(a_2 + a_3 \cos \theta_3) - x_4 a_3 \sin \theta_3, x_4(a_2 + a_3 \cos \theta_3) + z_4 a_3 \sin \theta_3)$$

Это выражается следующим кодом,

```
1 # Вычислить возможные значения для Theta 2
2   та 1 2 3 5 6 q =[]
3   для t1356q в та 1 3 5 6 q :
4       т 1 = t1356q [ 0 ]
5       т 3 = т1356q [ 1 ]
6       т 5 = т1356q [ 2 ]
7       т 6 = т1356q [ 3 ]
8       х4 = т1356q [ 4 ] [ 2 ]
9       z4 = т1356q [4] [4]
10      # Учитывайте экспрессию для Theta 2
11      т2 = atan2((z4 (a[2]+a[3] cos(t3)) - х4 a [3] sin(t3)), (х4 (a
12      [ 2]+ a [ 3] cos ( t 3 )) + z4 a [ 3] sin ( t 3 )))
13      # ( Плечо ) Тета 2 : 1 Значение
14      та 1 2 3 5 6 q . добавить ( [ т1 т5 , т2 , т3 , , т6 , т1356q [ 4 ] ] )
```

Это дает только одно возможное значение для θ_2 .

Расчет для запястья 1 (θ_4)

Для вычисления θ_4 мы использовали уравнение (4.44):

$$\theta_4 = 2 \text{atan2}(w_4 s^{-(2+3)} + b_4 c^{-(2+3)}, w_4 c^{-(2+3)} - b_4 s^{-(2+3)})$$

Это выражается следующим кодом,

```
1 # Вычислить возможные значения для Theta 4
2   та 1 2 3 4 5 6 =[]
3   для t12356q в та 1 2 3 5 6 q :
4       т 1 = т12356q [ 0 ]
5       т 2 = т12356q [ 1 ]
6       т 3 = т12356q [ 2 ]
7       т 5 = т12356q [ 3 ]
8       т 6 = т12356q [ 4 ]
9       w4 = т12356q [5] [0]
10      b4 = т12356q [5] [1]
11      # Учитывайте экспрессию для Theta 4
12      т4 = 2 atan2((w4 sin (( т 2+т 3 ) / 2 ))+(b4 cos (( т 2+т 3 ) / 2 )), (w4
13      cos (( т 2+т 3 ) / 2 ))(b4 sin (( т 2+т 3 ) / 2 )))
14      # ( Запястье 1 ) Тета 4: 1 Значение
15      та 1 2 3 4 5 6 . добавить ( [ т1 т3 , т2 , , т4 , т5 , т 6 ] )
```

Это дает только одно возможное значение для θ_4 .

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Фильтрация комбинаций углов и практическое применение

Чтобы отфильтровать и проверить результирующие комбинации углов, мы получаем их соответствующую прямую кинематику, которая представляет выполненное окончательное преобразование. по этим углам. Если это преобразование не равно приблизительно нашему нужное преобразование, то мы отфильтровываем эти углы и оставляем только те которые удовлетворяют нашему равенству с точностью до $1e^{-3}$. Это делается ниже.

```

1 # Получить соответствующий конечный двойственный кватернион на основе
   Комбинация граней
2 звон = []
3 print ( "\nНабор возможных углов соединения : \n" для , та 1 2 3 4 5 6 )
4 тета в та 1 2 3 4 5 6 :
5     FinalDQ = getforward kinematics ( «AA» , тета)
6
7     print ( "\nСравнение двойных кватернионов: " )
8     распечатать ( " Желаемая поза : \n ( [ " , ДК16. q , " ] , , DQ16. p, ">)" )
9     print ( " Текущая поза : \n ( [ " , ФиналДК . q , " ] , , FinalDQ . p, ">)" )
10
11     если (DQ16. равно (FinalDQ)):
12         print ( «Критерий ПРОЙДЕН!» )
13         звенит . добавить ( тета )
14     else : print ( «Критерий НЕ ПРОШЕЛ!» )
15
16     print ( "\nFi n al Joint Joint Angles : " , джанглы)
17
18     возвратные звонны

```

Для приложения мы сначала строим двойственный кватернион, представленный коэффициенты из текстового файла, сгенерированного методом записи позы. Затем, мы применяем инверсную кинематику и используем первые полученные углы соединения в качестве вход для движения робота. (Также можно сделать дополнительные критерии для того, чтобы найти оптимальное сочетание углов соединения)

```

1 # Перемещает робота из заданного двойного кватернионного преобразования
2 робота по определению движения (dqcoeff):
3     # Берет коэффициенты du al quater ni и создает
   du al quater ni on
4     DQ de si redpose = DualQuaternion ( Quaternion ( array=dqcoeff
   [0:4]), кватернион (массив=dqcoeff[4:8]))
5
6     # Применения обратной кинематики для расщепления суставных углов
7     Jointangles = getInverseKinematics ( DQ de si redpose )
8
9     print ( "\nЕсть " , лен (сочленения) , " возможные позы ! "
10 );
11
12     # Перемещает робота по шарнирным углам
   ограбить . movej ( угловые соединения [ 0 ] acc = 1, v el = 1, w ai t = F al se )

```

4.5 Проверка результатов

Программа начинается с функции записи позы:

```
*Python 3.7.2 Shell*
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.7.2 (tags/v3.7.2:9a3ffc0492, Dec 23 2018, 23:09:28) [MSC v.1916 64 bit
(AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
RESTART: C:/Users/Diana/Desktop/InterMaths 2017-2019/Year 2 - Mathematical Engi
neering (Czech)/5th Applications of Quaternion in Robot Control/TH3 - Documentat
ion/AQRK.py
Starting AQRK Program...
>>> record_pose()

Current Joint Angles: [0, -1.5707963267948966, 0, -1.5707963267948966, 0, 0]

Deriving Forward Kinematics from Angle-Axis Representation...
Dual Quaternion:([ 1.000 +0.000i -0.000j +0.000k ],< 0.000 +0.000i +0.000j +0.15
2k >)
Dual Quaternion:([ 0.707 -0.000i +0.707j -0.000k ],< 0.000 -0.000i +0.000j +0.24
4k >)
Dual Quaternion:([ 1.000 +0.000i -0.000j +0.000k ],< 0.000 -0.213i -0.112j -0.00
0k >)
Dual Quaternion:([ 0.707 -0.000i +0.707j -0.000k ],< 0.000 -0.085i +0.000j -0.00
0k >)
Dual Quaternion:([ 1.000 +0.000i -0.000j -0.000k ],< 0.000 -0.000i -0.082j +0.00
0k >)
Dual Quaternion:([ 1.000 +0.000i -0.000j +0.000k ],< 0.000 +0.000i +0.000j +0.00
0k >)

Forward Kinematics (by Dual Quaternion):
([ -0.000 +0.000i +1.000j -0.000k ],< 0.000 -0.000i -0.194j +0.694k >)

Initial TCP Coordinates (at zero pose): [ 0. -0.2 0. ]

After Rotation: [ 4.59169004e-50 -2.00000000e-01 2.44929360e-17]
After Translation: [-2.52978802e-17 -3.94250000e-01 6.94150000e-01]

Transformed TCP Coordinates:
[-0. -0.394 0.694]

Record this pose?(Y) |
```

Это базовая поза робота, заданная следующим набором углов:

$$\begin{array}{lll}
 \text{База: } \theta_1 = 0 & \text{Плечо: } \theta_2 = \frac{\pi}{2} & \text{Колено: } \theta_3 = 0 \\
 \text{Запястье 1: } \theta_4 = \frac{\pi}{2} & \text{Запястье 2: } \theta_5 = 0 & \text{Запястье 3: } \theta_6 = 0
 \end{array}$$

Двойственные кватернионы выше получены относительно этих углов вместе с их осью вращения и их соответствующими переводами. Это можно проверить в разделе 4.2.1. Затем они умножаются, и произведение устанавливается как двойной кватернион, представляющий окончательное преобразование. Затем центральная точка рабочего органа преобразуется из координат (0, -0,2, 0) в (0, -0,394, 0,694) относительно базовой рамы.

Глава 4. Применение кватернионов к универсальному роботу UR3

Поза записи функции настроена на использование представления ось-угол. В демонстрационных целях вывод прямой кинематики из матрицы преобразования также можно выполнить, вызвав функцию прямой кинематики, установив суставные углы в качестве параметров и ТМ в качестве режима преобразования. Реализация продемонстрирована ниже:

```
>>> get_forward_kinematics("TM",rob.getj())

Current Joint Angles: [0, -1.5707963267948966, 0, -1.5707963267948966, 0, 0]

Deriving Forward Kinematics from Transformation Matrix...
Computing Transformation Matrix by Denavit-Hartenberg Parameters...

Transformation Matrix for Frame 0 to 1
[[ 1.    -0.    0.    0.   ]
 [ 0.    1.    -0.    -0.   ]
 [ 0.    0.    1.    0.1519]
 [ 0.    0.    0.    1.   ]]
Dual Quaternion:([ 1.000 +0.000i +0.000j +0.000k ],< 0.000 +0.000i -0.000j +0.152k >)

Transformation Matrix for Frame 1 to 2
[[ 6.12323400e-17  1.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [-6.12323400e-17  3.74939946e-33 -1.00000000e+00 -0.00000000e+00]
 [-1.00000000e+00  6.12323400e-17  6.12323400e-17  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.00000000e+00]]
Dual Quaternion:([ 0.500 +0.500i +0.500j -0.500k ],< 0.000 +0.000i -0.000j +0.000k >)

Transformation Matrix for Frame 2 to 3
[[ 1.    -0.    0.    -0.24365]
 [ 0.    1.    -0.    -0.   ]
 [ 0.    0.    1.    0.   ]
 [ 0.    0.    0.    1.   ]]
Dual Quaternion:([ 1.000 +0.000i +0.000j +0.000k ],< 0.000 -0.244i -0.000j +0.000k >)

Transformation Matrix for Frame 3 to 4
[[ 6.123234e-17  1.000000e+00  0.000000e+00 -2.132500e-01]
 [-1.000000e+00  6.123234e-17 -0.000000e+00 -0.000000e+00]
 [ 0.000000e+00  0.000000e+00  1.000000e+00  1.123500e-01]
 [ 0.000000e+00  0.000000e+00  0.000000e+00  1.000000e+00]]
Dual Quaternion:([ 0.707 +0.000i +0.000j -0.707k ],< 0.000 -0.213i -0.000j +0.112k >)

Transformation Matrix for Frame 4 to 5
[[ 1.00000000e+00 -0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  6.12323400e-17 -1.00000000e+00 -8.53500000e-02]
 [ 0.00000000e+00  1.00000000e+00  6.12323400e-17  5.22618022e-18]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.00000000e+00]]
Dual Quaternion:([ 0.707 +0.707i +0.000j +0.000k ],< 0.000 +0.000i -0.085j +0.000k >)

Transformation Matrix for Frame 5 to 6
[[ 1.00000000e+00 -0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  6.12323400e-17  1.00000000e+00  8.19000000e-02]
 [-0.00000000e+00 -1.00000000e+00  6.12323400e-17  5.01492864e-18]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.00000000e+00]]
Dual Quaternion:([ 0.707 -0.707i +0.000j +0.000k ],< 0.000 +0.000i +0.082j +0.000k >)

Forward Kinematics (by Dual Quaternion):
([ 0.000 +0.000i +0.707j -0.707k ],< 0.000 +0.000i -0.194j +0.694k >)

Initial TCP Coordinates (at zero pose): [0.  0.  0.2]

After Rotation: [ 0.  -0.2  0. ]
After Translation: [ 0.  -0.39425  0.69415]

Transformed TCP Coordinates:
[ 0.  -0.394  0.694]
```

Двойственный кватернион, представляющий окончательное преобразование в обоих этих подходах, явно отличается, но преобразованные координаты одинаковы. Обратите внимание, что мы также используем разные начальные координаты TCP.

4.5. Проверка результатов

Функция записи позы сохраняет позы в файл, а функция запуска позы извлекает коэффициенты двойных кватернионов, хранящихся в файле, и генерирует углы, соответствующие этим преобразованиям. Это показано ниже:

```
Python 3.7.2 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
>>> run_poses()

Desired Pose: -0.000 +0.000i +1.000j -0.000k 0.000 -0.000i -0.194j +0.694k

Set of Possible Joint Angles:
[[6.283185307179586, -1.570796340704604, 2.9802322387695312e-08, 4.7123889644920745,
0.0, 0], [6.283185307179586, -1.5707963128851894, -2.9802322387695312e-08, 4.712388996
277305, 0.0, 0], [0.0, -1.5707963407046037, 2.9802322387695312e-08, -1.570796342687512
, 0.0, 0], [0.0, -1.5707963128851894, -2.9802322387695312e-08, -1.5707963109022816, 0.
0, 0]]

Current Joint Angles: [6.283185307179586, -1.570796340704604, 2.9802322387695312e-08,
4.7123889644920745, 0.0, 0]

Deriving Forward Kinematics from Angle-Axis Representation...
Dual Quaternion: ([ -1.000 +0.000i -0.000j +0.000k ], < 0.000 +0.000i +0.000j +0.152k >)
Dual Quaternion: ([ 0.707 -0.000i +0.707j -0.000k ], < 0.000 +0.000i +0.000j +0.244k >)
Dual Quaternion: ([ 1.000 +0.000i -0.000j +0.000k ], < 0.000 -0.213i -0.112j -0.000k >)
Dual Quaternion: ([ -0.707 +0.000i -0.707j +0.000k ], < 0.000 -0.085i +0.000j +0.000k >)
Dual Quaternion: ([ 1.000 +0.000i -0.000j -0.000k ], < 0.000 -0.000i -0.082j +0.000k >)
Dual Quaternion: ([ 1.000 +0.000i -0.000j +0.000k ], < 0.000 +0.000i +0.000j +0.000k >)

Forward Kinematics (by Dual Quaternion):
([ -0.000 +0.000i +1.000j -0.000k ], < 0.000 +0.000i -0.194j +0.694k >)

Initial TCP Coordinates (at zero pose): [ 0. -0.2 0. ]

After Rotation: [-4.8985872e-17 -2.0000000e-01 2.4492936e-17]
After Translation: [-3.60044906e-17 -3.94250000e-01 6.94150000e-01]

Transformed TCP Coordinates:
[-0. -0.394 0.694]

Comparing Dual Quaternions:
Desired Pose:
([ -0.000 +0.000i +1.000j -0.000k ], < 0.000 -0.000i -0.194j +0.694k >)
Current Pose:
([ -0.000 +0.000i +1.000j -0.000k ], < 0.000 +0.000i -0.194j +0.694k >)
PASSED criteria!
```

Было 4 возможных комбинации углов. Далее это проверяется проверкой того, приблизительно ли соответствующее преобразование (представленное двойственным кватернионом) нашему желаемому преобразованию, как также показано выше.

Окончательные результаты в конце даны,

```
Final Joint Angles: [[6.283185307179586, -1.570796340704604, 2.9802322387695312e-08, 4.
7123889644920745, 0.0, 0], [6.283185307179586, -1.5707963128851894, -2.98023223876953
12e-08, 4.712388996277305, 0.0, 0], [0.0, -1.5707963407046037, 2.9802322387695312e-08,
-1.570796342687512, 0.0, 0], [0.0, -1.5707963128851894, -2.9802322387695312e-08, -1.57
07963109022816, 0.0, 0]]

There are 4 possible pose(s)!
>>>
```

Таким образом, все комбинации были допустимы, и все они преобразуют центральную точку инструмента нашего робота в желаемое положение (те же преобразованные координаты TCP), что является решением инверсной кинематики.

Глава 5

Выводы и Рекомендации

5.1 Заключение

В диссертации удалось успешно продемонстрировать использование алгебры кватернионов. в представлении кинематики для робототехнических приложений, в частности, с Универсальный робот UR3 с шестью степенями свободы. Его прямая и инверсная кинематика были получены с использованием принципов кватернионов. Они содержатся в Раздел 4.2. Прямая кинематика с помощью двойных кватернионов и раздел 4.3. Обратный Кинематика двойственными кватернионами. Практическое приложение для программирования было также разработано, как показано в Разделе 4.4.2 Приложение для программирования на Python для подтвердить точность полученной кинематики.

Кроме того, на основании нашего анализа результатов, мы также можем сделать вывод следующие утверждения:

1. Двойные кватернионы представляют собой более компактный способ представления трехмерных преобразований. Таким образом, также предлагает значительное преимущество с точки зрения эффективности хранения.
 - (a) Это связано с тем, что кватернионам требуется всего четыре элемента для представления вращения по сравнению с наиболее часто используемым вращением. матрицы, состоящей из 9 элементов.
 - (b) Для преобразования в трех измерениях, которое включает вращение и перемещение. Однородная матрица преобразования состоит из 16 элементов, из которых четыре элемента тривиальны, а двойственная кватерниону требуется всего 7 элементов для представления того же преобразования.

Глава 5. Выводы и рекомендации

2. Выполнение множественных преобразований с помощью двойных кватернионов также имеет преимущество с точки зрения вычислительной надежности и численной точности, особенно при работе с кинематикой робота.

(a) Объединение преобразований с использованием однородных матриц преобразования включает умножение матриц 4×4 , что включает в себя несколько арифметических и тригонометрических операций, которые могут значительно снизить числовую точность решения.

(b) Выполнение умножения кватернионов сравнимо с полиномиальным умножением, а также включает законы умножения для единиц кватерниона. Это делает его более эффективным, а также более точным в числовом отношении, поскольку требует меньше арифметических и тригонометрических операций.

3. Кватернионы также дают большое преимущество с точки зрения нормализации и легкость выведения.

(a) Кватернионы легче нормализовать, чем матрицы. Матрица вращения должна быть ортогональной и иметь определитель 1. Для кватернионов это должен быть единичный кватернион, что означает, что он должен иметь единичную норму. Это можно просто сделать, разделив все четыре элемента кватернионов на их величину.

(b) Двойные кватернионы легко получить, используя представление оси-угла, где нам нужно только определить отношение текущей оси вращения к базовой системе координат.

4. Двойные кватернионы не подвержены блокировке карданного подвеса.

(a) Хотя это и не обсуждается в этом исследовании, карданная блокировка представляет собой серьезную проблему при работе с вращениями в трехмерном пространстве. Представьте себе три подвеса, которые представляют собой вращения вокруг каждой трех осей; таким образом, представляет три степени свободы. Они определяются как крен, тангаж и рыскание. Это происходит, когда внешний и внутренний шарниры выравниваются друг с другом и теряют одну степень свободы. Это связано с тем, что вращение, которое может совершать любой из этих двух подвесов, теперь считается одинаковым. Известно, что углы Эйлера подвержены этому редкому

(b) Известно, что кватернионы, как и матрицы вращения, не подвержены карданному замку. Это связано с тем, что они представляют ориентацию как значение, а не три отдельных и связанных значения.

5. Простота представления кинематики робота с помощью двойных кватернионов зависит от типа получаемой кинематики и кинематической структуры робота.

(а) Для прямой кинематики целесообразно получить повороты с помощью подхода ось-угол по сравнению с исходным из матрицы вращения, а затем преобразовать его в единичные кватернионы. Таким образом, явно будет выполняться меньше операций по сравнению с традиционным однородным преобразованием.

(б) Для инверсной кинематики трудности вывода формул для углов все еще сохраняются в дуальных кватернионах. Как правило, это зависит от кинематической структуры робота, как в нашем случае. Это относится к взаимосвязи преобразования, которое может быть выполнено каждым соединением, с окончательным преобразованием. В нашем случае нам пришлось разделить преобразования на три. Однако в некоторых случаях может случиться так, что некоторые формулы уже могут быть получены только из уравнений, полученных в результате окончательного

преобразования. (с) Чтобы по-прежнему применять концепцию кватернионов в инверсной кинематике, нам также пришлось проанализировать и вычислить несколько уравнений, которые могут представлять преобразования, выполняемые каждым суставом. Это делает его более утомительным по сравнению с обычным соглашением, которое обычно выполняется с использованием геометрического под

Надеемся, что эти преимущества будут признаны достаточными для более широкого применения двойных кватернионов не только в робототехнике и компьютерной графике, но и в других областях, связанных с работой в трехмерном пространстве.

5.2 Рекомендация

Для будущих исследований рекомендуется найти лучший и более эффективный способ представления кинематики робота, особенно для инверсной кинематики. Для универсального робота UR3 решение инверсной кинематики можно дополнительно отфильтровать, рассматривая только определенный диапазон движений.

Определенные условия также могут быть применены для определения оптимального решения, которое даст желаемую позу. Поскольку это исследование было сосредоточено только на применении кватернионов в кинематике роботов, его можно распространить на его применение в управлении роботами в целом. Это может включать дополнительный этап выполнения кватернионной интерполяции. Это способствует нахождению оптимального пути траектории движения робота. Это будет полезно для будущих исследований, поскольку это также одно из полезных и хорошо известных приложений кватернионов.

Приложения

Приложение

Универсальный робот UR3

Технические характеристики

UR3

Производительность	
Повторяемость	±0,1 мм / ±0,0039 дюйма (4 мила)
Диапазон температуры окружающей среды	0-50° *
Потребляемая мощность	Мин. 90 Вт, типичная 125 Вт, макс. 250 Вт
Совместная работа	15 расширенных регулируемых функций безопасности. Функция безопасности, одобренная Tü V NORD Протестировано в соответствии с: EN ISO 13849:2008 PL d

Спецификация	
Полезная нагрузка	3 кг / 6,6 фунта
Достигать	500 мм / 19,7 дюйма
Степени свободы	6 вращающихся соединений
Программирование	Графический пользовательский интерфейс Polyscope на 12-дюймовом сенсорном экране с креплением

Движение		
Манипулятор робота с движением оси	Рабочий диапазон	Максимальная скорость
База	± 360°	± 180°/сек.
Плечо	± 360°	± 180°/сек.
Локоть	± 360°	± 180°/сек.
Запястье 1	± 360°	± 360°/сек.
Запястье 2	± 360°	± 360°/сек.
Запястье 3	Бесконечный	±360°/сек.
Типичный инструмент		1 м/сек. / 39,4 дюйма/сек.

Функции		
IP-классификация	IP64	
Чистое помещение класса ISO	5	
Шум	70 дБ	
Монтаж робота	Любой	
порты ввода/вывода	Цифровой вход	2
	Цифровой выход	2
	Аналоговый вход	2
	Аналоговый выход	0
Блок питания ввода-вывода в инструменте	12 В/24 В 600 мА в инструменте	

Физический	
След	Ø128 мм
Материалы	Алюминий, полипропилен
Тип разъема инструмента	M8
Длина кабеля манипулятора робота	6 м / 236 дюймов
Вес с кабелем	11 кг/24,3 фунта

* Робот может работать в диапазоне температур 0-50°C. При высокой постоянной скорости соединения температура окружающей среды снижается.

БЛОК УПРАВЛЕНИЯ

Функции		
IP-классификация	IP20	
Чистое помещение класса ISO	6	
Шум	<65 дБ(А)	
порты ввода/вывода	Цифровой вход	16
	Цифровой выход	16
	Аналоговый вход	2
	Аналоговый выход	2
Блок питания ввода/вывода	24В 2А	
Коммуникация	TCP/IP 100 Мбит, Modbus TCP, Профинет, EthernetIP	
Источник питания	100-240 В переменного тока, 50-60 Гц	
Диапазон температуры окружающей среды	0-50°	
Физический		
Размер блока управления (ШxВxГ)	475 мм x 423 мм x 268 мм /	
	18,7 x 16,7 x 10,6 дюйма	
Масса	15 кг / 33,1 фунта	
Материалы	Сталь	

УЧИТЕ КУЛОН

Функции	
IP-классификация	IP20
Физический	
Материалы	Алюминий, полипропилен
Масса	1,5 кг / 3,3 фунта
Длина кабеля	4,5 м / 177 дюймов



Приложение Б

Продукты трансформации для База на запястье 3

В этой части показаны продукты трансформации кинематики робота UR3. структура, начиная с кадра 1 (основа) до кадра 6 (запястье 3).

Мы определяем дуальное произведение кватернионов M_i как:

$$M_i = Q_i \quad M_{i+1}, \text{ где } 1 \leq i \leq 6$$

$$M_6 = Q_6$$

$$M_5 = Q_5 \quad M_6 = Q_5 \quad Q_6$$

$$M_4 = Q_4 \quad M_5 = Q_4 \quad Q_5 \quad Q_5$$

$$M_3 = Q_3 \quad M_4 = Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6$$

$$M_2 = Q_2 \quad M_3 = Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6$$

$$M_1 = Q_1 \quad M_2 = Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6$$

Определим дуальное произведение кватернионов N_i следующим образом:

$$N_{i+1} = Q \quad 1_{\text{я}} \quad N_i, \text{ где } 1 \leq i \leq 6$$

$$N_1 = QFK = ([w, < a, b, c >], < x, y, z >)$$

$$N_2 = Q \quad 1_1 \quad N_1 = Q \quad 1 \quad 1 \quad KFK$$

$$N_3 = Q \quad 1_2 \quad N_2 = Q \quad 1 \quad 2 \quad Q \quad 1 \quad 1 \quad KFK$$

$$N_4 = Q \quad 1_3 \quad N_3 = Q \quad 1 \quad 3 \quad Q \quad 2 \quad 1 \quad Q \quad 1 \quad 1 \quad KFK$$

$$N_5 = Q \quad 1_4 \quad N_4 = Q \quad 1 \quad 4 \quad Q \quad 3 \quad 1 \quad Q \quad 2 \quad 1 \quad Q \quad 1 \quad 1 \quad KFK$$

$$N_6 = Q \quad 1_5 \quad N_5 = Q \quad 1 \quad 5 \quad Q \quad 4 \quad 1 \quad Q \quad 3 \quad 1 \quad Q \quad 2 \quad 1 \quad Q \quad 1 \quad 1 \quad KFK$$

Приложение В. Продукты трансформации для Base toWrist 3

Продукты трансформации из основания в запястье 3 (M6 = N6)

$$M6 = ([M61 + M62i + M63j + M64k], < M65i + M66j + M67k >)$$

$$N6 = ([N61 + N62i + N63j + N64k], < N65i + N66j + N67k >)$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & & \underline{M61 = H61} & & \\
 \text{потому что} & \frac{\theta_6}{2} & = \text{ш} & \text{потому что} & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & \text{потому что} & \frac{\theta_1}{2} & \frac{\theta_5}{2} & (Б.1) \\
 & & & & & & & & \\
 & & + \text{грех} & & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{грех} & \frac{\theta_1 + \theta_5}{2} \\
 & & & & & & & & \\
 & & \text{в грех} & & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{потому что} & \frac{\theta_1 + \theta_5}{2} \\
 & & & & & & & & \\
 & & + \text{с} & \text{потому что} & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{грех} & \frac{\theta_1}{2} & \frac{\theta_5}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & & \underline{M62 = H62} & & \\
 0 = & \text{ш} & \text{грех} & & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{грех} & \frac{\theta_1 + \theta_5}{2} & (Б.1.2) \\
 & & & & & & & & \\
 & & + \text{кос} & & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{потому что} & \frac{\theta_1}{2} & \frac{\theta_5}{2} \\
 & & & & & & & & \\
 & & + \text{в} & \text{потому что} & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{грех} & \frac{\theta_1}{2} & \frac{\theta_5}{2} \\
 & & & & & & & & \\
 & & + \text{с} & \text{грех} & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{потому что} & \frac{\theta_1 + \theta_5}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & & \underline{M63 = H63} & & \\
 \text{грех} & \frac{\theta_6}{2} & = \text{ш} & \text{грех} & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{потому что} & \frac{\theta_1 + \theta_5}{2} & (Б.3) \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{грех} & \frac{\theta_1}{2} & \frac{\theta_5}{2} \\
 & & \text{а} & \text{потому что} & & & & & \\
 & & & & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{потому что} & \frac{\theta_1}{2} & \frac{\theta_5}{2} \\
 & & + \text{в} & \text{потому что} & & & & & \\
 & & & & \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} & & \text{грех} & \frac{\theta_1 + \theta_5}{2}
 \end{array}$$

$$\underline{M64 = H64}$$

$$0 = w, \text{ потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta_1 - \theta_5}{2} \quad (Б.4)$$

$$\text{грех} \quad \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \quad \text{потому что} \quad \frac{\theta_1 + \theta_5}{2}$$

$$b \text{ грех} \quad \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta_1 + \theta_5}{2}$$

$$+ c \text{ потому что} \quad \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \quad \text{потому что} \quad \frac{\theta_1 - \theta_5}{2}$$

$$\underline{M65 = H65}$$

$$\begin{aligned} 0 = & d_1 \cos \theta_5 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - d_4 \sin \theta_5 - a_2 \cos (\theta_3 + \theta_4) \cos \theta_5 \quad (Б.5) \\ & a_3 \cos \theta_4 \cos \theta_5 + x [\cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos \theta_5 + \sin \theta_1 \sin \theta_5] \\ & + y [\cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos \theta_5 \sin \theta_1 - \cos \theta_1 \sin \theta_5] \\ & + z \cos \theta_5 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{aligned}$$

$$\underline{M66 = H66}$$

$$\begin{aligned} 0 = & d_1 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin \theta_5 + d_4 \cos \theta_5 - a_2 \cos (\theta_3 + \theta_4) \sin \theta_5 \quad (Б.6) \\ & a_3 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + x [\cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin \theta_5 - \cos \theta_5 \sin \theta_1] \\ & + y [\cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin \theta_1 \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cos \theta_5] \\ & + z \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin \theta_5 + d_6 \end{aligned}$$

$$\underline{M67 = H67}$$

$$\begin{aligned} 0 = & d_1 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - x \cos \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - y \sin \quad (Б.7) \\ & \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + z \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ & + a_2 \sin (\theta_3 + \theta_4) + a_3 \sin \theta_4 + d_5 \end{aligned}$$

Продукты трансформации из основания в запястье 3 (M5 = N5)

$$M5 = ([M51 + M52i + M53j + M54k], < M55i + M56j + M57k >)$$

$$N5 = ([N51 + N52i + N53j + N54k], < N55i + N56j + N57k >)$$

$$M51 = H51$$

$$\begin{aligned} \text{потому что } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 6}{2} &= \text{ш потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &+ \text{грех } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &\text{в потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &+ \text{с грех } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \end{aligned} \quad (B.8)$$

$$M52 = H52$$

$$\begin{aligned} \text{грех } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 6}{2} &= \text{ш грех } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &+ \text{кос } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &+ \text{b грех } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &+ \text{с потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \end{aligned} \quad (B.9)$$

$$M53 = H53$$

$$\begin{aligned} \text{потому что } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 6}{2} &= \text{ш потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &\text{грех } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &+ \text{b потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \\ &+ \text{с грех } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \end{aligned} \quad (B.10)$$

$$\underline{M54 = H54}$$

$$\begin{aligned} r_{\text{pex}} \frac{\theta_5}{2} & \stackrel{\text{потому что}}{=} \frac{\theta_6}{2} = \omega r_{\text{pex}} \frac{\theta_1}{2} \stackrel{\text{потому что}}{=} \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \\ & \stackrel{\text{а потому что}}{=} \frac{\theta_1}{2} r_{\text{pex}} \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \\ & \stackrel{\text{b r}_{\text{pex}}}{=} \frac{\theta_1}{2} r_{\text{pex}} \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \\ & \stackrel{\text{+c потому что}}{=} \frac{\theta_1}{2} \stackrel{\text{потому что}}{=} \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

$$\underline{M55 = H55}$$

$$\begin{aligned} d_6 \sin \theta_5 = & d_1 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - a_2 \cos (\theta_3 + \theta_4) - a_3 \cos \theta_4 \\ & + x \cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + y \sin \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ & + z \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

$$\underline{M56 = H56}$$

$$d_6 \cos \theta_5 = y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 + d_4 \quad (\text{Б.13})$$

$$\underline{M57 = H57}$$

$$\begin{aligned} 0 = & d_1 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + d_5 + a_2 \sin (\theta_3 + \theta_4) + a_3 \sin \theta_4 - x \cos \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \\ & \theta_4) - y \sin \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ & + z \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

Продукты трансформации из основания в запястье 3 (M4 = N4)

$$M4 = ([M41 + M42i + M43j + M44k], < M45i + M46j + M47k >)$$

$$N4 = ([N41 + N42i + N43j + N44k], < N45i + N46j + N47k >)$$

$$M41 = H41$$

$$\begin{aligned}
 & \text{потому что } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 4 + \theta 6}{2} = \text{ш потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \quad (Б.15) \\
 & + \text{грех} \quad \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \\
 & \text{в потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \\
 & + \text{с грех} \quad \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3}{2}
 \end{aligned}$$

$$M42 = H42$$

$$\begin{aligned}
 & \text{грех} \quad \frac{\theta 5}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta 4}{2} \quad \frac{\theta 6}{2} = \text{ш грех} \quad \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \quad (Б.16) \\
 & + \text{кос} \quad \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \\
 & + \text{в грех} \quad \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \\
 & + \text{с потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta 2 + \theta 3}{2}
 \end{aligned}$$

$$M43 = H43$$

$$\begin{aligned}
 & \text{потому что } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta 4 + \theta 6}{2} = \text{ш потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \quad (Б.17) \\
 & \text{грех} \quad \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \\
 & + \text{в потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3}{2} \\
 & + \text{с грех} \quad \frac{\theta 1}{2} \quad \text{грех} \quad \frac{\theta 2 + \theta 3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\underline{M44 = H44}$$

$$\begin{aligned} \text{гpex} \frac{\theta_5}{2} \text{ потому что } \frac{\theta_4}{2} \frac{\theta_6}{2} &= \text{ш гpex} \frac{\theta_1}{2} \text{ потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \\ &\quad \text{а потому что } \frac{\theta_1}{2} \text{ гpex} \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \\ &\quad \text{b гpex} \frac{\theta_1}{2} \text{ гpex} \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \\ &\quad \text{+с потому что } \frac{\theta_1}{2} \text{ потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \end{aligned} \quad (Б.18)$$

$$\underline{M45 = H45}$$

$$d_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + d_5 \sin \theta_4 = d_1 \sin (\theta_2 + \theta_3) - a_2 \cos \theta_3 - a_3 + x \cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) \quad (Б.19)$$

$$+ y \sin \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3)$$

$$+ z \sin (\theta_2 + \theta_3)$$

$$\underline{M46 = H46}$$

$$d_6 \cos \theta_5 = y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 + d_4 \quad (Б.20)$$

$$\underline{M47 = H47}$$

$$\begin{aligned} d_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 - d_5 \cos \theta_4 &= d_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) + a_2 \sin \theta_3 - x \cos \theta_1 \sin (\theta_2 + \\ &\quad \theta_3) \\ &\quad y \sin \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad + z \cos (\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (Б.21)$$

 Продукты трансформации из основания в запястье 3 ($M3 = N3$)

$$M3 = ([M31 + M32i + M33j + M34k], < M35i + M36j + M37k >)$$

$$N3 = ([N31 + N32i + N33j + N34k], < N35i + N36j + N37k >)$$

$$M31 = H31$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{потому что} & \frac{\theta 5}{2} & \text{потому что} & \frac{\theta 3 + \theta 4 + \theta 6}{2} & = \text{ш потому что} & \frac{\theta 1}{2} & \frac{\theta 2}{2} & (5.22) \\
 & & & & + \text{грех} & \frac{\theta 1}{2} & \text{грех} & \frac{\theta 2}{2} \\
 & & & & \text{в потому что} & \frac{\theta 1}{2} & \text{грех} & \frac{\theta 2}{2} \\
 & & & & + \text{с грех} & \frac{\theta 1}{2} & \text{потому что} & \frac{\theta 2}{2}
 \end{array}$$

$$M32 = H32$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{грех} & \frac{\theta 5}{2} & \text{грех} & \frac{\theta 3 + \theta 4 - \theta 6}{2} & = \text{ш грех} & \frac{\theta 1}{2} & \text{грех} & \frac{\theta 2}{2} & (5.23) \\
 & & & & + \text{кос} & \frac{\theta 1}{2} & \text{потому что} & \frac{\theta 2}{2} \\
 & & & & + \text{b грех} & \frac{\theta 1}{2} & \text{потому что} & \frac{\theta 2}{2} \\
 & & & & + \text{с потому что} & \frac{\theta 1}{2} & \text{грех} & \frac{\theta 2}{2}
 \end{array}$$

$$M33 = H33$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{потому что} & \frac{\theta 5}{2} & \text{грех} & \frac{\theta 3 + \theta 4 + \theta 6}{2} & = \text{ш потому что} & \frac{\theta 1}{2} & \text{грех} & \frac{\theta 2}{2} & (5.24) \\
 & & & & \text{грех} & \frac{\theta 1}{2} & \text{потому что} & \frac{\theta 2}{2} \\
 & & & & + \text{в потому что} & \frac{\theta 1}{2} & \text{потому что} & \frac{\theta 2}{2} \\
 & & & & + \text{с грех} & \frac{\theta 1}{2} & \text{грех} & \frac{\theta 2}{2}
 \end{array}$$

$$\underline{M34 = H34}$$

$$\begin{aligned} \text{грех} \frac{\theta_5}{2} \text{ потому что} \frac{\theta_3 + \theta_4 - \theta_6}{2} = \text{ш грех} \frac{\theta_1}{2} \text{ потому что} \frac{\theta_2}{2} \quad (5.25) \\ \text{а потому что} \frac{\theta_1}{2} \text{ грех} \frac{\theta_2}{2} \\ \text{b грех} \frac{\theta_1}{2} \text{ грех} \frac{\theta_2}{2} \\ \text{+с потому что} \frac{\theta_1}{2} \text{ потому что} \frac{\theta_2}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{M35 = H35}$$

$$\begin{aligned} d_6 \cos(\theta_3 + \theta_4) \sin \theta_5 + d_5 \sin(\theta_3 + \theta_4) + a_3 \cos \theta_3 = d_1 \sin \theta_2 \quad a_2 + x \quad (5.26) \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ + y \sin \theta_1 \cos \theta_2 + z \sin \theta_2 \end{aligned}$$

$$\underline{M36 = H36}$$

$$d_6 \cos \theta_5 \quad d_4 = y \cos \theta_1 \quad x \sin \theta_1 \quad (5.27)$$

$$\underline{M37 = H37}$$

$$\begin{aligned} d_6 \sin(\theta_3 + \theta_4) \sin \theta_5 \quad d_5 \cos(\theta_3 + \theta_4) + a_3 \sin \theta_3 = \quad (5.28) \\ d_1 \cos \theta_2 \quad x \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ y \sin \theta_1 \sin \theta_2 + z \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Приложение В. Продукты трансформации для Base toWrist 3

Продукты трансформации из основания в запястье 3 (M2 = N2)

$$M2 = ([M21 + M22i + M23j + M24k], < M25i + M26j + M27k >)$$

$$N2 = ([N21 + N22i + N23j + N24k], < N25i + N26j + N27k >)$$

$$M21 = H21$$

$$\text{потому что } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4 + \theta 6}{2} = \text{ш потому что } \frac{\theta 1}{2} + \text{с грех } \frac{\theta 1}{2} \quad (Б.29)$$

$$M22 = H22$$

$$\text{грех } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \quad \frac{\theta 6}{2} = \text{потому что } \frac{\theta 1}{2} + \text{б грех } \frac{\theta 1}{2} \quad (Б.30)$$

$$M23 = H23$$

$$\text{потому что } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4 + \theta 6}{2} = - \text{грех } \frac{\theta 1}{2} + \text{б потому что } \frac{\theta 1}{2} \quad (Б.31)$$

$$M24 = H24$$

$$\text{грех } \frac{\theta 5}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}{2} \quad \frac{\theta 6}{2} = \text{ш грех } \frac{\theta 1}{2} + \text{с cos } \frac{\theta 1}{2} \quad (Б.32)$$

$$M25 = H25$$

$$d6 \cos (\theta 2 + \theta 3 + \theta 4) \sin \theta 5 + d5 \sin (\theta 2 + \theta 3 + \theta 4) + a3 \cos \quad (Б.33)$$

$$(\theta 2 + \theta 3) + a2 \cos \theta 2 = x \cos \theta 1 + y \sin \theta 1$$

$$M26 = H26$$

$$d6 \cos \theta 5 \quad d4 = y \cos \theta 1 \quad x \sin \theta 1 \quad (Б.34)$$

$$M27 = H27$$

$$d6 \sin (\theta 2 + \theta 3 + \theta 4) \sin \theta 5 \quad d5 \cos (\theta 2 + \theta 3 + \theta 4) + a3 \sin \quad (Б.35)$$

$$(\theta 2 + \theta 3) + a2 \sin \theta 2 = \quad d1 + z$$

Продукты трансформации из основания в запястье 3 ($M1 = N1$)

$$M1 = ([M11 + M12i + M13j + M14k], < M15i + M16j + M17k >)$$

$$N1 = ([N11 + N12i + N13j + N14k], < N15i + N16j + N17k >)$$

$$\underline{M11 = H11}$$

$$\text{потому что } \frac{\theta_1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6}{2} = \text{ш} \quad (Б.36)$$

$$\underline{M12 = H12}$$

$$\text{грех } \frac{\theta_1 + \theta_5}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \quad \theta_6 = a \quad (Б.37)$$

$$\underline{M13 = H13}$$

$$\text{потому что } \frac{\theta_1 + \theta_5}{2} \quad \text{грех } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6}{2} = b \quad (Б.38)$$

$$\underline{M14 = H14}$$

$$\text{грех } \frac{\theta_5}{2} \quad \frac{\theta_1}{2} \quad \text{потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} \quad \theta_6 = c \quad (Б.39)$$

$$\underline{M15 = H15}$$

$$\begin{aligned} d6 \cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin \theta_5 + d6 \cos \theta_5 \sin \theta_1 + d4 \sin \theta_1 + d5 \\ \cos \theta_1 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + a3 \cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) \\ + a2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 = x \end{aligned} \quad (Б.40)$$

$$\underline{M16 = H16}$$

$$\begin{aligned} d6 \cos \theta_1 \cos \theta_5 \quad d4 \cos \theta_1 + d6 \cos \theta_1 + d6 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin \\ \theta_1 \sin \theta_5 + d5 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + a3 \cos (\theta_2 + \theta_3) + a2 \cos \theta_2 = y \end{aligned} \quad (Б.41)$$

$$\underline{M17 = H17}$$

$$\begin{aligned} d6 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \sin \theta_5 \quad d5 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + a3 \sin (\theta_2 + \theta_3) \\ + a2 \sin \theta_2 + d1 = z \end{aligned} \quad (Б.42)$$

Приложение С

Продукты трансформации для Плечо к запястью 1

В этой части показаны продукты трансформации кинематической структуры робота UR3, начиная с кадра 2 (плечо) и заканчивая кадром 4 (запястье 1).

Мы определяем дуальное произведение кватернионов M_i как:

$$M_i = Q_i \quad M_{i+1}, \text{ где } 2 \leq i \leq 4$$

$$M_4 = Q_4$$

$$M_3 = Q_3 \quad M_4 = Q_3 \quad Q_4$$

$$M_2 = Q_2 \quad M_3 = Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4$$

Определим дуальное произведение кватернионов N_i следующим образом:

$$N_{i+1} = Q_1 \quad N_i, \text{ где } 2 \leq i \leq 4$$

$$N_2 = Q_2 = 4[w_4, < a_4, b_4, c_4 >, < x_4, y_4, z_4 >]$$

$$N_3 = Q_1 \quad N_2 = Q_1 \quad 2Q_2 \quad 4$$

$$N_4 = Q_1 \quad N_3 = Q_1 \quad 3Q_1 \quad 2Q_2 \quad 4$$

Приложение С. Продукты для трансформации плеча в запястье 1 ---

Продукты трансформации с плеча на запястье 1 ($M_4 = N_4$) ---

$$M_4 = ([M_{41} + M_{42}i + M_{43}j + M_{44}k], < M_{45}i + M_{46}j + M_{47}k >)$$

$$N_4 = ([N_{41} + N_{42}i + N_{43}j + N_{44}k], < N_{45}i + N_{46}j + N_{47}k >)$$

$$\underline{M_{41} = H_{41}}$$

$$\text{потому что } \frac{\theta_4}{2} = w_4 \cos \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \quad b_4 \text{ грех } \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \quad (C.1)$$

$$\underline{M_{42} = H_{42}}$$

$$0 = a_4 \text{ потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} + c_4 \text{ грех } \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \quad (C.2)$$

$$\underline{M_{43} = H_{43}}$$

$$\text{грех } \frac{\theta_4}{2} = w_4 \text{ грех } \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} + b_4 \text{ кос } \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \quad (C.3)$$

$$\underline{M_{44} = H_{44}}$$

$$0 = a_4 \sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} + c_4 \text{ кос } \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \quad (C.4)$$

$$\underline{M_{45} = H_{45}}$$

$$0 = a_2 \cos \theta_3 \quad a_3 + x_4 \cos (\theta_2 + \theta_3) + z_4 \sin (\theta_2 + \theta_3) \quad (C.5)$$

$$\underline{M_{46} = H_{46}}$$

$$0 = y_4 + d_4 \quad (C.6)$$

$$\underline{M_{47} = H_{47}}$$

$$0 = a_2 \sin \theta_3 \quad x_4 \sin (\theta_2 + \theta_3) + z_4 \cos (\theta_2 + \theta_3) \quad (C.7)$$

Продукты трансформации плеча в запястье 1 ($M3 = N3$)

$$M3 = ([M31 + M32i + M33j + M34k], < M35i + M36j + M37k >)$$

$$N3 = ([N31 + N32i + N33j + N34k], < N35i + N36j + N37k >)$$

$$M31 = H31$$

$$\text{потому что } \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} = w_4 \cos \frac{\theta_2}{2} + b_4 \operatorname{rpex} \frac{\theta_2}{2} \quad (C.8)$$

$$M32 = H32$$

$$0 = a_4 \text{ потому что } \frac{\theta_2}{2} + c_4 \operatorname{rpex} \frac{\theta_2}{2} \quad (C.9)$$

$$M33 = H33$$

$$\operatorname{rpex} \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} = w_4 \operatorname{rpex} \frac{\theta_2}{2} + b_4 \cos \frac{\theta_2}{2} \quad (C.10)$$

$$M34 = H34$$

$$0 = a_4 \sin \frac{\theta_2}{2} + c_4 \cos \frac{\theta_2}{2} \quad (C.11)$$

$$M35 = H35$$

$$a_3 \cos \theta_3 = a_2 + x_4 \cos \theta_2 + z_4 \sin \theta_2 \quad (C.12)$$

$$M36 = H36$$

$$d_4 = y_4 \quad (C.13)$$

$$M37 = H37$$

$$a_3 \sin \theta_3 = x_4 \sin \theta_2 + z_4 \cos \theta_2 \quad (C.14)$$

Приложение С. Продукты для трансформации плеча в запястье 1

Продукты трансформации плеча в запястье 1 ($M2 = N2$)

$$M2 = ([M21 + M22i + M23j + M24k], < M25i + M26j + M27k >)$$

$$N2 = ([N21 + N22i + N23j + N24k], < N25i + N26j + N27k >)$$

$$\underline{M21 = H21}$$

$$\text{потому что } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} = \psi_4 \quad (C.15)$$

$$\underline{M22 = H22}$$

$$0 = a_4 \quad (C.16)$$

$$\underline{M23 = H23}$$

$$\text{грех } \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} = b_4 \quad (C.17)$$

$$\underline{M24 = H24}$$

$$0 = c_4 \quad (C.18)$$

$$\underline{M25 = H25}$$

$$a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \cos \theta_2 = x_4 \quad (C.19)$$

$$\underline{M26 = H26}$$

$$d_4 = y_4 \quad (C.20)$$

$$\underline{M27 = H27}$$

$$a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 = z_4 \quad (C.21)$$

Приложение D

Список таблиц и рисунков

Список таблиц

3.1 Таблица умножения кватернионов.			
4.1 UR3 Параметры Денавита-Хартенберга .			
4.2 Параметры Денавита-Хартенберга для UR3 из [20].	.		

список рисунков

2.1 Векторное представление $z = a + ib$ с $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Im} z = b$.	17
2.2 Представление комплексного числа $z = a + ib$ в полярных координатах длиной r и углом θ .	17
2.3 Комплексное сопряжение.	18
2.4 Сложение комплексных чисел $3 + 2i$ и $1 + 3i$.	20
2.5 Умножение комплексных чисел z_1 и z_2 .	21
2.6 Умножение комплексных чисел 1 и i .	21
2.7 Умножение wz , где $z = i$.	22
3.1 Портрет сэра Уильяма Роуэна Гамильтона ¹ .	24
3.2 Мемориальная доска, посвященная открытию кватернионов ² .	24
3.3 Схема умножения кватернионов.	27
3.4 Вращение вектора $(2, 1, 1)$ из [22].	35
4.1 Универсальный робот UR3.	41
4.2 Кинематическая структура UR3 в нулевом положении ($\theta_1, 2, 3, 4, 5, 6 = 0$) [3].	42
4.3 Координатные системы UR3 ($\theta_1, 2, 3, 4, 5, 6 = 0$) из [11].	47
4.4 Структура робота UR3 от кадра 1 до кадра 5 (из [3]).	48
4.5 Перевод из кадра 6 (запястье 3) в кадр 5 (запястье 2)[3].	49
4.6 3R-планарный манипулятор, образованный соединениями UR3 со 2 по 4 из [3].	53
4.7 UR3 DH-параметры Диаграмма из [20].	57

Библиография

- [1] Кинематика и математические основы.
Робототехника: <https://www.edx.org/course/robotics-kinematics-mathematical-pennx-robo1x>.
- [2] М. Ар. Наследие универсальных роботов Россум.
<https://www.denofgeek.com/us/culture/279175/the-legacy-of-rossums> универсальные роботы, 2019 г.
- [3] Р. Андерсен. Кинематика UR5. Технический отчет, Ольборгский университет город, 2018.
- [4] Ю. Айдын и С. Кучук. Обратная кинематика на основе кватернионов для промышленных роботов-манипуляторов с запястьем Эйлера. 2006 Международный IEEE Конференция по мехатронике, ICM, 2006.
- [5] Дж. Барбик. Кватернионы и вращения. Технический отчет, Университет Южная Калифорния, 2011 год.
- [6] М. Бен-Ари. Учебник по углам Эйлера и кватернионам. 2018.
- [7] З. Чен и Дж. Хун. Применение Quaternion в управлении роботами.
10-й трехлетний Всемирный конгресс IFAC, 1987 г.
- [8] Дж. Дибель. Представление отношения: углы Эйлера, единичные кватернионы и Векторы вращения. Технический отчет, Стэнфордский университет, 2006 г.
- [9] PR Эванс. Вращения и матрицы вращения. Технический отчет, MRC Лаборатория молекулярной биологии, 2001.
- [10] В. Р. Гамильтон. Элементы кватернионов. Издательство Кембриджского университета, 1866 г.
- [11] К. Хокинс. Аналитическая инверсная кинематика для Universal Robots UR 5/UP-10 Арм. Технический отчет, 2013 г.

- [12] А. О. Хилл. Кинематика: почему роботы двигаются именно так, как они. <https://blog.robotiq.com/kinematics-why-robots-move-like-they>, 2015.
- [13] Дж. Уэрта. Знакомство с кватернионами. Технический отчет, Фуллертонский колледж, 2010 г.
- [14] Б. Кенрайт. Руководство для начинающих по двойным кватернионам: что это такое, как они работают и как их использовать для 3D. Технический отчет, Ньюкаслский университет, Великобритания.
- [15] С. Кучук и З. Бингуль. Кинематика роботов: прямая и обратная кинематика. Технический отчет, Университет Кокаэлл, 2006 г.
- [16] С. ЛаВаль. Алгоритмы планирования - однородная матрица преобразования. <http://planning.cs.uiuc.edu/node111.html>, 2006 г.
- [17] А. Лериос. Вращения и кватернионы. Технический отчет, Стэнфордский университет версия, 1995.
- [18] Дж. Э. Марсден и М. Дж. Хоффман. Базовый комплексный анализ. WHFreeman & Co Ltd, Нью-Йорк, США, 3-е издание, 1999 г.
- [19] Матарич. Учебник по робототехнике. Массачусетский Институт Технологий, Лондон, Англия, 2007 год.
- [20] У. Роботы. Параметры для расчетов кинематики и динамики. <https://www.universal-robots.com/how-tos-and-faqs/faq/ur-faq/parameters-for-calculations-of-kinematics-and-dynamics-45257/>.
- [21] Б. Сицилиано и О. Хатиб. Справочник Springer по робототехнике. Спрингер, Берлин, 2-е издание, 2016 г.
- [22] М. Сунарди. 3D кинематика. Технический отчет, 2006 г.
- [23] Теккоцу. Кинематика. <http://www.tekkotsu.org/Kinematics.html>, 2010.
- [24] Дж. Войт. Алгебры кватернионов, том 0.9.14. 2018.
- [25] А. Ватт и М. Ватт. Продвинутое методы анимации и рендеринга. ACM Press, Нью-Йорк, США, 1992.