

Eine Klasse von Differentialgleichungen zur Verknüpfung
3. September 2014
der kinematischen Optimalität von Bewegungen mit der
geometrischen Invarianz

Felix Poljakow $\ddot{y}$

Abstrakt

Neurowissenschaftliche Studien zur Ausführung der zeichnungsähnlichen Bewegungen analysieren normalerweise die neuronale Darstellung entweder geometrischer (z. B. Richtung, Form) oder zeitlicher (z. B. Geschwindigkeit) Merkmale von Trajektorien und nicht die Darstellung der Trajektorie als Ganzes. In dieser Arbeit geht es um mathematische Ideen hinter der Aufteilung und Zusammenführung geometrischer und zeitlicher Merkmale, die biologische Bewegungen charakterisieren. Bewegungsprimitive erleichtern angeblich die Effizienz der Bewegungsdarstellung im Gehirn und erfüllen verschiedene Kriterien für biologische Bewegungen, darunter kinematische Glätte und geometrische Einschränkungen. Kriterium für die „maximale Glätte“ von Trajektorien beliebiger Ordnung n wird verwendet, $n = 3$ ist der Fall des Minimum-Jerk-Modells. Ich leite eine Klasse von Differentialgleichungen her, denen Bewegungspfade gehorchen, für die maximal glatte Trajektorien n -ter Ordnung eine konstante Geschwindigkeit haben. Die Geschwindigkeit ist unter einer Klasse geometrischer Transformationen unveränderlich. Die Lösungen der Gleichungen dienen vermutlich als Kandidaten für geometrische Bewegungsprimitive. Die Geschwindigkeit ist hier definiert als die Geschwindigkeit, mit der geometrische Messungen entlang des gezeichneten Pfads akkumuliert werden. Als geometrisches Maß k Beispielsweise entspricht das Zwei-Drittel-Potenzgesetz-Modell einer stückweise konstanten Geschwindigkeit des sich ansammelnden gleichaffinen Lichtbogens. Die abgeleitete Klasse der Differentialgleichungen besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil ist für alle geometrischen Parametrisierungen des Pfades identisch. Der zweite Teil ist parametrisierungsspezifisch und wird benötigt, um festzustellen, ob eine Lösung des ersten Teils tatsächlich eine Kurve darstellt. Entsprechende Gegenbeispiele werden bereitgestellt. Gleichungen in verschiedenen Geometrien in der Ebene und im Raum und ihre bekannten Lösungen werden vorgestellt. Die abgeleitete Klasse der Differentialgleichungen ist ein neuartiges Werkzeug zur Entdeckung von Kandidaten für geometrische Bewegungsprimitive.

Schlüsselwörter: geometrische Bewegungsgrundelemente – kompakte Darstellung – affine Differentialgeometrie – zeitliche Aspekte der Bewegung – Parabel – logarithmische Spirale – Kreis – parabolische Schraube – elliptische Schraube

$\ddot{y}$ Fakultät für Mathematik, Bar-Ilan-Universität, Ramat-Gan 5290002, Israel
felix@math.biu.ac.il

1. Einleitung

Verschiedene neurowissenschaftliche Studien haben geometrische Merkmale biologischer Bewegungen (z. B. zeichnungsähnlicher Handlungen) und deren Darstellung im Gehirn analysiert. Insbesondere wurde festgestellt, dass einzelne Neuronen und Nervenpopulationen im motorischen Kortex auf die Bewegungsrichtung abgestimmt sind [24, 61, 60, 62, 45, 44]. Studien zu verschiedenen Arten zielgerichteter Bewegungen, z. Bewegungen zu Zielen, aufeinanderfolgende Handbewegungen oder Bewegungen, die vorgeschriebenen Pfaden folgen, deuteten darauf hin, dass die serielle Reihenfolge von Teilbewegungen¹, „Aspekten der Bewegung“ (gemeint sind Aspekte der Bewegungsform und des Zielortes) und Bewegungsfragmente in der kortikalen Aktivität repräsentiert sind [34, 1, 2, 33, 63, 32]. Hinweise auf eine wichtige Rolle der nichteuklidischen Geometrie und insbesondere der äquiaffinen [50, 51, 54, 41, 12, 52, 53, 55, 42, 16, 9, 43] und affinen [4] in der Produktion und die Wahrnehmung biologischer Bewegung wurde bereitgestellt. Es wurde eine Skaleninvarianz in der neuronalen Darstellung von Handschriftbewegungen vorgeschlagen [30]. Die Überlagerung von äquiaffinen Transformationen und Skalierungen bildet die

Gruppe der affinen Transformationen. Es wurde vorgeschlagen, dass biologische Bewegungen in mehreren Geometrien dargestellt werden.

Die Idee der Bewegungskompositionalität, also der Darstellung komplexer Bewegungen auf der Grundlage eines begrenzten „Alphabets“ primitiver Unterbewegungen, wird in zahlreichen Studien zur Motorsteuerung analysiert. Die Existenz motorischer Primitive wurde auf der Ebene der Kräfte nachgewiesen, die von Muskeln erzeugt werden, die auf die Gliedmaßen wirken [5, 27, 49, 37, 47, 48, 25, 26], auf der Ebene der Muskelsynergien [67, 11, 31, 36, 10], auf der Ebene der Bewegungskinematik [46, 20, 7, 39, 59, 57, 17, 21, 58] und auf der Ebene der Recheneinheiten im sensomotorischen System [68, 65]. Die Zerlegung komplexer Bewegungen in Grundelemente wurde auch für Krakenarmbewegungen implementiert [71]. Ergebnisse der jüngsten Arbeiten [13, 14] liefern zusätzliche Hinweise darauf, dass scheinbar kontinuierliche Bewegungen im Gehirn auf bestimmten Hierarchieebenen in diskreter Weise dargestellt werden könnten.

Parabolische Formen wurden als geometrische Bausteine komplexer zeichnungsartiger Bewegungen vorgeschlagen, basierend auf mathematischer Modellierung und Analyse kinematischer und neurophysiologischer Daten sich verhaltender Affen [54, 52, 53, 55]. Es wurde vorgeschlagen, dass komplexe Bewegungspfade durch die Verkettung parabelartiger Formen zusammengesetzt werden könnten. Auf Parabelsegmente angewendete affine Transformationen führen zu Parabelsegmenten. Darüber hinaus kann aus einem beliebigen Parabelsegment durch eindeutige affine Transformation jedes beliebige Parabelsegment erhalten werden. Die Folge verketteter parabelähnlicher Formen kann also durch Anwenden einer Folge affiner Transformationen auf eine einzelne parabolische Vorlage erhalten werden [52] und so die Darstellung komplexer Bewegungen im Gehirn vereinfachen. Eine solche Darstellung könnte bedeuten, dass das Grundelement der geometrischen Bewegung eine Reihe von Transformationen ist, die mit einer geometrischen Grundform ausgestattet sind, auf die die Transformationen angewendet werden. Ein Beispiel für eine stückweise parabolische Kurve, die der tatsächlichen Bewegungsbahn eines Affen ähnelt, ist in Abbildung 9a von [55] dargestellt.

Hier entwickle ich mathematische Werkzeuge weiter, die darauf abzielen, primitive geometrische Formen zu finden. Flugbahnen entlang dieser primitiven Formen würden damit übereinstimmen

¹Bedeutet die serielle Reihenfolge der Implementierung einer bestimmten geometrischen Einheit.

verschiedene Modelle, die biologische Bewegung beschreiben. Klassen primitiver Formen, die vermutlich komplexere Bewegungsbahnen bilden, sind gegenüber Klassen geometrischer Transformationen invariant und können daher eine kompakte Darstellung komplexer Bewegungsbahnen im Gehirn liefern.

2 Voraussetzungen für das mathematische Problem aus motorischen Kontrollstudien

Es wurde beobachtet, dass ebene Handbahnen glatt sind, während Glätte als Minimierung der integrierten quadratischen Änderungsrate der Beschleunigung, auch Bewegungsruck genannt, definiert wurde, nämlich :

$$J = \int_0^T \left(\frac{d^3x}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3y}{dt^3} \right)^2 dt. \quad (2.1)$$

Die Informationen über die Bewegungsbahn können in zwei Teile aufgeteilt werden: (1) geometrische Spezifikation, auch Bewegungspfad genannt, und (2) zeitliche Spezifikation, definiert durch eine Funktion, die jeden Zeitpunkt mit dem Ort auf der Bewegungsbahn in Beziehung setzt. Die zeitliche Vorgabe wird vollständig durch die Bewegungsgeschwindigkeit entlang der Bahn bestimmt. In den Originalarbeiten zum Minimum-Jerk-Modell [35, 22] wird eine maximal glatte Trajektorie durch einen Startpunkt, einen Durchgangspunkt, durch den der Pfad verlaufen muss, und den Endpunkt eingeschränkt. Das Kriterium der Minimierung der Kostenfunktion in (2.1) ist also mit der punktwisen geometrischen Einschränkung der optimalen Trajektorie ausgestattet, die durch einen oder mehrere Zwischenpunkte verläuft. Daher kann in der ursprünglichen Formulierung des Modells der gesamte kontinuierliche Verlauf der Trajektorie gleichzeitig mit der Identifizierung der Bewegungsgeschwindigkeit² aufgedeckt werden. Das Minimum-Jerk-Modell ist weit verbreitet und wird in verschiedenen Sprachen erwähnt Studien zur motorischen Kontrolle.

Nach dem eingeschränkten Minimum-Jerk-Modell [66] Handbewegungen neigen dazu, die Glätte des Zeichnens zu maximieren (die Ruckkosten zu minimieren)

$$J = \int_0^T \left(\frac{d^3x(\tilde{y}(t))}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3y(\tilde{y}(t))}{dt^3} \right)^2 + \frac{d^3z(\tilde{y}(t))}{dt^3}^2 dt \quad (2.2)$$

für die vorgegebene Flugbahn $\{x(\tilde{y}), y(\tilde{y}), z(\tilde{y})\}$. Das bedeutet, dass der Bewegungspfad bereits als Eingabe für das Optimierungsverfahren bereitgestellt wird und das Geschwindigkeitsprofil gefunden werden muss, um das Optimierungsproblem zu lösen. Die ausgeführte dreidimensionale Kurve im Kostenfunktional (2.2) wird mit der euklidischen Bogenlänge parametrisiert

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tilde{y})^2 + \dot{y}(\tilde{y})^2 + \dot{z}(\tilde{y})^2} d\tilde{y} \quad (2.3)$$

² Die $x(t)$ - und $y(t)$ -Komponenten der durch Zwischenpunkte eingeschränkten und die Kostenfunktion (2.1) minimierenden Trajektorien bestehen aus Teilen von Polynomen 5. Ordnung in Bezug auf die Zeit, den Ableitungen 3. Ordnung von $x(t)$, $y(t)$ sind stetig [22].

wobei der Punkt die Differenzierung nach der Zeit t bezeichnet.

Beispiel 2.1. Die Flugbahn $r(t) = r(\dot{\gamma}_{eu}(t)) = [x(\dot{\gamma}_{eu}(t)), y(\dot{\gamma}_{eu}(t)), z(\dot{\gamma}_{eu}(t))]$ wird vollständig durch geometrische (zeitunabhängige) Parametrisierung bestimmt³ $r(\dot{\gamma}_{eu})$ und zeitliche Parametrisierung des geometrischen Parameters $\dot{\gamma}_{eu}(t)$ (oder äquivalent streng nichtnegative Geschwindigkeit $\dot{\gamma}_{eu}$). Hier ist der geometrische Parameter $\dot{\gamma}_{eu}$ die euklidische Länge der Kurve, die kontinuierlich auf eine dreimal differenzierbare Kurve abgebildet wird. $\dot{\gamma}$

Von nun an wird die Differenzierung nach dem geometrischen Parameter $\dot{\gamma}$ mit Primzahlen und Zahlen in Klammern bezeichnet, während die Differenzierung nach der Zeit t bis zur Ordnung 3 mit Punkten bezeichnet wird. Differenzierung höherer Ordnung in Bezug auf die Zeit wird mit der meist üblichen Notation für Differenzierung (d/dt) bezeichnet:

$$\begin{aligned} F'(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} &= \frac{dF(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \frac{dF}{d\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} f(\dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma} &= \frac{df}{d\dot{\gamma}} f(\dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma} = \frac{df}{d\dot{\gamma}} f(\dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma} \\ \frac{d^2 f}{d\dot{\gamma}^2} &= \frac{d}{d\dot{\gamma}} \left(\frac{df}{d\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma} = \frac{d}{d\dot{\gamma}} \left(\frac{df}{d\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma} \\ \frac{d^3 f}{d\dot{\gamma}^3} &= \frac{d}{d\dot{\gamma}} \left(\frac{d^2 f}{d\dot{\gamma}^2} \right) \dot{\gamma} = \frac{d}{d\dot{\gamma}} \left(\frac{d^2 f}{d\dot{\gamma}^2} \right) \dot{\gamma} \end{aligned}$$

Die Notation wird im Text noch einmal in Erinnerung gerufen.

Das Zweidrittelpotenzgesetz ist ein weiteres kinematisches Modell für Handbewegungen. Es beschreibt eine Beziehung zwischen den geometrischen Eigenschaften des Bewegungspfads und der Bewegungsgeschwindigkeit entlang dieses Pfads. Empirische Beobachtungen des Zwei-Drittel-Potenzgesetz-Modells wurden als Beweis für eine Bewegungssegmentierung interpretiert [40]. Das Zweidrittelpotenzgesetz wurde auch in visuellen Wahrnehmungsstudien nachgewiesen [69, 41, 12, 9]. Die Segmentierung von Handbewegungen basierend auf den Kräften der Flugbahnkrümmung wurde kürzlich in [15] analysiert.

Das Zweidrittelpotenzgesetz-Modell entspricht der Aussage, dass die äquiaffine Geschwindigkeit⁴ (4.2) von Zeichenbewegungen stückweise konstant ist [18, 50, 29, 19]: $\ddot{\gamma}_{ea} = \text{const.}$ Basierend auf empirischen Ergebnissen im Zusammenhang mit dem Zweidrittelpotenzgesetz-Modell und ihrer Interpretation im Hinblick auf die Differentialgeometrie sind äquiaffine und affine Bögen zu relevanten Parametrisierungen bei der Analyse biologischer Bewegungen und ihrer neuronalen Darstellung geworden [18, 50, 51, 54, 52, 19, 55, 53, 16, 42, 4, 9, 43].

Der Vergleich der Vorhersagen des Minimum-Jerk-Modells und des Zweidrittel-Potenzgesetz-Modells wurde für eine Reihe geometrischer Formen in [70] analysiert. Euklidische Geschwindigkeit $\dot{\gamma}_{eu}$ Minimierung der Kostenfunktion mit einer beliebigen Glätteordnung N

$$\int_0^T \left(\frac{d^N x(t)}{dt^N} \right)^2 + \left(\frac{d^N y(t)}{dt^N} \right)^2 dt \quad (2.4)$$

³Geometrische Parametrisierung mit einem in einer bestimmten Geometrie invarianten Bogen wird als natürliche Parametrisierung bezeichnet; $\dot{\gamma}_{eu}$ ist ein Bogen in der euklidischen Geometrie.

⁴ Hintergrundinformationen zu den in dieser Arbeit verwendeten Begriffen der äquiaffinen Geometrie finden sich an anderer Stelle, z. [64, 28]. Insbesondere werden sie im Teil „Hintergrund“ von [51] und Kapitel 2 von [52] zusammen mit ihrer Beziehung zum Zweidrittelpotenzgesetz und im Anhang A von [52] vorgestellt.

wurde mit den experimentellen Daten für planare Punkt-zu-Punkt-Bewegungen verglichen⁵

[56]. Approximierte Vorhersagen von Bewegungstrajektorien, also Bewegungsgeschwindigkeiten entlang vordefinierter geometrischer Bahnen, die den funktionalen Aufwand minimieren

Es wurden beliebige Ordnungen n (2.4) entlang einer Reihe periodischer Pfade abgeleitet und mit den Vorhersagen des Zweidrittelpotenzgesetzes und experimentellen Daten verglichen

[56].

Im Fall des eingeschränkten Minimum-Jerk-Modells ($n = 3$) besteht das Problem darin, die Pfade zu finden, für die maximal glatte Trajektorien die zwei Drittel erfüllen

Das Potenzgesetzmodell wurde unter Verwendung der Parametrisierung eines Pfades mit Äquiaffinität untersucht Bogen [54, 52]. Die notwendigen Voraussetzungen für solche Wege wurden in Form von erhalten das System zweier Differentialgleichungen [54, 52]. Bekannte Lösungen sind beliebige zweidimensionale Vektorfunktionen, die parabolische Formen und Kreise beschreiben [54, 52]

und ein spezieller Fall einer logarithmischen Spirale [6, 55]. Flugbahnen mit minimalem Ruck

entlang parabolischer Pfade liefern einen Nullwert für die Kosten (2.1) [51, 52]. Bekannt

Nichtparabolische Lösungen (Kreis und spezifische logarithmische Spirale) bieten keine Lösung Null Kosten.

Jede Kurve kann in unendlich vielen verschiedenen geometrischen Parametern parametrisiert werden Wege. Die weithin bekannte Parametrisierung basiert auf der euklidischen Bogenlänge.

Im Allgemeinen kann die geometrische Parametrisierung einer Kurve über a implementiert werden kontinuierliche Abbildung eines Skalarparameters auf die Kurve.

Beispiel 2.2. Eine Kurve ohne Wendepunkte kann mit parametrisiert werden

Integral der euklidischen Geschwindigkeit, gewichtet mit der euklidischen Krümmung, erhöht auf „sicher“.

Grad: $\ddot{y}$ Beispiel(t) = $\int_0^t \ddot{y} \text{eu}(\ddot{y}) \cdot [\text{ceu}(\ddot{y}\text{eu}(\ddot{y}))] \ddot{y} \, d\ddot{y}$. Diese geometrische Parametrisierung

tion ist für jedes $\ddot{y}$ legitim. Es ist die Messung des Euklidischen Bogens, wenn $\ddot{y} = 0$

und Messung des äquiaffinen Bogens, wenn $\ddot{y} = 1/3 \cdot \ddot{y}$

Das Bogen- $\ddot{y}$ -Beispiel aus Beispiel 2.2 ist unter euklidischen Transformationen invariant. Wenn jedoch $\ddot{y} = 0$, ist es nicht gleich der euklidischen Länge

Integral der Differentialinvariante erster Ordnung in der Gruppe der planaren Euklidischen

Transformationen. Im weiteren Verlauf des Textes berücksichtige ich auch Bögen in anderen Untergruppen der Gruppe affiner Transformationen.

In dieser Arbeit wird das Problem der Suche nach Pfaden, deren maximal glatte Trajektorien eine Akkumulation geometrischer Parameter mit konstanter Geschwindigkeit ermöglichen, für eine beliebige Glätteordnung n betrachtet. Es wird eine Klasse von Differentialgleichungen abgeleitet, die solche Pfade beschreiben. Das System zweier Differentialgleichungen entspricht zu jeder Ordnung der Glätte n . Systeme von besonderem Interesse und ihre Lösungen werden im Folgenden vorgestellt. Ein Teil der Lösungen wird hier erstmals vorgestellt und einige sind aus früheren Arbeiten bekannt, die eine äquiaffine Parametrisierung verwendeten [51, 52, 6, 55].

⁵Kinematische Modelle für Punkt-zu-Punkt-Bewegungen in der Ebene gehen normalerweise davon aus, dass die Bewegungsbahn eine gerade Linie ist, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegung am Start- und Endpunkt die Flugbahn ist Null.

Betrachten Sie die n -fach differenzierbare Kurve $r(\tilde{y}) = (x_1(\tilde{y}), x_2(\tilde{y}), \dots, x_L(\tilde{y}))$ im L -dimensionalen Raum, $\tilde{y} \in [0, \tilde{y}]$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\tilde{y}(t)$ eine streng wachsende und n -fach differenzierbare Funktion von $t \in [0, T]$, $\tilde{y}(0) = 0$, $\tilde{y}(T) = \tilde{y}$. Die mittlere quadratische Ableitungskostenfunktion [56], die mit der Ableitung n -ter Ordnung der Kurve und ihrer Parametrisierung $\tilde{y}(t)$ verbunden ist, ist wie folgt definiert:

konstante Geschwindigkeit

$$r_{L,n}(t) = \arg \min_{r \in \mathcal{R}_L} J(r, n), t \in [0, T]$$
$$\tilde{y}_{rL,n}(t) = \arg \min_{\tilde{y}(t)} J(\tilde{y}(rL, n), t) \in [0, T] \quad (3.3)$$
$$\tilde{A} = rL : \ddot{\gamma} \ddot{\gamma} \ddot{\gamma} n, \quad L_{\text{TL}}, \quad n(t) = \text{const} = \frac{\ddot{\gamma}}{\tau} \quad (3.4)$$
$$\text{An, } L = rL : \ddot{y} \quad \text{rL, } n(t) = \text{const} = \frac{\ddot{y}}{T} \quad (3.5)$$

6Die Funktion $\ddot{y}(t)$ sollte streng monoton sein. Hier wird der Fall einer streng steigenden Funktion betrachtet, die gleichen Ergebnisse können jedoch auch für eine streng fallende Funktion erhalten werden.

Lösungen des Optimierungsproblems (3.3) für die Kurven aus der Klasse $A_{n, L}$ erfüllen per Definition die in (3.2) festgelegten Randbedingungen und beide Optimierungsprobleme minimieren das gleiche Kostenfunktional. Daher gehören alle zur Menge $A_{n, L}$ gehörenden Lösungen (Kurven) zur Menge $\tilde{A}_{n, L}$:

$$A_{n, L} \cap \tilde{A}_{n, L} = \tilde{A}_{n, L}. \quad (3.6)$$

Die für die Kurven der Klasse $\tilde{A}_{n, L}$ abgeleiteten notwendigen Bedingungen werden also tatsächlich von den Kurven beider Klassen erfüllt: $\tilde{A}_{n, L}$ und $A_{n, L}$.

Führen Sie ein System aus zwei Differentialgleichungen ein:

$$\ddot{y} \frac{d n r}{d \dot{y} n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (\ddot{y}_i) \dot{y}_i \frac{d n \dot{y}_i}{d \dot{y} n \dot{y}_i} \cdot \frac{d n + i r}{d \dot{y} n + i} = \text{konst} \quad (3.7)$$

$$\ddot{y} \ddot{y}(t) \dot{y}(t) = \ddot{y} \dot{y} v(t) \dot{y}(t) = \ddot{y} = 1$$

Der Punkt zwischen zwei Vektoren bezeichnet ihr Skalarprodukt. Die Differentiation beider Seiten der oberen Gleichung in (3.7) impliziert ein System, in dem die obere Gleichung lediglich durch das Skalarprodukt der Ableitungen erster und $(2n)$ ter Ordnung des Ortsvektors in Bezug auf den geometrischen Parameter $\dot{y}$ dargestellt wird:

$$\ddot{y} \frac{D R}{d \dot{y}} \cdot \frac{d 2 n r}{d \dot{y} 2 n} = 0 \quad (3.8)$$

$$\ddot{y} \ddot{y}(t) \dot{y}(t) = \ddot{y} \dot{y} v(t) \dot{y}(t) = \ddot{y} = 1.$$

Ich betrachte die Kurven aus den Klassen $\tilde{A}_{n, L}$ und $A_{n, L}$ als Kandidaten für geometrische Bewegungsprimitive. Die Systeme (3.7), (3.8) können als Werkzeug zur Identifizierung solcher Kurven wie folgt aus dem mathematischen Hauptergebnis dieser Arbeit verwendet werden:

Vorschlag 3.1. Die Kurven aus den in (3.4) und (3.5) definierten Mengen $\tilde{A}_{n, L}$ und $A_{n, L}$ erfüllen notwendigerweise die oberen Gleichungen in den Systemen (3.7) und (3.8).

Satz 3.1 ist im Anhang A bewiesen. Beispiele der Systeme (3.7) und (3.8) zusammen mit bekannten Lösungen werden für verschiedene geometrische Parametrisierungen in den Abschnitten 4, 5 in den Gleichungen (4.3), (4.10), (4.13), (4.18), (4.22), (5.3), (5.4).

Eine Reihe wichtiger Hinweise zu den Systemen (3.7) und (3.8) und den Kurven, die zu den Mengen $\tilde{A}_{n, L}$ gehören $\tilde{A}_{n, L}$ und $A_{n, L}$ werden unten dargestellt.

1. Die obere Gleichung in den Systemen (3.7) und (3.8) ist unabhängig von der geometrischen Parametrisierung einer Kurve. Die Gleichung wird aus dem Kriterium der maximalen Glätte der Trajektorie (3.2) abgeleitet, das auf der Euler-Poisson-Gleichung für Variationsprobleme basiert. Besondere Fälle des Obermaterials

Differentialgleichungen für planare Kurven bei $n = 2, 3, 4$ und für ein beliebiges biträres n sind in Tabelle 1 angegeben⁷. Die obere Gleichung in den Systemen ist aufgrund der euklidischen Invarianz des Skalarprodukts unter beliebigen euklidischen Transformationen invariant.

2. Die untere Gleichung in den Systemen (3.7) und (3.8) hängt von der Wahl der geometrischen Parametrisierung ab. Die linke Seite der unteren Gleichung und der geometrische Parameter $\dot{y}$ aus den Systemen sind unter derselben Klasse geometrischer Transformationen invariant⁸. Wenn System (3.7) oder (3.8) gelöst wird, um Kandidatenkurven aus den Mengen A^* und A_n, L zu identifizieren, garantiert die durch die untere Gleichung formalisierte Bedingung, dass die Lösung der oberen Gleichung tatsächlich eine Kurve im L -dimensionalen Raum ist und stimmt mit der Parametrisierung $\dot{y}$ überein. Beispiel 3.2 unten zeigt eine Lösung der Up-Per-Gleichung, die nicht mit der Parametrisierung $\dot{y}$ übereinstimmt und daher keine Kurve darstellt. In Fällen, in denen eine Kurve durch eine Vektorfunktion beschrieben wird, die mit einem bestimmten $\dot{y}$ parametrisiert ist, kann man testen, ob die Kurve die notwendige Bedingung für die Zugehörigkeit zu den in (3.4), (3.5) definierten Klassen erfüllt. Dazu muss man nur prüfen, ob der vektorielle Ausdruck die obere Gleichung aus einem der Systeme (3.7), (3.8) erfüllt, da die untere Gleichung für vorhandene Kurven automatisch erfüllt ist.
3. Die Verwendung von Transversalitätsbedingungen zusätzlich zur oberen Gleichung in den Systemen (3.7) und (3.8) kann eine eingeschränktere notwendige Bedingung dafür liefern, dass eine Kurve zur Menge A_n, L gehört.
4. Die folgende hinreichende Bedingung für die Kurven aus der Menge A^* , A_n, L wurde früher für den Fall der minimalen Ruckkosten ($n = 3$) formuliert [52]:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{y}^2 \ddot{y}^2 r r^{-n} \cdot r^4 + 2r^4 \ddot{y}^2 = \text{const} 0 \ddot{y}^2 0 \cdot r \\ \ddot{y} &= \min_{\ddot{y}} \ddot{y}^2 9r + 2r^4 \cdot r^{-9} \ddot{y}^2 24r^{-n} \cdot r^{-9} = \text{const} 1 \ddot{y}^2 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die linke Seite der oberen Gleichungen im System (3.9) ist identisch mit der linken Seite der oberen Gleichung in der notwendigen Bedingung (3.7) und ist durch die Einschränkung auf das Vorzeichen der Konstante auf der rechten Seite eingeschränkt.

⁷Kostenfunktionale $J\ddot{y}(rL, n)$ für die planaren ($L = 2$) und räumlichen ($L = 3$) Kurven wurden in verschiedenen motorischen Kontrollstudien für Differenzierungsordnungen n gleich 2–4 verwendet, z. [35, 22, 70, 66, 54, 56, 52, 3, 55].

⁸Wenn beispielsweise der Parameter $\dot{y}$ die euklidische Länge ist, ist die Gleichung unter euklidischen Transformationen invariant. Wenn der Parameter $\dot{y}$ ein äquiaffiner Bogen ist, ist die untere Gleichung des Systems bei äquiaffinen Transformationen invariant.

Befehl	Gleichung, Beispielfall oder	Ableitung der Gleichung $x \ddot{y}_x$	Kommentare zur Gleichung	Bekannte Lösungen, wenn $\ddot{y}$ ein gleichaffiner Bogen ist
2	$\ddot{y}^2 + yx$ allgemeiner Fall $\ddot{y} \ddot{y}_x (3) \ddot{y} \ddot{y}_y (3) = \text{const}$ (4) + $y \ddot{y}_y (4) = 0$ Fall		eines planaren „Minimalbeschleunigungs“- Kriteriums in der Motorsteuerungstheorie	Parabeln
3	$\ddot{y}_x^2 + \ddot{y}_x^2 + \ddot{y} \ddot{y}_x (4) \ddot{y} \ddot{y}_y (4)$ $+ 2x \ddot{y}_x (5) + 2y \ddot{y}_y (5) = \text{const}$	$x \ddot{y}_x (6) + y \ddot{y}_y (6) = 0$ Fall	von planarem „Minimum-Ruck“ Kriterium in der Theorie der Motorsteuerung	2D: Parabeln, Kreise [52, 55], logarithmische Spirale [6, 55]. 3D: Parabolische Schraubenlinie [52, 55]. 3D: Elliptische
4	$x (4)^2 + J (4)^2 \ddot{y} \ddot{y}_x (5) \ddot{y} \ddot{y}_y (5)$ $+ 2x \ddot{y}_x (6) + 2y \ddot{y}_y (6) \ddot{y} \ddot{y}_x (7) \ddot{y} \ddot{y}_y (7) = \text{const}$	$x \ddot{y}_x (8) + y \ddot{y}_y (8) = 0$ Fall	von planarem „Minimum-Snap“ Kriterium in der Theorie der Motorsteuerung	Schraubenlinie 2D: Parabeln, Kreise, logarithmische Spirale 3D: Parabolische und elliptische S
...	...	...		
N	$x (n)^2 + y (n)^2 +$ $\sum_{i=1}^{n-1} (\ddot{y}_i)^2 (x (n \ddot{y}_i) x (n+i) (n \ddot{y}_i) + y y (n+i)) = \text{const}$ $(n)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (\ddot{y}_i)^2 (n \ddot{y}_i) (n+i) \cdot r = \text{const}$	$x \ddot{y}_x (2n) + y \ddot{y}_y (2n) = 0$ Gleichung für planaren Fall. $r \cdot r (2n) = 0$	L-dimensionaler Raum. Für 3D-Kurven $L = 3$.	Für $L \leq n$, $r = \{x_1, \dots, x_L\}$ st $x_k(\ddot{y}) = \frac{\ddot{y}^k}{k!}$, $k = 1, \dots, L$; $\ddot{y}$ ist gleichaffiner Bogen in der Dimension L .

Tabelle 1: Obere Gleichung in den Systemen (3.7), (3.8), die von den Kurven der Klassen $A^{\sim}$ und $A_{n, L}$ bezüglich $\ddot{y}$ notwendigerweise erfüllt wird. Der n, L Punkt definiert in (3.4) bzw. (3.5). Primzahl und Differenzierungsreihenfolge in Klammern entsprechen der Ableitung zwischen zwei Vektoren in Klammern in der Zeile, die dem Fall n entspricht, bezeichnet das Skalarprodukt der Vektoren. Einzelheiten zu den in Tabelle 1 genannten planaren Lösungen finden Sie in Tabelle 2. Die räumlichen Lösungen werden in Abschnitt 5 analysiert.

Beispiel 3.2.⁹ Die zeitliche Ableitung des äquiaffinen Bogens namens äquiaffine ($\ddot{y}x\ddot{y}\ddot{y}x$) $1/3$ ist wie folgt definiert. Die zeitliche Ableitung der euklidischen Bogenlänge ist definiert als $\ddot{y}\ddot{y} = x\dot{y}^2 + \dot{y}^2$. Die euklidische Krümmung an einem bestimmten Punkt der Flugbahn wird wie folgt berechnet:

$$c_{eu} = \frac{x\ddot{y}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{y}x}{(\dot{y}x^2 + \ddot{y}y^2)^{3/2}} = \frac{3}{\dot{y}^3} \frac{v}{e_{eu}}$$

und deshalb

$$v_{ea} = v_{eu} c_{eu}^{1/3}.$$

Betrachten Sie die Parametrisierung mit der euklidischen Krümmung, erhöht zur Potenz $\ddot{y}$:

$$v\ddot{y} = v_{eu} c_{eu}^{1/3} = (\dot{y}x^2 + \ddot{y}y^2)^{1/2} \ddot{y}^{1/2} (x\ddot{y}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{y}x)^{1/3}. \quad (3.10)$$

Der entsprechende geometrische Parameter entspricht der integrierten Geschwindigkeit:

$$\ddot{y}(t) = \int_0^t v\ddot{y} d\ddot{y}$$

Dies ist eine streng monotone Funktion für die Kurve ohne Wendepunkte (obwohl sie in manchen Geometrien nicht unbedingt einen Kurvenbogen darstellt).

Daher ist $\ddot{y}$ eine legitime Parametrisierung einer Kurve ohne Wendepunkte.

Offensichtlich die Vektorfunktion

$$x = \ddot{y}y, y = \ddot{y}^2/2$$

erfüllt die Gleichungen in Tabelle 1 für $n \geq 2$, da die Ableitungen von x, y nach $\ddot{y}$ ab Ordnung 3 alle Null sind. Wenn jedoch eine lineare Parametrisierung von $\ddot{y}$ in Bezug auf die Zeit angenommen wird, was konstante Geschwindigkeit bedeutet, sagen wir $\ddot{y} = t$, dann ist $x = t, y = t^2/2$, was $x\ddot{y}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{y}x = 1$ impliziert. In wiederum die Verwendung von $t = \ddot{y}$ in (3.10) impliziert

$$v\ddot{y} = (\dot{y}x^2 + \ddot{y}y^2)^{1/2} \ddot{y}^{1/2} \cdot 1 = (1 + \ddot{y}^2)^{1/2} \ddot{y}^{1/2} = 1, \text{ wenn } \ddot{y} = 1/3.$$

Es besteht also ein Widerspruch zwischen der Parametrisierung der Vektorfunktion und der geometrischen Parametrisierung der Kurve, die scheinbar durch diese Vektorfunktion definiert werden könnte. Daher stellt die Vektorfunktion $\{x = \ddot{y}y, y = \ddot{y}^2/2\}$ keine durch $\ddot{y}$ parametrisierte Kurve dar, wenn $\ddot{y} = 1/3$, während der Fall $\ddot{y} = 1/3$ einer Parametrisierung mit äquiaffinem Bogen entspricht. $\ddot{y}$

4 Bogen in den Geometrien der affinen Gruppe in der Ebene und einige seiner Untergruppen

In den Studien zur Handlung und Wahrnehmung von Bewegung wurden verschiedene Arten von Invarianz analysiert. Es wird beispielsweise von Punkt-zu-Punkt-Handbewegungen ausgegangen

⁹ Hintergrundinformationen zu den geometrischen Begriffen, die in Beispiel 3.2 verwendet werden, finden Sie an anderer Stelle, z. in [64, 28]. Sie werden im Rahmen der Motorsteuerung in Kapitel 2 von [52] vorgestellt.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Gleichungssysteme stellen besondere Fälle des Systems (3.7) dar. Entsprechende Sonderfälle des Systems (3.8) können einfach durch Ersetzen der oberen Gleichung durch das Skalarprodukt der Ableitungen 1. und 6. Ordnung des Ortsvektors in Bezug auf den entsprechenden Bogen erhalten werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \ddot{\mathbf{1}} &= \ddot{y} \mathbf{x} + \ddot{y} \mathbf{y} + a \mathbf{y} \mathbf{1} = \ddot{y} \ddot{y} \ddot{y} = \mathbf{1}. \\ \ddot{y} \mathbf{x} + \ddot{y} \mathbf{y} + b, & \ddot{y} \end{aligned} \quad (4.1)$$
$$\ddot{y}_{ea} = \frac{x\dot{y} - x'\dot{y}'}{v\dot{y} - v'\dot{y}'}^{1/3} \quad (4.2)$$
$$y = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad (4.3)$$
$$\dot{y}ea = \int_0^T \ddot{y}\dot{e}a(\dot{y})d\dot{y}. \quad (4.4)$$

1. Die Parabel wird mit einem äquiaffinen Bogen bis zu einem äquiaffinen Transformation wie folgt: $x = \tilde{y}ea$, $y = \tilde{y}$ ²parametrisiert. Die Klasse der Parabeln stellt eine offensichtliche Lösung von (4.3) dar, die unter beliebigen affinen Transformationen invariant ist [52, 55]. Das Zeichnen von Parabeln mit konstanter äquiaffiner Geschwindigkeit minimiert das Kostenfunktional (3.1) und führt zu Nullkosten [51].

2. Der Kreis wird mit einem gleichaffinen Bogen wie folgt parametrisiert:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \tilde{y}^{\frac{3}{4}}_{ea} \cdot \cos(\tilde{y} \sqrt{\tilde{y}_{ea}}) \\ y &= y_0 + \tilde{y}^{\frac{3}{4}}_{ea} \cdot \sin(\tilde{y} \sqrt{\tilde{y}_{ea}}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hier ist $\tilde{y}_{ea}$ die gleichaffine Krümmung [64, 28, 8] (die notwendigen Hintergrundinformationen für das aktuelle Framework finden Sie in [52]):

$$\tilde{y}_{ea} = x \cdot y'' - \frac{1}{2} (y')^2 \quad (4.6)$$

Die äquiaffine Krümmung ist eine positive Konstante für Ellipsen einschließlich Kreisen, Null für Parabeln und eine negative Konstante für Hyperbeln [64]. Kreis ist eine nichtinvariante Lösung unter beliebigen äquiaffinen Transformationen, Kreise hingegen sind invariante Lösungen unter euklidischen Transformationen (4.20) (Translation und Rotation) [52, 55].

3. Logarithmische Spirale kann mit Polarwinkel parametrisiert werden:

$$x = \text{const} \cdot \exp(\tilde{y}) \cos \tilde{y}, \quad y = \text{const} \cdot \exp(\tilde{y}) \sin \tilde{y}. \quad (4.7)$$

Einführung der Parametrisierung mit äquiaffinem Bogen aus (4.2) und Integrieren

$$d\tilde{y}_{ea}/d\tilde{y} = (\text{const}^2 (1 + \tilde{y}^2))^{1/3} \cdot e^{2\tilde{y}/3}$$

ergibt:

$$\tilde{y}(\tilde{y}_{ea}) = \ln \frac{3}{2\tilde{y}_{ea}} \frac{2\tilde{y}_{ea}}{2} \tilde{y}_{ea}^{1/3} + 1 \cdot (\text{const}^2 (1 + \tilde{y}^2))^{1/3}$$

was in (4.7) eingesetzt werden kann, um die Ausdrücke für $x(\tilde{y}_{ea})$, $y(\tilde{y}_{ea})$ zu implizieren. Anscheinend ist (4.7) nur für den Fall $\tilde{y} = \pm 3/2 \tilde{y}_{ea}$ eine Lösung für (4.3) [6, 55].

Die Ableitungen 1. und 3. Ordnung des Ortsvektors einer ebenen Kurve $r(\tilde{y}_{ea})$ bezüglich des äquiaffinen Bogens sind parallel. Die Parallelität folgt aus der Identität $\kappa = 1$, die insbesondere im System (4.3) auftritt. Offenbar ist die äquiaffine Krümmung (4.6) einer Kurve ein Skalierungsfaktor zwischen der Ableitung 1. und 3. Ordnung des Ortsvektors:

$$r'(\tilde{y}_{ea}) + \tilde{y}(\tilde{y}_{ea}) r'''(\tilde{y}_{ea}) = 0$$

was die Möglichkeit impliziert, Ableitungen höherer Ordnung des Vektors $r(\tilde{y}_{ea})$ durch seine Ableitungen erster und zweiter Ordnung auszudrücken, wenn die äquiaffine Krümmung eine bekannte Funktion der äquiaffinen Länge ist. Insbesondere,

$$r^{(6)} = r'''(3\tilde{y}''(\tilde{y}_{ea}) + \tilde{y}^2(\tilde{y}_{ea})) + r''(\tilde{y}'\tilde{y}(\tilde{y}_{ea}) + 4\tilde{y}'(\tilde{y}_{ea})\tilde{y}(\tilde{y}_{ea})).$$

Daher kann die Ableitung erster Ordnung der oberen Gleichung des Systems (4.3) ($r = 0$) umgeschrieben werden

$$\tilde{y} r' r^{(6)} = (r' \cdot r''')(3\tilde{y}''(\tilde{y}_{ea}) + \tilde{y}^2(\tilde{y}_{ea})) + r''^2(\tilde{y}'\tilde{y}(\tilde{y}_{ea}) + 4\tilde{y}'(\tilde{y}_{ea})\tilde{y}(\tilde{y}_{ea})) = 0. \quad (4.8)$$

Beachten Sie, dass $r'' = \frac{1}{r^2} \frac{D}{d\varphi} r^2$, impliziert Gleichung (4.8).

$$\frac{1}{2} \frac{D}{d\varphi} (r^2) = \frac{\ddot{\varphi}^2 (\ddot{\varphi} + 4\ddot{\varphi})}{(\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi}^2)} \quad (4.9)$$

Nach der Integration von (4.9) lässt sich das System (4.3) wie folgt umschreiben:

$$\ddot{\varphi}^2 r (\ddot{\varphi}) = r^2 (0) \exp [\ddot{\varphi}^2 (F(\ddot{\varphi}) - F(0))] \quad (4.10)$$

Wo

$$F(\ddot{\varphi}) = \frac{\ddot{\varphi}^2 + 4\ddot{\varphi} \ddot{\varphi}}{2 \ddot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}} d\ddot{\varphi}.$$

4.2 Affine Gruppe

Affine Koordinatentransformationen umfassen 6 unabhängige Parameter und haben die Form:

$$x_1 = \ddot{\varphi}x + \ddot{\varphi}y + a, \quad y_1 = \ddot{\varphi}x + \ddot{\varphi}y + b, \quad \ddot{\varphi}^2 = 0. \quad (4.11)$$

Die Geschwindigkeit des akkumulierenden affinen Lichtbogens wird wie folgt berechnet¹⁰:

$$\ddot{\varphi}_A = \frac{3 \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A + \ddot{\varphi} \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A + 12 \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A + \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A}{9 \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A} = \ddot{\varphi} \ddot{\varphi}_A \ddot{\varphi}_A, \quad (4.12),$$

wobei $\ddot{\varphi}_A$ die gleichaffine Geschwindigkeit (4.2) und $\ddot{\varphi}_A$ die gleichaffine Krümmung (4.6) ist. Das System (3.7) für $n = 3$ in der Ebene wird

$$\ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A^2 = \text{const},$$

$$\frac{3(\ddot{\varphi} \ddot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A^2) + 12(\ddot{\varphi} \ddot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A^2) + 9(\ddot{\varphi} \ddot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A^2)}{9(\ddot{\varphi} \ddot{\varphi}_A^2 + \ddot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}_A^2)} = 1. \quad (4.13)$$

Hier erfolgt die Differentiation bezüglich des affinen Bogens $\ddot{\varphi}_A$. Die Ergebnisse für mögliche Lösungen (Parabel, Kreis, logarithmische Spirale) sind wie folgt:

1. Die affine Länge einer Parabel ist Null, ebenso wie die gleichaffine Länge der Geraden Null oder die Euklidische Länge eines Punktes Null ist. Daher ist die Prüfung, ob Parabeln Lösungen des Systems (4.13) sind, bedeutungslos. Die affine Krümmung der Parabel ist nicht definiert.

¹⁰Die Formel für die Geschwindigkeit des akkumulierenden affinen Lichtbogens in [64] enthält einen Druckfehler und unterscheidet sich daher von (4.12).

2. Kreis. Wenn man bedenkt, dass der affine Bogen die integrierte Quadratwurzel der gleichaffinen Krümmung ist ($\ddot{y}_a = \ddot{y} \cdot \ddot{y}_{ea}$ [64]) und dass die gleichaffine Krümmung eines Kreises $\ddot{y}^{1/2}$ eine positive Konstante ist, erhält man für einen Kreis sofort: $\ddot{y}_{ea} = \ddot{y} \cdot \ddot{y}_a$. Durch Einsetzen in (4.5) erhält man:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \ddot{y} \cdot \ddot{y}_{ea}^{3/4} \cdot \cos(\ddot{y}_a) \\ y &= y_0 + \ddot{y} \cdot \ddot{y}_{ea}^{3/4} \cdot \sin(\ddot{y}_a) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Das ist die Lösung des Systems (4.13). Kreise stellen unter willkürlicher affiner Transformation nichtinvariante Lösungen dar. Die Klasse der Kreise ist unter euklidischen Transformationen und gleichmäßiger Skalierung invariant.

3. Logarithmische Spirale. Die Geschwindigkeit des akkumulierenden affinen Bogens der logarithmischen Spirale (4.7) in Bezug auf den sich ändernden Polarwinkel $\ddot{y}$ ist fol
- Tiefgangskonstante $d\ddot{y}_a/d\ddot{y} = \frac{9 + \ddot{y}^2}{3}$. Also ohne Einschränkung der Allgemeinheit
- $\ddot{y} = \frac{3}{9 + \ddot{y}^2} \ddot{y}_a$. Der Ausdruck für die logarithmische Spirale (4.7) wird

$$x(\ddot{y}_a) = \text{const} \cdot \exp \ddot{y} \cdot \ddot{y} \cdot \frac{3}{9 + \ddot{y}^2} \ddot{y}_a \cos \ddot{y}_a + \frac{3}{9 + \ddot{y}^2} \ddot{y}_a \quad (4.15)$$

$$y(\ddot{y}_a) = \text{const} \cdot \exp \ddot{y} \cdot \ddot{y}_a \sin \ddot{y}_a + \frac{3}{9 + \ddot{y}^2} \ddot{y}_a \cdot \ddot{y}$$

Die logarithmische Spirale erfüllt das System (4.13) für $\ddot{y}$, die Lösungen der Gleichung sind: $5 \ddot{y}^5 + \ddot{y} = 0$ und es gibt reelle Lösungen $\ddot{y} = \pm 5 \pm 2 \ddot{y}^5$.

4.3 Zentrumsaffine Gruppe

Zentrumsaffine Koordinatentransformationen umfassen 4 unabhängige Parameter und haben die Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ddot{y}x + \ddot{y}y \cdot y_1 \\ &= \ddot{y}x + \ddot{y}y, \quad \ddot{y} \cdot \ddot{y} \cdot \ddot{y} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Geschwindigkeit des akkumulierenden zentrumsaffinen Bogens wird wie folgt berechnet [64]:

$$\ddot{y}_{ca} = \frac{\ddot{y} \ddot{y}_{ea}^3}{x \cdot x \ddot{y}} \quad (4.17)$$

System (3.7) für $n = 3$ in der Ebene wird

$$\begin{aligned} \ddot{y} \cdot x \cdot \ddot{y}^2 \cdot yx \cdot \ddot{y}^2 \cdot \ddot{y} \cdot 2x \cdot \ddot{y} \cdot 2y \cdot \ddot{y} \cdot (4) \cdot \ddot{y} \cdot 2y \cdot \ddot{y} \cdot (4) + 2x \cdot \ddot{y}x \cdot (5) + 2y \cdot \ddot{y}y \cdot (5) &= \text{const}, + \\ \ddot{y} \cdot \frac{\ddot{y}y \cdot \ddot{y} \cdot x \cdot \ddot{y} \cdot \ddot{y}}{xy \ddot{y} \cdot \ddot{y} \cdot x \cdot \ddot{y}y} &= 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Differenzierung erfolgt bezüglich des zentrumsaffinen Bogens $\tilde{y}ca$.

Die Ergebnisse für mögliche Lösungen (Parabel, Kreis, logarithmische Spirale) sind wie folgt:

1. Parabel. Gleichung (4.17) impliziert, dass die Koordinaten einer mit zentralaffiner Länge parametrisierten Parabel bis zu einer zentralaffinen Transformation sind: $x(\tilde{y}ca) = 1/\text{const} \cdot \exp(\tilde{y}ca/2)$, $y(\tilde{y}ca) = 1/(2\text{const}^2) \cdot \exp(\tilde{y}ca/2)$. Diese Ausdrücke erfüllen nicht die obere Gleichung des Systems (4.18).
2. Kreis. Unter Verwendung der Parametrisierung eines Kreises mit gleichaffiner Länge wie in (4.5) impliziert Gleichung (4.17) ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass für einen Kreis die zentrumsaffine Geschwindigkeit wie folgt mit der gleichaffinen Geschwindigkeit zusammenhängt:

$$\tilde{y}ca = \tilde{y}ea \cdot \frac{1}{8} \cdot \tilde{y}ea.$$

Die äquiaffine Krümmung eines Kreises ist eine positive Konstante. Daher ist das Zeichnen eines Kreises mit konstanter zentrumsaffiner Geschwindigkeit gleichbedeutend mit dem Zeichnen eines Kreises mit konstanter gleichaffiner Geschwindigkeit. Somit ist System (4.18) für jeden Kreis erfüllt, da Kreise das entsprechende Gleichungssystem für die äquiaffine Parametrisierung erfüllen.

3. Logarithmische Spirale. Eine direkte Berechnung basierend auf (4.17) impliziert, dass die Geschwindigkeit des akkumulierenden zentrumsaffinen Bogens in Bezug auf den sich ändernden Polarwinkel $\tilde{y}$ aus (4.7) die folgende Konstante $d\tilde{y}ca/d\tilde{y} = 1 + \tilde{y}^2$ ist. Ohne

Einschränkung der Allgemeinheit $\frac{1}{1 + \tilde{y}^2} \tilde{y}a$. Der Ausdruck für den Logarith

$\tilde{y} = \text{mic Spirale (4.7)}$ wird

$$\begin{aligned} x(\tilde{y}ca) &= \text{const} \cdot \exp \tilde{y} \cdot \frac{1}{1 + \tilde{y}^2} \tilde{y}ca \cos \frac{1}{1 + \tilde{y}^2} \tilde{y}ca \\ y(\tilde{y}ca) &= \text{const} \cdot \exp \tilde{y} \cdot \frac{1}{1 + \tilde{y}^2} \tilde{y}ca \sin \frac{1}{1 + \tilde{y}^2} \tilde{y}ca. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die logarithmische Spirale erfüllt das System (4.18) für $\tilde{y} = \pm 5 \pm 2 \tilde{y} 5$. Dies sind die gleichen $\tilde{y}$ wie im Fall der affinen Gruppe!

4.4 Euklidische Gruppe

Euklidische Koordinatentransformationen sind dreiparametrisch und haben die Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos(\tilde{y}) - y \sin(\tilde{y}) + a \\ y_1 &= x \sin(\tilde{y}) + y \cos(\tilde{y}) + b \end{aligned}, \quad (4.20)$$

Die Geschwindigkeit des sich ansammelnden euklidischen Bogens, der eine Standardvorstellung der Tangentialgeschwindigkeit ist, deren Integral gleich der Länge der gezeichneten Flugbahn ist, wird wie folgt berechnet:

$$\tilde{y}eu = \sqrt{x\dot{\tilde{y}}^2 + \dot{\tilde{y}}y^2}. \quad (4.21)$$

Das System (3.7) für $n = 3$ in der Ebene wird

$$\begin{aligned} x''^2 + y''^2 - 2x''x' - 2y''y' + 2x'y'x'' + 2y'y'' &= \text{const}, \\ x'^2 + y'^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Differenzierung wird bezüglich des Euklidischen Bogens $\bar{y}$ durchgeführt. Die Ergebnisse für mögliche Lösungen (Parabel, Kreis, logarithmische Spirale) sind wie folgt:

1. Parabel. Gleichung (4.21) impliziert, dass die Koordinaten einer mit euklidischer Länge parametrisierten Parabel bis zur euklidischen Transformation aus den folgenden beiden Gleichungen abgeleitet werden: $\bar{y}_{\text{eu}}(x) = 0,5x^2 + 1 + 0,5 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\bar{y}(x) = x^2/2$. Diese Ausdrücke erfüllen nicht das System (4.22) und daher minimiert eine Bewegung mit konstanter euklidischer Geschwindigkeit entlang der Parabel den Ruck nicht. Das gleiche Ergebnis kann auch aus der Tatsache geschlossen werden, dass sich die Flugbahn des Zeichnens einer Parabel mit konstanter äquiaffiner Geschwindigkeit (die den Ruck minimiert) von der Flugbahn des Zeichnens derselben Form mit konstanter euklidischer Geschwindigkeit unterscheidet, natürlich auch die Dauer beider Flugbahnen sind gleich.
2. Kreis. Eine Bewegung mit konstanter euklidischer Geschwindigkeit entlang eines Kreises ist äquivalent zu einer Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und daher auch einer Bewegung mit konstanter gleichaffiner Geschwindigkeit. Damit ist das System (4.22) für Kreise erfüllt.
3. Logarithmische Spirale. Eine direkte Berechnung basierend auf (4.7) und (4.21) impliziert, dass die Geschwindigkeit der Akkumulation der euklidischen Bogenlänge in Bezug auf den sich ändernden Polarwinkel $\bar{y}$ der folgende Ausdruck $d\bar{y}_{\text{eu}}/d\bar{y} = \exp(\bar{y})$ ist.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\bar{y} = \ln \frac{\bar{y}}{1 + \bar{y}^2} \bar{y}_{\text{eu}} / \bar{y}$. Die Ausdrücke
sion für die logarithmische Spirale (4.7) wird

$$\begin{aligned} x(\bar{y}_{\text{eu}}) &= \text{const} \cdot \bar{y} \frac{\bar{y}}{1 + \bar{y}^2} \bar{y}_{\text{eu}} \cos \ln \frac{\bar{y}}{1 + \bar{y}^2} \bar{y}_{\text{eu}} / \bar{y} \\ y(\bar{y}_{\text{eu}}) &= \text{const} \cdot \bar{y} \frac{\bar{y}}{1 + \bar{y}^2} \bar{y}_{\text{eu}} \sin \ln \frac{\bar{y}}{1 + \bar{y}^2} \bar{y}_{\text{eu}} / \bar{y}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

1 Die logarithmische Spirale erfüllt das System (4.22) für $\bar{y} = \pm \bar{y}$. Diese Werte $\bar{y}$ von unterscheiden sich von den Werten von $\bar{y}$ in Fällen, in denen gleichaffine, affine oder zentralaffine Bögen mit konstanter Geschwindigkeit akkumuliert werden, während die Kostenfunktion minimiert wird.

4.5 Pseudolösungen

Ich nenne Pseudolösung eine Vektorfunktion, die die obere Gleichung des Systems (3.7) erfüllt, aber nicht die untere Gleichung des Systems. In

Mit anderen Worten: Die Vektorfunktion stellt für eine gegebene geometrische Parametrisierung keine Kurve dar. Beispiel 3.2 demonstrierte eine Vektorfunktion, die ist eine Lösung in äquiaffiner Parametrisierung und nur eine Pseudolösung in einer Menge anderer Parametrisierungen. Offenbar gibt es noch mehr solcher Beispiele. Wann $\ddot{y} = \pm 5 \pm 2 \ddot{y} 5$ (die gleichen Werte von $\ddot{y}$ wurden bei logarithmischen Messungen erhalten Spirale parametrisiert mit affinen oder zentrumsaffinen Bögen) die folgenden zwei Vektoren Funktionen:

$$\begin{aligned} x(\ddot{y}) &= \cos(\ddot{y}) \cosh(\ddot{y}\ddot{y}) \\ y(\ddot{y}) &= \sin(\ddot{y}) \cosh(\ddot{y}\ddot{y}) , \end{aligned}$$

(4.24)

$$\begin{aligned} x(\ddot{y}) &= \cos(\ddot{y}) \sinh(\ddot{y}\ddot{y}) \\ y(\ddot{y}) &= \sin(\ddot{y}) \sinh(\ddot{y}\ddot{y}) , \end{aligned}$$

(4.25)

erfüllen die obere Gleichung im System (3.7), stellen aber keine Kurve dar parametrisiert durch eines der oben genannten (äquiaffinen, affinen, zentralaffinen, Euklidische) Parametrisierungen.

4.6 Zusammenfassung bekannter planarer Lösungen und einiger Pseudolösungen

Die Ergebnisse von Abschnitt 4 für die Kandidatenlösungen und Pseudolösungen in 2 Abmessungen und Ordnung der Flugbahnglätte $n = 3$ sind in der Tabelle zusammengefasst 2.

Objekt	Invarianz	Gleichaffin Bogen	Affin Bogen	Zentrumsaffiner Bogen	Euklidianer Bogen
Parabel	Affin	Beliebig	Nicht relevant	Keiner	Keiner
Kreis	- Euklidisch - Einheitliche Skalierung	Beliebig	Beliebig	Beliebig	Beliebig
Logarithmisch - Euklidische Spirale (4.7) „Cosh-“	- Einheitliche Skalierung	Wenn $\ddot{y} = \underline{\hspace{1cm}}$ $\pm 3/ \ddot{y} 7 \pm 5 \pm 2 \ddot{y} 5 \pm 5 \pm 2 \ddot{y} 5 \pm 1/ \ddot{y} 5$	Wenn $\ddot{y} = \underline{\hspace{1cm}}$	Wenn $\ddot{y} = \underline{\hspace{1cm}}$	Wenn $\ddot{y} = \underline{\hspace{1cm}}$
Spirale“ (4.24) „Sinh-“		Pseudolösung	Pseudolösung	Pseudolösung	Pseudo- Lösung
Spirale“ (4.25)		Pseudolösung	Pseudolösung	Pseudolösung	Pseudo- Lösung

Tabelle 2: Bekannte Lösungen und zwei Pseudolösungen des Systems (3.7) und (3.8)) in der Ebene für die Ordnung der Flugbahnglätte $n = 3$ und geometrische Parametrisierungen, die in der affinen Gruppe und drei ihrer Untergruppen invariant sind. Invarianz von die Klasse der Kurven und der Wert des Parameters $\ddot{y}$ der logarithmischen Spirale sind angegeben.

4.7 Ausreichender Zustand

Die hinreichende Bedingung (3.9), dass eine Kurve zur in (3.4) definierten Menge A^* gehört, ist für Parabeln und Kreise erfüllt. Für logarithmische Spiralen ist die ausreichende Bedingung nur für einen Teil der γ -Werte aus Tabelle 2 erfüllt, wie in Tabelle 3 gezeigt. Logarithmische Spiralen mit γ -Werten in Tabelle 3 sind Lösungen des Minimierungsproblems (3.2) mit Randbedingungen¹¹ (sie können Lösungen des Minimierungsproblems ohne Randbedingungen sein, dies wurde jedoch nicht bewiesen. Für logarithmische Spiralen, deren γ -Werte nicht in Tabelle 3 vorkommen, sollten andere Tests durchgeführt werden, um festzustellen, ob sie tatsächlich zur Menge A^* gehören

n, L.

	Gleichaffin	Affin	Zentrumsaffiner	Euklidianer
	Bogen	Bogen	Bogen	Bogen
γ	$3/\sqrt{7}$	$\sqrt{5} \pm \sqrt{5} \sqrt{5} \pm \sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$

Tabelle 3: Logarithmische Spirale mit den Werten von γ in der Tabelle erfüllen die ausreichende Bedingung (3.9) für das Optimierungsproblem (3.2) mit Randbedingungen.

5 Lösungen im Weltraum zur Parametrisierung mit Äquiaffiner 3D-Bogen

Äquiaffine Transformationen von Koordinaten im Raum umfassen 11 unabhängige Parameter und haben die Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + a \\ y_1 &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + b \\ z_1 &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \\ \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{5.1}$$

Die Geschwindigkeit des sich akkumulierenden räumlichen äquiaffinen Bogens wird wie folgt berechnet [64]:

$$\gamma_{ea3} = \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{matrix} \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \frac{1}{6}$$

$$\tag{5.2}$$

System (3.7) für $n = 3$ im Raum wird

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 + 2\gamma_x\gamma_y(4) + 2\gamma_x\gamma_z(5) + 2\gamma_y\gamma_z(5) = \text{const},$$

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = 1 \tag{5.3}$$

¹¹Die notwendigen Bedingungen (3.7), (3.8) werden von den Lösungen beider Optimierungen erfüllt Probleme: 1) mit Randbedingungen (3.2) und 2) ohne Randbedingungen (3.3).

oder nach Differenzierung beider Seiten der oberen Gleichung in (5.3)

$$\ddot{x} \ddot{x} (6) + \ddot{y} \ddot{y} (6) + \ddot{z} \ddot{z} (6) = 0, \quad (5.4)$$

$$\ddot{x} \ddot{x} + \ddot{y} \ddot{y} + \ddot{z} \ddot{z} = 1.$$

Die Differenzierung wird in Bezug auf den räumlichen äquiaffinen Bogen durchgeführt

$$\ddot{y} \ddot{y} = \int_0^{\tau} \ddot{y} \ddot{y} \, d\ddot{y}. \quad (5.5)$$

Die folgenden beiden Kurven sind bekannte Lösungen des Systems (5.4).

1. Die parabolische Schraubenlinie [52] wird mit einem räumlichen äquiaffinen Bogen bis zu einer räumlichen äquiaffinen Transformation wie folgt parametrisiert:

$$\begin{aligned} x &= \ddot{y} \ddot{y} a^3 \\ y &= \ddot{y} \ddot{y} a^3 / 2 \\ z &= \ddot{y} \ddot{y} a^3 / 6. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Offensichtlich ist die parabolische Schraubenlinie eine invariante Lösung unter beliebigen räumlichen äquiaffinen Transformationen. Die Klasse der parabolischen Schraubenlinien ist unter beliebigen räumlichen affinen Transformationen invariant.

2. Die elliptische Schraubenlinie wird mit einem räumlich gleichaffinen Bogen bis zu einer parametrisierten räumlichen äquiaffinen Transformation wie folgt:

$$\begin{aligned} x &= \ddot{y} \cos \ddot{y} / 3 \ddot{y} a^3 \\ y &= \ddot{y} \sin \ddot{y} / 3 \ddot{y} a^3 \\ z &= \ddot{y} / 3 \ddot{y} a^3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Räumliche euklidische Transformationen und räumlich gleichmäßige Skalierung elliptischer Schraubenlinien stellen ebenfalls Lösungen des Systems (5.3) dar. Beliebige äquiaffine Transformationen der elliptischen Schraubenlinie der Form (5.7) sind nicht unbedingt Lösungen des Systems (5.3).

Ausreichende Bedingung (3.9) für das Optimierungsproblem mit den Grenzen (3.2) $12 + 3\ddot{y}^6$ ist für die parabolische Schraubenlinie erfüllt, wenn $\ddot{y} a^3$ außerhalb des Intervalls $\frac{12\ddot{y}^3 \ddot{y}^6}{6 \cdot 10}, \frac{10}{\ddot{y}^6}$ liegt. Die elliptische Schraubenlinie gehört zur Klasse der Lösungen des Optimierungsproblems mit Randbedingungen, da sie die ausreichende Bedingung (3.9) erfüllt.

6 weitere Fälle

Bestimmte Lösungen für eine Reihe spezifischer Fälle der Gleichung wurden oben betrachtet: Dimension $L = 2, 3$; Glätte der Flugbahn (in der Ordnung 3); Und

Parametrisierung in 4 Geometrien. Erstens kann es für die betrachteten Gleichungen mehrere Lösungen geben. Zweitens können andere Fälle der Gleichung, z. Wenn die Ordnung der Flugbahnglätte $n = 4$ ist, könnten sowohl bekannte Lösungen für $n = 3$ als auch andere Lösungen vorhanden sein. Bei äquiaffiner Parametrisierung sind alle Parabeln und Kreise Lösungen für den Fall $n = 4$, genau wie im Fall von $n = 3$. Allerdings unterscheidet sich die Lösung aus der Klasse der logarithmischen Spiralen (mit $\dot{y} = \pm(43 \pm 4 \sqrt{97})$) von der logarithmischen Spirale, die eine Lösung für den Fall $n = 3$ ($\dot{y} = \pm 3/\sqrt{7}$) darstellt. Die Betrachtung von Gleichungssystemen unter verschiedenen Kombinationen von Dimension, Glätte der Flugbahn und geometrischer Parametrisierung könnte zu weiteren Lösungen führen, deren Eignung als geometrische Bewegungsprimitive weiter analysiert werden kann.

7 Nachwort

Die folgende Einsicht eines prominenten Mathematikers des 20. Jahrhunderts, Andrey Kolmogorov, nahm die Idee der Existenz geometrischer Bewegungsprimitive vorweg [38]: „Wenn wir uns der menschlichen Aktivität zuwenden – bewusst, aber nicht den Regeln der formalen Logik folgend, also intuitiv.“ oder halbintuitive Aktivität, zum Beispiel auf motorische Reaktionen, werden wir herausfinden, dass die hohe Perfektion und Schärfe des Mechanismus der kontinuierlichen Bewegung auf den Bewegungen des kontinuierlichen geometrischen Typs beruht ... Man kann jedoch davon ausgehen, dass dies nicht der Fall ist ein radikaler Einwand gegen diskrete Mechanismen. Höchstwahrscheinlich wird die Intuition kontinuierlicher Kurven im Gehirn auf der Grundlage des diskreten Mechanismus

Meiner Ansicht nach bedeutet Kolmogorovs Idee, dass die Darstellung von Kurven im Gehirn auf geometrischen Grundelementen basiert, die Teil der „diskreten Mechanismen“ sind. Die Art und Weise, die „kontinuierlichen Kurven im Gehirn“ darzustellen, die tatsächlich aus geometrischen Grundelementen bestehen, könnte über die Planung von Flugbahnen hinausgehen und auch Wahrnehmungsprozessen und geometrischer Vorstellungskraft entsprechen. Darüber hinaus vermute ich, dass sich auf einer bestimmten hierarchischen Ebene kognitiver Prozesse die „diskreten Mechanismen“ komplexer Bewegungen und Sprache überschneiden. Beobachtungen einer niedrigdimensionalen Darstellung von Kritzelbewegungen von Affen mit parabolischen Grundelementen und einer belohnungsbezogenen Verkettung parabolischer Segmente zu komplexen Flugb

ANHÄNGE

Eine Ableitung von Satz 3.1

Gegeben ist die geometrische Parametrisierung $\dot{y}$ einer Kurve. Die Regel $\dot{y}(t)$ zum Akkumulieren von $\dot{y}$ mit der Zeit entlang der Kurve ist streng monoton und so oft wie nötig differenzierbar. Beachten Sie, dass zwischen t und $\dot{y}$ eine Eins-zu-eins-Entsprechung besteht. Definieren Sie für die Funktion $\dot{y}(t) \in [0, \dot{y}]$ eine Umkehrfunktion $t = \dot{y}(\dot{y}) \in [0, T]$.

¹²Übersetzt aus dem Russischen von FP.

Es wird folgende Notation verwendet:

$$v = \dot{y} \quad \frac{D}{dt} \bigg|_{t=\dot{y}(\ddot{y})} \dot{y} = \ddot{y}(\ddot{y})$$

Weiterhin wird für eine differenzierbare Funktion f folgende auf der Kettenregel basierende Eigenschaft verwendet :

$$\frac{D}{dt} f(\dot{y}(t)) = \frac{d\dot{y}}{dt} \cdot \frac{df(\dot{y})}{d\dot{y}} = \ddot{y} f'(\dot{y}) \quad (\text{A.1})$$

wobei Prim die Differenzierung nach $\dot{y}$ bezeichnet. So lauten beispielsweise zwei Ableitungen höherer Ordnung von $\dot{y}$ nach der Zeit:

$$\begin{aligned} w = \ddot{y} &= \frac{D}{dt} \dot{y} = \frac{D}{dt} [v(\dot{y})] = v'(\dot{y}) \dot{y} = \ddot{y} v(\dot{y}) \\ j = \ddot{\dot{y}} &= \frac{D^2}{dt^2} \dot{y} = \frac{D}{dt} \ddot{y} = \ddot{\dot{y}} = \ddot{\ddot{y}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werden weitere Herleitungen für Trajektorien in 2 Dimensionen implementiert. Ableitungen für die Trajektorien in 3 oder höheren Dimensionen sind identisch. Betrachten Sie also $J\ddot{y}(rL, n)$ aus (3.1) mit $L = 2$ und verwenden Sie (A.1), um Variablenänderungen zu implementieren:

$$\begin{aligned} J\ddot{y}(r2, n) &= \int_0^T \left(\frac{d}{dt} \frac{nx(\dot{y}(t))}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \frac{ny(\dot{y}(t))}{dt} \right)^2 dt = \\ &= \int_0^{\dot{y}} \frac{1}{v} \left(\frac{d}{dt} \frac{nx(\dot{y}(t))}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \frac{ny(\dot{y}(t))}{dt} \right)^2 d\dot{y} = \\ &= \int_0^{\dot{y}} \frac{1}{v} \ln(x'(\dot{y}), x'', \dots, \dot{y}; j, y'', \dots, y(n); v, v\dot{y}, \dots, v(n\dot{y})) d\dot{y}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

wobei $\ln$ den mit $\dot{y}$ parametrisierten Ausdruck bezeichnet :

$$\ln \dot{y} = \frac{d}{dt} \frac{nx(\dot{y}(t))}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{ny(\dot{y}(t))}{dt} \quad (\text{A.4})$$

Zum Beispiel:

$$J\ddot{y}(r2, \mathbf{3}) = \int_0^T (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) dt = \frac{1}{v} (x^2 \ddot{y}^2 + y^2 \ddot{x}^2)_v 6 + 9(x^2 \ddot{y}^2 + y^2 \ddot{x}^2)_w^{22v} + (x^2 \ddot{y}^2 + y^2 \ddot{x}^2)_{jj}^2 + 6(x^2 \ddot{y}^2 + y^2 \ddot{x}^2)_v 4w + 2(x^2 \ddot{y}^2 + y^2 \ddot{x}^2)_v^3 + 6(x^2 \ddot{y}^2 + y^2 \ddot{x}^2)_{vw} dy = \int_0^T \frac{1}{v} \cdot 13(x^2 \ddot{y}^2 + y^2 \ddot{x}^2)_{jj} \cdot j, y'', y''; v, v\ddot{y}, v\ddot{y}\ddot{y} dy$$

Geschwindigkeit der Lichtbogenakkumulation ist möglich: $\frac{dy}{v} = T$.

$$\begin{aligned} EP(\ln/v) = & \frac{\ddot{y}(\ln/v)}{\dot{y}v} \frac{D}{d\dot{y}} \frac{(\ddot{y}(\ln/v))}{\dot{y}v\dot{y}} + \frac{2\tau}{d\dot{y}2} \frac{\ddot{y}(\ln/v) \dot{y}v\dot{y}}{\dot{y}} \dots (A.5) \\ & + (\ddot{y}1)n\ddot{y}1 \frac{D^{n\ddot{y}1}}{d\dot{y}n\ddot{y}1} \frac{\ddot{y}(\ln/v)}{\dot{y}v(n\ddot{y}1)} + \ddot{y} \frac{\ddot{y}}{\dot{y}v} \frac{1}{v} = \\ & = v (2n\ddot{y}3)(\dots) + v (2n\ddot{y}4)(\dots) + \dots + v (\dots) \\ & + v^{2n\ddot{y}2} (\dots) + \ddot{y} \frac{\ddot{y}}{\dot{y}v} \frac{1}{v} = 0. \end{aligned} \quad (A.6)$$

2ny2 v Beachten Sie, dass der Term in (A.6) den Wert der Geschwindigkeit hoch 2n ÿ 2 darstellt und nicht die Reihenfolge der Ableitung. Also der Ausdruck

$$2n\ddot{y}_2 v \quad (\dots) + \ddot{y}_{VV} \frac{\ddot{y}}{v} \quad \frac{1}{v}$$

ist der einzige Teil von (A.6), der keine Ableitungen von v enthält. Bezeichnen wir mit μ den Ausdruck in den Klammern multipliziert mit v , sodass die Euler-Poisson-Gleichung (A.6) wie folgt umgeschrieben werden kann:

$$\text{EP}(\mathbf{l}) = v(2n\ddot{y}_3)(\dots) + v(2n\ddot{y}_4)(\dots) + \dots + V(\dots) + v2n\ddot{y}_2\mu n + \ddot{y} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}v} \frac{1}{v} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Jetzt als

Beispiel A.2. Betrachten wir den Fall des Minimum-Jerk-Kriteriums, also der Glätte 3.

Ordnung. Verwendung von Ableitungen, die mit den Ableitungen identisch sind, die in verwendet werden

[52] lautet die Euler-Poisson-Gleichung entsprechend (A.6) wie folgt:

$$v^{(y)} \cdot (\dots) + v^{(x)} \cdot (\dots) + v^{(t)} \cdot (\dots) + 4 + v \cdot (x^{(y2)} + j^{(y2)} \ddot{y} 2x^{(4)} \ddot{y} 2y^{(4)} + 2x \ddot{y} x^{(5)} + 2y \ddot{y} y^{(5)}) + \ddot{y} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y} v} \frac{1}{v} = 0.$$

Hier

$$\mu_3 = x^{(y2)} \ddot{y}^2 + \ddot{y} 2x^{(4)} \ddot{y} 2y^{(4)} + 2x \ddot{y} x^{(5)} + 2y \ddot{y} y^{(5)} + \ddot{y} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y} v} \frac{1}{v}$$

Das gewünschte v für die optimale Lösung ist gemäß (3.4) konstant. Daher sind alle Ableitungen von v Null und die Euler-Poisson-Gleichung für das gewünschte v reduziert sich auf Folgendes:

$$v 2n\ddot{y} 2\mu n \ddot{y} \frac{\ddot{y}}{2v} = 0.$$

Wie oben erwähnt, sind $v, \ddot{y}$ konstant, daher gilt unter der Annahme $v = 0$, was offensichtlich geschieht,

$$\mu n = \text{konst.} \quad (\text{A.8})$$

Vorschlag A.3.

$$\mu n = x^{(n)} \ddot{y}^2 (n) + y^{(n)} \ddot{y}^2 2x^{(n\ddot{y}1)} x^{(n+1)} + y^{(n\ddot{y}1)} y^{(n+1)} + 2x^{(n\ddot{y}2)} x^{(n+2)} + y^{(n\ddot{y}2)} y^{(n+2)} + \dots + (\ddot{y}1)n\ddot{y}1 \cdot 2x \ddot{y} x^{(2n\ddot{y}1)} + y^{(2n\ddot{y}1)},$$

oder formeller

$$\mu n = x^{(n)} \ddot{y}^2 (n) + y^{(n)} \ddot{y}^2 2 + 2 \sum_{i=1}^{n\ddot{y}1} (\ddot{y}1)i \times (n\ddot{y}i)x^{(n+i)} (n\ddot{y}i) (n+i) + yy, \quad (\text{A.9})$$

Dies ist die zweidimensionale Version der oberen Gleichung im System (3.7).

Nachweisen. Um den Ausdruck für μn zu finden, führen Sie die Differentiation in der Euler-Poisson-Gleichung (A.5) durch. Offenbar ist das Argument des Kostenfunktional aus (A.3),

$$\frac{d nx(\ddot{y}(t))}{dtn}^2 + \frac{d ny(\ddot{y}(t))}{dtn}^2$$

kann in den x - und y - Teil zerlegt werden und daher ist auch das Funktionsargument in der Euler-Poisson-Gleichung zerlegbar:

$$\ln = \ln, x + \ln, y = \frac{d nx(\ddot{y}(t))}{dtn}^2 + \frac{d ny(\ddot{y}(t))}{dtn}^2 \quad (\text{A.10})$$

$t=\ddot{y}(\ddot{y})$

Das Ergebnis der Differenzierung im x -Teil

$$\ln, x = \frac{d nx(\ddot{y}(t))}{dtn}^2 \quad (\text{A.11})$$

$t=\ddot{y}(\ddot{y})$

ist identisch mit dem Ergebnis der Differenzierung im y -Teil In, $i = \frac{d n y(\ddot{y}(t))}{d t n} \bigg|_{t=\ddot{y}(\ddot{y})}^2$

bis zum Namen des Arguments (x wird durch y ersetzt).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit führe ich den Beweis also nur für den x -Teil durch und muss diesen beweisen

$$(E \ddot{y} P) \frac{\ln, x}{v} = (E \ddot{y} P) \frac{\ddot{y} \frac{1}{v} \frac{d n x(\ddot{y}(t))}{d t n} \bigg|_{t=\ddot{y}(\ddot{y})}^2}{\ddot{y}} = \quad (A.12)$$

$$v \quad 2n\ddot{y}2 = x(N) \ddot{y} \quad 2x(n\ddot{y}1)x(n+1) + 2x(n\ddot{y}2)x(n+2) + \dots + (\ddot{y}1)n\ddot{y}1 \cdot 2x \ddot{y}x(2n\ddot{y}1)$$

$$+ v \quad (\dots) + v \quad (\dots) + \dots + v \quad (n) (\dots) + \ddot{y}x \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}v} \frac{1}{v} \quad .$$

Wenn das Ergebnis für den y -Teil mit (A.12) identisch ist und die x -Terme **ordnungsgemäß** durch die oben beschriebenen y -Terme ersetzt werden, impliziert dies sofort die Gleichheit (A.9), die ich beweise.

Nun wird der Ausdruck für $d n x(\ddot{y}(t))/d t n$ umgeschrieben und mit $\ddot{y}$ parametrisiert. Zeitableitungen von $x(\ddot{y}(t))$, parametrisiert durch $\ddot{y}$, werden wie folgt berechnet:

$$x \ddot{y} |_{t=\ddot{y}(\ddot{y})} = \frac{dx}{d\ddot{y}} \frac{d\ddot{y}}{dt} \bigg|_{t=\ddot{y}(\ddot{y})} \quad \ddot{y} = xv$$

$$x' |_{t=\ddot{y}(\ddot{y})} = v \cdot x \ddot{y} |_{t=\ddot{y}(\ddot{y})} = x \ddot{y} v^2 + x \frac{\ddot{y} \ddot{y}}{v}$$

$$\dots x |_{t=\ddot{y}(\ddot{y})} = v \cdot x' |_{t=\ddot{y}(\ddot{y})} = x \ddot{y} v^3 + 3x \ddot{y} v^2 + x \ddot{y} v^2 \ddot{y} + x \ddot{y} v^2 \ddot{y}^2 + v (x' \ddot{y} v).$$

Das lässt sich durch Induktion zeigen

$$\frac{d n x(\ddot{y}(t))}{d t n} \bigg|_{t=\ddot{y}(\ddot{y})} v \quad n\ddot{y}1 = \sum_{k=2}^N \sum_k x(n\ddot{y}(k\ddot{y}1)) v(k\ddot{y}1)(n) + xv + \sum_{i,j>0} v^{(ich)} v(j) (\dots). \quad (A.13)$$

Mit $(\dots)$ bezeichnete und mit $v(i)v(j)$ in (A.13) multiplizierte Ausdrücke sind in unseren Ableitungen irrelevant, da ihr Beitrag zur $\ln, x$ -Annahme wird unter dem auf Null gesetzt einer konstanten Geschwindigkeit ($v = \text{const}$) beiträgt.

Ausdruck (A.13) impliziert für die quadrierte Ableitung:

$$\frac{d n x(\ddot{y}(t))}{d t k} \bigg|_{t=\ddot{y}(\ddot{y})}^2 v \quad 2n\ddot{y}2 = \sum_{k=2}^N \sum_k x(n\ddot{y}(k\ddot{y}1)) v(k\ddot{y}1) + xv(n)^2 \quad (A.14)$$

$$+ \sum_{i,j>0} v^{(i)}(j) (\dots) = \sum_{i,j>0} v^{(i)}(j) (\dots)$$

$$+ v \quad 2n\ddot{y}2 \quad x(N) \quad v^2 + 2vx(n)n \quad \sum_{k=2}^N x(n\ddot{y}(k\ddot{y}1)) v(k\ddot{y}1) \quad .$$

Also für $\ln, x$ aus (A.11)

$$\frac{\ln, x}{v} = \sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} + 2 \cdot \sum_{k=2}^N \binom{2n}{k} \frac{1}{v} \cdot x^{(k)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) + \dots \quad (\text{A.15})$$

und die Euler-Poisson-Gleichung (A.6) für $\ln, x/v$ lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} (E \cdot P) \quad \frac{\ln, x}{v} &= \sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} + 2 \cdot \sum_{k=2}^N \binom{2n}{k} \frac{1}{v} \cdot x^{(k)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) + \dots \\ &+ 2 \cdot \sum_{k=2}^N \binom{2n}{k} \frac{1}{v} \cdot x^{(k)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) + \dots \\ &+ (\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v}) \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) + \dots \\ &+ \sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \cdot x^{(i)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Die Werte der Binomialkoeffizienten in (A.16) bilden ein Stück eines Pascal-Dreiecks ohne zwei Zahlen am Rand. Eine Eigenschaft des Pascal-Dreiecks, die ich an anderer Stelle vorstelle, impliziert dies

$$\begin{aligned} (2n \cdot \sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v}) &+ 2 \cdot \sum_{k=2}^N \binom{2n}{k} \frac{1}{v} \cdot x^{(k)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) = \\ &= \sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \cdot x^{(i)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) + \dots \end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned} (E \cdot P) \quad \frac{\ln, x}{v} &= \sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} + 2 \cdot \sum_{k=2}^N \binom{2n}{k} \frac{1}{v} \cdot x^{(k)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) + \dots \\ &+ \sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \cdot x^{(i)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{i,j>0} \binom{2n}{i} \frac{1}{v} \right) + \dots \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz A.3 abgeschlossen, was bedeutet, dass Satz 3.1 wahr ist.

□

Verweise

- [1] Bruno B. Averbeck, David A. Crowe, Matthew V. Chafee und Apostolos P. Georgopoulos, Neuronale Aktivität im präfrontalen Kortex beim Kopieren geometrischer Formen 1. Einzelne Zellen kodieren Form, Sequenz und metrische Parameter, *Experimental Brain Research* 150 (2003), Nr. 2, 127–141.
- [2] _____, Neuronale Aktivität im präfrontalen Kortex beim Kopieren geometrischer Formen 2. Dekodierung von Formsegmenten aus neuronalen Ensembles, *Experimental Brain Research* 150 (2003), Nr. 2, 142–153.
- [3] Shay Ben-Itzhak und Amir Karniel, Minimales Beschleunigungskriterium mit Einschränkungen impliziert die Bang-Bang-Kontrolle als zugrunde liegendes Prinzip für optimale Flugbahnen von Armreichweitenbewegungen, *Neural Computation* 20 (2008), Nr. 3, 779–812.
- [4] Daniel Bennequin, Ronit Fuchs, Alain Berthoz und Tamar Flash, Movement timen and invariance ergeben sich aus mehreren Geometrien, *PLoS Comput Biol* 5 (2009), Nr. 7.
- [5] Emilio Bizzi, Ferdinando A. Mussa-Ivaldi und Simon Giszter, Berechnungen, die der Ausführung von Bewegungen zugrunde liegen: eine biologische Perspektive, *Science* 253 (1991), Nr. 5017, 287–291.
- [6] Ido Bright, Bewegungsplanung durch Optimierung, Masterarbeit, Abteilung für Informatik und Angewandte Mathematik, Weizmann Institute of Science, 2007.
- [7] E Burdet und TE Milner, Quantisierung menschlicher Bewegungen und Lernen präziser Bewegungen, *Biol Cybern* 78 (1998), 307 – 318.
- [8] Eugeniu Calabi, Peter J. Olver und Allen Tannenbaum, Affine Geometrie, Kurvenflüsse und invariante numerische Approximationen, *Adv. in Mathe.* 124 (1996), 154–196, [www: http://www.math.umn.edu/olver/papers.html](http://www.math.umn.edu/olver/papers.html).
- [9] A. Casile, E. Dayan, V. Caggiano, T. Hendler, T. Flash und M. A. Giese, Neuronale Kodierung menschlicher kinematischer Invarianten während der Aktionsbeobachtung, *Cereb Cortex* 20 (2010), Nr. 7, 1647–55.
- [10] A d'Avella, A. Portone, L. Fernandez und F. Lacquaniti, Kontrolle von schnellen Bewegungen durch Muskelsynergiekombinationen, *J Neurosci* 26 (2006), 7791 – 7810.
- [11] A d'Avella, P. Saltiel und E. Bizzi, Kombinationen von Muskelsynergien beim Aufbau eines natürlichen motorischen Verhaltens, *Nat Neurosci* 6 (2003), 300 – 308.
- [12] Eran Dayan, Antonino Casile, Nava Levit-Binnun, Martin Giese, Talma Hendler und Tamar Flash, Neuronale Darstellungen kinematischer Bewegungsgesetze: Beweise für die Kopplung von Aktion und Wahrnehmung, *Proc Natl Acad Sci USA* 104 (2007), 20582 –20587.

- [13] Adam S. Dickey, Yali Amit und Nicholas G. Hatsopoulos, Heterogene neurale Kodierung korrigierender Bewegungen im motorischen Kortex, *Frontiers in Neural Circuits* 7 (2013), Artikel 51.
- [14] Laura Dipietro, Howard Poizner und Hermano I. Krebs, Spatiotemporal dynamik der Online-Motorkorrekturverarbeitung aufgedeckt durch hochdichte Elektroenzephalographie, *Journal of Cognitive Neuroscience* 26 (2014), Nr. 9, 196–1980.
- [15] Dominik Endreas, Yaron Meirovitch, Tamar Flash und Martin A. Giese, Segmentierung der Gebärdensprache in motorische Primitive mit Bayesian Binning, *Front Comput Neurosci.* 7 (2013), Nr. 68.
- [16] Pollick FE, Maoz U, Handzel AA, Giblin PJ, Sapiro G und Flash T, Dreidimensionale Armbewegungen bei konstanter äquiaffiner Geschwindigkeit, *Cortex* 45 (2009), 325–39.
- [17] A. Fishbach, SA Roy, C. Bastianen, LE Miller und JC Houk, Kinematische Eigenschaften von Online-Fehlerkorrekturen beim Affen, *Experimental Brain Research* 164 (2005), Nr. 4, 442–457.
- [18] Tamar Flash und Amir A. Handzel, Affine Differential Geometry of Human Arm Trajectories, *Abstracts of the Society for Neuroscience* (1996).
- [19] ———, Affine Differentialgeometrieanalyse menschlicher Armbewegungen, *Biological Cybernetics* 96 (2007), Nr. 6, 577–601.
- [20] Tamar Flash und Eyal Henis, Modifikation der Armbahn beim Erreichen visueller Ziele, *Journal of Cognitive Neuroscience* 3 (1991), Nr. 3, 220–230.
- [21] Tamar Flash und Binyamin Hochner, Motorprimitive bei Wirbeltieren und Wirbellosen, *Current Opinion in Neurobiology* 15 (2005), 1–7.
- [22] Tamar Flash und Neville Hogan, Die Koordination von Armbewegungen: ein experimentell bestätigtes mathematisches Modell, *The Journal of Neuroscience* 5 (1985), Nr. 7, 1688–1703.
- [23] I. Gelfand und S. Fomin, Variationsrechnung, *Dover Books on Mathematics*, 2000.
- [24] Apostolos P. Georgopoulos, John F. Kalaska, Roberto Caminiti und Joe T. Massey, Über die Beziehungen zwischen der Richtung zweidimensionaler Armbewegungen und der Zellentladung im motorischen Kortex von Primaten, *The Journal of Neuroscience* 2 (1982), Nr. 11, 1527–1537.
- [25] S. Giszter, V. Patil und C. Hart, Primitives, prämotorische Antriebe und Mustergeneration: eine kombinierte rechnerische und neuroethologische Perspektive, *Prog Brain Res* 165 (2007), 323 – 346.

- [26] [SF Giszter und CB Hart, Motorprimitive und Synergien im Rückenmark und nach Verletzungen – der aktuelle Stand der Dinge, Annals of the New York Academy of Sciences \(2013\), 114 – 126.](#)
- [27] [Simon F. Giszter, Ferdinando A. Mussa-Ivaldi und Emilio Bizzi, Conver gente Kraftfelder organisiert im Rückenmark des Frosches, The Journal of Neuro Science 13 \(1993\), Nr. 2, 467–491.](#)
- [28] Heinrich W. Guggenheimer, Differentialgeometrie, Dover, New York, 1977.
- [29] [Amir A. Handzel und Tamar Flash, Geometrische Methoden in der Untersuchung der menschlichen motorischen Kontrolle, Cognitive Studies, Bulletin der Japanese Cognitive Science Society 6 \(1999\), Nr. 3, 309–321.](#)
- [30] [Naama Kadmon Harpaz, Tamar Flash und Ilan Dinstein, Scale-invariant Movement Encoding in the Human Motor System, Neuron 81 \(2014\), 452–462 .](#)
- [31] [CB Hart und SF Giszter, Modular Premotor Drives and Unit Bursts as Primitives for Frog Motor Behaviors, Zeitschrift=J Neurosci, Band=24, Jahr=2004, Seiten=5269 – 5282 .](#)
- [32] [Nicholas G. Hatsopoulos und Yali Amit, Synthetisieren komplexer Bewegungsfragmentdarstellungen aus motorischen kortikalen Ensembles, J Physiol Paris 106 \(2012\), 112 – 119.](#)
- [33] [Nicholas G. Hatsopoulos, Qingqing Xu und Yali Amit, Encoding of move ment fragments in the motor cortex, J Neuroscience 27 \(2007\), Nr. 19, 5105 – 5114.](#)
- [34] [S. Hocherman und SP Wise, Auswirkungen des Handbewegungspaths auf die motorische kortikale Aktivität bei wachen, sich verhaltenden Rhesusaffen, Experimental Brain Research 83 \(1991\), Nr. 2, 285–302.](#)
- [35] [N. Hogan, Ein Organisationsprinzip für eine Klasse freiwilliger Bewegungen, J. Neurosci. 83 \(1984\), Nr. 2, 2745–2754.](#)
- [36] [YP Iavnenko, RE Poppele und F Lacquaniti, Fünf grundlegende Muskelaktivierungsmuster erklären die Muskelaktivität während der menschlichen Fortbewegung, J. Physiol 556 \(2004\), 267 – 282.](#)
- [37] [William J. Kargo und Simon F. Giszter, Rapid Correction of Targeted Movement ments by Summation of Force-Field Primitives, Journal of Neuroscience 20 \(2000\), Nr. 1, 409–426.](#)
- [38] Andrey Kolmogorov, Mathematik – Wissenschaft und Beruf, Nauka, Moskau, 1988.
- [39] [HI Krebs, ML Aisen, BT Volpe und N. Hogan, Quantisierung kontinuierlicher Armbewegungen bei Menschen mit Hirnverletzung, Proceedings of the National Academy of Science of the USA 96 \(1999\), Nr. 8, 4645–4649.](#)

- [40] Francesco Lacquaniti, Carlo Terzuolo und Paolo Viviani, Das Gesetz in Bezug die kinematischen und figuralen Aspekte von Zeichenbewegungen, *Acta Psychologica* 54 (1983), 115–130.
- [41] Nava Levit-Binnun, Edna Schechtman und Tamar Flash, Über die Ähnlichkeiten zwischen der Wahrnehmung und Produktion elliptischer Trajektorien, *Experimental Brain Research* 172 (2006), Nr. 4, 533–55.
- [42] Uri Maoz, Alain Berthoz und Tamar Flash, Komplexe uneingeschränkte dreidimensionale Handbewegung und konstante gleichaffine Geschwindigkeit, *J Neurophysiol* 101 (2009), Nr. 2, 1002–15.
- [43] Uri Maoz und Tamar Flash, Räumliche konstante gleichaffine Geschwindigkeit und Bewegung Wahrnehmung, *J Neurophysiol* 111 (2014), Nr. 2, 336–49.
- [44] Daniel W. Moran und Andrew B. Schwartz, Motorische kortikale Aktivität während Zeichenbewegungen: Bevölkerungsdarstellung während der Spiralverfolgung, *Journal of Neurophysiology* 82 (1999), 2693–2704.
- [45] ———, Motorische kortikale Aktivitätsdarstellung von Geschwindigkeit und Richtung während erreichen, *Journal of Neurophysiology* 82 (1999), 2676–2692.
- [46] P Morasso und FA Mussa Ivaldi, Flugbahnbildung und Handschrift: a Rechenmodus, *Biol Cybern* 45 (1982), 131 – 142.
- [47] FA Mussa-Ivaldi und E Bizzi, Motorisches Lernen durch die Kombination von Primitiven, *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci* 355 (2000), 1755–1769.
- [48] FA Mussa-Ivaldi und SA Solla, Neural Primitives for Motion Control, *IEEE J Ocean Eng* 29 (2000), 640 – 650.
- [49] Richard Nichols, Eine biomechanische Perspektive auf spinale Mechanismen koordinierter Muskelaktionen: ein Architekturprinzip, *Acta Anatomia* 151 (1994), 1–13.
- [50] Frank E. Pollick und Guillermo Sapiro, Konstante affine Geschwindigkeit sagt voraus $1/3$ Potenzgesetz der planaren Bewegungswahrnehmung und -erzeugung, *Vision Research* 37 (1997), Nr. 3, 347–353.
- [51] Felix Polyakov, Analyse von Affenkritzeleien während des Lernens im Rahmen von Modellen planarer Handbewegung, Fachbereich Informatik und Angewandte Mathematik, Weizmann Institute of Science (2001).
- [52] ———, Bewegungsprimitive und Invarianten bei den Kritzelbewegungen von Affen: Analyse und mathematische Modellierung von Bewegungskinematik und neuronalen Aktivitäten, Abteilung für Informatik und Angewandte Mathematik, Weizmann-Institut für Wissenschaft (2006).
- [53] Felix Polyakov, Rotem Drori, Yoram Ben-Shaul, Moshe Abeles und Tamar Flash, Eine kompakte Darstellung von Zeichenbewegungen mit Sequenzen von parabolische Grundelemente, *PLoS Computational Biology* 5 (2009), Nr. 7.

- [54] Felix Polyakov, Tamar Flash, Moshe Abeles, Yoram Ben-Shaul, Rotem Drori und Zoltan Nadasdy, Analyse der Bewegungsplanung und des Lernens bei Kritzelbewegungen von Affen, Tagungsband der zehnten Biennale-Konferenz der International Graphonomics Society. Die Universität Nijmegen, Nijmegen, Niederlande. (2001), 78–83.
- [55] Felix Polyakov, Eran Stark, Rotem Drori, Moshe Abeles und Tamar Flash, Parabolische Bewegungsprimitive und kortikale Zustände: Verschmelzung von Optimalität mit geometrischer Invarianz, *Biological Cybernetics* 100 (2009), Nr. 2, 159–184.
- [56] Magnus JE Richardson und Tamar Flash, Comparing Smooth Arm Movements with the Two Thirds Power Law and the Related Segmented-Control Hypothesis, *Journal of Neuroscience* 22 (2002), Nr. 18, 82018211.
- [57] B Rohrer und N Hogan, Vermeidung von Spurious Submovement Decompositions: ein global optimaler Algorithmus, *Biol Cybern* 89 (2003), 190 – 199.
- [58] _____, Vermeidung unerwünschter Unterbewegungszerlegungenii: ein Scattershot- Algorithmus, *Biol Cybern* 94 (2006), 409 – 414.
- [59] TD Sanger, Menschliche Armbewegungen beschrieben durch eine niedrigdimensionale Superposition der Hauptkomponenten, *J Neurosci* 20 (2000), 1066 – 1072.
- [60] Andrew B. Schwartz, Direkte kortikale Darstellung der Zeichnung, *Science* 265 (1994), 540–542.
- [61] _____, Motorische kortikale Aktivität während Zeichenbewegungen: Bevölkerungsrepräsentation während der Sinuskurve, *Journal of Neurophysiology* 70 (Juli 1992), Nr. 1, 28–36.
- [62] Andrew B. Schwartz und Daniel B. Moran, Motorische kortikale Aktivität während Zeichenbewegungen: Bevölkerungsdarstellung während der Lemniskateverfolgung, *Journal of Neurophysiology* 82 (1999), Nr. 5, 2705–2718.
- [63] Maryam M. Shanechi, Rollin C. Hu, Marissa Powers, Gregory W. Wornell, Emery N. Brown und Ziv M. Williams, Neural Population Partitioning and a Concurrent Brain-Machine Interface for Sequential Motor Function, *Nat Neurosci.* 15 (2012), Nr. 2.
- [64] PA Shirokov und AP Shirokov, *Affine Differential Geometry, GIFML*, Moskau, 1959, deutsche Ausgabe: *Affine Differentialgeometrie*, Teubner, 1962.
- [65] Kurt A. Thoroughman und Reza Shadmehr, Handlungslernen durch adaptive Kombination motorischer Grundelemente, *Nature* 407 (2000), 742–747, Interesting.
- [66] Emanuel Todorov und Michael I. Jordan, Smoothness maximization Along a predefinierter Pfad sagt die Geschwindigkeitsprofile komplexer Armbewegungen genau voraus, *Journal of Neurophysiology* 80 (1998), Nr. 2, 696–714.

- [67] MC Tresch, P Saltiel und E Bizzi, The construction of Movement by the spinal cord, Nat Neurosci 2 (1999), 162 – 167.
- [68] EJ van Zuylen, CC Gielen und JJ van der Gon Denier, Koordination und inhomogene Aktivierung menschlicher Armmuskeln während isometrischer Drehmomente, J Neurophysiol 60 (1988), 1523 – 1548.
- [69] P. Viviani und N. Stucchi, Biological Movements Look Uniform: Evidence of Motor-Perceptual Interactions, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance 18 (1992), Nr. 3, 603–623.
- [70] Paolo Viviani und Tamar Flash, Minimum-Jerk, Two-Thirds Power Law, and Isochrony: Converging Approaches to Movement Planning, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance 21 (1995), Nr. 1, 233–242.
- [71] Ido Zelman, Myriam Titon, Yoram Yekutieli, Shlomi Hanassy, Binyamin Hochner und Tamar Flash, Kinematische Zerlegung und Klassifizierung von Oktopus-Armbewegungen, Frontiers in Computational Neuroscience 7 (2013).