Определение кинематической метрики для роботов-манипуляторов

Кшиштоф Чон Игнаций Дульеба Институт
инженерной кибернетики Вроцлавского
технического университета ул.
Janiszewskiego 11/17, 50-372
Вроцлав, Польша

Абстрактный

С помощью римановой метрики в специальной евклидовой группе определяется кинематическая метрика на пространстве кинематики роботов-манипуляторов. Метрику можно использовать в качестве инструмента для кинематического проектирования и оценки производительности роботов-манипуляторов.

Ключевые слова: кинематика, экспоненциальные координаты, риманова метрика, геодезические, Метрика Чебышева, аппроксимация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Непременным элементом оптимального проектирования кинематики роботов-манипуляторов является процедура оценки. Оценка кинематики должна установить порядок кинематического предпочтения и, в конечном счете, привести к выбору оптимальных конструкций.
Несколько показателей кинематической производительности, рассматриваемых в литературе по робототехнике, касаются именно вопроса оценки; ср. например (Йошикава, 1985 г., Кляйн и Блахо, 1987 г., Парк и Брокетт, 1989 г.).
Тему данной статьи также можно рассматривать как вклад в набор средств оценки кинематики роботов-манипуляторов. Более конкретно, мы предлагаем опираться на оценку кинематики на меру расстояния (метрику) между кинематиками. С этой целью мы рассматриваем кинематику как непрерывные отображения из компактного внутреннего (совместного) пространства X в пространство внешних положений и ориентаций эффектора, отождествляемого со специальной евклидовой группой SE(3). Наша конструкция кинематической метрики стандартна; он обеспечивает метрику, часто называемую метрикой Чебышева, на множестве непрерывных (X, SE (3)) X в SE (3), используя левоинвариантную риманову метрику f'' : X SE (3) и d : SE(3) × карты C^0 SE(3) R —метрика
в SE(3). Таким образом, если ′
f в SE(3) определяется римановой метрикой, то метрика Чебышева определяется как $\rho(f', f'') = \max_{x \in X} d(f'(x), f''(x))$. Следует, однако, признать, что, поскольку на SE(3) нет естественной римановой метрики, наша конструкция, хотя и хорошо мотивированная и приводящая к вычислимым формулам, не является единственно возможной. Подробные аргументы в пользу римановой метрики, принятой в данной статье, будут приведены в разделе 2.

Введя метрическую структуру в C, измерьте ^{0}(X, SE(3)), мы в состоянии не только расстояние между двумя кинематиками, но также рассмотрите следующую кинематическую проблема аппроксимации. При заданной кинематической характеристике f C и семействе^{0}(X , СЭ(3)), кинематических характеристик kv , зависящих от геометрических параметров v V (размеры звеньев, углы закручивания , параметры сдвига (Paul 1981)), найдите наилучшее кинематическое приближение к f в смысле метрика p.

В качестве естественного промежуточного шага к определению метрики в множестве кинематики робота мы нашли явные формулы для экспоненциальных координат и для метрики d в SE(3).

Последняя метрика определяет расстояние между двумя точками в SE(3) как равное минимальной длине кривой, соединяющей точки. Рассматриваемая здесь метрика в SE(3) напоминает меру отклонений смещения и вращения , введенную в (Taylor 1983), но приводит к большим значениям расстояния , которые более точно отражают внутреннюю геометрическую структуру SE(3). Построение этой метрики также дает особый подход к планированию траектории для двухточечного управления роботами-манипуляторами во внешнем пространстве, который основан на отслеживании геодезической линии, соединяющей две точки в SE(3). Подобный подход к планированию траектории во внутреннем пространстве манипулятора описан в (Shin, McKay, 1986).

В (Чон и Дульеба, 1991) был представлен алгоритм, использующий экспоненциальные координаты в SE(3) для генерации траекторий минимальной длины (геодезических) в рабочей области манипулятора.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы вводим основные математические понятия , такие как определение кинематической метрики, экспоненциальные координаты в SE(3), левоинвариантные римановы метрики в SE(3), геодезические и метрику в SE(3), индуцированную римановой состав. Мы также формулируем список требований, которым должна удовлетворять «разумная » риманова метрика на SE(3), и делаем конкретный выбор метрики. Раздел 3 содержит основные результаты. Мы даем там явную формулу для экспоненциальных координат в SE(3), определяем их область определения и даем локальное выражение для метрики в SE(3). В разделе 4 мы вычисляем кинематический показатель для 6 образцов кинематики, включая манипулятор PUMA 600. В разделе 5 представлен эскиз предполагаемых роботизированных приложений метрики. Статья завершается разделом 6, посвященным вычислительным свойствам кинематической метрики. Значение символьных вычислений оценено по достоинству, и предложены поддающиеся вычислению оценки метрики в SE(3).

2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим кинематику жестких роботов-манипуляторов с n степенями свободы, снабженных призматическими или вращательными шарнирами. Такая кинематика может быть представлена математически как непрерывная карта

k : X SE(3), (1) где X —пространство внутренних переменных

манипулятора (положения суставов), SE(3) —специальная евклидова группа движений твердого тела, (Брокетт, 1984, Лонкарик, 1985). Принимая во внимание физические ограничения движения в суставах , приходим к выводу, что внутреннее пространство X является компактным подмножеством Rn .

Зафиксируем базовую систему координат манипулятора. Тогда группу SE(3) можно представить в виде полупрямого произведения поворотов и перемещений относительно базовой системы отсчета, так что SE(3) = SO(3) × R3 . Здесь SO(3) обозначает специальную ортогональную группу в R3 , т.е.

,

группа всех 3 на 3 матриц R с det R = 1 и R · RT = I3, R3 —группа трансляций в R3 . Согласно известному матричному представлению, любой элемент RT 0 1

SE (3) можно рассматривать как матрицу 4 на 4 вида при R SO(3),

T R3 (Пол, 1981). Для конфигурации x X манипулятора кинематика

k(x) = P(x) T(x) 0 1 означает, что система координат эффектора сместилась на

T(x) относительно базового кадра, а его ориентация описывается R(x) .

Обозначим через Kn множество всех кинематик (1) с n степенями свободы. Ясно, что Kn Cn = C. Хороший 0 (X, SE(3)) - множество непрерывных отображений из X в SE(3). Стан способ снабдить Cn метрикой относится к метрике в SE(3). Предположим, что для , f′′ Cn мы момент, когда d обозначает такую метрику. Тогда для ф ′ определяем, (Энгелькинг 1975)

$$\rho(f', f'') = \max_{x \in X} d(f'(x), f''(x)) \tag{2}$$

Для построения метрики d нам необходимо дополнительно исследовать свойства SE(3).

Прежде всего заметим, что специальная евклидова группа SE(3) имеет структуру связной группы Ли, и dim SE(3) = 6. Используя дифференцируемую структуру SE(3), кинематику (1) можно рассматривать как гладкую (т.е. бесконечно непрерывно дифференцируемые) или даже аналитические отображения . Алгебра Ли se(3) евклидовой группы представляет собой произведение se(3) = so(3)×R3 , где so(3) обозначает множество всех кососимметричных матриц размера 3 на 3.

При 0 r3 r2 0

относительно отождествления R3 r = [r] = г 3 r1 0 so(3) , se(3) = R6 .

r2 r1

Существует гладкое отображение exp : se(3) SE(3), локально диффеоморфизм, обращение которого вводит так называемые экспоненциальные координаты в SE(3), exp 1 : (U, E) (R6 , 0), заданный на некоторой открытой окрестности U единичного элемента E = I4 SE(3). Позволять

с = PT 0 1 U, а экспоненциальные координаты точки s обозначим через (r, t) = [р] т 0 0

. Затем аналогично (Loncaric 1985) находим, что exp [р] т 0 0 "=" PT 0 1 урожаи

R = e T = [r], ets[r]ds, A = T = e[r] — матричная экспоненциальная функция . 1 0

теореме Эйлера (Richtmyer 1981) собственные значения R равны 1, e с cos α = ±iα ,

1 2 · (TrR 1), TrR = R11 + R22 + R33. Следовательно, [r] имеет собственные значения

0 , ±iα, а собственные значения A составляют λ1 = 1, λ2,3 = г рех α α ± 2i · г рех 2 2 α а. В конце концов,

так как det A = λ1 · λ2 · λ3 = г рех α 2 α 2 2 , заключаем, что при 0 α < π экспонента

координаты s = PT 0 1 хорошо определены и выражаются следующим образом

$$\exp^{-1} \text{PT 0 1} = (r, t), \text{ где } [r] = \ln R \quad , \quad \tau = A^{-1} \cdot T \tag{3}$$

Здесь выше ln R обозначает матричный логарифм, см. (Gantmacher 1988). Во-вторых, пусть Q — симметричная положительно определенная матрица 6 на 6. Ясно, что Q определяет скалярное произведение в R6 , сопоставляя любым x, y R6 число (x, Qy) = x TQy. Матрицу Q можно использовать для введения левоинвариантной римановой метрики в SE(3), приписывая ξ, η TsSE(3) значение (ξ, η)(s) = (Ls 1 ξ, QLs 1 η), (Арнольд, 1978). Здесь TsSE(3) обозначает касательное пространство к SE(3) в точке s, Ls 1 —касательное отображение для левого внутреннего автоморфизма

1 v c v SE(3) . Риманова метрика делает SE(3) римановым многообразием, а s′′ SE(3) –минимальной длиной позволяет нам измерить расстояние между любой кривой s в , SE(3), соединяющей s , c '', т.е.

$$д(c', s'') = \inf s(\cdot) \int_{т'}^{т«} \sqrt{(σ(t), σ(t))(s(t))}\, dt \quad (4)$$

где σ(t) = ˙s(t) —вектор, касательный к s(·) в точке s(t), а инфимум берется по (кусочно-гладким) кривым s(·) таким, что s(t ′) = s , s(t ′′) = s ′′ . В-третьих, расстояние (4) можно эффективно вычислить, используя тот факт, что SE(3) является геодезически полным, поэтому кривая минимальной длины, соединяющая s s′ ′ , реализуется геодезической (Gallot, Hulin and Lafontaine 1987). Более того, относительно левоинвариантной римановой метрики, определенной выше, длина дуги минимального геодезического соединения s s′′ совпадает с длиной дуги

минимальной геодезической в SE(3) между I4 и s ′ 1 U (U —область определения экспоненциальных координат), с ′ 1 ′′ c последняя длина совпадает со значением Q-нормы exp ′ 1 (ss ′′) в P6 . В следующем разделе мы воспользуемся этим наблюдением, чтобы получить явную формулу для расстояния (4) и, следовательно, определить метрику (2) для конкретного выбора Q.

Как мы уже упоминали, любое скалярное произведение в R6 дает левоинвариантную риманову метрику на SE(3), так что фактически мы имеем дело с семейством таких метрик, зависящим от выбора матрицы Q. Хорошо известно, что см., например, (Loncaric 1985) , что не существует естественного выбора Q, в частности, не существует никакой биинвариантной (т.е. одновременно инвариантной слева и справа) римановой метрики на SE(3). С другой стороны, такие естественные метрики существуют на подгруппах SE(3): метрика вращений SO(3) и трансляций R3 .
Эти метрики не определяют естественную метрику на SE(3) главным образом потому, что SE(3) является полупрямым, а не прямым произведением SO(3) и R3 . Среди подгрупп SE(3) выделим подгруппы винтовых движений, т. е. поворотов с последующим переносом относительно одной и той же оси. Ясно, что любая подгруппа винтовых движений абелева, изоморфна прямому произведению SO(2) и R. После этого введения мы готовы сформулировать следующий список требований, касающихся предпочтительной римановой метрики на SE(3).

- я . Метрика, ограниченная либо SO(3), либо R3, совпадает с соответствующей естественной метрики.
- II. Метрика должна учитывать структуру прямого произведения подгрупп винтовых движений SE(3), т. е. для данного винтового движения величины вращения и поступательного движения измеряются независимо.
- III. Метрика должна быть максимально простой в вычислительном отношении.

Принимая во внимание вышеуказанные требования, мы выбрали для дальнейших рассуждений евклидово скалярное произведение в R6 , полагая Q = I6. В разделе 3 мы докажем, что это правильный выбор, и приведем некоторые аргументы в пользу его единственности.

3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С учетом предыдущих соображений необходимым шагом к эффективному определению метрики (4) в SE(3) является вычисление экспоненциальных координат (3). Подходящая формула предлагается следующим результатом

Machine Translated by Google

Лемма 3.1. Дано $s = \begin{matrix} PT \\ 0\ 1 \end{matrix}$ SE(3) с $\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot (TrR \quad 1)$. Тогда для $0 \quad \alpha < \pi$ экспоненциальные координаты s равны

$$\exp \quad 1 \begin{matrix} PT \\ 0\ 1 \end{matrix} = (r, t), \text{ где } [r] = 2 \sin\alpha \frac{\alpha}{} \cdot (R \quad R^T) \quad , \quad 1\ \tau = A \cdot T \ (5)$$

и

$$A \quad ^1 = I3 \quad \cdot [r] + \cdot [r] \ \frac{2 \sin\alpha - \alpha(1 + \cos\alpha)\ 1}{2\alpha 2 \sin\alpha\ 2} \quad ^2. \tag{6}$$

Доказательство: это простое упражнение по линейной алгебре.

Экспоненциальные координаты (5) состоят из координат ориентации r и координат положения t. Они определены в окрестности U множества E = I4 в SE(3). Чтобы описать U явно, мы сначала заметим, что координаты ориентации r удовлетворяют соотношению

$$1\ (r\ ,\ r\ ) = \frac{}{-2} \cdot T\ p[p]^2 \ ^{2 = a} \quad , \tag{7}$$

где (·, ·) обозначает скалярное произведение в R3 . Теперь лемма 3.1 и (7) немедленно дают следующуюхарактеризациюU.

Следствие 3.1. Область определения экспоненциальных координат (5) есть открытая окрестность U точки E в SE(3), определяемая соотношением (r, r) < π2 .

Найдя экспоненциальные координаты (5) на U SE(3), мы теперь можем вывести вычислимую формулу для расстояния (4). Как мы уже упоминали, SE(3) является геодезически полным, поэтому инфимум в (4) предполагается на минимальной геодезической, длину которой можно вычислить путем перехода к экспоненциальным координатам. Более конкретно, мы имеем следующий результат:

Теорема 3.1. Пусть $s' "=" \begin{matrix} P'T \\ 0\ 1 \end{matrix}$ ′, $c'' = \begin{matrix} P''T \\ 0\ 1 \end{matrix}$ « таково, что s′′ s′ 1 U, как определено

в следствии 3.1. Предположим, что левоинвариантная риманова метрика в SE(3) задается единичной матрицей Q = I6. Тогда расстояние (4) между s′, s′′ определяется

$$r^2(c', s'') = (r, r) + (t, t) = (r, r) + (\theta, \theta) + \gamma \cdot ((r, r)(\theta, \theta) \quad (r, \theta) \quad ^2), \tag{8}$$

где

$$[r] = \frac{\alpha}{2 \sin\alpha} \cdot (R' \ TR'' \quad R'' \ TR' \ ), \quad \theta = p \ '^T(T^« \quad T'),$$

$$\text{потому что } \alpha = \frac{1}{2} \cdot (Tr(R' \ TR' \quad ') \quad 1)\ ,\ \gamma = \alpha \quad ^2 \frac{\frac{\alpha}{2}}{((\text{r pex } \frac{\alpha}{2}})^2 \quad 1) \tag{9}$$

Доказательство: достаточно вычислить экспоненциальные с "=" R′ TR′′ R′ T(T0 « T′) 1 .

координаты для s . Согласно (5), (6) они равны (r, t) с [r], заданным (9), и t = A 1 θ. В силу (6) матрица A 1 = I3 $\frac{}{1\ 2}$+ 2α2 $\frac{2 \sin\alpha \quad \alpha(1+\cos\alpha)\ [r]}{\sin\alpha}$ [p]², с α, [r], определенными в (9). Для простоты запишем B = A 1 = I3+a[r]+b[r] произведения 2 . Теперь нужно сделать расчет (t, t) = (Bθ, Bθ). Ясно, что BTB = I3 + (2b косая симметрия ²)· [p] ² +б ² · [p]⁴ . Ввиду того, [r], из ее характеристического уравнения получаем, что [r] ⁴ · [r] = что 2 ², следовательно, BTB = I3 + (2b ^{2} a = I3 + γ) [r] для ^{2} γ, определенного в (9). Далее, легко видеть, что (t, t) = (θ, θ) + γ · ([r] θ, [r] θ). Но [r] θ — это просто перекрестное произведение r × θ (Brockett and Loncaric 1986), поэтому γ умножается на квадрат длины этого перекрестного произведения . Из элементарной векторной алгебры следует, что (r × θ, r × θ) = r · θ ^{2}

2 ·sin2 β, где β — угол между r и θ, r · θ 2= (r , r). Так как по определению).
(r , θ)^2 = p ^{2} ^{2} · cos2 β, заключаем, что (t, t) = (θ, θ) + γ · ((r, r)(θ, θ) (r, θ) ^{2}
КЭД

Замечание 3.1. Легко видеть, что коэффициент γ в (8) всегда 0. Аналогично, по неравенству Шварца слагаемое, умноженное на γ в (8), также неотрицательно. Как следствие, правая часть (8) 0. Кроме того, из ортогональности R′ следует, что (θ, θ) = T . При этом первые два слагаемых в (8) можно интерпретировать как меру расстояния между вращениями R′ ,R′′ и трансляциями T «,T ′ ,
выполняемые независимо, а третий член отражает тот факт, что SE(3) является не прямым, а лишь полупрямым произведением SO(3) и R3 . Вклад последнего члена в расстояние (8) отличен от нуля только в том случае, если и r, и θ отличны от 0. В конечном итоге, используя выражение (7), формуле (8) можно придать две следующие эквивалентные формы:

$$r^2(c', c'') = \alpha^2 \quad \gamma \cdot (r, \theta)^2 + \delta \cdot (\theta, \theta) \text{ при } \delta = \left(\sin \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2, \tag{10}$$

или

$$^2 д(c', c'') = \alpha^2 + (\theta, \theta) \cdot (\cos^2 \beta + \delta \cdot \sin^2 \beta), \tag{11}$$ где β — угол между

векторами r и θ, введенный при доказательстве теоремы 3.1.
Возможно, форма (10) наиболее подходит для вычислительных целей.

Замечание 3.2. Проверим, что метрика (8) действительно удовлетворяет требованиям i.-iii. s′′ разд. 2. Для этого сначала заметим, что если положить T SO(3), ′ = T « в с c" , так вот в то получим dd ^{2}(s ′ , s′′) = (r, r) = α ^{2}. Точно так же, если R′ = R′′ , мы приходим к тому, ^{2}(s ′ , s′′) = (θ, θ) = T « T ′ ^{2}. Поэтому я . удовлетворен. Теперь позвольте с ′, что s′′ — пара винтовых движения , совершаемые относительно заданной оси. Очевидно, мы заключаем, что в этом случае θ = T« T ′, и r совпадает с осью, поэтому угол β между r и θ равен 0. Следовательно, (11) дает d в соответствии с требованием ii. (s ′, s′′) = α ^{2} + T « T ′ ^{2} Чтобы показать, что формулы (8), (10), (11) поддаются вычислительной обработке, мы проанализировали несколько репрезентативных примеров в разделе 4.

Замечание 3.3. При тщательном анализе эквивалентной (8) формулы, полученной для общей симметричная , положительно определенная матрица 6х6 Q = $\begin{matrix} Q1 & Q2 \\ KT2 & Q3 \end{matrix}$ с симметричными Q1, Q3,
можно сделать вывод, что требование i. приводит к Q1 = Q3 = I3, а ii. следует Q2 = 0.
При этом евклидово скалярное произведение в R6 представляется единственным, удовлетворяющим требованиям i. и ii. В следующем разделе мы приложим значительные усилия , чтобы доказать, что метрика (8) удовлетворяет также требованию iii.

Определив метрику в SE(3), снабдим Cn метрикой (2) в прямой путь вперед. А именно, пусть f ′ , f′′ Cn , x X и f ′ (x) = R′ (x) T ′ (x) 0 1 , f′′(x) =

$R''(x)\ T''(x)\ 0\ 1$. В предположении, что $f'(x)^{1}f''(x)$ U , $d(f'(x), f''(x))$ может быть

находится с помощью выражений (8)-(11). Следовательно, мы вычисляем

$$\rho(f', f'') = \max_{x \quad X} d(f'(x), f''(x)).$$

Стоит отметить, что благодаря компактности X метрическое пространство (Cn, ρ) обладает хорошими топологическими свойствами. В частности, отсюда следует, что (Cn, ρ) —полное метрическое пространство, а сходимость в (Cn, ρ) означает равномерную сходимость. Оба свойства играют ключевую роль при изучении задач аппроксимации в (Cn, ρ). Метрика ρ, ограниченная кинематикой Kn Cn, определяет метрическое пространство кинематики (Kn, ρ). Поэтому ρ будем называть кинематической метрикой.

4 РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКОГО МЕТА РИЦ

Ниже мы вычислим кинематическую метрику для нескольких примерных кинематик роботов-манипуляторов.

Пример 4.1 Двойной маятник.

Кинематика двойного маятника определяется известной формулой

cos(x1 + x2) sin(x1 + x2) 0 d cos x1 + l cos(x1 + x2) sin(x1 + x2) cos(x1 + x2) 0 d sin x1 + lsin(x1 + x2)

$$\kappa(x) = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} = P(x)\ T(x)\ 0\ 1 \qquad (12)$$

Обозначим через $k_v(x)$, $k_v{}'(x)$ пару двойных маятников, различающихся своими геометрическими параметрами (длинами звеньев d,l) при v = (d, l), v l') . Мы хотим вычислить $v' = (d', l')$ расстояние $\rho(k_v, k_v{}')$ по формуле (2). Для этого сначала заметим, что внутреннее пространство для (12) совпадает с компактным подмножеством X R^2 (прямоугольником, если (12) ограничено соединения или тор T для ^{2} для неограниченного количества суставов). Тогда для нахождения $\rho(k_v, k_v{}')$ нужно вычисления $d(k_v(x), k_v{}'(x))$ в соответствии с (8)-(11). Очевидно, что α(x) = α = 0, поэтому для любых v, v' ; $k_v(x)$ 1$k_v{}'(x)$ U. Кроме того, в силу вида k_v, $k_v{}'$ из (10) исчезает вращательная часть экспоненциальных координат, поэтому

$$d(k_v(x), k_v{}'(x)) = \sqrt{(d \quad d')^2 + 2(d \quad d')(l \quad l') \cos x_2 + (l \quad l')^2} \qquad (13)$$

Теперь, предполагая, что x_2 [π, π], заключаем, что

$$\rho(k_v, k_v{}') = \max d(k_v(x), k_v{}'(x)) = |d \quad d|x| \quad \pi'| + |л - л'| \qquad (14)$$

Из (14) следует, что топология, налагаемая на множество двойных маятников метрикой ρ, совпадает с топологией, индуцированной абсолютной нормой в пространстве геометрических параметров. Результат (14) непосредственно обобщается на n-pendula, (Дульеба и Чон

1990).

Следующие примеры будут касаться общей кинематики с двумя степенями свободы, содержащей только вращательные соединения и зависящей от 6 геометрических параметров. Кинематику общего 2R-манипулятора можно описать следующим образом: (для сокращения положим $c_i = \cos x_i$ и $s_i = \sin x_i$)

c1c2 s1s2 cos α1 c1s2 cos α2 s1c2 cos α1 cos α2 + s1 sin α1 sin α2
s1c2 + c1s2 cos α1 s1s2 cos α2 + c1c2 cos α1 cos α2 c1 sin α1 sin α2 c2
s2 sin α1 sin α1 cos α2 + cos α1 sin α2 0
0
c1s2 sin α2 + s1c2 cos α1 sin α2 + s1 sin α1 cos α2
к (x) = s1s2 sin α2 c1c2 cos α1 sin α2 c1 sin α1 cos α2
c2 sin α1 sin α2 + cos α1 cos α2 0

a2c1c2 a2s1s2 cos α1 + d2s1 sin α1 + a1c1
a2s1c2 + a2c1s2 cos α1 d2c1 sin α1 + a1s1
a2s2 sin α1 + d2 cos α1 + d1 1

(15)

В (15) α1, α2 —углы закручивания , a1,a2 —длины звеньев; d1, d2 обозначают параметры сдвига (Paul 1981). Легко заметить, что (15) совпадает с (12) d1 = d2 = 0. Область определения (15) при α1 = α2 = 0 a1 = d такая частных кинематик общего 2R , a2 = л , же, как и у (12). Ниже мы вычислим метрику (2) для 3 манипулятора.

Пример 4.2 Общий манипулятор 2R (1).

Пусть kv(x), kv ′(x) обозначают пару общих 2R-манипуляторов, которые отличаются только своими d1 = углы закрутки α2, α′ 2 . Дополнительно будем считать, что α1 = α ′ 1 = 0 , d = 0 ′ 1 знак равно ′ 2 , a1 = a1 , ′ a2 = a ′ d2 знак равно d 2 . Фактически мы имеем v = (α2, a1, a2), = (α ′ 2 , a1, a2). Теперь нам нужно определить расстояние d(kv(x), kv ′(x)) в соответствии с (8)-(11). Простым вычислением находим, что α(x) = α = |α2 α ′ 2 | , θ(x) = θ = 0, следовательно,

$$d(kv(x), kv'(x)) = |\alpha_2 - \alpha'_2| \quad (16)$$

при условии, что α < π. Поскольку правая часть (15) не зависит от x X, мы сразу заключаем, что

$$\rho(kv, kv') = |\alpha_2 - \alpha'_2| \quad (17)$$

Снова топология , налагаемая метрикой (2), совпадает с топологией, индуцированной абсолютной нормой в (под)пространстве геометрических параметров.

Пример 4.3 Общий манипулятор 2R (2).

Как и прежде, пусть kv(x), kv ′(x) обозначает пару общих 2R манипуляторов (15), но теперь предполагается только, что α1 = α ′ 1 = 0 d1 = d ′ 1, a1 = a ′ 1, a2 = a ′ 2, следовательно, v = (α2, d2) , v′ = (α ′ 2 , d ′ 2). Чтобы определить расстояние d(kv(x), kv ′(x)) начнем c 2 | и r(x) = r = α(1, 0, 0)T . Далее мы находим вычислением α(x) = α = |α2 α

Т ′ (х) - Т (х) = Т (г , ′ Т = (0, 0, d), г де ^{T}d = d, поэтому для ′ 2 д2. Теперь лег ко проверить, что θ) = 0 , α < π (10) и (2) получаем следующую формулу рас стоя ния

$$\rho(kv, kv') = d(kv(x), kv'(x)) = \frac{\frac{\alpha 2 \quad \alpha 2'}{2}}{\text{г рех} \frac{\alpha 2 \quad \alpha 2'}{2}} \sqrt{\sin 2 \frac{\alpha 2 \quad \alpha 2'}{2} 4 + (д' \quad 2 \quad г 2) 2} \tag{18}$$

Соотношение (18) остается прежним, ког да манипуля торы отличаются на d1 вместо d2.

Пример 4.4 Общий манипуля тор 2R (3).

Предположим, что kv(x), kv ′(x) обозначают общие 2R манипуля торы (15), которые отличаются на все г еометрические параметры, кроме α1 = α d′ 1 , ′ 1 = 0 . Итак, теперь мы имеем v = (a1, d1, α2, a2, d2), d′ 2). С этими ′ в = (a′ 1, α' 2 , a' 2 , данными, используя некоторую компьютерную алг ебру, мы нашли следующее выражение для квадрата рас стоя ния (10), справедливое при α = |α2 α ′ 2 | < π :

$$г^2(kv(x), kv'(x)) = 4 \sin 2 \frac{(\alpha 2 \quad \alpha' 2)^2}{\alpha 2 \quad \alpha \frac{\prime}{2} 2} (a1 - a' 1)^2 \sin 2\, x2 + (a1 \quad a' 1)^2 \cos 2\, x2 +$$

$$+2(a1 \quad a' 1)(a2 \quad a' 2) \cos x2 + (\alpha 2 \quad \alpha' 2)2 + \frac{(\alpha 2 \quad \alpha' 2)^2}{4 \sin 2\, \alpha 2 \frac{\alpha'}{2} 2} ((d1 \quad d' 1) + (d2 \quad d' 2))2 + (a2 \quad a' 2)^2 \tag{19}$$

Максимизация (19) по x2 [π, π] дает метрику (2), определя емую следующим образом. Положим $\omega = \frac{\alpha 2 \quad \alpha 2'}{2 \sin \frac{\alpha 2 \quad \alpha'}{2} 2}$. Затем

$$\rho(kv, kv') = \sqrt{(\alpha 2 \quad \alpha' 2)^2 + (a2 - a' 2)^2 \frac{\omega 2}{\omega 2 \quad 1} + \omega 2 ((a1 \quad a' 1)^2 + ((d1 \quad d' 1) + (d2 \quad d' 2))2)} \tag{20}$$

если

$$|a2 - a' 2| \quad (\omega^2 \quad 1)|a1 \quad a' 1|,$$

а иначе

$$\rho(kv, kv') = \sqrt{(\alpha 2 \quad \alpha 2)'^2 + (|a1 \quad a' 1| + |a2 - a' 2|)^2 + \omega 2 ((d1 \quad d' 1) + (d2 \quad d' 2))2} \tag{21}$$

В частности, если a2 = a ′ 2 то применима формула (20), следовательно, в этом случае

$$\rho(kv, kv') = \frac{\frac{\alpha 2 \quad \alpha 2'}{2}}{\text{г рех} \frac{\alpha 2 \quad \alpha 2'}{2}} \sqrt{\sin 2 \frac{\alpha 2 \quad \alpha 2'}{2} 4 + (a1 - a' 1)^2 + ((d1 \quad d' 1) + (d2 \quad d' 2))2} \tag{22}$$

Лег ко видеть, что (22) специализируется на (18) при a1 = a ′ 1 , д1 = д ′ 1 .

Пример 4.5 ПУМА 600 (1).

Мы будем рассматривать кинематику манипуля тора PUMA 600, описаннуюв (Базерг и, Гольденберг и Апкаря н, 1984), см. также (Тарн и др., 1986). Обозначим через kv(x), kv ′(x) кинематику пары ПУМА, г де мы для простоты предположили, что x3 [π, π], которые отличаются только транс ля ционными г еометрическими параметрами . В соответствии в обозначения х, использованных в (Базерги, Гольденберг и Апкарян, 1984), это означает, что $v = (l2, l3, r3, r4)$, $v' = (l'_2, l'_3, r'_3, r'_4)$. Дополнительно положим $r5 = r'_5$. Ясно, что в этом случае $r(x)$ в (10) равен равным 0, и с умеренной помощью компьютерной алгебры мы вычисляем квадратное расстояние (10) следующим образом

$$r^2(kv(x), kv'(x)) = (l2 - l'_2)^2 + (l3 - l'_3)^2 + (r3 - r'_3)^2 + (r4 - r'_4)2+$$
$$+ 2(l2 - l'_2)((r4 - r'_4)\sin x3 + (l3 - l'_3)\cos x3). \quad (23)$$

Максимизируя (23) относительно $x3 \in [-\pi, \pi]$, находим метрику (2):

$$\rho(kv, kv') = \sqrt{(|l2 - l'_2| + \sqrt{(l3 - l'_3)^2 + (r4 - r'_4)^2})^2 + (r3 - r'_3)^2}. \quad (24)$$

Пример 4.6 ПУМА 600 (2).

Теперь возьмем пару ПУМА $kv(x)$, $kv'(x)$, имеющих $l3 = l'_3 = 0$ и $r3 = r'_3 = 0$, но между совместными осями 3 и 4. с произвольными поворотами α'_4. Итак, теперь $v = (l2, \alpha4, r4)$, $v' = (l'_2, \alpha'_4, r'_4)$. Пусть $x3, x4 \in [-\pi, \pi]$. Используя некоторую компьютерную алгебру, мы можем найти следующим выражением для квадрата расстояния (10):

$$r^2_д(kv(x), kv'(x)) = (\alpha4 - \alpha'_4)^2 + \frac{(\alpha4 - \alpha'_4)^2}{4\sin^2\frac{\alpha4 - \alpha'_4}{2}}((l2 - l'_2)^2 + (r4 - r'_4)^2)+$$

$$+ (l2 - l'_2)^2\left(1 - \frac{(\alpha4 - \alpha'_4)^2}{4\sin^2\frac{\alpha4 - \alpha'_4}{2}}\right)\cos^2 x3\cos^2 x4 + 2(l2 - l'_2)(r4 - r'_4)\frac{(\alpha4 - \alpha'_4)^2}{4\sin^2\frac{\alpha4 - \alpha'_4}{2}} \text{ грех } x3. \quad (25)$$

Легко заметить, что максимум (25) будет приниматься при $x4 =$ при $\alpha = |\alpha4 - \alpha'_4| \frac{\pi}{2}$, $x3 = \pm\frac{\pi}{2}$, следовательно $< \pi$ метрика (2) определяется следующим образом:

$$\rho(kv, kv') = \frac{\frac{\alpha4 - \alpha'_4}{2}}{\text{грех }\frac{\alpha4 - \alpha'_4}{2}}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha4 - \alpha'_4}{2} + (|l2 - l'_2| + |r4 - r'_4|)^2}. \quad (26)$$

5 ПЕРСПЕКТИВНЫХ ПРИМЕНЕНИЙ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МЕТРИЧЕСКАЯ

Введением кинематической метрики мы снабдили множество кинематики робота Kn метрической и топологической структурами. Из примеров, рассмотренных в разделе 4, мы узнали, что сходимость в пространстве (Kn, ρ) имеет естественную интерпретацию в терминах сходимости относительно геометрических параметров кинематики. Отсюда следует, что последовательность кинематик $ki \in Kn$ сходится к $k \in Kn$, если геометрические параметры ki сходятся в соответствующем смысле к геометрическим параметрам k. Более того, расстояние $\rho(k', k'')$ между двумя кинематиками может быть выражено через расстояния между геометрическими параметрами кинематики, следовательно, с помощью кинематической метрики можно оценить влияние изменения конкретных параметров на кинематические характеристики. манипулятора. В частности, при заданной номинальной кинематике можно обнаружить допустимые отклонения номинальных геометрических параметров, влияние которых на кинематику будет находиться в заданных пределах допуска. Таким образом, мы также можем исследовать чувствительность кинематики к геометрическим параметрам.

манипуля тор.
Кинематическая метрика определя ет меру качества кинематики, интерпретируемую как расстоя ние между заданной кинематикой и кинематикой конкретного шаблона. Если паттерн был выбран таким образом, что он отражает желаемые кинематические характеристики манипуля тора, например принимает одну из нормальных форм, предложенных в (Tchoń 1991), мера качества обеспечивает естественный инструмент для оценки кинематических характеристик манипуля торов. .
Кинематическая метрика придает точное значение задаче кинематической аппроксимации, формулируемой следующим образом. Для заданного преобразования f : X SE(3) внутреннего пространства X манипуля тора в специальную евклидову группу SE(3) и семейства кинематик kv Kn , завися щих от геометрических параметров v V , кинематика проектирования kv Kn, максимально близкое к f по кинематической метрике. Ясно, что задачу аппроксимации можно сформулировать математически как оптимизационную задачу поиска оптимальных значений геометрических параметров v V, таких что ρ(kv , f) = minv V ρ(kv, f). Пусть f описывает, если ρ(kv , f) = 0, мы говорим, что желаемая кинематическая
Тогда kv реализует производительность f, иначе kv я вля ется , производительность манипуля тора. наилучшим приближением к f.
Важной составля ющей кинематической метрики я вля ется метрика d на специальной евклидовой группе. Эта метрика служит мерой расстоя ния между положения ми и ориентация ми s′′ SE(3), эффектор манипуля тора. Даны две точки s ′, например, начальными и конечными положения ми и ориентация ми эффектора во внешнем пространстве, расстоя нием d(s ′ , s′′), определя емым по (10), равна минимальной длине кривой в SE(3), соединя ющей s и s ′′ . Эта кривая , называемая геодезической, я вля ется аналогом пря мой в евклидовой геометрии. Движение по геодезическим не нуждается в ускорении. Мы предполагаем, что дуги геодезических я вля ются естественными траектория ми в SE(3), которым следует следовать при пря мом управлении роботами-манипуля торами. Метрика d в SE(3) также предоставля ет нам адекватный инструмент для оценки размера рабочего пространства манипуля тора.
Метрика d, свя занная через кинематику с внутренним пространством X манипуля тора, определя ет расстоя ние между точками бифуркационной диаграммы кинематики (Чон, 1991). В частности, для несингуля рной кинематики с 6 степеня ми свободы d индуцирует расстоя ние между конфигурация ми манипуля тора.
Наконец, рассмотрим пару кинематик kv, kv ′ Kn, неподвижного манипуля тора, отличающихся некоторыми своими геометрическими параметрами. Из определения метрики ρ следует, что ρ(kv, kv ′) есть максимальное расстоя ние d между kv(x), kv ′(x) относительно x X. Анализ примеров из раздела 4 показывает, что расстоя ние d(kv(x), kv ′(x)) зависит не от всех , а от нескольких внутренних переменных . В примерах 4.2–4.3 это расстоя ние одинаково для всех x X.
Манипуля тор, кинематика которого kv и kv ′ обладает тем свойством, что d(kv(x), kv ′(x)) постоя нна для всех x X (следовательно, равна ρ(kv, kv ′)) мы хотим назвать равномерным. Количество внутренних переменных , входя щих в d(kv(x), kv ′(x)) я вля ется мерой неравномерности манипуля тора, которую можно назвать его коравномерностью Манипуля торы PUMA, изученные в примерах 4.5 , 4.6 имели соответственно коравномерность 1 и 2.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы завершаем эту статью комментарием о вычислительных свойствах кинематической метрики. Следует отметить, что, за исключением нескольких простых случаев, подобных представленным в примерах 4.1–4.3, объем вычислений, необходимых для определения кинематической метрики, значителен. Есть два источника вычислительных сложностей: вычисление метрики d, определя емой формулой (10), как функции внутренних переменных и максимизац ия d по внутреннему прос транс тву. Проблемы, с вя занные с метрикой d, можно значительно облег чить, ис пользуя с имвольные вычис ления , предлаг аемые прог раммными пакетами, такими как MACSYMA или REDUCE. Такие вычис ления кажутс я эффективными до тех пор, пока кинематика не отличаетс я более чем на один вращательный г еометричес кий параметр (уг ол закручивания между парой ос ей с ос едних с ус тавов). При большем количес тве поворотов возникает с ущес твенная труднос ть при определении экс поненц иальных координат по выражению(9). Второй ис точник вычис лительных труднос тей, т. е. макс имизац ия d по внутреннему прос транс тву, умеренно выиг рывает от ис пользования с имвольных вычис лений. К с час тью, во мног их с лучая х коравномернос ть манипуля тора мала, поэтому задача макс имизац ии имеет малую размерность.

В с лучае, ког да точное определение кинематичес кой метрики затруднительно или даже невозможно, можно прибег нуть к приближенным выражения м для метрики. Ниже мы предс тавля ем два таких выражения , фактичес ки они обес печивают вычис ля емые нижние и верх ние г раниц ы для квадратног о рас с тоя ния , определя емог о (10). Первое выражение ис ключает вычис лительно с вя занную час ть (r, θ) (10). На с амом деле из (11) лег ко вывес ти с ледующие оц енки:

$$L = \alpha^2 + (\theta, \theta) \quad d^2(\kappa'(x), k''(x)) \quad \alpha^2 + \delta(\theta, \theta) = R \ (27)$$ δ, и θ с вя заны с k'

г де а , (x), k′′(x) через (8) и (10). Яс но, что при |α| π правая час ть (27) ог раничена E = α (θ, θ). $2 + \frac{2\pi}{4}$ Качес тво оц енок в (27) проиллюс трировано на рис . 6.1: а, б, в, г где показана завис имос ть наборов уровней L, R и E от рас с тоя ния вращения α = r и рас с тоя ния пос тупательног о движения ϑ = θ. Наборы уровня d

^{2} лежат между L и R.

Вторая оц енка идет дальше, чем (27), и уменьшает с ложнос ть, с вя занную с k'', при вычис лении α в что ос обенно нежелательно, ког да кинематика k с кручиваетс я между шарнирными ′ , нес колько раз, ос я ми. Эта оц енка ос нована на неравенс тве cos α 1 2 вс юду и cos α 1 π 2α (9), из (27) $\frac{1}{2}\alpha^2$, действительный выводим с ледующие нижние и верх $\frac{2}{}$ние , с праведливо для |α| π. Ис пользуя эти неравенс тва и формулы оц енки для d ^{2}(κ ' (x), κ''(x)):

$$B(x) \quad д^2(\kappa'(x), \kappa''(x)) \quad \frac{2\pi}{4} B(x), \tag{28}$$

г де

$$B(x) = 3 \quad Tr(R'^{T}(x)R''(x)) + T''(x) \quad T'_{(Икс)}{}^2$$

7 БЛАГОДАРНОСТЬ

Эта работа была поддержана Минис терс твом образования Польши. Авторы имеют чес ть поблаг одарить г -на Кшиштофа Арента, MEng, за выполнение с имвольных вычис лений в поддержку примеров 4.4 - 4.6.

Рекомендац ии

[ ] Арнольд В.И. 1978. Математичес кие методы клас с ичес кой мех аники. Берлин: С принг ер Верлаг .

[ ] Базерг х и А., Гольденберг А.А., Апкаря н Дж. 1984. Точная кинематичес кая модель манипуля тора PUMA 600. IEEE транс . на с ис т. Человек и кибернетика, 14(3):483-487.

[ ] Brockett RW 1984. Роботы-манипуляторы и формула произведения экспонент. Математическая теория сетей и систем, изд. П. А. Фурманн. Берлин: Springer-Verlag, стр. 120-129.

[ ] Брокетт Р.В. и Лонкарик Дж. 1986. Геометрия программирования соответствия. Теория и приложения нелинейных систем управления, под ред. Сибирнс, А. Линдквист. Амстердам: Северная Голландия, стр. 35-42.

[ ] Дулэба И. и Чон К., 1990 (19-21 сентября) Кинематическое расстояние между маятниками с n степенями свободы. проц. 3-я нац. Конференция по робототехнике. Вроцлав: Издательство Технического университета, том I, стр. 22-26 (на польском языке).

[ ] Энгелькинг Р. 1975. Общая топология Варшава: Польское научное издательство (на польском языке).

[ ] Галло С., Хулин Д. и Лафонтен Дж. 1987. Риманова геометрия. Берлин: Springer-Verlag.

[ ] Гантмахер Ф.Р. 1988. Теория матриц. Москва: Наука.

[ ] Кляйн К.А. и Блахо Б.Е. 1987. Меры ловкости при проектировании и управлении кинематически избыточными манипуляторами. Int.J.Robotics Res. 6(2): 72-83.

[ ] Лонкарик Дж. 1985. Геометрический анализ податливых механизмов в робототехнике. Кандидат наук. диссертация, Гарвардский университет, Отдел прикладных наук.

[ ] Парк Ф.С. и Брокетт Р.В. 1989. Гармонические карты и оптимальная конструкция механизма. Препринт. Гарвардский университет, отделение прикладных наук.

[ ] Пол Р.П. 1981. Манипуляторы роботов: математика, программирование и управление. Кэммост: MIT Press.

[ ] Рихтмайер Р.Д. 1981. Принципы современной математической физики, том 2. Берлин: Springer-Verlag.

[ ] Шин К.Г. и Маккей Н.Д. 1986. Выбор геометрических траекторий с почти минимальным временем для роботизированных манипуляторов. IEEE транс. на автомат. Контроль, 31(6): 501-510.

[ ] Тарн Т.Дж. и соавт. 1986 г. (октябрь). Динамические уравнения для шестизвенного робота-манипулятора PUMA 560. Представитель ССМ-РЛ-86-05. Сент-Луис: Лаборатория робототехники.

[ ] Taylor RH 1983. Планирование и выполнение прямолинейных траекторий манипулятора. Движение робота: планирование и управление, изд. М. Брэди и др. др. Кембридж: MIT Press, стр. 265-286.

[ ] Чон К. 1991. Дифференциальная топология избыточных роботов-манипуляторов. Int.J.Robototics Res., 10(5).

[ ] Чон К. и Дулёба И. 1991. Об обращении сингулярной кинематики и генерации геодезических траекторий в роботах-манипуляторах. Препринт. Вроцлавский технический университет, Институт инженерной кибернетики.

[ ] Yoshikawa T. 1985. Манипулятивность роботизированных механизмов. Int.J.Robotics Рез.,4(2):3-9.