Конспект лекций по кинематике

Доктор Инж. Здена Сант

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и анализ являются двумя жизненно важными задачами в инженерии.

Процесс проектирования означает синтез на этапе предложения размера, формы, материала. свойства и расположение частей задаются для выполнения требуемой задачи.

Анализ — это метод или, скорее, набор инструментов, позволяющий критически оценивать существующий или предлагаемый дизайн, чтобы судить о его пригодности для задачи.

Таким образом, синтез является целью, которая может быть достигнута с помощью анализа.

Инженер-механик занимается множеством различных задач, связанных с разнообразными рабочими процессами. процессов, называемых технологическим процессом.

Технологические процессы связаны с транспортировкой материала, производством и преобразованием энергии, транспортировкой информации. Все эти процессы требуют механического движения, которое осуществляется машинами.

Чтобы иметь возможность создать соответствующую конструкцию машины и механизма, необходимо провести исследование взаимосвязи между геометрией и движением частей машины/механизма и силами, вызывающими движение. Таким образом, механика как наука участвует в процессе проектирования.

Механика представляет собой науку, включающую статику, динамику и механику материалов.

Статика обеспечивает анализ стационарных систем, в то время как динамика имеет дело с системами, которые изменяются во времени, и, как предположил Эйлер, исследование движения твердого тела можно разделить на две части: геометрическую часть и механическую часть. В геометрической части Кинематика

переход тела из одного положения в другое исследуется независимо от причин движения. Изменение представлено аналитическими формулами.

Таким образом, кинематика является изучением движения отдельно от сил, вызывающих движение, которое описывается положением, смещением, вращением, скоростью, скоростью и ускорением.

В кинематике мы предполагаем, что все исследуемые тела являются твердыми телами, поэтому их деформации пренебрежимо малы и не играют существенной роли, а единственное изменение, которое рассматривается в данном случае, — это изменение положения.

Терминология, которую мы используем, имеет точное значение, как и все слова, которые мы используем для самовыражения при общении друг с другом. Чтобы убедиться, что мы действительно понимаем смысл, у нас есть тезаурус/глоссарий. Полезно уточнить некоторые термины, особенно в тех областях, где терминология не очень ясна.

Структура представляет собой комбинацию твердых тел, соединенных между собой шарнирами с намерением быть жесткими. Следовательно, структура не совершает работу и не преобразует движение. Структуру можно перемещать с места на место, но она не обладает внутренней подвижностью (относительным движением между ее элементами).

Машины и механизмы — их цель — использовать относительное внутреннее движение для передачи сила или преобразующее движение.

Машина - устройство, используемое для изменения, передачи и направления сил для достижения определенной цели.

Механизм – механическая часть машины, предназначенная для передачи движения и сил от источника энергии к выходу. Механизм передает движение от привода или входного звена к ведомому или выходному звену.

Планарный механизм – каждая частица механизма рисует в пространстве плоские кривые, причем все кривые лежат в параллельных плоскостях. Движение ограничено двумерным пространством, и поведение всех частиц можно наблюдать в истинном размере и форме с одного направления. Поэтому все движения можно интерпретировать графически. Большинство современных механизмов представляют собой планарные механизмы, поэтому мы сосредоточимся на них.

Сферический механизм - каждое звено имеет неподвижную точку при движении рычажного механизма, а неподвижные точки всех звеньев лежат в одном месте. Таким образом, каждая точка рисует кривую на сферической поверхности, а все сферические поверхности концентричны.

Пространственный механизм – не имеет ограничений на относительное движение частиц. Каждый механизм, содержащий кинематическую винтовую пару, является пространственным механизмом, поскольку относительное движение винтовой пары является винтовым.

Механизм обычно состоит из: Рамы – обычно

части, не совершающей движения Звеньев – отдельных частей

механизма, создающих жесткую связь между двумя или более элементами разной кинематической пары. (Пружины нельзя рассматривать как звенья, поскольку они упругие.)

Кинематическая пара (КП) представляет собой соединение между звеньями, которое управляет относительным движением посредством сопрягаемой поверхности, при этом одни движения ограничиваются, а другие допускаются. Количество разрешенных движений описывается через подвижность КП. Предполагается, что сопрягаемые поверхности имеют идеальную геометрию и между сопрягаемыми поверхностями отсутствует зазор.

Шарнир – подвижная связь между звеньями, называемая также кинематической парой (штифт, скользящий шарнир, кулачковый шарнир), налагающая ограничения на движение

Кинематическая цепь образована из нескольких звеньев, подвижно соединенных между собой шарнирами. Кинематическая цепь может быть замкнутой или разомкнутой в зависимости от организации связанных звеньев.

Простое звено - твердое тело, содержащее только два шарнира.

Комплексное звено - твердое тело, содержащее более двух соединений.

Актуатор - это компонент, который приводит в действие механизм

В прошлом году мы начали говорить об основах Механики – Статики, а позже о передаче сил и их влиянии на элементы конструкции/машины. Наш расчет сил был основан только на статике, и в начале мы предполагали, что силы существуют на конструкции или действуют очень медленно, поэтому они не вызывают никакого динамического воздействия на конструкцию.

Эта ситуация далека от реального мира, поскольку в мире нет ничего стационарного. (Дайте мне фиксированную точка, и я переверну мир. Архимед 287 г. до н.э. – 212 г. до н.э. греческий математик, физик)

Кинематика имеет дело с тем, как вещи движутся. Это изучение геометрии движения, которое включает в себя определение положения, перемещения, скорости, скорости и ускорения.

Это исследование проводится без учета системы сил, действующих на исполнительный механизм.

Актуатор — механическое устройство для перемещения или управления механизмом или системой.

Поэтому основными величинами в кинематике являются пространство и время, как они определены в статике.

Кинематика описывает движение объекта в пространстве с учетом зависимости от времени.

Движение описывается тремя кинематическими величинами:

Вектор положения дает положение конкретной точки в пространстве в данный момент.

Скорость изменения вектора положения во времени описывает скорость точки.

Ускорение – скорость изменения скорости во времени.

Все величины - положение, скорость и ускорение являются векторами, которые можно охарактеризовать относительно:

Изменение скалярной величины – равномерное движение

Равноускоренное движение

Неравномерно ускоренное движение

Гармоническое движение

Характер траектории - 3D (движение в пространстве)

2D (плоское движение)

Тип траектории может быть указан как: Прямолинейное движение

Вращение

Универсальное плоское движение

Сферическое движение

Универсальное космическое движение

Комплексное движение

Набор независимых координат в пространстве описывает положение тела как время

Таким образом, функция определяет движение тела.

Количество независимых координат соответствует степени свободы объекта или совокупности связанных тел и выражается в подвижности объекта.

Подвижность – количество степеней свободы, которыми обладает механизм. Количество независимых координат (входов) требуется для точного позиционирования всех звеньев механизма относительно системы отсчета/системы координат. = DOF i (3 n)1 = DOF i (6 n)1

Для плоскостного механизма: Дж

Для космического механизма: Дж

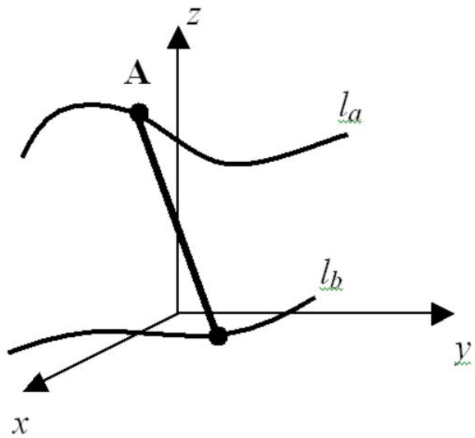
Кинематическая схема – это «упрощенный» эскиз механизма (каркасная форма, где только показаны размеры, влияющие на движение механизма).

Частица – это модельное тело с очень малыми/пренебрежимо малыми физическими размерами по сравнению с радиусом кривизны его траектории. Частица может иметь массу, связанную с ней, которая не играет роли в кинематическом анализе.

Доктор Инж. Зденка Сант

Как найти степень свободы?

1. Рассмотрим неограниченную прямую, движущуюся в пространстве



Состояние непроникания между точками А, Б

$\overline{AB}$ = константа. = л

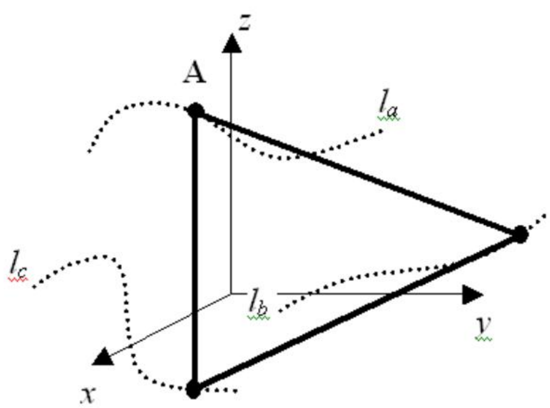
количество степеней свободы линии в 3D: две точки ⟹ 2*3 = 6 степеней свободы, непроникающее состояние: $\overline{AB}$ = l

Таким образом, i = 6 1 = 5 степеней свободы

Вывод: Свободное звено АВ имеет пять степеней свободы при перемещении в пространстве.

2. Рассмотрим свободное тело в пространстве

Сколько точек будет описывать положение тела?



Три точки: 3*3 = 9 степеней свободы

Состояние отсутствия проникновения (предположим, что тело твердое): $\overline{AB}$ = const.; $\overline{AC}$ = константа; $\overline{BC}$ = константа.

таким образом, m = 3

и я = 3 * 3 - 3 = степень 6 свободы

Вывод: Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы при движении в пространстве.

Для оценки степени свободы необходимо построить кинематическую схему механизма.

Схемы должны быть нарисованы в масштабе, пропорциональном реальному механизму в данном положении. По соглашению звенья, начинающиеся с системы отсчета, нумеруются номером один, а соединения должны быть обозначены буквами.

Принятая стратегия должна состоять в том, чтобы выделить на реальном наборе тел:

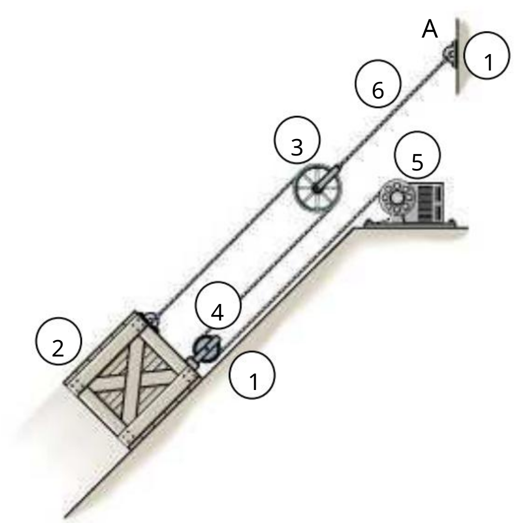
раме, приводе и всех остальных звеньях, всех

соединениях любые

интересующие точки и нарисовать кинематическую схему в соответствии с соглашением.

Как только мы оценили подвижность (степени свободы), мы можем определить соответствующий набор независимых координат (параметров) и начать кинематический анализ механизма.

выполняя подзадачу: а) определить
систему отсчета (базовое пространство, в котором будет описываться движение) б)
определить положение точки/частицы относительно системы отсчета в) описать
тип движения (связанное или без ограничений) г) написать условия
непроникновения д) определить
независимые координаты е) найти
скорость и ускорение



1 Фундамент

2 ящик

3 Шкив

4 Шкив

5 Двигатель/Привод

6 Связь

Совместный анализ: A ....

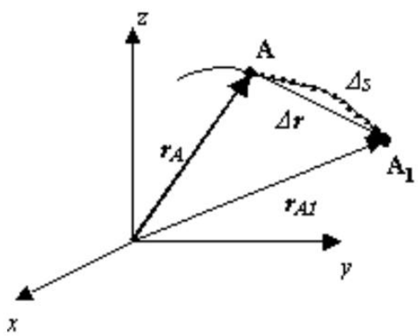
приколоть .... 2 степени свободы

я знак равно 3(6 n) (3 2 3 1) +

Кинематический анализ всего множества связанных тел можно провести, если мы сможем описать движение каждого сегмента/тела, а затем определить кинематические величины в интересующей точке в требуемом положении или времени.

Итак, начнем с Кинематики Частицы, которая изображена на диаграмме в виде точки.

2. КИНЕМАТИКА ЧАСТИЦЫ



Вектор положения rA описывает положение частицы/точки A относительно системы отсчета (CS x, y, z).

Характер вектора положения зависит от произвольной системы координат

В данный момент точка A имеет

t)(tf)(rA = r положение

в течение временного t точка перемещается в новую интервала положение A1 , которое может быть описано вектором положения rA1

$$г_{A1} = г + _A г$$

где: r ....представляет приращение вектора положения во временном интервале s ... представляет приращение траектории во временном интервале

Расстояние представляет собой меру мгновенного положения точки относительно начала координат .

Траектория/путь конкретной точки является локусом всех мгновенных положений этой точки.

Единичный вектор траектории:

T ...единичный вектор в касательном направлении $$т "=" лим_{т\ 0} \frac{г}{с} "=" \frac{г\ р}{дс}$$

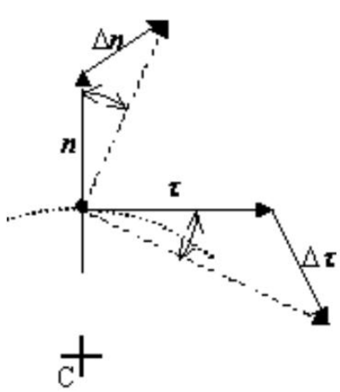
затем

$$т "=" \frac{г}{дс} (хуz йкийк + + = + + \frac{дх}{дс} \frac{ды}{дс} \frac{дз}{дс}$$

где $\frac{дх}{дс}$ = потому что $\alpha_т$; $\frac{ды}{дс}$ = потому что $\beta_т$; $\frac{дз}{дс}$ = потому что $\gamma_т$

– направляющие косинусы касательной к траектории, а углы αt, βt, γt – углы между осями x, y, z и касательным вектором т

n ...единичный вектор в нормальном направлении к траектории имеет положительную ориентацию по направлению к центру кривизны траектории



$$н "=" предел_{т\ 0} \frac{т}{\vartheta} "=" \frac{г\ т}{г\ \vartheta}$$

с учетом радиуса кривизны траектории R тогда

$$ds\ R\ d = \vartheta$$ и $$г\ \vartheta "=" \frac{дс}{р}$$

таким образом $п = = \frac{d\tau}{дс} \frac{}{р}$ р . $\frac{г\ т}{}$. Замена на дс т мы получаем

$$джн + дс = Р = \frac{г^2 р}{2} \quad р \frac{дх^2}{дс^2} я \quad р \frac{ды^2}{дс^2} + р \frac{дз^2}{дс^2} к$$

где: $P\frac{дх^2}{д^2}$ "=" потому что $\alpha_н$; $р\frac{ды^2}{дс^2}$ "=" потому что $\beta_н$; $P\frac{дз^2}{д^2}$ "=" потому что $\gamma_н$ являются направленными косинусами нормали к траектории и αn;

βn; γn — углы между осями x, y, z и нормалью

В случае трехмерного движения траектория представляет собой трехмерную кривую, поэтому необходимо определить третий единичный вектор в бинормальном направлении:

b ... единичный вектор в бинормальном направлении к траектории ориентирован таким образом, что положительное направление двунормального вектора образует вместе с нормальной и касательной правоориентированной перпендикулярной системой.

б = т × п

2.1 СКОРОСТЬ

Скорость изменения позиционного вектора во времени.

Средняя скорость изменения определяется как $в_{авр}$ "=" $\frac{р}{т}$

Наш интерес состоит в том, чтобы найти мгновенную скорость, которая представляет собой предельный случай средней скорости. Ограничение времени вычисления мгновенной скорости приближается к нулю.

Мгновенная скорость определяется как: $в$ "=" $лим_{т\,0}\frac{г}{т} = = \frac{г\,р}{дт}$ р

Куда направлена мгновенная скорость?

Здравый смысл или, вернее, интуиция подсказывает, что скорость имеет касательное направление к траектория. Итак, давайте докажем это утверждение математически:

$$в \text{ "=" } лим_{т\,0}\frac{р}{т}\frac{с}{с} \text{ "=" } лим_{0\,т}\frac{р}{с}\ лим_{т\,0}\frac{с}{т} = \frac{г\,р}{дс} = \frac{дс}{дт}\quad т\ с\quad т\ в$$

$$с\qquad с \text{ "=" } лим_{т\,0}\frac{с}{т} = = \frac{дс}{дт}\qquad в$$

Имея позиционный вектор, определенный как: r = xi + yj + zk

то скорость может быть описана ее составляющими, так как:

$$в = = \frac{г\,р}{дт}\quad \frac{г}{(\,дт}\ xyz)\ ijkik + + = + + = v + v + v\quad \frac{дх}{дт}\ \frac{ды}{j\,дт}\ \frac{дз}{дт}\quad я_{Икс}\quad д\ Джейк$$

где vx, vy, vz — компоненты скорости в направлении осей системы координат.

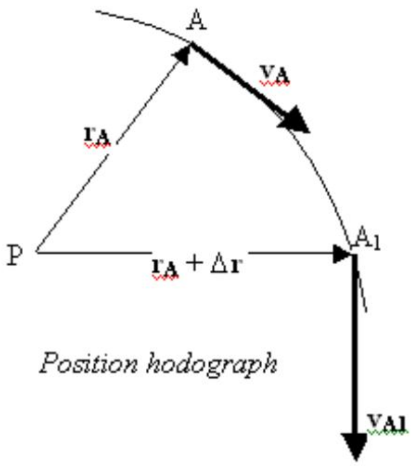
Величина/модуль скорости: $|в|в$ "=" $\sqrt{v_{Икс}^2 + v_y^2 + v_г^2}$

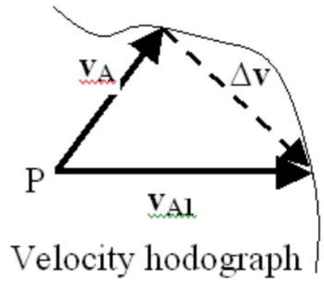
с направленными косинусами: потому что $\alpha_в = ;\frac{в_{Икс}}{|в|}$ потому что $\beta_в = ;\frac{в_и}{|в|}$ потому что $\gamma_в$ "=" $\frac{в_г}{|в|}$

2.2 УСКОРЕНИЕ

Ускорение изменения положения есть скорость изменения скорости во времени.

Чтобы получить выражение для ускорения, нам нужно нарисовать диаграмму вектора скорости, так называемую годограф скорости.





Построение годографа на основе знания пути точки и ее скорости в конкретных положениях A и A1: Пусть есть произвольная точка P, через которую проходят обе скорости vA и vA1 . Конечные точки их векторов создают искомый годограф кривой.

На основе годографа $v_{A1} = v_A + v$

Среднее ускорение определяется как $a_{avr} = \frac{в}{т}$

Мгновенное ускорение дается как предельное значение среднего ускорения за интервал времени t 0

$$a = лим_{т 0} \frac{вв}{т} = \frac{г}{дт} \quad вр"="$$

Направление ускорения можно найти из $a = \frac{г в}{дт} = \frac{г}{дт}(т\ в) = \frac{г т}{дт} в + т \frac{г в}{дт}$

Таким образом $a = \frac{г т}{дт} \frac{дс}{дс} v + т \frac{дв}{дт} = \frac{т}{дс} \frac{дс}{дт} в + т \frac{дв}{дт} 2 = \frac{т}{дс} + в \quad т \frac{г в}{дт}$

Так как направление нормали задано как $п = р \cdot \frac{г т}{дс}$ тогда мы можем заменить $\frac{г т}{дс} = \frac{н}{р}$ где

р представляет собой радиус кривизны в данный момент. Поэтому:

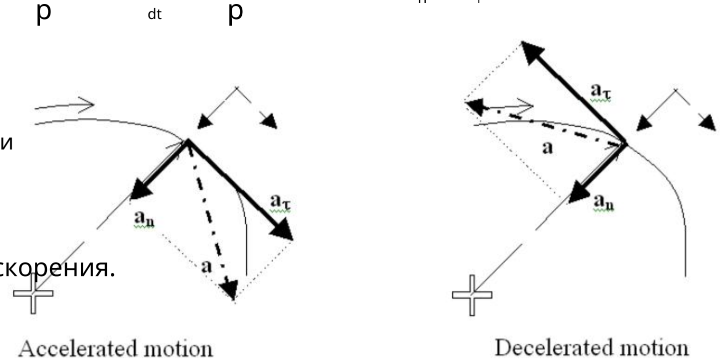
$$а\ знак\ равно\ п \frac{в^2}{р} + τ\ \frac{г v}{dt}\ знак\ равно\ п \frac{1}{р} с^2 + т\ с = а_н + а_т$$

Где $а_н = п \frac{в^2}{р}$ в

ускорение в нормальном направлении и

$а_т = τ$ Ы —

тангенциальная составляющая ускорения.



Доктор Инж. Зденка Сант

Направление нормального ускорения всегда ориентировано на центр мгновенной кривизны траектории. Касательная составляющая ускорения фиксирует изменение величины скорости, а нормальная составляющая фиксирует изменение направления скорости.

Результирующее ускорение образует угол β с направлением нормали: загар β "=" $\frac{|a_т|}{|a_н|}$

Таким образом, ускорение, выраженное в прямоугольной системе координат, будет иметь вид:

$$a = = \frac{дв}{дт}\ \frac{д}{дт}\ (я\ вв_{икс} + в_у +)\ жк_г \text{ "=" } я + а_{икс} + а_у Джейк_г$$

$$а \text{ "=" } \frac{г}{дт}\ (\ я + +) jkijk\ xyz = + + xyz$$

и величина ускорения: $|a| \text{ "=" } \sqrt{a_{икс}^2 + a_у^2 + a_г^2}$

Ориентация конечного ускорения задается направленными косинусами:

$$\text{потому что } \alpha_a \text{ "=" } \frac{a_{икс}}{|a|} \quad \text{потому что } \beta_a = ; \frac{a_у}{|a|} \quad \text{потому что } \gamma_a \text{ "=" } \frac{a_г}{|a|}$$

и в то же время 2 кос α 2 + cos β 2 + cos γ "=" 1

Точное описание движения частицы дает функция, охватывающая все кинематические величины f (,, , ,t) = 0 авр а тн

2.2.1 Классификация движения

Рассмотрим движение частицы по прямой (в направлении оси x).

Тангенциальная составляющая ускорения фиксирует изменение величины скорости, поэтому может можно использовать для различения движения как:

Равномерное движение

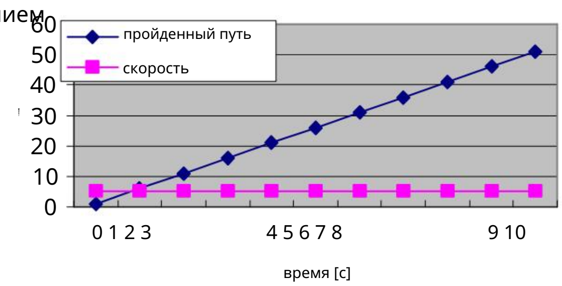
Математическое описание: = 0 таким образом = = 0 $\frac{дв}{дт}$ что означает v = const.

Если касательная идет по направлению оси x , то $v_{икс}$ "=" константа· и уравнение vx = $\frac{дх}{дт}$

представляет собой простое дифференциальное уравнение, решаемое разделением

переменные $\int_0^т v_{икс}\,dt = \int_{x_0}^{x} dx$, тем самым давая

решение $x = x_0 + v_{икс} t$



Доктор Инж. Зденка Сант

10/2009

Равномерно ускоренное/замедленное движение

Математическое описание: константа.

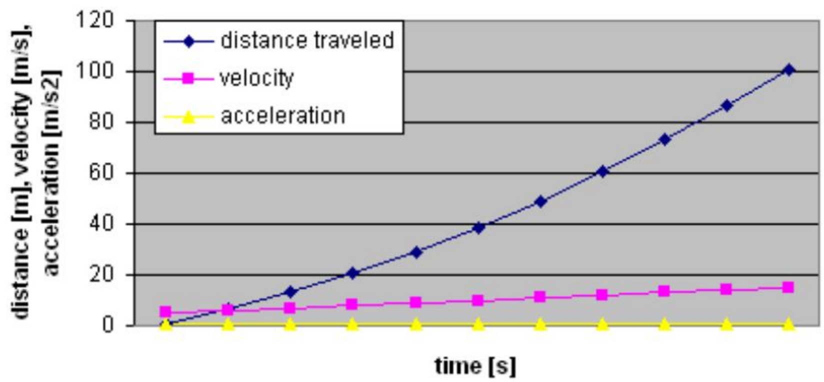
В случае, если касательная принимает направление оси x , то const. И $a_{x} = \frac{dv_{x}}{dt}$ таким образом

$\int_0^t a\, dt = \int_{v_0}^{v} dv_x$ ведущий к решению $v_x = v_0 + at$

в то же время $v_x = \frac{dx}{dt}$ поэтому $\int_0^t (v_0 + at)\, dt = \int_{x_0}^{x} dx$ что дает решение:

$$x = x_0 + tv_0 + \frac{1}{2} a t^2$$

Решение приводит к уравнению траектории точки, выраженной как функция времени.



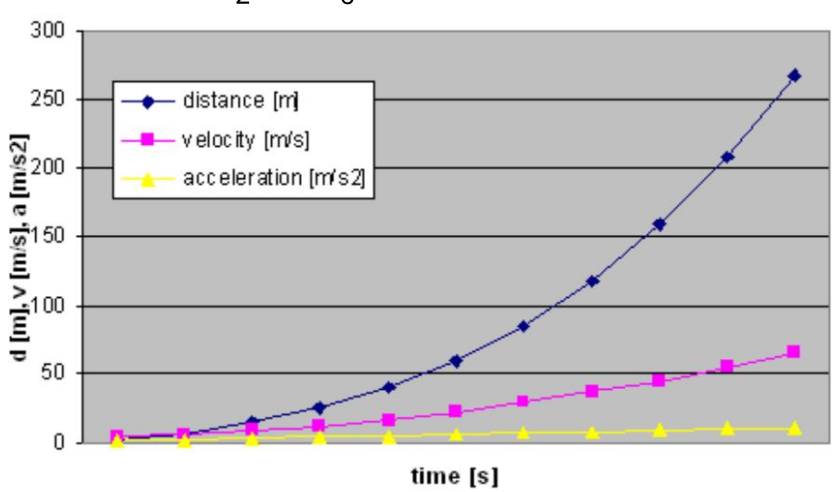
Неравномерно ускоренное движение

Математическое описание: $a = a_0 \pm kt$ (функция может быть определена иначе)

Таким образом константа $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ поэтому $\int_0^t (a_0 \pm kt)\, dt = \int_{v_0}^{v} dv_x$ с раствором

$v_x = v_0 + a_0 t \pm \frac{1}{2} k t^2$ с $v_x = \frac{dx}{dt}$ тогда $\int_0^t \left(v_0 + a_0 t \pm \frac{1}{2} k t^2\right) dt = \int_{x_0}^{x} dx$ что дает

уравнение траектории $x = x_0 + tv_0 + \frac{1}{2} a_0 t^2 \pm \frac{1}{6} k t^3$



Движение с другими изменениями кинематических величин

В этом случае ускорение задается как функция других величин a = (,, tvrf)

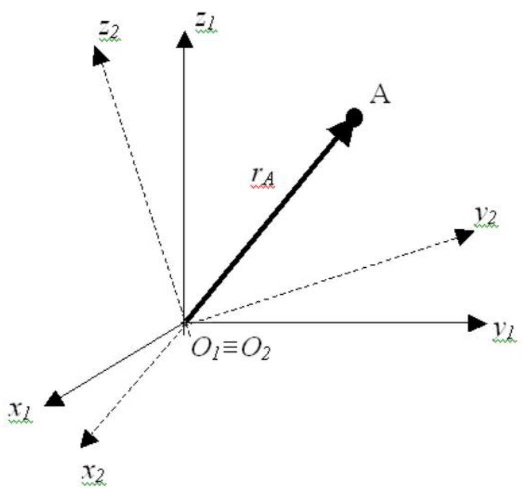
2.3 ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Вы можете очень ясно видеть, что скорость и ускорение напрямую зависят от позиционного вектора. Форма позиционного вектора будет варьироваться в зависимости от типа системы координат. Таким образом, в прямоугольной системе координат (x, y, z) кинематические величины в векторной форме:

r = rx i + ry j + rzk (позиционный вектор)

я = v + v дж + v k = dt г (я + р j k) (скорость)

= a + a + a = a j зк г/дт (я + + ввв) зк "=" г²/дт² ( ) rx i ry j rzk (ускорение)



Пусть точка A присоединена к подвижной системе координат , x, y, z с ее началом совпадающая с фиксированной системой координат x , y , г ; 1 1 1

O1 O2

Векторная форма положения точки A в КС1:

$p_1^A = r^A_{x1} i_1 + r^A_{y1} j_1 + r^A_{z1} k_1$

и в КС2: $p_2^A = r^A_{x2} i_2 + r^A_{y2} j_2 + r^A_{z2} k_2$

в матричной форме: $p_1^A = \begin{bmatrix} x_1^A \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ и $p_2^A = \begin{bmatrix} x_2^A \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$;

или $p_1^B = [x y z]_1$ и $p_2^B = [x y z]_2$

Чтобы выразить позиционный вектор r_2^A в CS1, вектор необходимо преобразовать. Этот процесс называется ортогональным преобразованием векторных величин.

2.3.1 Ортогональное преобразование векторных величин

Математическая операция использует матричную форму вектора.

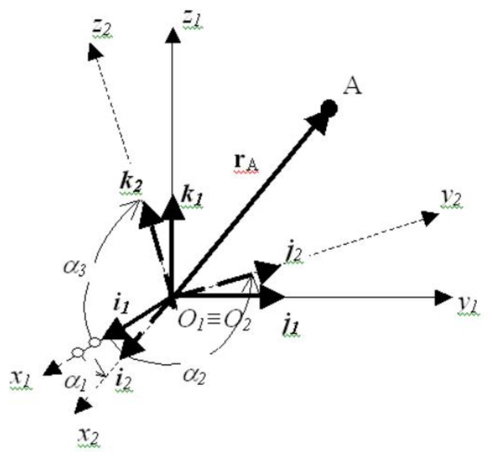
CS1 связан с базовым кадром/пространством, которое служит фиксированным кадром отсчета , не двигаться.

Подвижная точка A связана с СК2, которая перемещается относительно системы отсчета.

Таким образом, положение точки A в CS1 равно

$p_1^A = x^A_1 i_1 + y^A_1 j_1 + z^A_1 k_1$ и в кс2

$p_2^A = x^A_2 i_2 + y^A_2 j_2 + z^A_2 k_2$



Как мы интерпретируем позиционный вектор r2 A в кс1?

Задача состоит в том, чтобы спроецировать вектор r2A в CS1.

Таким образом, проецирующий вектор r2 A в направлении x1 :

Икс A 1 знак равно р2 A я 1 знак равно (Икс A 2 я 2 + у A 2 j 2 + г A 2 k 2) я 1

где: потому что α 1 = я 1 я знак равно я 2 потому что α 1

потому что α 2 = я 1 я = j 2 потому что α 2

потому что α 3 = я 1 я знак равно k 2 потому что α 3

Таким образом Икс A 1 знак равно Икс A 2 потому что α 1 + у A 2 потому что α 2 + г A 2 потому что α 3

Икс A 1 знак равно р A 2 я 1 знак равно Икс я + у j + z k я знак равно Икс 2 потому α 1 + у 2 потому α 2 + г 2 потому что α 3

у A 1 знак равно р A 2 j 1 знак равно х я + у j + z k j знак равно х 2 потому β 1 + у 2 потому что β 2 + г 2 потому что β 3

z A 1 знак равно р A 2 k 1 знак равно х я + у j + z k k знак равно х 2 потому γ 1 + у 2 потому γ 2 + г 2 потому что γ 3

переписав эти три уравнения в матричной форме, получим

$$\begin{bmatrix} x_1^A \\ y_1^A \\ z_1^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{потому что } \alpha_1 & \text{потому что } \alpha_2 & \text{потому что } \alpha_3 \\ \text{потому что } \beta_1 & \text{потому что } \beta_2 & \text{потому что } \beta_3 \\ \text{1 кос } \gamma & \gamma_2 & \text{потому что } \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^A \\ y_2^A \\ z_2^A \end{bmatrix}$$

р A 1 знак равно C 21 р A 2

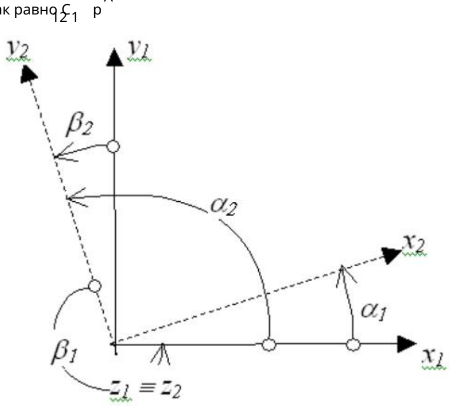
где $C_{21} = \begin{bmatrix} \text{потому что } \alpha_1 & \text{потому что } \alpha_2 & \text{потому что } \alpha_3 \\ \text{потому что } \beta_1 & \text{потому что } \beta_2 & \text{потому что } \beta_3 \\ \text{потому что } \gamma_1 & \text{потому что } \gamma_2 & \text{потому что } \gamma_3 \end{bmatrix}$

Аналогично преобразование из CS1 в CS2 дает: р A 2 знак равно C 12 р A 1

где

$$C_{12} = C_{21}^T = \begin{bmatrix} \text{потому что } \alpha_1 & \text{потому что } \beta_1 & \text{потому что } \gamma_1 \\ \text{потому что } \alpha_2 & \text{потому что } \beta_2 & \text{потому что } \gamma_2 \\ \text{потому что } \alpha_3 & \text{потому что } \beta_3 & \text{потому что } \gamma_3 \end{bmatrix}$$

и $C_{21} C = я^T_{21}$



Плоское движение есть частный случай, когда в любой момент движения z 1 z 2

$\alpha_1 = \phi$; $\alpha_2 = \phi + \frac{\pi}{2}$; $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$

$\beta_1 = \phi + \frac{3}{2}\pi$; $\beta_2 = \phi$; $\beta_3 = \frac{\pi}{2}$

Доктор Инж. Зденка Сант

γ_1 "=" $\frac{\pi}{;2}$ γ_2 "=" $\frac{\pi}{;2}$ γ_3 "=" 0

потому что грехф 0

и C21 "=" грех ф ф потому что 0 потому что грехф

0 0 1 грехф ф потому что

Как только позиционный вектор выражен в матричной форме и используется ортогональное преобразование, скорость и ускорение могут быть выражены в той же форме.

2.3.2 Скорость в матричной форме с использованием ортогонального преобразования

Скорость - это первая производная позиционного вектора

А вр "=" 1 "=" г/дт (C r C r C r) "=" А 221 + 221

Если точка A не меняет своего положения относительно начала координат CS2 , то r2 А =конст. и поэтому $\dot{r}^A_2$ "=" 0 и $v^A_1 = C_{21}\, r^A_2$

2.3.3 Ускорение в матричной форме с использованием ортогонального преобразования

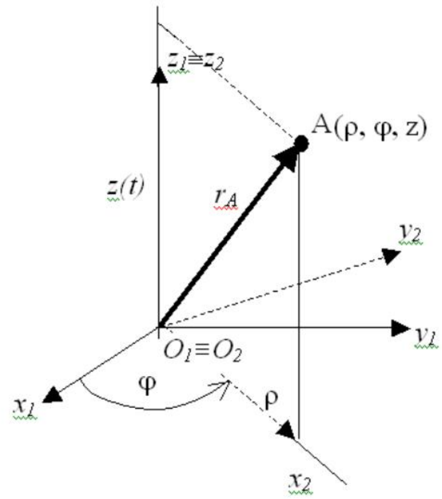
Ускорение - это первая производная скорости и вторая производная вектора положения, таким образом

avr C r C r C r C A = 21 + 2 21 2 21 2 21 2

Если точка A не меняет своего положения относительно начала координат CS2 , то r2 А =конст. и поэтому $\dot{r}^A_2$ "=" 0 и, таким образом, дает $\ddot{r}^A_2$ "=" 0 $a^A_1 = \ddot{C}_{21}\, r^A_2$

2.4 ЧАСТИЦА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ - r, ϕ ,z

2.4.1 Вектор положения



в CS2 $r^A_2 = \rho\, i_2 + z\, k_2$ ик = +

В матричной форме p^A_2 "=" $\begin{bmatrix} p \\ 0 \\ г \end{bmatrix}$

Таким образом, $r^A_1 = C_{21}\, r^A_2$ и так как

$$C_{21} "=" \begin{bmatrix} \text{потому что}\,\phi & -\text{грех}\,\phi & 0 \\ \text{грех}\,\phi & \text{потому что}\,\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

p^A_1 знак равно $C_{21}\, p^A_2$ "=" $\begin{bmatrix} \text{потому что}\,\phi & -\text{грех}\,\phi & 0 \\ \text{грех}\,\phi & \text{потому что}\,\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ г \end{bmatrix}$ "=" $\begin{bmatrix} p\,\text{потому что}\,\phi \\ p\,\text{грех}\,\phi \\ г_2 \end{bmatrix}$

в векторной форме: p^A_1 "=" p потому чтоϕ я $_1$ + p грехϕ $_{дж1}$ + г к

2.4.2 Скорость

Выражено в векторной форме $v^A_{против 2} = = \frac{дд}{дт} \frac{}{дт}(p$ икик г + $) = p$ + + p я 2 2 2 Г 2 к 2 г

где единичный вектор k2 остается постоянным (величина и направление не меняются с изменением время), поэтому $\dot{k}_2$ "=" 0

Единичный вектор i2 вращается в плоскости x, y вокруг начала координат, поэтому скорость определяется как

$$v^A_2 "=" \frac{г\,p}{дт} я_2 + p \frac{г\, я_2}{дт} + \frac{dz}{дт} к_2 \qquad \text{где}$$

$\frac{г\, я_2}{дт} = \times = \times \frac{г\,\phi}{дт} = я_2$ о я г 2 дж 2 ю представляет поперечный вектор, перпендикулярный единичному вектору i2.

Таким образом, скорость A 2 "=" $\frac{г\,p}{дт}$ я + 2 $p \frac{г\phi}{j}$ 2 2 + $\frac{дз}{дт}$ к я р 2 + ϕ р дж 2 2 + г к

Где $\dot{p}$ dt2 = ivp представляет собой радиальную составляющую

$\dot{\phi}\, p$ 2 скорости = jv представляет собой поперечную составляющую скорости

$\dot{z}$ 2 = kv представляет z-составляющую скорости

в матричной форме: скорость транспонирования в CS2 v_2^T "=" $[\dot{p} \quad \dot{\phi} p \quad \dot{г}]$

в CS1 $v^A_1 = C_{21}\, v^A_2$ = $\begin{bmatrix} \text{потому что}\,\phi & -\text{грех}\,\phi & 0 \\ \text{грех}\,\phi & \text{потому что}\,\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \phi\dot{p} \\ \dot{г} \end{bmatrix}$ "=" $\begin{bmatrix} \dot{p}\,\text{потому что}\,\phi - \rho\omega\,\text{грех}\,\phi \\ \dot{p}\,\text{грех}\,\phi + \rho\omega\,\text{потому что}\,\phi \\ \dot{г} \end{bmatrix}$

2.4.3 Ускорение

в векторной форме 2 A = = ДАВ / ДТ ДТ — (р 2iidt р + = 2 2) г — (р я + 2р ф Д* 2 2 + г к)

2 A 2 2 р ii = + р + р ф Д* + 2 р ф Д* + 2 р ф Д* + 2 2 г к

2 A = р + я 2 р ю Д* + 2 р ю Д* + 2 р а Д* + 2 р ю Д* 2 + г к 2

где: г Д* 2 / дт = × ю j г 2 = я 2 ю

Тем самым давая ускорение A = р + я22 2 р ф Д* + 2 р ф Д* 2 р ю 2 я нz 2 + 2 к

2 A = - (р р ф 2) я + (р ф 2 2 р ф) 2 2 + к

где (р = а ф р 2 р представляет собой радиальное ускорение

(р ф 2 + р ф ж) = р представляет поперечное ускорение

JzJ = $a_г$ представляет собой ускорение в направлении оси Z

в матричной форме:

В 2 = - р р ф 2 р ф + 2 р ф г

потому что грех ф 0 р ф р 2

а с а "=" 21 2 A "=" грех ф ф потому что 0 ф р + 2 ф р

0 0 1 г

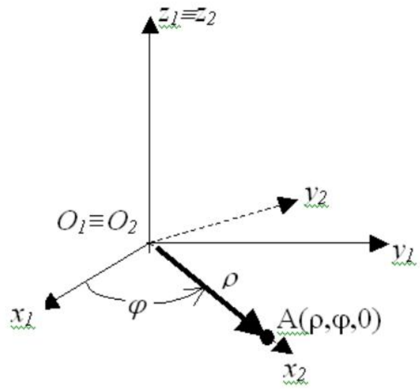
В этой презентации мы связали угол ф с угловой векторной координатой, ф = ф = к 1 ф к 2

таким образом, угловая ф = ф = к 1 ю к 1 ю

скорость и угловое ускорение ф = ф = к 1 ю к 1 а

2.4.4 Особые случаи

а) г=0 , р "=" константа, (ф)



Частица (точка А) ограничена только плоскостью x,y и движется так, что траектория точка А — это окружность в плоскости x,y.

Скорость и ускорение, выраженные в общих координатах в предыдущем абзаце, равны:

A v 2 2 р я знак равно ф р Д* 2 + 2 zJ к

2 A = - (р р ф 2) я (2 р ф + р ф) дж 2 + к 2

Таким образом, для нашего конкретного случая в CS2: v 2 A = ф р Д* 2

в КС1: v 1 A = - р ф грех ф я + ф р потому что ф Д* 1 и ускорение в CS2: $\underline{2}^{A} = - \rho\dot{\varphi}^{2} я + \rho\ddot{\varphi}^{2}$ ₐₓ 2

где $a^{A}_{2н} = - \rho\dot{\varphi}^{2}$ я 2 представляет собой нормальное ускорение, всегда направленное центр кривизны траектории

$\underline{2}^{A}_{т} = \rho\ddot{\varphi}$ ₐₓ 2 представляет собой тангенциальную составляющую ускорения

в КС1: $\underline{1}^{A} = - (\rho\dot{\varphi}^{2}$ кос φ $\rho\ddot{\varphi}$ грех φ) я + ($\rho\ddot{\varphi}$ потому что φ $\rho\dot{\varphi}^{2}$ грех φ) j 1

где $\rho\dot{\varphi}^{2}$ потому что φ "=" $a_{пх}$ x-компонента нормального ускорения в CS1

$\rho\ddot{\varphi}$ грех φ "=" $a_{т\,икс}$ x -компонента тангенциального ускорения в CS1

$\rho\ddot{\varphi}$ потому что φ "=" $a_{ту}$ Y -компонента тангенциального ускорения в CS1

$\rho\dot{\varphi}^{2}$ грех φ "=" а у-компонента нормального ускорения в CS1

б) г=0 , р(т), ф(т)

Частица (точка) движется в плоскости x,y и в описании задачи используются полярные координаты (ρ,ϕ)

2.5 ТРАЕКТОРИЯ ЧАСТИЦЫ

Движение можно классифицировать по траектории как:

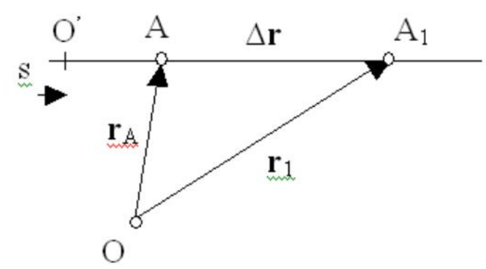
2.5.1 Прямолинейное движение

Положение точки описывается как функция криволинейных координат s : r = r(s)

где $\frac{г\,р}{дс}$ "=" т и $т^2=1$

Необходимым условием прямолинейного движения является

определяется как: τ = const.



Скорость определяется как:

$$= \frac{d\,ррв}{дт} = \frac{г}{дт} = \frac{дс}{дс}\tau \quad с\frac{г\,р}{дс}\;\frac{дс}{дт}$$

и ускорение: $a = \frac{г\,в}{(дт} \frac{г}{дт}$ т с) т с

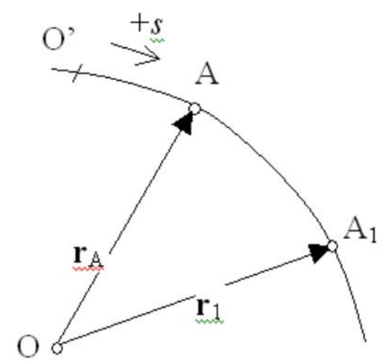
Если: sꓲ = const . поэтому 0 ꓲsꓲ = ...равномерное прямолинейное движение

sꓲ const. таким образом 0 ꓲsꓲ .....ускоренное прямолинейное движение

для ꓲsꓲ = const , то равноускоренное прямолинейное движение ꓲsꓲ

для const , то неравноускоренное прямолинейное движение

2.5.2 Криволинейное движение



В случае криволинейного движения r = r(s) и s = s(t), а скорость выражается как:

в = = Г р / дт = Г р / дт = ДС / дС τ с Г р / дС ДС / дт

Где т^2 = 1 а также τ const. поскольку единичный вектор меняет свое направление

Ускорение равно:

а = = дв / (дт дт с τ2н) с = ϵ τ 1 / р = аа т н

В случае, если:

а) s˩ = const . затем 0 ˩s˩ =

поэтому а = п ϵ 1 2 ˩ / р = а н и точка движется по круговой траектории с равномерным скорость .

б) s˩ const · затем 0 ˩s˩ и движение неравномерно ускоренное или

˩s˩ = константа. где а = т с + п с^2 / р движение равноускоренное

2.6 ГАРМОНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Движение точки (частицы), описываемое уравнением х А = + sin(ю т ф) представляет собой

где А амплитуду (максимальное отклонение от нейтрального положения) [м]

ю представляет угловую частоту [с-1]

ф представляет фазовый сдвиг [рад]

Икс представляет мгновенное расстояние частицы

называется гармоническим движением

Скорость в этом случае определяется как: v = = дх / дт А ю потому что (ю т + ф) и

Ускорение дают: а = = г в / дт А ю^2 грех(ю т + ф)

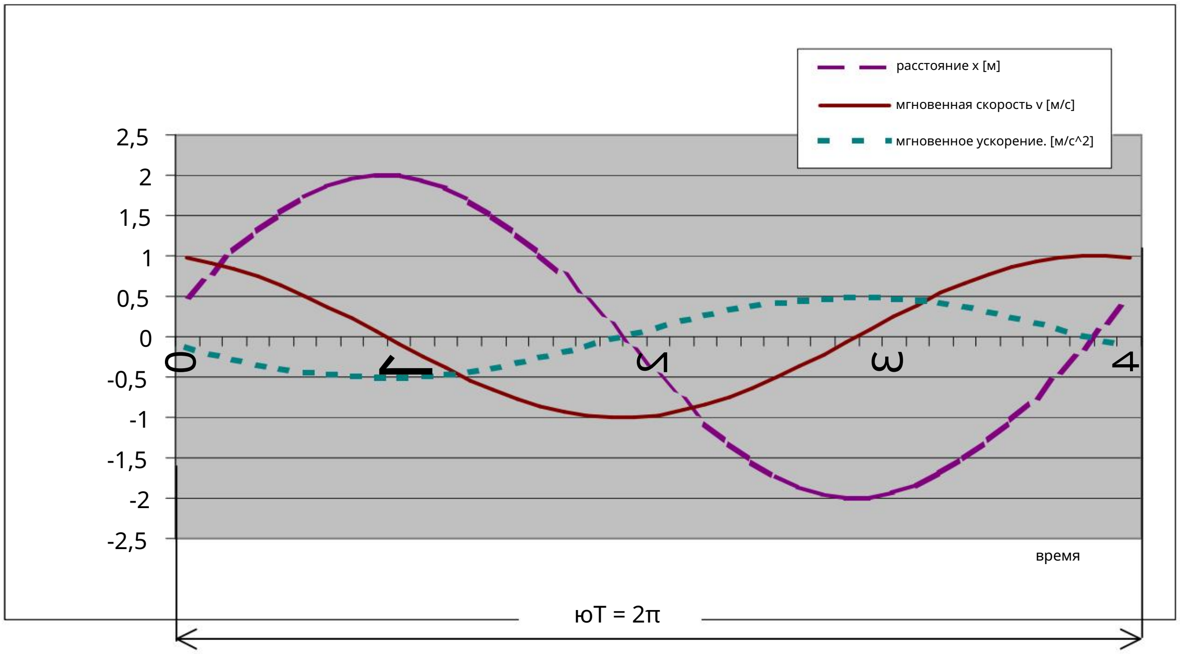
Для начального условия: t = 0, x = x0, v = v0, a = a0 кинематические величины таковы:

x0 = Асинус ф ; v0 = A ю потому что ф ; 0 = А ю^2 грех ф

Доктор Инж. Зденка Сант

10/2009

Графическую интерпретацию гармонического движения можно представить как выпрямление всех кинематические величины во времени



Где T представляет период $T = \frac{2\pi}{ю}$ [с] таким образом, частота $ф = \frac{1}{T}$ [Гц]

Амплитуда движения может быть выражена из $x0 = A\sin ф$ и $v0 = A\,ю$ потому что $ф$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{в_0^2}{ю^2}}$$ и $$загар\,ф \text{ "=" } \frac{грех\,ф}{потому\ что\,ф} \text{ "=" } \frac{Икс_0\,ю}{в_0}$$

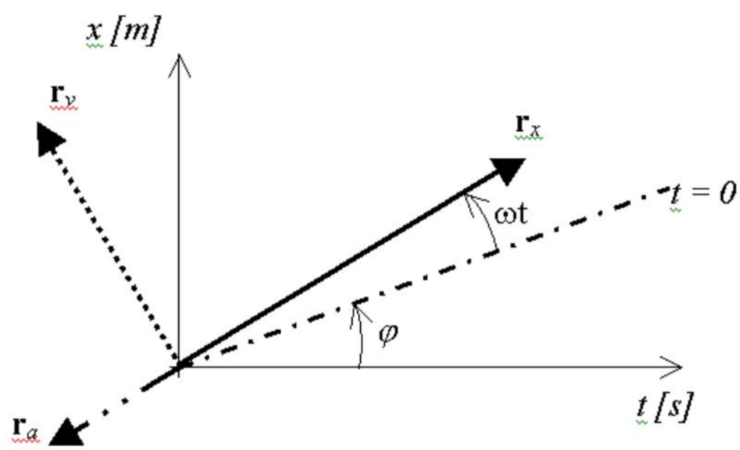
Таким образом, кинематические величины могут быть выражены как функция вектора вращения rx, rv, ra

Где

|прием| = A;

|рв| = Aω;

$|ра| = A\omega^2$



2.6.1 Состав гармонических движений в одном направлении

а) Если ω1 = ω2 = ··· = ωn = ω, то

$$x_1 "=" A_1 \text{ грех}(ю т + = ϕ_1) \quad eA_1^{(тю + ϕ_1)}$$
$$x_2 "=" A_2 \text{ грех}(ю т + = ϕ_2) \quad eA_2^{(тю + ϕ_2)}$$
.
.
$$x_н "=" A_н \text{ грех}(ю т + = ϕ_н) \quad eA_н^{(тю + ϕ_н)}$$

Результирующее движение снова является гармоническим движением, описываемым как:

$$Икс "=" \sum_{Дж "=" 1}^{н} x_j "=" \sum_{Дж "=" 1}^{н} A_{Дж} \text{ грех}(ю т + = ϕ_{Дж}) \quad \sum_{Дж "=" 1}^{н} A e j^{я(ю т + ϕ_{Дж})} "=" \sum_{Дж "=" 1}^{н} A эз Дж^{я ϕ_{Дж}} "=" e A e j^{я ϕ_{Дж}}$$ таким образом

$$x "=" A e_в^{я(ю т + ϕ_в)}$$

подставляя t = 0 , получаем: $x A e "=" _в^{я ϕ_в}$

откуда мы получаем конечную амплитуду и фазовый сдвиг

$$Средний "=" \sqrt{\left(\sum_{Дж "=" 1}^{н} \text{потому что} ϕ_{Дж}\right)^2 + \left(\sum_{Дж "=" 1}^{н} \text{грех}) A_{Дж} ϕ_{Дж}\right)^2}$$

и
$$ϕ_в "=" \frac{\sum_{Дж "=" 1}^{н} A_{Дж} \text{ грех} ϕ_{Дж}}{\sum_{Дж "=" 1}^{н} A_{Дж} \text{ потому что} ϕ_{Дж}}$$

б) Если ω1 ω2 .... ωn то каждое движение описывается своим уравнением

$$x_1 "=" A_1 \text{ грех}(ю_1 эт + ϕ_1) = A_1^{я(ю_1 т + ϕ_1)}$$
$$x_2 "=" A_2 \text{ грех}(ю_2 + = ϕ_2) \quad A_2 эт^{я(ю_2 т + ϕ_2)}$$

$$x_н "=" A_н \text{ грех}(ю_н эт + ϕ_н) = A_н^{(я ю_н т + ϕ_н)}$$

а конечное движение описывается уравнением:

$$Икс "=" \sum_{Дж "=" 1}^{н} x_j "=" \sum_{Дж "=" 1}^{н} A_{Дж} \text{ грех}(ю_{Джей Джей} т + = ϕ) \quad \sum_{Дж = 1}^{н} eA_{Дж}^{тю(ю + ϕ_{Джей Джей})}$$

Окончательное движение, составленное из гармонических движений с разными угловыми частотами, не является гармоническое движение, так как результирующая амплитуда непостоянна.

В случае, если $ю_1 "=" \frac{2π_{n1}}{T}$ и $ю_2 "=" \frac{2π_{n2}}{T}$ и в то же время соотношение $\frac{ю_1}{ю_2} "=" \frac{н_1}{н_2}$ является рациональным

число результирующее движение называется периодическим движением.

2.6.2 Композиция двух перпендикулярных гармонических движений

Движение двух частиц, движущихся в двух перпендикулярных направлениях, определяется уравнениями:

$$x\ A=" \ _1 \text{ грех}(ю_1 т + ϕ_1)\quad eA_1^{(тω_1 1+ϕ)} \quad \text{и}$$

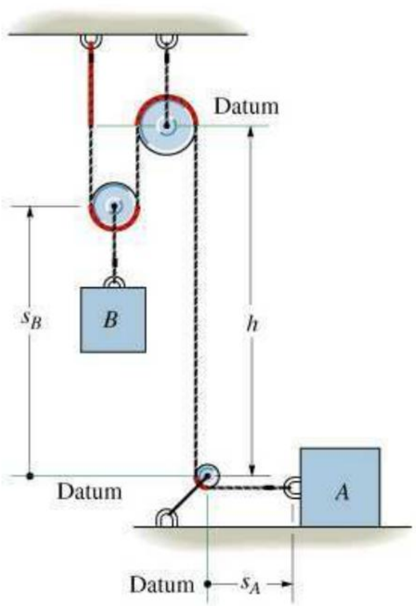
$$y\ A=" \ _2 \text{ грех}(ю_2 т + ϕ_2)\quad eA_2^{(тω_2 2+ϕ)}$$

Эти уравнения определяют кривые, известные как картина Лиссажу.

Решение довольно сложное и выходит за рамки нашей компетенции.

Относительно простые решения существуют для частных случаев, когда ω1 = ω2 и предположение A1 = A2 приводящее к уравнению эллипса на сопряженных осях.

2.7 ДВИЖЕНИЕ КОМПЛЕКСА ЧАСТИЦ



Множеством частиц может быть либо связное множество, либо частицы, либо число двух или более несвязанных частиц, движущихся в одной и той же системе отсчета.

Таким образом, необходимо учитывать взаимосвязь между частицами. Давайте возьмем случай частиц A и B, как показано на

диаграмме: Обе частицы связаны нерастяжимым кабелем. переносятся на шкивы. Это налагает между ними условие непроницаемости:

$$лшшс_A = 2(+ - _Б)$$

Дополнительная длина троса между верхней точкой отсчета и потолком, а также часть троса, охватывающая шкивы, останутся постоянными во время движения, поэтому не играют никакой роли в кинематическом описании.

Исследование подвижности множества частиц определило бы число независимых координаты, которые в нашем случае i =1

Путь частицы A не совпадает с путем частицы B, и связь между ними должна быть описана на основе вовлеченных суставов. Таким образом, за исключением условия отсутствия проникновения, необходимо учитывать опору в точке A, а также опоры для шкивов и корпуса B.

Имея основное условие нерастяжимой длины, мы можем оценить соотношение между скоростями частиц A и B как производная по времени от l. Таким образом

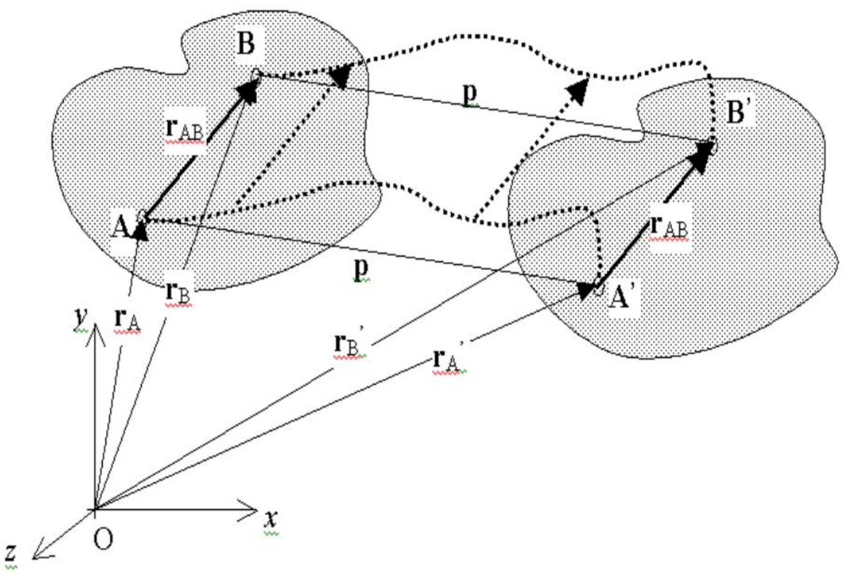
$$0\ 2v =_A + \quad _Б$$

Тогда можно заключить, что при движении частицы A в положительном направлении (от точки отсчета в направлении sA) частица B будет двигаться вверх со скоростью $v_Б = \frac{в_А}{2}$.

3 ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Как мы объявили ранее, модель тела, принятая в кинематике, снова недеформируема, поэтому расстояние между двумя точками A, B на твердом теле будет подчиняться правилу, математически выражаемому как: $\overline{AB}$ = const .

3.1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.



Исследуется положение и траектория двух точек A, B.

Если две движущиеся точки будут рисовать свои траектории в два параллельны плоскостям, поэтому их траектории являются параллельными кривыми. Изменение положения из точки A в A' и из B в B' описывается параллельными векторами p . Движение вперед прямолинейное (сплошная линия), если вектор p прямой и криволинейной , если это кривая (пунктирная линия).

Изменение положения точки A равно $r_{A'} = rA + p$

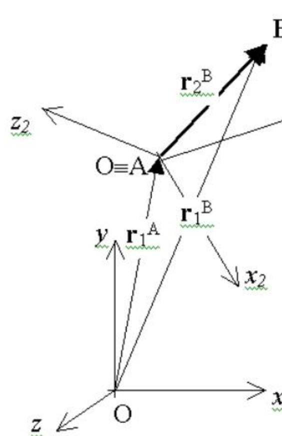
точки Б $r_{Б'} = rB + p$

Таким образом

$р_А - р_{АБ}$ знак равно $р - р_Б$ или $р - р$ знак равно $р - р_{БАБА}$,

переставить. Выражая векторы rB и rB' относительно точки отсчета A/A', можно доказать предыдущее утверждение о параллельных векторах rBA = rB'A' = const.

3.1.1 Исследование кинематических величин



Позиция

Точка A — это точка отсчета, прикрепленная к телу, связанному с подвижным CS2 (x2, y2, z2). Положение точки B задается как

$р_{1}^{Б} = р_{1}^{A} + р_{1}^{бакалавр}$

и $г_1 = х_2^{БА}$ кос $α_1$ + у $_2^{бакалавр}$ потому что $α_2$ + г $_2^{бакалавр}$ потому что $α_3$

таким образом, положение точки B в CS1 равно

$x_1^{Б} = x_1^{А} + x_2^{бакалавр}$ потому что $\alpha_1 + y_2^{БА}$ кос $\alpha_2 + г_2^{бакалавр}$ потому что α_3

$y_1^{Б} = y_1^{А} + x_2^{БА}$ кос $\beta_1 + y_2^{бакалавр}$ потому что $\beta_2 + г_2^{бакалавр}$ cos β_3

BA $z_1^{Б} = z_1^{А} + x_2$ cos 1 $\gamma_1 + y_2^{БА}$ кос $\gamma_2 + г_2^{бакалавр}$ потому что γ_3

или в матричной форме $p_1^{Б}$ знак равно $p_1^{А} + C_{21} \; p_2^{бакалавр}$

Матрица преобразования C21 содержит косинусы всех углов между осями системы координат. Поскольку все векторы остаются параллельными векторами, углы между отдельными осями постоянны. Поэтому C_{21} = константа.

Скорость

В векторной форме скорость точки B определяется как:

$$v_1^{Б} = \frac{г\, p_1^{Б}}{дт} "=" \frac{г}{дт}(p_1^{А} + г_1^{бакалавр})\ ввв = +\ =\ _1^{А}\ _1^{бакалавр}\ _1^{А}$$

начиная с $r_1^{БА}$ = константа.

В матричной форме: $вр_1^{Б}\ 1\ "="\ ^{Б}\ "="\ r_1\ C\ БА + C_{21}\ r_2\ 21\ 2\ 21\ 2 +\ ^{бакалавр}$

и C21 = 0 с C_{21} = константа.

Таким образом, окончательная форма матрицы: $v_1^{Б} = rJ_1 = rJ_1^{Б} = \ _1^{А}\ v1^{А}$

Ускорение

В векторной форме ускорение точки B определяется как: d

$$a_1^{Б} = \frac{в_1^{Б}}{дт} "=" \frac{г}{дт}(вв_1^{А} + ва_1^{бакалавр}) "="\ _1^{А} "="\ _1^{А}$$

начиная с $v1^{бакалавр} = 0$

В матричной форме: $a_1^{Б} = JrJ = \ ^{Б}_{1\ v1\ v1\ a1}\ ^{Б} = =\ ^{А}\ ^{А}$

3.2 ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Если две точки движущегося твердого тела неподвижны, то

$$вв_{O_1} = _{O2} = 0$$

затем твердое тело вращается вокруг оси, проходящей через эти точки O1 и O2.

Позиционные векторы описывают свое положение в CS1 следующим образом:

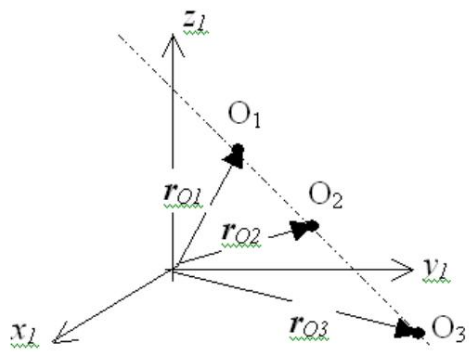
rO1 = постоянная, rO2 = постоянная.

Любая точка на линии, заданной точками O1 и O2 можно описать как

$$p_{O3} = p + p_{O1\ OO} \lambda \quad 12$$

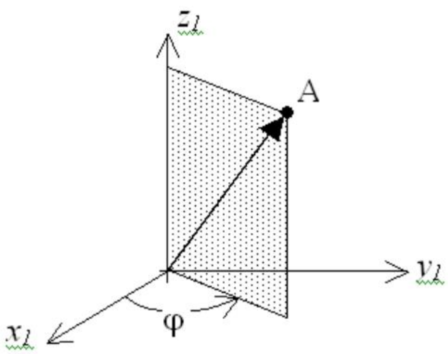
а скорость точки O3 получается первой производной от ее положения, таким образом

$$rO_3 = v_{O\ 3} \text{"="}\ 0$$



Вывод: существует бесконечное количество точек, лежащих на линия, заданная точками O1 и O2, имеющими нулевую скорость.

Геометрические места всех точек, имеющих нулевую скорость, равны называется осью вращения.



Путь точки A, лежащей в плоскости (x,z) , вращающейся вокруг оси z, представляет собой окружность с радиусом ρ, что соответствует проекции вектора положения rA на плоскость x,y .

Мгновенное положение точки A зависит от момента угол поворота ϕ = ϕ(t), далее этой угловой координате сопоставляем векторную величину, подчиняющуюся правилу правой руки.

Угловая скорость, которая описывает скорость изменения угловой координаты, выражается как

среднее значение угловой скорости: $ю_{средний} \text{"="} \frac{ϕ}{т}$

Мгновенная угловая скорость определяется как: $лим_{т\ 0} \frac{ϕ}{т} = \frac{гϕ}{дт} = ω$ таким образом, ω = ϕ = е ϕϕ

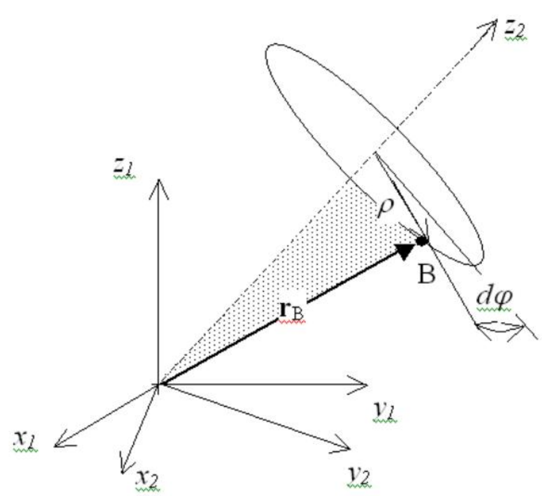
Точно так же мы можем выразить угловое ускорение.

Среднее ускорение определяется как: $α_{средний} \text{"="} \frac{ю}{т}$ и

Мгновенное ускорение есть $лим_{т\ 0} \frac{ю}{т} = \frac{гю}{дт} = α$

таким образом, α = ωJ = e ϕϕ

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то все точки тела имеют одинаковые угловые скорости и ускорения.



3.2.1 Нахождение скорости произвольной точки

Точка B прикреплена к вращающемуся твердому телу Тогда положение точки B в CS2 задается как

$$p_{Б} = x_{Б}\, 2\ 22\ у_{Б}\ 22\ к22$$

или относительно точки O' , вокруг которой точка B вращается с радиусом ρ

$$r_2^Б = r_2^{O'} + ρ_2$$

Точка B движется по круговой траектории за время t 0 а расстояние = d

$$дρ = д ϕ ρ \quad ϕ \; r_B \; грех \; β$$

в векторной форме: $дρ = дϕ × r_B = дϕ × ρ$

так как векторы r и ρ лежат в одной плоскости и вместе с вектором ϕ образуют плоскость, к которой ортогонален (перпендикулярен) приращение пути dr .

Таким образом, скорость точки B равна d

$$в_Б = \frac{гρ}{дт} = \frac{ϕ}{дт} × r_Б = \frac{гϕ}{дт} × ρ = ω × ρ \; ω \; ρ_Б$$

модуль скорости: $|в_Б| = ю \; r_B \; грех \; β = ю \; ρ$

или в векторе из:

$$v_Б = ω × ρ = \begin{vmatrix} я & Джейк & \\ ю_{икс} & ю_у & ю_г \\ ρ_{икс} & ρ_у & ρ_г \end{vmatrix} = я(ю \; ρρ \; зы \; ыю) + j(ю \; хз \; зх \; ю \; ρ) + к(ю \; ρρ \; ух \; ху \; ю)$$

затем $v_Б = iv_{икс} + jv_у + кв_г$ с модулем $|v_Б| = \sqrt{v_{икс}^2 + v_у^2 + v_г^2}$

Ориентация линейной скорости задается правилом правой руки: захват оси вращения правой рукой таким образом, чтобы большой палец указывал в направлении угловой скорости, а остальные пальцы показывали бы направление скорости конкретной точки тела. .

Если положение точки B выражено в матричной форме

$$р_1^Б \text{ знак равно } C_{21} \; р_2^Б$$

тогда скорость есть первая производная от положения, таким образом

$$вр_1^Б = \dot{1}^Б = \frac{г}{дт}(C \; r \; C \; r \; C \; r) = \dot{C}_{21} r_2^Б + C_{21} \dot{r}_2^Б$$

Поскольку точка B прикреплена к CS2 и вращается вместе с ней, тогда $r_2^Б =$ константа и его первая производная равна нулю.

Скорость точки B определяется как $v_1^Б$ знак равно $\dot{р}_1^Б$ знак равно $\dot{C}_{21} р_2^Б$ знак равно $C_{21} ρ_2^Б$

Первая производная матрицы преобразования $\dot{C}_{21} = 1 \; \tilde{C} = C_{21} \; 2$

и наконец $v_1^Б = C_{21} \; 2 \; р = C_{21} \; 2 \; 2 \; р^Б$

3.2.2 Нахождение ускорения произвольной точки B

В векторной форме: $a_Б = v_Б = ω × r_Б = α × r_Б + ω × v_Б$ $\frac{г}{(дт}\,)$

и одновременно $a_Б = \frac{г}{дт}(ω × ρ) = α × ρ + ω × v_Б$

Поскольку точка B движется по круговой траектории, ускорение будет иметь две составляющие.

Тангенциальная составляющая

$$a_Б^т = α × p = α т × = \begin{vmatrix} я & Джейк & \\ α_{икс} & α_у & α_г \\ р_{икс} & р_у & р_г \end{vmatrix} = я(α_{у} р_{з} - α_{з} р_{ы}) + j(α_{з} р_{х} - α_{х} р_{з}) + к(α_{х} р_{у} - α_{у} р_{х})$$

и нормальное ускорение

$$a_Б^н = ω × v = \begin{vmatrix} я & Джейк & \\ ю_{икс} & ю_у & ю_г \\ в_{икс} & в_у & в_г \end{vmatrix} = я(ю_{у} в_{з} - ю_{з} в_{ы}) + j(ю_{з} в_{х} - ю_{х} в_{з}) + к(ю_{х} в_{у} - ю_{у} в_{х})$$

Их модули:

$$\left|a_Б^т\right| = \sqrt{(a^т_{икс})^2 + (a^т_у)^2 + (a^т_г)^2} \quad или \quad \left|a_Б^т\right| = α RB \sin β = αρ$$

и $$\left|a_Б^н\right| = \sqrt{(a^н_{икс})^2 + (a^н_у)^2 + (a^н_г)^2} \quad или \quad \left|a_Б^н\right| = v = ю_Б = ю^2 р = \frac{в_Б^2}{р}$$

В матричной форме: $a_1^Б \text{"="} \dot{v}_1^Б \text{"="} \ddot{r}_1^Б = \ddot{C}_{21} r_2^Б$

что приводит к $a_1^Б$ знак равно $v_1^Б$ знак равно $\ddot{р}_1^Б$ знак равно $\ddot{C}_{21} р_2^Б$

тогда вторая производная матрицы преобразования:

$$\dot{C}_{21} \text{"="} \dot{C}_{1\,21}$$

$$\ddot{C}_{21} \text{"="} \dot{C}_{1\,21} + 1\,\dot{C}_{1\,21} \text{"="} \dot{C}_{1\,21} + {}^2C_{1\,21}$$

$$\ddot{C} \text{"="} A C_{21} + {}^2C_{1\,21}$$

Таким образом, ускорение точки B равно

$$a_1^Б = (AC + C_{1\,21})r = (A + {}^2_1)C_{21}r_2^Б = (A + {}^2_1)r_1^Б$$

где первая составляющая представляет собой тангенциальное ускорение

$$a_1^{Бт} = A_1 C\, r_{221}^Б = A\, r_{11}^Б = A_1 ρ \qquad где \quad A \text{"="} \begin{matrix} 0 & α_г & α_у \\ α_г & 0 & α_{икс} \\ α_у & α_{икс} & 0 \end{matrix}$$

а вторая составляющая представляет собой нормальное ускорение

$$a_1^{Бн} = {}^2_1 C\, р_{221}^Б = {}^2_1 р_1^Б = v_{11}^Б$$

Ход движения регистрируется тангенциальным ускорением $ατ \text{"="} α\ р$

$$где \quad α = \frac{г ю}{дт} = \dot{ю}$$

Может быть две ситуации:

а) ю = константа α = 0

Таким образом $a^т$ 0 = и $a^н$ = р $ю^2$ "=" $\frac{в^2}{р}$

Эти характеристики представляют собой равномерное движение частицы по окружности и возникающее ускорение является нормальным ускорением.

б) ю констант. α 0

В этом случае угловое ускорение α может стать:

я) α = константа таким образом $\alpha_т$ "=" α р = константа. (при условии, что ρ = const.)

Эти характеристики представляют равномерно ускоренное движение по круговой траектории. – равноускоренное вращение.

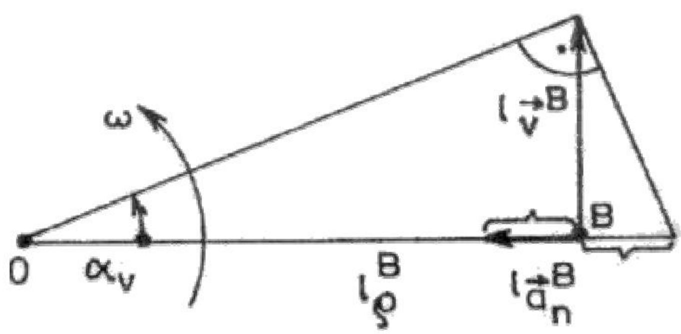
ii) α констант. таким образом $\alpha_т$ α р константа.

Эти характеристики представляют собой неравномерно ускоренное движение по окружности, неравномерно ускоренное вращение.

В обоих случаях произойдет нормальное ускорение. $a^н$ = р ю^2 $\frac{в^2}{р}$

3.2.3 Следствия кинематики твердого тела (геометрическая зависимость)

Предоставляя графическое решение для кинематических величин, нам необходимо записать скорость и ускорение в графической форме. Для этого должны быть заданы масштабы длины и скорости, а остальные масштабы рассчитаны.



Где lρ Б представляет собой длину радиус-вектор ρ

$л_р$ = $\frac{р}{с_л}$ таким образом р = $с_л$ р

и скорость v = s $l_{вв}$

Следовательно, угол αv определяется как

загар $\alpha_в$ v = $\frac{л}{л_р}$ = $\frac{против_л}{р}$ $\frac{}{с_в}$ ю $к_в$

где kv – постоянная масштаба скорости.

Поскольку все точки тела имеют одинаковую угловую скорость ω, мы можем заключить - Предложение о скоростях:

$$\boxed{\alpha}$$

Ускорение – графическое решение

Должны быть зарегистрированы тангенциальная и нормальная составляющие ускорения.

Нормальная составляющая ускорения:

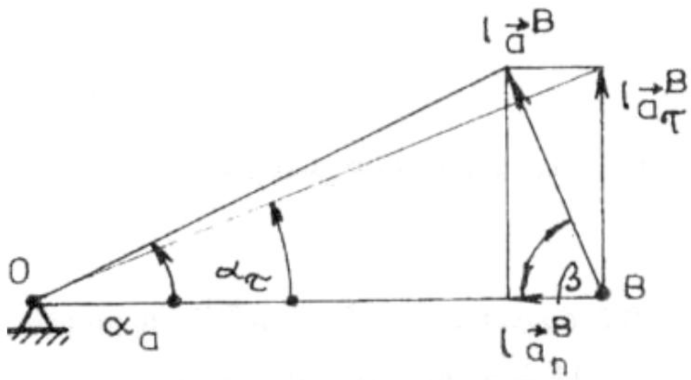
$$a^{н} = \rho\, ю^{2} = \frac{в^{2}}{\rho}$$ таким образом, из закона Евклида о высоте в треугольнике следует

графическое построение нормального ускорения.

Масштаб ускорения должен быть рассчитан!!

Поэтому $a_{н} = \frac{СЛ_{вв}^{2\,2}}{СЛ_{л}\ \rho} = СЛ_{аа\ н}$ где $л_{ан} = \frac{л_{в}^{2}}{л_{р}}$ и $\boxed{с_{а} = \frac{с_{в}^{2}}{с_{л}}}$

Тангенциальная составляющая ускорения: $a_\tau = \alpha\ \rho$



Направление тангенциальной составляющей соответствует направлению скорости, поэтому очевидна дальнейшая аналогия со скоростью.

$$загар\ \alpha_{а_т} = = \frac{л_{а_т}}{л_{р}} \quad \frac{как_{т}}{\rho} \quad \frac{л}{с_{а}} \quad \alpha \quad к_{а_т}$$

где ка $т$ является тангенциальным постоянная шкалы ускорения.

Поскольку все точки тела имеют одинаковое угловое ускорение α, мы можем заключить:

Предложение о тангенциальном ускорении:

$$\boxed{\alpha\ ^{т}}$$

Полное ускорение дается как сумма его составляющих $aaa = {}^{т} + {}^{н}$

$$загар\ \beta = = \frac{a^{т}}{a^{н}} \quad \frac{\alpha\rho}{ю^{2}\rho} = = \frac{\alpha}{ю^{2}} \quad к_{а}$$

где ka представляет собой постоянную масштаба полного ускорения.

Поскольку α и ω постоянны для всех точек тела, заключаем: полное

ускорение точки вращающегося твердого тела составляет угол β от ее нормали к траектории, которая остается постоянной для всех точек тела.

И, наконец, мы можем доработать на основе фона: $загар\ \alpha_{а} = \frac{л_{а_т}}{л_{р}\ ЛММ_{а_н}\ _{ля}} = \frac{\alpha}{^{1}\ ю^{2}}$

вместе с угловыми кинематическими величинами α, ω, одинаковыми для всех точек тела:

$$\boxed{\alpha}$$

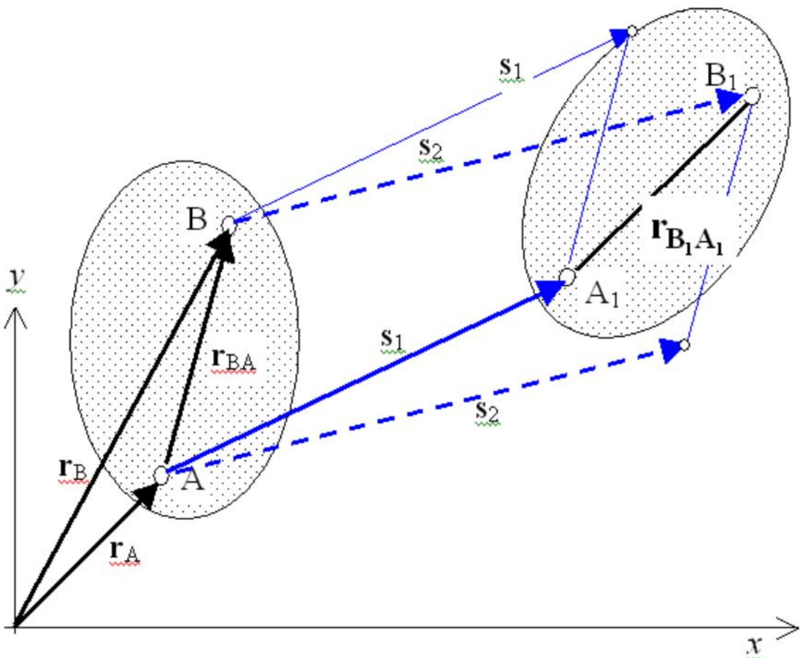
Доктор Инж. Зденка Сант

10/2009

3.3 УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Если все точки тела движутся в плоскостях, параллельных неподвижной (неподвижной) основной плоскости, то говорят, что тело движется плоскостно.

Если траектории всех точек, лежащих на прямой, перпендикулярной этой плоскости, являются плоскими кривыми тогда движение является универсальным плоским движением.



Начальное положение тела описывается через точки A, B. Позиционный вектор для точки B через опорную точку A начальное

описывает

положение тела:

Б А
ВА г = г + г

В течение интервала времени t их положение меняется на новое место A1 и B1.

таким образом, г Б1 = г А1 + г АВ, 11

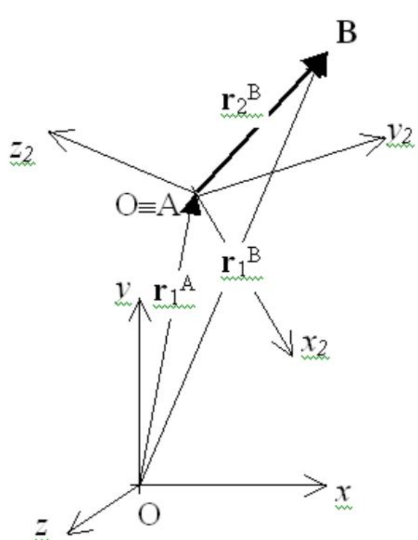
Как видно на схеме

г БА АБ 11 г , но

|р = р бакалавр| | АВ 11 | , который

означает, что вектор меняет свою ориентацию, но не свою величину.

Поэтому мы можем представить универсальное плоское движение как последовательность поступательного движения. за которым следует вращение, которое можно кратко выразить так: GPM = TM + RM Примечание: Оба движения происходят в одно и то же время, и этот подход является просто воображаемым.



3.3.1 Положение

точки B можно выразить в векторной или матричной форме:

р Б = р + р А бакалавр
11 1

с использованием матрицы преобразования C21:

р Б знак равно р + С А р бакалавр
1 1 21 2

что приводит к двум уравнениям в векторной форме:

х Б = х + х 2 А БА кос ϕ у 2 бакалавр грех ϕ
1 1

у Б = у + х А 2 бакалавр грех ϕ + у 2 бакалавр потому что ϕ
1 1

или в матричной форме:

Икс 1 Б		Икс 1 А		потому что	грех ϕ 0		Икс 2 бакалавр
у 1 Б	"="	у 1 А	+	грех ϕ	ϕ потому что	0	у 2 бакалавр
г 1 Б		г 1 А		0	0	1	г 2 бакалавр

Доктор Инж. Зденка Сант

10/2009

3.3.2 Скорость

точки B можно выразить:

в векторной форме: v = p + p = ( ) v1 v1 дт

Б Г А бакалавр А бакалавр
1 1 1

таким образом v = v + ω × r

Б А бакалавр
1 1 1

или в матричной форме: ввв = + = + v C p

Б А БА А бакалавр
1 1 1 1 221

v = v + C r = v + r

Б А БА А бакалавр
1 1 1 221 1 11

Существует поворот точки B относительно точки A, поэтому мы говорим, что существует относительное движение точки B вокруг точки A.

Таким образом v = ш × r

БА бакалавр
1 1

где ω представляет собой угловую скорость относительного движения относительно точки A.

Относительная угловая скорость постоянна для всех точек тела, поэтому: ю = = = в БА / бакалавр = в / Калифорния константа

Тогда мы можем получить компоненты скорости:

в Б Икс   в А Икс   0 ю 0 бакалавр Икс

в Б у "=" в А у + ю 0 0 бакалавр у

0 1   0 1   0 0 0 0   1

Графическое решение:

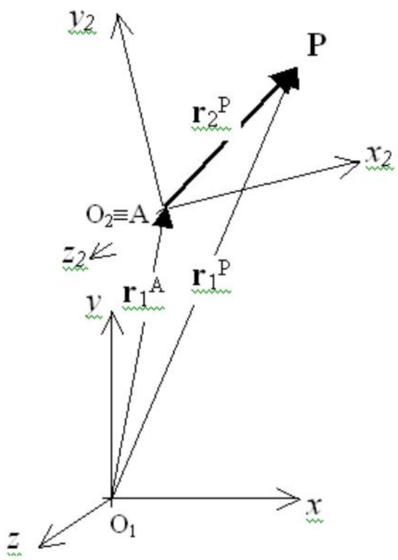
Скорость точки A известна, поэтому нам нужно найти скорость в точке B на основе векторного уравнения:

v = v + ω × r

Б А бакалавр
1 1 1

3.3.3 Полюс движения

Если ю 0 тогда на теле существует только одна точка, скорость которой в данный момент равна нулю, и принадлежит движущемуся телу (или плоскости, прикрепленной к движущемуся телу). Эта точка известна как мгновенный центр вращения или полюс движения.



Положение полюса P определяется как:

$p_1^П = p + p_1^A \quad 1$

в матричной форме: ррр 1∓1 + = + ^{П} ^{A} ^{PA} р С р ^{A} 1 221

Тогда скорость полюса: $v_1^п = v_1 + v_1^A$

так как линейная скорость в этом месте равна нулю, то

0 = + $^{ПА}_{1111}$ = - вввв A

Для произвольной точки отсчета мы получили бы аналогичный отвечать:

$0 = v_1^Б + v_1^{ПБ} \quad v_1^{ПБ} = v_1^Б$

Найти положение полюса тела, движущегося с GPM мы должны умножить уравнение скорости на угловую скорость

Таким образом $0 = ω× v +_1^A ω× ω ×(r 1)$

Преобразование уравнения в форму $0 = ω× v_1^A + ω [\; ω(\; r1 \;) r1 \; (ω \; ω)]$

приравнивая ω р 1 ^{ПА} "=" 0 и ω ω = ю^2

мы получаем $0 = ω × v_1^A - (ю^2 p_1)$

откуда мы приравниваем вектор положения полюса

p_1 "=" $\frac{ω × ω_1^A τ}{ю^2}$ "=" $\frac{× \; v_1^A}{ю^2}$ "=" $\frac{1}{ю^2}$ я 1 0 0 вв^A ^{A} у Джейк 1 1 ю 0 "=" $\frac{1}{ю^{2}}$ 1 [я (Юв$^A_у$) + 1 (Юв^A])

Графическое решение:

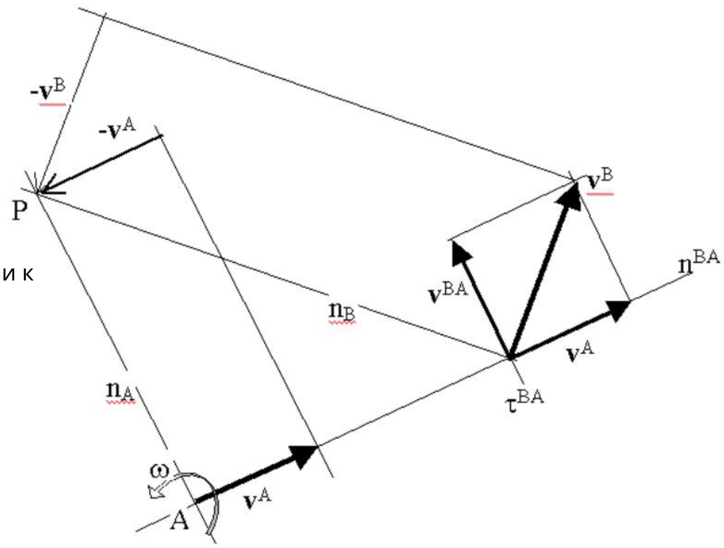
На основании v1 = v1 и

ПБ Б
v1 -= v1

Скорость v А известно и скорость в точке B равна

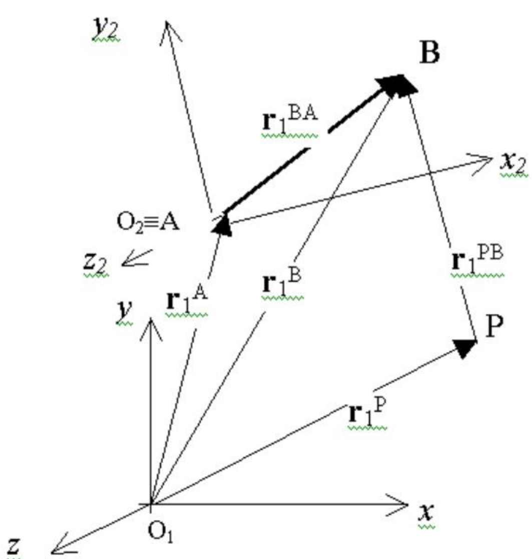
Б А
v1 = v1 + v1

таким образом, если мы знаем скорость, мы знаем направление нормали к траектория.



Полюс движения находится на пересечение нормалей nA и nB.

Нахождение скорости с помощью шеста



Положение точки B p = p + p

или r = r + C r 221 АД

Тогда скорость равна: v = v + C r 1 221 АД

Так как скорость полюса равна нулю, мы получаем

v = C p 1 221 АД

в матричной форме

Б в 0 ю 0 cosϕ грехϕ 0 АД Икс

в Б у "=" ю 0 0 sinϕ потому что ϕ 0 у АД

0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 2

это привело бы к

v1x -= ю у1 АД и v = 1 год ю x1 АД

Таким образом, давая конечную скорость

$$|в_1^Б| = \sqrt{(v_{1x}^Б)^2 + (v_{1\,год}^Б)^2} = \sqrt{(ю\, у_1^{АД})^2 + (ю\, x_1^{БП})^2} = ю\sqrt{(у_1^{АД})^2 + (x_1^{АД})^2} = ю\, р_1^{АД}$$

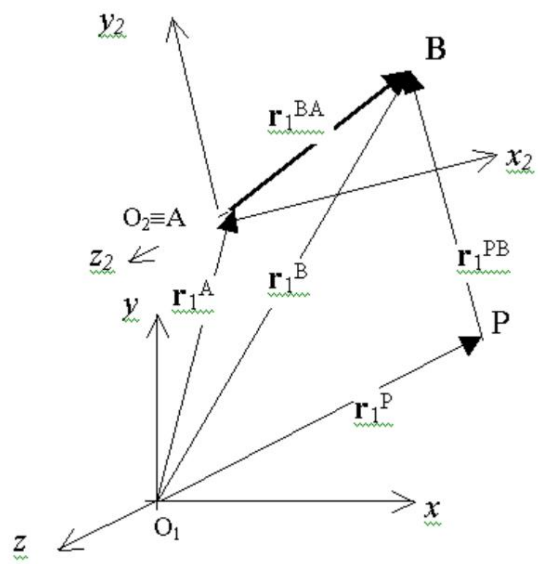
Тогда угловая скорость $ю = \frac{в_1^Б}{р_1^{АД}}$

Из этого результата следует интерпретация графического решения:

$$ю = \frac{в_1^Б}{р_1^{АД}} = \frac{СЛ_{вв\,к}}{СЛ_{л}\ р^{АД}} = в\ загар\ α_в$$ тем самым давая $загар\ α_в = \frac{1}{к_в}\, ю$

Заключение:

α



3.3.4 Аналитическое определение ускорения

Мы уже нашли позиционный вектор и г1 Б скорость v1 Б

р1 Б = р + р1 А бакалавр 1

Б А бакалавр
v1 = v1 + v1

где скорость v1 бакалавр представляет относительное движение точки B вокруг точки A, которое можно выразить как

v = ш × г бакалавр 1 1 в векторной форме или

v БА 1 = С р = р 1 221 БА бакалавр 11 в матричной форме.

Поскольку мы доказали, что а = ɹrɹ = vɹ

можно вывести уравнение ускорения Б А бакалавр a1 = a1 + a1

Где ускорение относительного движения точки B вокруг точки A будет иметь две составляющие, так как относительное движение есть вращение с фиксированной точкой A.

Таким образом а БА 1 = α × г + × БА 1 ю v1 бакалавр в векторной форме. Ускорение в матричной форме равно результат вывода:

р Б 1 знак равно р А 1 + р бакалавр 1 знак равно р А 1 + С 21 р бакалавр 2

v Б 1 = v + А 1 С 21 г бакалавр 2 1

= + Б 1 А 1 1 С раа 21 бакалавр 2 + 1 + С р 21 2 бакалавр 1 С rɹ 21 бакалавр 2

в случае твердого тела 2 рɹ бакалавр = 0 так как расстояние между точками A и B не меняется, то

БА Б 1 а = а + А 1 А С 1 р + 21 С 2 2 р 1 1 21 бакалавр

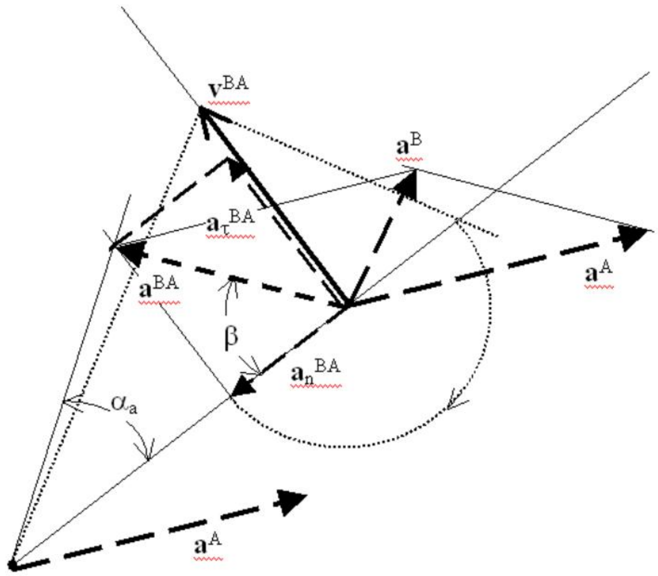
$a_1^Б = a_1^A + (A +) г_1^2$ бакалавр 1

где $A_1 "=" \begin{matrix} 0 & α_г & α_у \\ α_г & 0 & α_{Икс} \\ α_у & α_{Икс} & 0 \end{matrix}$ представляет собой полусимметричную матрицу угловых ускорение

Графически

Для нахождения ускорения воспользуемся ведущим уравнением

Б А бакалавр
а1 = а1 + а1



Ускорение точки А задано, а ускорение относительного движения точки В описывается двумя составляющими (тангенциальной и нормальной) в соответствующих направлениях пути точки В.

Нормальная составляющая находится по ускорение а бакалавр известному скорость v бакалавр (графически с помощью Треугольник Евклида).

Таким образом, в данный момент угол β между конечным ускорением относительного движения и нормалью к путь относительного движения определяется выражением

загар $\beta = \frac{a_т^{бакалавр}}{a_н^{бакалавр}} = \frac{\alpha}{ю^2}$ константа.

Заключение:

Конечное ускорение относительного движения вокруг точки А составляет угловую β с нормальную составляющую ускорения, постоянную для всех точек тела, движущихся с относительным движением.

Аналогичным образом мы можем наблюдать тангенциальную составляющую ускорения и конечную ускорение. Таким образом, этот угол определяется выражением:

загар $\alpha_а$ "=" $\frac{л\, a_т^{бакалавр}}{л_р \quad л\, a_н^{бакалавр}}$ "=" $\frac{\alpha \quad SS_л \quad в^2}{ссç^{2\,22}_{средний} \quad ю \quad _л\,)}$ где $л_р$ "=" $\frac{л\, в^2}{л_{ан}}$.

Так как α и ω постоянны в данном интервале времени для всех точек твердого тела, то даже тангенαа=конст.

Заключение:

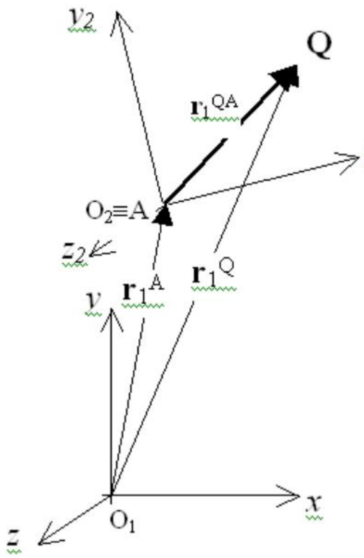
Концы касательных составляющих ускорения для всех точек тела видны из центра вращения под одним и тем же углом $\alpha_а$ в настоящий момент.

Доктор Инж. Зденка Сант

10/2009

3.3.5 Мгновенный центр ускорения – полюс ускорения

Точно так же, как и для полюса скорости P, существует полюс ускорения Q, точка, которая в данный момент имеет нулевое ускорение.



Ускорение для этого полюса Q определяется выражением:

a контроль качества $= a + a + a\ 1\ 1\ 1$ $1н$

$QA\ a = a + \overset{A}{} \alpha \times r + \omega \times \omega \times r$ ( )

Умножение на α слева

$QA\ 0 [\omega = \alpha r \times a + (\alpha \times \alpha \times r) + \alpha \times$ ($_1$)]

мы получаем

$0 = \alpha \times a_1^A + - (\alpha^2 \ p_1 + - (ю^2)(\alpha \times r_1)$

) и подставив выражение

$\alpha \times r$ $^{КК\,1}$ $= a_1^A (ю^2 p)^{КК\,1} - = a + {}_1^A ю^2 p_1$

мы нашли в

позиционный вектор полюса ускорения

$$p_1^{QA} "=" \frac{a_1 A \times + ю^2 a_1^A}{\alpha^2 + ю^4}$$

Сравнивая это выражение с выражением для полюса скорости

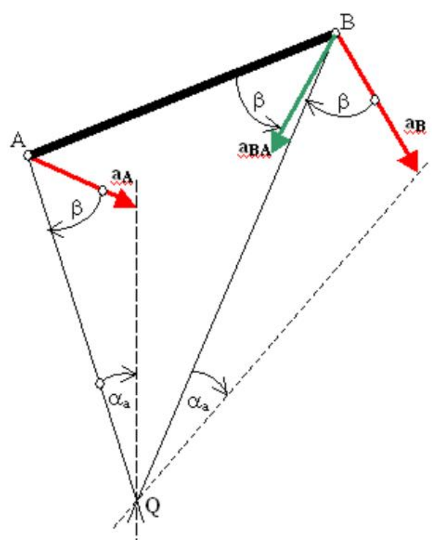
$$p_1^{ПА} "=" \frac{\omega \times v_1^A}{ю^2}$$

показывает, что эти два выражения различны, поэтому два полюса различны, и мы можем заключить:

Полюс ускорения не совпадает с полюсом скорости

Если ю 0 и α 0 то есть одна точка на движущаяся плоскость, имеющая ускорение a =0.

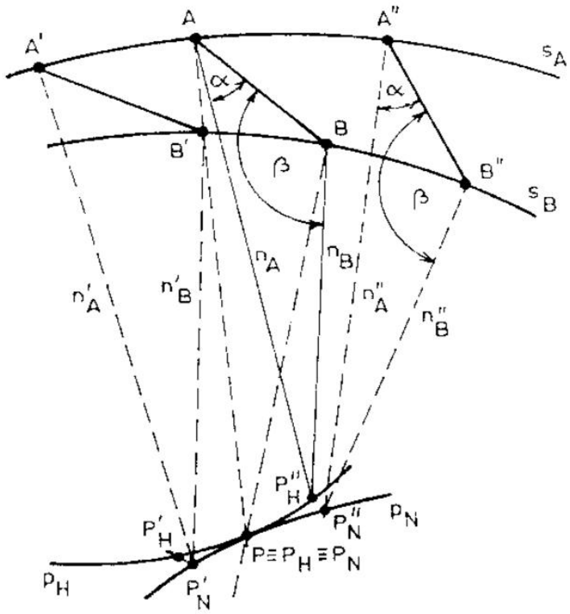
Эта точка лежит на пересечении линий, образующих угол β с направлениями полного ускорения каждой точки на движущейся плоскости.



Доктор Инж. Зденка Сант

10/2009

3.4 ЦЕНТР КРИВИЗНЫ ТРАЕКТОРИИ



Тело, совершающее универсальное плоское движение, определяется двумя точками A и B и их траекториями sA и sB , которые эти точки проводят на плоскости. Таким образом, в любой момент можно найти положение полюса скорости, лежащего на пересечении двух нормалей.

Тело соединено с движущимся CS2 а положения всех мгновенных полюсов скорости образуют кривую pH - геометрическое место всех таких положений называется движущимся полюсом в то время как полюса, соединенные с неподвижной неподвижной плоскостью CS1 , создают кривую, которой присвоен символ pN – неподвижный полюс.

Таким образом, мы можем представить универсальное плоское движение как движение, создаваемое вращением геометрического места полюсов pH (связанного с движущейся плоскостью) по геометрическое место полюсов pN (связанное с фиксированной рамкой).

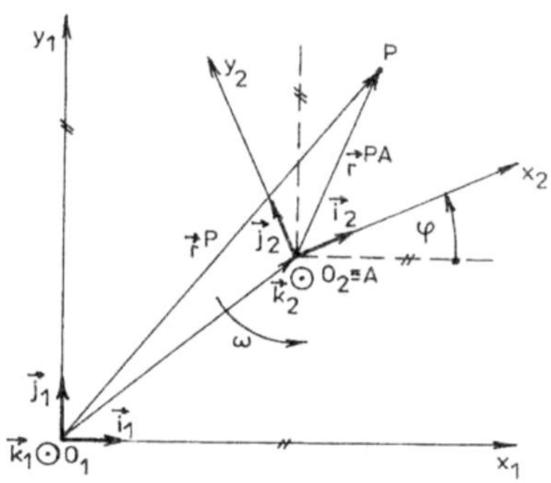
Полюсная скорость описывает скорость изменения положения полюса.

Можно найти скорость изменения позиционного вектора, используя опорную точку A относительно фиксированной системы отсчета.

$$вВ_{Н} = +^{A} \frac{ω \times α v^{A} \quad A}{ю^{2}}$$

А для полюса, связанного с движущейся плоскостью

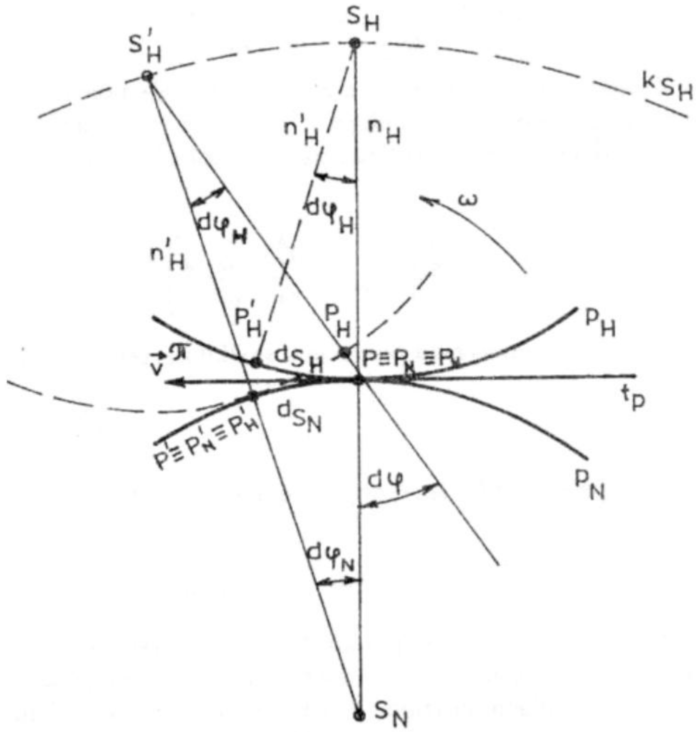
$$вВ_{час} = +^{A} \frac{ω \times α v^{A} \quad A}{ю^{2}}$$



Поскольку полученные уравнения скоростей полюсов идентичны, мы можем поставить символ v_{π} являются его полюс скорости и заключаем:

Точка, в которой в данный момент соприкасаются оба локуса pN и pH , является полюсом движения P (мгновенным центром вращения), и в этой точке две кривые имеют общую касательную tp.

Скорость полюса как скорость изменения положения полюса будет лежать на касательной tp.



Задача состоит в том, чтобы исследовать скорость и ускорение точки или определить скорость и ускорение всего тела. Точки движущегося тела являются проводящими траекториями, поэтому в момент времени каждая точка тела характеризуется своей нормалью к движению и радиусом своей

траектория.

При построении нормальной составляющей ускорения

$$н \frac{1}{р} с^{2} \text{ "=" } а_н$$

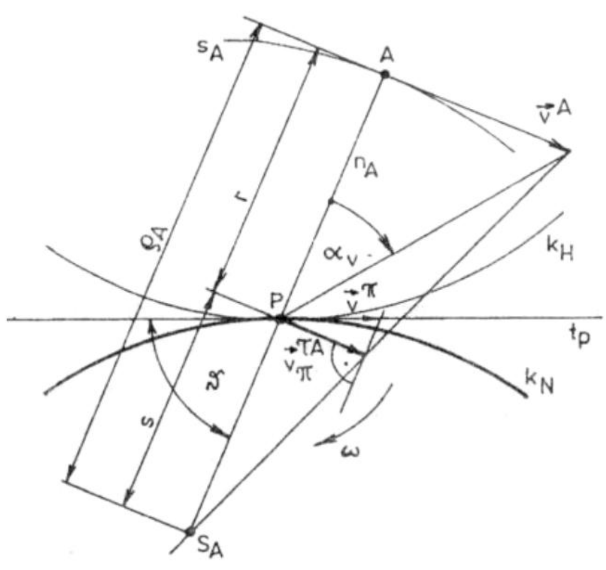
центр кривизны

траектория нужна для определения радиуса

р.

Чтобы найти центр кривизны мы можем использовать разные методы.

Здесь представлены только два метода: а) аналитический – уравнение Эйлера-Савари



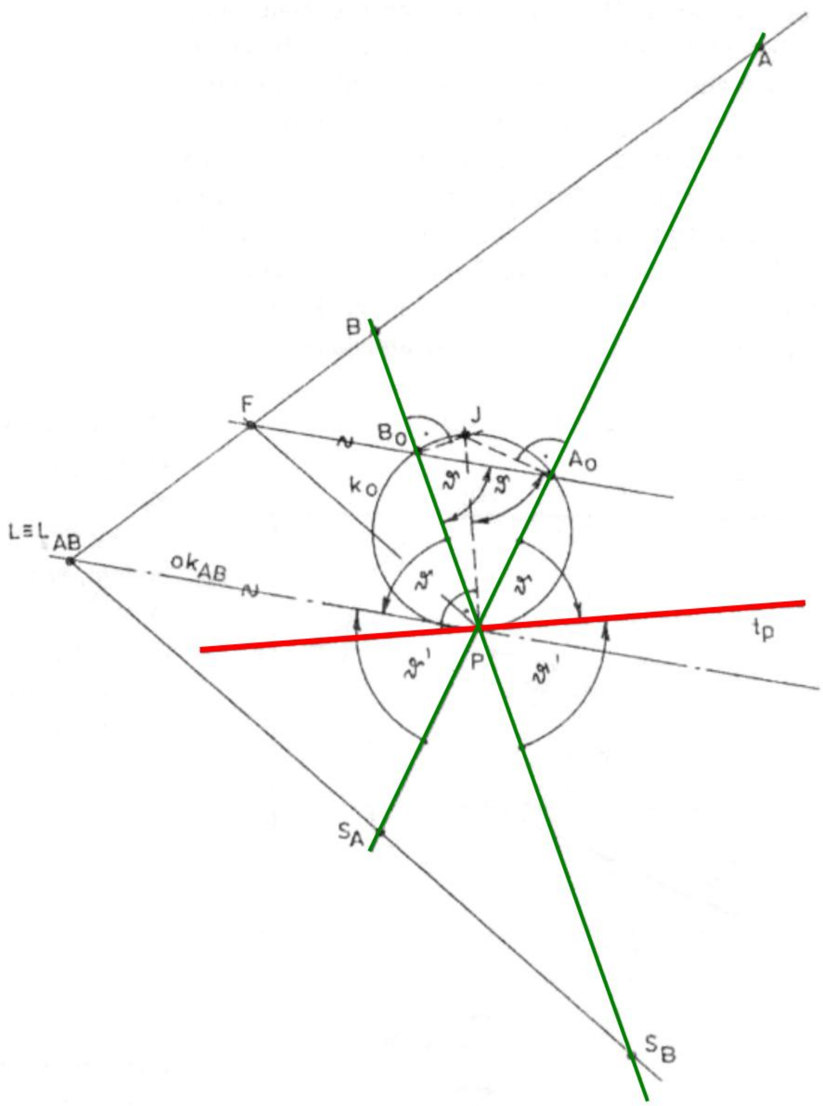
Центр кривизны SA , связанный с точкой A на движущемся теле, которая проводит траекторию sA , известен. Таким образом, мы можем найти скорость полюса, найденную с помощью графического метода Хартмана, используемого, чтобы показать, что

$$\frac{в^{А}}{р_А} = \frac{в_\pi \, т_А}{срс} \quad \frac{_{фургон}ю}{+} \quad \frac{\pi \; грех\,\vartheta}{с}$$

$$\frac{ю}{в_\pi} = = к \quad \frac{рупий}{рупий} \, грех\,\vartheta \; 1 \; \mp \frac{1}{старший} \; грех\,\vartheta \text{ "=" } к$$

которое представляет собой уравнение Эйлера-Савари используется в аналитическом решении, чтобы найти центр кривизна.

б) Графический метод Бобилье



Угол между нормалью точки и осью коллинеации равен углу, измеренному между нормалью другой точки и касательной к точкам расположения полюсов в противоположном направлении.

Есть две задачи:

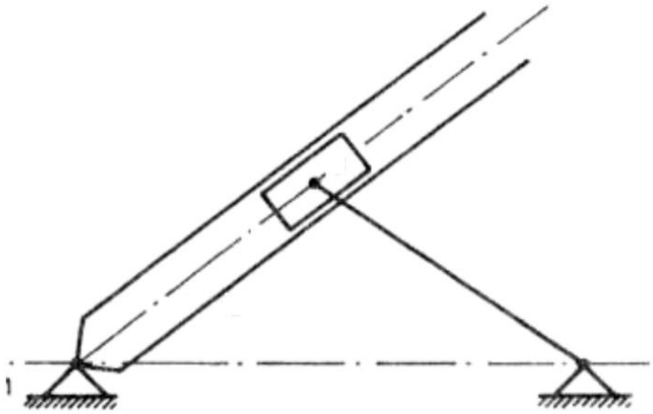
1. Известны касательная tp и пара сопряженных точек A, SA и необходимо определить центр кривизны траектории точки C.

2. Известны две пары сопряженных точек A, SA и B, SB , и необходимо определить центр кривизны траектории точки C.

3.5 КОМБИНИРОВАННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Механизм, состоящий из множества тел, совершает либо плоское, либо пространственное движение, которое можно описать как комбинацию относительного движения между телами и

приводное/несущее движение исполнительного механизма системы относительно системы отсчета.



Анализируя движение каждого тела в механизме:

B1 – система отсчета

БИ 2 -

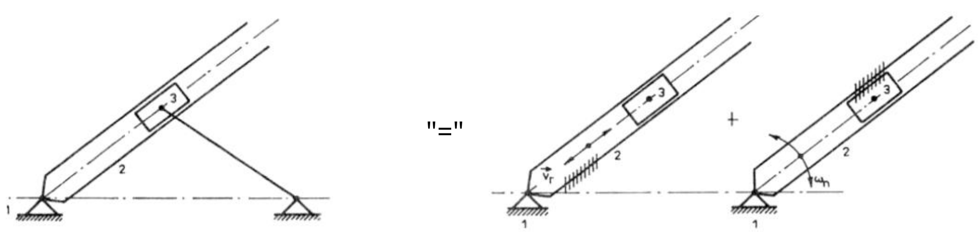
Б3 –

Б4 –

Движение тел, прикрепленных к кадр идентифицируется как вращение с фиксированным центром вращения на O21 или O41 , таким образом, движение тела определяется угловой скоростью и ускорением, ω и α соответственно. В случае простого движения, такого как вращение или поступательное движение, мы можем определить траекторию, таким образом, без проблем оценить кинематические величины. В случае плоского или пространственного движения тела траектория не является простой кривой, и поэтому может возникнуть проблема с вычислением кинематических величин.

Поэтому мы вводим стратегию, основанную на комбинированном движении, и реализуем мнимое разбиение сложного движения на два движения: движение точки отсчета и вращение вокруг точки отсчета.

Мы можем представить



Заключительное движение 31

Относительное движение 32

Движение вождения 21

Это может быть записано символическим уравнением 31 = 32 + 21

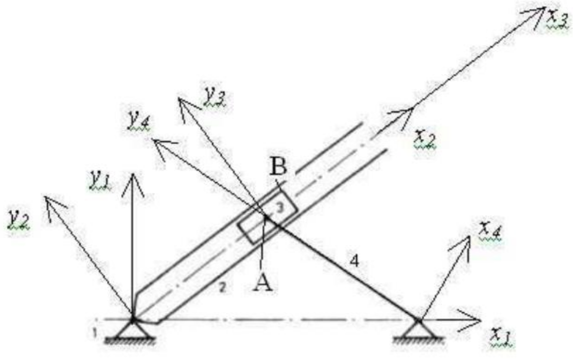
А кинематические величины могут быть выражены для идентифицированной точки B как

Таким образом $v^{Б}_{31} = v^{Б}_{32} + v^{Б}_{21}$

Но $a^{Б}_{31} = a^{Б}_{32} + a^{Б}_{21} + a^{Б}_{кор}$

Чтобы доказать это утверждение, мы должны определить скорость в точке B

3.5.1 Кинематические величины посредством комбинированного движения

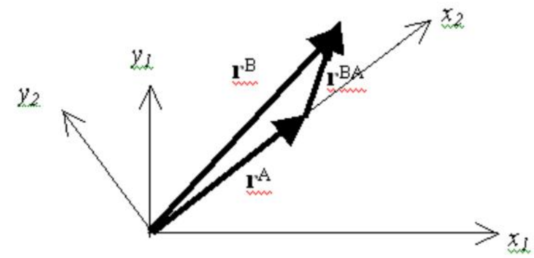


Окончательное движение точки B символически:

31 = 32 + 21

а также

31 = 34 + 41



Позиционный вектор точки B: р Б 1 = р А 1 + р БА = р А 1 + я x + j y 2 2 2 2 (БА бакалавр)

3.5.2 Скорость

точки B:

v Б 1 = r.Б 1 = r.А 1 + i + i + j y x 2 2 2 2 2 2 БА x БА бакалавр + Дж y бакалавр)

где 2 я = ш × я 21 2

j 2 = ш × j 21 2

Подставляя и переставляя, получаем уравнение конечной скорости в точке B, выраженное

в CS1 v Б 1 = v А 1 + ω × (я 21 22 22 x БА + Дж y бакалавр) + я 2 2 x v бакалавр + j 2 2 y v бакалавр где

движение + x 1 21 2 2 ω v А + × (ВА Дж 2 2 y БА) "=" v Б 21 представляет скорость из-за вождения, когда

выражения. Точка B будет двигаться со скоростью движения v Б 21 виртуально связано с движущимся самолет 2 (CS2)

выражение + v 2 2 x БА i Дж года вв 2 2 бакалавр 32" Б представляет собой относительную скорость точки B относительно

точку А. Таким образом, мы подтверждаем предыдущее уравнение

v Б 31 = v Б 32 + v Б 21

3.5.3 Ускорение

точки B является производением вывода скорости

a Б 1 "=" г ___ dt va α × 1 21 ВА = + (2 2 x БА + Дж 2 2 y бакалавр) + ω × 21 (2 2 бакалавр я + + xx 2 2 БА Дж 2 2 y БА + Дж 2 2 y бакалавр)

2 2 I2 2 + xx ва ВА Дж 2 2 в года БА + Дж 2 2 a y бакалавр

Таким образом

aa a я 21 ВА = + × 1 (2 2 x БА + Дж 2 2 y БА) + × × 21 21 [ω ω я (2 2 x БА + Дж 2 2 y БА) я + 2 2 в Икс БА + Дж 2 2 в y бакалавр]

v 21 2 2 ω i + × + (Икс БА Дж 2 2 в года БА) я + + 2 2 Икс БА Дж 2 2 a y бакалавр

Где выражение

Б А БА БА БА
а = + × а α 21 1 21 (я 2 2 й х бакалавр + 2 у 2) 21 [2 2 ω i + × × + х 21 (Дж 2 у 2)] представляет ускорение движущего движения в точке B

В 2 ω ia = × (v 2 2 + Дж 2 2 в БА С 21 Икс бакалавр года) представляет ускорение Кориолиса из-за движущего углового движения и линейной скорости относительного движения

а Б 32 "=" я + а БА 2 2 х Дж 2 2 у бакалавр представляет собой ускорение относительного движения в точке B

В итоге можно заключить, что при выражении конечного ускорения через совместное движение (движение и относительное движение) тел необходимо ввести составляющую, называемую кориолисовым ускорением.

3.5.4 Кориолисово ускорение

Кориолисово ускорение выразим в векторной форме: аС Б = × 2 ω v 21 32 Б

А в матричной форме: 2 аС Б = 21 2 С v 21 бакалавр "=" 2 21 I в БА

Кориолисово ускорение выражает изменение направления относительной скорости из-за вращательного движущего движения и в то же время величину изменения движущей скорости из-за относительного движения в исходной точке.

Анализ уравнения, выражающего ускорение Кориолиса:

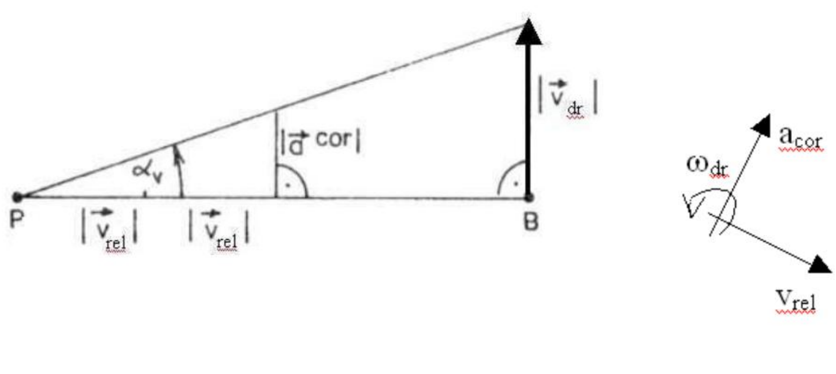
Кориолисово ускорение имеет ненулевое значение аС 0, если:

1) ωdr 0 приводное движение существует в форме вращения, GPM, сферического движения или GSM

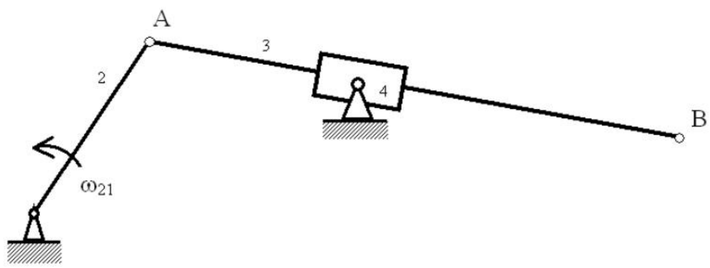
2) vrel 0 существует относительное движение тел Á 3)

ωdr vrel угол между угловой и линейной скоростями отличен от 0, а π

Направление и ориентация ускорения Кориолиса задаются поворотом относительной скорости в направлении движущего движения на угол π/2.



3.5.5 Нахождение полюса движения с помощью комбинированного движения



Анализ системы:

Б2 – РМ

В3 — галлон в минуту

Б4 – РМ

Таким образом, тела B2 и B4 вращаются вокруг неподвижных точек вращения O21 и O41 соответственно. Таким образом, две точки O21 и O41 являются полюсами вращения B2 и B4 соответственно.

Таким образом, полюс B3 можно найти на пересечении двух нормалей к траектории. Нормаль nA задается двумя точками - O21 и A. Точка B проводит универсальную плоскую кривую с неизвестным центром кривизны.

Таким образом, применяя принцип комбинированного движения, мы можем символически написать для движения B3:

31 = 32 + 21

где 32 описывает полюс относительного движения B3 относительно B2 и

21 описывает полюс приводного движения B2 относительно рамы (B1).

Следовательно, применяя полюса движения к B3, мы получаем направление нормали, которое можно записать символически как: n31 = O32 + O21

Второе символьное уравнение, описывающее комбинированное движение B3, равно 31 = 34 + 41.

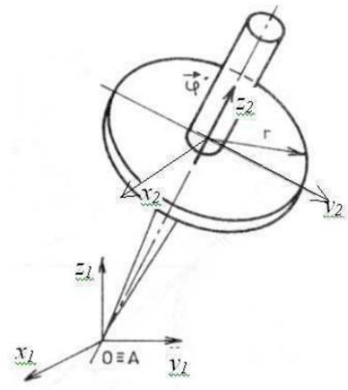
Таким образом, вторая нормаль для B3 равна: n31 = O34 + O41.

Заключение:

Полюс конечного движения, относительного движения и движущего движения лежит на одной линии.

3.6 СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА.

Определение сферического движения: тело движется со сферическим движением, если одна точка тела остается неподвижной в любой момент времени.

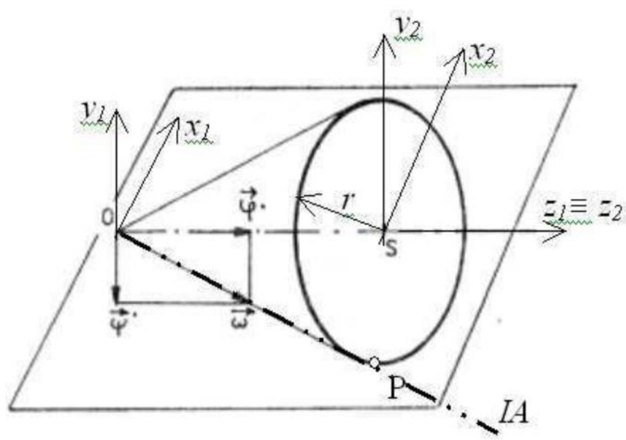


Точки на теле находятся на постоянном расстоянии от центра O, поэтому их траектории представляют собой сферические кривые, кривые, лежащие на сферах с общим центром O.

Одна точка на теле остается неподвижной во время движения в любой момент, поэтому новое положение тела задается однократным вращением вокруг оси, проходящей через неподвижную точку.

Эта ось называется мгновенной осью вращения и совпадает с вектором полной угловой скорости. Точки на мгновенной оси вращения имеют в данный момент нулевую линейную скорость.

Таким образом, конус с радиусом основания r , катящийся по плоскости π делит с этой плоскостью одну единственную линию в момент мгновенной оси вращения. Эта линия представляет собой область контакта между поверхностью конуса и плоскостью, по которой катится конус.



Наблюдая движение конуса на плоскости, мы можем описать движение как вращение вокруг оси симметрии конуса z2 (собственная ось вращения) с угловой скоростью ˩ и вращение с угловой скоростью перпендикулярно плоскости, проходящей через ϕ ψ˩ вокруг оси неподвижную точка на теле (ось y1).

Связав вторую систему координат с движущимся телом, мы можем определить три угла, называемые углами Эйлера:

ϑ угол нутации - описывает отклонение собственной оси тела (z2) от оси (z1) фиксированной системы координат угол прецессии описывает

ψ изменение положения собственной оси конуса относительно CS1

ϕ угол собственного вращения описывает изменение положения точки на теле относительно CS2

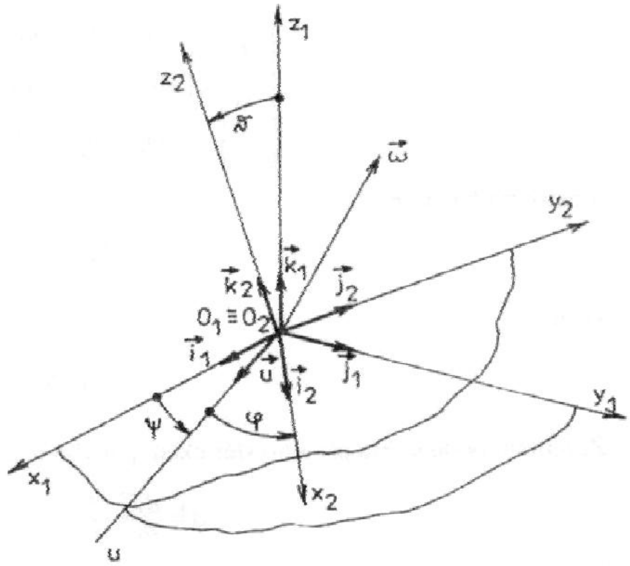
Полная угловая скорость является равнодействующей угловой скорости нутации, прецессии и собственного вращения. Направление угловой скорости совпадает с мгновенной осью вращения (IA).

Таким образом: ю = + + $\vartheta' \psi' \phi'$

Доктор Инж. Зденка Сант

10/2009

Полная угловая скорость в прямоугольном СК1 записывается как ω = ю Икс я + ю у Дж + ю ЗК



Поскольку угловые скорости совпадают с конкретными осями вращения, нам необходимо преобразовать их в CS1, таким образом получение составляющих полной угловой скорости:

ю Икс "=" ф грех ϑ грех ψ + ϑ потому что ψ

ю у = - ф грех, потому что ϑ ψ + ϑ грех ψ

ю г "=" ф потому что ϑ + ψ

Угловое ускорение: α ω̄ "=" г/дт "=" г/дт (е ю ю̄) г е ю/дт ю + е ю г ю/дт

где

г е ю/дт = × ψ̄ е α ю представляет изменение направления угловой скорости ω

Направление α1 перпендикулярна плоскости, содержащей ψ и е ю, в то время как ориентация задается правилом правой руки.

Вторая составляющая углового ускорения a = е 2 ю г ю/дт лежит на естественной оси вращения

Таким образом α α α = +1 2 поэтому направление конечного углового ускорения не совпадают с направлением полной угловой скорости.

Полное угловое ускорение в прямоугольном СК1 записывается как α = + + jk α Икс я α у α г

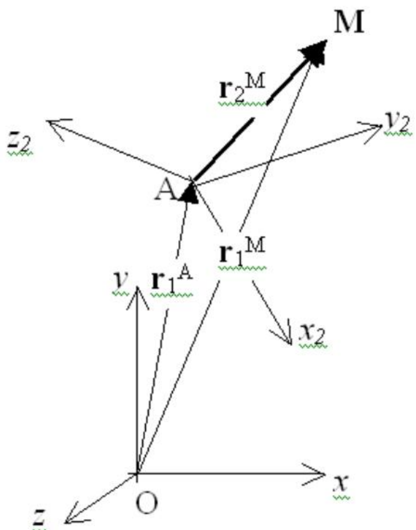
Доктор Инж. Зденка Сант

3.7 ВСЕОБЪЕМНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА.

Определение:

> Траектории точек тела, движущегося с универсальным пространственным движением, являются универсальным космические кривые. Таким образом, тип движения называется всеобщим пространственным движением.

Подобно тому, как мы описывали универсальное плоское движение, мы можем представить себе, что конечное движение тела состоит из поступательного движения тела и сферического движения, тогда как поступательное движение и вращение — это движения, описываемые относительно точки отсчета на теле.



Если точка A является стационарной точкой во время сферического движения, то мы можем выбрать эту точку в качестве подходящей точки отсчета при описании конечного движения тела.

Тогда задается положение точки M на движущемся теле

как: Массачусетс $p_1 = p_1 + p_1$ Массачусетс

а скорость и ускорение в CS1 заданы в векторной форме:

Массачусетс $v_1 = v_1 + \omega_1 \times r_1$ Массачусетс

MA Массачусетс $a_1 = a_1 + \alpha_1 \times r_1 + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_1)$

где α и ω — мгновенные кинематические величины

в матричной форме: MA ppp 1 1 1 $= + = +$ Массачусетс A $p_1 C p_{221}$ Массачусетс

MA 1 $v = v + C_{1\,221} r = v + r_{11}$ MA A Массачусетс

MA 1 $a = a + C_{1\,221} r + C_{1\,221} r = a + A r + r$ MA A MA 2 Массачусетс 1 11 1

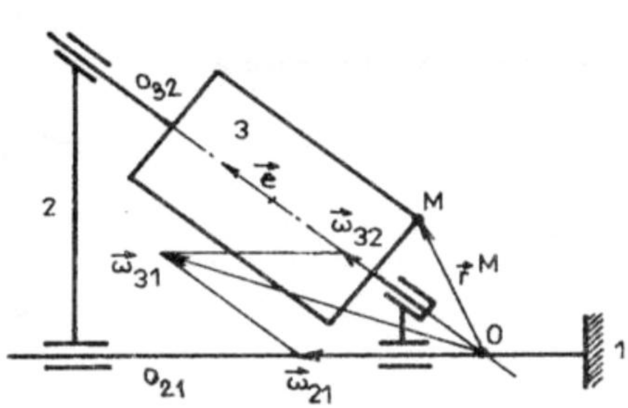
Доктор Инж. Зденка Сант

4 СИСТЕМА ОРГАНОВ

Стратегия вычисления кинематических величин для отдельного тела может быть распространена и на систему тел. Как уже говорилось, всеобщее движение отдельного тела может быть описано с помощью комбинированного движения, основанного на относительном и приводном движении. Оба движения, движущее и относительное, могут быть любого типа — поступательное, вращательное, всеобщее плоское движение и т. д.

Таким образом, кинематические величины для системы тел могут быть выражены таким же образом. Перед описанием движения конкретного тела полезно, если не обязательно, проанализировать всю систему, описать кинематическую пару между телами, определить подвижность системы, определить исполнительный механизм системы, тем самым определить независимую координату и окончательно определить тип движения каждого тела в системе.

4.1 ОДНОВРЕМЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ СОВПАДАЮЩИХ ОСЕЙ



Тело В3 вращается вокруг своей естественной оси вращения о32 (местоположения всех точек, остающихся неподвижными относительно В3), а ось о32 расположена на теле В2, вращающемся вокруг своей оси вращения о21.

Точка О неподвижна в любое время, поэтому тело В3 движется со сферическим движением, которое можно интерпретировать с помощью символического уравнения как комбинированное движение 31 = 32 + 21.

Таким образом, мы можем написать для скорости точки М $v^M_{31} = v^M_{32} + v^M_{21}$

представлен в векторной форме уравнением: $v^M_{31} = \omega_{32} \times r^M + \omega_{21} \times r^M$ где $v^M_{31} = \omega_{31} \times r^M$

и наконец $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21}$

Таким образом, конечная угловая скорость есть сумма угловых скоростей относительного и приводного движения. Вектор конечной угловой скорости совпадает с мгновенной осью вращения.

Полное угловое ускорение $\alpha_{31} = \frac{d}{dt}(\omega_{31}) = \frac{d}{dt}(e_{31}\omega_{31})$

Подставляя конечную угловую скорость

$$\alpha_{31} = \frac{d}{dt}(\omega_{32} + \omega_{21}) = \frac{d\omega_{32}}{dt} + \frac{d\omega_{21}}{dt}$$

Тогда полное угловое ускорение равно $\alpha_{31} = e_{32}\frac{d\omega_{32}}{dt} + e_{21}\frac{d\omega_{21}}{dt}$

Доктор Инж. Зденка Сант

10/2009

Где $\frac{д}{дт}(e_{32}\omega_{32}) = \frac{d e_{32}}{дт}\omega_{32} + e_{32}\frac{d\omega_{32}}{дт} = (\omega_{21} \times e_{32})\omega_{32} + e_{32}\alpha_{32} = \omega_{21} \times \omega_{32} + \alpha_{32}$

и $\frac{д}{дт}(e_{21}\omega_{21}) = e_{21}\frac{d\omega_{21}}{дт} = e_{21}\alpha_{21} = \alpha_{21}$

поэтому конечное ускорение определяется как

$$\alpha_{31} = \alpha_{32} + \alpha_{21} + \omega_{21} \times \omega_{32}$$

Последний компонент в уравнении известен как угловое ускорение при перепродаже.

$$\alpha_{Res} = \omega_{21} \times \omega_{32}$$

Условие существования Resal-ускорения: $\omega_{др} \neq 0$

$\omega_{отн} \neq 0$

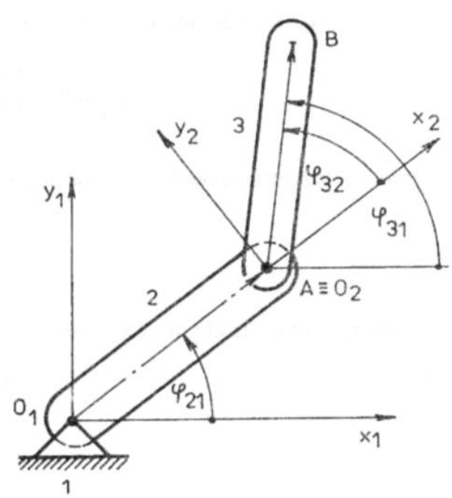
$\omega_{др} \nparallel \omega_{отн}.$

Одновременные вращения в матричной форме:

угловая скорость: $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21} = \begin{bmatrix} ю_{32x} \\ ю_{32\,года} \\ ю_{32г} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} ю_{21\,икс} \\ ю_{21y} \\ ю_{21г} \end{bmatrix}_1$

угловое ускорение: $\alpha_{31} = \alpha_{32} + \alpha_{21} + \alpha_{рез.} = \begin{bmatrix} \alpha_{32x} \\ \alpha_{32\,года} \\ \alpha_{32г} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \alpha_{21\,икс} \\ \alpha_{21\,год} \\ \alpha_{21г} \end{bmatrix}_1 + \omega_{21\,32}$

4.2 ОДНОВРЕМЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ



Исследование кинематических величин механизма или его часть требует учета всего набора тел и зависимостей. Таким образом, первым шагом является анализ подвижности на основе ограничений, определение исполнительного механизма, управляющего движением системы, и определение движения каждого тел

Таким образом данная система состоит из:

В1 – фиксированная рама

В2 – вращающееся звено

В3 – универсальное плоскостное движение

Ограничения, ограничивающие движение системы, представляют собой два штифта, оба прикрепленных к В2.

В2 вращается вокруг своего неподвижного центра вращения O1 , и его точки рисуют плоские кривые – концентрические круги.

В3 вращается вокруг центра вращения O2 , соединяющего В3 с В2.

Таким образом, относительное движение — это вращение B3 относительно B2 с угловой скоростью ω32 , а приводное движение — это вращение B2 относительно основания B1 с угловой скоростью ω21.

Поэтому: ϕ ККК ϕ + ϕ 31 32 21

с полной угловой скоростью ю +к31 32 ю = ю 21 К

и угловым ускорением α 32 21 α = К+ α 31 с 0 α ω= α = Рез 21 32

Таким образом, кинематические величины для конкретной точки B могут быть выражены в векторной форме:

для позиции: БА БА = + ррр 1 1 1

для скорости вВВ= + Б Б Б 31 32 21

v ω р ω р = × + × Б бакалавр Б 31 32 р 1 21

для ускорения:

аааа = + + ВВВВ 31 32 21 кор

r 32 32 1 × × (а ω ω БА) + × α р 32 1 ВА + 21 × (× + × + ω ω р α р 21 1 21 2) Б (× ω у бакалавр) Б 31 21 32

или в матричной форме

ррр = + БА БА 1 1 1

для должности: р С р 1 2 21 2 равно + 1 бакалавр где р С р = бакалавр 2 32 3 В А

р С р СС р 1 21 2 21 32 3 бакалавр Б А

для скорости: = 31 _ 21 (С р СС р С 21 2 21 бакалавр) + С р бакалавр 32 3 21 32 32 3 В А

для ускорения:

а САС р А (+ + + 21 32 21 32 2 21 2) БА (2 21) (р 1 1 А БА +) + 2 С 21 21 32 32 3 С р бакалавр Б 31

Анализ возможности движения показывает два случая:

1. Одновременные вращения с одинаковой ориентацией угловой скорости 2.

Одновременные вращения с угловыми скоростями в противоположном направлении

В обоих случаях результирующим движением является вращение с угловой скоростью ω31

Инженер-механик сталкивается с проблемами, связанными с одновременным вращением вокруг параллельной оси в ряде приложений, таких как редуктор, планетарный редуктор и т. д.