

Kapitel 3

VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG KONVENTION

In diesem Kapitel entwickeln wir die Vorwärts- oder Konfigurationskinematikgleichungen für starre Roboter. Das Problem der Vorwärtskinematik befasst sich mit der Beziehung zwischen den einzelnen Gelenken des Roboter manipulators und der Position und Ausrichtung des Werkzeugs oder Endeffektors. Formeller ausgedrückt besteht das Problem der Vorwärtskinematik darin, die Position und Ausrichtung des Endeffektors anhand der Werte für die Gelenkvariablen des Roboters zu bestimmen. Bei den Gelenkvariablen handelt es sich um die Winkel zwischen den Gelenken bei Revolut- oder Rotationsgelenken und um die Gelenkverlängerung bei Prismen- oder Schiebegelenken. Dem Problem der Vorwärtskinematik ist das Problem der Umkehrkinematik gegenüberzustellen, das im nächsten Kapitel untersucht wird und bei dem es um die Bestimmung von Werten für die Gelenkvariablen geht, die eine gewünschte Position und Ausrichtung für den Endeffektor des Roboters erreichen.

3.1 Kinematische Ketten

Wie in Kapitel 1 beschrieben, besteht ein Roboter manipulator aus einer Reihe von Gliedern, die durch verschiedene Gelenke miteinander verbunden sind. Die Gelenke können entweder sehr einfach sein, wie zum Beispiel ein Drehgelenk oder ein Prismengelenk, oder sie können komplexer sein, wie zum Beispiel ein Kugelgelenk. (Denken Sie daran, dass ein Drehgelenk wie ein Scharnier ist und eine relative Drehung um eine einzelne Achse ermöglicht, während ein prismatisches Gelenk eine lineare Bewegung entlang einer einzelnen Achse, nämlich Ausfahren oder Einfahren, zulässt.) Der Unterschied zwischen den beiden Situationen besteht darin, dass in Im ersten Fall hat das Gelenk nur einen einzigen Bewegungsfreiheitsgrad: den Drehwinkel im Fall eines Drehgelenks und den Betrag der linearen Verschiebung im Fall eines Prismengelenks. Im Gegensatz dazu hat ein Kugelgelenk zwei Freiheitsgrade. In diesem Buch wird durchgehend davon ausgegangen, dass alle Gelenke nur einen einzigen Freiheitsgrad haben. Beachten Sie, dass die Annahme

bedeutet keinen wirklichen Verlust an Allgemeingültigkeit, da Gelenke wie ein Kugelgelenk (zwei Freiheitsgrade) oder ein sphärisches Handgelenk (drei Freiheitsgrade) immer als eine Abfolge von Einzelgraden betrachtet werden können. Freiheitsgelenke mit Verbindungsgliedern der Länge Null dazwischen.

Unter der Annahme, dass jedes Gelenk einen einzigen Freiheitsgrad hat, kann die Wirkung jedes Gelenks durch eine einzige reelle Zahl beschrieben werden: den Drehwinkel im Fall eines Drehgelenks oder die Verschiebung im Fall eines Prismengelenks gemeinsam. Das Ziel der Vorwärtskinematikanalyse besteht darin, die kumulative Wirkung des gesamten Satzes von Gelenkvariablen zu bestimmen. In diesem Kapitel werden wir eine Reihe von Konventionen entwickeln, die ein systematisches Verfahren zur Durchführung dieser Analyse bieten. Es ist natürlich möglich, eine Vorwärtskinematikanalyse auch ohne Berücksichtigung dieser Konventionen durchzuführen, wie wir es in Kapitel 1 für das Beispiel eines planaren Manipulators mit zwei Gliedern getan haben. Die kinematische Analyse eines Manipulators mit n-Links kann jedoch äußerst komplex sein und Die im Folgenden eingeführten Konventionen vereinfachen die Analyse erheblich. Darüber hinaus führen sie zu einer universellen Sprache, mit der Roboter ingenieure kommunizieren können.

Ein Roboter manipulator mit n Gelenken hat n + 1 Glieder, da jedes Gelenk zwei Glieder verbindet. Wir nummerieren die Gelenke von 1 bis n und die Verbindungen von 0 bis n, beginnend mit der Basis. Nach dieser Konvention verbindet das Gelenk i den Link i + 1 mit dem Link i. Wir gehen davon aus, dass die Position des Gelenks i in Bezug auf das Glied i feststeht. Wenn das Gelenk i betätigt wird, bewegt sich das Glied i. Daher ist Link 0 (das erste Link) fest und bewegt sich nicht, wenn die Gelenke betätigt werden. Natürlich könnte der Roboter manipulator selbst mobil sein (z. B. könnte er auf einer mobilen Plattform oder einem autonomen Fahrzeug montiert sein), aber wir werden diesen Fall in diesem Kapitel nicht betrachten, da er durch leichte Erweiterung der Techniken leicht gehandhabt werden kann hier vorgestellt. Mit dem i joint, wir assoziieren eine gemeinsame Variable, die mit q_i bezeichnet wird. Bei einem Drehgelenk ist q_i der Drehwinkel und bei einem Prismengelenk ist q_i die Gelenkverschiebung:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{Gelenk i umlaufend} \\ d_i & \text{Gelenk i prismatisch} \end{cases} \quad (3.1)$$

Um die kinematische Analyse durchzuführen, befestigen wir starr an jedem Glied einen Koordinatenrahmen. Insbesondere fügen wir ein Koordinatensystem dem Link i bei. Dies bedeutet, dass unabhängig von der Bewegung des ausgeführt wird, sind die Koordinaten jedes Punktes auf der Verbindung i konstant, wenn sie im i-Rahmen des Roboters Koordinatenrahmen ausgedrückt werden. Wenn außerdem das Gelenk i betätigt wird, erfahren das Verbindungsglied i und sein befestigter Rahmen, ein resultierendes Bewegung. Der Rahmen $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$, der an der Roboterbasis befestigt ist, wird als Inertialrahmen bezeichnet. Abbildung 3.1 veranschaulicht die Idee, Rahmen im Fall eines Ellenbogenmanipulators starr an Gelenken zu befestigen.

Nehmen wir nun an, dass A_i die homogene Transformationsmatrix ist, die die Position und Ausrichtung von $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ in Bezug auf $O_0x_0y_0z_0$ ausdrückt. Die Matrix A_i ist nicht konstant, sondern variiert, wenn sich die Konfiguration des Roboters ändert. Die Annahme, dass alle Gelenke entweder rotierend oder prismatisch sind, bedeutet jedoch, dass A_i eine Funktion nur einer einzigen Gelenkvariablen ist, nämlich q_i . Mit anderen Worten,

$$A_i = A_i(q_i). \quad (3.2)$$

3.1. KINEMATISCHE KETTEN

63

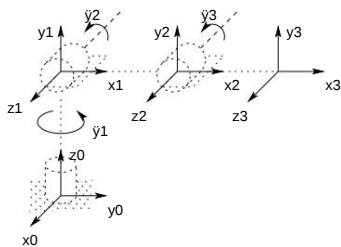


Abbildung 3.1: Am Ellenbogenmanipulator befestigte Koordinatenrahmen.

Nun wird die homogene Transformationsmatrix, die die Position und Orientierung von o_j relativ zu o_0 ausdrückt, vereinbarungsgemäß Transformationsmatrix genannt und mit T_j bezeichnet. Aus Kapitel 2 sehen wir das

$$\begin{aligned} T_{ji}^{-1} &= A_{i+1} A_{i+2} \dots A_j, \text{ wenn } i < j = 1, \\ T_j & \text{ wenn } i = j = 1 \\ T_j^{-1} &= (T_j^{-1})^T \text{ wenn } j > i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aus der Art und Weise, wie wir die verschiedenen Rahmen starr an den entsprechenden Verbindungen befestigt haben, folgt, dass die Position jedes Punktes auf dem Endeffektor, ausgedrückt in Rahmen n , eine Konstante ist, unabhängig von der Konfiguration des Roboters. Bezeichnen Sie die Position und Ausrichtung des Endeffektors in Bezug auf das Trägheits- oder Basisrahmensystem durch einen Dreivektor (der die Koordinaten des Ursprungs des Endeffektorsystems in Bezug auf das Trägheits- oder Basisrahmensystem angibt) und der 3×3 Rotationsmatrix R_{0n} in Bezug auf das Trägheits- oder Basisrahmensystem und definieren Sie die homogene Transformationsmatrix

$$H = \begin{bmatrix} R_{0n} & o_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Dann sind die Position und Ausrichtung des Endeffektors im Inertialsystem gegeben durch

$$H = T_n^{-1} = A_1(q_1) \dots A_n(q_n). \quad (3.5)$$

Jede homogene Transformation A_i hat die Form

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1,i} & o_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Somit

$$T_j^{-1} = A_{i+1} \dots A_j = \begin{bmatrix} R_{j,i} & o_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

64 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

Die Matrix R_i drückt die Orientierung von o_j relativ zu o_i aus und wird durch die Rotationsanteile der A -Matrizen als gegeben

$$R_j^{-1} = R_{j-1}^{-1} \dots R_1^{-1} \quad (3.8)$$

Die Koordinatenvektoren o ergeben sich rekursiv durch die Formel

$$o_j = o_{j-1} + R_{j-1}^{-1} o_j^{j-1}. \quad (3.9)$$

Diese Ausdrücke werden in Kapitel 5 nützlich sein, wenn wir Jacobi-Matrizen untersuchen.

Im Prinzip reicht es, die Kinematik weiterzuleiten! Bestimmen Sie die Funktionen $A_i(q_i)$ und multiplizieren Sie sie nach Bedarf miteinander. Es ist jedoch möglich, durch die Einführung weiterer Konventionen, wie etwa der Denavit-Hartenberg-Darstellung einer Verbindung, ein erhebliches Maß an Straffung und Vereinfachung zu erreichen, und dies ist das Ziel des restlichen Kapitels.

3.2 Denavit Hartenberg-Vertretung

Obwohl es möglich ist, die gesamte Analyse in diesem Kapitel mit einem beliebigen Rahmen durchzuführen, der jedem Link beigelegt ist, ist es hilfreich, bei der Auswahl dieser Rahmen systematisch vorzugehen. Eine häufig verwendete Konvention zur Auswahl von Referenzrahmen in Roboteranwendungen ist die Denavit Hartenberg- oder DH-Konvention. In dieser Konvention wird jede homogene Transformation A_i als Produkt von vier Grundtransformationen dargestellt

$$A_i = \text{Rot}_z, \ddot{y}_i \text{Trans}_x, d_i \text{Trans}_x, a_i \text{Rot}_x, \ddot{y}_i \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} c\ddot{y}_i & s\ddot{y}_i & 0 & 0 \\ 0 & c\ddot{y}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\ddot{y}_i & s\ddot{y}_i & 0 \\ 0 & -s\ddot{y}_i & c\ddot{y}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\ddot{y}_i & s\ddot{y}_i & c\ddot{y}_i & s\ddot{y}_i \\ 0 & c\ddot{y}_i & -s\ddot{y}_i & a_i \\ 0 & -s\ddot{y}_i & -c\ddot{y}_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wobei die vier Größen $\ddot{y}_i$ Parameter sind, die der Verbindung i und dem Gelenk i zugeordnet sind.

Die vier Parameter a_i und d_i in (3.10) erhalten im Allgemeinen die Namen Verbindungsgröße, Verbindungsrotation, Verbindungsversatz bzw. Gelenkwinkel. Diese Namen leiten sich von bestimmten Aspekten der geometrischen Beziehung zwischen zwei Koordinatensystemen ab, wie weiter unten deutlich wird. Da die Matrix A_i eine Funktion einer einzelnen Variablen ist, stellt sich heraus, dass drei der oben genannten vier Größen für eine bestimmte Verbindung konstant sind, während der vierte Parameter, $\ddot{y}_i$ für ein Drehgelenk und d_i für ein Prismengelenk, die Gelenkvariable ist.

Aus Kapitel 2 geht hervor, dass eine beliebige homogene Transformationsmatrix durch sechs Zahlen charakterisiert werden kann, beispielsweise drei Zahlen zur Angabe der

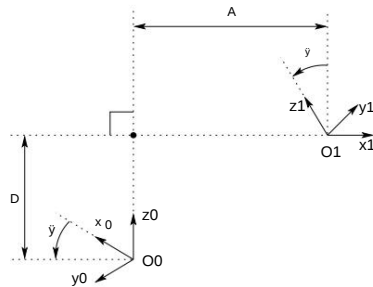


Abbildung 3.2: Koordinatensysteme, die die Annahmen DH1 und DH2 erfüllen.

vierte Spalte der Matrix und drei Euler-Winkel, um die obere linke 3×3 -Rotationsmatrix anzugeben. In der DH-Darstellung hingegen gibt es nur vier Parameter. Wie ist das möglich? Die Antwort ist, dass der Rahmen i zwar starr mit der Verbindung i verbunden sein muss, wir aber bei der Wahl des Ursprungs und der Koordinatenachsen des Rahmens erhebliche Freiheit haben. Beispielsweise ist es nicht erforderlich, dass der Ursprung o_i des Frames i am physischen Ende der Verbindung i platziert wird. Tatsächlich ist es nicht einmal notwendig, dass der Frame i innerhalb der physischen Verbindung platziert wird; Rahmen i könnte im freien Raum liegen – solange Rahmen i fest mit Link i verbunden ist. Durch eine geschickte Wahl des Ursprungs und der Koordinatenachsen ist es möglich, die Anzahl der benötigten Parameter von sechs auf vier (in manchen Fällen sogar weniger) zu reduzieren. In Abschnitt 3.2.1 zeigen wir, warum und unter welchen Bedingungen dies möglich ist, und in Abschnitt 3.2.2 zeigen wir genau, wie die Koordinatenrahmenzuweisungen vorgenommen werden.

3.2.1 Existenz- und Einzigartigkeitsfragen

Offensichtlich ist es nicht möglich, eine beliebige homogene Transformation mit nur vier Parametern darzustellen. Daher beginnen wir damit, zu bestimmen, welche homogenen Transformationen in der Form (3.10) ausgedrückt werden können. Angenommen, wir erhalten zwei Frames, die mit den Frames 0 bzw. 1 bezeichnet werden. Dann gibt es eine eindeutige homogene Transformationsmatrix A , die die Koordinaten von Frame 1 in die von Frame 0 übernimmt. Nehmen wir nun an, dass die beiden Frames zwei zusätzliche Merkmale haben, nämlich:

(DH1) Die Achse x_1 steht senkrecht zur Achse z_0

(DH2) Die Achse x_1 schneidet die Achse z_0

wie in Abbildung 3.2 dargestellt. Unter diesen Bedingungen behaupten wir, dass es eindeutige Zahlen a , d , γ , δ gibt, so dass

$$A = \text{Rot}_z \gamma \text{Trans}_z d \text{Trans}_x a \text{Rot}_x \delta. \quad (3.11)$$

Da γ und δ Winkel sind, meinen wir natürlich, dass sie innerhalb eines Vielfachen von 2π eindeutig sind. Um zu zeigen, dass die Matrix A in dieser Form geschrieben werden kann, schreiben Sie A als

$$A = \begin{bmatrix} R_{01} & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

und r_i bezeichne die i^{th} Spalte der Rotationsmatrix R_{01} . Wir werden nun das untersuchen Implikationen der beiden DH-Einschränkungen.

Wenn (DH1) erfüllt ist, dann ist x_1 senkrecht zu z_0 und wir haben $x_1 \cdot z_0 = 0$. Wenn wir diese Einschränkung in Bezug auf $o_0 x_0 y_0 z_0$ ausdrücken und dabei die Tatsache nutzen, dass r_1 die Darstellung des Einheitsvektors x_1 in Bezug auf Frame 0 ist, erhalten wir erhalten

$$0 = x_1 \cdot z_0 = r_1 \cdot z_0 \quad (3.13)$$

$$= [r_{11}, r_{21}, r_{31}]^T \cdot [0, 0, 1]^T \quad (3.14)$$

$$= r_{31}. \quad (3.15)$$

Da $r_{31} = 0$, müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass es eindeutige Winkel γ und δ gibt, so dass

$$R_{01} = R_x \gamma R_x \delta = \begin{bmatrix} c\gamma s\delta c\gamma & s\gamma s\delta c\gamma & s\gamma s\delta \\ s\gamma c\gamma & c\gamma c\gamma & 0 \\ -s\gamma & -s\delta & c\gamma \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Die einzige Information, die wir haben, ist, dass $r_{31} = 0$, aber das reicht aus. Erstens: Da jede Zeile und Spalte von R_{01} eine Einheitslänge haben muss, impliziert $r_{31} = 0$ dies

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1, \\ r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Daher gibt es eindeutige γ , δ , so dass

$$(r_{11}, r_{21}) = (c\gamma, s\gamma), \quad (r_{32}, r_{33}) = (c\delta, s\delta). \quad (3.18)$$

Sobald γ und δ gefunden sind, ist es Routine, zu zeigen, dass die verbleibenden Elemente von R_{01} die in (3.16) gezeigte Form haben müssen, indem man die Tatsache nutzt, dass R_{01} eine Rotationsmatrix ist.

Als nächstes bedeutet Annahme (DH2), dass die Verschiebung zwischen o_0 und o_1 als lineare Kombination der Vektoren z_0 und x_1 ausgedrückt werden kann. Dies kann als $o_1 = o_0 + dz_0 + ax_1$ geschrieben werden. Auch hier können wir diese Beziehung in den Koordinaten $o_0 x_0 y_0 z_0$ ausdrücken wir erhalten

$$\begin{bmatrix} o_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} z_0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$= \begin{bmatrix} c\gamma & 0 & 0 \\ s\gamma & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma \\ s\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$= \begin{bmatrix} a c\gamma \\ a s\gamma \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma \\ s\gamma \\ \delta \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Wenn wir die obigen Ergebnisse kombinieren, erhalten wir (3.10) wie behauptet. Wir sehen also, dass vier Parameter ausreichen, um jede homogene Transformation zu spezifizieren, die die Einschränkungen (DH1) und (DH2) erfüllt.

Nachdem wir nun festgestellt haben, dass jede homogene Transformationsmatrix, die die obigen Bedingungen (DH1) und (DH2) erfüllt, in der Form (3.10) dargestellt werden kann, können wir tatsächlich jede der vier Größen in (3.10) physikalisch interpretieren. Der Parameter a ist der Abstand zwischen den Achsen z_0 und z_1 und wird entlang der Achse x_1 gemessen. Der Winkel $\dot{\gamma}$ ist der Winkel zwischen den Achsen z_0 und z_1 , gemessen in einer Ebene normal zu x_1 . Der positive Sinn für $\dot{\gamma}$ wird von z_0 bis z_1 durch die Rechte-Hand-Regel bestimmt, wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Der

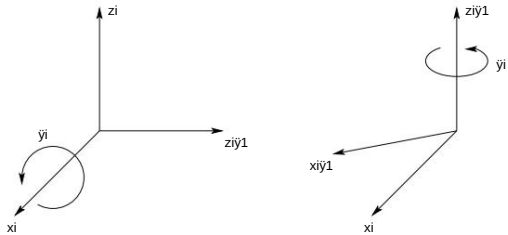


Abbildung 3.3: Positiver Sinn für $\dot{\gamma}_i$ und γ_i .

Parameter d ist der Abstand zwischen dem Ursprung o_0 und dem Schnittpunkt der x_1 -Achse mit z_0 , gemessen entlang der z_0 -Achse. Schließlich ist $\dot{\gamma}$ der Winkel zwischen x_0 und x_1 , gemessen in einer Ebene normal zu z_0 . Diese physikalischen Interpretationen werden sich bei der Entwicklung eines Verfahrens zur Zuweisung von Koordinatenrahmen, die die Einschränkungen (DH1) und (DH2) erfüllen, als nützlich erweisen, und wir richten unsere Aufmerksamkeit nun auf die Entwicklung eines solchen Verfahrens.

3.2.2 Zuweisung der Koordinatenrahmen

Für einen gegebenen Roboter manipulator kann man immer die Frames 0, wählen. . . , n so, dass die beiden oben genannten Bedingungen erfüllt sind. Unter bestimmten Umständen erfordert dies die Platzierung des Ursprungs o_i des Rahmens i an einer Stelle, die intuitiv möglicherweise nicht zufriedenstellend ist, aber normalerweise ist dies nicht der Fall. Beim Lesen des folgenden Materials ist es wichtig zu bedenken, dass die Auswahl der verschiedenen Koordinatenrahmen nicht eindeutig ist, auch wenn sie durch die oben genannten Anforderungen eingeschränkt werden. Daher ist es möglich, dass verschiedene Ingenieure unterschiedliche, aber gleichermaßen korrekte Koordinatenrahmenzuordnungen für die Verbindungen des Roboters ableiten. Es ist jedoch sehr wichtig zu n wird unabhängig davon gleich sein beachten, dass das Endergebnis (d. h. die Matrix T der Zuweisung von Zwischenverbindungsrahmen (unter der Annahme, dass die Koordinatenrahmen für Verbindung n übereinstimmen). Wir beginnen mit der Ableitung des allgemeinen Verfahrens. Wir werden dann diskutieren verschiedene häufige Sonderfälle, in denen es möglich ist, die homogene Transformationsmatrix weiter zu vereinfachen.

Beachten Sie zunächst, dass die Wahl von z_i willkürlich ist. Insbesondere aus (3.16) sehen wir, dass wir durch geeignete Wahl von $\dot{\gamma}_i$ und γ_i jede beliebige Richtung für z_i erhalten können. Daher weisen wir für unseren ersten Schritt die Achsen z_0 , zu. . . , z_{n+1} auf eine intuitiv ansprechende Weise. Insbesondere weisen wir z_i als Betätigungsachse für Gelenk $i + 1$ zu. Somit ist z_0 die Betätigungsachse für Gelenk 1, z_1 die Betätigungsachse für Gelenk 2 usw. Es sind zwei Fälle zu berücksichtigen: (i) Wenn das Gelenk $i + 1$ drehbar ist, ist z_i die Rotationsachse des Gelenks $i + 1$; (ii) wenn das Gelenk $i + 1$ prismatisch ist, ist z_i die Translationsachse des Gelenks $i+1$. Auf den ersten Blick mag es etwas verwirrend erscheinen, z_i mit dem Gelenk $i + 1$ zu verknüpfen, aber denken Sie daran, dass dies der Konvention entspricht, die wir in Abschnitt 3.1 aufgestellt haben, nämlich dass das Gelenk i in Bezug auf den Rahmen i fixiert ist und dass das Gelenk i betätigt wird, verknüpfe i und den daran befestigten Rahmen, oixiyizi, erlebe eine resultierende Bewegung.

Sobald wir die Z-Achsen für die Verbindungen festgelegt haben, erstellen wir den Grundrahmen. Die Wahl des Untergestells ist nahezu beliebig. Wir können den Ursprung o_0 des Basisrahmens als einen beliebigen Punkt auf z_0 wählen. Wir wählen dann x_0 , y_0 auf beliebige Weise, solange der resultierende Rahmen rechtshändig ist. Dadurch wird Frame 0 eingerichtet.

Sobald Frame 0 festgelegt ist, beginnen wir mit einem iterativen Prozess, in dem wir Frame i mithilfe von Frame $i - 1$ definieren, beginnend mit Frame 1. Abbildung 3.4 wird für das Verständnis des Prozesses hilfreich sein, den wir jetzt beschreiben.

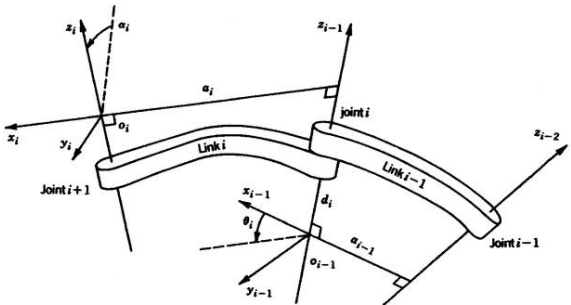


Abbildung 3.4: Denavit-Hartenberg-Rahmenzuordnung.

Um den Rahmen i einzurichten, müssen drei Fälle betrachtet werden: (i) die Achsen z_{i+1} , z_i sind nicht koplanar, (ii) die Achsen z_{i+1} , z_i schneiden sich (iii) die Achsen z_{i+1} , z_i sind parallel. Beachten Sie, dass in beiden Fällen (ii) und (iii) die Achsen z_{i+1} und z_i koplanar sind. Diese Situation kommt tatsächlich recht häufig vor, wie wir in Abschnitt 3.3 sehen werden. Wir betrachten nun jeden dieser

(i) z_{i+1} und z_i sind nicht koplanar: Wenn z_{i+1} und z_i nicht koplanar sind, dann existiert ein eindeutiges Liniensegment senkrecht zu z_{i+1} und z_i , so dass es beide Linien verbindet und eine minimale Länge hat. Die Linie, die diese gemeinsame Normale zu z_{i+1} und z_i enthält, definiert x_i .

und der Punkt, an dem diese Linie z_i schneidet, ist der Ursprung o_i . Konstruktionsbedingt sind beide Bedingungen (DH1) und (DH2) erfüllt und der Vektor von o_{i-1} nach o_i ist eine Linearkombination von z_{i-1} und x_i . Die Spezifikation des Rahmens i wird durch die Auswahl der Achse y_i zur Bildung eines rechten Rahmens vervollständigt. Da die Annahmen (DH1) und (DH2) erfüllt sind, hat die homogene Transformationsmatrix A_i die Form (3.10).

(ii) z_{i-1} ist parallel zu z_i : Wenn die Achsen z_{i-1} und z_i parallel sind, dann gibt es unendlich viele gemeinsame Normalen zwischen ihnen und Bedingung (DH1) spezifiziert x_i nicht vollständig.

In diesem Fall können wir den Ursprung o_i an einer beliebigen Stelle entlang von z_i wählen. Oft wählt man o_i , um die resultierenden Gleichungen zu vereinfachen. Die Achse x_i wird dann entweder so gewählt, dass sie entlang der gemeinsamen Normalen von o_i nach z_{i-1} zeigt, oder als das Gegenteil dieses Vektors. Eine übliche Methode zur Auswahl von o_i besteht darin, die Normale, die durch o_{i-1} verläuft, als x_{i-1} -Achse zu wählen; o_i ist dann der Punkt, an dem diese Normale z_i schneidet. In diesem Fall wäre d_i gleich Null.

Sobald x_i festgelegt ist, wird y_i bestimmt, wie üblich durch die Rechte-Hand-Regel. Da die Achsen z_{i-1} und z_i parallel sind, ist y_i in diesem Fall Null.

(iii) z_{i-1} schneidet z_i : In diesem Fall wird x_i normal zur Ebene gewählt, die durch z_i und z_{i-1} gebildet wird. Die positive Richtung von x_i ist beliebig. Die natürlichste Wahl für den Ursprung von o_i ist in diesem Fall der Schnittpunkt von z_i und z_{i-1} . Es reicht jedoch jeder geeignete Punkt entlang der z_i -Achse aus. Beachten Sie, dass in diesem Fall der Parameter a_i gleich 0 ist.

Dieses konstruktive Verfahren funktioniert für Frames $0, \dots, n-1$ in einem n -Link-Roboter. Um die Konstruktion abzuschließen, ist es notwendig, Rahmen n anzugeben. Das endgültige Koordinatensystem $o_n x_n y_n z_n$ wird üblicherweise als Endeffektor oder Werkzeugrahmen bezeichnet (siehe Abbildung 3.5). Der Ursprung

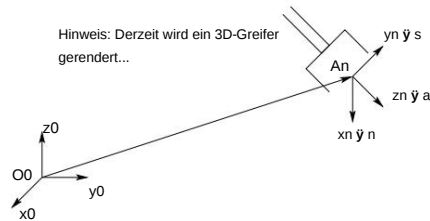


Abbildung 3.5: Werkzeugrahmenzuordnung.

on wird meist symmetrisch zwischen den Fingern des Greifers platziert. Die Einheitsvektoren entlang der x_n -, y_n - und z_n -Achse werden mit n , s bzw. a bezeichnet. Die Terminologie ergibt sich aus der Tatsache, dass die Richtung a die Annäherungsrichtung ist, in dem Sinne, dass der Greifer typischerweise entlang der a -Richtung an ein Objekt heranfährt. Ebenso ist die s -Richtung die Gleitrichtung, die Richtung, entlang der die Finger des Greifers zum Öffnen und Schließen gleiten, und n ist die Richtung normal zur durch a und s gebildeten Ebene.

Bei modernen Robotern ist die endgültige Gelenkbewegung eine Drehung des Endeffektors um y_n und die letzten beiden Gelenkachsen, z_{n-1} und z_n , fallen zusammen. In diesem Fall ist die Transformation zwischen den letzten beiden Koordinatensystemen eine Verschiebung entlang z_{n-1} um eine Distanz d_n , gefolgt von einer Drehung von y_n im Bogenmaß um z_{n-1} (oder davor). Dies ist eine wichtige Beobachtung, die die Berechnung der inversen Kinematik im nächsten Kapitel vereinfachen wird.

Beachten Sie abschließend die folgende wichtige Tatsache. In allen Fällen, unabhängig davon, ob es sich um ein Rotationsgelenk oder ein Prismengelenk handelt, sind die Größen a_i und y_i immer für alle i konstant und charakteristisch für den Manipulator. Wenn das Gelenk i prismatisch ist, dann ist y_i ebenfalls eine Konstante, während a_i variabel ist. Wenn das Gelenk i rotierend ist, ist d_i in ähnlicher Weise konstant und y_i die i -te Gelenkvariable.

3.2.3 Zusammenfassung

Wir können das obige Verfahren basierend auf der DH-Konvention im folgenden Algorithmus zur Ableitung der Vorwärtskinematik für jeden Manipulator zusammenfassen.

Schritt 1: Lokalisieren und beschriften Sie die Gelenkachsen $z_{0:n-1}$.

Schritt 2: Grundrahmen aufbauen. Legen Sie den Ursprung irgendwo auf der z_0 -Achse fest. Die x_0 und y_0 Die Achsen werden zweckmäßigerweise so gewählt, dass sie einen rechten Rahmen bilden.

Für $i = 1, \dots, n-1$, führen Sie die Schritte 3 bis 5 aus.

Schritt 3: Suchen Sie den Ursprung o_i dort, wo die gemeinsame Normale von z_i und z_{i-1} z_i schneidet. Wenn z_i z_{i-1} schneidet, orte o_i an diesem Schnittpunkt. Wenn z_i und z_{i-1} parallel sind, platzieren Sie o_i an einer beliebigen geeigneten Position entlang z_i .

Schritt 4: Ermitteln Sie x_i entlang der gemeinsamen Normalen zwischen z_{i-1} und z_i durch o_i oder in der Richtung normal zur Ebene z_{i-1} z_i , wenn sich z_{i-1} und z_i schneiden.

Schritt 5: Legen Sie y_i fest, um einen rechten Rahmen zu vervollständigen.

Schritt 6: Richten Sie den Endeffektorrahmen ein. Unter der Annahme, dass das n -te Gelenk drehbar ist, setzen Sie $z_n = a$ entlang der Richtung z_{n-1} . Legen Sie den Ursprung bequem entlang der z_n -Achse fest, vorzugsweise in der Mitte des Greifers oder an der Spitze eines beliebigen Werkzeugs, das der Manipulator möglicherweise trägt. Setze $y_n = s$ in Richtung des Greiferschlusses und setze $x_n = n$ als $s \times a$. Wenn das Werkzeug kein einfacher Greifer ist, stellen Sie x_n und y_n bequem ein, um einen rechten Rahmen zu bilden.

Schritt 7: Erstellen Sie eine Tabelle mit Verbindungsparametern a_i, y_i, d_i, θ_i .

a_i = Abstand entlang x_i von o_i zum Schnittpunkt der x_i - und z_{i-1} -Achsen. d_i = Abstand

entlang z_{i-1} von o_{i-1} bis zum Schnittpunkt der x_i - und z_{i-1} -Achsen. d_i ist variabel, wenn das Gelenk i prismatisch ist.

y_i = der Winkel zwischen z_{i-1} und z_i , gemessen um x_i (siehe Abbildung 3.3).

$\dot{\gamma}_i$ = der Winkel zwischen x_{i-1} und x_i , gemessen um z_{i-1} (siehe Abbildung 3.3). $\dot{\gamma}_i$ ist variabel wenn Joint i revolute ist.

Schritt 8: Bilden Sie die homogenen Transformationsmatrizen A_i , indem Sie die obigen Parameter in (3.10) einsetzen.

Schritt 9: Form $T_n^0 = A_1 \cdots A_n$. Daraus ergibt sich dann die Position und Ausrichtung des Werkzeugs Rahmen ausgedrückt in Basiskoordinaten.

3.3 Beispiele

In der DH-Konvention ist $\dot{\gamma}$ der einzige variable Winkel, daher vereinfachen wir die Notation, indem wir c_i für $\cos \gamma_i$ usw. schreiben. Wir bezeichnen $\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2$ auch mit $\dot{\gamma}_{12}$ und $\cos(\gamma_1 + \gamma_2)$ mit c_{12} usw. Bei den folgenden Beispielen ist es wichtig, sich daran zu erinnern, dass die DH-Konvention zwar systematisch ist, aber dennoch erhebliche Freiheit bei der Wahl einiger Manipulatorparameter zulässt. Dies gilt insbesondere bei parallelen Gelenkachsen oder bei prismatischen Gelenken.

Beispiel 3.1 Planarer Ellenbogenmanipulator Betrachten

Sie den planaren Zweigelenkarm aus Abbildung 3.6. Die Gelenkachsen z_0 und z_1 stehen normal auf

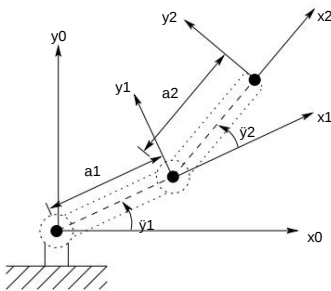


Abbildung 3.6: Planarer Manipulator mit zwei Gliedern. Die Z-Achsen zeigen alle aus der Seite heraus und sind in der Abbildung nicht dargestellt.

die Seite. Wir legen den Grundrahmen $o_0x_0y_0z_0$ wie gezeigt fest. Der Ursprung wird am Schnittpunkt der z_0 -Achse mit der Seite gewählt und die Richtung der x_0 -Achse ist völlig willkürlich. Sobald der Basisrahmen festgelegt ist, wird der Rahmen $o_1x_1y_1z_1$ gemäß der DH-Konvention fixiert, wobei der Ursprung o_1 am Schnittpunkt von z_1 und der Seite liegt.

Der endgültige Frame $o_2x_2y_2z_2$ wird festgelegt, indem der Ursprung o_2 am Ende von Link 2 ausgewählt wird, wie gezeigt. Die Verbindungsparameter sind in Tabelle 3.1 aufgeführt. Die A-Matrizen werden aus (3.10) bestimmt als

Tabelle 3.1: Link-Parameter für den 2-Link-Planarmanipulator.

Link	a_i	$\dot{\gamma}_i$	d_i	$\dot{\gamma}_i$	a_1	0	0	$\dot{\gamma}_2$	a_2	0	0	$\dot{\gamma}_2$
1		$\dot{\gamma}_1$										1
2												2

Variable

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & \dot{\gamma}_1 s_1 & 0 & a_1 c_1 & s_1 \\ \dot{\gamma}_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & \dot{\gamma}_2 s_2 & 0 & a_2 c_2 & s_2 \\ \dot{\gamma}_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Die T-Matrizen sind somit gegeben durch

$$T_1^0 = A_1. \quad (3.24)$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & \dot{\gamma}_{12} s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} & s_{12} \\ \dot{\gamma}_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Beachten Sie, dass die ersten beiden Einträge der letzten Spalte von T_2^0 sind die x- und y-Komponenten von der Ursprung o_2 im Grundrahmen; das ist,

$$\begin{aligned} x &= a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ y &= a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \quad (3.26)$$

sind die Koordinaten des Endeffektors im Basisrahmen. Der rotierende Teil der T-Ausrichtung des T_2^0 gibt dem Rahmens $o_2x_2y_2z_2$ relativ zum Grundrahmen.

Beispiel 3.2 Zylindrischer Roboter mit drei Gliedern Betrachten

Sie nun den zylindrischen Roboter mit drei Gliedern, der symbolisch in Abbildung 3.7 dargestellt ist. Wir legen o_0 fest, wie am Gelenk 1 gezeigt. Beachten Sie, dass die Platzierung des Ursprungs o_0 entlang z_0 sowie die Richtung der x_0 -Achse willkürlich sind. Unsere Wahl von o_0 ist die natürlichste, aber o_0 könnte genauso gut am Gelenk 2 platziert werden. Die Achse x_0 wird senkrecht zur Seite gewählt. Da z_0 und z_1 zusammenfallen, wird als Nächstes der Ursprung o_1 wie gezeigt am Gelenk 1 gewählt. Die x_1 -Achse verläuft normal zur Seite, wenn $\dot{\gamma}_1 = 0$, aber ihre Richtung ändert sich natürlich, da $\dot{\gamma}_1$ variabel ist. Da sich z_2 und z_1 schneiden, wird der Ursprung o_2 an diesem Schnittpunkt platziert. Die Richtung von x_2 wird gewählt

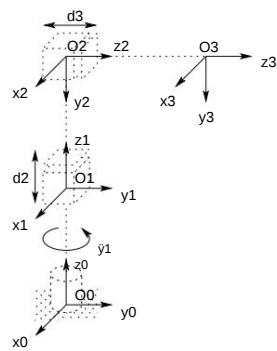


Abbildung 3.7: Dreigliedriger zylindrischer Manipulator.

Tabelle 3.2: Verbindungsparameter für den zylindrischen Manipulator mit 3 Verbindungen.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	$\bar{y}$	1
2	$\bar{y}$	d	2	0
3	3			0

Variable

parallel zu x_1 , so dass $\bar{y}_2$ Null ist. Schließlich wird der dritte Frame am Ende von Link 3 ausgewählt, wie gezeigt.

Die Link-Parameter werden nun in Tabelle 3.2 angezeigt. Die entsprechenden A- und T-Matrizen

Sind

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 & s_1 \\ \bar{y} & c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{y} \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{y} & 1 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{y} \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{y} \\ 0 & 0 & 1 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 & s_1 & d_1 \\ \bar{y} & c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{y} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

y

Beispiel 3.3 Kugelförmiges Handgelenk

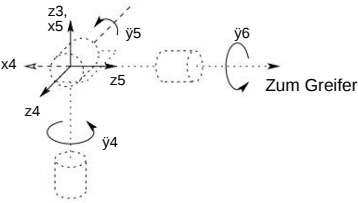


Abbildung 3.8: Die sphärische Handgelenkrahmenzuordnung.

Die sphärische Handgelenkskonfiguration ist in Abbildung 3.8 dargestellt, in der sich die Gelenkachsen z_3, z_4, z_5 bei o schneiden. Die Denavit-Hartenberg-Parameter sind in Tabelle 3.3 aufgeführt. Der Stanford-Manipulator ist ein Beispiel für einen Manipulator, der über ein solches Handgelenk verfügt. Tatsächlich gilt die folgende Analyse für praktisch alle sphärischen Handgelenke.

Wir zeigen nun, dass die letzten drei Gelenkvariablen $\bar{y}_4, \bar{y}_5, \bar{y}_6$ die Euler-Winkel $\bar{y}, \bar{y}$ bzw. $\bar{y}$ in Bezug auf den Koordinatenrahmen $o_3x_3y_3z_3$ sind. Um dies zu sehen, müssen wir nur rechnen

[illegible]

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c_6 y s_6 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 \\ y s_6 & 1 & d_6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

T_6^0 ist dann gegeben als

$$T_6^0 = A_1 \cdots A_6 \quad (3.41)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{32} & r_{33} & dz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Wo

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1[c_2(c_4c_5c_6 \dot{y} s_4s_6) \dot{y} s_2s_5c_6] \dot{y} d_2(s_4c_5c_6 + c_4s_6) r_{21} = s_1[c_2(c_4c_5c_6 \\ \dot{y} s_4s_6) \dot{y} s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) r_{31} &= \dot{y}s_2(c_4c_5c_6 \dot{y} s_4s_6) \dot{y} c_2s_5c_6 r_{12} \\ &= c_1[\dot{y}c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] \dot{y} s_1(\dot{y}s_4c_5s_6 \\ &+ c_4c_6) r_{22} = \dot{y}s_1[\dot{y}c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(\dot{y}s_4c_5s_6 + c_4c_6) r_{32} = \\ &s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 r_{13} = c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) \dot{y} s_1s_4s_5 r_{23} = s_1(c_2c_4s_5 + \\ &s_2c_5) + c_1s_4s_5 r_{33} = \dot{y}s_2c_4s_5 + c_2c_5 dx = \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} c_1s_2d_3 \dot{y} s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 \dot{y} \\ s_1s_4s_5) dy = s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + \\ c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) dz = c_2d_3 \\ + d_6(c_2c_5 \dot{y} c_4s_2s_5). \end{aligned} \quad (3.44)$$

$\dot{y}$

Beispiel 3.6 SCARA-Manipulator

Betrachten Sie als weiteres Beispiel für das allgemeine Verfahren den SCARA-Manipulator in Abbildung 3.11. Dieser Manipulator, der eine Abstraktion des AdeptOne-Roboters aus Abbildung 1.11 ist, besteht aus einem RRP-Arm und einem Handgelenk mit einem Freiheitsgrad, dessen Bewegung eine Rolle um die vertikale Achse ist. Der erste Schritt besteht darin, die Gelenkachsen wie gezeigt zu lokalisieren und zu beschriften. Da alle Gelenkachsen parallel sind, haben wir eine gewisse Freiheit bei der Platzierung der Ursprünge. Der Einfachheit halber werden die Ursprünge wie gezeigt platziert. Wir legen die x_0 -Achse wie gezeigt in der Ebene der Seite fest. Dies ist völlig willkürlich und betrifft nur die Nullkonfiguration des Manipulators, also die Position des Manipulators, wenn $\dot{y}_1 = 0$.

Die Verbindungsparameter sind in Tabelle 3.5 angegeben und die A-Matrizen lauten wie folgt.

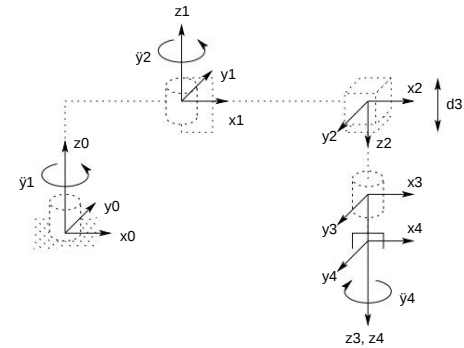


Abbildung 3.11: DH-Koordinatenrahmenzuordnung für den SCARA-Manipulator.

Tabelle 3.5: Gelenkparameter für SCARA.

Link	a_i	$\dot{y}_i$	d_i	$\dot{y}_i$	0
1		0	$\dot{y}_1 a_1$		
2	a_2	180	0	0	0
3	0	0	$d_4 \dot{y}$		
4					

$\dot{y}$ Gelenkvariable

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 \dot{y} s_1 & 0 & a_1 c_1 & c_1 \\ \dot{y} s_1 & 0 & a_1 s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_2 s_2 & 0 & a_2 c_2 & s_2 \dot{y} c_2 \\ \dot{y} s_2 & 0 & a_2 s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{y} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 \dot{y} s_4 & 0 & 0 & c_4 \\ \dot{y} s_4 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Die vorwärtskinematischen Gleichungen sind daher gegeben durch

$$\begin{matrix} & & c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & y_{c12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ \ddot{y} & s_{12}c_4 & y_{c12}s_4 & y_{s12}s_4 & y_{c12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ \vdots & 0 & 0 & & y_1 & y_{d3} & y_{d4} \\ y & 0 & 0 & & 0 & 1 & \end{matrix} \quad \ddot{y} \quad \vdots \quad y \quad (3.49)$$

y

Gleichung (4.2) führt zu zwölf nichtlinearen Gleichungen in n unbekannten Variablen, die wie folgt geschrieben werden können

$$T_{ij}(q_1, \dots, q_n) = h_{ij}, \quad 4 \leq i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, 4 \quad (4.4)$$

wobei sich T_{ij} , h_{ij} auf die zwölf nichttrivialen Einträge von T_n^0 bzw. H . (Da und $H(0,0,0,1)$ sind, sind beziehen. Die untere Reihe e_n vier der sechzehn Gleichungen dargestellt durch von beiden $T(4.2)$ ist trivial.)

Beispiel 4.1

Erinnern Sie sich an den Stanford-Manipulator aus Beispiel 3.3.5. Angenommen, die gewünschte Position und Die Ausrichtung des endgültigen Rahmens ist gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & o_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & o_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Um die entsprechenden Gelenkvariablen $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{d}_3, \dot{y}_4, \dot{y}_5$ und $\dot{y}_6$ zu finden, müssen wir den folgenden simultanen Satz nichtlinearer trigonometrischer Gleichungen lösen (vgl. (3.43) und (3.44)):

$$\begin{aligned} c_1[c_2(c_4c_5c_6 \dot{y} s_4s_6) \dot{y} s_2s_5c_6] \dot{y} s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= r_{11} s_1[c_2 \\ (c_4c_5c_6 \dot{y} s_4s_6) \dot{y} s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= r_{21} \dot{y} s_2(c_4c_5c_6 \dot{y} \\ s_4s_6) \dot{y} c_2s_5s_6 &= r_{31} c_1[\dot{y} c_2(c_4c_5s_6 + \\ s_4c_6) + s_2s_5s_6] \dot{y} s_1(\dot{y} s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= r_{12} s_1[\dot{y} c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + \\ s_2s_5s_6] + c_1(\dot{y} s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= r_{22} s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 = r_{32} \\ c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) \dot{y} s_1s_4s_5 &= r_{13} \\ s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 &= r_{23} \\ \dot{y} s_2c_4s_5 + c_2c_5 &= r_{33} \\ c_1s_2d_3 \dot{y} s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 \dot{y} s_1s_4s_5) &= o_x s_1s_2d_3 + \\ c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) &= o_y c_2d_3 + d_6(c_2c_5 \dot{y} \\ c_4s_2s_5) &= o_z. \end{aligned}$$

$\dot{y}$

Die Gleichungen im vorherigen Beispiel sind natürlich viel zu schwierig, um sie direkt in geschlossener Form zu lösen. Dies ist bei den meisten Roboterarmen der Fall. Daher müssen wir effiziente und systematische Techniken entwickeln, die die besondere kinematische Struktur des Manipulators nutzen. Während das Vorwärtskinematikproblem immer eine eindeutige Lösung hat, die einfach durch Auswertung der Vorwärtsgleichungen erhalten werden kann, kann es für das inverse Kinematikproblem eine Lösung geben oder auch nicht. Selbst wenn eine Lösung existiert, kann sie eindeutig sein oder auch nicht.

Kapitel 4

INVERSE KINEMATIK

Im vorherigen Kapitel haben wir gezeigt, wie man die Position und Ausrichtung des Endeffektors anhand der Gelenkvariablen bestimmt. In diesem Kapitel geht es um das umgekehrte Problem, die Gelenkvariablen in Bezug auf die Position und Ausrichtung des Endeffektors zu finden. Dies ist das Problem der inversen Kinematik und im Allgemeinen schwieriger als das Problem der Vorwärtskinematik.

In diesem Kapitel beginnen wir mit der Formulierung des allgemeinen Problems der inversen Kinematik. Anschließend beschreiben wir das Prinzip der kinematischen Entkopplung und wie es zur Vereinfachung der inversen Kinematik der meisten modernen Manipulatoren genutzt werden kann. Mithilfe der kinematischen Entkopplung können wir die Positions- und Orientierungsprobleme unabhängig voneinander betrachten. Wir beschreiben einen geometrischen Ansatz zur Lösung des Positionierungsproblems, während wir die Euler-Winkelparametrisierung zur Lösung des Orientierungsproblems nutzen.

4.1 Das allgemeine Problem der inversen Kinematik

Das allgemeine Problem der inversen Kinematik lässt sich wie folgt formulieren. Gegeben sei eine homogene 4×4 -Transformation

$$H = \begin{pmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(3) \quad (4.1)$$

Finden Sie mit $R \in SO(3)$ (eine oder alle) Lösungen der Gleichung

$$T_n^0(q_1, \dots, q_n) = H \quad (4.2)$$

Wo

$$T_n^0(q_1, \dots, q_n) = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n). \quad (4.3)$$

Hier stellt H die gewünschte Position und Ausrichtung des Endeffektors dar, und unsere Aufgabe besteht darin, die Werte für die Gelenkvariablen $q_1, \dots, q_n$ so dass $T_n^0(q_1, \dots, q_n) = H$.

Da es sich bei diesen vorwärtskinematischen Gleichungen außerdem im Allgemeinen um komplizierte nichtlineare Funktionen der Gelenkvariablen handelt, kann es schwierig sein, die Lösungen zu erhalten, selbst wenn sie existieren.

Bei der Lösung des Problems der inversen Kinematik sind wir vor allem daran interessiert, eine geschlossene Lösung der Gleichungen zu finden und nicht eine numerische Lösung. Um eine Lösung in geschlossener Form zu finden, muss eine explizite Beziehung gefunden werden:

$$q_k = f_k(h_1, \dots, h_3), \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

Geschlossene Lösungen sind aus zwei Gründen vorzuziehen. Erstens müssen in bestimmten Anwendungen, wie zum Beispiel der Verfolgung einer Schweißnaht, deren Position von einem Bildverarbeitungssystem bereitgestellt wird, die inversen kinematischen Gleichungen schnell gelöst werden, beispielsweise alle 20 Millisekunden, und geschlossene Ausdrücke anstelle einer iterativen Suche zu verwenden praktische Notwendigkeit. Zweitens haben die kinematischen Gleichungen im Allgemeinen mehrere Lösungen. Wenn geschlossene Lösungen vorliegen, können Regeln für die Auswahl einer bestimmten Lösung unter mehreren entwickelt werden.

Die praktische Frage nach der Existenz von Lösungen für das Problem der inversen Kinematik hängt sowohl von technischen als auch von mathematischen Überlegungen ab. Beispielsweise kann die Bewegung der Drehgelenke auf weniger als volle 360 Grad Drehung beschränkt sein, so dass nicht alle mathematischen Lösungen der kinematischen Gleichungen physikalisch realisierbaren Konfigurationen des Manipulators entsprechen. Wir gehen davon aus, dass die gegebene Position und Orientierung so ist, dass mindestens eine Lösung von (4.2) existiert. Sobald eine Lösung für die mathematischen Gleichungen gefunden ist, muss diese weiter überprüft werden, um festzustellen, ob sie alle Einschränkungen hinsichtlich der Bereiche möglicher Gelenkbewegungen erfüllt oder nicht. Für unsere Zwecke hier gehen wir nun davon aus, dass die gegebene homogene Matrix H in (4.2) einer Konfiguration innerhalb des Arbeitsraums des Manipulators mit einer erreichbaren Orientierung entspricht. Dies gewährleistet dann, dass die erhaltenen mathematischen Lösungen erreichbaren Konfigurationen entsprechen.

4.2 Kinematische Entkopplung

Obwohl das allgemeine Problem der inversen Kinematik ziemlich schwierig ist, zeigt sich, dass es bei Manipulatoren mit sechs Gelenken, bei denen sich die letzten drei Gelenke in einem Punkt schneiden (wie der Stanford-Manipulator oben), möglich ist, das Problem der inversen Kinematik in zwei zu entkoppeln einfachere Probleme, die als inverse Positionskinetik bzw. inverse Orientierungskinetik bekannt sind. Anders ausgedrückt: Für einen 6-DOF-Manipulator mit sphärischem Handgelenk kann das Problem der inversen Kinematik in zwei einfachere Probleme unterteilt werden, nämlich erstens das Finden der Position des Schnittpunkts der Handgelenksachsen, im Folgenden als Handgelenksmitte bezeichnet, und dann Finden der Ausrichtung des Handgelenks.

Der Konkretheit halber nehmen wir an, dass es genau sechs Freiheitsgrade gibt und dass sich die letzten drei Gelenkachsen in einem Punkt o_c schneiden. Wir drücken (4.2) als zwei Gleichungssätze aus, die die Rotations- und Positionsgleichungen darstellen

$$R_o^0(q_1, \dots, q_6) = R \quad (4.7)$$

$$o_c^0(q_1, \dots, q_6) = o \quad (4.8)$$

Dabei sind o und R die gewünschte Position und Ausrichtung des Werkzeugrahmens, ausgedrückt in Bezug auf das Weltkoordinatensystem. Somit sind uns o und R gegeben, und das Problem der inversen Kinematik muss nach q_1 gelöst werden. $\dots, q_6$.

Die Annahme eines sphärischen Handgelenks bedeutet, dass sich die Achsen z_3, z_4 und z_5 bei o_c schneiden und daher die von der DH-Konvention zugewiesenen Ursprünge o_4 und o_5 immer im Handgelenkszentrum o_c liegen. Oft wird o_3 auch bei o_c sein, was für unsere spätere Entwicklung aber nicht notwendig ist. Der wichtige Punkt dieser Annahme für die inverse Kinematik besteht darin, dass die Bewegung der letzten drei Verbindungen um diese Achsen die Position von o_c nicht verändert und die Position des Handgelenkszentrums somit nur eine Funktion der ersten drei Gelenkvariablen ist.

Der Ursprung des Werkzeugrahmens (dessen gewünschte Koordinaten durch o angegeben werden) wird einfach durch eine Verschiebung des Abstands d_6 entlang z_5 von o_c ermittelt (siehe Tabelle 3.3). In unserem Fall sind z_5 und z_6 die gleiche Achse und die dritte Spalte von R drückt die Richtung von z_6 in Bezug auf den Grundrahmen aus. Deshalb haben wir

$$o_c^0 = o_c^0 + d_6 R_{yy}^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Damit sich der Endeffektor des Roboters an dem Punkt befindet, dessen Koordinaten durch o und die Ausrichtung des Endeffektors durch $R = (r_{ij})$ gegeben sind, ist es notwendig und ausreichend, dass die Handgelenksmitte o_c die angegebenen Koordinaten hat von

$$o_c^0 = o_c^0 + d_6 R_{yy}^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

und dass die Ausrichtung des Rahmens $o_6x_6y_6z_6$ in Bezug auf die Basis durch R gegeben ist. Wenn die Komponenten der Endeffektorposition o mit o_x, o_y, o_z und die Komponenten des Handgelenkszentrums o_c bezeichnet werden o_c^0 werden mit x_c, y_c, z_c bezeichnet, dann gibt (4.10) die Beziehung an

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_x & d_6 r_{13} \\ o_y & d_6 r_{23} \\ o_z & d_6 r_{33} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Mit Gleichung (4.11) können wir die Werte der ersten drei Gelenkvariablen ermitteln. Dies hängt nur von bestimmt die Orientierungstransformation R_0^3 diesen ersten drei gemeinsamen Variablen ab. Aus dem Ausdruck können wir nun die Ausrichtung des Endeffektors relativ zum Rahmen $o_3x_3y_3z_3$ bestimmen

$$R = R_0^3 R_3^6 \quad (4.12)$$

als

$$R_3^6 = (R_0^3)^{-1} R = (R_0^3)^T R. \quad (4.13)$$

Wie wir in Abschnitt 4.4 sehen werden, können die endgültigen drei Gelenkwinkel dann als Satz von Euler-Winkeln gefunden werden, die R_3^6 entsprechen. Beachten Sie, dass die rechte Seite von (4.13) vollständig bekannt ist, da R gegeben ist und R_0^3 berechnet werden kann, sobald die ersten drei Gelenkvariablen bekannt sind. Die Idee der kinematischen Entkopplung ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

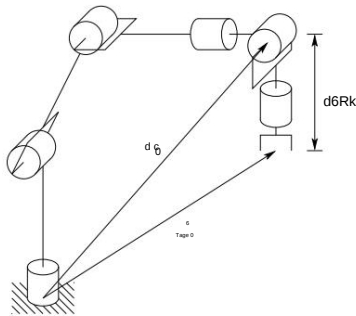


Abbildung 4.1: Kinematische Entkopplung.

Zusammenfassung

Für diese Klasse von Manipulatoren kann die Bestimmung der inversen Kinematik durch den folgenden Algorithmus zusammengefasst werden.

Schritt 1: Finden Sie q_1, q_2, q_3 , so dass der Handgelenkmittelpunkt o_c die durch gegebenen Koordinaten hat

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{y}^1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{y}^1 \end{matrix} d6R \quad (4.14)$$

Schritt 2: Bewerten Sie R_0 anhand der in Schritt 1 ermittelten Gelenkvariablen q_1, q_2, q_3 .

Schritt 3: Finden Sie einen Satz Euler-Winkel, der der Rotationsmatrix entspricht

$$R_0^3 = (R_0^1 \ R_0^2 \ R_0^3) \ddot{y}^1 R = (R_0^1 \ R_0^2 \ R_0^3)^T R. \quad (4.15)$$

4.3 Inverse Position: Ein geometrischer Ansatz

Für die üblichen kinematischen Anordnungen, die wir betrachten, können wir einen geometrischen Ansatz verwenden, um die Variablen q_1, q_2, q_3 zu finden, die dem durch (4.10) gegebenen o_c entsprechen. Wir beschränken unsere Behandlung aus zwei Gründen auf den geometrischen Ansatz. Erstens sind die meisten gegenwärtigen Manipulatorkonstruktionen, wie bereits erwähnt, kinematisch einfach und bestehen normalerweise aus einer der fünf Grundkonfigurationen aus Kapitel 1 mit einem sphärischen Handgelenk. Tatsächlich ist es teilweise auf die Schwierigkeit des allgemeinen Problems der inversen Kinematik zurückzuführen, dass sich Manipulatorkonstruktionen zu ihrem gegenwärtigen Stand entwickelt haben. Zweitens gibt es nur wenige Techniken, die das allgemeine Problem der inversen Kinematik für beliebige Konfigurationen lösen können. Da der Leser am ehesten auf Roboterkonfigurationen stößt

Bei der hier betrachteten Art erscheint die zusätzliche Schwierigkeit, die mit der Behandlung des allgemeinen Falles verbunden ist, ungerechtfertigt. Zur Behandlung des allgemeinen Falles wird der Leser auf die Verweise am Ende des Kapitels verwiesen.

Im Allgemeinen nimmt die Komplexität des Problems der inversen Kinematik mit der Anzahl der Verbindungsparameter ungleich Null zu. Bei den meisten Manipulatoren sind viele der a_i d_i null, die $\dot{y}_i$ sind 0 oder $\pm\dot{y}/2$ usw. Insbesondere in diesen Fällen ist ein geometrischer Ansatz der einfachste und natürlichste. Wir werden dies anhand einiger wichtiger Beispiele veranschaulichen.

Gelenkconfiguration

Betrachten Sie den in Abbildung 4.2 gezeigten Ellenbogenmanipulator mit den Komponenten o mal x_c, y_c, z_c . Wir o_c bezeichnet projizieren o_c auf die $x_0 \ y_0$ -Ebene, wie in Abbildung 4.3 gezeigt.

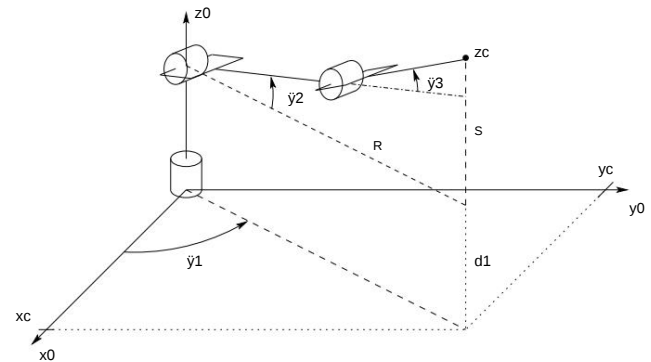


Abbildung 4.2: Ellenbogenmanipulator.

Das sehen wir aus dieser Projektion

$$\ddot{y}^1 = A \tan(x_c, y_c), \quad (4.16)$$

wobei $A \tan(x, y)$ die Arkustangensfunktion mit zwei Argumenten bezeichnet. Ein $\tan(x, y)$ ist für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ definiert und entspricht dem eindeutigen Winkel $\ddot{y}$, so dass

$$\cos \ddot{y} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \sin \ddot{y} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}. \quad (4.17)$$

Zum Beispiel: $A \tan(1, \ddot{y}^1) = \ddot{y}$ während $A \tan(\ddot{y}^1, 1) = +3\ddot{y} - \ddot{y}$.
Beachten Sie, dass eine zweite gültige Lösung für $\ddot{y}^1$ ist

$$\ddot{y}^1 = \ddot{y} + A \tan(x_c, y_c). \quad (4.18)$$

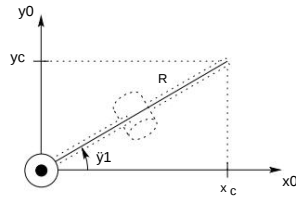


Abbildung 4.3: Projektion des Handgelenkszentrums auf die $x_0 \text{ } y_0$ -Ebene.

Natürlich führt dies wiederum zu unterschiedlichen Lösungen für $\bar{y}_2$ und $\bar{y}_3$, wie wir weiter unten sehen werden.

Diese Lösungen für $\bar{y}_1$ sind gültig, es sei denn, $x_c = y_c = 0$. In diesem Fall ist (4.16) undefiniert und der Manipulator befindet sich in einer singulären Konfiguration, wie in Abbildung 4.4 dargestellt. In dieser Position ist die

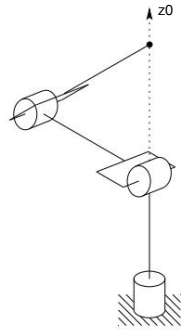


Abbildung 4.4: Singulärkonfiguration.

Handgelenkmitte o_c schneidet z_0 ; Daher lässt jeder Wert von $\bar{y}_1$ o_c fest. Es gibt also unendlich viele Lösungen für $\bar{y}_1$, wenn o_c z_0 schneidet.

Wenn es einen Versatz $d = 0$ gibt, wie in Abbildung 4.5 gezeigt, kann die Handgelenkmitte z_0 nicht schneiden. In diesem Fall ergibt sich je nach Zuweisung der DH-Parameter $d_2 = d$ oder $d_3 = d$. In diesem Fall wird es im Allgemeinen nur zwei Lösungen für $\bar{y}_1$ geben. Diese entsprechen den sogenannten linken Arm- und rechten Armkonfigurationen, wie in den Abbildungen 4.6 und 4.7 dargestellt. Abbildung 4.6 zeigt die Konfiguration des linken Arms. Aus dieser Abbildung sehen wir das geometrisch

$$\bar{y}_1 = \bar{y} \text{ } \bar{y} \quad (4.19)$$

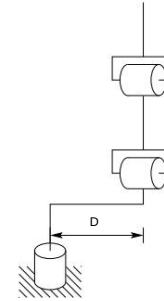


Abbildung 4.5: Ellenbogenmanipulator mit Schulterversatz.

Wo

$$\bar{y} = A \tan(x_c, y_c) \bar{y} d \quad (4.20)$$

$$2 \bar{y} = A \tan r \quad (4.21)$$

$$= \text{Ein tan x} \quad \frac{2}{c^2 + j_c^2 \bar{y} d^2, d}.$$

Die zweite Lösung, die durch die in Abbildung 4.7 gezeigte Konfiguration des rechten Arms gegeben ist, ist gegeben durch

$$\bar{y}_1 = A \tan(x_c, y_c) + A \tan \bar{y} r \quad \frac{2}{\bar{y} d^2, \bar{y} d}. \quad (4.22)$$

Um dies zu sehen, beachten Sie das

$$\bar{y}_1 = \bar{y} + \bar{y} \bar{y} = \quad (4.23)$$

$$A \tan(x_c, y_c) \bar{y} = \bar{y} + \bar{y} \quad (4.24)$$

$$\quad (4.25)$$

$$\bar{y} = A \tan(r \quad \frac{2}{\bar{y} d^2, d}) \quad (4.26)$$

$$\quad (4.27)$$

was zusammengekommen das impliziert

$$\bar{y} = A \tan \bar{y} r \quad \frac{2}{\bar{y} d^2, \bar{y} d} \quad (4.28)$$

da $\cos(\bar{y} + \bar{y}) = \bar{y} \cos(\bar{y})$ und $\sin(\bar{y} + \bar{y}) = \bar{y} \sin(\bar{y})$.

Um die Winkel $\bar{y}_2, \bar{y}_3$ für den Ellenbogenmanipulator bei gegebenem $\bar{y}_1$ zu ermitteln, betrachten wir die durch die zweite und dritte Verbindung gebildete Ebene, wie in Abbildung 4.8 dargestellt. Seit der Bewegung von Links

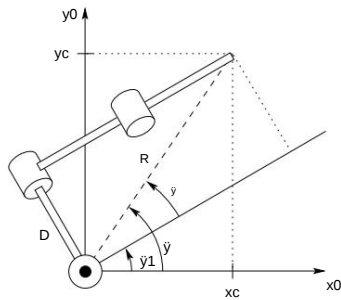


Abbildung 4.6: Konfiguration des linken Arms.

Da zwei und drei planar sind, ist die Lösung analog zu der des zweigliedrigen Manipulators aus Kapitel 1. Wie in unserer vorherigen Ableitung (vgl. (1.8) und (1.9)) können wir das Kosinusetz anwenden, um zu erhalten

$$\cos \bar{y}_3 = \frac{2^2 2^2 2^2 + s r \bar{y} a^2 a^2 3}{2 a_2 a_3} \quad (4.29)$$

$$= \frac{z_c^2 + J_c^2 \bar{y} d^2 + z_c^2 \bar{y} a^2}{2 a_2 a_3} \bar{y} \sin^2 \bar{y}_3 := D,$$

seit $r^2 = x_c^2 + J_c^2 \bar{y} d^2$ und $s = z_c$. Daher ist $\bar{y}_3$ gegeben durch

$$\bar{y}_3 = A \tan D, \pm 1 \bar{y} D_2. \quad (4.30)$$

Ebenso ist $\bar{y}_2$ gegeben als

$$\bar{y}_2 = A \tan(r, s) \bar{y} A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \quad (4.31)$$

$$= \text{Ein tan x} \sqrt{\frac{2}{c} + J_c^2 \bar{y} d^2}, z_c \bar{y} A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3).$$

Die beiden Lösungen für $\bar{y}_3$ entsprechen der Ellenbogen-nach-oben-Position bzw. der Ellenbogen-nach-unten-Position.

Ein Beispiel für einen Ellenbogenmanipulator mit Offsets ist der in Abbildung 4.9 dargestellte PUMA. Wie gezeigt, gibt es vier Lösungen für die Umkehrpositionskinematik. Diese entsprechen den Situationen linker Arm – Ellenbogen nach oben, linker Arm – Ellenbogen nach unten, rechter Arm – Ellenbogen nach oben und rechter Arm – Ellenbogen nach unten. Wir werden sehen, dass es zwei Lösungen für die Handgelenksorientierung gibt, sodass sich insgesamt acht Lösungen der inversen Kinematik für den PUMA-Manipulator ergeben.

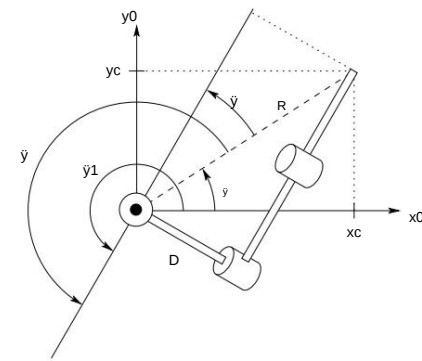


Abbildung 4.7: Konfiguration des rechten Arms.

Kugelförmige Konfiguration

Als nächstes lösen wir die inverse Positionskinetik für einen sphärischen Manipulator mit drei Freiheitsgraden, der in Abbildung 4.10 dargestellt ist. Wie beim Ellenbogenmanipulator ist die erste Gelenkvariable die Basisrotation und eine Lösung wird als angegeben

$$\bar{y}_1 = A \tan(x_c, y_c) \quad (4.32)$$

vorausgesetzt x_c und y_c sind nicht beide Null. Wenn sowohl x_c als auch y_c Null sind, ist die Konfiguration wie zuvor singular und $\bar{y}_1$ kann jeden Wert annehmen.

Der Winkel $\bar{y}_2$ ergibt sich aus Abbildung 4.10 als

$$\bar{y}_2 = A \tan(r, s) + 2 \frac{y}{r} \quad (4.33)$$

wobei $r^2 = x_c^2 + J_c^2 \bar{y} d^2$, $s = z_c \bar{y} d$. Wie im Fall des Ellenbogenmanipulators eine zweite Lösung gegeben ist durch

$$\bar{y}_1 = \bar{y} + A \tan(x_c, y_c); \quad (4.34)$$

Der lineare Abstand d_3 ergibt sich als

$$d_3 = r \sqrt{2 + s^2} - z_c \bar{y} + J_c^2 \bar{y} d^2 + (z_c \bar{y} d)^2. \quad (4.35)$$

Die negative Quadratwurzellösung für d_3 wird vernachlässigt und somit erhalten wir in diesem Fall zwei Lösungen für die Umkehrpositionskinematik, solange der Handgelenkmittelpunkt z_0 nicht schneidet. Wenn es einen Versatz gibt, gibt es linke und rechte Armkonfigurationen wie im Fall des Ellenbogenmanipulators (Aufgabe 4-12).

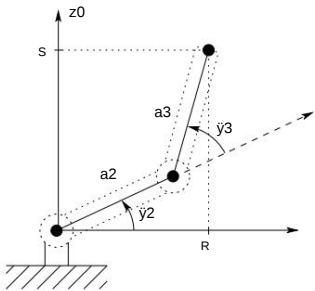


Abbildung 4.8: Projektion auf die Ebene, die durch die Verbindungen 2 und 3 gebildet wird.

4.4 Inverse Orientierung

Im vorherigen Abschnitt haben wir einen geometrischen Ansatz verwendet, um das Problem der inversen Position zu lösen. Dies gibt die Werte der ersten drei Gelenkvariablen an, die einer bestimmten Position des Handgelenks entsprechen. Das Problem der inversen Orientierung besteht nun darin, die Werte der letzten drei Gelenkvariablen zu finden, die einer gegebenen Orientierung in Bezug auf den Rahmen $\{0\}$ entsprechen. Für ein sphärisches Handgelenk kann dies als das Problem interpretiert werden, einen Satz von Euler-Winkeln zu finden, die einer gegebenen Rotationsmatrix R entsprechen. Denken Sie daran, dass Gleichung (3.32) zeigt, dass die für das sphärische Handgelenk erhaltene Rotationsmatrix dieselbe Form wie die Rotation hat Matrix für die Euler-Transformation, angegeben in (2.52). Daher können wir die in Abschnitt 2.5.1 entwickelte Methode verwenden, um die drei Gelenkwinkel des sphärischen Handgelenks zu ermitteln. Insbesondere lösen wir mithilfe der Gleichungen (2.54) – (2.59) nach den drei Euler-Winkeln γ , δ , ϵ und verwenden dann die Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= \gamma, \\ \gamma_5 &= \delta, \gamma_6 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Beispiel 4.2 Gelenkmanipulator mit sphärischem Handgelenk Die DH-

Parameter für die in Abbildung 4.2 gezeigte Rahmenzuordnung sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Durch Multiplikation der entsprechenden A_i -Matrizen erhält man die Matrix R_0 für den Gelenk- oder Ellenbogenmanipulator als

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & \gamma c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & \gamma s_1 s_{23} & c_1 \\ \gamma \gamma & s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \gamma \\ 0 & \gamma & \gamma \\ 0 & \gamma & \gamma \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

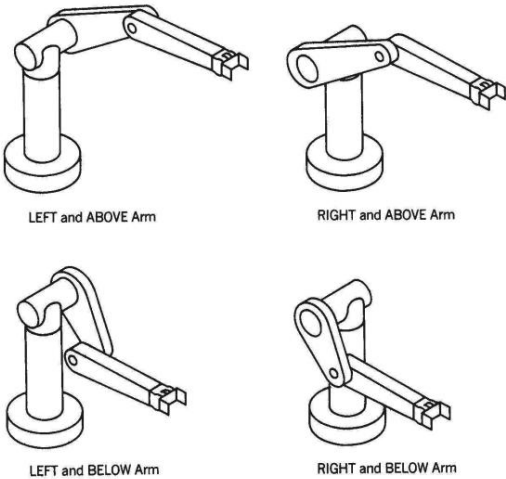


Abbildung 4.9: Vier Lösungen der inversen Positionskinetik für den PUMA-Manipulator.

Tabelle 4.1: Verbindungsparameter für den Gelenkmanipulator aus Abbildung 4.2.

Link	a_i	γ_i	d_i	θ_i	Variable
1	a_1	γ_1	d_1	θ_1	
2,3	a_2	γ_2	d_2	θ_2	
	a_3	γ_3	d_3	θ_3	

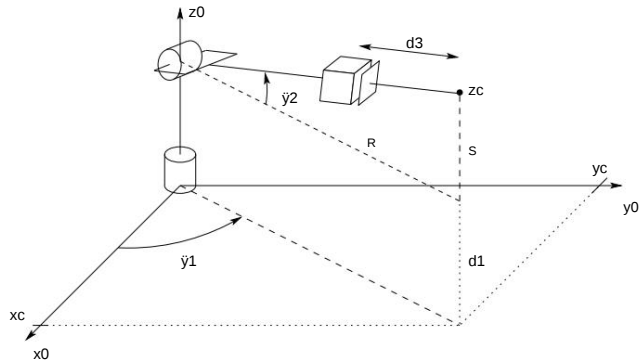


Abbildung 4.10: Sphärischer Manipulator.

Die Matrix R_6^3 = $A_4 A_5 A_6$ ist gegeben als

$$R_6^3 = \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 & y_4 s_4 s_6 & y_4 c_4 s_5 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 & c_4 s_5 & y_4 s_4 s_5 c_6 & s_4 s_5 \\ y_4 s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & y_4 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Die Gleichung, die nun für die letzten drei Variablen gelöst werden muss, lautet daher

$$R_6^3 = (R_0^3)^T R \quad (4.38)$$

und die Euler-Winkelösung kann auf diese Gleichung angewendet werden. Zum Beispiel die drei Gleichungen Die durch die dritte Spalte in der obigen Matrixgleichung gegebenen Werte sind gegeben durch

$$c_4 s_5 = c_1 c_2 s_3 r_{13} + s_1 c_2 s_3 r_{23} + s_2 s_3 r_{33} \quad (4.39)$$

$$s_4 s_5 = y_1 c_1 s_2 s_3 r_{13} + y_1 s_1 s_2 s_3 r_{23} + c_2 s_3 r_{33} \quad (4.40)$$

$$c_5 = s_1 r_{13} + y_1 c_1 r_{23} \quad (4.41)$$

Wenn also nicht beide Ausdrücke (4.39), (4.40) Null sind, dann erhalten wir y_5 aus (2.54) und (2.55) als

$$y_5 = A \tan \frac{s_1 r_{13} + y_1 c_1 r_{23}}{c_1 r_{23} \pm 1 (s_1 r_{13} + y_1 c_1 r_{23})} \quad (4.42)$$

Wenn in (4.42) die positive Quadratwurzel gewählt wird, dann sind y_4 und y_6 durch (2.56) und (2.57) gegeben, bzw. als

$$y_4 = A \tan \frac{c_1 c_2 s_3 r_{13} + s_1 c_2 s_3 r_{23} + s_2 s_3 r_{33}}{y_1 c_1 s_2 s_3 r_{13} + y_1 s_1 s_2 s_3 r_{23} + c_2 s_3 r_{33}} \quad (4.43)$$

$$y_6 = A \tan (y_5 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} + y_1 c_1 r_{22}) \quad (4.44)$$

Die anderen Lösungen erhält man analog. Wenn $s_5 = 0$, dann sind die Gelenkachsen z_3 und z_5 kollinear. Dies ist eine singuläre Konfiguration und nur die Summe $y_4 + y_6$ kann bestimmt werden. Eine Lösung besteht darin, y_4 willkürlich zu wählen und dann y_6 mithilfe von (2.62) oder (2.64) zu bestimmen.

Beispiel 4.3 Zusammenfassung der Ellenbogenmanipulatorlösung

Um die vorangegangene Entwicklung zusammenzufassen, schreiben wir eine Lösung für die Umkehrung auf Kinematik des in Abbildung 4.2 gezeigten Ellenbogenmanipulators mit sechs Freiheitsgraden keine Gelenkversätze und ein kugelförmiges Handgelenk.

Gegeben

$$o = \begin{pmatrix} y_{oje} \\ y_{oz} \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_{ox} \\ y_{oy} \\ y_{oz} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \quad y \quad (4.45)$$

dann mit

$$x_c = o_x y_{d6r13} \quad (4.46)$$

$$y_c = o_y y_{d6r23} \quad z_c = \quad (4.47)$$

$$o_z y_{d6r33} \quad (4.48)$$

ein Satz von DH-Gelenkvariablen ist gegeben durch

$$y_1 = A \tan(x_c, y_c) \quad (4.49)$$

$$y_2 = A \tan x \quad \frac{z_c^2 + J_c^2 y_{d2}^2}{2}, z_c y_{d2} A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \quad (4.50)$$

$$y_3 = A \tan D, \pm 1 y_{d2} \quad \text{wobei } D = \frac{x_c^2 + J_c^2 y_{d2}^2 + z_c^2 y_a^2 + y_a^2}{2a_2 a_3} \quad (4.51)$$

$$y_4 = A \tan(c_1 c_2 s_3 r_{13} + s_1 c_2 s_3 r_{23} + s_2 s_3 r_{33}, y_1 c_1 s_2 s_3 r_{13} + y_1 s_1 s_2 s_3 r_{23} + c_2 s_3 r_{33}) y_5 \quad (4.52)$$

$$= A \tan \frac{s_1 r_{13} + y_1 c_1 r_{23}}{c_1 r_{23} \pm 1 (s_1 r_{13} + y_1 c_1 r_{23})} \quad (4.53)$$

$$y_6 = A \tan(y_5 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} + y_1 c_1 r_{22}) \quad (4.54)$$

Die anderen Lösungsmöglichkeiten bleiben als Übung übrig (Aufgabe 4-11).

Beispiel 4.4 SCARA-Manipulator

Als weiteres Beispiel betrachten wir den SCARA-Manipulator, dessen Vorwärtskinematik ist definiert durch T_4^0 aus (3.49). Die inverse Kinematik ist dann als Lösungsmenge von gegeben Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} c_1 s_2 c_4 + s_1 s_2 s_4 & y_1 c_1 s_2 c_4 & y_1 s_1 s_2 c_4 & 0 \\ s_1 s_2 c_4 + c_1 s_2 s_4 & y_1 s_1 s_2 c_4 & y_1 c_1 s_2 c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_1 \\ a_1 s_1 + a_2 s_1 \\ y_1 d_3 + y_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{o1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Wir stellen zunächst fest, dass nicht jedes mögliche H aus $SE(3)$ eine Lösung von (4.55) zulässt, da das SCARA nur vier Freiheitsgrade hat. Tatsächlich können wir leicht erkennen, dass es keine Lösung von (4.55) gibt, es sei denn, R hat die Form

$$R = \begin{pmatrix} c\tilde{y} & s\tilde{y} & 0 \\ s\tilde{y} & c\tilde{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

und wenn dies der Fall ist, wird die Summe $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_4$ bestimmt durch

$$\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_4 = \tilde{y} = A \tan(r_{11}, r_{12}). \quad (4.57)$$

Projiziert man die Manipulatorkonfiguration auf die $x_0 y_0$ -Ebene, erhält man sofort die Situation von Abbildung 4.11.

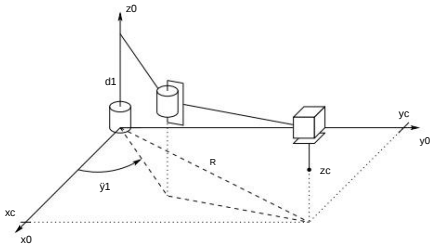


Abbildung 4.11: SCARA-Manipulator.

Wir sehen daraus das

$$\tilde{y}_2 = A \tan c_2, \pm \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \quad (4.58)$$

Wo

$$c_2 = \frac{z_2^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \quad (4.59)$$

$$\tilde{y}_1 = A \tan(o_x, o_y) \tilde{y} A \tan(a_1 + a_2c_2, a_2s_2). \quad (4.60)$$

Wir können dann $\tilde{y}_4$ aus (4.57) bestimmen als

$$\begin{aligned} \tilde{y}_4 &= \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \tilde{y} \\ &= \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \tilde{y} A \tan(r_{11}, r_{12}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Schließlich ist d_3 gegeben als

$$d_3 = o_z + d_4. \quad (4.62)$$

y