

5. Einführung in die Robotergeometrie und -kinematik

Ziel dieses Kapitels ist es, die grundlegende Terminologie und Notation der Robotergeometrie und -kinematik einzuführen und die Methoden zur Analyse und Steuerung von Roboter manipulatoren zu diskutieren. Der Umfang dieser Diskussion wird sich größtenteils auf Roboter mit planarer Geometrie beschränken. Die Analyse von Manipulatoren mit dreidimensionaler Geometrie findet sich in jedem Robotiktext¹.

5.1 Einige Definitionen und Beispiele

Mit dem Begriff „mechanisches System“ beschreiben wir ein System oder eine Ansammlung starrer oder flexibler Körper, die durch Gelenke miteinander verbunden sein können. Ein *Mechanismus* ist ein mechanisches System, dessen Hauptzweck darin besteht, Bewegungen und/oder Kräfte von einer oder mehreren Quellen auf einen oder mehrere Ausgänge zu übertragen. Eine *Verbindung* ist ein mechanisches System, das aus starren Körpern, sogenannten *Verbindungen*, besteht, die entweder durch Bolzengelenke oder Gleitgelenke verbunden sind. In diesem Abschnitt betrachten wir mechanische Systeme, die aus starren Körpern bestehen, betrachten aber auch and

Freiheitsgrade eines Systems

Die Anzahl der unabhängigen Variablen (oder Koordinaten), die zur vollständigen Angabe erforderlich sind die Konfiguration des mechanischen Systems.

Während die obige Definition der Anzahl der Freiheitsgrade auf der Notwendigkeit beruht, ein mechanisches System zu beschreiben oder zu analysieren, ist sie auch für die Steuerung oder den Antrieb eines mechanischen Systems sehr wichtig. Es ist auch die Anzahl der unabhängigen Eingaben, die erforderlich sind, um alle starren Körper im mechanischen System anzutreiben.

Beispiele:

- (a) Ein Punkt auf einer Ebene hat zwei Freiheitsgrade. Ein Punkt im Raum hat drei Grad Freiheit.
- (b) Ein Pendel, das nur in einer Ebene schwingen kann, hat einen Freiheitsgrad.

¹Insbesondere zwei Bücher bieten eine hervorragende Behandlung und halten gleichzeitig die Mathematik auf einem sehr einfachen Niveau: (a) Craig, JJ *Introduction to Robotics*, Addison-Wesley, 1989; und (b) Paul, R., *Robot Manipulators, Mathematics, Programming and Control*, The MIT Press, Cambridge, 1981.

- (c) Ein ebener starrer Körper (oder eine Schicht) hat drei Freiheitsgrade. Wenn Sie darüber nachdenken, gibt es zwei Übersetzungen und eine zusätzliche, wenn Sie Rotationen einbeziehen.
- (d) Das mechanische System bestehend aus zwei ebenen starren Körpern, die durch ein Bolzgelenk verbunden sind, hat vier Freiheitsgrade. Für die Angabe der Position und Ausrichtung des ersten starren Körpers sind drei Variablen erforderlich. Da sich der zweite relativ zum ersten dreht, benötigen wir eine zusätzliche Variable, um seine Bewegung zu beschreiben. Somit beträgt die Gesamtzahl der unabhängigen Variablen bzw. die Zahl der Freiheitsgrade vier. (e) Ein starrer Körper in drei Dimensionen hat sechs Freiheitsgrade. Es gibt drei translatorische Freiheitsgrade. Darüber hinaus gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, einen starren Körper zu drehen. Betrachten Sie beispielsweise Drehungen um die x-, y- und z -Achse. Es stellt sich heraus, dass jede Drehung eines starren Körpers durch aufeinanderfolgende Drehungen um die x-, y- und z -Achse erreicht werden kann. Betrachtet man die drei Drehwinkel als die Variablen, die die Drehung des starren Körpers beschreiben, so erkennt man, dass es drei Rotationsfreiheitsgrade gibt.
- (f) Zwei starre Körper in drei Dimensionen, die durch ein Bolzgelenk verbunden sind, haben sieben Freiheitsgrade. Für die Angabe der Position und Ausrichtung des ersten starren Körpers sind sechs Variablen erforderlich. Da sich der zweite relativ zum ersten dreht, benötigen wir eine zusätzliche Variable, um seine Bewegung zu beschreiben. Somit die Gesamtzahl der unabhängigen Variablen oder die Anzahl der Grade der Freiheit ist sieben.

Kinematische Kette

Ein System starrer Körper, die durch Gelenke miteinander verbunden sind. Eine Kette heißt geschlossen, wenn sie eine geschlossene Schleife bildet. Eine Kette, die nicht geschlossen ist, wird als offene Kette bezeichnet.

Serienkette

Wenn jedes Glied einer offenen Kette außer dem ersten und dem letzten Glied mit zwei anderen verbunden ist Verknüpft man sie, spricht man von einer seriellen Kette.

Ein Beispiel für eine serielle Kette ist im Schaltplan des Roboters der PUMA 560-Serie2 zu sehen, einem Industrieroboter von Unimation Inc. (siehe Abbildung 1). Der Rumpf ist an einem festen Tisch oder dem Boden verschraubt. Die Schulter dreht sich relativ zum Rumpf um eine vertikale Achse. Der Oberarm dreht sich relativ zur Schulter um eine horizontale Achse. Diese Drehung ist die Rotation des Schultergelenks. Der Unterarm dreht sich relativ zum Oberarm um eine horizontale Achse (den Ellenbogen). Schließlich besteht das Handgelenk aus einer Anordnung von drei starren Körpern mit drei

2Die Programmable Universal Machine for Assembly (PUMA) wurde 1978 von Unimation Inc. unter Verwendung einer Reihe von Spezifikationen von General Motors entwickelt.

zusätzliche Drehungen. Somit besteht der Roboterarm aus sieben starren Körpern (der erste ist fest) und sechs Gelenken, die die starren Körper verbinden.

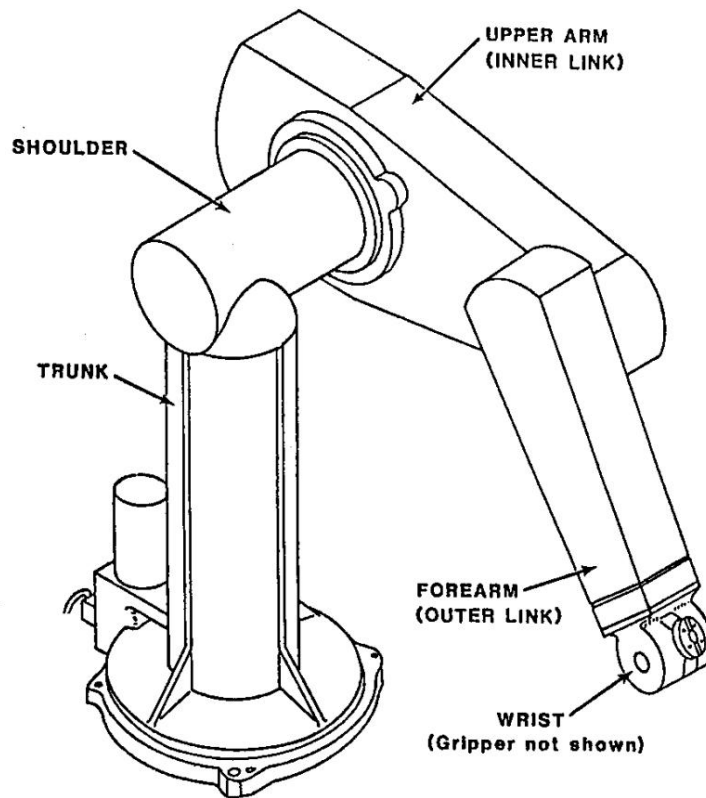


Abbildung 1 Der Roboterarm PUMA 560 mit sechs Freiheitsgraden.

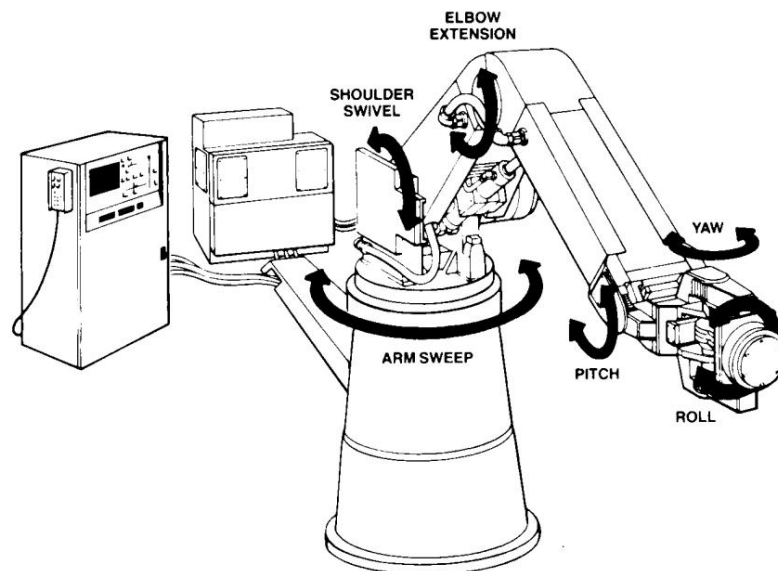


Abbildung 2: Der T3-Roboterarm mit sechs Freiheitsgraden.

Ein weiteres Schema eines Industrieroboterarms, des T3 von Cincinnati Milacron, ist in Abbildung 2 dargestellt. Auch hier ist es möglich, ihn als eine Ansammlung von sieben starren Körpern (der erste ist fest) zu modellieren, die durch sechs Gelenke verbunden sind³.

Arten von Gelenken

Es gibt hauptsächlich vier Arten von Gelenken, die in Roboter manipulatoren zu finden sind:

• Revolüt-, Dreh- oder Stiftgelenk (R) • Prisma-

oder Schiebegelenk (P) • Kugel- oder

Kugelgelenk (S) • Spiral- oder

Schraubgelenk (H)

Das Drehgelenk ermöglicht eine Drehung zwischen den beiden Verbindungsgliedern. Das beste Beispiel hierfür ist das Scharnier, mit dem eine Tür am Rahmen befestigt wird. Das Prismengelenk ermöglicht eine reine Translation zwischen den beiden Verbindungsgliedern. Die Verbindung zwischen einem Kolben und einem Zylinder in einem Verbrennungsmotor oder einem Kompressor erfolgt über eine Prismenverbindung. Das Kugelgelenk zwischen zwei Gliedern ermöglicht, dass sich das erste Glied gegenüber dem zweiten auf alle möglichen Arten dreht. Das beste Beispiel hierfür ist der menschliche Körper. Die Schulter- und Hüftgelenke, auch Kugelgelenke genannt, sind Kugelgelenke. Das Schraubgelenk ermöglicht eine Schraubenbewegung zwischen den beiden Verbindungskörpern. Ein gutes Beispiel hierfür ist die Relativbewegung zwischen einer Schraube und einer Mutter.

Planare Kette

Alle Glieder einer ebenen Kette müssen sich in oder parallel zu derselben Ebene bewegen.

Eine ebene Kette kann nur prismatische und umlaufende Verbindungen zulassen. Tatsächlich müssen die Achsen der Drehgelenke senkrecht zur Kettenebene sein, während die Achsen der Prismengelenke parallel zur Kettenebene sein oder in dieser liegen müssen.

Ein Beispiel für eine Planarkette ist in Abbildung 3 dargestellt. Fast alle Verbrennungsmotoren verwenden einen Schubkurbelmechanismus. Der hohe Druck der expandierenden Gase im Brennraum wird zur Translation des Kolbens genutzt und der Mechanismus wandelt diese Translationsbewegung in die Drehbewegung der Kurbel um. Dieses mechanische System besteht aus drei Drehgelenken und einem Prismengelenk.

Das Beispiel in Abbildung 3 ist eine planare, geschlossene kinematische Kette. Beispiele für planare, serielle Ketten sind in den Abbildungen 4 und 5 dargestellt.

³Dies ist ein praktisches Modell. Zur Modellierung der Kopplung zwischen dem Aktuator, der das Ellenbogengelenk antreibt, und dem Ellenbogengelenk ist ein genaueres kinematisches Modell erforderlich.

Konnektivität eines Gelenks

Die Anzahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers, der über das Gelenk mit einem festen starren Körper verbunden ist.

Das Revoluten-, Prismen- und Spiralgelenk hat eine Konnektivität von 1. Das Kugelgelenk hat eine Konnektivität von 3. Manchmal verwendet man anstelle der Konnektivität eines Gelenks den Begriff „Freiheitsgrad eines Gelenks“.

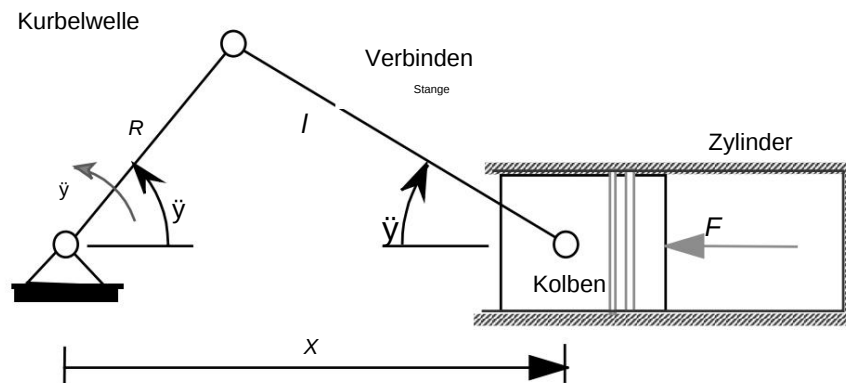


Abbildung 3 Ein Schema eines Schubkurbelmechanismus

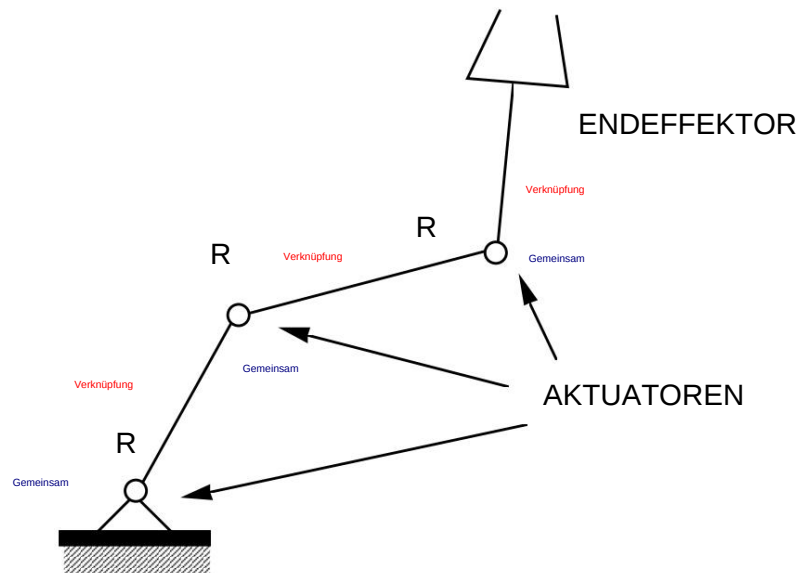


Abbildung 4 Ein Schema eines planaren Manipulators mit drei Drehgelenken

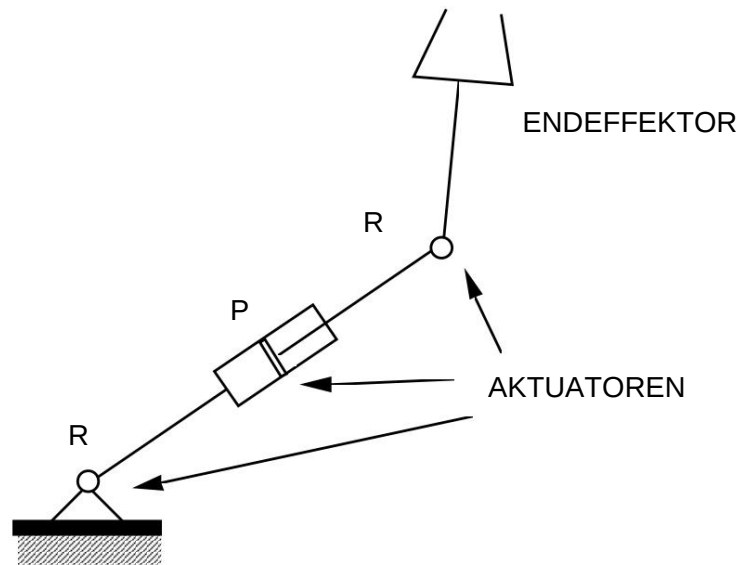


Abbildung 5 Ein Schema eines planaren Manipulators mit zwei Drehgelenken und einem prismatischen Gelenk

Mobilität

Die Beweglichkeit einer Kette ist die Anzahl der Freiheitsgrade der Kette.

In den meisten Büchern wird für die Mobilität der Begriff „Anzahl der Freiheitsgrade“ verwendet. In einer seriellen Kette lässt sich die Beweglichkeit der Kette leicht berechnen. Wenn es n Gelenke gibt und Gelenk i eine Konnektivität f_i hat,

$$M = 6 - \sum_{i=1}^n f_i$$

Die meisten Industrieroboter verfügen entweder über rotierende oder prismatische Gelenke ($f_i = 1$) und daher ist die Beweglichkeit bzw. die Anzahl der Freiheitsgrade des Roboterarms auch gleich der Anzahl der Gelenke.

Manchmal wird ein Roboter mit Freiheitsgrad n oder ein Roboter mit Mobilität n auch als **Roboter** mit n -Achse bezeichnet.

Da ein starrer Körper im Raum sechs Freiheitsgrade hat, sind die gängigsten Roboter so konstruiert, dass sie sechs Gelenke haben. Auf diese Weise kann der Endeffektor bzw. das Glied, das am weitesten von der Basis entfernt ist, in eine beliebige Position oder Ausrichtung (innerhalb eines gewissen Bereichs) gebracht werden. Soll der Endeffektor jedoch in einer Ebene bewegt werden, muss der Roboter nur über drei Freiheitsgrade verfügen. Zwei Beispiele⁴ von planaren Robotern mit drei Freiheitsgraden (technisch gesprochen: Mobilitätsroboter mit drei Freiheitsgraden) sind in den Abbildungen 4 und 5 dargestellt.

⁴Beachten Sie, dass wir das Öffnen und Schließen des Greifers nicht als Freiheitsgrad zählen. Der Greifer ist normalerweise vollständig geöffnet oder vollständig geschlossen und wird nicht wie die anderen Gelenke kontinuierlich gesteuert. Auch ist die Freiheit des Greifers nicht an der Positionierung und Ausrichtung eines vom Greifer gehaltenen Teils beteiligt.

Wenn in der kinematischen Kette geschlossene Schleifen vorhanden sind (d. h. die Kette ist nicht mehr seriell oder sogar offen), ist es schwieriger, die Anzahl der Freiheitsgrade oder die Mobilität des Roboters zu bestimmen. Aber es gibt eine einfache Formel, die man zu diesem Zweck ableiten kann.

Sei n die Anzahl der beweglichen Verbindungen und g die Anzahl der Gelenke, wobei f_i die Konnektivität des Gelenks i ist. Jeder starre Körper hat sechs Grad, wenn wir räumliche Bewegungen betrachten. Gäbe es keine Gelenke, hätte das System $6n$ Freiheitsgrade, da es n bewegliche starre Körper gibt. Die Wirkung jedes Gelenks besteht darin, die relative Bewegung der beiden Verbindungskörper einzuschränken.

Wenn das Gelenk über eine Konnektivität f_i verfügt, erlegt es der relativen Bewegung $(6-f_i)$ Beschränkungen auf. Mit anderen Worten: Da es für einen Körper fünf verschiedene Arten gibt, sich relativ zu einem anderen zu bewegen, gibt es auch $(6-f_i)$ verschiedene Arten, in denen der Körper daran gehindert wird, sich relativ zu einem anderen zu bewegen. Daher ist die Anzahl der Freiheitsgrade bzw. die Beweglichkeit einer Kette (einschließlich des Sonderfalls einer seriellen Kette) gegeben durch:

$$M = 6n - \sum_{i=1}^G f_i$$

oder,

$$M = 6n - \sum_{i=1}^G f_i$$

(2)

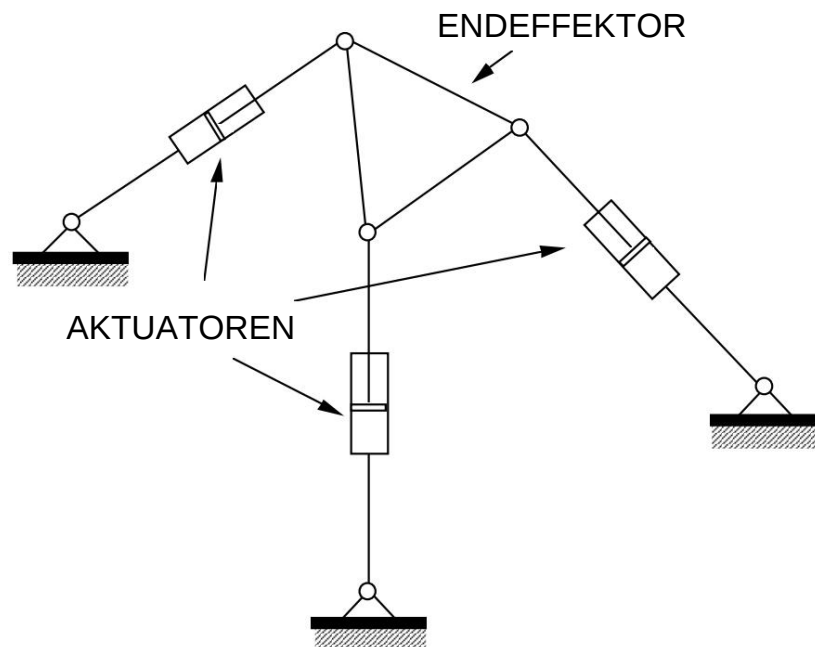


Abbildung 6 Ein planarer Parallelmanipulator.

Im Sonderfall der planaren Bewegung wird diese Gleichung wie folgt geändert, da jeder uneingeschränkte starre Körper drei Freiheitsgrade hat:

$$M \cdot n \cdot g \cdot (\quad) \ddot{y} = 1 \quad (3)$$

Beispiel 1

Da in den Abbildungen 4 und 5 $n=g=3$ ist, reduziert sich Gleichung (3) auf den Sonderfall von Gleichung (1). Und da $f_1 = f_2 = f_3 = 1$ und $M=g$.

Beispiel 2

Bei dem in Abbildung 3 gezeigten Schubkurbelmechanismus sind $n=3$ und $g=4$. Da es sich um einen planaren Mechanismus handelt, verwenden wir Gleichung (2). Alle vier Gelenke haben die Konnektivität eins: $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$ und $M=1$.

Beispiel 3

Betrachten Sie den in Abbildung 6 gezeigten Parallelmanipulator. Hier ist $n = 7$, $g=9$ und $f_i=1$. Entsprechend Gleichung (3), $M=3$. Entsprechend sind im Manipulator drei Aktoren vorhanden. Vergleichen Sie diese Anordnung mit der in den Abbildungen 4 und 5 gezeigten Anordnung. Die drei Aktuatoren sind in Abbildung 6 parallel montiert. In den Abbildungen 4 und 5 sind sie „sequentiell“ in a montiert serielle Mode.

Die Stewart-Plattform

Das Stewart-Gough- oder Stewart Platform5- Gerät ist eine kinematische Kette mit sechs Freiheitsgraden (Mobilität sechs) und geschlossenen Kreisläufen. Die kinematische Kette besteht aus einer Basis und einer beweglichen Plattform, die jeweils ein räumliches Sechseck darstellen. Siehe Abbildung 7. Jeder Scheitelpunkt des Basissechsecks ist durch ein Bein mit einem Scheitelpunkt des Sechsecks der beweglichen Plattform verbunden. Ebenso ist jeder Scheitelpunkt des beweglichen Sechsecks durch einen Schenkel mit einem Scheitelpunkt des Basissechsecks verbunden. Es gibt sechs solcher Beine. Jedes Bein verfügt über eine serielle Kette, die aus zwei Drehgelenken mit sich schneidenden Achsen, einem Prismengelenk und einem Kugelgelenk besteht. Typischerweise werden die p

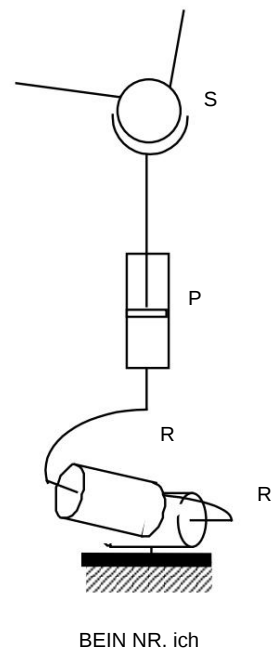
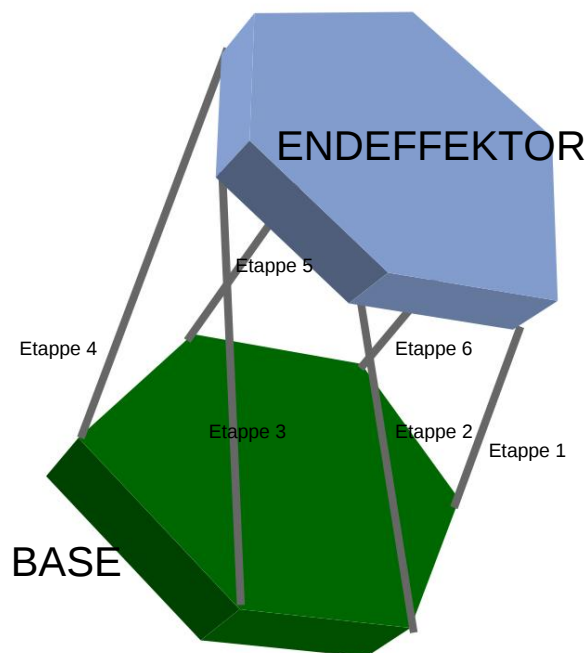
Die Mobilität einer Stewart-Plattform kann leicht mit sechs verifiziert werden. Jedes Bein hat drei Glieder und vier Gelenke. Wenn wir die bewegliche Plattform mit einbeziehen,

$$n = 6 \times 3 + 1 = 19.$$

5D. Stewart, „A Platform with Six Degrees of Freedom“, *The Institution of Mechanical Engineers, Proceedings* 1965-66, Bd. 180 Teil 1, Nr. 15, Seiten 371-386.



(a) Eine Werkzeugmaschine basierend auf der Stewart-Plattform (Ingersoll Rand)6



(b) Ein Schema, das die sechs Beine (links) und die $RRPS$ - Kette (rechts) zeigt.

Abbildung 7 Die Stewart-Plattform

6M. Valenti, „Machine Tools Get Smarter“, *Mechanical Engineering*, Band 117, Nr. 11, November 1995.

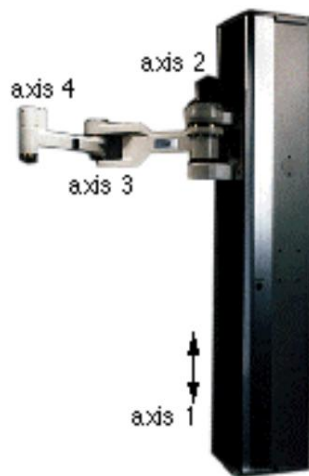
Die Verbindung von Revolute und Prismengelenk ist eins. Die Konnektivität des Kugelgelenks beträgt drei. Da es 6×2 Drehgelenke, 6 Prismengelenke und 6 Kugelgelenke gibt,

$$\dot{y} = \dot{F}_{\text{pr}} + \sum_{i=1}^6 \dot{F}_{\text{rev}} + \sum_{j=1}^6 \dot{F}_{\text{ball}} = 12 + 6 + 6 = 36$$

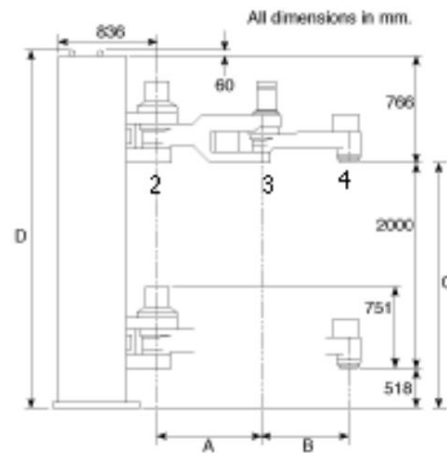
Gemäß Gleichung (3)

$$M = 6 - 19 = 24 + 36 = 6$$

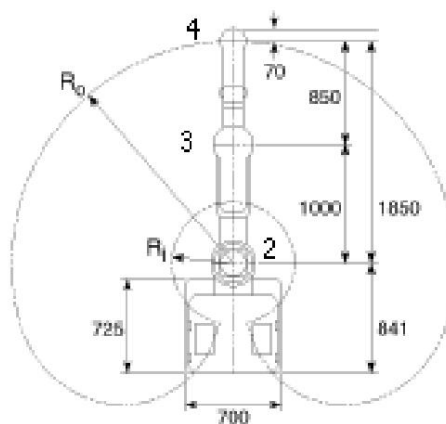
Die Stewart-Plattform verfügt über Aktuatoren für alle sechs prismatischen Gelenke und ermöglicht daher die Steuerung aller sechs Freiheitsgrade.



(a) Der Palettierer Adept 1850



(b) Seitenansicht (Achsen 2-4 sind nummeriert)



(c) Draufsicht (Achsen 2-4 sind nummeriert)

Abbildung 8 Der Palettierer Adept

1850 Dieser SCARA-Manipulator verfügt über vier Freiheitsgrade. Gelenk 1 ist ein Schiebegelenk, das den Manipulatorarm nach oben oder unten trägt. Die Gelenke 2-4 sind Drehgelenke mit vertikaler Achse.

5.2 Geometrie planarer Roboterarmen

Die mathematische Modellierung räumlicher Zusammenhänge ist recht aufwändig. Es ist sinnvoll, mit planaren Robotern zu beginnen, da die Kinematik planarer Mechanismen im Allgemeinen viel einfacher zu analysieren ist. Außerdem veranschaulichen planare Beispiele die grundlegenden Probleme, die bei der Konstruktion, Analyse und Steuerung von Robotern auftreten, ohne dass man sich zu tief in die Mathematik vertiefen muss. Während es sich bei den Beispielen, die wir diskutieren werden, um kinematische Ketten handelt, die planar sind, sind alle in diesem Abschnitt vorgestellten Definitionen und Ideen allgemein und erstrecken sich auf die allgemeinsten räumlichen Mechanismen.

Wir beginnen mit dem Beispiel des Planarmanipulators mit drei Drehgelenken. Der Manipulator wird als planarer $3R$ -Manipulator bezeichnet. Während es möglicherweise keine Industrieroboter mit drei Freiheitsgraden (DOF) mit dieser Geometrie gibt, ist die planare $3R$ -Geometrie in vielen Roboterarmen zu finden. Beispielsweise können die Schulterdrehung, die Ellenbogenstreckung und die Neigung des Cincinnati Milacron T3-Roboters (Abbildung 2) als planare $3R$ -Kette beschrieben werden. Ähnlich verhält es sich bei einem SCARA-Manipulator mit vier Freiheitsgraden (Abbildung 8): Wenn wir das prismatische Gelenk zum Absenken oder Anheben des Greifers ignorieren, bilden die anderen drei Gelenke eine planare $3R$ -Kette. Daher ist es aufschlussreich, den planaren $3R$ -Manipulator als Beispiel zu untersuchen.

Um die Geometrie des planaren $3R$ -Roboters anzugeben, benötigen wir drei Parameter: l_1 , l_2 und l_3 . Dies sind die drei Linklängen. In Abbildung 9 sind die drei Gelenkwinkel mit θ_1 , θ_2 und θ_3 bezeichnet. Diese sind offensichtlich variabel. Die genauen Definitionen für die Verbindungslängen und Gelenkwinkel sind wie folgt. Für jedes Paar benachbarter Achsen können wir eine gemeinsame Normale oder Senkrechte definieren zwischen den Achsen.

Die i -te gemeinsame Normale ist die Senkrechte zwischen den Achsen für Gelenk i und Gelenk $i+1$. Die i -te Verbindungslänge ist die Länge der i -ten gemeinsamen Normalen oder der Abstand zwischen den Achsen für Gelenk i und Gelenk $i+1$.

Der i -te Gelenkwinkel ist der Winkel zwischen der $(i-1)$ -ten gemeinsamen Normalen und der i -ten gemeinsamen Normalen, gemessen gegen den Uhrzeigersinn von der $(i-1)$ -ten gemeinsamen Normalen zur i -ten allgemein normal.

Beachten Sie, dass hinsichtlich der Verbindungslänge des distalsten Verbindungsglieds und des Gelenkwinkels des proximalsten Verbindungsglieds einige Unklarheiten bestehen. Wir definieren die Verbindungslänge des am weitesten distal gelegenen Verbindungsglieds von der am weitesten distal gelegenen Gelenkachse bis zu einem Referenzpunkt oder einem Werkzeugpunkt am Endeffektor⁷. Im Allgemeinen ist dies der Mittelpunkt des Greifers oder der Endpunkt des Werkzeugs. Da es keine nullte gemeinsame Normale gibt, messen wir den ersten Gelenkwinkel von einer geeigneten Referenzlinie aus. Hier haben wir die x -Achse eines bequem definierten festen Koordinatensystems.

⁷Der Referenzpunkt wird oft als Tool Center Point (TCP) bezeichnet.

Ein weiterer Satz nützlicher Variablen ist der Koordinatensatz für den Endeffektor.

Diese Koordinaten definieren die Position und Ausrichtung des Endeffektors. Durch eine geeignete Wahl eines Referenzpunkts am Endeffektor können wir die Position des Endeffektors mithilfe der Koordinaten des Referenzpunkts (x, y) und die Ausrichtung mithilfe des Winkels $\dot{y}$ beschreiben. Die drei Endeffektorkoordinaten $(x, y, \dot{y})$ geben die Position und Ausrichtung des Endes vollständig an Effektor⁸.

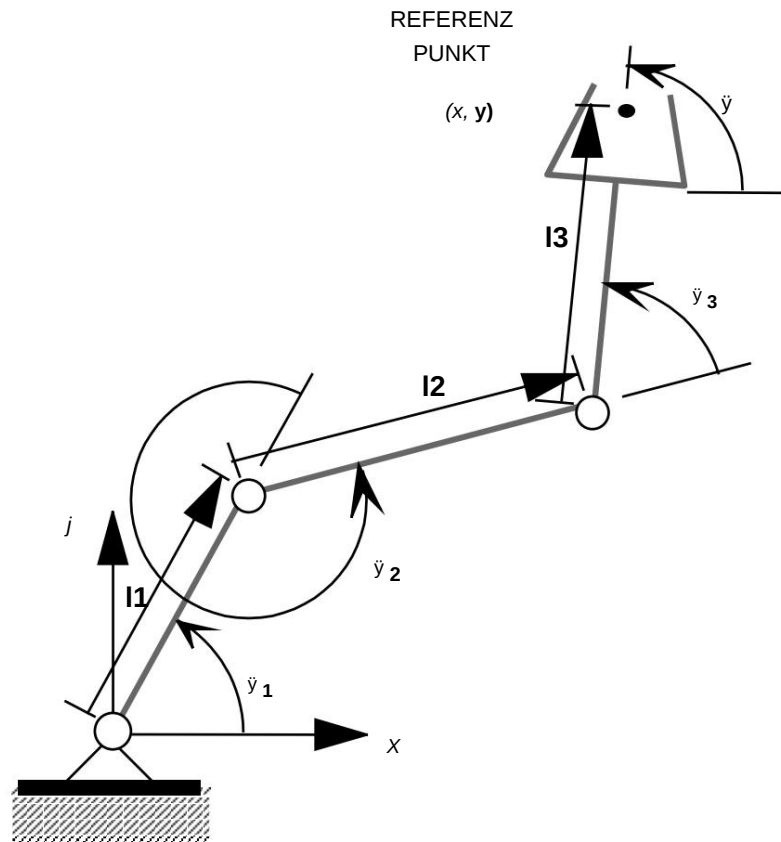


Abbildung 9: Die Gelenkvariablen und Verbindungslängen für einen 3R- Planarmanipulator

Betrachten Sie als weiteres Beispiel den zylindrischen Roboter mit drei Freiheitsgraden in Abbildung 10. Wenn wir das ignorieren Die Hubfreiheit, die Drehung der Basis und die Streckung des Arms ergeben den in Abbildung 11 gezeigten Roboter mit zwei Freiheitsgraden, den wir den *RP*- Manipulator nennen können. Es besteht aus einem Drehgelenk und einem Prismengelenk, wie in der Abbildung dargestellt. $\dot{y}_1$, die Basisdrehung, und d_2 , die Armstreckung, sind die beiden Gelenkvariablen. Beachten Sie, dass es im 3R- Manipulator keine konstanten Parameter wie die drei Verbindungslängen gibt. Die Gelenkvariable $\dot{y}_1$ ist wie zuvor definiert. Da es kein nulltes gemeinsames Normal gibt,

⁸Die Beschreibung der Position und Orientierung eines dreidimensionalen starren Körpers ist deutlich komplizierter. Für einen räumlichen Manipulator würde ein typischer Satz von Endeffektorkoordinaten drei Variablen (x, y, z) für die Position und drei Euler-Winkel $(\dot{y}, \ddot{y}, \ddot{y})$ für die Ausrichtung umfassen.

Wir messen den Gelenkwinkel von der x -Achse aus, die wir horizontal gewählt haben. d_2 ist definiert als der Abstand von Gelenkachse 1 zum Referenzpunkt am Endeffektor. Wie im vorherigen Beispiel handelt es sich bei den Endeffektorkoordinaten um Variablen, die die Position und Ausrichtung des Endeffektors vollständig angeben. In der Abbildung sind sie $(x, y, \ddot{y})$.

Abschließend betrachten wir einen kartesischen Roboter, der aus zwei rechtwinkligen prismatischen Gelenken besteht. Die PP- Kette findet sich in XY-Tischen, Plottern und Fräsmaschinen. Ein Schema ist in Abbildung 12 dargestellt. Der einfachste räumliche Manipulator basiert auf der PPP- Kette, die über ein drittes prismatisches Gelenk verfügt. Die drei Gelenkachsen stehen zueinander orthogonal. Der Gantry-Roboter in Abbildung 13 hat diese Geometrie. Wenn Sie den vertikalen Freiheitsgrad nach oben/unten ignorieren, handelt es sich um



Abbildung 10 Der zylindrische Roboter RT3300 (Seiko)

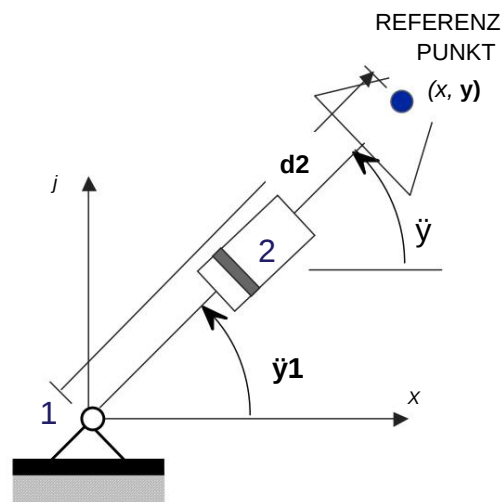


Abbildung 11 Die Gelenkvariablen und Verbindungsängen für einen RP- Planarmanipulator

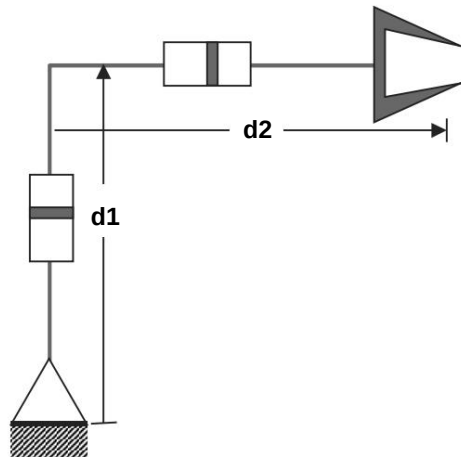


Abbildung 12 Die Gelenkvariablen für einen PP- Planarmanipulator

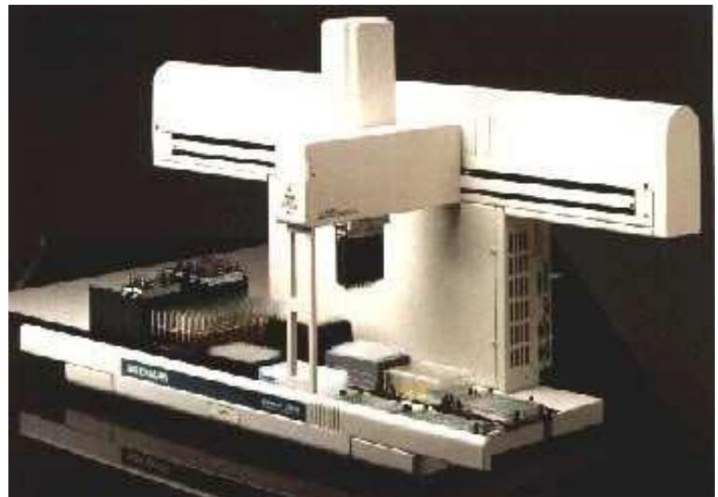
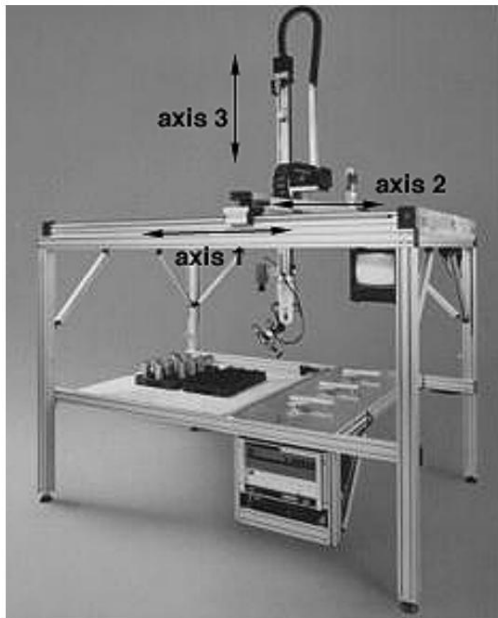


Abbildung 13 Der Roboterarm G365 Gantry (CRS Robotics) links und der Biomek 2000 Laboratory Automation Workstation (Beckman Coulter) auf der rechten Seite, beide verfügen über Werkzeuge am Ende einer PPP- Kette montiert.

Der Endeffektor eines Manipulators, der nur über prismatische Gelenke verfügt, ist darauf beschränkt, in derselben Ausrichtung zu bleiben. Somit umfassen die Endeffektorkoordinaten für den PP- Manipulator nur die Koordinaten des Referenzpunkts auf dem Endeffektor (x, y).

Zusammenfassend haben wir in jedem Fall einen Satz konstanter Parameter definiert, die als *Verbindungsängen* (l_i) und bezeichnet werden. Satz von Gelenkvariablen oder *Gelenkkoordinaten*, bestehend aus Gelenkwinkeln (θ_i) oder Verschiebungen

(di). Wir haben auch eine Reihe von Variablen definiert, die *Endeffektorkoordinaten* genannt werden. Die Verbindungslängen sind konstante Parameter, die die Geometrie des Manipulators definieren. Die Gelenkvariablen definieren die Konfiguration des Manipulators, indem sie die Position jedes Gelenks angeben. Die Endeffektorkoordinaten definieren die Position und Ausrichtung des Endeffektors. Wenn die Gelenkkoordinaten die Konfiguration des Manipulators angeben, sollten sie auch die Position und Ausrichtung des Endeffektors angeben. Daher sollte man eine explizite Abhängigkeit der Endeffektorkoordinaten von den Gelenkkoordinaten erwarten. Obwohl es vielleicht nicht offensichtlich ist, besteht auch eine Abhängigkeit der Gelenkkoordinaten auf die Endeffektorkoordinaten. Der nächste Unterabschnitt befasst sich mit dieser Abhängigkeit und analysiert die Kinematik von Roboterarmen.

5.3 Kinematische Analyse planarer serieller Ketten

Kinematik ist die Lehre von der Bewegung. In diesem Unterabschnitt werden wir die Beziehung zwischen Gelenkbewegungen und Endeffektorbewegungen untersuchen. Genauer gesagt werden wir versuchen, Gleichungen zu entwickeln, die die Abhängigkeit der Endeffektorkoordinaten von den Gelenkkoordinaten und umgekehrt verdeutlichen.

Wir beginnen mit dem Beispiel des planaren 3R- Manipulators. Ausgehend von der grundlegenden Trigonometrie können die Position und Ausrichtung des Endeffektors in Form der Gelenkkoordinaten wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Beachten Sie, dass alle Winkel gegen den Uhrzeigersinn gemessen wurden und angenommen wird, dass die Verbindungslängen von einer Gelenkachse zur unmittelbar distalen Gelenkachse positiv sind.

Gleichung (4) ist ein Satz von drei nichtlinearen Gleichungen, die die Beziehung zwischen Endeffektorkoordinaten und Gelenkkoordinaten beschreiben. Beachten Sie, dass wir explizite Gleichungen für die Endeffektorkoordinaten in Form von Gelenkkoordinaten haben. Um jedoch die Gelenkkoordinaten für einen gegebenen Satz von Endeffektorkoordinaten (x, y, ϕ) zu finden, müssen die nichtlinearen Gleichungen für θ_1, θ_2 und θ_3 gelöst werden.

Die Kinematik des planaren RP -Manipulators ist einfacher zu formulieren. Die Gleichungen lauten:

⁹Die dritte Gleichung ist linear, aber das Gleichungssystem ist nichtlinear.

$$\begin{aligned}
 x_2 &= d_2 \cos \theta_1 \\
 y_2 &= d_2 \sin \theta_1 \\
 \dot{y}_2 &= \dot{y}_1
 \end{aligned} \tag{5}$$

Auch hier werden die Endeffektorkoordinaten explizit als Gelenkkoordinaten angegeben.

Da die Gleichungen jedoch einfacher sind (als in (4)), würde man erwarten, dass die Algebra bei der Lösung der Gelenkkoordinaten anhand der Endeffektorkoordinaten einfacher ist. Beachten Sie, dass es im Gegensatz zu (4) jetzt drei Gleichungen in nur zwei Gelenkkoordinaten gibt, θ_1 und d_2 . Daher können wir im Allgemeinen nicht nach den Gelenkkoordinaten für einen beliebigen Satz von Endeffektorkoordinaten suchen.

Anders ausgedrückt: Der Roboter kann durch die Bewegung seiner beiden Gelenke keine beliebige Position und Ausrichtung des Endeffektors erreichen.

Betrachten wir stattdessen nur die Position des Endeffektors, die durch (x, y) beschrieben wird

Koordinaten des Endeffektor-Werkzeugpunkts oder Referenzpunkts. Wir haben nur zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 x &= d_2 \cos \theta_1 \\
 y &= d_2 \sin \theta_1
 \end{aligned} \tag{6}$$

Unter Berücksichtigung der Endeffektorkoordinaten (x, y) können die Gelenkvariablen wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \pm \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \theta_1 &= \arctan \frac{y}{x}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Beachten Sie, dass wir d_2 auf positive Werte beschränkt haben. Ein negativer d_2 kann physikalisch erreicht werden, indem man dem Endeffektor-Referenzpunkt ermöglicht, durch den Ursprung des xy -Koordinatensystems zu einem anderen Quadranten zu gelangen. In diesem Fall erhalten wir eine andere Lösung:

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \mp \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \theta_1 &= \arctan \frac{y}{x}
 \end{aligned} \tag{8}$$

In beiden Fällen (7-8) ist die Umkehrtangensfunktion mehrwertig¹⁰. Insbesondere,

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi), \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

Wenn wir jedoch θ_1 auf den Bereich $0 < \theta_1 < 2\pi$ beschränken, gibt es einen eindeutigen Wert von θ_1 , der mit dem gegebenen (x, y) und dem berechneten d_2 (für den es zwei Möglichkeiten gibt) übereinstimmt.

¹⁰In Anhang 1 definieren wir eine weitere Umkehrtangensfunktion namens *atan2*, die zwei Argumente, den Sinus und den Kosinus eines Winkels, annimmt und einen eindeutigen Winkel im Bereich $[0, 2\pi)$ zurückgibt.

Das Vorhandensein mehrerer Lösungen ist typisch, wenn wir nichtlineare Gleichungen lösen. Wie wir später sehen werden, wirft dies einige interessante Fragen auf, wenn wir die Steuerung von Roboter manipulieren betrachten.

Der planare kartesische Manipulator ist trivial zu analysieren. Die Gleichungen für die kinematische Analyse sind:

$$x = d_2, \quad y = d_1 \quad (10)$$

Die Einfachheit der kinematischen Gleichungen macht die Umrechnung von Gelenk- in Endeffektorkoordinaten und zurück trivial. Aus diesem Grund sind PP-Ketten in Automatisierungsgeräten wie Robotern, Laufkränen und Fräsmaschinen so beliebt.

Direkte Kinematik

Wie bereits erwähnt, gibt es zwei Arten von Koordinaten, die zur Beschreibung nützlich sind Konfiguration des Systems. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf die Aufgabe und den Endeffektor richten, würden wir lieber kartesische Koordinaten oder Endeffektorkoordinaten verwenden. Die Menge all dieser Koordinaten wird im Allgemeinen als *kartesischer Raum* oder *Endeffektorraum*¹¹ bezeichnet. Der andere Koordinatensatz sind die sogenannten Gelenkkoordinaten, die zur Beschreibung der Konfiguration der mechanischen Verbindung nützlich sind. Die Menge aller dieser Koordinaten wird allgemein als *Gelenkraum* bezeichnet.

In der Robotik ist es häufig erforderlich, Gelenkkoordinaten auf Endeffektorkoordinaten „abbilden“ zu können. Diese Karte oder das Verfahren, mit dem Endeffektorkoordinaten vom Gelenk ermittelt werden Koordinaten nennt man direkte Kinematik.

Beispielsweise reduziert sich das Verfahren für den 3-R-Manipulator auf das einfache Ersetzen der Werte für die Gelenkwinkel in den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= d_1 + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y &= d_2 + l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

und Bestimmen der kartesischen Koordinaten x , y und $\ddot{y}$. Für die anderen bisher diskutierten Beispiele offener Ketten (RP, PP) ist der Prozess sogar noch einfacher (da die Gleichungen einfacher sind). Tatsächlich ist das Verfahren der direkten Kinematik für alle seriellen Ketten (einschließlich räumlicher Ketten) ziemlich geradlinig nach vorne.

Andererseits wird das gleiche Verfahren komplizierter, wenn der Mechanismus enthält ein oder mehrere geschlossene Kreisläufe. Darüber hinaus kann die direkte Kinematik mehr als eine Lösung ergeben oder

¹¹Da jedes Mitglied dieser Menge ein n -Tupel ist, können wir es uns als Vektor vorstellen und der Raum ist in Wirklichkeit ein Vektorraum. Aber wir werden diese Abstraktion hier nicht brauchen.

in solchen Fällen keine Lösung. Beispielsweise sind im planaren Parallelmanipulator in Abbildung 3 die Gelenkpositionen oder -koordinaten die Längen der drei Teleskopglieder (q_1, q_2, q_3) und die Endeffektorkoordinaten (x, y, ψ) die Position und Ausrichtung von das schwebende Dreieck. Es kann gezeigt werden, dass je nach Wert von (q_1, q_2, q_3) die Anzahl der (realen) Lösungen für (x, y, ψ) zwischen null und sechs liegen kann. Für die Stewart-Plattform in Abbildung 4 wurde gezeigt, dass diese Zahl irgendwo zwischen null und vierzig liegt.

5.4 Inverse Kinematik

Die Analyse oder das Verfahren, das zur Berechnung der Gelenkkoordinaten für einen bestimmten Satz von Endeffektorkoordinaten verwendet wird, wird als inverse Kinematik bezeichnet. Im Wesentlichen geht es bei diesem Verfahren um die Lösung einer Reihe von Gleichungen. Allerdings sind die Gleichungen im Allgemeinen nichtlinear und komplex, weshalb die Analyse der inversen Kinematik recht aufwändig sein kann. Wie bereits erwähnt, ist die Eindeutigkeit nicht garantiert, selbst wenn es möglich ist, die nichtlinearen Gleichungen zu lösen. Für die gegebenen Endeffektorkoordinaten gibt es möglicherweise keinen eindeutigen Satz von Gelenkkoordinaten (und wir

Wir haben gesehen, dass für den RP - Manipulator die direkten Kinematikgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x &= d_2 \cos \psi_1 \\ y &= d_1 \sin \psi_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Wenn wir das Drehgelenk auf einen Gelenkwinkel im Intervall $[0, 2\pi)$ beschränken, gibt es zwei Lösungen für die inverse Kinematik:

$$d_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \psi_1 = \text{atan2}\left(\frac{y}{d_2}, \frac{x}{d_2}\right), \quad \psi = \pm 1$$

Hier haben wir die atan2 - Funktion in Anhang 1 verwendet, um den Gelenkwinkel ψ_1 eindeutig anzugeben.

Abhängig von der Wahl von ψ gibt es jedoch zwei Lösungen für d_2 und damit für ψ_1 .

Die Analyse der inversen Kinematik für einen planaren 3-R -Manipulator scheint jedoch kompliziert zu sein

Wir können analytische Lösungen ableiten. Denken Sie daran, dass die direkten Kinematikgleichungen (4) lauten:

$$x = d_1 \cos \psi_1 + d_2 \cos \psi_2 + d_3 \cos \psi_3 \quad (4a)$$

$$y = d_1 \sin \psi_1 + d_2 \sin \psi_2 + d_3 \sin \psi_3 \quad (4b)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \quad (4c)$$

¹²Der einzige Fall, in dem die Analyse trivial ist, ist der PP - Manipulator. In diesem Fall gibt es eine einzigartige Lösung für die Inverse Kinematik.

Wir gehen davon aus, dass uns die kartesischen Koordinaten x, y und $\ddot{y}$ vorliegen, und wir möchten analytische Ausdrücke für die Gelenkwinkel $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ und $\dot{y}_3$ anhand der kartesischen Koordinaten finden.

Durch Einsetzen von (4c) in (4a) und (4b) können wir $\dot{y}_3$ eliminieren, sodass wir zwei Gleichungen in $\dot{y}_1$ haben und $\dot{y}_2$:

$$(x - \dot{y}_1 \cos \dot{y}_1 = \dot{y}_2 \cos \dot{y}_1 + \cos \dot{y}_1 \dot{y}_2 + (2) \quad (d)$$

$$y - \dot{y}_1 \sin \dot{y}_1 = \dot{y}_2 \sin \dot{y}_1 + \sin \dot{y}_1 \dot{y}_2 \quad (e)$$

wobei die Unbekannten auf der rechten Seite gruppiert wurden; Die linke Seite hängt nur von den Endeffektor- oder kartesischen Koordinaten ab und ist daher bekannt.

Benennen Sie die linken Seiten um, $x\ddot{y} = x - l_3 \cos \dot{y}$, $y - l_3 \sin \dot{y}$, der Einfachheit halber. Wir gruppieren uns neu in (d) und (e), quadrieren Sie beide Seiten in jeder Gleichung und fügen Sie sie hinzu:

$$\begin{aligned} & (x - \dot{y}_1 \cos \dot{y}_1)^2 + (y - \dot{y}_1 \sin \dot{y}_1)^2 = (\dot{y}_2 \cos \dot{y}_1 + \cos \dot{y}_1 \dot{y}_2)^2 + (\dot{y}_2 \sin \dot{y}_1 + \sin \dot{y}_1 \dot{y}_2)^2 \\ & \quad + (2) \end{aligned}$$

Nachdem wir die Terme neu angeordnet haben, erhalten wir eine einzelne nichtlineare Gleichung in $\dot{y}_1$:

$$(x - \dot{y}_1 \cos \dot{y}_1)^2 + (y - \dot{y}_1 \sin \dot{y}_1)^2 = (\dot{y}_2^2 + \dot{y}_1^2 + 2 \dot{y}_1 \dot{y}_2 \cos \dot{y}_1) \quad (F)$$

Beachten Sie, dass wir in (ac) mit drei nichtlinearen Gleichungen in drei Unbekannten begonnen haben. Wir haben das Problem auf die Lösung zweier nichtlinearer Gleichungen in zwei Unbekannten reduziert (de). Und jetzt haben wir es weiter vereinfacht, um eine einzelne nichtlineare Gleichung in einer Unbekannten (f) zu lösen.

Gleichung (f) ist vom Typ

$$P \cos \dot{y}_1 + Q \sin \dot{y}_1 + R = 0 \quad (G)$$

Gleichungen dieser Art können mithilfe einer einfachen Substitution gelöst werden, wie in Anhang 2 gezeigt. Es gibt zwei Lösungen für $\dot{y}_1$, gegeben durch:

$$\dot{y}_1 = \frac{P \cos \dot{y}_1 + Q \sin \dot{y}_1 + R}{\dot{y}_1} \quad (H)$$

Wo,

$$2 = \dot{y}_1 \tan \left(\frac{P}{Q} \right) \quad (H)$$

Und $\dot{y}_1 \pm 1$.

Beachten Sie, dass es zwei Lösungen für $\ddot{y}_1$ gibt, eine entspricht $\ddot{y}=+1$, die andere entspricht $\ddot{y}=-1$. Wenn wir eine dieser Lösungen wieder in die Gleichungen (d) und (e) einsetzen, erhalten wir:

$$\cos(\ddot{y}_1 = +1) = \frac{x \ddot{y} / l_1 \cos \ddot{y}_1}{l_2}$$

$$\sin(\ddot{y}_1 = +1) = \frac{y \ddot{y} / l_1 \sin \ddot{y}_1}{l_2}$$

Dadurch können wir mithilfe der atan2-Funktion in Anhang 1 nach $\ddot{y}_2$ auflösen :

$$\ddot{y}_2 = \text{atan2} \left(\frac{y \ddot{y} / l_1 \sin \ddot{y}_1}{l_2}, \frac{x \ddot{y} / l_1 \cos \ddot{y}_1}{l_2} \right) \quad (\text{ich})$$

Somit gibt es für jede Lösung für $\ddot{y}_1$ eine (einzige) Lösung für $\ddot{y}_2$.

Schließlich kann $\ddot{y}_3$ leicht aus (c) bestimmt werden:

$$\ddot{y}_3 = \ddot{y} - \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 \quad (\text{J})$$

Gleichungen (hj) sind die inverse Kinematiklösung für den 3-R- Manipulator. Für eine gegebene Position und Ausrichtung des Endeffektors gibt es zwei verschiedene Wege, diese zu erreichen, wobei jeder einem anderen Wert von $\ddot{y}$ entspricht. Diese unterschiedlichen Konfigurationen sind in Abbildung 14 dargestellt.

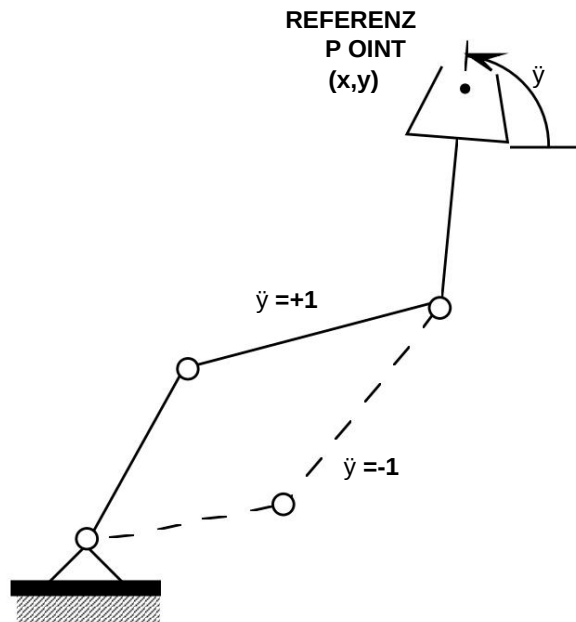


Abbildung 14 Die beiden inversen Kinematiklösungen für den 3R- Manipulator:

„Ellenbogen-oben“-Konfiguration ($\ddot{y}=+1$) und „Ellenbogen-unten“-Konfiguration ($\ddot{y}= -1$)

Es ist nicht eindeutig, einem Roboter zu befehlen, den Endeffektor in eine bestimmte Position und Ausrichtung zu bewegen, da der Roboter zwischen zwei Konfigurationen wählen muss. Von

Aus praktischer Sicht wird diese Mehrdeutigkeit automatisch gelöst, wenn die gemeinsamen Grenzen so sind, dass eine Konfiguration nicht erreicht werden kann¹³.

5.5 Geschwindigkeitsanalyse

Bei der Steuerung eines Roboters, um von einer Position zur anderen zu gelangen, reicht es nicht aus, nur die Gelenk- und Endeffektorkoordinaten der Zielposition zu bestimmen. Es kann erforderlich sein, die Trajektorie oder den Pfad, den der Roboter nimmt, während er sich in Richtung der Zielposition bewegt, kontinuierlich zu kontrollieren. Dies ist wichtig, um Hindernisse im Arbeitsbereich zu vermeiden. Noch wichtiger ist, dass es Aufgaben gibt, bei denen die Flugbahn des Endeffektors entscheidend ist. Beispielsweise ist es beim Schweißen erforderlich, das Werkzeug in einer gewünschten Ausrichtung und einem festen Abstand vom Werkstück zu halten und sich gleichzeitig gleichmäßig¹⁴ entlang eines gewünschten Pfades zu bewegen. Daher muss die Geschwindigkeit des Endeffektors oder des Werkzeugs während der Bewegung gesteuert werden. Da die Steuerung an den Gelenken erfolgt, ist es nur möglich, die Gelenkgeschwindigkeiten zu steuern. Daher besteht die Notwendigkeit, die gewünschten Endeffektorgeschwindigkeiten heranzuziehen und daraus die Gelenkgeschwindigkeiten zu berechnen. All dies erfordert eine detailliertere kinematische Analyse, die sich mit Geschwindigkeiten oder der Änderungsrate von Koordinaten befasst, im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt, in dem wir nur Positionen oder Koordinaten betrachtet haben.

Betrachten Sie als Beispiel den 3R- Manipulator. Durch Differenzieren von Gleichung (4) nach Zeit ist es möglich, Gleichungen zu erhalten, die die verschiedenen Geschwindigkeiten in Beziehung setzen.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3 \\ \dot{y} &= \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3 \\ \dot{y} &= \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

wobei wir die Kurzschreibweise verwendet haben:

$$\begin{aligned} s1 &= \sin \dot{y}_1, \quad s12 = \sin (\dot{y}_1 + \dot{y}_2), \quad s123 = \sin (\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3) \\ c1 &= \cos \dot{y}_1, \\ c12 &= \cos (\dot{y}_1 + \dot{y}_2), \quad c123 = \cos (\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3) \end{aligned}$$

$\dot{y}_i$ bezeichnet die Gelenkgeschwindigkeit für das i -te Gelenk oder die zeitliche Ableitung der i -ten Gelenkwinkel und $\dot{x}$ & $\dot{y}$ sind die zeitlichen Ableitungen der Endeffektorkoordinaten. Wir können die Begriffe neu ordnen

Schreiben Sie diese Gleichung in Matrixform:

¹³Das gilt auch für den menschlichen Arm. Wenn man planare Bewegungen berücksichtigt, gibt es eine einzigartige Lösung für die inverse Kinematik, da der menschliche Ellenbogen nicht überstreckt werden kann. Somit muss sich das Zentralnervensystem keine Gedanken darüber machen, welche Konfiguration es für eine Zielaufgabe annehmen soll.

¹⁴In manchen Fällen ist eine Pendelbewegung erforderlich und die Flugbahn des Werkzeugs ist komplizierter.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 s_2 + c_1 c_2 + 112123123 \\ c_1 s_2 + s_1 c_2 + 112123123 \\ c_1 c_2 - s_1 s_2 + 112123123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Die 3×3- Matrix heißt Jacobi-Matrix¹⁵ und wir bezeichnen sie mit dem Symbol J. Wenn Sie sich die Elemente der Matrix ansehen, drücken sie die Änderungsrate der Endeffektorkoordinaten in Bezug auf die Gelenkkoordinaten aus:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y_1} & \frac{\partial x}{\partial y_2} & \frac{\partial x}{\partial y_3} \\ \frac{\partial y}{\partial y_1} & \frac{\partial y}{\partial y_2} & \frac{\partial y}{\partial y_3} \\ \frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial z}{\partial y_2} & \frac{\partial z}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

Angeht die Geschwindigkeit, mit der sich die Gelenke verändern, oder des Vektors der Gelenkgeschwindigkeiten,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

Mit Gleichung (11) können wir Ausdrücke für die Endeffektorgeschwindigkeiten erhalten.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

Wenn die Jacobi-Matrix nicht singulär ist (ihre Determinante ist ungleich Null und die Matrix invertierbar), können wir den folgenden Ausdruck für die Gelenkgeschwindigkeiten in Bezug auf den Endeffektor erhalten

Geschwindigkeiten:

$$\dot{y} = J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Wenn also die Aufgabe (z. B. Schweißen) anhand einer gewünschten Endeffektorgeschwindigkeit spezifiziert wird, Gleichung (12) kann zur Berechnung der gewünschten Gelenkgeschwindigkeit verwendet werden, vorausgesetzt, dass die Jacobi-Funktion nicht singulär ist:

¹⁵Der Name Jacobian stammt aus der Terminologie, die in der mehrdimensionalen Analysis verwendet wird.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 s_2 c_3 + s_1 c_2 s_3 \\ c_1 s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3 \\ -s_2 s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

Natürlich wollen wir die Bedingungen bestimmen, unter denen das Jacobi Singular wird.

Dies kann erreicht werden, indem die Determinante von J berechnet und auf Null gesetzt wird. Glücklicherweise kann der Ausdruck für die Determinante der Jacobi-Einheit in diesem Beispiel mithilfe trigonometrischer Identitäten wie folgt vereinfacht werden:

$$|J| = l_1 l_2 \sin \theta_2 \quad (13)$$

Dies bedeutet, dass die Jacobi-Funktion nur dann singulär ist, wenn θ_2 entweder 0 oder 180 Grad ist. Physikalisch entspricht dies einer vollständigen Streckung oder vollständigen Beugung des Ellenbogens. Solange wir diese Konfiguration vermeiden, kann der Roboter also jeder gewünschten Endeffektorgeschwindigkeit folgen.

5.6 Anhang

5.6.1 Die Mehrdeutigkeit in inversen trigonometrischen Funktionen

Inverse trigonometrische Funktionen haben mehrere Werte. Sogar innerhalb eines 360-Grad-Bereichs haben zwei Werte. Zum Beispiel, wenn

$$y = \sin x$$

Die Umkehrsinusfunktion liefert zwei Werte in einem 360-Grad-Intervall:

$$\sin^{-1} y = x, \pi - x$$

Natürlich können wir zu jeder dieser Lösungen 2 π addieren oder davon subtrahieren und so eine andere Lösung erhalten.

Dies gilt auch für die Umkehrkosinus- und Umkehrtangensfunktionen. Wenn

$$y = \cos x,$$

die Umkehrkosinusfunktion ergibt:

$$\cos^{-1} y = x, -x$$

Ähnliches gilt für die Tangensfunktion

$$y = \tan x,$$

Die Umkehrtangensfunktion ergibt:

$$\tan^{-1}y = x, \quad \ddot{y} = x$$

Diese Vielfalt ist besonders problematisch bei der Robotersteuerung, wo eine Mehrdeutigkeit bedeuten kann, dass es mehr als einen Weg gibt, eine gewünschte Position zu erreichen (siehe Diskussion über inverse Kinematik). Dieses Problem wird umgangen, indem die Funktion atan2 definiert wird, die zwei Argumente erfordert und eine eindeutige Antwort in einem 360° -Bereich zurückgibt.

Die Funktion atan2 verwendet als Argumente den Sinus und den Cosinus einer Zahl und gibt den zurück Nummer. Also wenn,

$$s = \sin x; c = \cos x$$

Die Funktion atan2 verwendet s und c als Argument und gibt x zurück:

$$\text{atan2}(s, c) = x$$

Die Hauptidee besteht darin, dass die durch das zweite Argument bereitgestellten zusätzlichen Informationen die Mehrdeutigkeit bei der Lösung nach x beseitigen. Um dies zu sehen, betrachten wir das einfache Problem, das uns gestellt wird:

$$s = \frac{1}{2}; c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und wir müssen nach x auflösen. Wenn wir die Umkehrsinusfunktion verwenden und die Antwort auf das Intervall $[0, 2\pi)$ beschränken, erhalten wir das Ergebnis:

$$x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Da wir wissen, dass der Kosinus ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$ nehmen. Wir können dies schnell überprüfen, indem wir die Kosinuswerte beider Kandidaten

Lösungen, dass die erste Lösung richtig und die zweite falsch ist.

$$\text{weil } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ weil } \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Die atan2 -Funktion durchläuft einen ähnlichen Algorithmus, um eine eindeutige Lösung im Bereich $[0, 2\pi)$ zu ermitteln.

$$\text{atan2}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Die atan2 -Funktion ist eine Standardfunktion in den meisten C-, Pascal- und Fortran-Compilern.

5.6.2 Lösung der nichtlinearen Gleichung in (g)

$$P \cos \ddot{\gamma} + Q \sin \ddot{\gamma} + R = 0 \quad (\text{G})$$

Definieren Sie $\ddot{\gamma}$ so, dass

$$\cos \ddot{\gamma} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad \text{und} \quad \sin \ddot{\gamma} = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Beachten Sie, dass dies immer möglich ist. $\ddot{\gamma}$ kann mit der atan2-Funktion bestimmt werden:

$$\ddot{\gamma} = \text{atan2} \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right)$$

Nun kann (g) umgeschrieben werden als:

$$\cos \ddot{\gamma} \cos \ddot{\gamma} + \sin \ddot{\gamma} \sin \ddot{\gamma} + \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 0$$

oder

$$\cos(\ddot{\gamma} - \ddot{\gamma}) = -\frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Dies gibt uns zwei Lösungen für $\ddot{\gamma}$ in Bezug auf den bekannten Winkel $\ddot{\gamma}$:

$$\ddot{\gamma} - \ddot{\gamma} = \pm \arccos \left(-\frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right), \quad \ddot{\gamma} \pm = \ddot{\gamma}$$