



Artículo

Medición de tensiones residuales con métodos de cumplimiento de grietas: Un problema inverso mal planteado con un kernel de forma cerrada

Marco Beghini y Tommaso Grossi *



DICI—Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale, Università di Pisa, 56122 Pisa, Italia;

marco.beghini@unipi.it *

Correspondencia: tommaso.grossi@ing.unipi.it

Resumen: Mediante métodos de relajación se pueden obtener tensiones residuales introduciendo un corte o agujero progresivo en una probeta y midiendo y elaborando las deformaciones o desplazamientos que se producen en consecuencia. Si el corte puede considerarse un defecto controlado similar a una grieta, aprovechando el principio de superposición de Bueckner, las deformaciones relajadas pueden modelarse a través de una integral ponderada de la tensión residual aliviada por el corte. Para evaluar las tensiones residuales, se debe resolver una ecuación integral. Desde un punto de vista práctico, la solución suele basarse en una técnica de discretización que transforma la ecuación integral en un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, cuyas soluciones pueden obtenerse fácilmente, al menos desde el punto de vista computacional. Sin embargo, el sistema lineal a menudo está muy mal condicionado. En este artículo, se muestra que su mal condicionamiento es en realidad una consecuencia de una propiedad mucho más profunda de la ecuación integral subyacente, que se refleja también en el entorno discretizado. De hecho, el problema original está mal planteado. Esta mala formulación no es más que un sofisma matemático; de hecho, también afecta profundamente las propiedades del sistema discretizado. En particular, induce el llamado equilibrio entre sesgo y varianza, una propiedad que afecta a muchos procedimientos experimentales, en los que el analista se ve obligado a introducir algún sesgo para obtener una solución que no se vea abrumada por el ruido de la medición. A su vez, a menos que esté respaldado por suposiciones físicas sólidas y razonables sobre algunas propiedades de la solución, el sesgo introducido es potencialmente infinito y perjudica todas las técnicas de cuantificación de la incertidumbre. Para respaldar estos temas, se presenta un ejemplo numérico ilustrativo que utiliza el método de cumplimiento de grietas (también conocido como corte longitudinal). La disponibilidad de la función de peso de la mecánica de fractura elástica lineal para el problema permite una formulación completamente analítica de la ecuación integral original mediante la cual se evita el sesgo debido a la aproximación numérica.

Palabras clave: estrés residual; métodos de relajación; mala postura; mal estado; problemas inversos



Cita: Beghini, M.; Grossi, T.

Medición de tensiones residuales con métodos
de cumplimiento de grietas: una
Problema inverso mal planteado con un

Núcleo de forma cerrada. *Aplica. Mec.* 2024,5, 475–489. <https://doi.org/10.3390/applmech5030027>

appliedmech5030027

Recibido: 1 de junio de 2024

Revisado: 5 de julio de 2024

Aceptado: 10 de julio de 2024

Publicado: 14 de julio de 2024



Copyright: © 2024 por los autores.
Licenciario MDPI, Basilea, Suiza.

Este artículo es un artículo de acceso abierto,
distribuido bajo los términos y

condiciones de los Creative Commons

Licencia de atribución (CC BY)

(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introducción

Cuando se miden las tensiones generadas por cargas externas que actúan sobre un componente, rara vez se dispone de una técnica para medir directamente las tensiones. Mucho más comúnmente, se realiza una medición indirecta, por ejemplo registrando los campos de deformación producidos por la aplicación de cargas externas con respecto a una configuración donde se supone (a veces implícitamente) que están ausentes [1]. Por ejemplo, las galgas extensométricas miden deformaciones referidas al momento de su pegado; Además, las técnicas sin contacto como la correlación de imágenes digitales (DIC) [2–6] o la interferometría electrónica de patrón moteado (ESPI) [7–9] miden los cambios en los campos de desplazamiento comparando un estado inicial y final. Luego se utilizan modelos constitutivos del material, generalmente elástico, para reconstruir las tensiones. En el caso de las tensiones residuales, que actúan en ausencia de cargas externas y surgen principalmente para restaurar la compatibilidad de los campos de desplazamiento que se desarrollan durante el proceso de producción, el elemento crítico que falta es precisamente un estado de referencia no estresado, y esta ausencia es Podría decirse que la dificultad fundamental para medir las tensiones residuales es la falta de un estado de referencia no estresado. Los métodos de difracción [11] abordan este problema midiendo el espaciamiento absoluto de los planos de la red cristalina y comparándolo con un valor de referencia no estresado, obtenido para

ese material específico usando técnicas apropiadas. De este proceso se obtiene la deformación producida por las tensiones, que luego permite su cálculo mediante modelos constitutivos adecuados. Por otro lado, los métodos de relajación recrean físicamente un estado no estresado eliminando o desconectando una parte del dominio del componente [12-19]. Esta acción pone ciertos componentes de tensión a cero, provocando deformaciones mensurables que pueden correlacionarse con los valores de tensión residual que actuaban previamente. En otras palabras, el proceso típicamente utilizado para las tensiones producidas por cargas externas se sigue metafóricamente a la inversa, midiendo la deformación producida por la eliminación de las tensiones a medir.

Por razones tecnológicas, a menudo es imposible acceder a todo el campo de deformación, lo que permitiría determinar puntualmente los campos de tensiones completos. En cambio, sólo están disponibles las mediciones de ciertos componentes de deformación dentro de un subdominio de la muestra analizada a medida que avanza el proceso de corte o eliminación. Cuando se utilizan galgas extensométricas, cada rejilla proporciona una medición aproximadamente puntual de un único componente de deformación. En el caso de técnicas de campo completo, la deformación medida es, en el mejor de los casos, la de las superficies externas del componente, con una resolución espacial limitada que depende del instrumento de medición específico.

Gracias al principio de superposición de Bueckner [20], todavía es posible reconstruir las tensiones procediendo de la siguiente manera. Se supone que las tensiones residuales a medir pertenecen al intervalo de una base funcional apropiada [21] (a menudo funciones o polinomios constantes por partes). Luego, se aprovecha la linealidad del problema elástico para generar las historias de deformación que corresponden a la base de tensión elegida. Finalmente, esta relación lineal se invierte para obtener las tensiones requeridas a partir de las deformaciones medidas.

En el caso general, el hecho de que las deformaciones producidas por métodos de relajación puedan calcularse sumando las contribuciones individuales de cada valor puntual del campo de tensiones se representa mediante una ecuación integral, cuya forma típica es la siguiente:

$$\epsilon(h) = \int_0^h A(h, z) \sigma(z) dz \quad (1)$$

donde h caracteriza las propiedades geométricas de la desconexión del dominio (como la longitud de un corte), mientras que z actúa como una coordenada espacial en la muestra. De hecho, la ecuación (1) establece que, para una longitud de corte h dada, las deformaciones producidas son una suma ponderada (con pesos denotados como $A(h, z)$) de las tensiones residuales que han sido relajadas por el corte, como la conformidad del componente depende punto por punto del lugar donde se eliminan las tensiones [17,22-24]. $A(h, z)$ suele denominarse función de influencia, función de calibración o núcleo del problema; en un entorno discreto, se convierte en lo que comúnmente se conoce como la matriz de calibración del problema. Claramente, la forma real de la Ecuación (1) depende del problema específico, aunque esta estructura matemática generalmente se mantiene.

Como es bien conocido en la literatura sobre tensiones residuales, determinar las tensiones derivadas de las deformaciones mediante la Ecuación (1) es un problema que desafía significativamente la precisión de los instrumentos de medición utilizados, ya que el cálculo resultante suele ser extremadamente sensible a errores de entrada [25]. Formalmente se diría que el problema está muy mal condicionado.

Los autores señalaron en [26,27] que el mal condicionamiento del problema es en realidad sólo un síntoma de otra propiedad matemática distinta (y posiblemente más importante) llamada mal planteamiento, que se sabe que afecta notablemente a la ecuación (1) por la literatura matemática. Su principal característica consiste en una falta de continuidad de la solución a partir de los datos iniciales, lo que, desde un punto de vista práctico, resulta en soluciones con errores potencialmente infinitos obtenidos a partir de instrumentos de medición con intervalos de confianza finitos.

En los trabajos anteriores de los autores [28-31], la discusión se centró en el método de perforación, donde la ecuación coincide exactamente con la ecuación (1). En este artículo se muestra que una clase importante de técnicas de medición de tensiones residuales tomadas de la mecánica de fracturas (bajo el nombre de métodos de cumplimiento de fisuras) sufre los mismos efectos, aunque la ecuación en la que se basan puede parecer diferente. Ligeramente diferente de la Ecuación (1). En este sentido, el trabajo pretende mejorar la comprensión de los fundamentos matemáticos en los que se basa el método.

El trabajo está organizado de la

- siguiente manera:
- En la Sección 2, se introducen los métodos de cumplimiento de fisuras y sus ecuaciones fundamentales, basándose en algunos conceptos básicos de la mecánica de fracturas y llegando así a la ecuación del problema relativo a la reconstrucción de tensiones residuales.
 - En la Sección 3, las ecuaciones obtenidas se utilizan para ejecutar algunos experimentos numéricos que exponen las características peculiares de la mala postura.
 - En la Sección 4, se discuten las consecuencias prácticas para el analista que debe navegar en malas posiciones en una medición de tensión residual.

2. Antecedentes teóricos 2.1.

Métodos de cumplimiento de crack

Podría decirse que una de las formas más intuitivas de desconectar mecánicamente una parte de un componente para un análisis de tensión residual es introducir un corte, que crea dos nuevas superficies en las que el vector de tracción se ve obligado a ser nulo. La técnica de medición de tensiones residuales correspondiente se llamó originalmente método de cumplimiento de grietas [16], y sólo en los años siguientes pasó a ser conocido como método de corte longitudinal [32]. Si se cumple la linealidad del problema, también se cumple el principio de superposición de Bueckner [20], por lo que los campos de deformación generados por el corte son equivalentes a los generados al aplicar tracciones de signos opuestos a los que actúan originalmente sobre las superficies creadas (Figura 1).

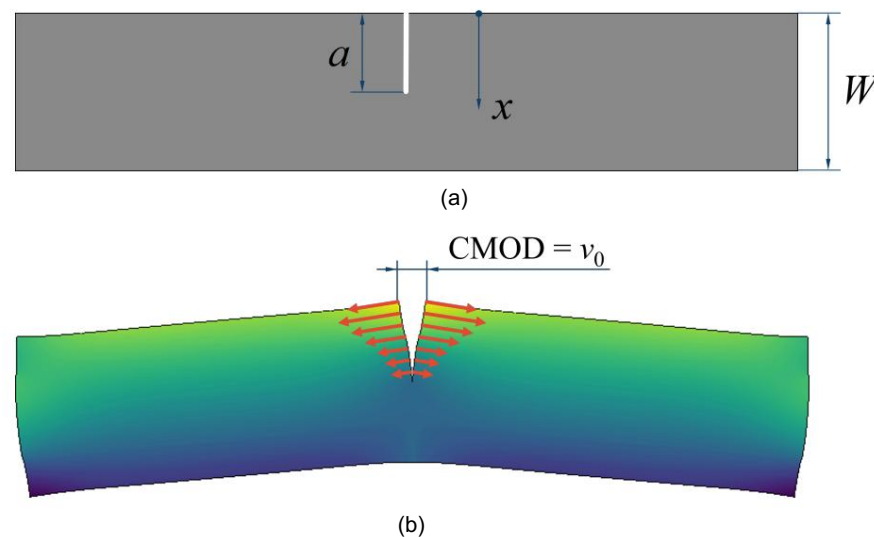


Figura 1. Una aplicación clásica del principio de superposición de Bueckner. Se introduce un corte en una muestra en una región donde están presentes tensiones residuales de tracción. Esta acción genera campos de desplazamiento que son equivalentes a los obtenidos con el problema de contorno elástico simple representado en la figura, donde las tracciones aplicadas simplemente se invierten en signo. (a): Denominación de variables geométricas: longitud de la grieta a , coordenada espacial x y ancho de la muestra W . (b): Problema de valor límite equivalente, codificado por colores según la magnitud de los desplazamientos a lo largo de la cara de la grieta normal. Las tracciones se representan como flechas rojas.

Gracias a la amplia disponibilidad de análisis de elementos finitos (EF), el estado del arte de los métodos de relajación ha evolucionado para generar directamente la matriz de calibración del problema en forma discreta a través de simulaciones numéricas, como en la Figura 2, aunque este desarrollo algunas veces puede haber llevado a pasar por alto la naturaleza matemática original del problema. Dada su gran precisión, las galgas extensométricas generalmente se colocan en la cara frontal o posterior para registrar las deformaciones en la superficie de la muestra, en lugar de adoptar dispositivos de medición de desplazamiento. De todos modos, independientemente de si realmente se emplean medidas de desplazamiento o de deformación, se obtiene un sistema lineal. Como se explica en [26,27], lo que se obtiene es sin

una realización discreta de una ecuación integral como la ecuación (1), que luego conserva todas sus cuestiones fundamentales.

Antes de que los análisis de EF se convirtieran en el estándar para construir matrices de calibración, los métodos de cumplimiento de fisuras tenían la enorme ventaja de permitir el uso de resultados teóricos de la mecánica de fracturas para formular las ecuaciones de resolución del problema [33,34]. De hecho, los campos de solución correspondientes a una grieta plana en un dominio semiinfinito o rectangular se encuentran entre los resultados más comunes de la mecánica de fracturas [35], que pueden usarse para obtener una ecuación como la ecuación (1) sin recurrir a cálculos numéricos.

Por ejemplo, para una determinada tracción normal de la cara de la grieta $\sigma(x)$, el factor de intensidad de tensión (SIF) para un problema de valor límite 2D que contiene una grieta de longitud a se puede calcular mediante la siguiente ecuación [35]:

$$KI(a) = \int_0^a h(a, x) \sigma(x) dx \quad (2)$$

donde $h(a, x)$ es una función de peso (WF) que puede demostrarse que depende únicamente de la geometría del cuerpo fisurado. Como lo muestra Rice [36], si $KI(a)$ y el desplazamiento de la cara de la grieta $v(a, x)$ —medido desde la superficie de la grieta no deformada—son conocidos para una carga de Modo I dada, entonces $h(a, x)$ puede efectivamente ser calculado como

$$x) h(a, x) = \frac{1}{KI(a)} \frac{\partial v(a, x)}{\partial a} \quad (3)$$

Recuerde que E' depende de si se suponen condiciones de tensión plana o de deformación plana.

Como $h(a, x)$ está disponible (en el peor de los casos, a través de una expansión en serie) para muchas geometrías 2D, se pueden emplear las ecuaciones (2) y (3) para escribir la relación entre las tensiones residuales deseadas y otras cantidades mensurables. Por ejemplo, a medida que se introduce progresivamente una grieta más larga, se puede medir el SIF mediante una técnica de elección (como el método fotoelástico [33]) y correlacionarlo con $\sigma(x)$ a través de la ecuación (2), que tiene en sí misma una estructura matemática similar a la ecuación (1). De hecho, ambas son ecuaciones integrales de Volterra del primer tipo [37].

Alternativamente, se puede medir el desplazamiento de apertura de la boca de la grieta (CMOD) $2v(a, 0)$ y correlacionarlo con las tensiones residuales procediendo de la siguiente manera. De la ecuación (3), se tiene

$$v(a, 0) = \frac{1}{E'} \int_0^a h(a, 0) KI(s) ds \quad (4)$$

Sustituyendo $KI(s)$ de la Ecuación (2) y reorganizando:

$$v(a, 0) = \frac{1}{E'} \int_0^a h(a, 0) \int_0^s h(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (5)$$

$$v(a, 0) = \frac{1}{E'} \int_0^a \int_0^s h(a, 0) h(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (6)$$

Entonces, se puede definir

$$\psi(a, x) = h(a, 0) h(a, x) \quad (7)$$

y escribe

$$v(a, 0) = \frac{1}{E'} \int_0^a \int_0^s \psi(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (8)$$

que es otra ecuación integral que relaciona $\sigma(x)$ y la cantidad medible $v(a, 0)$, aunque ligeramente más compleja que la ecuación (2). La función central $\psi(a, x)$ tiene unidades de $1/\text{Longitud}$ y conserva algunas propiedades de las funciones de peso, incluida la de tener una singularidad integrable en $x = a$.

La ecuación (8) no requiere análisis FE para identificar tensiones residuales, ya que $\psi(a, x)$ generalmente está disponible, y es de gran importancia práctica, ya que el desplazamiento de la apertura de la grieta

Los dispositivos de medición son instrumentos ampliamente disponibles en los laboratorios que realizan experimentos de mecánica de fracturas. A pesar de las diferencias aparentes con la Ecuación (1) y su formulación totalmente analítica, la siguiente sección muestra que este problema aún está mal planteado.

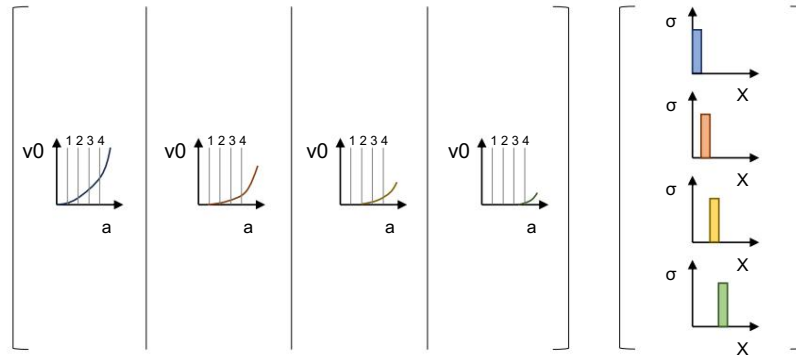


Figura 2. Procedimiento estándar utilizado para construir la matriz de calibración en una versión discretizada de la Ecuación (1). Para cada elemento de la base de tensión elegida, que en este caso abarca el conjunto de distribuciones de tensión constantes por partes, los desplazamientos o deformaciones correspondientes que surgen de una ejecución hipotética del mismo proceso de medición se simulan y registran como columnas de la matriz de calibración. Luego, aprovechando el principio de superposición de elasticidad lineal, se pueden simular los desplazamientos/deformaciones correspondientes a cualquier elemento del espacio de tensiones elegido mediante una combinación lineal de las columnas de la matriz de calibración. Cada elemento de la base de tensión es representado con un color diferente.

2.2. Mal planteamiento

Una característica peculiar de la ecuación (8) es que actúa como un filtro de paso bajo con respecto a las oscilaciones de $\sigma(x)$ a lo largo de su dominio. Esto también es intuitivo desde una perspectiva física. El valor del CMOD se ve mínimamente afectado por las variaciones a corta escala en las tensiones aplicadas en las caras de la grieta, ya que el principio de Saint Venant [38] asegura que las condiciones de contorno con las mismas acciones resultantes en una escala dimensional dada generan campos de deformación cuyas diferencias son confinado a una región de tamaño comparable. En consecuencia, las tracciones con comportamiento altamente oscilatorio influyen en el CMOD principalmente a través de sus valores promediados en escalas dimensionales más largas, sin que los picos autoequilibrados localmente afecten el resultado.

Esta afirmación intuitiva también tiene una explicación matemática formal. El Riemann–El lema de Lebesgue (ver [39]) asegura que, si $\psi(a, x)$ es integrable en su dominio, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a \psi(a, t) \sin(Nt) dt = 0 \quad (9)$$

$a \in [0, a_{\max}]$

De manera similar, al aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue [40], se obtiene otro. Se puede demostrar que la integración de una función evanescente converge a cero cuando $N \rightarrow \infty$, de modo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^s \psi(s, t) \sin(Nt) dt ds = \lim_{N \rightarrow \infty} vN(a, 0) \quad (10)$$

$a \in [0, a_{\max}]$

Esta característica matemática aparentemente abstracta tiene enormes implicaciones prácticas. Para cualquier número real positivo k , al tomar un N suficientemente grande, podemos generar una tensión residual distribución $\delta \sigma(x) = k \sin(Nx)$ que tiene un efecto arbitrariamente bajo (aunque no nulo) $v \delta(a, 0)$ en el CMOD medido. Debido a la linealidad del problema, esto implica que las muestras medidas $(a, 0)$ y obtienen cantidad v arbitrariamente baja difiere de la verdadera en $k \delta$ otra solución que puede ser perturbada por una $\sin(Nx)$, que, a su vez, puede ser hecho arbitrariamente alto a través de la elección inicial de k .

El efecto resultante es una sensibilidad infinita con respecto a los errores de entrada: a través de perturbaciones de medición arbitrariamente bajas, el error de solución no puede estar limitado por ningún

desigualdad. Un problema matemático que muestra este efecto se denomina problema mal planteado. Sin embargo, como se explicó en la Sección 3, el problema rara vez se resuelve analíticamente en espacios funcionales de dimensión infinita, ya que el procedimiento de solución habitual implica una fase de discretización seguida de cálculos numéricos.

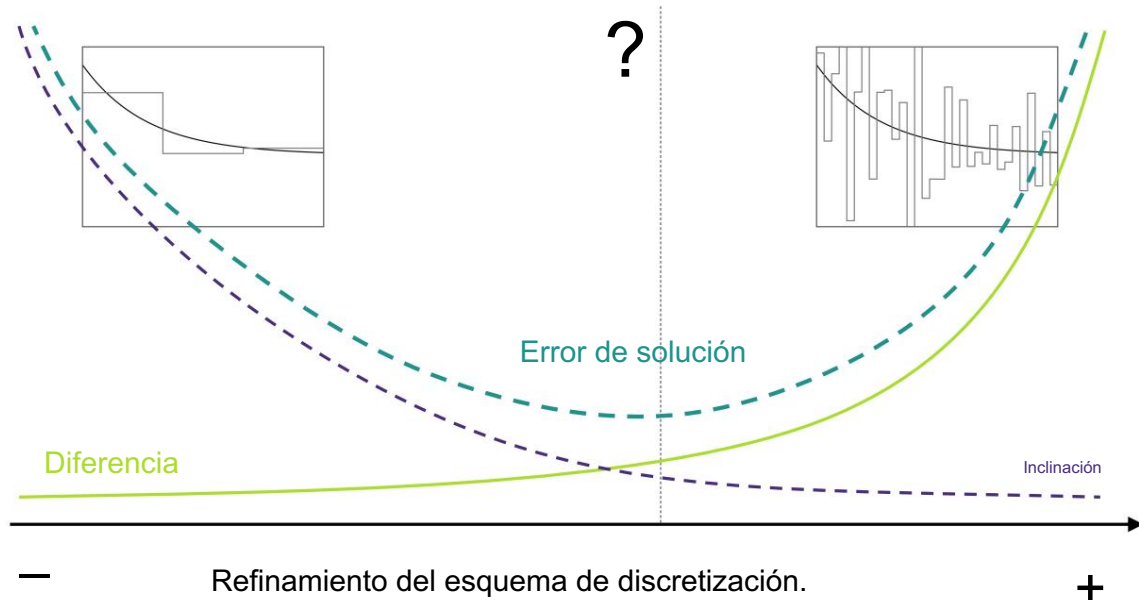


Figura 3. Representación pictórica de la compensación sesgo-varianza, que normalmente enfrenta el analista de estrés residual al elegir el esquema de discretización. A medida que aumenta el número de grados de libertad permitidos en la base que abarca las tensiones, la varianza de la solución (curva verde claro) aumenta en términos de sensibilidad a los errores de medición. En un intento de reducir esta sensibilidad limitando los grados de libertad, se introduce un sesgo (curva azul) en la solución. Si tanto la varianza como el sesgo fueran observables, se podría elegir el esquema de discretización que genere la "mejor" solución (es decir, el mínimo de la curva turquesa); sin embargo, el sesgo no es directamente observable.

Al adquirir un número finito de puntos de medición y representar la solución con un número finito de coordenadas, sólo se resuelve una aproximación de dimensión finita del problema original. En este nuevo problema, la sensibilidad al error no puede ser infinita (la escala dimensional de las oscilaciones permitidas en la solución no puede disminuir indefinidamente), pero puede ser lo suficientemente alta como para desafiar la precisión de los instrumentos de medición utilizados. Entonces se dice que el problema está mal condicionado, lo que en este caso es sólo consecuencia de la discretización de un problema mal planteado.

No obstante, la característica más distintiva de un problema mal planteado es el nivel variable de mal condicionamiento, que depende de cuánto se parece el problema discretizado al problema original. Cuanto más lo hace, más mal condicionado está el problema obtenido; Para controlar el mal condicionamiento, es tentador adoptar una discretización más burda con sólo unos pocos grados de libertad, pero eso conduce a la solución de un problema sesgado. Finalmente, se define el llamado equilibrio entre sesgo y varianza, que se muestra en la Figura 3 y se analiza en la Sección 4 a través del experimento numérico propuesto.

3. Investigaciones numéricas

Para combinar la discusión teórica con un ejemplo numérico práctico, se supone que la siguiente distribución de tensión residual de tracción está presente en una placa larga de ancho W como el que se muestra en la Figura 1:

$$\sigma(x) = \begin{cases} x \cdot 525 - 5850 & \frac{x}{W} \leq 0,125 \\ -275 + 550 \frac{x}{W} & 0,125 < \frac{x}{W} \leq 0,875 \\ 5325 - 5850 \frac{x}{W} & \frac{x}{W} > 0,875 \end{cases} \quad (\text{MPa}) \quad (11)$$

En la Figura 4 se presenta un gráfico de la distribución de tensiones supuesta. La ecuación (11) se obtiene llevando a cabo una prueba de flexión hipotética de cuatro puntos significativamente más allá del límite elástico de un material que tiene un modelo constitutivo perfectamente plástico, y luego eliminando la tensión aplicada. carga, dejando a las tensiones residuales la tarea de mantener la planitud de la sección. El problema consiste en reconstruir la distribución de tensiones residuales en el intervalo $0 \leq x \leq 0,75$ mediante el método de cumplimiento de fisuras introduciendo un corte en el placa y midiendo el CMOD mientras avanza el corte.

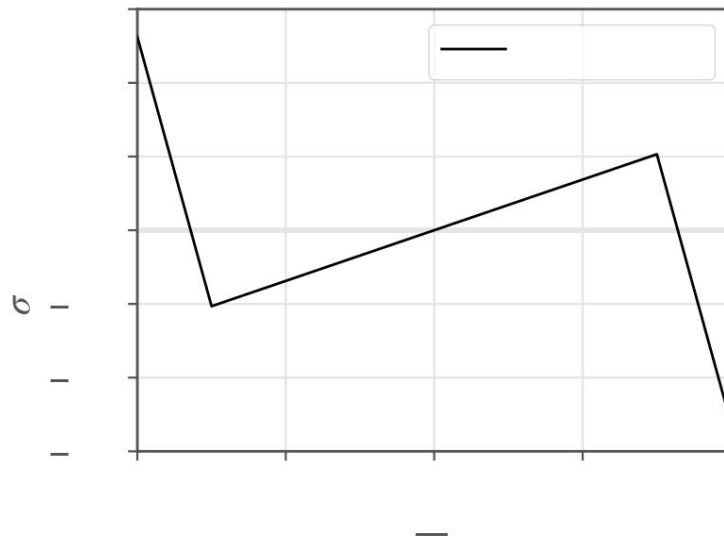


Figura 4. Distribución de tensiones residuales utilizada en el experimento numérico propuesto, definida por la Ecuación (11).

La función de influencia para este problema se toma de [41], que lo reporta como una expansión de serie truncada:

$$h(a, x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \sum_{k=1}^5 F \left(\frac{a}{W}, x \right) 1 - \frac{3k}{a} \quad (12)$$

donde $F \left(\frac{a}{W}, x \right)$ es una función algebraica adimensional, cuyos coeficientes están tabulados en el libro. La función kernel correspondiente $\psi(a, x) = h(a, 0)h(a, x)$ del operador integral en la Ecuación (8) se presenta en la Figura 5. Al incluir las Ecuaciones (11) y (12) en la Ecuación (8), se obtiene la CMOD teórica $2v_0(a)$ en función de la longitud a del corte que se ha introducido en la probeta, como se muestra en la Figura 6.

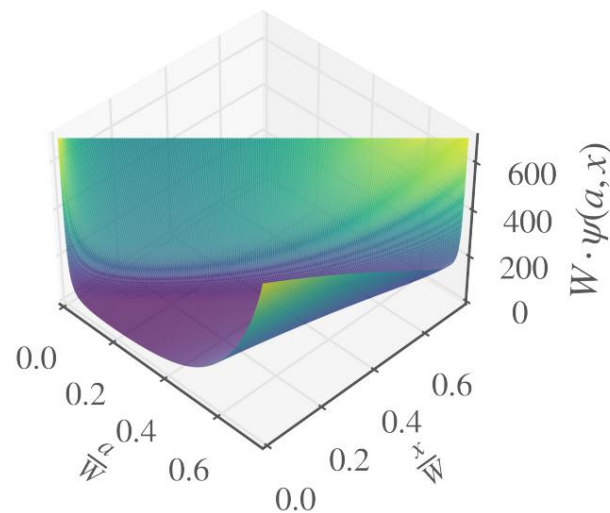


Figura 5. Gráfica de la función kernel $\psi(a, x)$, utilizada para calcular el CMOD a partir del conocimiento de las tensiones residuales a lo largo de la fisura introducida, mediante una doble integración. Teniendo unidades de $1/\text{Longitud}$, se normaliza en $1/W$. La función kernel se define en el dominio triangular $0 \leq x < a < W$, y tiene una singularidad integrable a lo largo de su diagonal $x = a$. Las coordenadas X e Y están normalizadas por el ancho de la muestra; en el gráfico, tanto a como x están limitados a $0,75 W$, de forma consistente con el experimento numérico propuesto. El gráfico de superficie está codificado por colores según la coordenada Z .

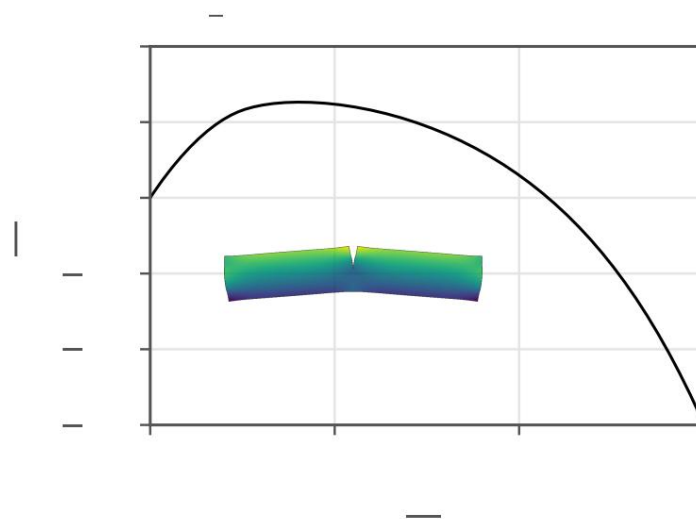


Figura 6. CMOD normalizada que corresponde a la distribución de tensiones residuales definida por la Ecuación (11), luego de un corte progresivo de longitud normalizada $a/W < 0,75$ en una placa larga en deformación plana. Dado que el corte introducido tiene un espesor no nulo, se permite un CMOD negativo y no genera automáticamente el cierre de la grieta. La muestra está codificada por colores según la magnitud de los desplazamientos a lo largo de la cara normal de la grieta.

Como $\psi(a, x)$ está disponible en forma cerrada, la Ecuación (8) permite calcular la CMOD correspondiente a cualquier distribución de tensiones residuales relajadas $\sigma(x)$ mediante una doble integración de una función, operación que también puede ser realizado a mano, analíticamente. Sin embargo, el problema práctico radica en medir $v_0(a)$ y encontrar $\sigma(x)$, lo que implica una inversión del operador definido por la ecuación (8). Desafortunadamente, con algunas raras excepciones, una expresión analítica de esta relación inversa, es decir, una expresión de forma cerrada

que permite la determinación de $\sigma(x)$ a partir de $v_0(a)$, generalmente no está disponible. Como consecuencia, aquí también se adopta el esquema de la Figura 2.

Se elige un espacio de tensión de dimensión finita abarcado por una base adecuada, luego se calcula la matriz de calibración para el problema discretizado evaluando el CMOD correspondiente a los elementos de la base de tensión en un número fijo de longitudes de corte. La única diferencia con el estado actual de la técnica del método de corte longitudinal es que aquí esta operación se puede realizar analíticamente, sin recurrir a análisis FE. En términos formales, si $\beta = [\beta_1(z), \beta_2(z), \dots, \beta_n(z)]$ es la base n -dimensional elegida y $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ es el vector de m longitudes de corte donde se prueba el CMOD, se puede definir una matriz

$$A_{ij} = \int_0^{a_i} \int_0^s \psi(s, t) \beta_j(t) dt ds \quad (13)$$

de modo que, para una distribución de tensiones residuales dada $\sigma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \beta_j(x)$, se cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned} v(a_i, 0) &= \int_0^{a_i} \int_0^s \psi(s, t) \sigma(t) dt ds \\ &= \int_0^{a_i} \int_0^s \psi(s, t) \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \beta_j(t) dt ds \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \int_0^{a_i} \int_0^s \psi(s, t) \beta_j(t) dt ds \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \sigma_j \end{aligned} \quad (14)$$

Al registrar los CMOD medidos en una matriz $v = [v(a_1, 0), v(a_2, 0), \dots, v(a_m, 0)]$ y recogiendo las coordenadas de la distribución de tensiones residuales con respecto a la base elegida $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$, se obtiene un sistema lineal, que representa la discretización de la Ecuación (8):

$$A \sigma = v \quad (15)$$

Finalmente, la ecuación (15) generalmente se resuelve en el sentido de mínimos cuadrados buscando la solución que mejor se aproxima a las muestras de medición registradas. De hecho, es bastante común explotar las ventajas estadísticas de tener más puntos de muestreo de los estrictamente necesarios [16].

En este análisis, se emplean dos espacios de tensiones diferentes, debido a su amplia aplicación en la comunidad de tensiones residuales: el espacio de funciones constantes por tramos y el espacio de polinomios, que, respectivamente, se suelen denominar método integral [21] y el método de series de potencias [42]. Para explorar el equilibrio entre sesgo y varianza, se supone un número fijo de 32 longitudes de corte sondadas, mientras que la dimensión de la base de tensión varía entre 1 y 32; para el método integral, esto se realiza aumentando el número de intervalos de cálculo, mientras que para el método de series de potencias, esto se realiza agregando términos de orden superior en la expansión polinomial.

Sólo para los cálculos numéricos se adopta una $W = 20$ mm, mientras que el error estándar del instrumento de medición CMOD se supone que es de 1 μ m. Luego se muestrea la CMOD verdadera, evaluada mediante la aplicación directa de la ecuación (8), en las longitudes de corte sondadas y se perturba con un ruido gaussiano iid que tiene una desviación estándar igual al error supuesto. En total, se muestrean 1000 perturbaciones aleatorias del CMOD verdadero y se obtiene un número igual de resultados en términos de tensiones residuales identificadas. Además, para cada esquema de discretización se calculan dos soluciones adicionales:

- La solución ideal, que es la correspondiente a medidas CMOD perfectas y sin errores.
- La mejor solución, que es el elemento de la base de tensiones elegida que mejor se aproxima a la solución verdadera en el sentido de mínimos cuadrados.

Todos los resultados se recogen en las Figuras 7 y 8, correspondientes respectivamente a la aplicación del Método Integral y el Método de Series de Potencias.

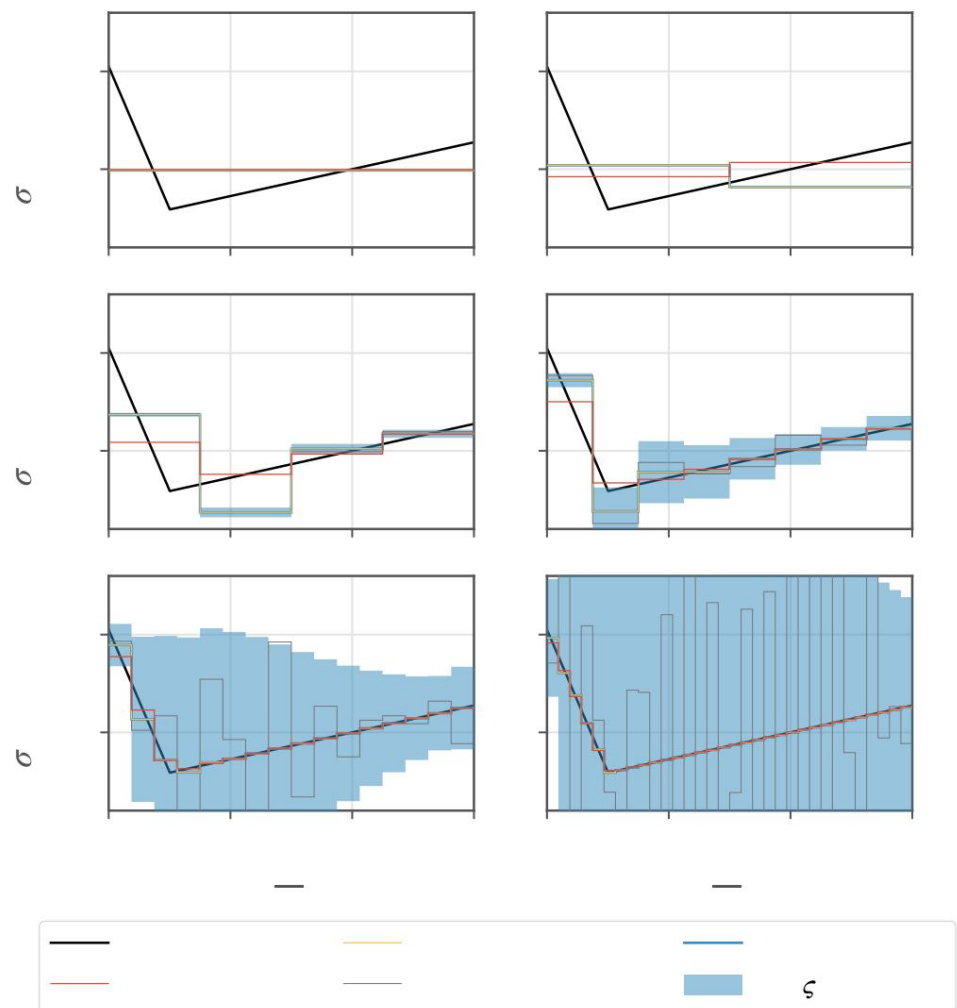


Figura 7. Resultados de los experimentos numéricos, obtenidos empleando el espacio de tensiones de dimensión finita que consta de funciones constantes por partes. En total, se generan 1000 perturbaciones aleatorias del CMOD teórico correspondiente a $\sigma(x)$ definido por la Ecuación (11), luego las soluciones de tensión residual se identifican invirtiendo el sistema lineal reportado en la Ecuación (15). La mejor solución es la que mejor se aproxima a la solución verdadera; la solución ideal es la que se obtendría con mediciones sin errores. Para discretizaciones de baja dimensión, la varianza de la solución obtenida es pequeña, pero el espacio de tensión en sí no puede representar la solución verdadera, lo que introduce un sesgo; es más, la solución ideal ni siquiera coincide con la mejor. Para discretizaciones de alta dimensión, la solución ideal converge a la verdadera, pero la distribución de las soluciones obtenidas tiene una varianza prácticamente inutilizable.

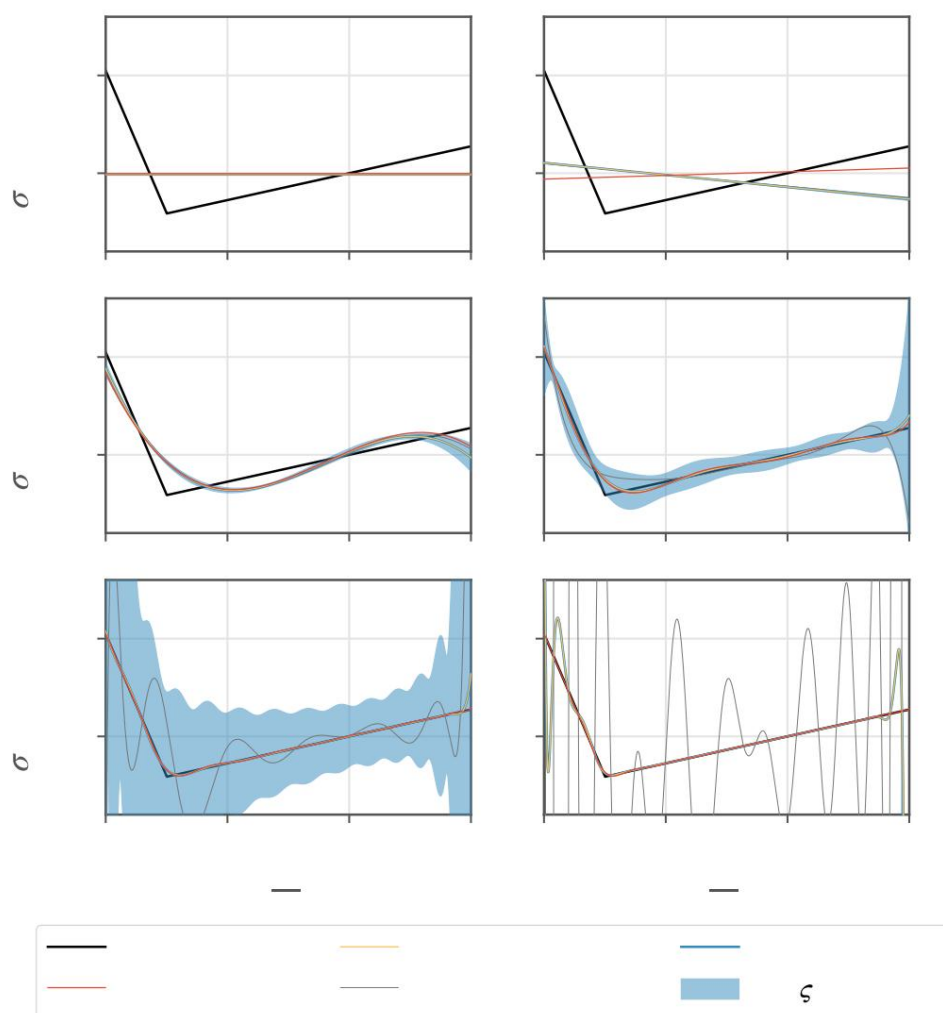


Figura 8. Resultados de los experimentos numéricos, obtenidos empleando el espacio de tensiones de dimensión finita formado por polinomios. En total, se generan 1000 perturbaciones aleatorias del CMOD teórico correspondiente a $\sigma(x)$ definido por la Ecuación (11), luego las soluciones de tensión residual se identifican invirtiendo el sistema lineal reportado en la Ecuación (15). La mejor solución es la que mejor se aproxima a la solución verdadera; la solución ideal es la que se obtendría con mediciones sin errores. Para la discretización de baja dimensión, la varianza de la solución obtenida es pequeña, pero el espacio de tensión en sí no puede representar la solución verdadera, lo que introduce un sesgo; es más, la solución ideal ni siquiera coincide con la mejor. Para discretizaciones de alta dimensión, la solución ideal converge a la verdadera, pero la distribución de las soluciones obtenidas tiene una varianza prácticamente inutilizable.

4. Discusión

Las figuras 7 y 8 ilustran el síntoma más claro del mal planteamiento de un problema inverso. Cuando el número de grados de libertad en la discretización de dimensión finita es bajo, la sensibilidad a los errores es pequeña y las soluciones son sustancialmente independientes del ruido de medición. Sin embargo, la base elegida no es capaz de representar correctamente la verdadera solución, por lo que el resultado obtenido muestra un sesgo –potencialmente peligroso cuando se trata de seguridad estructural– respecto al resultado exacto. Como se señala en [27], la situación no cambia incluso cuando la solución obtenida se interpreta como la mejor representación del resultado exacto dentro de la base elegida, que, en el caso del Método Integral, coincidiría con el promedio de las verdaderas. solución en un subintervalo de cálculo. Como se muestra en las figuras, incluso la solución correspondiente a mediciones sin errores está sesgada con respecto a la mejor representación del resultado exacto en el espacio de dimensión fin

En un intento por reducir el sesgo, se puede aumentar el número de grados de libertad de modo que la solución de dimensión finita sea una aproximación prácticamente razonable del espacio de dimensión infinita original. Sin embargo, esto a su vez produce un proceso de inversión que es extremadamente sensible a los errores de medición, por lo tanto, una variación de la solución que hace que cada resultado obtenido sea prácticamente inutilizable. Esto se sabe desde hace mucho tiempo en la literatura, también en relación con otros métodos de relajación que no necesariamente requieren la introducción de un corte similar a una grieta en la muestra [43-45]. En términos intuitivos, tener más grados de libertad acerca el problema discretizado a su contraparte originalmente mal planteada, que tiene una sensibilidad infinita a los errores de entrada. Tenga en cuenta que este efecto no depende de un conocimiento imperfecto del operador integral, como ocurre cuando se estima numéricamente [46], porque en este ejemplo, el operador del problema directo se conoce analíticamente. Esta es la razón principal por la cual el método de cumplimiento de grietas es particularmente instructivo en estos aspectos; no obstante, se podrían haber hecho consideraciones similares para el método de eliminación de capas [13] y para el método de perforación de Sachs [12], cuyo núcleo de integración se conoce analíticamente.

Como se muestra en la Figura 3, el mayor problema relacionado con la mala postura es que el sesgo no es observable. Al calcular múltiples soluciones (como se hace en este caso) se puede notar la variabilidad en la solución con respecto al error de entrada. Debido a la linealidad de la ecuación (15), los errores de entrada también pueden propagarse teóricamente mediante el procedimiento de inversión. Sin embargo, nunca se puede saber el sesgo que está introduciendo el procedimiento de solución elegido; por ejemplo, una solución constante dada puede corresponder igualmente a una solución de tensión residual verdadera realmente constante o a una distribución que varía arbitrariamente y que causalmente produce la misma solución discretizada.

Este aspecto es particularmente dramático para construir intervalos de confianza para la solución. Sólo se pueden construir los intervalos de confianza relativos a la solución ideal (es decir, correspondientes a medidas perfectas), pero el interés práctico de esta construcción es esencialmente nulo, ya que ni siquiera se garantiza que la solución ideal coincida con la mejor aproximación de la solución ideal. solución en el espacio elegido. El riesgo es que, en un esfuerzo por lograr intervalos de confianza más estrechos, el analista pueda optar implícitamente por aumentar el sesgo de la solución obtenida, sin que esto sea evidente en los resultados.

También existen técnicas alternativas que apuntan a regularizar el problema; es decir, reducir la varianza de la solución. La más notable es posiblemente la regularización de Tikhonov [47-49]. Sin embargo, ninguna de estas técnicas es inmune al equilibrio entre sesgo y varianza, como se analiza en [26,27]. De hecho, también introducen un sesgo en la solución que no puede cuantificarse a priori.

Sólo existe una solución a los problemas generados por el mal planteamiento de un problema inverso y su resultante equilibrio entre sesgo y varianza: obtener información adicional a través de la física, que es capaz de establecer a priori que la solución debe tener una forma y/o una forma específica. cumplir con ciertas restricciones bien definidas. Tenga en cuenta que esta información no se puede deducir únicamente mediante ecuaciones matemáticas. Sólo en ese caso, al asumir un espacio de solución de dimensión finita que cumple esas condiciones, no se introduce ningún sesgo y cualquier cuantificación de incertidumbres puede considerarse rigurosa. Esto equivale a afirmar que la sensibilidad al error no debería impulsar la elección del esquema de discretización; más bien debería ser lo contrario. Los supuestos físicos determinan el esquema de discretización, que luego produce su correspondiente sensibilidad a los errores de entrada y establece requisitos para los instrumentos de medición. Si estos requisitos son imposibles de cumplir, la medición no es factible desde el punto de vista de la ingeniería.

Por ejemplo, si algo permite al analista de tensiones afirmar que la distribución de las tensiones residuales es razonablemente lineal a lo largo del espesor (posiblemente causada por la restauración de incompatibilidades de campo lejano en el campo de desplazamiento de una viga delgada), no hay sesgo al suponer que la solución pertenece al espacio de funciones polinómicas de primer grado y la varianza asociada con un número tan bajo de grados de libertad es generalmente bastante limitada.

5. Conclusiones

Los puntos principales del artículo se describen a continuación:

- Se demuestra y se distingue claramente de su propiedad más general de estar mal condicionado el problema de reconstruir tensiones residuales a partir de mediciones del desplazamiento de apertura de grieta después de un corte progresivo introducido en la muestra.
- A través de un ejemplo numérico, se presenta el indicador típico de un problema mal planteado, a saber, el equilibrio entre sesgo y varianza, junto con sus consecuencias potencialmente devastadoras sobre la capacidad de cuantificar rigurosamente las incertidumbres. Por lo tanto, es extremadamente importante reconocer su presencia y evitar acciones que sólo mejoren aparentemente la calidad de la solución. • Como se destacó en trabajos anteriores de los autores, se subraya nuevamente que ninguna maquinaria matemática puede superar permanentemente la infinita sensibilidad a los errores de entrada que es inherente a los problemas mal planteados. La solución debe encontrarse en la física del problema, apuntando a piezas de información que permitan controlar la varianza de la solución sin introducir sesgos significativos y, sobre todo, incomputables.

Contribuciones de los autores: Conceptualización: MB, TG; Metodología: MB, TG; Investigación: MB, TG; Redacción – Borrador original: TG; Redacción – Revisión y edición: MB; Supervisión: MB Todos los autores han leído y aceptado la versión publicada del manuscrito.

Financiamiento: Esta investigación no recibió financiamiento externo.

Declaración de la Junta de Revisión Institucional: No aplicable.

Declaración de Consentimiento Informado: No aplicable.

Declaración de disponibilidad de datos: No se crearon ni analizaron nuevos datos en este estudio. El intercambio de datos no se aplica a este artículo.

Conflictos de intereses: Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

Abreviaturas

En este manuscrito se utilizan las siguientes abreviaturas:

CMOD	Desplazamiento de apertura de boca de crack
FE	Elemento finito
SIF	Factor de intensidad del estrés
	Función de peso WF

Referencias

1. Timoshenko, S. Historia de la resistencia de los materiales: con un breve relato de la historia de la teoría de la elasticidad y la teoría de las estructuras; Courier Corporation: North Chelmsford, MA, EE. UU., 1983.
2. Schajer, GS; Winiarski, B.; Withers, PJ Medición de la tensión residual de perforación con corrección de artefactos mediante DIC de campo completo. Exp. Mec. 2013, 53, 255–265. [\[Referencia cruzada\]](#)
3. Baldi, A. Medición de tensión residual mediante perforación de orificios y técnicas integradas de correlación de imágenes digitales. Exp. Mec. 2014, 54, 379–391. [\[Referencia cruzada\]](#)
4. Harrington, JS; Schajer, GS Medición de tensiones estructurales mediante perforación y DIC. Exp. Mec. 2017, 57, 559–567. [\[Referencia cruzada\]](#)
5. Hagara, M.; Trebuřna, F.; Pastor, M.; Huřnady, R.; Lengvarský, P. Análisis de los aspectos de la cuantificación de tensiones residuales realizado por DIC 3D combinado con un método estandarizado de perforación de agujeros. Medición 2019, 137, 238–256. [\[Referencia cruzada\]](#)
6. Salehi, SD; Rastak, MA; Shokrieh, MM; Barrallier, L.; Kubler, R. Medición de campo completo de tensiones residuales en materiales compuestos utilizando técnicas de correlación de imágenes digitales y corte incremental. Exp. Mec. 2020, 60, 1239–1250. [\[Referencia cruzada\]](#)
7. Petzing, JN; Tyrer, JR Desarrollos y aplicaciones recientes en interferometría de patrón de moteado electrónico. J. Cepa Anal. Ing. Des. 1998, 33, 153–169. [\[Referencia cruzada\]](#)
8. Schajer, GS; Steinzig, M. Cálculo de campo completo de tensiones residuales de perforación de pozos a partir de datos de interferometría de patrón de moteado electrónico. Exp. Mec. 2005, 45, 526–532. [\[Referencia cruzada\]](#)

9. Gubbels, WL; Schajer, GS Desarrollo de correlación de imágenes digitales tridimensionales utilizando una única cámara en color y proyección difractiva de moteado. Exp. Mec. 2016, 56, 1327–1337. [\[Referencia cruzada\]](#)
10. Schajer, GS; Primer, MB; Withers, PJ ¿Por qué es tan difícil medir las tensiones residuales? Exp. Mec. 2022, 62, 1521–1530. [\[Referencia cruzada\]](#)
11. Noyan, IC; Cohen, JB Estrés residual: medición por difracción e interpretación; Springer: Berlín/Heidelberg, Alemania, 2013.
12. Sachs, G.; Espey, G. La medición de tensiones residuales en metales. Edad del Hierro 1941, 148, 148.
13. Treuting, RG; Leer, WT Una determinación mecánica de la tensión residual biaxial en materiales laminados. J. Aplica. Física. 1951, 22, 130-134. [\[Referencia cruzada\]](#)
14. Beaney, EM Medición precisa de la tensión residual en cualquier acero utilizando el método del orificio central. Cepa 1976, 12, 99-106. [\[Referencia cruzada\]](#)
15. Schajer, GS Aplicación de cálculos de elementos finitos a mediciones de tensión residual. J. Ing. Madre. Tecnología. 1981, 103, 157–163. [\[Referencia cruzada\]](#)
16. Prime, MB Medición de tensión residual mediante extensión sucesiva de una ranura: el método de cumplimiento de grietas. Aplica. Mec. Rdo. 1999, 52, 75–96. [\[Referencia cruzada\]](#)
17. Prime, MB Mapeo transversal de tensiones residuales midiendo el contorno de la superficie después de un corte. J. Ing. Madre. Tecnología. 2001, 123, 162–168. [\[Referencia cruzada\]](#)
18. Schajer, GS Métodos prácticos de medición de tensiones residuales; John Wiley & Sons: Hoboken, Nueva Jersey, EE. UU., 2013.
19. Schajer, GS Corrección de la excentricidad del orificio para mediciones de tensión residual durante la perforación. Exp. Mec. 2022, 62, 1603–1613. [\[Referencia cruzada\]](#)
20. Bueckner, HF Principio novedoso para el cálculo de factores de intensidad de tensión. Z. Fuer Angew. Matemáticas. Mec. 1970, 50, 529–546.
21. Schajer, GS; Prime, MB Uso de soluciones inversas para mediciones de tensiones residuales. J. Ing. Madre. Tecnología. 2006, 128, 375. [\[Referencia cruzada\]](#)
22. Schajer, GS Medición de tensiones residuales no uniformes utilizando el método de perforación de agujeros. Parte I Cálculo del estrés Procedimientos. J. Ing. Madre. Tecnología. 1988, 110, 338–343. [\[Referencia cruzada\]](#)
23. Schajer, GS Medición de tensiones residuales no uniformes utilizando el método de perforación de agujeros. Parte II Aplicación práctica de la Método Integral. J. Ing. Madre. Tecnología. 1988, 110, 344–349. [\[Referencia cruzada\]](#)
24. Schajer, GS; Prime, MB Extrapolación de la solución de tensión residual para el método de corte longitudinal utilizando restricciones de equilibrio. J. Ing. Madre. Tecnología. 2007, 129, 227–232. [\[Referencia cruzada\]](#)
25. Schajer, GS; Altus, E. Análisis de errores de cálculo de tensión para mediciones incrementales de tensión residual de perforación de agujeros. J. Ing. Madre. Tecnología. 1996, 118, 120-126. [\[Referencia cruzada\]](#)
26. Beghini, M.; Grossi, T.; Primer, M.; Santus, C. Mal planteamiento y la compensación entre sesgo y varianza en la medición inversa de la tensión residual Soluciones. Exp. Mec. 2023, 63, 495–516. [\[Referencia cruzada\]](#)
27. Beghini, M.; Grossi, T. Hacia una cuantificación confiable de la incertidumbre en mediciones de estrés residual con métodos de relajación: Encontrar tensiones residuales promedio es un problema bien planteado. Exp. Mec. 2024, 64, 851–874. [\[Referencia cruzada\]](#)
28. Beghini, M.; Bertini, L.; Cococcioni, M.; Grossi, T.; Santus, C.; Benincasa, A. Regularización de mediciones de tensión residual de perforación con orificios excéntricos: un enfoque con funciones de influencia. J. Mater. Ing. Llevar a cabo. 2024, 1–7. [\[Referencia cruzada\]](#)
29. Beghini, M.; Grossi, T.; Santus, C. Validación de una configuración de roseta de galgas extensométricas en una muestra en voladizo: aplicación a una calibración Banco para tensiones residuales. Madre. Hoy: Proc. 2023, 93, 719–724. [\[Referencia cruzada\]](#)
30. Beghini, M.; Grossi, T.; Santus, C.; Valentini, E. Un banco de calibración para validar estrategias sistemáticas de compensación de errores en mediciones de perforación de pozos. En actas de la 11.ª Conferencia internacional sobre tensiones residuales del ICRS, Nancy, Francia, 27-30 de marzo de 2022. [\[CrossRef\]](#)
31. Beghini, M.; Grossi, T.; Santus, C.; Seralessandri, L.; Gulisano, S. Mediciones de tensión residual en una muestra de aluminio laminada profunda mediante difracción de rayos X y perforación, validadas en un banco de calibración. Conferencia de la PIO. Ser. Madre. Ciencia. Ing. 2023, 1275, 012036. [\[Referencia cruzada\]](#)
32. Cheng, W.; Finnie, I. Medición de la tensión residual y método de corte longitudinal; Serie de Ingeniería Mecánica; Springer: Nueva York, Nueva York, Estados Unidos, 2007.
33. Vaidyanathan, S.; Finnie, I. Determinación de tensiones residuales a partir de mediciones del factor de intensidad de tensión. J. Ing. Básica. 1971, 93, 242–246. [\[Referencia cruzada\]](#)
34. Schindler, HJ; Cheng, W.; Finnie, I. Determinación experimental de factores de intensidad de estrés debido a tensiones residuales. Exp. Mec. 1997, 37, 272–277. [\[Referencia cruzada\]](#)
35. Anderson, TL Mecánica de fracturas: fundamentos y aplicaciones; Prensa CRC: Boca Ratón, FL, EE. UU., 2017.
36. Rice, JR Algunas observaciones sobre los campos de tensión elásticos en las puntas de las grietas. En t. J. Estructura de sólidos. 1972, 8, 751–758. [\[Referencia cruzada\]](#)
37. Lamm, PK Un estudio de métodos de regularización para ecuaciones de Volterra de primer tipo. En Encuestas sobre Métodos de Solución de Problemas Inversos; Colton, D., Engl, HW, Louis, AK, McLaughlin, JR, Rundell, W., Eds.; Springer Viena: Viena, Austria, 2000; págs. 53–82.
38. von Mises, R. Sobre el principio de Saint Venant. Toro. Soy. Matemáticas. Soc. 1945, 51, 555–562. [\[Referencia cruzada\]](#)
39. Goldberg, Métodos RR de Análisis Real; Oxford e IBH Publishing: Delhi, India, 1970.
40. Rudin, W. Análisis real y complejo, 3ª ed.; McGraw-Hill: Nueva York, NY, Estados Unidos, 1987.
41. Wu, XR; Carlsson, J. Funciones de peso y soluciones de factores de intensidad del estrés; Pergamon Press: Oxford, Reino Unido, 1991.

-
42. Primer, MB; Hill, MR Incertidumbre, error de modelo y selección de orden para soluciones inversas de tensión residual ampliadas en serie. J. Ing. Madre. Tecnología. 2006, 128, 175–185. [\[Referencia cruzada\]](#)
43. Zuccarello, B. Pasos de cálculo óptimos para la evaluación de la tensión residual mediante el método de perforación incremental. Exp. Mec. 1999, 39, 117–124. [\[Referencia cruzada\]](#)
44. Zuccarello, B. Optimización de la distribución de incrementos de profundidad en el método de núcleo de anillo. J. Cepa Anal. Ing. Des. 1996, 31, 251–258. [\[Referencia cruzada\]](#)
45. Olson, MD Diseño de medición para mapeo de tensión residual mediante corte longitudinal. Exp. Mec. 2022, 62, 393–402. [\[Referencia cruzada\]](#)
46. Schajer, GS Datos de calibración compactos para mediciones de tensión residual de perforación en muestras de espesor finito. Exp. Mec. 2020, 60, 665–678. [\[Referencia cruzada\]](#)
47. Tikhonov, AN; Goncharsky, AV; Stepanov, VV; Yagola, AG Métodos numéricos para la solución de problemas mal planteados; Springer Países Bajos: Dordrecht, Países Bajos, 1995. [\[CrossRef\]](#)
48. Schajer, GS Perfilado de tensión residual de perforación con suavizado automatizado. J. Ing. Madre. Tecnología. 2007, 129, 440–445. [\[Referencia cruzada\]](#)
49. Smit, TC; Reid, R. Tikhonov Regularización para el método integral totalmente acoplado de perforación incremental. Exp. Mec. 2024, 64, 275–290. [\[Referencia cruzada\]](#)

Descargo de responsabilidad/Nota del editor: Las declaraciones, opiniones y datos contenidos en todas las publicaciones son únicamente de los autores y contribuyentes individuales y no de MDPI ni de los editores. MDPI y/o los editores renuncian a toda responsabilidad por cualquier daño a personas o propiedad que resulte de cualquier idea, método, instrucción o producto mencionado en el contenido.