

Definition einer kinematischen Metrik für Roboter manipulatoren

Krzysztof Tchoń Ignacy Dulęba Institut für
Ingenieurkybernetik Technische
Universität Breslau ul.
Janiszewskiego 11/17,
50-372 Breslau, Polen

Abstrakt

Unter Verwendung einer Riemannschen Metrik in der speziellen Euklidischen Gruppe definieren wir eine kinematische Metrik für den Raum der Kinematik von Roboter manipulatoren. Die Metrik kann als Instrument für den kinematischen Entwurf und die Leistungsbewertung von Roboter manipulatoren verwendet werden.

Schlüsselwörter: Kinematik, Exponentialkoordinaten, Riemannsche Metrik, Geodäten, Tschebyscheff-Metrik, Näherung.

1. EINLEITUNG

Das unverzichtbare Element der optimalen Auslegung der Kinematik von Roboter manipulatoren ist das Bewertungsverfahren. Die Bewertung der Kinematik sollte eine kinematische Präferenzordnung festlegen und schließlich zur Auswahl optimaler Designs führen. Mehrere kinematische Leistungsindizes, die in der Roboterliteratur behandelt werden, befassen sich genau mit der Bewertungsfrage; vgl. zB (Yoshikawa 1985, Klein und Blaho 1987, Park und Brockett 1989).

Das Thema dieser Arbeit kann auch als Beitrag zum Bestand an Bewertungswerkzeugen für die Kinematik von Roboter manipulatoren betrachtet werden. Genauer gesagt schlagen wir vor, die Bewertung der Kinematik auf einem Abstandsmaß (einer Metrik) zwischen Kinematiken zu stützen. Zu diesem Zweck betrachten wir Kinematik als kontinuierliche Abbildungen vom kompakten inneren (Gelenk-)Raum X in den Raum der äußeren Positionen und Orientierungen des Effektors, identifiziert mit der speziellen euklidischen Gruppe $SE(3)$. Unsere Konstruktion einer kinematischen Metrik ist Standard; Es liefert eine Metrik, oft auch Tschebyscheff - Metrik Karten C^0 genannt, für die Menge der kontinuierlichen $(X, SE(3))$ von 3) und $d : SE(3) \times SE(3)$ in $SE(3)$. Wenn also $f : \tilde{Y} \rightarrow R$ ist die Metrik in $SE(3)$ durch die Riemannsche Metrik definiert ist, dann ist die Tschebyscheff-Metrik definiert als $\tilde{Y}(f, \tilde{Y}) = \max_{x \in X} d(f(\tilde{Y}(x)), \tilde{Y}(x))$. Es sollte jedoch zugegeben werden, dass unsere Konstruktion, obwohl sie gut motiviert ist und zu berechenbaren Formeln führt, nicht die einzig mögliche ist, da es keine natürliche Riemannsche Metrik für $SE(3)$ gibt. Detaillierte Argumente für die in diesem Artikel verwendete Riemannsche Metrik werden in Abschnitt 2 dargelegt.

Nachdem Sie eine metrische Struktur in C eingeführt⁰ ($X, SE(3)$) sind wir nicht nur in der Lage haben, messen Sie den Abstand zwischen zwei Kinematiken, berücksichtigen Sie aber auch die folgende Kinematik Approximationsproblem. Finden Sie bei gegebener vorgeschriebener kinematischer $^0(X, SE(3))$, Leistung $f \in C$ und einer Familie von Kinematiken k_v , die von geometrischen Parametern $v \in V$ (Abmessungen von Verbindungen, Verdrehungswinkeln, Verschiebungsparametern, (Paul 1981)) abhängig sind, die beste kinematische Näherung für f im Sinne von metrisch $\tilde{y}$.

Als natürlichen Zwischenschritt zur Definition der Metrik im Satz der Roboterkinematik haben wir explizite Formeln für Exponentialkoordinaten und für die Metrik d in $SE(3)$ gefunden.

Die letzte Metrik definiert den Abstand zwischen zwei Punkten in $SE(3)$ als gleich der minimalen Länge einer Kurve, die die Punkte verbindet. Die hier betrachtete Metrik in $SE(3)$ ähnelt dem in (Taylor 1983) eingeführten Maß für Verschiebungs- und Rotationsabweichungen, führt jedoch zu größeren Abstandswerten, die die intrinsische geometrische Struktur von $SE(3)$ genauer widerspiegeln. Die Konstruktion dieser Metrik ergibt auch einen spezifischen Ansatz zur Trajektorienplanung für die Punkt-zu-Punkt-Steuerung von Roboterarmen im Außenraum, der auf der Verfolgung einer geodätischen Verbindung zweier Punkte in $SE(3)$ beruht. Ein ähnlicher Ansatz zur Flugbahnplanung im Innenraum eines Manipulators wurde in (Shin und McKay 1986) beschrieben.

In (Tchoń und Dulęba 1991) wurde ein Algorithmus vorgestellt, der Exponentialkoordinaten in $SE(3)$ zur Erzeugung von (geodätischen) Trajektorien minimaler Länge im Arbeitsbereich des Manipulators verwendet.

Der Aufsatz ist wie folgt aufgebaut. In Abschnitt 2 führen wir grundlegende mathematische Konzepte ein, wie eine Definition der kinematischen Metrik, exponentielle Koordinaten in $SE(3)$, linksinvariante Riemannsche Metriken in $SE(3)$, Geodäten und eine durch die Riemannsche induzierte Metrik in $SE(3)$. Struktur. Wir formulieren außerdem eine Liste von Anforderungen, die eine „vernünftige“ Riemannsche Metrik auf $SE(3)$ erfüllen sollte, und treffen eine spezifische Auswahl der Metrik. Abschnitt 3 enthält die wichtigsten Ergebnisse. Wir geben dort eine explizite Formel für Exponentialkoordinaten in $SE(3)$ an, definieren ihren Definitionsbereich und stellen einen lokalen Ausdruck für die Metrik in $SE(3)$ bereit. In Abschnitt 4 berechnen wir die kinematische Metrik für sechs beispielhafte Kinematiken, einschließlich des PUMA 600-Manipulators. Abschnitt 5 enthält eine Skizze zukünftiger Roboteranwendungen der Metrik. Der Artikel endet mit Abschnitt 6, der sich mit den Recheneigenschaften der kinematischen Metrik befasst. Die Bedeutung symbolischer Berechnungen wird anerkannt und rechnerisch nachvollziehbare Schätzungen der Metrik in $SE(3)$ vorgeschlagen.

2 GRUNDKONZEPTE

Wir werden die Kinematik starrer Roboterarmen mit n Freiheitsgraden betrachten, die mit prismatischen oder rotierenden Gelenken ausgestattet sind. Eine solche Kinematik kann mathematisch als kontinuierliche Karte dargestellt werden

$$k : X \rightarrow SE(3), \quad (1) \text{ wobei Brockett 1984, Loncaric 1985).}$$

Berücksichtigung physikalischer Bewegungsbeschränkungen an den Gelenken kommen wir zu dem Schluss, dass der Innenraum X eine kompakte Teilmenge von R^n ist. Lassen Sie uns einen Basiskoordinatenrahmen für den Manipulator festlegen. Dann kann die Gruppe $SE(3)$ als halbdirektes Produkt von Rotationen und Translationen bezüglich des Basissystems ausgedrückt werden, also $SE(3) \cong SO(3) \times R^3$. Hier bezeichnet $SO(3)$ die spezielle orthogonale Gruppe in R^3 , also die

Gruppe aller 3 mal 3 Matrizen R mit $\det R = 1$ und $R \cdot R^T = I_3$, R_3 ist die Gruppe der Übersetzungen in R_3 . Gemäß der bekannten Matrixdarstellung ist jedes Element von $RT(0,1)$

$SE(3)$ kann als eine 4 x 4-Matrix der Form betrachtet werden mit $R \in SO(3)$,

$T \in R_3$, (Paul 1981). Gegeben sei eine Konfiguration $x \in X$ des Manipulators, die Kinematik

$k(x) = \begin{pmatrix} R(x) & T(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bedeuten, dass der Effektorkoordinatenrahmen um verschoben wurde

$T(x)$ bezüglich des Grundrahmens, während seine Ausrichtung durch $R(x)$ beschrieben wird.

Mit K_n sei die Menge aller Kinematiken (1) mit n Freiheitsgraden bezeichnet. Offensichtlich bezieht sich $K_n \subset C^n = (X, SE(3))$ – die Menge der kontinuierlichen Karten von X in $SE(3)$. Ein Stan

C. Die Art und Weise, wie man C_n mit einer Metrik ausstattet, bezieht sich auf eine Metrik in $SE(3)$.

Moment, in dem d eine solche Metrik bezeichnet. Dann gilt für angenommen, für C_n definieren wir, (Engelking 1975)

$$d(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x)) \quad (2)$$

Um die Metrik d zu konstruieren, müssen wir die Eigenschaften von $SE(3)$ weiter untersuchen.

Zunächst beobachten wir, dass die spezielle euklidische Gruppe $SE(3)$ die Struktur einer zusammenhängenden Lie-Gruppe trägt und dass $SE(3) \cong \mathbb{R}^3 \ltimes \mathbb{R}^3$ ist. Unter Verwendung der differenzierbaren Struktur von $SE(3)$ kann man die Kinematik (1) als glatt betrachten (d. h. unendlich stetig differenzierbar) oder sogar analytische Karten. Die Lie-Algebra $se(3)$ der euklidischen Gruppe ist das Produkt $se(3) = so(3) \times \mathbb{R}^3$, wobei $so(3)$ die Menge aller

$\mathfrak{g}$ bezüglich der Identifikation $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{g} = [r] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix} \in so(3)$, $se(3) = \mathbb{R}^6$. $\mathfrak{g}$ schiefssymmetrischen Matrizen der Größe 3 mal 3 bezeichnet.

Es gibt eine glatte Abbildung $\exp : se(3) \rightarrow SE(3)$, lokal einen Diffeomorphismus, dessen Inversion die sogenannten Exponentialkoordinaten in $SE(3)$ einführt, $\exp^{-1} : (U, E) \rightarrow (\mathbb{R}^6, 0)$, definiert auf einer offenen Umgebung U des Einheitselements $E = I_4 \in SE(3)$. Lassen

$s = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$, und bezeichnen die Exponentialkoordinaten von s mit $(r, t) = \begin{pmatrix} [r] & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

. Dann finden wir, ähnlich wie (Loncaric 1985), diesen $\begin{pmatrix} [r] & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Erträge

$R = e^{T[r]} A$ wobei $A = s^{-1} \exp^{-1}(s)$ ist die Matrix-Exponentialfunktion.

nach dem Euler-Theorem (Richtmyer 1981) die Eigenwerte von R gleich 1, e mit $\cos \theta = \pm i\theta$,

$\frac{1}{12} \cdot (T^T R - 1)$, $T^T R = R_{11} + R_{22} + R_{33}$. Folglich hat $[r]$ Eigenwerte $0, \pm i\theta$ und Eigenwerte von A betragen $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \pm 2i \cdot \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$. Letztlich,

da $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$, Wir schließen daraus, dass für $0 < \theta < \pi$ die Exponentialfunktion gilt

Koordinaten von $s = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind gut definiert und werden wie folgt ausgedrückt

$$\exp^{-1} \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (r, t) \text{ wobei } [r] = \ln R, \quad t = A^{-1} \cdot T \quad (3)$$

Oben bezeichnet $\ln R$ den Matrixlogarithmus, siehe (Gantmacher 1988). Zweitens sei Q eine symmetrische positiv definite 6 x 6-Matrix. Offensichtlich definiert Q ein inneres Produkt in $\mathbb{R}^6$, indem es jedem $x, y \in \mathbb{R}^6$ die Zahl $(x, Qy) = x^T Qy$ zuordnet. Die Matrix Q kann zur Einführung einer linksinvarianten Riemannschen Metrik in $SE(3)$ verwendet werden, indem $\dot{y}, \dot{y} \in T_s SE(3)$

der Wert von $(\dot{y}, \dot{y})(s) = (L_{\dot{s}^{-1}} \dot{y}, Q L_{\dot{s}^{-1}} \dot{y})$ zugeschrieben wird $\dot{y}(s)$, (Arnold 1978). Hier bezeichnet

$T_s SE(3)$ den Tangentenraum an $SE(3)$ bei s , $L_{\dot{s}^{-1}} \dot{y}$ ist die Tangentenkarte für den linken inneren Automorphismus

Die Riemannsche Metrik macht $SE(3)$ zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, ermöglicht es uns, den Abstand zwischen jeder s -Kurve s' und s'' in $SE(3)$ zur minimalen Länge von s in $SE(3)$ zu messen, die s verbindet.

$$d(s', s'') = \inf_{S(\cdot)} \int_0^1 \sqrt{\dot{y}(t), \dot{y}(t)} \dot{s}(t) dt \quad (4)$$

wobei $\dot{y}(t) = \dot{y}s(t)$ ein Vektor ist, der $s(\cdot)$ bei $s(t)$ tangiert und das Infimum über (stückweise glatte) Kurven $s(\cdot)$ übernommen wird, so dass $s(t \dot{y}) = s$, $s(t) = s$. Drittens kann der Abstand (4) mithilfe der Tatsache, dass $SE(3)$ geodätisch vollständig ist, effektiv berechnet werden, sodass die minimale Längenkurve, die s s'' verbindet, durch die Geodäte realisiert wird (Gallot, Hulin und Lafontaine 1987). Darüber hinaus ist die Bogenlänge der minimalen geodätischen Verbindung s s'' im Hinblick auf die oben definierte linksinvariante Riemannsche Metrik dieselbe wie die Bogenlänge s' , der minimalen Geodäten in $SE(3)$ zwischen I_4 und $s \dot{y} U$ (U ist der Definitionsbereich exponentieller Koordinaten), die letzte Länge ist dieselbe wie der Wert der Q -Norm von $\exp^{-1}(ss^{-1})$ im R^6 . Im nächsten Abschnitt werden wir diese Beobachtung nutzen, um eine explizite Formel für den Abstand (4) bereitzustellen und damit die Metrik (2) für eine bestimmte Wahl von Q zu bestimmen.

Wie wir bereits erwähnt haben, ergibt jedes innere Produkt in R^6 eine linksinvariante Riemannsche Metrik auf $SE(3)$, sodass wir es tatsächlich mit einer Familie solcher Metriken zu tun haben, abhängig von der Wahl der Matrix Q . Es ist allgemein bekannt, siehe zB (Loncaric 1985), dass es keine natürliche Wahl von Q gibt, insbesondere existiert keine biinvariante (dh gleichzeitig links- und rechtsinvariante) Riemannsche Metrik auf $SE(3)$. Andererseits existieren solche natürlichen Metriken für Untergruppen von $SE(3)$: die der Rotationen $SO(3)$ und die der Translationen R^3 .

Diese Metriken definieren keine natürliche Metrik für $SE(3)$, hauptsächlich weil $SE(3)$ ein halbdirektes und nicht das direkte Produkt von $SO(3)$ und R^3 ist. Unter den Untergruppen von $SE(3)$ werden wir diejenigen der Schraubenbewegungen unterscheiden, dh der Rotationen, denen Translationen in Bezug auf dieselbe Achse folgen. Offensichtlich ist jede Untergruppe von Schraubenbewegungen abelsch, isomorph zum direkten Produkt von $SO(2)$ und R . Nach dieser Einführung sind wir bereit, die folgende Liste von Anforderungen zu formulieren, die sich auf eine bevorzugte Riemannsche Metrik auf $SE(3)$ beziehen.

- i. Die entweder auf $SO(3)$ oder R^3 beschränkte Metrik stimmt mit der entsprechenden natürlichen überein Metriken.
- ii. Die Metrik sollte die direkte Produktstruktur der Schraubenbewegungsuntergruppen von $SE(3)$ berücksichtigen, dh für eine gegebene Schraubenbewegung werden die Größen der Rotation und der Translation unabhängig voneinander gemessen.
- iii. Die Metrik sollte rechnerisch so einfach wie möglich sein.

Unter Berücksichtigung der oben genannten Anforderungen haben wir für weitere Überlegungen das euklidische innere Produkt in R^6 mit $Q = I_6$ gewählt. In Abschnitt 3 werden wir beweisen, dass dies die richtige Wahl ist, und einige Argumente für ihre Einzigartigkeit vorlegen.

3 HAUPTERGEBNISSE

Angesichts der vorangegangenen Überlegungen besteht ein notwendiger Schritt zur effektiven Bestimmung der Metrik (4) in $SE(3)$ in der Berechnung exponentieller Koordinaten (3). Eine geeignete Formel bietet das folgende Ergebnis

Lemma 3.1 Gegeben $s = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix} \in SE(3)$ mit $\cos \tilde{y} = \frac{1}{2} \cdot (T^T R - 1)$. Dann für $0 < \tilde{y} < \pi$, die Exponentialkoordinaten von s sind gleich

$$\exp \tilde{y} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix} = (r, t) \text{ wobei } [r] = \frac{\tilde{y}}{2 \sin \tilde{y}} \cdot (R - R^T), \quad \tilde{y} t = A \cdot T \quad (5)$$

Und

$$A \tilde{y} = \frac{1}{2} \tilde{y} \cdot [r] + \frac{2 \sin \tilde{y} \tilde{y} (1 + \cos \tilde{y})}{2 \sin \tilde{y}^2} \cdot \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Beweis: Dies ist eine einfache Übung in linearer Algebra.

Die Exponentialkoordinaten (5) bestehen aus den Orientierungskoordinaten r und Positionskoordinaten t . Sie sind in einer Umgebung U von $E = I_4$ in $SE(3)$ definiert. Um U explizit zu beschreiben, beobachten wir zunächst, dass die Orientierungskoordinaten r die Beziehung erfüllen

$$\|r\|^2 = \frac{1}{2} (T^T R - 1) \quad (7)$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ für das innere Produkt in $\mathbb{R}^3$ steht. Lemma 3.1 und (7) ergeben nun unmittelbar die folgende Charakterisierung von U .

Folgerung 3.1 Der Definitionsbereich exponentieller Koordinaten (5) ist eine offene Umgebung U von E in $SE(3)$, definiert durch $\|r\| < \frac{\pi}{2}$.

Nachdem wir exponentielle Koordinaten (5) auf $U \subset SE(3)$ gefunden haben, sind wir nun in der Lage, eine berechenbare Formel für den Abstand (4) abzuleiten. Wie wir bereits erwähnt haben, ist $SE(3)$ geodätisch vollständig, daher wird das Infimum in (4) bei der minimalen Geodäten angenommen, deren Länge durch Übergabe an Exponentialkoordinaten berechnet werden kann. Konkreter ergibt sich folgendes Ergebnis:

Satz 3.1 Sei $s = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix}$, $s' = \begin{pmatrix} R' \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T' \\ 1 \end{pmatrix}$ sei so, dass „ s “ ist $\tilde{y} \in U$ wie definiert

in Korollar 3.1. Nehmen Sie an, dass die linksinvariante Riemannsche Metrik in $SE(3)$ durch die Identitätsmatrix $Q = I_6$ gegeben ist. Dann ist der Abstand (4) zwischen „ s “ wird bestimmt durch

$$D^2(s, s') = (r, r) + (t, t) = (r, r) + (\tilde{y}, \tilde{y}) + \tilde{y} \cdot ((r, r)(\tilde{y}, \tilde{y}) - (r, \tilde{y})^2), \quad (8)$$

Wo

$$[r] = \frac{\tilde{y}}{2 \sin \tilde{y}} \cdot (R - R^T), \quad \tilde{y} = R^T (T - T^T), \quad \cos \tilde{y} = \frac{1}{2} \cdot (T^T R - 1), \quad \tilde{y} = \tilde{y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \quad (9)$$

Beweis: Es reicht aus, exponentielle Koordinaten für s zu $\tilde{y} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen.

Gemäß (5), (6) sind sie gleich (r, t) , wobei $[r]$ durch (9) und $t = A \tilde{y}$ gegeben ist. Nach (6) ist die Matrix $A \tilde{y} = \frac{1}{2} \tilde{y} \cdot [r] + \frac{2 \sin \tilde{y} \tilde{y} (1 + \cos \tilde{y})}{2 \sin \tilde{y}^2} \cdot \frac{1}{2}$, mit $\tilde{y}$, $[r]$ definiert in (9). Der Einfachheit halber schreiben wir $B = A \tilde{y} = \frac{1}{2} \tilde{y} \cdot [r] + \frac{2 \sin \tilde{y} \tilde{y} (1 + \cos \tilde{y})}{2 \sin \tilde{y}^2} \cdot \frac{1}{2}$. Was jetzt gemacht werden sollte, ist eine Berechnung $(t, t) = (B \tilde{y}, B \tilde{y})$. Offensichtlich ist $BTB = I_3 + (2b \tilde{y} \text{ eine schiefe } \frac{1}{2}) \cdot [r]^2 + b^2 \cdot [r]^4$. Aufgrund Symmetrie von $[r]$, wir schließen aus seiner charakteristischen Gleichung, dass $[r]^4 = 2 \cdot [r]^2 \cdot [r]^2$.

daher $\text{BTB} = I_3 + (2b \cdot \ddot{y} \cdot a = I_3 + \ddot{y}^2 \cdot \ddot{y} \cdot \ddot{y})$ definiert in (9). Als nächstes ist leicht zu erkennen, dass $(t, t) = (\ddot{y}, \ddot{y}) + \ddot{y} \cdot ([r] \ddot{y}, [r] \ddot{y})$. Aber $[r] \ddot{y}$ ist nur das Kreuzprodukt $r \times \ddot{y}$, (Brockett und Loncaric 1986), also wird $\ddot{y}$ mit der Quadratlänge dieses Kreuzprodukts multipliziert. Aus der elementaren Vektoralgebra folgt, dass $(r \times \ddot{y}, r \times \ddot{y}) = r \cdot \ddot{y}^2 \cdot \sin^2 \ddot{y}$, wobei $\ddot{y}$ der Winkel zwischen r und $\ddot{y}$ ist, $r \cdot \ddot{y}^2 = (r, r)$. Da per Definition $(r, \ddot{y})^2 = r^2 \cdot \cos^2 \ddot{y}$, wir schließen daraus, dass $(t, t) = (\ddot{y}, \ddot{y}) + \ddot{y} \cdot ((r, r)(\ddot{y}, \ddot{y}) - (r, \ddot{y})^2)$. QED $\ddot{y}$

Bemerkung 3.1 Es ist leicht zu erkennen, dass der Koeffizient $\ddot{y}$ in (8) immer $\ddot{y} \geq 0$ ist. Entsprechend der Schwarz-Ungleichung ist auch der mit $\ddot{y}$ multiplizierte Term in (8) nicht negativ. Folglich ist der rhs von (8) $\ddot{y} \geq 0$. Darüber hinaus ergibt sich aus der Orthogonalität von $R\ddot{y}$, dass $(\ddot{y}, \ddot{y}) = T$. Vor diesem Hintergrund können die ersten beiden Terme in (8) als Maß für den Abstand zwischen Rotationen $R\ddot{y}$ und Translationen T interpretiert werden

$\ddot{y}, T$, unabhängig durchgeführt, während der dritte Term die Tatsache widerspiegelt, dass $\text{SE}(3)$ nicht das direkte, sondern nur halbdirekte Produkt von $\text{SO}(3)$ und $\mathbb{R}^3$ ist. Der Beitrag des letzten Termes zum Abstand (8) ist nur dann ungleich Null, wenn sich sowohl r als auch $\ddot{y}$ von 0 unterscheiden. Schließlich kann die Formel (8) durch Aufrufen des Ausdrucks (7) zwei folgende äquivalente Formen erhalten:

$$D^2(S, s\ddot{y}) = \ddot{y}^2 \ddot{y} \cdot (r, \ddot{y})^2 + \ddot{y} \cdot (\ddot{y}, \ddot{y}) \text{ für } \ddot{y} = \left(\sin \frac{\ddot{y}}{2}, \frac{\ddot{y}}{2} \right), \quad (10)$$

oder

$$2T(S, s\ddot{y}) = \ddot{y}^2 + (\ddot{y}, \ddot{y}) \cdot (\cos 2\ddot{y} + \ddot{y} \cdot \sin 2\ddot{y}), \quad (11) \text{ wobei } \ddot{y} \text{ der Winkel}$$

zwischen den Vektoren r und $\ddot{y}$ ist, der im Beweis von Satz 3.1 eingeführt wurde.

Vielleicht ist die Form (10) für Rechenzwecke am besten geeignet.

Bemerkung 3.2 Überprüfen wir, ob die Metrik (8) tatsächlich die Anforderungen i.-iii erfüllt. In Abschnitt wurde $s\ddot{y}$ angegeben. Zu diesem Zweck beachten wir zunächst, $T = T$ in s, s , so das ist, dass wir erhalten, wenn $(s\ddot{y}, s\ddot{y}) = (r, r) = \ddot{y}^2$. Wenn $R\ddot{y} = R\ddot{y}$ ist, erhalten wir in ähnlicher Weise, $(s\ddot{y}, s\ddot{y}) = (\ddot{y}, \ddot{y}) = T$. Deshalb habe ich. ist befriedigt. Jetzt lass und dass $s\ddot{y}$ ein Schraubenpaar ist Bewegungen, die bezüglich einer bestimmten Achse ausgeführt werden. Wir kommen eindeutig zu dem Schluss, dass in diesem Fall $\ddot{y} = T$, und r fällt mit der Achse zusammen, daher ist der Winkel $\ddot{y}$ zwischen r und $\ddot{y}$ gleich 0. Folglich ergibt (11) d in Übereinstimmung mit Anforderung ii. Um zu zeigen, dass die Formeln (8), (10), (11) rechnerisch nachvollziehbar sind, haben wir in Abschnitt 4 mehrere repräsentative Beispiele analysiert.

Bemerkung 3.3 Durch eine gründliche Analyse einer zu (8) äquivalenten Formel, abgeleitet für a

allgemeine symmetrische, positiv definite 6x6-Matrix $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}$ mit symmetrischem Q_1, Q_3 ,

Man kann daraus schließen, dass die Anforderung i. ergibt $Q_1 = Q_3 = I_3$, während ii. impliziert $Q_2 = 0$. Vor diesem Hintergrund scheint das euklidische innere Produkt in $\mathbb{R}^6$ das einzige zu sein, das die Anforderungen i erfüllt. und ii. Im nächsten Abschnitt werden wir erhebliche Anstrengungen unternehmen, um zu beweisen, dass die Metrik (8) auch Anforderung iii erfüllt.

Nachdem wir eine Metrik in $\text{SE}(3)$ definiert haben, stattdessen wir C_n mit der Metrik (2) in einer Geraden aus

vorwärts Weg. Es sei nämlich $f: \mathbb{R} \rightarrow C_n$, $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = R\ddot{y}(x) T \ddot{y}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\ddot{y}(x) =$

• Unter der Annahme, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ sein kann

gefunden mit den Ausdrücken (8)-(11). Folglich berechnen wir

$$\ddot{y}(f, f_{\ddot{y}}) = \max_{x \in X} d(f(x), f''(x)).$$

Es ist erwähnenswert, dass der metrische Raum $(C_n, \tilde{y})$ dank der Kompaktheit von X schöne topologische Eigenschaften hat. Insbesondere folgt daraus, dass $(C_n, \tilde{y})$ ein vollständiger metrischer Raum ist und dass Konvergenz in $(C_n, \tilde{y})$ die gleichmäßige Konvergenz bedeutet. Beide Eigenschaften spielen die Schlüsselrolle bei der Untersuchung von Näherungsproblemen in $(C_n, \tilde{y})$. Die auf die Kinematik $K_n \rightarrow C_n$ beschränkte Metrik $\tilde{y}$ definiert einen metrischen Raum der Kinematik $(K_n, \tilde{y})$. Daher wird $\tilde{y}$ als kinematische Metrik bezeichnet.

4 BERECHNUNG DER KINEMATISCHEN METRIC

Im Folgenden berechnen wir die kinematische Metrik für mehrere beispielhafte Kinematiken von Roboter manipulatoren.

Beispiel 4.1 Doppelpendel.

Die Kinematik des Doppelpendels ergibt sich aus der bekannten Formel

$$\begin{aligned}
 & \cos(x_1 + x_2) \dot{y} \sin(x_1 + x_2) \quad 0 \quad d \cos x_1 + l \cos(x_1 + x_2) \dot{y} \sin(x_1 + x_2) \quad \ddot{y} \\
 k(x) = & \begin{bmatrix} \cos(x_1 + x_2) \quad 0 \quad d \sin x_1 + l \sin(x_1 + x_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R(x) \quad T(x) \quad 0 \quad 1 \\
 & \ddot{y} \ddot{y} \ddot{y} \ddot{y} =
 \end{aligned} \tag{12}$$

Sei $kv(x)$, $kv \ddot{y}(x)$ ein Paar Doppelpendel, die sich durch ihre geometrischen Parameter (die Längen der Glieder d, l) unterscheiden, mit $v = (d, l, v \ddot{y})$. Wir wollen den Abstand $\ddot{y}(kv, kv \ddot{y})$ nach Formel (2) berechnen. Zu diesem Zweck beobachten wir zunächst, dass der interne Raum für (12) mit einer kompakten Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ (einem Rechteck, wenn (12) begrenzt ist) zusammenfällt (Gelenke oder den Torus für unbegrenzte Fugen). Um dann $\ddot{y}(kv, kv \ddot{y})$ zu finden, benötigen wir T , um $d(kv(x), kv \ddot{y}(x))$ zu berechnen, wie durch (8)-(11) angegeben. Es ist offensichtlich, dass $\ddot{y}(x) = \ddot{y} = 0$, also für jedes $v, v \ddot{y}$; $kv(x) \in kv \ddot{y}(x) \in U$. Außerdem verschwindet aufgrund der Form von $kv, kv \ddot{y}$ der Rotationsanteil exponentieller Koordinaten aus (10), also

$$d(kv(x), kv \ddot{y}(x)) = (d \ddot{y} d \ddot{y})^2 + 2(d \ddot{y} d \ddot{y})(l \ddot{y} l \ddot{y}) \cos x_2 + (l \ddot{y} l \ddot{y})^2 \quad (13)$$

Unter der Annahme, dass $x_2 \in [\bar{y}, \bar{y}]$, schließen wir daraus

$$\ddot{y}(k_v, k_v \ddot{y}) = \max d(k_v(x), k_v \ddot{y}(x)) = |d \ddot{y} d| x \ddot{y} \quad | + \| \ddot{y} \| \quad | \quad (14)$$

Aus (14) folgt, dass die der Menge der Doppelpendel durch die Metrik $\tilde{y}$ auferlegte Topologie mit der durch die Absolutwertnorm im Raum der geometrischen Parameter induzierten Topologie übereinstimmt. Das Ergebnis (14) lässt sich sofort auf n-Pendel verallgemeinern (Dul eba und Tcho'n

1990).

Die nächsten Beispiele befassen sich mit der allgemeinen 2-DoF-Kinematik, die nur Drehgelenke enthält und von 6 geometrischen Parametern abhängt. Die Kinematik eines allgemeinen 2R-Manipulators lässt sich wie folgt beschreiben: (Zur Abkürzung setzen wir $c_i = \cos \theta_i$ und $s_i = \sin \theta_i$).

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} c_1 c_2 \ddot{\theta}_1 s_2 \cos \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_1 s_1 c_2 \cos \ddot{\theta}_1 \cos \ddot{\theta}_2 + s_1 \sin \ddot{\theta}_1 \sin \ddot{\theta}_2 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 \cos \ddot{\theta}_1 \\ s_2 \sin \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 c_1 s_2 \cos \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_2 s_1 c_2 \cos \ddot{\theta}_1 \cos \ddot{\theta}_2 + s_1 \sin \ddot{\theta}_1 \sin \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 s_1 s_2 \cos \ddot{\theta}_2 + c_1 c_2 \cos \ddot{\theta}_1 \cos \ddot{\theta}_2 + c_1 \sin \ddot{\theta}_1 \\ \sin \ddot{\theta}_2 c_2 \sin \ddot{\theta}_1 \cos \ddot{\theta}_2 + \cos \ddot{\theta}_1 \sin \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{k}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} c_1 s_2 \sin \ddot{\theta}_2 + s_1 c_2 \cos \ddot{\theta}_1 \sin \ddot{\theta}_2 + s_1 \sin \ddot{\theta}_1 \cos \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 s_1 s_2 \sin \ddot{\theta}_2 + c_1 c_2 \cos \ddot{\theta}_1 \sin \ddot{\theta}_2 + c_1 \sin \ddot{\theta}_1 \\ \cos \ddot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 \sin \ddot{\theta}_1 \sin \ddot{\theta}_2 + \cos \ddot{\theta}_1 \sin \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \cos \ddot{\theta}_2 + a_2 c_1 c_2 \ddot{\theta}_1 + a_2 s_1 s_2 \cos \ddot{\theta}_1 + d_2 s_1 \\ \sin \ddot{\theta}_1 + a_1 c_1 a_2 s_1 c_2 + a_2 c_1 s_2 \cos \ddot{\theta}_1 + d_2 c_1 \\ \sin \ddot{\theta}_1 + a_1 s_1 a_2 s_2 \sin \ddot{\theta}_1 + d_2 \cos \ddot{\theta}_1 + d_1 \end{pmatrix} \quad (15)
 \end{aligned}$$

In (15) sind $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ Verdrehungswinkel, a_1, a_2 beschreiben Längen der Glieder; d_1, d_2 bezeichnen Verschiebungsparameter (Paul 1981). Es ist leicht zu beobachten, dass (15) mit (12) identisch $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0, a_1 = d_1$ ist derselbe, $a_2 = l_2$, wird, $d_1 = d_2 = 0$. Der Definitionsbereich von (15) für wie der von (12). Nachfolgend berechnen wir die Metrik (2) für drei bestimmte Kinematiken des allgemeinen 2R-Manipulators.

Beispiel 4.2 Allgemeiner 2R-Manipulator (1).

Es seien $\mathbf{k}_v(\mathbf{x}), \mathbf{k}_v \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ für ein Paar allgemeiner 2R-Manipulatoren, die sich nur durch $d_1 = d_2 = 0$ unterscheiden. Zusätzlich nehmen wir an, dass $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0$, $a_1 = a_1, a_2 = a_2$. Tatsächlich gilt $\mathbf{v} = (\ddot{\theta}_2, a_1, a_2) = (\ddot{\theta}_2, a_1, a_2)$. Jetzt müssen wir den Abstand $d(\mathbf{k}_v(\mathbf{x}), \mathbf{k}_v \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$ gemäß (8)-(11) bestimmen. Durch eine einfache Berechnung finden wir, dass $\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\theta}_2 \ddot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{y}} = 0$, also

$$d(\mathbf{k}_v(\mathbf{x}), \mathbf{k}_v \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = \sqrt{\ddot{\theta}_2^2 \ddot{\mathbf{y}}^2} \quad (16)$$

vorausgesetzt, dass $\ddot{\theta}_2 < \ddot{\theta}_1$. Da der rhs von (15) unabhängig von $\mathbf{x} \in X$ ist, schließen wir daraus sofort

$$\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{k}_v, \mathbf{k}_v \ddot{\mathbf{y}}) = \sqrt{\ddot{\theta}_2^2 \ddot{\mathbf{y}}^2} \quad (17)$$

Auch hier stimmt die durch die Metrik (2) auferlegte Topologie mit der durch die Absolutwertnorm im (Unter-)Raum der geometrischen Parameter induzierten überein.

Beispiel 4.3 Allgemeiner 2R-Manipulator (2).

Wie zuvor seien $\mathbf{k}_v(\mathbf{x}), \mathbf{k}_v \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ ein Paar allgemeiner 2R-Manipulatoren (15), aber jetzt wird nur angenommen, dass $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0, d_1 = d_2 = 0$ also $\mathbf{v} = (\ddot{\theta}_2, a_1, a_2)$. Um den Abstand $d(\mathbf{k}_v(\mathbf{x}), \mathbf{k}_v \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$ zu $(\ddot{\theta}_2, d_2)$, $\mathbf{v} = (\ddot{\theta}_2, a_1, a_2)$ mit $a_1 = a_1$, definieren, beginnen wir mit $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{r} = \ddot{\mathbf{y}}(\ddot{\theta}_1, 0, 0)^T$. Als nächstes der Berechnung von $\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\theta}_2 \ddot{\mathbf{y}}$ finden wir

$T(\dot{y})(x) \cdot T(x) = T(r, \dot{y}) \cdot T = (0, 0, d)$ wobei $d = d$, sodass $\dot{y}^2 \dot{y} d^2$. Das lässt sich nun ganz einfach überprüfen
 $\dot{y}) = 0$, sich für $\dot{y} < \dot{y} (10)$ und (2) die folgende Abstandsformel ergibt

$$\dot{y}(kv, kv \dot{y}) = d(kv(x), kv \dot{y}(x)) = \frac{\frac{\dot{y}^2 \dot{y}^2}{2}}{\frac{\dot{y}^2 \dot{y}^2}{2}} \cdot 4 \sin^2 \frac{\dot{y}^2 \dot{y}^2}{2} + (d \dot{y} \dot{y} d^2)^2 \quad (18)$$

Beziehung (18) bleibt gleich, wenn sich die Manipulatoren um d_1 statt um d_2 unterscheiden.

Beispiel 4.4 Allgemeiner 2R-Manipulator (3).

Wir gehen davon aus, dass $kv(x)$, $kv \dot{y}(x)$ allgemeine 2R-Manipulatoren (15) die sich um alle bezeichnen, die geometrischen Parameter außer 1 unterscheiden = 0. Also gilt nun $v = (a_1, d_1, \dot{y} v = (\sin \dot{y}, \dot{y}_1 \dot{y}_2, d_1 \dot{y}_2, a_2, d_2), d_2 \dot{y}_2)$. Mit diesen Daten haben wir mithilfe von Computeralgebra das gefunden folgender Ausdruck für den quadratischen Abstand (10), gültig für $\dot{y} = |\dot{y}_2 \dot{y}_2| < \dot{y}$:

$$D^2(kv(x), kv \dot{y}(x)) = \frac{(\dot{y}_2 \dot{y}_2)^2}{4 \sin^2 \frac{\dot{y}_2 \dot{y}_2}{2}} (a_1 \dot{y} a_1)^2 \sin^2 x_2 + (a_1 \dot{y} a_1)^2 \cos^2 x_2 + 2(a_1 \dot{y} a_1)(a_2 \dot{y} a_2) \cos x_2 + (\dot{y}_2 \dot{y}_2)^2 + \frac{(\dot{y}_2 \dot{y}_2)^2}{4 \sin^2 \frac{\dot{y}_2 \dot{y}_2}{2}} ((d_1 \dot{y} d_1) + (d_2 \dot{y} d_2))^2 + (a_2 \dot{y} a_2)^2 \quad (19)$$

Die Maximierung von (19) bzgl. $x_2 \dot{y} [\dot{y}_2, \dot{y}]$ ergibt die wie folgt definierte Metrik (2). Wir setzen $\dot{y} =$

$$\frac{\dot{y}_2 \dot{y}_2}{2 \sin \frac{\dot{y}_2 \dot{y}_2}{2}} \cdot \text{Dann}$$

$$\dot{y}(kv, kv \dot{y}) = (\dot{y}_2 \dot{y}_2)^2 + (a_2 \dot{y} a_2)^2 \frac{\dot{y}_2^2}{\dot{y}_2 \dot{y}_1} + \dot{y}_2^2 ((a_1 \dot{y} a_1)^2 + ((d_1 \dot{y} d_1) + (d_2 \dot{y} d_2))^2) \quad (20)$$

Wenn

$$|a_2 \dot{y} a_2| \dot{y} (\dot{y}^2 \dot{y}_1) |a_1 \dot{y} a_1|,$$

während sonst

$$\dot{y}(kv, kv \dot{y}) = (\dot{y}_2 \dot{y}_2)^2 + (|a_1 \dot{y} a_1| + |a_2 \dot{y} a_2|)^2 + \dot{y}_2^2 ((d_1 \dot{y} d_1) + (d_2 \dot{y} d_2))^2 \quad (21)$$

Insbesondere wenn $a_2 = a_2$ dann gilt Formel (20), also in diesem Fall

$$\dot{y}(kv, kv \dot{y}) = \frac{\frac{\dot{y}_2 \dot{y}_2}{2}}{\frac{\dot{y}_2 \dot{y}_2}{2}} \cdot 4 \sin^2 \frac{\dot{y}_2 \dot{y}_2}{2} + (a_1 \dot{y} a_1)^2 + ((d_1 \dot{y} d_1) + (d_2 \dot{y} d_2))^2 \quad (22)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass (22) für $a_1 = a_1$ auf (18) spezialisiert ist, $d_1 = d_1$.

Beispiel 4.5 PUMA 600 (1).

Wir werden die Kinematik des PUMA 600-Manipulators betrachten, wie in (Bazerghi, Goldenberg und Apkarian 1984) beschrieben, siehe auch (Tarn et al. 1986). Es seien $kv(x)$, $kv \dot{y}(x)$ die Kinematik eines Paares von PUMAs, wobei wir der Einfachheit halber angenommen haben, dass $x_3 \dot{y} [\dot{y}_2, \dot{y}]$, die sich nur durch translatorische geometrische Parameter unterscheiden. In Übereinstimmung

mit der in (Bazerghi, Goldenberg und Apkarian 1984) verwendeten Notation bedeutet dies, dass $v = (l_2, l_3, r_3, r_4)$, $\dot{v} = (\dot{l}_2, \dot{l}_3, \dot{r}_3, \dot{r}_4)$. Zusätzlich setzen wir $r_5 = 0$. Offensichtlich ist in diesem Fall $r(x)$ in (10) gleich 0, und mit einer moderaten Unterstützung der Computeralgebra berechnen wir den Quadratabstand (10) wie folgt

$$D^2(kv(x), kv(\dot{x})) = (l_2 - \dot{l}_2)^2 + (l_3 - \dot{l}_3)^2 + (r_3 - \dot{r}_3)^2 + (r_4 - \dot{r}_4)^2 + 2(l_2 - \dot{l}_2)(r_4 - \dot{r}_4) \sin x_3 + (l_3 - \dot{l}_3) \cos x_3. \quad (23)$$

Durch Maximierung von (23) bzgl. $x_3 \in [\bar{y}, \bar{y}]$ finden wir die Metrik (2) :

$$\bar{y}(kv, kv(\dot{y})) = (l_2 - \dot{l}_2)^2 + (l_3 - \dot{l}_3)^2 + (r_4 - \dot{r}_4)^2 + (r_3 - \dot{r}_3)^2. \quad (24)$$

Beispiel 4.6 PUMA 600 (2).

Jetzt nehmen wir ein Paar PUMAs $kv(x)$, $kv(\dot{x})$ mit $l_3 = l = 0$ und $r_3 = r = 0$, aber zwischen den Gelenkachsen mit beliebigen Drehungen $\bar{y}_4$, $\bar{y}_4 \in [3, 4]$. Also, jetzt ist $v = (l_2, \bar{y}_4, r_4)$, $\dot{v} = (\dot{l}_2, \dot{\bar{y}}_4, \dot{r}_4)$. Seien $x_3, x_4 \in [\bar{y}, \bar{y}]$.

($l_2, \bar{y}_4$). Wenn wir etwas Computeralgebra aufrufen, können wir das finden
folgender Ausdruck für den Quadratabstand (10) :

$$\begin{aligned} D^2(kv(x), kv(\dot{x})) &= (\bar{y}_4 - \dot{\bar{y}}_4)^2 + \frac{(\bar{y}_4 - \dot{\bar{y}}_4)^2}{4 \sin^2 \bar{y}_4} ((l_2 - \dot{l}_2)^2 + (r_4 - \dot{r}_4)^2) + \\ &+ (l_2 - \dot{l}_2)^2 (1 - \frac{(\bar{y}_4 - \dot{\bar{y}}_4)^2}{4 \sin^2 \bar{y}_4}) \cos^2 x_3 \cos^2 x_4 + 2(l_2 - \dot{l}_2)(r_4 - \dot{r}_4) \frac{(\bar{y}_4 - \dot{\bar{y}}_4)^2}{4 \sin^2 \bar{y}_4} \sin x_3. \end{aligned} \quad (25)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass das Maximum von (25) bei $x_4 = \bar{y}_4$ für $\bar{y} = \bar{y}_4 \in [3, 4]$, $x_3 = \pm \frac{\pi}{2}$ somit angenommen wird. Die Metrik (2) ist wie folgt definiert:

$$\bar{y}(kv, kv(\dot{y})) = \frac{\bar{y}_4 - \dot{\bar{y}}_4}{2} + 4 \sin^2 \frac{\bar{y}_4 - \dot{\bar{y}}_4}{2} + (l_2 - \dot{l}_2)^2 + (r_4 - \dot{r}_4)^2. \quad (26)$$

5 PROSPEKTIVE ANWENDUNGEN DES KINEMATIC METRIC

Durch die Einführung der kinematischen Metrik haben wir die Menge der Roboterkinematik K_n mit einer Metrik und topologischen Strukturen ausgestattet. Aus den in Abschnitt 4 untersuchten Beispielen haben wir gelernt, dass die Konvergenz im Raum $(K_n, \bar{y})$ eine natürliche Interpretation im Sinne einer Konvergenz bezüglich geometrischer Parameter der Kinematik hat. Daraus folgt, dass eine Folge der Kinematik $k_i \in K_n$ gegen $k \in K_n$ konvergiert, wenn geometrische Parameter von k_i im entsprechenden Sinne gegen geometrische Parameter von k konvergieren. Darüber hinaus kann der Abstand $\bar{y}(k_i, k_j)$ zwischen zwei Kinematiken durch Abstände zwischen geometrischen Parametern der Kinematik ausgedrückt werden, sodass es über die kinematische Metrik möglich ist, die Auswirkungen von Änderungen spezifischer Parameter auf die kinematische Leistung abzuschätzen eines Manipulators. Insbesondere bei bestimmten nominalen Kinematiken können wir zulässige Abweichungen der nominalen geometrischen Parameter feststellen, deren Auswirkungen auf die Kinematik innerhalb vorgeschriebener Toleranzgrenzen liegen. Auf diese Weise können wir auch die Empfindlichkeit der Kinematik gegenüber geometrischen Parametern untersuchen

ein Manipulator.

Die kinematische Metrik definiert ein Qualitätsmaß der Kinematik, interpretiert als Abstand zwischen gegebener Kinematik und spezifischer Musterkinematik. Wenn das Muster so gewählt wurde, dass es die gewünschte kinematische Leistung eines Manipulators widerspiegelt, z. B. eine der in (Tchoń 1991) vorgeschlagenen Normalformen annimmt, stellt das Qualitätsmaß ein natürliches Werkzeug für die Bewertung der kinematischen Leistung von Manipulatoren dar. Die kinematische Metrik weist dem wie folgt dargelegten kinematischen Approximationsproblem eine genaue Bedeutung zu. Gegeben sei eine Transformation $f: X \rightarrow SE(3)$ des Innenraums $\tilde{Y} K_n$, so nah wie möglich an f bezüglich der kinematischen Metrik. Es ist klar, dass das Näherungsproblem mathematisch als Optimierungsproblem formuliert werden kann, bei dem es darum geht, optimale Werte geometrischer Parameter $v \in V$ zu finden, so dass $\tilde{Y}(kv, f) = \min_{v \in V} \tilde{Y}(kv, f)$. Beschreibe f , wenn $\tilde{Y}(kv, f) = 0$, wir sagen die gewünschte kinematische Leistung eines Manipulators. Dann realisiert $kv \in \tilde{Y}$ die Leistung f , ansonsten ist $kv \in \tilde{Y}$ die beste, Näherung für f .

Ein wichtiger Bestandteil der kinematischen Metrik ist die Metrik d der speziellen euklidischen Gruppe. Diese Metrik dient als Abstandsmaß zwischen Positionen und Orientierungen des $s\ddot{y}\ddot{y}$ Effektor des Manipulators. Gegeben zwei Punkte $SE(3)$, z. B. Anfangs- und Endpositionen und Orientierungen des Effektors im Außenraum, dem Abstand $d(s, s\ddot{y}\ddot{y})$, definiert durch (10), ist gleich der minimalen Länge einer Kurve in $SE(3)$, die s und s verbindet. Diese geodätische Kurve ist ein Analogon der Geraden in der euklidischen Geometrie. Die Bewegung entlang der Geodäten erfordert keine Beschleunigung. Wir schlagen vor, dass Geodätenbögen natürliche Trajektorien in $SE(3)$ sind, denen bei der Punkt-zu-Punkt-Steuerung von Roboter manipulierten gefolgt werden soll. Die Metrik d in $SE(3)$ bietet uns auch ein geeignetes Werkzeug zur Schätzung der Größe des Arbeitsbereichs des Manipulators.

Die Metrik d , über die Kinematik mit dem Innenraum X eines Manipulators verknüpft, definiert einen Abstand zwischen Punkten des Bifurkationsdiagramms der Kinematik (Tchoń 1991). Insbesondere für nichtsinguläre Kinematiken mit 6 Freiheitsgraden induziert d einen Abstand zwischen den Konfigurationen eines Manipulators.

Betrachten wir abschließend ein Kinematikpaar $kv, kv \in \tilde{Y} K_n$ eines festen Manipulators, das sich durch einige seiner geometrischen Parameter unterscheidet. Aus der Definition der Metrik $\tilde{Y}$ folgt, dass $\tilde{Y}(kv, kv)$ der maximale Abstand d zwischen $kv(x)$, $kv \in \tilde{Y}(x)$ bzgl. $x \in X$ ist. Eine Analyse der Beispiele aus Abschnitt 4 zeigt, dass der Abstand $d(kv(x), kv \in \tilde{Y}(x))$ hängt nicht von allen, sondern von einigen wenigen internen Variablen ab. In den Beispielen 4.2 4.3 ist dieser Abstand für alle x für einen Manipulator, dessen Kinematik kv und $kv \in \tilde{Y}$ die Eigenschaft hat, dass $d(kv(x), kv \in \tilde{Y}(x))$ für alle $x \in X$ Die Anzahl der in $d(kv(x), kv \in \tilde{Y}(x))$ auftretenden internen Variablen ist ein Maß für die Ungleichmäßigkeit des Manipulators, die als seine Gleichförmigkeit bezeichnet werden kann. Die in den Beispielen 4.5 untersuchten PUMA-Manipulatoren, 4,6 hatten jeweils Couniformität 1 und 2.

6 FAZIT

Wir schließen diesen Artikel mit einem Kommentar zu den rechnerischen Eigenschaften der kinematischen Metrik ab. Es ist zu beachten, dass, abgesehen von einigen einfachen Fällen wie den in den Beispielen 4.1–4.3 dargestellten, der Umfang der zur Bestimmung der kinematischen Metrik erforderlichen Berechnungen bemerkenswert ist. Es gibt zwei Quellen für rechnerische Komplikationen: die Berechnung der durch (10) definierten Metrik d als Funktion interner Variablen und

die Maximierung von d über den Innenraum. Die mit der Metrik d verbundenen Probleme können durch die Verwendung symbolischer Berechnungen, die von Softwarepaketen wie MACSYMA oder REDUCE angeboten werden, erheblich gemildert werden. Solche Berechnungen scheinen effektiv zu sein, bis sich die Kinematik nicht um mehr als einen rotationsgeometrischen Parameter (einen Verdrehungswinkel zwischen einem Paar benachbarter Gelenkachsen) unterscheidet. Liegen mehr Verdrehungen vor, ergibt sich eine wesentliche Schwierigkeit bei der Bestimmung exponentieller Koordinaten gemäß Ausdruck (9). Die zweite Quelle von Rechenschwierigkeiten, nämlich die Maximierung von d über den internen Raum, profitiert mäßig von der Verwendung symbolischer Berechnungen. Glücklicherweise ist in vielen Fällen die Gleichförmigkeit eines Manipulators klein, sodass das Maximierungsproblem niedrigdimensional ist.

Für den Fall, dass die genaue Bestimmung der kinematischen Metrik schwierig oder sogar unmöglich ist, können wir auf Näherungsausdrücke für die Metrik zurückgreifen. Im Folgenden stellen wir zwei solcher Ausdrücke vor. Tatsächlich liefern sie rechnerisch nachvollziehbare Unter- und Obergrenzen für den durch (10) definierten Quadratabstand. Der erste Ausdruck eliminiert den rechnerisch aufwendigen Teil $(r, \ddot{y})$ von (10). Tatsächlich lassen sich die folgenden Schätzungen leicht aus (11) ableiten:

$$L = \dot{y}^2 + (\ddot{y}, \ddot{y}) \ddot{y} d^2 (k'(x), k''(x)) \ddot{y} \ddot{y}^2 + \ddot{y}(\ddot{y}, \ddot{y}) = R(27) \ddot{y} \text{ und } \ddot{y} \text{ hängen}$$

wobei $\ddot{y}$, über (8) und (10) mit $k'(x)$, $k''(x)$ zusammen. Offensichtlich für $|\ddot{y}| \ddot{y}$, der rhs von (27) wird durch $E = \ddot{y}(\ddot{y}, \ddot{y})$ begrenzt. Die Qualität der Schätzungen in (27) wurde in Abb. 6.1 dargestellt: a, b, c, indem die Abhängigkeit der Niveausätze von L , R und E vom Rotationsabstand $\ddot{y} = r$ und dem Translationsabstand $\ddot{y} = \ddot{y}$ gezeigt wird. Die Levelmengen von d^2 liegen zwischen denen von L und R .

Die zweite Schätzung geht weiter als (27) und verringert die mit k'' verbundenen Schwierigkeiten bei von $\ddot{y}$, was insbesondere dann unerwünscht ist, wenn sich die Kinematik k'' , der Berechnung zwischen Gelenkachsen verdreht. Diese Schätzung basiert auf der Ungleichung $\cos \ddot{y} \geq \frac{1}{2} \ddot{y}$, gültig $\ddot{y} \leq 1$ überall und $\cos \ddot{y} \geq 1 - \frac{1}{2} \ddot{y}^2$, gültig für $|\ddot{y}| \leq 1$. Verwendung dieser Ungleichungen und Formeln (9). Wir leiten aus (27) die folgenden unteren und oberen Grenzen für d ab $d^2(k'(x), k''(x))$:

$$B(x) \ddot{y} d^2(k'(x), k''(x)) \ddot{y} \geq \frac{2\ddot{y}}{4} B(x), \quad (28)$$

Wo

$$B(x) = 3 \ddot{y}^T r(R)^T(x) R''(x) + T''(x) \ddot{y} T'(x)^2$$

7 DANKSAGUNGEN

Diese Arbeit wurde vom polnischen Bildungsministerium unterstützt. Die Autoren danken Herrn Krzysztof Arent, MEng für die Durchführung symbolischer Berechnungen zur Unterstützung der Beispiele 4.4 – 4.6.

Verweise

[] Arnold VI 1978. Mathematische Methoden der klassischen Mechanik. Berlin: Springer Verlag.

[] Bazerghi A., Goldenberg AA und Apkarian J. 1984. Ein exaktes kinematisches Modell des PUMA 600-Manipulators. IEEE Trans. auf Syst. Mensch und Kybernetik, 14(3):483-487.

- [] Brockett RW 1984. Robotermanipulatoren und das Produkt von Exponentialfunktionen für Mula. Mathematische Theorie von Netzwerken und Systemen, hrsg. PA Fuhrmann. Berlin: Springer-Verlag, S. 120–129.
- [] Brockett RW und Loncaric J. 1986. Die Geometrie der Compliance-Programmierung. Theorie und Anwendungen nichtlinearer Steuerungssysteme, hrsg. CIByrnes, A. Lindquist. Amsterdam: Nordholland, S. 35-42.
- [] Dul eba I. und Tchoń K., 1990 (19.-21. September) Ein kinematischer Abstand zwischen Pen dulen mit n Freiheitsgraden. Proz. 3. Nat. Konferenz über Robotik. Breslau: Verlag der Technischen Universität, Band I, S. 22-26 (auf Polnisch).
- [] Engelking R. 1975. General Topology Warsaw: Polish Scientific Publishers (auf Polnisch).
- [] Gallot S., Hulin D. und Lafontaine J. 1987. Riemannsche Geometrie. Berlin: Springer-Verlag.
- [] Gantmacher FR 1988. Matrixtheorie. Moskau: Nauka (auf Russisch).
- [] Klein CA und Blaho BE 1987. Geschicklichkeitsmaße für den Entwurf und die Steuerung kinematisch redundanter Manipulatoren. Int.J.Robotics Res. 6(2): 72-83.
- [] Loncaric J. 1985. Geometrische Analyse nachgiebiger Mechanismen in der Robotik. Ph.D. Diplomarbeit, Harvard University, Abteilung für Angewandte Wissenschaften.
- [] Park FC und Brockett RW 1989. Harmonische Karten und das optimale Design des Mechanismus. Vordruck. Harvard University, Abteilung für Angewandte Wissenschaften.
- [] Paul RP 1981. Robotermanipulatoren: Mathematik, Programmierung und Steuerung. Nocken Brücke: MIT Press.
- [] Richtmyer RD 1981. Principles of Advanced Mathematical Physics, Band 2. Berlin: Springer-Verlag.
- [] Shin KG und McKay ND 1986. Auswahl nahezu zeitminimaler geometrischer Pfade für Robotermanipulatoren. IEEE Trans. auf Autom. Kontrolle, 31(6): 501-510.
- [] Tarn TJ, et al. 1986 (Oktober). Dynamische Gleichungen für den sechsgliedrigen PUMA 560-Roboterarm. Rept. SSM-RL-86-05. St.Louis,: Robotiklabor.
- [] Taylor RH 1983. Planung und Ausführung geradliniger Manipulatorbahnen. Robot Motion: Planning and Control, hrsg. M. Brady et. al. Cambridge: MIT Press, S. 265–286.
- [] Tchoń K. 1991. Differentialtopologie redundanter Robotermanipulatoren. Int.J.Robototics Res., 10(5), erscheint.
- [] Tchoń K. und Dul eba I. 1991. Über die Umkehrung singulärer Kinematik und die Erzeugung geodätischer Trajektorien in Robotermanipulatoren. Vordruck. Technische Universität Breslau, Institut für Ingenieurkybernetik.
- [] Yoshikawa T. 1985. Manipulierbarkeit von Robotermechanismen. Int.J.Robotics Res., 4(2):3-9.