



Article

Mesure des contraintes résiduelles avec les méthodes de conformité des fissures : Un problème inverse mal posé avec un noyau de forme fermée

Marco Beghini et Tommaso Grossi*



DICI—Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale, Università di Pisa, 56122 Pise, Italie ;

marco.beghini@unipi.it *

Correspondance : tommaso.grossi@ing.unipi.it

Résumé : Au moyen de méthodes de relaxation, les contraintes résiduelles peuvent être obtenues en introduisant une coupe progressive ou un trou dans une éprouvette et en mesurant et en élaborant les déformations ou déplacements qui sont par conséquent produits. Si la coupure peut être considérée comme un défaut contrôlé semblable à une fissure, en tirant parti du principe de superposition de Bueckner, les déformations relâchées peuvent être modélisées via une intégrale pondérée de la contrainte résiduelle soulagée par la coupure. Pour évaluer les contraintes résiduelles, une équation intégrale doit être résolue. D'un point de vue pratique, la solution repose généralement sur une technique de discrétisation qui transforme l'équation intégrale en un système linéaire d'équations algébriques, dont les solutions peuvent être facilement obtenues, au moins d'un point de vue informatique. Cependant, le système linéaire est souvent très mal conditionné. Dans cet article, il est montré que son mauvais conditionnement est en réalité une conséquence d'une propriété beaucoup plus profonde de l'équation intégrale sous-jacente, qui se reflète également dans le cadre discrétisé. En fait, le problème initial est mal posé. Cette mauvaise position est tout sauf un sophisme mathématique ; en effet, cela affecte également profondément les propriétés du système discrétisé. En particulier, cela induit ce que l'on appelle le compromis biais-variance, une propriété qui affecte de nombreuses procédures expérimentales, dans laquelle l'analyste est obligé d'introduire un certain biais afin d'obtenir une solution qui n'est pas submergée par le bruit de mesure. À son tour, à moins qu'il ne soit étayé par des hypothèses physiques solides et raisonnables sur certaines propriétés de la solution, le biais introduit est potentiellement infini et nuit à toute technique de quantification de l'incertitude. Pour étayer ces sujets, un exemple numérique illustratif utilisant la méthode de conformité des fissures (également connue sous le nom de refendage) est présenté. La disponibilité de la fonction de poids de la mécanique des fractures élastiques linéaires pour le problème permet une formulation complètement analytique de l'équation intégrale originale grâce à laquelle le biais dû à l'approximation numérique du modèle physique est évité.



Citation : Beghini, M. ; Grossi, T.

Mesure des contraintes résiduelles avec
des méthodes de conformité aux fissures : un
Problème inverse mal posé avec un

Noyau de forme fermée. Appl.

Mécanique. 2024, 5, 475–489. <https://doi.org/10.3390/applmech5030027>

Reçu : 1er juin 2024

Révisé : 5 juillet 2024

Accepté : 10 juillet 2024

Publié : 14 juillet 2024



Copyright : © 2024 par les auteurs.

Licencié MDPI, Bâle, Suisse.

Cet article est un article en libre accès
distribué selon les termes et

conditions des Creative Commons

Licence d'attribution (CC BY) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Mots-clés : stress résiduel ; méthodes de relaxation; mauvaise posture; mauvais conditionnement; problèmes inverses

1. Introduction

Lors de la mesure des contraintes générées par des charges externes agissant sur un composant, une technique permettant de mesurer directement les contraintes est rarement disponible. Beaucoup plus communément, une mesure indirecte est effectuée, par exemple en enregistrant les champs de déformation produits par l'application de charges externes par rapport à une configuration où il est (parfois implicitement) supposé qu'ils sont absents [1]. Par exemple, les jauges de contrainte mesurent les déformations référencées au moment où elles ont été collées ; de plus, des techniques sans contact telles que la corrélation d'images numériques (DIC) [2–6] ou l'interférométrie électronique à motif de taches (ESPI) [7–9] mesurent les changements dans les champs de déplacement en comparant un état initial et un état final. Des modèles constitutifs du matériau, généralement élastiques, sont ensuite utilisés pour reconstruire les contraintes. Dans le cas des contraintes résiduelles, qui agissent en l'absence de charges externes et surviennent principalement pour restaurer la compatibilité des champs de déplacement qui se développent au cours du processus de production, l'élément critique manquant est précisément un état de référence non contraint, et cette absence est sans doute la difficulté fondamentale de la mesure des contraintes résiduelles.

Les méthodes de diffraction [11] résolvent ce problème en mesurant l'espacement absolu des plans du réseau cristallin et en le comparant à une valeur de référence sans contrainte, obtenue pour

ce matériau spécifique en utilisant des techniques appropriées. Ce processus fournit la déformation produite par les contraintes, ce qui permet ensuite de les calculer à l'aide de modèles constitutifs adaptés. D'un autre côté, les méthodes de relaxation recréent physiquement un état non stressé en supprimant ou en déconnectant une partie du domaine du composant [12-19]. Cette action met à zéro certaines composantes de contrainte, provoquant des déformations mesurables qui peuvent être corrélées aux valeurs de contrainte résiduelle agissant précédemment. En d'autres termes, le processus généralement utilisé pour les contraintes produites par des charges externes est métaphoriquement suivi à l'envers, en mesurant la déformation produite par la suppression des contraintes à mesurer.

Pour des raisons technologiques, il est souvent impossible d'accéder à l'intégralité du champ de déformation, ce qui permettrait de déterminer ponctuellement l'ensemble des champs de contraintes. Au lieu de cela, seules les mesures de certains composants de déformation dans un sous-domaine de l'échantillon analysé à mesure que le processus de découpe ou d'enlèvement progresse sont disponibles. Lors de l'utilisation de jauges de contrainte, chaque grille fournit une mesure approximativement ponctuelle d'un seul composant de déformation. Dans le cas des techniques plein champ, la déformation mesurée est, au mieux, celle des surfaces externes du composant, avec une résolution spatiale limitée qui dépend de l'instrument de mesure spécifique.

Grâce au principe de superposition de Bueckner [20], il est encore possible de reconstruire les contraintes en procédant comme suit. On suppose que les contraintes résiduelles à mesurer appartiennent à l'étendue d'une base fonctionnelle appropriée [21] (souvent des fonctions constantes par morceaux ou des polynômes). Ensuite, la linéarité du problème élastique est exploitée pour générer les historiques de déformation qui correspondent à la base de contraintes choisie. Enfin, cette relation linéaire est inversée pour obtenir les contraintes requises à partir des déformations mesurées.

Dans le cas général, le fait que les déformations produites par les méthodes de relaxation puissent être calculées en sommant les contributions individuelles de chaque valeur ponctuelle du champ de contraintes est représenté par une équation intégrale, dont la forme typique est la suivante :

$$\epsilon(h) = \int_0^h A(h, z) \sigma(z) dz \quad (1)$$

où h caractérise les propriétés géométriques de la déconnexion du domaine (telles que la longueur d'une coupe), tandis que z agit comme une coordonnée spatiale dans l'échantillon. En fait, l'équation (1) indique que, pour une longueur de coupe donnée h , les déformations produites sont une somme pondérée - avec des poids notés $A(h, z)$ - des contraintes résiduelles qui ont été relâchées par la coupe, comme le la conformité des composants dépend point par point de l'endroit où les contraintes sont supprimées [17,22-24]. $A(h, z)$ est généralement appelé fonction d'influence, fonction d'étalonnage ou noyau du problème ; dans un contexte discret, elle devient ce que l'on appelle communément la matrice d'étalonnage du problème. De toute évidence, la forme réelle de l'équation (1) dépend du problème spécifique, bien que cette structure mathématique soit généralement conservée.

Comme cela est bien connu dans la littérature sur les contraintes résiduelles, la détermination des contraintes provenant des déformations via l'équation (1) est un problème qui remet considérablement en question la précision des instruments de mesure utilisés, car le calcul résultant est souvent extrêmement sensible aux erreurs de saisie [25]. Formellement, on dirait que le problème est très mal conditionné.

Les auteurs ont souligné dans [26,27] que le mauvais conditionnement du problème n'est en réalité qu'un symptôme d'une autre propriété mathématique distincte (et sans doute plus importante) appelée mal posé, qui est notamment connue pour affliger l'équation (1) par la littérature mathématique. Sa principale caractéristique consiste en un manque de continuité de la solution à partir des données initiales, ce qui, d'un point de vue pratique, conduit à des solutions présentant des erreurs potentiellement infinies obtenues à partir d'instruments de mesure avec des intervalles de confiance finis.

Dans les travaux précédents des auteurs [28-31], la discussion s'est concentrée sur la méthode de forage de trous, où l'équation coïncide exactement avec l'équation (1). Dans cet article, il est montré qu'une classe importante de techniques de mesure des contraintes résiduelles empruntées à la mécanique de la rupture, appelées méthodes de conformité des fissures, souffre des mêmes effets, bien que l'équation sur laquelle elles sont basées puisse sembler être légèrement différent de l'équation (1). À cet égard, les travaux visent à améliorer la compréhension des fondements mathématiques sur lesquels repose la méthode.

Le travail est organisé comme suit : •

Dans la section 2, les méthodes de conformité des fissures et leurs équations fondamentales sont introduites, s'appuyant sur quelques concepts de base de la mécanique de la rupture et arrivant ainsi à l'équation du problème de reconstruction des contraintes résiduelles.

- Dans la section 3, les équations obtenues sont utilisées pour exécuter des expériences numériques qui exposent les caractéristiques particulières de la mauvaise position.
- Dans la section 4, les conséquences pratiques pour l'analyste qui doit composer avec une mauvaise position lors d'une mesure de contrainte résiduelle sont discutées.

2. Contexte théorique 2.1.

Méthodes de conformité aux fissures

L'un des moyens les plus intuitifs de déconnecter mécaniquement une partie d'un composant pour une analyse des contraintes résiduelles est sans doute d'introduire une coupe, qui crée deux nouvelles surfaces sur lesquelles le vecteur de traction est forcé d'être nul. La technique correspondante de mesure des contraintes résiduelles s'appelait à l'origine méthode de conformité des fissures [16], et ce n'est que dans les années suivantes qu'elle est devenue connue sous le nom de méthode de refendage [32]. Si la linéarité du problème est vraie, le principe de superposition de Bueckner [20] est également valable, donc les champs de déformation générés par la coupe sont équivalents à ceux générés en appliquant des tractions de signes opposés à celles agissant initialement sur les surfaces créées (Figure 1).

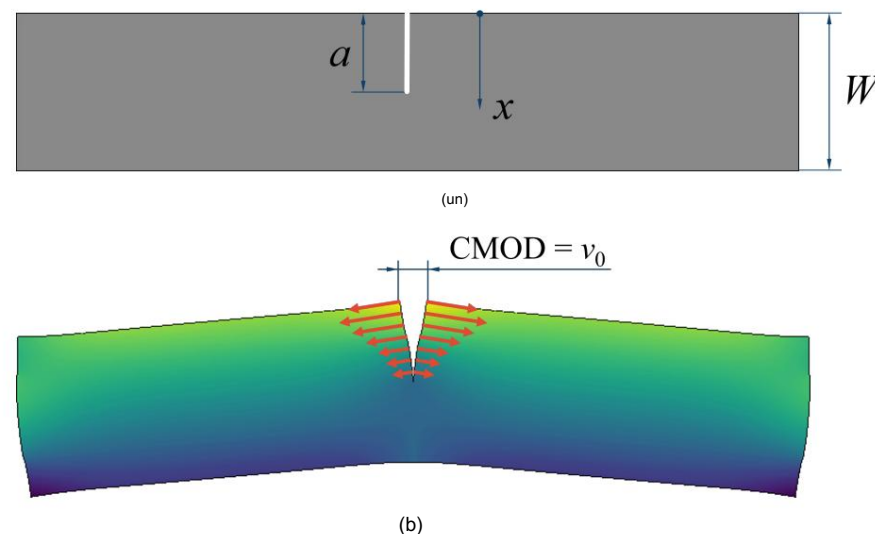


Figure 1. Une application classique du principe de superposition de Bueckner. Une coupe est introduite dans une éprouvette dans une région où des contraintes résiduelles de traction sont présentes. Cette action génère des champs de déplacement équivalents à ceux obtenus avec le simple problème de frontière élastique représenté sur la figure, où les tractions appliquées sont simplement inversées en signe. (a) : Dénomination des variables géométriques : longueur de fissure a , coordonnée spatiale x et largeur de l'éprouvette W . (b) : Problème de valeur limite équivalente, codé par couleur par l'ampleur des déplacements le long de la normale de la face de la fissure. Les tractions sont représentées par des flèches rouges.

Grâce à la large disponibilité des analyses par éléments finis (EF), l'état de l'art en matière de méthodes de relaxation a évolué pour générer directement la matrice d'étalonnage du problème sous forme discrète par le biais de simulations numériques - comme dans la figure 2 - même si ce développement peut avoir parfois conduit à négliger la nature mathématique originelle du problème. Compte tenu de leur grande précision, les jauges de contrainte sont généralement placées sur la face avant ou arrière pour enregistrer les déformations à la surface de l'échantillon, au lieu d'adopter des dispositifs de mesure de déplacement. Quoi qu'il en soit, que des mesures de déplacement ou de déformation soient réellement utilisées, un système linéaire est obtenu. Comme expliqué dans [26,27], ce que l'on

une réalisation discrète d'une équation intégrale comme l'équation (1), qui conserve alors tous ses enjeux fondamentaux.

Avant que les analyses FE ne deviennent la norme pour la construction de matrices d'étalonnage, les méthodes de conformité des fissures avaient l'énorme avantage de permettre l'utilisation de résultats théoriques de la mécanique de la rupture pour formuler les équations de résolution du problème [33,34]. En fait, les champs de solutions correspondant à une fissure plane dans un domaine semi-infini ou rectangulaire font partie des résultats les plus courants de la mécanique de la rupture [35], qui peuvent être utilisés pour obtenir une équation comme l'équation (1) sans recourir à des calculs numériques.

Par exemple, pour une traction normale de face de fissure donnée $\sigma(x)$, le facteur d'intensité de contrainte (SIF) pour un problème de valeurs limites 2D contenant une fissure de longueur a peut être calculé à l'aide de l'équation suivante [35] :

$$KI(a) = \int_0^a h(a, x) \sigma(x) dx \quad (2)$$

où $h(a, x)$ est une fonction de poids (WF) dont on peut montrer qu'elle dépend uniquement de la géométrie du corps fissuré. Comme le montre Rice [36], si $KI(a)$ et le déplacement de la face de fissure $v(a, x)$ — mesuré à partir de la surface de fissure non déformée — sont connus pour un chargement de mode I donné, alors $h(a, x)$ peut effectivement être calculé comme

$$h(a, x) = \frac{E'}{KI(a)} \frac{\partial v(a, x)}{\partial a} \quad (3)$$

Rappelons que E' dépend du fait que l'on suppose des conditions de contrainte plane ou de déformation plane.

Comme $h(a, x)$ est facilement disponible — au pire, via une expansion en série — pour de nombreuses géométries 2D, on peut utiliser les équations (2) et (3) pour écrire la relation entre les contraintes résiduelles souhaitées et d'autres quantités mesurables. Par exemple, au fur et à mesure qu'une fissure plus longue est introduite, on peut mesurer le SIF par une technique de son choix (telle que la méthode photoélastique [33]) et le corréler avec $\sigma(x)$ via l'équation (2), qui a elle-même une valeur très structure mathématique similaire à l'équation (1). En fait, ce sont toutes deux des équations intégrales de Volterra du premier type [37].

Alternativement, on peut mesurer le déplacement de l'ouverture de la fissure (CMOD) $2v(a, 0)$ et le corréler avec les contraintes résiduelles en procédant comme suit. D'après l'équation (3), on a

$$v(a, 0) = \frac{1}{E'} \int_0^a h(a, s) KI(s) ds \quad (4)$$

En remplaçant les $KI(s)$ de l'équation (2) et en réorganisant :

$$v(a, 0) = \frac{1}{E'} \int_0^a h(a, s) \int_0^s h(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (5)$$

$$v(a, 0) = \frac{1}{E'} \int_0^a \int_0^s h(a, s) h(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (6)$$

On peut alors définir

$$\psi(a, x) = h(a, 0) h(a, x) \quad (7)$$

et écrire

$$v(a, 0) = \frac{1}{E'} \int_0^a \int_0^s \psi(s, t) \sigma(t) dt ds \quad (8)$$

qui est une autre équation intégrale reliant $\sigma(x)$ et la quantité mesurable $v(a, 0)$, bien que légèrement plus complexe que l'équation (2). La fonction noyau $\psi(a, x)$ a des unités de $1/\text{Longueur}$ et conserve certaines propriétés des fonctions de poids, notamment une singularité intégrable à $x = a$.

L'équation (8) ne nécessite pas d'analyses FE pour identifier les contraintes résiduelles - comme $\psi(a, x)$ est généralement disponible - et est d'une grande importance pratique, puisque le déplacement d'ouverture de fissure -

Les appareils de mesure sont des instruments largement disponibles dans les laboratoires qui effectuent des expériences de mécanique de la rupture. Malgré les différences apparentes avec l'équation (1) et sa formulation entièrement analytique, la section suivante montre que ce problème est encore mal posé.

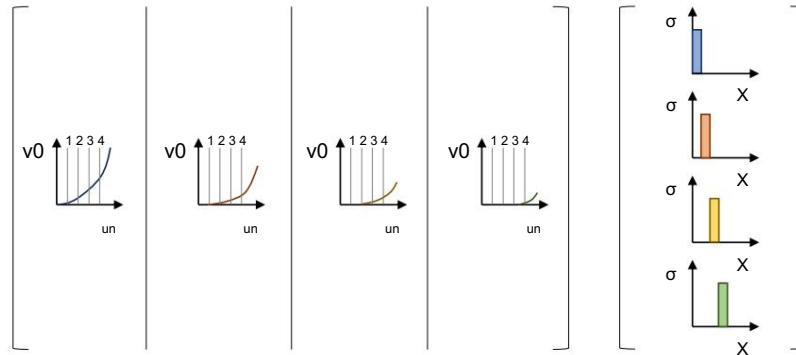


Figure 2. Procédure standard utilisée pour construire la matrice d'étalonnage dans une version discrétisée de l'équation (1). Pour chaque élément de la base de contraintes choisie (qui dans ce cas couvre l'ensemble des distributions de contraintes constantes par morceaux), les déplacements ou déformations correspondants résultant d'une exécution hypothétique du même processus de mesure sont simulés et enregistrés sous forme de colonnes de la matrice d'étalonnage. Ensuite, en tirant parti du principe de superposition d'élasticité linéaire, les déplacements/déformations correspondant à n'importe quel élément de l'espace de contraintes choisi peuvent être simulés grâce à une combinaison linéaire des colonnes de la matrice d'étalonnage. Chaque élément de la base de stress est représenté avec une couleur différente.

2.2. Mal posé

Une caractéristique particulière de l'équation (8) est qu'elle agit comme un filtre passe-bas par rapport aux oscillations de $\sigma(x)$ le long de son domaine. Ceci est également intuitif d'un point de vue physique. La valeur du CMOD est peu affectée par les variations à courte échelle des contraintes appliquées sur les faces des fissures, car le principe de Saint Venant [38] garantit que les conditions aux limites avec les mêmes actions résultantes à une échelle dimensionnelle donnée génèrent des champs de déformation dont les différences sont confinées à une région de taille comparable. Par conséquent, les tractions au comportement hautement oscillatoire influencent le CMOD principalement par leurs valeurs moyennées à des échelles dimensionnelles plus longues, sans que les pics localement auto-équilibrés n'affectent le résultat.

Cette affirmation intuitive a également une explication mathématique formelle. Le Riemann–Lebesgue lemma (voir [39]) garantit que, si $\psi(a, x)$ est intégrable sur son domaine, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a \psi(a, t) \sin(Nt) dt = 0 \quad (9)$$

De même, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue [40], un autre on peut montrer que l'intégration d'une fonction nulle converge vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$, de sorte que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^s \psi(s, t) \sin(Nt) dt ds = \lim_{N \rightarrow \infty} vN(une, 0) \quad (dix)$$

Cette caractéristique mathématique apparemment abstraite a d'énormes implications pratiques. Pour tout nombre réel positif k , en prenant un N suffisamment grand, on peut générer une contrainte résiduelle $(a, 0)$ sur distribution $\delta\sigma$ $(x) = k \sin(Nx)$ qui a un effet arbitrairement faible (mais non nul) v δ le CMOD mesuré. En raison de la linéarité du problème, cela implique que les échantillons mesurés $(a, 0)$ obtiennent une quantité v arbitrairement faible diffère de la vraie par $k \sin(Nx)$, δ autre solution qui peut être perturbée par une qui, à son tour, peut être rendu arbitrairement élevé par le choix initial de k .

L'effet qui en résulte est une sensibilité infinie par rapport aux erreurs d'entrée : à travers des perturbations de mesure arbitrairement faibles, l'erreur de solution ne peut être limitée par aucun

inégalité. Un problème mathématique qui montre cet effet est appelé problème mal posé. Pourtant, comme expliqué dans la section 3, le problème est rarement résolu analytiquement dans des espaces fonctionnels de dimension infinie, car la procédure de résolution habituelle implique une phase de discrétisation qui est ensuite suivie de calculs numériques.

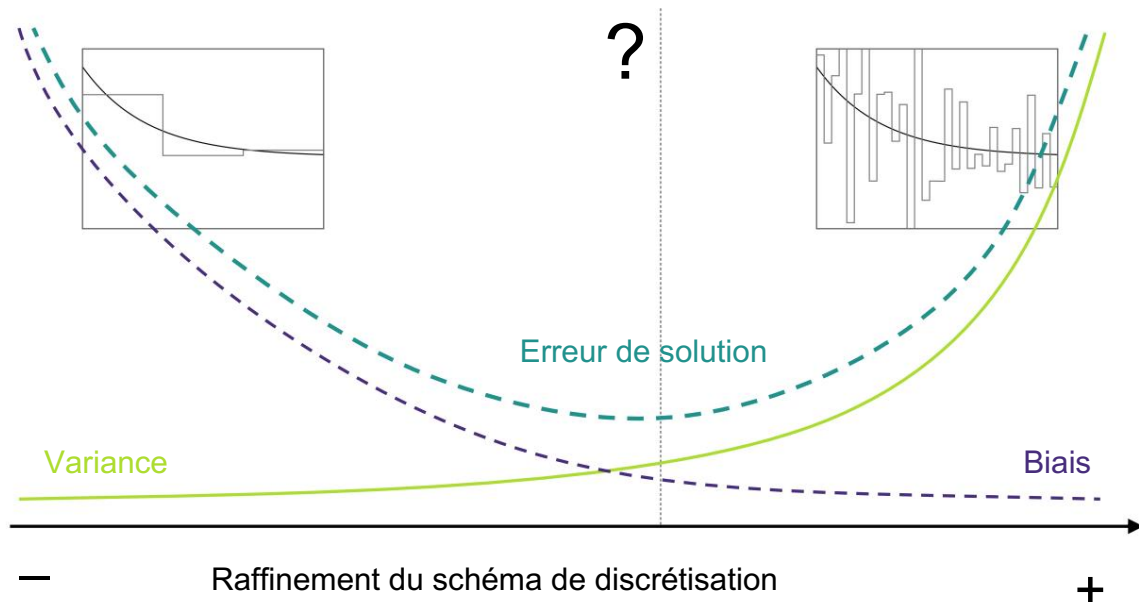


Figure 3. Représentation graphique du compromis biais-variance auquel est généralement confronté l'analyste des contraintes résiduelles lors du choix du schéma de discrétisation. À mesure que le nombre de degrés de liberté autorisés dans la base couvrant les contraintes augmente, la variance de la solution (courbe vert clair) augmente en termes de sensibilité aux erreurs de mesure. Pour tenter de réduire cette sensibilité en limitant les degrés de liberté, un biais (courbe bleue) est introduit dans la solution. Si la variance et le biais étaient observables, le schéma de discrétisation qui génère la « meilleure » solution (c'est-à-dire le minimum de la courbe turquoise) pourrait être choisi ; cependant, le biais n'est pas directement observable.

En acquérant un nombre fini de points de mesure et en représentant la solution avec un nombre fini de coordonnées, seule une approximation en dimension finie du problème d'origine est résolue. Dans ce nouveau problème, la sensibilité à l'erreur ne peut pas être infinie – l'échelle dimensionnelle des oscillations autorisées dans la solution ne peut diminuer indéfiniment – mais elle peut être suffisamment élevée pour remettre en question la précision des instruments de mesure utilisés. Alors, le problème est dit mal conditionné, ce qui n'est dans ce cas qu'une conséquence de la discrétisation d'un problème mal posé.

Néanmoins, la caractéristique la plus distinctive d'un problème mal posé est le niveau variable de mauvais conditionnement, qui dépend de la mesure dans laquelle le problème discrétisé ressemble étroitement au problème initial. Plus cela se produit, plus le problème obtenu est mal conditionné ; pour apprivoiser le mauvais conditionnement, il est tentant d'adopter une discrétisation plus grossière avec seulement quelques degrés de liberté, mais cela conduit à la solution d'un problème biaisé. Finalement, un soi-disant compromis biais-variance est défini, représenté dans la figure 3 et discuté dans la section 4 à travers l'expérience numérique proposée.

3. Enquêtes numériques

Afin de coupler la discussion théorique avec un exemple numérique pratique, la distribution des contraintes résiduelles de traction suivante est supposée être présente dans une plaque longue de largeur W tel que celui représenté sur la figure 1 :

$$\sigma(x) = \begin{cases} x 525 - 5850 & \frac{x}{W} \leq 0,125 \\ -275 + 550 \frac{x}{W} & 0,125 < \frac{x}{W} \leq 0,875 \\ 5325 - 5850 \frac{x}{W} & \frac{x}{W} > 0,875 \end{cases} \quad (\text{MPa}) \quad (11)$$

Un tracé de la distribution des contraintes supposée est présenté à la figure 4. L'équation (11) est obtenue en effectuant un essai de flexion hypothétique en quatre points bien au-delà de la limite d'élasticité d'un matériau ayant un modèle constitutif parfaitement plastique, puis en supprimant le coefficient appliqué. charge, laissant aux contraintes résiduelles le soin de maintenir la planéité de la section. Le problème consiste à reconstruire la répartition des contraintes résiduelles dans l'intervalle $0 \leq x \leq W$ grâce à la méthode de conformité des mesures en introduisant une coupe dans le plaque et mesurer le CMOD pendant que la coupe avance.

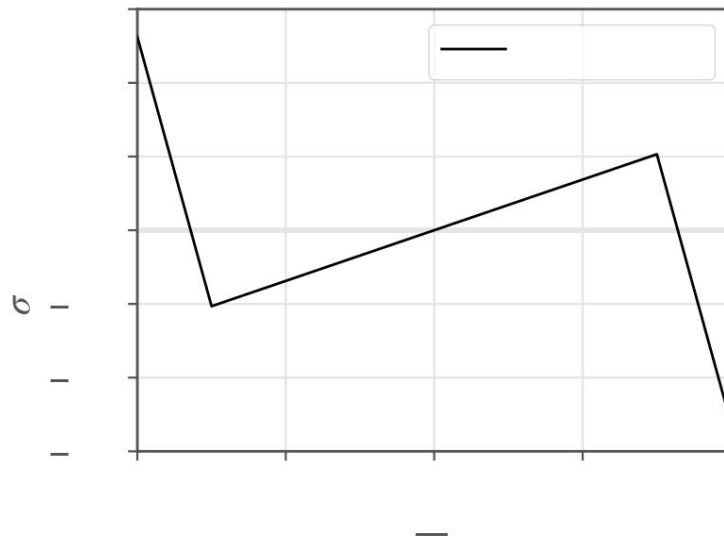


Figure 4. Distribution des contraintes résiduelles utilisée dans l'expérience numérique proposée, définie par l'équation (11).

La fonction d'influence pour ce problème est tirée de [41], qui le rapporte comme un développement en série tronquée :

$$h(u_n, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \sum_{k=1}^5 F\left(\frac{u_n}{W}, xk\right) \frac{1}{u_n^{3k-2}} \quad (12)$$

où $F\left(\frac{u_n}{W}, xk\right)$ est une fonction algébrique sans dimension, dont les coefficients sont tabulés dans le livre. La fonction noyau correspondante $\psi(a, x) = h(a, 0)h(a, x)$ de l'opérateur intégral dans l'équation (8) est présentée à la figure 5. En incluant les équations (11) et (12) dans l'équation (8), on obtient le CMOD théorique $2v_0(a)$ en fonction de la longueur a de la coupe qui a été introduite dans l'éprouvette, comme le montre la figure 6.

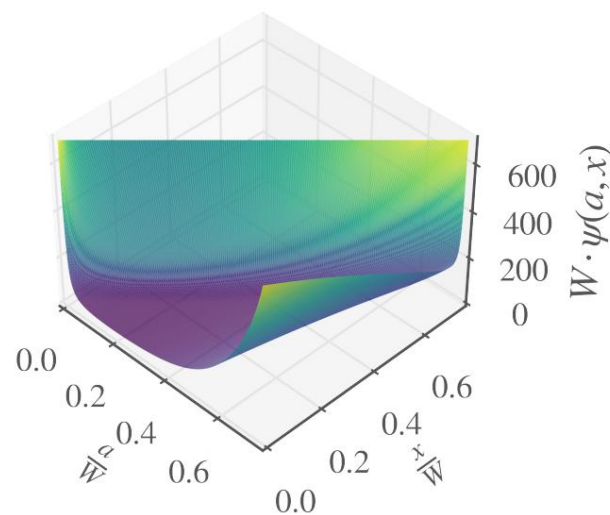


Figure 5. Tracé de la fonction noyau $\psi(a, x)$, utilisée pour calculer le CMOD à partir de la connaissance des contraintes résiduelles le long de la fissure introduite, par une double intégration. Ayant des unités de $1/\text{Longueur}$, il est normalisé par $1/W$. La fonction noyau est définie sur le domaine triangulaire $0 \leq x < a < W$, et elle a une singularité intégrable le long de sa diagonale $x = a$. Les coordonnées X et Y sont normalisées par la largeur de l'échantillon ; dans le tracé, a et x sont limités à $0,75 W$, conformément à l'expérience numérique proposée. Le tracé de la surface est codé par couleur en fonction de la coordonnée Z .

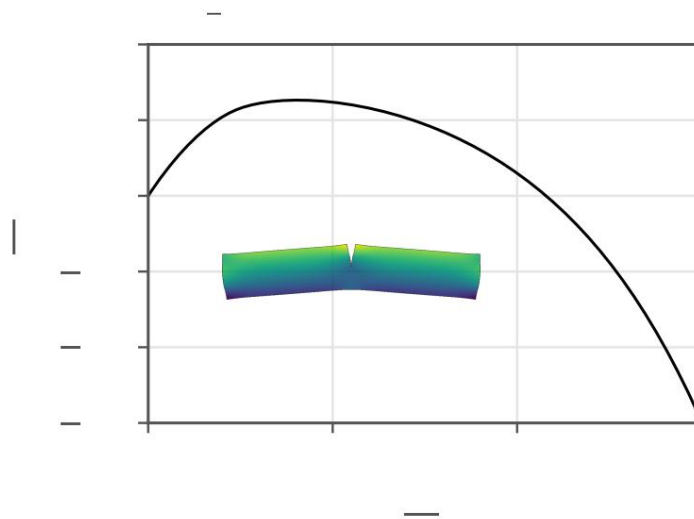


Figure 6. CMOD normalisé qui correspond à la distribution des contraintes résiduelles définie par l'équation (11), suite à une coupe progressive de longueur normalisée $a/W < 0,75$ dans une plaque longue en déformation plane. La coupe introduite ayant une épaisseur non nulle, un CMOD négatif est autorisé et ne génère pas automatiquement la fermeture de la fissure. L'échantillon est codé par couleur en fonction de l'ampleur des déplacements le long de la normale à la face de la fissure.

Comme $\psi(a, x)$ est disponible sous forme fermée, l'équation (8) permet de calculer le CMOD correspondant à toute distribution de contraintes résiduelles relâchées $\sigma(x)$ par une double intégration d'une fonction, opération qui peut également être effectuée à la main, analytiquement. Pourtant, le problème pratique réside dans la mesure de $v_0(a)$ et la recherche de $\sigma(x)$, ce qui implique une inversion de l'opérateur défini par l'équation (8). Malheureusement, à quelques rares exceptions près, une expression analytique de cette relation inverse, c'est-à-dire une expression sous forme fermée

qui permet de déterminer $\sigma(x)$ à partir de $v_0(a)$, n'est généralement pas disponible. En conséquence, le schéma de la figure 2 est également adopté ici.

Un espace de contraintes de dimension finie couvert par une base appropriée est choisi, puis la matrice d'étalonnage pour le problème discrétisé est calculée en évaluant le CMOD correspondant aux éléments de la base de contraintes à un nombre fixe de longueurs de coupe. La seule différence avec l'état de l'art habituel de la méthode de refendage est qu'ici cette opération peut être réalisée de manière analytique, sans recourir à des analyses FE. En termes formels, si $\beta = [\beta_1(z), \beta_2(z), \dots, \beta_n(z)]$ est la base à n dimensions choisie et $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ est le vecteur des m longueurs de coupe où est sondé le CMOD, on peut définir une matrice

$$A_{ij} = \int_0^{a_i} \int_0^s \psi(s, t) \beta_j(t) dt ds \quad (13)$$

de sorte que, pour une distribution de contraintes résiduelles donnée $\sigma(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \beta_j(x)$, la relation suivante est vraie :

$$\begin{aligned} v(a_i, 0) &= \int_0^{a_i} \int_0^s \psi(s, t) \sigma(t) dt ds \\ &= \int_0^{a_i} \int_0^s (s, t) \sum_{j=1}^n \sigma_j \beta_j(t) dt ds \\ &= \sum_{j=1}^n \sigma_j \int_0^{a_i} \int_0^s \psi(s, t) \beta_j(t) dt ds \\ &= \sum_{j=1}^n A_{ij} \sigma_j \end{aligned} \quad (14)$$

En enregistrant les CMOD mesurés dans un tableau $v = [v(a_1, 0), v(a_2, 0), \dots, v(a_m, 0)]$ et collecter les coordonnées de la distribution des contraintes résiduelles par rapport à la base choisie $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$, un système linéaire est obtenu, qui représente la discrétisation de l'équation (8) :

$$A\sigma = v \quad (15)$$

Enfin, l'équation (15) est généralement résolue selon la méthode des moindres carrés en recherchant la solution qui se rapproche le mieux des échantillons de mesure enregistrés. En fait, il est assez courant d'exploiter les avantages statistiques d'avoir plus de points d'échantillonnage que ce qui est strictement nécessaire [16].

Dans cette analyse, deux espaces de contraintes différents sont utilisés, en raison de leur large application dans la communauté des contraintes résiduelles : l'espace des fonctions constantes par morceaux et l'espace des polynômes, qui, respectivement, sont généralement appelés méthode intégrale [21] et la méthode des séries de puissances [42]. Pour explorer le compromis biais-variance, un nombre fixe de 32 longueurs de coupe sondées est supposé, tandis que la dimension de base de contrainte varie entre 1 et 32 ; pour la méthode intégrale, cela est effectué en augmentant le nombre d'intervalles de calcul, tandis que pour la méthode des séries de puissances, cela est effectué en ajoutant des termes d'ordre supérieur dans le développement polynomial.

Uniquement pour les calculs numériques, un $W = 20$ mm est adopté, tandis que l'erreur type de l'instrument de mesure CMOD est supposée être de $1 \mu\text{m}$. Le véritable CMOD - évalué par l'application directe de l'équation (8) - est ensuite échantillonné aux longueurs de coupe sondées et perturbé avec un bruit gaussien iid ayant un écart type égal à l'erreur supposée. Au total, 1000 perturbations aléatoires du véritable CMOD sont échantillonnées, et un nombre égal de résultats en termes de contraintes résiduelles identifiées sont obtenus. De plus, pour chaque schéma de discrétisation, deux solutions supplémentaires sont calculées : • La solution idéale, qui est celle correspondant à des mesures CMOD parfaites et sans erreur. • La meilleure solution, qui est l'élément de la base de contraintes choisie qui se rapproche le mieux de la vraie solution au sens des moindres carrés.

Tous les résultats sont rassemblés dans les figures 7 et 8, correspondant respectivement à l'application de la méthode intégrale et de la méthode des séries en puissance.

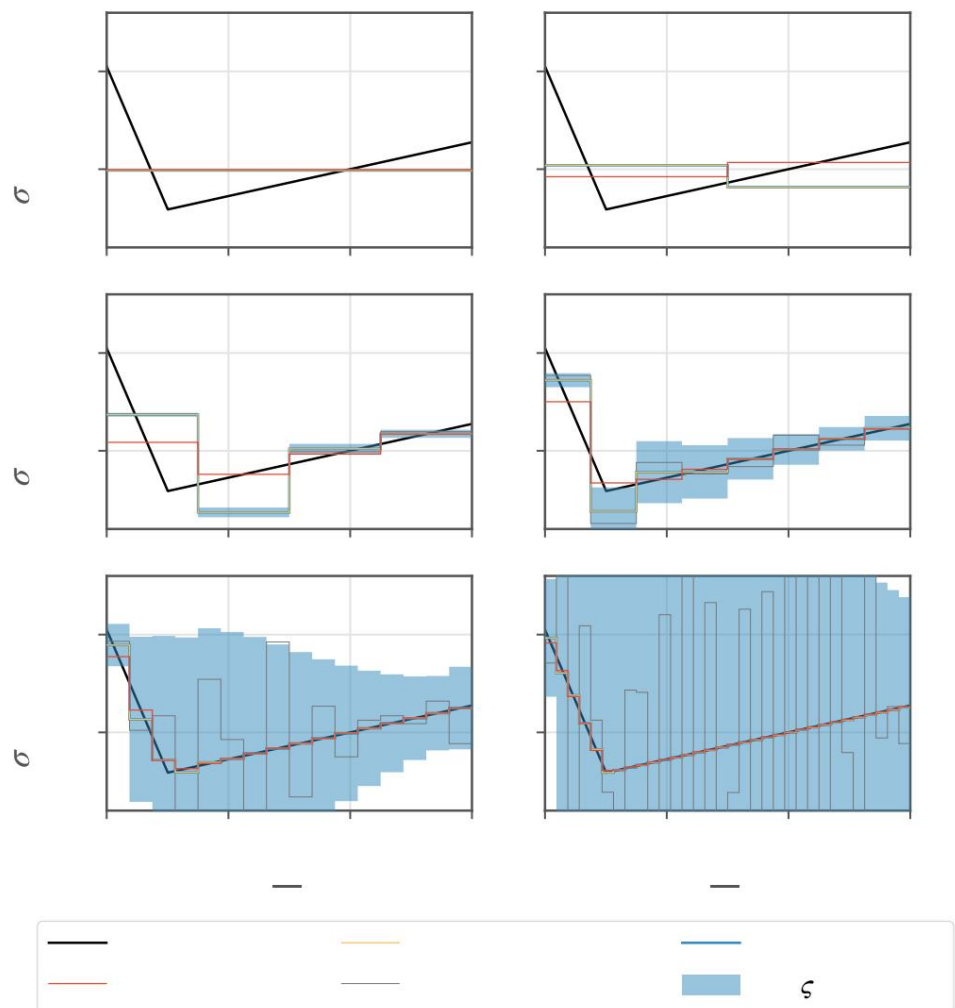


Figure 7. Résultats des expériences numériques, obtenus en utilisant l'espace de contraintes de dimension finie constitué de fonctions constantes par morceaux. Au total, 1 000 perturbations aléatoires du CMOD théorique correspondant à $\sigma(x)$ défini par l'équation (11) sont générées, puis les solutions de contraintes résiduelles sont identifiées en inversant le système linéaire rapporté dans l'équation (15). La meilleure solution est celle qui se rapproche le mieux de la vraie solution ; la solution idéale est celle qui serait obtenue avec des mesures sans erreur. Pour les discrétisations de faible dimension, la variance de la solution obtenue est faible, mais l'espace des contraintes lui-même n'est pas capable de représenter la vraie solution, introduisant ainsi un biais ; de plus, la solution idéale ne correspond même pas à la meilleure. Pour les discrétisations de grande dimension, la solution idéale converge vers la vraie, mais la distribution des solutions obtenues présente une variance pratiquement inutilisable.

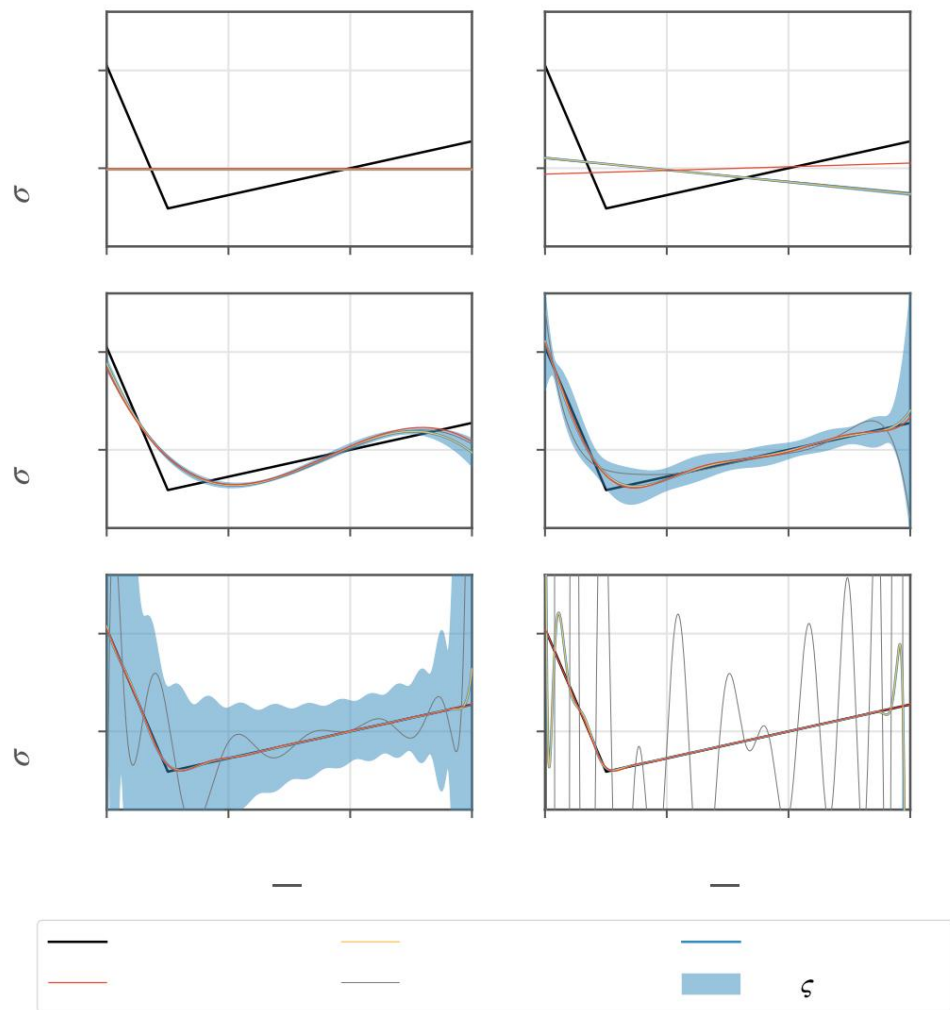


Figure 8. Résultats des expériences numériques, obtenus en utilisant l'espace de contraintes de dimension finie constitué de polynômes. Au total, 1 000 perturbations aléatoires du CMOD théorique correspondant à $\sigma(x)$ défini par l'équation (11) sont générées, puis les solutions de contraintes résiduelles sont identifiées en inversant le système linéaire rapporté dans l'équation (15). La meilleure solution est celle qui se rapproche le mieux de la vraie solution ; la solution idéale est celle qui serait obtenue avec des mesures sans erreur. Pour la discrétisation de faible dimension, la variance de la solution obtenue est faible, mais l'espace des contraintes lui-même n'est pas capable de représenter la vraie solution, introduisant ainsi un biais ; de plus, la solution idéale ne correspond même pas à la meilleure. Pour les discrétisations de grande dimension, la solution idéale converge vers la vraie, mais la distribution des solutions obtenues présente une variance pratiquement inutilisable.

4. Discussion

Les figures 7 et 8 illustrent le symptôme le plus clair du caractère mal posé d'un problème inverse. Lorsque le nombre de degrés de liberté dans la discrétisation de dimension finie est faible, la sensibilité aux erreurs est faible et les solutions sont sensiblement indépendantes du bruit de mesure. Cependant, la base choisie n'est pas capable de représenter correctement la vraie solution, le résultat obtenu présente donc un biais – potentiellement dangereux lorsque la sécurité structurelle est impliquée – par rapport au résultat exact. Comme noté dans [27], la situation ne change pas même lorsque la solution obtenue est interprétée comme la meilleure représentation du résultat exact dans la base choisie, qui, dans le cas de la Méthode Intégrale, coïnciderait avec la moyenne des vrais résultats. solution sur un sous-intervalle de calcul. Comme le montrent les figures, même la solution correspondant à des mesures sans erreur est biaisée par rapport à la meilleure représentation du résultat exact dans l'espace de dimension finie.

Pour tenter de réduire les biais, le nombre de degrés de liberté peut être augmenté de sorte que la solution de dimension finie soit une approximation pratiquement raisonnable de l'espace de dimension infinie d'origine. Néanmoins, cela produit à son tour un processus d'inversion extrêmement sensible aux erreurs de mesure, d'où une variance de solution qui rend tout résultat obtenu pratiquement inutilisable. Ceci est connu depuis longtemps dans la littérature, également concernant d'autres méthodes de relaxation qui ne nécessitent pas nécessairement l'introduction d'une coupure en forme de fissure dans l'éprouvette [43-45]. En termes intuitifs, avoir plus de degrés de liberté rend le problème discrétisé plus proche de son homologue initialement mal posé, qui présente une sensibilité infinie aux erreurs de saisie. Notons que cet effet ne dépend pas d'une connaissance imparfaite de l'opérateur intégral — comme c'est le cas lorsqu'il est estimé numériquement [46] — car dans cet exemple, l'opérateur du problème direct est connu analytiquement. C'est la raison principale pour laquelle la méthode de conformité des fissures est particulièrement instructive sur ces aspects ; néanmoins, des considérations similaires auraient pu être faites pour la méthode de suppression de couche [13] et pour la méthode de sondage Sachs [12], dont le noyau d'intégration est analytiquement connu.

Comme le montre la figure 3, le plus grand problème concernant la mauvaise position est que les biais ne sont pas observables. En calculant plusieurs solutions, comme cela est effectué dans ce cas, on peut noter la variabilité de la solution par rapport à l'erreur de saisie. En raison de la linéarité de l'équation (15), les erreurs d'entrée peuvent également théoriquement se propager via la procédure d'inversion. Cependant, on ne peut jamais connaître le biais introduit par la procédure de résolution choisie ; par exemple, une solution constante donnée peut également correspondre à une vraie solution de contrainte résiduelle réellement constante ou à une distribution arbitrairement variable qui donne causalement la même solution discrétisée.

Cet aspect est particulièrement important pour construire des intervalles de confiance pour la solution. Seuls les intervalles de confiance relatifs à la solution idéale (c'est-à-dire correspondant à des mesures parfaites) peuvent être construits, mais l'intérêt pratique de cette construction est essentiellement nul, car il n'est même pas garanti que la solution idéale coïncide avec la meilleure approximation de la solution idéale. solution dans l'espace choisi. Le risque est que, dans le but d'obtenir des intervalles de confiance plus étroits, l'analyste choisisse implicitement d'augmenter le biais de la solution obtenue, sans que cela soit apparent dans les résultats.

Il existe également des techniques alternatives visant à régulariser le problème ; c'est-à-dire pour réduire la variance de la solution. Le plus notable est sans doute la régularisation de Tikhonov [47-49]. Cependant, aucune de ces techniques n'est à l'abri du compromis biais-variance, comme discuté dans [26,27]. En fait, ils introduisent également un biais dans la solution, qui ne peut être quantifié a priori.

Il n'existe qu'une seule solution aux problèmes générés par le caractère mal posé d'un problème inverse et le compromis biais-variance qui en résulte : obtenir des informations supplémentaires grâce à la physique, capable d'établir a priori que la solution doit avoir une forme et/ou une forme spécifique. répondre à certaines contraintes bien définies. Notez que cette information ne peut pas être déduite par les seules équations mathématiques. Seulement dans ce cas, en supposant un espace de solutions de dimension finie qui adhère à ces conditions, aucun biais n'est introduit et toute quantification des incertitudes peut être considérée comme rigoureuse. Cela revient à affirmer que la sensibilité à l'erreur ne doit pas déterminer le choix du schéma de discrétisation ; ce devrait plutôt être le contraire. Les hypothèses physiques déterminent le schéma de discrétisation, qui donne ensuite sa sensibilité correspondante aux erreurs de saisie et établit les exigences pour les instruments de mesure. Si ces exigences sont impossibles à satisfaire, la mesure n'est pas réalisable d'un point de vue technique.

Par exemple, si quelque chose permet à l'analyste des contraintes d'affirmer que la distribution des contraintes résiduelles est raisonnablement linéaire à travers l'épaisseur — peut-être causée par la restauration d'incompatibilités en champ lointain dans le champ de déplacement d'une poutre mince — il n'y a aucun biais à supposer que la solution appartient à l'espace des fonctions polynomiales du premier degré, et la variance associée à un si petit nombre de degrés de liberté est généralement plutôt limitée.

5. Conclusions

Les principaux points de l'article sont décrits ci-dessous :

- Le caractère mal posé du problème de la reconstruction des contraintes résiduelles à partir des mesures de déplacement d'ouverture de fissure suite à une coupe progressive introduite dans l'éprouvette est démontré et clairement distingué de sa propriété plus générale d'être mal conditionné.
- À travers un exemple numérique, l'indicateur typique d'un problème mal posé, à savoir le compromis biais-variance, est présenté, ainsi que ses conséquences potentiellement dévastatrices sur la capacité à quantifier rigoureusement les incertitudes. Il est donc extrêmement important de reconnaître sa présence et d'éviter les actions qui n'améliorent qu'en apparence la qualité de la solution.
- Comme souligné dans les travaux précédents des auteurs, il est à nouveau souligné qu'aucune machinerie mathématique ne peut surmonter de manière permanente la sensibilité infinie aux erreurs de saisie inhérente aux problèmes mal posés. La solution est à chercher dans la physique du problème, en visant des informations qui permettraient d'apprivoiser la variance de la solution sans introduire de biais significatifs et surtout non calculables.

Contributions des auteurs : Conceptualisation : MB, TG ; Méthodologie : MB, TG ; Enquête : MB, TG ; Rédaction – ébauche originale : TG ; Rédaction – Révision et édition : Mo ; Supervision : MB
Tous les auteurs ont lu et accepté la version publiée du manuscrit.

Financement : Cette recherche n'a reçu aucun financement externe.

Déclaration du comité d'examen institutionnel : sans objet.

Déclaration de consentement éclairé : sans objet.

Déclaration de disponibilité des données : Aucune nouvelle donnée n'a été créée ou analysée dans cette étude. Le partage de données ne s'applique pas à cet article.

Conflits d'intérêts : Les auteurs ne déclarent aucun conflit d'intérêts.

Abréviations

Les abréviations suivantes sont utilisées dans ce manuscrit :

CMOD	Déplacement de l'ouverture de la bouche de fissure
FE	Élément fini
FIS	Facteur d'intensité de stress
	Fonction de poids WF

Les références

1. Timoshenko, S. Histoire de la résistance des matériaux : avec un bref compte rendu de l'histoire de la théorie de l'élasticité et de la théorie des structures ; Courier Corporation : North Chelmsford, MA, États-Unis, 1983.
2. Schajer, GS; Winiarski, B. ; Withers, mesure de la contrainte résiduelle de perçage de trous PJ avec correction d'artefacts à l'aide d'un DIC plein champ . Exp. Mécanique. 2013, 53, 255-265. [\[Référence croisée\]](#)
3. Baldi, A. Mesure des contraintes résiduelles à l'aide de techniques de perçage de trous et de corrélation d'images numériques intégrées. Exp. Mécanique. 2014, 54, 379-391. [\[Référence croisée\]](#)
4. Harrington, JS ; Schajer, GS Mesure des contraintes structurelles par perçage de trous et DIC. Exp. Mécanique. 2017, 57, 559-567. [\[Référence croisée\]](#)
5. Hagara, M. ; Trebu'na, F. ; Pasteur, M. ; Hu'nady, R. ; Lengvarský, P. Analyse des aspects de la quantification des contraintes résiduelles réalisée par 3D DIC combinée à une méthode de forage standardisée. Mesure 2019, 137, 238-256. [\[Référence croisée\]](#)
6. Salehi, SD; Rastak, MA; Shokrieh, MM; Barrallier, L. ; Kubler, R. Mesure plein champ des contraintes résiduelles dans les matériaux composites à l'aide des techniques de refente incrémentielle et de corrélation d'images numériques. Exp. Mécanique. 2020, 60, 1239-1250. [\[Référence croisée\]](#)
7. Petzing, JN ; Tyrer, JR Développements récents et applications en interférométrie électronique à motif de speckle. J. Strain Anal. Ing. Des. 1998, 33, 153-169. [\[Référence croisée\]](#)
8. Schajer, GS; Steinzig, M. Calcul complet des contraintes résiduelles de forage de trous à partir de données d'interférométrie électronique à motif de speckle. Exp. Mécanique. 2005, 45, 526-532. [\[Référence croisée\]](#)

9. Gubbels, WL; Schajer, GS Développement de la corrélation d'images numériques 3D à l'aide d'une caméra couleur unique et d'une projection de taches diffractives. Exp. Mécanique. 2016, 56, 1327-1337. [\[Référence croisée\]](#)
10. Schajer, GS; Premier, MB ; Withers, PJ Pourquoi est-il si difficile de mesurer les contraintes résiduelles ? Exp. Mécanique. 2022, 62, 1521-1530. [\[Référence croisée\]](#)
11. Noyan, IC; Cohen, JB Contrainte résiduelle : mesure par diffraction et interprétation ; Springer : Berlin/Heidelberg, Allemagne, 2013.
12. Sachs, G. ; Espey, G. La mesure des contraintes résiduelles dans le métal. Âge du fer 1941, 148, 148.
13. Treuting, RG; Lire, WT A Détermination mécanique de la contrainte résiduelle biaxiale dans les matériaux en feuille. J.Appl. Phys. 1951, 22, 130-134. [\[Référence croisée\]](#)
14. Beaney, EM Mesure précise de la contrainte résiduelle sur n'importe quel acier en utilisant la méthode du trou central. Souche 1976, 12, 99-106. [\[Référence croisée\]](#)
15. Schajer, GS Application des calculs par éléments finis aux mesures de contraintes résiduelles. J. Ing. Maître. Technologie. 1981, 103, 157-163. [\[Référence croisée\]](#)
16. Prime, MB Mesure des contraintes résiduelles par extension successive d'une fente : méthode de conformité des fissures. Appl. Mécanique. Tour. 1999, 52, 75-96. [\[Référence croisée\]](#)
17. Prime, MB Cartographie transversale des contraintes résiduelles en mesurant le contour de la surface après une coupe. J. Ing. Maître. Technologie. 2001 : 123, 162-168. [\[Référence croisée\]](#)
18. Schajer, GS Méthodes pratiques de mesure des contraintes résiduelles ; John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, États-Unis, 2013.
19. Schajer, GS Correction de l'excentricité des trous pour les mesures de contraintes résiduelles de perçage. Exp. Mécanique. 2022, 62, 1603-1613. [\[Référence croisée\]](#)
20. Bueckner, HF Nouveau principe pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte. Z. Fuer Angew. Mathématiques. Mécanique. 1970, 50, 529-546.
21. Schajer, GS; Prime, MB Utilisation de solutions inverses pour les mesures de contraintes résiduelles. J. Ing. Maître. Technologie. 2006, 128, 375. [\[Référence croisée\]](#)
22. Schajer, GS Mesure des contraintes résiduelles non uniformes à l'aide de la méthode de perçage de trous. Partie I Calcul des contraintes Procédures. J. Ing. Maître. Technologie. 1988, 110, 338-343. [\[Référence croisée\]](#)
23. Schajer, GS Mesure des contraintes résiduelles non uniformes à l'aide de la méthode de perçage de trous. Partie II Application pratique du Méthode Intégrale. J. Ing. Maître. Technologie. 1988, 110, 344-349. [\[Référence croisée\]](#)
24. Schajer, GS; Prime, MB Extrapolation de la solution de contrainte résiduelle pour la méthode de refendage en utilisant des contraintes d'équilibre. J. Ing. Maître. Technologie. 2007, 129, 227-232. [\[Référence croisée\]](#)
25. Schajer, GS; Altus, E. Analyse des erreurs de calcul des contraintes pour les mesures de contraintes résiduelles de forage incrémentielles. J. Ing. Maître. Technologie. 1996, 118, 120-126. [\[Référence croisée\]](#)
26. Béghini, M. ; Grossi, T. ; Premier, M. ; Santus, C. Mauvaise position et compromis biais-variance dans la mesure des contraintes résiduelles inverses Solutions. Exp. Mécanique. 2023, 63, 495-516. [\[Référence croisée\]](#)
27. Béghini, M. ; Grossi, T. Vers une quantification fiable de l'incertitude dans les mesures de contraintes résiduelles avec des méthodes de relaxation : Trouver les contraintes résiduelles moyennes est un problème bien posé. Exp. Mécanique. 2024, 64, 851-874. [\[Référence croisée\]](#)
28. Béghini, M. ; Bertini, L. ; Cococcioni, M. ; Grossi, T. ; Santus, C. ; Benincasa, A. Régularisation des mesures de contraintes résiduelles de forage avec des trous excentriques : une approche avec des fonctions d'influence. J. Mater. Ing. Effectuer. 2024, 1-7. [\[Référence croisée\]](#)
29. Béghini, M. ; Grossi, T. ; Santus, C. Validation d'une configuration de rosette de jauge de contrainte sur un échantillon en porte-à-faux : Application à un étalonnage banc pour contraintes résiduelles. Maître. Aujourd'hui : Proc. 2023, 93, 719-724. [\[Référence croisée\]](#)
30. Beghini, M. ; Grossi, T. ; Santus, C. ; Valentini, E. Un banc d'étalonnage pour valider les stratégies systématiques de compensation d'erreur dans les mesures de forage de trous. Dans Actes de la 11e et 11e Conférence internationale de l'ICRS sur les contraintes résiduelles, Nancy, France, 27-30 mars 2022. [\[CrossRef\]](#)
31. Beghini, M. ; Grossi, T. ; Santus, C. ; Séralessandri, L. ; Gulisano, S. Mesures de contraintes résiduelles sur un échantillon d'aluminium laminé profondément par diffraction des rayons X et perçage de trous, validées sur un banc d'étalonnage. IOP Conf. Ser. Maître. Sci. Ing. 2023, 1275, 012036. [\[Référence croisée\]](#)
32. Cheng, W. ; Finnie, I. Mesure de la contrainte résiduelle et méthode de refendage ; Série Génie Mécanique ; Springer : New York, New York, États-Unis, 2007.
33. Vaidyanathan, S. ; Finnie, I. Détermination des contraintes résiduelles à partir des mesures du facteur d'intensité de contrainte. J. Ingénierie de base. 1971, 93, 242-246. [\[Référence croisée\]](#)
34. Schindler, HJ; Cheng, W. ; Finnie, I. Détermination expérimentale des facteurs d'intensité de contrainte dus aux contraintes résiduelles. Exp. Mécanique. 1997, 37, 272-277. [\[Référence croisée\]](#)
35. Anderson, TL Mécanique des fractures : principes fondamentaux et applications ; CRC Press : Boca Raton, FL, États-Unis, 2017.
36. Rice, JR Quelques remarques sur les champs de contraintes élastiques en pointe de fissure. Int. J. Structure des solides. 1972, 8, 751-758. [\[Référence croisée\]](#)
37. Lamm, PK Une étude des méthodes de régularisation pour les équations de Volterra de premier type. Dans les enquêtes sur les méthodes de résolution des problèmes inverses ; Colton, D., Engl, HW, Louis, AK, McLaughlin, JR, Rundell, W., éd. ; Springer Vienne : Vienne, Autriche, 2000 ; pp. 53-82.
38. von Mises, R. Sur le principe de Saint Venant. Taureau. Suis. Mathématiques. Soc. 1945, 51, 555-562. [\[Référence croisée\]](#)
39. Goldberg, RR Méthodes d'analyse réelle ; Oxford et IBH Publishing : Delhi, Inde, 1970.
40. Rudin, W. Analyse réelle et complexe, 3e éd.; McGraw-Hill : New York, NY, États-Unis, 1987.
41. Wu, XR; Carlsson, J. Fonctions de poids et solutions de facteurs d'intensité de stress ; Pergamon Press : Oxford, Royaume-Uni, 1991.

-
42. Prime, MB ; Hill, MR Incertitude, erreur de modèle et sélection de commande pour les solutions inverses à contraintes résiduelles étendues en série. J. Ing. Maître. Technologie. 2006, 128, 175-185. [\[Référence croisée\]](#)
43. Zuccarello, B. Étapes de calcul optimales pour l'évaluation de la contrainte résiduelle par la méthode de perçage incrémental. Exp. Mécanique. 1999, 39, 117-124. [\[Référence croisée\]](#)
44. Zuccarello, B. Optimisation de la distribution des incréments de profondeur dans la méthode ring-core. J. Strain Anal. Ing. Des. 1996, 31, 251-258. [\[Référence croisée\]](#)
45. Olson, MD Schéma de mesure pour la cartographie des contraintes résiduelles à l'aide du refendage. Exp. Mécanique. 2022, 62, 393-402. [\[Référence croisée\]](#)
46. Schajer, Données d'étalonnage GS Compact pour les mesures de contraintes résiduelles de perçage de trous dans des spécimens d'épaisseur finie. Exp. Mécanique. 2020, 60, 665-678. [\[Référence croisée\]](#)
47. Tikhonov, AN; Gontcharski, AV; Stepanov, VV; Yagola, AG Méthodes numériques pour la solution de problèmes mal posés ; Springer Pays-Bas : Dordrecht, Pays-Bas, 1995. [\[CrossRef\]](#)
48. Schajer, GS Profilage des contraintes résiduelles de perçage avec lissage automatisé. J. Ing. Maître. Technologie. 2007, 129, 440-445. [\[Référence croisée\]](#)
49. Smit, TC; Reid, R. Tikhonov Régularisation pour la méthode intégrale entièrement couplée de forage incrémentiel. Exp. Mécanique. 2024, 64, 275-290. [\[Référence croisée\]](#)

Avis de non-responsabilité/Note de l'éditeur : Les déclarations, opinions et données contenues dans toutes les publications sont uniquement celles du ou des auteurs et contributeurs individuels et non de MDPI et/ou du ou des éditeurs. MDPI et/ou le(s) éditeur(s) déclinent toute responsabilité pour tout préjudice corporel ou matériel résultant des idées, méthodes, instructions ou produits mentionnés dans le contenu.