Machine Translated by Google

Enzyklopädie

Autor und Herausgeber

Elzein Salah Elzein

IEEE-Mitglied

- Aufsätze in Angewandter Mathematik

IEEE Publisher, Großbritannien

Dieser Inhalt ist vertraulich

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Modellierung der Auswirkungen von Fehlinformationen auf die Übertragung Dynamik von COVID-19

Ziyi Su [†] **und Ephraim Agyingi** [*,†]

School of Mathematics and Statistics, Rochester Institute of Technology, Rochester, NY 14623, USA; zs4768@rit.edu * Korrespondenz: eoasma@rit.edu

[†] **Diese Autoren haben zu gleichen Teilen zu dieser Arbeit beigetragen.**

Zusammenfassung: Die Bedrohung durch die COVID-19 -Pandemie geht mit einer Epidemie von Fehlinformationen einher, die in der Öffentlichkeit Verwirrung und Misstrauen hervorruft. Fehlinformationen über COVID-19, ob absichtlich oder unabsichtlich, nehmen viele Formen an, darunter Verschwörungstheorien, falsche Behandlungen und ungenaue Informationen über die Ursprünge und die Verbreitung des Virus. Obwohl die Pandemie die erheblichen Auswirkungen von Fehlinformationen auf die öffentliche Gesundheit ans Licht gebracht hat, erwies sich die mathematische Modellierung als wertvolles Instrument zum Verständnis der Verbreitung von COVID-19 und der Auswirkungen von Maßnahmen im Bereich der öffentlichen Gesundheit. Es gibt jedoch nur begrenzte Forschung zur mathematischen Modellierung der Verbreitung von Fehlinformationen im Zusammenhang mit COVID-19. In diesem Artikel stellen wir ein mathematisches Modell der Verbreitung von Fehlinformationen im Zusammenhang mit COVID-19 vor. Das Modell verdeutlicht die Herausforderungen, die Fehlinformationen mit sich bringen, indem es sich nicht nur auf die Reproduktionszahl konzentriert, die Neuinfektionen antreibt , sondern einen zusätzlichen Schwellenparameter gibt, der die Verbreitung von Fehlinformationen vorantreibt. Die Gleichgewichte des Modells werden sowohl auf lokale als auch auf globale Stabilität analysiert, und es werden numerische Simulationen vorgestellt. Wir diskutieren auch das Potenzial des Modells, wirksame Strategien zur Bekämpfung von Fehlinformationen im Zusammenhang mit COVID-19 zu entwickeln.

Schlüsselwörter: COVID-19; Fehlinformation; mathematisches Modell

check for updates

Zitat: Su, Z.; Agyingi, E. Modellierung der Auswirkungen von Fehlinformationen auf die Übertragungsdynamik von COVID-19. AppliedMath **2024, 4, 544–560. https://doi.org/10.3390/ appliedmath4020029**

Wissenschaftlicher Herausgeber: Thomas Woolley

Erhalten: 1. März 2024

Überarbeitet: 24. April 2024

Akzeptiert: 26. April 2024

Veröffentlicht: 30. April 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons

Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

COVID-19, auch bekannt als Coronavirus-Erkrankung, wird durch das neuartige Coronavirus SARS-CoV-2 verursacht und hat seit seinem Auftreten Ende 2019 tiefgreifende Auswirkungen auf die globale Gesundheit. Der erste Fall wurde in Wuhan, China, gemeldet, und das Virus verbreitete sich rasch weltweit, wobei in verschiedenen Regionen mehrere Infektionswellen beobachtet wurden. Nach mehr als 118.000 Fällen in 114 Ländern und 4.291 Todesfällen erklärte die Weltgesundheitsorganisation (WHO) COVID-19 am 11. März 2020 zur Pandemie [1,2]. COVID-19 wird hauptsächlich durch Atemtröpfchen übertragen, wenn eine infizierte Person in unmittelbarer Nähe anderer hustet, niest, spricht oder schwer atmet [3]. Es weist ein breites Spektrum klinischer Manifestationen auf, die von leichten grippeähnlichen Symptomen bis hin zu schwerer Atemnot und Multiorganversagen reichen [4,5]. Mehrere Faktoren, darunter das Sozialverhalten, haben die Übertragungsdynamik der Krankheit beeinflusst. COVID-19 entwickelt sich weiter. Aufgrund neu auftretender Varianten, Impfkampagnen und von Regierungen und Gesundheitsorganisationen umgesetzter Maßnahmen im Bereich der öffentlichen Gesundheit gibt es Schwankungen in der Prävalenz und Schwere der Krankheit. Weltweit wurden der WHO bis zum 27. September 2023 770.875.433 bestätigte Fälle von COVID-19, darunter 6.959.316 Todesfälle, gemeldet [6].

Während der Pandemie ergriffen viele Länder eine Reihe von Maßnahmen, um die Ausbreitung von COVID-19 einzudämmen, wie etwa soziale Distanzierung, Maskenpflicht, Selbstquarantäne und schließlich Impfungen, sobald diese verfügbar waren. Dies trug im Wesentlichen dazu bei, die Übertragung der Coronavirus-Krankheit einzudämmen . Das Fehlen klarer und prägnanter Botschaften seitens der Gesundheitsbehörden trug jedoch auch zur Verbreitung von Fehlinformationen im Zusammenhang mit COVID-19 be Die sich ständig weiterentwickelnde Natur der Pandemie und das mangelnde Verständnis des Virus

Machine Translated by Google

führte schon früh zu widersprüchlichen Informationen und Botschaften von Gesundheitsbeamten, was zu Verwirrung und Misstrauen in der Öffentlichkeit führte. Dies veranlasste einige Personen, sich alternativen Informationsquellen, darunter auch Fehlinformationen, zuzuwenden, um Orientierung zu finden.

Falsche Informationen im Zusammenhang mit COVID-19 haben verschiedene Formen angenommen [7–9]. Verschwörungstheorien im Zusammenhang mit COVID-19 wurden weit verbreitet und behaupteten oft, das Virus sei absichtlich als Biowaffe oder als Teil einer globalen Verschwörung geschaffen und verbreitet worden [10]. Beispielsweise wurde die Theorie, dass die 5G-Technologie für die Verbreitung von COVID-19 verantwortlich sei, auf Social-Media-Plattformen weit verbreitet , obwohl es keine wissenschaftlichen Beweise für diese Behauptung gibt [11]. Es wurden auch falsche Behandlungs- und Heilmittel für COVID-19 beworben, was gefährliche Folgen für die Personen haben kann, die sie befolgen. So wurde beispielsweise weithin über die Verwendung von Desinfektionsmitteln wie Bleichmitteln zur Behandlung von COVID-19 berichtet, was zu schweren Verletzungen und Todesfällen führte [12]. Es wurden auch falsche Behauptungen verbreitet, dass bestimmte Medikamente wie Hydroxychloroquin bei der Behandlung von COVID-19 wirksam seien, was zu Horten und Engpässen des Medikaments führte , das tatsächlich nicht wirksam bei der Behandlung des Virus ist [13]. Gerüchte über den Ursprung und die Verbreitung von COVID-19 haben ebenfalls zur Desinformationslandschaft rund um die Krankheit beigetragen. So wurde beispielsweise die Theorie, dass das Virus absichtlich von China geschaffen und verbreitet wurde, von einigen Medien und Politikern verbreitet, obwohl es dafür keine Beweise gibt [10]. Darüber hinaus umfassen Desinformation rund um Impfstoffe unbegründete Behauptungen über Nebenwirkungen, Zweifel an ihrer Wirksamkeit und haltlose Theorien über geheime Absichten. Solche Desinformation untergräbt das Vertrauen der Öffentlichkeit in Impfstoffe, führt zu Impfskepsis und gefährdet das Erreichen einer flächendeckenden Impfabdeckung. Die Politisierung der Pandemie trug ebenfalls zur Verbreitung von Desinformation im Zusammenhang mit COVID-19 bei. Politische Entscheidungsträger und Medien haben oft polarisierende Haltungen zur Pandemie eingenommen, was zur Verstärkung von Desinformation und Verschwörungstheorien führte [14]. Dies führte zu einem Mangel an Konsens über die Schwere der Pandemie und die Wirksamkeit der Maßnahmen des öffentlichen Gesundheitswesens, was die Verbreitung von Desinformation weiter begünstigte.

Mathematische Modelle wurden bereits umfassend eingesetzt, um die Ausbreitung von COVID-19 zu verstehen und Maßnahmen im Bereich der öffentlichen Gesundheit zu entwickeln [15]. Einige dieser Modelle basieren typischerweise auf einer Reihe von Differentialgleichungen, die die Dynamik der Virusausbreitung beschreiben, darunter die Anzahl der infizierten Personen, die Übertragungsrate und die Wirksamkeit von Maßnahmen wie sozialer Distanzierung und Impfung [16,17]. Mathematische Modelle können verwendet werden, um wichtige Parameter der Pandemie abzuschätzen, wie etwa die Basisreproduktionszahl (R0), die die durchschnittliche Anzahl der von jeder infizierten Person in einer anfälligen Bevölkerung infizierten Personen angibt [18]. Durch die Schätzung von R0 können mathematische Modelle verwendet werden, um die potenziellen Auswirkungen verschiedener Maßnahmen vorherzusagen und die öffentliche Gesundheitspolitik zu steuern.

Die Modellierung von COVID-19 ist mit zahlreichen Herausforderungen verbunden , darunter die Unsicherheit wichtiger Parameter wie der Übertragungsrate, der Dauer der Infektiosität und der Dauer der Immunität nach Genesung oder Impfung [19,20]. Darüber hinaus erschwerte die komplexe Dynamik der Pandemie, einschließlich der Entstehung neuer Varianten und Veränderungen des öffentlichen Verhaltens aufgrund von Fehlinformationen, eine genaue Vorhersage des Verlaufs der Pandemie. In dieser Studie werden wir ein mathematisches Modell der Rolle irreführender Informationen in der Übertragungsdynamik von COVID-19 vorstellen , da falsch informierte Personen wahrscheinlich Maßnahmen wie soziale Distanzierung, Maskentragen, Impfungen und andere ignorieren, die zum Schutz der Bevölkerung eingeführt wurden. Das Modell basiert auf der Annahme, dass ein gewisser Teil der Bevölkerung anfällig für Fehlinformationen ist. Wir bezeichnen Fehlinformationen als falsche oder ungenaue Informationen, die absichtlich oder unabsichtlich verbreitet werden und zu einer Verzerrung der Tatsachen oder einem Missverständnis der Realität führen. Sie können über verschiedene Kanäle verbreitet werden, darunter soziale Medien, Nachrichtenagenturen, Mundpropaganda oder Online-Plattformen. Falschinformationen können verschiedene Formen annehmen, beispielsweise irreführende Aussagen, erfundene Daten, Verschwörungstheorien oder Fehlinterpretationen legitimer Informationen. Sie zielen oft darauf ab, Einzelpersonen zu täuschen oder zu manipulieren, was schädliche Folgen haben kann, darunter Vertrauensverlust, Förderung von Angst und Panik, Behinderung fundierter Entscheidungen und potenziell schädliche Aus

Machine Translated by Google

Ziel dieser Studie ist es, die Auswirkungen der Menge an Fehlinformationen zu bewerten.
zirkulierende Virus auf die Übertragungsdynamik von COVID-19 in einer Bevölkerung hat.
Zu diesem Zweck haben wir ein SIR-Modell mit einem zusätzlichen Fach formuliert, das
Personen, die durch Fehlinformationen in die Irre geführt wurden. Da es reichlich
Fehlinformationen (ob beabsichtigt oder unbeabsichtigt) im Zusammenhang mit COVID-19, das Modell
behandelt auch die Menge an Fehlinformationen als einen Zustand mit der Bezeichnung M **basierend auf der**
Annahme, dass es von irregeführten Personen synthetisiert wird. Dieser Ansatz ähnelt dem Ziel
Zellmodelle, in denen Virionen von infizierten Zellen produziert werden [21]. Die Gleichgewichtslösungen von
Das Modell wird durch berechnete Schwellenparameter erhalten und seine Stabilität wird festgestellt
sowohl analytisch als auch numerisch. Simulationen des Modells deuten darauf hin, dass COVID -19
Wenn Fehlinformationen nicht wirksam bekämpft werden, können sie sich erheblich negativ auf die Bevölkerung auswirken.

2. Mathematisches Modell

Das unten dargestellte Modell ist ein SIR-Modell in der Natur mit zusätzlichen Fächern
für falsch informierte Personen, Todesfälle und die Menge der im Umlauf befindlichen irreführenden Informationen.
Wir gehen davon aus, dass die anfällige Bevölkerung (S) **in Kontakt mit zirkulierenden falschen**
oder ungenaue Informationen (M) **in einer Gemeinschaft verbreiten, werden einige in die Irre geführt**
Rate von *ÿ* **und bewegen sich in das fehlinformierte Kompartiment** (Sm). **Unabhängig vom Medium**
durch die es verbreitet wird, nehmen wir an, dass zu jedem Zeitpunkt (t) **im Umlauf befindliche**
Fehlinformation (M) **ist die Gesamtheit aller Formen, einschließlich irreführender Aussagen,**
erfundener Daten, Verschwörungstheorien oder Fehlinterpretationen legitimer Informationen. Wir gehen d
dass Fehlinformationen mit einer Rate **von μ0** von Menschen **generiert werden , die bereits falsch informiert sind oder**
schlechte Schauspieler, die wir auch als falsch informiert einstufen, und wir nehmen an, dass irreführende
Informationsdichte nimmt mit der Rate μ1 ab. Das Modell geht daher davon aus, dass irreführende
Informationen werden nur von Individuen im Sm- **Kompartiment generiert. Wir nehmen auch an, dass**
Personen, die durch Aufklärungskampagnen oder andere Quellen in die Irre geführt wurden, lehnen falsche Informationen ab
erholen sich mit einer Rate *ÿ* **und wandern zurück in das anfällige Kompartiment. Wechselwirkungen zwischen**
anfällige (S) **und fehlinformierte** (Sm) **Personen mit COVID-19- infizierten Personen**
(I) **führen zu Infektionen mit den Raten** *ÿ* **bzw. ÿ. Wir gingen davon aus, dass infizierte Personen**
entweder mit der Rate *ÿ* genesen (R) **oder an einer COVID-19-** bedingten Komplikation gestorben (D) **zum**
Rate ÿ. Es wird weiterhin angenommen, dass neue Individuen nur als Anfällige zu einem bestimmten Zeitpunkt rekrutiert werden.
Rate ÿ und dass die natürliche Sterberate in allen Kompartimenten ÿ ist. Ein schematisches Diagramm der
Das Modell ist in Abbildung 1 dargestellt, und eine Zusammenfassung der Parameter und deren Beschreibung finden Sie in
Tabelle 1.

Unter Berücksichtigung der oben genannten und im Schema dargestellten Annahmen
Diagramm, das System der Differentialgleichungen, das das Modell steuert, ist wie folgt:

$$\frac{dS}{dt} = \ddot{y} + \ddot{y}Sm\ \ddot{y}\ \ddot{y}SI\ \ddot{y}\ \ddot{y}SM\ \ddot{y}\ \ddot{y}S \quad (1)$$

$$\frac{dSm}{dt} = \ddot{y}SM\ \ddot{y}\ \ddot{y}Sm\ I\ \ddot{y}\ \ddot{y}Sm\ \ddot{y}\ \ddot{y}Sm \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \ddot{y}SI + \ddot{y}Sm\ I\ \ddot{y}\ \ddot{y}I\ \ddot{y}\ \ddot{y}I\ \ddot{y}\ \ddot{y}I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \ddot{y}I\ \ddot{y}\ \ddot{y}R \quad (4)$$

$$\frac{dD}{dt} = \ddot{y}I \quad (5)$$

$$\frac{dM}{dt} = \mu 0Sm\ \ddot{y}\ \mu 1M, \quad (6)$$

wobei wir angenommen haben, dass alle Parameterwerte positiv sind und die Anfangsbedingungen
S(0) = **S0,** Sm(0) = **Sm0, I(0)** = **I0, R(0)** = **R0, D(0)** = **D0 und M(0)** = **M0 sind alle**
nicht negativ. Wir stellen fest, dass zu Beginn des Ausbruchs Sm(0) **ÿ 0 und R(0)** = **D(0)** = **0 ist.**

Machine Translated by Google

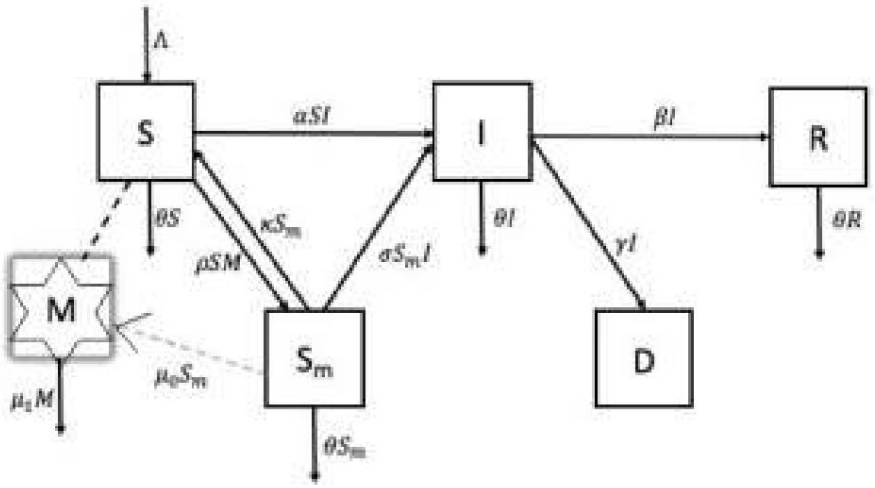


Abbildung 1. Schematische Darstellung der COVID-19- Übertragung mit Fehlinformationen. Einzelpersonen wechseln von den Kompartimenten S **und** Sm **in das Kompartiment** I **als Folge ihrer Interaktion mit Individuen in Kompartiment I. Individuen wechseln zwischen den Kompartimenten** S **und** Sm **als Ergebnis der Interaktion mit** M **falsch informieren (entweder indem sie es konsumieren oder sich davon erholen). Die Falschinformationsdichte wird erzeugt durch Personen im Abteil** Sm.

Tabelle 1. Beschreibung der Modellparameter.

Parameter	Beschreibung
ÿ	Rate, mit der anfällige Personen rekrutiert werden
ÿ	Rate, mit der anfällige Personen infiziert werden
ÿ	Genesungsrate bei Infektiösen
ÿ	Rate, mit der anfällige Personen irregeführt werden
ÿ	Rate, mit der sich irregeführte Personen erholen vor Fehlinformationen
ÿ	Rate, mit der sich Falschinformierte anstecken
ÿ	Sterberate bei infektiösen
ÿ	Natürliche Sterberate
μ0	Wachstumsrate irreführender Informationen
μ1	Verfallsrate irreführender Informationen

Bevor wir fortfahren, stellen wir fest, dass die Gleichung für COVID-19 -Todesfälle (D), **d.h. Gleichung (5) ist vom Rest des Systems entkoppelt und wird daher vernachlässigt in alle nachfolgenden Analysen. Wir beginnen mit der Untersuchung der grundlegenden dynamischen Merkmale des Modells. Insbesondere stellen wir die Positivität der Lösungen des Modells und einen Invarianzraum fest. Das folgende Ergebnis zeigt, dass das Modell immer positive Lösungen zulässt.**

Theorem 1. Die Anfangsbedingungen des Modells seien **S(0)** > 0, Sm(0) **ÿ** 0, **I(0) ÿ** 0, **R(0) ÿ** 0, und **M(0) ÿ** 0. Dann sind die Lösungen (S(t), Sm(t), I(t), R(t), M(t)) des Modells mit positivem Anfangsbedingungen, bleibt für alle Zeiten t > 0 positiv.

Beweis. Wir beginnen damit, die Gleichungen (1)–(4) bzw. (6) durch die Variablen S, Sm, **I, R und M. Integration der resultierenden Differentialgleichungen über das Zeitintervall [0,** t], **und wenn wir die Anfangsbedingungen anwenden, erhalten wir die folgenden Ausdrücke:**

$$S(t) = \mathbf{S0}\ \mathbf{exp}\ \ddot{y}\int_0^t \frac{\ddot{y}\,\ddot{y}I(\ddot{y})\ \ddot{y}\,\ddot{y}M(\ddot{y})\ \ddot{y}\,\ddot{y}\,\frac{Sm(\ddot{y})}{S(\ddot{y})}}{S(\ddot{y})}\,d\ddot{y},$$

$$Sm(t) = Sm0\ \mathbf{exp}\ \int_0^t \ddot{y}\,\frac{S(\ddot{y})M(\ddot{y})}{}\ \ddot{y}\,\ddot{y}I(\ddot{y})\ \ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,d\ddot{y},$$

$$I(t) = \mathbf{I0}\ \mathbf{exp}\ \int_0^t Sm(\ddot{y})\,(\ddot{y}S(\ddot{y}) + \ddot{y}Sm(\ddot{y})\ \ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y})d\ddot{y},$$

$$R(t) = \mathbf{R0}\ \mathbf{exp}\ \int_0^t \frac{Ich(\ddot{y})}{R(\ddot{y})}\ \ddot{y}\,\ddot{y}\,d\ddot{y}\ \mathbf{und}\ M(t) = \mathbf{M0}\ \mathbf{exp}\ \ddot{y}\int_{0\,\mu0}^t \frac{Sm(\ddot{y})}{M(\ddot{y})}\ \ddot{y}\,\mathbf{\mu1}\,d\ddot{y}.$$

Machine Translated by Google

Da die Anfangsbedingungen nicht negativ sind, ist aus den obigen Ausdrücken ersichtlich, dass S(t), Sm(t), I(t), R(t) **und** M(t) **immer positiv sind, wenn** t > **0 ist. Daher ist die Lösung des Modells mit der angegebenen Anfangsbedingung immer positiv.** □

Als nächstes zeigen wir, dass die Lösung des Modells beschränkt ist. Unter der gegebenen Bedingung betrachten wir die lebende Bevölkerung (L) , **definiert durch** L(t) = S(t) + Sm(t) + I(t) + R(t) **und zeigen, dass** L(t) **und** M(t) **im folgenden Ergebnis beschränkt sind.**

Theorem 2. Wenn die Anfangsbedingungen des Modells **L(0) ÿ** erfüllen , ist $\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}$ und **M(0) ÿ** $\frac{\mu 0 \ddot{y}}{\ddot{y}\mu 1}$, dann die die Lösung des Modells beschränkt.

Beweis. Da S(t) > **0,** Sm(t) **ÿ 0,** I(t) **ÿ 0 und** R(t) **ÿ 0 aus Theorem 1, ist es offensichtlich, dass** L(t) **nach unten beschränkt ist und daher** L(t) **ÿ 0. Es bleibt nur noch festzustellen, dass** L(t) **nach oben beschränkt ist. Wenn wir** L(t) = S(t) + Sm(t) + I(t) + R(t) differenzieren **und die Ableitungen aus dem Modell einsetzen , erhalten wir die Differentialgleichung**

$$\frac{dL}{dt} = \ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y}(S + Sm + I + R)\ \ddot{y}\ \ddot{y}I.$$

woraus wir die Differentialungleichung erhalten

$$\frac{dL}{dt} \ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y}L$$

deren Lösung erfüllt

$$L(t)\ \ddot{y} \quad \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ \left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ L(0)\right)e^{\ \ddot{y}\ddot{y}t} \cdot$$

Aus der obigen Ungleichung geht hervor, dass die lebende Population des Systems immer nach oben beschränkt ist. Weiterhin beobachten wir aus der Ungleichung, dass, wenn die Anfangsbedingung L (0) ÿ Um die Beschränktheit $\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}$, **dann haben wir, dass** L(t) **ÿ** $\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}$ **da** t **ÿ ÿ eine strikte Obergrenze ist.**

des Modells abzuleiten, haben wir auch festgestellt, dass die Fehlinformationsdichte M (t) **beschränkt ist. Wir haben bereits in Theorem 1** gezeigt , **dass** M(t) **immer positiv ist, d. h.** M(t) **ÿ 0, also nach unten beschränkt ist. Für die Beschränktheit nach oben betrachten wir den Fall, wenn L(0) ÿ** $\ddot{y}$. **Da** L(t) **ÿ muss, gilt** Sm(t) **ÿ** $\ddot{y}$. **Mithilfe der Differentialgleichung für die Fehlinformationsdichte erhalten wir die Differentialungleichung**

$$\frac{dM}{dt}\ \mu 0\ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ \mu 1M\ \ddot{y}$$

deren Lösung M(t) **erfüllt**

$$M(t)\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ \left(\frac{\mu 0\ddot{y}}{\mu 1\ddot{y}} - \frac{\mu 0\ddot{y}}{\mu 1\ddot{y}}\right)\ \ddot{y}\ M(0))e^{\ \ddot{y}\mu 1\ t} \cdot$$

Offensichtlich ist die Informationsdichte nach oben beschränkt. Ebenso gilt, wenn M(0) ÿ $\frac{\mu 0\ddot{y}}{\ddot{y}\mu 1}$, **dann haben wir, dass** M(t) **ÿ** $\frac{\mu 0\ddot{y}}{\ddot{y}\mu 1}$ **als strikte Obergrenze.** □

Lemma 1. Die abgeschlossene Menge

$$\ddot{y} = (S(t), Sm(t), I(t), R(t), M(t))\ \ddot{y}\ R \qquad \frac{5}{+}; L(t)\ \ddot{y}\ \left[0, \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\mu 1}\right], M(t)\ \ddot{y}\ \left[0, \frac{\mu 0\ddot{y}}{\ddot{y}\mu 1}\right]$$

ist positiv invariant und anziehend für das Modell.

Beweis. Der Beweis ergibt sich direkt aus den Theoremen 1 und 2 , wobei die triviale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung vorausgesetzt wird. □

Machine Translated by Google

3. Analyse des Modells In

diesem Abschnitt berechnen wir die Gleichgewichte und legen Bedingungen für ihr Vorhandensein fest. Wir geben auch die Reproduktionszahl des Modells an und verwenden sie, um die Stabilität der berechneten Gleichgewichte zu untersuchen. Beachten Sie auch, dass die Gleichung für die Genesenen (R) **vom Rest des Systems entkoppelt ist, ebenso wie die Gleichung für die Todesfälle** (D). **Wir werden diese Gleichungen daher in der nachfolgenden Analyse ignorieren,** da ihr Verhalten leicht **aus dem Verhalten des verbleibenden Teilsystems abgeleitet werden kann .**

3.1. Existenz von Gleichgewichten

Durch Entkopplung der Gleichungen für R **und D ergeben sich die Gleichgewichte des Modells aus der Lösung des Teilsystems**

$$\ddot{y}\,\ddot{y} + \ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}_{M}\,\ddot{y}\,\ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}_{\text{ICH}}\,\ddot{y}\,\ddot{y}S\,\ddot{y}M\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}} = 0$$
$$\ddot{y}S\,\ddot{y}M\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}_{M}\,{}^{\ddot{y}}_{\text{ICH}}\,\ddot{y}\,\ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}_{M}\,\ddot{y}\,\ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}_{M} = 0$$
$$\ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}_{\text{ICH}}\,{}^{\ddot{y}} + \ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}_{M}\,{}^{\ddot{y}}_{\text{ICH}}\,\ddot{y}\,\ddot{y}I\,{}^{\ddot{y}}\,\ddot{y}\,{}^{\ddot{y}}\,\ddot{y}\,\ddot{y}Ich^{\ddot{y}} = 0$$
$$\mu 0S\,{}^{\ddot{y}}_{M}\,\ddot{y}\,\mu 1M\ddot{y} = 0.$$

Da die letzte Gleichung oben nur von der Variablen S abhängt $^{\ddot{y}}_{M,}$ **Mÿ kann dargestellt werden als**

$$M\ddot{y} = \frac{\mu 0S\,{}^{\ddot{y}}_{M}}{\mu 1}.$$

Aus der dritten Gleichung im Subsystem sehen wir, dass entweder I = **0, was zum krankheitsfreien Gleichgewicht (DFE) des Modells führt, oder** $\ddot{y}S + \ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y} = 0$, was **zum endemischen Gleichgewicht führt . ,**

Angenommen, E0 = (S **ÿ zwei ,** $S^{\ddot{y}}_{M,\ {}^{\ddot{y}}_{\text{ICH}}}$ **, Mÿ) bezeichnet einen DFE, dann ergibt die weitere Berechnung DFEs,**

$$E\,{}^{1}_{0} = \frac{\ddot{y}\,,}{0,\ 0,\ 0\ \text{und}\ E\ 0\ \ddot{y}}\qquad {}^{2} = \frac{(\ddot{y}+\ddot{y})\mu 1}{\ddot{y}\mu 0},\ \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}\ \frac{(\ddot{y}+\ddot{y})\mu 1\ \ddot{y}\mu 0}{\ddot{y}\mu 0},\ \frac{0,\ \ddot{y}\mu 1}{}\ \frac{(\ddot{y}+\ddot{y})\ \ddot{y}}{}.$$

Wir stellen hier fest, dass das zweite DFE E **0** ^{2} **wird nur existieren, wenn** $\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}} > \frac{(\ddot{y}+\ddot{y})\mu 1}{\ddot{y}\mu 0}$ **.**

Bevor wir mit der Analyse fortfahren, halten wir inne und berechnen die Reproduktionszahl R0 des Modells. Die Reproduktionszahl ist die Anzahl der Sekundärinfektionen, die auftreten, wenn eine infektiöse Person in eine völlig anfällige Bevölkerung gesteckt wird. Mithilfe der Matrixmethode der nächsten Generation (siehe zum Beispiel Duatel et al. [22]) und der DFEs E **bzw. 2** E **0 erhalten wir die Reproduktionszahlen**

$$R\,{}^{1}_{0} = \frac{\ddot{y}\ddot{y}}{\ddot{y}(\ddot{y}+\ddot{y}+\ddot{y})}\quad \textbf{und}\ R\,{}^{2}_{0} = \frac{1}{\ddot{y}+\ddot{y}+\ddot{y}}\ \ddot{y}\mu 0\frac{(\ddot{y}+\ddot{y})\mu 1\ \ddot{y}\ \ddot{y}(\ )+\ddot{y}(\ \ddot{y}}{}\ \frac{(\ddot{y}+\ddot{y})\mu 1\ )}{\ddot{y}\mu 0}.$$

Wir bemerken hier, dass R **0** ^{1} **reguliert das Modell, wenn keine Fehlinformationen vorliegen, und steuert** $R\,{}^{2}_{0}$ **das Modell, wenn die Fehlinformationen dauerhaft bestehen.**

Wir wenden uns nun der Ermittlung der endemischen Gleichgewichte des Modells zu. Angenommen + $^{\ddot{y}}$ **dass** EE = (S **ÿ** $^{\ddot{y}}_{M,\ {}^{\ddot{y}}_{\text{ICH}}}$ **, Mÿ) ein endemisches Gleichgewicht bezeichnet, dann verwendet man die Gleichung** $\ddot{y}S\,\ddot{y}S\,{}^{\ddot{y}}_{M}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y} = 0$ **und den notwendigen Gleichungen im Teilsystem erhalten wir zwei endemische Gleichgewichte, nämlich**

$$EE1 = \frac{\text{Ein}\ \ddot{y}\ ,\ 0,}{\ddot{y}}\ \frac{}{\ddot{y}}\ (R\,{}^{1}_{0}\ \ddot{y}\ 1),\ 0$$

Und

$$EE2 = \frac{(\ddot{y}+\ddot{y}+\ddot{y}\text{l}\ \ddot{y}\ )\mu 1\ \ddot{y}\mu 0}{},\ \frac{A}{\ddot{y}}\ \frac{\ddot{y}(\ddot{y}+\ddot{y}+\ddot{y}\text{l}\ \ddot{y}\ )\mu 1\ddot{y}\ddot{y}\mu 0}{},\ {}^{\ddot{y}}_{\text{ICH}},\ \frac{\mu 0}{\mu 1}\ \frac{A}{\ddot{y}}\ \frac{\ddot{y}(\ddot{y}+\ddot{y}+\ddot{y}\text{l}\ \ddot{y}\ )\mu 1\ddot{y}\ddot{y}\mu 0}{},$$

Machine Translated by Google

wobei A = *ÿ* + *ÿ* + *ÿ* **und wobei**

$$= (R \; \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \; \text{ÿ}\; 1)\; \frac{\text{ÿA}}{\text{ÿ}} \quad A + (\; \text{ÿ}\mu 0 \; \frac{\text{ÿ}\mu 1}{\text{ÿ}} \; \frac{\text{ÿ}}{\text{ÿ}} \; \text{ÿ}\; 1) \qquad \text{ÿ1} \; .$$

Wir bemerken hier auch, dass das erste endemische Gleichgewicht EE1 **existiert, wenn** R *ÿ(ÿ+ÿ+ÿ)***µ1 2** > **1 und** A ÿ $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ **> 1, und die Das zweite endemische Gleichgewicht** EE2 **besteht, wenn** R $\frac{}{\text{ÿ}\mu 0}$ **> 0.**

3.2. Stabilität von

Gleichgewichten **In diesem Abschnitt ermitteln wir lokale Stabilitätsergebnisse für die oben unter geeigneten Bedingungen erhaltenen DFEs und endemischen Gleichgewichte. Wir beginnen mit der Feststellung, dass die Jacobi-Matrix** J(S, Sm, **I,** M) **des Teilsystems gegeben ist durch**

$$\mathbf{J(\cdot)} = \begin{matrix} \text{ÿ} & \text{ÿÿ}\mathit{I}\ \text{ÿ}\ \text{ÿM}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿM}\ \text{ÿI} & \mathit{ÿ} & \mathit{ÿÿS} & \mathit{ÿÿ}\ \text{S} \\ & \mathbf{0} & \mathit{ÿÿ}\mathit{I}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ} & \text{ÿÿSm} & \mathit{ÿ}\ \text{S} \quad \text{ÿ} \\ & & \text{ÿI} & \text{ÿS} + \text{ÿSm}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \quad \text{¨} \\ \text{ÿ} & & \mathbf{\mu 0} & & \mathit{ÿ}\mu 1 \quad \text{ÿ} \end{matrix} .$$

Satz 3. Wenn *µ1ÿ(ÿ* + ÿ) > *µ0ÿÿ* und andernfalls $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ < 1, dann ist der DFE E_0^1 ist lokal asymptotisch stabil, R, ist es instabil.

Beweis. Auswertung der Jacobi-Matrix am DFE E $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ = $\begin{matrix} \text{ÿ} \\ \mathit{ÿ} \end{matrix}$, **0, 0, 0** , **wir erhalten**

$$\text{J(E}\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\text{)} = \begin{matrix} \text{ÿ} & \mathit{ÿÿ} \quad \mathbf{0}\ \mathit{ÿÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ} & \mathit{ÿ} & \mathit{ÿÿ}\ \mathit{ÿ}\ \frac{\text{ÿ}}{} & \mathit{ÿÿ}\ \frac{\text{ÿ}}{} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathit{ÿ}\ \frac{\text{ÿ}}{\text{ÿ}}\ \text{ÿ} \\ \text{ÿ} & \mathbf{0} & & \mathit{ÿ}\ \frac{\text{ÿ}}{\mathit{ÿ}}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \quad \text{¨} \\ & & \mathbf{\mu 0} & & \mathit{ÿ}\mu 1 \quad \text{ÿ} \end{matrix}$$

dessen charakteristisches Polynom ist

$$P(\mathit{ÿ}) = \det(\text{J(E}\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\text{)}\ \text{ÿ}\ \text{ÿI})$$

$$\text{ÿ}\ \text{ÿ} = (\mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ})[(\text{ÿÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ})(\text{ÿÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ})(\mathit{ÿ}\mu 1\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ})\ \text{ÿ}\ \mu 0(\mathit{ÿ}\ )(\text{ÿÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ})], \mathit{ÿ}\ \mathit{ÿ}$$

die Eigenwerte ergeben

$$\text{ÿ1} = \mathit{ÿÿ}$$

$$\text{ÿ2} = \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \text{ÿ}\ \mathit{ÿ}$$

$$\text{ÿ}(\mathit{ÿ} + \mathit{ÿ} + \mathbf{\mu 1})\ \text{ÿ}\ (\mathit{\mu 1} + \mathit{ÿ} + \mathit{ÿ})\ \text{ÿ3} = \frac{\text{ÿ}\ 4((\mathit{ÿ} + \mathit{ÿ})\mathit{\mu 1}\ \text{ÿ}\ \mathbf{\mu 0}\text{ÿ}\ \frac{\text{ÿ}}{\mathit{ÿ}})}{2}$$

$$\text{ÿ}(\mathit{ÿ} + \mathit{ÿ} + \mathbf{\mu 1}) + (\mathit{\mu 1} + \mathit{ÿ} + \mathit{ÿ})\ \text{ÿ4} = \frac{\text{ÿ}\ 4((\mathit{ÿ} + \mathit{ÿ})\mathit{\mu 1}\ \text{ÿ}\ \mathbf{\mu 0}\text{ÿ}\ \frac{\text{ÿ}}{\mathit{ÿ}})}{2} .$$

Aus dem Obigen ist ersichtlich, dass ÿ1 und ÿ3 negative Realteile haben, da $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ R $\frac{}{\text{ÿÿ}}$ **und ÿ2 können umgeschrieben werden als** *ÿ(ÿ+ÿ+ÿ)*

$$\text{ÿ2} = \mathit{ÿ}\ \mathit{ÿ}\ \mathbf{1} \quad \frac{\text{ÿ}}{} \quad \text{ÿ}\ (\mathit{ÿ} + \mathit{ÿ} + \mathit{ÿ})$$

$$= \text{R} \quad \mathbf{0}\ (\mathit{ÿ} + \mathit{ÿ} + \mathit{ÿ})\ \text{ÿ}\ (\mathit{ÿ} + \mathit{ÿ} + \mathit{ÿ})$$

$$= (\text{R} \; \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \; \text{ÿ}\; 1)(\mathit{ÿ} + \mathit{ÿ} + \mathit{ÿ}).$$

Machine Translated by Google

Wenn also $R_0^1 < 1$**, dann ist** $\ddot{y}2 < 0$**.** $\ddot{y}4$ **hat einen negativen Realteil, wenn**

$$\ddot{y} + \ddot{y} + \mu 1 > (\mu 1 + \ddot{y} + \ddot{y}) \quad {}^2 \ddot{y}\, 4((\ddot{y} + \ddot{y})\mu 1\, \ddot{y}\, \mu 0 \ddot{y} \quad \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}})$$

$$(\ddot{y} + \ddot{y} + \mu 1) \quad {}^2 > (\mu 1 + \ddot{y} + \ddot{y}) \quad {}^2 \ddot{y}\, 4((\ddot{y} + \ddot{y})\mu 1\, \ddot{y}\, \mu 0 \ddot{y} \quad \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}})$$

$$0 > \ddot{y}4((\ddot{y} + \ddot{y})\mu 1\, \ddot{y}\, \mu 0 \ddot{y} \quad \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}})$$

$$\mu 1 \ddot{y}(\ddot{y} + \ddot{y}) > \mu 0 \ddot{y} \ddot{y}$$

gilt. Daher ist es asymptotisch stabil, wenn $\mu 1 \ddot{y}(\ddot{y} + \ddot{y}) > \mu 0 \ddot{y} \ddot{y}$ **und** $R_0^1 < 1$**, dann ist der DFE** E_0^1 **ist lokal** R , **andernfalls instabil, wenn** $R > 1$**.** □

Wir schließen nun unsere Analyse des ersten DFE E ab. $_0^1$ **durch die Feststellung eines globalen Stabilitätsergebnisses. Zu diesem Zweck erinnern wir uns an die Feststellung in Abschnitt 2 , dass zu jedem Zeitpunkt t die lebende Bevölkerung** L(t) = S(t) + Sm(t) + I(t) + R(t) **nach oben beschränkt ist und erfüllt**

$$L(t)\, \ddot{y} \quad \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}\, \ddot{y}\, (\, \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}\, \ddot{y}\, L0)e^{\ddot{y}\ddot{y}t} \ ,$$

wobei L0 = **L(0). Die folgenden Ergebnisse sind eine Folge der obigen Ungleichung.**

Lemma 2. Die lebende Bevölkerung L(t) **ÿ L0** zu allen Zeiten t.

Das folgende Ergebnis bietet globale Stabilität für das erste DFE E. **Es gibt** $_0^1$**, das heißt, wenn es kein COVID-19 und es gibt auch keine Fehlinformationen.**

Theorem 4. Im Hinblick auf Lemma 2, wenn **L0** = **1** E **0** $\frac{\ddot{y}\ \ddot{y}}{\dot{y}\ ,\ \dot{y}}$ und wenn $R_0^1 < 1$, dann das erste krankheitsfreie Gleichgewicht, ist global asymptotisch stabil, andernfalls ist es instabil.

Beweis. Um Theorem 4 zu beweisen, betrachten wir den Kandidaten der Ljapunow-Funktion V = $\frac{1}{\text{ich}}\frac{2}{2}$ **. Wenn wir seine Ableitung nehmen, erhalten wir**

$$\frac{dV}{dt} \frac{dI}{dt} = \text{Ich}$$

$$= (\ddot{y}SI + \ddot{y}Sm\, I\, \ddot{y}\, \ddot{y}I\, \ddot{y}\, \ddot{y}I\, \ddot{y}\, \ddot{y}I)I = [\ddot{y}S$$

$$+ \ddot{y}Sm\, \ddot{y}\, (\ddot{y} + \ddot{y} + \ddot{y})]I\, \ddot{y}S + \ddot{y}Sm \quad {}^2$$

$$\ddot{y})(\qquad = (\ddot{y} + \ddot{y} + \frac{}{1)\text{Ich}\, \ddot{y} + \ddot{y} + \ddot{y}}\, \ddot{y} \quad {}^2.$$

Da das Modell davon ausgeht, dass $\ddot{y} < \ddot{y}$**, wird die obige Gleichung**

$$\frac{dV}{dt} \ddot{y}\, (\ddot{y} + \ddot{y} + \ddot{y})(\qquad \frac{\ddot{y}(S + Sm)}{1)\text{Ich}\, \ddot{y} + \ddot{y} + \ddot{y}}\, \ddot{y} \quad {}^2.$$

Wenn L0 = $\frac{\ddot{y}\ \ddot{y}}{\ddot{y}\ \ddot{y}}$ dann **erhalten wir nach Lemma** 2, dass S + Sm $\ddot{y}\frac{\ddot{y}\ \ddot{y}}{\ddot{y}}$ *Damit* **erhalten wir die Differentialungleichung**

$$\frac{dV}{dt} \ddot{y}\, (\ddot{y} + \ddot{y} + \ddot{y})(\qquad \frac{\ddot{y}\ddot{y}}{1)\text{Ich}\, \ddot{y}(\ddot{y} + \ddot{y} + \ddot{y})}\, \ddot{y} \quad {}^2$$

$$\ddot{y}\, (\ddot{y} + \ddot{y} + \ddot{y})(R \quad {}_0^1\, \ddot{y}\, 1)\text{Ich}^2.$$

Es ist klar, dass wenn $R_0^1 < 1$**, dann** < 0 **und daher nach dem Invarianzprinzip von LaSalle das krankheitsfreie Gleichgewicht** E_0^1 **ist global asymptotisch stabil [23].** □

Als nächstes betrachten wir die lokale Stabilität des zweiten DFE E_0^2 **und geben Sie das folgende Ergebnis an.**

Machine Translated by Google

Theorem 5. Wenn *ÿÿμ0* > ÿ(ÿ + *ÿ)μ1* und $\mathcal{R}_0^2 < 1$, dann ist der DFE E $_0$ lokal asymptotisch stabil, andernfalls R, ist es instabil.

Beweis. Durch Auswertung der Jacobi-Matrix am zweiten DFE, also E *(ÿ+ÿ)μ1* (ÿ+ÿ) *ÿμ0),* **erhalten wir die** $\mathcal{R}_0^2 = ((ÿ+ÿ)\mu 1\,\frac{ÿ}{ÿμ0}, \frac{ÿ}{ÿ}$

Jacobi-Matrix , 0, *ÿμ1 ÿμ0 ÿ*

$$J(E_0^2) = \begin{pmatrix} ÿ & \frac{ÿÿμ0}{ÿμ1} + ÿ & ÿ \\ ÿÿμ0\,ÿ\,ÿ\,ÿ\,ÿÿ\,ÿ\,ÿμ1 & & \\ 0 & 0 & \\ ÿ & 0 & \\ & & μ0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ÿÿ\,\frac{(ÿ+ÿ)μ1}{ÿμ0} & & \frac{(ÿ+ÿ)μ1}{ÿÿ\,ÿμ0} & ÿ \\ ÿÿ(\,ÿ\,\frac{(ÿ+ÿ)μ1\,)}{ÿμ0} & & \frac{(ÿ+ÿ)μ1\,ÿ}{ÿμ0} & \\ ÿ\,\frac{(ÿ+ÿ)μ1+}{ÿ(\,ÿμ0\;\;ÿ\,ÿ} & \frac{(ÿ+ÿ)μ1\,)}{ÿ\,ÿ\,ÿ\,ÿ\,ÿ\,ÿμ0\,0} & 0 & \\ & & ÿμ1 & ÿ \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Zeile der obigen Matrix ist klar ersichtlich, dass

$$ÿμ0\,\mathcal{R}_0^2 = \frac{ÿμ1\,ÿ\,ÿ1}{ÿμ1)}\,ÿ + ÿ(\,ÿ\,ÿ\,ÿ\,ÿ\,ÿ\,ÿ\,ÿμ0$$

$$= R_0(ÿ_{+ÿ+ÿ)\,ÿ\,(ÿ+ÿ+ÿ)}$$

$$= (R_0^2\,ÿ\,1)(ÿ + ÿ + ÿ) < 0 \text{ wenn } R_0^2 < 1.$$

Der verbleibende Faktor des charakteristischen Polynoms ist vom dritten Grad und ist gegeben durch

$$ÿ^3 + b1ÿ^2 + b2ÿ + b3 = 0,$$

Wo

$$b1 = μ1 + + ÿ\,\frac{ÿÿμ0}{ÿμ1} - ÿÿμ0$$

$$ÿ\,μ1\,b3 = ÿÿμ0\,ÿ\,(ÿ + ÿ)μ1ÿ.$$

Um festzustellen, dass die verbleibenden Eigenwerte (also die Nullstellen der obigen kubischen Gleichung) negative Realteile haben, verwenden wir das Routh-Hurwitz-Kriterium. Aus den obigen Koeffizienten b1, b2 und b3 ist ersichtlich , **dass, wenn die Bedingung** *ÿÿμ0* > *(ÿ + ÿ)μ1ÿ* **erfüllt ist, dann b1** > **0, b2** > **0 und b3** > **0. Außerdem sehen wir, dass die Ungleichung**

$$(\,ÿ\,ÿμ1) > ÿÿμ0\,ÿ\,\frac{ÿÿμ0\,ÿÿμ0\,ÿÿμ0}{(ÿ + ÿ)μ1ÿ} = b3 + ÿμ1\,ÿ\,μ1\;\;b1b2 = (μ1 + + ÿ)$$

gilt. Da b1, b2 und b3 alle positiv sind und b1b2 > **b3, folgern wir nach dem Routh-Hurwitz-Kriterium, dass die verbleibenden Eigenwerte negative Realteile haben. Wenn** also R **lokal asymptotisch stabil ist, ist es andernfalls instabil.**
$\mathcal{R}_0^2$ **< 1, die DFE,** E $_0^2$, □

Bemerkung 1. Nur zur Erinnerung: Wir möchten hier daran erinnern, dass die Bedingung *ÿÿμ0* > *(ÿ + ÿ)μ1ÿ* auferlegt wurde, um sicherzustellen, dass das DFE **E2** gültig ist.
$_0$

Satz 6. Wenn R, $\mathcal{R}_0^1$ > 1, dann ist das endemische Gleichgewicht **EE1** lokal asymptotisch stabil, andernfalls ist es instabil.

Machine Translated by Google

Beweis. Die Auswertung der Jacobi-Matrix im endemischen Gleichgewicht EE1, also bei EE1 = ($\frac{A}{\ddot{y}}$**, 0,** $\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}$ (R $\frac{1}{0}$ ÿ 1), 0) **wobei** A = $\ddot{y}$ + $\ddot{y}$ + ÿ **ist, erhalten wir die Jacobi-Matrix**

$$J(EE1) = \begin{matrix} \ddot{y} & \ddot{y} & \ddot{y}A\ \ddot{y}\ddot{y}\ \ddot{y}\ 1))\ \frac{A}{\ddot{y}} \\ \ddot{y} & \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}(R\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ 1))\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y}\mu 1 & \ddot{y} \\ \ddot{y} & \ddot{y}(\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}(R & \ddot{y} \end{matrix}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\ddot{y}) = \det(J(EE1)\ \ddot{y}\ \ddot{y}I)$$
$$= (\ddot{y}\ddot{y}(\quad \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}(R\ \ddot{y}\ 1))\ \ddot{y}\ \ddot{y})[(\ddot{y}\mu 1\ \ddot{y}\ \ddot{y})(\ddot{y}R\ 0\ddot{y} + \ddot{y}^{1} \quad + A\ddot{y}R\ 0 \quad ^{1})],$$

und die Eigenwerte sind

$$\ddot{y}\ \ddot{y}1 = \ddot{y}\ddot{y}(\quad \frac{}{\ddot{y}}(R\ \ddot{y}\ 1)) < 0 \text{ wenn } R > 1$$

$$\ddot{y}2 = \ddot{y}\mu 1 < 0$$

$$\ddot{y}3 = \frac{\ddot{y}\ddot{y}R\ \ddot{y}\ (\ddot{y}R\ \ddot{y}\ 4A\ddot{y}R}{2}$$

$$\ddot{y}4 = \frac{\ddot{y}\ddot{y}R\ + (\ddot{y}R\ \ddot{y}\ 4A\ddot{y}R}{2}.$$

Aus den obigen Ergebnissen geht klar hervor, dass die Eigenwerte ÿ3 und ÿ4 immer negative reelle Zahlen sind. Zahlen oder haben negative Realteile, da $(\ddot{y}R\quad)^2\ \ddot{y}\ 4A\ddot{y}R\ 1\ 0 \quad 1 < \ddot{y}R$ **0. Daher können wir** > **1, dann ist 1 schlussfolgern, dass wenn das endemische Gleichgewicht EE1 lokal asymptotisch stabil ÿ 1. und instabil, wenn R** R_0 **1** □

Bemerkung 2. Wir stellen hier fest, dass in ähnlicher Weise wie in Theorem 6 festgestellt werden kann, dass wenn $\frac{2}{0} > 1$, R dann das endemische Gleichgewicht

$$EE2 = S \quad ^{\ddot{y}}, \frac{A\ \ddot{y}\ \ddot{y}S \quad ^{\ddot{y}}}{\ddot{y}}, \quad ^{\ddot{y}}, \frac{\mu 0}{(\mu 1} \quad \frac{A\ \ddot{y}\ \ddot{y}S \quad ^{\ddot{y}}}{\ddot{y}}) \quad ,$$

wobei $S^{\ddot{y}} = \frac{(\ddot{y}+\ddot{y}+\ddot{y}l\ \ddot{y})\mu 1\ \ddot{y}\mu 0}{}$, $= (R \quad \frac{2}{0}\ \ddot{y}\ 1)\ \frac{\ddot{y}A}{\ddot{y}} \quad A + \frac{\ddot{y}\ddot{y}\mu 1}{\ddot{y}\mu 0}\ (\ddot{y}\ \ddot{y}\ 1)$ $^{\ddot{y}1}$, und A = $\ddot{y}$ + $\ddot{y}$ + $\ddot{y}$ ist lokal stabil.

4. Ergebnisse und Diskussion

In diesem Abschnitt präsentieren wir numerische Simulationen des Modells unter verschiedenen Umständen mit Schwerpunkt auf der Bevölkerung der Vereinigten Staaten. Wir simulieren die Zahl der Infektionen für verschiedene Raten im Zusammenhang mit Fehlinformationen und in einigen Fällen die Zahl der kumulierten Todesfälle. Die in den Simulationen verwendeten Parameterwerte wurden auf Grundlage von Werten aus der veröffentlichten Literatur zu COVID-19 [20,24–26] ausgewählt , **sofern verfügbar, und es wurden andere Parameterwerte angenommen, um das Verhalten des Modells zu untersuchen. Die Anfangsbedingungen wurden so gewählt, dass sie die Bevölkerung der Vereinigten Staaten von etwa 335 Millionen widerspiegeln, indem S(0) = 3,35 × 108** gesetzt wurde . **In Anbetracht dessen, dass die tatsächliche Bevölkerung der USA auf 331 bis 341 Millionen geschätzt wird, haben wir mehrere Simulationen mit kleinen Störungen der Anfangsbedingungen durchgeführt, und das langfristige Verhalten der Vorhersagen des Modells hat sich nicht geändert.**

Im vorherigen Abschnitt haben wir mehrere qualitative Ergebnisse in Bezug auf die Gleichgewichte des Modells ermittelt. Wir beginnen mit der numerischen Bestätigung dieser Ergebnisse in den Abbildungen 2–4

Machine Translated by Google

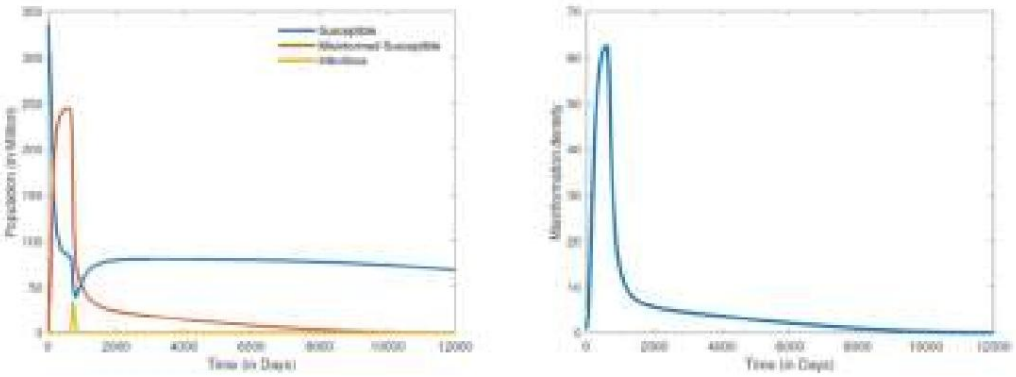


Abbildung 2. Numerische Simulation des ersten DFE: Populationsverteilung (links) und Informationsdichte (rechts) für Parameterwerte ÿ = 0, ÿ = 0,25 × 10ÿ4 , ÿ = 1/14, ÿ = 0,1, ÿ = 20ÿ, ÿ = 0,5 × 10ÿ3 , ÿ = 10ÿ4, ÿ = 4 × 10ÿ5 , μ0 = 0,0025 und μ1 = 0,01.

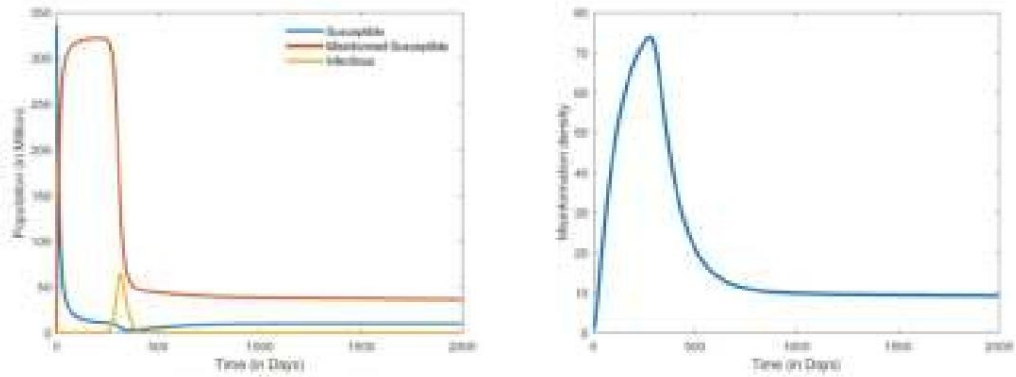


Abbildung 3. Numerische Simulation des zweiten DFE: Populationsverteilung (links) und Informationsdichte (rechts) für Parameterwerte ÿ = 0, ÿ = 0,25 × 10ÿ4 , ÿ = 1/14, ÿ = 0,1, ÿ = 2,5ÿ, ÿ = 0,5 × 10ÿ3 , ÿ = 10ÿ4, ÿ = 4 × 10ÿ5 , μ0 = 0,0025 und μ1 = 0,01.

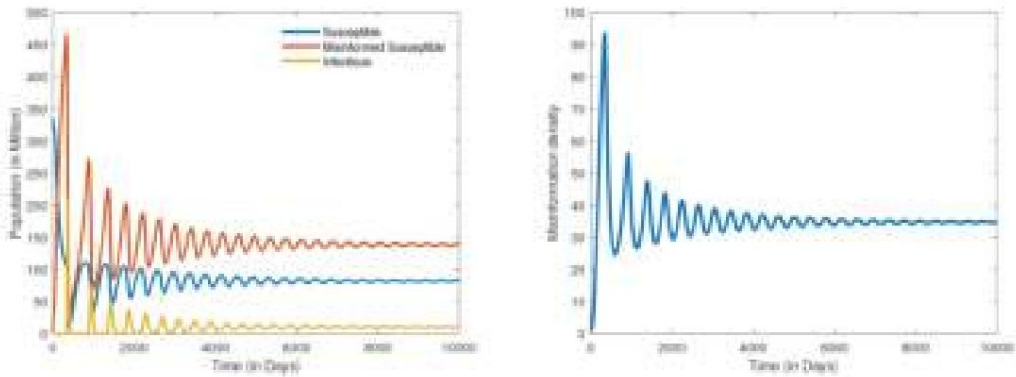


Abbildung 4. Numerische Simulation eines stabilen endemischen Gleichgewichts: Populationsverteilung (links) und Informationsdichte (rechts) für Parameterwerte ÿ = 0,75, ÿ = 0,25 × 10ÿ4 , ÿ = 1/14, ÿ = 0,1, ÿ = 20ÿ, ÿ = 0,5 × 10ÿ3 , ÿ = 10ÿ4, ÿ = 4 × 10ÿ5 , μ0 = 0,0254 und μ1 = 0,01.

Die Ergebnisse in Abbildung 2 zeigen die globale Stabilität des ersten DFE. Die Simulationen zeigen, dass die Krankheit, die Fehlinformierten und die Dichte der Fehlinformationen im Laufe der Zeit schließlich aussterben. Aus diesen Ergebnissen lässt sich erkennen, dass COVID-19 zwar **viel früher aussterben könnte, es aber viel länger dauert, bis sowohl die Fehlinformierten als auch die Dichte der Fehlinformationen ausgerottet sind. Wir weisen hier darauf hin, dass die numerischen Berechnungen für das erste DFE durch Festlegen der Gen**

Machine Translated by Google

auf etwa das 20-fache der Rate, mit der anfällige Personen irregeführt werden (ÿ). Wenn die Wiederherstellungsrate falsch informierter Personen auf etwa das Zweifache der Rate festgelegt wird, mit der anfällige Personen irregeführt werden, erhalten wir die in Abbildung 3 dargestellten Simulationen. Die Ergebnisse in Abbildung 3 zeigen eindeutig den zweiten DFE, den wir auch im vorherigen Diese Ergebnisse zeigen, dass selbst wenn COVID-19 vollständig ausstirbt, Fehlinformationen über die Krankheit nie verschwinden werden. Verschwörungstheorien wie die, dass COVID-19 seinen Ursprung hat, dass **die Krankheit eine Biowaffe ist, Missverständnisse über COVID-19- Impfstoffe und dass COVID-19- Leugner wahrscheinlich noch lange Zeit bestehen bleiben, wenn man bedenkt, wie leicht und schnell Fehlinformationen derzeit verbreitet werden.**

Die Ergebnisse für die oben diskutierten krankheitsfreien Gleichgewichte wurden unter der Annahme einer geschlossenen Population (ÿ = 0) erzielt, d. h. es kommen keine neuen Personen in die Gemeinschaft. Dies ist ein Szenario, in dem entweder ein strenger Lockdown oder eine Bewegungseinschränkung vorliegt. Dies war tatsächlich bei den frühen Varianten von COVID-19 der Fall, bei denen Städte/Länder **die Ausbreitung der Krankheit durch strenge Lockdowns eindämmen konnten ;** Fehlinformationen konnten jedoch nicht **eingedämmt werden. Durch die Verschiebung des Paradigmas von einer geschlossenen Population zu einer offenen Population, bei der Bewegungsfreiheit herrscht und Menschen die Gemeinschaft betreten und verlassen, verschieben sich die Dynamiken schnell zu Simulationen eines endemischen Gleichgewichts. Die Ergebnisse in Abbildung 4 zeigen ein global stabiles endemisches Gleichgewicht. Erinnern Sie sich, dass die Festlegung der Genesungsrate *(ÿ)* von falsch informierten Personen auf etwa das 20-fache der Rate, mit der anfällige Personen falsch informiert werden *(ÿ),* zu einem DFE führte . Für eine offene Population mit einer Rekrutierungsrate von ÿ = 0,75 und *ÿ = 20ÿ* erhalten wir jedoch ein endemisches Gleichgewicht (Abbildung 4). Eine weitere Erhöhung der Genesungsrate falsch informierter Personen um beispielsweise das 50-fache der Rate, mit der anfällige Personen falsch informiert werden, also *ÿ = 50ÿ,* führt zu einer Hopf-Bifurkation, die das endemische Gleichgewicht instabil macht, wie in Abbildung 5 gezeigt. Es ist erwähnenswert, dass die Bifurkation hier ein stabiles Gleichgewicht in ein instabiles Gleichgewicht mit einer sehr großen Schwingungsamplitude umwandelt . Aus den Ergebnissen in den Abbildungen 4 und 5** können wir daher schließen , **dass es nicht ausreicht, irreführende Informationen durch eine Faktenprüfung durch die Medien zu widerlegen. Die Widerlegung und die korrekte Aufklärung der Öffentlichkeit über COVID-19 sollten gleichzeitig erfolgen.**

Medienkompetenz ist auch im Kampf gegen Fehlinformationen im Zusammenhang mit COVID-19 von entscheidender Bedeutung. Eine verbesserte Medienkompetenz kann Einzelpersonen dabei helfen, glaubwürdige Informationsquellen von Fehlinformationen zu erkennen und zu unterscheiden. Eine gebildete Öffentlichkeit, die weniger anfällig dafür ist, irregeführt zu werden, wird zu einem besseren Ergebnis bei der Ausrottung von COVID-19 oder der Eindämmung der Ausbreitung der Krankheit in einem endemischen Staat führen. Wir weisen hier darauf hin, dass alle Simulationen, die wir für

eine positive Rekrutierungsrate, d. h. ÿ > 0 (unabhängig davon, wie klein der Wert von ÿ ist), führte zu einem endemischen Gleichgewicht. Angesichts der Tatsache, dass wir in einer offenen Bevölkerung mit Bewegungsfreiheit leben, wird COVID-19 daher endemisch werden.

Als nächstes widmen wir uns der Simulation der Auswirkungen, die eine Variation der Genesungsrate von falsch informierten Personen *(ÿ)* auf die Anzahl der COVID-19- Fälle und die kumulativen Todesfälle haben wird. Die Ergebnisse für die Anzahl der COVID-19- Fälle für eine geschlossene Bevölkerung sind in Abbildung 6 dargestellt. Wir beobachten hier, dass eine Erhöhung der Genesungsrate der falsch informierten Personen *(ÿ)* zu weniger COVID-19- Fällen führt . Je höher die Genesungsrate (ÿ), desto länger dauert es, bis die Anzahl der Fälle ihren Höhepunkt erreicht, und auch das Ausmaß des Höhepunkts ist geringer. Wir stellen auch fest, dass es bei einer höheren Genesungsrate (ÿ) länger dauert, bis der Höhepunkt erreicht wird, wodurch wertvolle Zeit gewonnen wird , die von den Gesundheitsbehörden genutzt werden kann, um andere Maßnahmen zu ergreifen, um die Auswirkungen der Krankheit auf die gesamte Bevölkerung weiter zu verringern. Die Ergebnisse in Abbildung 7 zeigen die kumulativen Todesfälle durch COVID-19 für verschiedene falsch informierte Genesungsraten für eine geschlossene Bevölkerung. Aus diesen Simulationen geht auch hervor, dass eine höhere Genesungsrate *ÿ* zu einer geringeren Anzahl kumulativer COVID-19- Todesfälle führt . Nach Angaben der WHO [6] wurden in den Vereinigten Staaten zwischen dem 3. Januar 2020 und dem 21. September 2023 **etwa 1.127.252 COVID-19** -Todesfälle gemeldet . **Aus den kumulativen Todessimulationen in Abbildung 7** können wir erkennen , **dass die Genesungsrate falsch informierter Personen in den Vereinigten Staaten weniger als fünfmal so hoch ist** wie die Rate irregeführter Personen. Wenn man bedenkt, dass falsch informierte Personen zur Verbreitung von Fehlinformationen beitragen, **scheint die Genesungsrate irregeführter Personen in den Vereinigte**

Machine Translated by Google

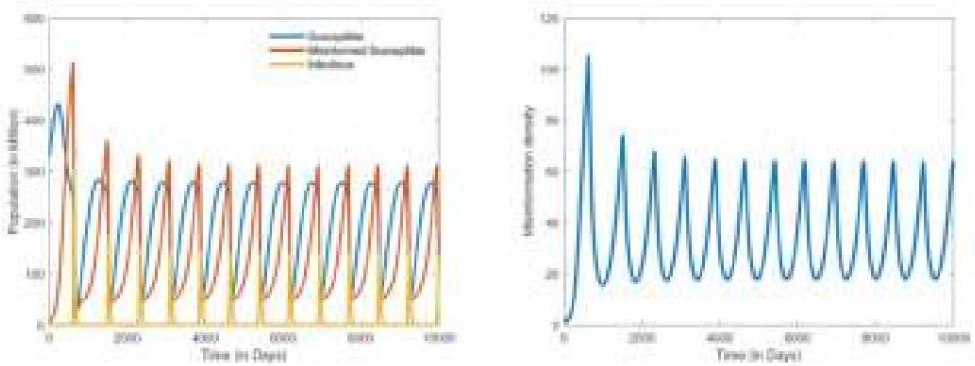


Abbildung 5. Numerische Simulation eines instabilen endemischen Gleichgewichts: Populationsverteilung (links) und Informationsdichte (rechts) für Parameterwerte ÿ = 0,75, *ÿ* = 0,25 × 10ÿ4 , *ÿ* = 1/14, *ÿ* = 0,1, *ÿ* = 50ÿ, *ÿ* = 0,15 × 10ÿ4 , *ÿ* = 10ÿ5 , μ0 = 0,0025 und μ1 = 0,01.

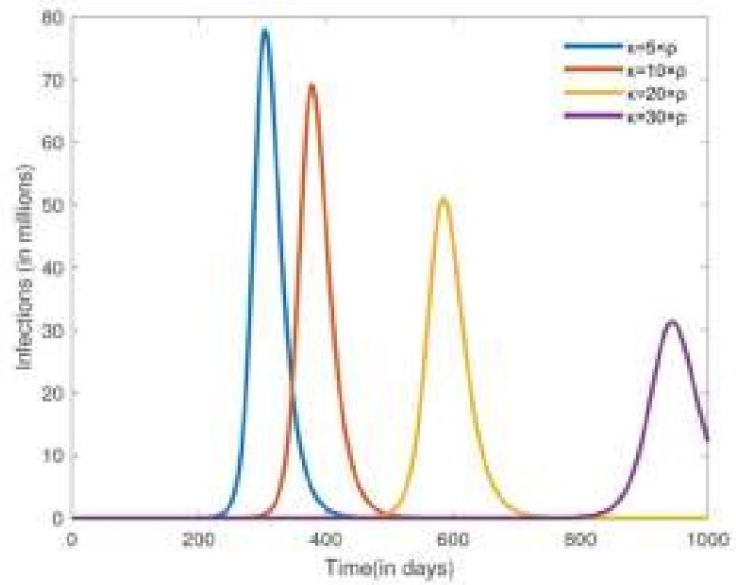


Abbildung 6. Numerische Simulation der Anzahl der Infektionen für verschiedene falsch angegebene Genesungsraten ÿ. Die anderen Parameterwerte sind fest auf ÿ = 0, *ÿ* = 0,25 × 10ÿ4 , *ÿ* = 1/14, *ÿ* = 0,1, , *ÿ* = 0,5 × 10ÿ3 , *ÿ* = 10ÿ4 , *ÿ* = 0,15 × 10ÿ4 , *ÿ* = 10ÿ5 , μ0 = 0,0025 und μ1 = 0,01.

Abschließend betrachten wir die Auswirkungen der Wachstums- und Abklingraten der Falschinformationsdichte auf die Zahl der COVID-19- Fälle und konzentrieren uns dabei auf eine geschlossene Population. Die Ergebnisse in Abbildung 8 gelten für unterschiedliche Wachstumsraten μ0, während die Ergebnisse in Abbildung 9 für unterschiedliche Abklingraten μ1 gelten. Anhand der Ergebnisse in Abbildung 8 können **wir** deutlich erkennen , **dass eine Verringerung der Wachstumsrate der Falschinformationsdichte zu weniger COVID-19-Fällen führt. Tatsächlich führt eine niedrige Wachstumsrate auch zu einem geringeren Infektionspeak, der später auftritt, wodurch Zeit gewonnen wird, die zur Umsetzung anderer Eindämmungsstrategien und damit zur Minimierung der Krankheitslast genutzt werden** kann . **Die Verbreitung genauer Informationen ist im Kampf gegen Falschinformationen im Zusammenhang mit COVID-19 von entscheidender Bedeutung. Beamte des öffentlichen Gesundheitswesens und glaubwürdige Informationsquellen sollten kl Positive Botschaften verlangsamen die Verbreitung von Falschinformationen. Andererseits führt eine Erhöhung der Abklingrate von Falschinformationen auch zu einem geringeren Infektionsspitzenwert, der viel später auftritt. Es können Faktenprüfungsmechanismen implementiert werden, um Falschinformationen im Zusammenhang mit COVID-19 zu bekämpfen. Fernseh-, Radio- und Social-Media-Plattformen können Faktenprüfungsmechanismen implementieren, um Falschinformationen im Zusammenhang mit der Krankheit zu ken**

Machine Translated by Google

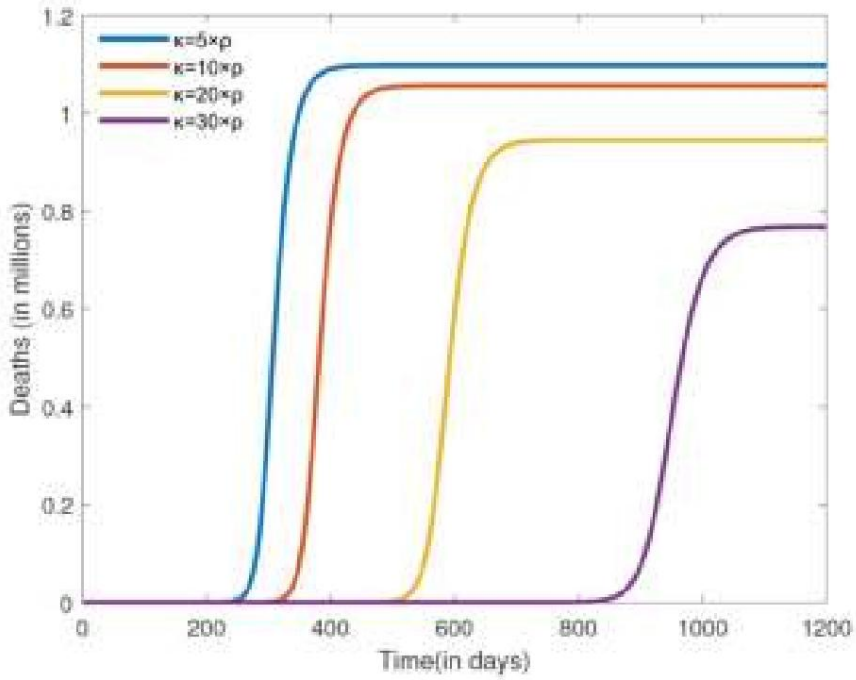


Abbildung 7. Numerische Simulation kumulativer Todesfälle für verschiedene Genesungsraten ÿ. Der andere Parameter Werte sind fest bei ÿ = 0, *ÿ* **= 0,25 × 10ÿ4,** *ÿ* **= 1/14,** *ÿ* **= 0,1,** *ÿ* **= 0,5 × 10ÿ3,** *ÿ* **= 10ÿ4,** *ÿ* **= 4 × 10ÿ5, μ0 = 0,0025 und μ1 = 0,01.**

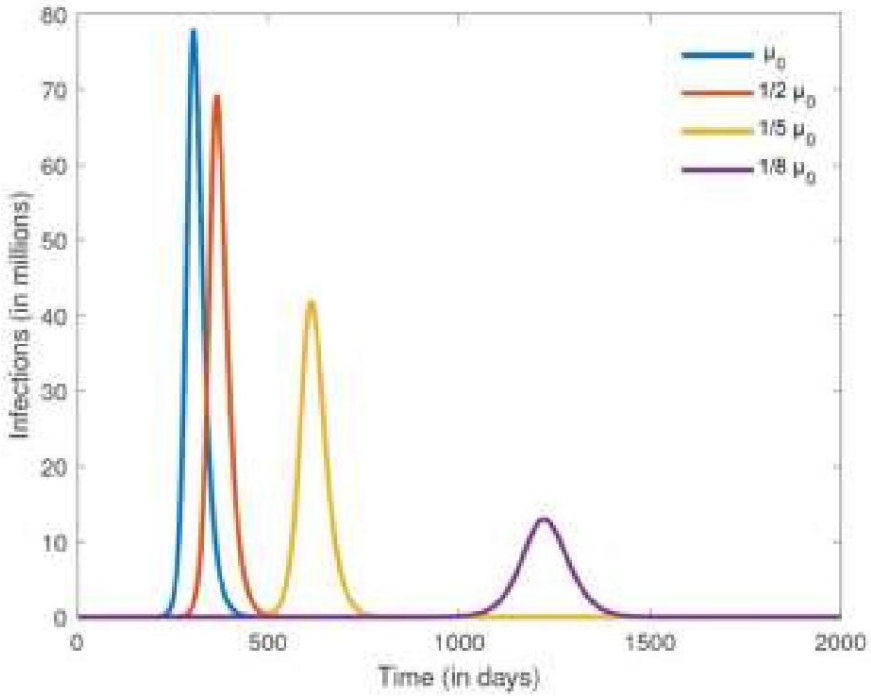


Abbildung 8. Numerische Simulation der Infektionszahlen bei unterschiedlichem Wachstum von Fehlinformationen Raten μ0. Die anderen Parameterwerte sind fest auf ÿ = 0, *ÿ* **= 0,25 × 10ÿ4,** *ÿ* **= 1/14,** *ÿ* **= 0,1,** *ÿ* *= 5ÿ,* *ÿ* **= 0,5 × 10ÿ3,** *ÿ* **= 10ÿ4,** *ÿ* **= 4 × 10ÿ5, und μ1 = 0,01.**

Machine Translated by Google

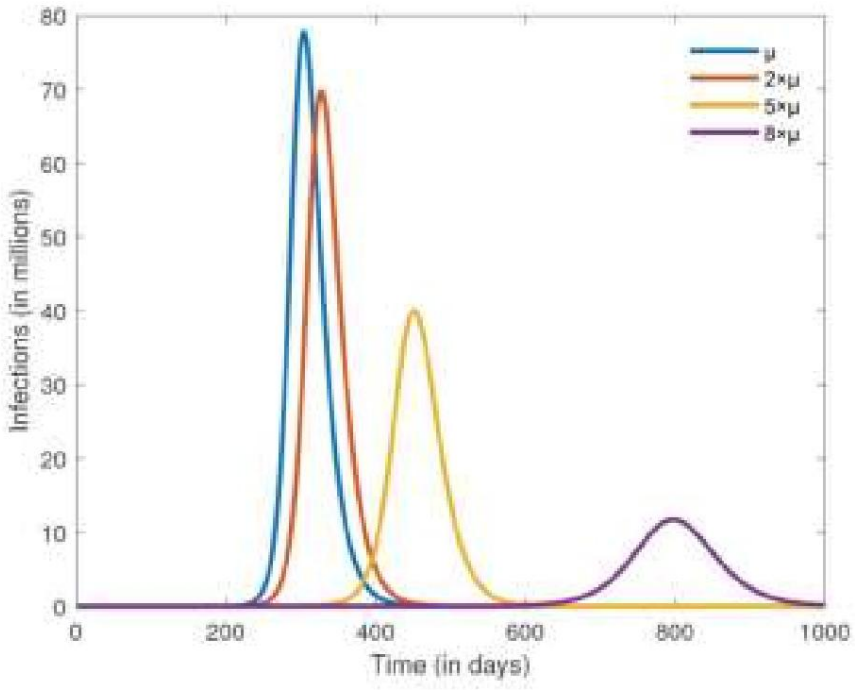


Abbildung 9. Numerische Simulation der Infektionszahlen bei unterschiedlichen Desinformationsabnahmeraten μ1 = μ. Die anderen Parameterwerte sind fest auf ÿ = 0, *ÿ* **= 0,25 × 10ÿ4,** *ÿ* **= 1/14,** *ÿ* **= 0,1,** *ÿ* **= 5ÿ,** *ÿ* **= 0,5 × 10ÿ3 ,** *ÿ* **= 10ÿ4,** *ÿ* **= 4 × 10ÿ5 , und μ0 = 0,0025.**

5. Schlussfolgerungen

Die COVID-19- Pandemie hat das Problem der Fehlinformation in den Vordergrund gerückt.
Hervorhebung der erheblichen Auswirkungen auf die öffentliche Gesundheit. Falsche Informationen können Bemühungen untergraben
um die Ausbreitung des Virus zu kontrollieren und damit eine Reihe negativer Folgen zu haben, darunter eine erhöhte
Impfskepsis, die Nichteinhaltung von Maßnahmen im Bereich der öffentlichen Gesundheit und Misstrauen
von Beamten des öffentlichen Gesundheitswesens. In diesem Artikel haben wir ein Modell formuliert, das die
Übertragungsdynamik von COVID-19 gleichzeitig mit der Verbreitung von Fehlinformationen in einem
Gemeinschaft. Die Analyse des Modells zeigt, dass es zwei krankheitsfreie Gleichgewichte gibt, eines mit
Fehlinformationen und das andere ohne. Das DFE ohne Fehlinformationen ergibt
eine Reproduktionszahl R0 und ist sowohl lokal als auch global stabil, wenn R0 < 1. Die DFE
mit Fehlinformationen ergibt sich ein Schwellenparameter, der das Gleichgewicht stabil macht
wenn der Wert des Parameters kleiner als eins ist.

Zu **den Faktoren, die zur Verbreitung von Fehlinformationen im Zusammenhang mit COVID-19** beitragen, **gehören**
die schnelle Verbreitung von Informationen durch soziale Medien, der Echokammer-Effekt und die
Politisierung der Pandemie. Wenn das Modell auf die Bevölkerung der Vereinigten
Simulationen der kumulierten Todesfälle deuten darauf hin, dass die Vereinigten Staaten schlechte Arbeit geleistet haben
zur Bekämpfung von Fehlinformationen im Zusammenhang mit COVID-19. Numerische Simulationen des Modells
legen nahe, dass ein vielschichtiger Ansatz erforderlich ist, um die Verbreitung von Fehlinformationen zu bekämpfen und
Förderung genauer Informationen über die Pandemie. Strategien zur Bekämpfung von Fehlinformationen
im Zusammenhang mit COVID-19 umfassen die Förderung genauer Informationen, die Verbesserung der Medienkompetenz,
und Implementierung von Faktencheck-Mechanismen. Darüber hinaus sagen Simulationen des Modells voraus
dass, solange Menschen in der Lage sind, eine Gemeinschaft zu betreten und zu verlassen, das COVID-19- Virus
bleiben in einer solchen Gemeinschaft endemisch.

Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass mathematische Modellierung eine wichtige Rolle spielen kann
beim Verständnis der Verbreitung von Fehlinformationen im Zusammenhang mit COVID-19 und bei der
Entwicklung wirksamer Strategien zur Bekämpfung von Fehlinformationen. Die Bekämpfung von Fehlinformationen
zu **COVID-19 ist für die Förderung der öffentlichen Gesundheit und die Eindämmung der Ausbreitung des Virus**
von entscheidender Bedeutung. Darüber hinaus ist es wichtig, die zugrunde liegenden Ursachen für die
Verbreitung von Fehlinformationen anzugehen, genaue Informationen zu fördern, die Medienkompetenz zu erhöhen und Me

Machine Translated by Google

Beiträge der Autoren: Konzeptualisierung, ZS und EA; Methodik, ZS und EA; Software, ZS und EA; Validierung, ZS und EA; formale Analyse, ZS und EA; Untersuchung, ZS und EA; Ressourcen, ZS und EA; Datenkuratierung, ZS und EA; Schreiben – Vorbereitung des Originalentwurfs, ZS und EA ; Schreiben – Überprüfung und Bearbeitung, ZS und EA; Visualisierung, ZS und EA; Überwachung, EA; Projektverwaltung, EA; Mittelbeschaffung, EA. Alle Autoren haben die **veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu .**

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: Die Daten sind im Artikel enthalten.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Verweise

1. **Eröffnungsrede des Generaldirektors der WHO bei der Pressekonferenz zu COVID-19 – 11. März 2020. Online verfügbar: https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on- COVID-19---11-march-2020 (abgerufen am 1. Januar 2023).**
2. **Cucinotta, D.; Vanelli, M. WHO erklärt COVID-19 zur Pandemie.** Acta Biomed. **2020,** 91, **157–160. [CrossRef] [PubMed]**
3. **Centers for Disease Control and Prevention. Online verfügbar: https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/science/science-kurze Berichte/Sars-CoV-2-Übertragung.html (abgerufen am 1. Januar 2023).**
4. **Centers for Disease Control and Prevention. Online verfügbar: https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/symptoms-testing Symptome.html (abgerufen am 1. Januar 2023).**
5. **da Rosa Mesquita, R.; Francelino Silva Junior, LC; Santos Santana, FM; Farias de Oliveira, T.; Campos Alcântara, R.; Monteiro Arnozo, G.; Rodrigues da Silva Filho, E.; Galdino dos Santos, AG; Oliveira da Cunha, EJ; Salgueiro de Aquino, SH; et al. Klinische Manifestationen von COVID-19 in der Allgemeinbevölkerung: Systematische Überprüfung.** Wien Klin Wochenschr. **2021,** 133, **377–382. [Querverweis] [PubMed]**
6. **Weltgesundheitsorganisation. WHO-Dashboard zum Coronavirus (COVID-19) . Online verfügbar: https://covid19.who.int/ (abgerufen am 1. Oktober 2023).**
7. **Suarez-Lledo, V.; Alvarez-Galvez, J. Verbreitung von Gesundheits-Falschinformationen in sozialen Medien: Systematische Überprüfung.** J. Med. Internet Res. **2021,** 23, **e17187. [CrossRef] [PubMed]**
8. **Greene, CM; Murphy, G. Quantifizierung der Auswirkungen von Fake News auf das Verhalten: Belege aus einer Studie zu Fehlinformationen zu COVID-19 .** J. Exp. Psychol. Appl. Adv. Online Publ. **2021,** 27, **773. [CrossRef]**
9. **Agley, J.; Xiao, Y. Falschinformationen über COVID-19: Hinweise auf unterschiedliche latente Profile und einen starken Zusammenhang mit Vertrauen in Wissenschaft.** BMC Public Health **2021,** 21, **89. [CrossRef]**
10. **Lew owsky, S.; Jacobs, P.; Neil, S. Die Laborleck-Hypothese erschwerte es Wissenschaftlern, die Wahrheit herauszufinden.** Sci. Am. **2022,** 326, **72–77.**
11. **Flaherty, E.; Sturm, T.; Farries, E. Die Verschwörung von COVID-19 und 5G: Irrtümer der räumlichen Analyse im Zeitalter der Datendemokratisierung.** 2022 , 293, **114546. [CrossRef] [PubMed]**
12. **Litman, L.; Rosen, Z.; Hartman, R.; Rosenzweig, C.; Weinberger-Litman, SL; Moss, AJ; Robinson, J. Haben die Leute wirklich Bleichmittel getrunken, um COVID-19 vorzubeugen? Ein Leitfaden zum Schutz von Umfragedaten vor problematischen Befragten.** PLoS ONE **2023,** 18, **e0287837 [CrossRef] [PubMed]**
13. **Coman, C.; Bularca, MC; Repanovici, A.; Rogozea, L. Falsche Informationen über Medikamente während der COVID-19-Pandemie: Eine Perspektive des medizinischen Personals.** PLoS ONE **2022,** 17, **e0276693. [CrossRef] [PubMed]**
14. **Hart, PS; Chinn, S.; Soroka, S. Politisierung und Polarisierung in der COVID-19 -Berichterstattung.** Sci. Commun. **2020,** 42, **679–697. [Querverweis] [PubMed]**
15. **Enserink, M.; Kupferschmidt, K. Bei COVID-19 ist die Modellierung von lebenswichtiger Bedeutung.** Science **2020,** 367, **1414–1415. [Querverweis] [PubMed]**
16. **Musa, S.; Qureshi, S.; Zhao, S.; Yusuf, A.; Mustapha, UT; He, D. Mathematische Modellierung der COVID-19- Epidemie mit Wirkung von Aufklärungsprogramme.** Infect. Dis. Modell. **2021, 6, 448–460. [CrossRef] [PubMed]**
17. **Moore, S.; Hill, EM; Tildesley, MJ; Dyson, L.; Keeling, MJ Impfung und nicht-pharmazeutische Interventionen für COVID-19: A mathematische Modellierungsstudie.** Lancet Infect. Dis. **2021,** 21, **793–802. [CrossRef] [PubMed]**
18. **Achaiah, NC; Subbarajasetty, SB; Shetty, RM R0 und** Re **von COVID-19: Können wir vorhersagen, wann der Ausbruch der Pandemie Enthalten?** Indian J. Crit. Care Med. **2020,** 24, **1125–1127. [CrossRef] [PubMed]**
19. **Olivares, A.; Staffetti, E. Unsicherheitsquantifizierung eines mathematischen Modells der COVID-19- Übertragungsdynamik mit Massenimpfstrategie .** Chaos Solitons Fractals **2021,** 146, **110895. [CrossRef] [PubMed]**
20. **Zhu, M.; Agyingi, E. Modellierung von COVID-19- Durchbruchsinfektionen in einer geimpften Bevölkerung.** Wseas Trans. Syst. **2023,** 22, **584–592. [CrossRef]**

Machine Translated by Google

21. Nguyen, VK; Hernandez-Vargas, EA Parameterschätzung in mathematischen Modellen viraler Infektionen mit R. In Influenza Virus. Methods in Molecular Biology, Band 1836; **Yamauchi, Y., Hrsg.; Humana Press: New York, NY, USA, 2018.**

22. Dautel, K.; Agyingi, E. Modellierung der Auswirkungen einer Aufklärungskampagne auf die Übertragungsdynamik von Ebola. J. Biol. Syst. **2020,** 29, **1–23 .**

23. LaSalle, JP Die Stabilität dynamischer Systeme; **SIAM: Philadelphia, PA, USA, 1976.**

24. Eikenberry, SE; Mancuso, M.; Iboi, E.; Phan, T.; Eikenberry, K.; Kuang, Y.; Kostelich, E.; Gumel, AB Maske oder keine Maske: Modellierung des Potenzials der Verwendung von Gesichtsmasken durch die breite Öffentlichkeit zur Eindämmung der COVID-19- Pandemie. Infect. Dis. Model. **2020, 5, 293–308. [CrossRef] [PubMed]**

25. Tang, B.; Bragazzi, NL; Li, Q.; Tang, S.; Xiao, Y.; Wu, J. Eine aktualisierte Einschätzung des Übertragungsrisikos des neuen Coronavirus (2019nCov). Infekt. Dis. Modell. **2020, 5, 248255.**

26. Xu, C.; Pang, Y.; Liu, Z.; Shen, J.; Liao, M.; Li, P. Einblicke in die stochastische Modellierung **von COVID-19 mit Auswirkungen verschiedener Übertragungswege Raten: Simulationen mit realen statistischen Daten aus Großbritannien, Australien, Spanien und Indien.** Phys. Scr. **2024,** 99, **025218 [CrossRef]**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Approximation einer Funktion mit Sprungunstetigkeit – Die Geräuscharmes Gehäuse

Qusay Muzaffar 1,*, David Levin 1 2 und Michael Werman

[1] Institut für Informatik, Hebräische Universität Jerusalem, Jerusalem 9190401, Israel; michael.werman@mail.huji.ac.il
[2] Institut für Angewandte Mathematik, Universität Tel Aviv, Tel Aviv 6997801, Israel; levin@tauex.tau.ac.il
* Korrespondenz: qusay.muzaffar@mail.huji.ac.il

Zusammenfassung: Dieser Artikel stellt ein neuartiges Deep-Learning-Netzwerk vor, das Intervalle von Sprungdiskontinuitäten in stückweise glatten Funktionen mit einer Variablen anhand ihrer verrauschten Stichproben erkennt. Durch die Verbesserung der Genauigkeit von Sprungdiskontinuitätsschätzungen kann eine präzisere Gesamtnäherung der Funktion gefunden werden, da herkömmliche Näherungsmethoden häufig erhebliche Fehler in der Nähe von Diskontinuitäten erzeugen. Das Erkennen von Intervallen von Diskontinuitäten ist bei der Arbeit mit exakten Funktionsdaten relativ unkompliziert, da endliche Differenzen in den Daten als Indikatoren für Glätte dienen können. Diese Glätteindikatoren werden jedoch bei stark verrauschten Daten unzuverlässig. In diesem Artikel schlagen wir ein Deep-Learning-Netzwerk vor, um die Position einer Sprungdiskontinuität auch bei **starkem Rauschen genau zu bestimmen .**

Schlüsselwörter: Approximationstheorie; Deep Learning; stückweise glatte Funktionsapproximation; stark verrauschte Daten

MSC: 65D15

check for updates

Zitat: Muzaffar, Q.; Levin, D.; Werman, M. Approximation einer Funktion mit Sprungdiskontinuität – Der Fall mit hohem Rauschen. AppliedMath **2024, 4, 561–569. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020030**

Wissenschaftlicher Herausgeber: Claude Chaudet

Empfangen: 29. Februar 2024
Überarbeitet: 2. April 2024
Akzeptiert: 15. April 2024
Veröffentlicht: 2. Mai 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Einleitung

Sprungdiskontinuitäten treten auf, wenn eine Funktion an einem bestimmten Punkt eine plötzliche, endliche Änderung ihres Wertes erfährt. Funktionen mit Sprungdiskontinuitäten sind in verschiedenen Bereichen weit verbreitet, darunter Physik, Elektrotechnik, Computervision, Geologie, Biologie und andere angewandte Bereiche [1–3]. Daher stellt sich häufig die Aufgabe, diese Funktionen aus abgetasteten Daten zu approximieren. Die Schätzung des Ortes der Diskontinuität ist von entscheidender Bedeutung, da Standardapproximationsmethoden aufgrund des Verlusts der Regelmäßigkeit in der Nähe von Sprungdiskontinuitäten häufig erhebliche Fehler verursachen.

In mehreren Arbeiten wurden Algorithmen zur Approximation stückweise glatter univariater Funktionen untersucht, wobei der Schwerpunkt auf der Erkennung des Intervalls von Diskontinuitäten lag, darunter [4,5]. In einer neueren Arbeit [6] wurde eine Funktion der Unterschiede in den Daten, die als Signatur bezeichnet wird, zur Approximation der Funktion verwendet. Die oben genannten Methoden versagen jedoch bei der Verarbeitung verrauschter Daten.

Alternative Algorithmen für verrauschte Daten wurden bereits in anderen Arbeiten, wie z. B. [7], vorgeschlagen und diskutiert. Diese Methoden basieren jedoch auf Vorkenntnissen der Funktion, auf der Ermittlung eines Funktionstyps, der als Mittelwertfunktion bezeichnet wird, und auf Regularisierungsparametern. Darüber hinaus werden keine Informationen über die Menge oder den Typ des additiven Rauschens gegeben. In [8] wird eine andere Methode vorgestellt, die auf der numerischen zweiten Ableitung basiert, allerdings beschränkt auf Stichproben auf einem gleichmäßigen Raster. Sie erfordert die Kenntnis des Supremums der zweiten Ableitung der Funktion und ist auf Rauschen beschränkt, das weniger als ein Sechstel der Sprunglänge beträgt . In [9] wird eine dritte Eine vergleichende Analyse zeigt jedoch, dass die Erfolgsquote im Vergleich zur vorgeschlagenen Methode geringer ist.

Machine Translated by Google

Deep Learning ist eine Methode des maschinellen Lernens, bei der künstliche neuronale Netze mit mehreren Verarbeitungsebenen verwendet werden, um zwischen Eingabe und Ausgabe immer höherstufigere Merkmale aus den Daten zu extrahieren. Deep-Learning-Modelle bestehen aus mehreren Schichten von Neuronen, die die Eingabedaten hierarchisch verarbeiten. Jede Schicht lernt, die Daten in eine abstraktere Darstellung umzuwandeln, wobei die letzte Schicht die Ausgabe des Modells liefert (z. B. Klassifizierung, Regression, Generierung). Der Lernprozess beinhaltet die iterative Anpassung der Parameter des neuronalen Netzes (z. B. Gewichte und Bias) mithilfe von Optimierungsalgorithmen wie Gradientenab

Deep-Learning-Modelle können anhand großer Datensätze trainiert werden, um Muster und Merkmale automatisch direkt aus den Daten zu lernen, wodurch die Notwendigkeit einer manuellen Merkmalsentwicklung entf Diese Fähigkeit, komplexe Darstellungen aus Rohdaten zu lernen, hat sich als bevorzugter Ansatz in verschiedenen Anwendungen durchgesetzt, darunter Spracherkennung, visuelle Objekterkennung, Objekterkennung, Verarbeitung natürlicher Sprache, Arzneimittelforschung und Genomik [11].

In diesem Papier schlagen wir ein neuartiges, vollständig faltendes neuronales Netzwerk [10] vor , **um die Position der Sprungdiskontinuität einer univariaten Funktion aus einem Satz verrauschter Proben zu schä Anschließend verwenden wir zwei kubische Splines, um die Funktion zu approximieren, einen für die Daten auf der linken Seite der Sprungdiskontinuität und einen für die rechte Seite. Unsere Methode ist früheren Methoden überlegen, wie eine Reihe von Experimenten gezeigt ha**

2. Unser Ansatz

In diesem Abschnitt präsentieren wir unseren Ansatz zur Approximation der Diskontinuitätsstelle einer univariaten stückweise glatten Funktion f **aus einer Stichprobe mit** iid **additivem Rauschen** $\{(x_i , f(x_i) + \ddot{y}_i)\}_{i=1}^{N}$, **wobei**

$$\ddot{y}_j \ddot{y} \mathbf{N}\ \mathbf{0,}\ \ddot{y}^{\mathbf{2}} .$$

2.1. Das Modell

Unser Deep-Learning-Modell besteht aus insgesamt zehn Faltungsschichten, wie in Abbildung 1 dargestellt. Durch Experimente haben wir festgestellt, dass ein zehnschichtiges Modell das beste Gleichgewicht zwischen Einfachheit in Bezug auf erlernbare Merkmale und Ausgabegenauigkeit bietet. Diese zehn Schichten bestehen aus einer Eingabeschicht, einer Ausgabeschicht und acht Zwischenschichten. Jede Schicht ist mit zwei Faltungsoperatoren ausgestattet, die Filtergrößen von 3 und 5 verwenden. Wir wählen zwei verschiedene Filtergrößen, damit das Modell das Verhalten der Funktion durch seine Samples auf zwei verschiedene Arten erfassen kann. Es ist erwähnenswert, dass wir Filter mit ungeraden Zahlen wählen, damit die Größe der Ausgabe nach der Faltungsoperation dieselbe ist wie die Eingabe nach dem Auffüllen. Wenn wir beispielsweise eine Eingabe der Größe N haben, fügen wir am Anfang und am Ende der Eingabe Nullen hinzu, wenden dann eine Faltung mit einer Filtergröße von 3 an und behalten die ursprüngliche Größe der Eingabe bei, die N ist. Wenn wir einen Filter der Größe 2 wählen würden, wäre die Ausgabegröße in diesem Fall N + 1. **Das Beibehalten der Größe der Eingabe hilft dabei, die Details des Modells zu erfassen. Die Ausgabekanäle dieser beiden Operatoren werden wie in Gleichung (1) gezeigt verkettet. Die erste Schicht akzeptiert 8 Eingabekanäle , Gleichung (3), und gibt 64 Kanäle aus. Für die i-te Zwischenschicht beträgt die Eingabe 64 ×** i **Kanäle und sie generiert 64 Kanäle. Die Ausgabe der i**

$$\ddot{y}\ \square\ \square^{\ddot{y}} \cdot \qquad \textbf{(1)}$$

ÿÿÿ v ÿ Cf3 v ÿ Cf5 ÿÿÿ

Die letzte Schicht hat einen Eingang von 64 Kanälen und gibt einen Wahrscheinlichkeitsvektor aus.

$$v(x) = \begin{matrix} \mathbf{x,} & \mathbf{0\ \ddot{y}\ x < 1} \\ \mathbf{2\ \ddot{y}\ x,} & \mathbf{1\ \ddot{y}\ x\ \ddot{y}\ 2} \end{matrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Machine Translated by Google

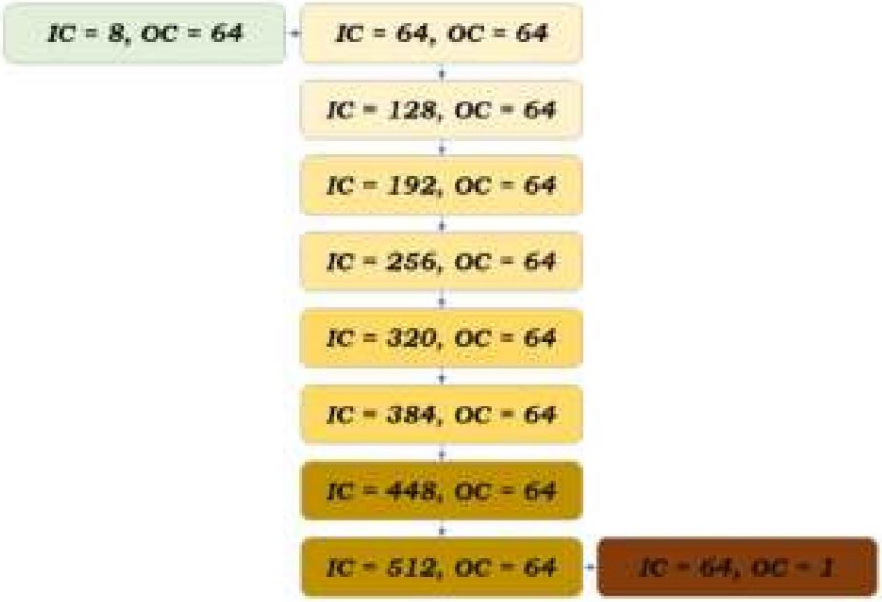
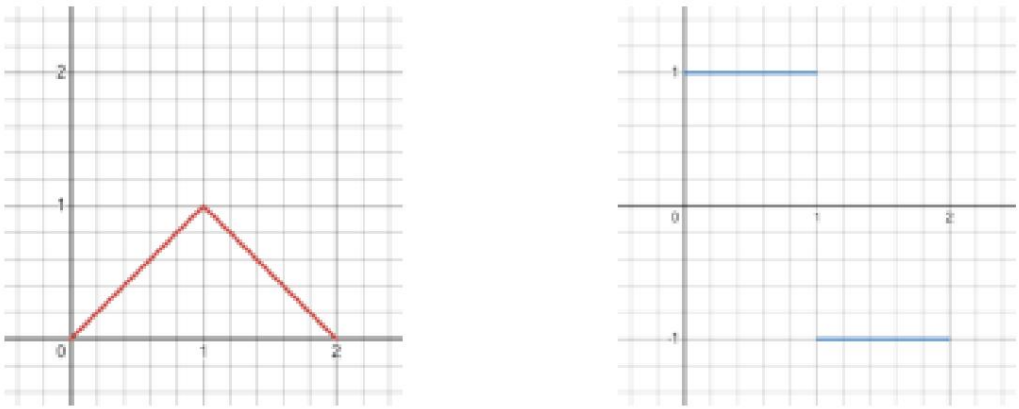


Abbildung 1. Die Modellarchitektur. Jedes Rechteck stellt eine Schicht dar, und die beiden Zahlen geben die Anzahl der Eingangs- und Ausgangskanäle an. In jeder Schicht gibt es zwei Faltungsoperationen wie in Gleichung (1). In den Zwischenschichten wird jeder Ausgang mit dem Eingang derselben Schicht verknüpft und an die nächste Schicht weitergegeben.

Die Aktivierungsfunktion, Gleichung (2) (siehe Abbildung 2), wird auf die Ausgaben der beiden Faltungsoperatoren angewendet, nachdem diese verkettet wurden, bevor sie an die nächste Schicht weitergegebe



(A) **(B)**

Abbildung 2. Die Grafik der Aktivierungsfunktion (a) und die Grafik ihrer Ableitung (b).

Die Stichproben x **und** y **der Größe** N + **1 (wobei** N **beliebig ist) sind Teil der Eingangsdaten** für das Modell. Wir erweitern die Eingangsdaten mit **Vorwärtsdifferenzen erster, zweiter und dritter Ordnung,** wie in Gleichung **(3) dargestellt.**

$$(x, y) \ddot{y} \mathbf{x, y,} \ddot{y}x, \ddot{y}y, \ddot{y} \quad {}^{2}_{x,}\ {}^{2}_{\ddot{y}\,ja}, {}^{3}\ddot{y}_{x,}\ {}^{3}_{\ddot{y}\,ja} \tag{3}$$

Die Ausgabe des Modells ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor der Länge N, wobei der k-te Eintrag die Wahrscheinlichkeit ist , dass zwischen der **k-ten und** der k + **1-ten Stichprobe eine Diskontinuität vorliegt .** Die Verlustfunktion **ist Kreuzentropie [10], da das Problem die Klassifizierung ist.**

$$L(x) = \ddot{y} \ddot{y}^{N}_{n=1}\ {}^{C}_{c=1}\ \ddot{y}\ \text{Protokoll}\frac{e^{x_{n,c}}}{\ddot{y}^{C}_{i=1} e^{x_{n,i}}} \tag{4}$$

Machine Translated by Google

Sei M das Modell und p = **M x, y,** ÿx, ÿy, **ÿ ist der Index** $^{2}_{x,\ 2}$ ÿ j $^{ÿ\ 3}_{x,\ ÿ\ 3}$ y . **Dann ist** ˜i = **arg max** {p} **der Stichprobe, die dem Unstetigkeitspunkt von der linken Seite aus am nächsten liegt. Wir definieren**

$$= 2 \quad \frac{x\tilde{}i + x\tilde{}i+1\ \tilde{}ÿ}{} \tag{5}$$

als angenäherter Unstetigkeitspunkt.

2.2. Trainingsdaten **In**

diesem Abschnitt beschreiben wir den Prozess der Generierung synthetischer Daten zum Trainieren des Modells, sowohl als Eingabe als auch als Ausgabe. Wir erinnern uns, dass eine Zufallszahl zwischen a **und** b **aus einer gleichmäßigen Verteilung bezeichnet wird als**

$$c\ ÿ\ U\ [a, b]$$

Wir beginnen mit der Generierung univariater stückweiser Funktionen, die jeweils eine Sprungdiskontinuität enthalten , aus denen wir zufällig ausgewählte Punkte auswählen. Um ein realistisches Szenario zu erstellen, fügen wir diesen Stichproben weißes Rauschen hinzu und verwenden sie als Eingabedaten. Die Ausgabedaten bestehen aus dem Index der Stichprobe, die der linken Seite der Sprungdiskontinuität am nächsten liegt. Lassen Sie

$$t = ÿ\ 3ÿt + iÿt \quad \begin{matrix} T \\ ich = 0 \end{matrix} \tag{6}$$

sei die Menge der Knoten, wobei ÿt **ÿ U**[$\frac{3,5\ 10\ ,}{10}$] **und** T = **ÿ** $^{ÿ1}_{T}$ **+ 7, damit genügend Knoten vorhanden sind innerhalb und außerhalb des Intervalls, und lassen**

$$g(x) = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} , x < 0 \\ , 0\ ÿ\ x \end{matrix} .$$

Nun lassen wir

$$f(x) = ag(x\ ÿ\ ÿ) + bxg(x\ ÿ\ ÿ) + \quad \begin{matrix} Tÿkÿ1 \\ ÿ \\ ich = 0 \end{matrix} \quad ciBi,k,t\ (x). \tag{7}$$

Dabei sind Bi,k,t **kubische B-Splines Basisfunktionen** (k **= 3). Die Koeffizienten der kubischen B-Splines** $^{Tÿkÿ3}_{ich = 0}$ {ci} **werden zufällig aus einer gleichmäßigen Verteilung ausgewählt:**

$$\{ci\} \quad \begin{matrix} Tÿkÿ3 \\ ich = 0 \end{matrix} \quad ÿ\ U\ [ÿ2,\ 2] .$$

In ähnlicher Weise werden die Koeffizienten a **und** b **ausgewählt.**

$$a,\ b\ ÿ\ U\ ÿ\ 2,\ ÿ\ 10 \quad \frac{4}{} \quad ÿ \quad \frac{4}{2\ 10,}$$

Abschließend ist die Lage der Unstetigkeitsstelle wie folgt:

$$ÿ\ ÿ \quad \frac{6}{N}, 1\ ÿ \quad \frac{5}{N}$$

Die Eingabedaten bestehen aus Punkten, die aus einer Funktion f(x) **der Form wie in Gleichung (7):**

$$S = (xi , f(xi) + ÿi) \quad \begin{matrix} N \\ ich=0\ , \end{matrix} \tag{8}$$

Wo

$$ÿi\ ÿ\ U\ 0,\ 3 \quad \frac{A}{} .$$

Machine Translated by Google

Hier liegt $\{\ddot{y}i\}_{ich=0}^{N}$ **ist das additive Rauschen. Die Ausgabe ist ein Einheitsvektor der Länge** N **ÿ 1, wobei die 1 bei der Stichprobe, die links von der Sprungstelle am nächsten liegt. Wir trainieren das Modell** mit dem **stochastischen Gradientenabstiegsalgorithmus ADAM [12] .**

2.3. Näherung der Funktion aus ihren Stichproben

Nachdem wir das Unstetigkeitsintervall lokalisiert und die Position des Unstetigkeitspunkts angenähert haben, verwenden wir zwei kubische Spline-Näherungen, um die Funktion mit ihrer Sprungunstetigkeit zu approximieren. Wir verwenden die kubische Spline-Näherung, da die Näherung mit kubischen Splines aufgrund ihrer Glätte, Flexibilität, Genauigkeit, einfachen Implementierung und numerischen Stabilität vorteilhaft ist. Diese Eigenschaften machen kubische Splines zu einem vielseitigen und weit verbreiteten Werkzeug für Dateninterpolation, Kurvenanpassung und Modellierung in verschiedenen Bereichen, einschließlich Mathematik, Ingenieurwesen, Computergrafik und wi Zuerst teilen wir die Daten wie folgt in die linken und rechten Gruppen auf:

$$\begin{aligned} x\ddot{y} &= x \textbf{ ist eine Komponente von } (x, y) \textbf{ ÿ S :} \; x < \tilde{y}\ddot{y} \\ xr &= x \textbf{ ist eine Komponente von } (x, y) \textbf{ ÿ S :} \; x > \tilde{y}\ddot{y} \\ y\ddot{y} &= y \textbf{ ist eine Komponente von } (x, y) \textbf{ ÿ S :} \; x < \tilde{y}\ddot{y} \\ yr &= y \textbf{ ist eine Komponente von } (x, y) \textbf{ ÿ S :} \; x > \tilde{y}\ddot{y} \end{aligned} \tag{9}$$

wobei S wie in Gleichung **(8) definiert ist und** $\tilde{y}$ **aus Gleichung (5) stammt.**

Dann finden wir mithilfe einer Kleinstquadrate-Approximation zwei kubische Splines, ÿÿ (x), **der die Funktion von der linken Seite der Sprungdiskontinuität approximiert, indem er die Daten von** xÿ **und** yÿ verwendet , **und einen zweiten,** ÿr(x), **der die Funktion von der rechten Seite der Sprungdiskontinuität approximiert, indem er die Daten von** xr **und** yr verwendet . **Bevor wir fortfahren, beginnen wir mit der Konstruktion der Knoten für beide Splines. Lassen**

$$\ddot{y}\ddot{y} = \frac{\tilde{y}\ddot{y}\,N}{5}^{\ddot{y}1} \textbf{ und } \ddot{y}r = \frac{1\ddot{y}\,\tilde{y}\ddot{y}\,N}{5}^{\ddot{y}1},$$

und seien $T\ddot{y} = \ddot{y} + 7$ **und** $Tr = \ddot{y}\,\ddot{y}$, **dann sind rechte** $_{R}^{\ddot{y}1}$ **+ 7. Dann die beiden Knotenpaare für die linke und die Näherungen**

$$t\ddot{y} = \ddot{y}\,3\ddot{y}\ddot{y} + i\ddot{y}\ddot{y}_{T\ddot{y}\,i=0} \textbf{ und } tr = \ddot{y}\,3\ddot{y}r + \ddot{y} + j\ddot{y}r_{j=0}^{Tr}$$

Wir bezeichnen die Koeffizientensätze von ÿÿ (x) **und** ÿr(x) **mit** cÿ **bzw.** cr . **Um die optimalen Koeffizientensätze von** cÿ **und** cr zu finden , **suchen wir eine geschlossene Lösung für die folgende Gleic**

$$\textbf{arg min}_{c\ddot{y}\ddot{y}R} \left\| \frac{M\ddot{y}}{0} \middle| \frac{0}{Herr} \right\|_{T\ddot{y}\ddot{y}4}^{2} \left\| \frac{c\ddot{y}}{cr} - \frac{\ddot{y}}{Jahr} \right\|_{L2}^{2} + \left\| \frac{\ddot{y}\ddot{y}D\ddot{y}}{\ddot{y}rDr} \middle| \frac{0}{0} \right\| \left\| \frac{c\ddot{y}}{cr} \right\|_{L2}^{2}$$

Hier sind die Matrizen von Mÿ **ÿ Rxÿ×cÿ und** Mr **ÿ Rxr×cr die Datenmatrizen und werden wie folgt definiert:**

$$M\ddot{y} = \begin{bmatrix} \ddot{y} & \cdots & \ddot{y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{y} & \cdots & \ddot{y} \end{bmatrix}_{B_{j,k=3,t\ddot{y}}(x\ddot{y},i)}, \quad Herr = \begin{bmatrix} \ddot{y} & \cdots & \ddot{y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{y} & \cdots & \ddot{y} \end{bmatrix}_{B_{j,k=3,tr}(xr,i)}$$

Die Matrizen von Dÿ **ÿ** R **cÿÿ2** ×cÿ **und** Dr **ÿ** R **sind die zweiten Differenzmatrizen . Diese Matrizen werden in der obigen Gleichung verwendet, sodass die optimale Lösung diejenige mit der minimalen zweiten Ableitung ist.**

cÿÿ2 ×cr

Machine Translated by Google

3. Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt veranschaulichen wir die beiden Aspekte unseres Ansatzes: die Näherung der Position einer Sprungdiskontinuität in einer gegebenen Funktion und die Näherung der Fur Darüber hinaus haben wir einen statistischen Test durchgeführt, um die Wirksamkeit unserer Methode im Vergleich zu zwei alternativen Methoden zu zeigen. Zuletzt haben wir einen weiteren statistischen Test durchgeführt, um den durchschnittlichen Fehler unserer endgültigen Näherung darzustellen.

3.1. Ermitteln des Intervalls der Unstetigkeit und Näherung der Funktion

In diesem Abschnitt präsentieren wir unseren Ansatz zur Approximation des Unstetigkeitspunkts einer zufällig generierten Funktion und zur anschließenden Approximation der Funktion selbst. Dazu haben wir zwei Funktionen nach dem in **Gleichung (7) beschriebenen Format generiert .**
Wir haben 40 zufällige Stichproben aus [0, 1] entnommen. **Diese Stichproben wurden dann mit weißem Rauschen angereichert , dessen Varianz einem Drittel der Sprunghöhe entspricht.**

Als nächstes verwendeten wir unser Modell, um den Index der nächsten Stichprobe links von der Diskontinuität zu bestimmen. Anschließend verwendeten wir das in Abschnitt 2.3 beschriebene Verfahren , **um eine Näherung der Funktion abzuleiten. Die Ergebnisse dieser Experimente sind in Abbildung 3 dargestellt.**

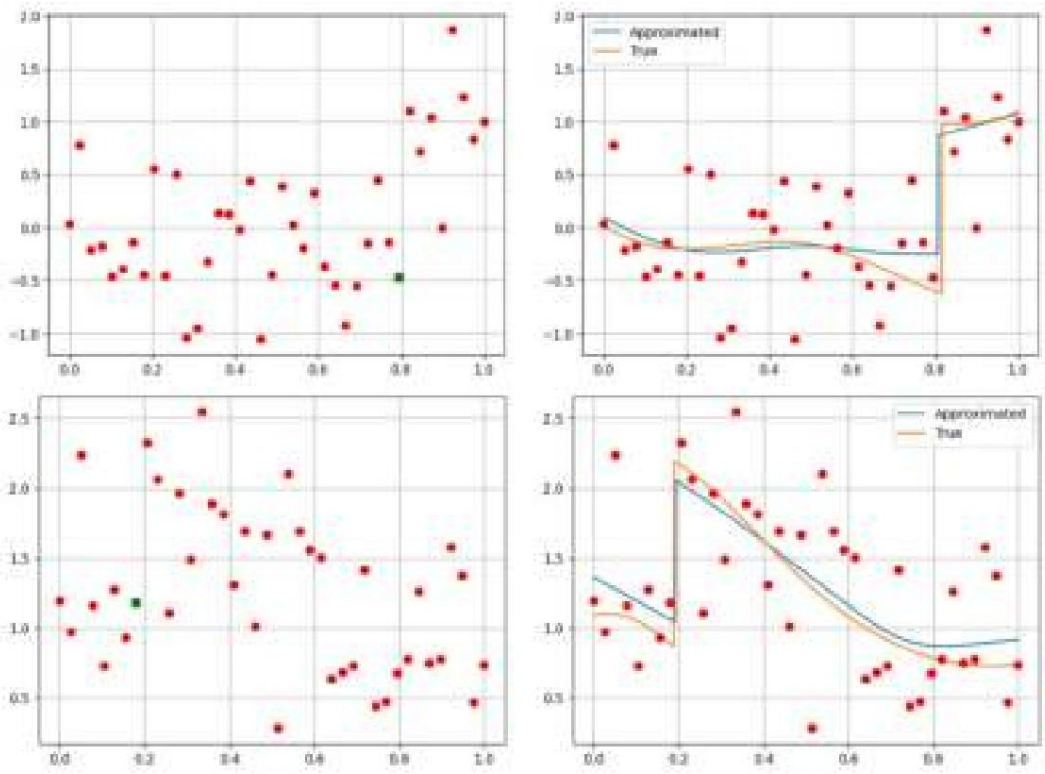


Abbildung 3. Wir demonstrieren unsere Methode visuell, indem wir die Position des Unstetigkeitspunkts zweier univariater stückweise glatter Funktionen anhand ihrer Stichproben approximieren, denen weißes Rauschen hinzugefügt wurde. Die Abbildungen oben links und unten links zeigen die Stichproben mit dem hinzugefügten Rauschen. Alle Stichproben sind rot gefärbt, mit Ausnahme des Punkts, der die der Sprungdiskontinuität von rechts am nächsten liegende Stichprobe anzeigt , der grün gefärbt ist. Unser Ansatz hat den grünen Punkt gefunden. Die Abbildungen oben rechts und unten rechts zeigen die Näherungen für die beiden Funktionen, die durch die Verwendung von zwei kubischen Splines für jede der Funktionen

3.2. Vergleich unseres Ansatzes mit zwei anderen Ansätzen

In [6] ist die Signatur vom Grad k von g ÿk (g) **ÿ** RN+k **Dies ist die Vorwärtsdifferenz k- ter Ordnung der Stichproben von** g, **aufgefüllt mit** k **Nullen auf jeder Seite. In [9] wurde eine Methode entwickelt, die auf der Verwendung einer Filterfunktion basiert, mit der eine Faltung zur Erkennung des Diskontinuitätspunkts berechnet wird. In diesem Experiment vergleichen wir unsere Methode mit**

Machine Translated by Google

die beiden anderen oben genannten Methoden auf einer großen Anzahl von Proben mit verschiedenen Rauschen Ebenen. Die Stichproben stammen aus univariaten stückweise glatten Funktionen mit mehreren Unstetigkeitssprunghöhen. Die Tabellen 1–3 stellen jeweils die Ergebnisse eines der Ansätze dar. Die Spalten repräsentieren die Höhe des Sprunges und die Zeilen die Varianz in der additives weißes Rauschen. Wie in den Tabellen gezeigt, hat unser Ansatz eine Steigerung von Das Zwei- und Zehnfache im Vergleich zu den anderen Methoden.

Tabelle 1. Wahrscheinlichkeit, das Intervall der Diskontinuitätsstelle mit der Methode in [6] zu finden. Spalten und Zeilen stellen jeweils Sprunghöhe und Geräuschpegel dar. Jede Zelle enthält den Durchschnitt Erfolg nach 1000 Versuchen.

	0,30	0,60	0,90	1.20	1,50	1,80	2.10	2,40
0,00	0,38	0,47	0,50	0,49	0,48	0,49	0,48	0,49
0,10	0,10	0,28	0,45	0,50	0,50	0,53	0,48	0,51
0,20		0,10	0,21	0,29	0,42	0,46	0,46	0,50
0,30			0,12	0,14	0,24	0,29	0,37	0,42
0,40				0,11	0,14	0,19	0,25	0,31
0,50					0,11	0,13	0,17	0,22
0,60						0,11	0,13	0,17
0,70							0,10	0,12
0,80								0,12

Tabelle 2. Wahrscheinlichkeit, das Intervall der Diskontinuitätsstelle mit der Methode in [9] zu finden. Spalten und Zeilen stellen jeweils Sprunghöhe und Geräuschpegel dar. Jede Zelle enthält den Durchschnitt Erfolg nach 1000 Versuchen.

	0,30	0,60	0,90	1.20	1,50	1,80	2.10	2,40
0,00	0,24	0,24	0,28	0,24	0,26	0,25	0,24	0,23
0,10	0,30	0,27	0,25	0,25	0,27	0,24	0,25	0,27
0,20		0,30	0,26	0,28	0,24	0,25	0,28	0,25
0,30			0,33	0,28	0,29	0,26	0,28	0,28
0,40				0,34	0,30	0,30	0,26	0,30
0,50					0,34	0,32	0,30	0,28
0,60						0,32	0,29	0,33
0,70							0,34	0,31
0,80								0,33

Tabelle 3. Die Wahrscheinlichkeit, das Intervall der Diskontinuitätsstelle mit unserer Methode zu erkennen. Spalten und Zeilen stellen jeweils Sprunghöhe und Geräuschpegel dar. Jede Zelle ist der Durchschnitt Erfolg nach 1000 Versuchen.

	0,30	0,60	0,90	1.20	1,50	1,80	2.10	2,40
0,00	0,89	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,10	0,53	0,93	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,20		0,67	0,92	0,98	1,00	1,00	1,00	1,00
0,30			0,73	0,92	0,97	0,99	1,00	1,00
0,40				0,76	0,90	0,95	0,98	0,99
0,50					0,79	0,89	0,94	0,97
0,60						0,79	0,88	0,95
0,70							0,79	0,88
0,80								0,79

3.3. Fehlermessung bei Funktionsnäherungen

In diesem Experiment vergleichen wir unseren Ansatz mit dem Ansatz der Verwendung der Signatur [6]. bei der Approximation einer univariaten stückweise glatten Funktion aus ihren verrauschten Stichproben. Wie zuvor, Wir haben einen Test mit vielen Proben mit unterschiedlichen Geräuschpegeln durchgeführt. Wir messen den Fehler der Näherung durch Verwendung der Lÿ- Metrik auf der Menge 0, min *(ÿ, ˜ÿ)* ÿ max *(ÿ, ˜ÿ)*, 1 , wobei *ÿ* und *˜ÿ* sind der reale und der approximierte Unstetigkeitspunkt. Zusätzlich messen wir

Machine Translated by Google

˜ÿ **ÿ** *ÿ* . **Wir haben zwei Graphen erstellt, in den Abbildungen 4 und 5, für die beiden Ansätze und die beiden Messungen. Die x-Achse stellt die Varianz des additiven weißen Rauschens dar, während die** Die y **-Achse stellt die Höhe des Sprunges dar. Jeder Punkt im Diagramm stellt den Durchschnitt dar Fehler von 100 Versuchen. Im ersten Test war der Fehler unseres Ansatzes weniger als die Hälfte des Fehlers des anderen Ansatzes, und im zweiten Test lag der Fehler unseres Ansatzes bei fünf.**

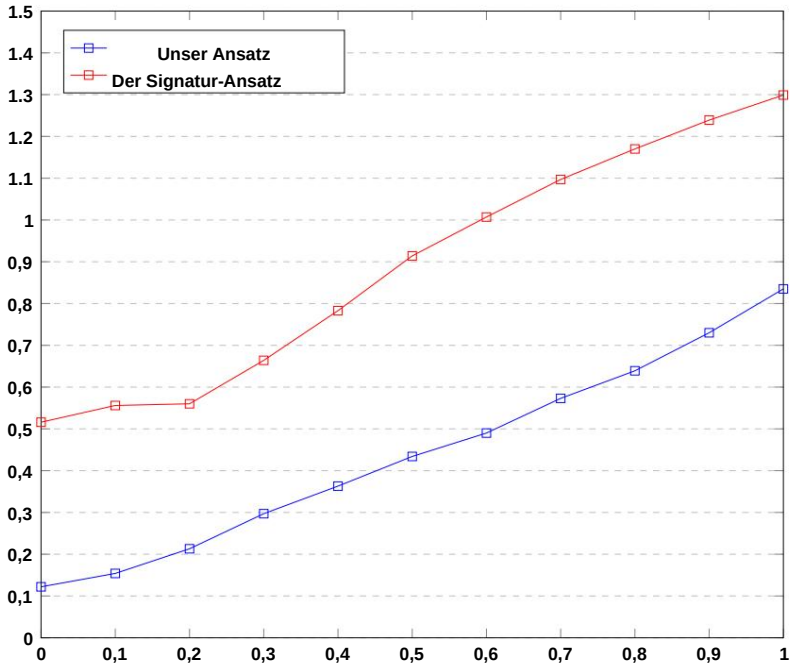


Abbildung 4. Diese Grafik zeigt den Lÿ-Fehler der Näherung für die Menge 0, min *(ÿ, ˜ÿ)* **ÿ max** *(ÿ, ˜ÿ),* **1 , wobei** *ÿ* **und** *˜ÿ* **die reale und die approximierte Unstetigkeitsstelle sind. Dabei ist** *ÿ* **und** *˜ÿ* **sind der reale und der approximierte Unstetigkeitspunkt.**

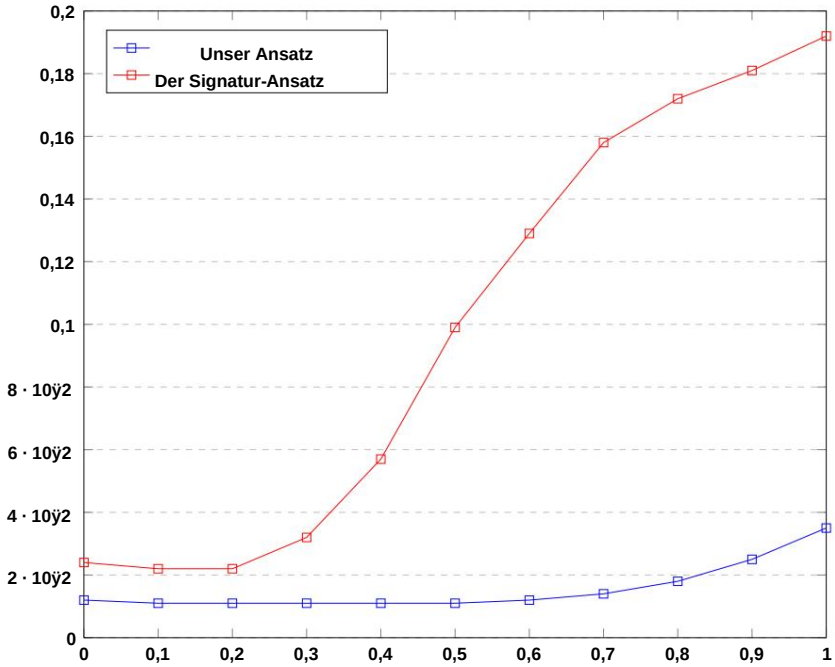


Abbildung 5. Diese Grafik zeigt den Fehler von *˜ÿ* **ÿ** *ÿ* . **Dabei** sind *ÿ* **und** *˜ÿ* **der reale und der approximierte Punkt der Diskontinuität.**

Machine Translated by Google

4. Schlussfolgerungen

Wir haben einen neuen Ansatz vorgestellt, der auf Deep Learning basiert, um die Position des Sprungpunkts einer univariaten stückweise glatten Funktion mit Sprungpunkt aus gegebenen Stichproben mit hochadditivem Rauschen zu approximieren. Wir haben unseren Ansatz mit zwei anderen Methoden verglichen und die deutlich höhere Erfolgsrate unserer Methode gegenüber diesen Methoden veranschaulicht. Darüber hinaus haben wir unseren Ansatz zur Approximation der Position der Diskontinuität in synthetischen Daten generierter stückweise glatter univariater Funktionen demonstriert. Anschließend haben wir diese Fu

Unsere zukünftige Arbeit wird sich mit der Ausweitung dieser Arbeit auf bivariate stückweise glatte Funktionen befassen, bei denen der Sprung nicht an einem Punkt, sondern auf einer eindimensionalen Kurve auftritt. Falls die zweidimensionalen Daten entlang der y-Achse gleichmäßig verteilt sind, können wir diesen Ansatz verwenden, um die nächstgelegenen Punkte zur eindimensionalen Kurve zu lokalisieren. Die Approximation der eindimensionalen Kurve ist jedoch nicht intuitiv und wird Gegenstand zukünftiger Arbeiten sein.

Beiträge der Autoren: Methodik, QM; Untersuchung, QM; Schreiben – Vorbereitung des Originalentwurfs, QM; Schreiben – Überprüfung und Bearbeitung, MW und QM; Aufsicht, MW und DL. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu.

Finanzierung: ISF Israeli Science Foundation.

Erklärung zur Datenverfügbarkeit: In diesem Dokument werden keine spezifischen Daten verwendet.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte vorliegen.

Verweise

1. **Ageev, AL; Antonova, TV Über eine neue Klasse schlecht gestellter Probleme.** Izv. Ural. Geht. Univ. Matte. Mekh. Informieren. **2008,** 58, **24–42.**
2. **Cherepashchuk, AM; Goncharskii, AV; Yagola, AG Inverse Probleme der Astrophysik. In** Ill-Posed Problems in Natural Sciences, Proceedings der Internationalen Konferenz, die vom 19. bis 25. August in Moskau stattfand. 1991; **De Gruyter: Berlin, Deutschland, 1992; S. 472–481.**
3. **Terebizh, VY** Einführung in die statistische Theorie inverser Probleme; **Fimzmatlit: Moskau, Russland, 2005.**
4. **Aràndiga, F.; Donat, R. Nichtlineare Multiskalenzerlegungen: Der Ansatz von A. Harten.** Numer. Algorithm **2000,** 23, **175–216.** **[Querverweis]**
5. **Shu, C.-W. Im Wesentlichen nicht oszillierende und gewichtete im Wesentlichen nicht oszillierende Schemata für hyperbolische Erhaltungssätze. In** Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Vorlesungen, gehalten auf der 2. Sitzung des Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME), abgehalten in Cetraro, Italien, 23.–28. Juni. 1997; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 1998; S. 325–432.**
6. **Amat, S.; Levin, D.; Ruiz-Álvarez, J. Eine zweistufige Approximationsstrategie für stückweise glatte Funktionen in zwei und drei Dimensionen.** IMA J. Numer. Anal. **2021,** 42, **3330–3359.** **[CrossRef]**
7. **Antonova, TV Neue Methoden zur Lokalisierung von Diskontinuitäten einer verrauschten Funktion,** Numer. Anal. Appl. **2010, 3, 306–316.**
8. **Mbakop, E.** Reconstruction of Discontinuities in Noisy Data; **Citeseer: Pennsylvania, USA. Online verfügbar: https://citeseerx.ist.psu. edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=0c1b69c38e1df16c7c939ad07705ee6bb53a6bd2 (abgerufen am 31. März 2024).**
9. **Lee, D. Erkennung, Klassifizierung und Messung von Diskontinuitäten.** SIAM J. Sci. Stat. Comput. **1991,** 12, **311–341.** **[CrossRef]**
10. **Goodfellow, I.; Bengio, Y.; Courville, A.** Deep Learning; **MIT Press: Cambridge, MA, USA, 2016.**
11. **LeCun, Y.; Bengio, Y.; Hinton, G. Deep Learning.** Nature **2015,** 521, **436–444.** **[CrossRef] [PubMed]**
12. **Kingma, DP; Ba, J. Adam: Eine Methode zur stochastischen Optimierung.** arXiv **2014, arXiv:1412.6980.**
13. **Chapra, SC; Canale, RP** Numerische Methoden für Ingenieure, **8. Auflage; McGraw-Hill Education: New York, NY, USA, 2021.**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Quantenmischungen und Informationsverlust in Vielteilchensysteme

Diana Monteoliva [1], Angelo Plastino [2,*] und Angel Ricardo Plastino [3]

[1] UNLP-Comisión de Investigaciones Científicas, Provincia de Buenos Aires, La Plata 1900, Argentinien; monteoli@fisica.unlp.edu.ar
[2] Instituto de Física La Plata–CCT-CONICET, Universidad Nacional de La Plata, CC 727, La Plata 1900, Argentinien
[3] CeBio-Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional del Noroeste, Prov. de Buenos Aires (UNNOBA), CONICET, Juni 1988, Argentinien; arplastino@unnoba.edu.ar
* Korrespondenz: plastino@fisica.unlp.edu.ar

Zusammenfassung: In unserer Studie untersuchen wir das Phänomen des Informationsverlusts, gemessen durch die Kullback-Leibler-Divergenz , **in einem Vielfermionensystem wie dem Lipkin-Modell. Informationsverlust tritt auf, wenn die Anzahl N der Teilchen zunimmt, insbesondere wenn sich das System in einem gemischten Zustand befindet. Wir stellen fest, dass unter diesen Bedingungen ein erheblicher Informationsverlust auftritt. Wir beobachten jedoch, dass dieser Verlust fast verschwindet, wenn sich das System in einem reinen Zustand befindet. Unsere Analyse verwendet Werkzeuge aus der Informationstheorie, um diese Effekte zu quantifizieren und zu verstehen.**

Schlüsselwörter: Vielfermionensysteme, Mischungsgrad, endliche Temperatur, SU2-Symmetrie;

MSC: 81-82

check for updates

Zitat: Monteoliva, D.; Plastino, A.; Plastino, AR-Quantenmischungen und Informationsverlust in Vielteilchensystemen . AppliedMath **2024, 4, 570–579. https:// doi.org/10.3390 /appliedmath4020031**

Erhalten: 4. März 2024
Überarbeitet: 13. April 2024
Akzeptiert: 20. April 2024
Veröffentlicht: 2. Mai 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

In diesem Artikel untersuchen wir mit Hilfe der Informationstheorie die Besonderheiten von Quantenmischungen [1–5] im Kontext eines exakt lösbaren Modells von N **wechselwirkenden Fermionen der Masse** m, **dem sogenannten Lipkin-Modell. Unser Fokus liegt dabei auf Informationsverlusten, gemessen an der Kullback-Leibler-Divergenz (KL), die auftreten, wenn** N von einer vorherigen, **niedrigeren Referenzfermionenzahl** No **aus anwächst .**

Nachfolgend stellen wir die wesentlichen Inhalte unserer Studie vor.

Das Lipkin-Modell [6–16] ist ein bekanntes Modell von N **wechselwirkenden Fermionen der Masse m. Dieses Phänomen ist in der Kernphysik und bei Quanten-Vielteilchensystemen wohlbekannt, insbesondere bei der Untersuchung des Zusammenspiels zwischen Paarkorrelationen und Quantenphasenüb Die Verwendung von Werkzeugen der Informationstheorie zur Untersuchung von Zusammenhängen zwischen dem Grad der Quantenmischung (QMx) und einigen Modellmerkmalen ist eine interessante und sinnvolle Forschungsrichtung. Dabei widmen wir der Beziehung zwischen QMx und Teilchenzahl** N besondere Aufmerksamkeit . **Die Informationstheorie bietet einen Formalismus zur Quantifizierung und zum Verständnis von Zusammenhängen, Entropie und Informationsgehalt in physikalischen Systemen. Zu den Schlüsselkonzepten gehören Entropie, gegenseitige Information und bedingte Entropie. Diese Werkzeuge können zur Analyse der Zusammenhänge zwischen verschiedenen Parametern in einem Quantensystem eingesetzt werden und liefern Einblicke in die Komplexität, Korrelationen und Verschränkungen im System. Ein solcher interdisziplinärer Ansatz, der das Lipkin-Modell, die Informationstheorie und die statistische Quantenmechanik kombiniert, kann einen umfassenden Rahmen zur Untersuchung der komplexen Zusammenhänge zwischen Modellmerkmalen und spez**

1.1. Quantenmischungen

In diesem Beitrag wird das Konzept einer Quantenmischung (QMx) [1–4] aus der Sicht wechselwirkender Vielfermionensysteme untersucht. QMx ist in der Quantenmechanik wichtig, weil es die inhärente probabilistische Natur von Quantensystemen widerspiegelt und eine Möglichkeit bietet, ihr statistisches Verhalten zu beschreiben. Die Quantenmechanik unters

Machine Translated by Google

aus der klassischen Mechanik, und eines seiner Hauptmerkmale ist die Existenz von Superpositionszuständen und das damit verbundene Konzept der Quantenverschränkung. Das Konzept der

Quantenmischungen ist aus folgenden Gründen wichtig [1–5]: • In der Quantenmechanik können Systeme in mehreren Zuständen gleichzeitig existieren, ein Phänomen, das als Superposition bezeichnet wird. Eine Quantenmischung ist eine probabilistische Kombination dieser Zustände, und mit ihr

- **können wir den Gesamtzustand eines Systems beschreiben, wenn es sich nicht in einem reinen Zustand befindet; Probabilistische Vorhersagen: Die Quantenmechanik sagt Ergebnisse probabilistisch voraus. Der Zustand eines Systems wird durch eine Wellenfunktion beschrieben, und die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ergebnisse werden durch die quadrierten Beträge der Wahrscheinlichkeitsamplituden bestimmt. Eine Quantenmischung umfasst diese probabilistischen Vorhersagen für zusammengesetzte Systeme; • Messung und Observablen: Wenn eine Messung an einem Quantensystem durchgeführt wird, kollabiert das System normalerweise in einen seiner möglichen Zustände, und das Ergebnis der Messung ist probabilistisch. Quantenmischungen bieten eine Möglichkeit, die statistische Verteilung von Ergebnissen von Messungen an einem Ensemble identisch vorbereiteter Systeme auszudrücken; • Quanteninformationstheorie: Konzepte der Quantenmischung sind grundlegend in der Quanteninformationstheorie, in der die Manipulation und Übertragung von Quanteninformationen untersucht wird.**
- **Das Verständnis, wie sich gemischte Zustände entwickeln und interagieren, ist für die Entwicklung von Quantenalgorithmen und Quantenkommunikationsprotokollen von entscheidender Bedeutung. Statistische Mechanik: Im Kontext der statistischen Mechanik werden Quantenmischungen verwendet, um die statistischen Ensembles von Quantensystemen zu beschreiben. Das große kanonische Ensemble beispielsweise beinhaltet eine Mischung von Zuständen mit unterschiedlichen Teilchenzahlen. • Zusammenfassend [1–5] ist das Konzept einer Quantenmischung ein grundlegender Aspekt der Quantenmechanik, der es uns ermöglicht, mit de**

Die obigen Überlegungen machen deutlich, dass gemischte Zustände in der Quantenmechanik eine entscheidende Rolle spielen und dass ihre Bedeutung darin liegt, eine vollständigere und realistischere Beschreibung physikalischer Systeme zu liefern als reine Zustände allein. Wie oben erwähnt, stellt ein gemischter Zustand ein statistisches Ensemble reiner Zustände dar. Dieses Ensemble kann verschiedene reine Zustände mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten enthalten. Mathematisch wird ein gemischter Zustand durch eine Dichtematrix beschrieben, die ein positiv semidefiniter hermitescher Operator ist, der auf Hilberts Raum wirkt. Gemischte Zustände sind unerlässlich, wenn es um statistische Ensembles, thermisches Gleichgewicht oder offene Quantensysteme geht, die Wechselwirkungen mit ihrer Umgebung unterliegen . In vielen praktischen Situationen verfügen wir möglicherweise nicht über vollständige Kenntnisse über den genauen Zustand eines Quantensystems. Stattdessen verfügen wir möglicherweise über statistische Informationen über die Wahrscheinlichkeiten verschiedener reiner Zustände, in denen sich das System befinden könnte. Gemischte Zustände bieten eine natürliche Möglichkeit, solche statistischen Ensembles zu beschreiben. In der Quanteninformationstheorie spielen gemischte Zustände eine zentrale Rolle bei der Charakterisierung der Leistung verschiedener Quantenalgorithmen und Quantenkommunikationsprotokolle. Tatsächlich muss betont werden, dass gemischte Zustände für ein umfassendes Verständnis von Quantensystemen von grundlegender Bedeutung sind, insbesondere wenn man die statistische Natur von Messungen, thermische Effekte und die Auswirkungen von Wechselwirkungen mit der Umgebung berücksichtigt. Sie bilden eine Brücke zwischen dem idealisierten Konzept reiner Zustände und der Praxis realer Quantensysteme [1–5]. Schließlich ist es für unsere vorliegenden Zwecke interessant festzustellen, dass der Verlust quantencharakteristischer Verhaltensweisen mit zunehmender Teilchenzahl ein wohlbekanntes Phänomen ist [5]. Wir wissen tatsächlich, dass **bestimmte Quantensysteme ein Verhalten zeigen können, das dem klassischen Verhalten nahekommt, wenn die Zahl der Fermionen in einem Kollektiv sehr groß wird . Dies wird oft als Korrespondenzprinzip bezeichnet. Das statistische Verhalten** einer großen Zahl von Quantenteilchen kann dann

Machine Translated by Google

1.2. Art unserer Ergebnisse

Wir möchten betonen, dass in diesem Beitrag jedes Ergebnis exakt ist. Wir verwenden ein leicht lösbares Viel-Fermionen-Modell namens Lipkin-Modell (LM) [6] , das in der Quantenphysik und der Festkörperphysik von großer Bedeutung ist **[6–16]. Dieses Modell ist zwar vereinfacht, bietet aber wertvolle Einblicke in das Verhalten komplexer Quantensysteme und bietet vereinfachte Rahmenbedingungen, in denen grundlegende Quantenprinzipien analytisch untersucht werden können. Forscher verwenden das LM häufig, um neue theoretische Rahmen zu entwickeln und zu testen, wie etwa Vielteilchentechniken und die Quantenfeldtheorie [6–16].**

Wir werden hier sehr niedrige Temperaturen verwenden. Dies ist eine bekannte statistische Mechaniktechnik, um die Grundzustandseigenschaften eines Systems zu approximieren. Sie führt zu einem gängigen und leistungsstarken Ansatz in der Festkörperphysik und der Quantenmechanik. Dieser Ansatz nutzt die Beziehung zwischen Tieftemperatureigenschaften und dem Grundzustand eines Systems [15,16]. Wir nehmen als unsere niedrigen Temperaturen T die Werte, die der **inversen Temperatur** $\ddot{y}$ = **20 oder 10 entsprechen ,** wobei $\ddot{y}$ = 1/kT **und** k **die Boltzmann-Konstante ist.**

1.3. Gegenwärtiges Ziel und Organisation

Unser Ziel ist es, einige Hinweise zu den vorangegangenen Überlegungen im Kontext eines berühmten nuklearphysikalischen Modells, dem Lipkin-Modell [7], zu untersuchen. Es gibt Hunderte von einschlägigen Referenzen, die man zitieren könnte. Natürlich ist für eine solche Aufgabe nicht genug Platz vorhanden. Wir begnügen uns mit [6–16]. Das Modell bietet uns eine rein quant
Wir möchten diejenigen Merkmale des Modells untersuchen, die Quantenmischungen darstellen. Der Rest des Papiers ist wie folgt aufgebaut. Wir beginnen in Abschnitt 2 mit der Beschreibung der Mathematik des Lipkin-Modells [6–16]. Abschnitt 3 erinnert an Materialien, die für die Kullback-Leibler- Divergenz relevant sind, eines der beiden wichtigsten Informationswerkzeuge, die wir hier verwenden. Das zweite Werkzeug wird in diesem Bemühen im Kontext des Likpin-Modells (es ist anderswo gut bekannt) entwickelt und in Abschnitt 4 behandelt , wo wir zeigen, dass es einen gültigen Quantifizierer zur Beurteilung des Mischungsgrades darstellt. Unser zentrales Thema, der Informationsverlust, wird in Abschnitt 5 erörtert **und Schlussfolgerungen werden in Abschnitt 6 gezogen.**

2. Der Lipkin-Formalismus [15,16]

Wir betrachten N wechselwirkende Fermionen der Masse m **und definieren** $\ddot{y}$ = **N/2. Das Lipkin-Modell [6–16] besteht aus** N = 2$\ddot{y}$ **Fermionen der Masse** m , **die sich in zwei unterschiedliche**

Ein-Teilchen-Energieniveaus (sp), von denen jedes N-fach entartet ist. Eine Energielücke trennt die beiden Niveaus. Diese Lücke wird $\ddot{y}$ genannt. Somit haben wir insgesamt 4$\ddot{y}$ **sp-Mikrozustände, die durch zwei Quantenzahlen (bezeichnet als** μ **und p) gekennzeichnet sind. Die erste Quantenzahl** μ **erreicht die Werte** μ = **$\ddot{y}$1 (unteres Niveau) und** μ = **+1 (oberes Niveau). Die Quantenzahl p, Quasi-Spin genannt, gehört zu einer 2N-fachen Entartung. Dieses Paar p,** μ **wird üblicherweise als „Stelle“ betrachtet. Diese Stelle kann besetzt (durch ein Fermion) oder leer sein. Lipkin setzt [6]**

$$N = 2J, \tag{1}$$

wobei J **als eine Art Drehimpuls wirkt. Darüber hinaus verwendet Lipkin [6] spezielle drehimpulsartige Operatoren, die als Quasi-Spin-Operatoren bezeichnet werden und**

$$Jz = \ddot{y}\,\mu\, C^{+}_{p,\mu}Cp,\mu, \tag{2}$$
$$\mathbf{p,\mu}$$

$$J+ = \ddot{y}\sum_{P} C^{+}_{p,} + Cp, \ddot{y}, \tag{3}$$

$$\mathbf{J\ddot{y}} = \ddot{y}\sum_{P} C^{+}_{p,\ddot{y}}Cp,+, \tag{4}$$

Machine Translated by Google

zusammen mit dem Casimir-Operator

$$J^2 = J_{\frac{1}{2}}(J_+ J_- + J_- J_+). + 2 \quad (5)$$

Die Eigenwerte von J^2 **die Form** $J(J+1)$ **und der Lipkin-Hamiltonoperator die bilden sich** (v **ist eine Kopplungskonstante) [6]**

$$H = \varepsilon J_z + \frac{\varepsilon}{4}(J_+^2 + J_-^2). \quad (6)$$

Die Matrix unseres Hamiltonoperators lautet [6]

$$\langle N/2, n|H|N/2, n\rangle = \frac{N}{2}\varepsilon n + \varepsilon n^2 - \frac{N}{2}\varepsilon n + 2n\varepsilon$$
$$\frac{V}{2}\sqrt{(N-n)(N-n+1)(n+1)(n+2)}\,\langle N/2, n+2|$$
$$\frac{V}{2}\sqrt{(N-n)(N-n+1)n(n-1)}\,\langle N/2, n-2| \quad (7)$$

mit $n = 0, 1, \ldots, N$ **für** $J = N/2$**. Eine Diagonalisierung (numerisch) liefert die energetischen Eigenwerte** $E_n(v, J)$.

2.1. Äußere Umgebung des Systems: Gibbs kanonisches Ensemble-Wärmebad bei Temperatur T

Unsere Lipkin-Struktur soll mit einem Wärmereservoir interagieren. Mit den obigen Eigenwerten [15,16] konstruieren wir eine kanonische Ensemble-Partitionsfunktion Z **[15] , aus der wir alle zugehörigen thermischen Quantifikatoren erhalten, die sich ergeben [15,16].**

Wir konstruieren Z **unter Verwendung der Wahrscheinlichkeiten für** Z **[16]. Unsere thermischen Indikatoren und** Z **ergeben sich aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen [16]** $p_n(v, \mathbf{J}, \beta)$. β **ist, wie wir oben gesehen haben, die inverse Temperatur. Die zugehörigen Formeln finden sich in [16]. Wenn wir die mittlere Energie U, die Entropie S und die freie Energie F benennen, erhalten wir [15,16]**

$$p_n(v, \mathbf{J}, \beta) = \frac{1}{Z(v, \mathbf{J}, \beta)} e^{-\beta E_n(v,J)}, \quad (8)$$

$$Z(v, \mathbf{J}, \beta) = \sum_{n=0}^{N} e^{-\beta E_n(v,J)}, \quad (9)$$

$$U(v, \mathbf{J}, \beta) = \langle E\rangle_\beta = \beta \frac{\partial \ln Z(v, \mathbf{J}, \beta)}{\partial \beta}$$
$$= \sum_{n=0}^{N} E_n(v, J) P_n(v, \mathbf{J}, \beta)$$
$$= \frac{1}{Z(v, \mathbf{J}, \beta)} \sum_{n=0}^{N} E_n(v, J) e^{-\beta E_n(v,J)}, \quad (10)$$

$$S(v, \mathbf{J}, \beta) = \beta \sum_{n=0}^{N} P_n(v, \mathbf{J}, \beta) \ln[P_n(v, \mathbf{J}, \beta)] \quad (11)$$

$$F(v, \mathbf{J}, \beta) = U(v, \mathbf{J}, \beta) - T S(v, \mathbf{J}, \beta). \quad (12)$$

Diese thermischen Quantifikatoren liefern viel mehr Informationen als die Quantenquantifikatoren der Nulltemperatur T **[16]. Wie oben erwähnt, liefern unsere Indikatoren bei ausreichend niedriger** T **eine recht gute Darstellung des** $T = 0$**-Panoramas [16].** Im Folgenden **nehmen wir oft** $\beta = 10$ **oder sogar noch weniger.**

2.2. Lipkins Mischungsgrad für einen Quantenzustand β

Reinheit und Mischung sind grundlegende Begriffe, die bei der Beschreibung von Quantensystemen wie dem Lipkin-Modell eine wichtige Rolle spielen. Die beiden Begriffe sind sehr wichtig b

Machine Translated by Google

Quanteninformation, Berechnung, Verschränkung und Messungen. Um den Unterschied zwischen reinen und gemischten Zuständen zu verstehen, muss man die Kohärenz, die Überlagerung und das statistische Verhalten verstehen. Wie bekannt ist, ist der Mischungsgrad Cf **eines Zustands** *ÿ* **in Bezug auf die Wahrscheinlichkeiten** pi **[17]**

$$Cf = \mathbf{1}\ \ddot{y}\ Tr\ddot{y}^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ P_{ich.}^{\mathbf{2}} \tag{13}$$

wobei $Tr\ddot{y}^{\mathbf{2}}$ **ist die Reinheit** Py **(Großbuchstabe P). Für einen reinen Zustand gilt** Cf = **0 und** Py = **1.** Cf **ist ein sehr wichtiger Quantifikator in dieser Studie.** $Py = \ddot{y}_{n=0}^{N}(Pn(v, \mathbf{J,}\ \ddot{y}))2$ **und** Cf = **S2** = **1** $\ddot{y}\ P_{\ddot{y}.}^{\mathbf{2}}$

Wir wiederholen auch auf die Gefahr der Redundanz hin, dass man für einen Lipkin-Zustand bei der festen Temperatur T für die Wahrscheinlichkeiten und die Zustandssumme alle wichtigen Größen verwendet

$$pn(v, \mathbf{J,}\ \ddot{y}) = \frac{\mathbf{1}}{Z(v, \mathbf{J,}\ \ddot{y})}\mathbf{e}^{\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{En(v,J)}}\mathbf{Z(v, J,}\ \ddot{y}) = \ddot{y}_{n=0}^{N}\ \mathbf{t}^{\ \ddot{y}\ddot{y}En(v,J)}\ \mathbf{.} \tag{14}$$

3. Die Kullback–Leibler-Divergenz (KL) [18]

Dies ist ein wichtiges Werkzeug der Informationstheorie. Die Kullback-Leibler-Divergenz (KL) quantifiziert die Unterscheidbarkeit zwischen zwei Zuständen. Bei Quantenzuständen kann die KL-Divergenz Unterschiede im Zusammenhang mit Interferenz und Verschränkung erfassen und wertvolle Informationen über die Eigenschaften des Quantensystems liefern. KL-Anwendungen finden sich in der Quanteninformationstheorie, im Quantencomputing und in der Quantenkommunikation, wo ihr Verständnis und ihre Quantifizierung ein Maß für den Unterschied zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen liefert . In der klassischen Informationstheorie ist die KL-Divergenz zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen P (x) **und** Q(x) **gegeben durch:**

$$DKL(P||Q) = \ddot{y}x\ P(x)log(P(x)/Q(x)). \tag{15}$$

Die KL- **Divergenz quantifiziert, wie viele Informationen verloren gehen, wenn** Q **zur Approximation von P** verwendet wird . **Sie ist nicht negativ und genau dann gleich Null, wenn die beiden Verteilungen gleich sind . Im Kontext der Quantenmechanik kann** das Konzept der KL- Divergenz erweitert werden , **um zwei Quantenzustände zu vergleichen. Für zwei Quantenzustände, die durch die Dichteoperatoren** *ÿ* **und ÿ beschrieben werden, ist die Quanten-Kullback-Leibler-FF-Divergenz gegeben durch**

$$\mathbf{D(\ddot{y}|\ddot{y})} = Tr(\ddot{y}log(\ddot{y})\ \ddot{y}\ \ddot{y}log(\ddot{y})). \tag{16}$$

4. Neuer quantenthermischer Indikator für das Lipkin-Modell

Das mag zunächst seltsam klingen, aber bedenken Sie die Menge (mit Längeneinheiten)

$$\ddot{y} = \frac{2\ddot{y}\bar{h}}{\ddot{y}\ 2\ddot{y}mkBT}, \tag{17}$$

wird als thermische Länge von de Broglie bezeichnet. Natürlich gibt es im Lipkin-Modell keine Längendimension, aber unser Szenario enthält Fermionen der Masse m **(Systemmasse** Nm**) bei der Temperatur** T , **sodass ein** *ÿ*- **Wert berechnet werden kann und es an uns liegt, seine Relevanz für das Lipkin-Modell zu zeigen, was wir weiter unten tun. Gemäß der de Broglie-Konvention sollten sehr kleine ÿ-Werte auf Klassizität hinweisen. Dies geschieht offensichtlich für hohe** T **und große** N , wie durch **(17) angezeigt , wie intuitiv zu erwarten.**

Die Protonenmasse beträgt mp = **1,67262192 × 10ÿ27 kg. Der Radius des Wasserstoffatoms** rH **beträgt ÿ 10ÿ10 m. Man kann** *ÿ* **gegen** Nmp auftragen. **Da** $\bar{h}$= **6,582119569 × 10ÿ16** Js, **erhält man**

$$\ddot{y} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}\ 2\ddot{y}\bar{h}}}{mp}\ \ \overline{\ddot{y}} = \mathbf{0{,}0403419}\ N.\ \ \overline{\ddot{y}} = \mathbf{1{,}0857 \times 1020}\ N\ \ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{NT}}\ rH, \tag{18}$$

wobei das Zentrum kB = **1 berücksichtigt und in Metern ausgedrückt wird, während die letzte Gleichheit in** rH- **Einheiten ausgedrückt wird und wir** *ÿ* = 1/kBT **mit** kB = **1,380648 × 10ÿ23** J/K genommen haben.

Machine Translated by Google

4.1. Zusammenhang zwischen *ÿ* und N

Abbildung 1 zeigt *ÿ* als Funktion der Fermionenzahl N. Letztere nimmt erwartungsgemäß ab, wenn N **wächst. Dieses Verhalten erwarten wir, da bekannt ist, dass sich bei großen** N die Klassik einschleicht **[5].**

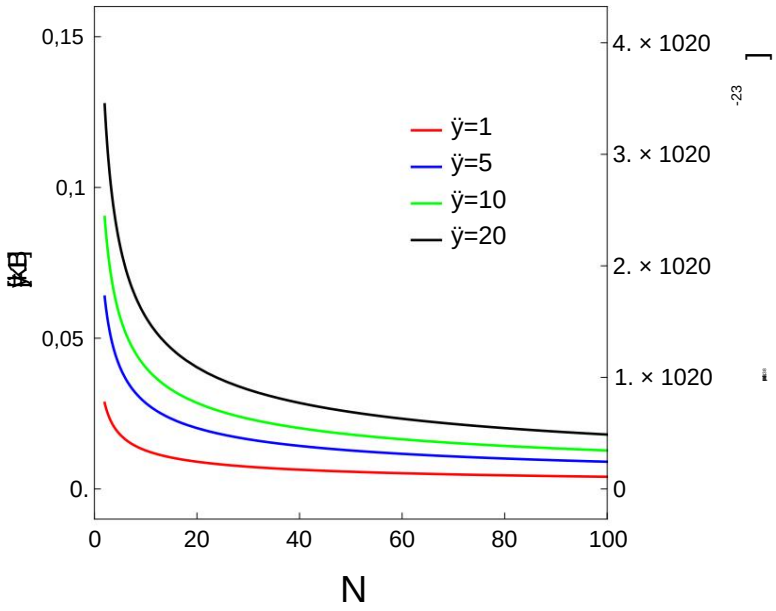


Abbildung 1. Thermischer Längenquantifikator *ÿ* vs. N **für mehrere Werte von** *ÿ* = **1, 5, 10 und 20 (in Metern für die linke vertikale Skala und in Bezug auf den Wasserstoffatomradius in der rechten vertikalen Skala) unter Annahme von** kB = **1 (links) und** kB = **1,380648 × 10ÿ23 (rechts). Wir sehen, dass die thermische Länge abnimmt, wenn die Anzahl der Fermionen im System zunimmt, und zwar mit Raten, die durch die Temperatur reguliert werden. Die Raten nehmen zu, wenn die Temperatur sinkt. Die Länge wird kleiner, wenn** N **zunimmt, was als Überbleibsel der Klassik gelesen werden kann. Dass die Effekte bei niedrigeren Temperaturen deutlicher sind als bei höheren, ist etwas, das man intuitiv erwarten sollte.**

Wir wiederholen, dass die Grafik deutlich zeigt, dass unser Quantifikator *ÿ* in der erwarteten Weise funktioniert. Tatsächlich ist, wie oben erwähnt, die bekannte Entstehung der Klassizität mit zunehmender Teilchenzahl N **in einem System ein faszinierender Aspekt der Quantenphysik [5]. Wir werden diesem Phänomen in dieser Arbeit NICHT weiter begegnen.**

4.2. Zusammenhang zwischen Reinheit, Temperatur und *ÿ*

In Abbildung 2 ist Py = **1 ÿ** Cf **gegenüber ÿ dargestellt .**

Wir sehen, dass die thermische Länge, wie oben versprochen, die erwarteten Eigenschaften aufweist: Sie wächst bei hoher Reinheit und nimmt bei hohem Mischungsgrad ab. Somit ist *ÿ* **als Quantenindikator validiert.**

Die Einschränkung, die wir im Lipkin-Modell beobachten, bei der der Grad der Quantenmischung nicht höher als 50 sein kann, ergibt sich wahrscheinlich aus der Kombination des Pauli- Prinzips und der spezifischen Eigenschaften entarteter Niveaus im System. Das Pauli-Prinzip beschränkt die Besetzung von Plätzen durch Fermionen. Keine zwei Fermionen können gleichzeitig denselben Platz besetzen. In unserem Fall kann jeder Quasi-Spin-p-Platz zwei Fermionen aufnehmen (eines mit Spin-Up und eines mit Spin

Im Lipkin-Modell kann jede Ebene mehrere Fermionen beherbergen. Die maximale Anzahl von Fermionen, die die entsprechenden entarteten Ebenen besetzen können, beträgt jedoch 2N. **Dies liegt daran, d Es sind** 2N **unterschiedliche Standorte verfügbar.**

Wenn das System, wie hier, halb gefüllt ist, haben wir insgesamt N Fermionen. **Diese Situation entspricht einem Fermion in jedem der zweimal entarteten p-Spins und stellt ein Szenario maximaler Quantenmischung dar.**

Machine Translated by Google

Das Pauli-Prinzip gilt weiterhin unabhängig für jeden Spin-Zustand und lässt maximal zwei Fermionen (Spin-up und Spin-down) in jedem entarteten p- **Spin zu.**

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Pauli-Prinzip in Kombination mit der Entartung der Niveaus zu einer maximalen Quantenmischung führt, wenn das System zur Hälfte mit N **Fermionen gefüllt ist. Diese Situation entspricht einem Fermion in jedem zweimal entarteten** p **-Quasispin, was zu einem Zustand maximaler Überlagerung führt. Die spezifische Struktur des Lipkin-Modells unter Berücksichtigung der Quaispin-Entartung bestimmt die Beschränkungen der Besetzung und der resultierenden Quantenmischung.**

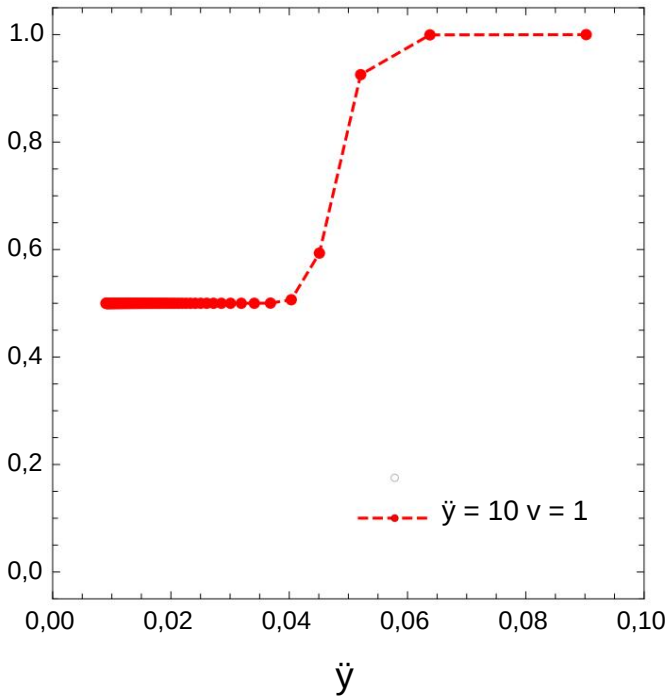


Abbildung 2. Reinheit gegenüber thermischer de-Broglie-Wellenlänge (in Metern) für *ÿ* = **10,** N = **20 und** v = **1. Wenn die Reinheit gering ist, ist auch die Wellenlänge gering, und umgekehrt, wenn die Reinheit sich der Einheit nähert. Man erkennt eine minimale Reinheit von der Hälfte (siehe Text).**

5. Informationsverlust und *ÿ*

5.1. Die KL-Informationsverlust-Beziehung

Wir formulieren hier unser Kullback-Leibler-Material anhand der Anzahl der Fermionen N **neu, die unser Lipkin-System enthält. Die Kullback-Leibler-Divergenz (KL) zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen P1 und P2 liefert, wie wir gesehen haben, ein Maß dafür, wie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von einer anderen abweicht. Genauer gesagt** quantifiziert **KL(P1||P2) den Informationsverlust, wenn P2 zur Annäherung an P1 verwendet wird . Mit anderen Worten misst die KL-Divergenz die erwartete zusätzliche Informationsmenge, die zum Kodieren von Daten aus P1 unter Verwendung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P2** erforderlich **ist, d. h. sie quantifiziert, wie viele Informationen verloren gehen, wenn die wahre Verteilung P1 durch P2** angenähert wird. **In dieser Arbeit wird die erste Verteilung die sein, die ein N-Fermionensystem beschreibt, während P2 dasselbe für ein identisches System tut, das jedoch** 2N **Partikel enthält .**

5.2. Der Grad des Informationsverlusts bei Änderung von N

Wir befassen uns nun mit dem Ausmaß des Informationsverlusts bei einer Änderung von N , wobei wir KL **als Maß dafür verwenden, wie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (PD) von einer zweiten PD im Kontext des Vergleichs von Systemen mit unterschiedlichen Teilchenzahlen abweicht. Wir werden feststellen, dass die KL- Divergenz abnimmt, wenn wir ein System mit einer relativ kleinen Teilchenzahl** N **mit einem System mit einer größeren** N **für quantengemischte Systeme vergleichen. Der Verminderungseffekt ist drastisch**

Machine Translated by Google

kleiner, wenn sich die Systeme in einem reinen Zustand befinden. Dieses Problem wird in Abbildung 3 behandelt, die *ÿ* **(in Metern) mit der KL-Divergenz zwischen** N **und** 2N **Fermionen** (N = 100) in Beziehung setzt. **Wenn** N zunimmt, **gehen Informationen** verloren , **aber dies geschieht auf ganz andere Weise, wenn der Zustand gemisch Diese Tatsache stellt das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit dar.**

Die Grafik zeigt, dass dieser Verlustprozess auch bei größeren thermischen Längen auftritt, je größer v **wird. Das Hauptmerkmal hierbei ist, dass der Grad des Informationsverlusts bei kleinen thermischen Längen ziemlich groß ist .** Wir behaupten, dass der Verlust bei großen Längen weiterhin besteht. **Aus Maßstabsgründen sehen wir** dies in unserer Grafik nicht. Was deutlich wird, ist, dass der Informationsverlust umso geringer ist, je größer die Reinheit ist.

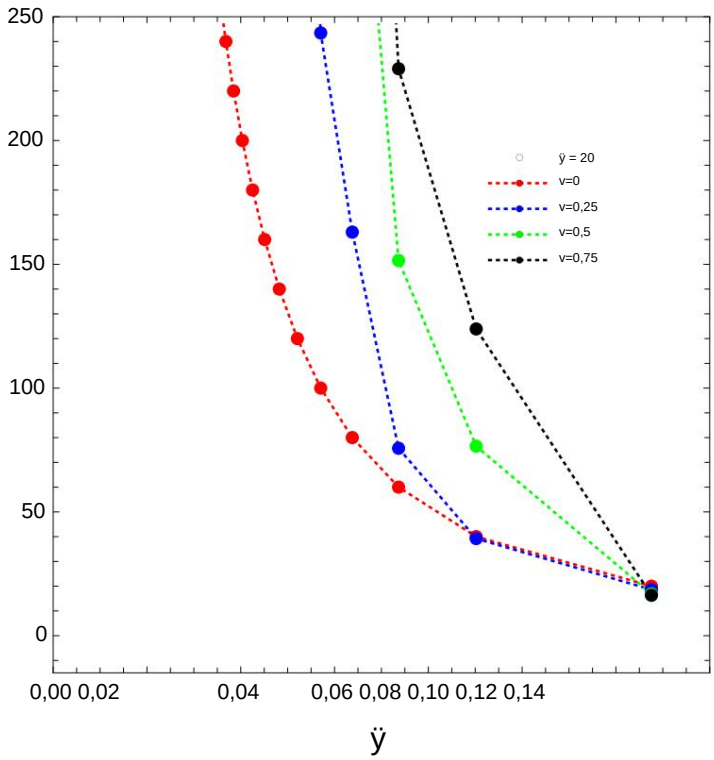


Abbildung 3. KL vs. *ÿ* **für mehrere** v- **Werte, erhalten durch Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für** N- **und** 2N **-Szenarien. Diese KL-Werte messen unseren Informationsverlust. Wir nehmen** *ÿ* = **20. Wenn wir** *ÿ* **ÿ** 13 cm **erreichen , befinden wir uns im Reinzustandsbereich unseres Indikators, wie wir oben gesehen haben. In diesem Reinzustandsbereich ist der Informationsverlust so gering, dass er in der hier gewählten vertikalen Skala nicht sichtbar ist.**
Die Unterschiede sind kleiner als die dort verwendeten Punkte. Wir sehen, dass der Informationsverlust bei der Erweiterung von N bei gemischten Zuständen immens größer **ist als bei reinen Zuständen.**

5.3. Mögliche Interpretationen **In**

der Quantenmechanik ist Verschränkung eine einzigartige Eigenschaft, die in reinen Zuständen existieren kann. Wenn sich ein System in einem reinen Zustand befindet, kann die Verschränkung zwischen den Teilchen zu komplexeren und korrelierteren Wahrscheinlichkeitsverteilungen führen. Im Gegensatz dazu entstehen gemischte Zustände aus Ensembles von Quantensystemen, möglicherweise mit reduzierter Verschränkung. Das Vorhandensein gemischter Zustände könnte zu einer allmählicheren Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit zunehmender Teilchenzahl führen, was zu einer geringeren KL-Divergenz führt.

Gemischte Zustände können als statistische Ensembles reiner Zustände betrachtet werden. Wenn Sie in einem Szenario mit gemischten Zuständen ein System mit kleiner Teilchenzahl mit einem System mit großer Teilchenzahl vergleichen , **betrachten Sie effektiv einen Durchschnitt über eine Vielzahl möglicher reiner Zustände innerhalb des Ensembles. Diese Mittelwertbildung kann zu einer gleichmäßigeren und weniger ausgeprägten Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung führen und so zu einer geringeren KL-Divergenz be**

Quantenmischungen können im Vergleich zu verschränkten reinen Zuständen geringere Korrelationen zwischen Teilchen aufweisen. Mit zunehmender Teilchenzahl nimmt die statistische Unabhä

Machine Translated by Google

zwischen den Partikeln könnte ausgeprägter werden, was zu einer weniger komplexen und vorhersehbareren Wahrscheinlichkeitsverteilung führen würde.

Gemischte Zustände haben oft eine höhere Entropie als reine Zustände. Die erhöhte Entropie kann zu einer gleichmäßigeren und weniger informativen Wahrscheinlichkeitsverteilung beitragen, insbesondere wenn die Teilchenzahl zunimmt. Dies kann zu einer geringeren KL-Divergenz führen.

6. Schlussfolgerungen

Wir sind auf verschiedene Arten gestoßen, den Unterschied zwischen gemischten und reinen Zuständen zu visualisieren und haben außerdem einen neuen Quantifizierer für den Quantenmischungsgrad namens ÿ eingeführt, der als Länge dargestellt werden kann.

Bei den in dieser Arbeit betrachteten Systemen weisen ÿ-Werte über ÿ12 cm auf eine Reinheit von eins hin, während kleinere Werte auf zunehmende Grade der Zustandsvermischung hinweisen (siehe Abbild

Es ist zu beachten, dass gemäß Gleichung (18) *ÿ*- Werte kleiner als beispielsweise 0,001 mm ein Hinweis auf Überbleibsel klassischen Verhaltens sein könnten. Daher können wir unser *ÿ* zu Recht als eine pseudothermische Länge bezeichnen, die ein hilfreicher Reinheitsindikator für das Lipkin-Modell ist. Bei hoher Reinheit liefert sie große Werte und umgekehrt bei einem hohen Grad an Zustandsmis

Wir haben gesehen, dass bei einer endlichen Temperatur T die Systemreinheit Py schneller abnimmt wenn der Grad der Fermion-Fermion-Wechselwirkung v größer wird.

Wir haben festgestellt, dass im Lipkin-Modell bei einer endlichen Temperatur T das Wachstum von N den Mischungsgrad erhöht. Wenn man N erhöht, geht Information verloren, gemessen an der KL- Divergenz. Je größer der Mischungsgrad, desto größer der damit verbundene Informationsverlust . Im Fall reiner Zustände (bei Nulltemperatur) wird der Verlust verschwindend gering.

Beiträge der Autoren: Untersuchung, DM, AP und ARP; Projektverwaltung, AP; Schreiben – Originalentwurf, DM, AP und ARP. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu.

Finanzierung: Diese Forschung wurde teilweise von CONICET (Nationaler **Rat für wissenschaftliche und technische Forschung Argentiniens) unterstützt .**

Datenverfügbarkeitserklärung: Alle Daten sind im Manuskript enthalten.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Verweise

1. **Bengtsson, I.; Zyczkowsi, K.** Geometrie von Quantenzuständen: Eine Einführung in die Quantenverschränkung; **Cambridge University Press: Cambridge, MA, USA, 2006.**
2. **Jaeger, G.** Quanteninformation: Ein Überblick; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2007.**
3. **Giulini, D.; Joos, E.; Kiefer, C.; Kupsch, J.; Stamatescu, I.-O.; Zeh, HD** Dekohärenz und das Auftreten einer klassischen Welt in der Quantentheorie; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 1996.**
4. **Facchi, P.; Mariano, A.; Pascazio, S. Dekohärenz versus Entropie in der Neutroneninterferometrie.** Phys. Rev. A **2001,** 63, **052108.** [Querverweis]
5. **Zurek, WH Dekohärenz und der Übergang vom Quanten- zum Klassikmodell – erneut betrachtet.** Phys. Today **1991,** 44, **1–31.** [CrossRef] **6.** **Lipkin, HJ; Meshkov, N.; Glick, AJ Gültigkeit von Vielteilchen-Approximationsmethoden für ein lösbares Modell: (I) Exakte Lösungen und Störungstheorie.** Nucl. Phys. **1965,** 62, **188.** [CrossRef]
7. **Lipkin, HJ; Meshkov, N.; Glick, AJ Gültigkeit von Vielteilchen-Approximationsmethoden für ein lösbares Modell: (II). Linearisierung Verfahren.** Nucl. Phys. **1965,** 62, **199.** [CrossRef]
8. **Lipkin, HJ; Meshkov, N.; Glick, AJ Gültigkeit von Vielteilchen-Approximationsmethoden für ein lösbares Modell: (III). Exakte Lösungen und Störungstheorie.** Nucl. Phys. **1965,** 62, **188.** [CrossRef]
9. **Lipkin, HJ; Meshkov, N.; Glick, AJ Gültigkeit von Vielteilchen-Approximationsmethoden für ein lösbares Modell: (IV). Die deformierte Hartree-Fock-Lösung.** Nucl. Phys. **1965,** 62, **220.** [CrossRef]
10. **Rowe, DJ Das Lipkin-Modell.** Rev. Mod. Phys. **1968,** 40, **153.** [CrossRef]
11. **Schmid, KW; Bauer, A. Das Lipkin-Modell.** Phys. Rep. **1982,** 88, **251–334.**
12. **Isacker, PV; Heinze, S. Das Lipkin-Modell: Ein Paradigma für eine selbstkonsistente Theorie der Formübergänge.** Phys. Rep. **1991,** 199, **67.**
13. **Dukelsky, J.; Pittel, S.; Sierra, G. Quantenphasenübergänge im Lipkin-Meshkov-Glick-Modell.** Rev. Mod. Phys. **2004,** 76, **643.** [Querverweis]
14. **Li, J. Quantenphasenübergang und Phasendiagramm im Lipkin-Meshkov-Glick-Modell.** Phys. Rev. B **2017,** 95, **075139.**

Machine Translated by Google

15. **Plastino, AR; Monteoliva, D.; Plastino, A. Informationstheoretische Eigenschaften vieler Fermionensysteme: Eine Untersuchung basierend auf exakt lösbare Modelle.** Entropy **2021,** 23, **1488. [CrossRef] [PubMed]**
16. **Monteoliva, D.; Plastino, A.; Plastino, AR Statistische Quantifikatoren lösen eine Kontroverse zur Kerntheorie.** Q. Rep. **2022, 4, 127. [Querverweis]**
17. **Ring, P.; Schuck, P.** Das nukleare Vielteilchenproblem; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 1980.**
18. **Sanchez-Moreno, P.; Zarzo, A.; Dehesa, JS Jensen-Divergenz basierend auf Fishers Informationen.** J. Phys. A Math. Theor. **2012,** 45, **125305. [CrossRef]**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Eine G-modifizierte Helmholtz-Gleichung mit neuen Erweiterungen für die Das störende Gravitationspotential der Erde, seine Funktionen und die Untersuchung isogravitativer Oberflächen

Gerassimos Manoussakis

Fakultät für Mathematik, Schule für angewandte Mathematik und Physik, Nationale Technische Universität Athen, Iroon Polytechneiou 9, 15780 Zografos, Griechenland; gmanous@math.ntua.gr

Zusammenfassung: Die G-modifizierte Helmholtz-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die es uns ermöglicht, die Gravitationsintensität g als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen mit radialem Abstand r in irrationalen Potenzen auszudrücken. Die Laplace-Gleichung im dreidimensionalen Raum (in kartesischen Koordinaten ist die Summe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der unbekannten Größe gleich Null) wird verwendet, um das Gravitationspotential der Erde (Stör- und Normalpotential) auszudrücken, um andere nützliche Größen – die auch als Funktionen des Störpotentials bezeichnet werden – wie Gravitationsstörung , Gravitationsanomalie und Geoid-Wellenbildung als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen darzustellen. Wir zeigen, dass durch Verwendung der G-modifizierten Helmholtz-Gleichung nicht nur die Gravitationsintensität, sondern auch das Störpotential und seine Funktionen als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen ausgedrückt werden können. Die Darstellung der Gravitationsintensität als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen ermöglicht es uns, neue globale Gravitationsmodelle zu erstellen . Darüber hinaus wird eine detailliertere Untersuchung der isogravitativen Oberflächen der Erde durchgeführt.

Abschließend fassen wir unsere Ergebnisse tabellarisch zusammen. Dies macht deutlich, dass neue globale Gravitationsmodelle für die Gravitationsintensität g für viele geophysikalische und geodätische Anwendungen sehr nützlich sein werden.

Schlüsselwörter: Schwerkraft; Schwerkraftanomalie; Schwerkraftstörung; vertikaler Gravitationsgradient; Störpotential; Kugelflächenfunktionen; isogravitative Oberflächen

MSC: 35A09; 35C10; 35J25; 33C05; 33C75

check for updates

Zitat: Manoussakis, G. Eine G-modifizierte Helmholtz-Gleichung mit neuen Erweiterungen für das **störende Gravitationspotential der Erde ,** seine **Funktionen und das Studium isogravitativer Oberflächen.** AppliedMath **2024, 4, 580–595. https://doi.org/ 10.3390/appliedmath4020032**

Wissenschaftlicher Herausgeber: Thomas Woolley

Erhalten: 7. März 2024

Überarbeitet: 24. April 2024

Akzeptiert: 26. April 2024

Veröffentlicht: 4. Mai 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Kugelflächenfunktionen sind in vielen theoretischen und praktischen Anwendungen wichtig (elektromagnetische Felder, Elektronenkonfigurationen, Gravitationsfelder, Geoide, Computergrafik, kosmische Mikrowellen-Hintergrundstrahlung usw.). Einige dieser Anwendungen werden in dieser Arbeit kurz erwähnt. Kugelflächenfunktionen wurden ausführlich untersucht und sind aufgrund ihrer zahlreichen praktischen Eigenschaften weit verbreitet. In der Computergrafik [1] sind sie sehr nützlich, da sie viele der gleichen Stärken wie Haar-Wavelets haben und es Techniken gibt, die die Lücke zwischen ihnen schließen. Dies ermöglicht die Darstellung von Niederfrequenz- und Hochfrequenzfunktionen. Darüber hinaus werden sie in [2–4] zur Erstellung eines realistischen globalen Blitzmodells verwendet.

Das Gravitationspotential ist eine Größe, die als Reihe von Kugelflächenfunktionen ausgedrückt wird. Diese Reihe wird zur Formulierung globaler und lokaler Gravitationsmodelle verwendet. Ein globales Gravitationsmodell [5], auch globales Geopotentialmodell genannt, dient als mathematische Darstellung des externen Gravitationspotentials eines Himmelskörpers. Hier konzentrieren wir uns auf das Szenario, in dem die Erde der anziehende Körper ist. Die Verwendung globaler Gravitationsmodelle ermöglicht es uns, alle zugehörigen Gravitationsfeldfunktionen zu bestimmen – zum Beispiel Gravitationsvektoren und Gravitation.

Es ist wichtig anzumerken, dass diese Modelle [6–9] von entscheidender Bedeutung sind, da sie wertvolle Einblicke in die Eigenschaften der Erde bieten, einschließlich Geoid-Wellenbildung, Schwerkraftanomalien, Schwerkraftstör

Machine Translated by Google

und vertikale Ablenkung. Es ist erwähnenswert, dass diese Modelle ein weites Anwendungsgebiet haben , darunter die Bestimmung der Umlaufbahn, die Trägheitsnavigation für Flugzeuge und Raketen, ozeanografische Studien der Meeresströmungen und die geophysikalische Erforschung von Dichteverteilungen

Das magnetische Vektorfeld der Erde [10] ist mit dem skalaren geomagnetischen Potential verwandt , das der Laplace-Gleichung gehorcht und als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen dargestellt wer Die Anwendungsgebiete des geomagnetischen Potenzials [11,12] sind unglaublich umfangreich; sie reichen vom Studium der Ausbreitung hydromagnetischer Wellen und ionosphärischer Strömungen über die Untersuchung der Gezeiten und die Überwachung von Veränderungen des troposphärischen Wetters bis hin zur Erforschung der Erdkrust

Die Intensität der Schwerkraft und der elektrostatischen Kräfte kann mathematisch als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen ausgedrückt werden. Diese Reihe ergibt sich aus der Lösung der G-modifizierten Helmholtz-Gleichung. Die Intensität der Elektrostatik spielt eine entscheidende Rolle in einer Vielzahl von Anwendungen [13], von Wärme- und Massenübertragung bis hin zur Synthese von Nanomaterialien und der Reduzierung von CO2- Emissionen. Darüber hinaus wurden Sphäroide [14–16] eingesetzt, um elektromagnetische Streuprobleme anzugehen und elektrostatische Wechselwirkungen zwischen kugelförmigen Partikeln in verschiedenen Szenarien zu analysieren. Die Intensität der Schwerkraft ist in verschiedenen Anwendungen sehr wertvoll. Sie spielt eine entscheidende Rolle [17,18] beim Erkennen seismischer Verwerfungen, beim Abschätzen einfacher sphärischer Strukturen innerhalb der Erde, beim Bestimmen von Geoiden und Quasi-Geoiden (die die physikalische Form der Erde und die Referenzoberfläche physikalischer Höhen definieren), [19] beim Analysieren der Topographie der Meeresoberfläche, beim Verstehen der Struktur der Lithosphäre, beim Ableiten der Dicke von s

In dieser Studie stellen wir eine neuartige Methode zur Bestimmung des Störpotentials vor, die unabhängig von der Laplace-Gleichung ist. Indem wir die Gravitationsanomalie und die Gravitationsstörung [21] als Reihe von Kugelflächenfunktionen unter Verwendung der modifizierten Helmholtz-Gleichung ausdrücken (wobei der radiale Abstand r mit irrationalen Potenzen potenziert wird), können wir das Störpotential mühelos durch eine einfache partielle Differentialgleichung bestimmen. Dieser neue Ansatz ermöglicht es uns, relative Größen, die mit dem Gravitationspotential verbunden sind (d. h. seine Funktionale), in einer neuen Reihe von Kugelflächenfunktionen darzustellen. Indem wir die Gravitationsintensität als Reihe von Kugelflächenfunktionen ausdrücken, können wir außerdem eine gründlichere Analyse isogravitativer Oberflächen durchführen. Es ist wichtig zu betonen, dass die Erde in diesem Zusammenhang als ein nicht rotierender Körper betrachtet wird.

2. Laplace-Gleichung, Störpotential und relative Größen

Betrachtet man den Fall der Erde, so ist das Störpotential T [22] (das ist die Differenz zwischen dem tatsächlichen Schwerepotential W der Erde und dem von einem geeigneten Rotationsellipsoid erzeugten Normalpotential U) eine Lösung der Laplace-Gleichung.

$$ÿ2T = 0 \quad (1)$$

Das Konzept des Störpotentials ist von großer Bedeutung, da es für die Berechnung der Geoidwelligkeit N, die den Abstand zwischen der Oberfläche des Geoids und der Oberfläche eines geeigneten Rotationsellipsoids darstellt, von entscheidender Bedeutung ist. Darüber hinaus spielt es eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung anderer wichtiger Größen wie der Schwerkraftstörung ÿg, der Schwerkraftanomalie ÿg und der Abweichungen von der Vertikalen. Es gibt drei klassische Probleme [5] zur Bestimmung des Störpotentials T aus Randwerten auf einer Kugel: (a) das Poisson-Problem, (b) das Hotine-Problem und (c) das Stokes-Problem.

Das erste Problem ist ein Dirichlet-Problem auf einer Kugel mit Radius R, wobei die Werte von T auf der Kugel gegeben sind. Das zweite Problem, eine sphärische Näherung, beinhaltet die Lösung eines Neumann-Problems. In diesem Problem sind uns die Werte der Schwerkraftstörung ÿg gegeben (die die radiale Ableitung des Störpotentials T Das dritte Problem (als sphärische Näherung) ist ein Robin-Problem, bei dem die Werte der Schwereanomalie ÿg auf dem Geoid gegeben sind und die folgende Beziehung erfüllen:

$$\frac{ÿT}{ÿr} 2 + \frac{}{R} T = ÿÿg \quad (2)$$

Machine Translated by Google

Anstatt Randwertprobleme zu lösen, um das Störpotenzial T zu bestimmen, verwenden wir globale Geopotentialmodelle (GGMs). Ein globales Geopotentialmodell [5,23] ist ein mathematischer Ausdruck, der die Berechnung des Störpotenzials durch Kugelflächenfunktionsentwicklung ermöglicht. Die harmonische Reihe eines GGM ist endlich und bietet auch eine Sammlung mathematischer Ausdrücke, numerischer Werte und Algorithmen. Mit diesen Tools können Benutzer problemlos Berechnungen durchführen, um numerische Werte von Größen zu bestimmen, die mit dem Störpotenzial verbun

Darüber hinaus ermöglichen diese Berechnungen die Bewertung spezifischer Fehler, die mit diesen Größen verbunden sind.

Wir präsentieren einige endliche Reihenausdrücke [22–24] in Kugelkoordinaten (r, ÿ, ÿ) (ÿ wird von der z-Achse aus gemessen, (normalisierte Koeffizienten).

$$T(r, \ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=2}^{Nmax} \ddot{y} \left(\frac{R}{R}\right)^{n+1} Tn(\ddot{y}, \ddot{y}) =$$
$$= \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{Nmax} \ddot{y} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \left(\frac{R}{R}\right)^{n+1} (Cnm \cos m\ddot{y} + Snm \sin m\ddot{y}) Pnm(\cos \ddot{y}) \quad (3)$$

$$\ddot{y}g(r, \ddot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y} \frac{\ddot{y}T}{\ddot{y}r} = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=0}^{Nmax} \ddot{y} (n+1) \left(\frac{R}{R}\right)^{n+1} Tn(\ddot{y}, \ddot{y}) \quad (4)$$

$$\ddot{y}g(r, \ddot{y}, \ddot{y}) = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=0}^{Nmax} \ddot{y} (n \ddot{y} 1) \left(\frac{R}{R}\right)^{n+1} Tn(\ddot{y}, \ddot{y}) \quad (5)$$

Die Geoidwelligkeit wird berechnet durch

$$N(\ddot{y}, \ddot{y}) = \frac{1}{\ddot{y}ellispoid(\ddot{y}, \ddot{y})} T(R, \ddot{y}, \ddot{y}) \quad (6)$$

wobei ÿ der Wert der Normalgravitation [22] auf dem Ellipsoid, G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist. Die Komponenten der Ablenkung der Vertikalen [23] sind

$$\ddot{y}(r, \ddot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y} r\ddot{y}(r, \frac{1}{\ddot{y}, \ddot{y}) \ddot{y}\ddot{y}} \frac{\ddot{y}T}{} \quad (7)$$

$$\ddot{y}(r, \ddot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y} r\ddot{y}(r, \frac{1}{\ddot{y}, \ddot{y}) \sin \ddot{y} \ddot{y}\ddot{y}} \frac{\ddot{y}T}{} \quad (8)$$

$$\frac{\ddot{y}T}{\ddot{y}\ddot{y}} = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{Nmax} \ddot{y} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \left(\frac{R}{R}\right)^{n+1} (Cnm \cos m\ddot{y} + Snm \sin m\ddot{y})(Pnm+1(\cos \ddot{y}) \ddot{y} m \tan \ddot{y} \cdot Pnm(\cos \ddot{y})) \quad (9)$$

$$\frac{\ddot{y}T}{\ddot{y}\ddot{y}} = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{Nmax} \ddot{y} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \left(\frac{R}{R}\right)^{n+1} m(Cnm \sin m\ddot{y} \ddot{y} Snm \cos m\ddot{y}) Pnm(\cos \ddot{y}) \quad (10)$$

In den Gleichungen (7) und (8) wird die Normalgravitation [22] an einem geeigneten Punkt bestimmt, der sich auf einer geeigneten Äquipotentialfläche des Normalgravitationsfeldes befindet. Das Störpotential T ist eine Größe, die nicht direkt gemessen werden kann. Daher sind andere messbare Größen erforderlich, um seinen Wert zu bestimmen. Im folgenden Abschnitt werden wir jedoch eine alternative Methode zur Bestimmung von T demonstrieren.

3. G-modifizierte Helmholtz-Gleichung, Störpotential und relative Größen

Unter der Annahme, dass die Schwerkraftstörung ÿg eine kontinuierliche Funktion auf der Oberfläche des Geoids ist, können wir sie durch Lösen des Dirichlet-Problems bestimmen, das die G-modifizierte Helmholtz-Gleichung beinhaltet.

$$\ddot{y}2 (\ddot{y}g) \ddot{y} \frac{2}{R}2 \ddot{y}g = 0$$
$$\ddot{y}g|S = f1(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) \quad (11)$$

Machine Translated by Google

Der Ausdruck der Gravitationsstörung in Kugelflächenfunktionen [21] lautet wie folgt:

$$\ddot{y}g(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \frac{R}{r} \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \ddot{y}g\,[\text{ein } nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + b\,\ddot{y}g\,nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}] \quad (12)$$

Nach [22] können wir auf der Oberfläche des Geoids, die in sphärischer Näherung einer Kugel mit Radius R entspricht, ableiten

$$f1(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \ddot{y} R\,\ddot{y} \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \ddot{y}g\,[\text{a } nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + \text{(13)}$$

Putten

$$A^{\ddot{y}g}_{nm} = R\,\ddot{y} \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \ddot{y}g_{\text{eine } nm} \quad (14)$$

$$B^{\ddot{y}g}_{nm} = R\,\ddot{y} \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} b\,\ddot{y}g_{nm} \quad (15)$$

Die Reihe in Gleichung (13) wird

$$f1(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} [A\,\ddot{y}g\,\ddot{y}g\,nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B\,nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}] \quad (16)$$

Daher,

$$\int_{0}^{2\ddot{y}} \int_{\frac{\ddot{y}}{2}}^{\frac{\ddot{y}}{2}} f1(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) Pjk(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin \ddot{y}\ddot{y}d\ddot{y}d\ddot{y}\ddot{y} = \int_{0}^{2\ddot{y}} \int_{\frac{\ddot{y}}{2}}^{\frac{\ddot{y}}{2}} \sum_{\ddot{y}=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} [A\,\ddot{y}g\,\ddot{y}g\,nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B\,nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}] \cdot \cdot Pjk(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin \ddot{y}\ddot{y}d\ddot{y}d\ddot{y}\ddot{y} \quad (17)$$

und die Koeffizienten [22] der Reihe (17) sind gleich

$$\text{Ein } \ddot{y}g_{n0} = \frac{2n+1}{4\ddot{y}} \int_{0}^{2\ddot{y}} \int_{\frac{\ddot{y}}{2}}^{\frac{\ddot{y}}{2}} f1(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) Pn(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin \ddot{y}\ddot{y}d\ddot{y}d\ddot{y}\ddot{y} \quad (18)$$

$$A^{\ddot{y}g}_{nm} = \frac{2n+1}{4\ddot{y}} \frac{(n\,\ddot{y}\,m)!}{(n+m)!} \int_{0}^{2\ddot{y}} \int_{\frac{\ddot{y}}{2}}^{\frac{\ddot{y}}{2}} f1(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} \sin \ddot{y}\ddot{y}d\ddot{y}d\ddot{y}\ddot{y} \quad , \quad m\,\ddot{y} = 0 \quad (19)$$

$$B^{\ddot{y}g}_{nm} = \frac{2n+1}{4\ddot{y}} \frac{(n\,\ddot{y}\,m)!}{(n+m)!} \int_{0}^{2\ddot{y}} \int_{\frac{\ddot{y}}{2}}^{\frac{\ddot{y}}{2}} f1(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y} \sin \ddot{y}\ddot{y}d\ddot{y}d\ddot{y}\ddot{y} \quad (20)$$

Der gewünschte Ausdruck für die Schwerkraftstörung ist daher

$$\ddot{y}g(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \frac{R}{R} \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} [A\,\ddot{y}g\,\ddot{y}g\,nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B\,nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}] \quad (21)$$

Eine Schwerkraftanomalie kann auch durch ein ähnliches Dirichlet-Problem identifiziert werden, wenn die Werte der Schwerkraftanomalie ÿg auf der Oberfläche des Geoids bekannt sind.

$$\ddot{y}2\,(\ddot{y}g)\,\ddot{y} \frac{2}{R}2\,\ddot{y}g = 0$$
$$\ddot{y}gS = f2(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) \quad (22)$$

Der Ausdruck der Schwerkraftanomalie ist

Machine Translated by Google

$$ÿg(r, \textbf{ÿÿ}, ÿ) = \sum_{n=0}^{+ÿ} \sum_{m=0}^{N} \left(\frac{R}{R}\right)^{\frac{1+ÿ\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}} [A_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + B_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ] \quad \textbf{(23)}$$

Nun sind wir bereit, das Störpotential zu bestimmen. Die Funktion T wird bestimmt durch [22] wird aus der folgenden partiellen Differentialgleichung abgeleitet :

$$\frac{ÿT}{ÿr} = ÿÿg\ ÿ$$

$$ÿ \quad \frac{ÿT}{ÿr} = ÿ \sum_{n=0}^{+ÿ} \sum_{m=0}^{N} \left(\frac{R}{R}\right)^{\frac{1+ÿ\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}} [A_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + B_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ] \quad \textbf{(24)}$$

Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung lautet

$$T(r, \textbf{ÿÿ}, ÿ) = = \sum_{n=0}^{+ÿ} \frac{2R}{ÿ\sqrt{9+4n(n+1)ÿ1}} \left(\frac{R}{R}\right)^{\frac{ÿ\sqrt{9+4n(n+1)ÿ1}}{2}} \sum_{m=0}^{N} [A_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + B_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ] + fÿg(ÿÿ, ÿ) \quad \textbf{(25)}$$

Die Funktion fÿg ist eine beliebige Funktion, sie lässt sich aber aus der folgenden **Randbedingung bestimmen [22]:**

$$\textbf{2}\ ÿg = ÿg + \frac{}{R}^{T} \quad \textbf{(26)}$$

Wenn wir die erforderlichen Größen aus den Gleichungen (21), (23) und (25) einsetzen, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{+ÿ} \sum_{m=0}^{N} [A_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + B_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ] = = \sum_{ÿ\ ÿ\ n=0}^{} \sum_{m=0}^{N} [A_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + B_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ] + + \sum_{n=0}^{ÿ} \frac{4}{ÿ\sqrt{9+4n(n+1)ÿ1}} \sum_{m=0}^{N} [A_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + B_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ] + \textbf{2}^{+} R\ fÿg(ÿÿ, ÿ) \quad \textbf{(27)}$$

Daher wird die Funktion fÿg **als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen ausgedrückt.**

$$fÿg(ÿÿ, ÿ) = \sum_{n=0}^{+ÿ} \sum_{m=0}^{N} [A_{nm} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + B_{nm} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ] \quad \textbf{(28)}$$

Die Koeffizienten der obigen Reihe sind gleich

$$A_{nm} = \frac{R}{\textbf{2}} \frac{\sqrt{\textbf{9} + 4n(n+1)\ ÿ\ \textbf{5}}}{\sqrt{\textbf{9} + 4n(n+1)\ ÿ\ \textbf{1}}} A_{nm}^{ÿg}\ ÿ\ EIN_{nm}^{ÿg} \quad \textbf{(29)}$$

$$B_{nm} = \frac{R}{\textbf{2}} \frac{\sqrt{\textbf{9} + 4n(n+1)\ ÿ\ \textbf{5}\ ÿg}}{\sqrt{\textbf{9} + 4n(n+1)\ ÿ\ \textbf{1}}} B_{nm}\ ÿ\ B_{nm}^{ÿg} \quad \textbf{(30)}$$

Schließlich ist das Störpotential T gegeben als

$$T(r, \textbf{ÿÿ}, ÿ) = = \sum_{n=0}^{+ÿ} \frac{2R}{ÿ\sqrt{9+4n(n+1)ÿ1}} \left(\frac{R}{R}\right)^{\frac{ÿ\sqrt{9+4n(n+1)ÿ1}}{2}} \sum_{m=0}^{N} [A_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + B_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ] + \sum_{n=0}^{+ÿ} \sum_{ÿ\ ÿ\ m=0}^{N} \frac{R}{\textbf{2}} \frac{\sqrt{ÿ\ 9+4n(n+1)ÿ5}}{\sqrt{ÿ\ 9+4n(n+1)ÿ1}} A_{nm}^{ÿg}\ ÿ\ EIN_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \cos mÿ + + \frac{\sqrt{ÿ\ 9+4n(n+1)ÿ5\ ÿg}}{\sqrt{ÿ\ 9+4n(n+1)ÿ1}} B_{nm}\ ÿ\ B_{nm}^{ÿg} Pnm(\sin \textbf{ÿÿ}) \sin mÿ \quad \textbf{(31)}$$

Machine Translated by Google

Das Verfahren zur Ermittlung der Gleichung (31) kann als alternative gravimetrische Ermittlung des Störpotentials.

Der Ausdruck für das Störpotential in Gleichung (31) kann durch eine endliche Reihe von Kugelflächenfunktionen ersetzt werden, um ein neues globales Geopotentialmodell zu entwickeln. Gemäß der geodätischen Terminologie ist das Störpotential in diesem Modell eine Funktion der Schwerkraftstörungen. Für n = Nmax wird Gleichung (31) zu einer endlichen Reihe und ermöglicht es uns, die partiellen Ableitungen dritter Ordnung des Störpotentials in Kugelkoordinaten zu bestimmen. Diese Ableitungen können in verschiedenen kartesischen Systemen ausgedrückt werden [25] und effektiv in verschiedenen geophysikalischen Studien und Erkundungen eingesetzt werden.

In Gleichung (31) wird für r = R das Störpotential auf der Oberfläche des Das Ergebnis ist wie folgt:

$$T(R, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) \ddot{y} T(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \frac{R}{\ddot{y}g\,\ddot{y}g}[A\ nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y})\cos m\ddot{y} + B\ nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y})\sin m\ddot{y}\ddot{y}\ 2\ \ddot{y}g\ \ddot{y}g \ddot{y}[A\ nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y})\cos m\ddot{y} + B\ nmPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y})\sin m\ddot{y}] \quad (32)$$

Die obige Formel kann wie folgt geschrieben werden:

$$T(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \frac{R}{2}[\ddot{y}g(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})\ddot{y}\ \ddot{y}g(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})] \quad (33)$$

Daher ist das Störpotential auf der Oberfläche des Geoids gleich der Differenz zwischen Schwerkraftstörung und Schwerkraftanomalie multipliziert mit R/2. Mit Gleichung (6) kann die Geoidwellung in einer neuen, alternativen Form ausgedrückt werden.

$$N(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = [\ddot{y}g(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})\ddot{y}\ \ddot{y}g(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})]\frac{R}{2\ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})} \quad (34)$$

Die Gleichungen (33) und (34) stellen auch die Bedeutung von Gravitationsstörungen und Gravitationsanomalien dar (ermittelt durch Messungen). Ein interessantes theoretisches Ergebnis ergibt sich, wenn ÿg und ÿg durch ihre entsprechenden Werte ersetzt werden.

$$T(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \frac{R}{2}[\ddot{y}ellepsoid(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})\ddot{y}\ \ddot{y}geoid(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})] \quad (35)$$

$$N(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \frac{R}{2}\frac{\ddot{y}ellepsoid(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})\ddot{y}\ \ddot{y}geoid(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})}{\ddot{y}ellepsoid(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})} \quad (36)$$

Wenn also der Wert der Normalgravitation ÿ auf der Oberfläche des Geoids bekannt ist, dann sind auch das Störpotential (auf dieser Oberfläche) und die Wellenbewegung des Geoids bekannt (wiederum als Reihe von Kugelflächenfunktionen).

Die Intensität der Schwerkraft g ist eine sehr signifikante Größe, die ausgedrückt werden kann als Reihe von Kugelflächenfunktionen.

$$g(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}}\sum_{m=0}^{N}\frac{R}{R}^{\frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}}[A\ \overset{G}{n}mPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y})\cos m\ddot{y} + B\ \overset{G}{n}mPnm(\sin \ddot{y}\ddot{y})\sin m\ddot{y}] \quad (37)$$

Diese Formel ist viel handlicher als die typische Formel.

$$g(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y}gradVE\ddot{y} \quad (38)$$

wobei VE für das newtonsche Gravitationspotential der Erde steht. Gleichung (33) ist auch für verschiedene Umrechnungen zwischen unterschiedlichen Höhentypen nützlich, wie etwa orthometrische Höhenkorrektur und dynamische Korrektur.

Machine Translated by Google

Als sphärische Näherung ist der vertikale Gravitationsgradient gleich der radialen Ableitung der Gravitationsintensität; daher [22] (wir erinnern daran, dass wir es mit einer nicht rotierenden Erde zu tun haben),

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -2gJ \qquad (39)$$

wobei J die mittlere Krümmung der relativen Äquipotentialfläche ist.

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{N} \frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2r}\left(\frac{R}{R}\right)^{\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}} [A_{nm}^{G} P_{nm}(\sin\varphi)\cos m\lambda + B_{nm}^{G} P_{nm}(\sin\varphi)\sin m\lambda], \quad r > R \qquad (40)$$

Durch Kombination der Gleichungen (39) und (40) können wir die mittlere Krümmung der Äquipotentialflächen des Schwerefelds der Erde bestimmen.

4. Untersuchung der isogravitativen Oberflächen der Erde

Gleichung (37) ermöglicht es uns, die isogravitativen Oberflächen des Erdschwerefelds zu untersuchen . Auf diesen Oberflächen bleibt der Wert der Schwerkraft konstant. Wie in [26] angegeben, ähneln isogravitative Oberflächen stark Kugeln. Um eine lokalisierte Untersuchung der isogravitativen Oberflächen durchzuführen, leiten wir die folgende Transformation ein:

$$\begin{aligned} X &= r\cos\varphi\cos\lambda \\ Y &= r\cos\varphi\sin\lambda \\ Z &= r\sin\varphi \end{aligned}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \qquad (41)$$

Das kartesische System (X, Y, Z) [22] hat seinen Mittelpunkt im Erdmittelpunkt, die Z-Achse fällt mit der mittleren Rotationsachse der Erde zusammen, die X-Achse liegt auf der nach außen gerichteten Meridianebene von Greenwich und die Y-Achse macht das System rechtshänd

$$\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(r,\varphi,\lambda)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\lambda & -r\sin\varphi\cos\lambda & -r\cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda & -r\sin\varphi\sin\lambda & r\cos\varphi\cos\lambda \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \qquad (42)$$

Die Einheitsnormalvektoren sind

$$\bar{e}_1 = (\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi) \qquad (43)$$

$$\bar{e}_2 = (-\sin\varphi\cos\lambda, -\sin\varphi\sin\lambda, \cos\varphi) \qquad (44)$$

$$\bar{e}_3 = (-\sin\lambda, \cos\lambda, 0) \qquad (45)$$

Sei P ein beliebiger Punkt mit Kugelkoordinaten (rP, φP, λP). Wir definieren ein zweites kartesisches System (x, y, z), so dass sein Mittelpunkt im Punkt P liegt und die z–Achse dieselbe Richtung hat wie der Vektor ē1 (Gleichung (43)). Die x–Achse ist tangential zum Meridian einer Kugel mit Radius rP und Mittelpunkt des Erdmittelpunkts und hat dieselbe Richtung wie der Vektor ē2. Die y–Achse macht das System rechtshändig. Die Transformation zwischen (X, Y, Z) und (x, y, z) [27] ist

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + r_P \end{pmatrix} \qquad (46)$$

Die partiellen Ableitungen der Schwereintensität erster und zweiter Ordnung im (x, y, z)-System [27] sind wie folgt gegeben:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial g}{\partial r} \qquad (47)$$

Machine Translated by Google

$$\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}y} = \frac{1}{\ddot{y}gr\cos\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}} \tag{48}$$

$$\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z} = \frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r} \tag{49}$$

$$\frac{\ddot{y}\,2g}{\ddot{y}x^2} = \frac{1}{2}\ddot{y}g + \ddot{y}rr \quad \frac{1}{R^2}\frac{\ddot{y}\,2g}{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}^2} \tag{50}$$

$$\frac{\ddot{y}}{2g\,\ddot{y}x\ddot{y}y} = \frac{1}{2\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\cos\ddot{y}\ddot{y}\,r}\frac{\ddot{y}\,2g}{} \quad \frac{\sin\ddot{y}\ddot{y}}{R2\cos2\,\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}}\ddot{y}g \tag{51}$$

$$\frac{\ddot{y}\,2\,g}{\ddot{y}x\ddot{y}z} = \frac{1}{2}\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,r} \quad \frac{1}{}\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,r} \tag{52}$$

$$\frac{\ddot{y}\,2\,g}{\ddot{y}y^2} = \frac{1}{}\ddot{y}g + \ddot{y}rr \quad \frac{1}{R\cot\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\ddot{y}g + 2\quad\frac{1}{R2\cos2\,\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}2}\ddot{y}\,2g \tag{53}$$

$$\frac{\ddot{y}}{2g\,\ddot{y}y\ddot{y}z} = \frac{1}{2\ddot{y}\ddot{y}\cos\ddot{y}\ddot{y}\,r}\frac{\ddot{y}g}{} \quad \frac{1}{\ddot{y}gr\cos\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}r\ddot{y}\ddot{y}} \tag{54}$$

$$\frac{\ddot{y}\,2g}{\ddot{y}z^2} = \frac{\ddot{y}\,2g}{\ddot{y}r^2} \tag{55}$$

Die obigen Gleichungen (Gleichung (47) bis Gleichung (55)) werden als Punkt P bezeichnet. Wegen der von Null verschiedenen partiellen Ableitung von g nach r ergibt sich für eine Parametrisierung der isogravitativen Oberfläche [21] für einen kleinen Bereich in der Nähe des Punktes P folgender Zusammenhang:

$$\bar{s} : (\ddot{y}\ddot{y},\ddot{y}) \times (\ddot{y}\ddot{y},\ddot{y})\,\ddot{y}\,\ddot{y}3 : (x, y)\,\ddot{y}\,s(x, y) = (x, y, \bar{z}(x, y)) \tag{56}$$

Die Funktion z ist unbekannt, aber ihre partiellen Ableitungen können bestimmt werden. Die Koordinatenvektoren lauten daher

$$\frac{\ddot{y}\bar{s}}{\ddot{y}x} = 1, 0, \ddot{y}x\ \frac{\ddot{y}z}{}\ = 1, 0, \ddot{y}\,\ddot{y}g\,\ddot{y}z\ \frac{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}x}}{} \tag{57}$$

$$\frac{\ddot{y}\bar{s}}{\ddot{y}y} = 1, 0, \ddot{y}y\ \frac{\ddot{y}z}{}\ = \ddot{y}\quad\frac{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}y}\ddot{y}}{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\ddot{y}}\quad \ddot{y}1, 0, \ddot{y} \tag{58}$$

Der Normalvektor ist

$$\overline{NC} = \frac{\ddot{y}\bar{s}}{\ddot{y}x} \times \frac{\ddot{y}\bar{s}}{\ddot{y}y} = \ddot{y}\,\frac{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}x}}{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}}, \frac{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}y}}{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}}, 1\ddot{y} \quad \ddot{y} \tag{59}$$

Der Einheitsnormalvektor ist

$$\overline{N} = \frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\frac{1}{\ddot{y}gradg\ddot{y}}\overline{NC} \tag{60}$$

Grundlegende Elemente [21] der ersten Art sind

$$E = \frac{\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}x}\right)^2 + \left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^2}{\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^2} \tag{61}$$

$$F = \frac{\frac{\ddot{y}g\,\ddot{y}g}{\ddot{y}x\,\ddot{y}y}}{\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^2} \tag{62}$$

Machine Translated by Google

$$G = \frac{\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}y}\right)^2 + \left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^2}{\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^2} \tag{63}$$

Grundlegende Elemente der zweiten Art sind

$$L = \ddot{y}N, \ddot{y} = \ddot{y}x\,\mathbf{2}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\,\frac{\frac{\ddot{y}^2}{g\,\ddot{y}x^2}\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z} - \mathbf{2}\frac{\ddot{y}^2}{\ddot{y}x\,\ddot{y}z}\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}g}\frac{\ddot{y}gg}{\ddot{y}g} + \mathbf{2}\frac{\ddot{y}xy\ddot{z}}{\ddot{y}z}\frac{\ddot{y}^2 g}{\ddot{y}z^2}\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}x}\right)^2}{\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^3}\,\ddot{y}gradg\ddot{y} \tag{64}$$

$$M = \ddot{y}N, \ddot{y} = \ddot{y}x\ddot{y}y\,\ddot{y}z\,\frac{\ddot{y}^2\,\ddot{y}^2\,\ddot{y}g\,\ddot{y}g\,\ddot{y}g\,\ddot{y}ggg}{\ddot{y}y^2\,\ddot{y}z\,\ddot{y}y\,\ddot{y}z\,\ddot{y}y\ddot{y}z\,\ddot{y}x\,\ddot{y}z}\,\frac{\frac{\ddot{y}^2}{g\,\ddot{y}x\ddot{y}y}\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^2\frac{\ddot{y}^2 g\,\ddot{y}gg}{\ddot{y}z^2\,\ddot{y}x\,\ddot{y}y}}{\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^3}\,\ddot{y}gradg\ddot{y} \tag{65}$$

$$N = \ddot{y}N, \ddot{y}y\,\frac{\ddot{y}^2}{2}\ddot{y} = \frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\,\frac{\left(\frac{\ddot{y}^2 g}{\ddot{y}y^2}\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^2 - \ddot{y}yyz\,\frac{\ddot{y}^2\,\mathbf{2}\ddot{y}g\,\ddot{y}gg}{\ddot{y}y\,\ddot{y}z^3} + \left(\frac{\ddot{y}^2 g}{\ddot{y}z^2}\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}y}\right)^2}{\left(\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}\right)^2}\,\ddot{y}gradg\ddot{y} \tag{66}$$

Sei P ein Punkt weit weg von der Erde, d. h. rP nimmt einen großen Wert an. Wenn wir uns der Erde langsam entlang der Polarachse nähern, r = rP, sind **gx und gy kleine Größen. Somit werden Gleichung (61) bis Gleichung (66) zu**

$$EP = \mathbf{1} \tag{67}$$

$$FP = \mathbf{0} \tag{68}$$

$$GP = \mathbf{1} \tag{69}$$

$$LP = \frac{\frac{\ddot{y}^2}{g}}{\ddot{y}x\,\mathbf{2}\,\ddot{y}gradg\ddot{y}}_P = \frac{\frac{\ddot{y}^2}{g\,\ddot{y}x}}{\frac{\mathbf{2}}{\ddot{y}g\,\ddot{y}z}}_P = \frac{\frac{\mathbf{1}}{}}{rP}\,\frac{\mathbf{1}}{R_P^2}\,\frac{\ddot{y}^2}{g\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\mathbf{2}}{\ddot{y}g\,\ddot{y}r}_P \tag{70}$$

$$MP = \frac{\frac{\ddot{y}^2}{g\,\ddot{y}x\ddot{y}y}}{\ddot{y}gradg\ddot{y}}_P = \frac{\frac{\ddot{y}^2}{g\,\ddot{y}x\ddot{y}y}}{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}}_P = \frac{\mathbf{1}}{R_P^2\,\mathbf{cos}\,\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\frac{\ddot{y}^2}{g\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}}{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r}}_P + \frac{\mathbf{sin}\,\ddot{y}P\ddot{y}}{R_P^2\,\mathbf{cos2}\,\ddot{y}P\ddot{y}\,\ddot{y}r}\,\frac{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}\ddot{y}}}{\ddot{y}g}_P \tag{71}$$

$$NP = \frac{\frac{\ddot{y}^2 g}{\ddot{y}y^2}}{\ddot{y}gradg\ddot{y}}_P = \frac{\frac{\ddot{y}^2 g}{\ddot{y}y^2}}{\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}z}}_P = \frac{\mathbf{1}}{rP} + \frac{\mathbf{1}}{R_P^2\,\mathbf{Kinderbett}\,\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r\,P} + \frac{\mathbf{1}}{R_P^2\,\mathbf{cos2}\,\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}^2}{g}\,\frac{}{\ddot{y}\ddot{y}2\,\ddot{y}g_P\ddot{y}r} \tag{72}$$

Im Punkt P **sind die Hauptkrümmungen k1 und k2 der isogravitationalen Oberfläche [28] die Wurzeln der folgenden Gleichung:**

$$(EG\,\ddot{y}\,F\,\ddot{y}^2)P\,k\,\ddot{y}\,(EN\,\ddot{y}\,2FM + GL)P\,k + (LN\,\ddot{y}\,\mathbf{M2}\,)\mathbf{P} = \mathbf{0}\,\ddot{y}$$
$$k\,\mathbf{2}\quad \ddot{y}\,(L + N)P\,k + (LN\,\ddot{y}\,\mathbf{M2}\,)\mathbf{P} = \mathbf{0} \tag{73}$$

Somit,

$$L + N + (L\,\ddot{y}\,N)\,\mathbf{k1} = \frac{\sqrt{\quad^2\,\ddot{y}\,4M2}}{\mathbf{2}}_P \tag{74}$$

$$L + N\,\ddot{y}\,(L\,\ddot{y}\,N)\,\mathbf{k2} = \frac{\sqrt{\quad^2\,\ddot{y}\,4M2}}{\mathbf{2}}_P \tag{75}$$

Machine Translated by Google

Die mittlere und die Gaußsche Krümmung der isogravitativen Oberfläche am Punkt P sind gleich

$$H = \frac{L+N}{2}_{P} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{1}{rP}\,\frac{1}{R_P^2}\,\frac{\ddot{y}^2}{g\;\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{2}{\ddot{y}g\;\ddot{y}r}_{P} + \frac{1}{rP} + \frac{1}{R_P^2\;\text{Kinderbett}\;\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r\;P} + \frac{1}{R_P^2\;\cos 2\;\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}^2}{g}\,\frac{}{\ddot{y}\ddot{y}2\;\ddot{y}g\ddot{y}r\ddot{y}\;\ddot{y}} \tag{76}$$

$$KG = \frac{LN\ddot{y}M2}{EG\ddot{y}F^2}_{P}\,{}^{=\ddot{y}}\,\frac{}{1\;rP}\,\frac{1}{{}^{2}\acute{P}}\,\frac{\ddot{y}\,2g}{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{2}{\ddot{y}g\;\ddot{y}r}_{P} + \frac{}{1\;rP} + \frac{1}{R_P^2\;\text{Kinderbett}\;\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r\;P\;2} + \frac{1}{R_P^2\;\cos 2\;\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}\,2g}{\ddot{y}\ddot{y}2}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r}_{P}$$
$$\frac{}{R_P^2\;1\;\cos\;\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}\,2g}{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r}_{P} + \frac{\sin\;\ddot{y}P\ddot{y}\;2}{R_P\;\cos 2\;\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r\;P} \tag{77}$$

Wenn der Punkt P weit von der Erde entfernt ist, werden die Gleichungen (76) und (77)

$$H = \ddot{y}\;rP\;\frac{1}{} \tag{78}$$

$$KG = \frac{1}{R_P^2} \tag{79}$$

Daher sind die isogravitationalen Oberflächen bei großen r-Werten Kugeln mit Radius rP.

Bei der Annäherung an die Erde entlang der Polarachse r = rP ist die mittlere Krümmung durch Gleichung (76) gegeben und die Gaußsche Krümmung wird aus der folgenden Beziehung abgeleitet:

$$K_G^{r>} = \frac{1}{R_P^2} + \frac{1}{R_P^3}\,\ddot{y}\,\frac{1}{\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\text{Kinderbett}\;\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r\;P}\,\frac{1}{\cos 2\;\ddot{y}P\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}^2}{g}\,\frac{}{\ddot{y}\ddot{y}2\;\ddot{y}g\ddot{y}r} + \frac{\ddot{y}^2}{g\;\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}\,\frac{\ddot{y}}{2}\,\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}g\;\ddot{y}r}_{P}\,\ddot{y} \tag{80}$$

Die Gaußsche Krümmung am Punkt P charakterisiert die Form der isogravitationalen Oberfläche um diesen Punkt. Der zweite Term der Gleichung (80) beschreibt die Abweichung der Form der isogravitationalen Oberfläche von der einer Kugel. Wenn sich Punkt P allmählich der Erde nähert (mit kleinem ÿr), bilden isogravitationale Oberflächen geschlossene Flächen mit einer pos

Um den Punkt P herum hat die isogravitative Oberfläche die Form eines elliptischen Paraboloids.

Abbildung 1 zeigt die Form der isogravitationalen Oberfläche um Punkt P, die ein Paraboloid ist. Die Form isogravitationaler Oberflächen wird komplizierter, wenn Punkt P nahe an der Erde liegt. Angenommen, der Geoid stellt die wahre Form der Erde dar, dann sei P ein Punkt auf dem Geoid, insbesondere am Nordpol (ÿ' = ÿ/2). Die isogravitationale Oberfläche, die durch Punkt P verläuft, kann den Geoid nicht schneiden. Daher berühren sich beide Oberflächen am Punkt P, d. h. sie haben eine gemeinsame Tangentialebene. Um Punkt P herum haben die z-Koordinaten der benachbarten Punkte ein positives Vorzeichen.

Es sei ÿ eine Kurve auf der isogravitativen Oberfläche, die durch den Schnittpunkt der isogravitativen Oberfläche und einer Meridianebene gebildet wird. Da isogravitative Oberflächen geschlossene Oberflächen sind, bedeutet dies, dass wir, wenn wir uns weiter von Punkt P entlang der Kurve ÿ bewegen, einen Punkt A erreichen, an dem die Gaußsche Krümmung positiv ist und die benachbarten Punkte der isogravitativen Oberfläche negative z-Koordinaten haben. Folglich gibt es auf der Kurve ÿ zwischen den Punkten P und A einen Punkt Q, an dem die Gaußsche Krümmung gleich Null ist und die z-Koordinaten der benachbarten Punkte ebenfalls gleich Null sind. Dies bedeutet, dass Punkt Q ein singulärer Punkt ist, d. h. LQ = MQ = NQ = 0.

Die isogravitationsfläche, die durch Punkt P verläuft, schneidet die Äquatorialebene und liegt außerhalb des Geoids, ohne singuläre Punkte. Die Menge der Punkte mit einer Null- Gauß-Krümmung wird als singulärer Ring der isogravitationsfläche definiert. Nahe der Oberfläche des Geoids hat jede isogravitationsfläche mindestens einen singulären Ring.

Abbildung 2 zeigt eine vereinfachte Darstellung eines singulären Rings. Wenn sich Punkt P entlang der z-Achse bewegt, nimmt **rP zu. Wir haben gezeigt, dass die isogravitativen Flächen zu Kugeln werden, wenn die Polardistanz r hohe Werte erreicht. Dies deutet darauf hin, dass die Gaußsche Krümmung am Punkt P gegen Null geht. Gleichzeitig schrumpfen die singulären Ringe langsam,**

Machine Translated by Google

Sie erreichen einen kritischen Punkt, wenn die Gaußsche Krümmung am Punkt P Null wird. Punkt P stellt die Position des singulären Rings auf dieser Oberfläche dar. Wenn rP den kritischen Wert überschreitet, weisen die isogravitativen Oberflächen durchgängig eine positive Gaußsche Krümmung auf, was dazu führt, dass keine singulären Ringe mehr vorhanden sind. Wenn rP schließlich **große Werte annimmt, werden isogravitative Oberflächen zu Kugeln mit einem Radius von rP.**

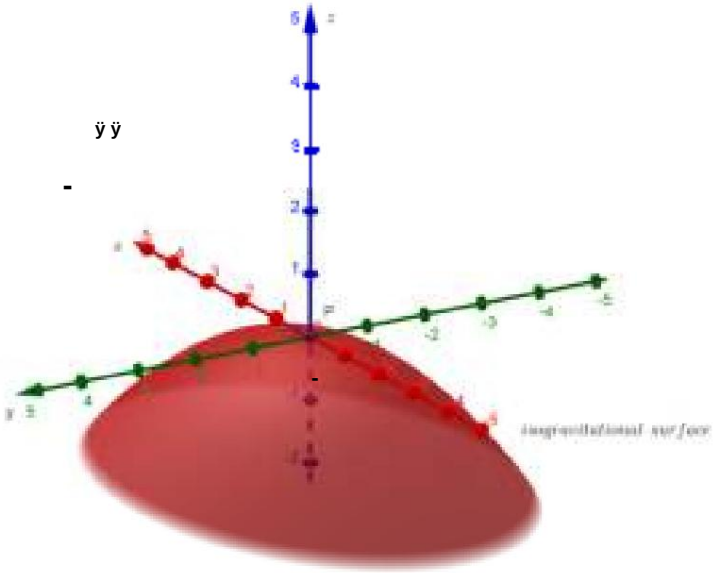


Abbildung 1. Isogravitationsoberfläche.

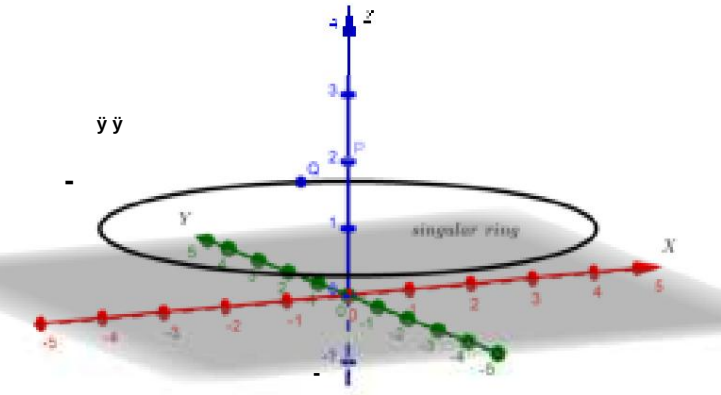


Abbildung 2. Singulärer Ring.

Abbildung 3 zeigt ein vereinfachtes Bild einer Familie einzelner Ringe.

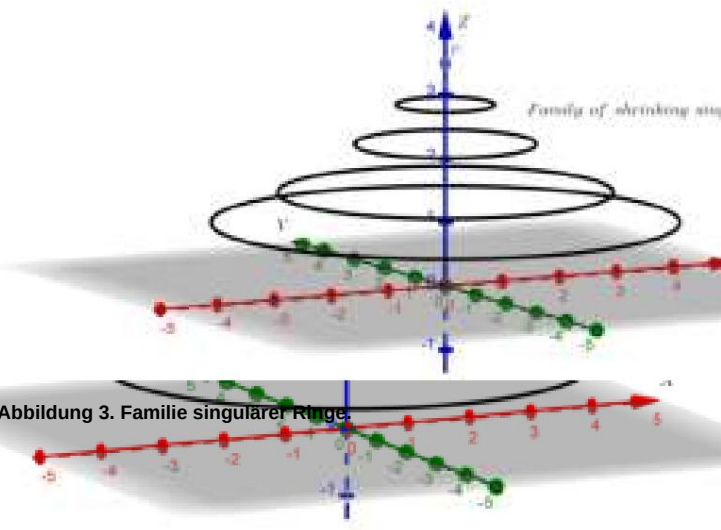


Abbildung 3. Familie singulärer Ringe.

Machine Translated by Google

5. Störende Isogravitationsflächen, anomalistische Isogravitationsflächen und ein Vergleich der beiden Methoden zur Ermittlung des Störpotenzials

Eine störende isogravitative Oberfläche ist gekennzeichnet durch einen konstanten Wert der Schwerkraft Störung ÿg. In ähnlicher Weise ist eine anomalistische isogravitative Oberfläche durch einen konstanten Wert der Schwerkraftanomalie ÿg gekennzeichnet. Diese lokale Studie ähnelt der der isograv Oberflächen, wobei die mittlere und die Gaußsche Krümmung durch die Gleichungen (76) und (77) gegeben sind, wobei g durch ÿg (oder ÿg) ersetzt wird.

In der folgenden Tabelle präsentieren wir eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus den Abschnitten 3 und 4. In der ersten Spalte sind die Gravitationsgrößen aufgeführt, während in der zweiten Spalte angegeben ist, ob jede Größe wird als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen ausgedrückt, die durch das Laplace-Modell bereitgestellt werden Gleichung. Wir verwenden „ja“, um anzuzeigen, wenn die Menge explizit als solche ausgedrückt wird und „nein“, wenn dies nicht der Fall ist. In der dritten Spalte wird „ja“ ausgewählt, wenn die Menge dargestellt wird als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen, die aus der G-modifizierten Helmholtz-Gleichung gewonnen werden. Der Begriff „direkt“ wird verwendet, um eine Größe zu beschreiben, die die gewählte partielle Differentialgleichung erfüllt Gleichung und bleibt entweder messbar oder konstant am Rand. Umgekehrt den Begriff „indirekt“ verwenden, wenn die oben genannten Bedingungen nicht erfüllt sind. Darüber hinaus Die Symbole „Ve“ und „VE“ repräsentieren die Newtonschen Gravitationskräfte der Erde und des Ellipsoids Potenzial.

Aus Tabelle 1 können wir erkennen, dass die Laplace-Gleichung einen Vorteil bietet bei der Analyse des Gravitationspotentials, während die G-modifizierte Helmholtz-Gleichung eine Rand in der Untersuchung der Schwerkraftintensität, Schwerkraftstörung und Schwerkraftanomalie. Es ist Es ist anzumerken, dass der Prozess der Ermittlung des Störpotentials mit dem G-modifizierten Die Helmholtz-Gleichung ist recht einfach, da sie nur die Lösung einer einfachen partiellen Differentialgleichung (siehe Gleichung (24)).

Tabelle 1. Vergleich zwischen Laplace und G – modifizierte Helmholtz-Gleichung.

Menge	Laplace-Gleichung Sphärisch Harmonische, Radialabstand in Rationale Kräfte	G-modifiziertes Helmholtz Gleichung, sphärisch Harmonische, Radialabstand in Irrationale Mächte
Störpotential T	Ja, indirekte Bestimmung	Ja, indirekte Bestimmung
Schwerepotential Ve des Ellipsoids	Ja, direkte Bestimmung *	NEIN
Gravitationspotential VE der Erde	Ja, indirekte Bestimmung	NEIN
Schwerkraftstörung ÿg	Ja, indirekte Bestimmung	Ja, direkte Bestimmung
Schwereanomalie ÿg	Ja, indirekte Bestimmung	Ja, direkte Bestimmung
Erdbeschleunigung g	NEIN	Ja, direkte Bestimmung
Schwereintensität des Ellipsoids ÿ	NEIN	Ja, direkte Bestimmung
Vertikaler Gradient von g	NEIN	Ja, indirekte Bestimmung
Vertikaler Gradient von ÿ	NEIN	Ja, indirekte Bestimmung
Komponente ÿ	Ja, indirekte Bestimmung	Ja, indirekte Bestimmung
Komponente ÿ	Ja, indirekte Bestimmung	Ja, indirekte Bestimmung
Geoid-Undulation SUBST	Ja, indirekte Bestimmung	Ja, indirekte Bestimmung

*** Für Einzelheiten verweisen wir auf [22].**

6. Zusammenfassung der Ergebnisse

In diesem Abschnitt tabellieren wir die neuen Ergebnisse, die in Abschnitt 3 vorgestellt wurden.

Tabelle 2 stellt die Signifikanz der G-modifizierten Helmholtz-Gleichung dar, die ermöglicht es uns, Gravitationsgrößen unabhängig vom Gravitationspotential zu untersuchen und auszudrücken sie als eine neue Art von Reihe von Kugelflächenfunktionen. Wir haben uns entschieden, die bedeutendsten Formeln im Detail, die sich auf die Schwerkraft g, die Schwerkraftstörung ÿg und die Schwerkraftanomalie ÿg, Störpotential T, Geoidwelligkeit N, vertikaler Gravitationsgradient und Normal

Machine Translated by Google

Schwerkraft auf dem Geoid (fett markiert). Darüber hinaus sind in Tabelle 2 auch die Komponenten der Lotabweichung aufgeführt.

Tabelle 2. Aus der G-modifizierten Helmholtz-Gleichung sind neue Kugelflächenfunktionen-Ausdrücke entstanden.

Menge	Ausdruck
Schwerkraft g	$g(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \left(\frac{R}{R}\right) \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} g [A_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}]$
Schwerkraftstörung ÿg	$\ddot{y}g(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \left(\frac{R}{R}\right) \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \ddot{y}g\ \ddot{y}g [A_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}]$
Schwereanomalie ÿg	$\ddot{y}g(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \left(\frac{R}{R}\right) \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \ddot{y}g\ \ddot{y}g [A_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}]$
Störpotential T im dreidimensionalen Raum	$T(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y}^{+\ddot{y}}_{n=0} \frac{2R}{\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}\ddot{y}1} \left(\frac{R}{R}\right)^{\frac{\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}\ddot{y}1}{2}} \{ \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \ddot{y}g\ \ddot{y}g [A_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}] + \sum_{n=0}^{+\ddot{y}+} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \left(\frac{R}{2}\right) \frac{\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}\ddot{y}5\ \ddot{y}g}{\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}\ddot{y}1} A_{nm} \ddot{y} EIN^{\ddot{y}g}_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + + \frac{\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}\ddot{y}5\ \ddot{y}g}{\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}\ddot{y}1\ \ddot{y}g\ \ddot{y}g} B_{nm} \ddot{y} B^{\ddot{y}g}_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}$
Störpotential auf dem Geoid	$T(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \frac{R}{2} [A_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}] \ddot{y}\ \ddot{y}g\ \ddot{y}[Ein^{\ddot{y}g}_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}] = \frac{R}{2} [\ddot{y}g(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})\ \ddot{y}\ \ddot{y}g(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})] , r = R$
Geoid-Undulation SUBST	$N(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = [\ddot{y}g(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})\ \ddot{y}\ \ddot{y}g(\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y})] \frac{R}{2} 2\ddot{y}\text{ellispoid}\ \mathbf{(\ddot{y}\ddot{y},\ddot{y})}\ \ddot{y}\text{ellepsoid}\ \mathbf{(\ddot{y}\ddot{y},\ddot{y})\ddot{y}\ddot{y}geoid}$ **oder** $N(r, \ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}) = \frac{R}{2} \frac{\mathbf{(r,\ddot{y}\ddot{y},\ddot{y})}\ \ddot{y}\text{ellepsoid}\ \mathbf{(\ddot{y}\ddot{y},\ddot{y})}}{}$
Vertikaler Gravitationsgradient	$\frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}r} = \sum_{n=0}^{+\ddot{y}} \sum_{m=0}^{N} \ddot{y} \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2r} \left(\frac{R}{R}\right)^{\frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}} [A^{G}_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \cos m\ddot{y} + B^{G}_{nm} Pnm(\sin \ddot{y}\ddot{y}) \sin m\ddot{y}] , \quad r > R$
Komponente ÿ	$\ddot{y} = \ddot{y}\, r\ddot{y}(r,\ddot{y}\ddot{y},\ddot{y})\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y} \frac{\mathbf{1}\ \ddot{y}T\ \ddot{y}(r, \mathbf{\ddot{y}\ddot{y},}}{}$
Komponente ÿ	$= \ddot{y}\, r\ddot{y}(r,\ddot{y}\ddot{y},\ddot{y})\ \mathbf{sin}\ \ddot{y}\ddot{y}\ \ddot{y}\ddot{y} \frac{\mathbf{1}\ \ddot{y}T\ \ddot{y}(r, \mathbf{\ddot{y}\ddot{y},}\ \ddot{y})}{}$
Normale Schwerkraft auf dem Geoid	$\ddot{y}geoid(r, \mathbf{\ddot{y}\ddot{y},}\ \ddot{y}) = \sum_{n=0}^{\mathbf{Nr.}} \ddot{y}\ a2nr \frac{1+\ddot{y}\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \cdot \cdot P2n(\sin \mathbf{\ddot{y}\ddot{y})} + e^{\mathbf{2}} \mathbf{(2n} + 1) \mathbf{sin}\ \ddot{y}\ddot{y}[P2n(\sin \mathbf{\ddot{y}\ddot{y})\ \ddot{y}\ddot{y}\ \ddot{y}\ P2n+1(\sin}\ \ddot{y}\ddot{y})]$

Neben der Laplace-Gleichung kann man auch die G-modifizierte Helmholtz-Gleichung als grundlegende partielle Differentialgleichung der physikalischen Geodäsie klassifiziert.

7. Schlussfolgerungen

In dieser Arbeit haben wir neue alternative Formeln für verschiedene Größen im Zusammenhang mit dem Schwerefeld der Erde vorgestellt.

Die G-modifizierte Helmholtz-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung, mit der wir die Intensität der Schwerkraft als Reihe von Kugelflächenfunktionen berechnen können. Die Intensität der Schwerkraft spielt in vielen Anwendungen eine entscheidende Rolle. Die harmonische Reihe der Schwerkraftintensität ist eine Reihe, in der die Potenzen der radialen Entfernung irrationale Zahlen sind. Diese Reihe ermöglicht es uns, den vertikalen Gradienten der Schwerkraft als Reihe von Kugel Der vertikale Gradient der Schwerkraft ist für zahlreiche geophysikalische Anwendungen von großer Bedeutung.

Schwerkraftstörungen und Schwerkraftanomalien sind sehr bedeutsam. Sie werden als eine Reihe von Kugelflächenfunktionen ausgedrückt, wie sie durch die Laplace-Gleichung oder die G-modifizierte Helmholtz-Gleichung gegeben sind. Im ersten Szenario ist ihre Bestimmung nicht einfach, da w

Machine Translated by Google

müssen entweder ein Neumann-Randwertproblem (Hotine-Problem) oder ein Robin-Randwertproblem (Stokes-Problem) lösen. Im zweiten Fall erfolgen ihre Bestimmungen als Lösungen von Dirichlet-Randwertproblemen , die einfacher sind als die beiden vorherigen Fälle.

Die G-modifizierte Helmholtz-Gleichung bietet einen weiteren Vorteil: Sie ermöglicht es uns, das Störpotenzial der Erde mithilfe einer einfachen partiellen Differentialgleichung zu berechnen. Die Lösung dieser Gleichung erfordert lediglich die Integration der harmonischen Reihe der Schwerkraftanomalie in Bezug auf den radialen Abstand r. Darüber hinaus kann die G-modifizierte Helmholtz-Gleichung auch verwendet werden, um die Komponenten ÿ und ÿ der Ablenkung der Vertikalen und der Geoidwellung zu ermitteln .

Darüber hinaus nehmen das Störpotential und die Geoidwellung auf der Oberfläche des Geoids die elegante Form einer Reihe von Kugelflächenfunktionen an, was die Abhängigkeit von der Differenz zwischen Schwerkraftstörung und Schwerkraftanomalie auf dieser Oberfläche zeigt. Ein interessantes theoretisches Ergebnis ist, dass sowohl das Störpotential als auch die Geoidwellung bestimmt werden können, wenn der Wert der Normalgravitation auf der Oberfläche des Ge

Alle neuen Formeln, die sich aus der G-modifizierten Helmholtz-Gleichung ergeben, sind in Abschnitt 6 tabellarisch aufgeführt.

Die harmonische Reihe der Gravitationsintensität verschafft uns einen erheblichen Vorteil bei der Untersuchung der isogravitativen Oberflächen der Erde. Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung des Gravitationspotentials der Erde lassen sich bequem in kartesischen Syst

Dies vereinfacht die Ausdrücke der partiellen Ableitungen und die erforderlichen Näherungen. Es wird gezeigt, dass isogravitationale Oberflächen geschlossene Oberflächen mit einer nicht-negativen Gaußschen Krümmung sind.

In sehr großen Höhen, wenn der Wert des radialen Abstands „r“ groß ist, sind isogravitative Oberflächen Kugeln mit einem Radius, der dem gewählten radialen Abstand entspricht. Je näher wir der Erde kommen, desto komplexer wird ihr Aussehen. Jede isogravitative Oberfläche in Erdnähe hat mindestens einen Satz von Punkten, die als singulärer Ring definiert sind. Dieser Name ist der Tatsache zuzuschreiben, dass alle Punkte, die zu diesem Satz gehören, singuläre Punkte sind. Die Familie der singulären Ringe konvergiert zu einem einzigen Punkt, der auf der mittleren

Zukünftige Arbeiten könnten die Entwicklung neuer globaler Schwerkraftmodelle für die Schwerkraftintensität g, die Schwerkraftstörung ÿg und die Schwerkraftanomalie ÿg umfassen. Ein globales Schwerkraftmodell für die Schwerkraftintensität wäre ein bedeutender Fortschritt mit einem breiten Anwendungsspektrum, beispielsweise in den Bereichen Geophysik, Archäologie, Geodäsie, Bahnbestimmung und Trägheitsnavigation. Darüber hinaus wäre es vorteilhaft, neue globale Schwerkraftmodelle für die Schwerkraftanomalie und die Schwerkraftstörung zu entwickeln, die von globalen Geopotentialmodellen getrennt sind . Diese Entwicklung könnte uns Gelegenheiten bieten, aktuelle Techniken zur Manipulation von Schwerkraftdaten zu verbessern, was zu einem tieferen Verständnis des Schwerefelds der Erde führen könnte .

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Stellungnahme des Ethikausschusses: Für die Studie war keine ethische Genehmigung erforderlich.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: Es wurden keine Daten verwendet.

Interessenkonflikte: Der Autor erklärt, dass keine Interessenkonflikte vorliegen.

Verweise

1. **Jarosz, W.; Carr, NA; Jensen, HW Importance Sampling Spherical Harmonics.** Comput. Graph. Forum **2009,** 28, **577–586. Online verfügbar: http://graphics.ucsd.edu/~henrik/papers/importance_sampling_spherical_harmonics.pdf (abgerufen am 2. Februar 2024). [CrossRef]**

2. **Silvennoinen, A.; Sloan, PP Moving Basis Decomposition for Precomputed Light Transport.** Comput. Graph. Forum **2021,** 40, **127–137. Online verfügbar: https://www.ppsloan.org/publications/mbd.pdf (abgerufen am 2. Februar 2024). [CrossRef]**

3. **Wang, J.; Xu, K.; Zhou, K.; Lin, S.; Hu, S.; Guo, B. Spherical Harmonics Scaling.** Vis. Comput. **2006,** 22, **713–720. Online verfügbar: https://link.springer.com/article/10.1007/s00371-006-0057-8 (abgerufen am 2. Februar 2024). [CrossRef]**

Machine Translated by Google

4. **Annen, T.; Kautz, J.; Durand, F.; Seidel, HP Spherical Harmonic Gradients for Mid-Range Illumination. In Proceedings of the 15th Eurographics Workshop in Rendering Techniques, Norrköping, Schweden, 21.–24. Juni 2004; S. 331–336. Online verfügbar: https://diglib.eg.org/bitstream/handle/10.2312/EGWR.EGSR04.331-336/331-336.pdf?sequence=1&isAllowed=y (abgerufen am 2. Februar 2024).**

5. **Sanso, F.; Sideris, M.** Geoid Determination Theory and Methods; **Springer Science & Business Media: Berlin, Deutschland, 2013; Kapitel 6; Band 262, S. 131. Online verfügbar: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-74700-0 (abgerufen am 2. Februar 20**
6. **Shouny, A.; Khalil, R.; Kamel, A.; Miky, Y. Bewertungen aktueller globaler Geopotentialmodelle basierend auf GPS-Nivellierungs- und Schwerkraftdaten entlang der Küstenzonen Ägyptens.** Open Gosciences **2023,** 15, **20220450. Online verfügbar: https://www.degruyter.com/document/ doi/10.1515/geo-2022-0450/html (abgerufen am 2. Februar 2024). [CrossRef]**
7. **Wu, Y.; He, X.; Luo, Z.; Shi, H. Eine Bewertung kürzlich veröffentlichter globaler Geopotentialmodelle mit hohem Grad basierend auf heterogenen geodätischen und ozeanischen Daten.** Front. Earth Sci. **2021, 9, 749611. Online verfügbar: https://www.frontiersin.org/ Artikel/10.3389/feart.2021.749611/vollständig (abgerufen am 2. Februar 2024). [CrossRef]**
8. **Isik, MS; Çevikalp, MR; Erol, B.; Erol, S. Verbesserung GOCE-basierter Geopotentialmodelle für die gravimetrische Geoidmodellierung in der Türkei.** Geosciences **2022,** 12, **432. Online verfügbar: https://www.mdpi.com/2076-3263/12/12/432 (abgerufen am 2. Februar 2024). [CrossRef]**
9. **Elizondo, NA; Lopez, RVG; Carillo, XGT; Becerra, GEV Kombination globaler Geopotentialmodelle, digitaler Höhenmodelle und GNSS/Nivellierung zur präzisen lokalen Geoidbestimmung in einigen städtischen Gebieten Mexikos: Fallstudie.** ISPRS Int. J. Geo-Inf. **2021,** 10, **819. Online verfügbar: https://www.mdpi.com/2220-9964/10/12/819 (abgerufen am 2. Februar 2024). [CrossRef]**
10. **Roithmayr, CM** Beiträge von Kugelflächenfunktionen zu magnetischen und Gravitationsfeldern; **NASA TM-2004-213007; National Aeronautics and Space Administration: Washington, DC, USA, 2004. Online verfügbar: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20040047194/downloads/20040047194.pdf (abgerufen am 2. Februar 2024).**
11. **Campbell, WH** Geomagnetism Applications; **US Geological Survey Sircular 1109; United States Government Printing Office: Washington, DC, USA, 1995. Online verfügbar: https://pubs.usgs.gov/circ/1995/1109/report.pdf (abgerufen am 2. Februar 2024).**
12. **Prada, KO; Antelo, MJ; Murillo, NA; Cózar, JR; Contreras–de–Villar, F.; Pérez, JJM Eine neue Methode zur Erfassung mariner geomagnetischer Informationen: Anwendung von Untersuchungen in der kolumbianischen Karibik.** J. Mar. Sci. Eng. **2021, 9, 10. Online verfügbar: https://www.mdpi.com/2077-1312/9/1/10 (abgerufen am 2. Februar 2024). [CrossRef]**
13. **Zigan, L. Overview of Electric Field Applications in Energy and Process Engineering.** Energies **2018,** 11, **1361. Online verfügbar: https://www.mdpi.com/1996-1073/11/6/1361 (abgerufen am 15. Februar 2024). [CrossRef]**
14. **Tognolatti, L.; Ponti, C.; Santarsiero, M.; Schettini, G. Eine effiziente Rechentechnik für die elektromagnetische Streuung durch prolate Sphäroide.** Mathematics **2022,** 10, **1761. Online verfügbar: https://www.mdpi.com/2227-7390/10/10/1761 (abgerufen am 15. Februar 2024). [CrossRef]**
15. **Vafeas, P.; Perrusson, G.; Lesselier, D. Niederfrequenzstreuung von perfekt leitenden kugelförmigen Körpern in einem leitenden Medium mit magnetischer Dipolanregung.** Int. J. Eng. Sci. **2009,** 47, **372–390. Online verfügbar: https: //www.researchgate.net/publication/222923079_Low Frequency_scattering_fro_perfectly_conducting_spheroidal_bodies_in_ein_leitendes_Medium_mit_magnetischer_Dipol-Anregung (abgerufen am 15. Februar 2024). [CrossRef]**
16. **Perrusson, G.; Vafeas, P.; Chatjigeorgiou, IK; Lesselier, D. Niedrigfrequente Vor-Ort-Identifizierung eines hochleitfähigen Körpers, der in der Erde vergraben ist, anhand eines Modellellipsoids.** IMA J. Appl. Math. **2015,** 80, **963–980. Online verfügbar: https://www.researchgate.net/publication/274162167_Low-frequency_onsite_identification_of_a_highly_conductive_body_ in der Erde vergraben, aus einem Modellellipsoid (abgerufen am 15. Februar 2024). [CrossRef]**
17. **Ming, Y.; Niu, X.; Xie, X.; Han, Z.; Li, Q.; Sun, S. Anwendung der Schwerkrafterkundung bei der Erkennung aktiver Verwerfungen in städtischen Gebieten. In der 9. Internationalen Konferenz für Umwelt- und Ingenieurgeophysik 2021, Proceedings der IOP-Konferenzreihe: Erd- und Umweltwissenschaften, Changchun, China, 11.–14. Oktober 2020; IOP Publishing: Bristol, Großbritannien, 2021; B Online verfügbar: https://www.researchgate.net/publication/349532168_Application_of_gravity_exploration_in_urban_active_Fehlererkennung (abgerufen am 21. Februar 2024).**
18. **Sjöberg, LE; Bagherbagdi, M. Gravity Inversion and Integration. In** Theorie und Anwendungen in Geodäsie und Geophysik; **Springer: Basel, Schweiz, 2017; S. 251. Online verfügbar: https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-gravity-inversion-and- integration.pdf (abgerufen am 21. Februar 2024).**
19. **Scheinert, M.; Ferranccioli, F.; Schwabe, J.; Studinger, M.; Damaske, D.; Jokat, W.; Aleshkova, N.; Jordan, T.; Leitchenkov, G.; Blankenship, DD; et al. Neues antarktisches Schwerkraftgnomaliengitter für verbesserte geodätische und geophysikalische Studien in der Antarktis.** Geophys. Res. Lett. **2016,** 43, **600–610. Online verfügbar: https://www.researchgate.net/publication/289983658_New_ Antarktisches Schwerkraftanomaliengitter für verbesserte geodätische und geophysikalische Studien in der Antarktis (abgerufen am 21. Februar 2024). [CrossRef] [PubMed]**
20. **Ismail, N.; Yanis, M.; Abdullah, F.; Irfansyam, A.; Atmojo, BSW Kartierung vergrabener antiker Strukturen mithilfe der Schwerkraftmethode: Eine Fallstudie aus Cot Sidi Abdullah North Aceh.** J. Phys. **2018,** 1120, **012035. Online verfügbar: https://iopscience.iop.org/article/10.1 088/1742-6596/1120/1/012035/pdf (abgerufen am 21. Februar 2024). [CrossRef]**
21. **Manoussakis, G. Die Schwerkraft, die von einem nicht rotierenden ebenen Rotationsellipsoid mit geringer Exzentrizität als Reihe von Kugelflächenfunktionen erzeugt wird.** Mathematics **2023,** 11, **1974. Online verfügbar: https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_ Ausgaben/Anwendungen_Partielle_Differentialgleichungen_Mathematische_Physik (abgerufen am 21. Februar 20**

Machine Translated by Google

22. Heiskanen, W.; Moritz, H. Physical Geodesy. WH Freeman Co. **1967, 82–112. Online verfügbar: https://archive.org/details/heiskanen_morits_1967_physical_geodesy/seite/n89/modus/2up?view=theater (abgerufen am 3. März 2024).**

23. Bagherbandi, M.; Jouybari, A.; Niflourousan, F.; Ägren, J. Ablenkung des vertikalen Effekts auf die direkte Georeferenzierung in mobilen Luftkartierungssystemen: Eine Fallstudie in Schweden. Photogramm. Rec. **2022,** 37, **285–305. Online verfügbar: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1684428/FULLTEXT01.pdf (abgerufen am 3. März 2024). [CrossRef]**

24. Barzaghi, R.; Carrion, D.; Pepe, M.; Prezioso, G. Berechnung der Vertikalabweichung zur Verbesserung von Luftbildaufnahmen: Ein Vergleich zwischen den Schätzungen von EGM2008 und ITALGEO05. Sensors **2016,** 16, **1168. Online verfügbar: https://www.ncbi.nlm.nih. gov/pmc/articles/PMC5017334/pdf/sensors-16-01168.pdf (abgerufen am 3. März 2024). [CrossRef] [PubMed]**

25. Šprlák, M.; Novak, P. Integralformeln zur Berechnung eines Gravitationstensors dritter Ordnung aus volumetrischer Massendichte, störendem Gravitationspotential, Gravitationsanomalie und Gravitationsstörung. J. Geod. **2015,** 89, **141–157. Online verfügbar: https://www.researchgate.net/publication/271211475_Integral_formulas_for_computing_a_thirdorder_gravitational_ Tensor aus volumetrischer Massendichte, der das Gravitationspotential, die Schwerkraftanomalie und die Schwerkraftstörung stört (abgerufen am 5. März 2024). [CrossRef]**

26. Gorshkov, GP Isogravitational surfaces. Geophys. Abstr. **1934,** 82. **Online verfügbar: https://books.google.gr/books?id=1RxUCPOWOtEC&pg=PA1738&lpg=PA1738&dq=isogravitational+surfaces+of+the+Earth&source=bl&ots=9VnOhvB6Cs&sig=ACfU3U2hlSJxufGjWTktf6yfl13mwKuylA&hl=el&sa=X&ved=2ahUKEwjx8pD85tqEAxVh9LsIHbuUA_E4ChDoAXoECAY-QAw#v=onepage&q=isogravitational%20surfaces%20of%20the%20Earth&f=false (abgerufen am 5. März 2024). [CrossRef]**

27. Koop, R. Global Gravity Field Modelling Using Satellite Gravity Gradiometry; **Nederlandse Commissie voor Geodesie: Delft, Niederlande, 1993; Band 38, S. 32–183. Online verfügbar: https://ncgeo.nl/index.php/en/publicatiesgb/publications-on- geodesy/item/2544-pog-38-r-koop-global-gravity-modelling-using-satellite-gravity-gradiometry (abgerufen am 5. März 2024).**

28. Giblin, P. Differentialgeometrie von Kurven und Flächen; **Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool: Liverpool, UK, 1999; S. 32–39. Online verfügbar: https://www.liverpool.ac.uk/~pjgiblin/papers/diff-geom-book.pdf (abgerufen am 5. März 2024).**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Dreikörper-3D-Kepler-Elektromagnetisches Problem – Existenz von Periodische Lösungen

Wassil Georgiev Angelov

Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität für Bergbau und Geologie, „St. I. Rilski“, 1700 Sofia, Bulgarien; angelov@mgu.bg

Zusammenfassung: Der Hauptzweck des vorliegenden Artikels besteht darin, die Existenz periodischer Lösungen des Dreikörperproblems in der 3D-Kepler-Formulierung zu beweisen. Wir haben dasselbe Problem in dem Fall gelöst, in dem die drei Teilchen in einem externen Inertialsystem betrachtet werden. Wir beginnen mit den Bewegungsgleichungen der Dreikörper, die eine Teilmenge der Bewegungsgleichungen (die wir zuvor hergeleitet haben) für eine beliebige Anzahl von Körpern sind. Im Minkowski-Raum gibt es 12 Bewegungsgleichungen. Es wird bewiesen, dass drei davon Konsequenzen der anderen neun sind, sodass ihre Zahl neun wird, ebenso wie die unbekannten Flugbahnen. Die Kepler-Formulierung geht davon aus, dass sich ein Teilchen (der Kern) am Koordinatenursprung befindet . Die Bewegung der anderen beiden Teilchen wird durch ein neutrales System in Bezug auf die unbekannten Geschwindigkeiten beschrieben. Die zustandsabhängigen Verzögerungen entstehen als Folge der endlichen Vakuumlichtgeschwindigkeit. Wir erhalten die Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten und teilen sie in zwei Gruppen auf. In der ersten Gruppe sind alle Argumente der unbekannten Funktionen Verzögerungen. Wir nehmen ihre Lösungen als Anfangsfunktionen. Dann müssen die Bewegungsgleichungen für die verbleibenden zwei Teilchen rechts vom Anfangspunkt gelöst werden. Um die Existenz bzw. Eindeutigkeit einer periodischen Lösung zu beweisen, wählen wir einen Raum, der aus periodischen unendlich glatten Funktionen besteht, die einige Zusatzbedingungen erfüllen . Dann verwenden wir einen geeigneten Operator, der auf diese Räume wirkt und dessen Fixpunkte periodische Lösungen sind. Wir wenden den Fixpunktsatz auf die Operatoren an, die auf die Räume periodischer Funktionen wirken. Auf diese Weise zeigen wir die Stabilität des He-Atoms im Rahmen der klassischen Elektrodynamik. In einem früheren A

Stichwörter: klassische Elektrodynamik; Dreikörperproblem; periodische Lösungen; Fixpunktmethode; neutrales System

MSC: 78A35; 34K40; 47H10

check for updates

Zitat: Angelov, VG Dreikörper 3D-Kepler Elektromagnetische Problem – Existenz von Perioden Lösungen. AppliedMath **2024, 4, 612–640. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020034**

Wissenschaftlicher Herausgeber: Claude Chaudet

Erhalten: 25. März 2024

Überarbeitet: 19. April 2024

Akzeptiert: 30. April 2024

Veröffentlicht: 16. Mai 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Das Hauptziel des vorliegenden Artikels ist die Untersuchung des Dreikörperproblems der klassischen Elektrodynamik in der 3D-Kepler-Formulierung. In [1] haben wir dasselbe Dreikörperproblem extern für das Teilcheninertialsystem formuliert und in [2] die Existenz und Eindeutigkeit einer periodischen Lösung bewiesen . Das Dreikörperproblem ist ein Sonderfall der allgemeinen Formulierung des N-Körperproblems (vgl. [3]), bei dem die Existenz und Eindeutigkeit der Fluchttrajektorien von N **geladenen Teilchen bewiesen wurde. Hier fügen wir Strahlungsterme für jedes der drei Teilchen hinzu. Wir verwenden die relativistisch invariante Form des Dirac-Strahlungsterms, der in [4] eingeführt wurde. Wir gehen vom System aus** [1] aus **und formulieren, indem wir zu den Kugelkoordinaten übergehen, das 3D-Kepler-Problem für drei geladene Teilchen. Die erhaltenen Ergebnisse** ermöglichen es uns, qualitative Untersuchungen in Bezug auf He-Atome und He-ähnliche Atome wie Li+ **und andere auszuweiten . Die Methode zur Lösung der Bewegungsgleichungen basiert auf der Auswahl geeigneter Funktionenräume, die aus einer unendlich glatten Periodenfunktion bestehen, die einige zusätzliche Bedingungen erfüllt, und der Einführung von Operatoren, die auf diese Räume einwirken. Ihre Fixpunkte sind periodische Lösungen der Bewegungsgleichungen. Es ist nicht überflüssig**

Machine Translated by Google

Beachten Sie, dass wir bei Verwendung der 3D-Kepler-Formulierung die Kerne an den Ursprung setzen und nach Flugbahnen zweier bewegter Teilchen suchen, die die Kerne umkreisen. Aus mathematischer Sicht ist dies eine formale Operation, aus physikalischer Sicht bedeutet dies jedoch, dass wir vom relativistischen zum quasiklassischen Fall übergehen, da das Kepler-Problem tatsächlich ein klassisches (Newton-)Problem ist. Dies wird auch durch die Art des Strahlungsterms bestätigt, der sich als Lorentz-Form herausstellt.

Dieses Dokument besteht aus sieben Abschnitten, fünf Anhängen und Schlussfolgerungen. Abschnitt 1 ist die Einführung. Abschnitt 2 enthält die 3D-Kepler-Formulierung für die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten. Dies führt zur Aufteilung des Systems in zwei Gruppen. Eine davon besteht aus drei Gleichungen, die unbekannte Funktionen auf dem Anfangsinter Wir nennen sie Anfangsgleichungen. Wir folgen dem Ansatz von RD Driver (vgl. [5]), um die verzögerte Wechselwirkung zwischen Partikeln zu beschreiben, der auf der Idee von W. Pauli [6] und JL Synge [7] basiert. Die zustandsabhängigen Verzögerungen werden erhalten. Tatsächlich ist das erhaltene System in Bezug auf die unbekannten Geschwindigkeiten ein neutraler Typ, und die Verzögerungen hängen von den unbekannten Flugbahnen ab. In Abschnitt 3 leiten wir die grundlegenden Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten ab. Die erhaltenen Gleichungen sind wieder vom neutralen Typ, wobei die Verzögerungen von den unbekannten Flugbahnen abhängen. In Abschnitt 4 führen wir die Funktionsräume ein, die aus unendlich differenzierbaren periodischen Funktio Außerdem werden einige Hilfssätze bewiesen. In Abschnitt 5 führen wir Operatoren ein, deren Fixpunkte periodische Lösungen der Bewegungsgleichungen sind, und beweisen das Haupt Abschnitt 6 enthält das Hauptergebnis, das die Existenz bzw. Eindeutigkeit der periodischen Lösung der Bewegungsgleichungen für das Dreikörperproblem in der 3D-Kepler-Form garantiert. Der Beweis basiert auf einem Fixpunktsatz [8]. Ein Zahlenbeispiel wird gegeben. In Abschnitt 7 werden die Bohr- und Sommerfeld-Hypothesen diskutiert.

Wir erwähnen einige Ergebnisse, bei denen unterschiedliche Ansätze angewendet wurden [9–18].

Wir erinnern an einige Bezeichnungen und Ergebnisse aus [1,2] zum Dreikörperproblem in kartesischen Koordinaten. Wir betrachten das System der 12 Bewegungsgleichungen unter Verwendung von Strahlungstermen für das Dreikörpersystem [1]:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{m1}\ & \frac{d\ddot{y}_R^{(1)}}{ds1} = \frac{e1}{c^2}\Big(F\ddot{y}^{(12)(1)} + F\ddot{y}^{(13)(1)} + (1)\mathrm{rad}_{(1)} + F\ddot{y}\,\mathrm{rl}\,\mathrm{l}\,\mathrm{rl}\,\mathrm{l}\Big), \\
\mathbf{m2}\ & \frac{d\ddot{y}_R^{(2)}}{ds2} = \frac{e2}{c^2}\Big(F\ddot{y}^{(21)(2)} + F\ddot{y}^{(23)(2)} + (2)\mathrm{rad}_{(2)} + F\ddot{y}\,\mathrm{rl}\,\mathrm{l}\,\mathrm{rl}\,\mathrm{l}\,\mathrm{rl}\,\mathrm{l}\Big), \\
\mathbf{m3}\ & \frac{d\ddot{y}_R^{(3)}}{ds3} = \frac{e3}{c^2}\Big(F\ddot{y}^{(31)(3)} + F\ddot{y}^{(32)(3)} + (3)\mathrm{rad}_{(3)} + F\ddot{y}\,\mathrm{rl}\,\mathrm{l}\,\mathrm{rl}\,\mathrm{l}\,\mathrm{rl}\,\mathrm{l}\Big),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

wobei r = **1, 2, 3, 4;** c **die Vakuumlichtgeschwindigkeit;** mk **die Massen; und** ek (k = **1, 2,** 3) **die Ladungen der Teilchen sind .** Man erinnere sich, dass es eine Summation gibt, wenn man l **in der rechten Seiten des obigen Systems. Die Elemente der elektromagnetischen Tensoren** F $F_{rl}^{(kn)} = \frac{\ddot{y}\ddot{y}_l^{(n)}}{\ddot{y}x_R^{(k)}} - \frac{\ddot{y}\ddot{y}_R^{(n)}}{\ddot{y}x_l^{(k)}}$

(n) kann mit den retardierten Lienard–Wiechert-Potentialen **ÿ berechnet werden** $= \ddot{y}\ \text{en}\ \dot{y}_R^{(n)}\ \ddot{y}\ddot{y}\,(n)\,,\dot{y}\,(kn)\,\ddot{y}4\ \textbf{while}$,

Die Strahlungsterme können als die Hälfte der Differenz zwischen den verzögerten und vorgerückten Potentialen berechnet werden, in Übereinstimmung mit der Dirac-Annahme:

$$
F_{mn}^{(k)\mathrm{rad}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{y}A_N^{(k)\mathrm{ret}}}{\ddot{y}x_M^{(k)\mathrm{ret}}} - \frac{\ddot{y}A_M^{(n)\mathrm{ret}}}{\ddot{y}x_N^{(k)\mathrm{ret}}} - \frac{\ddot{y}A_N^{(k)\mathrm{adv}}}{\ddot{y}x_M^{(k)\mathrm{adv}}} + \frac{\ddot{y}A_M^{(n)\mathrm{adv}}}{\ddot{y}x_N^{(k)\mathrm{adv}}}\right),
$$

wobei $A_N^{(k)\mathrm{ret}} = \frac{\text{ekÿ}_N^{(k)\mathrm{ret}}}{\ddot{y}\ddot{y}\,(k)\mathrm{ret}\,,\ddot{y}\,(k)\mathrm{ret}\ddot{y}4\,,}$ $A_N^{(k)\mathrm{adv}} = \frac{\text{ekÿ}_N^{(k)\mathrm{adv}}}{\ddot{y}\ddot{y}\,(k)\mathrm{adv}\,,\ddot{y}}$

Hier x **1** (k) (t), x (k) (k) (k) (t) , x (t), x (t) = ict **2 3 4** (k)advÿ4 . , (k = **1, 2,** 3) **sind Raum-Zeit-Koordinaten von die geladenen Teilchen. Das Skalarprodukt im Minkowski-Raum ist** ÿa, **bÿ4** = $\sum_{n=1}^{4} \text{anbÿ}_n = \text{anbn},$

Machine Translated by Google

während im dreidimensionalen Unterraum ÿa, **bÿ** = aÿbÿÿ= **Die Elemente der** richtigen

Die Zeiten sind dsk (k = **1, 2,** 3) **und die Einheitstangentenvektoren zu den Weltlinien sind**

$$\ddot{y}\,(k) \quad \ddot{y}\,\ddot{y}\,\mathbf{1,2,3,4}^{(k)}(k) = \bar{y}\,\ddot{y} \quad (k) \quad (k) \quad = \quad \frac{u_1(k)(t)}{\ddot{y}k,} \quad \frac{u_2(k)(t)}{\ddot{y}k,} \quad \frac{u_{ik}(k)(t)}{\ddot{y}k,} \quad __ \quad \ddot{y}\,u\,(k) = du\,\mathbf{1}\,(k)\,(\,k\,)\,(t),\,u\,(t),\,u_{\mathbf{2}}(t),\,u_{\mathbf{3}}$$

$$\ddot{y}k = c \quad \frac{\ddot{y}\,u\,(k)}{\mathbf{2}}, \quad \frac{\ddot{y}\,u\,(k)}{}.$$

Wir haben bewiesen, dass drei Gleichungen aus (1) eine Folge der übrigen sind [1].

Die Bewegungsgleichungen betragen nun neun an der Zahl, ebenso wie die unbekannten Funktionen (k) (t), **u2** (k) (t),

u1 u3 (k) (t) , (k = **1, 2,** 3).

Die isotropen Vektoren *ÿ* (km) (k = **1, 2, 3 ;** m ÿ = k) **erhält man auf folgende Weise: Fixiere ein beliebiges Ereignis auf der Weltlinie des k-ten Teilchens und zeichne den Lichtkegel in die Vergangenheit. Dieser Kegel schneidet die Weltlinie des m-ten Teilchens in jedem anderen (vergangenen) Ereig**

$$= \ddot{y}\,,\ddot{y}\,,\ddot{y}\,,\ddot{y}\,{}^{(km)}_{\mathbf{1}}\,{}^{(km)}_{\mathbf{2}}\,{}^{(km)}_{\mathbf{3}}\,{}^{(km)}_{\mathbf{4}}\,\ddot{y}\,(km) \quad = \quad \ddot{y}^{(km)}\ddot{y}\,(km)_{\mathbf{4}},\ddot{y} \quad =$$

$$= x_{\mathbf{1}}(k)(m)(k)(m)(k)(m)(t)\,\ddot{\mathbf{y}}\,x\,(t\,\ddot{\mathbf{y}}\,\ddot{y}km(t)),\,x_{\mathbf{2}}(t)\,\ddot{\mathbf{y}}\,x\,(t\,\ddot{\mathbf{y}}\,\ddot{y}km(t)),\,x_{\mathbf{3}}(t)\,\ddot{\mathbf{y}}\,x\,(t\,\ddot{\mathbf{y}}\,\ddot{y}km(t)),\,{}_{\mathbf{1}}c\ddot{y}km(t)\,.$$

ÿ (km) **sind isotrope Vierervektoren** *ÿ* (km) ,*ÿ* (km) $_{\mathbf{4}}$ **= 0, was bedeutet, dass die verzögerte Funktionen** ÿkm(t) **sollten die folgenden Funktionalgleichungen erfüllen:**

$$\ddot{y}km(t) = \frac{\mathbf{1}}{c}\sqrt{\ddot{y}^{(km)}\ddot{y}\,(km)}\,,\ddot{y} \quad \ddot{y} \quad \frac{\mathbf{1}}{c}\sqrt{\ddot{\mathbf{y}}^{\mathbf{3}}_{\ddot{y}=1}X^{(k)}(m)\,\bar{y}\,(t)\,\ddot{\mathbf{y}}\,x}$$

Die durchschnittliche Zeitkonstante t ist die durchschnittliche **Zeitkonstante** t .

Die obigen Gleichungen sind sechs an der Zahl, da (km) = **(12),(13),(23),(21),(31),(32)**

und u $^{(m)}_{\ddot{y}\,u}$ (m) (t **ÿ** ÿkm(t)), **für** m ÿ= **k,** ÿkm = c $\sqrt{\ddot{y}\,u\,(m)}_{\mathbf{2}}$ (t **ÿ** ÿkm), $\ddot{y}\,u\,(m)$ (t **ÿ** ÿkm) ,

$$\ddot{y}\,(m) \quad = \ddot{y}\,\mathbf{1}^{(m)}\,{}_{,\mathbf{4}}{}^{(m)}(m)(m)\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\mathbf{2,3}, \quad = \quad \frac{du_1^{(m)}(t\,\ddot{\mathbf{y}}\,\ddot{y}km)\,\ddot{y}km}{}, \frac{du_2^{(m)}(t\,\ddot{\mathbf{y}}\,\ddot{y}km)\,\ddot{y}km}{}, \frac{Du\,\mathbf{3}^{(m)}(t\,\ddot{\mathbf{y}}\,\ddot{y}km)\,\ddot{y}km}{}, \frac{ic}{\ddot{y}km} \quad = \quad \ddot{\mathbf{y}}\,\frac{\ddot{y}\,u\,(m)}{\ddot{\mathbf{y}}}(t\,\ddot{\mathbf{y}}\,\ddot{y}km)\,\ddot{y}km, \frac{ic}{\ddot{y}km}\,\ddot{\mathbf{y}}\,\ddot{\mathbf{y}}.$$

2. Trennung der Bewegungsgleichungen und Herleitung der Ausgangsgleichungen

Die Annahme (C): $\sqrt{\ddot{y}\,u\,(k)}$ = $\sqrt{\ddot{y}\,u\,k)}$ $\ddot{y}\,u$ (k) (t) **ÿ** c **<** c̄ (k = **1, 2, 3;** c = konst.̄)

impliziert $^{\mathbf{2}}\sqrt{\ddot{y}\,u\,(k)}$, $\ddot{y}\,u\,(k)$ **ÿ** c **2 2** ÿ c̄ **> 0. Diese Bedingung erlaubt es uns, aus (1) eine**

ein c- **System, das drei Gleichungsgruppen enthält (vgl. [1]):**

$$\begin{array}{llll}
\cdot\,(1)_{du\,1} = \frac{2\ddot{y}\,c\,{}^{(1)}_{du\,1}}{c^2}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{1\,1} + G & + G\,\mathbf{1} & \frac{{}^{(1)}_{du\,1}\,{}^{(1)}_{du}}{z\,\ddot{c}^2}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{2\,2\,2} + G & + G \quad \frac{{}^{(1)}_{du\,1}\,u_{\mathbf{3}}{}^{(1)}}{c^2}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{3\,3\,3} + G \quad + G \quad \ddot{y}\,U1_{\,1} \\
\cdot\,(1)_{du\,2} = \frac{{}^{(1)}_{du\,1}\,{}^{(1)}_{du}}{C^{2\,2}}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{1\,1} + G & + G\,\mathbf{1} & \frac{c\,2\ddot{y}(u+\mathbf{2})^{(1)}}{c^2}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{2} + G_{\mathbf{2}} & + G\,\mathbf{2}_{\mathbf{2}} \quad \frac{{}^{(1)}_{du\,2}\,{}^{(1)}_{du}}{C^{3\,2}}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{3\,3\,3} + G \quad + G \quad \ddot{y}\,U1_{\,2} \\
\cdot\,(1)_{Du\,3} = \frac{{}^{(1)}_{du\,1}\,u_{\mathbf{3}}{}^{(1)}}{c^2}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{1\,1} + G & + G\,\mathbf{1} & \frac{{}^{(1)}_{du\,2}\,u_{\mathbf{3}}{}^{(1)}}{c^2}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{2\,2\,2} + G & + G \quad \frac{c\,2\ddot{y}(u\,{}^{(1)}_{\mathbf{3}})}{c^2}\,G^{(12)(13)(1)rad}_{3\,3\,3} + G \quad + G \quad \ddot{y}\,U1_{\,3},
\end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{llll}
\cdot\,(2)_{du\,1} = \frac{2\ddot{y}\,c\,{}^{(2)}_{u\,1}}{c^2}\,G^{(21)(23)(2)rad}_{1\,1} + G & + G\,\mathbf{1}_{1} & \frac{{}^{(2)}_{du\,1}\,{}^{(2)}_{du}}{z\,\ddot{c}^2}\,G^{(21)(23)(2)rad}_{2\,2\,2} + G & + G \quad \frac{{}^{(2)}_{du\,1}\,u_{\mathbf{3}}{}^{(2)}}{c^2}\,G^{(21)(23)(2)rad}_{3\,3\,3} + G \quad + G \quad \ddot{y}\,U2\,1 \\
\cdot\,(2)_{du\,2} = \frac{{}^{(2)}_{du\,1}\,{}^{(2)}_{du}}{z\,\ddot{c}^2}\,G^{(21)(23)(2)rad}_{1\,1} + G & + G\,\mathbf{1} & \frac{{}^{(2)}c\,2\ddot{y}(u\,{}^{2}_{\mathbf{1}}+}{c^2}\,G^{(21)(23)(2)rad}_{2\,2\,2} + G & + G \quad \frac{{}^{(2)}_{du\,2}\,u_{\mathbf{3}}{}^{(2)}}{c^2}\,G^{(21)(23)(2)rad}_{3\,3\,3} + G \quad + G \quad \ddot{y}\,U2_{\,2} \\
\cdot\,(2)_{Du\,3} = \frac{{}^{(2)}_{du\,1}\,u_{\mathbf{3}}{}^{(2)}}{c^2}\,G^{(21)(23)}_{1\,1} + G & + G\,\mathbf{1}^{(2)rad} & \frac{{}^{(2)}_{du\,2}\,u_{\mathbf{3}}{}^{(2)}}{c^2}\,G^{(21)(23)(2)rad}_{2\,2\,2} + G & + G \quad \frac{c\,2\ddot{y}(u\,{}^{(2)}_{\mathbf{3}})}{c^2}\,G^{(21)(23)(2)rad}_{3\,3\,3} + G \quad + G \quad \ddot{y}\,U2_{\,3},
\end{array} \tag{3}$$

Machine Translated by Google

$$\dot{du}_1^{(3)} = \frac{2\ddot{y}\,c\,du_1^{(3)2}}{c^2} G_{11}^{(31)(32)}(3)\mathrm{rad} + G\,\mathbf{1} \quad \frac{du_1^{(3)}du_2^{(3)}}{c^{22}} G^{(31)(32)}G_{\mathbf{2}} + G\,\mathbf{2}^{(3)\mathrm{rad}\,\mathbf{2}} \quad \frac{du_1^{(3)}du_3^{(3)}}{c^{32}} G_{333}^{(31)(32)}(3)\mathrm{rad} + G \quad \ddot{y}\,U3_1$$

$$\dot{du}_2^{(3)} = \frac{du_1^{(3)}du_2^{(3)}}{z_2^2} G_{11}^{(31)(32)}(3)\mathrm{rad} + G\,\mathbf{1} \quad \frac{c\,2\dot{y}(u)_2^{(3)2}}{c^2} G_{222}^{(31)(32)}(3)\mathrm{rad} + G \quad \frac{du_2^{(3)}u_3^{(3)}}{c^2} G_{333}^{(31)(32)}(3)\mathrm{rad} + G \quad \ddot{y}\,U3_2 \qquad (4)$$

$$\dot{Du}_3^{(3)} = \frac{du_1^{(3)}u_3^{(3)}}{c^2} G_{11}^{(31)(32)}(3)\mathrm{rad} + G\,\mathbf{1} \quad \frac{Sie_2^{(3)}Sie_3^{(3)}}{c^2} G_{222}^{(31)(32)}(3)\mathrm{rad} + G \quad \frac{c\,2\dot{y}(u)_3^{(3)2}}{c^2} G_{333}^{(31)(32)}(3)\mathrm{rad} + G \quad \ddot{y}\,U3_3,\ t\,\ddot{y}\,\mathbf{0},$$

Wo

$$G_{\ddot{y}}^{(12)} = \frac{m1}{3c}\frac{\ddot{y}1}{\ddot{y}\ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{2\ddot{y}\,c\,\ddot{y}_u(1),\ddot{y}_u(2)} \frac{(12)}{\ddot{y}\,c\,2\ddot{y}12\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(12),\ddot{y}_u(1)}{\ddot{y}^{(2)u}} \frac{\ddot{y}\,4\,12+D12\,\ddot{y}_{12}^2}{\ddot{y}\,2_{12}} \frac{\ddot{y}_u(12),\dot{u}_u(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(12),\ddot{y}_u(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}12\,u \frac{(2),\dot{u}^{(2)}}{\ddot{y}\,\ddot{y}}$$

$$\frac{12^2\,\dot{}^{(2)(2)}\ddot{y}+uu}{\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(2),\dot{\ddot{y}}_u(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(12),\ddot{y}_u(1)}{c\,2\ddot{y}12\ddot{y}\,\ddot{y}} + \ddot{y}\,12^2 \frac{\ddot{y}_u(1),\dot{\ddot{y}}_u(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(1),\ddot{y}_u(2)}{2\,\ddot{y}c\,\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(2),\dot{\ddot{y}}_u(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\,\ddot{y}(12)}$$

$$\frac{\ddot{y}_u(12),\ddot{y}_u(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}122 \quad \ddot{y}\,2_{12} \quad \ddot{y}\ddot{y};$$

$$G_{\ddot{y}}^{(13)} = \frac{e1e3}{m1}\frac{\ddot{y}1}{3c}\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\ddot{y}} \frac{2\ddot{y}\,c\,\ddot{y}_u(1),\ddot{y}_u(3)}{\ddot{y}\,c\,2\ddot{y}13\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{(13)}{\ddot{y}^{(3)u}} \frac{\ddot{y}\,4\,13+D13\,\ddot{y}_{13}^2}{\ddot{y}\,2_{13}} \frac{\ddot{y}_u(13),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(13),\ddot{y}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}13 \frac{\ddot{y}_u(3),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}$$

$$\frac{2\,\dot{}^{(3)(3)\ddot{y}u+u13\ddot{y}\ddot{y}}}{\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(3),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(13),\ddot{y}_u(1)}{c\,2\ddot{y}13\ddot{y}\,\ddot{y}} + \ddot{y}\,13^2 \frac{\ddot{y}_u(1),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(1),\ddot{y}_u(3)}{2\,\ddot{y}c\,\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(3),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\,\ddot{y}(13)}$$

$$\frac{\ddot{y}_u(13),\ddot{y}_{Sie}(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}132 \quad \ddot{y}\,2_{13} \quad \ddot{y}\ddot{y};$$

$$G_{\ddot{y}}^{(21)} = \frac{m2}{3c}\frac{\ddot{y}2}{\ddot{y}\ddot{y}} \frac{2\ddot{y}\,c\,\ddot{y}_u(2),\ddot{y}_u(1)}{\ddot{y}\,c\,2\ddot{y}21\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{(21)}{\ddot{y}^{(1)}u_{\ddot{y}}} \frac{\ddot{y}\,4\,21+D21\,\ddot{y}_{21}^2}{\ddot{y}\,2_{21}} \frac{\ddot{y}_u(21),\dot{\ddot{y}}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(21),\ddot{y}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}21 \frac{\ddot{y}_u(1),\dot{\ddot{y}}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}$$

$$\frac{2\,\dot{}^{(1)(1)\ddot{y}u+u21\ddot{y}\ddot{y}}}{\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(1),\dot{\ddot{y}}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(21),\ddot{y}_u(1)}{c\,2\ddot{y}21\ddot{y}\,\ddot{y}} + \ddot{y}\,21^2 \frac{\ddot{y}_u(2),\dot{\ddot{y}}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(2),\ddot{y}_u(1)}{2\,\ddot{y}c\,\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(1),\dot{\ddot{y}}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\,\ddot{y}(21)}$$

$$\mathbf{D23}$$

$$\frac{\ddot{y}_u(21),\ddot{y}_{Sie}(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}212 \quad \ddot{y}\,2_{21} \quad \ddot{y}\ddot{y};$$

$$G_{\ddot{y}}^{(23)} = \frac{e2e3}{m2}\frac{\ddot{y}2}{3c}\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\ddot{y}} \frac{2\ddot{y}\,c\,\ddot{y}_u(2),\ddot{y}_u(3)}{\ddot{y}\,c\,2\ddot{y}23\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{(23)}{\ddot{y}^{(3)}u_{\ddot{y}}} \frac{\ddot{y}\,4\,23+D23\,\ddot{y}_{23}^2}{\ddot{y}\,2_{23}} \frac{\ddot{y}_u(23),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(23),\ddot{y}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}23 \frac{\ddot{y}_u(3),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}$$

$$\frac{2\,\dot{}^{(3)(3)\ddot{y}u+u23\ddot{y}\ddot{y}}}{\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(3),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(23),\ddot{y}_u(2)}{c\,2\ddot{y}23\ddot{y}\,\ddot{y}} + \ddot{y}\,23^2 \frac{\ddot{y}_u(2),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(2),\ddot{y}_u(3)}{2\,\ddot{y}c\,\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(3),\dot{\ddot{y}}_u(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\,\ddot{y}(23)}$$

$$\mathbf{D23}$$

$$\frac{\ddot{y}_u(23),\ddot{y}_{Sie}(3)}{\ddot{y}\,\ddot{y}},\ddot{y},c\ \mathbf{2}\,,\ddot{y}232 \quad \ddot{y}\,2_{23} \quad \ddot{y}\ddot{y};$$

$$G_{\ddot{y}}^{(31)} = \frac{e3e1}{m3}\frac{\ddot{y}3}{3c}\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\ddot{y}} \frac{2\ddot{y}\,c\,\ddot{y}_u(3),\ddot{y}_{Sie}(1)}{\ddot{y}\,c\,2\ddot{y}31\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{(31)}{\ddot{y}^{(1)}u_{\ddot{y}}} \frac{\ddot{y}\,4\,31+D31\,\ddot{y}_{31}^2}{\ddot{y}\,2_{31}} \frac{\ddot{y}_u(31),\dot{\ddot{y}}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(31),\ddot{y}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}31 \frac{\ddot{y}_u(1),\dot{\ddot{y}}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}$$

$$\frac{\ddot{y}_{Sie}(31),\ddot{y}_{Sie}(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_u(3),\ddot{y}_{Sie}(1)}{c\,2\ddot{y}31\ddot{y}\,\ddot{y}} + \ddot{y}\,2_{31}\,\dot{}^{(1)(1)+u}_{\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_{Sie}(1),\dot{\ddot{y}}_u(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_u(3),\ddot{y}_{Sie}(1)}{2\,\ddot{y}c\,\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_{Sie}(1),\dot{\ddot{y}}_{Sie}(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\,\ddot{y}(31)}$$

$$\mathbf{D31}$$

$$\frac{\ddot{y}_u(31),\ddot{y}_{Sie}(1)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}312 \quad \ddot{y}\,2_{31} \quad \ddot{y}\ddot{y};$$

$$G_{\ddot{y}}^{(32)} = \frac{e3e2}{m3}\frac{\ddot{y}3}{3c}\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\ddot{y}} \frac{2\ddot{y}\,c\,\ddot{y}_{Sie}(3),\ddot{y}_{Sie}(2)}{\ddot{y}\,c\,2\ddot{y}32\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{(32)}{\ddot{y}^{(2)}u_{\ddot{y}}} \frac{\ddot{y}\,4\,32+D32\,\ddot{y}_{32}^2}{\ddot{y}\,2_{32}} \frac{\ddot{y}_{Sie}(32),\dot{\ddot{y}}_{Sie}(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_{Sie}(32),\ddot{y}_{Sie}(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}32 \frac{\ddot{y}_{Sie}(2),\dot{\ddot{y}}_{Sie}(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}$$

$$\frac{\ddot{y}_{Sie}(32),\ddot{y}_{Sie}(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_{Sie}(3),\ddot{y}_{Sie}(2)}{c\,2\ddot{y}32\ddot{y}\,\ddot{y}} + \ddot{y}\,2_{32}\,\dot{}^{(2)(2)+u}_{\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_{Sie}(2),\dot{\ddot{y}}_{Sie}(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} + \frac{\ddot{y}_{Sie}(3),\ddot{y}_{Sie}(2)}{2\,\ddot{y}c\,\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}_{Sie}(2),\dot{\ddot{y}}_{Sie}(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\,\ddot{y}(32)}$$

$$\mathbf{D32}$$

$$\frac{\ddot{y}_{Sie}(32),\ddot{y}_{Sie}(2)}{\ddot{y}\,\ddot{y}}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}322 \quad \ddot{y}\,2_{32} \quad \ddot{y}\ddot{y};$$

$$G_{\ddot{y}}(k)\mathrm{rad} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}\,mk\,c}\frac{ek}{\mathbf{3}\,\ddot{y}k} \frac{Sie\dot{y}^{(k)}(t)}{\ddot{y}\,u\,k)\ t),\ \ddot{y}\,u\ (k)\ (t) + \frac{\ddot{y}\,u}{Sie\dot{y}^{(k)}(t)\,\ddot{y}k},(k = \mathbf{1}, \mathbf{2}, 3), \qquad (5)$$

Machine Translated by Google

wobei Dkm = $\frac{\sqrt{\ddot{y}_{(km)}\,\ddot{y}_{(km)}} - \ddot{y}_{(km)}\,\ddot{y}_{u\,(M)}}{\sqrt{\ddot{y}_{(km)}\,\ddot{y}_{(km)}} - \ddot{y}_{(km)}\,\ddot{y}_{u\,(k)}}$ **für** m ÿ= **k.**

Gemäß der Kepler-Formulierung befindet sich das erste Teilchen P1 im Ursprung O(0,0,0), und daher

(1) (1) $\ddot{y}$ (t) = **0,** u $\ddot{y}$ (t) = **0,** x Sie **(1)** $\ddot{y}$ (t) = **0** ($\ddot{y}$ = **1, 2,** 3). **(6)**

Dann erhalten wir 0 = $G_1^{(12)\,(13)}$ + G **1** , **0** = $G_2^{(12)\,(13)}$ + G **2** , **0** = $G_3^{(12)\,(13)}$ + G **3** .

Man erkennt leicht, dass die Gleichung 0 = $G_1^{(12)\,(13)}$ + G **1** wird **zu 0 = 0.**

Bemerkung 1. Wir stellen fest, dass in der Gleichung **0** = $G_2^{(12)\,(13)}$ + G **2** , die unbekannten Funktionen und **(12) (13)** haben retardierte Argumente t **ÿ ÿ12,** während in der Gleichung **0** = G + G **3** Argumente t **ÿ ÿ13 sind.** Dies impliziert, dass wir diese Gleichungen ihre Ableitungen , Die auf dem Anfangsintervall [ÿT, 0] betrachten müssen. Deshalb nennen wir die erste Gruppe von drei Gleichungen (2) Anfangsgleichungen. Wir betrachten die zweite und dritte Gruppe von Gleichungen (3) bzw. (4) (sechs an der Zahl) auf dem Intervall [0, ÿ).

Um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen, stellen wir fest, dass für die erste Bohr-Umlaufbahn die Sommerfeld-Feinstrukturkonstante $\ddot{y}$ = **e/c ÿ 1/137 ÿ** $\ddot{y}$ **ÿ 0 ist. Folglich ist** ÿk

$\sqrt{2\,c\;\ddot{y}_{u\,(k)}\,\ddot{y}_{u\,(k)}}$ = c **1 ÿ** $\sqrt{\ddot{y}_{u\,(k)}\,\ddot{y}_{u\,(k)}}$ /c **2 ÿ c,** ÿkm = c $\sqrt{{}^{2}\;\ddot{y}_{u\,(M)}\,\ddot{y}_{u\,(M)}}$ (t **ÿ** ÿkm), (t **ÿ** ÿkm) **ÿ** c **, Und**

$C_{2\,\ddot{y}}\;\frac{\ddot{y}_{u\,(2)}\,\ddot{y}_{u\,(3)}}{2\,c}\;\ddot{y}_{2\,\ddot{y}\,c}$.

ÿ1 ÿ ÿ

Wenn ÿkm **der Abstand zwischen dem k-ten und m-ten Teilchen via** $\ddot{y}$ (km) **ÿ** ÿkm **ÿ 10ÿ11 m** ist **(vgl. [14]), dann erhalten wir**

c **2ÿ23 ÿ** $\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}$, $\ddot{y}_{u\,(2)}$ **ÿ** c **2ÿ23, D23** = c **2ÿ23ÿ** $\frac{c\;2\ddot{y}23\ddot{y}\;\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}},\ddot{y}_{u\,(3)}}{\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}},\ddot{y}_{u\,(2)}}$ **ÿ 1 und**

$H_{23} = \frac{4\,\ddot{y}_{23}+D23\,\ddot{y}^{2}_{23}\;\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}},\ddot{y}_{u\,(3)}\;\ddot{y}\;c\;2\ddot{y}23\ddot{y}\;\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}},\ddot{y}_{u\,(3)}\;\ddot{y}_{u\,(3)},\ddot{y}_{u\,(3)}}{\ddot{y}^{2}_{23}}\;c\;\;2+\ddot{y}\;\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}\,\ddot{y}\,\ddot{y}23_{u}\;\;(3)\;,\ddot{y}_{(3)}\,.\ddot{y}_{u}$.

Wir können die obigen Gleichungen gemäß den letzten Beziehungen vereinfachen:

$$G^{(12)}_{\ddot{y}} = \frac{e1\,e2}{m1}\,\frac{1}{c^{6}}\,\frac{c\;2+\ddot{y}^{(12)}_{\ddot{y}},\ddot{y}_{u\,(2)}\;\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}12_{u}\;\ddot{y}^{(12)}_{\ddot{y}}\;\ddot{y}c\;2\ddot{y}12\;2\,.\,\ddot{y}^{(2)}_{u_{\ddot{y}}}}{\ddot{y}123};$$

$$G^{(13)}_{\ddot{y}} = \frac{e1\,e3}{m1}\,\frac{1}{c^{6}}\,\frac{c\;2+\ddot{y}^{(13)}_{\ddot{y}},\ddot{y}_{u\,(3)}\;(13)\;(3)\;\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}13_{u}\;\ddot{y}^{(3)}_{\ddot{y}}\;\ddot{y}c\;2\ddot{y}13\;2\,.\,\ddot{y}^{(3)}_{u_{\ddot{y}}}}{\ddot{y}133};$$

$$G^{(21)}_{\ddot{y}} = \frac{e2e1}{3\,m2\,c}\,\frac{\ddot{y}2}{(c\;2\ddot{y}21)}\,\frac{2\,c\,\ddot{y}^{(21)}_{\ddot{y}}}{3\,\ddot{y}^{2}_{21}}\,\frac{4\,\ddot{y}\,21}{\ddot{y}}\;\ddot{y}\;\frac{\ddot{y}^{(21)}_{\ddot{y}}}{4\ddot{y}213\;m2}\;(23)\;\ddot{y}\;e2e1\;;G\;c\;\frac{e2e3}{3\,m2c}\;\ddot{y}\;\frac{\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}\;\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}},\ddot{y}_{u\,(3)}}{\ddot{y}233}\;\frac{\ddot{y}^{(3)}_{\ddot{y}}}{3\,c}\;\frac{\ddot{y}}{c\ddot{y}23_{u_{\ddot{y}}}}\;\ddot{y}$$

$\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}$ $\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}$;

$$G^{(31)}_{\ddot{y}} = \frac{e3e1}{m3}\,\frac{\ddot{y}3}{3\,c}\,\frac{2\,c\,\ddot{y}^{(31)}_{\ddot{y}}}{(c\;2\ddot{y}31)}\,\frac{4\,\ddot{y}\,31}{3\,\ddot{y}^{2}_{31}}\;\ddot{y}\;\frac{m3}{e3e1}\,\frac{\ddot{y}^{(31)}_{\ddot{y}}}{c\;4\ddot{y}313}\;;G\;\overset{(32)}{\ddot{y}}\;=\;\frac{e2e3}{3\,m3c}\;\ddot{y}\;\frac{\ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}}\;\ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}},\ddot{y}_{u\,(3)}}{\ddot{y}323}\;\frac{\ddot{y}^{(3)}_{\ddot{y}}}{3\,c}\;\frac{\ddot{y}}{c\ddot{y}32_{u_{\ddot{y}}}}\;\ddot{y}$$

$\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}$ $\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}$;

$$G^{(2)rad}_{\ddot{y}} = \ddot{y}\;\frac{e^{2}}{2\,m2c^{2}}\;\ddot{y}\;\frac{\ddot{y}_{u\,(2)}\;\ddot{y}_{u\,(2)}\;\ddot{y}^{(2)}_{u_{\ddot{y}}}}{3\,c}\;+\;\frac{\ddot{y}^{(2)}_{u_{\ddot{y}}}}{C}\;\ddot{y}\qquad \overset{(3)rad}{\ddot{y}} = \ddot{y}\;\frac{und^{2}}{2\,m3c^{3}}\;\ddot{y}\;\frac{\ddot{y}_{u\,(3)}\;\ddot{y}_{u\,(3)}\;\ddot{y}^{(3)}_{u_{\ddot{y}}}}{3\,c}\;+\;\frac{\ddot{y}^{(3)}_{u_{\ddot{y}}}}{C}\;\ddot{y}$$

$\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}$ $\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}$; G $\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}$ $\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}$.

Machine Translated by Google

Für das ruhende Teilchen gilt G = **0. Daher ist die anfängliche (Vektor-) Gleichung**

tionen, $G_1^{(12)} + G_1^{(13)} = 0$, $G_2^{(12)} + G_2^{(13)} = 0$, $G_3^{(12)} + G_3^{(13)} = 0$, **wird:**

$$\frac{e1}{e2\,m1}\,2c + \frac{\ddot{y}^{(12)}}{\ddot{y}_{,(2).\ddot{y}u}}\,{}^{(12)}_{(2)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}12u\,1}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}12\,2^{d\psi_1^{(2)}} + \frac{e3}{e1\,m1}\,2c + \frac{\ddot{y}^{(13)}}{\ddot{y}_{,(3).\ddot{y}u}}\,{}^{(13)}_{(3)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}13u\,1}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}13\,2^{d\psi_1^{(3)}} = 0$$

$$\frac{m2}{2}\,2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(12)}}{\ddot{y}_{,(2).\ddot{y}u}}\,{}^{(12)}_{(2)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}12u\,2}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}12\,2^{d\psi_2^{(2)}} + \frac{e3}{e1\,m2}\,2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(13)}}{\ddot{y}_{,(3).\ddot{y}u}}\,{}^{(13)}_{(3)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}13u\,2}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}13\,2^{d\psi_2^{(3)}} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{e1}{e2\,m3}\,2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(12)}}{\ddot{y}_{,(2).\ddot{y}u}}\,{}^{(12)}_{(2)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}12u\,3}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}12\,2_{D\psi_3}^{(2)} + \frac{e3}{e1\,m3}\,2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(13)}}{\ddot{y}_{,(3).\ddot{y}u}}\,{}^{(13)}_{(3)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}13u\,3}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}13\,2_{D\psi_3}^{(3)} = 0.$$

Wir nehmen an, dass

$$2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(12)}}{\ddot{y}_{,(2).\ddot{y}u}}\,{}^{(12)}_{(2)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}12u\,1\,1}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}12\,2\,.\,{}^{(2)} = 0, du\,1$$

$$2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(12)}}{\ddot{y}_{,(2).\ddot{y}u}}\,{}^{(12)}_{(2)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}12u\,2\,2}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}12\,2\,.\,{}^{(2)} = 0, du\,2 \qquad (8)$$

$$2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(12)}}{\ddot{y}_{,(2).\ddot{y}u}}\,{}^{(12)}_{(2)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}12u\,3\,3}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}12\,2\,.\,{}^{(2)} = 0.\,u\,3$$

Und

$$2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(13)}}{\ddot{y}_{,(3).\ddot{y}u}}\,{}^{(13)}_{(3)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}13u\,1}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}13\,2\,.\,du_1^{(3)} = 0$$

$$2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(13)}}{\ddot{y}_{,(3).\ddot{y}u}}\,{}^{(13)}_{(3)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}13u\,2}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}13\,2\,.\,du_2^{(3)} = 0, \qquad (9)$$

$$2 + c\,\frac{\ddot{y}^{(13)}}{\ddot{y}_{,(3).\ddot{y}u}}\,{}^{(13)}_{(3)\,\bar{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}13u\,3}\,\ddot{y}c\,2\ddot{y}13\,2\,.\,Du_3^{(3)} = 0.$$

Das System (8) enthält Funktionen mit dem Argument t **ÿ** ÿ12(t) **ÿ** [ÿT, 0] **für** t **ÿ [0,** T].
Das System (9) enthält Funktionen mit dem Argument t **ÿ** ÿ13(t) **ÿ** [ÿT, 0] **für** t **ÿ [0,** T]. **Wenn (8) und (9) erfüllt sind, dann ist auch (7) erfüllt.**

Bemerkung 2. Die Wahl von t **ÿ** ÿkm(t) **ÿ** [ÿT, 0] ergibt sich aus der nächsten Überlegung: Sei T die Periode der Lösung. Wir bemerken, dass alle Argumente der unbekannten Funktionen t **ÿ** ÿkm, (m) (t **ÿ** ÿkm) sind. Daher müssen wir nach einer Lösung Da **1 ÿ** $\frac{ÿ\,u}{=}$ ÿ u auf der Anfangsmenge suchen, das heißt für t **ÿ** ÿkm(t) **ÿ [ÿ0; 0],** wobei **ÿ0** = **min{t ÿ** ÿkm(t) : t **ÿ [0, T]}.** dÿkm(t)/dt **>** 0, ist t **ÿ** ÿkm(t) eine zunehmende Funktion. Wir haben bewiesen, dass, wenn die Trajektorien T-periodisch sind, auch ÿkm(t) T-periodisch ist.

Daraus folgt, dass ÿT **ÿ** ÿkm(ÿT) **ÿ 0 ÿ** ÿkm(0) **ÿ** ÿT **ÿ** ÿkm(0) **ÿ** ÿÿkm(0) **ÿ** ÿkm(0) **ÿ** T **ÿ** ÿkm(0) **und dann 0ÿ** ÿkm(0) **ÿ** t **ÿ** ÿkm(t) **ÿ** T **ÿ** ÿkm(T) = T **ÿ** ÿkm(0) = **0. Folglich ist** ÿT **ÿ** t **ÿ** ÿkm(t) **ÿ 0. Daher sind die Funktionen** t **ÿ** ÿkm(t) : **[0,** T] **ÿ** [ÿT, 0], **was bedeutet, dass ÿ0** = ÿT, **und wir setzen** t **ÿ** ÿkm(t) = *ÿ* **ÿ** [ÿT, 0]. **Die Argumente der unbekannten (2) Funktionen** (ÿ), **Nach den im Anhang A angegebenen Transformationen erhalten wir aus (8) und** $\frac{ÿ\,u}{(2)}$ **(9) die** = $\frac{ÿ\,u}{ÿ\,u}$ $\frac{ÿ\,u}{(3)}$ = $\frac{ÿ\,u}{(3)}$ *(ÿ)* **gehören zu** [ÿT, 0].

Ausgangsgleichungen :

$$\ddot{y}2\,(t\,ÿ\,ÿ23) = ÿ2(t\,ÿ\,ÿ23)\,.\,\dot{y}2^{2}\,(t\,ÿ\,ÿ23)\cos 2\,ÿ2(t\,ÿ\,ÿ23) + ÿ2(t\,ÿ\,ÿ23)\,\ddot{y}2^{\cdot 2}\,(t\,ÿ\,ÿ23)\,\ddot{y}\,\frac{c^2}{\ddot{y}2(tÿÿ23)},$$

$$\ddot{y}2\,(t\,ÿ\,ÿ23) = 2\,\dot{y}2\,(t\,ÿ\,ÿ23)\,ÿ2(t\,ÿ\,ÿ23)tgÿ2(t\,ÿ\,ÿ23)\,\ddot{y}\,\frac{2\dot{y}2\,(tÿÿ23)\,.\,ÿ2(tÿÿ23)}{ÿn(tÿÿ23)}, \qquad (10\text{-}1)$$

$$ÿ2(t\,ÿ\,ÿ23) = \ddot{y}\,\frac{2\dot{y}2\,(tÿÿ23)\,ÿ2(tÿÿ23)+ÿ2(tÿÿ23)\,.\,ÿ2\,ÿ2(tÿÿ23)}{(tÿÿ23)\sin ÿ2(tÿÿ23)\cos ÿ2(tÿÿ23)}.$$

Machine Translated by Google

für das zweite Teilchen und

$$\ddot{\ddot{y}}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32) = \ddot{y}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32)\cdot \ddot{y}3^{2}(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32)\cos^2 \ddot{y}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32) + \ddot{y}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32)\,\ddot{y}3^{2}(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32)\,\ddot{y}\,\frac{c^2}{\ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)},$$

$$\dot{\ddot{y}}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32) = 2\,\dot{\ddot{y}}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32)\,\dot{\ddot{y}}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32)\,\mathrm{tg}\,\ddot{y}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32)\,\ddot{y}\,\frac{\dot{\ddot{y}}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)\cdot \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)}{\ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)}, \qquad \textbf{(10-2)}$$

$$\ddot{\ddot{y}}3(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}32) = \ddot{y}\,\frac{2\,\dot{\ddot{y}}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)\,\ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)+\ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)\cdot \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)^{2}(t\ddot{y}\ddot{y}32)\sin \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)\cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}32)}{}.$$

für das dritte Teilchen.

Die Argumentation aus Bemerkung 2 impliziert, dass wir nach einer Lösung (10-1) und (10-2) auf dem Intervall [ÿT, 0] suchen.

Das Existenz-Eindeutigkeits-Ergebnis für (10 ÿ n) (n = 1, 2) kann wie in **[19] im funktionalen Raum** Mr2 **×** *Mÿ2* **×** *Mÿ3* **erhalten werden, wobei** $\overset{0}{\times}$ *Mÿ2* $\overset{0}{\times}$ Herr3 $\overset{0}{\times}$ *Mÿ3* $\overset{0}{}$,

$$\text{Herr}_2\overset{0}{}\ \boldsymbol{\mu(\ddot{y}Tk)} = r20(.)\ \ddot{y}\ CT\ \ddot{y}[\ddot{y}T, 0](m)(t)\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y}

Machine Translated by Google

$$\ddot{\ddot{y}}_2(t) = \frac{m_2}{1\ c\ddot{y}_2(t)} \frac{m_2}{3\ c} \frac{\ddot{y}_2(t)\ddot{y}\ddot{y}_3(t\ddot{y}\ddot{y}23)(\cos \ddot{y}23 \cos \ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23)+\sin \ddot{y}2(t) \sin \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23))}{c\ 3\ddot{y}23\ 3} \frac{\ddot{y}_{(23)}.\ddot{y}_{u}^{(3)}}{,}$$

$$\frac{m_2}{} \frac{\ddot{\ddot{y}}_3 (\cos \ddot{y}23 \cos \ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23)+\sin \ddot{y}2(t) \sin \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23))+\ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) .. \ddot{y}3\ (t\ddot{y}\ddot{y}23)\sin \ddot{y}23 \cos \ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23)\ c\ 4\ddot{y}23}{}$$

$$\frac{}{} \frac{\ddot{\ddot{y}}_3(\sin \ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23)\ddot{y}\cos \ddot{y}23 \sin \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \cos \ddot{y}2(t)) e2e3 \ddot{y}3\ c\ 4\ddot{y}23\ m2}{} \frac{\ddot{y}_{2}^{2}}{c^{3}} \frac{\ddot{y}_{und}\ddot{y}_{2\ m2}(t)}{;}$$

$$\ddot{\ddot{y}}_2(t) = \frac{m_2}{} \frac{\ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \sin \ddot{y}23 \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23)}{\ddot{y}23\ 3\ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}2(t)} \frac{\ddot{y}_{(23)}.\ddot{y}_{du.}^{(3)}}{6\ c} +$$

$$\frac{}{} \frac{\ddot{\ddot{y}}_3\ (t\ddot{y}\ddot{y}23) \cos \ddot{y}23 \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \sin \ddot{y}23+\ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) .. \ddot{y}3\ (t\ddot{y}\ddot{y}23) \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \cos \ddot{y}23 + c\ 4\ddot{y}23\ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}2(t)}{}$$

$$\frac{}{} \frac{\ddot{\ddot{y}}_3(t\ddot{y}\ddot{y}23)\ \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \sin \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \sin \ddot{y}23\ c}{4\ddot{y}23\ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}2(t)} \frac{\ddot{y}_{2}^{2}}{c^{3}} \frac{\ddot{y}_{und}\ddot{y}_{2\ m2}(t)}{;}$$

$$\ddot{\ddot{y}}_{2(t)} = \frac{3\ m2}{} \frac{\ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \cos \ddot{y}23 \sin \ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) e2e3\ c\ 3\ddot{y}23}{c\ 3\ddot{y}2} \frac{\ddot{y}_{(23)}.\ddot{y}_{Sie}^{(3)}}{,} +$$

$$+ \frac{e2e3}{m2} \frac{\ddot{\ddot{y}}_3 (\cos \ddot{y}23 \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \sin \ddot{y}2(t)\ddot{y}\sin \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) \cos \ddot{y}2(t))+\ddot{y}3 .. \ddot{y}3 \sin \ddot{y}23 \sin \ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23) + c\ 4\ddot{y}23\ddot{y}2(t)}{}$$

$$\frac{m2}{} \frac{e2e3\ \ddot{y}\ddot{y}3 + \ddot{\ddot{y}}_3(\cos \ddot{y}23 \sin \ddot{y}2(t) \sin \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23)+\cos \ddot{y}2(t) \cos \ddot{y}3(t\ddot{y}\ddot{y}23)\ c}{4\ddot{y}23\ddot{y}2(t)} \frac{\ddot{y}_{2}^{2}}{c^{3}} \frac{\ddot{y}_{und}\ddot{y}_{2\ m2}(t)}{;}$$

Wo

$$\ddot{\ddot{y}}_3(t) = \frac{m_3}{e3e1} \frac{1}{c\ddot{y}3\ 2(t)} \frac{m_3}{e2e3} \frac{\ddot{y}3(t)\ddot{y}\ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)(\cos \ddot{y}32 \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}3(t)+\sin \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \sin \ddot{y}3(t))}{3\ c} \frac{\ddot{y}_{(32)}.\ddot{y}_{u}^{(2)}}{,}$$

$$\frac{m_3}{e3e2} \frac{\ddot{\ddot{y}}_2 (\cos \ddot{y}32 \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}3(t)+\sin \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \sin \ddot{y}3(t))+\ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) .. \ddot{y}2\ (t\ddot{y}\ddot{y}32)\sin \ddot{y}32 \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}3(t) c\ 4\ddot{y}23}{}$$

$$\frac{m_3}{e3e2} \frac{\ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)\ \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)(\sin \ddot{y}3(t) \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)\ddot{y}\cos \ddot{y}32 \sin \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}3(t))}{c\ 4\ddot{y}23} \frac{\ddot{y}_{und\ 3}^{2}}{m_3} \frac{\ddot{y}_{3}}{c^{3}} \frac{(t)}{;}$$

$$\ddot{\ddot{y}}_3 = \frac{m_3}{e3e2} \frac{\ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \sin \ddot{y}32 \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)}{\ddot{y}32\ 3\ddot{y}3(t) \cos \ddot{y}3(t)} \frac{\ddot{y}_{(32)}.\ddot{y}_{u.}^{(2)}}{6\ c} +$$

$$\frac{}{} \frac{\ddot{\ddot{y}}_2\ (t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \sin \ddot{y}32+\ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) .. \ddot{y}2\ (t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}32 + c\ 4\ddot{y}32\ddot{y}3 \cos \ddot{y}3(t)}{}$$

$$\frac{}{} \frac{\ddot{\ddot{y}}_2(t\ddot{y}\ddot{y}32)\ \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \sin \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \sin \ddot{y}32\ c}{4\ddot{y}32\ddot{y}3 \cos \ddot{y}3(t)} \frac{\ddot{y}_{3}^{3}}{c^{3}} \frac{\ddot{y}_{3}(t)\ddot{y}}{;}$$

$$\ddot{\ddot{y}}_{3(t)} = \frac{m_3}{e3e2} \frac{\ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}32 \sin \ddot{y}3(t) \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)\ c}{3\ddot{y}32\ 3} \frac{\ddot{y}_{(32)}.\ddot{y}_{u}^{(2)}}{,} +$$

$$+ \frac{e3e2}{3\ m3c} \frac{\ddot{\ddot{y}}_3 (\cos \ddot{y}32 \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \sin \ddot{y}3(t)\ddot{y}\sin \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}3(t))+\ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) .. \ddot{y}2\ (t\ddot{y}\ddot{y}32)\sin \ddot{y}32 \sin \ddot{y}3(t) \cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)\ c\ddot{y}32\ddot{y}3(t)}{}$$

$$+ \frac{e3e2}{3\ m3c} \frac{\ddot{y}\ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)\ \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32)(\cos \ddot{y}23 \sin \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \sin \ddot{y}3(t)+\cos \ddot{y}2(t\ddot{y}\ddot{y}32) \cos \ddot{y}3(t)}{c\ddot{y}32\ddot{y}3(t)} \frac{\ddot{y}_{2}^{und}}{3\ m3} \frac{\ddot{y}_{3}(t)}{3\ .\ c}$$

Und

Machine Translated by Google

$\ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}}$, **(2)** .ÿ u =

= [ÿ3(t) *cos(ÿ3(t)* **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ32) cos** ÿ3(t) **cos** ÿ2(t **ÿ ÿ32)** + ÿ3(t) **sin** ÿ3(t) **sin** ÿ2(t **ÿ ÿ32) ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ32)] .. ÿ2** (t **ÿ ÿ32)+** + *sin(ÿ3(t)* **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ32)) cos** ÿ3(t) **cos** ÿ2(t **ÿ** *ÿ32)ÿ2(t* **ÿ** *ÿ32)ÿ3(t) ..* **ÿ2** (t **ÿ ÿ32)+**

+[sin ÿ3(t) **cos** ÿ2(t **ÿ ÿ32) ÿ** *cos(ÿ3(t)* **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ32)) sin** ÿ2(t **ÿ ÿ32) cos** ÿ3(t)]ÿ2(t **ÿ** *ÿ32)ÿ3(t)* ÿ2(t **ÿ ÿ32).**

Nach der Ersetzung

$$\ddot{y}_n = \ddot{y}n\ (n = \mathbf{2},\ 3)\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}n(t) = \ddot{y}n0 + \dot{y}n = \ddot{y}n,\ \dot{y}n = rn, \quad rn = rn0 + \int_0^T rn(s)ds,\ \dot{y}n = \dot{y}n0 + \int_0^T \ddot{y}n(s)ds,\ \ddot{y}n = \ddot{y}n0 + \int_0^T \dddot{y}n(s)ds$$

Das Gleichungssystem für die Bewegung des zweiten und dritten Teilchens kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{2} = \frac{m2}{\mathbf{1}\ c\ddot{y}2^2}\ \frac{m2}{\mathbf{3}\ c}\ \frac{\ddot{\mathbf{y}}2\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{y}3(\cos\ddot{y}23\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3+\sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}3)}{\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}\ .\ddot{y}\ u^{(3)}}$$

$$\frac{m2}{\mathbf{4}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{23}}\ \mathbf{.\ r3(\cos\ddot{y}23\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3+\sin\ddot{y}2\sin}\ \ddot{y}3)+\ddot{y}3\ \mathbf{\ddot{y}3\sin\ddot{y}23\cos\ddot{y}2\cos}\ \ddot{y}3+\ddot{y}3\ \mathbf{\ddot{y}3\ (\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}3\ddot{y}\cos\ddot{y}23\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}2)}\ c\ \frac{^2{}_{e\,r2\,2}}{\mathbf{3}\ \mathbf{m2}\ c}\ \ddot{\mathbf{y}}\ Gr2\ ;$$

$$\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2} = \frac{m2}{\ddot{\mathbf{y}}}\ \frac{\ddot{\mathbf{y}}3\sin\ddot{y}23\cos\ddot{y}3\ \ddot{y}23}{3\ddot{y}2\ \mathbf{cos}\ \ddot{y}2}\ \frac{\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}\ .\ddot{y}^{(3)}_{Sie}}{\mathbf{6}\ c} + \frac{\mathbf{r3\cos\ddot{y}3\sin}\ \ddot{y}23+\ddot{y}3\ \mathbf{\ddot{y}3\cos3\cos\ddot{y}23\ddot{y}\ddot{y}3\ddot{y}3\sin\ddot{y}3\sin\ddot{y}23}}{c\ \mathbf{4}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{23}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ \mathbf{cos}\ \ddot{y}2}\ \frac{\ddot{\mathbf{y}}}{\ddot{y}2\ \ddot{\mathbf{y}}}$$

$$\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2} = \frac{c}{\mathbf{3}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{23}\ \mathbf{3\ m2}}\ \frac{\mathbf{\ddot{y}3\cos\ddot{y}23\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}3}\ e2e3}{\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}\ .\ddot{y}\ u^{(3)}} +$$

$$+\ \frac{e2e3}{\mathbf{m2}}\ \mathbf{.\ r3(\cos\ddot{y}23\cos\ddot{y}3\sin\ddot{y}2\ddot{y}\sin\ddot{y}3\cos}\ \ddot{y}2)+\ddot{y}3\ \mathbf{\ddot{y}3\sin\ddot{y}23\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}3\ddot{y}\ddot{y}3\ddot{y}3\ (\cos\ddot{y}23\sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}3+\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3}\ c\ \frac{^2{}_{und}\ddot{\mathbf{y}}2}{2\ m2\ c^3}\ \ddot{\mathbf{y}}\ Gy2\ ;$$

$$\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{3} = \frac{\mathbf{m3}}{e3e1}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\ c\ddot{y}3}\ \frac{\mathbf{m3}}{e2e3}\ \frac{\mathbf{\ddot{y}3\ddot{y}\ddot{y}2(\cos\ddot{y}32\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3+\sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}3)}}{\ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}}\ .\ddot{y}\ u^{(2)}}$$

$$\frac{\mathbf{m3}}{e3e2}\ \mathbf{.\ r2(\cos\ddot{y}32\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3+\sin\ddot{y}2\sin}\ \ddot{y}3)+\ddot{y}2\ \mathbf{\ddot{y}2\ddot{y}3\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}2\ddot{y}\cos\ddot{y}32\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}3)\ \ddot{y}2\sin\ddot{y}32\cos\ddot{y}2\cos}\ \ddot{y}3+\ddot{y}2\ c\ \frac{^2{}_{und}\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{3}}{3\ \mathbf{m3}\ \ \mathbf{3}\ c}\ \ddot{\mathbf{y}}\ Gr3\ ;$$

$$\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3} = \frac{\mathbf{m3}}{e3e2}\ \frac{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\sin\ddot{y}32\cos\ddot{y}2\ \ddot{y}32}{\ddot{\mathbf{y}}}\ \frac{\ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}}\ .\ddot{y}\ u^{(2)}}{\mathbf{6}\ c}\ \mathbf{r2\cos\ddot{y}2\sin}\ \ddot{y}32+\ddot{y}2\ \mathbf{\ddot{y}2\sin\ddot{y}32\cos\ddot{y}2\cos2\cos\ddot{y}32\ddot{y}\ddot{y}2}\ \frac{\ddot{\mathbf{y}}}{\ddot{y}3\ \ddot{\mathbf{y}}}$$

$$\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3} = \frac{c}{\mathbf{3}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{32}\ \mathbf{3\ m3}}\ \frac{\mathbf{\ddot{y}2\cos\ddot{y}32\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}2}\ e3e2}{\ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}}\ .\ddot{y}^{(2)}_{Sie}} +$$

$$+\ \frac{e3e2}{\mathbf{3\ m3c}}\ \mathbf{.\ r3(\cos\ddot{y}32\cos\ddot{y}2\sin\ddot{y}3\ddot{y}\sin\ddot{y}2\cos}\ \ddot{y}3)+\ddot{y}2\ \mathbf{\ddot{y}2\ (\cos\ddot{y}23\sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}3+\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3\ \ddot{y}2\sin\ddot{y}32\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}2\ddot{y}\ddot{y}2\ c\ddot{y}32\ddot{y}3}\ \frac{^2{}_{e\,3}}{c\ \ \mathbf{3}\ \mathbf{m3}}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ \ddot{\mathbf{y}}\ Gy3\ .$$

Im Folgenden bezeichnen wir das obige System als (BS)-Basissystem. Es ist ein Neutralsystem erster Ordnung bezüglich der Kugelgeschwindigkeiten.

4. Einführung von Funktionenräumen und einigen Hilfssätzen

Es wird bewiesen, dass für Lipschitz-stetige T-periodische Trajektorien jede der Funktionalgleichungen

Machine Translated by Google

ÿ23(t) = $\frac{1}{C}\sum_{ÿ=1}^{3} ÿ$ x **(2)** **(3)** *ÿ* (t **ÿ** ÿ23(t))2 , ÿ32(t) = *ÿ* (t) **ÿ** x $\frac{1}{C}\sum_{ÿ=1}^{3} ÿ$ x(t) **ÿ** x *ÿ* (t **ÿ** ÿ32(t))2 **(3) (2)** *ÿ*

hat eine einzigartige T-periodische Lösung.

Mit CT **ÿ[0,** ÿ) **bezeichnen wir die Menge aller unendlich differenzierbaren Funktionen, die die Bedingung r(ÿT)** = **r(0)** = **0. Wir führen die folgenden Mengen ein, wobei 0 <** *ÿ* **<** (m) **streng positive Konstanten sind und** r die **m-te Ableitung von** r **und** r **bedeutet . Dann führen wir die folgenden Funktionenräume ein:** **Bedingung 2 ,** $\mu > ÿ > 0$ **(0)** (t) = r(t) erfüllen.

Mrn = rn **ÿ** CT **ÿ[0,** ÿ) : rn (m) (t) **ÿ** ÿn mRne **µ(tÿTk)** **;** rn **(0)** (Tk) = **0;** $\int_{Tk}^{Tk+1}$ rn(s)ds = **0** **,** t **ÿ** [Tk , Tk+1];

d(k,m) (rn,rn) = **sup** $\frac{|rn(m)(t) - rn(m)(t)|}{ÿn}$ t ÿµ(tÿTk) ; t **ÿ** [Tk , Tk+1] ;

Mÿ n = ÿn **ÿ** CT **ÿ[0,** ÿ) : ÿn (m) (t) **ÿ** ÿn mÿne **µ(tÿTk)** , Dabei ist zu beachten, dass $\int_{Tk}^{Tk+1}$ ÿn(s)ds = Tÿn0 , t **ÿ** [Tk , Tk+1];

d(k,m) (ÿn, ÿn) = **sup** $\frac{|ÿn(m)(t) - ÿn(m)(t)|}{ÿn}$ t ÿµ(tÿTk) ; t **ÿ** [Tk , Tk+1] **;**

Mÿn = ÿn **ÿ** CT **ÿ[0,** ÿ) : ÿn ; ÿn (m) (t) **ÿ** ÿmYne **µ(tÿTk)** **(0)** (Tk) = **0;** $\int_{Tk}^{Tk+1}$ ÿn(s)ds = **0;** $\int_{Tk}^{T}$ ÿ(s)ds **ÿ** $\frac{ÿ}{2}$ **ÿ** *ÿ* , t **ÿ** [Tk , Tk+1];

d(k,m) (ÿn, ÿn) = **sup** $\frac{|ÿn(m)(t) - ÿn(m)(t)|}{ÿn}$ t ÿµ(tÿTk) ; t **ÿ** [Tk , Tk+1]

(k = **0, 1, 2, ...),** (m = **0, 1, 2, ...), (n** = **2,** 3).

Hier sind ÿn , Rn , ÿn, Yn (n = **2,** 3) **und** *µ* **streng positive Konstanten, so dass** *µ* **>** ÿn.

Wir betrachten das Produkt uniformer Räume, Mr2 **×** *Mÿ2* **×** *Mÿ2* **×** Mr3 **×** *Mÿ3* **×** *Mÿ3 ,* **ausgestattet mit der abzählbaren Familie der Pseudometrie:**

d(k,m) ((r2, **ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3),(r2, **ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3))** = = **d(k,m) (r2,r2)**

+ **d(k,m) (ÿ2, ÿ2)** + **d(k,m) (ÿ2, ÿ2)** + **d(k,m) (r3,r3)** + **d(k,m) (ÿ3, ÿ3)** + **d(k,m) (ÿ3, ÿ3)**

wobei die Indexmenge A **aus allen geordneten Paaren** (k, m) besteht.

Lemma 1 ([20]]. Wenn rn(.) **ÿ** CT **ÿ[0,** ÿ) **und** $\int_{0}^{T}$ rn(t)dt = **0,** dann, ÿn(t) = ÿn0 + $\int_{0}^{T}$ rn(s)ds (n = **2,** 3) ist eine T-periodische Funktion. Außerdem

ÿ2(t + T) = **ÿ20** + $\int_{0}^{t+T}$ ÿ2(s)ds **=ÿ20** + $\int_{0}^{T}$ + $\int_{Tk}^{T}$ k+1 ÿ2(s)ds + ÿ2(s)ds = ÿ2(t) + **ÿ20T** = ÿ2(t) + *2ÿ* **ÿ**

ÿ cos ÿ2(t + T) = *cos(ÿ2(t) + 2ÿ)* = **cos** ÿ2(t)

t+Tÿÿ23(t) tÿÿ23(t) tÿÿ23(t)+T ÿ3(t + T **ÿ ÿ23(t** + T)) = ÿ3(t + T **ÿ** ÿ23(t)) = **ÿ30** + ÿ3(s)ds **=ÿ30** + ÿ3(s)ds + ÿ3(s)ds =

0 **0** **tÿÿ23(t)** .

= ÿ3(t **ÿ ÿ23)** + **ÿ30T** = ÿ3(t **ÿ ÿ23)** + *2ÿ* **ÿ cos** ÿ3(t +
T **ÿ ÿ23(t** + T)) = *cos(ÿ3(t* **ÿ ÿ23)** + *2ÿ)* = **cos** ÿ3(t **ÿ ÿ23)**

Daraus folgt, dass die rechten Seiten der Gleichungen von (BS) T-periodische Funktionen sind.

Lemma 2. Die Distanzen ÿn(t), (n = **2,** 3) sind beschränkte Funktionen.

Beweis. Für genügend große *µ* **> 0 und** µT = const. **> 0 erhalten wir**

ÿn(t) **ÿ** ÿn0 **ÿ** $\int_{0}^{T}$ |ÿ(s)|ds **ÿ** ÿn0 **ÿ** Rn $\int_{0}^{t}$ µs ds = ÿn0 **ÿ** Rn $\frac{t\,µt\,ÿ\,1}{\mu}$ **ÿ** ÿn0 **ÿ ÿ** ÿn0 **ÿ** $\frac{Rn(eµT\,ÿ\,1)}{\mu}$ $\frac{Rne\,µT}{\mu}$ ÿ $\frac{ÿ}{ÿn}$ **> 0 ,** (n = **2,** 3).

Machine Translated by Google

In ähnlicher Weise folgern wir

$$\ddot{y}n(t) \ddot{y} \ddot{y}n0 + \int_0^T |rn(s)|ds \ddot{y} \ddot{y}n0 + Rn \int_0^T t\mu s\, ds \ddot{y} \ddot{y}n0 + Rn \frac{t\mu T \ddot{y} 1}{\mu} \ddot{y} \ddot{y}'_N > 0 , (n = 2, 3).$$

Schließlich $\ddot{y}'_N < \ddot{y}'_N$ e $\mu T \ddot{y} 1 > 0$. **da**

Damit ist Lemma 2 bewiesen. ÿ

Lemma 3. Wenn $\int_0^T \ddot{y}n(t)dt = \ddot{y}n0T$ (ÿn0 **> 0),(n** = **2,** 3), dann $\lim_{\ddot{y}\ddot{y}} \ddot{y}n(t) = \ddot{y}.$

Beweis. Setzen wir s + T = **p. Dann erhalten wir** $\int_0^T \ddot{y}n(s)ds = \int_T^{2T} \ddot{y}n(p)dp = \cdots =$ Die Gleichung lautet : $\int_{Tk}^{T k+1} \ddot{y}n(p)dp.$

Daher ist $\lim_{t\ddot{y}\ddot{y}} \ddot{y}n(t) = \lim_{t\ddot{y}\ddot{y}} \ddot{y}n0 + \int_0^{\ddot{y}} \ddot{y}n(s)ds = \ddot{y}n0 + \sum_{k=0}^{\ddot{y}\ddot{y}1} \int_{Tk}^{Tk+1} \ddot{y}\, \ddot{y}n(s)ds = \ddot{y}n0 + T\ddot{y}n0 \sum_{k=1}^{\ddot{y}} \ddot{y} = \ddot{y}.$

Damit ist Lemma 3 bewiesen. ÿ

Lemma 4. Die Mengen Mrn , *Mÿn , Mÿn* (n = **2,** 3) sind abgeschlossen.

Für den Beweis vgl. [19].

Die folgenden Aussagen geben eine qualitative Abschätzung der Elektronenbahnen.

Lemma 5. Es gilt folgende Ungleichung:

A = **|cos ÿ2 cos ÿ3 cos ÿ2 cos ÿ3** + **sin ÿ2 sin ÿ3 cos ÿ2 cos ÿ3** + **sin ÿ2 sin ÿ3| ÿ 1.**

Nachweisen.

$$A = |\cos ÿ2 \cos ÿ3 \cos(ÿ2 \ddot{y} ÿ3) + \sin ÿ2 \sin ÿ3| = \frac{\cos(ÿ2ÿÿ3)+\cos(ÿ2+ÿ3)}{2} \cos ÿ2ÿÿ3)ÿ\cos(ÿ2+ÿ3) \cos(ÿ2 \ddot{y} ÿ3) + =$$

$$= \frac{\cos(ÿ2ÿÿ3)[1+\cos(ÿ2ÿÿ3)]ÿ\cos(ÿ2+ÿ3)[1ÿ\cos(ÿ2ÿÿ3)]}{2} \quad ÿ$$

$$= \frac{1}{2} 2\cos^2 ÿ2ÿÿ3 \cos(ÿ2 \ddot{y} ÿ3) ÿ 2\sin^2 ÿ2ÿÿ3 \cos(ÿ2 + ÿ3) ÿ \cos^2 ÿ2ÿÿ3 + \sin^2 ÿ2ÿÿ3 = 1.$$

Lemma 6. Es gelten folgende Ungleichungen:

|ÿ20 ÿ ÿ30| ÿ (R2 + **R3)** e $\frac{\mu T ÿ 1}{\mu}$ **ÿ** ÿ23(t), ÿ32(t) **ÿ ÿ20** + **ÿ30** + (R2 + **R3)** e $\frac{\mu T ÿ 1}{\mu}$

Beweis. Da $ÿ2(t) = \ddot{y}20 + \int_0^T r2(s)ds$, $ÿ3(t) = \ddot{y}30 + \int_0^T r3(s)ds$, **dann, im Hinblick auf Lemma 2,**

$$ÿ23(t) = \sqrt{(ÿ2 \cos ÿ2 \cos ÿ2 ÿ ÿ3 \cos ÿ3 \cos ÿ3)^2 + (ÿ2 \sin ÿ2 \cos ÿ2 ÿ ÿ3 \sin ÿ3 \cos ÿ3)^2 + (ÿ2 \sin ÿ2 ÿ ÿ3 \sin ÿ3)^2} \ddot{y}$$

$$\ddot{y} ÿ2^2 + ÿ3^2 + 2ÿ2ÿ3A \ddot{y} ÿ2^2 + ÿ3^2 + 2ÿ2ÿ3 = ÿ2(t) + ÿ3(t) \ddot{y} \ddot{y}20 + \ddot{y}30 + (R2 + R3) e \frac{\mu T ÿ 1}{\mu}$$

Und

$$ÿ23(t) = \sqrt{(ÿ2 \cos ÿ2 \cos ÿ2 ÿ ÿ3 \cos ÿ3 \cos ÿ3)^2 + (ÿ2 \sin ÿ2 \cos ÿ2 ÿ ÿ3 \sin ÿ3 \cos ÿ3)^2 + (ÿ2 \sin ÿ2 ÿ ÿ3 \sin ÿ3)^2} \ddot{y}$$

$$\ddot{y} ÿ2^2 + ÿ3^2 \ddot{y} 2 ÿ2ÿ3A \ddot{y} ÿ2^2 + ÿ3^2 \ddot{y} 2 ÿ2ÿ3 = |\ddot{y}2 \ddot{y} ÿ3| \ddot{y} |\ddot{y}20 \ddot{y} ÿ30| \ddot{y} (R2 + R3) e \frac{\mu T ÿ 1}{\mu}$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. ÿ

Lemma 7. Die folgenden Ungleichungen sind gültig:

Machine Translated by Google

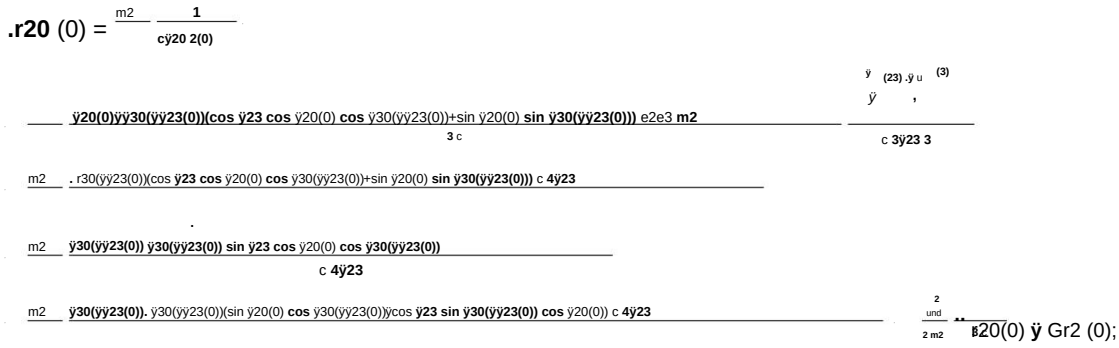
Und

für ausreichend große $\mu > 0$ und µT = const. **> 0.** Die obigen Ungleichungen implizieren, dass | ÿ2(t) **ÿ** ÿ3(t **ÿ** ÿ23)|, |ÿ3(t) **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ32)|** streng positiv sind, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Bemerkung 3. Offensichtlich $\frac{c}{\ddot{y}}$ **ÿ** $\frac{1}{\ddot{y}23}$ **ÿ** $\frac{c}{\ddot{y}}$, $\frac{1}{\ddot{y}32}$ **ÿ** $\frac{c}{\ddot{y}}$.

5. Einführung in Operatoren und das Hauptlemma

Vor der Formulierung und dem Beweis des Hauptlemmas geben wir die Kompatibilitätsbedingung (CC) an, die die Kontinuität der Lösung für neutrale Gleichungen impliziert: Die Anfangsfunktionen erfüllen die folgenden Beziehungen:



wobei ÿ23 = ÿ2(0) **ÿ ÿ3(ÿÿ23(0)) und so weiter.**

Definieren Sie einen Operator B , **der auf** Mr2 **×** *Mÿ2* **×** *Mÿ2* **×** Mr3 **×** *Mÿ3* **×** *Mÿ3* wirkt , **mit den Formeln**

Machine Translated by Google

$$B^{(k)}_{\mathbf{r2}}(\mathbf{r2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3)(t) := \int_{Tk}^{T} Gr2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{t\ddot{y}Tk}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} Gr2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} + \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{P} Gr2(s)dsdp,\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [Tk, Tk+1]\ ;$$

$$r3(t) = r30(t),\ \ddot{y}3(t) = \ddot{y}30(t),\ \ddot{y}3(t) = \ddot{y}30(t),\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [\ddot{y}T, 0]$$

$$B^{(k)}_{\mathbf{\ddot{y}2}}(\mathbf{r2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3)(t) := \mathbf{\ddot{y}\ \ddot{y}20} + \int_{Tk}^{T} G\ddot{y}2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{t\ddot{y}Tk}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} G\ddot{y}2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} + \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{P} G\ddot{y}2(s)dsdp,\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [Tk, Tk+1]\ ;$$

$$r3(t) = r30(t),\ \ddot{y}3(t) = \ddot{y}30(t),\ \ddot{y}3(t) = \ddot{y}30(t),\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [\ddot{y}T, 0]$$

$$B^{(k)}_{\mathbf{\ddot{y}2}}(\mathbf{r2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3)(t) := \int_{Tk}^{T} Gr3(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{t\ddot{y}Tk}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} Gr3(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} + \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{P} Gr3(s)dsdp\ ,\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [Tk, Tk+1]\ ;$$

$$r3(t) = r30(t),\ \ddot{y}3(t) = \ddot{y}30(t),\ \ddot{y}3(t) = \ddot{y}30(t),\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [\ddot{y}T, 0]$$

$$B^{(k)}_{\mathbf{r3}}(\mathbf{r2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3)(t) := \int_{Tk}^{T} Gr3(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{t\ddot{y}Tk}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} Gr3(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} + \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{P} Gr3(s)dsdp,\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [Tk, Tk+1]\ ;$$

$$r2(t) = r20(t),\ \ddot{y}2(t) = \ddot{y}20(t),\ \ddot{y}2(t) = \ddot{y}20(t),\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [\ddot{y}T, 0]$$

$$B^{(k)}_{\mathbf{\ddot{y}3}}(\mathbf{r2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3)(t) := \mathbf{\ddot{y}\ \ddot{y}30} + \int_{Tk}^{T} G\ddot{y}3(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{t\ddot{y}Tk}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} G\ddot{y}3(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} + \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{P} G\ddot{y}3(s)dsdp,\ t$$
$$\mathbf{\ddot{y}}\ [Tk, Tk+1];$$

$$r2(t) = r20(t),\ \ddot{y}2(t) = \ddot{y}20(t),\ \ddot{y}2(t) = \ddot{y}20(t),\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [\ddot{y}T, 0]$$

$$B^{(k)}_{\mathbf{\ddot{y}3}}(\mathbf{r2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3)(t) := \int_{Tk}^{T} G\ddot{y}3(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{t\ddot{y}Tk}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} G\ddot{y}3(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} + \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{P} G\ddot{y}3(s)dsdp,\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [Tk, Tk+1]\ ;$$

$$r2(t) = r20(t),\ \ddot{y}2(t) = \ddot{y}20(t),\ \ddot{y}2(t) = \ddot{y}20(t),\ t\,\mathbf{\ddot{y}}\ [\ddot{y}T, 0]$$

wobei t **ÿ** [Tk , Tk+1], Tk = kT (k = **0, 1, 2, . . .),** *Gÿ2* = *Gÿ2* **(r2, ÿ2 ,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3), *Gÿ2* = *Gÿ2* **(r2 ,** ÿ2 , ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3), Gr3 = Gr3 **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3), *Gÿ3* = *Gÿ3* **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, ÿ3 , ÿ3), *Gÿ3* = *Gÿ3* **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3, ÿ3) und den Anfangsfunktionen** rn0(t), ÿn0(t), ÿn0(t),(n = **2,** 3) **sind Lösungen des Systems der Ausgangsgleichungen.**

Bemerkung 4. Wir bemerken, dass der Operator Br2 (.)(t) im Hinblick auf die Periodizität von Gr2 (s) T-periodisch auf **[0,** ÿ) ist (vgl. [20]). Die Konformitätsbedingung (CC) . r20(0) = Gr2 **(0)** impliziert

$$\mathbf{.}\ r2(t) = Gr2(t)\,\mathbf{\ddot{y}}\ \frac{1}{T}\int_{0}^{T} Gr2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}}\ \mathbf{.}\ r20(0) = Gr2\,\mathbf{(0)}\,\mathbf{\ddot{y}}\ \frac{1}{T}\int_{0}^{T} Gr2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}}\ \int_{0}^{T} Gr2(s)ds = \mathbf{0}$$

Und

$$= B(.)(0)\,\mathbf{\ddot{y}}\ \mathbf{r2} = \mathbf{(0)}\ \mathbf{(0)}\ r2(t) = B(.)(t)\,\mathbf{\ddot{y}}\ r2(0)\ \mathbf{r2}\ \int_{0}^{T} Gr2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{P} Gr2(s)dsdp\,\mathbf{\ddot{y}}\ \int_{0}^{T}\int_{0}^{p} Gr2(s)dsdp = \mathbf{0}$$

$$^{(0)}_{(.)(0) = B\,\mathbf{r2}}\ \int_{0}^{T} Gr2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{P} Gr2(s)dsdp = \mathbf{0;}\ B\ \mathbf{r2}^{(0)}(.)(T) = \int_{0}^{T} Gr2(s)ds\,\mathbf{\ddot{y}} - \frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{P} Gr2(s)dsdp = \mathbf{0.}$$

Aber Gr2 (s) ist eine T-periodische Funktion. Daher kann man das Ergebnis für jedes k = **1, 2, . . .,** T k+1 T k+1 Gr2 (s)ds = erweitern , $\int_{Tk}^{P} Gr2(s)dsdp = \mathbf{0}$ **.**

das heißt,

Wir benötigen folgende Ungleichungen:

Machine Translated by Google

$$\ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}, {}^{(3)}.\ddot{y}\,u \quad \ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}} \quad \ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}, \ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}} \quad {}^{(3)}.\ddot{y}\,u, {}^{(3)}.\ddot{y}\,u \quad \ddot{y}\,c\ddot{y}23..\ddot{y}3 \quad \sqrt{2 + \ddot{y}3^2 \quad 2.. \quad 2\cos 2\ddot{y}3 + \ddot{y}3\,\ddot{y}3 \quad 2\ddot{y}3^2} =$$

$$= c\ddot{y}23.r3 \quad \sqrt{2 + \ddot{y}3^2 \quad 2\cos 2\ddot{y}3 + \ddot{y}3\,\ddot{y}3} \quad 2.\ddot{y}3^2 \quad c\ddot{y}23\ddot{y}3e \quad \mu(t\ddot{y}Tk)\,R3\,\ddot{y} \quad \sqrt{2 + \ddot{y}3\,2R3\,2 + \ddot{y}3\,2Y3\,2\,\ddot{y}\,cc\ddot{y}23\ddot{y}3e} \quad \mu(t\ddot{y}Tk)$$

$$\ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}}, {}^{(2)}_{Sie}.\ddot{y} \quad \ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}} \quad \ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}}, \ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}} \quad {}^{(2)}_{Sie}.\ddot{y} \quad {}^{(2)}_{Sie}.\ddot{y}, {}^{(2)}_{Sie}.\ddot{y} \quad \ddot{y}\,c\ddot{y}32..\ddot{y}2 \quad \sqrt{2 + \ddot{y}2^2 \quad 2\cos 2\ddot{y}2 + \ddot{y}2 + \ddot{y}2\,\ddot{y}2} \quad 2\ddot{y}2^2 =$$

$$= c\ddot{y}23.r3 \quad \sqrt{2 + \ddot{y}3^2 \quad 2\cos 2\ddot{y}3 + \ddot{y}3\,\ddot{y}3} \quad 2.\ddot{y}3^2 \quad c\ddot{y}32\ddot{y}2e \quad \mu(t\ddot{y}Tk)\,R2\,\ddot{y} \quad \sqrt{2 + \ddot{y}2\,2R2\,2 + \ddot{y}2\,2Y2\,2\,\ddot{y}\,cc\ddot{y}32\ddot{y}2e} \quad \mu(t\ddot{y}Tk)$$

Darüber hinaus impliziert die Bedingung (C) + ÿn **2ÿn** $\ddot{y}\,u\,(N), \ddot{y}\,u\,(N)$, **2** = rn + ÿn *2ÿn* **2 cos2** ÿn + ÿn *2ÿn* $\ddot{y}^2$

Rn ^{2} **2** + ÿn 2Yn **2** ÿ c $-2\,2 <$ c ,(n = **2,** 3).

Lemma 8. Die folgenden Ungleichungen sind gültig:

$$\int_{Tk}^{T} Gr2\,(s)ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e1|}{m2c} \quad \frac{1}{2\,\ddot{y}\,2} \quad \frac{-}{m2} \quad \frac{e2e3|\,|e2e3|\,\ddot{y}2+\ddot{y}3\,cc\ddot{y}23\ddot{y}3e\,e\,2 + + + 6\,c\,4\ddot{y}23\,3r3|m2\,8\,\ddot{y}3 + |.\,\ddot{y}3\,\ddot{y}3|\,\mu(t\ddot{y}Tk)\,2\,|}{3\,\ddot{y}23} \quad \frac{..}{r2}\,ds\,\ddot{y}$$

$$\ddot{y} \quad \frac{|e2e1|}{m2} \int_{Tk}^{T} \frac{1}{C\,2\,\ddot{y}\,2} \quad \frac{-}{c\ddot{y}3(} \quad \frac{\ddot{y}\,2+\ddot{y}\,3+3\ddot{y})\,\ddot{y}2\,2R2 + c\,3\ddot{y}2}{3\,c}\,t\,\mu(s\ddot{y}Tk)ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e1|}{m2} \quad \frac{1}{C\,2\,\ddot{y}\,2} + \frac{-}{c\ddot{y}3(} \quad \frac{\ddot{y}\,2+\ddot{y}\,3+3\ddot{y})\,\ddot{y}2\,2R2 + c\,3\ddot{y}2}{3\,c}\,t\,\frac{\mu(t\ddot{y}Tk)\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1} Gr2\,(s)ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e1|}{m2} \quad \frac{1}{C\,\ddot{y}\,2} \quad \frac{-}{c\ddot{y}3(} \quad \frac{\ddot{y}\,2+\ddot{y}\,3+3\ddot{y})\,\ddot{y}2\,2R2 + c\,2\ddot{y}2}{3\,c}\,e\,\frac{\mu T\ddot{y}1\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T} G\ddot{y}2\,ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e3|}{m2} \int_{Tk}^{T} \frac{\ddot{y}3c\ddot{y}3}{c\,5\ddot{y}23\,2\ddot{y}2\,\cos\ddot{y}2} + \frac{|.\,r3|+\ddot{y}3\,\ddot{y}3\,+|\ddot{y}3\,.\,\ddot{y}3|\,c}{4\ddot{y}23\ddot{y}2\,\cos\ddot{y}2} + \frac{\ddot{y}2}{3\,c}\,t\,\mu(s\ddot{y}Tk)ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e3|}{m2} \quad \frac{-}{,} \quad \frac{c\ddot{y}3(\,\ddot{y}2\,2\ddot{y}2\ddot{y})\,c\,3\ddot{y}2\,\cos(\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y})\,\ddot{y}\,2}{3\,c}\,t\,\frac{\mu(t\ddot{y}Tk)\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1} G\ddot{y}2\,ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e3|}{m2} \quad \frac{-}{,} \quad \frac{c\ddot{y}3(\,\ddot{y}2\,2\ddot{y}2\ddot{y})\,c\,3\ddot{y}2\,\cos(\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y})}{3\,c}\,e\,\frac{\mu T\ddot{y}1\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T} G\ddot{y}2\,ds\,\ddot{y} \quad m2 \int_{Tk}^{T} \frac{-}{\mu(s\ddot{y}Tk)\,\ddot{y}2\,2\ddot{y}2\,|.\,r3|+\ddot{y}3\,\ddot{y}3\,+|\ddot{y}3\,.\,\ddot{y}3|\,c\,5\ddot{y}23\,2\ddot{y}2\,c\,4\ddot{y}23\ddot{y}2}{3\,c}\,t\,e2e3|\,\mu(s\ddot{y}Tk)ds\,\ddot{y} \quad \frac{|}{m2} \quad \frac{-}{,} \quad \frac{e\,\mu T+3\ddot{y}\,\ddot{y}2\,2Y2\,c\ddot{y}3\,\ddot{y}\,3 + 3\,c}{\ddot{y}\,2\ddot{y}2}\,t\,\frac{t\ddot{y}Tk)\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1} G\ddot{y}2\,ds\,\ddot{y}\,m2 \quad \frac{|e2e3|}{+\,3\,c} \quad \frac{-}{c\ddot{y}3} \quad \frac{,}{\ddot{y}\,2\ddot{y}2} \quad \frac{e\,\mu T+3\ddot{y}\,\ddot{y}\,3}{} \quad \frac{\ddot{y}2\,2Y2}{3\,c} \quad \frac{e\,\mu T\ddot{y}1\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T} Gr3\,(s)ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e1e1|}{m3} \quad \frac{1}{C\,2\,\ddot{y}\,3} \quad \frac{-}{c\ddot{y}2(} \quad \frac{\ddot{y}\,3+3\ddot{y})\,\ddot{y}3\,2R3\,\ddot{y}\,2+ + + c\,2\ddot{y}2}{3\,c}\,t\,\frac{t\ddot{y}Tk)\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1} Gr3\,(s)ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e1e1|}{m3} \quad \frac{1}{C\,\ddot{y}\,3^2} \quad \frac{-}{c\ddot{y}2(} \quad \frac{\ddot{y}\,3+3\ddot{y})\,\ddot{y}3\,2R3\,\ddot{y}\,2+ + + c\,2\ddot{y}2}{3\,c}\,e\,\frac{\mu T\ddot{y}1\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T} G\ddot{y}3\,ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e3|}{m3} \quad \frac{-}{,} \quad \frac{c\ddot{y}2(\,\ddot{y}2\,2\ddot{y}3\ddot{y})\,c\,3\ddot{y}2\,\cos(\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y})}{\ddot{y}\,3}\,t\,\frac{\mu(t\ddot{y}Tk)\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1} G\ddot{y}3\,ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e3|}{m3} \quad \frac{-}{,} \quad \frac{c\ddot{y}2(\,\ddot{y}2\,2\ddot{y}3\ddot{y})\,c\,3\ddot{y}2\,\cos(\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y})}{3\,c}\,e\,\frac{\mu T\ddot{y}1\,;}{\mu} \quad \int_{Tk}^{T} G\ddot{y}3\,ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e3|}{m3} \quad \frac{-}{,} \quad \frac{e\,\mu T+3\ddot{y}\,\ddot{y}3\,2Y3\,\ddot{y}\,2\,c\ddot{y}2+3\,c}{\ddot{y}\,3\ddot{y}2}\,t\,\frac{t\ddot{y}Tk)\,;}{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1} G\ddot{y}3\,ds\,\ddot{y} \quad \frac{|e2e3|}{m3} \quad \frac{-}{,} \quad \frac{e\,\mu T+3\ddot{y}\,\ddot{y}3\,2Y3\,\ddot{y}\,2\,c\ddot{y}2+3\,c}{\ddot{y}\,3\ddot{y}2}\,e\,\frac{\mu T\ddot{y}1}{\mu}.$$

Lemma 9 (Hauptlemma). Lassen Sie die Kompatibilitätsbedingung (CC) erfüllt sein. Das periodische Problem für das System (BS) hat eine Lösung **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3, ÿ3)** ÿMr2 × *Mÿ2* × *Mÿ2* × Mr3 × *Mÿ3* × *Mÿ3* , wenn der Operator B einen Fixpunkt hat, der zu Mr2 × *Mÿ2* × *Mÿ2* × Mr3 × *Mÿ3* × *Mÿ3* gehört .

Beweis: Das System (BS) habe eine Lösung, die zu Mr2 × *Mÿ2* × *Mÿ2* × Mr3 × *Mÿ3* × *Mÿ3* gehört .

ÿ

Machine Translated by Google

Wir zeigen, dass B = Br2 , *Bÿ2* , *Bÿ2* , Br3 , *Bÿ3* , *Bÿ3* **einen Fixpunkt besitzt, der zu** Mr2 **×** *Mÿ2* **×** *Mÿ2* **×** Mr3 **×** *Mÿ3* **×** *Mÿ3* gehört .

Tatsächlich erhalten wir durch Integration der ersten Gleichung von (BS)

erhält man $r2(t) = \int_{Tk}^{T} Gr2(s)ds$, **und daher erhält man im Hinblick auf Bemerkung 4**

$$r2(t) = \int_{Tk}^{T} Gr2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{t\ddot{y}\,Tk}{T}\;\frac{1}{2}\int_{Tk}^{T\,k+1} Gr2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{1}{T}\int_{Tk}^{T\,k+1}\int_{Tk}^{P} Gr2(s)dsdp\,,$$

das heißt, r2 = Br2 (k) **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3).

Für die zweite Komponente ÿ2 gilt $\int_{Tk}^{T\,k+1} Gÿ2(s)ds = \mathbf{0}$**. Daher**

$$ÿ2(Tk+1) = ÿ2(Tk) + \int_{Tk}^{T\,k+1} Gÿ2(s)ds\,\ddot{y}\;\ddot{y}\mathbf{02} = \ddot{y}\mathbf{02} + \int_{Tk}^{T\,k+1} Gÿ2(s)ds\,\ddot{y}\int_{Tk}^{T\,k+1} Gÿ2(s)ds = \mathbf{0}.$$

Daher ist $ÿ2(t) = \ddot{y}\mathbf{02} + \int_{Tk}^{T} Gÿ2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{tÿTk}{T}\;\frac{1}{2}\int_{Tk}^{T\,k+1} Gÿ2(s)ds$. **In gleicher Weise**

$$\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{P} Gÿ2(s)dsdp = \int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{Tk+1}{}_{S} Gÿ2(s)dpds = \int_{Tk}^{Tk+1}(Tk+1\,\ddot{y}\,s)Gÿ2(s)ds = Tk+1\int_{Tk}^{Tk+1} Gÿ2(s)ds\,\ddot{y}\int_{Tk}^{Tk+1} sGÿ2(s)ds = \ddot{y}\int_{Tk}^{Tk+1} sGÿ2(s)ds =$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1} S\frac{dÿ2(s)}{ds} = ÿ\,ds\;Tk+1\,\mathbf{sdÿ2(s)} = \mathbf{ÿTk+1ÿ2(Tk+1)} + Tk\,ÿ2(Tk) + \int_{Tk}^{Tk+1} ÿ2(s)ds = ÿTÿ02 + T\,ÿ02(Tk) + \int_{Tk}^{Tk+1} ÿ2(s)ds = ÿTÿ02 + \mathbf{Tÿ02} = \mathbf{0}.$$

Daher,

$$ÿ2(t) = \ddot{y}\mathbf{02} + \int_{Tk}^{T} Gÿ2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{t\ddot{y}\,Tk}{T}\;\frac{1}{2}\int_{Tk}^{T\,k+1} Gÿ2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{1}{T}\int_{Tk}^{T\,k+1}\int_{Tk}^{P} Gÿ2(s)dsdp$$

was bedeutet, ÿ2 = *Bÿ2* **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3).

Wenn wir die gleiche Argumentation wiederholen, erhalten wir

ÿ2 = *Bÿ2* **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3), **r3** = Br3 **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3), **ÿ3** = *Bÿ3* **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3),
ÿ3 = *Bÿ3* **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3)).

Umgekehrt sei (r2, ÿ2, ÿ2,r3, **ÿ3, ÿ3)** ÿ Mr2 **×** *Mÿ2* **×** *Mÿ2* **×** Mr3 **×** *Mÿ3* **×** *Mÿ3* **ein Fixpunkt von B. Dann** gilt

$$r2(t) = \int_{Tk}^{T} Gr2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{t\ddot{y}\,Tk}{T}\;\frac{1}{2}\int_{Tk}^{T\,k+1} Gr2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{1}{T}\int_{Tk}^{T\,k+1}{}_{S} Gr2\,(ÿ)dÿds.$$

ergibt für t = Tk

$$r2(Tk) = \int_{Tk}^{Tk} Gr2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{Tk\,\ddot{y}\,Tk}{T}\;\frac{1}{2}\int_{Tk}^{T\,k+1} Gr2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{1}{T}\int_{Tk}^{T\,k+1}{}_{S} Gr2\,(ÿ)dÿds\,\ddot{y}\,\mathbf{0} = \frac{1}{2}\int_{Tk}^{T\,k+1} Gr2(s)ds\,\ddot{y}\;\frac{1}{T}\int_{Tk}^{T\,k+1}{}_{S} Gr2\,(ÿ)dÿds.$$

Aber Bemerkung 4 impliziert $\int_{Tk}^{T\,k+1} Gr2(s)ds = \mathbf{0}\,\ddot{y}\;\frac{1}{T}\int_{Tk}^{T\,k+1}{}_{S} Gr2\,(ÿ)dÿds = \mathbf{0}.$

Folglich ist $r2(t) = \int_{Tk}^{t} Gr2(s)ds\,\ddot{y}$ **.** $r2(t) = Gr2(t)$.

Für die restlichen Komponenten von B verfahren wir in gleicher Weise.
Damit ist Lemma 9 bewiesen.

Machine Translated by Google

6. Das Hauptergebnis

Das Hauptergebnis des Papiers ist wie folgt:

Theorem 1 (Haupttheorem). Lassen Sie die Kompatibilitätsbedingung (CC) erfüllt sein und die Anfangsdaten ausreichend klein sein (Anhang C). Wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

(1)

$$\frac{|e2e1|}{\mathbf{m2}}\ \frac{1}{c\,\ddot{y}\,\mathbf{2}^{2}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{3}(+\ddot{y}\,2+\ \ddot{y}\,\mathbf{3+3}|\ddot{y}|)\,\ddot{y}\mathbf{2}\,2R2+}{c\,\mathbf{3}\ddot{y}\mathbf{2}}\ \frac{}{\mathbf{3}\,c}\ \frac{t\,\mu T}{\mu}\ \ddot{y}\ \mathbf{R2}\ (\mu\ \mathbf{>}\ \ddot{y}\mathbf{2},\ \ddot{y}3);$$

$$\ddot{y}\mathbf{20}+\ \frac{|e2e1|}{\mathbf{m2}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{3}(\ \ddot{y}\mathbf{2}\ddot{y}\mathbf{2}+\ \ddot{y}\mathbf{3+3}|\ddot{y}|)\ddot{y}\mathbf{2}\cos(\ddot{y}/\mathbf{2}\ddot{y}\ddot{y})\,\ddot{y}\,\mathbf{2}}{}\ \frac{}{\mathbf{3}\,c}\ \frac{t\,\mu T}{\mu}\ \ddot{y}\ \ddot{y}\mathbf{2}\ (\ddot{y}\mathbf{20}\ \mathbf{>}\ 0);$$

$$\frac{|e2e1|}{\mathbf{m2}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{3}}{c}\ \frac{\ddot{y}\,\mathbf{3}}{\ddot{y}\,\mathbf{2}\ddot{y}\mathbf{2}}\ e\ \mathbf{\mu T+3}|\ddot{y}|\,\ddot{y}\mathbf{2}\,2Y2+\ \frac{}{\mathbf{3}\,c}\ \frac{t\,\mu T}{\mu}\ \ddot{y}\ \mathbf{Y2};$$

$$\frac{|e3e1|}{\mathbf{m3}}\ \frac{1}{c\,\ddot{y}\,\mathbf{3}^{2}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{2}(\ \ddot{y}\ \mathbf{3+3})\,\ddot{y}\mathbf{3}\,2R3\,\ddot{y}\,2+\ +\ +\ c\,\mathbf{3}\ddot{y}\mathbf{2}}{\mathbf{3}\,c}\ \frac{t\,\mu T}{\mu}\ \ddot{y}\ \mathbf{R3};$$

$$\ddot{y}\mathbf{30}+\ \frac{|e3e1|}{\mathbf{3\ m3c}}\ \frac{\ddot{y}\ddot{y}2\,\ddot{y}\ \mathbf{2+3}c\ddot{y}\ +\ \ddot{y}\mathbf{3}\ \mathbf{2}\ddot{y}\mathbf{3}}{\mathbf{3}\,e^{\,c\ddot{y}\mathbf{2}\,\ddot{y}}}\ e\ \cos(\ddot{y}/\mathbf{2}\ddot{y}\ddot{y})\ \frac{\mu T}{\mu}\ \ddot{y}\ \ddot{y}\mathbf{3}\ (\ddot{y}\mathbf{30}\ \mathbf{>}\ 0);$$

$$\frac{|e3e1|}{\mathbf{3\ m3c}}\ \frac{}{}\ \frac{\mu T+3\ddot{y}\,\ddot{y}\mathbf{3}\,2Y3\,c\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\mathbf{2}+\mathbf{3}\,c}{\ddot{y}\,\mathbf{3}\ddot{y}\mathbf{2}\ |}\ \frac{t\,\mu T}{\mu}\ \ddot{y}\ \mathbf{Y3};$$

(2)

$$\mathbf{1}+\frac{e\ \mu T\ddot{y}\mathbf{1}}{\mu T}\ \frac{|e2e1|}{\mathbf{m2}}\ \frac{1}{c\,\mathbf{2}\,\ddot{y}\,\mathbf{2}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{3}(+\ddot{y}\,2+\ \ddot{y}\,\mathbf{3+3}|\ddot{y}|)\,c}{\mathbf{3}\ddot{y}\mathbf{2}}+\ \frac{\ddot{y}\mathbf{2}\,2R2}{\mathbf{3}\,c}\ \frac{t\,\mu T}{\mu}\ \ddot{y}\ \ddot{y}2R2;$$

$$\mathbf{1}+\frac{e\ \mu T\ddot{y}\mathbf{1}}{\mu T}\ \frac{|e2e1|}{\mathbf{3\ m^{2}}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{3}\ \ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}|\ddot{y}|+}{c^{\mathbf{2}\ddot{y}}\ \ddot{y}\,\mathbf{2}}\ \mathbf{\ddot{y}2\ 2\ddot{y}2\ \ddot{y}\ \ddot{y}2\ddot{y}2;\ \cos(\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y})\ddot{y}2}$$

$$\mathbf{1}+\frac{e\ \mu T\ddot{y}\mathbf{1}}{\mu T}\ \frac{|e2e1|}{\mathbf{3\ m^{2}}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{3}\ \ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}|\ddot{y}|}{\mathbf{2}\ddot{y}\,c\ \ddot{y}\,\mathbf{2}\ddot{y}\mathbf{2}}+\ \ddot{y}\mathbf{2}\ 2Y2\ \ddot{y}\ \ddot{y}2Y2;$$

$$\mathbf{1}+\frac{e\ \mu T\ddot{y}\mathbf{1}}{\mu T}\ \frac{|e3e1|}{\mathbf{m3c}}\ \frac{1}{\mathbf{2}\,\ddot{y}\,\mathbf{3}}+\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{2}\ \ \ 2+\ c\ \ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}|\ddot{y}|\ \ddot{y}}{\mathbf{3}\ddot{y}\mathbf{2}}\ \frac{}{}\ \frac{\ddot{y}\mathbf{3}\ 2R3+}{\mathbf{2}\,c}\ \ddot{y}\ \ddot{y}3R3;$$

$$\mathbf{1}+\frac{e\ \mu T\ddot{y}\mathbf{1}}{\mu T}\ \frac{|e3e1|}{\mathbf{3\ m3c}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{2}\ \ \ddot{y}\ \mathbf{2+3}|\ddot{y}|+}{c}\ \mathbf{\ddot{y}3\ 2\ddot{y}3\ \ddot{y}\ \ddot{y}3\ddot{y}3;\ 2\ddot{y}\ \cos(\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y})\ddot{y}2\ \ddot{y}\ 3}$$

$$\mathbf{1}+\frac{e\ \mu T\ddot{y}\mathbf{1}}{\mu T}\ \frac{|e3e1|}{\mathbf{3\ m3c}}\ \frac{\bar{c}\ddot{y}\mathbf{2}\ \ \ddot{y}\ \mathbf{2+3}|\ddot{y}|}{c^{\mathbf{2}\ddot{y}}\ \ddot{y}\ \mathbf{3}\ddot{y}\mathbf{2}}+\ \ddot{y}\mathbf{3}\ 2Y3\ \ddot{y}\ \ddot{y}3Y3$$

dann existiert eine einzigartige T-periodische Lösung **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,**

ÿ3) ÿ Mr2 **×** *MŸ2* **×** *MŸ2* **×** Mr3 **×** *MŸ3* **×** *MŸ3* von (BS).

Hauptbemerkung. Beachten Sie, dass wir im Theorem unendlich viele Ungleichungen haben. Die obigen Ungleichungen implizieren, dass die Operatorfunktionen und ihre ersten Ableitungen zu Mr2 **×** *MŸ2* **×** *MŸ2* **×** Mr3 **×** *MŸ3* **×** *MŸ3* gehören . Es ist leicht zu überprüfen, dass wir für die dritten Ableitungen **3** erhalten und so weiter. bzw. **ÿ2** und **ÿ2**
4

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass B **die Menge** Mr2 **×** *MŸ2* **×** *MŸ2* **×** Mr3 **×** *MŸ3* **×** *MŸ3* **in sich selbst abbildet.** ÿ

Bemerkung 4 folgt B **r2**

$$^{(k)}_{(.)(Tk\ )}=\ \mathbf{Aus}\ \ \frac{}{\mathbf{1\ 2}}\ \int_{Tk}^{T\,k+1}Gr2\ (s)ds\ \ddot{y}\ \frac{\mathbf{1}}{\bar{T}}\ \int_{Tk\quad Tk}^{T\,k+1\quad S}Gr2\ (\ddot{y})d\ddot{y}ds=\mathbf{0}\ \mathbf{,}(k=$$

$$k+1\ \mathbf{0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .)\ Und\ da}\ \int_{Tk}^{T}\frac{t\ddot{y}Tk}{T}\ \frac{}{\mathbf{1\ 2}}\ dt=\mathbf{0,\ dann\ erhalten\ wir}$$

$$B_{r}(k)\ (.)(t)\ dt=\int_{Tk}^{T\,k+1}Gr2\ (s)ds\ dt\ \ddot{y}\ \int_{Tk\quad Tk}^{T\,k+1\quad \tau}Gr2\ (s)ds\ \ddot{y}\ \int_{Tk}^{T\,k+1}\frac{t\ \ddot{y}\ Tk}{T}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ dt\ \int_{Tk}^{T\,k+1}Gr2\ (s)ds\ \ddot{y}\ \int_{Tk\quad Tk}^{T\,k+1\quad \ddot{y}}Gr2\ (s)dsd\ddot{y}=\mathbf{0}\ .$$

Darüber hinaus haben wir angesichts von *ÿÿ* **ÿ** c **und den Ungleichungen aus Bemerkung 3**

Machine Translated by Google

$$B^{(k)}_{(.)(t)}\ \ddot{y}\ |Gr2\ \textbf{(s)|ds} + \textbf{r2}\ Tk\ \textbf{\mu(tÿTk\ )}\ |e2e1|\ \ddot{y}\ e \quad \frac{}{1\ 2} \int_{Tk}^{T k+1} Gr2\ (s)ds + \frac{\mathbf{1}}{T} \int_{Tk}^{T k+1} \int_{Tk}^{\tau} Gr2\ (s)dsdt = \int_{Tk}^{\tau} |Gr2\ \textbf{(s)|ds} + \int_{Tk}^{T k+1} Gr2\ (s)ds\ \ddot{y}$$

$$\frac{}{\textbf{m2c}} \quad \frac{\mathbf{1}}{\dot{y}\ \mathbf{2}\ \dot{y}\ \mathbf{2}} \quad \frac{\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{3(}\ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}\ddot{y}\mathbf{)}\ \ddot{y}\mathbf{2}\ 2R2\ \ddot{y}\ 2+ + \mathbf{c}\ \mathbf{2}\ddot{y}\mathbf{2}}{\mathbf{2}\ c} \quad \frac{}{\mathbf{1}\ \mu} + \frac{\mathbf{e}\ \mathbf{\mu T}\ddot{y}\mathbf{1}}{\mu} \quad \ddot{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{m2c}\ \ \mathbf{\mu(tÿTk\ )}\ |e2e1|\ \ddot{y}\ e \quad \frac{\mathbf{1}}{\dot{y}\ \mathbf{2}\ \dot{y}\ \mathbf{2}} \quad \frac{\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{3(}\ +\ \ddot{y}\ 2+\ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}\ddot{y}\mathbf{)}\ c}{\mathbf{2}\ddot{y}\mathbf{2}} + \frac{\ddot{y}\mathbf{2}\ 2R2}{\mathbf{2}\ c} \quad \frac{t\ \mu T}{\mu}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{R2e\ \mu(tÿTk\ )}\cdot$$

Für die zweite Komponente von B **haben wir**

$$^{(k)}_{(.)}(Tk\ ) = \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{02} + B\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2} \quad \frac{}{1\ 2} \int_{Tk}^{T k+1} G\ddot{y}2\ (.)(s)ds\ \ddot{y} \quad \frac{\mathbf{1}}{T} \int_{Tk}^{T k+1} \int_{Tk}^{s} G\ddot{y}2\ (.)(\ddot{y})d\ddot{y}ds = \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{02,}\ (k = \mathbf{0, 1, 2, \ldots);}$$

$$\int_{Tk}^{T} {}^{k+1}_{(t)}\ dt = \mathbf{T\ddot{y}02} + B\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2} \quad \int_{Tk}^{T k+1} \int_{Tk}^{t} G\ddot{y}2\ (s)ds\ \ddot{\mathbf{y}} \quad \int_{Tk}^{T k+1} \frac{t\ddot{y}Tk}{T} \quad \frac{}{1\ 2} \int_{Tk}^{T} k+1\ dt \quad G\ddot{y}2\ (s)ds\ \ddot{\mathbf{y}} \quad \int_{Tk}^{T k+1} \int_{Tk}^{\tau} G\ddot{y}2\ (s)dsdt = \mathbf{T\ddot{y}02}$$

Und

$$B^{(k)}_{(.)(t)}\ \ddot{y}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{02} + \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2} \quad \int_{Tk}^{\tau} G\ddot{y}2\ (s)\ ds + \int_{Tk}^{Tk+1} G\ddot{y}2\ (s)ds\ \ddot{\mathbf{y}}\ e \quad \mathbf{\mu(tÿTk\ )} \quad \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{02} + \frac{|e2e3|}{\mathbf{3\ m^2}} \quad \frac{\ddot{y}\ddot{y}3 + 3c\ddot{y}\ \dot{y}\ \mathbf{3} + \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}}{\ddot{y}\ \mathbf{2}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ \cos(\ddot{y}/2\ \ddot{y}\ \ddot{y})\ c\ddot{y}2} \quad \frac{e\ \mu T}{\mu} \quad \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2e\ \mu(tÿTk\ )}$$

Für die dritte Komponente von B erhalten wir

$$^{(k)}_{(.)(t)}\ \ddot{y}\ B\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2} \quad \int_{Tk}^{\tau} G\ddot{y}2\ (s)\ ds + \int_{Tk}^{T k+1} G\ddot{y}2\ (s)ds\ \ddot{\mathbf{y}}\ e \quad \mathbf{e2e1}\ | \quad \frac{}{\mathbf{m2}} \quad \frac{\overline{c\ddot{y}3}\ \mathbf{3}}{c} \quad \frac{\dot{y}\ \mathbf{3}\ t\ \mu T + \mathbf{3}|\ddot{\mathbf{y}}|}{\ddot{y}\ \mathbf{2}\ddot{\mathbf{y}}} + \frac{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ 2Y2}{\mathbf{3}\ c} \quad \frac{e\ \mu T}{\mu} \quad \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{Y2e\ \mu(tÿTk\ )}\cdot$$

Für die restlichen drei Komponenten von B haben wir

$$^{(k)}\ \mathbf{\mu(tÿTk\ )}\ |e3e1|\ (.)(t)\ \ddot{y}\ e\ B\ \mathbf{r3} \quad \frac{}{\mathbf{m3c}} \quad \frac{\mathbf{1}}{\dot{y}\ \mathbf{2}\ \dot{y}\ \mathbf{3}} \quad \frac{\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{2(}\ +\ \ddot{y}\ 2+\ \ddot{y}\ \mathbf{3+3)}\ \ddot{y}\mathbf{3}\ 2R3 +}{c\ \mathbf{2}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}} \quad \frac{t\ \mu T}{\mu}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{R3e\ \mu(tÿTk\ );}$$

$$^{(k)}\ \mathbf{\mu(tÿTk\ )}\ |e3e1|\ \mathbf{\mu(tÿTk\ )}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{03} + e\ (.)(t)\ \ddot{y}\ e\ B\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3} \quad \frac{}{\mathbf{3\ m3c}} \quad \frac{\ddot{y}\ddot{y}2\ \ddot{y}\ \mathbf{2+}c\ddot{\mathbf{y}}\ +\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}}{\ddot{y}\ \mathbf{3}} \quad e\ \mathbf{cos(}\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{)}\ c\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ \frac{\mu T}{\mu}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3e\ \mu(tÿTk\ );}$$

$$B^{(k)}_{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}}\ (.)(t)\ \ddot{y}\mu(tÿTk\ )\ |e3e1| \quad \frac{}{\mathbf{3\ m3c}} \quad \frac{\overline{c\ddot{y}2}\ \ddot{y}\ \mathbf{2+3}|\ddot{\mathbf{y}}|}{c^{2y}\ \ddot{y}\ \mathbf{3}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}} + \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ 2Y3\ e \quad \frac{\mu T}{\mu}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{Y3e\ \mu(tÿTk\ )}\cdot$$

Für die Ableitungen erster Ordnung der Komponenten von B erhalten wir

$$\frac{dB^{(k)}_{\mathbf{k2}}(.)(t)}{dt}\ \ddot{\mathbf{y}}\ |Gr2\ (.)(t)| + \frac{\mathbf{1}}{T} \int_{Tk}^{T} {}^{k+1}\ e\ \mathbf{\mu\ddot{T}y1\ \mu(tÿTk\ )\ 1} + Gr2\ (.)(s)ds\ \ddot{\mathbf{y}}\ e\ \mu T \quad \frac{}{} \quad \frac{|e2e1|}{\mathbf{m2c}} \quad \frac{\mathbf{1}}{\dot{y}\ \mathbf{2}\ \dot{y}\ \mathbf{2}} + \frac{\overline{c\ddot{y}3}\ \ddot{y}\ 2+\ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}\ddot{\mathbf{y}}}{c\ \mathbf{3}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}} \quad \frac{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ 2R2 +}{\mathbf{2}\ c} \quad \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}2R2e\ \mathbf{\mu(tÿTk\ );}$$

$$\frac{dB^{(k)}_{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}}(.)(t)}{dt}\ \ddot{\mathbf{y}}\ G\ddot{y}2\ (.)(t) + \frac{\mathbf{1}}{T} \int_{Tk}^{T k+1} (.)(s)ds\ \ddot{\mathbf{y}}\ e\ \mu T \quad \mathbf{\mu(tÿTk\ )\ 1} + G\ddot{y}2 \quad \frac{e\ \mathbf{\mu\ddot{T}y1}}{} \quad \frac{|e2e3|}{\mathbf{3\ m^2}} \quad \frac{\overline{c\ddot{y}3}\ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}\ddot{\mathbf{y}}}{\ddot{y}\ \mathbf{2}} + \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}2\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2e\ \mu(tÿTk\ )\ cos(}\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{)}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ ;$$

$$\frac{dB^{(k)}_{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}}(.)(t)}{dt}\ \ddot{\mathbf{y}}\ G\ddot{y}2\ (.)(t) + \frac{\mathbf{1}}{T} \int_{Tk}^{T k+1} (.)(s)ds\ \ddot{\mathbf{y}}\ e\ \mu T \quad \mathbf{\mu(tÿTk\ )\ 1} + G\ddot{y}2 \quad \frac{e\ \mathbf{\mu\ddot{T}y1}}{} \quad \frac{|e2e3|}{\mathbf{3\ m^2}} \quad \frac{\overline{c\ddot{y}3}\ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{e}\ \mu T}{\mathbf{2}\ c\ \ddot{y}\ \mathbf{2}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}} + \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ 2Y2\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}2Y2e\ \mathbf{\mu(tÿTk\ )} \quad ;$$

$$\frac{dB^{(k)}_{\mathbf{r3}}(.)(t)}{dt}\ \ddot{\mathbf{y}}\ e\ \mathbf{\mu(tÿTk\ )\ 1} + \frac{e\ \mathbf{\mu\ddot{T}y1}}{\mu T} \quad \frac{|e3e1|}{\mathbf{m3c}} \quad \frac{\mathbf{1}}{\dot{y}\ \mathbf{3}\ \mathbf{2}} + \frac{\overline{c\ddot{y}2}\ \ddot{y}\ 2+\ \ddot{y}\ \mathbf{3+3}\ddot{\mathbf{y}}}{c\ \mathbf{3}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}} \quad \frac{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ 2R3 +}{\mathbf{2}\ c} \quad \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}3R3e\ \mathbf{\mu(tÿTk\ );}$$

$$\frac{dB^{(k)}_{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}}(.)(t)}{dt}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ \mu T\ \ \mathbf{\mu(tÿkT)\ 1} + \ddot{\mathbf{y}}\ e \quad \frac{e\ \mathbf{\mu\ddot{T}y1}}{} \quad \frac{|e2e3|}{\mathbf{3\ m3c}} \quad \frac{\overline{c\ddot{y}2}\ \ddot{y}\ \mathbf{2+3}\ddot{\mathbf{y}}}{\mathbf{2}\ c\ \ \mathbf{cos(}\ddot{y}/2\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{)}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}\ \ddot{y}\ \mathbf{3}} + \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ \mathbf{2}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3e\ \mu(tÿTk\ )} \quad ;$$

$$\frac{dB^{(k)}_{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}}(.)(t)}{dt}\ e2e3|\ \ddot{y}\ e\ \mathbf{\mu(tÿTk\ )}\ | \quad \frac{}{\mathbf{3\ m3c}} \quad \frac{\overline{c\ddot{y}2}\ \ddot{y}\ \mathbf{2+3}\ddot{\mathbf{y}}}{\mathbf{2}\ c\ \ddot{y}\ \mathbf{3}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2}} + \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{3}\ 2Y3\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}3Y3e\ \mathbf{\mu(tÿTk\ )} \quad .$$

Die Schätzungen für die Ableitungen höherer Ordnung der Komponenten von B **finden Sie im Anhang D.**

Im Folgenden zeigen wir, dass der Operator B **ein kontraktiver Operator im Sinne von [8] ist.**

Machine Translated by Google

Im Hinblick auf Bemerkung 2 wirken die verzögerten Funktionen folgendermaßen:

t **ÿ** ÿ23(t) : [Tk , Tk+1] **ÿ** [Tkÿ1 , Tk], t **ÿ** ÿ32(t) : [Tk , Tk+1] **ÿ** [Tkÿ1 , Tk].

Die Indexmenge von Mr2 **×** *Mÿ2* **×** *Mÿ2* **×** Mr3 **×** *Mÿ3* **×** *Mÿ3* **ist** (k, m), **wobei k,** m = **0, 1, 2, ...**

Wir führen die folgenden Abbildungen der Indexmenge in sich selbst ein: j1(k, m) = (k, m), j2(k, m) = (k **ÿ 1,** m + 1), j3(k, m) = (k, m + 2). ÿGr2 ÿGr2 ÿGr2 ÿGr2 ÿGr2 ÿGr2 ÿGr2 ÿGr2 *ÿÿ2* , *ÿÿ2* , *ÿÿ2* , *ÿÿ3* , *ÿÿ3* , *ÿÿ3* , *ÿ* **r3**

Bezeichnen wir mit ÿGr2 = **max** $\overline{\quad}, \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\,\ddot{y}3}, \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\,\ddot{y}3}, \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\,\ddot{r}2}$

(siehe Anhang E). Dann gilt

Br2 **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3, ÿ3) ÿ** Br2 **(r2, ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3) ÿ**

$$\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ddot{y}2}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \ddot{y}Gr2\ |\ddot{y}2(s)\ \ddot{y}\ \ddot{y}2\ (s)|ds + \frac{}{\ddot{y}\ddot{y}2}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \ddot{y}\ \ddot{y}2(s)\ ds + \ddot{y}\ddot{y}2\ \ddot{y}\ddot{y}3 \quad \frac{\ddot{y}Gr2}{}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \ddot{y}Gr2\ |\ddot{y}2(s)\ \ddot{y}\ \ddot{y}2\ (s)|ds + \ddot{y}2(s)\,{}_{Tk}{}^{T}\ |\ddot{y}3(s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \ddot{y}3\ (s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))|ds +$$

$$+\ \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ddot{y}3}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \ddot{y}Gr2\ |\ddot{y}3(s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \ddot{y}3\ (s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))|ds + \ddot{y}\ddot{y}3\ \frac{}{}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \ddot{y}3(s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \ddot{y}3(s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ ds + \ddot{y}\ \mathbf{r3}\ \frac{\ddot{y}Gr2}{}\,{}_{Tk}{}^{T}\ .\ r3(s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \dot{r}3(s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ ds +$$

$$+\ \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ \ddot{y}3}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\ddot{y}3}\ (s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \ddot{y}3\ (s\ \ddot{y}\ \dot{y}23(s))\ ds + \ddot{y}\ \ddot{y}3\ \frac{\ddot{y}Gr2}{}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \ddot{y}3\ (s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \ddot{y}3\ (s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ ds + \ddot{y}\ \mathbf{r2}\ \frac{\ddot{y}Gr2}{}\,{}_{Tk}{}^{T}\ ..\ r2(s)\ \ddot{y}\ r2(s)\ ds\ \ddot{y}\ Tk$$

$$\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ddot{y}2}\,{}_{Tk\ Tk}{}^{T\ S}\ |r2(p)\ \ddot{y}\ r2(p)|e\ \ddot{y}\mu(p\ddot{y}Tk)\ {}^{t}\ \ddot{y}Gr2\ \mathbf{\mu(p\ddot{y}Tk)dpds} + \frac{}{\ddot{y}\ddot{y}2}\,{}_{Tk\ Tk}{}^{T\ S}\ \ddot{y}\ \ddot{y}2\ (p)\ ee\ {}_{\ddot{y}\mu(p\ddot{y}Tk)\ \ddot{y}2(p)}\ \mathbf{\mu(p\ddot{y}Tk)dpds} +$$

$$+\ \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ddot{y}2}\,{}_{Tk\ Tk}{}^{T\ S}\ |\ddot{y}2(p)\ \ddot{y}\ \ddot{y}2\ (p)|e\ \ddot{y}\mu(p\ddot{y}Tk)\ {}^{t}\ \ddot{y}Gr2\ \mathbf{\mu(p\ddot{y}Tk)dpds} + \frac{}{\ddot{y}\ddot{y}3}\,{}_{Tk\ Tk}{}^{T}\ \mathbf{s\ddot{y}\ddot{y}23(s)}\ |r3(p)\ \ddot{y}\ r3(p)|e\ \ddot{y}\mu(p\ddot{y}Tk)\ {}^{t}\ \mathbf{\mu(p\ddot{y}Tk)dpds} +$$

$$+\ \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ddot{y}3}\,{}_{Tk\ \ Tk}{}^{T}\ \mathbf{s\ddot{y}\ddot{y}23(s)}\ \ddot{y}\ \ddot{y}3\ (p)\ ee\ {}_{\ddot{y}\mu(p\ddot{y}Tk)\ \ddot{y}3(p)}\ \ddot{y}Gr2\ \mathbf{\mu(p\ddot{y}Tk)dpds} + \frac{}{\ddot{y}\ddot{y}3}\,{}_{Tk\ \ Tk}{}^{T}\ \mathbf{s\ddot{y}\ddot{y}23(s)}\ |\ddot{y}2(p)\ \ddot{y}\ \ddot{y}2\ (p)|e\ \ddot{y}\mu(p\ddot{y}Tk)\ {}^{t}\ \mu(p\ddot{y}Tk)dpds +$$

$$+\ \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ \mathbf{r3}}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \mathbf{\ddot{y}Tk)}\ .\ r3(s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \dot{r}3(s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ e\ \mathbf{\ddot{y}\mu(s\ddot{y}\ddot{y}23(s)}\ {}^{t}\ \mathbf{\mu(s\ddot{y}\ddot{y}23(s)\ddot{y}Tk)ds} + \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ \ddot{y}3}\,{}_{Tk}{}^{T}\ \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\ddot{y}3}\ \mathbf{\ddot{y}Tk)}\ (s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \ddot{y}3\ (s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ e\ \mathbf{\ddot{y}\mu(s\ddot{y}\ddot{y}23(s)}\ {}^{t}\ \mathbf{\mu(s\ddot{y}\ddot{y}23(s)\ddot{y}Tk)ds} +$$

$$+\ \frac{\ddot{y}Gr2}{\ddot{y}\ \ddot{y}3}\,{}_{Tk}{}^{T}\ .\ \ddot{y}23(s))\ \ddot{y}\ \ddot{y}3\ (s\ \ddot{y}\ \ddot{y}23(s))\ ee\ {}_{\ddot{y}\mu(s\ddot{y}\ddot{y}23(s)\ddot{y}Tk)\ \ddot{y}3\ (s\ \ddot{y}}\ \mathbf{\mu(s\ddot{y}\ddot{y}23(s)\ddot{y}Tk)ds} + \ddot{y}\ \mathbf{r2}\ \frac{\ddot{y}Gr2}{}\,{}_{Tk}{}^{T}\ r2(s)\ \ddot{y}\ r2(s)\ ee\ Tk\ {}_{\ddot{y}\mu(s\ddot{y}Tk)\ ..}\ \mathbf{\mu(s\ddot{y}Tk)ds\ \ddot{y}}$$

$$\ddot{y}Gr2\ e\ \mathbf{\mu2}\ \mathbf{\mu(t\ddot{y}Tk)\ d(k,0)}\ \frac{}{(r2\ ,r2\ )\ \ddot{y}} + \frac{\mathbf{d(k,0)(\ddot{y}2\ ,\ddot{y}2)}}{\mathbf{\mu2}} + \frac{\mathbf{d(k,0)}\ (\ddot{y}2\ ,\ddot{y}2\ )}{\mathbf{\mu2}} + \frac{\mathbf{d(k,0)}\ (r3\ ,r3\ )}{\mu} + \frac{\mathbf{d(k,0)(\ddot{y}3\ ,\ddot{y}3)}}{\mu} + \frac{\mathbf{d(k,0)(\ddot{y}3\ ,\ddot{y}3)}}{\mu}\,{}_{Tk}{}^{T}\ {}^{t}\ \mathbf{\mu(s\ddot{y}\ddot{y}23\ddot{y}Tk)\ \ddot{y}\ 1}\ ds +$$

$$+\ \frac{(r3\ ,r3\ ) + +}{\mu}\ \frac{\mathbf{\ddot{y}d(k\ddot{y}1,1)(\ddot{y}3\ ,\ddot{y}3)\ \ddot{y}d(k\ddot{y}1,1)(\ddot{y}3\ ,\ddot{y}3)\ \ddot{y}d(k\ddot{y}1,1)}}{\mu}\,{}_{Tk}{}^{T}\ {}^{t}\ \mathbf{\mu(s\ddot{y}\ddot{y}23(s)\ddot{y}Tk)ds} + \frac{\ddot{y}2d(k,2)\ (r2\ ,r2\ )}{\mu}\,{}_{Tk}{}^{T}\ {}^{t}\ \mathbf{\mu(s\ddot{y}Tk)ds\ \ddot{y}}$$

$$\ddot{y}\ \ddot{y}Gr2\ e\ \mathbf{\mu(t\ddot{y}Tk)}\ \frac{\mathbf{d(k,0)}\ (r2\ ,r2\ )}{\mathbf{\mu2}} + \frac{\mathbf{d(k,0)(\ddot{y}2\ ,\ddot{y}2)}}{\mathbf{\mu2}} + \frac{\mathbf{d(k,0)}\ (\ddot{y}2\ ,\ddot{y}2\ )}{\mathbf{\mu2}} + \frac{\mathbf{d(k,0)}\ (r3\ ,r3\ )}{\mu} + \frac{\mathbf{d(k,0)(\ddot{y}3\ ,\ddot{y}3)}}{\mu} + \frac{\mathbf{d(k,0)(\ddot{y}3\ ,\ddot{y}3)}}{\mu}\,{}_{Tk}{}^{T}\ {}^{t}\ \mathbf{\mu(s\ddot{y}Tk)\ (1\ \ddot{y}}\ e\ \ddot{y}\mu\ddot{y}23\ )ds +$$

$$+e\ \mathbf{\mu(t\ddot{y}Tk)}\ \frac{\ddot{y}}{\mathbf{d(k\ddot{y}1,1)\ (r3,r3)} + \mathbf{d(k\ddot{y}1,1)\ \ddot{y}3,\ \ddot{y}3} + \mathbf{d(k\ddot{y}1,\ 1)\ (\ddot{y}3,\ \ddot{y}3\ )} + e\ \mathbf{\mu2}}\ \frac{}{}\ \frac{}{}\ \mathbf{\mu(t\ddot{y}Tk)}\ \ddot{y}2\mathbf{d(k,2)\ (r2\ ,r2\ )\ \mu2}\ \frac{}{}\ \mathbf{\ddot{y}}$$

$$\ddot{y}Gr2\ e + \mathbf{\mu2}\ \mathbf{\mu(t\ddot{y}Tk)\ 2\ \ddot{y}}\ \frac{\mathbf{d(k,0)}\ (r2\ ,r2\ )\mathbf{+d(k,0)(\ddot{y}2\ ,\ddot{y}2)+d(k,0)}\ (\ddot{y}2\ ,\ddot{y}2\ )}{}\ \frac{}{}\ \frac{\ddot{y}\ \mathbf{d(k\ddot{y}1,1)}\ (r3\ ,r3\ )\mathbf{+d(k\ddot{y}1,1)(\ddot{y}3\ ,\ddot{y}3)+d(k\ddot{y}1,1)(\ddot{y}3\ ,\ddot{y}3)\ \mu2}}{}\ \frac{}{} + \frac{\ddot{y}2d(k,2)\ (r2\ ,r2\ )}{\mathbf{\mu2}}\ .$$

Daraus folgt, dass

$$\mathbf{\mu2\ d(k,0)}\ {}_{\mathbf{r2}}^{(k)}\ (.),\ B\ \mathbf{(.)}\ {}_{\mathbf{\ddot{y}}}^{(k)}\ \mathbf{d(k,0)}\ B$$

$$\frac{}{}\ \frac{\mathbf{2}}{}\ \mathbf{(r2,\ \ddot{y}2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3),(r2,\ \mathbf{\ddot{y}2\ ,\ \ddot{y}2\ ,r3,\ \ddot{y}3\ ,\ \ddot{y}3\ )} + \mathbf{\mu2\ d(k\ddot{y}1,1)\ (r2,\ \ddot{y}2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3),(r2,\ \mathbf{\ddot{y}2\ ,\ \ddot{y}2\ ,r3,\ \ddot{y}3\ ,\ \ddot{y}3\ )} + \mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}Gr2\ \mathbf{\ddot{y}2} +$$

$$\mathbf{\mu2\ d(k,2)\ (r2,\ \ddot{y}2,}\ \ddot{y}2,r3,\ \mathbf{\ddot{y}3,}\ \ddot{y}3),(r2,\ \mathbf{\ddot{y}2\ ,\ \ddot{y}2\ ,r3,\ \ddot{y}3\ ,\ \ddot{y}3\ )}\ .$$

In ähnlicher Weise erhält man

Machine Translated by Google

B (.), B **(.) ÿrÿ** (k) (k) **d(k,0)** ÿGr3 **r3**

2

µ2 d(k,0) (r2, ÿ2, ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3),(r2, **ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3)** + **µ2 d(kÿ1,1) (r2, ÿ2,** ÿ2 ,r3, **ÿ3,** ÿ3),(r2, **ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3)** +

+ **ÿ2**

µ2 d(k,2) (r2, ÿ2, ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3),(r2, **ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3)** .

Weiter haben wir

Bÿ2 **(r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3, ÿ3)** ÿ *Bÿ2* **(r2, ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3)** ÿ

ÿ |ÿ2(s) **ÿ ÿ2 (s)|ds** + *ÿÿ2* |ÿ2(s) **ÿ ÿ2 (s)|ds** + *ÿÿ2* ÿ2(s) **ÿ** ÿ2(s) ds+ *ÿÿ3* ÿ3(s **ÿ** ÿ23(s)) **ÿ ÿ3** (s **ÿ** ÿ23(s)) ds+

ÿ3(s **ÿ** ÿ23(s)) **ÿ ÿ3** (s **ÿ** ÿ23(s)) ds + *ÿÿ3* ÿ3(s **ÿ** ÿ23(s)) **ÿ** ÿ3(s **ÿ** ÿ23(s)) ds + **.** r3(s **ÿ** ÿ23(s)) **ÿ** r3(s **ÿ** ÿ23(s)) ds+

(s **ÿ** ÿ23(s)) **ÿ ÿ3** (s **ÿ** ÿ23(s)) ds + **ÿ3** (s **ÿ** ÿ23(s)) **ÿ ÿ3** (s **ÿ** ÿ23(s)) ds + **ÿ2** (s) **ÿ ÿ2** (s) ds **ÿ**

ÿ **m2 cos(ÿ/2ÿÿ)** **3 (ÿÿ(R3/µ)e** µT) **3** **c 4ÿÿ(R3/µ)e** µT) **2** + **c 4ÿÿ(R3/µ)e** µT) **2** =

und so weiter.

Mit Br2 = Br2 **(r2, ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3),** . . . , *Bÿ3* = *Bÿ3* **(r2, ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3) erhalten wir**

d(k,0) (Br2 , *Bÿ2* , *Bÿ3* , Br3 , *Bÿ3* , *Bÿ3*), (Br2 , *Bÿ2* , *Bÿ3* , Br3 , *Bÿ3* , *Bÿ3*) **ÿ**

2(ÿGr3 +...+ÿGÿ3) ÿ(ÿGr3 +...+ÿGÿ3) **d(k,0) (r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3),(r2, **ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3)** + **d(kÿ1,1) (r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3),(r2, **ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3)** + **ÿ µ2 µ2**

+ **ÿ2** (ÿGr3 +...+ÿGÿ3) **d(k,2) (r2, ÿ2,** ÿ2,r3, **ÿ3,** ÿ3),(r2, **ÿ2 , ÿ2 ,r3, ÿ3 , ÿ3) . µ2**

2(ÿGr3 +...+ÿGÿ3) ÿ(ÿGr3 +...+ÿGÿ3) **1 3 ;** **ÿ2** (ÿGr3 +...+ÿGÿ3) **1 3 ;**

Wenn µ2 **µ2** **µ2** **1 3** **nicht erfüllt sind,**

dann wenden wir die Ungleichungen aus Anhang A an **und erhalten die gewünschten Ungleichungen für ein ausreichend großes** m **ÿ N:**

ÿm 2(ÿGr3 + . . . + *ÿGÿ3*) **µ2** µm ÿm ÿ(ÿGr3 + . . . + *ÿGÿ3*) ÿm **ÿ2** (ÿGr3 + . . . + *ÿGÿ3*) **µ2** µm

1 3 ; **µm** **µ2** **1 3 ;**

Man sieht leicht, dass der Raum Mr2 **×** *Mÿ2* **×** *Mÿ2* **×** Mr3 **×** *Mÿ3* **×** *Mÿ3* **(j1, j2,** j3) -beschränkt **ist und die Abbildungen** js : A **ÿ** A (s = **1, 2,** 3) **kommutativ sind. Dann hat der Operator (B2r ,** *B2ÿ,* **B3r ,** *B3ÿ)* **im Hinblick auf den Fixpunktsatz aus [8] einen eindeutigen Fixpunkt, der im Hinblick auf das Hauptlemma eine T-periodische Lösung von (BS) ist.**

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Numerische Ergebnisse

Wir überprüfen die Ungleichungen aus dem Hauptsatz:

m2 **c** **2** **3 c** **µ** **ÿ R2; ÿ02** + **m2** **µT** **3 c** **µ** **ÿ ÿ2;**

m2 **c** **3 c** **µ** **ÿ Y2.**

Es ist bekannt (vgl.

[21]) , dass en = **1,6×10ÿ19C;** mn = **9,11×10ÿ19kg** (n = **2,** 3); c = **3×108m/ sec; ÿ2 = 4 × 1016 ÿ 1,57 × 10ÿ16** , **ÿ3 = 4 × 1016 ÿ 1,57 × 10ÿ16** , *ÿ* **ÿ ÿ c,** *ÿ* = **6** , **ÿ20 < ÿ0.**

Wählt man *µ* = **6 × 1016 >** *ÿ* = **4 × 1016 und** µT = **6 × 106 × 1, .57 × 10ÿ16** = **9,42**

> ÿT = *2ÿ,* **so erhält man** e **9.42** **ÿ 1,2 × 104** , **1,2×104 / 6×1016 ÿ 2 × 10ÿ13 .**

Machine Translated by Google

Wir haben (R2 + **R3)** e $\frac{\mu T}{\mu}$ **ÿ** $\frac{2\bar{c}}{\mu}$ = $\frac{2{,}2\times106}{6\times1016}$ **ÿ 0 ÿ ÿ ÿ |ÿ02 ÿ ÿ03|;**

2,81 × 10ÿ8 $\frac{1}{\text{ÿ03|}\ 4\times1016(5{,}3\times10\text{ÿ}11+3|\text{ÿ}02\text{ÿ}\text{ÿ}03|)\ 16\times1032+137\times9\times1016|}$ **R2 2 × 10ÿ13 ÿ R2;**

5,62 × 10ÿ21 $\frac{5{,}3\times10\text{ÿ}11\times4{,}8+3|\text{ÿ}02\text{ÿ}\text{ÿ}03|\ 16\times1032+137\times9\times1016}{27\times1024\ 5{,}3\times10\text{ÿ}11|\text{ÿ}02\text{ÿ}\text{ÿ}03|}$ **ÿ2 ÿ ÿ2 ÿ ÿ02;**

2,81 × 10ÿ8 4×1016 **Y2 2 × 10ÿ13 ÿ Y2.**

Da |ÿ02 ÿ ÿ03| ÿ 10ÿ11, dann

5,62 $\frac{103}{+\ 6\times107R2\ 10\text{ÿ}21\ \text{ÿ}\ R2.+\ +\ 4{,}11\times1012\times10\text{ÿ}22\ 4{,}11\times1018\times10\text{ÿ}11\ 15{,}9}$ $\frac{1}{}$ $\frac{1}{}$

Für die zweite Ungleichung erhalten wir

5,62 × 10ÿ21 6,5 × 1019 + **3,7 × 1019** + **0,6 × 108ÿ2 ÿ ÿ2 ÿ ÿ02.**

Schließlich gilt 5,62 1,6 × 1020 + **1,8 × 1019** + **6,107Y2 10ÿ21 ÿ Y2.**

7. Diskussion über die Bohr- und Sommerfeld-Hypothese

Nach Bohrs erster Hypothese (vgl. [22,23]) bewegen sich die beiden Elektronen des He-Atoms auf entgegengesetzten Kreisbahnen in einer Ebene. Damit haben wir das Kepler-Problem mit den Bedingungen ÿ2 = 0, ÿ3 = 0, ÿ3(t) = ÿ2(t) + **ÿ, woraus sich**

ÿ2(t) **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ23) ÿ** *ÿ2ÿ23* **ÿ** *ÿ* $\frac{\text{ÿ}23}{2c}$ **ÿ 1016 5,3×10ÿ11 ÿ 10ÿ3 ;**

ÿ3(t **ÿ ÿ32) ÿ** ÿ3(t) **ÿ** *ÿ3ÿ32* **ÿ** *ÿ* $\frac{\text{ÿ}23}{2c}$ **ÿ 1016 5,3×10ÿ11 ÿ 10ÿ3 ; unddann 6×108**

cos ÿ23 = *cos(ÿ2(t)* **ÿ** ÿ3(t **ÿ ÿ23))** = *cos(ÿ2(t)* **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ23) ÿ** ÿ) = **ÿ** *cos(ÿ2(t)* **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ23)) ÿ ÿ1;**

sin ÿ23 = **ÿ** sin(ÿ2 **ÿ** ÿ3(t **ÿ ÿ23))** = **ÿ** *sin(ÿ2(t)* **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ23) ÿ** ÿ) = *sin(ÿ2(t)* **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ23)) ÿ 0 .**

Seit $\dot{\ddot{y}}_{(23)}$ **,** $\dot{\ddot{y}}_{(3)}$ **.ÿ** u = **ÿ2[cos(ÿ2 ÿ ÿ3) ÿ** 1] .. **ÿ3** = *ÿ2ÿ2* **ÿ3 ,** $\dot{\ddot{y}}_{(32)}$ **,** $\dot{\ddot{y}}_{(2)}$ **.ÿ** u = *ÿ2ÿ3* **die Gleichung ÿ2 ,**

Bewegungen werden

$$\dot{r}_2 = \frac{m_2}{}\ \frac{1}{c\ddot{y}_2^{\,2}} + \frac{e_2e_3}{m_2}\ \frac{4\ddot{y}_2\, r_3\, c^{\,2}}{6\ddot{y}_{23}\, 3} + \frac{\dot{r}_3}{c\ 4\ddot{y}_{23}} \quad \frac{\ddot{r}_2}{m_2\ C^3};\quad \dot{\ddot{y}}_2 = \ddot{y}\ \frac{m_2}{}\ \frac{\dot{y}_3\ \dot{y}_3}{c\ 4\ddot{y}_{23}\ddot{y}_2} + \frac{\ddot{y}_2}{3\,c};$$

$$\dot{r}_3 = \frac{m_3}{e_3e_1}\ \frac{1}{2\,c\ddot{y}_3} \quad \frac{m_3}{e_2e_3}\ \frac{4\ddot{y}_3\ \ddot{y}_2^{\,2}+}{6\ddot{y}_{32}\ 3\ c\ 4\ddot{y}_{23}}\ \frac{\dot{r}_2}{} \quad \frac{\ddot{r}_3}{m_3\ c^{\,3}};\quad \dot{\ddot{y}}_3 = \frac{m_3}{e_3e_2}\ \frac{\dot{y}_2\ \ddot{y}_2\cos\ddot{y}_{32}}{c\ 4\ddot{y}_{32}\ddot{y}_3}\ \frac{\ddot{y}_3}{3\,.\,c}$$

Dieses System ist ein Sonderfall von (BS) und hat eine einzigartige periodische Lösung.

Die zweite Bohrsche Hypothese (vgl. [22,23]) lautet: Die beiden Elektronen bewegen sich in zwei verschiedenen Ebenen in einem Winkel von 60 Grad zueinander. Das bedeutet, dass man ÿ2 = 0, ÿ3 = ÿ/3 ÿ ÿ3 = 0, ÿ3(t) = ÿ2(t) + *ÿ* **> 0 wählen kann, wobei** *ÿ* **weiter unten definiert wird.**
Aus (BS) ergibt sich das Bewegungsgleichungssystem

$$\dot{r}_2 = \frac{m_2}{}\ \frac{1}{c\ddot{y}_2^{\,2}}\ \frac{m_2}{}\ \frac{\ddot{y}_2\ddot{y}_3\cos\ddot{y}_{23}\ 3\ c\ \dot{\ddot{y}}_{(23)}}{c\ 3\ddot{y}_{23}\ 3}\ \frac{\dot{\ddot{y}}_{(3)}}{}\ \frac{m_2}{}\ \frac{\cos\ddot{y}_{23}+\ddot{y}_3\ c\ 4\ddot{y}_{23}\ddot{y}_3\sin\ddot{y}_{23}\ r_3}{}\ \frac{\ddot{r}_2}{m_2\ C^3};$$

$$\dot{\ddot{y}}_2 = \frac{m_2}{}\ \frac{\ddot{y}_3\sin\ddot{y}_{23}}{\ddot{y}_{23}\ 3\ddot{y}_2}\ \frac{\dot{\ddot{y}}_{(3)}}{6\,c}\ \frac{r_3\sin\ddot{y}_{23}+\ddot{y}_3\cos\ddot{y}_{23}+c}{4\ddot{y}_{23}\ddot{y}_2}\ \frac{\ddot{y}_2}{3\,c}$$

$$\dot{r}_3 = \frac{m_3}{e_3e_1}\ \frac{1}{2\,c\ddot{y}_3}\ \frac{m_3}{e_2e_3}\ \frac{\ddot{y}_3\ddot{y}_2\cos\ddot{y}_{32}\ 3\ c\ \dot{\ddot{y}}_{(32)}}{c\ 3\ddot{y}_{32}\ 3}\ \frac{\dot{\ddot{y}}_{(2)}}{}\ \frac{m_3}{e_3e_2}\ \frac{\cos\ddot{y}_{32}+\ddot{y}_2\ c\ 4\ddot{y}_{23}\ddot{y}_2\sin\ddot{y}_{32}\ r_2}{}\ \frac{\ddot{r}_3}{m_3\ C^3};\qquad (11)$$

$$\dot{\ddot{y}}_3 = \frac{m_3}{e_3e_2}\ \frac{\ddot{y}_2\sin\ddot{y}_{32}}{\ddot{y}_{32}\ 3\ddot{y}_3}\ \frac{\dot{\ddot{y}}_{(32)}\ \dot{\ddot{y}}_{(2)}}{6\,c}\ \frac{r_2\sin\ddot{y}_{32}+\ddot{y}_2\cos\ddot{y}_{32}+c}{4\ddot{y}_{32}\ddot{y}_3}\ \frac{\ddot{y}_3}{3\,c}$$

$$0 = \frac{(\ddot{y}_3\cos\ddot{y}_{32}\ddot{y}_2)\ .\ r_2+\sin\ddot{y}_{32}\ddot{y}_2\ddot{y}_3\ \ddot{y}_2\sin\ddot{y}_{32}\ \ddot{y}_2\ r_3\cos\ddot{y}_{32}+\ddot{y}_2\ddot{y}_2\cos\ddot{y}_{32}+2\,2c\,6\,4\,\ddot{y}_{32}\,c}{}\ .$$

Machine Translated by Google

Gleichung (11) kann als zusätzliche Bedingung für die Existenz einer periodischen Lösung betrachtet werden. Tatsächlich gilt

ÿ23 = ÿ2(t) **ÿ** ÿ3(t **ÿ ÿ23),** ÿ3(t) = ÿ2(t) + **ÿ, ÿ23** = ÿ2(t) **ÿ** ÿ2(t **ÿ ÿ23) ÿ** *ÿ* **ÿ** *ÿÿ;* **ÿ32** = ÿ2(t **ÿ ÿ32) ÿ** ÿ3(t), ÿ3(t) = ÿ2(t) + **ÿ, ÿ32** = ÿ2(t **ÿ ÿ32) ÿ** ÿ2(t) **ÿ** *ÿ* **ÿ** *ÿÿ;* **cos ÿ32 ÿ cos ÿ, sin ÿ32 ÿ ÿ sin ÿ.**

Dann wird Gleichung (11)

$$\frac{\ddot{y}32}{} \quad \frac{(\ddot{y}3\cos\dot{y}\ \ddot{y}\ 2\ddot{y}2)\ .\ r2 + \dot{y}2\ddot{y}\ddot{y}2\sin\dot{y}\ \ddot{y}2\cos\ddot{y}\ 0 = 2\ 2c\ 6}{} \quad \frac{\dot{r}3\cos\ddot{y} + \ddot{y}2\ \dot{\ddot{y}}2\sin\dot{y} +}{c^4}.$$

Für ÿ2 = **ÿ3** = *ÿ* = const. **erhält man**

$$\frac{2\cos\dot{y}\ \dot{y} +}{\ddot{y}32} \quad \frac{\dot{\ddot{y}}2\sin\dot{y}}{c^4} = 0\ \ddot{y}\sin\dot{y} = 0\ \ddot{y}\ \ddot{y} = 0\ \ddot{y}\ \ddot{y} = \ddot{y},$$

was die Bohrsche Hypothese für *ÿ* = **ÿ bestätigt. Dann werden die Bewegungsgleichungen**

$$\dot{r}2 = \frac{m2}{cy2}\ \frac{1}{2} \quad \frac{m2}{2c\ 3\ddot{y}2\ddot{y}3\ .\ \dot{y}2\ r3\ 3} \quad \frac{m2}{2c\ 4\ddot{y}23}\ \frac{\dot{r}3}{m2}\ \frac{\ddot{r}2}{c}\ 3\ ;\ \dot{\ddot{y}}2 = \ddot{y} \quad \frac{m2}{2\dot{y}3\ \ddot{y}3\ \ddot{y}2 + c\ 4\ddot{y}23\ddot{y}2}\ ;$$

$$\dot{r}3 = \frac{m3}{e3e1\ 1\ c\ddot{y}3}\ \frac{}{2} + \frac{e2e3\ \ (\ddot{y}3+2\ddot{y}2)\ .}{2c\ 3\ddot{y}32\ 3\ m3}\ \frac{r2}{2c}\ \frac{e3e2\ r2 +}{4\ddot{y}23\ m3}\ \frac{\dot{r}3}{3\ m3}\ \frac{\ddot{r}3}{c}\ 3\ ;\ \dot{\ddot{y}}3 = \ddot{y} \quad \frac{m3}{e3e2}\ \frac{2\dot{y}2\ \ddot{y}2\ \ddot{y}3 + c}{4\ddot{y}32\ddot{y}3}\ \frac{\ddot{r}}{3}\ .\ c$$

Später werden von A. Sommerfeld [23] **zusätzliche Annahmen gemacht , die sich aber wiederum als Sonderfall unserer Gleichungen erweisen. Wir bemerken, dass die Spingleichung für das ebene Keplerproblem (untersucht in [24]) Lösungen mit entgegengesetztem Vorzeichen hat.**

8. Schlussfolgerungen

Wir haben Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit einer periodischen Lösung für das Dreikörperproblem der klassischen Elektrodynamik erhalten. Dies umfasst das He-Atom und die He-ähnlichen Atome – beispielsweise das Li-Atom ohne ein Elektron. Wir geben eine neue Formulierung der verzögerten Wirkung zwischen bewegten Teilchen, indem wir die Bewegungsgleichungen aufspalten. Wie in früheren Arbeiten verwenden wir eine Operatorformulierung eines periodischen Problems und beweisen mit der Fixpunktmethode die Existenz und Eindeutigkeit einer periodischen Lösung des 3D-Kepler-Problems. Auf diese Weise zeigen wir die Stabilität des He-Atoms im Rahmen der klassischen Elektrodynamik. Derselbe Ansatz kann zur Untersuchung eines ähnlichen Problems für Atome mit komplizierteren Strukturen verwendet werden. In einem besonderen Fall erhalten wir eine Bestätigung der von Bol

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Danksagungen: Der Autor dankt Takayuki Hibi für seine Einladung, einen Beitrag einzureichen, und den Gutachtern, deren sehr nützliche Vorschläge den Beitrag verbessert haben.

Interessenkonflikte: Der Autor erklärt, dass kein Interessenkonflikt besteht.

Anhang A. Herleitung der Ausgangsgleichungen in Kugelkoordinaten Wir gehen zu den

Kugelkoordinaten über, d. h. das Teilchen Pn(n = **2,** 3) **befindet sich im Punkt**

x1 (n) *(ÿ)* = ÿn(ÿ) **cos** ÿn(ÿ) **cos** *ÿn(ÿ);* (n) *(ÿ)* =
x2 ÿn(ÿ) **sin** ÿn(ÿ) **cos** *ÿn(ÿ);* (n) *(ÿ)* = ÿn(ÿ) **sin**
x3 ÿn(ÿ)

wobei ÿn(ÿ) **ÿ 0 ;** ÿn(ÿ) **ÿ 0 ;** ÿn(ÿ) **ÿ** *ÿÿ* + **ÿ,** $\overline{2}$ $\frac{\ddot{y}}{2}$ **ÿ** *ÿ* **, 0 <** *ÿ* **<** $\frac{\ddot{y}}{2}$, **und dann sind die Geschwindigkeiten**

u1 (n) = $\dot{\text{ÿn}}$ **cos** ÿn **cos** ÿn **ÿ** ÿn ÿn **sin** ÿn **cos** ÿn **ÿ** ÿn ÿn **cos** ÿn **sin** $\dot{\text{ÿn}}$
u2 (n) = $\dot{\text{ÿn}}$ **sin** ÿn **cos** ÿn + ÿn $\dot{\text{ÿn}}$ ÿn **cos** ÿn **cos** ÿn **ÿ** ÿn ÿn **sin** ÿn **sin** $\dot{\text{ÿn}}$
u3 (n) = $\dot{\text{ÿn}}$ **sin** ÿn + ÿn ÿn **cos** ÿn

Machine Translated by Google

(2) wobei $\dot{y} = d\ddot{y}$ **(2)/d**$\ddot{y}$**. Für die Beschleunigungen gilt**

$$\dot{u}_1^{(n)} \ddot{y} \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \ddot{y} \ddot{y}n \ddot{y}n \sin \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \ddot{y} \ddot{y}n \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \sin \ddot{y}n$$
$$\dot{u}_2^{(n)} \ddot{y} \ddot{y}n \sin \ddot{y}n \cos \ddot{y}n + \ddot{y}n \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \ddot{y} \ddot{y}n \ddot{y}n \sin \ddot{y}n \sin \ddot{y}n$$
$$\dot{u}_3^{(n)} \ddot{y} \ddot{y}n \sin \ddot{y}n + \ddot{y}n \ddot{y}n \cos \ddot{y}n.$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir die Ausdrücke für die zweiten Ableitungen (n = **2,** 3):

$$\ddot{u}_1^{(N)} \ddot{y} \dddot{y}_N \cos \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \ddot{y} \quad \dddot{y}_N \ddot{y}n \sin \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \ddot{y} \ddot{y}\, n\ddot{y}n \cos \ddot{y}n \sin \ddot{y}n$$
$$\ddot{u}_2^{(n)} \ddot{y} \dddot{y}_N \sin \ddot{y}n \cos \ddot{y}n + \quad \dddot{y}_N \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \cos \ddot{y}n \ddot{y} \ddot{y}\, n\ddot{y}n \sin \ddot{y}n \sin \ddot{y}n$$
$$\ddot{u}_3^{(n)} \ddot{y} \dddot{y}_N \sin \ddot{y}n + \ddot{y}\, n\ddot{y}n \cos \ddot{y}n$$

Die Bedingung (C) impliziert

$$\ddot{y}u^{(2)}, \ddot{y}u^{(2)} = \dot{2}\ddot{y}2 + \ddot{y}2 \quad \dot{2}\ddot{y}2 \quad 2\cos 2\ddot{y}2 + \ddot{y}2 \quad \dot{2}\ddot{y}2 \quad 222\ddot{y}c < c \quad \ddot{y} \quad \dot{+}\ddot{c}\ddot{y}2 \mid \ddot{y}0, \quad \frac{|\ddot{y}2\,\ddot{y}2}{c} \dot{+} \ddot{y}0, \quad \frac{\dot{\ddot{y}}2\,\ddot{y}2}{c} \ddot{y}0;$$

$$\ddot{y}u^{(2)}, \ddot{y}u^{(2)} /C^2 \ddot{y}0;$$

$$(2).\ddot{y}u, (2).\ddot{y}u = \ddot{2}\ddot{y}2 + \ddot{y}2 \quad \ddot{2}\ddot{y}2 \quad 2\cos 2\ddot{y}2 + \ddot{y}2 \quad \ddot{2}\ddot{y}2 \quad 2; \quad \ddot{y}u^{(2)}, \ddot{y}u^{(2)} = \dddot{2}\ddot{y}2 + \ddot{y}2 \quad \dddot{2}\ddot{y}2 \quad 2\cos 2\ddot{y}2 + \ddot{y}2 \quad 222\ddot{y}2.$$

Weiter haben wir

$$\ddot{y}^{(12)} \ddot{y}^{(12)}_1, \ddot{y}^{(12)}_1, \ddot{y}^{(1)}_1, \ddot{y}^{(2)}_1, \ddot{y}^{(1)}_2, \ddot{y}^{(2)}_2 = (\ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_1) = x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}12(t)), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}12(t)), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}12(t)) =$$
$$= \ddot{y}x_1 \quad (\ddot{y}\ddot{y}2\ \cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}2, \ddot{y}\ddot{y}2\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}2, \ddot{y}\ddot{y}2\sin\ddot{y}2);$$

$$\ddot{y}^{(13)} \ddot{y}^{(13)}_1, \ddot{y}^{(13)}_1, \ddot{y}^{(1)}_1, \ddot{y}^{(3)}_1, \ddot{y}^{(1)}_2, \ddot{y}^{(3)}_2 = (\ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_1) = x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}13(t)), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}13(t)), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}13(t)) =$$
$$= \ddot{y}x_1 \quad (\ddot{y}\ddot{y}3\ \cos\ddot{y}3\cos\ddot{y}3, \ddot{y}\ddot{y}3\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}3, \ddot{y}\ddot{y}3\sin\ddot{y}3);$$

$$\ddot{y}12(t) = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\ddot{y}=1}^{3} X_{\ddot{y}}^{(1)}(t)\,\ddot{y}\,x\,\ddot{y}^{(2)}(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}12(t))^2} = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\ddot{y}=1}^{3} \ddot{y}x^{(2)}(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}12(t))^2} = \frac{\ddot{y}2\,(t\ddot{y}\ddot{y}12(t))}{c} = \frac{\ddot{y}2}{d(\ddot{y})};$$

$$\ddot{y}21 = \frac{1}{c}\sqrt{\ddot{y}^{(21)}_{\ddot{y}}, \ddot{y}^{(21)}_{\ddot{y}}} = \frac{1}{c}\sqrt{\ddot{y}x^{(2)}, \ddot{y}x^{(2)}} = \frac{\ddot{y}2}{c};$$

$$\ddot{y}13(t) = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\ddot{y}=1}^{3} X_{\ddot{y}}^{(1)}(t)\,\ddot{y}\,x\,\ddot{y}^{(3)}(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}13(t))^2} = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\ddot{y}=1}^{3} \ddot{y}x^{(2)}(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}13(t))^2} = \frac{\ddot{y}3\,(t\ddot{y}\ddot{y}13(t))}{c} = \frac{\ddot{y}3}{c}(\ddot{y});$$

$$\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4^{(21)}(21)(21)(21)\ddot{y}(21) = \ddot{y}^{(21)}_{\ddot{y}}(21), \ddot{y}_4 = x_1 \quad (2)(1)(2)(1)(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}21(t)), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}21(t)), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}21(t)), i\ddot{c}\ddot{y}21 =$$
$$= x_1 \quad (2)(2)(2)(t), x(t), x(t), i\ddot{c}\ddot{y}21; 2 3$$

$$\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4^{(23)}(23)(23)(23)\ddot{y}(23) = \ddot{y}^{(23)}_{\ddot{y}}(23), \ddot{y}_4 = x_1 \quad (2)(3)(2)(3)(2)(3)(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}23), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}23), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}23), i\ddot{c}\ddot{y}23$$
$$= 1 \quad 2 \quad 3$$

$$= (\ddot{y}2\ \cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}3\cos\ddot{y}3\cos\ddot{y}3, \ddot{y}2\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}3\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}3, \ddot{y}2\sin\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}3\sin\ddot{y}3); \quad c\ 2\ddot{y}23\ 2 = (\ddot{y}2\ \cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}2$$
$$\ddot{y}\,\ddot{y}3\cos\ddot{y}3\cos\ddot{y}3)^2 + (\ddot{y}2\ \sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}3\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}3)^2 + (\ddot{y}2\ \sin\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}3\sin\ddot{y}3)^2 =$$
$$2 = \ddot{y}2^2 + \ddot{y}3^2 \ddot{y}\,2\ddot{y}2\ddot{y}3[\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3\cos(\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}3) + \sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}3];$$

$$\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4^{(31)}(31)(31)(31)\ddot{y}(31) = \ddot{y}^{(31)}_{\ddot{y}}(31), \ddot{y}_4 = x_1 \quad (3)(1)(3)(1)(3)(1)(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}31(t)), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}31(t)), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}31(t)), i\ddot{c}\ddot{y}31 =$$
$$= x_1 \quad (3)(3)(3)(t), x(t), x(t), i\ddot{c}\ddot{y}31; 2 3$$

$$\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4^{(32)}(32)(32)(32)\ddot{y}(32) = \ddot{y}^{(32)}_{\ddot{y}}(32), \ddot{y}_4 = x_1 \quad (3)(2)(3)(2)(3)(2)(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}32), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}32), x(t)\,\ddot{y}\,x(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}32), i\ddot{c}\ddot{y}32$$
$$= 1 \quad 2 \quad 3$$

$$= (\ddot{y}3\ \cos\ddot{y}3\cos\ddot{y}3\,\ddot{y}\,\ddot{y}2\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}2, \ddot{y}3\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}3\,\ddot{y}\,\ddot{y}2\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}2, \ddot{y}3\sin\ddot{y}3\,\ddot{y}\,\ddot{y}2\sin\ddot{y}2); \quad c\ 2\ddot{y}32$$
$$= (\ddot{y}3\ \cos\ddot{y}3\cos\ddot{y}3\,\ddot{y}\,\ddot{y}2\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}2)^2 + (\ddot{y}3\ \sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}3\,\ddot{y}\,\ddot{y}2\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}2)^2 + (\ddot{y}3\ \sin\ddot{y}3\,\ddot{y}\,\ddot{y}2\sin\ddot{y}2)^2 =$$
$$2 = \ddot{y}2^2 + \ddot{y}3^2 \ddot{y}\,2\ddot{y}2\ddot{y}3[\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3\cos(\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}3) + \sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}3].$$

Machine Translated by Google

Aber

$$\cos ÿ2 \cos ÿ3 \cos(ÿ2 ÿ ÿ3) + \sin ÿ2 \sin ÿ3 =$$

$$= \frac{\cos(ÿ2ÿÿ3)+\cos(ÿ2+ÿ3)}{2} \quad \frac{\cos(ÿ2ÿÿ3)ÿ\cos(ÿ2+ÿ3)}{2} \cos(ÿ2 ÿ ÿ3) + \frac{2\,2}{2} =$$

$$= \frac{\cos(ÿ2ÿÿ3)[1+\cos(ÿ2ÿÿ3)]ÿ[\cos(ÿ2+ÿ3)ÿ\cos(ÿ2+ÿ3)}{2} \quad \cos(ÿ2ÿÿ3)] =$$

$$= \frac{\cos(ÿ2ÿÿ3)2\cos 2 ÿ2ÿÿ3 ÿ\cos(ÿ2+ÿ3)2\sin 2 ÿ2ÿÿ3}{2} \quad ÿ2ÿÿ3 ÿ \cos 2 ÿ2ÿÿ3 + \sin 2 ÿ2ÿÿ3 = 1.$$

Daher,

$$2\,2\,2\,c\,ÿ23 = ÿ2 + ÿ3 \quad 2 ÿ ÿ2ÿ3[\cos ÿ2 \cos ÿ3 \cos(ÿ2 ÿ ÿ3) + \sin ÿ2 \sin ÿ3] ÿ (ÿ2 ÿ ÿ3) \quad 2 ÿ ÿ23 ÿ \quad \frac{|ÿ2(t) ÿ ÿ3(t ÿ ÿ23)|}{C}$$

und $ÿ32 ÿ \frac{|ÿ3(t)ÿÿ2(tÿÿ32)|}{C}$ **.**

Für die Beschleunigungen erhalten wir (n = **2,** 3)

$$\mathbf{u1}\ (n)\ ÿn+ÿn \quad \frac{ÿn \cos ÿn \cos ÿnÿÿn ÿn \sin ÿn \cos ÿn ÿÿn ÿn \cos ÿn \sin ÿnÿc \cos ÿn \cos ÿn = c ÿn ÿn \sin ÿn \cos ÿn \cos ÿnÿÿn ÿn \sin ÿn \sin ÿnÿc \sin ÿn \cos ÿn ÿn \cos}{c ÿ ÿ} \quad \frac{^2 \cos ÿn \cos ÿn}{ÿn} ÿ \mathbf{Q1}\ (n)\ ÿn \sin ,$$

$$\mathbf{u2}\ (n) = c \quad \frac{ÿ n ÿn}{c ÿ ÿ} \quad \frac{^2 \cos ÿn ÿ \mathbf{Q2}\ (n)\ ÿn}{} ,$$

$$\mathbf{u3}\ (n) \quad \frac{ÿn \sin ÿn+ÿn ÿn \cos ÿnÿc \sin ÿn = c}{ÿn} \quad ÿ \quad ÿc \frac{^2 \sin ÿn}{ÿn} \quad ÿ \mathbf{Q3}\ (n)\ ,\ (n = \mathbf{2,}\ 3).$$

Wenn wir zu den Kugelkoordinaten übergehen, erhalten wir

$$ÿn \cos ÿn \cos ÿn ÿ ÿn ÿn \sin ÿn \cos ÿn ÿ ÿn ÿn \cos ÿn \sin ÿn =$$

$$^2 = ^2 ÿn \sin ÿn \cos ÿn + 2 ÿn \cos ÿn \sin ÿn ÿ 2ÿn ÿn ÿn \sin ÿn \sin ÿn + ÿn ÿn ÿn ÿn \quad \cos ÿn \cos ÿn + ÿn ÿn \quad ^2 \cos ÿn \cos ÿn ÿ \frac{c^2 \cos ÿn \cos ÿn ;}{ÿn}$$

$$ÿn \sin ÿn \cos ÿn + ÿn ÿn \cos ÿn \cos ÿn ÿ ÿn ÿn \sin ÿn \sin ÿn = \qquad \mathbf{(A1)}$$

$$^2 = ÿ2 ÿn \cos ÿn \cos ÿn + 2 ÿn \sin ÿn \sin ÿn + 2ÿn ÿn \cos ÿn \sin ÿn + ÿn ÿn ÿn ÿn \quad \sin ÿn \cos ÿn + ÿn ÿn \quad ^2 \sin ÿn \cos ÿn ÿ \frac{c^2 \sin ÿn \cos ÿn ;}{ÿn}$$

$$ÿn \sin ÿn + ÿ n ÿn \cos ÿn = ÿ2 ÿn \cos ÿn + ÿn ÿn ÿn \quad ^2 \sin ÿn ÿ \frac{c^2 \sin ÿn}{ÿn} .$$

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$\mathbf{P1}\ (n) \quad ^2 = ^2 ÿn \sin ÿn \cos ÿn + 2 ÿn \cos ÿn \sin ÿn ÿ 2ÿn ÿn \sin ÿn \sin ÿn + ÿn ÿn ÿn ÿn \quad \cos ÿn \cos ÿn + ÿn ÿn \quad ^2 \cos ÿn \cos ÿn;$$

$$\mathbf{P2}\ (n) \quad ÿn \cos ÿn \cos ÿn + 2 ÿn \sin ÿn \sin ÿn + 2ÿn ÿn \cos ÿn \sin ÿn + = ÿ2 ÿn ÿn ÿn ÿn \quad ^2 \sin ÿn \cos ÿn + ÿn ÿn \quad ^2 \sin ÿn \cos ÿn;$$

$$\mathbf{P3}\ (n) \quad = ÿ2 ÿn \cos ÿn + ÿn ÿn ÿn \quad ^2 \sin ÿn.$$

Dann nimmt (A1) die folgende Form an:

$$\cos ÿn ÿ ÿn ÿn \sin ÿn \cos ÿn ÿ ÿnÿn \sin ÿn \sin ÿn = ÿnÿn \cos ÿn \sin ÿn = \mathbf{P1}\ (n) + \mathbf{Q1}\ (n)\ ÿn \cos ÿn$$

$$ÿn \sin ÿn \cos ÿn + \quad ÿn = \mathbf{P3}\ (n) + \mathbf{Q3}\ (n) \quad \mathbf{P2}\ (n) + \mathbf{Q2}\ (n)\ ÿn ÿn \cos ÿn \cos ÿn ÿ ÿnÿn \cos \quad ;$$

$$ÿn \sin ÿn +$$

Um das letzte System bezüglich ÿn zu lösen, **stellen wir fest, dass** ÿn , ÿn ,

$$\cos ÿn \cos ÿn ÿÿn \sin ÿn \cos ÿn ÿÿn \cos ÿn \sin ÿn \sin ÿn$$
$$\cos ÿn ÿn \cos ÿn \cos ÿn ÿÿn \sin ÿn \sin ÿn ÿn \cos ÿn \quad 2 = ÿn \quad \cos ÿn > 0$$
$$\sin ÿn \qquad 0$$

und dann erhalten wir die Ausgangsgleichungen (n = **2,** 3):

$$= ÿn ÿn \quad 2 \cos 2 ÿn + ÿn ÿn ÿn \quad ^2 \quad \frac{2c}{ÿn},$$

$$ÿn = \mathbf{2}\ ÿn \quad ÿntgÿn ÿ \quad \frac{^2 ÿn ÿn}{ÿn},$$

$$ÿn = ÿ \quad \frac{2 ÿn ÿ ÿn+ÿn ÿn}{\sin ÿn \cos ÿn} .$$

Machine Translated by Google

Anhang B. Endgültige Form der Grundgleichungen (n) .ÿ u

Zunächst berechnen wir (n) .ÿ u **,** .. .. ..

Machine Translated by Google

Erinnern Sie sich, dass ÿ23 = ÿ2(t) **ÿ** ÿ3(t **ÿ ÿ23) und ÿ32** = ÿ2(t **ÿ ÿ32) ÿ** ÿ3(t), **und im Hinblick auf**

$$G_{ÿ}^{(23)} \; ÿ \; \frac{e2e3}{3\,m^2} \; ÿ \; \frac{ÿ_{ÿ}^{(23)}}{ÿ23^{3}} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{3\,c} \; \frac{u_{ÿ}^{\cdot(3)}\; ÿ}{cÿ23} \qquad {}^{(32)}_{ÿ} \; ÿ \; \frac{e2e3}{3\,m3c} \; ÿ \; \frac{ÿ_{ÿ}^{(32)}}{ÿ32^{3}} \; \frac{ÿ^{(32)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{3\,c} \; \frac{u_{ÿ}^{\cdot(2)}\; ÿ}{cÿ32}$$

$$P_{ÿ}^{(2)\,(21)\,(23)} = G_{ÿ} \quad + G_{ÿ} \quad + G_{ÿ}^{(2)\mathrm{rad}} \; ÿ \; \frac{e2e1}{4\,m^2} \; \frac{ÿ_{ÿ}^{(21)}}{ÿ21^{3}} + \frac{e2e3}{3\,m^2} \; ÿ \; \frac{ÿ_{ÿ}^{(23)}}{ÿ23^{3}} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{3\,c} \; \frac{u_{ÿ}^{\cdot(3)}\; ÿ}{cÿ23} \; \frac{{}^{2}_{und\,2}}{3\,m2c^{2}} \; u_{ÿ}^{\cdot\cdot(2)}$$

$$P_{ÿ}^{(3)\,(31)\,(32)} = G_{ÿ} \quad + G_{ÿ} \quad + G_{ÿ}^{(3)\mathrm{rad}} \; ÿ \; \frac{m3}{e3e1^{3}} \; \frac{ÿ_{ÿ}^{(31)}}{+\,c\,4ÿ31} \; \frac{e2e3}{3\,m3c} \; ÿ \; \frac{ÿ_{ÿ}^{(32)}}{ÿ32^{3}} \; \frac{ÿ^{(32)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{3\,c} \; \frac{u_{ÿ}^{\cdot(2)}\; ÿ}{cÿ32} \; \frac{{}^{2}_{und}}{3\,m3c} \; ÿ^{\cdot\cdot(3)}\,u$$

(ÿ = **1, 2,** 3)

wir transformieren die rechten Seiten der Gleichungen von (A2).

Erstens,

$$ÿ_{1}^{\cdot\cdot(2)} = P_{1}^{(2)\,(2)\,(2)}\,ÿ2 = P_{2}\cos ÿ2\cos ÿ2 + P_{3}\sin ÿ2\cos ÿ2 + P_{2}\sin ÿ2 =$$

$$= \cos ÿ2\cos ÿ2 \; \frac{e2e1}{4\,m2c} \; \frac{ÿ_{1}^{(21)}}{ÿ21^{3}} + \frac{e2e3}{3\,m2c} \; \frac{ÿ_{1}^{(23)}}{ÿ23^{3}} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{3\,c} \; \frac{Sie_{1}^{\cdot(3)}\; ÿ}{cÿ23} \; \frac{{}^{2}_{und\,2}}{3\,m2c} \; u_{1}^{\cdot\cdot(2)} \; \frac{ÿ}{ÿ+ÿ}$$

$$+ \sin ÿ2\cos ÿ2 \; \frac{ÿ\,ÿ}{e2e1} \; \frac{ÿ_{2}^{(21)}}{4\,m^2\;ÿ21^{3}} + \frac{e2e3}{3\,m^2} \; \frac{ÿ}{ÿ_{2}^{(23)}} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{ÿ23^{3}\;3\,c} \; \frac{du_{2}^{\cdot(3)}\; ÿ}{cÿ23} \; \frac{{}^{2}_{und\,2}}{3\,m2c} \; du_{2}^{\cdot\cdot(2)} \; \frac{ÿ\,ÿ}{ÿ+ÿ}$$

$$+ \sin ÿ2 \; \frac{ÿ}{e2e1} \; \frac{ÿ_{3}^{(21)}}{4\,m^2\;ÿ21^{3}} + \frac{e2e3}{3\,m^2} \; \frac{ÿ}{ÿ_{3}^{(23)}} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{ÿ23^{3}\;3\,c} \; \frac{u_{3}^{\cdot(3)}\; ÿ}{cÿ23} \; \frac{{}^{2}_{m2c}}{e\,2\,u_{3\,3}} \; ÿ^{\cdot\cdot(2)} \; ÿ =$$

$$= \frac{e2e1}{4\,m2c} \; \frac{\sin ÿ2^{(21)\,(21)\,(21)}\;ÿ\cos ÿ2\cos ÿ2+ÿ\sin ÿ2\cos ÿ2+ÿ}{ÿ21^{3}} + \frac{e2e3}{m2c} \; \frac{ÿ2 + ÿ\sin ÿ2^{(23)\,(23)\,(23)}\;4\,ÿ\cos ÿ2\cos ÿ2 + ÿ\sin ÿ2\cos}{ÿ23^{3}} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{c\;2ÿ23\;3}$$

$$\frac{e2e3}{m2c\;3ÿ23} \; \frac{Sie_{1}^{\cdot(3)}\cos ÿ2\cos ÿ2+ \quad du_{2}^{\cdot(3)}\sin ÿ2\cos ÿ2+ \quad Du_{3}^{\cdot(3)}\sin ÿ2}{C} \; \frac{{}^{2}_{und}}{3\,m2c^{2}} \; du_{1}^{\cdot\cdot(2)}\cos ÿ2\cos ÿ2 + \quad du_{2}^{\cdot\cdot(2)}\sin ÿ2\cos ÿ2 + \quad \sin ÿ2\,ÿ\,u\,3^{\cdot\cdot(2)}$$

$$ÿ \; \frac{e2e1}{m2c} \; \frac{1}{ÿ2^{2}} \; \frac{m2}{3\,c} \; \frac{ÿ2ÿÿ3(\cos ÿ23\cos ÿ2\cos ÿ3+\sin ÿ2\sin ÿ3)}{c\;3ÿ23\;3} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{}$$

$$\frac{m2}{m2c} \; \frac{ÿ3\,(\cos ÿ23\cos ÿ2\cos ÿ3+\sin ÿ2\sin ÿ3)+ÿ3 \;..\; ÿ3(\sin ÿ2\cos ÿ3ÿ\cos ÿ23\sin ÿ.3\cos ÿ2)\;ÿ3\sin ÿ23\cos ÿ2\cos ÿ+ÿ3\;c\;4ÿ23}{{}^{2}_{und\,2}\;ÿ\;2^{3.}} \; ...$$

Für die zweite Gleichung von (A2) haben wir

$$P_{ÿ}^{(2)\,(21)\,(23)} = G_{ÿ} \quad + G_{ÿ} \quad {}_{+\,G\,ÿ\,ÿ}^{(2)\mathrm{rad}} \; ÿ \; \frac{e2e1}{4\,m2c} \; \frac{{}^{x}_{ÿ}{}^{(2)}}{3\;ÿ21} + \frac{e2e3}{3\,m2c} \; \frac{ÿ}{ÿ_{ÿ}^{(23)}} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{3\;ÿ23\quad 3\,c} \; \frac{u_{ÿ}^{\cdot(3)}\; ÿ}{cÿ23} \; \frac{{}^{2}_{e\,2\,u_{3}}}{3\,m2c} \; ÿ^{\cdot\cdot(2)} \; ;$$

$$ÿ2 = \frac{ÿ2P\;1\;2^{(2)\,(2)\,ÿ\sin ÿ2P\,+\cos}}{ÿ2\cos ÿ2} = \frac{}{1\;ÿ2\cos ÿ2} \; \frac{e2e1}{4\,m^2} \; \frac{ÿx_{1}^{(2)\,(2)\,\sin ÿ2+x\cos ÿ2\;2}}{ÿ21^{3}}$$

$$+ \frac{e2e3}{4\,m2c} \; ÿ \quad (23)\,(23)\,\sin ÿ2 + ÿ\cos ÿ2 \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{c\;2ÿ23\;3} + \frac{du_{1}^{\cdot(3)}\sin ÿ2ÿ\;ÿ23^{Sie}2^{\cdot(3)}\cos ÿ2}{} \; ÿ \; \frac{{}^{2}_{und}}{3\,m2c^{2}} \; ÿ^{\cdot\cdot(2)}\sin ÿ2\;ÿ\,u \quad u^{\cdot\cdot(2)}\cos ÿ2 = 2 \qquad \textbf{(A3)}$$

$$= \frac{}{1\;ÿ2\cos ÿ2} \; \frac{e2e3}{3\,m^2} \; ÿ \; \frac{ÿ3\sin ÿ23\cos ÿ3\;ÿ23}{3} \; \frac{ÿ^{(23)}_{ÿ}, {}^{Sie}}{3\,c} \; \frac{ÿ3\cos ÿ3\sin ÿ23+ÿ3\;ÿ3\sin ÿ3\sin ÿ23\;ÿ3\cos 3\cos ÿ23ÿÿ3 + cÿ23}{ÿ2\;ÿ2\cos ÿ2} \; ... \; ÿ$$

Für die dritte Gleichung von (A2) haben wir

Machine Translated by Google

$$\ddot{y}\ddot{2} = \frac{\ddot{y}\cos\ddot{y}2\sin\ddot{y}2}{1\,\ddot{y}2}\,P\,(2)\,(2)\,(2)\,\ddot{y}\sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}2 + \frac{\dot{P}}{2\,3\,\ddot{y}2\,\ddot{y}2\,(3)}\,P =$$

$$= \frac{\ddot{y}\cos\ddot{y}2\sin\ddot{y}2\,\ddot{y}2}{4\,m^2}\,\frac{x_1^{(2)}}{\ddot{y}21^3} + \frac{e2e3}{3\,m^2}\,\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}_1^{(23)}}{\ddot{y}23^3}\,\frac{\ddot{y}^{(23)}\,\dot{y}^{,Sie}}{3\,c}\,\frac{\dot{u}_1^{(3)}}{c\ddot{y}23}\,\ddot{y}\,\frac{2}{3\,m2c^2}\,\ddot{u}_1^{(2)}\,\ddot{y}$$

$$\ddot{y}\sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}2 + \ddot{y}2\,\frac{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,e2e1}{4\,m^2}\,\frac{x_2^{(2)}}{\ddot{y}21^3} + \frac{e2e3}{3\,m2c}\,\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}_2^{(23)}}{\ddot{y}23^3}\,\frac{\ddot{y}^{(23)}\,\dot{y}^{,Sie}}{3\,c}\,\frac{\dot{u}_2^{(3)}}{c\ddot{y}23}\,\ddot{y}\,\frac{2}{3\,m2c^2}\,\ddot{u}_2^{(2)}\,\ddot{y}$$

$$\ddot{y}2\,\frac{\cos\ddot{y}2 + \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,e2e1}{4\,m^2}\,\frac{x_3^{(2)}}{\ddot{y}21^3} + \frac{e2e3}{3\,m^2}\,\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}_3^{(23)}}{\ddot{y}23^3}\,\frac{\ddot{y}^{(23)}\,\dot{y}^{,Sie}}{3\,c}\,\frac{\dot{u}_3^{(3)}}{c\ddot{y}23}\,\ddot{y}\,\frac{2}{3\,m2c^2}\,\ddot{u}_3^{(2)}\,\ddot{y}$$

$$= \frac{e2e3}{3\,m^2}\,\frac{\ddot{y}3\cos\ddot{y}23\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}3}{\ddot{y}23^3}\,\frac{\ddot{y}^{(23)}\,\dot{y}^{,Sie}}{c} +$$

$$+\frac{e2e3}{3\,m2c}\,\frac{3\ddot{y}2\,\ddot{y}3\,(\cos\ddot{y}23\cos\ddot{y}3\sin\ddot{y}2\ddot{y}\sin\ddot{y}3\cos\ddot{y}2)+\ddot{y}3\,c\ddot{y}23\ddot{y}2\cos\ddot{y}23\sin\ddot{y}2\sin\ddot{y}3+\cos\ddot{y}2\cos\ddot{y}3\,\ddot{y}3\sin\ddot{y}23\sin\ddot{y}2\cos\ddot{y}3\ddot{y}\ddot{y}3}{\ddot{y}\,\frac{2}{3\,m2c^2}\,\ddot{y}\,2.}$$

Anhang C

nehmen wir r0 Da im (m) (m = **1, 2, . . .) ausreichend klein sein sollte,** (M) = **Hauptsatz r0** $1/\mu(m = \mathbf{1, 2, \ldots})$ **ist,**

$$|rn(t)| = rn0 + rn\,{}^{T}_{Tk}\,\mathbf{(1)}\,(t1)dt1 = rn0 + {}^{T}_{Tk}\,rn0\,\mathbf{(1)} + rn\,{}^{t1}_{Tk}\,\mathbf{(2)}\,(t2)dt2\,dt1 = \ldots =$$

$$= {}^{T}_{Tk}\,rn0\,(1)dt1 + {}^{T}_{Tk}\,{}^{t1}_{Tk}\,rn0\,(2)dt2dt1 + \ldots + {}^{T}_{Tk}\,{}^{t1}_{Tk}\,\ldots\,{}^{tm\ddot{y}1}_{Tk}\,rn0\,(m)\,(tm)dtm\ldots dt1\,\ddot{y}$$

$$\frac{|rn0\,(1)|}{\mu}\,t\,\mu(t\ddot{y}Tk) + \frac{|rn0\,(2)|}{\mu 2}\,t\,\mu(t\ddot{y}Tk) + \ldots + \frac{\ddot{y}m}{\mu m}\,Rne\,\mu(t\ddot{y}Tk)\,\ddot{y}$$

$$1\,\ddot{y}\,e^{-\mu 2}\quad 1\,\mu T + e^{\mu 3}\quad \mu T + \ldots + \frac{\ddot{y}m}{\mu m}\,Rne\,\mu(t\ddot{y}Tk)\quad \ddot{y}\,\frac{\ddot{y}m}{\mu m}\,Rne\,\mu(t\ddot{y}Tk)\,,$$

Das bedeutet $|rn(t)|\,\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}m}{\mu m}\,Rne\,\mu(t\ddot{y}Tk)$ (n = **2,** 3), **weil** $\frac{1}{\mu}\,\ddot{y}\,0.$

In gleicher Weise, $rn\,\mathbf{(1)}\,(t)\,\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}m}{\mu m}\,\ddot{y}Rne\,\mu(t\ddot{y}Tk)$, $rn\,\mathbf{(2)}\,(t)\,\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}m}{\mu m}\,\ddot{y}2Rne\,\mu(t\ddot{y}Tk)$, **und so weiter.**

Anhang D. Schätzungen für die höheren Ableitungen Unter

der Annahme, dass $\ddot{y}\,\ddot{y}\,0$ **ist, erhalten wir**

$$\frac{d\ddot{y}pq\,(t)}{dt} = \frac{\ddot{y}^{(Bild)}\,\ddot{y}u\,(P)\quad \ddot{y}^{(Bild)}\,\ddot{y}u\,(Q)}{c\quad \ddot{y}^{(pq)}\,\ddot{y}^{(Bild)}\quad \ddot{y}^{(Bild)}\,\ddot{y}u\,(Q)} = \frac{\ddot{y}^{(Bild)}\,\ddot{y}u\,(P)\quad \ddot{y}u\,(Q)}{c\,2\ddot{y}pq\,\ddot{y}\quad \ddot{y}^{(Bild)}\,\ddot{y}u\,(Q)}\,\ddot{y}\,\frac{2\ddot{y}}{1\,\ddot{y}\ddot{y}} < \mathbf{1}\,\ddot{y}\,\ddot{y} = \frac{}{1\,137} < \frac{}{1\,3} < \mathbf{1}$$

$$\frac{d\ddot{y}^{(23)}}{2\,dt} = \frac{\ddot{y}x\,\mathbf{(2)}\,\mathbf{(3)}\,dx\,(t)}{(t\ddot{y}23)\,dt^2}\qquad \mathbf{(2)\,(3)}\,(t)\,\ddot{y}\,u\,(t\,\ddot{y}\,\ddot{y}23)\quad (1\,\ddot{y}\,.\,\ddot{y}23)\,\ddot{y}\,2c.\,=u\,2$$

Dann,

$$\frac{\ddot{y}_{Sie}(N)\,\ddot{y}_{Sie}(N)}{(n)\,.\ddot{y}\,u\,,(n)\,.\ddot{y}\,u} = \frac{\dot{2}\,\ddot{y}n + \ddot{y}n\quad \dot{2}\,.\,\ddot{y}n\quad \mathbf{2\,cos2}\,\ddot{y}n + \ddot{y}n\quad \dot{2}\,\ddot{y}n\quad 2\,2\,\ddot{y}\,c - \quad 2 < c\,;\quad \frac{\ddot{y}_{Sie}(2)\,\ddot{y}_{Sie}(2)}{\dot{}_{Minuten^2} + \ddot{y}n\quad \dot{2}\,.\,\ddot{y}n\quad 2\,cos2\,\ddot{y}n + \ddot{y}n\,\ddot{y}n\quad \dot{2}\,.\,2\,\ddot{y}n\quad 2 + \ddot{y}n\,2\ddot{y}n\,2\quad + \ddot{y}n\,2\ddot{Y}n\,2)e\,2\mu(t\ddot{y}Tk)\,\ddot{y}\,\ddot{y}nce\mu(t\ddot{y}Tk)\,\ddot{y}\,\ddot{y}n\,2(Rn\,;}/C^2\,\ddot{y}\,0;$$

$$\frac{\ddot{y}\ddot{u}(N)\,\ddot{y}\ddot{u}(N)}{\ddot{y}\ddot{u}(N)\,\ddot{y}\ddot{u}(N)} = \frac{\ddot{}_{Minuten^2} + \ddot{y}n\quad \ddot{2}\,\ddot{y}_N\quad \mathbf{2\,cos2}\,\ddot{y}n + \ddot{y}n\quad \ddot{2}\,\ddot{y}n\quad \ddot{2}\,\ddot{y}n\quad \ddot{y}\,\ddot{y}n\quad 2\,ce\mu(t\ddot{y}Tk)\,;}{\dddot{y}\dddot{u}(N)\,\dddot{y}\dddot{u}(N)}$$

$$\ddot{y}\quad \frac{\dddot{}_{r_n^2} + \ddot{y}n\quad \dddot{2}\,\dddot{y}_N\quad \mathbf{2\,cos2}\,\ddot{y}n + \ddot{y}n\quad \dddot{2}\,\dddot{y}_N^2\quad \ddot{y}\,\ddot{y}n\quad 3\,ce\mu(t\ddot{y}Tk)\,,\ \frac{}{1\,\ddot{y}23}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,;\ \frac{c}{}\quad \frac{}{1\,\ddot{y}32}\,\ddot{y}\,\frac{c}{\ddot{y}.}$$

Außerdem,

Machine Translated by Google

$$\frac{d2B(k)}{\mathbf{r2}\,dt2} = \frac{dGr2}{dt} = \frac{\overset{(2)\,(2)\,(2)}{1}\,d(P\ \sin ÿ2)\cos ÿ2\cos ÿ2{+}P\ \sin ÿ2\cos ÿ2{+}P\ \mathbf{2\ 3}\,dt}{} =$$

$$= \overset{\cdot}{P}^{(2)}\ \overset{(2)\,(2)}{1}\cos ÿ2\cos ÿ2\ ÿ\ P\ ÿ2\sin ÿ2\cos ÿ2\ ÿ\ P\ \mathbf{1}\ ÿ2\cos ÿ2\sin ÿ2{+}\overset{(2)}{1}{+}$$

$$\text{Teil}_2 \quad ÿ2\ ÿ\ P\ \mathbf{2}\ ÿ2\sin ÿ2\sin ÿ2{+}\qquad \mathbf{(2)\,(2)}\sin ÿ2\cos ÿ2{+}P\ \mathbf{2}\ ÿ2\cos ÿ2\cos \qquad \text{Teil}_3^{\cdot(2)}\ \mathbf{(2)}\sin ÿ2{+}P\ \mathbf{3}\ ÿ2\cos ÿ2 =$$

$$= \frac{d}{dt}\ \frac{e2e1}{ÿ21}\ \frac{x_1^{(2)}}{4\,3\,m2c} + 3\,\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ_1^{(23)}}{3\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{du_1^{\cdot(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{e\,2\,u\,3}{1\,3}^{\cdot\cdot(2)}\ ÿ\cos ÿ2\cos ÿ2ÿ\ ÿ$$

$$\frac{ÿ}{ÿÿÿ}\ \frac{ÿ}{ÿÿÿ\ ÿ}\ \frac{ÿ}{ÿ}$$

$$\frac{ÿ}{ÿ21}\ \frac{e2e1}{4\,3\,m2c}\ x_1^{(2)} + 3\,\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ_1^{(23)}}{3\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{du_1^{\cdot(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{e\,2\,u\,3}{1\,3}^{\cdot\cdot(2)}\ (ÿ2\ \mathbf{sin}\ ÿ2\cos ÿ2 + ÿ2\cos ÿ2\ \mathbf{sin}\ ÿ2){+}$$

$$\frac{ÿ\ ÿ}{ÿÿÿ}\ \frac{ÿ}{ÿÿÿ\ ÿ}\ \frac{ÿ}{ÿ}$$

$$dt\ ÿ\ \frac{d\ ÿ}{m2c\ ÿ21}\ \frac{e2e1}{4}\ x_2^{(2)} + 3\,\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ_2^{(23)}}{3\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{du_2^{\cdot(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{e\,2\,u\,3\,2}{3}^{\cdot\cdot(2)}\ \mathbf{sin}\ ÿ2\cos ÿ2{+}$$

$$\frac{ÿ\ ÿ}{ÿÿÿ}\ \frac{ÿ}{ÿÿÿ\ ÿ}\ \frac{ÿ}{ÿ}$$

$$ÿ{+}ÿ\ \frac{e2e1}{ÿ21}\ \frac{x_2^{(2)}}{4\,3\,m2c} + 3\,\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ_2^{(23)}}{3\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{du_2^{\cdot(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{e\,2\,u\,3\,2}{3}^{\cdot\cdot(2)}\ (ÿ2\ \mathbf{cos}\ ÿ2\cos ÿ2\ ÿ\ ÿ2\ \mathbf{sin}\ ÿ2\ \mathbf{sin}\ ÿ2){+}$$

$$\frac{ÿ}{ÿÿÿ}\ \frac{ÿ}{ÿÿÿ\ ÿ}\ \frac{ÿ}{ÿ}$$

$$+\frac{d}{dt}\ \frac{e2e1}{ÿ21}\ \frac{x_3^{(2)}}{4\,3\,m2c} + 3\,\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ_3^{(23)}}{3\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{Du_3^{\cdot(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{e\,2\,u\,3\,3}{}^{\cdot\cdot(2)}\ ÿ\ \mathbf{sin}\ ÿ2{+}\ ÿ$$

$$\frac{ÿ\ ÿ}{ÿÿÿ}\ \frac{ÿ}{ÿÿÿ\ ÿ}\ \frac{ÿ}{ÿ}$$

$$ÿ{+}ÿ\ \frac{e2e1}{m2c\ ÿ21}\ \frac{x_3^{(2)}}{3} + 3\,\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ_3^{(23)}}{3\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{Du_3^{\cdot(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{e\,2\,u\,3\,3}{}^{\cdot\cdot(2)}\ ÿ2\ \mathbf{sin}\ ÿ2\ ÿ$$

$$\frac{ÿ}{ÿÿÿ}\ \frac{ÿ}{ÿÿÿ\ ÿ}\ \frac{ÿ}{ÿ}$$

$$\frac{e2e1}{ÿ\ 4\ 3\ m2c\ ÿ21}\ \frac{du_1^{(2)}}{3}\ ÿ\ 3\ e2e1\ \frac{4\ m2c}{(23)}\ \frac{x_1^{(2)}\ ÿ21\ 4}{ÿ21} +$$

$$+\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ^{\cdot(23)}\cdot 1}{3\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{3ÿ\ ÿ23^{\cdot(23)}}{4\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c} + 3\,\frac{ÿ_1^{(23)}}{ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c} + \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{\ddot{u}_{Sie\,1}^{(3)}}{cÿ23} + \frac{\dot{u}_{ÿ23\,1\,2}^{(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{und}{2}\ \frac{...}{Sie}\ \overset{(2)}{1} +$$

$$ÿÿÿ\ ÿ$$

$$+\frac{|e2e1|}{m2c}\ \frac{1}{2\,ÿ}\ +\ \frac{\bar{c}ÿ3\ ÿ\ 2{+}\ c\ ÿ\ 3{+}3ÿ\ ÿ}{3ÿ2}\ \frac{ÿ2\ 2R2+}{C}\ \mathbf{2\ (ÿ2} + Y2)e^{\ \mathbf{\mu(tÿTk)}}{+}$$

$$+\frac{e2e1}{m2c\ ÿ21}\ \frac{du_2^{(2)}}{3}\ ÿ\ 3\ e2e1\ \frac{4\ m2c}{(23)}\ \frac{x_2^{(2)}\ ÿ21\ 4}{ÿ21} +$$

$$+\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ^{\cdot(23)}\cdot 2}{3\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{3ÿ\ ÿ23^{\cdot(23)}}{4\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c} + 3\,\frac{ÿ_2^{(23)}}{ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c} + \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{\ddot{u}_{du\,2}^{(3)}}{cÿ23} + \frac{\dot{u}_{ÿ23\,2\,2}^{(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{und}{2}\ \frac{...}{Sie}\ \overset{(2)}{}+2$$

$$ÿÿÿ\ ÿ$$

$$ÿ{+}ÿ\ \frac{e2e1}{4\,m2c}\ x_2^{(2)} + \frac{e2e3}{3\,m2c}\ \frac{ÿ_2^{(23)}}{3\,ÿ21}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{du\,2^{\cdot(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{e\,2\,u\,3\,2}{3}^{\cdot\cdot(2)}\ \mathbf{(ÿ2} + Y2)e^{\ \mathbf{\mu(tÿTk)}}{+}$$

$$ÿÿÿ\ ÿ$$

$$+\frac{e2e1}{4\,m2c\ ÿ21}\ \frac{Du_3^{(2)}}{3}\ ÿ\ 3\ e2e1\ \frac{4\ m2c}{(23)}\ \frac{x_3^{(2)}\ ÿ21\ 4}{ÿ21} +$$

$$+\frac{e2e3}{m2c}\ \frac{ÿ^{\cdot(23)}\cdot 3}{ÿ23\ 3}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{3ÿ\ ÿ23^{\cdot(23)}}{4\,ÿ23}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c} + \frac{ÿ^{(23)}}{3\,ÿ23^{3}}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c} + \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{\ddot{u}_3^{(3)}}{+\,cÿ23} + \frac{\dot{u}_{ÿ23\,3\,cÿ23}^{(3)}}{2}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{und}{2}\ \frac{...}{Sie}\ \overset{(2)}{}+3$$

$$ÿÿÿ\ ÿ$$

$$ÿ{+}ÿ\ \frac{e2e1}{4\,m²}\ \frac{x_3^{(2)}}{ÿ21\ 3} + \frac{e2e3}{3\,m²}\ \frac{ÿ_3^{(23)}}{ÿ23\ 3}\ \frac{ÿ\ ,\ ÿ_u^{\cdot(3)}}{3\,c}\ \frac{u_3^{\cdot(3)}}{cÿ23}\ \frac{2}{m2c}\ \frac{e\,2\,u\,3\,3}{}^{\cdot\cdot(2)}\ \mathbf{Y2e\ \mu(tÿTk)\ ;}$$

$$ÿ\qquad ÿÿÿ\ ÿ\qquad ÿ$$

$$\frac{d2B(k)}{\mathbf{r2}\,dt2} = \frac{dGr2}{dt}\ ÿ\ \frac{|e2e1|}{m2}\ \frac{4ÿ2\,c\,4ÿ}{}\ \frac{2\ 3ÿ2\ 8ÿ3c\ 2ÿ3\ cc + + + c\ 4ÿ3\ c\ 4ÿ4\ c}{}\ \frac{ÿ2\ 3R2+}{3\,c}\ t\ e2e1|\ \mathbf{\mu(tÿTk)}| + \frac{1}{m2c}\ \frac{1}{2\,ÿ\ 2} + \frac{\bar{c}ÿ3\ ÿ\ 2{+}\ c\ ÿ\ 3{+}3ÿ\ c}{3ÿ2}\ \frac{ÿ2\ 2R2+}{C}\ \mathbf{2\ (ÿ2} + Y2)e^{\ \mathbf{\mu(tÿTk)}}{+}$$

$$+\frac{|e2e1|}{m2}\ \frac{\bar{c}}{4ÿ4\ c\ 4ÿ2\ c\ 4ÿ}\ \frac{3ÿ2\ 8ÿ3c\ 2ÿ3 + + + c\ 4ÿ3\ c\ 2\,\bar{c}}{}\ \frac{ÿ2\ 3R2+}{3\,c}\ t\ e2e1|\ \mathbf{\mu(tÿTk)}| + \frac{1}{m2c}\ \frac{1}{2\,ÿ\ 2} + \frac{\bar{c}ÿ3\ ÿ\ 2{+}\ c\ ÿ\ 3{+}3ÿ\ ÿ}{3ÿ2}\ \frac{ÿ2\ 2R2+}{C}\ \mathbf{2\ (ÿ2} + Y2)e^{\ \mathbf{\mu(tÿTk)}}{+}$$

$$+\frac{|e2e1|}{m2}\ \frac{c}{4ÿ4\ c\ 4ÿ2\ c\ 4ÿ}\ \frac{3ÿ2\ 8ÿ3c\ 2ÿ3 + + + c\ 4ÿ3\ c\ 2\,\bar{c}}{}\ \frac{ÿ2\ 3R2}{3\,c}\ t\ e2e1|\ \mathbf{\mu(tÿTk)}| + \frac{1}{m2c}\ \frac{1}{2\,ÿ\ 2} + \frac{\bar{c}ÿ3\ ÿ\ 2{+}\ c\ ÿ\ 3{+}3ÿ\ ÿ}{3ÿ2}\ \frac{ÿ2\ 2R2+}{2\,c}\ \mathbf{Y2e\ \mu(tÿTk)\ ÿ\ ÿ2\ 2R2e\ \mu(tÿTk)}\ .$$

Machine Translated by Google

Anhang E. Obergrenzen für partielle Ableitungen

Da ÿ23 = ÿ2(t) **ÿ** ÿ3(t **ÿ ÿ23) und** **, man erhält**

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

oberen Grenzen für **kann auf ähnliche Weise ermittelt werden.**

Verweise

1. **Angelov, VG Das elektromagnetische Dreikörperproblem mit Strahlungstermen – Herleitung der Bewegungsgleichungen (I).** Ergebnisse Nichtlineare Anal. **2020, 3, 45–58.**
2. **Angelov, VG Das elektromagnetische Dreikörperproblem mit Strahlungstermen – Existenz-Eindeutigkeit der periodischen Umlaufbahn (II).** Ergebnisse **2020,** 3 , **137–158.**
3. **Angelov, VG Das N-Körper-Problem in der klassischen Elektrodynamik.** Phys. Essays **1993, 6, 204–211.** [CrossRef]
4. **Angelov, VG Über die ursprünglichen Dirac-Gleichungen mit Strahlungsterm.** Lib. Math. **2011,** 31, **57–86. 5.**
6. **Driver, RD Ein neutrales System mit zustandsabhängiger Verzögerung.** J. Diff. Equ. **1984,** 54, **73–86.** [CrossRef]
   Pauli, W. Relativitätstheorie. In Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften; **Band. 5, Heft 4, Art. 19; Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 1921.**
7. **Synge, JL Über das elektromagnetische Zweikörperproblem.** Proc. Roy. Soc. **1940,** A177, **118–139.**
8. **Angelov, VG Fixpunktsätze für (ÿ, j1 , j2 ,..., jm) kontraktive Abbildungen in uniformen Räumen.** Bull. Allahabad Math. Soc. **2023, 2.** im Druck.
9. **Bauer, G.; Deckert, D.-A.; Durr, D.; Hinrichs, G. Über Irreversibilität und Strahlung in der klassischen Elektrodynamik von Punktteilchen.** J. 2014 , 154, **610.** [CrossRef]
10. **Deckert, D.-A.; Durr, D.; Vona, N. Verzögerungsgleichungen vom Wheeler-Feynman-Typ.** J. Math. Sci. **2014,** 202, **623–636.** [CrossRef]
11. **Bauer, G.; Deckert, D.-A.; Durr, D. Über die Existenz von Dynamik in der Wheeler-Feynman-Elektromagnetik.** J. Appl. Math. Phys. **2012,** 64, **1087–1124.** [CrossRef]
12. **de Luca, J. Variationale Elektrodynamik von Atomen.** Prog. Electromagn. Res. B **2013,** 53, **1–11.** [CrossRef]
13. **Simaciu, CC Klassisches Elektronenmodell in der stochastischen Elektrodynamik.** Rev. Mex. Fis. **2001,** 47, **392–394.**
14. **Aboulmagd, EI; García Guirao, JL; Llibre, J. Periodische Umlaufbahnen des quantisierten eingeschränkten Dreikörperproblems.** Universum **2023, 9, 149.** [Querverweis]
15. Pan, S.; Hou, X. Analyse von periodischen Resonanzübergangsbahnen im **zirkular eingeschränkten Dreikörperproblem.** 12, **8952.** [CrossRef]
16. **Abouelmagd, EI; Guirao, JLG; Llibre, J. Über die periodischen Umlaufbahnen der gestörten Zwei- und Dreikörperprobleme.** Galaxien **2023,** 11, **58.** [CrossRef]
17. **Abouelmagd, EI; Alhowaity, S.; Diab, Z.; Guirao, JLG; Shehata, MH Über die periodischen Lösungen für das gestörte räumlich quantisierte Hill-Problem.** Mathematics **2022,** 10, **614.** [CrossRef]
18. **Cseh, J.; Dang, P.;** Szilágyi, **S.; Lévai, G. Orbitale Regelmäßigkeit von Exoplaneten und die Symmetrien des Kepler-Problems.** Symmetrie **2023,** 15, **2114.** [CrossRef]
19. **Angelov, VG Periodische, Übergangs- und Fluchttrajektorien für das 3D-Kepler-Zweikörperproblem der klassischen Elektrodynamik.** Phys. Wissenschaften. Int. J. **2023,** 27, **31–72.** [CrossRef]
20. **Angelov, VG** Eine Methode zur Analyse von Übertragungsleitungen, die durch nichtlineare Lasten abgeschlossen werden; **Nova Science: New York, NY, USA, 2014.**
21. **Pohl, RW** Optik und Atomphysik; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 1963.**
22. **Bohr, N.** Atomtheorie und Beschreibung der Natur; **Cambridge University Press: Teddington, Großbritannien, 1934.**

Machine Translated by Google

23. Sommerfeld, A. Atombau und Spektrallinien; **Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig: Berlin, Deutschland, 1951.**
24. Angelov, VG Spin-Dreikörperproblem der klassischen Elektrodynamik mit Strahlungstermen (I)—Herleitung von Spingleichungen. Ergebnisse nichtlinearer Anal. **2021, 4, 1–20. [CrossRef]**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Neue bivariate Copulas über die Lomax-Verteilung Erzeugte Verzerrungen

Fadal Abdullah Ali Aldhufairi 1,* und Jungsywan H. Sepanski 2

[1] Fakultät für Mathematik, King Khalid University, Asir-Abha 61421, KSA, Saudi-Arabien
[2] Fakultät für Statistik, Versicherungsmathematik und Datenwissenschaften, Central Michigan University, Mt. Pleasant, MI 48859,
USA; sepan1jh@cmich.edu * Korrespondenz: aldhu1fa@cmich.edu

Zusammenfassung: Wir entwickeln einen Rahmen für die Erstellung von Verzerrungsfunktionen, die zur Konstruktion neuer bivariater Copulas verwendet werden. Dies wird durch die Transformation nicht-negativer Zufallsvariablen mit Lomax- bezogenen Verteilungen erreicht. In diesem Artikel wenden wir die Verzerrungen auf die Basis-Copulas der Unabhängigkeit, Clayton-, Frank- und Gumbel-Copulas an. Die Eigenschaften des Tail-Abhängigkeitskoeffizienten, der Tail-Ordnung und der Konkordanzordnung werden für die neuen Familien verzerrter Copulas untersucht. Wir haben eine empirische Studie mit den täglichen Nettorenditen von Amazon- und Google-Aktien von Januar 2014 bis Dezember 2023 durchgeführt. Wir haben die beliebten Clayton-, Gumbel-, Frank- und Gauß-Copula-Modelle mit ihren entsprechenden verzerrten Copula-Modellen verglichen, die durch die Einheits-Lomax- und Einheits-inversen Pareto- Verzerrungen verursacht wurden. Die neuen Familien von Verzerrungs-Copulas sind mit zusätzlichen Parametern ausgestattet, die der Verzerrungsfunktion innewohnen, was mehr Flexibilität bietet und nachweislich eine bessere Leistung als die Basis-Copulas aufweist. Nach der Analyse der Daten haben wir festgestellt, dass die gemeinsamen Extreme der Amazon- und Google- A

Schlüsselwörter: Archimedisch; Konkordanz; Clayton-Kopula; Verzerrung; Frank-Kopula; Gumbel-Kopula; Kendalls ÿ; Lomax-Verteilung; Randabhängigkeitskoeffizient; Randordnung

check for updates

Zitat: Aldhufairi, FAA; Sepanski, JH Neue bivariate Copulas über Lomax-Verteilung generiert Verzerrungen. AppliedMath 2024, 4, 641–665. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020035

Empfangen: 29. März 2024
Überarbeitet: 7. Mai 2024
Akzeptiert: 8. Mai 2024
Veröffentlicht: 17. Mai 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.
Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Einleitung

Beschreibungen und Messungen der Korrelation und Abhängigkeit zwischen Risiken und Verlusten sind in verschiedenen Bereichen wichtig, wie etwa in der Finanzwelt, im Risikomanagement und in der Versicherungsmathematik. Bivariate Copulas verschiedener Abhängigkeitsstrukturen können die Tail- Abhängigkeit bei extremen Risiken modellieren (Ref. [1]), sind aber unabhängig von den Randverteilungen der Risiken. Ref. [2] veranschaulicht numerisch und grafisch die Beziehungstypen, die verschiedene auf Copulas basierende Assoziationsmaße erkennen können. Ref. [3] befasste sich mit der Mathematik von Copula-Funktionen, veranschaulicht mit einer Finanzanwendung auf Finanzthemen wie Derivatepreisbildung und Kreditrisikoanalyse. Das wegweisende Papier von [4] demonstrierte ihre praktischen Anwendungen, w Extreme Verluste oder Tailverluste treten häufig gemeinsam auf; siehe [5]. In [6] wurden Copula-Modelle verwendet, um die Auswirkungen von Tail-Abhängigkeit und Tail-Charakteristik durch Quantifizierung extremer Risiken zu untersuchen . In [7,8] wurde Copula-Modellierung verwendet , um die zunehmenden hydroklimatischen Extreme zu untersuchen, die mit einem wärmer werdenden Klima einhergehen; siehe auch [9] für Hochwasser- und hydrologische Modelle. Insgesamt hat sich die Copula-Modellierung als effektives Werkzeug zur Analyse abhängiger Struktu

Der Satz von Sklar [10] besagt, dass die gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion (cdf) als Produkt der Randwerte und der Kopula ausgedrückt werden kann, und umgekehrt kann die Kopula eindeutig bestimmt werden, wenn wir die cdf und die Randwerte kennen. Beispielsweise wird die Gauß-Kopula aus der bivariaten Gauß-Verteilung abgeleitet und kann auch verwendet werden, um neue bivariate Wahrscheinlichkeitsverteilungen über (A1) im Anhang zu erzeugen; siehe [11] für Zusammenfassungen der Methoden zur Konstruktion von Kopulas. Notwendige Vorarbeiten zu bivariaten Kopulas, die in Anhang A zusammengefasst sind, finden sich in [11,12].

Machine Translated by Google

Zuletzt erweiterte Ref. [13] die traditionellen einparametrigen archimedischen Copulas durch Integration der log-gamma-generierten Ränder. Ref. [14] schlug eine Klasse bivariater Unabhängigkeits-Copula-Transformationen der Form C(u, v) = uv f((1 ÿ **u),(1 ÿ** v)) vor, **wobei** f **eine zweimal differenzierbare Zahl ist. Sei** ÿ(u, v) = uv **die Unabhängigkeits-Copula. Durch Verallgemeinerung der FGM-Copula, die durch** ÿ(u, v) + ÿxy(1 **ÿ** u)(1 **ÿ** v) gegeben ist, konstruierten **Ref. [15,16] neue Copulas der Form** ÿ(u, v) + Q(u, **v;** ÿ), **wobei** Q **eine Störungsfunktion ist, die trigonometrische, hyperbolische, logarithmische oder Exponentialfunktionen beinhaltet. Ref. [7] verwendete eine Kürzung der log- konkaven halblogistischen Verteilungsfunktion** F **als multiplikativen archimedischen Generator für** F(u)F(v) . **Konstruieren Sie die Form** F. **In diesem Artikel beschäftigen** ^{ÿ1} **Copulas der**

wir uns mit der Konstruktion neuer bivariater Copulas über Verzerrungsfunktionen. Eine Funktion T **heißt Verzerrungsfunktion, wenn sie kontinuierlich und auf dem Einheitsintervall** I = **[0,** 1] ansteigend ist,

wobei T(0) = **0 und T(1)** = **1. Eine neue Familie von Copulas, die aus der Verzerrung entsteht, ist gegeben durch**

$$CT(u, v) = TCT^{ÿ1}(u), T^{ÿ1}(v)\ , \mathbf{u,}\ v\ \mathbf{ÿ\ [0,}\ 1], \tag{1}$$

T **wird als zulässige Verzerrung bezeichnet, wenn (1) eine Kopula ist. Wenn die anfängliche Kopula archimedisch mit Generator ÿ ist, dann** ist CT **archimedisch** ^{ÿ1} **; siehe [17,18]. Satz 3.3.3 mit Generator** *ÿ* **ÿ** T **in [11] (S. 96) zeigt, dass** T **zulässig ist, genau dann, wenn** T **zunimmt und konvex ist; siehe auch [19]. Dieses Schlüsselergebnis diktiert die Konvexitätsanforderung und öffnet die Tür für Untersuchungen zulässiger Verzerrungsfunktionen. Ref. [20] zeigte, dass** T **zulässig ist, wenn** T **ÿ exp : (ÿÿ,** 0) **ÿ [0,** 1] **log-konvex ist, und schlug mehrere Verzerrungsfunktionen vor. In Ref. [21] wurde vorgeschlagen, die Verzerrung nur auf die Kopulafunktion, nur auf die Randfunktionen oder auf beide anzuwenden. Die induzierte Kopula in (1) ist das Ergebnis von Verzerrungen sowohl der Kopula als auch der Randfunk**

Ref. [22,23] konstruierten neue Familien von Copulas über Beta- und Kumaraswamy-CDF-Verzerrungen. Ref. [24] verwendete die Einheits-Lomax-Verzerrung. Ref. [25] untersuchte Familien von Copulas, die durch eine Einheits-Weibull-Verzerrung erzeugt wurden. Ref. [26] untersuchte die Eigenschaften von Einheits- Gompertz-verzerrten Copulas und verwendete sie zur Analyse der anthropozentrischen Daten. Die Einheits-Lomax-, Einheits-Weibull- und Einheits-Gompertz-Verzerrungen werden aus einer Exponentialtransformation der Zufallsvariablen Lomax, Weibull und Gomp

Motiviert von der Tatsache, dass die CDF einer kontinuierlichen Zufallsvariablen mit Einheitsintervallunterstützung die Definition einer Verzerrungsfunktion erfüllt, schlagen wir eine Transformation vor, die eine nicht-negative Zufallsvariable in eine mit Einheitsintervallunterstützung umwandelt, was folglich eine Verzerrungsfunktion erstellt. Die Verzerrung kann dann verwendet werden, um neue Copula-Familien zu erzeugen, indem bestehende verzerrt werden. Ähnlich wie bei den anderen Konstruktionen neuer Copulas in der Literatur besteht das Ziel darin, neue Copula-Familien zu erhalten, die einen größeren Bereich von Tail-Abhängigkeitswerten berücksichtigen können. Mit den Parametern in der Verzerrungs-CDF haben die verzerrten Copulas zusätzliche Parameter zusätzlich zu denen in den bestehenden Copulas, was sie flexibler macht

Der Artikel ist wie folgt gegliedert. Abschnitt 2 beginnt mit dem vorgeschlagenen Mechanismus zur Generierung neuer Verzerrungsfunktionen und zulässiger Parameterräume von Verzerrungen, die weiter untersucht werden sollen. Abschnitt 3 liefert archimedische Generatoren für die neuen Familien verzerrter Copulas, wenn die Basis-Copulas Unabhängigkeit, Clayton, Die Familie der verzerrten Unabhängigkeitskopulae wird als Bestätigung der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse vorgestellt. In den Abschnitten 4 und 5 werden die Eigenschaften von Schwanzabhängigkeit, Schwanzordnung, Konkordanzordnung und Kendalls Tau untersucht. Abschnitt 6 enthält die numerischen Ergebnisse einer Simulationsstudie und empirischen Anwendung, gefolgt von abschließenden Bemerkungen. Vorläufige Kopula-Vorarbeiten und Herleitungen von Schwanzordnungen und Konkordanzordnungen sind in den Anhängen A und B enthalten.

2. Vorgeschlagene

Methode Es sei Y **eine nicht-negative kontinuierliche Zufallsvariable mit cdf F. Betrachten Sie das Folgen Transformation der Zufallsvariable Y:**

Machine Translated by Google

$$X = \frac{Y}{\ddot{y} + Y}, \ \ddot{y} > 0. \tag{2}$$

Die Zufallsvariable X **hat einen Träger des Einheitsintervalls und ihre cdf ist gegeben durch**

$$G(x) = P(X \ddot{y} x) = PY \ddot{y} \frac{\ddot{y}x}{1 \ddot{y} x} = F \frac{\ddot{y}x}{1 \ddot{y} x} . \tag{3}$$

Die cdf G **und ihr Quantil bzw. ihre Umkehrfunktion können beide als Verzerrungsfunktionen zur Entwicklung neuer Copulas dienen. Wenn die Variable** Y **einen beliebigen Wert auf der reellen Zahlenlinie annimmt, kann man eine Transformation ihres Absolutwerts in Betracht ziehen; das heißt, |Y|/(1 + |Y|), deren cdf nicht so einfach ist wie (3).**

Wir demonstrieren unten die Methode mit F **als nicht-negativer Lomax- und inverser Lomax-Verteilung und leiten den Parameterraum ab, in dem jede der Verzerrungen konvex ist. Alle Parameter in der generierenden Verteilungsfunktion** F **werden als positiv angenommen. Das Primsymbol, wie** G $^{\ddot{y}}$ **oder** G **‘‘, bezeichnet die Ableitung einer Funktion.**

Beispiel 1. Unit-Lomax (UL)-Verzerrung und ihr Quantil (QUL). Es sei Y eine Lomax- oder Pareto-Typ -II-Zufallsvariable mit einer cdf gegeben durch F(y) = **1 ÿ [ÿ/(ÿ** + y)], wobei y > **0.’**In diesem Fall erzeugt die Transformation in (2) die Verzerrung gegeben durch

$$G(x) = \mathbf{1 \ddot{y}} \frac{\ddot{y}(1 \ddot{y} x)}{\ddot{y}(1 \ddot{y} x) + \ddot{y}x}^{\ddot{y}}, \tag{4}$$

wobei **0** < x < **1.** Beachten Sie, dass zum Beispiel

$$\frac{2(1 \ddot{y} x)}{2(1 \ddot{y} x) + 1x}^{\ddot{y}} = \frac{4(1 \ddot{y} x)}{4(1 \ddot{y} x) + 2x} = \frac{8(1 \ddot{y} x)}{4(1 \ddot{y} x) + 4x}^{\ddot{y}} . \tag{5}$$

Gleichung (5) zeigt, dass mehrere Werte der Parameter *(ÿ, ÿ)* zur gleichen Verzerrung in (4) führen und die Parameter daher nicht eindeutig identifiziert werden können. Um dieses Problem durch Neuparametrisierung zu lösen, betrachten wir daher die Verzerrung GL (UL) und ihre Inverse QL (QUL), gegeben durch

$$GL(x) = \mathbf{1 \ddot{y}} \frac{\mathbf{(1 \ddot{y}} x)}{\mathbf{(1 \ddot{y}} x) + \ddot{y}x}^{\ddot{y}} ; QL(x) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\ddot{y}[(1 \ddot{y} \mathbf{x})\ddot{y}\mathbf{1/}\ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}]\ddot{y}\mathbf{1}} .$$

Lemma 1. Die Verzerrung GL(x) = **1 ÿ (1 ÿ** x) **(1 ÿ** x) + ÿx und **0** < $^{\ddot{y}\mathbf{1}}$ $^{\ddot{y}}$ ist konvex auf I , falls **0** < *ÿ* **ÿ 1** *ÿ* **ÿ 1.**

Beweis. Sei A(x) = **(1 ÿ** x) + ÿx, B(x) = **(1 ÿ** x)[A(x)]ÿ1 . **Der Einfachheit halber wird die Argumentnotation von** (x) **weggelassen. Beachten Sie, dass** (A) = **(1 ÿ** x) $^{\ddot{y}\mathbf{1}}$ **und dann** GL(x) = **1 ÿ** [B(x)]ÿ $^{\ddot{y}\mathbf{1}}$. **Die Ableitungen sind gegeben durch**

$$\begin{aligned} B_{\ddot{y}} &= \ddot{y}\ddot{y}A \ ^{\ddot{y}\mathbf{2}} ; G_{\ddot{y}} = \ddot{y}\ddot{y}B \ \ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1A} \ \ddot{y}\mathbf{2} \\ G''_{M} &= \ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y} \ddot{y} 1)\ddot{y} 2B \ \ddot{y}\ddot{y}\mathbf{2A} \ \ddot{y}\mathbf{4} \ \ddot{y} \ 2\ddot{y}\ddot{y}B \ \ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1A} \ \ddot{y}\mathbf{3} \ (\ddot{y} \ \ddot{y} 1) \ (\ddot{y} \ \ddot{y} 1)\ddot{y} = \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}B \\ &\quad + 2(\ddot{y} \ \ddot{y} 1) . \mathbf{1} \ \ddot{y} x \ \frac{\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1A} \ \ddot{y}\mathbf{3}}{} \end{aligned} \tag{6}$$

Wenn 0 < *ÿ* **ÿ 1 und 0** < *ÿ* **ÿ 1, dann** G $''_{M}$ (x) **ÿ 0 für alle** x **ÿ I.** □

Lemma 2. Die Verzerrung QL(x) = **1/ 1** + *ÿ* **(1 ÿ** x) *ÿ* **ÿ 1.** $^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y} \ \ddot{y}\mathbf{1}}$ $^{\ddot{y}\mathbf{1}}$ ist konvex auf I , wenn *ÿ* **ÿ 1** und

Beweis. Da QL **die Umkehrfunktion von** GL ist **und** GL **eine zunehmende Funktion ist, haben wir nach (6) Erhalten Sie dieses Lemma.** □

Machine Translated by Google

Beispiel 2. Einheitsinverse Pareto-Verzerrung (UIP) und ihr Quantil (QUP). Betrachten wir die inverse Pareto-Zufallsvariable, definiert als der Kehrwert einer Lomax-Zufallsvariable, mit einer cdf gegeben durch F(y) = y/(ÿ + y), wobei y > **0 ist.** In diesem Fall ergibt (3)

$$G(x) = \left(\frac{ÿx}{ÿ(1 \ddot{y}\ x) + ÿx}\right)^{ÿ},$$

wobei **0** < x < **1.** Aus dem gleichen Grund wie in (5) beschrieben, schlagen wir die Verzerrung GP (UIP) und ihre Inverse QP (QUP) vor, gegeben durch

$$GP(x) = \left(\frac{ÿx}{\mathbf{(1 \ddot{y}\ x) + ÿx}}\right)^{ÿ}; \quad QP(x) = \mathbf{1} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ÿ(xÿ1/ÿ \ddot{y}\ 1)}}\right).$$

Lemma 3. Die Verzerrung $GP(x) = \left(\frac{ÿx}{\mathbf{(1 \ddot{y}\ x) + ÿx}}\right)^{ÿ}$ ist konvex auf I , wenn **0** < *ÿ* **ÿ 1** und **0** < *ÿ* **ÿ 1.**

Beweis. Seien A(x) = **(1 ÿ** x) + ÿx **und** B(x) = ÿx[A(x)]ÿ1 . **Dann** [B(x)A(x)]ÿ1 = *1/(ÿx)* **und** GP(x) = [B(x)]ÿ . **Der Einfachheit halber wird die Argumentnotation von (x) weggelassen. Die relevanten Ableitungen sind gegeben durch**

$$B''_{ÿ} = ÿ(A) = \mathbf{ÿ}^{\mathbf{ÿ1}}\ ÿxAÿ2\ (ÿ \ddot{y}\ 1) = ÿA^{\mathbf{ÿ2}}; \quad G'_{P} = ÿÿB\ \mathbf{ÿÿ1A\ ÿ2}$$

$$G''_{P} \quad ÿ(ÿ \ddot{y}\ 1)ÿ\ 2B\ \mathbf{ÿÿ2A\ ÿ4\ ÿ}\ 2ÿÿB\ \mathbf{ÿÿ1A\ ÿ3}\ (ÿ \ddot{y}\ 1) = ÿÿB$$

$$\mathbf{ÿÿ1A\ ÿ3}\ x^{\mathbf{ÿ1}}\ [(ÿ \ddot{y}\ 1)\ \mathbf{ÿ}\ 2(ÿ \ddot{y}\ 1)x]. \qquad \textbf{(7)}$$

Wenn 0 < *ÿ* **ÿ 1 und** *ÿ* **ÿ 1, dann ist die zweite Ableitung** G''_{P}**ÿ 0 für alle** x **ÿ I.** □

Lemma 4. QP(x) = **[1** + ÿ(x $^{\mathbf{ÿ1/ÿ}}$ **ÿ** 1)]ÿ1 ist konvex auf I, wenn *ÿ* **ÿ 1** und **0** < *ÿ* **ÿ 1.**

Beweis. Dieses Lemma folgt, da QP **die Umkehrfunktion von** GP ist **und** GP **gemäß (7) ansteigend und konkav ist, wenn** *ÿ* **ÿ 1 und 0** < *ÿ* **ÿ 1.** □

Zusammenfassend kann man sagen, dass wir durch die Anwendung der in (2) vorgeschlagenen Transformation **auf nicht-negative Lomax- bezogene Zufallsvariablen vier neue zulässige Verzerrungen erhalten, die in Tabelle 1 aufgeführt sind. Zwei Funktionsformen werden angezeigt, da sie für Berechnungen nützli**

Beachten Sie, dass die zulässigen Parameterräume nur eine ausreichende Voraussetzung dafür sind, dass CT **in (1)** eine Kopula **ist . Die duale Potenzverzerrung ist ein Sonderfall von** GL **mit** *ÿ* = **1. Die Potenzverzerrung ist ein Sonderfall von** GP **mit** *ÿ* = **1. Wenn** *ÿ* = *ÿ* = **1, ist es wichtig zu beachten, dass alle Verzerrungen in Tabelle 1 zur Identitätsfunktion werden. Dies bedeutet, dass, wenn diese Verzerrungen auf eine Basiskopula angewendet werden, die resultierende Kopulafamilie eine größere Flexibilität bei der Anpassung an Daten bietet, da sie die Basiskopula als Sond**

Bemerkung 1. Sei Y eine Lomax-Zufallsvariable. Wir haben auch die cdf von Y **1/ÿ** betrachtet , also die Burr- Verteilung, gegeben durch F(y) = **1 ÿ (1** + y **,** als generierende CDF. Es gibt jedoch keine *ÿ) ÿÿ,* einen Parameterraum, auf dem die resultierende Verzerrung konvex ist. Ein weiterer Kandidat für eine generierende cdf ist die potenzierte Lomax-cdf der Form **1 ÿ** $^{ÿ\ ÿ}$ ÿ/(ÿ + y) , die komplexer ist und in Zukunft untersucht wird.

Bemerkung 2. Anstelle von (2) führt die Transformation von X = 1/(1 + Y) auch zu einer Verzerrungs-CDF. Die cdf von X = 1/[1 + Y] ist gegeben durch, für **0** < x < **1,**

$$G(x) = P(X \ddot{y}\ x) = \mathbf{1 \ddot{y}}\ FY\ \ddot{y}\left(\frac{\mathbf{1 \ddot{y}}\ X}{X}\right).$$

In diesem Fall leiten wir den GP ab, wenn Y in Beispiel 1 eine Lomax-Verteilung hat . Wenn Y in Beispiel 2 eine Lomax-Verteilung hat , leiten wir den GL ab.

Machine Translated by Google

Tabelle 1. Vorgeschlagene Verzerrungen und zulässige Parameterräume.

Verzerrung	Funktionsform		Konvexer Parameterraum
U-Lomax (UL)	GL(x)	$= \mathbf{1} \ddot{y} \left(\frac{\mathbf{1} \ddot{y} x}{\mathbf{1} \ddot{y} x + \ddot{y} x \mathbf{1}}\right)^{\ddot{y}}$	$\mathbf{0} < \ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}, \mathbf{0} < \ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}$
Quantil U-Lomax (QL)	QL(x)	$= \mathbf{1} \ddot{y} \frac{\{\mathbf{1} + \ddot{y}[(1 \ddot{y} x)\ddot{y}\mathbf{1} \ddot{y} 1]\}^{\ddot{y}} \ddot{y} \mathbf{1}}{(\mathbf{1} \ddot{y} x)^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}}}$	$\ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}, \ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}$
U-Inverses Pareto (UIP)	GP(x)	$= \frac{(\mathbf{1} \ddot{y} x)^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}} \ddot{y} \mathbf{1}}{\mathbf{1} + \ddot{y}[(1 \ddot{y} x)\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}]\ddot{y}\mathbf{1}}$ $= \frac{\mathbf{1}}{\left(\mathbf{1} + \ddot{y}[(1 \ddot{y} x)\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}]\ddot{y}\mathbf{1} \ddot{y} x \mathbf{1} \ddot{y} x\right)^{\ddot{y}} + \ddot{y} x \mathbf{1}}$	$\mathbf{0} < \ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}, \ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}.$
Quantil U-Inverse Pareto (QUP)	QP(x)	$= \frac{\mathbf{1}}{[\mathbf{1} + \ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1}(x\ddot{y}\mathbf{1} \ddot{y} 1)]\ddot{y} \mathbf{1}/\ddot{y} x}$ $= \frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{1}/\ddot{y}} + \ddot{y}(\mathbf{1} \ddot{y} x \mathbf{1}/\ddot{y})}$ $= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \ddot{y}(x\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y} \ddot{y} 1)}$	$\ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}, \mathbf{0} < \ddot{y} \ddot{y} \mathbf{1}$

Bemerkung 3. Es gibt eine Vielzahl von CDFs, die als generierende CDF F in (3) verwendet werden können. Zum Beispiel eine Exponentialverteilung mit Mittelwert ÿ. In diesem Fall ergibt (3) eine mögliche Verzerrung, die durch **1 ÿ exp ÿ** *x/[ÿ(1* **ÿ** x)] gegeben ist . Ein weiteres Beispiel ist eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit einer PDF, die durch

$$f(y) = \frac{\ddot{y}(\ddot{y} + \ddot{y})^{\ddot{y}} \ddot{y}^{\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1}}}{\ddot{y}(\ddot{y})\ddot{y}(\ddot{y})\,(y + \ddot{y})^{\ddot{y}+\ddot{y}}}$$

wobei x > **0,** *ÿ* > **0,** *ÿ* > 0 und *ÿ* > **0.**

3. Familien neuer verzerrter Kopulas

Die allgemeine Form von Copulas, die durch eine Verzerrung T konstruiert werden, **ist in (1). Archimedische Copulas werden häufig verwendet [27] und sind für ihre Flexibilität bei der Modellierung von Abhängigkeiten innerhalb multivariater Zufallsvariablen bekannt. Wir formulieren die archimedischen Generatoren, die sich aus den Verzerrungen in Abschnitt 3.1** ergeben , **wenn die Basis-Copulas Unabhängigkeit, Clayton, Frank und Gumbel sind; siehe Tabelle A1 in Anhang A. Die Basis-Copulas, mit Ausnahme der Unabhängigkeits-Copula, haben einen einzigen Parameter, und die Familien der verzerrten Copulas enthalten mehr Parameter und sind weniger restriktiv. Lassen Sie** r **den Parameter in der Basis-Copula bezeichnen.**

3.1. Archimedische Generatoren

Beispiel 3 (Unabhängigkeitskopula). Die archimedischen Generatoren sind

– UL-Unabhängigkeitsgenerator: $\mathbf{log}\ \ddot{y}\ (\mathbf{1} \ddot{y} u)^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}}\ \ddot{y}\mathbf{1} + \mathbf{1}$.

– QUL-Unabhängigkeitsgenerator: $\ddot{y}\ \mathbf{log}\ \mathbf{1} \ddot{y} \mathbf{1} + \ddot{y}\ (\mathbf{1} \ddot{y} u)^{\ddot{y}\mathbf{1}\ \ddot{y}\ 1}$.

– UIP-Unabhängigkeitsgenerator: $\mathbf{log}\ \mathbf{1} + \ddot{y}(u^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}}\ \ddot{y}\ 1)$.

– QUP-Unabhängigkeitsgenerator: $\mathbf{log}\ \mathbf{1} + \ddot{y}^{\ddot{y}\mathbf{1}}\ (u^{\ddot{y}\mathbf{1}}\ \ddot{y}\ 1)^{\ddot{y}}$.

Beispiel 4 (Clayton Copula). In diesem Fall erhalten wir Folgendes: –

UL-Clayton-Generator: $\ddot{y}\ (\mathbf{1} \ddot{y} u)^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}\ \ddot{y}\ 1}\ \ddot{y}^{\ddot{y}\mathbf{1}} + \mathbf{1}^{-r}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}\ /r.$

– QUL-Clayton-Generator: $\mathbf{1} \ddot{y} \mathbf{1} + \ddot{y}((1 \ddot{y} u)^{\ddot{y}\mathbf{1}}\ \ddot{y}\ 1)^{\ddot{y}\ddot{y}\ \ddot{y}r}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}\ /r.$

– UIP-Clayton-Generator: $\mathbf{1} + \ddot{y}\ u^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}\ \ddot{y}\ 1}\ ^{-r}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}\ /r.$

– QUP-Clayton-Generator: $\mathbf{1} + \ddot{y}^{\ddot{y}\mathbf{1}}\ (u^{\ddot{y}\mathbf{1}}\ \ddot{y}\ 1)^{\ddot{y}r}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}\ /r.$

Beispiel 5 (Frank-Kopula). Wenn die Basis-Kopula C Frank ist, erhalten wir Folgendes:

Machine Translated by Google

– UL-Frank-Generator: **ÿ log 1** + e ÿr[ÿ((1ÿu) *ÿ1/ÿÿ1)* ÿ1+1] **ÿ1 ÿ 1 /**(e ÿr **ÿ** 1) .

– QUL-Frank-Generator: **ÿ log 1** + ÿr[1ÿ(1+ÿ((1ÿu) ÿ1ÿ1))ÿÿ] **ÿ 1 /**(e ÿr **ÿ** 1) .

ÿr – UIP-Frank-Generator: **ÿ log 1** + ÿ**ÿ**1+ÿ((u**ÿ**1**ÿ**1**ÿ**1

Machine Translated by Google

Für die UIP-Unabhängigkeits-Kopula aus Tabelle 1:

$$\text{CGP}(u,v) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1}\,\text{CG}\left(\overset{\ddot{y}\mathbf{1}}{\text{P}}(u), G\overset{\ddot{y}\mathbf{1}}{\text{P}}(u)\right)^{\ddot{y}\mathbf{1}}\ddot{y}\,\mathbf{1}}^{\ddot{y}} \tag{11}$$

$$= \mathbf{1} + (u^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}}\ \ddot{y}\ 1) + (v^{\ddot{y}\mathbf{1}/\text{ein}}\ \ddot{y}\ 1) + \ddot{y}(u^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}}\ \ddot{y}\ 1)(v^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}}\ \ddot{y}\ 1)^{\ddot{y}\ddot{y}}$$

$$= \text{uv}\ \mathbf{1}\ \ddot{y}\ (\mathbf{1}\ \ddot{y}\ \ddot{y})\ (\mathbf{1}\ \ddot{y}\ u^{1/\ddot{y}})(1\ \ddot{y}\ v^{1/a})^{\ddot{y}\ddot{y}}, \tag{12}$$

Dies ist die BB10-Kopula [12] mit ÿL = ÿU = **2. Die BB10-Kopula ist gegeben durch** C(u, v) = 1/r2)(1 r1(1 **ÿ** u **wobei r1ÿ[0,1/2))ÿr2 ,2ÿ[0,ÿ).Wie in Proposition 3 gezeigt, haben UIP-verzerrte Kopulas die gleiche obere und untere Schwanzordnung wie die Basis-Kopula.**

Für die QUP-Unabhängigkeits-Kopula gilt aus Tabelle 1:

$$\text{CQP}(u,v) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \ddot{y}\,\text{CG}\left(\overset{\ddot{y}\mathbf{1}}{\text{P}}(u), G\overset{\ddot{y}\mathbf{1}}{\text{P}}(u)\right)^{\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}}\ddot{y}\,\mathbf{1}} \tag{13}$$

$$\frac{(\mathbf{1}\ \ddot{y}\ u)(1\ \ddot{y}\ v) + \ddot{y}u(1\ \ddot{y}\ v) + \ddot{y}v(1\ \ddot{y}\ u) = \mathbf{1} + \ddot{y}\text{uv}}{}^{\ddot{y}\mathbf{1}}$$

$$= \text{uv}\ \mathbf{1}\ \ddot{y}\ (\mathbf{1}\ \ddot{y}\ u)^{\ddot{y}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}}(1\ \ddot{y}\ v)^{\ddot{y}}{}^{\ddot{y}\mathbf{1}},$$

Dies ist die AMH-Kopula oder ein Sonderfall der BB10-Kopula.

4. Tail-Abhängigkeitskoeffizienten und Tail-

Ordnungen In diesem Abschnitt untersuchen wir die Tail-Abhängigkeitskoeffizienten, Tail-Ordnungen und Konkordanz für die neuen Copula-Familien, die aus den vier Verzerrungen in Tabelle 1 hervorgehen. Die ausführlichen Herleitungen der Tail-Ordnungen finden Sie in Anhang B.

Lassen Sie t(u) = dT(u)/du **und nehmen Sie an, dass der untere Tail-Abhängigkeitskoeffizient (ltd)** ÿL **der Basiskopula** C **und** *limÿÿ0*+ t C(u, u) /t(u) **existieren. Per Definition in (A3) und der L'Hopital- Regel ist der ltd-Koeffizient für eine durch** T **-Verzerrung verursachte Kopula gegeben durch**

$$\ddot{y}\mathbf{T,L} = \lim_{u\ddot{y}0+} \frac{\text{T C}(T^{\ddot{y}\mathbf{1}}(u), T^{\ddot{y}\mathbf{1}}(u))}{\text{Sie}}$$

$$= \lim u\ddot{y}0+ \frac{\text{T C}(u,u)}{\text{T}(u)} = \lim u\ddot{y}0+ \frac{\text{t C}(u,u)}{\text{t}(u)}\frac{\text{dC}(u,u)}{\text{du}}. \tag{14}$$

Da limuÿ1ÿ T(u) = **1,** ist der Koeffizient von CT mit der Substitution $^{\ddot{y}\mathbf{1}}(u)$, **der obere Schwanz hängt** von v = T **dence (utd) gegeben durch**

$$\ddot{y}\mathbf{T,U} = \mathbf{2}\ \ddot{y}\ \lim_{u\ddot{y}1\ddot{y}} \frac{\mathbf{1}\ \ddot{y}\ \text{T C}(T^{\ddot{y}\mathbf{1}}(u), T^{\ddot{y}\mathbf{1}}(u))}{\mathbf{1}\ \ddot{y}\ u}$$

$$= \mathbf{2}\ \ddot{y}\ \lim_{v\ddot{y}1\ddot{y}} \frac{\mathbf{1}\ \ddot{y}\ \text{T}(\text{C}(v,v)) = \mathbf{2}}{\mathbf{1}\ \ddot{y}\ \text{T}(v)}\ \ddot{y}\ \lim_{v\ddot{y}1\ddot{y}} \frac{\text{t C}(v,v)\ \text{dC}(v,v)}{\text{t}(v)\ \text{dv}}. \tag{15}$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass der ltd-Koeffizient ÿL = **0 ist, wenn** ÿL > **1, und der utd-Koeffizient** ÿU = **0, wenn** ÿU > **1 für die Basiskopula C. Weiterhin nehmen wir an, dass** C(u, u) **ÿ** u ÿL ÿ(u) **für** u **ÿ 0** + **und** C(1 **ÿ u, 1 ÿ** u) **ÿ** u ÿU ÿÿ(u) **für** u **ÿ 0** + **für einige langsam variierende Funktionen** ÿ **und ÿÿ bei** 0+. **Der Index bezeichne einen Eigenschaftseigentümer, z. B. wird** der Index T **in ÿT,U verwendet, um den ltd-Koeffizienten einer T-verzerrten Kopula zu bezeichnen.**

Proposition 1 (Unit-Lomax-Verzerrung). Es sei CGL (u, v) die GL-verzerrte Copula, definiert in (8), wobei **0** < *ÿ* **ÿ 1** und **0** < *ÿ* **ÿ 1.** Dann

(i) ÿGL,L = ÿL und ÿGL,L = ÿL. **(ii)**
ÿGL,U = ÿU, wenn *ÿ* = **1** und ÿGL,U = **1 ,** wenn **0** < *ÿ* < **1.** Und ÿGL,U = **2 ÿ (2 ÿ** ÿU) *ÿ* .

Machine Translated by Google

Beweis. Die Endaufträge sind in (A9) und (A17) im Anhang B dargestellt. Der ltd-Koeffizient ist **nach (14) und der L'Hopital-Regel gegeben durch**

$$\ddot{y}_{GL,L} = \lim_{u\ddot{y}0+} \left(1 \ddot{y} \frac{1 \ddot{y} C(u,u)}{1 \ddot{y} C(u,u) + \ddot{y}C(u,u)}\right)^{\ddot{y}} \left(1 \ddot{y} \frac{1 \ddot{y} u}{1 \ddot{y} u + \ddot{y}u}\right)^{\ddot{y}}$$

$$= \lim u\ddot{y}0+ \frac{[1 \ddot{y} C(u,u)]\,[(1 \ddot{y} u) + \ddot{y}u]^{\ddot{y}\ddot{y}1}}{[1 \ddot{y} C(u,u) + \ddot{y}C(u,u)]\,(1 \ddot{y} u)\,(u,} \times \frac{C^{\ddot{y}}u)\,[(1 \ddot{y} u) + \ddot{y}u]^{2}}{[1 \ddot{y} C(u,u) + \ddot{y}C(u,u)]2} \frac{}{1} = \ddot{y}L$$

da limuÿ0+ C(u, **u)/u** = limuÿ0+ dC(u, **u)/du** = ÿL. **Der utd-Koeffizient, nach (15) und der Regel von L'Hopital erhalten wir, dass**

$$\ddot{y}_{GL,U} = 2 \ddot{y} \lim_{u\ddot{y}1\ddot{y}} \left(\frac{1 \ddot{y} C(u,u)}{1 \ddot{y} C(u,u) + \ddot{y}C(u,u)}\right)^{\ddot{y}} \left(\frac{1 \ddot{y} u}{1 \ddot{y} u + \ddot{y}u}\right)^{\ddot{y}}$$

$$= 2 \ddot{y} \lim u\ddot{y}1\ddot{y} \frac{1 \ddot{y} u + \ddot{y}u}{[1 \ddot{y} C(u,u) + \ddot{y}C(u,u)]\ddot{y} 1 \ddot{y} C(u,u)}^{\ddot{y}} = 2 \ddot{y} (2 \ddot{y} \ddot{y}U)\,\ddot{y}$$

da limuÿ1ÿ[1 ÿ C(u, **u)]/(1 ÿ** u) = **2 ÿ** ÿU. □

Proposition 2 (Quantil Unit-Lomax-Verzerrung). Es sei CQL (u, v) die QL-verzerrte Copula, definiert in (10), wobei *ÿ* **ÿ 1** und *ÿ* **ÿ 1.** Dann **(i)** ÿQL,L = ÿL und ÿQL,L = ÿL.

(ii) ÿQL,U = ÿU wenn *ÿ* = **1** und ÿQL,U = **1** wenn *ÿ* > **1.** Und ÿQL,U = **2 ÿ (2 ÿ** ÿU)$^{1/\ddot{y}}$.

Beweis. Die Endaufträge sind in (A10) und (A18) im Anhang B aufgeführt. Nach der Regel von L'Hopital

$$\ddot{y}_{QL,L} = \lim_{u\ddot{y}0+} \frac{1 \ddot{y} C(u,u)\ \ddot{y}1/\ddot{y}\ \ddot{y} 1}{1 \ddot{y} C(u,u)}^{\ddot{y}\ddot{y}1/\ddot{y}\ \ddot{y} 1} + \ddot{y} \frac{(1 \ddot{y} u)\ \ddot{y} 1^{\ddot{y}1/\ddot{y}}(1 \ddot{y} u)\ddot{y}1/\ddot{y}}{\ddot{y} 1 + \ddot{y}}$$

$$= \lim u\ddot{y}0+ \frac{[(1 \ddot{y} u)\ \ddot{y} 1 + \ddot{y}]^{\ddot{y}1/\ddot{y}}\ \ddot{y}1/\ddot{y}}{[\,1 \ddot{y} C(u,u)\ \ddot{y} 1 + \ddot{y}]}^{2} \frac{1 \ddot{y} C(u,u)\ (1}{\ddot{y} u)\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1}^{\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1} C^{\ddot{y}}(u,u) = \ddot{y}L$$

da limuÿ0+ C(u, **u)/u** = limuÿ0+ dC(u, **u)/du** = ÿL. **Nach (15) und der L'Hopital'schen Regel ist der ltd-Koeffizient gegeben durch**

$$\ddot{y}_{QL,U} = 2 \ddot{y} \lim_{u\ddot{y}1\ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{1 \ddot{y} C(u,u)}^{\ddot{y}1/\ddot{y}\ \ddot{y} 1 + \ddot{y}} \frac{\ddot{y}}{(1 \ddot{y} u)\ddot{y}1/\ddot{y}\ \ddot{y} 1 + \ddot{y}}$$

$$= 2 \ddot{y} \lim u\ddot{y}1\ddot{y} \frac{1 \ddot{y} C(u,u)}{1 \ddot{y} u}^{1/\ddot{y}+1} \frac{dC(u,u)}{du}^{\ddot{y}1} = 2 \ddot{y} (2 \ddot{y} \ddot{y}U)^{1/\ddot{y}}$$

da limuÿ1ÿ[1 ÿ C(u, **u)]/[1 ÿ** u] = **2 ÿ** ÿU. □

Proposition 3 (Einheitsinverse Pareto-Verzerrung). Es sei CGP (u, v) die GP-verzerrte Copula, definiert in (11), wobei **0** < *ÿ* **ÿ 1** und *ÿ* **ÿ 1.** Dann gilt **(i)** ÿGP,L = ÿL und ÿGP,L = (ÿL) a **(ii)** ÿGP,U = ÿU und ÿGP,U = ÿU.

Machine Translated by Google

Beweis. Die Tail Orders sind in (A11) und (A19) im Anhang B dargestellt. Für die Ltd. erhalten wir mit Hilfe der L'Hopital-Regel, dass

$$\{u/[1 \ddot{y} u + \ddot{y}u]\} \ddot{y} \quad \{C(u, u)/[1 \ddot{y} C(u, u) + \ddot{y}C(u, u)]\} \ddot{y} \ddot{y}GP,L = \lim_{u\ddot{y}0+}$$

$$= \lim u\ddot{y}0+ \quad \frac{C(u, u)}{Sie} \quad \ddot{y} \quad \frac{1 \ddot{y} C(u, u) + \ddot{y}C(u, u) 1 \ddot{y} u + \ddot{y}u}{} \quad \ddot{y}\ddot{y} \quad = (\ddot{y}L) \ddot{y} \quad .$$

Der utd-Koeffizient ist nach (15) und der L'Hopital-Regel gegeben durch

$$\lim 1 \ddot{y} \{u/[1 \ddot{y} u + \ddot{y}u]\} \quad \frac{1 \ddot{y} \{C(u, u)/[1 \ddot{y} C(u, u) + \ddot{y}C(u, u)]\} \ddot{y} \ddot{y}GP,U = 2 \ddot{y}}{\ddot{y} (\ddot{y}\ddot{y}1) 1 \ddot{y} C(u, u) + \ddot{y}C(u, u)}$$

$$= 2 \ddot{y} \lim u\ddot{y}1\ddot{y} \quad \frac{C(u, u)}{Sie} \quad \frac{}{1 \ddot{y} u + \ddot{y}u} \quad \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1 \quad \frac{dC(u, u) =}{\ddot{y}U \, du}$$

da limuÿ1ÿ C(u, u) = **1 und** limuÿ1ÿ dC(u, **u)/du** = **2 ÿ** ÿU. □

Proposition 4 (Quantileinheit-inverse Pareto-Verzerrung). Es sei CQP (u, v) die QP-verzerrte Copula, definiert in (13), wobei *ÿ* **ÿ 1** und **0** < *ÿ* **ÿ 1.** Dann **(i)** ÿQP,L = ÿL und ÿQP,L = (ÿL) **(ii)** ÿQP,U = ÿU. Wenn $^{1/\ddot{y}}$.
ÿU = **1,** dann ÿQP,U = ÿU.

Beweis. Die Tail-Orders werden in **(A13) und (A20) im Anhang** B **hergeleitet . Für den ltd-Koeffizienten gilt**

$$= \lim 1/[1 + \quad \frac{1/ 1 + \ddot{y} C(u, u) \ddot{y}QP,L \quad \ddot{y}1/\ddot{y} \ddot{y} 1}{\ddot{y}(u\ddot{y}1/\ddot{y} \ddot{y} 1)]} = \lim u\ddot{y}0+ \quad \frac{1 + \ddot{y}(u \ddot{y} 1) 1 + \ddot{y} C(u, \quad \ddot{y}1/\ddot{y}}{u)\ddot{y}1/\ddot{y} \ddot{y} 1}$$

$$= \lim u\ddot{y}0+ \quad \frac{C(u, u)}{Sie} \quad 1+1/\ddot{y} \quad \frac{du}{= (\ddot{y}L) \, dC(u, u)} \quad 1/\ddot{y} \quad .$$

Der utd-Koeffizient ist nach (15) und der L'Hopital-Regel gegeben durch

$$\ddot{y}QP,U = 2 \ddot{y} \lim_{u\ddot{y}1\ddot{y}} \quad \frac{\ddot{y}[C(u, u) \ddot{y} 1] 1 + \ddot{y}[C(u, u) \quad \ddot{y}1/\ddot{y}}{\ddot{y}1/\ddot{y} \ddot{y} 1]} \quad \frac{\ddot{y}(u \ddot{y} 1) 1 + \ddot{y}(u\ddot{y}1/ \quad \ddot{y}1/\ddot{y}}{\ddot{y} \ddot{y} 1)}$$

$$= 2 \ddot{y} \lim u\ddot{y}1\ddot{y} \quad \frac{\ddot{y}1/\ddot{y} \ddot{y}1/\ddot{y} 1 + \ddot{y}(u \ddot{y} 1)}{u)\ddot{y}1/\ddot{y} \ddot{y} 1] (u\ddot{y}1/\ddot{y} \ddot{y} 1)} \quad \frac{C(u, u) \ddot{y} 1 1 + \ddot{y}[C(u,}{}$$

$$= 2 \ddot{y} \lim u\ddot{y}1\ddot{y} \quad \frac{1 + \ddot{y}(u \ddot{y} 1) 1 + \ddot{y}[C(u, \quad \ddot{y}1/\ddot{y}}{u)\ddot{y}1/\ddot{y} \ddot{y} 1]} \quad \frac{[C(u, u)]\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1 \, dC(u, u) = \ddot{y}U}{u\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1 \, du}$$

da limuÿ1ÿ C(u, **u)/u** = **1 und** limuÿ1ÿ dC(u, **u)/du** = **2 ÿ** ÿU. □

Die Ergebnisse der Vorschläge sind in Tabelle 2 zusammengefasst. Die utd-Koeffizienten von UL- und QUL-verzerrten Copulas unterscheiden sich von denen der Basis-Copulas, wenn *ÿ* ÿ = 1, während die ltd-Koeffizienten unverändert bleiben. Die UL- und QUL-Verzerrungen ergeben neue Copulas mit Abhängigkeit vom oberen Ende, unabhängig davon, ob die Basis-Copula diese hat oder nicht. Umgekehrt bilden die UIP- und QUP-Verzerrungen Copulas mit unterschiedlichen ltd-Koeffizienten, wenn *ÿ* ÿ = 1 von der Basis-Copula, während die utd-Koeffizienten gleich bleiben. Die Clayton-Copula hat keine Abhängigkeit vom oberen Ende. Basierend auf Tabelle 2 erstellen wir jedoch durch Anwenden von UL- und QUL-Verzerrungen auf eine Clayton-Copula eine neue Familie von Copulas, die flexibler sind, da sie Abhängigkeitswerte vom oberen Ende im Bereich von 0 bis 1 aufnehmen können. Dieselbe Schlussfolger

Machine Translated by Google

Tabelle 2. Schwanzabhängigkeitskoeffizienten der verzerrten Copulas.

UL (0 < *ÿ* ÿ 1)	QUL (*ÿ* ÿ 1)	UIP (*ÿ* ÿ 1)	QUP (0 < *ÿ* ÿ 1)
ÿT,L ÿL	ÿL	(ÿL)	(ÿL) $^{1/ÿ}$
ÿT,U 2 ÿ (2 ÿ ÿU) *ÿ*	**1/ÿ 2 ÿ (2 ÿ** ÿU)	*ÿ* ÿU	ÿU

Als nächstes konstruieren wir die Dichtekonturdiagramme für UL- und UIP-verzerrte Copulas in Abbildung 1 und 2. Konturdiagramme und Beobachtungen für QUL- und QUP-verzerrte Copulas sind in Abbildung A1 bzw. A2 in Anhang B.1 dargestellt . **Die gemeinsame PDF einer Copula ist** ÿC(u, v)/ ÿuÿv. **Beachten Sie, dass ein entlang einer Richtung verlängertes Konturdiagramm eine starke Abhängigkeit in dieser Richtung signalisiert. Eine kreisförmige Konturform weist auf Unabhängigkeit zwischen Variablen hin. Beispielsweise hat der Clayton eine geringere Abhängigkeit vom Schwanz und keine Abhängigkeit vom oberen Schwanz, daher erwartet man eine verlängerte oder gestraffte Konturlinie auf der unteren linken Seite. Lassen Sie** r **den Parameter in der Basis-Copula sein. Wenn** *ÿ* = *ÿ* = **1, liefern uns sowohl die UL- als auch die UIP-Verzerrung die Basis-Copulas, die in der ersten Spalte bei**

Während die Frank-Kopula unabhängig vom Schwanz ist, zeichnen sich die Clayton- und Gumbel-Kopula durch eine asymmetrische Schwanzabhängigkeit mit jeweils nur utd und ltd aus. Wie in Tabelle 2 zusammengefasst, können UL-Verzerrungen neue Familien von Kopulas mit oberer Schwanzabhängigkeit hervorbringen . Kopulas, die mit der UL-Verzerrung konstruiert wurden, weisen eine obere Schwanzabhängigkeit auf und behalten dieselben Verhaltensmuster des unteren Schwanzes bei wie die Basis-Kopula. Insbesondere haben UL-verzerrte Clayton-Kopulas sowohl untere als auc

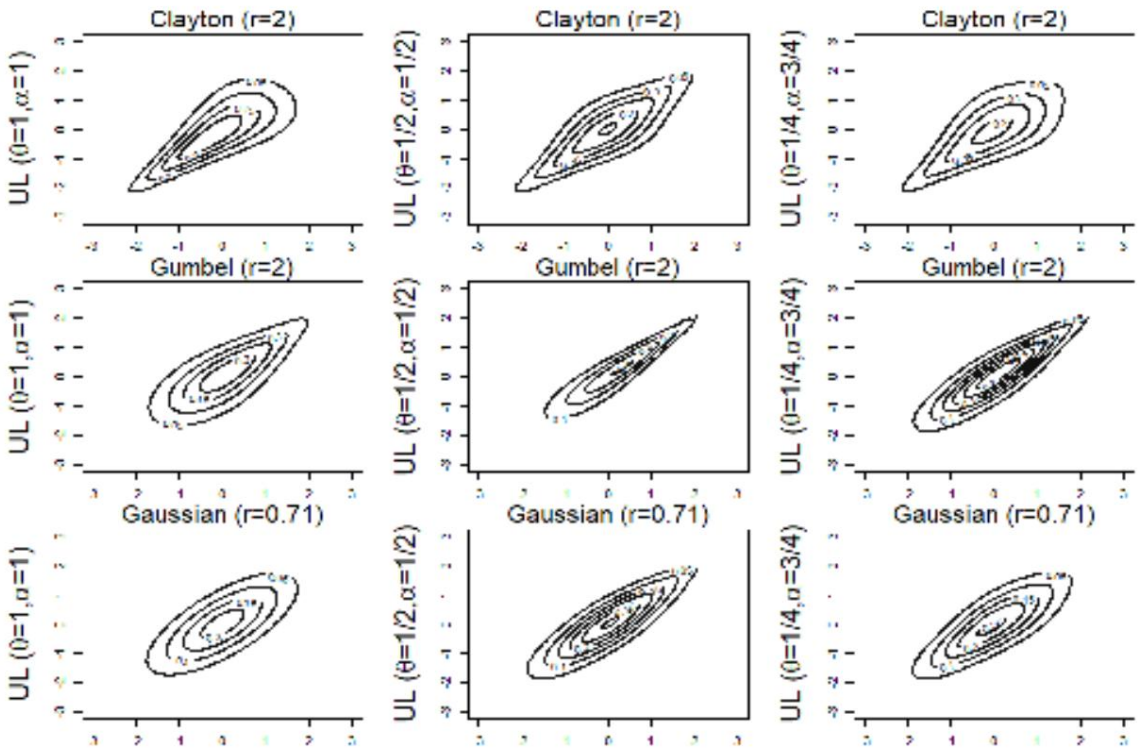


Abbildung 1. Dichtekonturdiagramme der UL-Clayton-, UL-Gumbel- und UL-Gaussian-Copulas mit standardmäßigen Normalrändern und Parametern *(ÿ,* ÿ) = **(1, 1), (1/2, 1/2) und (1/4, 3/4). Für Clayton, Gumbel und Gaussian wird der Parameter** r **so gewählt, dass der Wert von Kendalls Tau 1/2 betr**

Wie aus Tabelle 2 und Abbildung 2 hervorgeht, weisen UIP-verzerrte Copulas ähnliche Eigenschaften auf wie die Basis-Copulas in der ersten Spalte. Wenn die Basis-Copula eine geringere Tail-Abhängigkeit aufweist, führt die Familie einen zusätzlichen Parameter in den ltd-Koeffizienten ein, behält aber die obere Tail- Abhängigkeit der Basis-Copula bei.

Machine Translated by Google

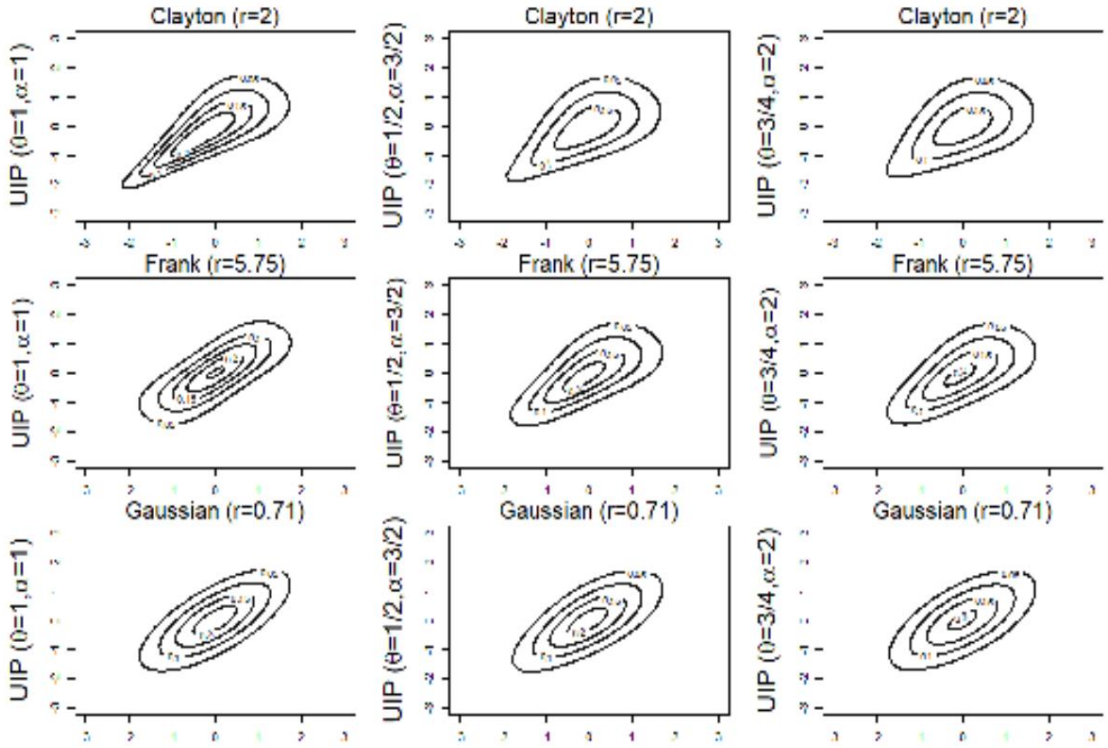


Abbildung 2. Dichtekonturdiagramme der UIP-Clayton-, UIP-Gumbel- und UIP-Gaussian-Copulas mit standardmäßigen Normalrändern und Parametern *(ÿ,* ÿ) = **(1, 1), (1/2, 1/2) und (1/4, 3/4). Für Clayton, Frank und Gaussian wird der Parameter** r **so gewählt, dass der Wert von Kendalls Tau 1/2 beträgt.**

5. Konkordanzordnung und Kendalls Tau

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Konkordanzordnung und Kendalls Tau. Wir liefern Formeln für Kendalls Tau der UL- und UIP-verzerrten Copulas, indem wir die Formel (16) und die in Abschnitt 3 bereitgestellten archimedischen Generatoren verwenden . **Die Formeln können leicht angepasst werden, um Programme zum Berechnen von Kendalls Tau-Werten bei verschiedenen Parameterv**

5.1. Konkordanzordnung

Eine Familie von Copula-Funktionen Cr(u, v) = C(u, v;r) **mit Parameter** r **ist positiv geordnet, bezeichnet durch** Cr1 **ÿ** Cr2 , **falls** Cr1 (u, v) **ÿ** Crr (u, v), **und ist negativ geordnet, bezeichnet durch** Cr1 (u, v) **ÿ** Crr (u, v) **für alle r1 ÿ r2 und u,** v **ÿ I. Gemäß der Definition eines Konkordanzmaßes durch** Cr1 **ÿ** Cr2 **ist das Kendall-Tau einer Familie von Copulas, wenn es nach einem Parameter geordnet ist, innerhalb des Parameters entweder nicht zunehmend oder nicht ab**

Man kann die erste Ableitung in Bezug auf einen Parameter berechnen, um zu bestimmen, ob die Kopula C **positiv oder negativ durch den Parameter geordnet ist, was eine schwierige Aufgabe sein kann. Wenn eine Kopula von der archimedischen Klasse ist, können wir zusätzlich zu Theorem A1 in Anhang C das folgende Korollar verwenden, um die Konkordanzordnungen in den Parametern zu untersu**

Theorem 1 ([11]). Seien **C1** und **C2** archimedische Copulae mit Generatoren **ÿ1** bzw. **ÿ2 .** Dann gilt **C1 ÿ C2 ,** wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (i) **ÿ1 ÿ** *ÿ* $\ddot{y}_2^{\ddot{y}_1}$ ist konkav; (ii) **ÿ1/ÿ2** $\ddot{y}_1/\ddot{y}_2$ ist nicht abnehmend auf I; und (iii) **ÿ1** und **ÿ2** sind stetig differenzierbar auf I und *ÿ* ist nicht abnehmend auf I.

Wenn die Basiskopula C **positiv geordnet ist, dann gilt für r1 ÿ r2:** C(T $^{\ddot{y}_1}$ (u), T$^{\ddot{y}_1}$ **(v);r1) ÿ** C(T $^{\ddot{y}_1}$ (u), T$^{\ddot{y}_1}$ **(v);r2) für alle u,** v **ÿ I. Da** T **zunimmt, ist** T C(T $^{\ddot{y}_1}$ (u), T$^{\ddot{y}_1}$ **(v);r1) ÿ** T C(T $^{\ddot{y}_1}$ (u), T$^{\ddot{y}_1}$ **(v);r2) . Ähnliche Argumente können auf eine negativ geordnete Basiskopula angewendet werden . Das heißt, eine Familie von Verzerrungskopula, die durch zulässige Verzerrungen gebilde**

Machine Translated by Google

die Konkordanzreihenfolge im Parameter der Basiskopula, falls die Familie der Basiskopulae nach dem Parameter geordnet ist; siehe auch [24].

Wenn die Basiskopula archimedisch ist und der Generator ÿ frei von den Parametern *ÿ* **und** ÿ **ist , kann die neue Familie der** T-verzerrten Copulas wie folgt geschrieben werden:

$$T\,C(T^{ÿ1}(u), T^{ÿ1}(v)) = T^{ÿ}\,ÿ\,ÿ^{ÿ1}\,ÿ\,T^{ÿ1}(u) + ÿ\,T^{ÿ1}(v)\,,$$

mit Archimedean mit einem Generator gegeben durch $ÿ^{ÿ1}T(u)$, **eine kontinuierliche, streng abnehmende, konvexe Funktion, sodass** *ÿ* T **mit Generator ÿ.** ^{ÿ1} **(1) = 0. Angenommen, unter der Basis Copula ist archimedisch**

Seien T1 und T2 die T- **Verzerrung, ausgewertet bei den Parameterwerten r1 und r2, wobei r1 ÿ r2 .**

Korollar 1. Seien CT1 und CT2 archimedische Copulae mit Generatoren *ÿ* **ÿ** $^{ÿ1}_{1}$ und *ÿ* **ÿ** T $^{ÿ1}_{2}$, T. Wenn eine der folgenden Bedingungen gilt: (i) *ÿ* **ÿ** T $^{ÿ1}_{1}$ **ÿ T2 ÿ** ^{ÿ1} ist konkav; (ii) *ÿ* **ÿ** $^{T\,ÿ1}/ÿ$ **ÿ** $T^{ÿ1}$ *ÿ* ist nicht abnehmend auf **(0,** 1); oder (iii) *ÿ* ist stetig differenzierbar auf I und $(ÿ^{ÿ}T^{1ÿ1}_{1}/ÿ^{ÿ})(T^{ÿ}_{2}{}^{2ÿ1}/T^{ÿ}_{1}{}^{ÿ\,T\,1ÿ1})$ auf I nicht abnehmend ist, dann gilt CT1 **ÿ** CT2 .

5.2. Kendalls Tau

Für die durch T- **Verzerrung induzierten Copulas in (1) ersetzt man** ^{ÿ1}T(u) = x **und** T **in** ^{ÿ1}(v) = ja **der Definition von Kendall's Tau in (A5), dann kann sein Kendall's Tau ausgedrückt werden als**

$$ÿ = 1\,ÿ\,4\int_0^1\int_0^1 [t(C(x, y))]2C1|2\,(x|y)C2|1\,(y|x)dxdy,$$

wobei t(v) = dT(v)/dv, **C2|1** (u, v) = ÿC(u, **v)/ÿu und C1|2** (u, v) = ÿC(u, *v)/ÿv.* Zur Berechnung von Kendalls Tau werden **numerische Integrationsmethoden benötigt. Definieren Sie** ÿ(u) = *ÿ* T ^{ÿ1}(u) . **Nach (A6) ist Kendalls Tau für eine verzerrte Copula gegeben durch**

$$ÿ = 1 + 4\int_0^1 \frac{ÿ(u)}{ÿ^{ÿ}(u)}du = 1 + 4\int_0^1 \frac{ÿ(v)}{ÿ^{ÿ}(v)}\,2\,t(v)dv. \qquad \textbf{(16)}$$

Als nächstes präsentieren wir die expliziten Formeln von Kendalls Tau für UL- und UIP-Verzerrungen, wenn die Basiskopulae Unabhängigkeits-, Clayton-, Gumbel- und Frank-Kopulae sind. Die archimedischen Generatoren für die Basiskopulae sind in Tabelle A1 in Anhang A aufgeführt.

– UL-Unabhängigkeits-Kopula: 1 ÿ 4 $\int_0 \frac{ÿ[(1\,ÿ\,u)\,ÿ^{ÿ1/ÿ}1]\,\textbf{log}\,ÿ[(1\,ÿ\,u)\,ÿ[(1\,ÿ\,\textbf{u})^{ÿ1/ÿ}\quad ÿ\ 1]^{ÿ1\,ÿ\,1}}{ÿ1/ÿÿ1\ ][ÿ + (1\,ÿ\,u)ÿ1/ÿ\,ÿ\,1]ÿ1\,ÿÿu\,(1\,ÿ\,u}\,du.$

– UL-Clayton-Kopula: 1 ÿ 4 $\int_0 \frac{r\,)\,[1 + ÿ(ÿ1}{r(1\,ÿ\,u)^{2} + (1\,ÿ\,u)ÿ1)]ÿ+1\,ÿÿu(ÿ\,\textbf{log}\,u)}\,du.$

– UL-Gumbel-Kopula: 1 ÿ 4 $\int_0 \frac{[1 + ÿ(ÿ1 + (1}{r(1\,ÿ\,u)^{2}\,ÿ\,u)ÿ1)]ÿ +1\,ÿÿ(1\,ÿ\,e\,ru)\,\textbf{log}}\,du.$

– UL-Frank-Kopula: 1 ÿ 4 $\int_0 \frac{[1 + ÿ(ÿ1 + (1\,ÿ\,u)ÿ1)]ÿ+1\,ÿ\,1)]}{r(1\,ÿ\,u)^{2}\,\textbf{log}\,1 + ÿ(u\,ÿuÿ1/ÿÿ1}\,\frac{ÿru\,e\quad ÿ\,1}{eÿr\,ÿ\,1}\,du.$

– UIP-Unabhängigkeits-Kopula: 1 ÿ 4 $\int_0 \frac{ÿ[1 + ÿ(u^{ÿ1/ein}\qquad ÿ1/a\quad ÿ\,1)}{}\,du.$

– UIP-Clayton-Kopula: 1 ÿ 4 $\int_0 \frac{ÿu(1\,ÿ\,u\,r\,)}{ÿÿ1(uÿ1\,ÿ\,1)]ÿ+1\,ÿu(ÿ\,\textbf{log}\,u)}\,du.\ rÿu\ \textbf{2}\ [1 +$

– UIP-Gumbel-Kopula: 1 ÿ 4 $\int_0 \frac{rÿu\ \textbf{2}\ [1 + ÿÿ1(uÿ1\,ÿ\,1)]ÿ+1}{ÿ(1\,ÿ\,e\,ru)\,\textbf{log}\,rÿu\ \textbf{2}\ [1 + ÿÿ1(uÿ1}$

– UIP-Frank-Kopula: 1 ÿ 4 $\int_0 \frac{ÿ\,1)]ÿ+1}{}\,\frac{ÿru\,e\quad ÿ\,1}{eÿr\,ÿ\,1}\,du.$

Beispiel 7. Wir veranschaulichen hier nur die Reihenfolge im Parameter *ÿ* für UL- und UIP-Verzerrungen der Unabhängigkeitskopula in Anhang C aufgrund der Seitenbegrenzung. Obwohl nicht alle mathematisch dargestellt, zeigen Kendalls Tau-Oberflächendiagramme in Abbildung 3 , dass UL-, QUL-, UIP- und QUP-Verzerrungen de

Machine Translated by Google

Unabhängigkeitskopula führen zu neuen Familien, die im Parameter *ÿ* und **ÿ negativ geordnet sind.**
Für die Familie der UIP-Unabhängigkeits-Copulas in (12) ist die BB10-Copula negativ geordnet durch den Parameter ÿ, siehe [12].
Die Familie der QUP-Unabhängigkeits-Copulas in (13) hängt nicht vom Parameter ÿ ab, daher die flachen Linien entlang der *ÿ*-Achse.

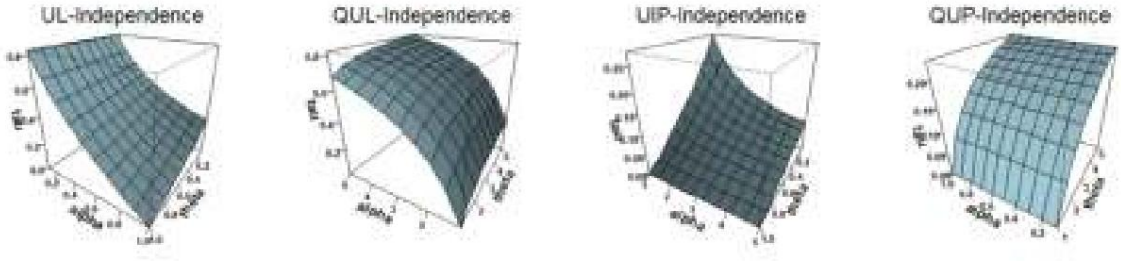


Abbildung 3. Oberflächendiagramme von Kendalls Tau für UL-, QL-, QIP- und QUP-Unabhängigkeitskopulae.

Nicht alle Familien von durch Verzerrung erzeugten Copulas sind nach Konkordanz geordnet. Beispielsweise die UL-verzerrte Clayton-Familie. Wenn eine Familie von Copulas nach einem Parameter geordnet ist, erwarten wir, dass Kendalls Tau-Werte mit dem Parameter steigen oder fallen.

Abbildung 4 zeigt Kendalls Tau-Oberflächendiagramme, wenn Verzerrungen auf die Clayton-Copula mit dem Parameter r angewendet werden. Diese Diagramme zeigen, dass die Verzerrungs-Copula, genau wie die Basis-Clayton-Copula, durch den Parameter r positiv geordnet sind. Die UL-Clayton-Copula mit r = **15 und die QUL-Clayton-Copula mit** r = 20 sind nicht durch **Bezüglich der UIP-Clayton-Copulas schlägt die Konkordanzordnung im Parameter** *ÿ* **bei** r = **25 und bei** *ÿ* = **1/10 fehl, ebenso wie im Parameter** *ÿ* **bei** *ÿ* = **25. Darüber hinaus kann die QUL-Clayton-Copula, abhängig vom ÿ-** *oder* **r** - Wert, durch den **Parameter** *ÿ* **positiv oder negativ geordnet sein, wenn** r = **2 und** *ÿ* = **3/4.**

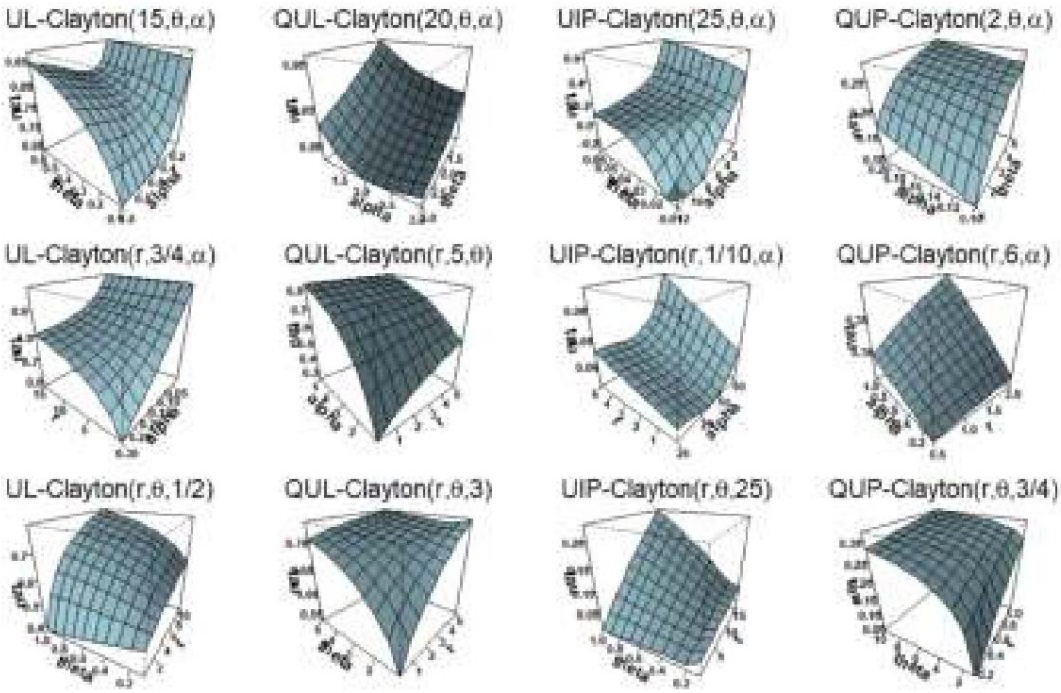


Abbildung 4. Oberflächendiagramme von Kendalls Tau, erstellt für verschiedene Kombinationen von Parameterwerten für die UL-Clayton-, QL-Clayton-, UIP-Clayton- und QUP-Clayton-Kopula.

6. Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt führen wir eine Simulationsstudie durch, um zu untersuchen, wie sich die neu geschaffenen Familien von UL-Verzerrungskopula verhalten, wenn sie an Daten angepasst werden, die aus dem beliebten Clayton-Modell generiert

Machine Translated by Google

Gumbel-, Gauss- und Frank-Kopulas und umgekehrt. Zusätzlich sind die Kopulamodelle werden auf einen bivariaten Datensatz angewendet, der aus den täglichen Retourenquoten von Amazon und Google-Aktien.

6.1. Eine Simulationsstudie

Ein allgemeiner Algorithmus zur Erzeugung von Ziehungen aus einer bivariaten Copula C **ist der bedingte Verteilungsansatz, wie in [19,24] beschrieben. Er besteht aus zwei Schritten: (i) Erzeugen zwei unabhängige gleichmäßige Zufallswerte (u1,** v) **und (ii) löse C(u2|u1) ÿ** v = **0 für u2, wobei C(u|v)** = ÿC(u, *v)/ÿv.* **Das gesuchte Paar ist (u1,** u2). **Mit diesem Algorithmus generierte 2000 bivariate Pseudobeobachtungen aus den Clayton-, Gumbel-, Gaussian- und Frank Copulas. Wir simulierten auch die gleiche Anzahl von Pseudobeobachtungen aus dem Familien von UL-verzerrten Copulas, bei denen die vier Copulas als Basis-Copulas dienten. Wir präsentieren die Zahlen für QIP-, QUL- und QUP-Verzerrungen, da die Schlussfolgerungen ähnlich sind wie die durch UL-Verzerrung entstehen.**

Die Werte der Parameter in den Basiskopulae werden so gewählt, dass sie Kendalls Tau haben Wert von 0,5. Die UL-Verzerrung hat Parameterwerte von *ÿ* = **1/2 und** *ÿ* = **1/2. Wir verwendeten die Pseudo-Likelihood-Schätzmethode [12] ,** die **(17) maximiert , um die Basiskopula anzupassen und verzerrte Kopulas zu den Daten. Anschließend berechneten wir die empirischen Wahrscheinlichkeiten mit die geschätzten Copula-Modelle und konstruierten die Wahrscheinlichkeits-Wahrscheinlichkeits-Diagramme (PP-Diagramme) der geschätzte Wahrscheinlichkeitsverteilung gegenüber der theoretischen. In der ersten Zeile werden die vier Basis Copulas werden durch ihre UL-verzerrten Gegenstücke approximiert, UL-Clayton, UL-Gumbel, UL-Gaussian und UL-Frank Copulas und umgekehrt in der zweiten Reihe. Die durchgezogene schwarze Linie ist das Ergebnis der Anpassung der Daten an das Kopula-Modell, aus dem Beobachtungen generiert wurden.**

Als weitere Vergleichsmöglichkeit haben wir auch die maximale Entfernung in Tabelle 3 berechnet **zwischen den theoretischen und empirischen Wahrscheinlichkeiten bei jedem Datenpaar von (u1, u2). Der univariate Kolmogorov–Smirnov (KS)-Test kam mir in den Sinn, und für eine Stichprobengröße von 2000 war der Der kritische 95-%-Wert von 0,03 wird als Ad-hoc-Schwellenwert verwendet.**

Basierend auf Abbildung 5 und Tabelle 3 ist die Clayton-Kopula, die in der Abbildung rot dargestellt ist, Die zweite Reihe von Abbildung 5 zeigt größere Abweichungen von der 45-Grad-Linie, wenn sie an die Daten, die aus UL-verzerrten Copulas generiert wurden. Nach Lemma 1 ist die UL-verzerrte Copula hat einen Upd-Koeffizienten von 2 ÿ (2 ÿ ÿU) *ÿ* **, die auf Null eingestellt werden kann. Außerdem hat null ltd, wenn die Basiskopula null ltd hat. Die Clayton-Kopula hat keine obere Schwanzabhängigkeit, so dass man erwarten würde, dass es schlecht abschneidet, wenn es an die generierten Daten angepasst wird aus der UL-verzerrten Familie. Im Gegensatz dazu scheint beispielsweise der UL-Gumbel gut zu funktionieren, wenn er passt zu den Daten, die aus den Frank- und Gauss-Copulas generiert wurden. Im Allgemeinen ist die Leistung einer Kopula hängt von ihren Schwanzabhängigkeitseigenschaften ab, und die Ergebnisse zeigen, dass die UL-verzerrte Copulas sind flexibler, da sie über zusätzliche Parameter verfügen.**

Tabelle 3. Maximaler Abstand zwischen der theoretischen und empirischen Copula-Verteilung.

Verzerrte Kopula	Annäherung			
	Clayton von	Gumbel von	Frank von	Gaussian von
UL-Clayton	0,014	0,021	0,035	0,026
UL-Gumbel	0,028	0,012	0,019	0,008
UL-Frank	0,021	0,012	0,011	0,024
UL-Gaußsche Verteilung	0,031	0,021	0,031	0,016
Basis Copula	**Annäherung**			
	UL-Clayton von	UL-Gumbel von	UL-Frank von	UL-Gaussian von
Clayton	0,035	0,047	0,042	0,042
Gumbel	0,050	0,013	0,034	0,033
Frank	0,046	0,024	0,030	0,032
Gaußsche Verteilung	0,021	0,019	0,017	0,022

Machine Translated by Google

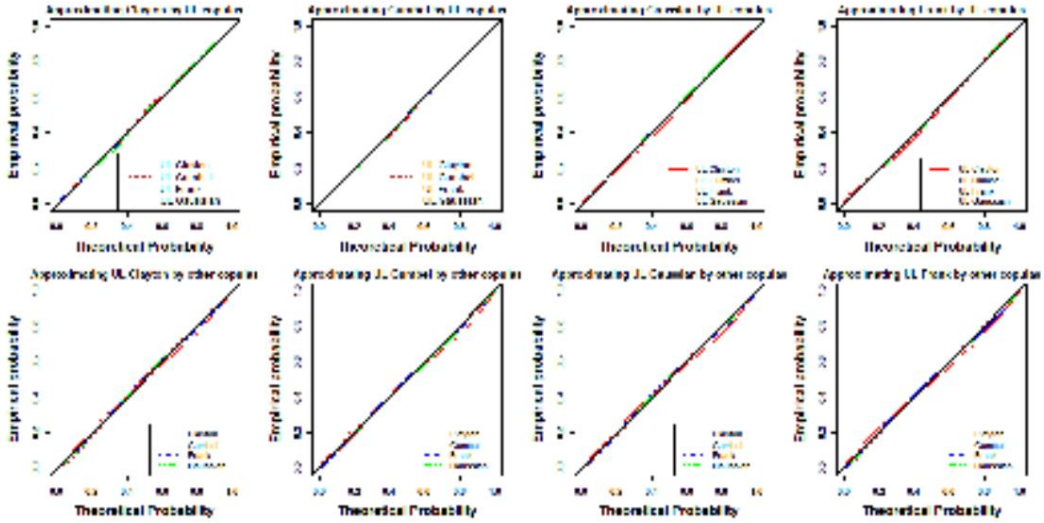


Abbildung 5. PP-Diagramme von UL- und Basis-Copulas.

6.2. Empirische Anwendung

Wir passen die vorgeschlagenen Familien von Copula-Modellen an einen bivariaten Datensatz mit täglichen Renditen von Amazon- und Google-Aktien an. Historische Daten für die täglichen Eröffnungs-, Schluss-, Höchst- und Tiefstkurse sowie den bereinigten Schlusskurs für Aktien können von Yahoo Finance heruntergeladen werden. Der bereinigte Schlusskurs berücksichtigt alle Splits und Dividendenausschüttungen. Wir haben die Daten für Amazon- und Google-Aktien für den Zeitraum von Januar 2014 bis Dezember 2023 heruntergeladen, was einer Stichprobengröße von 2516 täglichen Datenpunkten entspricht. Die täglichen Nettorenditen in Prozent wurden dann auf Grundlage des bereinigten Schlusskurses berechnet. Um die Rendite für heute zu berechnen, wird die Differenz zwischen dem heutigen und dem gestrigen Kurs durch den gest

Tabelle 4 zeigt die zusammenfassenden Statistiken für beide Variablen. Die Stichproben-Pearson-Korrelation und Kendall-Tau betragen 0,71 (p-Wert < 0,001) bzw. 0,49 (p-Wert < 0,001), was beide signifikant von Null abweicht. Im Vergleich zu Google sind die mittleren Tendenzmaße für Amazon kleiner, aber es gibt keinen signifikanten Unterschi Die tägliche Rendite von Amazon ist laut F-Test deutlich variabler und weist gemäß den Schiefemaßen und Histogrammen in Abbildungÿ6 eine stärkere Schiefe auf.

Tabelle 4. Beschreibende Statistiken des Datensatzes.

	Bedeuten	SD	Min.	1. Qu.	Median	3. Qu.	Max.	Schiefe
Amazon	ÿ0,01	1,60	ÿ8,56	ÿ0,86	ÿ0,01	0,91	8.24	ÿ0,09
Google	0,04	1,35	ÿ5,76	ÿ0,67	0,05	0,84	6,65	ÿ0,20

Seien $\{x_i , y_i\}_{i=1}^{n}$ **bezeichnen die bivariaten Beobachtungen. Die Pseudobeobachtungen oder skalierten empirischen Verteilungen** $\{u_i , v_i\}$ **sind definiert als** $u_i = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N} J(x_j \le x_i)$ **und** $v_i = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N} J(y_j \le y_i)$, **wobei J(·) die Indikatorfunktion ist. Abbildung 6 enthält die Streudiagramme ÿ von** yi **gegenüber** xi **und** vi **gegenüber** ui . **Basierend auf den Histogrammen konzentrieren sich die Renditen für beide Aktien um ihren Mittelpunkt, was sich auch im resultierenden Streudiagramm widerspiegelt . Die mit einer skalierten empirischen Verteilung berechneten Pseudobeobachtungen sind jedoch gleichmäßig verteilt. Man würde daher ein gleichmäßiger gestreut**

Zur Schätzung der Parameter wird die in **[18] eingeführte maximale Pseudo-Likelihood-Schätzung** verwendet. Sie maximiert die Pseudo-Log-Likelihood-Funktion, d. h. die Log-Likelihood **mit den bei Pseudobeobachtungen ausgewerteten Copula-Funktionen, gegeben durch**

$$L(\ddot{y}) = \log \ddot{y}_{i=1}^{N} C(u_i , v_i ; \ddot{y}), \tag{17}$$

Machine Translated by Google

wobei cT **die Copula-PDF in (A1) und** ÿ **der Parametervektor ist.**

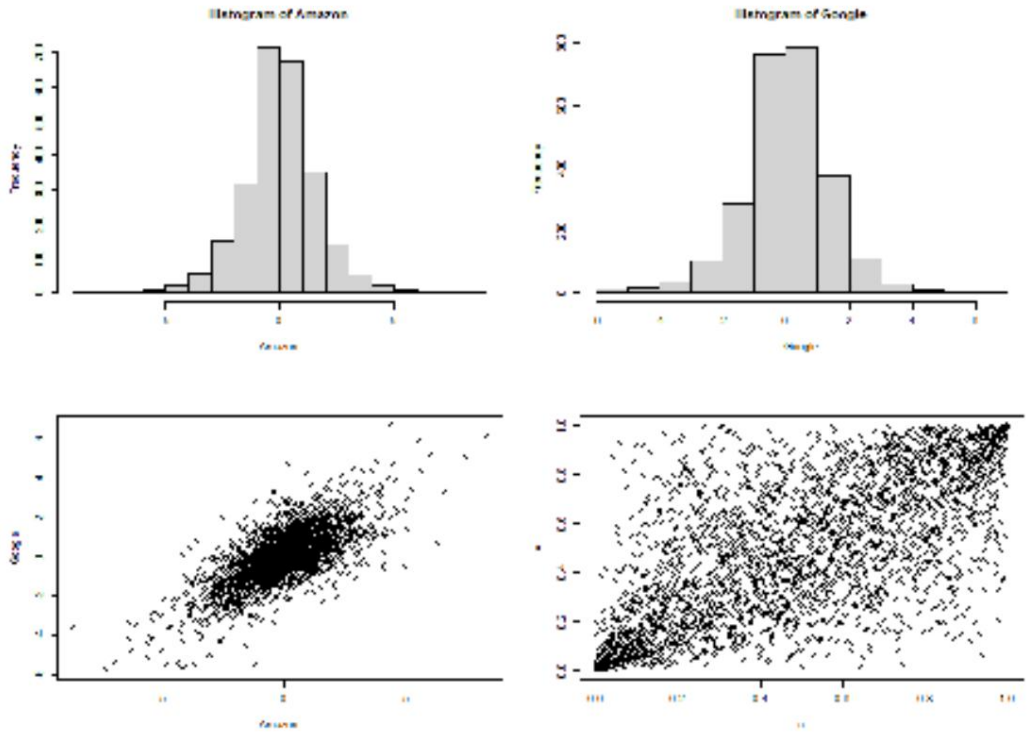


Abbildung 6. Histogramme der täglichen Renditequoten für Amazon- und Google-Aktien und Streudiagramme der Renditequoten von Amazon im Vergleich zu Google und den entsprechenden Pseudobeobachtungen.

Wir haben nicht für jeden Nettoertrag eine Randverteilung angepasst. Unser Hauptziel war es, die neuen Familien der verzerrten Copula mit den Basis-Copulas zu vergleichen. Lassen Sie r **den Parameter in der Basis-Copula sein .** In Tabelle **5 unten sind die Schätzungen mit dem geschätzten Standardfehler in Klammern, der maximalen Pseudo-Likelihood (MPL) und den AIC- Werten aufgeführt. Alle Parameterschätzungen liegen innerhalb zulässiger Bereiche. Kendall-Tau-Schätzungen** ÿ wurden berechnet, indem Parameterschätzungen entweder in die theoretische Kendall-Tau- **Formel oder in (16) eingesetzt wurden .**

Basierend auf den Streudiagrammen scheint es eine schwache Abhängigkeit zwischen den täglichen Nettorenditen der beiden Aktien sowohl im unteren als auch im oberen Bereich zu geben. Tabelle 5 zeigt, dass unter den betrachteten Basis-Copulas die Gauß-Copula in Bezug auf MPL und AIC am besten abschneidet, gefolgt von Gumbel. Das geschätzte Kendall-Tau, das aus der Gauß-Copula berechnet wird, entspricht dem Kendall-Tau der Stichprobe zwischen Google und Amazon am ehesten .

Die Frank-Copula, die angeblich für Daten mit schwacher Abhängigkeit vom oberen Ende geeignet ist, schneidet am schlechtesten ab. Beachten Sie, dass die Gumbel-Copula mit einem Parameterwert von 1 die unabhängige Copula darstellt, bei der Kendalls Tau gleich 0 ist. Sie schneidet besser ab als die Clayton-Copula, was darauf hindeutet, dass es eine stärkere Upd als Ltd. geben könnte. Darüber hinaus könnte eine Verzerrungs-Copula, die einen größeren Bereich der Abhängigkeit vom oberen Ende aufnehmen kann, z. B. UL- verzerrte Copulas, gut zu diesem Nettorendite-Datensatz passen.

Tabelle 5 zeigt, dass das UL-verzerrte Copula-Modell die entsprechende Basis-Copula übertrifft. Das angepasste UL-Clayton-Copula-Modell hat den höchsten AIC-Wert mit geschätzten unteren und oberen Schwanzabhängigkeitskoeffizienten von 0,44 und 0,50. Es ist weniger zufriedenstellend als andere UL-verzerrte Copula-Modelle, wahrscheinlich aufgrund der schwachen unteren Schwanzabhängigkeit in den Daten. Sowohl die UL-verzerrte Frank- als auch die Gauß-Copula haben einen geschätzten oberen Schwanzabhängigkeitskoeffizienten von 0,39 und schneiden in Bezug auf MPL und AIC besser ab als die Gauß-Copula .

Machine Translated by Google

Die UIP-Clayton- und UIP-Frank-Kopulae weisen kein Schwanzabhängigkeitsverhalten auf.
und ihre Leistung ist schlechter als die ihrer Basis-Copulas. Die UL-Gumbel und UIP-Gumbel
Copulas sind die besten Performer, wobei UL-Gumbel etwas besser ist als UIP-Gumbel
in Bezug auf MPL und AIC. Das UIP-Gumbel-Modell ergibt einen geschätzten Kendall-Tau
näher an der Stichprobe Kendalls Tau. Beide Modelle haben eine Abhängigkeit vom oberen Ende, aber nicht vom unteren
Schwanz-Schwanz-Abhängigkeit.

Nach den in dieser Anwendung verwendeten Kopula-Modellen gibt es eine moderate
lineare Korrelation zwischen den täglichen Nettorenditen von Amazon- und Google-Aktien. Darüber hinaus
Es scheint asymmetrisch in den extremen gemeinsamen Bewegungen zu sein; das heißt, gemeinsame Extreme sind mehr
wahrscheinlicher bei hohen täglichen Nettorenditewerten als bei niedrigen täglichen Nettorenditewerten.

Tabelle 5. MPL, AIC, ÿ, Parameterschätzungen und ihre Standardabweichung in Klammern r, ÿ, *ÿ* für die Basis-, UL-verzerrte und UIP-verzerrte Kopulamodelle.

Familie	MPL	*ÿ*	AIC	R	*ÿ*	*ÿ*
Clayton	756,0	0,488	ÿ1510,1	1,907(0,055)	–	–
Gumbel	758,7	0,461	ÿ1515,5	1,856(0,033)	–	–
Frank	754.3	0,491	ÿ1506,7	5,582(0,165)	–	–
Gaußsche Verteilung	838,6	0,493	ÿ1675,3	0,699(0,009)	–	–
UL-Clayton	877,3	0,450	ÿ1748,6	4,855(0,192)	0,000(0,174)	0,562(0,029)
UL-Gumbel	906,4	0,461	ÿ1806,9	1,256(0,043)	0,008(0,004)	0,873(0,056)
UL-Frank	900,0	0,476	ÿ1794,0	4,223(0,319)	0,084(0,023)	0,640(0,019)
UL-Gaußsche Verteilung	901,9	0,484	ÿ1797,9	0,527(0,034)	0,028(0,012)	0,686(0,026)
UIP-Clayton	748,3	0,353	ÿ1490,6	1,413(0,097)	0,999(0,030)	1,296(0,108)
UIP-Gumbel	906,4	0,494	ÿ1806,8	1,392(0,036)	0,010(0,006)	1,174(0,097)
UIP-Frank	748,5	0,481	ÿ1494,9	9,281(0,443)	0,999(0,060)	3,484(0,043)
UIP-Gaußsche Verteilung	887,1	0,472	ÿ1768,3	0,852(0,073)	0,022(0,062)	1,995(0,194)

7. Schlussbemerkungen

Der in diesem Papier vorgeschlagene Rahmen geht von der Tatsache aus, dass eine kumulative
Die Verteilungsfunktion mit Einheitsintervallunterstützung ist eine Verzerrungsfunktion. Sie verwendet eine
Transformation einer nicht-negativen Zufallsvariablen in eine Variable mit Unterstützung der
Einheitsintervall. Die zusätzlichen Parameter in der Verzerrung ermöglichen mehr Flexibilität bei der Modellierung.
Wie in Abschnitt 3.2 gezeigt, entsteht durch die Verzerrung der Unabhängigkeitskopula eine neue Familie
von Kopulas, die die Basiskopula und andere vorhandene Kopulas als ihre Mitglieder einschließt und
bietet Platz für ein breiteres Spektrum an Schwanzabhängigkeitsverhalten als die Unabhängigkeitskopula
würde nie davon träumen, es zu haben.

Das Verhalten des Schwanzes eines Kopula-Modells ist ein entscheidender Faktor für die Feststellung, ob es
kann die Daten angemessen anpassen. Die Verwendung von UL- und QUL-Verzerrungen kann eine Familie von
Basiskopulae ohne obere Schwanzabhängigkeit in eine neue Familie von Kopula mit oberem Schwanz
Abhängigkeit. Der obere Schwanzabhängigkeitskoeffizient der UL- und QUL-verzerrten Copulas
beinhaltet mehr Parameter als der der Basiskopula. Die Verzerrungen können letztlich
führen zu einer besseren Anpassung der oberen Schwanzabhängigkeit im Vergleich zur Basis
Kopula. Die Schwanzverhalten in den Familien der UIP- und QUP-verzerrten Kopulas sind ähnlich
als die in der Basiskopula. Sie können jedoch den unteren Schwanz besser aufnehmen
Abhängigkeit im Vergleich zu den Basiskopulae.

Wir sind nicht sicher, ob eine kompliziertere generierende cdf oder Verzerrung, z.B. eine
mit mehr als zwei Parametern, würde zu einer neuen Familie von Copulas führen, wobei sowohl obere
und geringere Schwanzabhängigkeit bei Anwendung auf eine Basiskopula ohne Schwanzabhängigkeitsverhalten.
Der in diesem Artikel vorgeschlagene Rahmen öffnet die Tür zu einer Welt neuer Verzerrungen.
aufgrund der Seitenlängenbeschränkung, weitere Untersuchung der Konkordanzordnung der neuen Familie
von verzerrten Copulas wird genauer untersucht. Die Verzerrungen von multivariaten Copulas
von höheren Dimensionen könnten ebenfalls von Interesse sein. Im Gegensatz zu den Verzerrungen bivariater Copulae
Die Verzerrungen multivariater Copulas erfordern mehr Sorgfalt und werden in Zukunft untersucht.

Machine Translated by Google

Autorenbeiträge: Alle Autoren haben gleichermaßen beigetragen. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und ihr zugestimmt.

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Stellungnahme des Ethikausschusses: Für die Studie war keine ethische Genehmigung erforderlich.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Erklärung zur Datenverfügbarkeit: Die Daten sind im Manuskript enthalten.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Anhang A. Vorbemerkungen

Es sei F(x, y) **die gemeinsame kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung (cdf) der kontinuierlichen Zufallsvariablen** (X,Y) **und** FX(x) **und** FY(y) **die jeweiligen Rand-cdfs von** X **und** Y. Nach **dem Satz von Sklar [10] gibt es eine eindeutige Copula C, die die Rand- und Monotoniebedingungen erfüllt , so dass**

$$F(x, y) = P(X \ddot{y} x, Y \ddot{y} y) = CFX(x), FY(y) \text{ , } x, y \ddot{y} (\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}). \quad \textbf{(A1)}$$

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (pdf), bezeichnet mit f(x, y), **von (X,Y) ist**

$$f(x, y) = cFX(x), FY(y)\, fX(x) fY(y), \quad \textbf{(A2)}$$

wobei fX **und** fY **die jeweiligen PDFs von X und** Y sind **und** c(u, v) **das Copula-PDF ist, sodass** c(u, v) = *ÿ* 2C(u, v)/ÿuÿv. **Die Gleichung (A2) impliziert, dass eine gemeinsame bivariate Wahrscheinlichkeitsverteilung in univariate Randverteilungen und eine Abhängigkeitsstruktur aufgeteilt werden kann, wobei die Abhängigkeitsstruktur durch eine Copula dargestellt wird.**

Eine Copula C **hat per Definition die folgenden Eigenschaften: (i)** C(u, 0) = **C(0,** v) = **0,** (u, v) **ÿ** I ^{2} **wobei** I = **[0,** 1]; **(ii)** C(u, 1) = u **und C(1,** v) = **v,** (u, v) **ÿ** I ^{2}**; und (iii)** C(u2, **v2) ÿ** C(u2, **v1) ÿ** C(u1, **v2)** + C(u1, **v1) ÿ 0, für u1 ÿ u2, v1 ÿ v2 und (u1,** u2),(v1, **v2) in** I ^{2}**.**

Wenn C **eine archimedische Kopula mit einem strikten Generator ÿ(·)** ist , **sodass ÿ(0)** = **ÿ, kann sie wie folgt ausgedrückt werden:** C(u, v) = *ÿ* ^{ÿ1}(ÿ(u) + ÿ(v)), **wobei** *ÿ* ^{ÿ1} = *ÿ* **ist die Umkehrfunktion von ÿ. Die Funktion** *ÿ* : **[0,** 1] **ÿ [1,** ÿ) **ist konvex, stetig und streng abnehmend mit ÿ(1)** = **0 und ÿ(0)** = **ÿ. Archimedische Kopulas sind beliebt, weil sie explizite Formeln zulassen und mit nur einem Parameter höhere Dimensionen aufnehmen können. Tabelle A1 hebt einige prominente bivariate archimedische Kopulas, ihre Generatoren und ihr Verhalten in Abhängigkeit vom Ende hervor. Sei ÿ die Unabhängigkeits-Kopula.**

Tabelle A1. Wichtige archimedische Kopulas und ihre Generatoren.

Name	**Copula-Funktion**	**Generator ÿ(t) ÿL oder ÿL ÿ** log(t) (t	**ÿU oder ÿU**
ÿ	UV-Licht	ÿr **ÿ 1)/r** ÿL = **2**	ÿU = **2**
Clayton	(u ÿr ÿr + v **ÿ** 1) , r > **0** (e ÿru **ÿ** 1) $^{ÿ1/r}$	ÿL = **2 ÿ1/r**	ÿU = **2**
Frank	**ÿ1** / R r ÿ= **0**	(e ÿrv **ÿ** 1) **log 1** + **eÿr ÿ 1** / **eÿr ÿ 1** , ÿ Protokoll ÿrt e **ÿ 1** ÿL = **2**	ÿU = **2**
Gumbel	t ÿ((ÿ log(u))r+(ÿ log(v))r) $^{1/r}$,r > **1**	**ÿ** log(t) ^{R} ÿL = **2 1/r**	ÿU = **2 ÿ 2 1/r**

Die Abhängigkeitsparameter ÿL **und** ÿU am unteren und oberen Ende **sind gegeben durch**

$$ÿL = \lim_{u ÿ 0+} P(FX(X) < u \mid FY(Y) < u) = \lim_{u ÿ 0+} \frac{C(u, u)}{\text{Sie}}, \quad \textbf{(A3)}$$

$$ÿU = \lim_{u ÿ 1ÿ} P(FX(X) > u \mid FY(Y) > u) = \lim_{u ÿ 1ÿ} \frac{\overline{C}(u, u)}{(1 ÿ u)} = 2 ÿ \lim_{u ÿ 1ÿ} \frac{1 ÿ C(u, u)}{1 ÿ u},$$

Machine Translated by Google

wobei $\overline{C}(u, v) = P(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u, v)$. **Sie messen die Wahrscheinlichkeit , dass eine Zufallsvariable Extremwerte erreicht, wenn eine andere Variable Extremwerte erreicht.**

Eine nicht-negative Funktion f **heißt langsam variierend, wenn fors** > **0,** $\lim_{x\to 0} f(sx)/f(x) = 1$. **Seien f1 und f2 zwei Funktionen. Wenn** $\lim_{u\to 0} f1(u)/f2(u) = 1$, **dann bezeichnen wir es mit** $f1(u) \sim f2(u)$ **als** $u \to 0$. **Für eine bivariate Copula gilt**

$$C(u, u) \sim u \quad \text{as } u \to 0,$$

wobei $\psi(u)$ langsam bei $0+$ **variiert , dann** wird ψ_L **als untere Schwanzordnung von C bezeichnet. Die Überlebenskopula ist gegeben durch**

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v). \tag{A4}$$

Die obere Schwanzordnung ψ_U **erfüllt die Bedingung, dass**

$$C(u, u) \sim u \quad \text{as } u \to 0 +$$

für eine langsam variierende Funktion $\psi\psi(u)$. **Beachten Sie, dass** $1 - \psi_L, \psi_U - 2$. **Wenn** $\psi_L > 1$ **und** $\psi_U > 1$, **dann** $\psi_L = \psi_U = 0$. **Wenn** $\psi_L = 1$, $\psi_L = \lim_{u\to 0+} \psi(u)$; **und wenn** $\psi_U = 1$, $\psi_U = \lim_{u\to 0+} \psi(u)$. **Wenn** $\psi_L = 2$ **und** $\psi(u) \sim q$ **für** $u \to 0 +$, **für ein positives q, sind die Variablen im unteren Rand nahezu unabhängig . Wenn** $1 < \psi_L < 2$, **sind die Variablen positiv assoziiert und haben eine Abhängigkeit im mittleren Rand. Ähnliche Schlussfolgerungen können für die Abhängigkeit im oberen Rand gezogen werden; siehe [12,29] für weitere Details. Der Kendall-Tau-Wert einer bivariaten Copula kann wie fo**

$$\tau = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C}{\partial u}(u, v) \frac{\partial C}{\partial v}(u, v)\, du\, dv. \tag{A5}$$

Für eine archimedische Kopula kann Kendalls Tau auch berechnet werden durch

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\psi(u)}{\psi'(u)}\, du. \tag{A6}$$

Anhang B. Konturdiagramme und Ableitungen von Randordnungen

Anhang B.1. Konturdiagramme

Abbildung A1 zeigt, dass die oberen Randabhängigkeitsenden von QUL-Clayton, QUL-Gumbel und QUL-Gaussian für die ausgewählten ψ- Werte **ausgeprägter erscheinen als die entsprechenden Basiskopula , ähnlich denen von UL-Clayton, UL-Gumbel bzw. UL-Gaussian. Die UL- und QUL-verzerrten Kopulas haben keine untere Randabhängigkeit, wenn die Basiskopulas keine untere Randabhängigkeit haben. Während die Parameter so gewählt sind, dass** $\psi = 0{,}5$ **ist, zeigen die Konturdiagramme in Abbildung 1 und A1 verschiedene Formen und Spärlichkeiten.**

Tabelle 2 zeigt, dass der obere Schwanzabhängigkeitskoeffizient der UIP- und QUP-verzerrten Kopulas derselben ist wie der der Basiskopula. Die unteren Schwanzabhängigkeitskoeffizienten sind jedoch (ψ_L) ψ , **wobei** $\psi \to 1$ **bzw.** (ψ_L) ψ , **wobei** $0 < \psi \to 1$. **Das heißt, die UIP-Verzerrung mit** $\psi = 3/2$ **in Abbildung 2 und die QUP-Verzerrung mit** $\psi = 1/2$ **in Abbildung A2 haben auf der oberen rechten Seite ähnliche, wenn nicht sogar dieselben Formen. Asymmetrie ist in QUP-Frank und UIP-Frank vorhanden, wenn** ψ **und** ψ **ungleich 1 sind. Die Konturdiagramme für UIP-Gaussian und QUP-Gaussian zeigen nur geringe Veränderungen.**

Machine Translated by Google

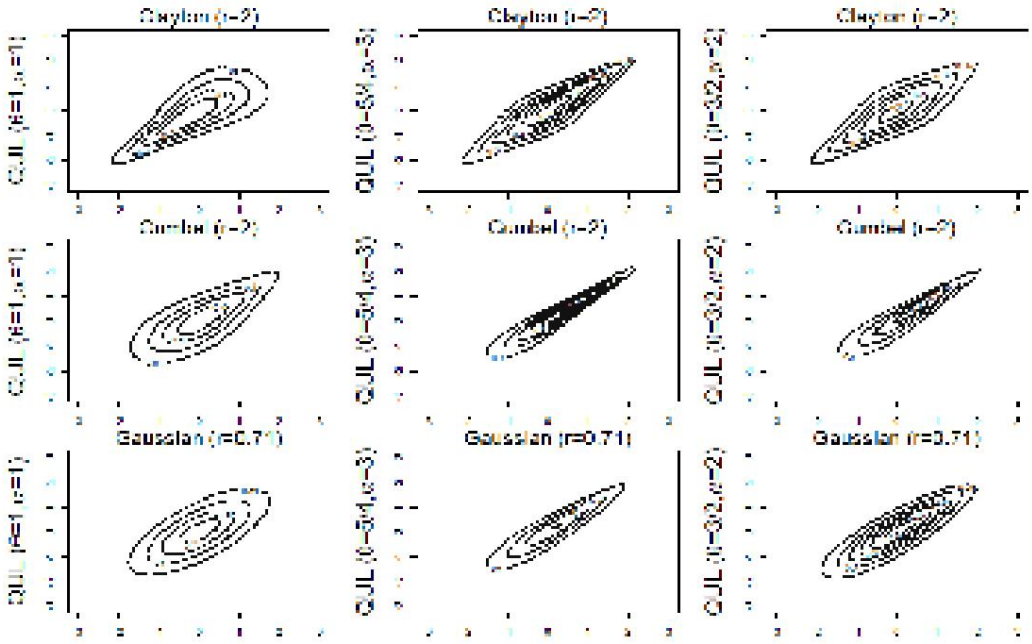


Abbildung A1. Dichtekonturdiagramme der QUL-Clayton-, QUL-Gumbel- und QUL-Gaussian-Copulas mit standardmäßigen Normalrändern und Parametern *(ÿ,* ÿ) = **(1, 1), (3/2, 1/2) und (2, 3/4). Für Clayton, Gumbel und Gaussian wird der Parameter** r **so gewählt, dass der Wert von Kendalls Tau 1/2 be**

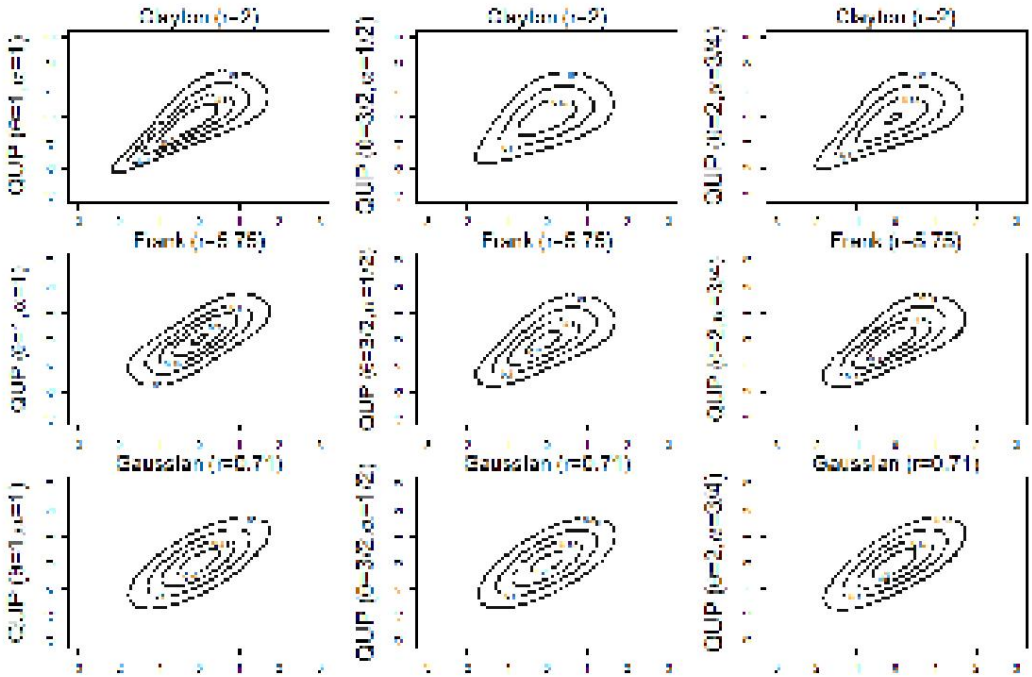


Abbildung A2. Dichtekonturdiagramme der QUP-Clayton-, QUP-Frank- und QUP-Gaussian-Copulas mit standardmäßigen Normalrändern und Parametern *(ÿ,* ÿ) = **(1, 1), (3/2, 1/2) und (2, 3/4). Für Clayton, Frank und Gaussian wird der Parameter** r **so gewählt, dass der Wert von Kendalls Tau 1/2 beträgt.**

Anhang B.2. Ableitungen von Tail Orders

Die folgenden Taylorschen Reihenapproximationen sind wichtige Arbeitspferde für die Berechnung der Endordnungen der vorgeschlagenen Verzerrungen. Für zwei Konstanten a **und b haben wir, dass**

$$(\mathbf{1}+u)^{a}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}+au,\ \ddot{y}\ \mathbf{1}\ \ddot{y}\ au,\ \frac{\mathbf{1}+au}{\mathbf{1}+au}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}+au \qquad \frac{1}{(1+au)^{b}}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}-bau,\ \frac{1}{(1+au)^{b}}\ \ddot{y}\ \mathbf{1}+bau \quad \text{wenn } u\ \ddot{y}\ 0. \tag{A7}$$

Machine Translated by Google

Nehmen wir an , dass C(u, u) **ÿ** u ÿL ÿ(u) **für** u **ÿ 0** + **und** C(1 **ÿ u, 1 ÿ** u) **ÿ** u ÿU ÿÿ(u) **für** u **ÿ 0** + **für einige langsam variierende Funktionen** ÿ **und ÿÿ bei** 0+ gilt.

Anhang B.3. Untere Tail-Orders

Beachten Sie, dass $C^{\ddot{y}1}_{M} = QL$ **und** $G^{\ddot{y}1}_{P} = QP$. **Aus (A7) und Tabelle 1 folgt, dass für** u **ÿ 0 +**

$$GL(u) = \mathbf{1\ddot{y}1\ddot{y}1\ddot{y}(1\ddot{y}}\ \frac{\ddot{y}u}{\ddot{y})u\ \mathbf{\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1}}\ ^{\ddot{y}}\ \mathbf{\ddot{y}1\ddot{y}(1\ddot{y}}\ \ddot{y}u)\ ^{\ddot{y}}\ \mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ddot{y}u;$$

$$QL(u) = \frac{\mathbf{(1\ddot{y}}\ u)}{\ddot{y} + \mathbf{(1\ddot{y}\ u)\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1\ ;}}\ ^{\ddot{y}}\ \frac{\mathbf{u/\ddot{y}}}{\mathbf{\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1}}\ \mathbf{\ddot{y}}\ u/(\ddot{y}\ddot{y});\ \ddot{y} + \mathbf{(1\ddot{y}\ u)}$$

GP(u) **ÿ** *ÿ* ÿu *ÿ* QP(u) **ÿ** u **1/ÿ/ÿ.** **(A8)**

Für UL-verzerrte Copulas, da $CG^{\ddot{y}1}_{M}(u), G^{\ddot{y}1}_{M}(u)$ **ÿ 0 wenn** u **ÿ 0 +, unter Anwendung (A8) ergibt**

$$GL\ CG^{\ddot{y}1}_{M}(u), G^{\ddot{y}1}_{M}(u) = \mathbf{1\ddot{y}}\ \frac{\mathbf{1\ddot{y}}\ CG^{\ddot{y}1}_{M}(u), G^{\ddot{y}1}_{M}(u)}{\mathbf{1\ddot{y}}\ CG^{\ddot{y}1}_{M}(u), G^{\ddot{y}1}_{M}(u) + \ddot{y}C\ G^{\ddot{y}1}_{M}(u), G^{\ddot{y}1}_{M}(u)}\ ^{\ddot{y}}$$

$$\ddot{y}\ \ddot{y}\ddot{y}C\ G^{\ddot{y}1}_{M}(u), G^{\ddot{y}1}_{M}(u)\ \mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ddot{y}[QL(u)]\ddot{y}L\ \ddot{y}\ QL(u)\ \ddot{y}L$$

$$^{\ddot{y}\,u}\ \ (\ddot{y}\ddot{y})\ 1\ddot{y}\ddot{y}L\ \ddot{y}\ QL(u)\ \mathbf{als}\ u\ \mathbf{\ddot{y}\ 0 +.} \qquad \mathbf{(A9)}$$

Nach (A8) ist ÿ QL(u) **ÿ** ÿ *u/(ÿÿ)* **und per Definition ist** *(ÿÿ) 1ÿÿL* ÿ QL(u) **langsam veränderlich. Für die QUL-verzerrten Copulas,** QL, **nach Tabelle 1, (A7) und (A8), haben wir**

$$QL\text{-}CQ^{\ddot{y}1}_{M}(u), Q^{\ddot{y}1}_{M}(u) = \frac{\mathbf{1\ddot{y}}\ CQ^{\ddot{y}1}_{M}(u), Q^{\ddot{y}1}_{M}(u)\ ^{\mathbf{\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1}}}{\ddot{y} + \mathbf{1\ddot{y}}\ CQ^{\ddot{y}1}_{M}(u), Q^{\ddot{y}1}_{M}(u)\ ^{\mathbf{\ddot{y}1/\ddot{y}\ddot{y}1}}}$$

$$\mathbf{\ddot{y}}\ (\ddot{y}\ddot{y})\ \mathbf{\ddot{y}1C}\ Q^{\ddot{y}1}_{M}(u), Q^{\ddot{y}1}_{M}(u)\ \mathbf{\ddot{y}}\ (\ddot{y}\ddot{y})\ ^{\ddot{y}1}[GL(u)]\ddot{y}L\ \ddot{y}\ Q^{\ddot{y}1}_{M}(u)$$

$$^{\ddot{y}\,u}\ \ \ddot{y}L\ (\ddot{y}\ddot{y})\ \mathbf{\ddot{y}L\ddot{y}1}\ \ddot{y}\ GL(u)\ \mathbf{als}\ u\ \mathbf{\ddot{y}\ 0 +.} \qquad \mathbf{(A10)}$$

Nach (A8) ist ÿ GL(u) **ÿ** ÿ *ÿÿu* **und per Definition** ist *(ÿÿ)* **ÿLÿ1** ÿ GL(u) **langsam variabel. Für die UIP-verzerrten Copulas gilt, dass** $C_{\ddot{y}}G(u), G^{\ddot{y}1}_{P}(u)$ **ÿ 0 wenn** u **ÿ 0** + **und gemäß (A8),**

$$GP\ CG^{\ddot{y}1}_{P}(u), G^{\ddot{y}1}_{P}(u) = \frac{\ddot{y}C\ G^{\ddot{y}1}_{P}(u), G^{\ddot{y}1}_{P}(u)}{\mathbf{1\ddot{y}}\ CG^{\ddot{y}1}_{P}(u), G^{\ddot{y}1}_{P}(u) + \ddot{y}C\ G^{\ddot{y}1}_{P}(u), G^{\ddot{y}1}_{P}(u)}\ ^{\ddot{y}}$$

$$\mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ \ ^{\ddot{y}}\ CG^{\ddot{y}1}_{P}(u), G^{\ddot{y}1}_{P}(u)\ ^{\ddot{y}}\ \mathbf{als}\ \ \ddot{y}\ [QP(u)]\ddot{y}L\ \ddot{y}\ QP(u)\ \mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ ^{\ddot{y}}$$

$$^{\ddot{y}\,u}\ \ \ddot{y}L\ \ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}(1\ddot{y}\ddot{y}L)}\ \ddot{y}\ QP(u)\ ^{\ddot{y}}\ u\ \mathbf{\ddot{y}\ 0 +.} \qquad \mathbf{(A11)}$$

Da GP(u) **ÿ** *ÿ* ÿu *ÿ* **und** ÿ bei 0+ **langsam variiert , für s,** *ÿ* > **0,**

$$\lim_{u\ddot{y}0+} \frac{\ddot{y}(su)}{\ddot{y}(u)} = \lim_{u\ddot{y}0+} \frac{\ddot{y}(su)}{\ddot{y}(u)}\ ^{\ddot{y}} = \mathbf{1;}$$

$$\lim_{u\ddot{y}0+} \frac{\ddot{y}(GP(su))}{\ddot{y}(GP(u)} = \lim_{u\ddot{y}0+} \frac{\ddot{y}(\ddot{y}\ a\ s\ \ddot{y}u}{\ddot{y}\ )\ \ddot{y}(\ddot{y}\ au\ \ddot{y})} = \lim_{v\ddot{y}0+} \frac{\ddot{y}(s\ \ddot{y}v)}{\ddot{y}(v)} = \mathbf{1.} \qquad \mathbf{(A12)}$$

Daher ist ÿ QP(u) $^{\ddot{y}}$ **variiert langsam.**

Für die QUP-verzerrten Copulas gilt $CQ^{\ddot{y}1}_{P}(u), Q^{\ddot{y}1}_{P}(u)$ **ÿ 0 und nach (A8) erhalten wir**

Machine Translated by Google

$$QP\text{-}CQ \overset{ÿ1}{P}(u), Q \overset{ÿ1}{P}(u) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + ÿ\ CQ \overset{ÿ1}{P}(u), Q \overset{ÿ1}{P}(u)\ ]ÿ\mathbf{1/ÿ\ ÿ\ 1}}$$

$$ÿ\ ÿ \quad \overset{ÿ1}{} \quad CQ \overset{ÿ1}{P}(u), Q \overset{ÿ1}{P}(u) \quad {}^{1/ÿ\ ÿ1\ ÿ\ ÿ} \quad [GP(u)]ÿL\ ÿ\ GP(u) \quad {}^{1/ÿ}$$

$$ÿ\ u \quad ÿL\ ÿ\ \mathbf{ÿLÿ1}\ ÿ\ GP(u) \quad {}^{1/ÿ} \quad \textbf{wenn}\ u\ \mathbf{ÿ\ 0\ +.} \qquad \textbf{(A13)}$$

Nach ähnlichen Argumenten in (A12) ist ÿ GP(u) ^{Es} kann gezeigt werden, dass **1/ÿ langsam variiert.**

Anhang B.4. Obere Randordnungen

Nach den Näherungen in (A7) gilt für u **ÿ 0 +**

$$GL(1\ \mathbf{ÿ}\ u) = \mathbf{1\ ÿ} \quad \frac{^{Sie}}{ÿ + \mathbf{(1\ ÿ}\ ÿ)u\ \mathbf{ÿ1/ÿ\ ÿ\ 1}\ u} \quad {}^{ÿ} \quad \mathbf{ÿ\ 1\ ÿ\ u/ÿ} \quad {}^{ÿ},$$

$$QL(1\ \mathbf{ÿ}\ u) = \frac{ÿu\ \mathbf{1/}}{\mathbf{ÿ\ ÿ\ 1\ ÿ}\ ÿu\ \mathbf{1/ÿ\ 1} + (ÿ} \quad \mathbf{+\ uÿ1/ÿ\ ÿ\ 1}\ ÿ(1\ \mathbf{ÿ} = \mathbf{1\ ÿ}\ ÿ \quad \frac{}{\mathbf{ÿ}\ 1)u\ \mathbf{1/ÿ}},$$

$$GP(1\ \mathbf{ÿ}\ u) = \frac{u)\ u + ÿ(1}{\mathbf{ÿ}\ u)} \quad {}^{ÿ} \quad = \mathbf{1\ ÿ} \quad \frac{^{Sie}}{ÿ + \mathbf{(1\ ÿ}\ ÿ)u\ \mathbf{1}} \quad {}^{ÿ} \quad \mathbf{ÿ\ 1\ ÿ\ ÿu/ÿ,}$$

$$QP(1\ \mathbf{ÿ}\ u) = \frac{\mathbf{(1\ ÿ}\ u)\ ÿ \quad {}^{1/ÿ}}{+\ \mathbf{(1\ ÿ}\ ÿ)(1\ ÿ\ u)\ \mathbf{1/ÿ\ ÿu/ÿ\ ÿ\ 1}} \quad {}^{ÿ} \quad \frac{\mathbf{ÿ\ u/ÿ}\ ÿ}{+\ \mathbf{(1\ ÿ}\ ÿ)(1\ ÿ\ u/ÿ)}$$

$$\frac{\mathbf{ÿ\ ÿu/}}{\mathbf{ÿ.\ ÿ\ 1\ ÿ}\ \mathbf{u/ÿ} + ÿu/a} \qquad \textbf{(A14)}$$

Nach (A4) gilt, falls C(u, u) **ÿ** u ÿU ÿÿ(u) **für** u **ÿ 0 +,** C(1 **ÿ u, 1 ÿ** u) **ÿ 1 ÿ** 2u + u ÿU ÿÿ(u), **für** u **ÿ 0 +. Daher gilt nach (A14):**

$$CG \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u), G \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u)\ \mathbf{ÿ}\ C\ \mathbf{1\ ÿ}\ ÿu\ \mathbf{1/ÿ\ ÿ\ 1\ ÿ} \quad \mathbf{,\ 1\ ÿ}\ ÿu\ \mathbf{1/ÿ}$$

$$2ÿu\ \mathbf{1/ÿ} + (ÿu \quad {}^{1/ÿ}) \ ÿU \quad {}^{1/ÿ}) = \mathbf{1\ ÿ}\ kGL\ (u),$$

$$CQ \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u), Q \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u)\ \mathbf{ÿ}\ C\ \mathbf{1\ ÿ\ (u/ÿ)}\ ÿ\ \mathbf{ÿ\ 1\ ÿ} \quad \mathbf{,}\ ÿÿ(ÿu\ \mathbf{1\ ÿ\ (u/ÿ)}\ ÿ$$

$$\mathbf{2(u/ÿ)}\ ÿ + \mathbf{(u/ÿ)}\ ÿ\ )\ ÿU\ ÿÿ((u/ÿ)\ ÿ\ ) = \mathbf{1\ ÿ}\ kQL\ (u\ ),\ \mathbf{(1\ ÿ}\ u)\ \mathbf{ÿ}\ C$$

$$CG \overset{ÿ1}{P}(\mathbf{1\ ÿ}\ u), G \overset{ÿ1}{P}\ \mathbf{1\ ÿ\ ÿu/ÿ,\ 1\ ÿ\ ÿu/ÿ\ ÿ\ 1\ ÿ}\ 2ÿu/ÿ + \mathbf{(ÿu/ÿ)}$$

$$ÿU\ ÿÿ(ÿu/ÿ) = \mathbf{1\ ÿ}\ kGP\ (u),\ \mathbf{(1\ ÿ}\ u)\ \mathbf{ÿ}\ C\ \mathbf{1\ ÿ\ ÿu/ÿ,\ 1\ ÿ\ ÿu/}$$

$$CQ \overset{ÿ1}{P}(\mathbf{1\ ÿ}\ u), Q \overset{ÿ1}{P}\ \mathbf{ÿ\ ÿ\ 1\ ÿ}\ 2ÿu/ÿ + \mathbf{(ÿu/ÿ)}\ ÿU\ ÿÿ(ÿu/ÿ) = \mathbf{1\ ÿ}$$

$$kQP\ (u). \qquad \textbf{(A15)}$$

Beachten Sie, dass die Restterme kGL (u), kQL (u), kGP (u) **und** kQP (u) **gegen 0 gehen, wenn** u

Für UL-verzerrte Copulas gilt nach (A14) und dann (A7), GL CG $\overset{ÿ1}{M}$ **ÿ 0 + (1 ÿ** u), G**(1 ÿ** u) **ist gegeben durch**

$$\mathbf{1\ ÿ} \quad \frac{\mathbf{1\ ÿ}\ CG \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u), G \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u)}{\mathbf{1\ ÿ}\ CG \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u), G \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u) + ÿC\ G \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u), G \overset{ÿ1}{M}(\mathbf{1\ ÿ}\ u)} \quad {}^{ÿ}$$

$$ÿ\ \mathbf{1\ ÿ} \quad \frac{kGL}{(u)\ ÿ + \mathbf{(1\ ÿ}\ ÿ)kGL\ (u)} \quad {}^{ÿ} \quad \mathbf{ÿ\ 1\ ÿ}\ kGL\ (u)/ÿ \quad {}^{ÿ}. \qquad \textbf{(A16)}$$

Daher gilt nach (A4) für 0 < ÿ **ÿ 1 und** ÿU **ÿ 1, da** u **ÿ 0 +**

Machine Translated by Google

$$\mathbf{G}_{M}\ CG\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)} = 2u\ \mathbf{\ddot{y}\ 1} + GL\ CG\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}$$

$$\mathbf{\ddot{y}}\ 2u\ \mathbf{\ddot{y}}\ kGL\ (u)/\ddot{y}\ {}^{\ddot{y}} = 2u\ \mathbf{\ddot{y}\ [2u}\ {}^{1/\ddot{y}}\ \mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}U\ddot{y}1u\ \ddot{y}U/\ddot{y}}\ \ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}u^{1/\ddot{y}}\ )]\ddot{y}$$

$$\mathbf{\ddot{y}}\ u\ \mathbf{2\ \ddot{y}\ 2}\ \ \ddot{y}\ \mathbf{[1\ \ddot{y}\ 2}^{\ddot{y}1}\ \ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}U\ddot{y}1u\ (\ddot{y}U\ddot{y}1)/\ddot{y}}\ \ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}u^{1/\ddot{y}}\ )]\ddot{y}$$

$$\mathbf{\ddot{y}}\ u\ \mathbf{2\ \ddot{y}\ 2}\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ \mathbf{[1\ \ddot{y}\ \ddot{y}2}\ \ {}^{\ddot{y}1}\ \ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}U\ddot{y}1u\ (\ddot{y}U\ddot{y}1)/\ddot{y}}\ \ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}u^{1/\ddot{y}})]$$

ÿUÿ1u ÿU *ÿÿ(ÿu)* **wenn** *ÿ* = **1.** **(A17)**

Für QUL-verzerrte Copulas gilt nach (A15), QL $CQ^{\ddot{y}1}_{M}$ **(1 ÿ** u), Q ${}^{\ddot{y}1}_{M}$ **(1 ÿ** u) **ist gegeben durch**

$$\frac{\mathbf{1\ \ddot{y}}\ CQ\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ Q\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}\ {}^{\ddot{y}1/\ddot{y}\ \ddot{y}\ 1}}{\ddot{y} + \mathbf{1\ \ddot{y}}\ CQ\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ Q\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}\ {}^{\ddot{y}1/\ddot{y}\ \ddot{y}\ 1}} = \frac{kQL\ \mathbf{(u)]\ddot{y}1/\ddot{y}\ \ddot{y}\ 1}}{\ddot{y} + kQL\ (u)\ {}^{\ddot{y}1/\ddot{y}\ \ddot{y}\ 1}}$$

$$= \mathbf{1\ \ddot{y}}\ \frac{\ddot{y}\ kQL\ (u)]1/\ddot{y}}{\ddot{y}\ kQL\ (u)\ {}^{1/\ddot{y}} + \mathbf{1\ \ddot{y}}\ kQL\ (u)\ {}^{1/\ddot{y}}}\ \mathbf{\ddot{y}\ 1\ \ddot{y}}\ \ddot{y}\ kQL\ (u)]1/\ddot{y}\ .$$

Daher gilt für *ÿ* **ÿ 1 und** ÿU **ÿ 1, da** u **ÿ 0 +,**

$$\text{Q}\hat{}_{L}\ CG\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)} = 2u\ \mathbf{\ddot{y}\ 1} + QL\ CQ\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ Q\ {}^{\ddot{y}1}_{M}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}$$

$$\mathbf{\ddot{y}}\ 2u\ \mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ kQL\ (u)]1/\ddot{y} = 2u\ \mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ \mathbf{2(u/\ddot{y})}\ \ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}\ (u/\ddot{y})}\ \ddot{y}\ )\ \ddot{y}U\ \ddot{y}\ddot{y}((u/\ddot{y})\ \ddot{y}\ )\ \mathbf{(u/\ddot{y})}\ {}^{1/\ddot{y}}$$

$$= 2u\ \mathbf{\ddot{y}\ 2}\ 1/\ddot{y}u\ \mathbf{1\ \ddot{y}\ 2}\ \ {}^{\ddot{y}1}\ \ddot{y}(\ddot{y}U\ \ddot{y}1)\ \ddot{y}\ddot{y}((u/\ddot{y})\ \ddot{y}\ )\ {}^{1/\ddot{y}}$$

$$\mathbf{\ddot{y}}\ u\ \mathbf{2\ \ddot{y}\ 2\ 1/\ddot{y}\ 1\ \ddot{y}\ 2}\ \ {}^{\ddot{y}1\ \ddot{y}1\ \ddot{y}}\ \mathbf{(u/\ddot{y})}\ \ddot{y}(\ddot{y}U\ddot{y}1)\ \ddot{y}\ddot{y}((u/\ddot{y})\ \ddot{y}\ )$$

ÿ (u/ÿ) ÿU ÿÿ(u/ÿ) **wenn** *ÿ* = **1.** **(A18)**

Für UIP-verzerrte Copulas gilt nach (A7) und (A15): GP CG ${}^{\ddot{y}1}_{P}$ **(1 ÿ** u), G ${}^{\ddot{y}1}_{P}$ **(1 ÿ** u) **ist gegeben durch**

$$\frac{\ddot{y}C\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}}{\mathbf{1\ \ddot{y}}\ CG\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)} + \ddot{y}C\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}}\ {}^{\ddot{y}}$$

$$= \frac{\ddot{y}[1\ \mathbf{\ddot{y}}\ kGP\ (u)]}{kGP\ (u)] + \ddot{y}[1\ \mathbf{\ddot{y}}\ kGP\ (u)]}\ {}^{\ddot{y}} = \mathbf{1\ \ddot{y}}\ \frac{kGP}{(u)\ kGP\ (u)] + \ddot{y}[1\ \mathbf{\ddot{y}}\ kGP}\ {}^{\ddot{y}}$$

$$\mathbf{\ddot{y}\ 1\ \ddot{y}}\ kGP\ (u)/\ddot{y}\ {}^{\ddot{y}}\ (u)]\ \mathbf{\ddot{y}\ 1\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1}\ kGP\ (u).$$

Daher gilt für *ÿ* **ÿ 1 und** ÿU **ÿ 1, da** u **ÿ 0 +,**

$$\mathbf{G}P\ CG\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)} = 2u\ \mathbf{\ddot{y}\ 1} + GP\ CG\ \mathbf{\ddot{y}}\ 2u\ \mathbf{\ddot{y}}\ \ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ G\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}$$

$$\mathbf{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1}\ kGP\ (u) = 2u\ \mathbf{\ddot{y}\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1}\ [2\ddot{y}u/\ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}\ (\ddot{y}u/\ddot{y})}\ \ddot{y}U\ \ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}u/\ddot{y})]\ \mathbf{\ddot{y}\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ 1\ (\ddot{y}u/\ddot{y})}$$

ÿU ÿÿ(ÿu/ÿ). **(A19)**

Für QIP-verzerrte Copulas gilt nach (A7) und (A15): QP $\hat{C}Q^{\ddot{y}1}_{P}$**(1 ÿ** u), Q ${}^{\ddot{y}1}_{P}$ **(1 ÿ** u) **ist gegeben durch**

$$\frac{CQ\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ Q\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}\ ]\ {}^{1/\ddot{y}}}{CQ\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ Q\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}\ ]\ \mathbf{1/\ddot{y}} + \ddot{y}\ \mathbf{1\ \ddot{y}}\ CQ\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)},\ Q\ {}^{\ddot{y}1}_{P}\ \mathbf{(1\ \ddot{y}\ u)}\ ]\ \mathbf{1/\ddot{y}}}$$

$$= \frac{\mathbf{[1\ \ddot{y}}\ kQP\ (u)]1/\ddot{y}}{\mathbf{1\ \ddot{y}}\ kQP\ (u)]1/\ddot{y} + \ddot{y}\ \mathbf{1\ \ddot{y}\ 1\ \ddot{y}}\ kQP\ (u)]1/\ddot{y}\ \mathbf{1\ \ddot{y}}}$$

$$= \frac{kQP\ (u)/\ddot{y}\ \mathbf{1\ \ddot{y}}}{kQP\ (u)/\ \ddot{y} + \ddot{y}kQP\ (u)/\ddot{y}\ \ddot{y}kQP} = \frac{\ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}}\ kQP\ (u)}{\ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}}\ kQP\ (u) + \ddot{y}kQP\ (u)}$$

$$= \mathbf{1\ \ddot{y}}\ \frac{(u)\ \mathbf{\ddot{y}\ 1}}{\ddot{y}kQP\ (u)}\ \mathbf{\ddot{y}}\ \ddot{y}kQP\ \mathbf{(u)/\ddot{y}.}\ \ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}}\ kQP\ (u) +$$

Machine Translated by Google

Daher,

$$\mathbf{Q}\hat{}\,P\,CQ\ {}^{\ddot{y}1}_{P}(\mathbf{1}\ddot{y}u),Q\ {}^{\ddot{y}1}_{P}(\mathbf{1}\ddot{y}u)=2u\ddot{y}\mathbf{1}+QP\,CQ\ {}^{\ddot{y}1}_{P}(\mathbf{1}\ddot{y}u),Q\ {}^{\ddot{y}1}_{P}(\mathbf{1}\ddot{y}u)$$

$$\ddot{y}\,2u\ddot{y}\,\ddot{y}kQP(u)/\ddot{y}=2u\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1}[2\ddot{y}u/\ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}u/\ddot{y})]\ddot{y}U\ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}u/\ddot{y})\ddot{y}U(\ddot{y}/)\ddot{y}U\ddot{y}1\ {}^{\ddot{y}u}\ \ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}u/\ddot{y}). \quad \textbf{(A20)}$$

Indem wir ähnliche Argumente wie in (A12) anwenden, können wir zeigen, dass ÿÿ in (A17)–(A20) langsam **variieren .**

Anhang C. Konkordanzsortierung

Eine Funktion f **ist subadditiv, wenn** f(x + y) **ÿ** f(x) + f(y) **für alle** x **und** y **in ihrer Definitionsmenge. Die Funktion** f **ist superadditiv, wenn** f(x + y) **ÿ** f(x) + f(y) **für alle** x **und** y **in ihrer Definitionsmenge.**

Theorem A1 ([11]). Seien **C1** und **C2** zwei archimedische Copulas, erzeugt durch **ÿ1** und **ÿ2.** Dann ist **C1 ÿ C2** genau dann, wenn **ÿ1 ÿ** $\ddot{y}\,{}^{\ddot{y}1}_{2}\ddot{y}$ ist subadditiv.

Weiterhin gilt C1 ÿ C2 genau dann, wenn ÿ1 ÿ $\ddot{y}\,{}^{\ddot{y}1}_{2}\ddot{y}$ **ist superadditiv.**

Hier zeigen wir mit Theorem A1 , dass die Familien der UL- und UIP-Copulas werden im Parameter ÿ geordnet. Für die UL-Unabhängigkeits-Copula gilt $C^{\perp}_{\ddot{y}1}=\ddot{y}\,{}^{\ddot{y}1}_{1}\ddot{y}\,\ddot{y}\,T2\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,{}^{\ddot{y}1}_{1}$ **, wobei** $\ddot{y}(t)=\ddot{y}\log(t)$ **und** $T(u)=GL(u)=Q\ {}^{\ddot{y}1}_{M}$ **Sei** $h(u)=T\ {}^{\ddot{y}1}_{1}\ddot{y}\,T2.$ **Für ÿ1 < ÿ2 ÿ** 1 **folgt aus Tabelle** 1, dass

$$h(u)=QL1\ddot{y}GL2(u)=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\ddot{y}1(1\ddot{y}u)/(\ddot{y}2u)\ddot{y}(x+y)}=\frac{\ddot{y}2u}{(\ddot{y}2\ddot{y}\ddot{y}1)u+\ddot{y}1}$$

$$\ddot{y}1\ddot{y}\ddot{y}2\ {}^{\ddot{y}1}_{2}(x+y)=\ddot{y}\log\frac{{}^{\ddot{y}e^{2}2}}{\ddot{y}2(\ddot{y}2\ddot{y}\ddot{y}1)e\ddot{y}(x+y)+\ddot{y}1} \quad \textbf{(A21)}$$

$$\ddot{y}1\ddot{y}\ddot{y}\ {}^{\ddot{y}1}_{2}(x)+\ddot{y}1\ddot{y}\ddot{y}\ {}^{\ddot{y}1}_{2}(y)=\ddot{y}\log\frac{{}^{\ddot{y}x}}{\ddot{y}2e(\ddot{y}2\ddot{y}\ddot{y}1)e\ddot{y}x+\ddot{y}1\ \frac{\ddot{y}2e\,\ddot{y}y}{(\ddot{y}2\ddot{y}\ddot{y}1)e\,\ddot{y}y+\ddot{y}1}} \quad \textbf{(A22)}$$

Wir wollen (A21) und (A22) vergleichen , **um festzustellen, ob ÿ1 ÿ ÿ** $\ddot{y}\,{}^{\ddot{y}1}_{2}$ **ist subadditiv oder superadditiv ist. Da** e (x+y) + **1 ÿ** e ${}^{\ddot{y}x}$ + e ÿy **für x,** y **ÿ 0 erhalten wir**

$$\frac{\ddot{y}2}{x+y+e\,\ddot{y}e\,\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}1}\ {}^{\ddot{y}x}\ e\,\ddot{y}2\ \ddot{y}y++\frac{\ddot{y}1}{\ddot{y}\,\ddot{y}1}$$

$$\textbf{und}\ \ddot{y}2e\,\ddot{y}(x+y)+\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}1\ddot{y}2}{(\ddot{y}2\ddot{y}\ddot{y}1)e\,\ddot{y}(x+y)+\ddot{y}1e\,\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\ddot{y}1}\ {}^{\ddot{y}x}+\ddot{y}1e\,\ddot{y}y+(\ddot{y}2\,\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}\,{}^{2}_{1}}{\ddot{y}1)}.$$

Daher ist **(A21) größer oder gleich (A22). Das heißt, ÿ1 ÿ** $\ddot{y}\,{}^{\ddot{y}1}_{2}$ **ist superadditiv. Daher ist die Familie der UL-Unabhängigkeits-Copulas durch den Parameter ÿ negativ geordnet.** Da die UIP-Verzerrung zum gleichen h(u) **führt ,** ist auch **die Familie der UIP-Unabhängigkeits-Copulas** durch den Parameter **ÿ negativ geordnet .**

Verweise

1. **Genest, C.; Ghoudi, K.; Rivest, LP „Understanding Relationships Using Copulas“ von Edward Frees und Emiliano Valdez.** N. Am. Actuar. J. **1998, 2, 143–149. [CrossRef]**
2. **Ades, M.; Provost, SB; Zang, Y. Vier Assoziationsmaße und ihre Darstellung in Kopula-Formen.** AppliedMath **2024, 4, 363–382. [CrossRef]**
3. **Cherubini, U.; Luciano, E.; Vecchiato, W.** Copula-Methoden im Finanzwesen; **John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 2004. [CrossRef]** 4. **Frees, EW; Valdez, EA Beziehungen mit Kopulas verstehen.** N. Am. Actuar. J. **1998, 2, 1–25. [CrossRef]**
5. **Embrechts, P.; McNeil, A.; Straumann, D. Korrelation und Abhängigkeit im Risikomanagement: Eigenschaften und Fallstricke. In** Risk Management: Value at Risk and Beyond; **Dempster, MAH, Ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2002; Seiten 176–223.**
6. **Ji, L.; Tan, KS; Yang, F. Tail-Abhängigkeit und starke Tail-Abhängigkeit bei extremen Risiken.** Vers. Math. Econ. **2021,** 99 **282–293. [CrossRef]**

Machine Translated by Google

7. Alzaid, AA; Alhadlaq, WMA Neue Familie archimedischer Copulas: Die halblogistische Familie der Copulas. Mathematik **2024,** 12, **101.** [CrossRef]

8. Tootoonchi, F.; Sadegh, M.; Haerter, JO; Raty, O.; Grabs, T.; Teutschbein, C. Copulas für hydroklimatische Analysen: Ein praxisorientierter Überblick. WIREs Water **2022, 9, e1579.** [CrossRef]

9. Chen, L.; Guo, S. Copulas und seine Anwendung in Hydrologie und Wasserressourcen; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2019; 290 S.; ISBN 978-981-13-0573-3.**

10. Sklar, M. Funktionen der Aufteilung und Dimensionen und Leurs Marges. Ann. l'ISUP **1959, 8, 229–231.**

11. Nelsen, RB Eine Einführung in Copulas; **Springer: New York, NY, USA, 2006.**

12. Joe, H. Abhängigkeitsmodellierung mit Copulas; **CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2015.**

13. Yang, Y.; Li, S. Über eine Familie log-gamma-generierter archimedischer Copulae. N. Am. Actuar. J. **2022,** 26, **123–142.** [CrossRef]

14. Manstaviÿcius, M.; Bagdonas, G. Eine Klasse bivariater Unabhängigkeits-Copula-Transformationen. Fuzzy Sets Syst. **2022,** 428, **58–79.** [Querverweis]

15. Chesneau, C. Eine Sammlung neuer trigonometrischer und hyperbolischer FGM-Typ-Copulas. AppliedMath **2023, 3, 147–174.** [CrossRef]

16. Chesneau, C. Eine Anmerkung zu zwei neuen dreiparametrigen logarithischen und exponentiellen Copulas. Asia Pac. J. Math. **2023,** 10, **8.**

17. Di Bernardino, E.; Rulliere, D. Über bestimmte Transformationen von archimedischen Copulas: Anwendung auf die nichtparametrische Schätzung ihrer Generatoren. Abhängig. Modell. **2013, 1, 1–36.** [CrossRef]

18. Genest, C.; Kilani, G.; Rivest, LP Ein semiparametrisches Schätzverfahren für Abhängigkeitsparameter in multivariaten Verteilungsfamilien . Biometrika **1995,** 82, **543–552.** [CrossRef]

19. Morillas, PM Eine Methode, um aus einer gegebenen Kopula neue zu erhalten. Metrika **2005,** 61, **169–184.** [CrossRef]

20. Durante, F.; Foschi, R.; Sarkoci, P. Distorted Copulas: Konstruktionen und Tail-Abhängigkeit. Commun. Stat. Theory Methods **2010,** 39, **2288–2301.** [CrossRef]

21. Valdez, EA; Xiao, Y. Über die Verzerrung einer Kopula und ihrer Ränder. Scand. Actuar. J. **2011, 4, 292–317.** [CrossRef]

22. Samanthi, RGM; Sepanski, J. Eine bivariate Erweiterung der aus Copulas abgeleiteten Beta-generierten Verteilung. Commun. Stat. Theorie und Methoden **2019,** 48, **1043–1059.** [CrossRef]

23. Samanthi, RGM; Sepanski, J. Über bivariate Kumaraswamy-verzerrte Copulas. Commun. Stat. Theory Methods **2020,** 51, **2477–2495.** [Querverweis]

24. Aldhufairi, FAA; Samanthi, RGM; Sepanski JH Neue Familien bivariater Copulas über Unit-Lomax-Verzerrung. Risiken **2020, 8, 106.** [CrossRef]

25. Aldhufairi, FAA; Sepanski, JH Neue Familien bivariater Copulas über Einheits-Weibull-Verzerrung. J. Stat. Distrib. Appl. **2020, 7, 1–20.** [CrossRef]

26. Aldhufairi, FAA Verwendung einer durch Gompertz verzerrten Unit-Kopula zur Modellierung der Abhängigkeit in anthropometrischen Daten. Commun. Stat. Appl. Methods **2023,** 30, **467–483.** [CrossRef]

27. Kularatne, TD; Li, J.; Pitt, D. Über die Verwendung von archimedischen Kopulas für die Versicherungsmodellierung. Ann. Actuar. Sci. **2021,** 15, **57–81.** [Querverweis]

28. Schweizer, B.; Sklar, A. Probabilistic Metric Spaces; **Dover Publications: North-Holland, NY, USA, 1983.**

29. Hua, L.; Joe, H. Intermediate Tail Dependence: Eine Überprüfung und einige neue Ergebnisse. In Stochastic Orders in Reliability and Risk Lecture Notes in Statistics; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2013; S. 291–311.**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

SIRS-Epidemiemodelle mit Verzögerungen, teilweise und vorübergehend Immunität und Impfung

Benito Chen-Charpentier

Fakultät für Mathematik, University of Texas at Arlington, Arlington, TX 76019, USA; bmchen@uta.edu

Zusammenfassung: Die Basisreproduktionszahl oder Reproduktionszahl ist ein nützlicher Index, der angibt, ob es eine Epidemie geben wird oder nicht. Sie ist jedoch auch sehr wichtig, um festzustellen, ob eine Epidemie schließlich abnimmt und verschwindet oder als Endemie bestehen bleibt. Verschiedene Infektionskrankheiten haben unterschiedliche Verhaltensweisen und mathematische Modelle, die zu ihrer Simulation verwendet werden, sollten die wichtigsten Prozesse erfassen; die Modelle beinhalten jedoch auch Vereinfachungen. Grippeepidemien sind in der Regel kurzlebig und können mit gewöhnlichen Differentialgleichungen modelliert werden, ohne die Demografie zu berücksichtigen. Verzögerungen wie der Infektionszeitpunkt können das Verhalten der Lösungen ändern. Dasselbe gilt, wenn eine dauerhafte oder vorübergehende Immunität oder eine vollständige oder teilweise Immunität vorliegt. Impfung, Isolierung und die Verwendung antiviraler Mittel können das Ergebnis ebenfalls ändern. In diesem Artikel stellen wir mehrere neue Modelle vor und verwenden sie, um die Auswirkungen aller oben genannten Faktoren zu ermitteln, wobei wir besonders darauf achten, ob das Modell einen Infektionsprozess darstellen kann, der schließlich verschwindet. Wir bestimmen die Gleichgewichtslösungen und ste Wir zeigen auch, dass viele Modelle der Grippe oder anderer Epidemien mit kurzer Dauer keine Lösungen mit einer verschwindenden Epidemie haben. Das Hauptziel des Papiers besteht darin, verschiedene Möglichkeiten zur Modellierung der Immunität in Epidemiemodellen vorzustellen. Es werden mehrere Szenarien mit unterschiedlichen Immunitäten untersucht, da eine Person möglicherweise nicht erneut infiziert wird, weil sie über eine vollständige oder teilweise Immunität verfügt oder weil es keine engen Kontakte gab. Wir zeigen, dass einige relativ kleine Änderungen, wie etwa bei der Impfrate , die Dynamik erheblich verändern können; zum Beispiel die Existenz und Anzahl der krankheitsfreien Gleichgewichte. Wir veranschaulichen auch, dass die Modelle durch die Einführung von Verzögerungen zwar realistischer werden, die Dynamik jedoch das gleiche qualitative Ve

Schlüsselwörter: Grippe; Epidemiemodelle; Differentialgleichungen; Basisreproduktionszahl; partielle Immunität

check for updates

Zitat: Chen-Charpentier, B. SIRS-Epidemiemodelle mit Verzögerungen, teilweiser und vorübergehender Immunität und Impfung. AppliedMath **2024, 4, 666–689. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020036**

Wissenschaftlicher Redakteur: Carlo Bianca

Empfangen: 7. Mai 2024
Überarbeitet: 17. Mai 2024
Akzeptiert: 23. Mai 2024
Veröffentlicht: 28. Mai 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Influenza oder Grippe ist eine ansteckende Krankheit, die durch Kontakt mit einer infizierten Person übertragen wird. Die saisonale Grippe betrifft in den Vereinigten Staaten jedes **Jahr zwischen 3 % und 11 % der Bevölkerung [1]. Den Höhepunkt erreicht die Grippe jedes Jahr zwischen Dezember und Februar. Zwar sterben einige Patienten an der saisonalen Grippe, aber mit 0,2 Todesfällen pro 100.000 Einwohner ist sie keine besonders tödliche Krankheit [2]. Andere ansteckende Krankheiten mit kurzer Dauer sind Erkältungen, die RSI-Viruserkrankung und Streptokokken-Halsinfektionen. Es gibt zahlreiche Artikel, die sich mit mathematischen Modellen für Epidemien befassen, sowohl für die Übertragung durch direkten Kontakt als auch durch Vektoren. Die mathematische Modellierung von Epidemien begann im frühen 20. Jahrhundert. Eine der ersten Bemühungen ist [3] , und der bahnbrechende Artikel von Kermack und McKendrick [4] gilt allgemein als Einführung des ersten kompartime Die Verwendung von ODEs ist eine gute Modellannahme, wenn die verschiedenen Populationen gut gemischt sind und es wenig oder keine räumliche Abhängigkeit gibt. Kermack und McKendrick führten das SIR-Modell (susceptible-infected-removed) ein, das davon ausgeht, dass sich die Population in einem von drei Zuständen befinden kann : anfällig, infiziert oder infektiös und entfernt (genesen mit dauerhafter Immunität oder verstorben). Das SIR-Modell und seine vielen Variationen, darunter SIS (susceptible-infective-suscep**

Machine Translated by Google

Modelle haben einen großen Einfluss auf das Verständnis von Epidemien und ihrer Bekämpfung gehabt. Zu den Modifikationen, die am ursprünglichen SIR-Modell von Kermack und McKendrick vorgenommen wurden, gehören die Einführung demographischer Daten (nicht wichtig bei der saisonalen Grippe), Impfungen, unterschiedlicher Altersgruppen , der Einsatz antiviraler Mittel und Isolierung. Eine wichtige Modifikation ist die Hinzufügung von Verzögerungen . Verzögerungen treten bei Epidemien auf, weil bestimmte Prozesse lange genug ablaufen, beispielsweise die Zeit, die eine anfällige Person braucht, um sich nach Kontakt mit einer infizierten Person anzustecken, oder die Zeit, die Impfstoffe brauchen, um nach der Verabreichung ihre Wirkung zu entfalten. Die zwei wichtigsten Möglichkeiten, Verzögerungen in ein Modell einzuführen, das auf gewöhnlichen Differentialgleichungen basiert, sind die Verwendung von Differentialgleichungen mit Verzögerung (DDEs) oder die Einführung einer zusätzlichen exponierten oder latenten Bevölkerung. DDEs können eine andere Dynamik als ODEs aufweisen [5,6]. Zu den möglichen Unterschieden gehören die Einführung von Schwingungen, die Einführung von Diskontinuitäten in den Zeitableitungen , Nicht-Eindeutigkeit und unterschiedliche Stabilität. Während es eine breite Literatur über Modelle von Epidemien oder Krankheitsübertragungen unter Verwendung von Differentialgleichungen mit Verzögerung gibt, wird die Ausbreitung ansteckender Krankheiten in den meisten Büchern über Differentialgleichungen mit Verzögerung nur spärli
SIR-Modelle gehen davon aus, dass sich Personen nach einer Infektion erholen und eine dauerhafte und vollständige Immunität gegen die Krankheit erlangen. Bei der saisonalen Grippe und anderen ansteckenden Krankheiten ist die Immunität zeitlich begrenzt, was zu SIRS-Modellen führt, bei denen genesene Personen nach einer bestimmten Zeitspanne ihre Immunität vollständig verlieren. Es gibt jedoch auch andere Möglichkeiten: Genesene Personen verlieren ihre vollständige Immunität, behalten aber für immer eine teilweise Immunität; genesene Personen verlieren ihre vollständige Immunität und erlangen für einen bestimmten Zeitraum eine teilweise Immunität; einige genesene Personen behalten ihre vollständige und dauerhafte Immunität, während andere nur eine teilweise dauerhafte Immunität behalten, und so weiter. Was passiert, hängt von der jeweiligen Infektion und der Population ab. Impfstoffe können auch eine vollständige dauerhafte Immunität verleihen oder eine vollständige Immunität, die z

Eine der wichtigsten Anwendungen mathematischer Modelle ansteckender Krankheiten ist die Vorhersage, ob es zu einer Epidemie kommen wird oder nicht. Die Basisreproduktionszahl R0 , definiert als die Anzahl der Sekundärinfektionen, die ein neu infiziertes Individuum zu Beginn des Infektionsprozesses verursacht, ist ein nützlicher Index, um zu bestimmen, ob die Epidemie abklingen wird oder nicht. Sie wird normalerweise mit der Methode der Matrix der nächsten Generation berechnet [9,10]. Sie gibt auch die Stabilität des krankheitsfreien Gleichgewichts (DFE) des Modells an. Falls die Anzahl der Infizierten zunächst steigt, ist dies auch sehr wichtig, um zu bestimmen, ob die Epidemie schließlich abklingen wird oder nicht. In diesem Artikel werden wir mathematische Modelle kurzlebiger ansteckender Krankheiten wie der saisonalen Grippe entwickeln, die verschiedene Annahmen über vollständige, teilweise, permanente und zeitlich begrenzte Immunität enthalten. Wir werden auch Impfungen mit unterschiedlichen Immunitätseffekten sowie den Einsatz antiviraler Mittel und Isolierung berücksichtigen. Die Modelle werden verzögerte Versionen unter Verwendung von DDEs und auch exponierten Populationen umfassen . Für diese Modelle werden wir untersuchen, ob die Epidemie anhält oder nicht. Ref. [11] vergleicht einige grundlegende Modelle für Influenza, die wir als Ausgangspunkt verwenden werden. Der Rest des Papiers ist wie folgt gegliedert.
In Abschnitt 2 stellen wir mehrere neue Modelle vor, die Erweiterungen des SIRS-Modells sind, mit unterschiedlichen Hypothesen über vollständige und teilweise Immunität und Impfung, bestimmen ihre Gleichgewichte und analysieren die Stabilität ihrer krankheitsfreien Gleichgewichte. In Abschnitt 3 werden numerische Simulationen und Ergebnisse vorgestellt, einschließlich der Auswirkungen von Verzögerungen. Wir zeigen auch, dass einige relativ kleine Änderungen in den Modellen die Dynamik erheblich verändern können. Abschließend werden in Abschnitt 4 die Diskussionen und Schlussfolgerungen zu den Modellen und Ergebnissen vorgestellt.

2. Materialien und Methoden

In diesem Abschnitt stellen wir mehrere neue mathematische Modelle für kurzfristige Epidemien mit unterschiedlichen Immunitätsarten vor. Wir fügen auch Impfungen, den Einsatz antiviraler Mittel und Isolation oder Quarantäne hinzu. Um festzustellen, ob sich gemäß dem verwendeten Modell eine Epidemie entwickelt, müssen die Gleichgewichtspunkte gefunden werden. Wenn es einen Gleichgewichtspunkt gibt, bei dem es keine Infektiösen und keine Anfälligen gibt, die der Gesamtbevölkerung entsprechen, und wenn die Zahl der Infektiösen mit der Zeit zunimmt, dann wird es eine Epidemie geben. Ein Gleichgewicht mit null Infektiösen ist

Machine Translated by Google

bekannt als krankheitsfreies Gleichgewicht (DFE). Es gibt verschiedene Methoden, um zu bestimmen, ob die Zahl der Infektiösen steigt: Die Differentialgleichung für die Infektiösen hat eine positive rechte Seite; das DFE ist lokal instabil; die Verwendung der Basisreproduktionszahl R0 ergibt R0 > 1; das Gleichungssystem der infektiösen Kompartimente ist lokal instabil; der mit der Matrixmethode der nächsten Generation berechnete R0- Index ist größer als 1 **[10,12]. Im Falle einer Epidemie ist es sehr wichtig festzustellen, ob sie schließlich aussterben wird. Dies kann berechnet werden, indem bestimmt wird, ob es ein DFE für positive Zeit gibt, das lokal asymptotisch stabil ist. Dies kann für eine endliche Zeit oder nur dann passieren, wenn die Zeit gegen unendlich tendiert. Diese Bestimmung wird in den folgenden Unterabschnitten für verschiedene Modelle ohne demografische Daten durchgeführt. Der erste Unterabschnitt ist eine Überprüfung des Susceptible-Infective-Susceptible-Modells (SIS), des Susceptible- Infective-Recovered-Modells (SIR) und des Susceptible-Infective-Recovered-Susceptible-Modells (SIRS) mit unterschiedlichen Immunität**

2.1. SIS-, SIR- und SIRS-Modelle

Ein sehr einfaches Epidemiemodell für eine konstante Gesamtbevölkerung N, das nur aus zwei Bevölkerungsteilen besteht, nämlich den Anfälligen S **und den Infektiösen** I, **ist das SIS-Modell. Es geht davon aus ,** dass sich eine Anfällige mit einer Wahrscheinlichkeit **von ÿ/N > 0 durch Kontakt mit einer Infektiösen infiziert , sich dann ohne Immunität erholt und in den anfälligen Teil zurückkehrt. Die Erkältung ist ein Beispiel für eine ansteckende Krankheit, die durch ein SIS-Gleichungssy Die Gesamtbevölkerung wird normalerweise als konstant betrachtet, was davon ausgeht, dass die Krankheit im Vergleich zu den demografischen Auswirkungen schnell voranschreitet. Eine fast gleichwertige Annahme – da die Sterberate im Vergleich zum Zeitrahmen der Krankheit sehr gering ist – ist, dass die Zahl der Geburten gleich der Zahl der Todesfälle ohne Migration ist. Das SIS-Modell ohne der**

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \ddot{y} \quad \frac{\ddot{y}}{N} SI + \ddot{y}I \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} SI \ddot{y} \ddot{y}I, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei *ÿ* **> 0 die Wiederfindungsrate und** N **> 0 die Gesamtpopulation ist. Da die Population konstant ist,** gilt S(t) = N ÿ I(t) **und wir können eine Gleichung eliminieren**

$$\frac{dIch}{dt} = \ddot{y}(N \ddot{y} I)I \ddot{y} \ddot{y}I. \tag{2}$$

Das SIS-Modell kennt zwei Gleichgewichtszustände, I = **0 und** I = $\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}$)N. **Der letzte ist (1** ÿ **nur physikalisch für** *ÿ* ÿ **1. Die Basisreproduktionszahl (auch Basisreproduktionszahl genannt) R0 ist die Zahl der sekundären Infektiösen, die von einem einzelnen Infektiösen zu Beginn des Infektionsprozesses erzeugt werden. Für das SIS-Modell lässt sie sich als Produkt aus der Wahrscheinlichkeit eines neuen Infektiösen,** ÿ/N, **multipliziert mit der Zahl der Anfälligen zu Beginn des Infektionsprozesses, N, multipliziert mit der durchschnittlichen Lebensdauer einer Infektion,** *1/ÿ, berechnen.* **Daher** ist **R0** = *ÿ/ÿ.* **Falls R0 > 1, nimmt die Zahl der Infektiösen mit zunehmender Entfernung vom DFE zu, und das andere Gleichgewicht ist biologisch sinnvoll, da alle Zustände nicht negativ sind. Falls R0 < 1, verschwindet die Infektion, und R0 > 1 bedeutet, dass der DFE lokal asymptotisch instabil ist, sodass mindestens einer der Eigenwerte des linearisierten Systems um den DFE einen positiven Realteil hat. Um zu bestimmen, ob die Infektion zunimmt, muss man nur das infizierte Kompartiment** I(t) betrachten. **Die Matrixmethode** der nächsten Generation **[9,10] wird häufig verwendet, um die grundlegende Reproduktionszahl in komplexeren Modellen in der Epidemiologie zu berechnen. Wendet man diese Methode auf das SIS-Modell an, gibt es nur ein infektiöses Kompartiment, I, sodass die Jacobi-Matrix** J **dieses Systems eine 1 × 1-Matrix ist. Zerlegt man diese Matrix als** J = T + **ÿ, wobei und ÿ die Übergangsmatrizen sind, erhält man** = *ÿS/(ÿN).* **Bei** T = **ÿS/N und** $\ddot{y}1$ T **die Übertragungs-ÿ** = *ÿÿ.* **Die nächste Generationsmatrix ist** K = ÿTÿ **der Beginn der Infektion** S = N ÿ **1, so dass der Spektralradius von K, der R0 ist,** durch **R0** = *ÿ/ÿ* **angenähert werden kann . Die lokale Stabilität des DFE kann auch festgestellt werden, indem man einen Index findet, der angibt, wann der Eigenwert des line**

Machine Translated by Google

Das am DFE ausgewertete Krankheitskompartiment hat einen negativen Realteil. Eine einfache Möglichkeit, herauszufinden, ob die Zahl der Infizierten zu Beginn der Epidemie steigt, besteht darin, die Differentialgleichung für I **im Anfangszustand mit** S = **N auszuwerten:**

$$\frac{dIch}{dt} = \frac{\ddot{y}}{N} NI \ddot{y} \ddot{y}I = (\ddot{y} \ddot{y} \ddot{y})I,$$

was positiv ist für ÿ/ÿ > **1. Beachten Sie, dass zu Beginn der Epidemie** I = **1,** S = N ÿ **1 war. Bei großen N** kann jedoch S **gleich N gesetzt werden. Eine andere Möglichkeit, die Stabilität des DFE zu Beginn der Infektion zu ermitteln, besteht darin, die Eigenwerte der Jacobi-Matrix zu berechnen, die dem vollständigen Gleichungssystem entspricht. Die Formeln sind jedoch normalerweise kompliziert oder können nicht analytisch bestimmt werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung des charakteristischen Polynoms und des Routh-Hurwitz-Kriteriums [13,15**

Dem SIS-Modell können zwei Verzögerungen hinzugefügt werden: *ÿ* **ist die Zeit, die die Krankheit braucht, um sich bei einer anfälligen Person zu entwickeln, nachdem sie durch Kontakt mit einer infektiösen Person infiziert wurde, und die Zeit, die eine frisch infizierte Person braucht, um sich zu erholen. Diese zweite Verzögerung wird normalerweise implizit berücksichtigt, da 1/ÿ die durchschnittliche Genesungszeit ist. Es gibt zwei Möglichkeiten, die erste Verzögerung einzuführen . Die erste Möglichkeit wird durch das SIS-Verzögerungsmodell I ge**

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} S(t \ddot{y} \ddot{y})I(t \ddot{y} \ddot{y}) + \ddot{y}I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} S(t \ddot{y} \ddot{y})I(t \ddot{y} \ddot{y}) \ddot{y} \ddot{y}I(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Die Annahme ist, dass ein Kontakt zum Zeitpunkt t ÿ *ÿ* **eine neue Infektionskrankheit zum Zeitpunkt t hervorbringt. Die zweite Möglichkeit wird durch das SIS-Verzögerungsmodell II gegeben:**

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} S(t)I(t \ddot{y} \ddot{y}) + \ddot{y}I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} S(t)I(t \ddot{y} \ddot{y}) \ddot{y} \ddot{y}I(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Man geht nun davon aus, dass ein anfälliges Individuum nach Kontakt mit einer infektiösen Person selbst infektiös wird, aber eine Zeit *ÿ* braucht , **um sich tatsächlich mit der Krankheit anzustecken und infektiöse Personen anstecken zu können. Beide Modelle sind biologisch sinnvoll. Ein anderer Ansatz zur Untersuchung von Epidemiemodellen besteht darin, sie als chemische Reaktionen zu betrachten, wie beispielsweise in [16] gezeigt. Zur Veranschaulichung: Die Reaktion zwischen einer infektiösen Person und einer anfälligen Person führt zu zwei infektiösen Personen.**

Damit die Reaktion stattfinden kann, müssen beide Spezies gleichzeitig vorhanden sein, was eine Einschränkung für das Verzögerungsmodell II darstellt. Da jedoch in vielen Arbeiten beide Möglichkeiten zur Einführung der Infektionsverzögerung verwendet werden , schließen wir beide ein, um zu sehen, ob sie qualitativ die gleiche Dynamik erzeugen.

Die Dynamik kann unterschiedlich sein, da ihre charakteristischen Gleichungen unterschiedlich sind. Weitere Epidemiemodelle, die eine Verzögerung der Infektion einführen, wie dies im Verzögerungsmodell 1 durchgeführt wurde, finden Sie beispielsweise in [17–19]. Und für andere Anwendungen, die die Verzögerung wie im Verzögerungsmodell 2 verwenden, siehe [20,21].

Für das SIS-Modell sind die Gleichgewichtslösungen beider Verzögerungsmodelle dieselben wie die des ODE-Modells. Um die Stabilität des DFE für Modell (3) zu bestimmen, setzen wir I = i **und** S = N ÿ s. Dann **lautet die linearisierte Differentialgleichung für** i = ÿi ÿ ÿi. **Indem wir** i = exp(ÿrÿ) setzen , **erhalten wir die charakteristische Gleichung**

$$r = \ddot{y} \exp(\ddot{y}r\ddot{y}) \ddot{y} \ddot{y}.$$

Diese Gleichung ist transzendent und es gibt keine exakte Lösung, aber r > **0 ist nur für** *ÿ* > **ÿ. Wir haben also das gleiche R0 wie für das ODE-Modell. Eine ähnliche Berechnung für Modell (4) führt zum gleichen Ergebnis. Diese Methode wurde von [20,22] auf andere Modelle angewendet.**

Machine Translated by Google

Eine andere Möglichkeit, die Zeit, die die Infektion braucht, um sich zu entwickeln, einzuführen, besteht darin, ein weiteres Kompartiment für die exponierte oder latente Bevölkerung (E) hinzuzufügen. Nach einem Kontakt mit einer infektiösen Person geht die anfällige Person in das exponierte Kompartiment und verbringt dort durchschnittlich eine Zeit, die der Infektionszeit entspricht. Exponierte Personen können nicht infizieren. Das SIS-Modell mit einer exponierten Bevölkerung ist

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}}SI + \ddot{y}I\,N\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{SI}{E}\ddot{y}\,N\,\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\ddot{y}}E\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{}{\ddot{y}}\ddot{y}I.\end{aligned} \tag{5}$$

Das DFE-Gleichgewicht von (5) ist das gleiche wie das von (1). Seine Stabilität kann mit der Matrixmethode der nächsten Generation berechnet werden und ergibt R0 = *ÿ/ÿ.* **Die Stabilität ist also die gleiche wie die von (1). Exponierte Populationen wurden in vielen Epidemiemodellen verwendet, beispielsweise in denen in [23,24].**

Das SIR-Modell von Kermack und McKendrick [4] berücksichtigt infizierte Genesene mit vollständiger und dauerhafter Immunität. Es ergänzt das SIS-Modell **um das Kompartiment** der Genesenen (R) :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N}SI\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}SI\ \ddot{y}\ \ddot{y}I\\ \frac{dR}{dt} &= \ddot{y}I.\end{aligned} \tag{6}$$

Da die Gesamtbevölkerung konstant ist, kann eine Gleichung eliminiert werden, indem R(t) = N ÿ S(t) ÿ I(t) verwendet wird. **Das neue Gleichungssystem lautet**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N}SI\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}SI\ \ddot{y}\ \ddot{y}I.\end{aligned}$$

Die einzige stationäre Lösung von (6) ist I = **0,** S + R = **N. Zu Beginn der Infektion** ist **S(0)** = **N. Die zweite Gleichung von (6) besagt, dass zum Anfangszeitpunkt** t = **0,** > **0 für** *ÿ* > **ÿ.** $\frac{dI}{dt}$ **Für ÿ/ÿ** > **1 ist der DFE also instabil, und** I(t) **hat seinen Maximalwert, wenn** S = **Nÿ/ÿ.** ÿN **S(ÿ) Weiterhin ist die Lösung für** t **gegen unendlich S(ÿ)** = N ÿ **R(0)** ÿ **ln( ) und** *ÿ* **S(0)** — — **S(ÿ)** > **0 [13]. Wenn es also eine Epidemie gibt, verschwindet sie nicht.**

Die Verzögerung aufgrund des Infektionszeitpunkts kann auf zwei Arten eingeführt werden, wie dies für das SIS-Modell durchgeführt wurde. Die Gleichgewichtslösung beider Verzögerungsmodelle ist die DFE mit der gleichen Stabilität wie für das Modell ohne Verzögerung. Das gleiche Stabilitätsergebnis für die DFE des ODE-Modells ohne Verzögerung gilt für das SIR-Modell mit der exponierten Bevölkerung.

Ein Modell für die Ausbreitung vieler verschiedener Krankheiten in einer Bevölkerung ist das SIRS-Modell ohne demografische Daten [13]. Es besteht aus drei Populationen: Anfällige (S(t)), **Infektiöse oder Infizierte** (I(t)) **und Genesene** (R(t)). **Ein Anfälliger wird nach Kontakt mit einem Infektiösen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu einem Infektiösen. Ein Infektiöser erholt sich mit einer Rate ÿ. Ein Genesener verliert seine Immunität mit einer Rate** *ÿ* **und wird zu einem Anfälligen. Die Gesamtbevölkerung wird als konstant angenommen,** S(t) + I(t) + R(t) = **N, und die Krankheit wird als kurz genug angenommen, sodass Geburten und Todesfälle nicht berücksichtigt werden müssen. Der Infektionskoeffizient wird mit** ÿ/N bezeichnet. **Alle Parameter sind positiv. Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (ODEs), das das Modell beschreibt, ist [13,14].**

Machine Translated by Google

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N}SI + \ddot{y}R\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}SI - \ddot{y}I - \ddot{y}I\\ \frac{dR}{dt} &= \ddot{y}I - \ddot{y}R.\end{aligned} \tag{7}$$

Da die Gesamtbevölkerung konstant ist, kann eine Gleichung eliminiert werden, indem R(t) = N − S(t) − I(t) verwendet wird. **Das neue Gleichungssystem lautet**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N}SI + \ddot{y}(N - S - I)\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}SI - \ddot{y}I.\end{aligned} \tag{8}$$

Das SIRS-Modell hat zwei Gleichgewichtslösungen: das DFE, S = **N,** I = **0,** R = **0 und** *(γγγ)Nγ,* **das endemische Gleichgewicht,** S = **γN/γ,** I = R = N − S − I. **Die grundlegende Reproduktionszahl** γ(γ+γ) **ist R0** = γ/γ.

Es gibt verschiedene Methoden, um die Infektion zu verzögern.

Modell: Das erste, das wir SIRS-Modell I [17–19] nennen, **ist gegeben durch**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N}S(t - \ddot{y})I(t - \ddot{y}) + \ddot{y}(N - S(t) - I(t))\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}S(t - \ddot{y})I(t - \ddot{y}) - \ddot{y}I(t),\end{aligned} \tag{9}$$

Dabei wird angenommen, dass eine infektiöse Person Kontakt mit einer anfälligen Person hat und es eine Zeit *ÿ* dauert , **bis diese anfällige Person infektiös wird. Bis zu diesem Zeitpunkt wird sie nicht als anfällig gezählt. Ein zweites Modell ist das SIRS-Modell II [25], das wie folgt beschrieben wird:**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N}S(t)I(t - \ddot{y}) + \ddot{y}(N - S(t) - I(t))\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}S(t)I(t - \ddot{y}) - \ddot{y}I(t),\end{aligned} \tag{10}$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass nach einem Kontakt zwischen einer anfälligen Person und einer infektiösen Person eine Zeitspanne *ÿ* **vergeht, bevor die anfällige Person zu einer infektiösen Person wird und dann eine weitere anfällige Person infizieren kann .**

Anstatt eine genesene Population zu betrachten, in der Individuen eine durchschnittliche Zeit von 1/ γ verbringen , **bevor sie ihre Immunität verlieren, müssen infektiöse Individuen nach dem Ende ihrer Infektiosität eine Verzögerungszeit von 1/γ** abwarten , **bevor sie wieder infektiös werden. In [26] wird dies zusätzlich zur Berücksichtigung des genesenen Kompartiments durchgeführt.**

Die beiden oben vorgestellten Modelle mit Verzögerungen haben die gleichen Gleichgewichtslösungen, aber die tatsächlichen zeitabhängigen Lösungen werden unterschiedlich sein. Es stellt sich auch die Frage nach dem Einfluss der im Verlaufsintervall gegebenen Anfangsbedingungen. Für eine Epidemie können sie immer als Gleichgewichtslösungen ohne Krankheit angegeben werden. Das heißt, die natürliche Annahme, dass die Epidemie bei t = **0 beginnt, kann verwendet werden.**

Machine Translated by Google

Ein Modell, das die Abhängigkeit in der Vergangenheit, die durch die Verzögerung der **Übertragung verursacht wurde, durch die Einbeziehung einer exponierten Bevölkerung E berücksichtigt ,** ist **[27,28]**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\ddot{y}\frac{\ddot{y}}{N}SI + \ddot{y}R\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}SI - \ddot{y}E - \ddot{y}E\\ \frac{dI}{dt} &= \ddot{y}E - \ddot{y}I - \ddot{y}I\\ \frac{dR}{dt} &= \ddot{y}I - \ddot{y}R.\end{aligned} \tag{11}$$

Der zusätzliche Parameter ist $\ddot{y} = 1/\ddot{y}$. **Modelle dieser Form werden üblicherweise SEIRS-Modelle genannt. Es verfügt über dieselben DFE- und R0- Werte wie das Modell ohne Verzögerung.**

2.2. Modelle mit unterschiedlicher Immunität

Die drei in Abschnitt 2.1 genannten Modelle **haben unterschiedliche Arten von Immunität. Das SIS-Modell hat keine Immunität, das SIR-Modell hat vollständige und permanente Immunität und das SIRS-Modell hat vollständige, aber zeitlich begrenzte Immunität. Allerdings kann es für verschiedene Infektionen unterschiedliche Arten von Immunität geben, z. B. teilweise und permanente oder teilweise und zeitlich begrenzte. Einige Artikel, die sich mit der Immunität gegen Influenza befassen, sind [29–31]. Ref. [32] schließt eine erneut infizierte Klasse mit unterschiedlicher Immunität ein. Ref. [33] modelliert die teilweise Immunität der genesenen Bevölkerung und [34] berücksichtigt, dass Genesene ihre Immunität verlieren, aber nicht alle Infizierten genesen. Ref. [35] fügt den Effekt einer erneuten Infektion mit Influe Ref. [37] modelliert den Verlust der Immunität mit zeitabhängigen Raten. Wir werden mehrere neue Modelle mit unterschiedlicher Immunität auf der Grundlage des SIRS-Modells betrachten. Das erste Modell geht davon aus, dass alle infektiösen Personen eine teilweise, aber dauerhafte Immunität erlangen. Ähnliche Modelle werden von [34,38] angegeben. Anfällige Personen werden infiziert und gehen dann in Anfällige mit teilweiser Immunität** Sp über , **die mit einer Infektionsrate von** $\ddot{y}p/N$ **erneut infiziert werden können. Die Gleichung**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\ddot{y}\frac{\ddot{y}}{N}SI\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}\,\ddot{y}p}{N}SI + \frac{}{N}Sp\,I - \ddot{y}I - \ddot{y}I\\ \frac{dSp}{dt} &= -\ddot{y}\frac{\ddot{y}p}{N}Sp\,I + \ddot{y}I.\end{aligned} \tag{12}$$

Da die Gesamtpopulation konstant ist, kann eine Gleichung eliminiert werden, indem $Sp(t) = N - S(t) - I(t)$ verwendet wird. **Das System hat zwei Gleichgewichtslösungen: die DFE** $I = 0$, $S + Sp = N$, $\ddot{y}N$ **und** $S = 0$, $Sp = I = N - Sp$. **Zu Beginn der Infektion ist** $Sp = 0$, **sodass die Gleichung für** $\ddot{y}p$, I **dieselbe ist wie im System (6), und R0 hat denselben Wert R0** $= \ddot{y}/\ddot{y}$. **Die beiden Verzögerungsmodelle werden wie zuvor konstruiert. Das erste Modell ist**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\ddot{y}\frac{\ddot{y}}{N}S(t-\ddot{y})I(t-\ddot{y})\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}p\,\ddot{y}}{N}S(t-\ddot{y})I(t-\ddot{y}) + \frac{}{N}Sp(t-\ddot{y})I(t-\ddot{y}) - \ddot{y}I\\ \frac{dSp}{dt} &= -\ddot{y}\frac{\ddot{y}p}{N}Sp(t-\ddot{y})I(t-\ddot{y}) + \ddot{y}I,\end{aligned} \tag{13}$$

Machine Translated by Google

und das zweite ist

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} S(t)I(t-\tau)\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta p \beta}{N} S(t)I(t-\tau) - \gamma I - \frac{\beta p \beta}{N} S(t)I(t-\tau) + \beta I.\\ \frac{dSp}{dt} &= \frac{}{N}\end{aligned} \tag{14}$$

Sie haben die gleichen Gleichgewichtspunkte wie das Modell ohne Verzögerung. Das Modell mit der exponierten Bevölkerung ist ähnlich aufgebaut und wird gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} SI\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{}{N} SI + \frac{\beta p \beta}{N} Sp\ ich - \gamma E\\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - \gamma I\\ \frac{dSp}{dt} &= -\frac{\beta p}{N} Sp\ I + \gamma I.\end{aligned} \tag{15}$$

Alle diese drei Modelle haben auch den gleichen R0-Wert wie (12).

Das zweite Modell der teilweisen Immunität geht davon aus, dass alle Infektiösen eine teilweise Immunität erlangen, die jedoch nur vorübergehend ist. Anfällige werden infiziert, dann werden sie zu Anfälligen mit teilweiser Immunität und dann wieder zu Anfälligen ohne Immunität. Das Modell wird durch das **folgende System von Differentialgleichungen angegeben**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} SI + \gamma Sp\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{}{N} SI + \frac{\beta p \beta}{N} Sp\ I - \gamma I\\ \frac{dSp}{dt} &= -\frac{\beta p}{N} Sp\ I + \gamma I - \gamma Sp.\end{aligned} \tag{16}$$

Da die Gesamtpopulation konstant ist, kann eine Gleichung eliminiert werden. Das System hat zwei Gleichgewichtslösungen: das DFE I = **0,** S = **N,** Sp = **0 und ein zweites Gleichgewicht mit** S > **0,** Sp > **0 und** I > **0. Zu Beginn der Infektion ist** Sp = **0, sodass die Gleichung für** I dieselbe **ist wie in System (6) und R0** = *β/γ.* **Die beiden Verzögerungsmodelle sind ähnlich aufgebaut wie zuvor. Sie haben dieselben Gleichgewichtspunkte wie das nicht verzögerte Modell. Dem Modell mit der exponierten Population wird diese Population in derselben Form hinzugefügt. Alle diese drei Modelle haben auch dasselbe R0 wie (12).**

Das dritte Modell geht davon aus, dass alle Infizierten eine vollständige Immunität erlangen, die jedoch nur **vorübergehend ist ,** und dann eine dauerhafte Teilimmunität entwickeln. Anfällige Personen werden infiziert, erholen sich dann **mit vollständiger vorübergehender Immunität und entwickeln dann eine teilweise dauerhafte Immunität, so wie Anfällige mit teilweiser Immunität. Das Modell wird gegeben durch**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} SI\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{}{N} SI + \frac{\beta p \beta}{N} Sp\ I - \gamma I\\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \gamma R\\ \frac{dSp}{dt} &= -\frac{\beta p}{N} Sp\ I + \gamma R.\end{aligned} \tag{17}$$

Machine Translated by Google

Da die Gesamtpopulation konstant ist, kann eine Gleichung eliminiert werden. Das System hat zwei Gleichgewichtslösungen: die DFE I = **0,** S + Sp = **N und eine zweite Gleichgewichtslösung** *(ÿpÿÿ)Nÿ* S = **0,** Sp = **und** R = N ÿ Sp ÿ **I. Diese zweite Gleichgewichtslösung** *ÿp(ÿ+ÿ)* **ist nur sinnvoll, wenn** ÿp > **ÿ. Zu Beginn der Infektion ist** Sp = **0, sodass die Gleichung für** I **dieselbe ist wie im System (6) und R0** = *ÿ/ÿ.* **Wenn jedoch** ÿp < **ÿ ist, wird die Epidemie schließlich verschwinden.**

Das vierte Modell geht davon aus, dass alle Infektiösen eine vollständige Immunität erlangen, die jedoch nur vorübergehend ist , und dann eine teilweise Immunität erhalten, die ebenfalls vorübergehend ist. Anfällige werden infiziert, erholen sich dann mit vollständiger vorübergehender Immunität, erhalten dann eine teilweise vorübergehende Immunität als Anfällige mit teilweiser Immunität, die dann zu Anfälligen werden. Das Modell wird gegeb

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{ÿ}{N} SI + ÿ1Sp\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{ÿp\,ÿ}{N} SI + \frac{}{N} Sp\ I ÿ ÿI\\ \frac{dR}{dt} &= ÿI ÿ ÿR\\ \frac{dSp}{dt} &= \frac{ÿp}{N} Sp\ I + ÿR ÿ ÿ1Sp.\end{aligned} \tag{18}$$

Da die Gesamtpopulation konstant ist, kann eine Gleichung eliminiert werden. Das System hat zwei Gleichgewichtslösungen: das DFE I = **0,** S + Sp = N **und ein zweites endemisches Gleichgewicht** S > **0,** Sp > **0,** I > **0 und** R = N ÿ Sp ÿ **I. Zu Beginn der Infektion ist** Sp = **0, sodass die Differentialgleichung für** I **dieselbe ist wie im System (6) und R0** = *ÿ/ÿ.*

2.3. Modelle mit Immunitätsverlust und zwei Gruppen

Verschiedene Personen verlieren ihre Immunität unterschiedlich schnell. In diesem Unterabschnitt werden wir der Einfachheit halber zwei Personengruppen berücksichtigen, die Modelle können jedoch auf mehrere Grup Ref. [34] beschreibt ein Modell, bei dem einige Genesene ihre Immunität verlieren. Das erste vorgeschlagene Modell geht davon aus, dass alle Infizierten eine dauerhafte Immunität erlangen, die beiden Gruppen diese jedoch mit unterschiedlicher Geschwindigkeit verlieren, *ÿ* **und ÿ1. Eine Gruppe hat ein stärkeres Immunsystem, unter anderem aufgrund früherer Exposition gegenüber einer früheren Variante der Grippe oder aufgrund von Impfungen in früheren Saisons [29–31].**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{ÿ}{N} SI + ÿ\ f\ R + ÿ1(1 ÿ f)R\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{ÿ}{N} SI ÿ ÿI\\ \frac{dR}{dt} &= ÿI ÿ ÿ\ f\ R ÿ ÿ1(1 ÿ f)R.\end{aligned} \tag{19}$$

Dabei ist 0 ÿ f ÿ **1 der Anteil der Bevölkerung in der ersten Gruppe. Die beiden Modelle mit Verzögerung der Infektion ergeben sich aus**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{ÿ}{N} S(t ÿ ÿ)I(t ÿ ÿ) + ÿ\ f\ R + ÿ1(1 ÿ f)R\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{ÿ}{N} S(t ÿ ÿ)I(t ÿ ÿ) ÿ ÿI\\ \frac{dR}{dt} &= ÿI ÿ ÿ\ f\ R ÿ ÿ1(1 ÿ f)R,\end{aligned} \tag{20}$$

Machine Translated by Google

Und

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}}{N}S(t)I(t\ \ddot{y}\ \ddot{y}) + \ddot{y}\ f\ R + \ddot{y}1(1\ \ddot{y}\ f)R\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}S(t)I(t\ \ddot{y}\ \ddot{y})\ \ddot{y}\ \ddot{y}I\\ \frac{dR}{dt} &= \ddot{y}I\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ f\ R\ \ddot{y}\ \ddot{y}1(1\ \ddot{y}\ f)R.\end{aligned} \tag{21}$$

Für beide Verzögerungsmodelle ist die Differentialgleichung zu Beginn des Infektionsprozesses für das infektiöse Kompartiment die gleiche wie für das SIS-Modell (1). Daher kann dasselbe Verfahren verwendet werden, um R0 = *ÿ/ÿ zu bestimmen.* **Außerdem sind für beide Modelle die Gleichgewichtspunkte die gleichen wie für das ODE-Modell (19).**

Das Modell mit einer exponierten Bevölkerung ist

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}}{N}SI + \ddot{y}\ f\ R + \ddot{y}1(1\ \ddot{y}\ f)R\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}SI\ \ddot{y}\ \ddot{y}E\\ \frac{dI}{dt} &= \ddot{y}E\ \ddot{y}\ \ddot{y}I\ dt\ dR\\ \frac{\ddot{y}I}{dt} &= \ddot{y}\ \ddot{y}\ f\ R\ \ddot{y}\ \ddot{y}1(1\ \ddot{y}\ f)R.\end{aligned} \tag{22}$$

Es hat den gleichen DFE wie (19). Die Stabilität des DFE zu Beginn der Infektion ist immer noch durch R0 = *ÿ/ÿ* **gegeben .**

Im nächsten Modell erhält ein Teil f **der Infektiösen eine vollständige und dauerhafte Immunität. und der Rest erhält teilweise und dauerhafte Immunität. Die ODEs des Modells sind**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}}{N}SI\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N}SI + \frac{\ddot{y}p}{N}Sp\ I\ \ddot{y}\ \ddot{y}I\\ \frac{dR}{dt} &= \ddot{y}\ f\ I\\ \frac{dSp}{dt} &= -\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}p}{N}Sp\ I + \ddot{y}(1\ \ddot{y}\ f)I.\end{aligned} \tag{23}$$

Das nächste Modell geht davon aus, dass ein Teil f **vollständige und zeitlich begrenzte Immunität erhält und der Rest teilweise und zeitlich begrenzte Immunität. Das Gleichungssystem lautet**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}}{N}SI + \ddot{y}R + \ddot{y}1Sp\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{}{N}SI\ddot{y}p\,\ddot{y} + \frac{}{N}Sp\ I\ \ddot{y}\ \ddot{y}I\\ \frac{dR}{dt} &= \ddot{y}\ f\ I\ \ddot{y}\ \ddot{y}R\\ \frac{dSp}{dt} &= -\ddot{y}\,\frac{\ddot{y}p}{N}Sp\ I + \ddot{y}(1\ \ddot{y}\ f)I\ \ddot{y}\ \ddot{y}1Sp.\end{aligned} \tag{24}$$

Im nächsten Modell erlangen alle Infektiösen für eine begrenzte Zeit vollständige Immunität, verlieren diese dann mit unterschiedlichen Raten *ÿ* **und ÿ1 und erlangen teilweise und dauerhafte Immunität mit unterschiedlichen Infektionsraten ÿ1 und ÿ2.**

Machine Translated by Google

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N} SI \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} SI + \frac{\ddot{y}1}{N} S1\, Ich + \frac{\ddot{y}2}{N} S2\, Ich - \ddot{y} Ich \\
\frac{dR}{dt} &= \ddot{y} I - \ddot{y} f R - \ddot{y}1(1 - f)R \\
\frac{dS1}{dt} &= -\frac{\ddot{y}1}{N} S1\, I + \ddot{y} f RN \\
\frac{dS2}{dt} &= -\frac{\ddot{y}2}{N} S2\, I + \ddot{y}1(1 - f)R.
\end{aligned} \tag{25}$$

2.4. Modelle mit Impfung und Immunitätsverlust

Impfungen sind ein sehr wirksames Mittel, um Immunität gegen die saisonale Grippe zu erreichen. Normalerweise lässt die Wirkung der Impfung mit der Zeit nach. Wir gehen davon aus, dass die Immunität dauerhaft ist, wenn sie bis zur nächsten Grippesaison mit einer neuen Variante des Virus anhält. Die geimpfte Bevölkerung wird mit V bezeichnet. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Impfrate einzuführen. Die erste Möglichkeit besteht darin, sie proportional zur Anzahl der Empfänglichen S zu nehmen **[39–41]. In den Referenzen [42–44]** wird **auch das Nachlassen der Impfwirkung berücksichtigt. In Referenz [45] gibt es ein einfaches Impfmodell, das auf dem SIR-Modell basiert. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, anzunehmen, dass nur ein Prozentsatz** pr **der Empfänglichen bereit ist , sich impfen zu lassen [46] , was eine realistischere Annahme ist [47]. Dies führt zu einer Impfrate der Form** r(prS ÿ V). **Sie kann auch als proportional zur Gesamtbevölkerung oder einfach als konstant** betrachtet werden **[48,49]. In Refe Ref. [40,51] beinhalten auch Quarantäne. Unser erstes Modell mit Impfung geht davon aus, dass Infizierte genesen und für eine durchschnittliche Dauer von** *1/ ÿ vollständige und vorübergehende Immunität erlangen.* **Geimpfte Personen erlangen vollständige Immunität, diese nimmt jedoch mit der Zeit mit einer Rate von ÿ ab. Das Mode**

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N} SI + \ddot{y}V + \ddot{y}R - \ddot{y} rS \\
\frac{dV}{dt} &= rS - \ddot{y}V \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} SI - \ddot{y} \ddot{y}I \\
\frac{dR}{dt} &= \ddot{y}I - \ddot{y} \ddot{y}R.
\end{aligned} \tag{26}$$

In diesem Modell ist die Impfrate proportional zur Anzahl der Empfänglichen. Da die Gleichung für die infektiöse Bevölkerung dieselbe ist wie für (6), ist der Wert von R0 immer noch *ÿ/ ÿ.* **Wenn die Impfstoffe nicht abnehmen,** *ÿ* **= 0, hat das System nur einen Gleichgewichtspunkt,** S = **0,** I = **0,** R = **0,** V = **N. Wenn** *ÿ* ÿ= **0, gibt es zwei Gleichgewichtspunkte,** I = **0,** R = **0,** S = **(ÿN/(ÿ** + r), V = **rS/ÿ und** S = **ÿN/ÿ,** V = **rS/ÿ,** R = **ÿI/ÿ und** I **gegeben durch die Lösung für** I = N ÿ S ÿ V ÿ **R. Das erste Verzögerungsmodell erhält man, indem man** S(t) **und** I(t) **in den Infektionstermen durch** S(t ÿ ÿ) **und** I(t ÿ **ÿ) ersetzt. Das zweite, indem man nur den** I(t) **-Term ersetzt. Beide haben die gleichen Gleichgewichtspunkte und R0 wie (26). Das System mit einer exponierten Bevölkerung hat die gleichen DFE-Gleichgewichtspunkte, da** I = **0 impliziert** E = **0. Das mit der Matrixmethode der nächsten Generation berechnete R0** ist immer noch **R0** = *ÿ/ ÿ.*

Das zweite Modell mit Impfung geht davon aus, dass die infizierte Bevölkerung für eine festgelegte Zeit vollständige Immunität erhält und dann eine teilweise dauerhafte Immunität entwickelt. Die geimpfte Bevölkerung erhält vollständige, aber vorübergehende Immunität, die dann abnimmt und zu einer teilweisen dauerhaf

Es gibt ein neues Kompartiment, Sp, **das anfällige Personen mit teilweiser Immunität repräsentiert.**

Machine Translated by Google

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N} SI \ddot{y} rS \\
\frac{dSp}{dt} &= \frac{\ddot{y}p}{N} Sp\, I + \ddot{y}V + \ddot{y}R \\
\frac{dV}{dt} &= rS \ddot{y} \ddot{y}V \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} SI + \frac{\ddot{y}p}{N} Sp\, I \ddot{y} \ddot{y}I \\
\frac{dR}{dt} &= \ddot{y}I \ddot{y} \ddot{y}R.
\end{aligned} \tag{27}$$

Dieses Modell hat ein DFE I = **0,** S = **0,** R = **0,** V = **0,** Sp = **N. Es gibt auch ein endemisches Gleichgewicht mit** S = **0,** V = **0. Da zu Beginn der Infektion** Sp = **0 ist, gilt unter Verwendung der Differentialgleichung für I R0** = *ÿ/ÿ.* **Die beiden Verzögerungsmodelle werden durch Modifizierung von (27) auf ähnliche Weise erhalten, wie dies für die vorherigen Modelle durchgeführt wurde. Die Gleichgewichtszustände und R0 sind dieselben wie in (27). Die entsprechende Gleichung mit einer exponierten Bevölkerung hat ebenfalls dasselbe R0.**

Wenn die Impfrate auf r(prS ÿ V) **statt auf** rS geändert wird, **um das Modell mit der Tatsache in Einklang zu bringen, dass nicht jeder geimpft werden möchte, lautet das geänderte Modell**

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N} SI \ddot{y} r(prS \ddot{y} V) \\
\frac{dSp}{dt} &= \frac{\ddot{y}p}{N} Sp\, I + \ddot{y}V + \ddot{y}R \\
\frac{dV}{dt} &= r(prS \ddot{y} V) \ddot{y} \ddot{y}V \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} SI + \frac{\ddot{y}p}{N} Sp\, I \ddot{y} \ddot{y}I \\
\frac{dR}{dt} &= \ddot{y}I \ddot{y} \ddot{y}R.
\end{aligned} \tag{28}$$

Dieses Modell hat keine stationäre Lösung mit I = **0 für beliebige Werte der Parameter. Dies ist ein wichtiger Unterschied in der Dynamik zu den anderen Modellen.**

Das nächste Modell geht davon aus, dass alle Geimpften für eine gewisse Zeit vollständige Immunität erlangen, dann ein Teil der Geimpften **die vollständige Immunität behält, während der Rest eine teilweise dauerhafte Immunität erlangt. Alle Infizierten erlangen nach ihrer Genesung vorübergehend vollständige Immunität.**

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\frac{\ddot{y}}{N} SI \ddot{y} r(prS \ddot{y} V) + \ddot{y}R \\
\frac{dSp}{dt} &= \frac{\ddot{y}p}{N} Sp\, I + \ddot{y}(1 \ddot{y} fv)V \\
\frac{dV}{dt} &= r(prS \ddot{y} V) \ddot{y} \ddot{y}(1 \ddot{y} fv)V \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\ddot{y}}{N} SI + \frac{\ddot{y}p}{N} Sp\, I \ddot{y} \ddot{y}I \\
\frac{dR}{dt} &= \ddot{y}I \ddot{y} \ddot{y}R.
\end{aligned} \tag{29}$$

Wenn *ÿ* = **0, ist der DFE** I = **0,** R = **0,** Sp = **0,** V = prS, S = N/(1 + pr). **Für** *ÿ* ÿ= **0 ist der DFE** I = **0,** R = **0,** V = **0,** S = **0,** Sp = **N. Da** Sp(0) = **0, haben wir in beiden Fällen R0** = *ÿ/ÿ.* **Die beiden Verzögerungsmodelle und die Modelle der exponierten Bevölkerung werden wie die vorherigen Modelle** aus **(29)** abgeleitet. Alle drei Modelle haben die gleichen DFE und **R0 wie (29).**

Machine Translated by Google

Als letztes und umfassenderes Modell fügen wir den Einsatz antiviraler Mittel hinzu, um die Infektionszeit und Isolation, um die Zahl der aktiven Infektiösen zu reduzieren. Es gibt eine neue Abteil, die unter Quarantäne gestellte oder isolierte Bevölkerung Q. Infektiöse erholen sich mit totaler und zeitliche Immunität, Geimpfte erhalten vollständige und zeitliche Immunität und dann teilweise permanente Immunität. Ein Teil der **Infizierten erhält ein antivirales Mittel und verlässt das Kompartiment mit einer schnelleren Rate** ÿa. **Ein Teil** fq **der Infizierten wird mit einer Rate** ÿq unter Quarantäne gestellt **und verlässt der Quarantänezustand mit einer Rate ÿq1. Die durchschnittliche Zeit, die eine unter Quarantäne stehende Person verbringt in den infizierten und unter Quarantäne stehenden Bereichen ist die gleiche Zeit wie in einem nicht unter Quarantäne stehenden Individuum verbringt im infektiösen Kompartiment. Daher** ist **1/ÿ** = *1/ÿq* + 1/ÿq1. **Die Modell ist**

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \frac{ÿ}{N} SI ÿ r(prS ÿ V) + ÿR \\
\frac{dSp}{dt} &= \frac{ÿp}{N} Sp\ I + ÿ(1 ÿ fv)V \\
\frac{dV}{dt} &= r(prS ÿ V) ÿ ÿ(1 ÿ fv)V \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{ÿ}{N} SI + \frac{ÿp}{N} Sp\ ich \\
&\quad ÿ\ fqÿq\ I ÿ faÿa\ I ÿ (1 ÿ fq ÿ fa)ÿI \\
\frac{dQ}{dt} &= fqÿq\ I ÿ ÿq1Q \\
\frac{dR}{dt} &= faÿa\ I + (1 ÿ fq ÿ fa)ÿI + ÿq1Q ÿ ÿR.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Der DFE ist I = **0,** R = **0,** Q = **0,** V = **0,** S = **0,** Sp = **N. Da** Sp(0) = **0, für die infektiöse Um das Kompartiment zu vergrößern, benötigen wir R0** $\frac{ÿ}{(1ÿfqÿfa)ÿ+fqÿq+faÿa}$ **> 1. Die Delay-Versionen und die Das Modell mit der exponierten Bevölkerung hat die gleichen DFE und R0.**

3. Ergebnisse

In diesem Abschnitt präsentieren wir numerische Ergebnisse für die Modelle aus dem vorherigen Abschnitt. Die numerischen Simulationen, einschließlich der DDE, wurden mit dem Julia-**Paket DifferentialEqns.jl [52,53]. Die für die meisten Simulationen verwendeten Parameterwerte sind in Tabelle 1 angegeben. Wenn für eine bestimmte Simulation ein anderer Wert verwendet wird, wird dies vermerkt in der Bildunterschrift der entsprechenden Abbildung. Die Werte von ÿ, ÿ,** *ÿ* **und** *ÿ* **basieren auf den angegeben [54] und CDC [1] entsprechend der saisonalen Grippe. Alle anderen sind Schätzungen. Der Wert von** *ÿ* **variiert stark je nach den Bedingungen: ländlich, städtisch, vorstädtisch, Arbeitsplätze mit hoher Dichte usw. Die für die meisten Simulationen gewählten** Werte von *ÿ* **und** *ÿ* ergeben **R0** = **1,5. In Ref. [55] werden ähnliche Parameterwerte auch für Influenza angegeben.**

Tabelle 1. Diese Tabelle enthält die in den Simulationen verwendeten Parameterwerte.

Symbol *ÿ*	Parameter Beschreibung	Wert
ÿ	Infektionsrate	0,5/Tag
	Rückgewinnungsrate	1/3/Tag
ÿ	Verlust der Immunitätsrate	30.1. Tag
ÿ	Verzögerung des	1,9 Tage
ÿ	Infektionszeitpunkts 1/(Infektionszeitpunkt)	1/ÿ1/d
N	Gesamtbevölkerung	1000
ÿp	Infektionsrate bei teilweiser Immunität	ÿ/2
ÿ1	Verlustrate oder teilweise Immunität	1/60/Tag
fr	Anteil, der mit der Rate *ÿ* seine Immunität verliert	0,75
ÿ1	Infektionsrate für Fr- Fraktion	*0,9 ÿ/ d*
ÿ2	Infektionsrate für 1 ÿ fr- Fraktion	*0,8 ÿ/ d*

Machine Translated by Google

Tabelle 1. Fortsetzung

Symbol fp	**Parameter Beschreibung**	**Wert**
	Anteil, der völlige Immunität erreicht	**0,5**
R	**Impfrate**	**0,02/Tag**
ÿ	**Rate des Verlustes der Impfimmunität**	**1/60/Tag**
ÿv	**Infektionsrate von Geimpften mit partieller**	**0,8ÿ**
pr	**Anteil der zu impfenden Anfälligen**	**0,2/Tag**
fv	**Anteil der Geimpften mit dauerhafter Immunität**	**0,75**

Die Anfangsbedingungen für alle Modelle sind S = **900,** I = **100 und alle anderen Populationen gleich Null. Die Historie für die Verzögerungsmodelle ist** S = **1000, und alle anderen verzögerten Variablen gleich Null im Intervall** *[ÿÿ,* 0]. **Dies entspricht einer Epidemie, die bei** t = **0 beginnt. Alle Simulationen haben, sofern nicht anders angegeben, R0** = **1,5.**

3.1. SIS-, SIR- und SIRS-Modelle

Die Modelle SIS, SIR und SIRS werden häufig für Epidemien mit Infektionen durch direkte Kontakt. Im SIS-Modell erhalten Infektiöse keine Immunität, im SIR-Modell erhalten sie totale und dauerhafte Immunität und im SIRS-Modell erhalten sie vollständige, aber zeitlich begrenzte Immunität.

Abbildung 1 zeigt die Diagramme für das SIS-Modell, links für die anfällige Bevölkerung und rechts für die infektiöse Bevölkerung. Da R0 = **ÿ/ÿ** > **1 tendiert die Lösung zum endemischen Zustand. Der Infektionsplot für das Modell mit der exponierten Bevölkerung hat eine andere Grenze, da es zwei infektiöse Klassen gibt, I und E, und nur I dargestellt wird. Die Lösungen haben die gleiche Form, aber die für das ODE-Modell erreicht den Gleichgewichtszustand am schnellsten. Die Lösungen der beiden Verzögerungssysteme sind alle identisch, da der einzige Unterschied darin besteht, wenn ein neues Infizierte werden nicht mehr als anfällig gezählt. Das Modell mit der exponierten Bevölkerung hat eine durchschnittliche Zeit im exponierten Abteil, die der Verzögerung entspricht, aber nicht die gleiche Verzögerung für jeden Einzelnen. Um zu bestimmen, welches Modell das beste ist, sind echte Daten erforderlich, da alle Die Modelle ohne Verzögerung, mit Verzögerung und mit einer exponierten Bevölkerung haben die gleichen qualitative Dynamik.**

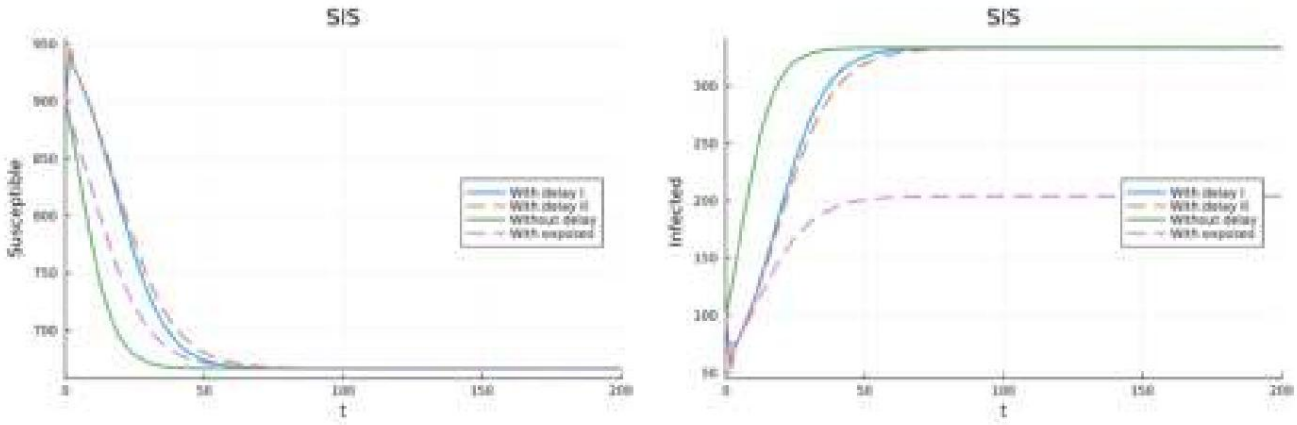


Abbildung 1. SIS-Modell. (links) Anfällige Bevölkerung. (rechts) Infektiöse Bevölkerung.

Abbildung 2 zeigt die Diagramme für das SIR-Modell, links für die anfällige Bevölkerung und für das Infektiöse rechts. Beachten Sie, dass es für I = 0 mehrere Lösungen S + R = **N gibt . Die simulierten Lösungen hängen von den Anfangswerten ab. Das Verzögerungsmodell I verwendet die Historie für** S **und I, während alle anderen Modelle nur S(0) verwenden.**

Machine Translated by Google

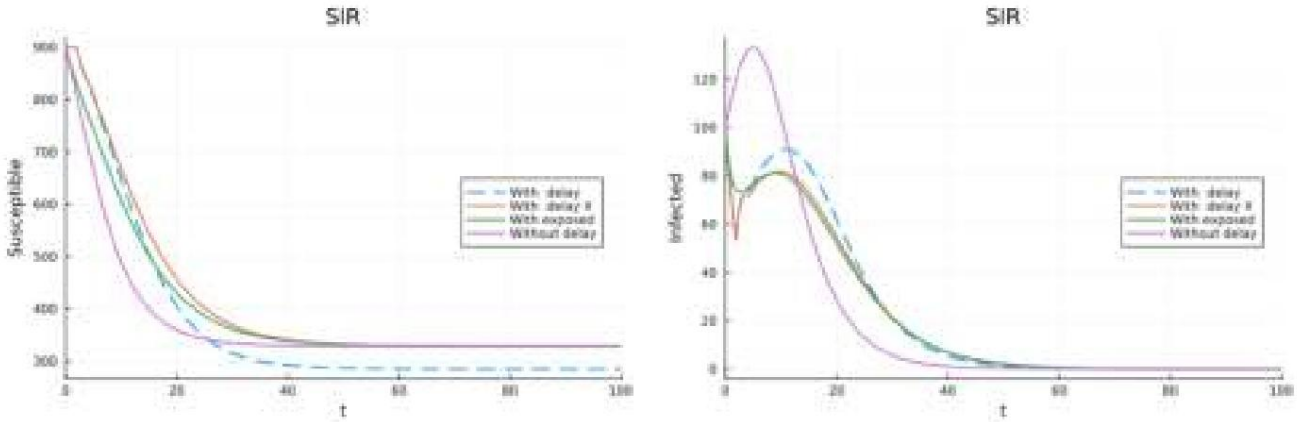


Abbildung 2. SIR-Modell. (links) Anfällige Bevölkerung. (rechts) Infektiöse Bevölkerung.

Abbildung 3 zeigt die Diagramme für die anfälligen (links) und infektiösen (rechts) Populationen für das SIR-Modell. Dieses Modell weist eine vollständige, aber zeitlich begrenzte Immunität auf. Wie erwartet tendieren die simulierten Lösungen zum endemischen Gleichgewicht. Das ODE-Modell liefert den höchsten Infektionspeak , aber alle Modelle weisen die gleiche qualitative Dynamik auf.

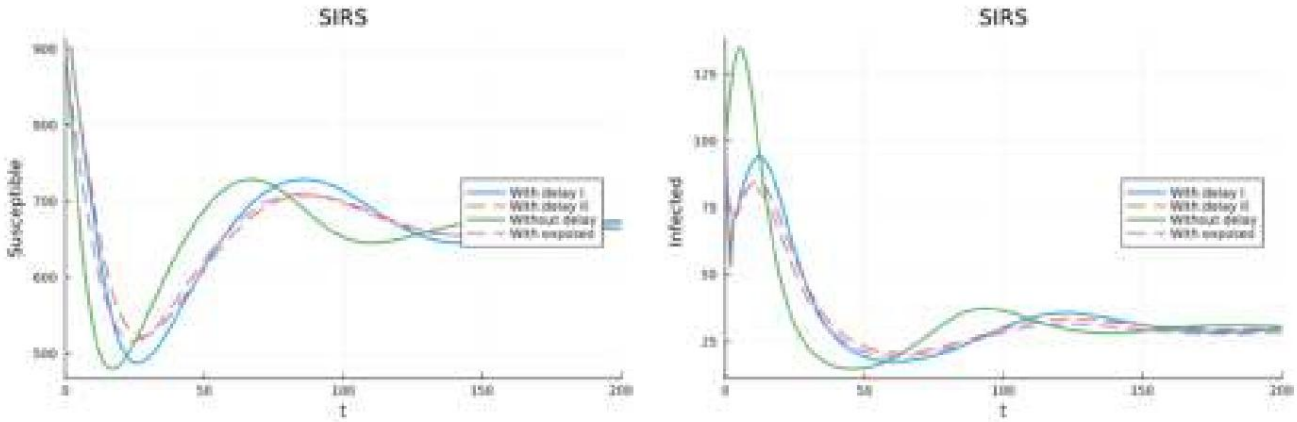


Abbildung 3. SIR-Modell. (links) Anfällige Bevölkerung. (rechts) Infektiöse Bevölkerung.

3.2. Modelle mit unterschiedlicher Immunität

In diesem Unterabschnitt betrachten wir Modelle mit unterschiedlichen Immunitäten: total, partiell, permanent und zeitlich in unterschiedlichen Kombinationen. Das erste Modell (12) geht davon aus, dass alle Infektiösen nach ihrer Genesung eine partielle und permanente Immunität erlangen. Abbildung 4 zeigt die simulierten Lösungen für die infektiöse Bevölkerung für zwei verschiedene Werte der Infektionsrate für die Bevölkerung mit partieller Immunität, ÿp. **Links für** ÿp = **0,25 tendiert die Lösung zu** I = **0, obwohl R0** > **1 ist, und rechts für** ÿp = **0,4 tendiert die Lösung zum** endemischen Zustand. Ob die Epidemie endet oder nicht, hängt jedoch von den Werten *Spÿp* + *Sÿ* ÿ *Nÿ* **ab, die auf der rechten Seite der Differentialgleichung für die infektiöse Bevölkerung erscheinen. Die beiden Verzögerungsmodelle verhalten sich zu Beginn unterschiedlich, da im Modell mit Verzögerung I sowohl** S **als auch** I **von der Historie abhängen, während beim Modell mit Verzögerung II nur** I **von der Historie abhängt.**

Das nächste Modell (16) geht davon aus, dass alle Infizierten mit teilweiser und vorübergehender Immunität genesen. Abbildung 5 zeigt die Diagramme für die infektiöse Bevölkerung, links für ÿp = **0,25, wobei** I **zu einem kleinen, aber von Null verschiedenen Wert tendiert, und rechts für** ÿp = **0,4, wobei** I zu einem viel **größeren Wert tendiert ,** was die Wirkung von **ÿ zeigt.**

Machine Translated by Google

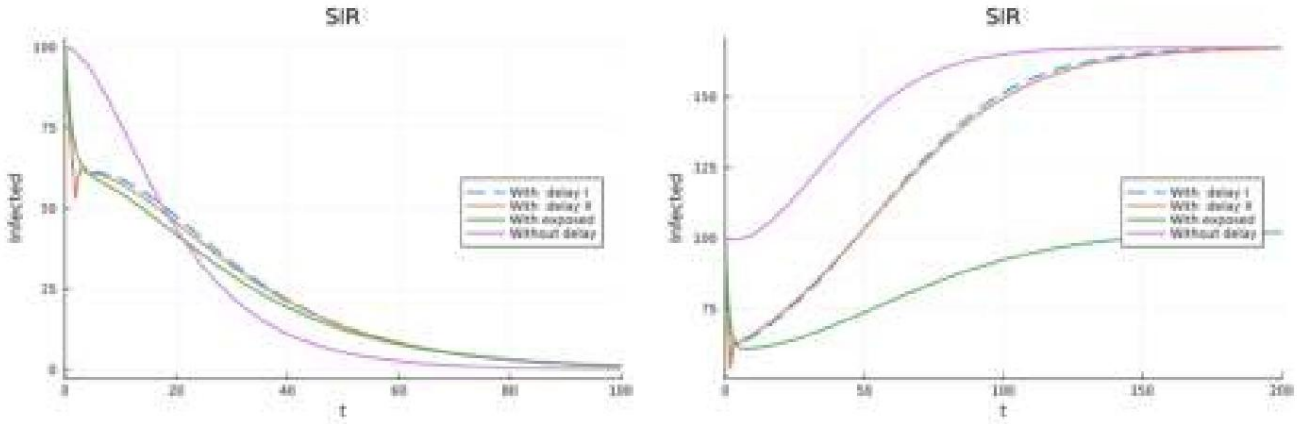


Abbildung 4. Modell mit teilweiser und dauerhafter Immunität (links) ÿp = **0,25. (rechts)** ÿp = **0,4.**

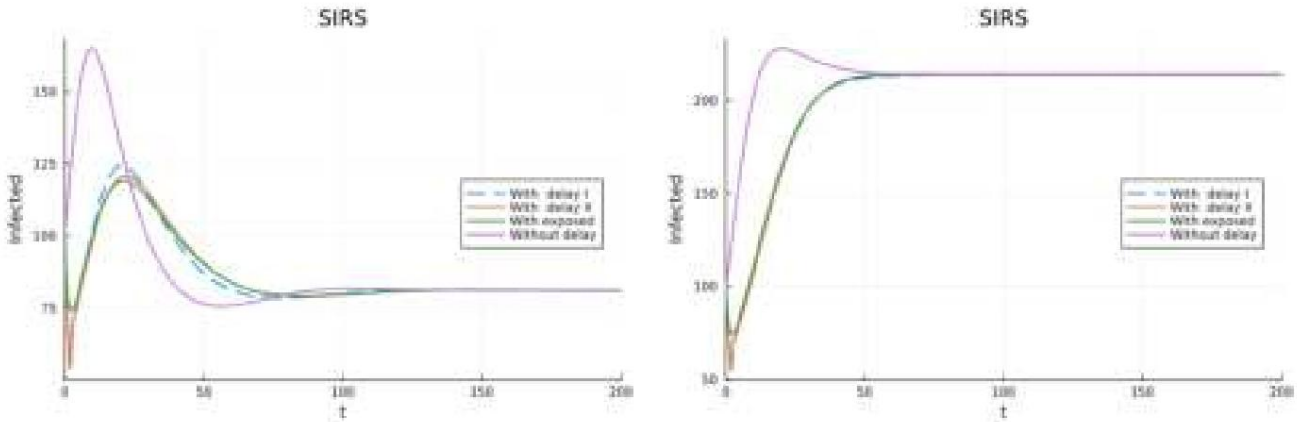


Abbildung 5. Modell mit teilweiser und zeitlicher Immunität (links) ÿp = **0,25. (rechts)** ÿp = **0,4.**

Modell (17) gilt für eine Infektion mit vollständiger, aber vorübergehender Immunität und anschließend teilweiser und dauerhafter Immunität. Abbildung 6 zeigt die simulierten Diagramme für die infektiöse Bevölkerung für zwei Werte von ÿp. **Die Abbildung auf der linken Seite gilt für** ÿp = **0,255 und** I **tendiert zum DFE; die Abbildung auf der rechten Seite gilt für** ÿp = **0,4 und** I **geht in ein endemisches Gleichgewicht. Für beide Simulationen gilt R0 > 1 , sodass die Zahl der Infizierten zunächst steigt. Ob die Epidemie endet oder nicht, hängt jedoch von den Werten von** *Spÿp + Sÿ* ÿ *Nÿ ab.* **Alle M**

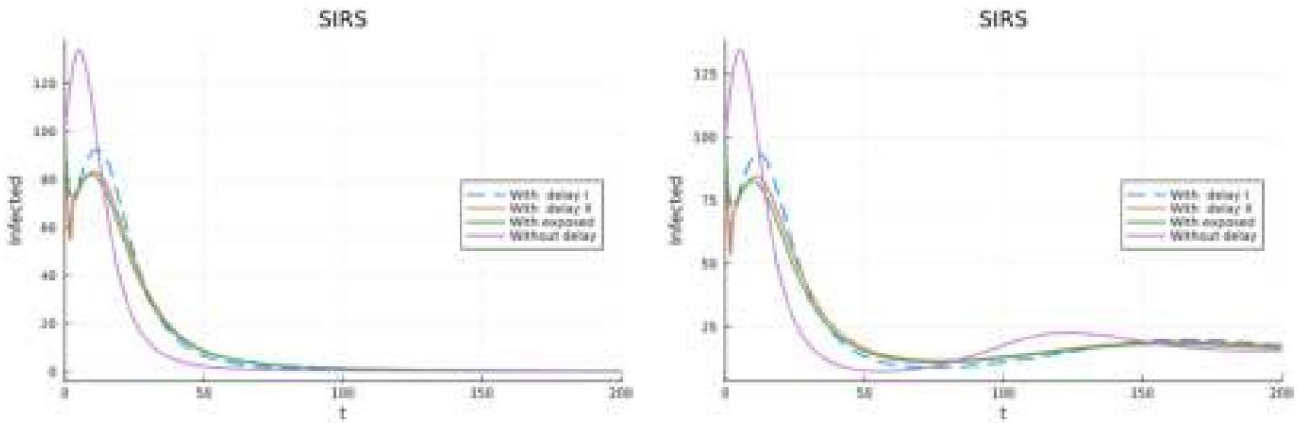


Abbildung 6. Modell mit vollständiger zeitlicher und dann teilweiser dauerhafter Immunität (links) ÿp = **0,25. (rechts)** ÿp = **0,4.**

Das nächste Modell (18) geht davon aus, dass ein Individuum nach der Infektion eine vollständige Immunität erlangt, die zeitlich begrenzt ist, und dann eine teilweise Immunität, die ebenfalls zeitlich begrenzt ist, und sch

Machine Translated by Google

Immunität. Abbildung 7 zeigt die Zeitlösung der infektiösen Bevölkerung. Links für ÿp = **ÿ/2 und rechts für** ÿp = **0,4. In beiden Fällen hält die Epidemie an. Der Grenzwert für** ÿp = **0,4 ist etwas größer. Da alle Individuen schließlich ihre Immunität vollständig verlieren, endet die Epidemie nicht.**

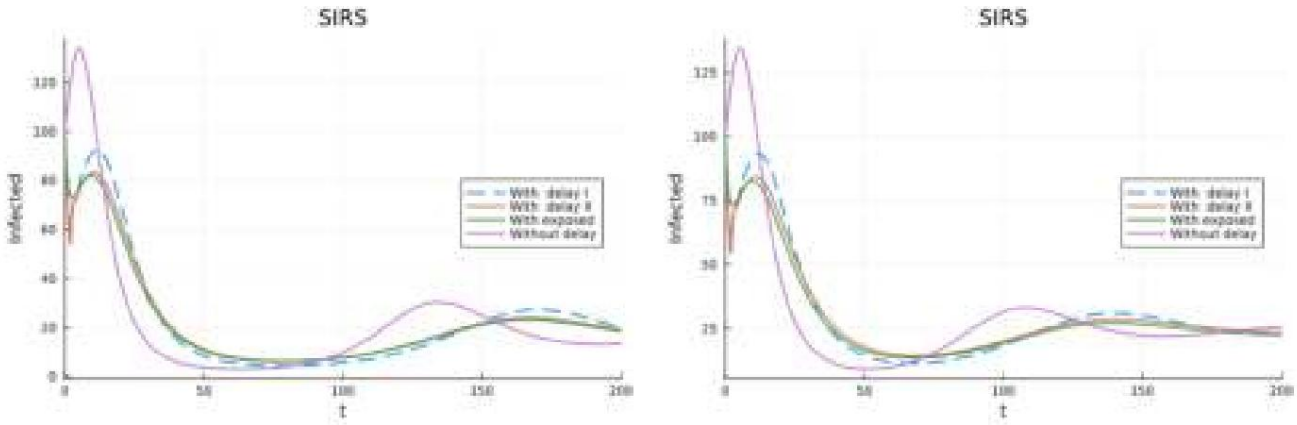


Abbildung 7. Modell mit vollständiger zeitlicher und dann teilweiser zeitlicher Immunität (links) ÿp = **0,25. (rechts)** ÿp = **0,4.**

3.3. Modelle mit Immunitätsverlust und zwei Gruppen

Unterschiedliche Personen reagieren unterschiedlich auf eine Infektion mit ihrem Immunsystem. So können beispielsweise alle Personen nach der Genesung eine vollständige Immunität gegen die Infektion entwickeln, diese aber unterschiedlich schnell verlieren. Bei der saisonalen Grippe sind einige der Gründe, dass Kinder weniger Varianten des Virus ausgesetzt waren, dass ältere Personen ein schwächeres Immunsystem haben oder dass bei manchen Personen andere Risikofaktoren wie Rauchen vorliegen. Der Einfachheit halber betrachten wir nur zwei Klassen von Individuen, aber die Modelle können auf eine beliebige Zahl erweitert werden.

Das erste Modell mit zwei unterschiedlichen Populationen (19) geht davon aus, dass die beiden Gruppen nach der Infektion eine vollständige und zeitlich begrenzte Immunität erlangen (die übliche SIR-Annahme), die Immunität jedoch mit unterschiedlichen Raten *ÿ* **und ÿ1 verlieren, mit den Bruchteilen** fr **bzw. (1** ÿ fr) . **Die Simulationen sind in Abbildung 8 dargestellt. Beide Abbildungen haben R0 > 1, die linke mit** *ÿ* = **0,5 und die rechte mit** *ÿ* = **0,666. Der Grenzwert für die rechte Abbildung ist etwa doppelt so hoch wie der für die linke, was den großen Einfluss der Infektionsrate zeigt.**

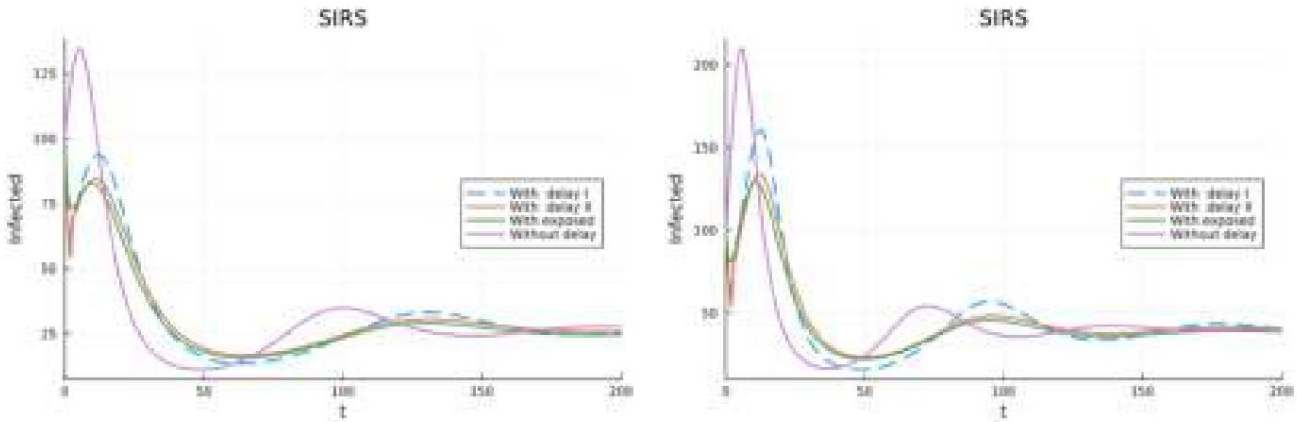


Abbildung 8. Modell mit zwei Populationen mit totaler zeitlicher Immunität, die das R-Kompartiment mit unterschiedlicher Geschwindigkeit verlassen. (links) *ÿ* = **0,5. (rechts)** *ÿ* = **0,666**

Das nächste Modell (23) geht davon aus, dass eine Klasse totale und permanente Immunität erhält, während die zweite Klasse partielle und ebenfalls permanente Immunität erhält. Der Anteil der Individuen

Machine Translated by Google

Klassen wird mit fp = 0,5 **angenommen . Für die Klasse mit teilweiser Immunität ist** ÿp = **ÿ/2. Da alle Individuen eine dauerhafte Immunität erlangen, ist zu erwarten, dass die Epidemie nicht anhält.**
Abbildung 9 zeigt zwei Simulationen für unterschiedliche ÿ-Werte . Die linke für *ÿ* = **0,5 und die rechte für** *ÿ* = **1,5. Selbst bei dem relativ großen zweiten ÿ-Wert ,** der **R0** = **4,5 entspricht , ebbt die Epidemie ab.**

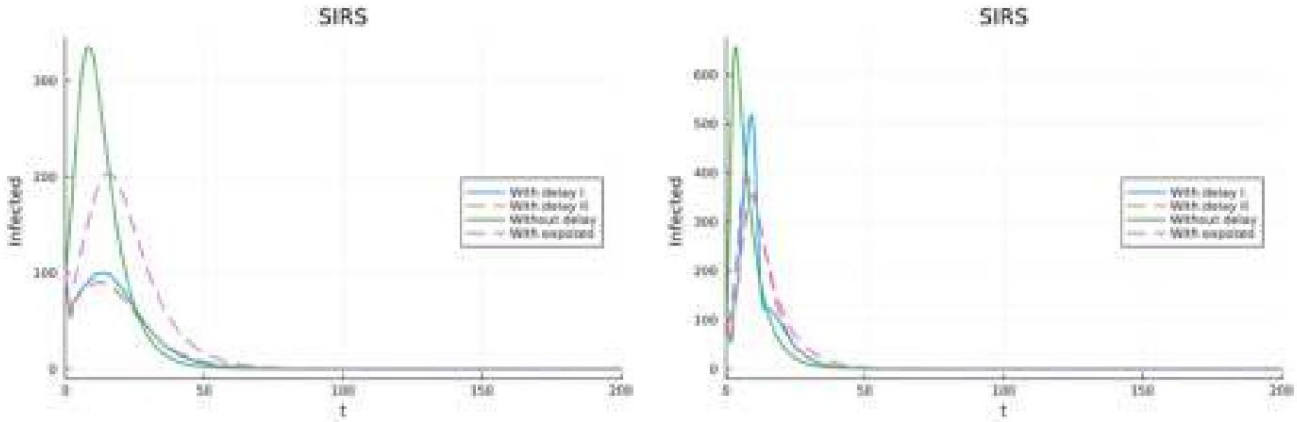


Abbildung 9. Simulationen für das Modell mit zwei Klassen, eine mit vollständiger und dauerhafter Immunität und die andere mit teilweiser und dauerhafter Immunität. (links) *ÿ* = **0,5. (rechts)** *ÿ* = **4,5**

Als nächstes berücksichtigen wir, dass die Hälfte der infektiösen Populationen vollständige und zeitlich begrenzte Immunität und die andere Hälfte teilweise und ebenfalls zeitlich begrenzte Immunität erlangt **(24).** Es wurden Simulationen für zwei **Werte von** ÿp **durchgeführt , die Infektionsrate der Population mit teilweiser Immunität,** ÿp = **ÿ/2 (linkes Diagramm von Abbildung 10) und** ÿp = **ÿ/8 (rechtes Diagramm). In beiden Fällen hält die Epidemie an und der Grenzwert von** I **ändert sich relativ wenig. Die Tatsache, dass alle Individuen nur für eine begrenzte Zeit Immunität erlangen, ist der Grund dafür, dass die Infektion anhält.**

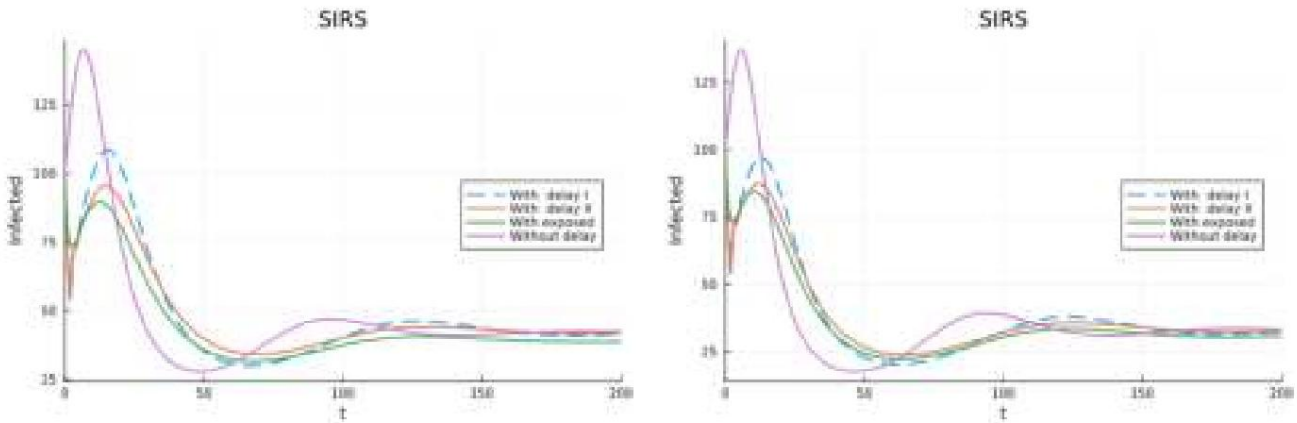


Abbildung 10. Simulationen für das Modell mit zwei Klassen, eine mit vollständiger Immunität und die andere mit teilweiser Immunität, beide zeitlich. (links) ÿp = **ÿ/2. (rechts)** ÿp = **ÿ/8.**

Modell (25) geht davon aus, dass alle Infektiösen mit vollständiger zeitlich begrenzter Immunität genesen und dann eine teilweise und dauerhafte Immunität erlangen. Ein Anteil fr = **0,75 weist eine teilweise Immunität mit einer Infektionsrate von ÿ1** = **0,9ÿ und einer Rate des Verlusts der dauerhaften Immunität** *von ÿ* = **1/30 auf und der Rest hat eine Infektionsrate von ÿ2** = **0,8ÿ und eine Immunitätsverlustrate von ÿ1** = **1/60 (linkes Diagramm von Abbildung 11). Die Lösung tendiert zum endemischen Gleichgewicht. Es wurde eine zweite Simulation durchgeführt, bei der die Infektionsraten auf ÿ1** = **0,45ÿ und ÿ2** = **0,4ÿ** geändert wurden **(rechte Hälfte von Abbildung 11). Jetzt tendiert die Lösung zum DFE. In der zweiten Simulation ist ÿ1/ÿ** < **1 und ÿ2/ÿ** < 1, sodass **die Differentialgleichung für** I **zeigt, dass** I abnimmt, **wenn die meisten Genesenen** eine teilweise dauerhafte Immunität besitzen .

Machine Translated by Google

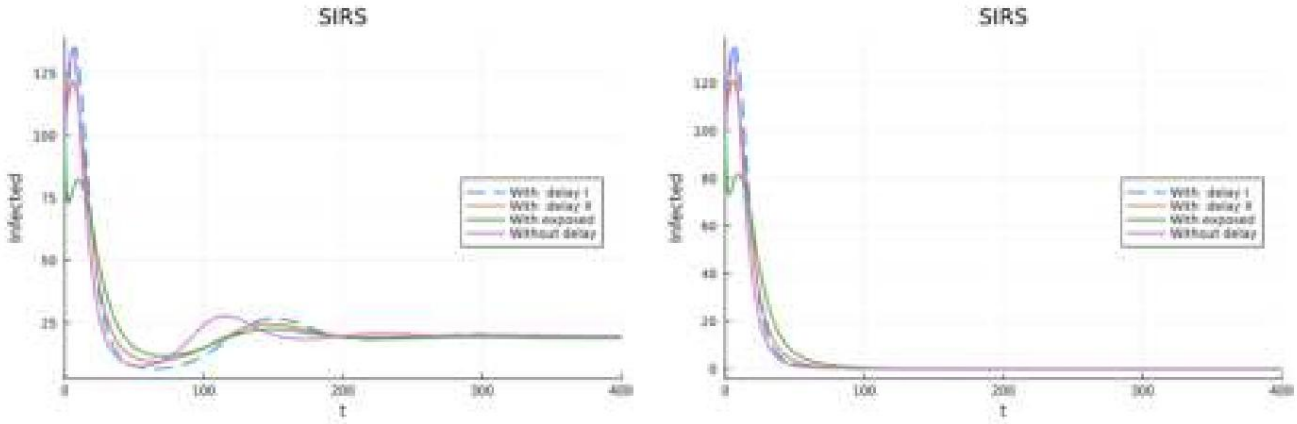


Abbildung 11. Modell mit zwei Bevölkerungsklassen. Beide erlangen vollständige Immunität (Kompartiment R) und verlieren diese dann, um bei unterschiedlichen Infektionsraten zu unterschiedlichen Zeiten eine teilweise Immunität zu erlangen. (links) ÿ1 = 0,9ÿ, ÿ2 = 0,8ÿ. (rechts) ÿ1 = 0,45ÿ, ÿ2 = 0,4ÿ.

3.4. Modelle mit Impfung und Immunitätsverlust

Impfstoffe können helfen, die saisonale Grippe einzudämmen. Da das Grippevirus von Saison zu Saison mutiert, ist es schwierig vorherzusagen, wie wirksam der Impfstoff ist. Es ist auch schwierig zu bestimmen, ob der Impfstoff vollständige oder teilweise Immunität verleiht oder ob die Wirkung nachlässt. Eine geimpfte Person muss nicht unbedingt an Grippe erkranken, weil sie geimpft wurde oder einfach keinen engen Kontakt mit einer infektiösen Person hatte. Ebenso kann es sein, dass eine Person sich nur einmal infiziert, weil sie vollständige und dauerhafte Immunität erworben hat oder keinen engen Kontakt mit infektiösen Personen hatte . In diesem Unterabschnitt präsentieren wir Simulationen, die für verschiedene Szenarien durchgeführt wurden, alle mit Impfung.

Das erste Szenario repräsentiert Personen, die mit einer Rate rS geimpft werden **und eine vollständige Immunität erreichen. Die Immunität durch eine Infektion mit der Krankheit ist vollständig und verschwindet mit einer Rate ÿ, (26). Im linken Teil von Abbildung 12 lässt die Wirkung des Impfstoffs mit einer Rate** *ÿ* **= 1/60 nach. Im rechten Teil lässt die Wirkung der Impfstoffe nicht nach,** *ÿ* **= 0. In In beiden Fällen tendiert die Lösung zum DFE. Im ersten Fall gibt es auch eine zweite endemische Gleichgewicht.**

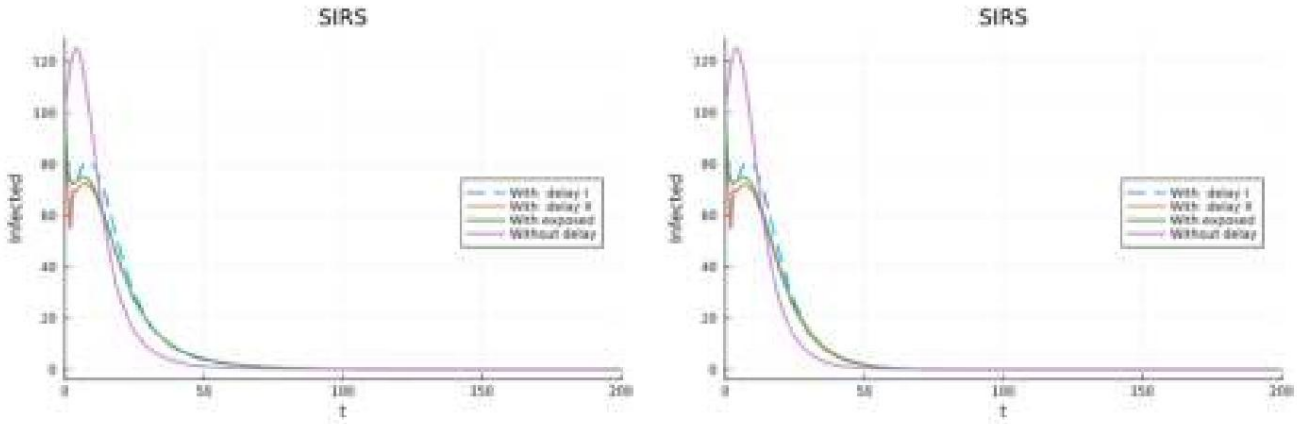


Abbildung 12. Modell mit Impfung, die vollständige Immunität verleiht. (links) Die Immunität lässt nicht nach. (rechts) Die Immunität lässt nach.

Das Modell im nächsten Szenario ähnelt dem Modell in (26), mit der Ausnahme, dass das Individuum bei nachlassender Wirkung des Impfstoffs immer noch eine teilweise dauerhafte Immunität mit ÿv = **0,8ÿ erhä Abbildung 13 links zeigt den Fall mit** *ÿ* **= 1/60 und die simulierte Lösung erreicht fast den DFE, prallt dann aber zurück. Rechts entspricht der Plot** *ÿ* **= 0 und**

Machine Translated by Google

Die Lösung tendiert zum DFE. Die Abbildung zeigt die Bedeutung, die das Abflauen des Impfstoffs hat.

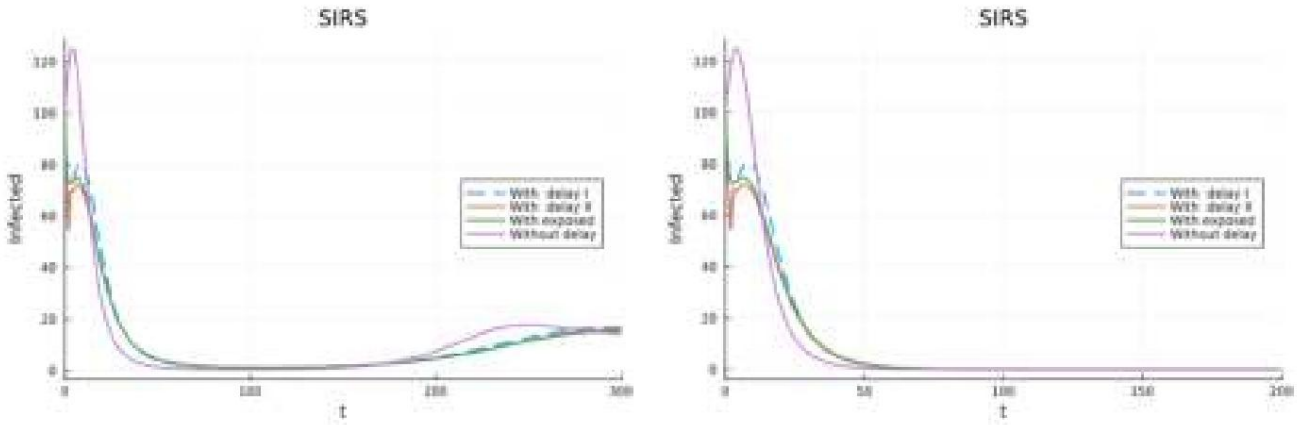


Abbildung 13. Modell mit Impfung. Infizierte Personen erhalten eine vollständige Immunität, die zu einer teilweisen und dauerhaften Immunität abnimmt. Geimpfte Personen erhalten eine vollständige Immunität, die abnimmt oder nicht. (links) Die Immunität durch Impfung nimmt ab und wird teilweise dauerhaft. (rechts) Die Immunität dur

Die nächsten Simulationen wurden mit Modell (28) durchgeführt. Die Impfrate beträgt r(prS ÿ V). **Für diese Impfrate gibt es kein DFE. Die Infizierten erholen sich und erlangen dann eine teilweise dauerhafte Immunität. Geimpfte erlangen eine vollständige Immunität, die in einer Simulation zu einer teilweise dauerhaften abnimmt und in der zweiten nicht abnimmt. Wir verwenden** pr = **0,4 und die Infektionsrate für die Bevölkerung mit teilweiser Immunität** ÿv = **0,8ÿ. Das linke Diagramm von Abbildung 14 ist für die Simulation mit abnehmender Impfung und das rechte für keine abnehmende Impfung. In beiden Diagrammen nähert sich die Infektionslösung nahezu Null und erholt sich dann wieder.**

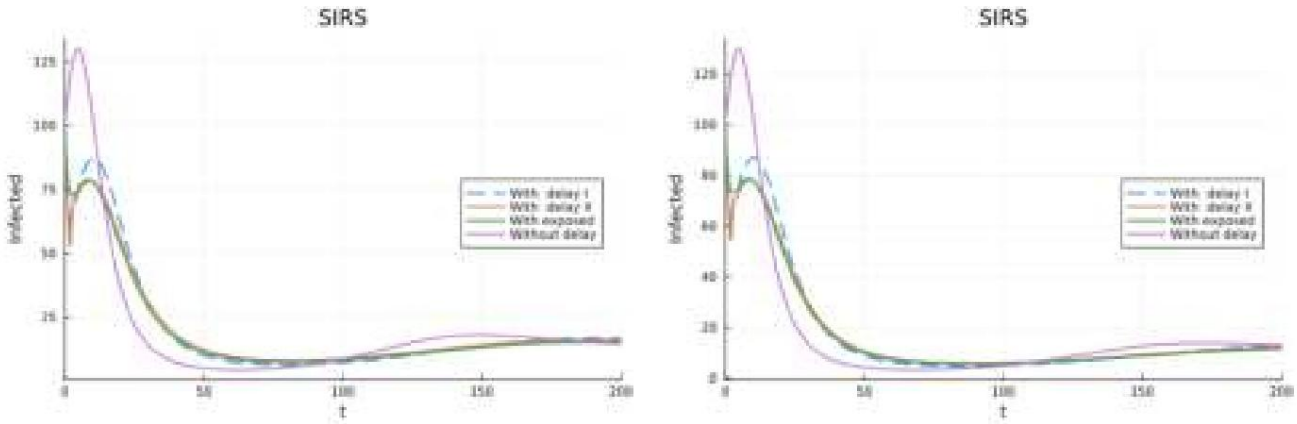


Abbildung 14. Modell, bei dem Genesene eine teilweise dauerhafte Immunität erlangen und Geimpfte eine vollständige Immunität erlangen, die in einem Fall nachlässt und im anderen nicht. (links) Die Impfimmunität lässt nach. (rechts) Die Impfimmunität lässt nicht nach.

Die nächsten Simulationen werden mit dem Modell von (29) durchgeführt. Die Impfrate ist r(prS ÿ V) **mit** pr = **0,6 und ein Anteil** fv = **0,75 der geimpften Bevölkerung erhält vollständige und dauerhafte Immunität, während ein Anteil 1** ÿ fr **vollständige Immunität erhält, die mit einer Rate** *ÿ* **bis zu teilweiser und dauerhafter Immunität mit einer Infektionsrate von** ÿv = **0,8ÿ abnimmt. Die Immunität durch eine Infektion ist vollständig und zeitlich begrenzt. Die berechnete Lösung tendiert zu einem endemischen Gleichgewicht. Eine zweite Simulation wurde ohne Nachlassen der Wirkung des Impfstoffs durchgeführt,** *ÿ* = **0. Die Lösung tendiert zum DFE. Die Diagramme sind in Abbildung 15** dargestellt. **Dieses Beispiel zeigt die Bedeutung des Nachlassens oder Nicht-Abnehmens des Impfstoffs.**

Machine Translated by Google

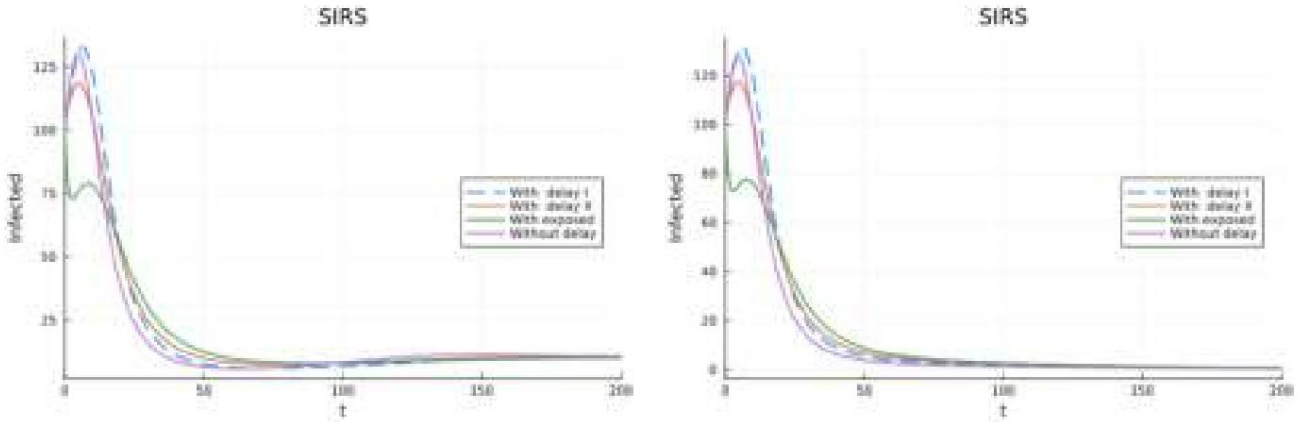


Abbildung 15. Modell mit zwei Klassen geimpfter Personen, eine mit vollständiger und dauerhafter Immunität und die andere mit vollständiger Immunität, die zu teilweiser und dauerhafter Immunität abnimmt. (links) Abnehmende Impfimmunität. (rechts) Dauerhafte Impfimmunität.

Das endgültige Modell berücksichtigt Impfung, die Verwendung antiviraler Mittel und Isolierung. Die Impfrate beträgt r(prS ÿ V), **ein Anteil** fv = **0,75 der Geimpften behält die vollständige Immunität für immer und der Rest verliert die vollständige Immunität und erhält dann eine dauerhafte teilweise Immunität mit einer Infektionsrate von** ÿv = **0,8ÿ. Die Infizierten erholen sich mit vollständiger und vorübergehender Immunität. Eine Fraktion** fa = **0,2 erhält antivirale Mittel und wird mit einer Rate von** ÿa = *2ÿ aus der Klasse der infektiösen Erreger entfernt.* **Eine Fraktion** fq = 0,4 wird aus den infektiösen Erregern entfernt und mit einer Rate von ÿq = **1 isoliert . Es wurden zwei Simulationen durchgeführt. Die erste mit** *ÿ* = 0,5, was **R0** = **1,5 entspricht , ist in der Grafik links in Abbildung 16** dargestellt **und hat eine Lösung, die zum DFE tendiert. Die zweite mit** *ÿ* = **1, was R0** = **3 ergibt, ist in der Grafik rechts dargestellt und die Lösung tendiert zu einem endemischen Gleichgewicht. Die Abbildung zeigt, dass R0** zwar **vorhersagt, ob eine Epidemie beginnt oder nicht, aber nicht anzeigt, ob sie schließlich aussterben**

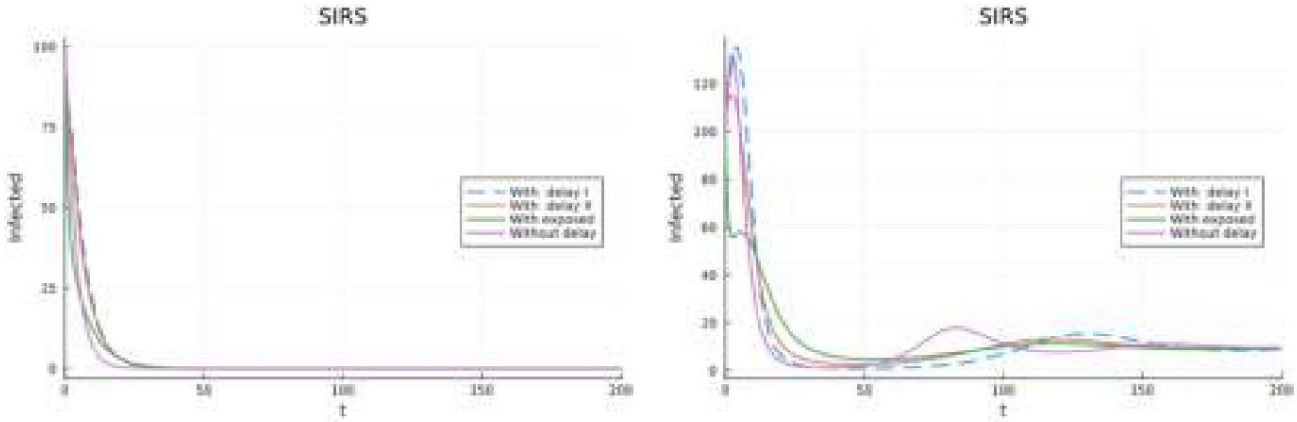


Abbildung 16. Modell mit Impfung, antiviralen Mitteln und Isolierung (30). (links) *ÿ* = **0,5. (rechts)** *ÿ* = **1.**

4. Diskussion

SIR-basierte Modelle wurden für viele Infektionskrankheiten verwendet, die durch direkten Kontakt übertragen werden. In diesem Artikel verwendeten wir Modelle ohne demografische Daten für kurzlebige Infektionen wie die saisonale Grippe. Der erste Grund ist, dass die Infektion nur von kurzer Dauer ist und nicht sehr tödlich ist. Daher ist die Zahl der Geburten und Todesfälle während des Infektionszeitraums gering. Der zweite Grund ist, dass wir uns so auf die Auswirkungen des Verlusts der Immunität konzentrieren können . Die Basisreproduktionszahl R0 ist ein sehr wichtiger Index, der ein Kriterium für die Bestimmung liefert, ob es zu einer Epidemie kommt oder nicht. Sie wird normalerweise berechnet, wie wir es in diesem Artikel getan haben, indem wir davon ausgehen, dass es zu Beginn der Infektion einen Infektiösen und N ÿ **1 Anfällige gibt, wobei** N **die Gesamtbevölkerung ist. Für die Mehrheit unserer Beispiele ist es**

Machine Translated by Google

ist R0 = **ÿS(0)/(ÿN) und vereinfacht zu R0** = *ÿ/ÿ.* **Wenn es auch zu Beginn der Infektionszahl geimpfter Personen V(0)** > **0 gibt, dann ist R0** = ÿ(N ÿ **V(0))/(ÿN). Und wenn beispielsweise ohne Impfung R0** = 1,5 ist, **dann** ist **durch die Impfung von mehr als 1/3 der Gesamtbevölkerung R0** < **1 und es gibt keine Epidemie. Eine ähnliche Schätzung kann durchgeführt werden, wenn es zu Beginn auch eine Anzahl von Personen** Sp > **0 mit teilweiser Immunität und Infektionsrate ÿp** < ÿ **gibt.**

Die vorgestellten Modelle beginnen mit den einfachen SIS, SIR und SIRS, die keine Immunität, vollständige und dauerhafte Immunität sowie vollständige und zeitlich begrenzte Immunität aufweisen. Sie wurden zunächst erweitert, um andere Situationen mit Kombinationen aus vollständiger und teilweiser Immunität, sowohl dauerhaft als auch zeitlich begrenzt, einzuschließen. Bei Krankheiten wie der saisonalen Grippe ist es sehr schwierig festzustellen, ob eine infizierte und genesene Person nach der Infektion vollständige oder teilweise Immunität erhalten hat. Oder ob diese Immunität verschwindet oder nicht. Die Person kann sich aufgrund vollständiger oder teilweiser Immunität nicht erneut anstecken oder einfach, weil sie keinen engen Kontakt mit einer infektiösen Person hatte. Die verschiedenen Modelle ermöglichen das Durchspielen von Szenarien mit unterschiedlichen Hypothesen und den Vergleich der Ergebnisse. Als nächstes wurden zwei Bevölkerungsgruppen mit unterschiedlichen Immunreaktionen betrachtet und verschiedene Szenarien durchgespielt. Schließlich wurde die Impfung eingeführt, wobei die verschiedenen Modelle unterschiedliche Annahmen hatten und das endgültige Modell vollständiger war und auch antivirale Mittel und Isolierung zur Reduzierung der Infektion enthielt. Für die verschiedenen Modelle mit DFE wurden Simulationen durchgeführt, bei denen die Epidemie starb und bei denen nicht. Die Auswirkung einer Verzögerung des Infektionszeitpunkts wurde ebenfalls untersucht. Die Verzögerung wurde auf zwei verschiedene Arten eingeführt, indem DDEs verwendet und ein freiliegendes Kompartiment hinzugefügt wurde. Abgesehen davon, dass die verzögerten Lösungen mehr Zeit benötigen, um die Gleichgewichtszustände zu erreichen, ist das Verhalten dem des entsprechenden ODE-Modells sehr ähnlich. Das heißt, sie erzeugen Lösungen mit denselben Gleichgewichtszuständen und derselben grundlegenden Reproduktionszahl. Durch das Hinzufügen der Verzögerung wird das Modell jedoch realistischer und es wird erwartet, dass d
Daten besser.

Die Parameter, die sich auf die Zeit zwischen Kontakt und Infektion sowie auf die Dauer der Infektion beziehen, sind bei der saisonalen Grippe gut bekannt. Die Infektionsraten können anhand der Anzahl der Infizierten geschätzt werden. Sie variieren von Stadt zu Stadt und von Bevölkerungsgruppe zu Bevölkerungsgruppe. Wie oben erwähnt, sind die Parameter, die sich auf die teilweise Immunität und die Impfeffekte beziehen, schwer zu schätzen und werden nicht veröffentlicht. Numerische Simulationen mit verschiedenen Modellen und Vergleiche mit tatsächlichen Epidemiedaten können helfen, die realistischeren Hypothesen zu bestimmen.

Da die beiden Verzögerungsversionen jedes Modells unterschiedliche charakteristische Gleichungen haben, Ihr Lösungsverhalten kann sich voneinander unterscheiden und sich vom Verhalten von die Lösungen des unverzögerten Modells. Für die in den Simulationen verwendeten Parameterwerte ist dies jedoch nicht eingetreten und die qualitativen Dynamiken waren alle ähnlich. Zu bestimmen, ob eine Person eine vollständige oder teilweise Immunität hat oder keinen engen Kontakt hatte, ist keine leichte Aufgabe. Wir haben verschiedene Modelle mit unterschiedlichen Arten von Immunität vorgeschlagen. Vergleiche mit realen Daten sind erforderlich, um festzustellen, welches realistischer ist.

Zukünftige Arbeiten werden unterschiedliche Anfangsbedingungen sowie die Einführung von Zufälligkeit und räumlicher Abhängigkeit berücksichtigen. Die Verwendung anderer Kompartimente wie etwa asymptomatische Kompartimente ist ein weiterer Ansatz.

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: In dieser Studie wurden keine neuen Daten erstellt oder analysiert. Die Datenfreigabe ist für diesen Artikel nicht anwendbar.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Machine Translated by Google

Abkürzungen

In diesem Manuskript werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

SIS	**Anfällig, infektiös, anfällig**
SIR	**Anfällig, infektiös, genesen**
SIRS	**Anfällig, infektiös, genesen, anfällig**
ODE	**Gewöhnliche Differentialgleichung**
DDE	**Verzögerungsdifferentialgleichung**
DFE	**Krankheitsfreies Gleichgewicht**
R0	**Basisreproduktionszahl**

Verweise

1. **Centers for Disease Control. Influenza (Grippe). 2024. Online verfügbar: https://www.cdc.gov/flu/about/keyfacts.htm#:~: text=Grippe ist eine ansteckende Atemwegserkrankung, jedes Jahr wird eine Grippeimpfung verschrieben (abgerufen am 24. April 2024).**
2. **Centers for Disease Control. Influenza. 2024. Online verfügbar: https://www.cdc.gov/nchs/fastats/flu.htm (aufgerufen am 24. April 2024).**
3. **Ross, R.; Hudson, HP Eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf das Studium der a priori Pathometrie – Teil III.** Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Contain. Pap. Math. Phys. Character **1917,** 93, **225–240.**
4. **Kermack, WO; McKendrick, AG Ein Beitrag zur mathematischen Theorie von Epidemien.** Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Contain. Pap. Math. Phys. Character **1927,** 115, **700–721.**
5. **Kuang, Y.** Delay Differential Equations: Mit Anwendungen in der Populationsdynamik; **Academic Press: Cambridge, MA, USA, 1993.**

Bellen, A.; Zennaro, M. Numerische Methoden für Differentialgleichungen mit Verzögerung; **Oxford University Press: Oxford, UK, 2013. 6.**

7. Ma, Z. Dynamische Modellierung und Analyse von Epidemien; **World Scientific: Singapur, 2009.**

8. Rihan, FA Delay Differential Equations and Applications to Biology; **Springer: Singapur, 2021.**

9. **Diekmann, O.; Heesterbeek, J.; Roberts, MG Die Konstruktion von Matrizen der nächsten Generation für kompartimentelle Epidemiemodelle.** JR Soc. Interface **2010, 7, 873–885. [CrossRef] [PubMed]**
10. **Van den Driessche, P. Reproduktionszahlen von Infektionskrankheitsmodellen.** Infect. Dis. Model. **2017, 2, 288–303. [CrossRef] [PubMed]**
11. **Edlund, S.; Kaufman, J.; Lessler, J.; Douglas, J.; Bromberg, M.; Kaufman, Z.; Bassal, R.; Chodick, G.; Marom, R.; Shalev, V.; et al. Vergleich dreier Basismodelle für die saisonale Grippe.** Epidemics **2011, 3, 135–142. [CrossRef]**
12. **Van den Driessche, P.; Watmough, J. Reproduktionszahlen und unterschwellige endemische Gleichgewichte für Kompartimentmodelle von Krankheitsübertragung.** Math. Biosci. **2002,** 180, **29–48. [CrossRef] [PubMed]**

13. Allen, L. Eine Einführung in die mathematische Biologie; **Pearson-Prentice Hall: Hoboken, NJ, USA, 2007.**

14. Edelstein-Keshet, L. Mathematical Models in Biology; **SIAM: Philadelphia, PA, USA, 2005.**

15. Murray, JD Mathematical Biology I. Eine Einführung; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2002.**

16. **Fages, F.; Soliman, S. On robustness calculation and optimization in BIOCHAM-4. In Proceedings der International Conference on Computational Methods in Systems Biolog, Brno, Tschechische Republik, 12.–14. September 2018; Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2018; S. 292–299.**
17. **Cooke, KL; Yorke, JA Einige Gleichungen zur Modellierung von Wachstumsprozessen und Gonorrhoe-Epidemien.** Math. Biosci. **1973,** 16, **75–101. [Querverweis]**
18. **Jackson, M.; Chen-Charpentier, BM Modellierung der Ausbreitung von Pflanzenviren mit Verzögerungen.** J. Comput. Appl. Math. **2017,** 309, **611–621. [Querverweis]**
19. **Khan, QJA; Krishnan, EV Ein Epidemiemodell mit einer Zeitverzögerung bei der Übertragung.** Appl. Math. **2003,** 48, **193–203. [CrossRef]**
20. **Al Basir, F.; Takeuchi, Y.; Ray, SA Dynamik eines verzögerten Pflanzenkrankheitsmodells mit Übertragung der Beddington-DeAngelis-Krankheit.** Math. Biosci. Eng. **2021,** 18, **583–599. [CrossRef]**
21. **Huang, G.; Ma, W.; Takeuchi, Y. Globale Analyse für ein verzögertes Virusdynamikmodell mit funktioneller Beddington-DeAngelis-Reaktion.** Appl. Math. Lett. **2011,** 24, **1199–1203. [CrossRef]**
22. **Wei, HM; Li, XZ; Martcheva, M. Ein Epidemiemodell einer durch Vektoren übertragenen Krankheit mit direkter Übertragung und Zeitverzögerung.** J. Math. Anal. Appl. **2008,** 342, **895–908. [CrossRef]**
23. **Chan, M.; Johansson, MA Die Inkubationszeiten von Dengueviren.** PLoS ONE **2012, 7, e50972. [CrossRef] [PubMed]**
24. **Jeger, M.; Madden, L.; Van Den Bosch, F. Pflanzenvirusepidemiologie: Anwendungen und Perspektiven für mathematische Modellierung und Analyse zur Verbesserung des Verständnisses und der Krankheitsbekämpfung.** Plant Dis. **2018,** 102, **837–854. [CrossRef]**
25. **Liu, L. Ein verzögertes SIR-Modell mit allgemeiner nichtlinearer Inzidenzrate.** Adv. Differ. Equ. **2015,** 2015, **329. [CrossRef]**
26. **Hethcote, HW Die Mathematik der Infektionskrankheiten.** SIAM Rev. **2000,** 42, **599–653. [CrossRef]**
27. **Wang, N.; Fu, Y.; Zhang, H.; Shi, H. Eine Bewertung mathematischer Modelle für den Ausbruch von COVID-19.** Precis. Clin. Med. **2020, 3, 85–93. [CrossRef] [PubMed]**
28. **Bjørnstad, ON; Shea, K.; Krzywinski, M.; Altman, N. Das SEIRS-Modell für die Dynamik von Infektionskrankheiten.** Nat. Methods **2020,** 17, **557–559. [CrossRef]**

Machine Translated by Google

29. Krammer, F. Die menschliche Antikörperantwort auf eine Infektion mit dem Influenza-A-Virus und eine Impfung. Nat. Rev. Immunol. **2019,** 19, **383–397.** [Querverweis]

30. Patel, MM; York, IA; Monto, AS; Thompson, MG; Fry, AM Immunvermittelte Abschwächung der Grippeerkrankung nach Infektion: Chancen und Herausforderungen. Lancet Microbe **2021, 2, e715–e725.** [CrossRef]

31. Han, AX; de Jong, SP; Russell, CA Koevolution von Immunität und saisonalen Grippeviren. Nat. Rev. Microbiol. **2023,** 21, **805–817.** [CrossRef] [PubMed]

32. Rodriguez-Maroto, G.; Atienza-Diez, I.; Ares, S.; Manrubia, S. Impfstrategien in strukturierten Populationen unter partieller Immunität und Reinfektion. J. Phys. A Math. Theor. **2023,** 56, **204003.** [CrossRef]

33. Katriel, G. Epidemien mit partieller Immunität gegen Neuinfektion. Math. Biosci. **2010,** 228, **153–159.** [CrossRef] [PubMed]

34. Saha, P.; Mondal, B.; Ghosh, U. Dynamisches Verhalten eines Epidemiemodells mit partieller Immunität mit nichtlinearer Inzidenz und gesättigter Behandlung in deterministischen und stochastischen Umgebungen. Chaos Solitons Fractals **2023,** 174, **113775.** [CrossRef]

35. Thieme, HR; Yang, J. Ein endemisches Modell mit variabler Wiederinfektionsrate und Anwendungen auf Influenza. Math. Biosci. **2002,** 180, **207–235.** [CrossRef] [PubMed]

36. Carlsson, RM; Childs, LM; Feng, Z.; Glasser, JW; Heffernan, JM; Li, J.; Röst, G. Modellierung der Abnahme und Verstärkung der Immunität durch Infektion oder Impfung. J. Theor. Biol. **2020,** 497, **110265.** [CrossRef] [PubMed]

37. Bhattacharya, S.; Adler, FR Ein Modell der Zeit seit der Genesung mit unterschiedlichen Immunitätsverlustraten. Bull. Math. Biol. **2012,** 74, **2810–2819.** [CrossRef]

38. Viguerie, A.; Carletti, M.; Silvestri, G.; Veneziani, A. Mathematische Modellierung periodischer Ausbrüche mit nachlassender Immunität: A Mögliche Langzeitbeschreibung von COVID-19. Mathematics **2023,** 11, **4918.** [CrossRef]

39. Alexander, ME; Bowman, C.; Moghadas, SM; Summers, R.; Gumel, AB; Sahai, BM Ein Impfmodell zur Übertragung Dynamik der Grippe. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **2004, 3, 503–524.** [CrossRef]

40. Sun, C.; Yang, W. Globale Ergebnisse für ein SIRS-Modell mit Impfung und Isolierung. Nichtlineare Anal. Real World Appl. **2010,** 11, **4223–4237.** [CrossRef]

41. Sahu, GP; Dhar, J. Analyse eines SVEIS-Epidemiemodells mit teilweiser vorübergehender Immunität und Sättigungsinzidenzrate. Appl. Math.-Modell. **2012,** 36, **908–923.** [CrossRef]

42. Moghadas, S.; Gumel, A. Eine mathematische Studie eines Modells für Kinderkrankheiten mit nicht dauerhafter Immunität. J. Comput. Appl. Math. **2003,** 157, **347–363.** [CrossRef]

43. Saad-Roy, CM; Morris, SE; Metcalf, CJE; Mina, MJ; Baker, RE; Farrar, J.; Holmes, EC; Pybus, OG; Graham, AL; Levin , SA; et al. Epidemiologische und evolutionäre Überlegungen zu Dosierungsschemata für SARS-CoV-2-Impfstoffe. Science **2021,** 372, **363–370.** [CrossRef]

44. Goldberg, Y.; Mandel, M.; Bar-On, YM; Bodenheimer, O.; Freedman, L.; Haas, EJ; Milo, R.; Alroy-Preis, S.; Ash, N.; Huppert, A. Abnehmende Immunität nach der BNT162b2-Impfung in Israel. N. Engl. J. Med. **2021,** 385, **e85.** [CrossRef] [PubMed]

45. Turkyilmazoglu, M. Ein erweitertes Epidemiemodell mit Impfung: Schwach-immune SIRVI. Phys. A Stat. Mech. Its Appl. **2022,** 598, **127429.** [CrossRef] [PubMed]

46. Ho, SH; He, D.; Eftimie, R. Mathematische Modelle der Übertragungsdynamik und Impfstrategien in Hongkong während der Wintergrippesaison 2017–2018. J. Theor. Biol. **2019,** 476, **74–94.** [CrossRef] [PubMed]

47. Reluga, TC; Medlock, J. Resistenzmechanismen spielen in SIR-Modellen eine Rolle. Math. Biosci. Eng. **2007, 4, 553–563.** [PubMed]

48. Scherer, A.; McLean, A. Mathematische Modelle der Impfung. Br. Med. Bull. **2002,** 62, **187–199.** [CrossRef] [PubMed]

49. Safan, M.; Kretzschmar, M.; Hadeler, KP Impfungsbasierte Kontrolle von Infektionen in SIRS-Modellen mit Reinfektion: Spezial Bezug auf Keuchhusten. J. Math. Biol. **2013,** 67, **1083–1110.** [CrossRef]

50. Krithika, B.; Tamilalagan, P. Enthüllung der Ausbreitung von Epidemien mit partieller Immunität und Reinfektion: Erkenntnisse aus einer zeitverzögertes mathematisches Modell. Eur. Phys. J. Spec. Top. **2023,** 232, **2657–2673.** [CrossRef]

51. Arif, F.; Majeed, Z.; Rahman, JU; Iqbal, N.; Kafle, J. Mathematische Modellierung und numerische Simulation für den Ausbruch von COVID-19 mit Immunitätsverlust und Quarantäneklasse. Comput. Math. Methods Med. **2022,** 2022, **3816492.** [CrossRef] [PubMed]

52. Rackauckas, C.; Nie, Q. DifferentialEquations.jl—Ein leistungsfähiges und funktionsreiches Ökosystem zum Lösen von Differentialgleichungen in Julia. J. Open Res. Softw. **2017, 5. Online verfügbar: https://app.dimensions.aion2019/05/05 (abgerufen am 24. Apri** [Querverweis]

53. Widmann, D.; Rackauckas, C. DelayDiffEq: Generieren von Differentialgleichungslösern mit Verzögerung durch rekursive Einbettung von gewöhnlichen Differentialgleichungslösern. arXiv **2022, arXiv:2208.12879.**

54. Colizza, V.; Barrat, A.; Barthelemy, M.; Valleron, AJ; Vespignani, A. Modellierung der weltweiten Ausbreitung der Pandemie-Influenza: Basisfall und Eindämmungsmaßnahmen. PLoS Med. **2007, 4, e13.** [CrossRef]

55. Kanyiri, CW; Mark, K.; Luboobi, L. Mathematische Analyse der Influenza-A-Dynamik bei der Entstehung von Arzneimittelresistenzen. Comput. Math. Methods Med. **2018,** 2018, **2434560.** [CrossRef]

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Ein effizienter Algorithmus für grundlegende elementare Matrixfunktionen mit spezifizierter Genauigkeit und Anwendung

Qin-Huizeng [1] und Youmin Lu [2,*]

[1] Fakultät für Mathematik und Statistik, Technische Universität Shandong, Zibo 255049, China;
[2] qinhz@sdut.edu.cn Institut für Mathematik und Digitalwissenschaften, Bloomsburg University, Bloomsburg, PA 17815, USA * Korrespondenz: ylu@bloomu.edu

Zusammenfassung: Wenn die Matrixfunktion f(At) die Eigenschaften f(At) = g f $\frac{T}{k}$ Ein , dann die besitzt, kann **die Rekurrenzformel f iÿ1** = g(f i), **i = N, N ÿ 1, · · · , 1, f(tA) = f0, aufgestellt werden. Dabei gilt** fN = f(AN) = ÿ ajA $\overset{M}{j=0}$ $\overset{J}{N}$, AN = $\frac{}{\text{is subset}}$ **A. Dies liefert einen Algorithmus zur Berechnung der Matrixfunktion f(At). Durch die Angabe der Rechengenauigkeit p wird eine Methode vorgestellt, um m und N auf eine Weise zu bestimmen, die die Zeit des obigen Algorithmus minimiert und somit einen schnellen Algorithmus für f(At) bereitstellt. Es ist wichtig zu beachten, dass m nur von der Rechengenauigkeit p** abhängt **und unabhängig von der Matrix A und t ist. Daher** hat **f(AN) ein festes Rechenformat, das leicht berechnet werden kann. Andererseits hängt N nicht nur von A, sondern auch von** t ab. Dies bietet eine Möglichkeit, **t** so **auszuwählen, dass N gleich 0 ist , eine wichtige Eigenschaft. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der in diesem Artikel vorgeschlagene Algorithmus es Benutzern ermöglicht, ein gewünschtes Genauigkeitsniveau festzulegen und es dann zu verwenden, um die geeigneten Werte für m und N auszuwählen, um die Rechenzeit zu minimieren. Dieser Ansatz stellt sicher, dass sowohl Genauigkeit als auch Effizienz gleichzeitig berücksichtigt werden. Wir entwickeln einen allgemeinen Algorithmus, wenden ihn dann auf die exponentiellen, trigonometrischen und logarithmischen Matrixfunktionen an und vergleichen die Leistung mit der der internen Systemfunktionen von Mathematica und der Pade-Approximation. Im letzten Abschnitt wird anhand eines Beispiels die schnelle Berechnu**

Schlüsselwörter: Matrixfunktion; effiziente Algorithmen; hohe Genauigkeit; lineare Differentialgleichungen

MSC: 68W25;

check for updates

Zitat: Qin, H.; Lu, Y. Eine effiziente Algorithmus für grundlegende elementare Matrixfunktionen mit festgelegter Genauigkeit und Anwendung. AppliedMath 2024, 4, 690–708. https://doi.org/ 10.3390/ appliedmath4020037

Erhalten: 26. Januar 2024
Überarbeitet: 4. März 2024
Akzeptiert: 19. April 2024
Veröffentlicht: 5. Juni 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz. Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Matrixexponentenfunktionen spielen in verschiedenen Bereichen eine entscheidende Rolle, darunter gewöhnliche Differentialgleichungen und die Kontrolltheorie. Insbesondere sind sie von entscheidender Bedeutung für die Analyse allgemeiner struktureller dynamischer Systeme, die durch das Anfangswertproblem dargestel

$$Mxÿÿ + Gxÿ + Kx = r(t), x(0) = x0, x^{ÿ}(0) = x1, \quad (1)$$

wobei M, G und K n x n quadratische Matrizen sind und r(t) die angewandte externe Kraft bezeichnet. Die Einführung dualer Variablen eines Hamiltonsystems,

$$p = Mxÿ + Gx/2, \quad (2)$$

ergibt folgendes System:

$$Uÿ = HU + F(t), U(0) = U0, \quad (3)$$

Wo

Machine Translated by Google

$$U = \begin{matrix} & \\ qp & \end{matrix}, H = \begin{matrix} \ddot{y}M\ddot{y}1G/2 & M\ddot{y}1 \\ GM\ddot{y}1G/4\ \ddot{y}\ K & \ddot{y}M\ddot{y}1G/2 \end{matrix},$$
$$F(t) = \begin{matrix} 0 \\ r(t)\ ,\ q = x,\ U0 = \end{matrix} \begin{matrix} x0 \\ Mx1 + Gx0/2 \end{matrix}. \quad (4)$$

Die Lösung von (3) ergibt sich wie folgt:

$$U(t) = e\ HtU0 + \int_0^T e\ H(t\ddot{y}s)F(s)ds. \quad (5)$$

Bei oszillierenden Problemen sind zur formalen Lösung häufig sowohl der Sinus als auch der Cosinus einer Matrix erforderlich. Berühmte Beispiele sind die Schrödinger-Gleichung in der Quantenmechanik :

$$ich\frac{d\ddot{y}}{dt} = H(t)\ddot{y},\ \ddot{y}(t0) = \ddot{y}0, \quad (6)$$

wobei H(t) ein hermitescher Operator und *ÿ* **eine komplexe Wellenfunktion ist. Wenn H(t) = A eine reelle und konstante Matrix ist, lautet die Lösung von (6) wie folgt:**

$$\ddot{y}(t) = e\ \ddot{y}iAt\ddot{y}0 = (\cos(tA)\ \ddot{y}\ i\ \sin(tA))\ddot{y}0. \quad (7)$$

Es gibt noch weitere Beispiele, bei denen die Berechnung von Sinus und Cosinus einer Matrix von Interesse sein kann. Wellengleichungen, die das generische System zweiter Ordnung liefert, werden wie folgt geschrieben:

$$x'' + Kx = F(t),\ x(0) = x0,\ x\ \dot{y}(0) = x1, \quad (8)$$

wobei die Lösung durch die Variation des Konstantenverfahrens gegeben ist:

$$x(t) = \cos(tA)x0 + \sin1(tA)x1 + \int_{t\ 0} \sin1((t\ \ddot{y}\ s)A)F(s)ds, \quad (9)$$

wobei A = ÿ K, $\overline{\sin}1(tA) = \int_{t\ 0} \cos(sA)ds$**. Wenn A invertierbar ist, dann kann (9) geschrieben werden als ist wie folgt:**

$$x(t) = \cos(tA)x0 + \sin(tA)A\ \ddot{y}1x1 + A\int_{\ddot{y}1\ t\ 0} \sin((t\ \ddot{y}\ s)A)F(s)ds. \quad (10)$$

Für (5) ist die möglichst genaue Bereitstellung von *U(kÿ)(k* = **1, 2,** · · ·) ein Anliegen von Ingenieuren und Mathematikern, wobei *ÿ* **als Schrittweite bezeichnet wird. Die spezifische Methode für dieses Problem lautet wie folgt:**

$$Uk = TUk\ddot{y}1 + \int_0^{\ddot{y}} e\ HsF(k\ddot{y}\ \ddot{y}\ s)ds,\ k = 1, 2, \cdots,\ T = e^{H\ddot{y}}. \quad (11)$$

In ähnlicher Weise ist für (10) die **möglichst genaue Bereitstellung des Algorithmus** *x(kÿ)(k* = **1, 2,** · · ·) **mit der Einführung von Vektoren y und dem folgenden Algorithmus:**

$$\begin{aligned} &xk = \cos(\ddot{y}A)xk\ddot{y}1 + \sin(\ddot{y}A)A\ \ddot{y}1yk\ddot{y}1 + A\ yk = \int_{\ddot{y}1\ \ddot{y}\ 0} \sin(sA)F(k\ddot{y}\ \ddot{y}\ s)ds, \\ &\ddot{y}A\ \sin(\ddot{y}A)xk\ddot{y}1 + \cos(\ddot{y}A)yk\ddot{y}1 + x0 = x(0), \int_0^{\ddot{y}} \cos(sA)F(k\ddot{y}\ \ddot{y}\ s)ds, \\ &y0 = X\ \dot{y}(0) = x1. \end{aligned} \quad (12)$$

Um die Genauigkeit von U(kÿ) und *x(kÿ) zu verbessern,* **ist es wichtig, einen Algorithmus zu mit hoher Genauigkeit zur Berechnung** von $T^{H\ddot{y}}$ **entwickeln,** cos(ÿA) **und** sin(ÿA) **und die Integralberechnung** $= e^A$ **unter Beibehaltung dieser Matrixfunktionen. Dieses Dokument verbessert die in der vorhandenen Literatur** entwickelten Algorithmen zur Berechnung von e^A **und cos A ,** siehe **[1–15], und diskutiert auch die Berechnung anderer trigonometrischer, hyperbolischer, logarithmischer und verwandter inverser dreieckiger und inverser hyperbolischer Matrizen.**

Machine Translated by Google

2. Der allgemeine Satz des schnellen Algorithmus für Matrixfunktionen

In [16] haben wir uns mit der Herausforderung beschäftigt, elementare Funktionen schnell und mit vorgegebener Genauigkeit zu berechnen. Die Implementierungsmethode beinhaltet eine analytische Funktion f(x) , die die Eigenschaft vorgibt ,

$$f(x) = gf\left(\frac{x}{k}\right), \text{ wobei } k > 1. \tag{13}$$

Wenn C0 eine möglichst nahe Annäherung an f ist, $\frac{x}{}$ mit N als positive Ganzzahl, für kN ,

$$C0 = ÿ_{j=0}^{M} \frac{f^{(j)}(0)(ÿx)^j}{j!}, ÿx = \frac{x}{kN}, m = 1, 2, \cdots \tag{14}$$

oder C0 ist die Padé-Näherung von f, gebildet: $\frac{x}{kN}$, dann werden folgende Berechnungen durchgeführt:

$$\text{for}(i = 0, i < N, i + +)\ Ci+1 = g(Ci). \tag{15}$$

Wenn wir (14) und (15) ergänzen, erhalten wir f(x) ÿ CN . Diese Methode ist auch auf die Berechnung von Matrixfunktionen anwendbar, wobei wir die Variable x durch die n mal n Quadratmatrix A ersetzen. Nun haben wir das Folgende:

$$C0 = ÿ_{j=0}^{M} \frac{f^{(j)}(0)(ÿA)^j}{j!}, ÿA = \frac{1}{}A, m = 1, 2, \cdots kN \tag{16}$$

oder C0 ist die Padé-Näherung von f(ÿA). Unser Ziel ist es, m und N so zu bestimmen, dass die Rechenzeit unter der Bedingung, dass der Abbruchfehler und die Rechengenauigkeit 10 ÿp betragen , minimiert wird . Für die Berechnung der Matrixfunktion kann die Koeffizientenberechnung von (14) ignoriert werden, da wir uns hauptsächlich auf die Multiplikationsberechnung der Matrix in (16) und (15) konzentrieren. Wenn die Anzahl der Multiplikationen zum Abschließen von g(A) K ist , dann ist die Gesamtzahl der Abschlüsse von (16) und (15) ungefähr

$$q(m, N) = (m + KN)Mn, \tag{17}$$

wobei Mn die Anzahl der Male ist, die eine Multiplikation der n mal n Matrix durchgeführt werden muss. Basierend auf der obigen Diskussion stellen wir einen schnellen Algorithmus für die Matrixfunktion wie

Theorem 1. Es sei mp eine Ganzzahl nahe dem Minimum von h(m), wobei

$$10\,h(m) = m + + \frac{pK\ln}{(m+1)\ln k} \quad \frac{K}{} \ln f^{(m+1)}(0) \tag{18}$$

Und

$$N = \frac{p\ln 10}{(m+1)\ln k} \frac{1 + (m+1)\ln k}{} \ln f^{(m+1)}(0) + \frac{\ln ÿAÿ}{\ln k} + 1. \tag{19}$$

= g(Ci) und (A) ÿ $\frac{1}{CN.}$ (1) C0 (i (0)(ÿA) jln(2) für (i = 0, i < N, i + +) Ci+1 , wobei ÿA = A oder C0 ist eine Padé-Approximation von f(ÿA).

Der obige Algorithmus ist ein schneller Algorithmus für die allgemeine Matrixfunktion.

Beweis. Mit einem Abbruchfehler von 10ÿp , damit (16) erfüllt ist,

$$\frac{f^{(m+1)}(0)(ÿA)^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{f^{(m+1)}}{(0)\,(m+1)!k^{(m+1)N}} A^{m+1} ÿ \frac{f^{(m+1)}}{(0)\,(m+1)!k^{(m+1)N}} ÿAÿ^{m+1} < 10ÿp , \tag{20}$$

wobei ÿAÿ eine Norm von A ist. Also,

$$N > + \frac{(m+1)\ln k}{(m+1)\ln k} \quad \frac{1}{} \ln f^{(m+1)}(0) + \frac{\ln ÿAÿ}{\ln k .} \tag{21}$$

Wg Packung

Machine Translated by Google

Aus (17) folgt:

$$10\,q(m, N) > g(m) = m + + \frac{pK \ln}{(m+1)\ln k} \quad \frac{K}{(m+1)!} \ln f^{(m+1)}(0) + \frac{K \ln \ddot{y}A\ddot{y}}{\ln k} \quad Mn. \tag{22}$$

Beachten Sie, dass der Minimalpunkt von g(m) nichts mit **ln k zu tun hat . Indem q(m,** N) **so** klein wie möglich gemacht wird, ist der nach (1) und (2) erhaltene Algorithmus ein schneller Algorithmus, womit **der Beweis des Theorems abgeschlossen ist .**

Anmerkung 1. In der konkreten Berechnung kann **ÿAÿ** durch den ungefähren Eigenwert mit dem **maximalen Modul in diesem Dokument ersetzt werden .**

$$\frac{f^{(m+1)}}{(0)\,(m+1)!k^{(m+1)N}} \ddot{y}A\ddot{y}^{m+1} < 10\ddot{y}p\,. \tag{23}$$

3. Schneller Algorithmus für e A, cos A, sin A, sinh A und cosh A

Angenommen, $\ddot{y} = \ddot{y}A\ddot{y}$ **ist eine Norm für A. Wenn wir A = ÿA0 setzen, dann ist ÿA0ÿ ÿ 1. Aus (19) folgt:**

$$Np = \frac{p \ln 10 + 1}{(m+1)\ln k \,(m+1)\ln k} \ln f^{(m+1)}(0) + \frac{\ln \ddot{y}}{K \ln k} + 1. \tag{24}$$

Um die Länge des Artikels zu reduzieren, sind die Algorithmen für mehrere Matrixfunktionen in einer Tabelle zusammengestellt.

Satz 2. Für e A, cos A, sin A, cosh A und sinh A haben wir unter Verwendung von Satz 1 den folgenden schnellen Algorithmus entwickelt.

Bemerkung 2. Es ist erwähnenswert, dass mp in Tabelle 1 nur von der Berechnungsgenauigkeit p und der Matrixfunktion abhängt und unabhängig von der Matrix A ist.

Tabelle 1. Der schnelle Algorithmus für e A, cos A, sin A, cosh A und sinh A.

		mp, Np	Algorithmus	
Ein e	mp =	$\frac{9\text{ Uhr morgens }10}{8 \ln 2}$, Np = [Ne] + 1	(1) B = $\frac{A}{j!}$ (2) für (i = 0, i < N, i + +) C = C^{mp} B^{j} (3) e = C A	2
Sünde A sinh A	mp =	$\frac{p \ln}{10\ 2 \ln 3}$, Np = [Nsin] + 1	$\frac{mp\ (1)\ B = C = \ddot{y}\ 3\ 2Np}{3^{N}}$ $\sum_{j=1}^{(2i+1)!}$ (2) für (i = 0, i < N, i + +) C = 3C ÿ 4C sin A (3) sinh A = C $\frac{A}{3^{N}}$ $\frac{(\ddot{y}B)\ j\ 2\ A}{\text{Ende +}}$	3
(ICH) cos A cosh A	mp =	$\frac{p \ln 10}{2 \ln 3}$ + 1, Np = [Nsin]	(1) B = C = I + $\frac{A^{2}}{\ddot{y}\ 3\ 2Np}$ $\sum_{j=1}^{mp}$ $\frac{(\ddot{y}B)\ j}{(2j)!}$ (2) für (i = 0, i < N, i + +) C = 4C cos A cosh A (3) = C	3 ÿ 3 °C
(Ich , ich) cos A cosh A	mp =	$\frac{p \ln 10}{2 \ln 3}$ + 1, Np = [Nsin]	(1) B = $\frac{A^{2}}{C}$ = I + $\frac{\ddot{y}\ 3\ 2Np}{(2j)!}$ $\sum_{j=1}^{mp}$ $(\ddot{y}B)\ j$ (2) für (i = 0, i < N, i + +) C = C (3) cos A cosh A = C	2 ÿ Ich

$$Ne = + \frac{p \ln 10 \ln \ddot{y}}{(mp+1)\ln 2 \ln 2}, \quad \frac{\ln(mp+1)!}{(mp+1)\ln 2}, \quad Ncos = \frac{p \ln 10 \ln \ddot{y} + (2mp+1)\ln 2}{\ln 2 \ln(2mp+2)!}, \quad \frac{\ln(2mp+1)!}{(2mp+1)\ln 2},$$

$$Nsin = + \frac{(2mp+2)\ln 3}{\ln 3}$$

10er-Packung

3 .

Machine Translated by Google

Nun verwenden wir den allgemeinen schnellen Algorithmus, um die Richtigkeit der Algorithmen in Tabelle 1 zu demonstrieren. Die Algorithmen in Tabelle 1 sind unkompliziert; sie beinhalten das Platzieren der spezifischen Funktionen f und g in den allgemeinen Algorithmus, und der schwierige Teil besteht in der Herleitung der Formeln von mp und Np. Wir berechnen hier die Formeln für mp und Np für die Funktion e für 12 ÿ p ÿ 36. Tatsächlich unterstützt die grafische Darstellung der Funktion von h(m) unsere Ergebnisse für alle Werte von p. Die Herleitung von mp und Np für die anderen Funktionen ist sehr ähnlich.

(1) Für die Funktion e A gilt g(u) = u ^{2}, k = 2, K = 1 und

$$10\,h(m) = m + \frac{p \ln}{(m+1)\ln 2} \quad \frac{1}{(m+1)\ln 2} \ln(m+1)!. \tag{25}$$

Mit Sterlings Näherungsformel erhalten wir Folgendes:

$$\ln((m+1)!) = \ln(2ÿ) + \ln(m+1) + (m+1)\ln(m+1) - m + 1 + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Implementieren wir es nun in (25), erhalten wir Folgendes:

$$h(m) ÿ m + \frac{p \ln 10}{(m+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(2ÿ)}{2(m+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(m+1) + 2(m+1)\ln 2}{2} \quad \frac{1}{}$$

Lassen

$$q(x) = x + \frac{p \ln 10}{(x+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(2ÿ)}{2(x+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(x+1) + \ln 2.\ 2(x+1)\ln 2}{}$$

die Ableitung nach x. Wenn man

nimmt, erhält man

$$Q^{ÿ}(x) = 1 ÿ + \frac{p \ln 10}{(x+1)^2 \ln 2} \quad \frac{\ln(2ÿ) + 2(x+1)\ln 2}{} \quad \frac{\ln(x+1)\ 2(x+1)}{2\ln 2} \quad \frac{1}{2(x+1)\ln 2.}$$

Um Extremwerte zu ermitteln, setzen wir es auf 0 und multiplizieren beide Seiten mit $(m+1)^2$:

$$(x+1)^2 \quad \frac{1}{\text{Zeile } 2 + 2\ln 2} \quad \frac{\ln(x+1)\ (x+1)}{} \quad \frac{2p \ln 10 ÿ \ln(2ÿ) + 1\ 2\ln}{2} = 0.$$

Mit einfacher Algebra erhalten wir Folgendes:

$$(x+1)^2 > \frac{(m+1)ÿ \ln(m+1) + (m+1)ÿ \ln(2ÿ)\ 2p \ln 10 + 1 + 2\ln 2\ 2\ln 2}{} > \frac{2p \ln 10 + 1}{2\ln 2}.$$

Mit p = 12 erhalten wir eine Untergrenze für x:

$$x > \sqrt{\frac{2p \ln 10 + 1 ÿ}{}} 1 = 6{,}37.\ 2\ln 2$$

Somit haben wir eine Untergrenze für m: m ÿ 6. Wir können die quadratische Gleichung auch lösen und erhalten

$$m + 1 = + \frac{1}{\ln 2} \sqrt{\frac{1}{4\ln 2^2} + \frac{8p \ln 10 ÿ 4\ln(2ÿ) + 4\ 8\ln}{2}}.$$

Wenn wir nun den kleinsten erhaltenen Wert für m und p = 36 verwenden, können wir unsere erste Obergrenze ermitteln :

$$m < ÿ1 + + \frac{1}{\ln 2} \sqrt{\frac{1}{4\ln 2^2} \quad \frac{1}{\text{Zeile } 7\ 2\ln 2} + \frac{276 \ln 10 ÿ 4\ln(2ÿ) + 4\ 8\ln}{2}} \quad ÿ\ 11{,}31.$$

Machine Translated by Google

Wir können erneut die Werte von m und p = 12 verwenden, um die Untergrenze von m wie folgt zu aktualisieren:

$$m > \ddot{y}1 + \frac{1}{\text{Zeile 2}} + \sqrt{\frac{1}{4\ln 2\ 2} + \ddot{y}\ \frac{\text{Zeile 12}}{2\ \text{Zeile 2}} + \frac{96\ln 10\ \ddot{y}\ 4\ln(2\ddot{y}) + 4}{8\ \text{Zeile 2}}}\ \ddot{y}\ 6{,}61.$$

Unsere neue Untergrenze für m ist nun 7. Mit diesem kleinen Wertebereich für m können wir durch die Betrachtung von Wenn wir die Formel für die Werte von m betrachten, können wir sehen, dass der Wert von m sehr nahe beieinander liegt. können wir mit Sicherheit behaupten, dass $m = \frac{\text{9 Uhr morgens 10}}{8\ln 2}$. Unsere folgende numerische Berechnung unterstützt diesen Anspruch voll und ganz.

Fall (a): p = 12. Mit der Formel aus der quadratischen Formel und der oberen Schranke m = 11, erhalten wir eine neue Untergrenze: m ÿ 6,63. Mit der Formel, die wir aus der quadratische Formel und Untergrenze m = 7 können wir auch die Obergrenze erhalten: m ÿ 6,63.

Mit unserem Anspruch $9p\ln 10$ erhalten wir m = 6,70. Dies entspricht eindeutig den unteren und oberen ganz gut gebunden.

Fall (b): p = 18. Unter Verwendung der Formel, die durch die quadratische Formel und die obere Schranke m = 11, erhalten wir eine neue Untergrenze: m ÿ 8,05. Mit der Formel, die wir aus der quadratische Formel und Untergrenze m = 7 können wir auch die Obergrenze erhalten: m ÿ 8,07.

Mit unserem Anspruch $9p\ln 10$ erhalten wir m = 8,20. Diese Werte passen sehr gut zur nächste Ganzzahl.

Fall (c): p = 24. Unter Verwendung der Formel, die durch die quadratische Formel und die obere Schranke m = 11, so erhalten wir eine neue Untergrenze: m ÿ 9,27. Mit der Formel, die wir aus der quadratische Formel und Untergrenze m = 7 können wir auch die Obergrenze erhalten: m ÿ 9,28.

Mit unserem Anspruch $9p\ln 10$ erhalten wir m = 9,47.

Fall (d): p = 36. Mit der Formel aus der quadratischen Formel und der oberen Schranke m = 11, so erhalten wir eine neue Untergrenze: m ÿ 11,29. Mit der erhaltenen Formel mit der quadratischen Formel und der Untergrenze m = 7 können wir auch die Obergrenze erhalten: m ÿ 11,37. Mit unserer Behauptung $9p\ln 10$ erhalten wir m = 11,60.

Mit $mp = \frac{\text{9 Uhr morgens 10}}{8\ln 2}$, Wir können erhalten

$$Np = \frac{\text{10er-Packung}}{(mp+1)\ln 2}\ \frac{\ln(mp+1)!}{(mp+1)\ln 2\ln 2} + \frac{\ln \ddot{y}}{} + 1. \qquad (26)$$

(2) Für $\frac{\text{Sünde A}}{\sinh A}$**, wir haben g(u) = 3u ÿ 4u** ^{3}**, k = 3, K = 2 und**

$$h(m) = m + \frac{2p\ln 10}{(2m+2)\ln 3}\ \frac{2\ln(2m+2)!}{(2m+2)\ln k\ .} \qquad (27)$$

In diesem Fall sind für p = 12, 16, 24 und 32 die entsprechenden ganzzahligen Punkte für h(m) zu erreichen sein Mindestwert sind 3, 3, 5 und 6. Auch hier kann geschätzt werden, dass

$$mp = \sqrt{\frac{3p\ln 10}{5\ln 3}},\ Np = \frac{\text{10er-Packung}}{(2mp+2)\ln 3}\ \frac{\ln(2mp+2)!}{(2mp+2)\ln 3\ln 3} + \frac{\ln \ddot{y}}{} + 1. \qquad (28)$$

(3) Für $\frac{\cos A}{\cosh A}$**, Es gibt zwei Fälle:**

Fall (I): g(u) = 4u ^{3} **ÿ 3u, k = 3, K = 2 und (29) gelten. Im Vergleich zu I sind die Werte in der zweite Teil von C = I + ÿ** $\frac{mp}{j=1}\frac{(\ddot{y}B)\ j}{(2j)!}$ **sind sehr klein, so dass wir N durch N ÿ 1 ersetzen können, und mp mit mp + 1.**

Fall (II): g(u) = u ^{2} **ÿ 1, k = 2, K = 1 und**

$$h(m) = m + \frac{\text{10er-Packung}}{(2m+1)\ln 2}\ \frac{1}{(2m+1)\ln 2}\ln(2m + 1)!. \qquad (29)$$

Machine Translated by Google

Ähnlich verhält es sich bei p = 12, 16, 24 und 32, wo die entsprechenden ganzzahligen Punkte für h(m) den Mindestwerte sind 4, 5, 6 und 7. Folglich können wir Folgendes bestimmen:

$$\mathbf{mp} = \frac{\overline{3p \ln 10}}{5 \ln 2}, \mathbf{Np} = \frac{\text{10er-Packung}}{(2mp+1)\ln 2} \frac{\ln(2mp+1)!}{(2mp+1)\ln 2 \ln 2} + \frac{\ln ÿ}{} + 1. \quad (30)$$

Die Wirksamkeit der Algorithmen wird in Tabelle 1 durch die Implementierung numerischer Berechnungen in Mathematica. Np und mp werden in Tabelle 1 durch Np,μ = μNp, mp,μ ersetzt, entsprechend definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{mp,\mu} &= \min_{ÿB\ j/jÿ<10ÿp} \mathbf{j, B} = \frac{A}{2\ Np,\mu} \text{ für e A,} \\ \mathbf{mp,\mu} &= \min_{ÿB\ j+1/2/(2j+1)!)ÿ<10ÿp} \mathbf{j, B} = \frac{A^2}{3^{2Np,\mu}} \text{ für Sünde A,} \\ \mathbf{(I)\ mp,\mu} &= \min_{ÿB\ j\ /(2j)!ÿ<10ÿp} \mathbf{j, B} = \frac{A^2}{3^{2Np,\mu}} \text{ für cos A,} \\ \mathbf{(II)\ mp,\mu} &= \min_{ÿB\ j\ /(2j)!ÿ<10ÿp} \mathbf{j, B} = \frac{A^2}{2^{2Np,\mu}} \text{ für cos A,} \end{aligned} \quad (31)$$

wobei Np,1 = Np und mp = mp,1 gilt .

Zum Vergleich nehme A die folgende Form an:

$$\mathbf{A} = \mathbf{UDUÿ1}\ , \quad (32)$$

wobei U eine zufällig generierte n mal n Matrix ist, Da = Dial(d1, d2, · · · , dn) ist eine zufällig erzeugte n mal n Diagonalmatrix mit di ÿ (a, b), i = 1, 2, · · · f(D) = , n, also f(A) = U f(D)Uÿ1 , Dial(f(d1), f(d2), · · · , f(dn)). In allen Beispielen in diesem Paper einigen wir uns auf die relativer Fehler wie folgt:

$$\mathbf{err(g)(A)} = ÿU \frac{ÿf(A)ÿU\ f(D)Uÿ1ÿÿ}{f(D)Uÿ1ÿ}. \quad (33)$$

Seien Ai(i = 1, 2, · · · , M) M Matrizen , die durch (32) erzeugt werden. Aus Abbildung 1 ist ersichtlich, dass Die Rechengenauigkeit ist im Wesentlichen die gleiche für $\mu = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1$, aber $\mu = 1$ liefert die höchste Effizienz. Die Doppelwinkelformel ist deutlich effizienter und genauer als die Dreifachwinkelformel für cos A. Von nun an werden wir den Fall ausschließen, bei dem die Dreifachwinkelformel für cos A.

Nun stellen wir die in Tabelle 1 dargestellten Algorithmen den internen Funktionen gegenüber. und häufig verwendete Algorithmen in mathematischer Software. Zur Vereinfachung lassen Sie err(g) bezeichnet den Rechenfehler der Matrixfunktion f(Ai)(i = 1, 2, · · · , M), wobei ein leeres g impliziert die Verwendung der Algorithmen in den Tabellen 1–3 dieses Artikels. Wenn g = , Sym, Pade, · · · bedeutet dies eine Berechnung gemäß der internen Funktion, Padé- , bzw. Näherung, · · · tiv. Wenn p = 16, mp = 7, 4, 3 für e A, cos A(cosh A), sin A(sinh A), bzw. bezeichnen wir die Padé-Näherung von sin x als r66(x) und die Padé-Näherung von e^x und cos x als r88(x). In Tabelle 1 ist die Padé-Näherung von e A, cos A(cosh A), sin A(sinh A) wie folgt ist wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{r88(x)} &= \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{60}+\frac{x^3}{60}+\frac{x^4}{624}+\frac{x^5}{9360}+\frac{x^6}{205920}+\frac{x^7}{7207200}+\frac{x^8}{518918400}}{1ÿ\frac{x}{2}+\frac{x^2}{60}+\frac{x^3}{60}+\frac{x^4}{624}+\frac{x^5}{9360}+\frac{x^6}{205920}+\frac{x^7}{7207200}+\frac{x^8}{518918400}} \text{ für } e^x, \\ \text{r88(x)} &= \frac{1ÿ\frac{260735x^2}{545628}+\frac{4375409x^4}{14186280}+\frac{7696415x^6}{1310867072}+\frac{80737373x^8}{235947029600}}{1±\frac{12079x^2}{545628}+\frac{34709x^4}{1418628}±\frac{109247x^6}{3}+\frac{11321x^8}{65540835360}} \text{ für } \begin{matrix}\cos x \\ \cosh x\end{matrix}, \\ \text{r66(x)} &= \frac{xÿ\frac{7x}{60}+\frac{x^5}{2}+\frac{x^5}{600}}{1±\frac{x}{20}+\frac{x^4}{600}±\frac{x^6}{14400}} \text{ für } \begin{matrix}\text{Sünde x} \\ \sinh x\end{matrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Für die Algorithmen in Tabelle 1 ist der err(g)(A) der Zufallsmatrix von Ordnung 1 bis 800 wie folgt: folgt.

Machine Translated by Google

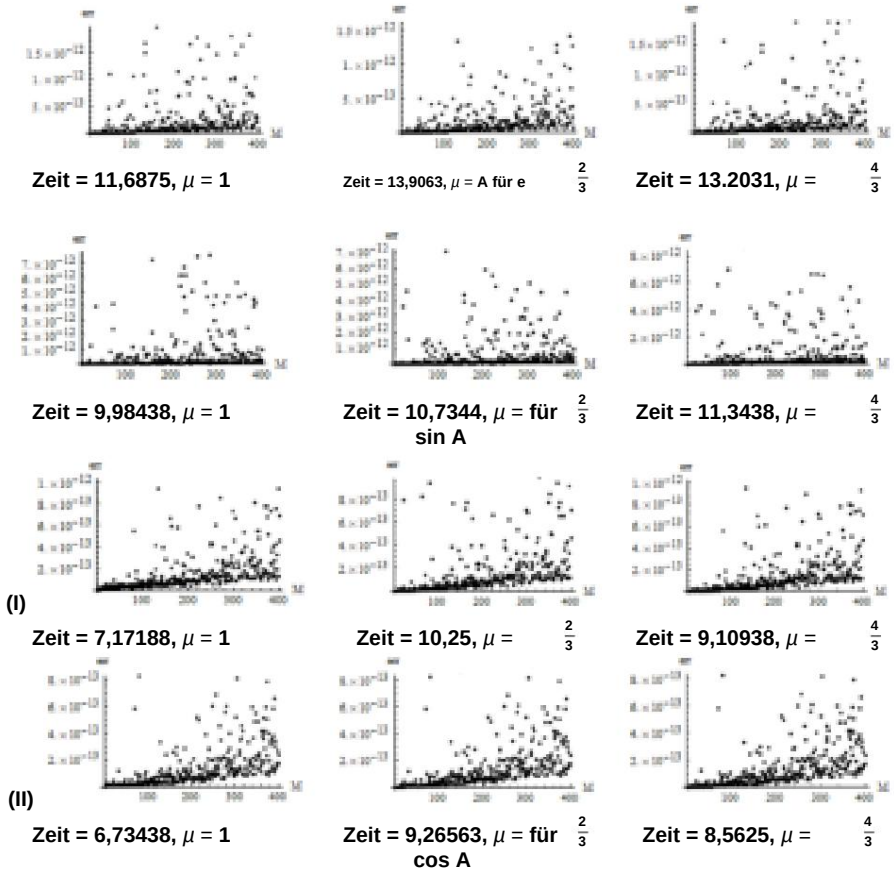


Abbildung 1. Fehlervergleich der Algorithmen in Tabelle 1 für $\mu = 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$.

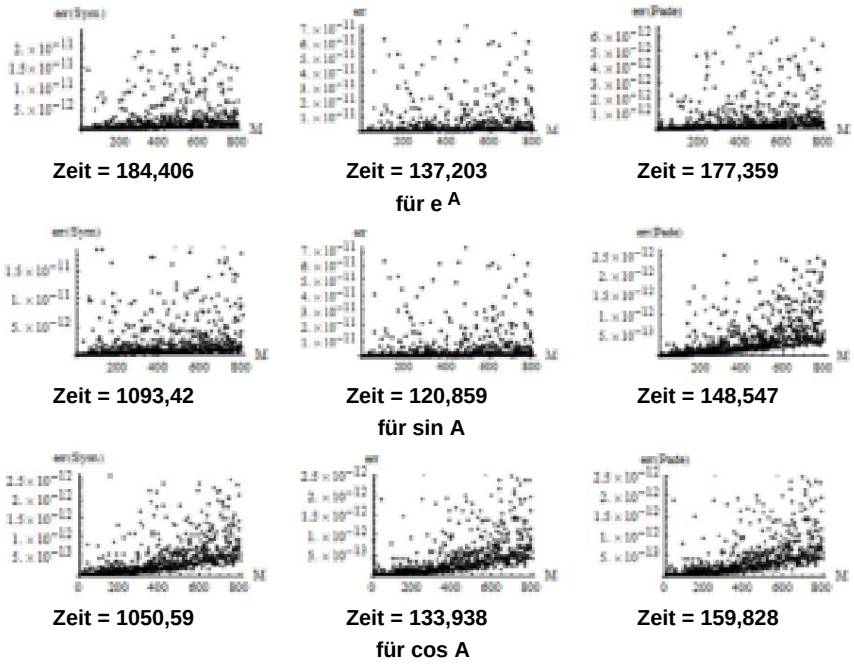
Tabelle 2. Die schnellen Algorithmen für tan A, sec A, tanh A und sechA.

	mp, N	Algorithmus
tan A tanh A	mp = $\sqrt{\frac{2p \ln 10}{\ln 3}}$, N = N1 + 1	B = $\frac{A^2}{3^{2N}}$, C = $\frac{2A}{3}$ ÿ (±1) jÿ(j + 1) 4 j+1 ÿ 1 B j für (i = 0, i < N, i + +) C = C(3I ÿ C tan ^{2})(I ÿ 3C ^{2})^{ÿ1} A tanh A ÿ C
Sek. A Sek. hA	mp = $\sqrt{\frac{2p \ln 10}{\ln 3}}$, N = N2 + 1	B = $\frac{A^2}{3}$ ich + ÿ (ÿ1) jE jB ^{J} für (i = 0, i < N, i + +) C = C ^{3}(4I ÿ 3C ^{2})^{ÿ1} Sek. A ÿ C Sek. hA
N1 = $\frac{p \ln 10+\ln(2ÿ(mp+2))}{(2mp+3)\ln 3}$ + $\frac{\ln ÿ}{\ln 3}$, N2 = $\frac{p \ln 10+\ln \text{Emp+1} \ln ÿ +}{(2mp+3)\ln 3 \ln 3}$		

Aus Abbildung 2 **geht hervor , dass für e A, cos A und sin A die mit den drei Methoden erreichte Genauigkeit im Wesentlichen gleich ist. Wenn die Matrixordnung jedoch relativ hoch ist,** übertrifft die in Tabelle 1 **dargestellte Taylor-Erweiterungsmethode die anderen. Insbesondere für cos und sin A ist die Berechnungszeit der internen Funktionen ungefähr achtmal länger als die der Algorithmen in Tabelle 1. Numerische Berechnungen zeigen, dass die Berechnungsgeschwindigkeit von cos A und sin A unter Verwendung der internen Funktionen** Re(e **iA) = cos A**

Machine Translated by Google

und Im(e **iA)** = **sin A ist schneller als die der internen Funktionen cos A und sin A, ihre Rechengenauigkeit ist jedoch relativ schlecht.**



Zeit = 184,406 **Zeit = 137,203** **Zeit = 177,359**

für e A

Zeit = 1093,42 **Zeit = 120,859** **Zeit = 148,547**

für sin A

Zeit = 1050,59 **Zeit = 133,938** **Zeit = 159,828**

für cos A

Abbildung 2. Fehler von e A, cos A und sin A für drei Algorithmen.

Tabelle 3. Die schnellen Algorithmen für cot A, coth A, csc A und cschA.

	mp, N	Algorithmus
Kinderbett A Kinderbett A	**mp** = $\frac{\sqrt{7p \ln 10}}{5 \ln 3}$, **N = N1 + 1**	**B** = $\frac{A}{3}$ $\frac{2}{(\pm 1)}$ **jÿ(j)B j** $\frac{M}{2N}$, **j=1 für (i = 0, i < N, i + +)** **(C** = 3(C(3B **ÿ C cot** ^{2})(B **ÿ 3C** ^{2})^{ÿ1} **; B = 9B)** **A coth A ÿ C**
csc A **cschA**	**mp** = $\frac{\sqrt{5p \ln 10}}{2 \ln 3}$, **N = N2 + 1**	**B** = $\frac{A}{3}$ $\frac{m+1}{2N}$, **Ich + 2** $\sum_{j=1}^{2}$ **ÿ (±1)** jÿ(j) **1 ÿ** $\frac{2}{4j}$ **B j** **für (i = 0, i < N, i + +)** **(C = 3C** ^{3} **(3C** ^{2} **ÿ 4B)** ^{ÿ1} **; B = 9B)** **csc A cschA ÿ C**
N1 = $\frac{p \ln 10+\ln(2ÿ(mp+2)) \ln ÿ + (2mp+3)\ln 3}{\ln 3}$, **N2** = $\frac{p \ln 10+\ln \text{Emp+1} \ln ÿ + (2mp+3)\ln 3 \ln 3}{}$		

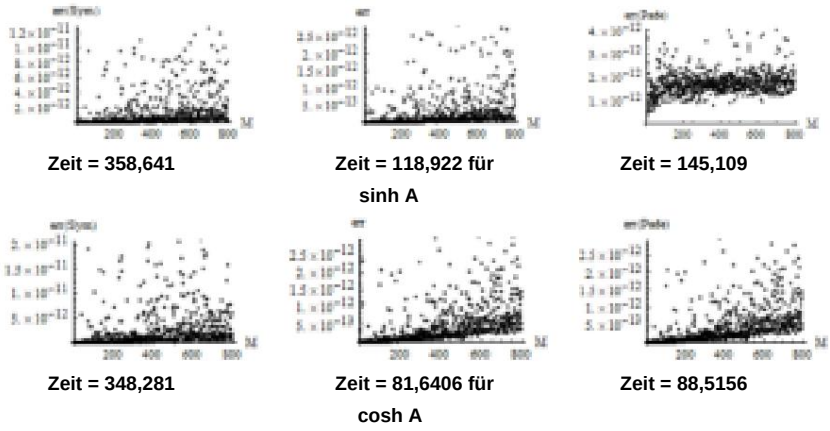
Für cosh A und sinh A können die internen Funktionen mithilfe der folgenden Gleichung berechnet werden:

$$\text{1 Stange A} = 2 \quad -(e^{A} + e\ ÿA),\ \textbf{sinh A} = \frac{-}{1\ 2}(e^{A}\ ÿ\ e\ ÿA). \qquad (35)$$

Unser Experiment liefert die folgenden Ergebnisse für err(g)(A) von Zufallsmatrizen mit Ordnungen von 1 bis 800.

Aus Abbildung 3 **ist ersichtlich, dass die Verwendung von (35) nicht nur die Rechenzeit verdoppelt, sondern auch den Rechenfehler beträchtlich macht. Darüber hinaus wird** durch Betrachtung der Abbildungen 2 **und** 3 deutlich, dass die Algorithmen in Tabelle 1 **den Padé-Approximationsalgorithmus übertreffen .**

Machine Translated by Google



Zeit = 358,641 Zeit = 118,922 für sinh A Zeit = 145,109

Zeit = 348,281 Zeit = 81,6406 für cosh A Zeit = 88,5156

Abbildung 3. Fehler von sinh A und cosh A für drei Algorithmen.

4. Schneller Algorithmus für tan A, tanh A, sec A und sechA.

Betrachten wir nun die schnelle Berechnung von tan A, tanh A, sec A und sechA. Obwohl diese Matrixfunktionen mit dem folgenden Ansatz berechnet werden können, möchten wir sie direkt berechnen, wie im vorherigen Abschnitt gezeigt.

$$\tan A = \sin A(\cos A)^{\ddot{y}1}, \quad \text{Sek. } A = (\cos A)^{\ddot{y}1},$$
$$\tanh A = \sinh A(\cosh A)^{\ddot{y}1} = e\ddot{y}e^{A}\,{}^{\ddot{y}A} + e^{A}e^{\ddot{y}A}{}^{\ddot{y}1}, \tag{36}$$
$$\text{sechA} = (\cosh A)^{\ddot{y}1} \quad A = 2e + e^{\ddot{y}A}{}^{\ddot{y}1}.$$

Während die Padé-Näherung erheblich zur Berechnung von Matrixfunktionen beiträgt, deuten die numerischen Ergebnisse im vorherigen Abschnitt darauf hin, dass basierend auf dem in diesem Dokument vorgestellten Algorithmus weder die Berechnungsgenauigkeit noch die Berechnungsgeschwindi

Aus diesem Grund wird es in diesem Abschnitt nicht übernommen.

Satz 3. Für tan A, sec A, tanh A und sechA haben wir den folgenden schnellen Algorithmus basierend auf Satz 1.

In Tabelle 2 haben wir für ÿ(j) und E die folgende rekursive Formel [1]: j ,

$$\ddot{y}(2n) = \frac{}{4\,4n+1}\sum_{\ddot{y}\,l=1}^{n\ddot{y}1} \ddot{y}(l)\ddot{y}(2n\ddot{y}l) + \frac{2\,2\ddot{y}}{4n+1}(n),\ \mathbf{n = 1, 2, \cdots},$$
$$\ddot{y}(2n\ddot{y}1) = \frac{}{4\,4n\ddot{y}1}\sum_{\ddot{y}\,l=1}^{n\ddot{y}1} \ddot{y}(l)\ddot{y}(2n\ddot{y}1\ddot{y}l),\ \mathbf{n = 2, 3, \cdots} \tag{37}$$
$$E_n = \ddot{y}_{\ddot{y}\,k=0}^{n\ddot{y}1} \frac{E_k}{(2n\ddot{y}2k)!},\ E0 = 1,\ \ddot{y}(1) = \frac{}{1\,6}.$$

Mithilfe der Algorithmen in Tabelle 2 haben unsere Experimente die folgenden Daten für err(g)(A) von Zufallsmatrizen von der Ordnung 1 bis 200 erzeugt.

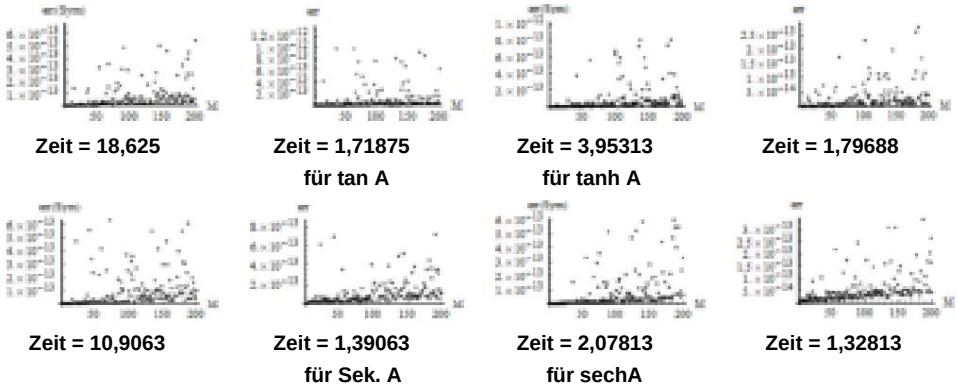
Hier gibt **Sym an, dass die Matrixfunktionen tan A, tanh A, sec A und sechA, ausgedrückt durch ÿA ÿ1 ÿA ÿ1 AA durch sin A(cos** A) , **(cos** A) **bzw. 2 e ,**

$e^{\ddot{y}1}$ **Ein** $e\ddot{y}e^{\ddot{y}A}$ werden. Wenn **Verwendung** $e^{A} + e^{A}$ **+ e ee** berechnet

Rechengeschwindigkeit des Algorithmus in Tabelle 2 die der internen Funktion, dass sich die Genauigkeit **Ordnung** **Geschwindigkeit im Vergleich zur**

die **Genauigkeit gleich bleibt. Wenn die Ordnung n der Matrix relativ groß ist, also für tanh A und sec hA, ist die Rechengeschwindigkeit doppelt so hoch wie die der internen Funktion, die Genauigkeit bleibt aber dieselbe wie bei der internen Funktion.**

Machine Translated by Google



Zeit = 18,625 | Zeit = 1,71875 für tan A | Zeit = 3,95313 für tanh A | Zeit = 1,79688

Zeit = 10,9063 | Zeit = 1,39063 für Sek. A | Zeit = 2,07813 für sechA | Zeit = 1,32813

Abbildung 4. Fehler von tan A, sec A, tanh A und sechA für zwei Algorithmen.

Betrachten wir die Implementierung unserer Algorithmen zur Berechnung der Funktionen cot A, cot A, csc A und cschA. Durch

$$\text{Kinderbett(At) } \ddot{y}\,\mathbf{A}^{\ddot{y}1} \sum_{\ddot{y}(j+1)A^{2j+1}\,;\,(\mathbf{o}<|\mathbf{A}|<\ddot{y},\,\mathbf{z}\,\ddot{y}=0),\,\ddot{y}\,\mathbf{2}\,\ddot{y}\,j=0}^{\mathbf{M}}$$

$$\coth(At)\ \ddot{y}\,\mathbf{A}^{\ddot{y}1}{}_{+\,\mathbf{2}\,\ddot{y}\,j=0}^{\mathbf{M}}\ \mathbf{(\ddot{y}1)}\,j\ddot{y}(j+1)A^{2j+1}\ \mathbf{(0<|A|<\ddot{y})},$$

$$\operatorname{csc}(At)\ \ddot{y}\,\mathbf{A}^{\ddot{y}1}{}_{+\,\mathbf{2}\,\ddot{y}\,j=0}^{\mathbf{M}}\ \ddot{y}(j+1)\ \mathbf{1}\ \ddot{y}\ \frac{}{\mathbf{2\,4}\,j+1}\ \mathbf{A}\,2j+1\ \mathbf{(0<|A|<\ddot{y})}, \tag{38}$$

$$\operatorname{csch}(At)\ \ddot{y}\,\mathbf{A}^{\ddot{y}1}{}_{\ddot{y}\,\mathbf{2}\,\ddot{y}\,j=0}^{\mathbf{M}}\ \mathbf{(\ddot{y}1)}\,j\ddot{y}(j+1)\ \mathbf{1}\ \ddot{y}\ \frac{}{\mathbf{2\,4}\,j+1}\ \mathbf{A}\,2j+1\ \mathbf{(0<|A|<\ddot{y})},$$

Wir sehen, dass, wenn ÿAÿ klein ist, die Norm der Inversen von A groß ist, sodass die Berechnung mit (38) große Fehler erzeugt. Daher müssen wir die folgende Methode verwenden:

$$\begin{aligned}\mathbf{Kinderbett\ A} &= \mathbf{A}^{\ddot{y}1}\ \mathbf{cot1\ A,\ coth\ A} = \mathbf{A}^{\ddot{y}1}\ \mathbf{coth1\ A},\\ \mathbf{csc\ A} &= \mathbf{A}^{\ddot{y}1}\ \mathbf{csc1\ A,\ cschA} = \mathbf{A}^{\ddot{y}1}\ \mathbf{csch1A},\end{aligned} \tag{39}$$

Wo

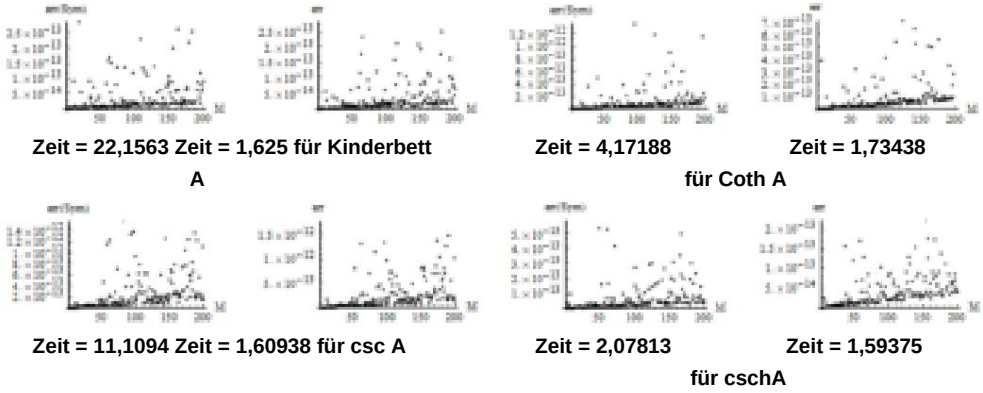
$$\begin{aligned}&\mathbf{cot1\ A}\ \ddot{y}\ \mathbf{l}\ \ddot{y}\ \mathbf{2} && \sum_{j=1}^{m+1}\ \ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}(j)A^{2j}\ ;\ (|z|<\ddot{y},\,z\,\ddot{y}=0)},\\ &\mathbf{coth1A}\ \ddot{y}\ \mathbf{l}\ \ddot{y}\ \mathbf{2} && \prod_{j=1}^{m+1}\ \ddot{y}\ \mathbf{(\ddot{y}1)\,j\ddot{y}(j)A^{2j}\ (|z|<\ddot{y},\,z\,\ddot{y}=0)},\\ &\mathbf{csc1\ A}\ \ddot{y}\ \mathbf{l}+\mathbf{2} && \sum_{j=1}^{m+1}\ \ddot{y}\ \mathbf{\ddot{y}(j)\ 1\ \ddot{y}\ \frac{2}{4\,j}\ A^{2j}\ (|z|<\ddot{y},\,z\,\ddot{y}=0)},\\ &\mathbf{csch1A}\ \ddot{y}\ \mathbf{l}+\mathbf{2} && \prod_{j=1}^{m+1}\ \ddot{y}\ \mathbf{(\ddot{y}1)}\,j\ddot{y}(j)\ \mathbf{1}\ \ddot{y}\ \frac{2}{4\,j}\ \mathbf{A^{2j}\ (|z|<\ddot{y},\,z\,\ddot{y}=0)}.\end{aligned} \tag{40}$$

Satz 4. Mit Satz 1 erhalten wir den folgenden Algorithmus für cot A, coth A, csc A und sec hA.

Die Implementierung der Algorithmen in Tabelle 3 liefert die folgenden Ergebnisse für die Matrixfunktionen in (39).

Dabei bedeutet **Sym , dass die Matrixfunktionen cot A, coth A, csc A und sec hA berechnet ing der internen Funktionen mit den regulären Formeln cos A(sin** A) $^{\ddot{y}1}$ **,** $^{A}{}_{+\,ee}{}^{\ddot{y}A}$ **Ein e ÿ e werden mit ÿA ÿ1 , (sin** A) $^{\ddot{y}1}$ **,** bzw. 2 e . Die $^{\ddot{y}A\ \ddot{y}1\ A}$ **Ergebnisse in Abbildung 5 stimmen im Wesentlichen überein ÿ e mit den entsprechenden Ergebnissen in Abbildung 2.**

Machine Translated by Google



Zeit = 22,1563 Zeit = 1,625 für Kinderbett A Zeit = 4,17188 Zeit = 1,73438 für Coth A

Zeit = 11,1094 Zeit = 1,60938 für csc A Zeit = 2,07813 Zeit = 1,59375 für cschA

Abbildung 5. Fehler von cot A, cot A, csc A und cschA für zwei Algorithmen.

5. Schneller Algorithmus für die logarithmische Matrixfunktion ln A und einige verwandte Funktionen

Man betrachtet verschiedene Algorithmen [17–22] für logarithmische Matrixfunktionen ln A. Eine der effektivsten Methoden, die wir gefunden haben, war der folgende Algorithmus. Die Standardmethode zur Lösung dieses Problems besteht darin, den Quadratwurzeloperator wiederholt zu verwenden, um A in die Nähe der Identität zu bringen:

$$\ln A = 2^{k} \ln A^{1/2^{k}}, \quad A^{1/2^{k}} = A. \tag{41}$$

Wenn k zunimmt, gilt $A^{1/2^{k}} \to I$. Für ausreichend große k können wir also eine direkte Methode auf $A^{1/2^{k}}$ anwenden. Dieses Verfahren für den Logarithmus wurde von Kenney und Laub [19] eingeführt. Die spezifische Methode besteht darin, k so zu wählen, dass

$$\|I - A\| < 1, \tag{42}$$

und normalerweise wird k aus 8 ausgewählt. Wir optimieren die Methode leicht wie folgt:

$$A_0 = A, \quad A_{k+1} = \sqrt{A_k}, \quad \ln A = 2^{k+1} \ln A_{k+1}. \tag{43}$$

Und

$$\|I - A\| < 1, \tag{44}$$

wobei k üblicherweise aus 4 ausgewählt wird.

Für ln x ist der Algorithmus, der schneller konvergiert,

$$\ln x = \ln(1+y) - \ln(1-y), \quad y = \frac{x-1}{x+1}, \quad \ln x = 2y \left(1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{2j+1}{(2j+3)(4j+1)} B^{j}\right), \tag{45}$$

wobei $y = \frac{x-1}{x+1}$. Für ln Ak, wir haben

$$\ln A_k = (I - B)(I + B)^{-1}, \quad B = (I - A_k)(I + A_k)^{-1}, \quad \ln A = 2^{k} \left(1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{B^{2j}}{(2j+3)(4j+1)}\right) F, \tag{46}$$

wobei $B = (I - A_k)(I + A_k)^{-1}$. Mit der Euler–Abel–Transformation [21] erhalten wir die folgende beschleunigte Reihe ist:

$$\ln A_k = 3 - BF2 (I - 12 \sum_{j=1}^{M} \frac{B^{2j}}{(2j+3)(4j+1)}) F, \tag{47}$$

wobei $F = 2B(I - B^{2})^{-2}$. Wir können die folgende Padé-Näherung von ln Ak verwenden [20].

$$\ln A_k = (B + 2B^{2} + \frac{47}{36}B^{3} + \frac{11}{36}B^{4} + \frac{137}{7560}B^{5})F,$$
$$F = (I + \frac{5}{2}B + \frac{20}{9}B^{2} + \frac{5}{6}B^{3} + \frac{5}{42}B^{4} + \frac{1}{252}B^{5})^{-1}, \tag{48}$$

Machine Translated by Google

wobei B = Ak ÿ I. Wir liefern auch einige numerische Ergebnisse für die Matrixfunktion ln A.

Aufbauend auf (41)–(44) liefern wir auch einige numerische Ergebnisse von ln A unter Verwendung von (46)–(48). Aus Abbildung 6 ist ersichtlich , dass durch die Optimierung (43) die Rechengenauigkeit von (46)–(48) deutlich verbessert wird und die Rechengeschwindigkeit von (46)–(48) mehr als doppelt so schnell ist wie die der inneren Funktion. Der Rechengeschwindigkeitsvorteil der Padé-Näherung ist offensichtlich.

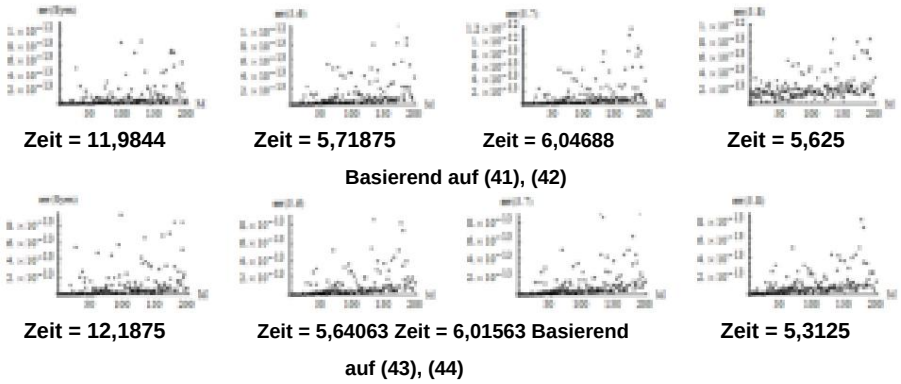


Abbildung 6. Fehler von ln A für die verschiedenen Algorithmen.

Wir haben die folgenden Identitäten verwendet, um unseren allgemeinen Algorithmus für die Berechnung der inversen trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen zu implementieren. Um die Länge des Dokuments zu begrenzen, werden wir die Ergebnisse hier nicht anzeigen.

$$\arcsin x = 2\arcsin\frac{x}{\ddot{y}\,2(1+\ddot{y}\,1\ddot{y}x\,2)},\quad \arctan x = 2\arctan\frac{x}{1+\ddot{y}\,1+x\,2},\quad \ddot{y}\,\arcsin x = x+\sum_{l=1}^{(2l+1)}\frac{(2l\ddot{y}1)x\,\ddot{y}\,2l+1}{(2l+1)},\quad \ddot{y}\,\arctan x = \sum_{l=0}^{\ddot{y}}\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)} \tag{49}$$

$$\operatorname{arcsinh} x = 2\operatorname{arcsinh}\frac{x}{1+x\,2)},\quad \operatorname{arctanh} x = 2\operatorname{arctanh}\frac{x}{1\ddot{y}x\,2},\quad \ddot{y}\,\operatorname{arcsinh} x = x+\sum_{l=1}^{(2l+1)}\frac{(\ddot{y}1)\,(\ddot{y}\,2l\ddot{y}1)x\,\ddot{y}\,2l+1}{(2l+1)},\quad \ddot{y}\,\operatorname{arctanh} x = \sum_{l=0}^{\ddot{y}}\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)} \tag{50}$$

Für arcsin A, arctan A, arcsinhA und arctanhA können wir unter bestimmten Bedingungen die folgende Identität verwenden.

$$\arcsin A = \ddot{y}i\,\ln\ddot{y}\,I\,\ddot{y}\,\sqrt{A2 + iA},\quad \operatorname{arcsinh} A = \ln\ddot{y}\,I + \sqrt{A2 + A},$$
$$\arctan A = \frac{\ddot{y}}{2}\ln(iI + A)(iI\,\ddot{y}\,A)^{\ddot{y}1},\quad \operatorname{arctanh} A = \frac{1}{2}\ln(I + A)(I\,\ddot{y}\,A)^{\ddot{y}1}. \tag{51}$$

6. Verbesserte Berechnungsformeln für die Anfangswertprobleme (3) und (8)

Betrachten wir nun die Berechnung des Integrals in (11), d. h.

$$F_k = \int_0^{\ddot{y}} e^{H}sF_H(k\ddot{y}\,\ddot{y}\,s)ds. \tag{52}$$

Wenn dieses Integral durch numerische Integration berechnet wird, ist dies recht zeitaufwändig und die Rechengenauigkeit kann nicht garantiert werden. Wir wenden hier die folgende Methode an. Denn 1, 2, · · · , es gibt die folgende Beziehung: nn =

$$F_k = \sum_{j=0}^{nn\ddot{y}1}\int_{\frac{j\ddot{y}}{nein}}^{\frac{j\ddot{y}}{nein}} e^{H}sF_H(k\ddot{y}\,\ddot{y}\,s)ds = \sum_{j=0}^{nn\ddot{y}1}\int_0^{\frac{\ddot{y}}{nein}} T_{nn,j}\,e^{H}sF_H(k\ddot{y}\,\ddot{y}\,\tfrac{j\ddot{y}}{nein}\,\ddot{y}\,s)ds$$
$$\ddot{y}\sum_{j=0}^{nn\ddot{y}1} T_{nn,j}\sum_{\ddot{y}l=0}^{M}\int_0^{\frac{\ddot{y}}{nn}} s\,lF_H(k\ddot{y}\,\ddot{y}\,\tfrac{j\ddot{y}}{nein}\,\ddot{y}\,s)ds, \tag{53}$$

Machine Translated by Google

Wo

$$T_{nn,0} = I,\ T_{nn} = e^{H\frac{\ddot{y}}{n}},\ T_{nn,j} = e^{H\frac{j\ddot{y}}{nn}} = T_{nn}T_{nn,j\ddot{y}1},\ j = 1, 2, \cdots, nn\ \ddot{y}\ 1. \tag{54}$$

Tnn kann mit der folgenden Methode berechnet werden:

$$\begin{aligned} &T_{nn} = Ich,\ zz = Ich;\\ &f\ddot{u}r(i = 1, i\ \ddot{y}\ m, i + +)\ (zz = \frac{\ddot{y}}{nn}H \times zz;\ T_{nn} = T_{nn} + zz). \end{aligned} \tag{55}$$

Daher kann (53) wie folgt geschrieben werden:

$$F_k\ \ddot{y}\ \sum_{j=0}^{nn\ddot{y}1}\ddot{y}\ T_{nn,j}H_j,\ H_j = \sum_{l=0}^{M}\ddot{y}\ l\ \frac{}{Hallo!}\int_0^{\frac{\ddot{y}}{n}} s\ lFH(k\ddot{y}\ \ddot{y}\ \frac{j\ddot{y}}{n}\ \ddot{y}\ s)ds, \tag{56}$$

so können wir das Integral des Produkts der Matrixexponentialfunktion und der Vektorfunktion in das Integral der reinen Vektorfunktion umwandeln.

Die verbesserte Berechnungsformel für (3) lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} &(55),(56),\\ &U_k = TU_{k\ddot{y}1} + \sum_{j=0}^{nn\ddot{y}1}\ddot{y}\ T_{nn,j}H_j,\ k = 1, 2, \cdots, \end{aligned} \tag{57}$$

wobei T = e (55) und $H\ddot{y}$ **wird mit dem Algorithmus in Tabelle 1 berechnet, und Tnn,j und Hj werden berechnet mit (56).**

Für

$$\int_0^{\frac{\ddot{y}}{n}} s\ lFH(k\ddot{y}\ \ddot{y}\ \frac{j\ddot{y}}{n}\ \ddot{y}\ s)ds, \tag{58}$$

Die folgenden zwei Algorithmen können verwendet werden.

(1) Methode der integrierbaren Funktionen Wenn F(t) = (f1(t), **f2(t), · · · , fv(t), · , fn(t))T ,** fv(t) **ist die algebraische Summe von Funktionen der folgenden Typen:**

$$T^{\ddot{y}},\ I\ \ddot{y}\ddot{y}t\ te,\ sin\ \ddot{y}t,\ t^{m}\cos\ \ddot{y}t, \tag{59}$$

dann kann (58) in analytischer Form ausgedrückt werden, also kann **Hj auch in analytischer Form ausgedrückt werden. Auf diese Weise kann die Berechnung von (57) vervollständigt werden.**

(2) Dreipunktintegralformel von Gauss

Beachten Sie, dass bei einer Rechengenauigkeit von 16 Bit

$$\frac{\ddot{y}}{nn} < \frac{}{1\ 2\ n16\ddot{y}H}\ \ddot{y}\ \frac{0{,}0376434}{|\ddot{y}H|} < 0{,}0376434, \tag{60}$$

und die algebraische Genauigkeit der Dreipunktintegralformel von Gauss beträgt 5. Mit der Dreipunktintegralformel von Gauss

$$\frac{}{1\ 2}\frac{\ddot{y}}{nn}^{l+1}\ 3\ \ddot{y}\ i{=}1\ wi(\ 2\ \frac{1+bi}{}\ lFH(k\ddot{y}\ \ddot{y}\ \frac{(j+1/2)\ddot{y}\ )}{n}\ \frac{bi\ddot{y}}{2nn}), \tag{61}$$

$\ddot{y}$ 5 , b2 = 0, b3 = 5 , $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{}$ $\ddot{y}$ 15 $\ddot{y}$ 15 wobei w1 = w3 = 9 , $\overline{b1 =}$ **zur Annäherung an (58) mit hoher Genauigkeit, daher kann (57) durch den folgenden Algorithmus ersetzt werden.**

Algorithmus 1. Numerischer Lösungsalgorithmus des Anfangswertproblems (3): für nn = 1, 2, · · ·

$$U_k = TU_{k\ddot{y}1} + \frac{\ddot{y}}{2nn}\sum_{j=0}^{nn\ddot{y}1}\ddot{y}\ T_{nn,j}\ \ddot{y}^3\ H\frac{(1+bi\ )\ddot{y}}{2nn\ FH\ k\ddot{y}\ \ddot{y}\ i{=}1}(2j+1+bi\ )\ddot{y}\ \text{mit e}\ \frac{}{2nn},\ k = 1, 2, \cdots, \tag{62}$$

Wo

$$H\frac{(1+b\ ich\ )\ddot{y}}{2nn\ \ddot{y}\ e}\ \frac{wi\ddot{y}}{2nn}\ 1\ Ich + \ddot{y}\ I!\ i{=}\overline{1}^{M}\ \frac{(1+bi\ )\ddot{y}}{2nn}^{m}\ HI\ \cdot \tag{63}$$

Machine Translated by Google

Insbesondere wenn wir

$$nn = \begin{matrix} [2\ npÿHÿ] + 1 & 2npÿHÿ > 1 \\ 1 & 2npÿHÿ \ ÿ\ 1 \end{matrix}, \tag{64}$$

dann Np = 0, m = mp = $\frac{9p \ln 10}{8 \ln 2}$,

$$Wi,H\ ÿ \frac{wiÿ}{2nn} \ ÿ\ Ich + 1 \sum_{l=1}^{mp} \frac{(1+bi)ÿ}{2nn} \ Hl \ . \tag{65}$$

Zu diesem Zeitpunkt beträgt die theoretische Berechnungsgenauigkeit von (62) p.

Bemerkung 3. Beachten Sie, dass Wi,H(i = 1, 2, 3) **in (63) und (65) nur einmal berechnet werden muss und unabhängig von F(t) ist, was nicht nur effizient, sondern auch einfach zu programmieren ist.**

Betrachten wir nun die numerische Lösung des Anfangswertproblems (8). Konvertiert man es in das Anfangswertproblem (3), dann

$$\begin{matrix} x(t) \\ ' x\ (t) \end{matrix} = U, H = \begin{matrix} 0 & I3\times3 \\ ÿK & 0 \end{matrix}, FH(t) = \begin{matrix} 0 \\ F(t)\ ,\ U0 = \end{matrix} \begin{matrix} x0 \\ x1 \end{matrix} . \tag{66}$$

Von

$$Wi,H = e^{ÿH\ ÿ} \begin{matrix} cosp(ÿA)\ ÿ\ sin1,p(ÿA) \\ ÿKÿ\ sin1,p(ÿA)\ cosp(ÿA)\ , \end{matrix} A = ÿ\ K, \tag{67}$$

Wo

$$sin1\ A = ÿ \sum_{(2j+1)!\ j=0}^{ÿ} \frac{(ÿ1)}{} j\ A\ 2j = ÿ \sum_{j=0}^{ÿ} \frac{(ÿ1)}{(2j+1)!} j\ K\ j\ , \tag{68}$$

und (68) erhalten wir den folgenden Algorithmus.

Algorithmus 2.

$$\begin{matrix} ÿt = ÿ/3N;\ Tÿ = I;\ zz = I;\ A2 = (Aÿt) \times (Aÿt);\ \times zz;\ Tÿ = \\ A2\ für\ (i = 1,\ i\ ÿ\ m,\ i + +)\ (zz = ÿ\ (2i)(2i+1)\ Tÿ + zz), \end{matrix} \tag{69}$$

Und

$$\begin{matrix} für(i = 0,\ i < N,\ i + +)\ 4\ (zz = Tÿ \times Tÿ, \\ zz = zz \times A2,\ A2 = 9A2,\ Tÿ = Tÿ\ ÿ\ 3 \end{matrix} \quad - Tÿ \times zz)\ , \tag{70}$$

wobei mp und Np gemäß (31) bestimmt werden.

Algorithmus 3. Numerischer Lösungsalgorithmus des Anfangswertproblems (8):

$$\begin{matrix} xk = (cos(ÿA)xkÿ1 + ÿ\ sin1(ÿA)ykÿ1)\ wi\ (2j+1+bi)ÿ \\ + \frac{ÿ}{2nn} \sum_{j=0}^{nnÿ1} ÿ\ ÿ \sum_{ich=1}^{3} \frac{(2j+1+bi)ÿ\ (2j+1+bi)ÿ}{EIN\ F(kÿ\ ÿ)\ sin1\ 2nn\ 2nn\ 2nn} \\ yk = ÿA\ sin(ÿA)xkÿ1 + cos(ÿA)ykÿ1\ (2j+1+bi)ÿ \\ + \frac{ÿ}{2nn} \sum_{j=0}^{nnÿ1} ÿ\ ÿ \sum_{i=1}^{3} wi\ cos \frac{(2j+1+bi)ÿ}{EIN\ F(kÿ\ ÿ)\ 2nn\ 2nn} \end{matrix} \tag{71}$$

Machine Translated by Google

für nn = 1, 2, · · · , wobei A = ÿ K. Insbesondere, wenn nn mit (64) bestimmt wird, ist die theoretische Genauigkeit dieses Algorithmus ist p und

$$\begin{aligned} xk &= \cos(ÿA)xkÿ1 + ÿ \sin1(ÿA)ykÿ1 + \frac{ÿ}{2nn}\sum_{j=0}^{nnÿ1 ÿ}\sum_{ich=}^{3} ÿ \text{ mitTWsin } F(kÿ ÿ), j,i\frac{(2j+1+bi)ÿ}{2nn} \\ yk &= \cos(ÿA)ykÿ1 ÿ A \sin(ÿA)xkÿ1 + \frac{ÿ}{2nn}\sum_{j=0}^{nnÿ1} ÿ \sum_{ich=1}^{3} ÿ F(kÿ ÿ), \text{mitTWcos } j,i\frac{(2j+1+bi)ÿ}{2nn} \\ x0 &= x(0), y0 = x^{ÿ}(0), \end{aligned} \tag{72}$$

Wo

$$\begin{aligned} TWsin\ j,i &= \frac{(1+bi)ÿ}{2nn}\cos\frac{jÿ}{nein} A \sin1,mp\,(1+bi)ÿ\frac{(1+bi)ÿ}{2nn} A \\ &+ \frac{jÿ}{nein}\text{Sünde1}\frac{jÿ}{nein}\text{Ein Kosmp}\frac{}{2nn} A , \\ TWcos\ j,i &= \cos\frac{jÿ}{nein}\text{Ein Kosmp}\frac{(1+bi)ÿ}{\text{Eine } 2nn} \\ &ÿ \sin jÿ\frac{}{nein}\text{Ein Sinmp}\frac{(1+bi)ÿ}{\text{Eine } 2nn} , \end{aligned} \tag{73}$$

Und

$$\begin{aligned} \text{sinmp (sA)} &= A\sum_{l=0}^{mp}\frac{(ÿ1)^{¨}s\ 2l+1Kl}{(2l+1)!}, \\ \text{sin1,mp (sA)} &= \sum_{l=0}^{mp}\frac{(ÿ1)^{¨}s\ 2lKl}{(2l+1)!}, \\ \text{cosmp (sA)} &= I + ÿ\sum_{l=1}^{mp+1}\frac{(ÿ1)\ l\ s\ 2lKl}{(2l)!}. \end{aligned} \tag{74}$$

Wenn A reversibel ist, dann

$$\begin{aligned} xk &= \cos(ÿA)xkÿ1 + A^{ÿ1}\sin(ÿA)ykÿ1 \\ &+ \frac{ÿ}{2nn} A^{ÿ1}\sum_{j=0}^{nnÿ1} ÿ\sum_{i=1}^{3} wi \sin\frac{(2j+1+bi)ÿ\,(2j+1+bi)ÿ}{EIN\ F(kÿ ÿ)\ 2nn\ 2nn} \\ yk &= ÿA \sin(ÿA)xkÿ1 + \cos(ÿA)ykÿ1\,(2j+1+bi)ÿ\,(2j+1+bi)ÿ\,A \\ &+ \frac{ÿ}{2nn}\sum_{j=0}^{nnÿ1} ÿ\sum_{i=1}^{3} wi \cos\frac{F(kÿ ÿ).\ 2nn\ 2nn}{} \end{aligned} \tag{75}$$

Daher kann (75) in Form einer komplexen Funktion wie folgt geschrieben werden:

$$zk = e\ ÿiÿAzkÿ1 + \frac{iÿ\ ÿ1}{\text{Eine } 2nn}\sum_{j=0}^{nnÿ1} ÿ\ t\ \frac{jÿi}{nein} A\ ÿ\sum_{l=1}^{3} wl\ e^{\frac{(1+b\ l\ )ÿi}{(2j+1+bl\ )ÿ\ 2nn\ AF\ kÿ\ ÿ}{2nn}}, \tag{76}$$

oder

$$Zk = e\ ÿiÿAZkÿ1 + \frac{ÿ}{2nn}\sum_{j=0}^{nnÿ1} ÿ\ t\ \frac{jÿi}{nein} A\ ÿ\sum_{l=1}^{3} wl\ e^{\frac{(1+b\ l\ )ÿi}{(2j+1+bl\ )ÿ\ 2nn\ AF\ kÿ\ ÿ\ 2nn}}, \tag{77}$$

wobei $i = ÿ\ ÿ1$,

$$\begin{aligned} zk &= xk + iAÿ1yk\ ,\ xk = Rezk\ ,\ yk = AImzk\ , \\ Zk &= yk ÿ iAxk\ ,\ yk = ReZk\ ,\ xk = ÿA^{ÿ1}\ ImZk\ . \end{aligned} \tag{78}$$

Wir liefern zunächst ein Beispiel, um die Wirksamkeit von Algorithmus 1 zu veranschaulichen. Obwohl wir Beispiele für Algorithmus 2 überspringen, fügen wir anschließend ein Beispiel für die Wirksamkeit von Algorithmus 3 ein.

Beispiel 1. In (8) sei

$$K = \begin{matrix} ÿ & 1\ ÿ1\ 5\ 2\ 1\ 4 \\ ÿ1 & _ \\ ÿ & \end{matrix}\quad \begin{matrix} ÿ \\ ÿ \\ ÿ \end{matrix}\quad F(t) = \begin{matrix} ÿ & \text{Sünde t} & ÿ \\ \frac{1}{2}\text{Sünde} & & \\ ÿ\ 2t & & \end{matrix}\quad \begin{matrix} ÿ \\ \\ ÿÿ, \end{matrix}$$

$$x0 = \begin{matrix} \frac{5}{2} & 0\ ÿ2 \end{matrix}^{T}, x1 = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \end{matrix}^{T}. \tag{79}$$

Machine Translated by Google

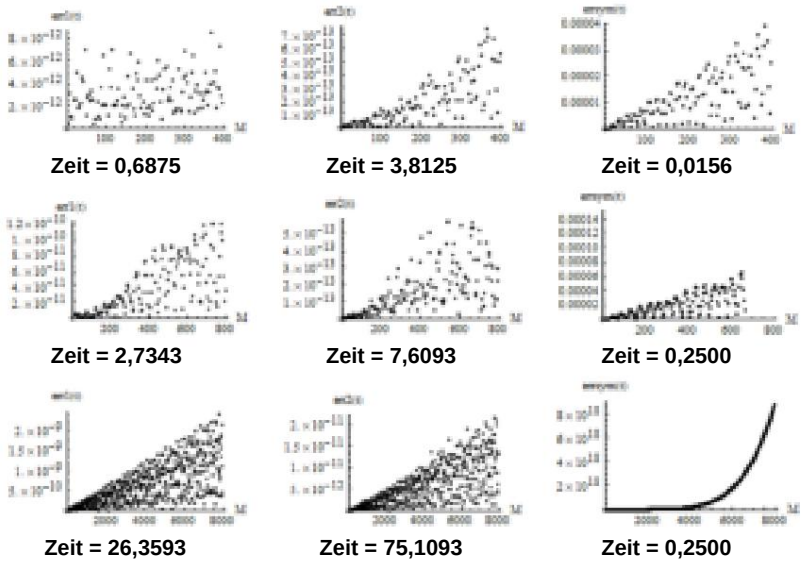
Die analytische Lösung des Anfangswertproblems (8) lautet

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \cos^2 \\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + 2\,2\,\ddot{y}\,2t\ddot{y}\cos\ddot{y} \\ \sin(2t)\ \ddot{y}\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}\,2t\,1\,2\cos \\ 3t + \sin t \end{pmatrix} \cos\ddot{y}\,3t + \sin t \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y} \end{pmatrix} . \quad (80)$$

Sei erri,k = x(kÿ) ÿ xi,k i = 1, 2, wobei x1,k , x2,k (k = 0, 1, 2, · · · , N) **die numerischen Lösungen des Anfangswertproblems (8) sind, die jeweils durch Algorithmus 1 und Algorithmus 3 bestimmt wurden. errsym,k = x(kÿ) ÿ** xsym(kÿ), **wobei xsym(t) die numerische Lösung ist, die durch Aufruf der Funktion NDSolve in Mathematica erhalten wird. Die numerischen Ergebnisse von err1,k ,err2,k ,errsym,k [0,** T] **(k = 0, 1, 2, · · · ,** *Nÿ* = T) **sind wie folgt.**

Aus Abbildung 7 **ist ersichtlich , dass die Rechengenauigkeit von Algorithmus 1 höher ist als die von Algorithmus 3, die Rechengeschwindigkeit von Algorithmus 3 jedoch dreimal so hoch ist wie die von Algorithmus 1. Der Fehler der numerischen Ergebnisse der internen Funktionen von Mathematica ist jedoch weitaus größer als der Fehler der Algorithmen 1 und 3. Insbesondere wird der Kollaps bei t = 667,787 berechnet. Nach diesem Punkt steigt der Fehler exponentiell mit der Zeit t an. Die Algorithmen 1 und 3 sind jedoch ziemlich stabil. Beispielsweise ist der Rechenfehler bei [0, 8000] immer noch sehr klein.**

In den Algorithmen 1 und 3 sei nn = μnnA, μ **= 0,5, 0,25, 0,125, wobei nnA gemäß (64) berechnet wird .** Die numerischen Ergebnisse sind wie folgt.



Zeit = 0,6875 **Zeit = 3,8125** **Zeit = 0,0156**

Zeit = 2,7343 **Zeit = 7,6093** **Zeit = 0,2500**

Zeit = 26,3593 **Zeit = 75,1093** **Zeit = 0,2500**

Bild 7. Fehler der numerischen Lösung (8) für mehrere Algorithmen (nm wird nach (64) berechnet).

Im Vergleich zu den Abbildungen 7 und 8 ist die Rechengenauigkeit bei μ = 0,5 nicht **wesentlich reduziert und die Rechengeschwindigkeit fast doppelt so hoch. Bei** μ **= 0,125 Algorithmus 1 und 3 ist die Rechengenauigkeit immer noch hoch und die Rechengeschwindigkeit ist 10-mal höher als in Abbildung 8.**

Beispiel 2. , In (8) sei K = (ki,j)n×n eine Tridiagonalmatrix.

· · · , x0,n) und f(t) = (f1(t), f2(t), · · · , fn(t))T , x1 = (x1,1, x1,2, · · · , x1,n)T ,

|ki,i ÿ 9| ÿ 1, ki,i+1 ÿ ÿ 2 , ki+1,i ÿ ÿ I2 ,

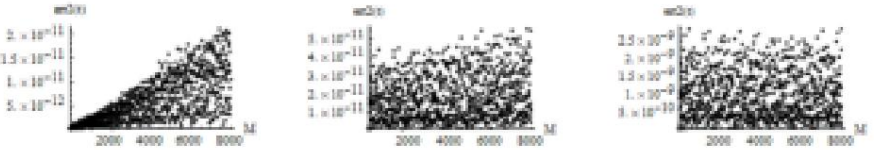
Ai ÿ ÿ 0 ÿ ÿi ÿ (2 ÿi ÿ |x0,i | ÿ 1, |x1,i |

1, 2, · · · , n).

Machine Translated by Google

Für n = 50, 100, 200 und 400 liefern die Algorithmen 1 und 3 die folgenden numerischen Ergebnisse.

Zeit = 6,4687, μ = 0,5 Zeit = 3,4062, μ = 0,25 Zeit = 2,0625, μ = 0,125



Zeit = 39,2500, μ = 0,5 Zeit = 20,0312, μ = 0,25 Zeit = 2,9375, μ = 0,125

Abbildung 8. Fehler der numerischen Lösung (8) für mehrere Algorithmen.

In Abbildung 9 (1)–(4) sind links die ersten beiden Komponenten der numerischen Lösung und rechts die Differenz zwischen den mit den beiden Algorithmen erzielten numerischen Lösungen dargestellt. Es ist zu beachten, dass ÿi (i = 1, 2, · · · , n) manchmal **nahe an der Frequenz der Lösung liegt und Flattern oder Resonanz auftreten kann. Die von den beiden Algorithmen erhaltenen Werte liegen jedoch immer noch sehr nahe beieinander.**

(1) n = 50, Zeit6.1 = 31,6250, Zeit6.4 = 11,2500 **(2) n = 100, Zeit6.1 = 60,5625, Zeit6.4 = 27,8125**

(3) n = 200, Zeit6,1 = 137,5625, Zeit6,4 = 57,6875 (4) n = 100, Zeit6,1 = 281,3125, Zeit6,4 = 151,2187

Abbildung 9. Numerische Lösungen und Fehler zweier Algorithmen.

7. Schlussfolgerungen

In diesem Artikel haben wir Algorithmen zur Berechnung von Matrixexponentialfunktionen , Matrixtrigonometriefunktionen und Matrixhyperboliefunktionen entwickelt. Unsere numerischen Ergebnisse zeigen, dass diese Algorithmen schneller und genauer sind als bestehende Algorithmen und die Systemalgorithmen in Mathematica. Bei der Reihenentwicklung von Matrixfunktionen hängt **die Anzahl der entwickelten Elemente mp nur mit der Anforderung an die Berechnungsgenauigkeit zusammen** und hat nichts mit der Matrix selbst zu tun. Die Anzahl **der Iterationen Np** hängt **jedoch nicht nur mit der M Wenn |3 npÿAt| ÿ 1(|2 npÿAt| ÿ 1), Np = 0, wird die Berechnung der Matrixfunktion zu einer algebraischen Operation, so dass das Integral in (9)–(12) ein leicht zu berechnendes Integ Kurz gesagt ermöglicht unser Algorithmus den Benutzern, ein erforderliches Genauigkeitsniveau festzulegen und es dann zu verwenden, um geeignete Werte für die Parameter m und N auszuwählen, um die Rechenzeit zu minimieren. Auf diese Weise werden sowohl Genauigkeit als auch Effizienz gleichzeitig berücksichtigt.**

Beiträge der Autoren: Konzeption, HQ und YL; Methodik, HQ und YL; Software, HQ; Validierung, HQ und YL; formale Analyse, HQ und YL; Untersuchung, HQ und YL; Visualisierung, HQ; Überwachung, HQ; Projektverwaltung, YL. Alle Autoren haben die Veröffentlichungsversion des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu.

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Machine Translated by Google

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: Die Daten sind im Artikel enthalten.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte vorliegen.

Verweise

1. Ruiz, P.; Sastre, J.; Ibáñeza, J.; Defez, E. Hochleistungsrechnen der Matrixexponentialfunktion. J. Comput. Angewandte Mathematik. 2015, 291, 370–379. [CrossRef]
2. Molert, C.; Loans, CV Neunzehn zweifelhafte Möglichkeiten, die Exponentialfunktion einer Matrix zu berechnen. SIAM Rev. Soc. Ind. Angewandte Mathematik. 1978, 20, 801–836.
3. Higham, NJ Funktionen von Matrizen: Theorie und Berechnung; SIAM: Philadelphia, PA, USA, 2008.
4. Al-Mohy, AH; Higham, NJ Berechnung der Wirkung der Matrixexponentialfunktion mit einer Anwendung auf Exponentialintegratoren. SIAM J. Sci. Comput. 2011, 33, 488–511. [CrossRef]
5. Higham, NJ Die Skalierungs- und Quadrierungsmethode für die Matrixexponentialfunktion wurde widerstanden. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005, 26, 1179–1193. [Querverweis]
6. Bader, P.; Blanes, S.; Casas, F. Berechnung der Matrixexponentialfunktion mit einer optimierten Taylor-Polynom-Approximation. Mathematics 2019, 7, 1174. [CrossRef]
7. Seydaoglu, KM; Bader, P.; Blanes, S.; Casas, F. Gleichzeitige Berechnung der Matrix Sinus und Cosinus mit einer reduzierten Anzahl von Produkte. arXiv 2020, arXiv:2010.00465v1.
8. Hargreaves, GI; Higham, NJ Effiziente Algorithmen für den Matrixcosinus und -sinus. Numer. Algorithms 2005, 40, 383–400. [CrossRef]
9. Alonso, P.; Ibáñez, J.; Sastre, J.; Peinado, J.; Defez, E. Effiziente und genaue Algorithmen zur Berechnung trigonometrischer Matrix Funktionen. J. Comput. Appl. Math. 2017, 309, 325–332. [CrossRef]
10. Alonso, P.; Peinado, J.; Ibáñez, J.; Sastre, J.; Defez, E. Berechnen trigonometrischer Matrixfunktionen mit GPUs über Matlab. J. Supercomput. 2019, 75, 1227–1240. [CrossRef]
11. Al-Mohy, AH; Higham, NJ; Relton, SD Neue Algorithmen zur getrennten oder gleichzeitigen Berechnung des Matrixsinus und -cosinus . SIAM J. Sci. Comput. 2015, 37, A456–A487. [CrossRef]
12. Serbin, SM; Blalock, SA Ein Algorithmus zur Berechnung des Matrixcosinus. SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1980, 1, 198–204. [CrossRef]
13. Cooper, BL; Bingulac, S. Computergestützte Verbesserung bei der Berechnung des natürlichen Logarithmus einer quadratischen Matrix. 26, 861–862. [CrossRef]
14. Wu, F.; Zhu, L.; Shi, Q. Effiziente Berechnungsmethode für Matrixfunktionen in dynamischen Problemen. Acta Mech. Sin. 2023, 39, 522451. [Querverweis]
15. Cardoso, JR; Sadeghi, A. Eine Technik zur Verbesserung der Berechnung von Funktionen dreieckiger Matrizen. Int. J. Comput. Math. 2022, 99, 2449–2465. [CrossRef]
16. Jiang, Y.; He, C.; Qin, H. Ein beschleunigter Algorithmus zur hochpräzisen und schnellen Berechnung grundlegender Elementarfunktionen. Mathematik. Pract. Theory 2017, 47, 238–246.
17. Fasi, M.; Higham, NJ Multipräziser Algorithmus zur Berechnung von Matrixlogarithmen. SIAM J. Matrixanal. Appl. 2018, 39, 472–491. [Querverweis]
18. Ibáñez, J.; Sastre, J.; Ruiz, P.; Alonso, JM; Defez, E. Ein verbesserter Taylor-Algorithmus zur Berechnung des Matrixlogarithmus. Mathematik 2021, 9, 2018. [CrossRef]
19. Cheng, SH; Higham, NJ; Kenney, CS; Laub, AJ Approximation des Logarithmus einer Matrix mit vorgegebener Genauigkeit. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2001, 22, 1112–1125. [CrossRef]
20. Kenney, C.; Laub, AJ Zustandsschätzungen für Matrixfunktionen. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1989, 10, 191–209. [CrossRef]
21. Kenney, C.; Laub, AJ Padé Fehlerabschätzungen für den Logarithmus einer Matrix. Internat. J. Control. 1989, 50, 707–730. [CrossRef]
22. Milovanoví´c, GV; Ranÿcí´c, SL Einige Verbesserungen bei der Berechnung des natürlichen Logarithmus einer quadratischen Matrix. In Proceedings der dritten internationalen Konferenz über Funktionalanalyse und Approximationstheorie, Aquafredda di Maratea, Potenza, Italien, 23.–28. September 1996; Ausgabe 52, Band II.

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Einige Kommentare zum p-verallgemeinerten negativen Binomial (NBp)-Modell

Daniel A. Griffith

Fakultät für Wirtschafts-, Politik- und Politikwissenschaften, University of Texas at Dallas, Richardson, TX 75080, USA; dagriffith@utdallas.edu

Zusammenfassung: Dieser Artikel beschreibt verschiedene ausgewählte Eigenschaften und Merkmale negativer binomialer Zufallsvariablen (NB), mit besonderem Bezug auf NB2 (d. h. p = 2) und einige Verallgemeinerungen auf NBp-Spezifikationen (d. h. p ÿ 2). Er präsentiert neue Ergebnisse (z. B. die NBp-Momentgenerierungsfunktion) in Bezug auf die Beziehung zwischen einem Stichprobenmittelwert und seiner zugehörigen Varianz sowie räumliche statistische/ökonometrische numerische und empirische Beispiele, deren Parameterschätzer Maximum- Likelihood- oder Momentenschätzer sind. Abschließend wird die Moran-Eigenvektor-Raumfiltermethode im Kontext der verallgemeinerten linearen Modellierung hervorgehoben und anhand der räumlichen negativen Binomialregression demonstriert. Seine Gesamtschlussfolgerung ist eine Untermauerung wichtiger Erkenntnisse, die in der Literatur bereits berichtet werd

Schlüsselwörter: Eigenvektor-Raumfilter; Momentgenerierende Funktion; Negatives Binomial; Bevölkerungsdichte ; Puerto Rico

1. Einleitung

Viele moderne Zufallsvariablen (RVs) messen Zählimpulse (mit einer Unterstützung von null bis unendlich), was bedeutet, dass es sich um Poisson-Variablen handelt, jedoch ohne Gleichverteilung (d. h. eine Eigenschaft, wonach $\sigma^2 = \mu$), was weiter bedeutet, dass ihre beste Verteilungsbeschreibung eine Poisson-Variable mit einem gammaverteilten Mittelwert ist (d. h. eine Gamma-Poisson-Mischung), was sich gut in eine negative Binomialverteilung übersetzen lässt (NB) RV. Ein Standard-NB kann diese Mittelwert-Varianz- **Diskrepanz unter solchen Umständen jedoch nicht immer erfolgreich berücksichtigen .** Cameron und Trivedi [1] **führen eine verallgemeinerte Version des NB-Wahrscheinlichkeitsmodells ein, das heute als NBp-Modell bekannt ist, wobei p eine positive ganze Zahl ist, und das Ziel hat, Unter-/Überdispersion besser zu erfassen; diese Variable unterscheidet sich vom Modell des negativen Binomialprozesses (NBP) (z. B. [2]). In der Literatur wird dieses ehemalige verallgemeinerte Modell nur wenig diskutiert , mit Ausnahme der ersten Behandlung dieses Modells durch Cameron und Trivedi und der Artikel von Greene [3] und Di et al. [4]. Bemerkenswert ist, dass es ein R-Paket (Version ÿ 3.00) zur Implementierung dieses Modells gibt [4]. Zweck dieses Artikels ist es, diese Lücke in der Literatur zu schließen, indem (1) mehrere irreführende technische Details in einem Teil von Greenes Artikel geklärt/korrigiert werden ;** (2) neue Ergebnisse präsentiert werden; (3) ausgewählte **Eigenschaften kleiner und großer Stichproben von NB-Modellen erläutert werden ; und (4) Präsentation neuer Beispiele empirischer Raumsta**

Eine Konzeptualisierung der parametrischen Mischung – analog zu einer Formulierung der konjugierten Bayes'schen Vorform – ist der Kontext dieser Diskussion: Die NB-Spezifikation beschreibt die Variable Y einer Zählung, die Poisson-verteilt ist, wobei ihr Mittelwert μ gamma-verteilt und nicht konstant ist. Dementsprechend hat der Gamma-RV die Parameter ÿμ2−p und μ p−1/ÿ, wobei μ seinen Mittelwert und 1/ÿ seinen Streuungsparameter bezeichnet, was ein globales NBp-Modell mit den Parametern r = ÿμ2−p und Wahrscheinlichkeit p = 1/(1 + μ p−1/ÿ) für eine nicht-negative Ganzzahl p > 0 ergibt ; p = 1 , **2 sind Standard-NB-Spezifikationen, wobei ersterer der Poisson-RV und letzterer die beliebte NB2-Variable ist.**

check for updates

Zitat: Griffith, DA Some Kommentare zum p-verallgemeinerten negativen Binomialmodell (NBp). AppliedMath **2024, 4, 731–742. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020039**

Wissenschaftlicher Herausgeber: Tommi Sottinen

Empfangen: 24. März 2024

Überarbeitet: 3. Juni 2024

Akzeptiert: 6. Juni 2024

Veröffentlicht: 11. Juni 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

Machine Translated by Google

2. Materialien und Methoden: Erläuterung der Präsentation

von Greene Zu den verwirrenden Gleichungen in Greene [1] zählen (2-13) und (2-14), insbesondere wenn man sie in Bezug auf den Exponenten p mit seiner Gleichung (A-2) im Anhang Außerdem fehlt in dieser letzteren Gleichung ein Index i in der ÿ- **Variable, die im Zähler des dritten Terms auf der rechten Seite erscheint. Die Diskussion zu den Gleichungen (2-4) und (2-5) wäre klarer, wenn die angenommene Gammaverteilung in ihrer Standardsymbolie als** ÿ(ÿ, 1/ÿ) angegeben würde. **Greenes Gleichungen (2-13) – in denen er fälschlicherweise q = 1/1(1 + ÿ) statt q = 1/(1 + 1/ÿ) angibt – und (2-14) – in denen er s = ÿ/(ÿ + ÿÿ2–p) statt 1/(1 + μ p–2/ÿ) angibt – ergeben für unabhängige und identisch verteilte (iid) NBps die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:**

$$\frac{\ddot{y}\ y + \ddot{y}\mu 3\ddot{y}p\ \ddot{y}}{y + 1\ \ddot{y}\ \ddot{y}\mu 3\ddot{y}p}\quad \frac{1}{1 + \mu\ p\ddot{y}2/\ddot{y}\ \tilde{a}\ddot{y}\mu 3\ddot{y}p\c{C}\ \mu\ p\ddot{y}2\ddot{y}1/\ddot{y}\ \text{å}y}\quad \frac{\quad}{}\quad y = 0, 1, 2, \ldots, A \tag{1}$$

wobei in diesem Artikel eine typischere Notation aus der Literatur (insbesondere für Gamma-Poisson-Spezifikationen) verwendet wird, wobei μ **(das den Mittelwert bezeichnet) äquivalent zu** ÿ **und** ÿ **gleich** ÿ **in Greenes Artikel ist, die Indizes i in dieser Version nicht verwendet werden, da es sich um eine globale Gleichung handelt und der Term des Verhältnisses der Gammafunktionen auch unter Verwendung kombinatorischer Binomialkoeffizienten umgeschrieben werden kann. Der Unterschied besteht darin, dass Greenes Gleichung (2-14) einen Exponenten von (2–p) statt (p–2) hat. Gleichung (1) ergib**

$$E(Y) = \mu \text{ und } E[(Y\ \ddot{y}\ \mu)^2] = \mu(1 + \mu\ p\text{-}1/\ddot{y}). \tag{2}$$

Die Spezifikation der Greene-Gleichung (2-14) ergibt

$$\frac{\ddot{y}\ y + \ddot{y}\mu 2\ddot{y}p\ \ddot{y}}{y + 1\ \ddot{y}\ \ddot{y}\mu 2\ddot{y}p}\quad \frac{1}{1 + \ddot{y}\mu 1\ddot{y}p\ \tilde{a}\ddot{y}\mu 2\ddot{y}p\c{C}\ \ddot{y}\mu\ddot{y}1\ddot{y}p\ \text{å}y}\quad \frac{\quad}{}\quad y = 0, 1, 2, \ldots, A$$

was nicht seine Gleichung (2-15) ist, nicht einmal für den speziellen Standardfall von p = 2. Seine Wahrscheinlichkeitsfunktion sollte Gleichung (1) sein, und nicht

$$\frac{\ddot{y}\ y + \ddot{y}\mu 2\ddot{y}p\ \ddot{y}}{y + 1\ \ddot{y}\ \ddot{y}\mu 2\ddot{y}p}\quad \frac{1}{1 + \ddot{y}\mu 1\ddot{y}p\ \tilde{a}\ddot{y}\mu 2\ddot{y}p\c{C}\ \ddot{y}\mu\ddot{y}1\ddot{y}p\ \text{å}y}\quad \frac{\quad}{}\quad y = 0, 1, 2, \ldots, A$$

Dies ist weder das Ergebnis einer Poisson-parametrischen Mischungswahrscheinlichkeit, die durch Prob(y) = eÿμμ **y/(y!) mit** μ **~** ÿ(ÿμ2–p , μ **p–1/ÿ) definiert ist, noch das Ergebnis von Greenes Ersetzen von** ÿ **durch ÿμ2–p in dieser Mischung, wodurch E(Y) = μ und** $E[(Y\ \ddot{y}\ \mu)^2] = \mu(1 + \mu\ p\text{-}1/\ddot{y})$

3. Ergebnisse: Artikulation von NBp-Variablen

Sowohl die Ergebnisse der mathematischen Statistikanalyse als auch die Ergebnisse der Simulationsexperimente helfen dabei, eine Verallgemeinerung von NB1 und NB2 auf NBp zu verstehen. Dieser Abschnitt liefert einige dieser Ergebnisse.

3.1. Die NBp-Momentgenerierende Funktion und asymptotische Normalverteilung

Insbesondere weil die Momentenmethode eine nützliche Schätztechnik für den Parameter ÿ **[5] ist, ist die Kenntnis der Momente der NBp-Spezifikation wünschenswert. Das Fehlen von Maximum-Likelihood-Schätzern in geschlossener Form (MLEs, siehe z. B. [6–10]) macht diese folgende Erfindung noch attraktiver.**

3.1.1. Die NBp-Momentgenerierende Funktion (mgf)

Der NBp-mgf ist

$$\frac{1}{{}_N 1 + \mu\ p\ddot{y}1/\ddot{y}\ (1\ \ddot{y}\ e^{\quad T})\ \hat{o}\ddot{y}\mu 2\ddot{y}p\ ,}$$

Machine Translated by Google

wobei der erste Moment über den Ursprung

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\,\mathbf{t}\,\tilde{n}\ddot{y}\,\mu 2\ddot{y}p + \mu\,\mathbf{1}\,\ddot{y}\,e^{\,t\,\hat{o}\ddot{y}}}\Bigg|_{t=0} = \mu,$$

und daher die Momente um den mittleren mgf

$$\ddot{y}\mu t\,\tilde{n}\,\frac{\ddot{y}}{\ddot{y}\,\mathbf{t}\,\tilde{n}\ddot{y}\,\mu 2\ddot{y}p + \mu\,\mathbf{1}\,\ddot{y}\,e^{\,t\,\hat{o}\ddot{y}}}\Bigg|_{t=0}. \tag{3}$$

pÿ1 Das zweite Moment um den Mittelwert ist μ(1 + μ p–1/ÿ).

ÿ ist in diesem vorangehenden ersten Ausdruck sichtbar. Hier 3.1.2. Asymptotische Normalität und ein NBp RV

Matching-Momente sind eine Möglichkeit, Äquivalenz zwischen Verteilungen herzustellen [11].

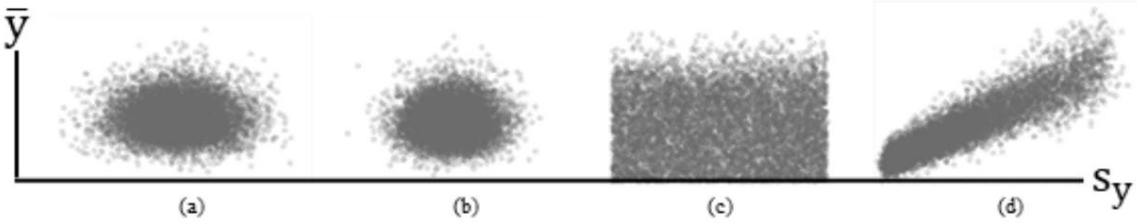
Eigenschaften. Schiefe und Kurtosis, asymptotisches Verhalten für die NBp-Verteilung mit Mittelwert, die aus Gleichung (3) abgeleitet wurden, sind wie folgt:

Bagui und Mehra [12] haben Möglichkeiten, diese asymptotische Eigenschaft zu beweisen, von denen eine in-

$$\textbf{Schiefe} = \frac{\mathbf{1} + \mathbf{2}\,\mu\,p\ddot{y}\mathbf{1}/}{\ddot{y}\,\sqrt{\ddot{y}\mu} \mathbin{»} \mathbf{1} + \mu\,p\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}}, \quad \textbf{und Kurtosis} = \mathbf{3} + + \frac{6\,\mu}{\ddot{y}}\,\frac{p\ddot{y}2}{\mu\,\mathbf{1} + \mu\,p\ddot{y}\mathbf{1}/\ddot{y}\,\ddot{y}}.$$

ÿ); Abbildung 1a]. Abbildung 1 zeigt Streudiagramme von Der Poisson-Schiefe-Term, 1/ √ÿμ, ist in diesem vorangehenden ersten Ausdruck sichtbar. Hier konvergiert die Schiefe nicht notwendigerweise gegen Null und die Kurtosis nicht notwendigerweise gegen 3, es sei denn, der Überdispersionsparameter 1/ÿ sowie p weisen bestimmte Verhaltensweisen und/oder Eigenschaften auf. Mit anderen Worten, die asymptotische Normalität für die NBp-Verteilung ist nicht offensichtlich. Bagui und Mehra [12] bieten Möglichkeiten, diese asymptotische Eigenschaft zu beweisen, eine davon betrifft ihre mgf.

Ein klassischer Satz besagt, dass, wenn Zufallsstichproben aus derselben Normalverteilung (d. h. iid) gezogen werden, ihr Stichprobenmittelwert und ihre Varianzstatistik unabhängig sind [weil s2 eine Funktion von (yi ÿ _ y) ist; Abbildung 1a]. Abbildung 1 zeigt Streudiagramme der Beziehungen zwischen den Stichproben s2 und s2 aus den Ergebnissen von Simulationsexperimenten für 10.000 Replikationen von Stichproben der Größe n = 100 (eine bekannte geeignete Größe, um sicherzustellen, dass der klassische Zentrale Grenzwertsatz funktioniert). Für dieses Experiment beträgt die lineare Korrelation y Korrelationund s2 für eine standardmäßige normale RV (d. h. iid) –0,014 (Abbildung 1a), während die zwischen _ einer NBp RV mit p = 2, μ = 1000 und ÿ = 1000 (d. h. iid) 0,027 beträgt (Abbildung 1b). Eine Erweiterung dieses herkömmlichen, bekannten Satzes lautet wie folgt:



(a): Abbildung 1. Ausgewählte simulierte (10.000 Replikationen, n = 100) y und s2 . Links Beziehungen zwischen _ iid normalen RVs. Links Mitte (b): iid NB2 RVs. Rechts Mitte (c): i~id normale RVs. Rechts (d): i~id NBp RVs.

Satz 1. Die lineare Korrelation zwischen _ y und s2 für eine Mischung aus unabhängigen und nicht-identischen verteilten (i~id) normalen RVs ist Null.

Beweis von Theorem 1. Für eine normale RV kann μ jeder beliebige reelle Wert und ÿ **jede beliebige positive reelle Zahl sein . Da diese beiden Wertesätze auf eine der unendlich vielen möglichen Weisen gepaart werden können, wird jeder Wert von** μ **mit relativ großen, mittle**

Machine Translated by Google

kleine Werte von ÿ ^{2}**, und jeder Wert von** ÿ ^{2} **ist gepaart mit relativ großen, mittleren und kleinen µ-Werten . Folglich ist die lineare Korrelation zwischen diesen beiden Variablen Null.** ÿ

Dieses Ergebnis (siehe Abbildung 1c; r = 0,001) steht im Gegensatz zu dem für ein NBp-RV, für das µ **in der Varianzformel erscheint, was eine lineare Korrelation zwischen den beiden einführt (Abbildung 1d; r = 0,905). Die formale Postulationserweiterung lautet hier wie folgt:**

Satz 2. Die lineare Korrelation zwischen _ p ÿ 1. y und s2 für eine Mischung von i~id NBp RVs ist $> 0\sqrt{\frac{3(2p+1)}{p+2}}$

Beweis von Theorem 2. Der lineare Produkt-Moment-Korrelationskoeffizient ist

$$\text{ÿc} = \frac{\int \text{¶ c0 î } \mu \text{ ÿ Ä c 0} \mu \, d\mu \text{ ä /c ó} \times \text{î } \mu \text{ 1} + \mu \text{ pÿ1/ÿ ÿ Ä c 0 } \mu \text{ 1} + \mu \text{ pÿ1/ÿ } d\mu \text{ ä /c ó } d\mu \text{ © … c 0 } \mu \, d\mu \text{ ä /c}}{\text{ó2 } d\mu \times \ldots \text{ c 0 } \mu \text{ 1} + \mu \text{ pÿ1/ÿ } d\mu \text{ ä /c ó2 } d\mu \text{ 0 î } \mu \text{ ÿ Ä c 0 î } \mu \text{ 1} + \mu \text{ pÿ1/ÿ ÿ Ä c}}.$$

limcÿÿ ÿc = weil $\text{p} \to \infty \sqrt{\frac{3(2p+1)}{p+2}}$**.** ÿ

Dieser neue Satz besagt, dass, wenn p = 1 (also eine Poisson-RV), dann ÿ **= 1 ist und für den Standard-NB2-Fall von p = 2** ÿ ÿ **0,968. Der Parameter p muss 20 sein, bevor diese lineare Korrelation ungefähr 0,5 beträgt. Der Dispersionsparameter** ÿ **beeinflusst diese lineare Korrelation nicht. Dieser neue Satz besagt, dass für die oben genannten NBp der Stichprobenmittelwert und die Varianz,** _ y **und s2** y **und s2 korrelier[illegible] Verteilungen asymptotisch null ist, wenn p ÿ ÿ. Obwohl diese lineare Korrelation null bleibt, wenn Normalverteilungen gepoolt werden, kann sie für gepoolte NBp-Verteilungen bis zu 1 betragen.**

Bemerkenswert ist, dass Theorem 1 auch für eine Normalverteilung gilt, die in einer solchen Weise eingeschränkt ist In diesem ^{2} **= µ(1 +** µ **p–1/ÿ), mit entsprechenden Einschränkungen für p und** µ **(z. B. muss p gleich sein). Linear speziellen Fall der Normalverteilung tritt eine Korrelation auf, wenn** ÿ **gerade ist und das** µ ^{2} **-Bereichsintervall [–1, 0] aus dem Bereich von** ÿ entfernt werden muss. **Dies** kann zum Beispiel durch Auferlegung einer **Einschränkung wie** µ **> 0 geschehen, die dann auch zulässt, dass p ungerade ist und es zu einer linearen Korrelation kommt, die durch Theorem 2 beschrieben wird.**

3.2. MLE und Momentenschätzungsmethode (MME) des Dispersionsparameters *ÿ*

Es gibt verschiedene Schätzverfahren, darunter MLE, MME (siehe z. B. [6,13]) und Kleinstquadrate (siehe [14–16]). Häufig führen diese Verfahren zu genau denselben Schätzern. Die Schätzung des Dispersionsparameters 1/ÿ eines NBp erfolgt häufig durch MLE und/oder MME. Ein µ **näher an Null und eine kleine Stichprobengröße können zu einer Situation führen, in der ein MLE und/oder MME ungenau und/oder instabil ist. MME ist das einfachere der beiden Verfahren zur Schätzung von 1/ÿ [5]. Ein MLE kann keine Lösung erzeugen, die ein Schätzer in geschlossener Form für diesen NBp-Parameter ist (siehe Anhang A).**

3.2.1. Schätzung des Parameterexponenten p

Anstatt p = 2 zu setzen, wird in Gleichung (1) p als Parameter verwendet, allerdings als ein Parameter, der auf positive Ganzzahlen beschränkt ist (d. h. diskret, nicht kontinuierlich). Als dritter Parameter erfordert die MME-Schätzung beispielsweise das Hinzufügen des dritten Moments um den Mittelwert, m3, zu den Schätzgleichungen. Dementsprechend gilt:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \text{ÿ yi /n} = \bar{\text{ja}},$$

Machine Translated by Google

$$\ddot{y} = \mu \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu^{p}}{yi\ \ddot{y}\ \mu)\ 2/(n\ \ddot{y}\ 1)\ \mu + \ddot{y}}, \text{ Und}$$

$$\frac{1 + 2\ \mu\ p\ddot{y}1/}{\ddot{y}\ \mu \gg 1 + \mu p\ddot{y}1/\ddot{y}} = \frac{\ddot{y}^{3}\ \sum_{i=1}^{N} yi\ \ddot{y}\ \mu)}{n\ \ddot{y}\ 1}.$$

Das Lösen dieses Gleichungstripels nach p ergibt eine Gleichung, die weder p enthält, noch die Gleichung, die das vierte Moment enthält. Daher kann MME keine Schätzung von p liefern. Unterdessen gelingt es einem MLE, der hier die Differenzrechnung beinhaltet, weil p eine ganze Zahl ist, nicht, eine Lösung in geschlossener Form zu erzeugen.

Die Implikation dieses Ergebnisses ist, dass die Verallgemeinerung des Standard-NB2-Varianzterms von μ(1 + μ/ÿ) **auf den verallgemeinerten NBp-Term μ(1 +** μ **p–1/ÿ) der Quasi-Likelihood-Schätzung in Bezug auf den Parameter p ähnelt . Bezeichnet man zu groß, dann ist** $\frac{1}{\ddot{y}}$ **ähnlich** $\ddot{y}^{\ddot{y}1}$ **zu** $\ddot{y}^{\ddot{y}1}$ **;**
ein k-ter Vielfaches von μ **(d. h.** ^{k}**), wobei k eine positive ganze Zahl ist, kann daraus effektiv faktorisiert werden** μ **unter der Bedingung p = 2 + k). Diese Faktorisierung ist über die Werte von μi** hinweg nicht-konstant , **wobei der Index i eine einzelne Beobachtung bezeichnet, wenn der Mittelwert von Beobachtung zu Beobachtung variiert (dies ist die Situation, die Greene [1] präsentiert).**

3.2.2. Ein einfaches n = 3 Zahlenbeispiel

Betrachten Sie eine Stichprobe der Größe n = 3, wobei die Anzahl der Zählungen pro Beobachtung, Y, wie folgt: yi = {2, 5, 8}. Dann

$$\bar{y} = (2 + 5 + 8)/3 = 5 \text{ und } s^{2} = 18/(3\ \ddot{y}\ 1) = 9 = 5\ 1 + 5/\ 25/4\ .$$

Die MLEs sind

$$\mu = 5 \text{ und } \ddot{y}^{\ddot{y}1}\ \ddot{y}\ 0{,}0476.$$

Die MMEs sind

$$\mu = 5 \text{ und } \ddot{y}^{\ddot{y}1} = 0{,}1600.$$

Tabelle 1 fasst die Ergebnisse eines Monte-Carlo-Simulationsexperiments mit 10.000 Replikationen (um das Gesetz der großen Zahlen anzuwenden) für NB2[5, 5(1 + 5/0,0476)] und NB2[5, 5(1 + 5/0,1600)] zusamm Abbildung 2 stellt die gemeinsamen MLE- und MME-Schätzungen für diese Simulationsergebnisse dar.

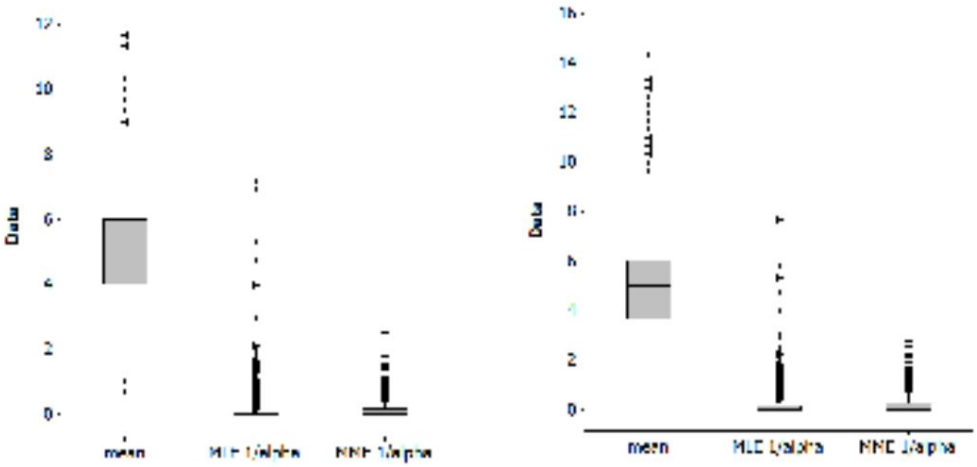
Wie erwartet liefern beide Schätzverfahren eine gute Schätzung des Populationsmittelwerts μ . Die Verfahren liefern unterschiedliche Schätzungen des Dispersionsparameters, obwohl beide innerhalb des 95%-Konfidenzintervalls der Schätzung des anderen liegen. Die MLEs sind häufiger Null als die MMEs. Die meisten dieser Null-MMEs sind tatsächlich negative Schätzungen, die durch Abschneiden durch Null ersetzt wurden (diese Nullwerte wurden bei der Berechnung der zusammenfassenden Statistiken in Tabelle 1 verwendet). Diese Werte sollten als nicht durchführbar betrachtet werden, da ÿ **der Formparameter eines Gamma-RV ist und als solcher positiv sein muss.**
Abbildung 2 zeigt einen visuellen Box-and-Whisker-Plot – die oberen und unteren Kanten einer Box bezeichnen das erste und dritte Quartil, die innere Boxlinie bezeichnet den Median und die Whisker-Spitzen bezeichnen das 1,5-fache des Interquartilsabstands (d. h. die Werte des dritten minus des ersten Quartils) –, der die beiden Schätzer (d. h. die MLEs und MMEs) vergleicht und hervorhebt, dass die MLEs mehr Ausreißer haben (durch Sternchen gekennzeichnet). Zu viele Nullen und eine hohe Häufigkeit von Ausreißerschätzungen für MLEs sowie negative Schätzungen für MMEs sind einige der Gründe, warum diese Schätzer als ungenau und/oder instabil gelten. Eine allgemeine Implikation dieser Ergebnisse ist, dass keiner der Schätzer besonders gut für kleine Stichproben geeignet ist, dass aber MME durchaus vorzuziehen sein kann. Dieser Fall mit der kleinen Stichprobe zeigt, dass ein MLE und ein MME unterschiedliche Schätzungen liefern können (siehe auch [17]).

Machine Translated by Google

Tabelle 1. Zusammenfassung der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation für NB2[5, 5(1 + 5/0.0476)] und NB2[5, 5(1 + 5/0,1600)].

Parameter	Schätzen	Standard Abweichung	Reichweite	% 0 s	% < 0
		Verwendung von MLEs als Populationsparameter			
μ	4.984	1,410	0,7–11,7		
1/ÿMLE 1/	0,073	0,231	0,0–7,2	71.1	
ÿMME	0,113	0,213	0,0–2,7	5.4	52,2
		unter Verwendung von MMEs als Populationsparameter			
μ	5,003	1,714	0,3–14,3		
1/ÿMLE 1/	0,137	0,315	0,0–7,7	0,295 0,0–2,8	58,4
ÿMME	0,190			1.3	40,6

, ZUR PEER-REVIEW



(A) (B)

Abbildung 2. Boxplots der Monte-Carlo-Simulationsexperimente (wie üblich kennzeichnen Sternchen Ausreißer). Links (a): NB2[5, 5(1 + 5/0.0476)]. Rechts (b): NB2[5, 5(1 + 5/0.1600)].

3.2.3. Moran-Eigenvektor-Räumliche Filterung: Ein kurzer Überblick

Der nächste Abschnitt präsentiert ein einfaches Beispiel, das vor allem für Kriminologen von Interesse ist, Ökologen, Unternehmer und Vermarkter, Umweltwissenschaftler, Epidemiologen, Geoanalysten, Soziologen, Stadtplaner und Urbanisten sowie Stadt- und Regionalökonomen, unter anderem die Bevölkerungsdichte, vielleicht eine der am häufigsten genutzten Kovariaten in den Sozial- und Verhaltenswissenschaften; es dient als Vorwort zu Abschnitt 4. Georeferenzierte Daten erfordern räumliche Statistik/Ökonometrie-Methodik, um richtig latente SA in diesen Daten berücksichtigen. SA ist die Korrelation zwischen Beobachtungen, die entsteht aufgrund ihrer relativen Nähe im geografischen Raum, weil sie entweder betroffen sind von einen gemeinsamen Faktor oder sie interagieren direkt miteinander über den geografischen Raum hinweg. Es ist monofaktoriell oder sie interagieren direkt miteinander über einen geographischen Raum hinweg. Es ist analog zur seriellen Korrelation in Zeitreihendaten, aber komplexer als diese (siehe z. B

Moran Eigenvektor-Raumfilterung (MESF) ist eine relativ neue Methode zur Handhabung

Moran Eigenvektor-Raumfilterung (MESF) ist eine relativ neue Methode zur Handhabung von SA in Daten [19–21]. MESF verwendet eine Reihe synthetischer Proxy-Variablen, die extrahiert als Eigenvektoren aus einer doppelt zentrierten n-mal-n-Raumgewichtsmatrix (SWM), räumliche Gewichtsmatrix (SWM), sagen wir C, die oft binär (0–1) ist und n geografische Objekte im Raum miteinander verbindet (was bedeutet, dass sie paarweise direkt durch einen Eintrag von eins korreliert sind) und diese dann hinzufügt Vektoren als Kontrollvariablen für eine Regressionsmodellspezifikation; SWMs sind analog zu

Vektoren als Kontrollvariablen für eine Regressionsmodellspezifikation; SWM

ungerichtete planare Graph-Adjazenzmatrizen. Diese Kontrollvariablen identifizieren und isolieren stochastische räumliche Abhängigkeiten zwischen einer Reihe von georeferenzierten Beobachtungen, Filterung dieser

stochastische räumliche Abhängigkeiten zwischen einer Reihe georeferenzierter Beobachtungen, Herausfiltern dieser Abhängigkeiten aus den Residuen eines Modells und Hinzufügen dieser zur mittleren Antwort des Modells, Dadurch kann das Regressionsmodell mit georeferenzierten Beobachtungen weiter entwickelt werden, die ahmen Unabhängigkeit nach.

zentrierter SWM, der von MESF genutzt wird. Dieser Index kann in Matrixform wie folgt geschrieben werden:

Machine Translated by Google

Der Moran-Koeffizient (MC; [22]) SA-Index, einer von mehreren existierenden Indizes – z. B. das Geary-Verhältnis (GR; [23]) – bildet die Grundlage für MESF; sein Zähler enthält das von MESF genutzte doppelt zentrierte SWM. Dieser Index kann in Matrixform wie folgt geschrieben werden:

$$(n/1^{T}\ C1)Ja^{T}(I \ddot{y}\ 11T/n)C(I \ddot{y}\ 11T/n)Y/Y\ T \qquad (I \ddot{y}\ 11T/n)Y, \tag{4}$$

wobei n beispielsweise die Anzahl der Polygone in einem Shapefile eines geografischen Informationssystems ist; Y ein n-mal-1-Vektor von Attributwerten ist; I eine n-mal-n-Identitätsmatrix ist; 1 ein n-mal-1-Vektor von Einsen ist; der hochgestellte Buchstabe T die Matrixtransponierte bezeichnet und C hier ein binäres 0–1- SWM ist, bei dem 1 bedeutet, dass die Zeilen- und Spaltenflächeneinheiten (d. h. Standorte, z. B. Shapefile- Polygone) eine gemeinsame Grenze ungleich Null haben, und 0 bedeutet, dass dies nicht der Fall ist (d. h. die Definition der Turm-Adjazenz, eine Die Eigenfunktionen (d. h. die gepaarten Eigenwerte und Eigenvektoren) werden aus der folgenden Matrix extrahiert, die doppelt zentriert ist, weil die Matrix C vor und nach der Multiplikation mit der Projektionsmatrix (I ÿ 11T/n) wie folgt im Zähler des Ausdruck

$$(Ich \ddot{y}\ 11T/n)C(Ich \ddot{y}\ 11T/n). \tag{5}$$

Wenn ein Eigenwert der Matrix (5) mit (n/1 TC1) multipliziert wird, wird er in den MC umgewandelt, der die SA in seinem zugehörigen Eigenvektor-Abbildungsmuster von reellen Zahlenelementen misst **[24,25]. Das Vorzeichen eines Eigenwerts gibt die Art der durch den entsprechenden Eigenvektor dargestellten SA an, während sein Betrag den Grad der SA angibt. Die extremen Eigenwerte des Matrixausdrucks (4) bestimmen die Grenzen von MC, die nicht notwendigerweise ±1** betragen

Das Extrahieren der Eigenfunktionen aus angepassten SWMs stellt eine spektrale Zerlegung dieser Matrizen dar. Die extrahierten Eigenvektoren mit zugehörigen Eigenwerten , die relativ weit von Null entfernt sind und daher nicht vernachlässigbare SA darstellen, können aufgrund der besonderen Kartenmuster, die sie bei der Visualisierung darstellen, als Darstellung globaler, regionaler oder lokaler Komponenten von SA angesehen werden [27,28]. Mit anderen Worten manifestiert sich SA in Form ähnlicher (positiver SA; PSA) oder unähnlicher (negativer SA; NSA) Werte der Clusterung der Variablen Y auf einer Karte: Hot Spots (d. h. ähnliche Clusterung relativ hoher Werte), Cold Spots (d. h. ähnliche Clusterung relativ niedriger Werte) oder Kontraste (d. h. relativ unähn

3.2.4. Eine empirische Darstellung der Bevölkerungsdichte in Puerto Rico im Jahr 2010

Puerto Rico ist in fünf landwirtschaftliche Verwaltungsregionen unterteilt, wie es seit über einem Jahrhundert üblich ist, wobei sich jede Region auf einen der größten städtischen Ballungsräume der Insel konzentriert (Abbildung 3). Die geografische Verteilung der Bevölkerungsdichte von 1899 für diese räumliche Auflösung weist eine übermäßige Extra-Poisson-Variation (Abweichung = 1723, was weit über dem erwarteten Wert von 1 liegt) und eine moderate PSA auf. Die Tabelle in Abbildung 3b zeigt den angepassten SWM- Eigenvektor, der diese PSA darstellt [MC = 0,221, wobei sein Maximum (MCmax) 1,094 und GR = 0,474 beträgt]. Dieses Szenario berücksichtigt eine allgemein anerkannte Quelle der Überdispersion, nämlich die Korrelation zwischen Beobachtungen (d. h. abhängige Daten, Autokorrelation), die in räumlichen Statistiken häufig vorkommt; beispielsweise macht die SA ungefähr die Hälfte aller erkannten

Machine Translated by Google

SWM-Eigenvektor, der diese PSA darstellt [MC = 0,221, mit seiner Maxime

(a)

region	SJ	A	M	P	C	eigenvector
SJ: San Juan	0	1	0	1	1	0.37175
A: Arecibo	1	0	1	1	0	−0.37175
M: Mayagüez	0	1	0	1	0	−0.60150
P: Ponce	1	1	1	0	1	0.00000
C: Caguas	1	0	0	1	0	0.60150

(b)

Abbildung 3. Die landwirtschaftlichen Verwaltungsregionen (AAR) von Puerto Rico von 1899 (durch rote Ränder gekennzeichnet). Schwarze Linien kennzeichnen die Gemeindegrenzen. Tertile Choroplethenkarte: schwarz, grau und weiß, bezeichnen relativ hohe, mittlere und relativ niedrige Bevölkerungsdichte. Links (a): die Gemeinde-AAR-Choroplethenkarte. Rechts (b): die AAR-Raumgewichtsmatrix und ihr relevanter Eigenvektor.

Eine NB2-Beschreibung dieser geografischen Verteilung der Bevölkerungsdichte ergibt die globale MLE von μ = e5,6361 ÿ 280,4 Einwohner pro Quadratmeile, mit einem Dispersionsparameter MLE von $\ddot{y}^{\ddot{y}1}$, ÿ 0,0010 (also fast ein Poisson-RV). Die Spezifikation des Eigenvektor-Raumfilters (ESF),

$\ddot{y}\ddot{y}1$ **ÿ 280,4 Einwohner pro Quadratmeile, mit einem Dispersionsparameter MLE, ÿ 0,0010 (also fast ein Poisson-RV). Der Eigenvektor-Raumfilter (ESF) beschreibt eine räumlich variierende mittlere Bevölkerungsdichte nach Regionen [also 283,6 (SJ), 278,6 (A), 295,7 (M), 271,6 (P) und 272,4 (C)] um einen globalen Mittelwert von 280,2 und reduziert die Über- SWM, Dispersionsparameter auf 0,0006 (ähnelt noch mehr einem Poisson-RV).**

beschreibt eine räumlich variierende mittlere Bevölkerungsdichte nach Region [dh 283,6 (S

Der globale MME von μ ist ebenfalls e5,6361 ÿ 280,4. Der Dispersionsparameter MME von $\ddot{y}^{\ddot{y}1}$ beträgt –0,0001, was dazu führen würde, dass es auf 0 gerundet wird. Schließlich ist die räumlich variierende

$\ddot{y}\ddot{y}1$ **ÿ 280,4. Der Streuungsparameter MME mittlere Bevölkerungsdichte nach Regionen ist jedoch wie folgt: 280,1 (SJ), 280,6 (A), 280,8 (M), 280,4 (P), und 280,0 (C). Diese Ergebnisse scheinen schlechter zu sein als die der vorherigen MLE-Gegenstücke.**

4. Diskussion: Zwei empirische Beispiele für MESF

Die vorangegangenen Beispiele in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.4 dienen lediglich der Veranschaulichung. In diesem Abschnitt werden zwei empirische Beispiele vorgestellt, deren Ergebnisse informative inhaltliche Auswirkungen.

4.1. Eine empirische Fallstudie zur städtischen Bevölkerungsdichte in Puerto Rico aus dem Jahr 2010

Abbildung 4a zeigt die geografische Verteilung der städtischen Bevölkerungsdichte (Einwohner pro Quadratmeile) im Jahr 2010 auf der Hauptinsel Puerto Rico. Das Kartenmuster, d Diese geografische Verteilung hat einen MC von 0,487 und einen GR von 0,541, was eine moderate PSA. Aus den MLEs für eine NB2-Modellspezifikation ergibt sich eine globale Dichte von e7,0549 ÿ 1158,5, mit einem Dispersionsparameter von 0,6707 (d. h. beträchtliche Extra-Poisson-Variation). Historisch Die Bevölkerung konzentrierte sich auf die Küstentiefländer der Insel, die bevorzugten Standorte der ersten spanischen Siedler wegen der Bequemlichkeit und Erreichbarkeit, Ausstattung eine Begründung für die Einbeziehung der mittleren Höhe als Kovariate in eine NB2-Regression. aufgrund der Art und Weise, wie sich städtische Gebiete ausdehnen (z. B. durch den Aufbau von Infrastruktur an der ländlich-städtische Randzone), sollte diese Variable PSA enthalten. In diesem Fall führt man NB2 schrittweise aus Die Regressionsschätzung führt zur Auswahl von fünf PSA- und keinem NSA-Eigenvektor aus der aus dem angepassten SWM extrahierte Kandidatensatz, für den MCj/MCmax ÿ 0,25 ist, mit Index j bezeichnet den j-ten Eigenwert. Tabelle 2 fasst die MLE-Ergebnisse zusammen. Sie zeigt dass SA etwa 60 % der Überdispersion in diesen Daten ausmacht, und die einzige Kovariate gekoppelt mit dem konstruierten ESF macht mehr als drei Viertel der räumliche Variation der städtischen Bevölkerungsdichte auf der Hauptinsel Puerto Rico. Mit ein letztes $\ddot{y}^{\ddot{y}1}$ < 0,2, eine dramatische Schrumpfung von fast 0,7, p = 2 scheint angemessen für die NB Modellspezifikation.

Machine Translated by Google

Index j bezeichnet den j-ten Eigenwert. Tabelle 2 fasst die MLE-Ergebnisse zusammen. Sie zeigt wesentliche Unterschiede in der städtischen Bevölkerungsdichte auf der Hauptinsel Puerto Rico. Mit einer $\ddot{y}\ddot{y}1$ abschließenden Modellspezifikation.

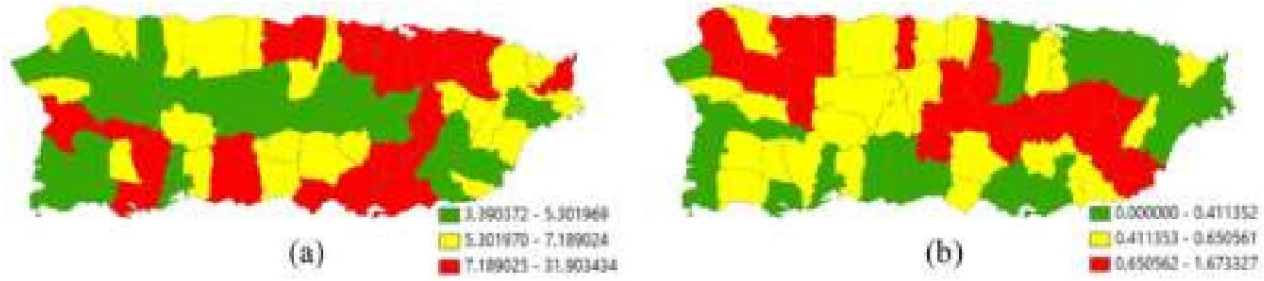


Abbildung 4. Geografische Auflösung des Municipio, Bevölkerungsdichte 2010 (d. h. Einwohner pro Quadratmeile) über die Hauptinsel Puerto Rico; grün, gelb und rot bedeuten jeweils relativ niedrige, mittlere und hohe Dichtewerte. Links (a): städtische Bevölkerung (Extra-Poisson-Variation beträgt 41.183 >> 1). Rechts (b): ländliche Bevölkerung (Extra-Poisson-Variation ist 1427 >> 1).

Tabelle 2. Zusammenfassung der Ergebnisse der Modellschätzung.

Modell Spezifikation	NB2 Städtische Bevölkerungsdichte $\ddot{y}1\ddot{y}$	Pseudo-R2	Ländliche Bevölkerungsdichte NB2 $\ddot{y}\ddot{y}1$	Pseudo-R2	NB3 $\ddot{y}1\ddot{y}$	Pseudo-R2
Nur abfangen	0,6707	0	1,8760	0	1,8285	0
Einzelne Kovariate	0,4848	0,18	1,3964	0,48	1,1847	0,48
Kovariate + ESF	0,2021	0,79	1,0399	0,52	1,0065	0,65

HINWEIS: pseudo—R^2 (analog zu Efron) bezeichnet das R2 aus einer bivariaten linearen Regression der beobachteten Von NBp vorhergesagte Bevölkerungsdichte (z. B. [29–32]).

4.2. Eine empirische Darstellung der ländlichen Bevölkerungsdichte in Puerto Rico im Jahr 2010

Abbildung 4b zeigt die geografische Verteilung der ländlichen Bevölkerungsdichte im Jahr 2010 über die Hauptinsel Puerto Rico. Das Kartenmuster, das diese geografische Verteilung charakterisiert hat einen MC von 0,496 und einen GR von 0,511, was einen moderaten PSA-Wert bedeutet. Aus den MLEs für ein NB2 Modellspezifikation beträgt die globale Dichte e4,1298 ÿ 62,2, mit einem Dispersionsparameter von 1.8760. Ländliche und städtische Gebiete schließen sich gegenseitig aus, was eine Begründung für die Einbeziehung der Dichte des ländlichen Raums als Kovariate. Da ländlicher Raum dazu neigt, sich außerhalb von städtischen Gebiete, was darauf hindeutet, dass es PSA enthält, und vor allem, weil die Ausweitung des städtischen Landes bedeutet die Verkleinerung der ländlichen Flächen, insbesondere entlang der Land-Stadt-Grenze, mit dieser räumlichen Konkurrenzprodukte deuten darauf hin, dass es NSA enthält. Diese Variable sollte jedoch eine PSA-NSA-Mischung enthalten. In diesem Fall führt die schrittweise NB2-Schätzung zur Auswahl von fünf Eigenvektoren, vier mit PSA und einer mit NSA (also eine Mischung). Tabelle 2 fasst die MLE-Ergebnisse zusammen. zeigt, dass SA etwa 26 % der Überdispersion in diesen Daten ausmacht, und die

Eine einzelne Kovariate in Verbindung mit dem konstruierten ESF macht mehr als die Hälfte der räumlichen Variation der ländlichen Bevölkerungsdichte auf der Hauptinsel Puerto Rico. Mit einem endgültigen $\ddot{y}$ $\ddot{y}1$ > 1, p = 2 scheint für die Spezifikation des NB-Modells unzureichend zu sein. Die Einstellung von p = 3 – mit Schätzung ausgeführt über SAS PROC NLMIXED (siehe Anhang B), wobei die NB3-Wahrscheinlichkeitsdichte Es wurde eine Log-Likelihood-Funktion geschrieben, die die modifizierte NB als allgemeine Verteilung ausdrückt [siehe https://stats.oarc.ucla.edu/sas/faq/how-can-i-compute-negative-binomial-models- with-random-intercepts-and-slopes-using-nlmixed/ (zuletzt aufgerufen am 20. März verändert $\ddot{y}\ddot{y}1$, die größer als eins bleibt, während die Pseudo-R2- Werte steigen, wenn ein ESF vorhanden ist; diese letzteren Werte nehmen ab, wenn p = 4, was bedeutet, dass p = 3 der angemessener Wert.

4.3. Eine empirische Studie zur ländlichen Bevölkerung in Puerto Rico im Jahr 2010

Die beiden geographischen Bevölkerungsdichteverteilungen weisen deutlich unterschiedliche Inseldurchschnitte und Extra-Poisson-Variationen auf. Obwohl sie einen sehr ähnlichen SA-Index haben Werte, ihre ESFs zeigen, dass sie sehr unterschiedliche latente Kartenmuster haben (z. B. ein ist durch PSA gekennzeichnet, während die andere durch eine Mischung aus PSA und

Machine Translated by Google

NSA). Eine als städtisch klassifizierte Bevölkerung ist nicht ländlich und umgekehrt, was eine negative Beziehung zwischen diesen beiden geografischen Verteilungen impliziert. Die bivariate Poisson -RV-Korrelation zwischen ihnen beträgt –0,62 (siehe [33]). Schließlich scheint die städtische Bevölkerungsdichte durch ein NB2-Modell gut beschrieben zu werden, während die ländliche Bevölkerungsdichte von einer Beschreibung durch ein NB3-Modell profitieren könnte.

5. Abschließende Bemerkungen und Implikationen

Dieses Papier trägt auf verschiedene Weise zur wissenschaftlichen Literatur bei. Erstens klärt/korrigiert es mehrere ungenaue technische Details in Greenes früherem Papier. Zweitens präsentiert es neue Ergebnisse, darunter die mgf für das NBp-Modell, zwei neue Theoreme und ursprüngliche empirische räumliche statistische/ökonometrische Anwendungen. Drittens veranschaulicht es ausgewählte Eigenschaften kleiner und großer Stichproben in NBp-Modellen. Schließlich demonstriert es erneut die Leistungsfähigkeit von MESF.

Eine wichtige Folge ist, dass quantitative Analytiker und insbesondere angewandte Raumstatistiker, die Poisson- und/oder NB-Variablen untersuchen, ihren Werkzeugkasten um NBp-Spezifikationen erweitern müssen, für die p > 2 ist. Eine weitere Folge ist die Notwendigkeit einer breiteren Anerkennung und Übernahme der MESF-artigen Methodik für korrelierte Daten, einschließlich für traditionelle abhängige Datensätze, Zeitreihen und moderne soziale Netzwerkprojekte. Eine dritte Auswirkung dieses Dokuments ist die Erkenntnis, dass die Zufallsvariable NBp eine Wikipedia-Seite parallel zur bestehenden für die NB benötigt **(https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_binomial_distribution; zuletzt aufgerufen am 15. Mai 2024).**

Die vielleicht schwerwiegendste Einschränkung des NBp ist das Fehlen geschlossener MLEs. Obwohl dieser Variablennachteil in der Statistik nichts Neues ist, stellt er ein Hindernis für die erfolgreiche Nutzung einer Variablen dar. Dies ist sicherlich ein Thema, das weitere Forschungen zum NBp motivieren sollte. Eine weitere Einschränkung ist seine Neuheit, was bedeutet, dass die Stärken und Schwächen seiner Verwendung im Vergleich zu **alternativen RVs noch ermittelt werden müssen.**

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Erklärung zur Datenverfügbarkeit: Die in diesem Dokument verwendeten Daten sind beim United States Census Bureau (z. B. die Daten für Puerto Rico) leicht erhältlich oder können (mit Stichprobenfehlern) durch Ausführen eines geeigneten Pseudozufallszahlengenerators gewonnen werden (in diesem Dokument wurden SAS-Implementierungen verwendet

Danksagung: Der Autor ist Ashbel Smith Chaired Professor für Geoinformationswissenschaften. **enzen.**

Interessenkonflikte: Der Autor erklärt, dass keine Interessenkonflikte vorliegen.

Anhang A. Schätzung der iid NBp-Parameter

MLE

$$L(ÿ, \mu|p) = \prod_{i=1}^{N} Å\, yi+ÿ\mu 2ÿpÿÿ1\, ãÅ \frac{1}{1+\mu pÿ1/ÿ}\, ãÿ\mu 2ÿpÅ\, 1\, ÿ \frac{1}{1+\mu pÿ1/ÿ}\, ãyi$$

$$LN\, L(ÿ, \mu|p) = \sum_{i=1}^{N} ÿ\, ÿLNî\, ÿ\, Ä\, yi + ÿ\mu 2ÿp\, äó \sum_{i=1}^{N} LN\, ÿ\, yi + 1\, ÿ\, nLNî\, ÿ\, Ä\, ÿ\mu 2ÿp\, äó+$$

$$n\mu\ 2ÿp\ /ÿ\ ä\ LNÅ 1+Ä \mu pÿ1/ÿ + \sum_{i=1}^{N} yiLNÇ \mu + \mu pÿ1/ÿ\, å\, ã$$

Sowohl ÿLN L(ÿ, **µ|p) /***ÿµ* **als auch ÿLN** L(ÿ, **µ|p) /***ÿÿ* **ergeben die Polygammafunktion (siehe** z. B. **[34]), die die Ableitung des Logarithmus der Gammafunktion beinhaltet, was verhin**

Machine Translated by Google

algebraische Formulierung von Lösungen in geschlossener Form. Darüber hinaus bestimmt die Beziehung zwischen ÿ, μ und p, ob ein MLE existiert oder nicht.

MME (unter Verwendung des unverzerrten Varianzschätzers)

$$\mu = \frac{\ddot{y}_{ich=1}^{N} yi}{N}$$

$$\mu(1 + \mu/\ddot{y}) = \frac{\ddot{y}_{i=1}^{N} yi)2 \; yi \; _}{\ddot{y}\; n\; \ddot{y}\; 1} \quad \ddot{y}\,\ddot{y} = \frac{\ddot{y}_{i=1}^{N} yi/n^{2}}{\ddot{y}_{yi}^{N}\; \ddot{y}\quad _\; y)2/(n\; \ddot{y}\; 1)\; \ddot{y}\; \ddot{y}_{i=1}^{N} yi/n}$$

Anhang B. SAS PROC NLMIXED-Code

Der folgende SAS-Code bringt sein Verfahren dazu, eine BN3-Spezifikation zu schätzen, indem er einen Term mit Zufallseffekten weglässt. Der folgende Eingabedatensatz (STEP3) enthält die benötigten angepassten SWM-Eigenvektoren, die Antwort- (d. h. Bevölkerungszahlen) und Offset- Variablen (d. h. Logarithmus des Prozentsatzes der ländlichen Landfläche; um undefinierte Terme für null ländliche Landfläche zu vermeiden, wurde null durch eins ersetzt, was trivial ist, weil das kleinste von null verschiedene Maß 9703 ist): PROC NLMIXED DATA = STEP3; PARMS B0 = 0 B1 = 0 B2 = 0 B3 =

0 B4 = 0 B5 = 0 B6 = 0 A = 1,4; P = 3; *XB =

B0 + OFFSET; *XB = B0 + B1*PCTRL + OFFSET; XB = B0 + B1*PCTRL + B2*COL10

+

B3*COL12 + B4*COL15 +

B5*COL20 +B6*COL44 + OFFSET; MU =

EXP(XB); M = 1/A; LL = LGAMMA(Y + M) ÿ LGAMMA(Y + 1) - LGAMMA(M)

+Y*LOG(A*MU(P - 1)) - (Y + M)*LOG(1 + A*MU**(P - 1)); MODELL Y ~**

ALLGEMEIN(LL); VORHERSAGE MU

OUT = MU; AUSFÜHREN;

XB unterscheidet zwischen einem konstanten Mittelwert, einer bivariaten Regression mit der **Kovariate des ländlichen Anteils** und einer MESF-Regression, die diese vorangehende Kovariate einschließt. P = **3 ermöglicht die Schätzung von NB3; wenn P auf 2 gesetzt wird, wird NB2 geschätzt, und wenn P auf 1 gesetzt wird, wird NB1 geschätzt (d. h. eine Poisson-Verteilung). Schließlich speichert die temporäre SAS-Datei WORK.MU die prognostizierten Zählungen für die Nachbearbeitung. Die Optionen NB1 und NB2 unterstützen vergleichende Ausgabeprüfungen mit anderen Softwaremodulen.**

Verweise

1. **Cameron, C.; Trivedi, P.** Regressionsanalyse von Zähldaten; **Cambridge University Press: New York, NY, USA, 1998.**
2. **Barreto-Souza, W.; Ombao, H. Der negative Binomialprozess: Ein handhabbares Modell mit auf zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit basierender Inferenz.** 2021 , 49, **568–592.** [CrossRef]
3. **Greene, W. Funktionale Formen für das negative Binomialmodell für Zähldaten.** Econ. Lett. **2008,** 99, **585–590.** [CrossRef] **4.**
   Di, Y.; Schafer, DW; Cumbie, JS; Chang, JH Das NBP-negative Binomialmodell zur Beurteilung der differentiellen Genexpression aus RNA-Seq. Stat. Appl. Genet. Mol. Biol. **2011,** 10, **1–28.** [CrossRef]
5. **Zhang, Y.; Ye, Z.; Lord, D. Schätzung des Streuungsparameters der negativen Binomialverteilung zur Analyse von Unfalldaten: Bootstrap-Maximum-Likelihood-Methode.** Transp. Res. Rec. J. Transp. Res. Board **2019,** 2019, **15–21.** [CrossRef]
6. **Pearson, K. Methode der Momente und Methode der Maximum-Likelihood.** Biometrika **1936,** 28, **34–59.** [CrossRef]
7. **Hendry, D.; Nielsen, B.** Ökonometrische Modellierung: Ein Likelihood-Ansatz; **Princeton University Press: Princeton, NJ, USA, 2007.**
8. **Chambers, RL; Steel, DG; Wang, S.; Welsh, A.** Maximum-Likelihood-Schätzung für Stichprobenerhebungen; **CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2012.**
9. **Rossi, R.** Mathematische Statistik: Eine Einführung in die wahrscheinlichkeitsbasierte Inferenz; **Wiley: New York, NY, USA, 2018.**
10. **Ward, M.; Ahlquist, J.** Maximum Likelihood für die Sozialwissenschaften: Analysestrategien; **Cambridge University Press: New York, NY, USA, 2018.**

Machine Translated by Google

11. Hoeffding, W. Die Aussagekraft von Tests auf Basis von Permutationen von Beobachtungen bei großen Stichproben. Ann. Math. Stat. **1952,** 23, **169–192.** [Querverweis]

12. Bagui, S.; Mehra, K. Zur Konvergenz der negativen Binomialverteilung. Am. J. Math. Stat. **2019, 9, 44–50.**

13. Bowman, K.; Shenton, L. Estimator: Method of moments, Encyclopedia of Statistical Sciences, Band 3 (D'Agostino Test of Normality to Eye Estimate), **2. Aufl.; Kotz, S., Read, C., Balakrishnan, N., Vidakovic, B., Johnson, N., Hrsg.; Wiley: New York, NY, USA, 2006; Seiten 2092–2098.**

14. van de Geer, S. Ein neuer Ansatz zur Kleinstquadrate-Schätzung, mit Anwendungen. Ann. Stat. **1987,** 15, **587–602.** [CrossRef] **15. van de Geer, S. Kleinste Quadrate-Schätzung. In** Encyclopedia of Statistics in Behavioral Science; **Everitt, B., Howell, D., Hrsg.; Wiley: Chichester, UK, 2005; Band 2, S. 1041–1045. Online verfügbar: https://people.math.ethz.ch/~geer/bsa199_o.pdf (abgerufen am 1. März 2024).**

16. Wolberg, J. Datenanalyse mit der Methode der kleinsten Quadrate: So gewinnen Sie möglichst viele Informationen aus Experimenten; **Springer: Berlin, Deutschland, 2005.**

17. Delicado, P.; Goria, MN Ein kleiner Vergleich von Maximum-Likelihood-, Momenten- und L-Momenten-Methoden für die asymmetrische exponentielle Leistungsverteilung. Comput. Stat. Data Anal. **2008,** 52, **1661–1673.** [CrossRef]

18. Griffith, DA Eine Familie korrelierter Beobachtungen: Von unabhängigen bis zu stark miteinander verbundenen. Stats **2020, 3, 166–184.** [Querverweis]

19. Griffith, D. Räumliche Filterung. In Encyclopedia of Geographic Information Science; **Kemp, K., Hrsg.; SAGE: Thousand Oaks, CA, USA, 2008; S. 413–415.**

20. Griffith, D.; Getis, A. Räumliche Filterung. In Encyclopedia of GIS, **2. Aufl.; Shekhar, S., Xiong, H., Zhou, X., Hrsg.; Springer: Cham, Schweiz, 2016; S. 1–14.** [CrossRef]

21. Griffith, D.; Chun, Y. Räumliche Autokorrelation und räumliche Filterung. In Handbook of Regional Science, **2. Aufl.; Fischer, M., Nijkamp, P., Hrsg.; Springer-Verlag: Berlin, Deutschland, 2022; S. 1863–1892 (überarbeitet, Aktualisierung auf die Version von 2014).**

22. Moran, P. Die Interpretation statistischer Karten. JR Stat. Soc. B **1948,** 10, **243–251.** [CrossRef]

23. Geary, RC Das Kontiguitätsverhältnis und die statistische Kartierung. Incorp. Stat. **1954, 5, 115–127+129–146.** [CrossRef]

24. Tiefelsdorf, M.; Boots, B. Die genaue Verteilung von Moran's I. Environ. Plan. A **1995,** 27, **985–999.** [CrossRef]

25. Griffith, DA Räumliche Autokorrelation und Eigenfunktionen der geografischen Gewichtungsmatrix, die georeferenzierte Daten begleitet. Geogr. Can. **1996,** 40, **351–367.** [CrossRef]

26. de Jong, P.; Sprenger, C.; van Veen, F. Über Extremwerte von Morans I und Gearys c. Geogr. Anal. **1984,** 16, **17–24.** [CrossRef]

27. Borcard, D.; Legendre, P. Räumliche Analyse ökologischer Daten in allen Maßstäben mittels Hauptkoordinaten von Nachbarmatrizen. Ecol. Modell. **2002,** 153, **51–68.** [CrossRef]

28. Borcard, D.; Legendre, P.; Avois-Jacquet, C.; Tuomisto, H. Analyse der räumlichen Struktur ökologischer Daten auf mehreren Skalen. Ecology **2004,** 85, **1826–1832.** [CrossRef]

29. Cameron, AC; Windmeijer, FAG Ein R-Quadrat-Maß für die Anpassungsgüte einiger gängiger nichtlinearer Regressionsmodelle. J. Econ. **1997,** 77, **329–342.** [CrossRef]

30. Christensen, R. General Prediction Theory and the Role of R2, unveröffentlichtes Manuskript; **Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico: Albuquerque, NM, USA, 2007; Online verfügbar: https://www.math.unm.edu/~fletcher/JPG/rsq.pdf (abgerufen am 1. März 2024).**

31. Hoetker, G. Der Einsatz von Logit- und Probit-Modellen in der strategischen Managementforschung: Kritische Aspekte. Strat. Manag. J. **2007,** 28, **331–343.** [Querverweis]

32. Cakmakyapan, S.; Demirhan, H. Ein auf Monte Carlo basierender Pseudo-Determinationskoeffizient für verallgemeinerte lineare Modelle mit binärem Ergebnis. J. Appl. Stat. **2016,** 44, **2458–2482.** [CrossRef]

33. Kawamura, K. Die Struktur der bivariaten Poisson-Verteilung. Kodai Math. J. **1973,** 25, **246–256.** [CrossRef]

34. Mortici, C. Sehr genaue Schätzungen der Polygammafunktionen. Asymptot. Anal. **2010,** 68, **125–134.** [CrossRef]

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Beziehung zwischen inverser Langevin-Funktion und r0-r1-Lambert-W-Funktion

Roy M. Howard

Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Curtin University, Perth, WA 6845, Australien; r.howard@curtin.edu.au

Zusammenfassung: Die Beziehung zwischen der inversen Langevin-Funktion und der vorgeschlagenen r0 -r1 -Lambert W- Funktion wird definiert. Die abgeleitete Beziehung führt zu neuen Näherungen für die inverse Langevin- Funktion mit niedrigeren relativen Fehlergrenzen als vergleichbare veröffentlichte Näherungen. Hochgenaue Näherungen, die auf Schröders Wurzelnäherungen der ersten Art basieren, werden detailliert beschrieben. Mehrere Anwendungen werden detailliert beschrieben.

Stichwörter: inverse Langevin-Funktion; Lambert-W-Funktion; Schröder-Näherung

1. Einleitung

Die Langevin-Funktion tritt in verschiedenen Kontexten auf, einschließlich des klassischen Modells des Paramagnetismus [1] und des idealen frei verbundenen Kettenmodells, z. B. [2]. Sie ist definiert, z. B. [3], gemäß:

$$y = L(x) = 0, \quad \coth(x) \ddot{y} \frac{1}{x}, \quad x \ddot{y} (0, \ddot{y}) \quad x = 0 \quad L(\ddot{y}x) = \ddot{y}L(x) \tag{1}$$

Während die Langevin-Funktion gut definiert ist, haben ihre $\ddot{y}^1$, hat keine Umkehrfunktion, die mit L bezeichnet wird , und ihre bekannte analytische Form sowie erhebliche Forschungsanstrengungen zu vielen Näherungen geführt. Die Arbeiten von Itskov (2012) [4], Nguessong (2014) [5], Darabi (2015) [6], Jedynak (2015) [7], Kröger (2015) [8], Marchi (2015) [9], Rickaby (2015) [10], Petrosyan (2017) [11], Jedynak (2018) [12], Marchi (2019) [13] und Howard (2020) [14] liefern nützliche Näherungen. Graphen der Langevin-Funktion und der inversen Langevin-Funktion sind in Abbildung 1 dargestellt.

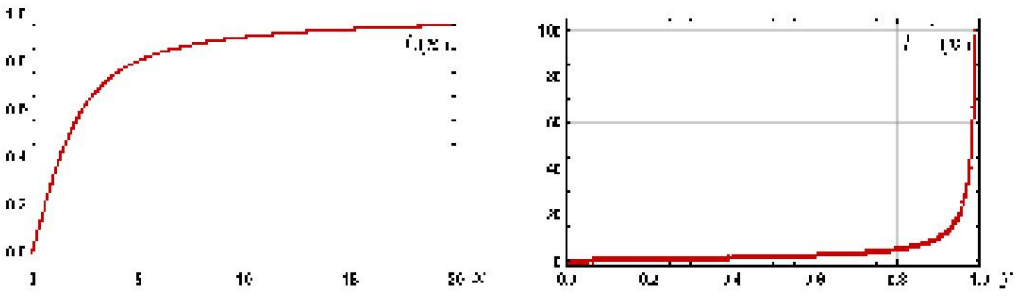


Abbildung 1. Graphen der Langevin- und inversen Langevin-Funktionen.

Mezÿo und Keady [15] beschreiben detailliert die Beziehung zwischen der inversen Langevin-Funktion ÿ und einer Verallgemeinerung der Lambert-W-Funktion. Obwohl eine solche Beziehung wichtig ist, erleichtert sie nicht direkt das Finden von Näherungen für die inverse Langevin-Funktion, da die verallgemeinerte Lambert-W-Funktion keine explizite analytische Form hat. Der Beitrag dieses Papiers besteht darin, eine Beziehung zwischen der inversen Langevin-Funktion und der r0-r1-Lambert-W-Funktion zu beschreiben, die eine Verallgemeinerung der r-Lambert-W-Funktion ist

Zitat: Howard, RM Beziehung zwischen inverser Langevin-Funktion und r0-r1-Lambert-W-Funktion. AppliedMath 2024, 4, 743–762. https://doi.org/10.3390/ appliedmath4020040

Wissenschaftlicher Redakteur: Valery Karachik

Erhalten: 25. März 2024

Überarbeitet: 18. Mai 2024

Akzeptiert: 21. Mai 2024

Veröffentlicht: 14. Juni 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz. Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

Machine Translated by Google

die von Mezÿo [16], **Mezÿo und Baricz [17] und Jamilla [18] untersucht wurde . Die hergeleitete Beziehung führt zu neuen Näherungen für die inverse Langevin-Funktion mit potenziell niedrigeren relativen Fehlergrenzen als vergleichbare Näherungen. Verbesserte Näherungen, basierend auf Schröders Wurzelnäherungen der ersten Art, z. B. [19–21], werden detailliert beschrieben. Mehrere Anwendungen der Ergebnisse werden ebenfalls detailliert beschrieben.**

Abschnitt 2 beschreibt ausführlich die Definitionen, die diesem Dokument zugrunde liegen. Abschnitt 3 beschreibt ausführlich die Beziehung zwischen der inversen Langevin-Funktion und der vorgeschlagenen r0-r1-Lambert-W-Abschnitt 4 beschreibt Näherungen für die r0-r1-Lambert-W-Funktion und damit die inverse Langevin-Funktion. Abschnitt 5 beschreibt die Erstellung von Näherungen mit höherer Genauigkeit durch die Verwendung von Schröders Wurzelnäherungen erster Art. Mehrere Anwendungen der Ergebnisse werden in Abschnitt 6 beschrieben. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und Schlussfolgerungen finden Sie in Abschnitt 7.

2. Begriffsbestimmungen

Durch Verwendung der auf der Exponentialfunktion basierenden Definition des hyperbolischen Kotangens Funktion, gilt folgende alternative Definition für die Langevin-Funktion:

$$y = L(x) = \frac{x\ddot{y}1+(1+x)e^{\ddot{y}2x}}{x(1\ddot{y}e\ddot{y}2x)}, \quad x > 0, y \ddot{y} (0, 1). \tag{2}$$

Daraus folgt, dass die Beziehung zwischen x und y = L(x) äquivalent durch **eine der folgenden Gleichungen definiert ist :**

$$e^{\ddot{y}2x} = \frac{1 \ddot{y} x(1 \ddot{y} y)}{1 + x(1 \ddot{y} y)} \tag{3}$$

$$f(x, y) = 1 \ddot{y} (1 \ddot{y} y)x \ddot{y} [1 + (1 + y)x]e^{\ddot{y}2x}, \quad f(x, y) = 0, \tag{4}$$

Für x > 0, y ÿ (0, 1). **Die Grafik der Funktion f ist in Abbildung 2 dargestellt. Diese Funktion untermauert eine Verbindung zwischen der inversen Langevin-Funktion und einer Verallgemeinerung der Lambert-W-Funktion. Die folgenden Definitionen sind für die Herstellung der erforderlichen Verbindung von grundlegende**

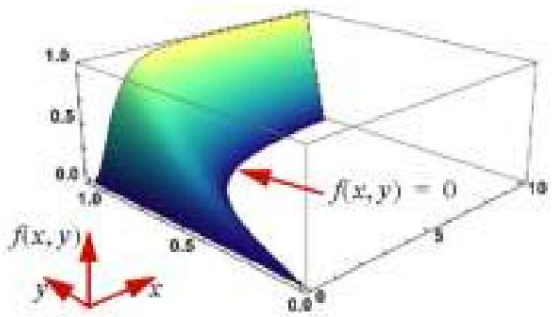


Abbildung 2. Graph von f(x, y).

Definition 1. Lambert-W-Funktion.

Die Lambert-W-Funktion, bezeichnet mit W, ist die Umkehrfunktion von h, d. h. h ÿ1 (z) = W(z), wobei h ÿ( ) = ( ) wie folgt definiert ist:

$$z = h(w) = we^{w}. \tag{5}$$

=ÿ( ) = .

Für den allgemeinen Fall, w ÿ C, ist die Lambert-W-Funktion mehrwertig, z. B. [22]. Für den reellen Fall, w ÿ (ÿÿ, ÿ), **ist der Hauptzweig der Lambert-W-Funktion, bezeichnet** mit **W0, dem Intervall w ÿ [ÿ1,** ÿ) zugeordnet , **während der negative Zweig, bezeichnet** mit **Wÿ1, dem Intervall w ÿ (ÿÿ,** ÿ1) zugeordnet **ist . ÿ (ÿÿ, ÿ) ÿ [ÿ1, ÿ) ÿ (ÿÿ, ÿ1)**

O

,ÿ,

,ÿ,

Machine Translated by Google

Definition 2. Verallgemeinerte Lambert-W-Funktion.

Die verallgemeinerte Lambert-W-Funktion, z. B. [15], wird bezeichnet als

$$B \begin{matrix} ÿ1, \cdots, ÿn \; ÿ1, \cdot \\ \cdot\cdot, ÿn \end{matrix} z \tag{6}$$

und ist die Umkehrfunktion der Funktion h, die definiert ist gemäß

$$z = h(w) = e^{m \cdot \frac{(w ÿ ÿ1)\cdot\cdot\cdot(w ÿ ÿn)\,(w ÿ ÿ1)\cdot}{\cdot\cdot(w ÿ ÿn)}} \tag{7}$$

Für den allgemeinen Fall w, ÿ1, · · · , ÿn, ÿ1, · · · , ÿn ÿ C, aber oft ist der reale Fall von Interesse.

Definition 3. r-Lambert-W-Funktion.

Die r-Lambert-W-Funktion, z. B. [16–18], bezeichnet mit h ÿ1 oder Wr , ist die Inverse von hr , definiert gemäß

$$hr(w) = rw + wew . \tag{8}$$

Für den allgemeinen Fall w,r ÿ C. Eine Verallgemeinerung dieser Funktion ist die r0-r1-Lambert- W-Funktion.

Definition 4. r0-r1-Lambert-W-Funktion.

Die r0-r1-Lambert-W-Funktion, bezeichnet mit $h ÿ1_{r0,r1}$ oder Wr0,r1, ist die Umkehrung von hr0,r1, also definiert gemäß:

$$hr0,r1 (w) = r0 + r1w + wew . \tag{9}$$

Für den allgemeinen Fall w,r0,r1 ÿ C. In diesem Artikel wird der reale Fall betrachtet.

2.1. Link: Inverse Langevin-Funktion und verallgemeinerte Lambert-W-Funktion

Eine Manipulation von (3) (siehe [15] Abschnitt 2.2.1) führt zu der Beziehung

$$M^{ÿ1}(y) = ÿ2W\left(\frac{\frac{2}{ÿ+1}}{2\,jaÿ1}\,\frac{ja\,ÿ\,1}{ja+1}\right) \tag{10}$$

die die inverse Langevin-Funktion direkt mit der allgemeinen Lambert-W-Funktion verbindet.
Obwohl eine solche Verknüpfung wichtig ist, erleichtert sie nicht direkt die Suche nach Näherungen für die inverse Langevin-Funktion, da eine explizite analytische Näherung für die Lambert- W-Funktion unbekannt ist und die Forschung zur Entwicklung von Näherungen im Gange ist, z. B. [23,24].
Die Beziehung zwischen der inversen Langevin-Funktion und der r0-r1-Lambert-W-Funktion, die neue Näherungen ergibt, wird weiter unten nach dem nächsten Unterabschnitt ausführlich beschrieben, in dem etablierte Näherungen für die inverse Langevin-Funktion aufgelistet sind.

2.2. Veröffentlichte Näherungen

Repräsentative Näherungen für die inverse Langevin-Funktion umfassen:

$$L^{ÿ1}_{0,1}\, ÿ\, y\, 25\, 75\frac{3y\,24y\,22y}{(y) = \cdot 1\, ÿ + 1}^{2} \tag{11}$$

$$L^{ÿ1}_{0,2}(y) = 1\,\frac{3y}{ÿ\,y}\,\frac{}{1\,ÿ\,2\,5}\,Jahre\cdot\,\frac{2^{2}}{}\,\frac{j^{4}}{15} + 15\,\frac{2j^{6}}{} \tag{12}$$

$$L^{ÿ1}_{0,3}\, y(y) = 3y + \sin 5\,\frac{2}{}\,\frac{}{Jahre\ 2}^{7}\,ja\,\frac{3}{+\,1\,ÿ\,ja} \tag{13}$$

Machine Translated by Google

$$L^{\ddot{y}1}_{0,4} = \frac{2 \text{ ja } 3 \ddot{y} y (y)}{1 \ddot{y} ja^2} \quad \frac{10/3 \text{ Jahre}}{2} + 3 \text{ Jahre}^5 \; y \ddot{y} \frac{76}{100} \quad (y \ddot{y} 1) \tag{14}$$

$$L^{\ddot{y}1}_{0,5}(y) = \frac{4}{3 \text{ Jahre} + 2 \text{ Jahre } 2 + 3 \text{ Jahre } 3 + 4 \text{ Jahre}} 1\ddot{y}y+b2(y\ddot{y}y\ 2)+b3(y\ 2\ddot{y}y\ 3)+b4(y\ 3\ddot{y}y\ 4) \text{ , [4/4] ca.}$$
$$\text{a2} = \ddot{y}6{,}98408968, \text{ a3} = 5{,}69026957, \text{ a4} = \ddot{y}1{,}35415696, \text{ b2} = \ddot{y}1{,}33411915, \text{ b3} = 0{,}03919556, \text{ b4} = 0{,}64694651, \tag{15}$$

die jeweils in **[5,8,11,13,14] veröffentlicht wurden . Die relativen Fehlergrenzen (siehe Definition unten), die mit diesen Näherungen über das Intervall** [0, 1] verbunden sind , **betragen: 9,69 × 10ÿ3 1,79 × 10ÿ3 , 2,75 × 10ÿ3 , , 7,22 × 10ÿ4 und 1,80 × 10ÿ4 .**

2.2.1. Relative Fehlergrenze

Für eine beliebige Funktion f , definiert über das Intervall *[ÿ,* ÿ], hat **eine Näherungsfunktion fA einen relativen Fehler an einem Punkt x1, der gemäß re(x1)** = **1 ÿ fA(x1)/ f(x1) definiert ist. Die relative Fehlergrenze für die Näherungsfunktion über das Intervall** *[ÿ,* ÿ] **ist definiert gemäß:**

$$\text{reB} = \max\{|re(x1)| : x1 \ddot{y} [\ddot{y}, \ddot{y}]\} \tag{16}$$

In diesem Artikel wurde Mathematica verwendet, um die Analyse zu erleichtern und numerische Ergebnisse zu erhalten. Im Allgemeinen wurden relative Fehlerergebnisse im Zusammenhang mit Näherungen durch gleichmäßiges Abtasten des Intervalls [0, 1] **mit 1000 Punkten erhalten.**

3. Beziehung zwischen inversem Langevin und r0-r1-Lambert W-Funktion

$x = L^{\ddot{y}1}$ **Mit der Funktion f , definiert nach (4), ist es so, dass f(x,** y) = **0 ist, wenn** (y). **Dann gilt folgendes Ergebnis:**

Theorem 1. Beziehung: r0-r1-Lambert W-Funktion und inverse Langevin-Funktion

Mit hr0,r1 und f, die durch (9) bzw. (4) definiert sind, ergibt sich das allgemeine Ergebnis

$$\text{hr0(y),r1 (y) (w)} = r0(y) + \text{r1(y)w} + \text{wew} = \text{k f(y)f} \quad \frac{\ddot{y}1}{1+y} \quad \frac{m}{2}, \text{ y , y } \ddot{y} = \ddot{y}1, \tag{17}$$

gilt für den Fall x, y ÿ R, wenn

$$\ddot{y}2/(1+y)\ r0(y) = \frac{(1+y)\ 4e}{2}, \ r1(y) = 1+y\ \frac{(1\ddot{y}y)e\ \ddot{y}2/}{(1+y)}, \quad (1+y)\ k\ f(y) = \frac{2e\ \ddot{y}2/}{1+y}, \text{ y } \ddot{y} = \ddot{y}1. \tag{18}$$

Daraus folgt, dass

$$\text{hr0(y),r1 (y) (w)} = \frac{4e\ \ddot{y}2/(1+y)}{(1+J)^2} + \frac{w(1\ddot{y}y)e\ \ddot{y}2/}{(1+y)} + \text{wew, y } \ddot{y} = \ddot{y}1, 1+y \tag{19}$$

und die inverse Langevin-Funktion kann definiert werden gemäß

$$M^{\ddot{y}1}(y) = \frac{\ddot{y}1}{1+y} \quad \frac{h^{\ddot{y}1}_{(0)}}{r0\ (j),r1\ (j)\ 2}, \quad 0 \ddot{y} y < 1. \tag{20}$$

Beweis von Theorem 1. Der Beweis ist im Anhang A ausführlich beschrieben. ÿ

3.1. Bestimmung der Wurzel

von h In Übereinstimmung mit (20) kann die inverse Langevin-Funktion definiert werden, sobald die entsprechende Wurzel von hr0(y),r1 (y) bekannt ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass

$$\text{hr0(j),r1 (j)} \quad \frac{\ddot{y}2}{1+Jahr} = 0, \text{ y } \ddot{y} = \ddot{y}1, \tag{21}$$

Machine Translated by Google

Graphen von r0(y) und r1(y) für den Fall 0 < y < 1

Abbildung 3. Graphen von r0(y) und r1(y) für den Fall 0 < y < 1.

Abbildung 4. Graphen von hr0(y),r1(y) (w) für die festgelegten y-Werte 0,01 und 0,5.

Abbildung 5. Graphen von h (0,1), was das Negative der Wurzel von hr0(y),r1(y) (w) ist.

3.1.1. Graphen

Für den Fall 0 < y < 1 gilt 1/e < r0(y) < 4/e und 0 < r1(y) < 1/e. Graphen von r0(y) und r1(y) für den Fall 0 < y < 1 sind in Abbildung 3 dargestellt. Der Graph von hr0(y),r1 (y) (w) ist in Abbildung 4 für zwei festgelegte Werte von y dargestellt, um die Art der Variation von hr0(y),r1 (y) (w) für festgelegte Werte von y zu veranschaulichen. Die Variation der Graphen von hr0(y),r1 (y) (w) für alle y (0,1) ist in Abbildung 5 dargestellt. Der Graph von h (0,1) ist in Abbildung 5 dargestellt, was sich von dem in (20) angegebenen Graphen unterscheidet. Dieses Ergebnis ist jedoch mit einem Zweig von h verbunden, der mit dem Zweig von hr0(y),r1 (y) (w) in Beziehung steht, der für alle y (0,1) gültig ist.

3.1.2. Erforderlicher Zweig für die Wurzel von h

Die Variation von hr0(y),r1 (y) (w) mit w ist in Abbildung 4 zusammen mit der ersten negativen Wurzel von w = ÿ2/(1 + y) gemäß Definition in (21) dargestellt. Die erforderliche Wurzel liegt links vom lokalen Maximum von hr0(y),r1 (y) (w), das sich links von der ersten negativen Wurzel befindet. Um festzustellen, wo dieses lokale Maximum auftritt, betrachten wir die Ableitung

$$\frac{dh}{dw} = r1(y) + (1 + w)e^{h\, r0(y),r1(y)}. \quad (22)$$

Machine Translated by Google

Die Wurzel dieser Funktion, bezeichnet mit wm, tritt auf, wenn (1 + wm)e wm = ÿ ( ) 0< ( ) ÿ 1 ÿ =1+ nach einer Variablen = ÿer1(ÿ). Da 0 < 1(ÿ) ÿ 1/e Änderung der = 0,r1(y) = 1/e 0 < < 1, 0 < ( ) < 1/ ÿ ( ), ÿer1(ÿ) = 1 + wm1, wobei w1e 1/e0 ÿ ÿ < 1 (siehe Abbildung 3), gilt = 0, ( ) = 1/ ÿ1/ , ÿ1/e, y für y

$$= \quad w1e^{w1} = \quad 2 \quad 2 \qquad (23)$$

mit Lösungen, die mit der Natur der Lambert-W-Funktion übereinstimmen, z. B. [22], definiert gemäß

$$= w1 \; \ddot{y}1, \quad \ddot{y}1, \quad 0\,0 \;\; y = 0 = \qquad (24)$$

W0[ÿer1(ÿ)] oder Wÿ1[ÿer1(ÿ)], [ÿ ( )] [ÿ ( )], wobei 0< < 1 < y < 1

W0 die Hauptzweiglösung und Wÿ1 der

negative Einserzweig ist. Es ist der negative Einserzweig, der die erforderliche Lösung liefert und daher gilt:

$$= wm \pm \quad \ddot{y}2, \; y = 0 = 0 \qquad (25)$$

$$< 1 \qquad \ddot{y}1 + W\ddot{y}1[\ddot{y}er1(y)], \; 0 < y < 1 \; \ddot{y}1 + [\ddot{y}\,(\,)], \; 0 <$$

Das Ziel ist also, die Wurzel von **hr0(y),r1 (y) (w) für** den Fall w ÿ wm zu ermitteln . Die Natur (z) ist in Abbildung 6 für die **hr0(y),r1 (y) (w) und dessen Umkehrfunktion w = h (), ()( ) von z =** **Fall von w ÿ wm und einem festen Wert von y.**

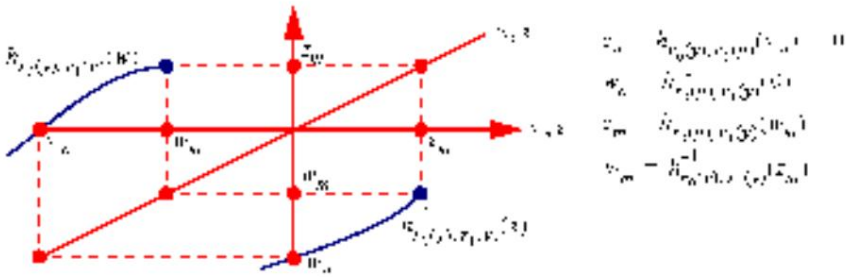


Abbildung 6. Darstellung der Funktionen z = hr0(y),r1(y) (w) und w = h (), ()( ) w ÿ wm (z) für y fest und

4. Näherungen für die inverse Langevin-Funktion

Theorem 1 führt eine Näherung für h r0(y),r1 **(y) ÿ(),() (0) 0ÿ <1 zu einer Näherung für die inverse Langevin-Funktion.** (0), **für 0 ÿ y < 1, führt In Übereinstimmung mit Um Näherungen für ÿ1** (0) zu ermitteln, **betrachten wir zunächst die folgenden zwei Näherungen mit eingeschränktem Definitionsbereich, die sich** aus der in Anhang **B beschriebenen Analyse ergeben :**

$$\ddot{y}1 \qquad (0) \; \ddot{y} \; \ddot{y}2 \; \ddot{y} \; 4y, \; 0 < y \; \ddot{y} \; 1, \; h \; r0(y),r1 \; (y) \; y = 1 \; \ddot{y} \; \ddot{y}, \; 0 < \ddot{y} \; \ddot{y} \; 1.$$

$$h^{\ddot{y}1}(0) \; \ddot{y} \; r0(y),r1 \; (y) \quad \frac{\ddot{y}2}{1\ddot{y}y}, \qquad (26)$$

Diese Näherungen stimmen mit der Näherung erster Ordnung überein:

$$\ddot{y}1 \qquad \ddot{y}2 \qquad \ddot{y}2 \qquad 2$$

$$(0) = h \; 1,r0(y),r1 \; (y) \quad \ddot{y} \; 2y = 1\ddot{y}y \quad \cdot 1 + y \; \ddot{y} \; y \; 1\ddot{y}y \quad , \quad 0 \; \ddot{y} \; y < 1, \qquad (27)$$

Konsistenz ergibt sich zunächst aus der Tatsache, dass **ÿ2/(1 ÿ** y) **ÿ** ÿ2(1 + y), **0 < y ÿ 1 gilt und die Näherung für y ÿ 0** daher wie gefordert **ÿ2 ÿ 4y ist .** Zweitens nähert sich die Näherung im Fall von **y = 1 ÿ ÿ, 0** < **ÿ ÿ 1** wie gefordert **ÿ2/(1 ÿ** y) an. **Abbildung 7** zeigt **ein Maß für den Fehler** dieser Näherung . **Die relative Fehlergrenze für das Intervall (0,** 1) **beträgt 4,45 × 10ÿ2 .**

Machine Translated by Google

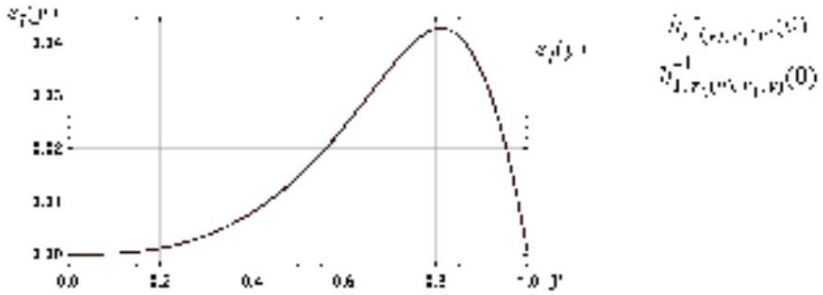


Abbildung 7. Graph über dem Intervall y ÿ (0, 1) **eines Maßes für den relativen Fehler el in der Näherung** h ÿ1 **(0) wie in (27) definiert, bis h** (0). ÿ, (), ()

Die durch (27) definierte Näherung und das **in Abbildung 7** gezeigte **relative Fehlermaß el ÿ, (), () (0) = ÿ [1+ ÿ], 0 ÿ < 1, sind konsistent mit**

und diese Beziehung bietet eine nützliche Grundlage für die Erstellung besserer Näherungen. Zu den verbesserten Näherungen gehören: ÿ,(),() (0) =

Abbildung 8 **zeigt Diagramme der Größenordnung der relativen Fehler dieser Näherungen. Die jeweiligen relativen Fehlergrenzen für diese Näherungen und das Intervall (0,** 1) **betragen 4,66 × 10ÿ3 , 2,33 × 10ÿ4 und 4,58 × 10ÿ5 .**

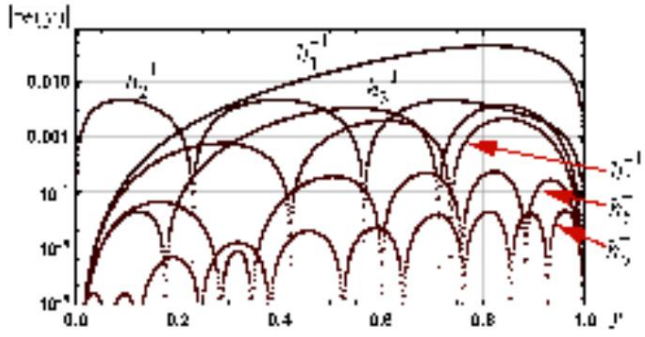


Abbildung 8. Graphen der Größenordnung des relativen Fehlers in Näherungen an h (0), wie **sie in (27) und (29) bis (33) definiert sind .**

Machine Translated by Google

4.1. Zugehörige Langevin-Näherungen

Angesichts der Beziehung $L^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$, Wie in Theorem 1 dargelegt, führen die obigen Näherungen für $h(0)$, wie sie in (27) und (28) bis (33) spezifiziert sind, jeweils zu $r_0(y), r_1(y)$ den folgenden Näherungen für die inverse Langevin-Funktion:

$$T_1^{-1}(y) = \frac{3y - y^3}{1 - y^2} \tag{34}$$

$$L_2^{-1}(y) = \frac{y(3 - y^2)}{1 - y^2}, \quad d_{21} = \frac{301}{1000}, \quad d_{22} = \frac{d_{21}\sin(y) + d_{22}\sin(y/2)}{y(y) + y(y/2)} \tag{35}$$

$$L_3^{-1}(y) = \frac{y(3 - y^2)}{1 - y^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{20}y^2 + \frac{9}{560}y^4}{1 + \frac{1}{5}y^2 + \frac{1}{21}y^4} \tag{36}$$

$$L_4^{-1}(y) = \frac{y(3 - y^2)}{1 - y^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{7}y^2 + \frac{1}{63}y^4}{1 + \frac{2}{7}y^2 + \frac{1}{9}y^4} \tag{37}$$

$$L_5^{-1}(y) = \frac{y(3 - y^2)}{1 - y^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{11}y^2 + \frac{3}{308}y^4}{1 + \frac{4}{11}y^2 + \frac{6}{308}y^4 + \frac{1}{308}y^6} \tag{38}$$

$$L_6^{-1}(y) = \frac{y(3 - y^2)}{1 - y^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{11}y^4 + \frac{5}{429}y^6}{1 + \frac{6}{11}y^2 + \frac{3}{11}y^4 + \frac{5}{143}y^6} \tag{39}$$

Diagramme der Größenordnung der relativen Fehler in diesen Näherungen sind in Abbildung 9 dargestellt. (0,1)

Die mit diesen Näherungen bzw. für das Intervall **(0,** 1) **verbundenen relativen Fehlergrenzen betragen : 4,94 × 10ÿ2 1,83 × 10ÿ2 4,37 × 10ÿ3 2,44 × 10ÿ3 2,58 × 10ÿ4 und 4,85 × 10ÿ5 .**

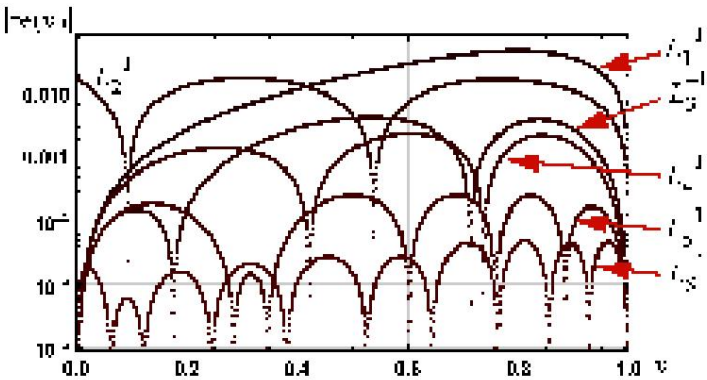


Abbildung 9. Graphen der Größenordnung des relativen Fehlers in Näherungen $L_1^{-1}(y)$ bis $L_6^{-1}(y)$ an L (34) bis (39).

Hinweise

Die in den Näherungen **h und L verwendeten Koeffizienten sind unterschiedlich, und 2,r0(y),r1 (y)** wurden so gewählt, dass ihre jeweiligen relativen Fehlergrenzen im Intervall **[0,** 1] minimiert wurden.

Die vierte Näherung, wie sie in (37) gegeben ist, hat eine relative Fehlergrenze von 2,44 × 10ÿ3 sin( ) + sin( ) ist in der Form der von Kröger [8] vorgeschlagenen und in 1ÿ (12) angegebenen Näherung ähnlich. Die vorgeschlagene Näherung enthält ein Polynom der Ordnung sieben (anstatt sechs) 301 und erreicht eine etwas niedrigere relative Fehlergrenze. 1000 Die fünfte (38) und sechste (39) Näherung , .

erreichen niedrigere relative Fehlergrenzen als die veröffentlichten Näherungen von Nguessong [5] und Marchi [13] , die in (14) und (15) angegeben sind. 3

Machine Translated by Google

Die vorgeschlagenen Näherungen ergänzen die Liste der veröffentlichten Näherungen für die inverse Langevin-Funktion und weisen relative Fehlergrenzen auf, die mit vergleichbaren veröffentlichten Näherungen übereinstimmen oder niedriger sind. Weitere Näherungen müssen noch vorg

5. Schröder-basierte Näherungen höherer Ordnung Aus der

Schröder- **Wurzelnäherung erster Art ergeben sich folgende allgemeine Näherungen für eine inverse Funktion ,** zB **[25] (Gleichung (21)), [19] (Gleichung (17)), [20] (Abschnitt 3) und [21]:**

Theorem 2. Schröder-basierte Näherungen für eine inverse Funktion Betrachten Sie

eine reelle Funktion f , die mindestens bis zur Ordnung n differenzierbar **und außerdem streng monoton in einem Intervall um einen Punkt x0** ist , **der die Nullstelle xo von g(x)** = **f(x) ÿ yo** enthält , **die nahe bei x0 liegt. Eine Taylorreihe n-ter** Ordnung für **g basierend auf dem Punkt (y0,** x0), **y0** = **f(x0) ÿ yo, ergibt die Schröder-Näherung n-ter** Ordnung für **xo** = **f, definiert gemäß** $\ddot{y}1$ **(yo), bezeichnet mit xn, und**

$$xn = x0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{(\ddot{y}1)\ddot{y}^{k}[\,f(x0)\ddot{y}\,yo]^{k}}{k!}\cdot D(k)\,f^{\ddot{y}1}[\,f(x0)]\,,\quad n\ddot{y}\{1,2,\cdots\}, \tag{40}$$

wobei D(k) der Operator ist, der die Differenzierung k-ter Ordnung bezeichnet. Eine explizite Form ist

$$\begin{aligned}
xn = x0\ddot{y} & f^{(1)}(x0) \frac{f(x0)\ddot{y}yo}{} \cdot \frac{[\,f(x0)\ddot{y}yo\,]^{2} f^{(2)}(x0)}{2[\,f^{(1)}(x0)]^{3}} \cdot \frac{[\,f(x0)\ddot{y}yo\,]^{3}}{6[\,f^{(1)}(x0)]^{4}} (3)(x0)\cdot \ddot{y}1 + f^{(1)}(x0)f \frac{3[\,f^{(2)}(x0)]^{2} f}{} \\
& \frac{[\,f(x0)\ddot{y}yo\,]^{4} f^{(4)}(x0)}{24[\,f^{(1)}(x0)]^{5}} \ddot{y} f^{(1)} \frac{10\,f^{(2)}(x0)f^{(3)}(x0)\cdot 1}{(x0)f^{(4)}(x0)\,15\,f^{(2)}(x0)f} + \frac{15[\,f^{(2)}(x0)]^{3}}{[\,f^{(1)}(x0)]^{2} f^{(4)}(x0)} \\
& \frac{[\,f(x0)\ddot{y}yo\,]^{5} f^{(5)}(x0)}{120[\,f^{(1)}(x0)]^{6}} \cdot \ddot{y}^{(5)}(x0) \frac{(4)(x0)\,\ddot{y}1 + f^{(1)}(x0)f}{105[\,f^{(2)}(x0)]^{2}} + \frac{10[\,f^{(3)}(x0)]\,f}{(1)(x0)f^{(5)}(x0)^{4}} \ddot{y}' \\
& \frac{f^{(3)}(x0)}{2[\,f^{(1)}(x0)]^{2} f^{(5)}(x0)} + \frac{105[\,f^{(2)}(x0)]^{3}}{[\,f^{(1)}(x0)]^{4} f^{(5)}(x0)} \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y} \\
& \frac{[\,f(x0)\ddot{y}yo\,]^{6} f^{(6)}(x0)}{720[\,f^{(1)}(x0)]^{7}} \cdot \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y} f^{(1)}(x0)f^{(6)}(x0)\,280\,f^{(2)} \frac{21\,f^{(2)}(x0)f^{(5)}(x0)\,1}{(x0)[\,f^{(3)}(x0)][\,f^{(1)}(x0)]^{2} f^{(6)}(x0)} \frac{35\,f^{(3)}(x0)f^{(4)}(x0)\,f}{(1)(x0)f^{(6)}(x0)} + \frac{1260[\,f^{(2)}(x0)]^{3} f^{(3)}(x0)}{[\,f^{(1)}(x0)]^{3} f^{(6)}(x0)} + \frac{945[\,f^{(2)}(x0)]^{4}}{[\,f^{(1)}(x0)]^{4} f^{(6)}(x0)} \ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y} \\
& \cdots + \frac{(\ddot{y}1)^{N}[\,f(x0)\ddot{y}yo\,]^{N}}{N!}\cdot D(n)\,f^{\ddot{y}1}[\,f(x0)]
\end{aligned} \tag{41}$$

Beweis von Theorem 2. Dieses Ergebnis ergibt sich aus einer Taylorreihennäherung für g-Punkte (y0, x0) $\ddot{y}1$ **am und dem Umkehrfunktionstheorem. Siehe zum Beispiel [21].** ÿ

5.1 Näherungen erster, zweiter und dritter Ordnung für hÿ1 (0)

Betrachten Sie hr0(y),r1 (y) (w) = r0(y) + **r1(y)w** + **wew, mit r0 und r1 wie in (18) definiert, und (0), wobei das eine erste Näherung für h (0)** wird $\ddot{y}1$ implizit **als h** r0(y),r1 **(y)** $\ddot{y}1$ **0 Argument von y ist bezeichnet** und als auf dem Intervall **[0,** 1] **liegend angenommen . Daraus folgt, dass die erste, zweite basierte Näherungen dritter Ordnung für h** r0(y),r1 **(y) h** $\ddot{y}1$ (0), **bezeichnet mit h Schröder-** $\ddot{y}1$ **1 und** (0), $\ddot{y}1$ **2** (0) **und h** $\ddot{y}1$ **3 (0) sind:**

$$h^{\ddot{y}1}_{1}(0) = 2\,1 \frac{\ddot{y}4 + (1 + y)\,2w\,2\,2\exp w + 1+y}{\ddot{y}\,ja\;\; + (1 + y)\;\; 2\,(1 + w)\exp w + 1+y\;w=h} \quad {}^{\ddot{y}1}_{0}(0) \tag{42}$$

Machine Translated by Google

$$h_2^{\ddot{y}1}(0) = \frac{\ddot{y}4+(1+y)\,2w\,2\exp w+\sqrt{1+y}\,(1+w)^{\frac{2}{2}}}{1\ddot{y}y\,2+(1+y)^{2}\exp w+\sqrt{1+J}} \quad \text{Erfahrung}\ \frac{4+(1\ddot{y}y\,2)w+(1+y)\,2w}{2(1+y)\,1\ddot{y}y+(1+y)(1+w)\exp w+\sqrt{1+J}}\ \frac{2}{w+1+y}^{2}(2+w)\exp w+1+y^{\frac{2}{3}} \quad (43)$$

$$w = h_0^{\ddot{y}1}(0)$$

$$h_3^{\ddot{y}1}(0) = h_2^{\ddot{y}1}(0\ddot{y}) \quad \frac{4+1\,\ddot{y}\,y^{2}\,w+(1+y)\,2w\exp w+1+y^{\frac{2}{3}}\cdot}{\ddot{y}(1\ddot{y}y)(3+w)+(1+y)(9+8w+2w\,2)\exp w+\frac{2}{1+J}^{5}} \quad (44)$$

$$6\,(1+J)^{2}\ 1\ddot{y}y+(1+y)(1+w)\exp w+1+y^{\frac{2}{2}} \qquad w = h_0^{\ddot{y}1}(0)$$

Die Beweise für diese Ergebnisse sind ausführlich in Anhang C aufgeführt.

Ergebnisse

Die relativen Fehlergrenzen, die mit den obigen Näherungen verbunden sind und auf h basieren, $h_0^{\ddot{y}1}(0)$ **wie in (27) und (29) bis (33) angegeben, sind in Tabelle 1 aufgeführt. Spezielle Fälle werden weiter unten ausführlich beschr**

5.2. Näherungen erster Ordnung: explizite Fälle

Die allgemeine Näherungsform erster Ordnung, die durch (42) spezifiziert ist, führt zu den unten aufgeführten Näherungen , die für **y ÿ [0,** 1] **gültig sind . Die zugehörigen Näherungen für die inverse Langevin-Funktion können dann konsistent mit Theorem 1 definiert werden.**

5.2.1. Fall 1

Mit der anfänglichen Näherung $h_{1,r0(y),r1(y)}^{\ddot{y}1}(0)$ **spezifiziert durch (27), folgt, dass**

$$h_1^{\ddot{y}1}(0) = (1 \quad \frac{\ddot{y}4(1\,\ddot{y}\,y)^{2}+4\,1+2y\,\ddot{y}\,y\exp^{3\,2}\ \frac{\ddot{y}6\ \text{Jahre}}{1\ddot{y}j^{2}}\ \text{Jahre}\cdot 1\ \frac{2}{\ddot{y}\,3}}{+y)(1\,\ddot{y}\,y)^{3}\,\ddot{y}\,(1\,\ddot{y}\,y\,2)\,1+4y+y^{2}\ \ddot{y}\,2\ \text{Jahre}^{3}\ \exp\ \frac{\ddot{y}6\ \text{Jahre}}{1\ddot{y}j^{2}}\ \text{Jahre}\cdot 1\ \frac{2}{\ddot{y}\,3}} \quad (45)$$

Dies hat eine relative Fehlergrenze von 2,69 × 10ÿ4 . Die relative Fehlergrenze in der zugehörigen Näherung für die inverse Langevin-Funktion beträgt 3,36 × 10ÿ4 .

5.2.2. Fall 2

Mit der durch (30) definierten Näherung $h_{1,r0(y),r1(y)}^{\ddot{y}1}(0)$ **folgt, dass**

$$H_1^{\ddot{y}1}(0) = \frac{\ddot{y}4(1\ddot{y}y)\,2+(1+y)\,2\,[\ddot{y}2\ddot{y}2y+2y\,2+y\ 7/2\ddot{y}y\ 9/2]\,[1+3y\ddot{y}2y\,2\ddot{y}y^{2}\exp[pE(y)]}{(1\ddot{y}y)^{3}(1+y)\ddot{y}(1\ddot{y}y)(1+y)^{2}\ 7/2+y\ 9/2]\exp[pE(y)]} \quad (46)$$

$$pE(y) = \frac{\ddot{y}6y}{1\ddot{y}j^{2}}\cdot 1\,\ddot{y}\ \frac{2}{\text{und}\ 3}\ \frac{5/2}{\text{und}\ 6}+6^{\frac{9/2}{J}}$$

Dies hat eine relative Fehlergrenze von 8,52 × 10ÿ6 . Die relative Fehlergrenze in der zugehörigen Näherung für die inverse Langevin-Funktion beträgt 1,17 × 10ÿ5 .

5.2.3. Fall 3

Mit der Näherung $h_{4,r0(y),r1(y)}^{\ddot{y}1}(0)$ **definiert durch (31), folgt, dass**

$$h_1^{\ddot{y}1}(0) = \frac{\ddot{y}4(1\ddot{y}y)\,2+4(1+y)\,2\,1+y\ddot{y}y\ 2+ja\ \frac{4\ 7\ 2\ddot{y}\ ja\ 6\ddot{y}\ ja}{}^{2}\exp[pE(y)]}{(1\ddot{y}y)^{3}(1+y)\ddot{y}(1\ddot{y}y)(1+y)^{2}\ [1+3y\ddot{y}2y\,2\ddot{y}y\ 4+2y\ 6\ddot{y}y\ 7\ ]\exp[pE(y)]} \quad (47)$$

$$pE(y) = \frac{\ddot{y}6y}{1\ddot{y}j^{2}}\cdot 1\,\ddot{y}\ \frac{2}{\text{und}\ 3}\ \frac{3}{\text{und}\ 6}\ \frac{4}{\text{und}\ 6}\ \frac{5}{\text{Jahre}+3}\ \frac{6}{\text{Jahre}+6}\ \frac{7}{\text{und}\ 6}$$

die eine relative Fehlergrenze von 1,92 × 10ÿ6 hat . **Die relative Fehlergrenze in der zugehörigen Näherung für die inverse Langevin-Funktion beträgt 2,66 × 10ÿ6 .**

Machine Translated by Google

5.2.4. Fall 4

Mit der Näherung h 6,r0(y),r1 (y) ^{ÿ1} (0) definiert durch (33), folgt, dass

$$H^{ÿ1}_{1}(0) = \frac{2+4(1+y)\ 2\ 2ÿ\ y\ 6ÿ\ y\ 1+yÿy\ 2+y\ 2 \quad \sqrt{4\ 7\ ÿ4(1ÿy)} \quad {}^{2}\ 2\ s\ (y)\exp[pE(y)]}{(1ÿy)^{3}(1+y)+(1\ ÿ\ y)\ (1+y)^{2}\ 1ÿyÿ2\ 1+yÿy\ {}^{2+ja\ 2}\sqrt{4\ 7\ 2ÿ\ ja\ 6ÿ\ ja}\ p(y)\ \exp[pE(y)]} \tag{48}$$

Wo

$$p(y) = 1 + ÿ0y\ {}^{2}(1\ ÿ\ ja)^{2}\ 1 + ÿ2y^{2} + ÿ3y^{3} + ÿ4y^{4} + ÿ5y^{5} + ÿ7y^{7} + ÿ8y^{8} \tag{49}$$

$$pE(y) = 1\ ÿ\ \frac{ÿ6\ Jahre}{2}\cdot\frac{ÿ^{\text{und}\ 1\ \frac{2}{ÿ\ 3}}\ \frac{3}{\text{und}}\ \frac{4}{\text{und}\ 6}\ \frac{5}{\text{Jahre}+3}\ \frac{6}{\text{Jahre}+6}\ \frac{7}{\text{und}\ 6}+}{ÿ\ \ 1+ÿ2y^{2}+ÿ3y^{3}+ÿ4y^{4}+ÿ5y^{5}+ÿ7y^{2\ 7}+ÿ8y^{8}\ ÿ}\cdot\frac{ÿ0y(1ÿy\ 2)}{3}^{6\ 2}\cdot 1\ ÿ\ ja^{2}\ 3+j\ \frac{4}{\text{Jahre}\ 2}\ \frac{5}{\text{Jahre}+2}\ \frac{6}{\text{und}}\cdot ÿ \tag{50}$$

Diese Näherung hat eine relative Fehlergrenze von 4,07 × 10ÿ10. Die relative Fehlergrenze in der zugehörigen Näherung für die inverse Langevin-Funktion beträgt 6,27 × 10ÿ10 .

5.3 Näherungen zweiter Ordnung

Mit der Näherung h 4,r0(y),r1 (y) ^{ÿ1} (0) definiert durch (31), so folgt aus (43), dass:

$$h^{ÿ1}_{2}(0) = h^{ÿ1}_{1}(0)+\frac{ÿ(1\ ÿ\ y)^{3}\ 1\ ÿ\ ja^{2\ 3\ ÿ\ ja}\ \frac{4}{\text{und}}\ \frac{5}{\text{Jahre}+2}\ J\ \frac{6}{+\ 2\ 6}+\ {}^{2}\cdot}{{}^{8\ \text{Jahre}}ÿ\ ÿ\ (1+y)^{3}\ 1\ ÿ\ ja^{2}+y^{3}\ \frac{2\ 4}{3\ \text{Jahre}}\ \frac{5}{\text{Jahre}+2}\ \frac{J}{2}\ \exp[pE(y)]\ ÿ\ ÿ} \tag{51}$$

$$\frac{1ÿ\ ja^{2}\ \frac{3}{\text{und}\ 4}\ \frac{5}{\text{Jahre}+2}\ \frac{6}{\text{und}\ 4}\ \exp[pE(y)]}{(1+y)[(1ÿy)\ 2ÿ(1+y)[1+3yÿ2y\ 2ÿy\ 4+2y\ 6ÿy\ 7\ ]\exp[pE(y)]]^{3}}$$

wobei h 1 ^{ÿ1} (0) und pE(y) sind durch (47) definiert. Die relative Fehlergrenze für diese Näherung beträgt 9,12 × 10ÿ9 . Die relative Fehlergrenze in der zugehörigen Näherung für die inverse Langevin-Funktion beträgt 1,16 × 10ÿ8 .

5.4. Direkte Schröder-Approximation erster Ordnung an die inverse Langevin-Funktion

Betrachten Sie die Schröder-Approximation erster Ordnung an die inverse Langevin-Funktion. basierend auf einer ersten Näherung, bezeichnet mit $^{ÿ1}_{0}L$ und definiert durch

$$T^{ÿ1}_{1}(y) = x\ ÿ\ \frac{L(x)\ ÿ\ y}{L\ (1)\ (x)}_{x = L\ 0^{ÿ1}(j)} \tag{52}$$

Die Natur von $L^{ÿ1}_{1}$ hängt von der Form ab, die für die Langevin-Funktion angenommen wird. Für den Fall von L definiert gemäß L(x) = coth(x) ÿ 1/x, daraus folgt:

$$T^{ÿ1}_{1}(y) = \frac{3\ x\ ÿ\ xsinh(x)ÿ\ 2sinh(x\ )\ ÿ\ xcosh(x) + xysinh(x)ÿ\ ÿ\ sinh(x)}{2\ x\qquad 2}_{x = L\ 0^{ÿ1}(j)} \tag{53}$$

Für den Fall von L, definiert nach (3), folgt:

$$T^{ÿ1}_{1}\ 2[1+\frac{x[2\ ÿ\ x + xy]\ ÿ\ 2x\ 2 + 2x\ (y) = 1\ ÿ\ {}^{2} + xy\ e^{ÿ2x} + x[2 + x + xy]e^{ÿ4\text{-fach}}}{2x\ 2\ ]eÿ2x + eÿ4x}_{x = L\ 0^{ÿ1}(j)} \tag{54}$$

Machine Translated by Google

Vergleich

Die Näherungen, die durch (53) und (54) definiert sind, können kontrastiert werden mit der Näherung die inverse Langevin-Funktion gemäß der in Theorem 1 angegebenen Beziehung, d. h.

$$M^{\ddot{y}1}(y) \ddot{y} 1 \frac{\ddot{y}1}{+ y} \quad h_1^{\ddot{y}1}(0) \over 2 \tag{55}$$

wobei $h_1^{\ddot{y}1}(0)$ ist die Näherung erster Ordnung, definiert nach (42). Zum Vergleich der Näherungen definiert durch (54) und (55), betrachten Sie die anfänglichen Näherungen

$$L_0^{\ddot{y}1}(y) = 1 \frac{3y}{\ddot{y}\, y} \text{Jahre} \cdot \frac{2}{1\ddot{y}25}^{2} \quad \frac{6\,4\,2j\,j +}{15\,15} \tag{56}$$

$$h_0^{\ddot{y}1}(0) = \cdot 1 + \frac{\ddot{y}2}{y\,\ddot{y}\,y\,1\,\ddot{y}\,y}^{2} \quad \frac{4}{\text{und } 2}\,6 + j \quad \frac{7}{\text{und } 2} \tag{57}$$

Die erste wurde von Kröger [8] vorgeschlagen (siehe oben (12)) und hat eine relative Fehlergrenze von 2,75 × 10ÿ3 . Die zweite Näherung ist in (31) spezifiziert und hat eine relative Fehlergrenze von 2,13 × 10ÿ3 . Die Anwendung von (56) in (54) ergibt die Näherung

$$T_1^{\ddot{y}1}(y) = \ddot{y}pE(y)\,\ddot{y}$$

$$(1\,\ddot{y}\,ja)^{2}\ 1 + \frac{2}{\text{und } 2}\ \frac{2}{J}\ \frac{3}{\text{Jahre} + 5\,3}\ \frac{3}{\text{Jahre} + 5}\ \frac{4}{\text{Jahre}}\ 5\ \frac{6\,7\,jj + 10\,5}{6\,7\,jj + + 10}\ \frac{8}{J}\ +$$

$$\ddot{y}\quad (1+y)^{2}\ 1\,\ddot{y}\ \frac{J}{2}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{\text{Jahre}}\ \frac{4}{5}\ \frac{3}{\text{Jahre} + 5}\ \frac{10}{5}\ \frac{5}{8}\ t^{2pE(y)\ddot{y}}$$

$$\ddot{y}\quad \text{Jahre}\ 2\ 1 + \frac{2\ 17}{2}\ \frac{83\,J}{10}^{4} + \frac{J\,2\,6}{37J}\ \frac{8}{50}\ \frac{159}{\text{Jahre} + 50}\ \frac{\text{Jahre}}{10\ 10}\ \frac{12}{28}\ \frac{4}{\text{Jahre } 25}\ 14\ \frac{J}{4\,J + 25}\ t^{pE(y)}\quad \ddot{y} \tag{58}$$

$$(1\ddot{y}ja2)^{2}\ 1+e^{2pE(y)\,\ddot{y}2\,1+16y}\ \frac{2\ddot{y}\ 67\ \text{Jahre}}{5}\ \frac{\text{Jahre } 25\ 6\,4\,12\ \text{Jahre}}{25}\ \frac{144\ \text{Jahre}}{25}\ \frac{8}{25}\ \frac{\text{Jahre}}{25}\ \frac{10}{25}\ \frac{\text{Jahre}}{25}\ \frac{12}{25}\ \frac{\text{Jahre} +}{25}\ \frac{14}{25}\ t\,2pE\,(j)$$

$$pE(y) = \frac{\ddot{y}6\ \text{Jahre}}{1\ddot{y}j}^{2}\ \text{Jahre} \cdot 1\ \ddot{y}\ \frac{2\,2}{5}\ \frac{4}{\text{und } 15}^{+}\ \frac{6}{\text{Jahre } 15}$$

mit einer relativen Fehlergrenze von 7,34 × 10ÿ6 . Im Gegensatz dazu führt die Verwendung von (57) in (42) und dann (55) zu der in (47) spezifizierten Näherung, d.h.

$$h_1^{\ddot{y}1}(0) = \frac{\ddot{y}4(1\ddot{y}y)\ 2+4(1+y)\ 2\ 1+y\ddot{y}y}{(1\ddot{y}y)^{3}\ (1+y)\ddot{y}(1\ddot{y}y)(1+y)^{2}} \quad \frac{4\ 7\ 2\ddot{y}\ ja\ 6\ddot{y}\ ja}{2 + ja\ 2}^{2} \quad \exp[pE(y)]$$

$$[1+3y\ddot{y}2y\ 2\ddot{y}y\ 4+2y\ 6\ddot{y}y\ 7\ ]\exp[pE(y)]$$

$$pE(y) = \frac{\ddot{y}6y}{1\ddot{y}j}^{2\ \cdot 1\ y}\ \frac{2}{\text{und } 3}\ \frac{3}{\text{und } 6}\ \frac{4}{\text{und } 6}\ \frac{5}{\text{Jahre} + 3}\ \frac{6}{\text{Jahre} + 6}\ \frac{7}{\text{und } 6} \tag{59}$$

mit einer relativen Fehlergrenze von 1,92 × 10ÿ6 . Die zugehörige Näherung für $L^{\ddot{y}1}(y)$ ist

$$T_1^{\ddot{y}1}(y) = 1 \frac{\ddot{y}1}{+ y} \quad h_1^{\ddot{y}1}(0) \over 2 \tag{60}$$

und hat eine relative Fehlergrenze von 2,66 × 10ÿ6 .

Offensichtlich haben (59) und (60) eine einfachere Form als (58) und ergeben eine Näherung $L^{\ddot{y}1}$ für (y) mit einer niedrigeren relativen Fehlergrenze. Dies ist zum Teil die Begründung für die Verwendung

Verbindung zwischen der inversen Langevin-Funktion und der r0-r1-Lambert-W-Funktion.

6. Anwendungen

6.1. Grenzwertnäherungen Die

in (26) beschriebenen Näherungen führen zu folgenden Näherungen für die inverse Langevin-Funktion nach Verwendung der in Theorem 1 definierten Beziehung:

$$M^{\ddot{y}1}\ 1+y\ 3\ ,\ 2y\ \frac{3y\ 2y}{1\ddot{y}\ddot{y}}(y)\ \ddot{y} \cdot 1 + \qquad 0 < y\ \ddot{y}\ 1,\ y =$$

$$M^{\ddot{y}1}(y)\ \ddot{y}\quad \frac{}{2}\ , \qquad 1\ \ddot{y}\ \ddot{y},\ 0 < \ddot{y}\ \ddot{y}\ 1. \tag{61}$$

Machine Translated by Google

9 ( ) ÿ 3 + 5 + 297 175 + 1539 875 + ÿ

=1ÿÿ 0 < ÿÿ 1 Diese ( ) ÿ

Näherungen können mit etablierten Näherungen verglichen werden. Zunächst gibt es eine Taylor ÿ 1 (1 ÿ)
-Reihennäherung für die inverse Langevin-Funktion, z. B. [4],

$$M^{ÿ1}(y) ÿ 3y + 5\,\frac{9y^3}{( ) ÿ 1+} + + \frac{297 \text{ Jahre } 1539 \text{ Jahre}^7}{175\ 875\ 3\ 2\ ÿ\ 1 +} + \cdots \qquad (62)$$

3 , 0 < ÿ 1,

Zweitens gibt es eine Näherung erster Ordnung für den Fall y = 1 ÿ ÿ, 0 < ÿ ÿ 1, nämlich L ÿ1 (y) ÿ 1/(1
2
( ) y 1
ÿ
ÿ y) (siehe Anhang B von [8]). Die Graphen der relativen Fehler, die mit diesen = 1 ÿ ÿ, 0 < ÿÿ 1. Näherungen verbunden sind, sind in Abbildung 10 dargestellt. Aus diesen
Graphen ist klar ersichtlich, dass die in (61) definierten Näherungen für Argumente nahe Null oder nahe Eins schlechter sind als etablierte Näherungen.
Sie dienen jedoch als nützliche Grundlage für die Erstellung von Näherungen mit ÿ niedrigen relativen Fehlergrenzen über das Intervall (0, 1) für h ÿ1
ÿ1 und damit L
(0,1) , wie zusammengefasst
in Tabelle 2.

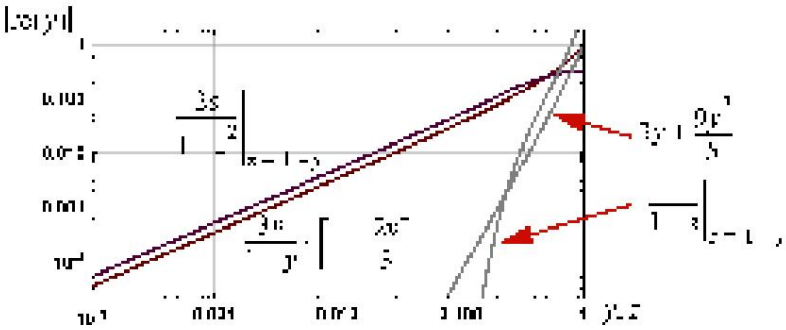


Abbildung 10. Graph der relativen Fehler in Näherungen an die inverse Langevin-Funktion für die Fälle 0 < y ÿ 1 und y = 1 ÿ
ÿ, 0 < ÿ ÿ 1. 0< ÿ1 = 1 ÿ ÿ, 0 < ÿÿ 1.

6.2. Integrale Ergebnisse

Als $\int_0^{ÿ} L(ÿ)dÿ$ =ln [sinh(x)] ÿ ln(x), das allgemeine Integralergebnis ( ) =
ÿ
ln[sinh( )] ÿ ln( )

$$\int_{y1}^{ÿ1} (ÿ)dÿ = \text{yff}\,( ) = \int_{ÿ}^{ÿ1} (y)\ ÿ\ (y) ÿ\ y1\ f\,( )\ \int_{(y1)}^{ÿ1} ÿ\ f(ÿ)dÿ\ ( )\ ÿ\ ( )\ f\ ÿ1(y1\ ) \qquad (63)$$

unter der Annahme von f ÿ1 und f sind wohldefiniert, ergibt

$$\int_0^{ja\ ÿ1} M\ (ÿ)dÿ = yLÿ1\ (y) + \ln L^{ÿ1}(y) ÿ \ln \sinh L^{ÿ1}(y)\ ,\ y ÿ (0, 1). \qquad (64)$$

Die vorgeschlagenen Näherungen können verwendet werden, um Näherungen für das Integral der inversen
Langevin-Funktion zu erstellen. Beispielsweise führt die Verwendung der in (36) und (37) angegebenen
Näherungen in (64) zu Näherungen für die inverse Langevin-Funktion mit den jeweiligen relativen Fehlergrenzen
von 1,40 × 10ÿ5 und 3,91 × 10ÿ6 . Die letztere Näherung lautet:

$$\int_0^{ja\ ÿ1} M\ (ÿ)dÿ ÿ 1ÿy \ln 3y \frac{3y^2}{2} \text{Jahre} \cdot 1\ ÿ\ 3^{\frac{2}{3}} \frac{}{\text{und } 6} \frac{}{\text{und } 6} \frac{}{\text{Jahre} + 3} \frac{}{\text{Jahre} + 6} \frac{}{\text{und } 6} +$$

$$\frac{}{1ÿj\ 2} \text{Jahre} \cdot 1\ ÿ\ 3^{\frac{2}{3}} \frac{}{J} \frac{}{J.^{\frac{4}{6}}} J + 3\,\frac{5}{4} J + 6\,\frac{6}{} \frac{7}{J}$$

$$\ln \sinh 3j \frac{}{1ÿj\ 2}\ 2\ J \cdot 1\ ÿ\ 3^{\frac{6}{}} \frac{}{J.^{\frac{3}{6}}} \frac{J}{6} + 3\,\frac{J^5}{6}\ 6\ J + 6\,\frac{6}{} \frac{}{\text{und } 6}^7 \text{, y ÿ (0, 1).} \qquad (65)$$

6.3. Wurzeln von *ÿ* + ÿw + wew

In Übereinstimmung mit (21) und Theorem 1 sind die Wurzeln von hr0(y),r1 (y) (w) = r0(y) + r1(y)w
0 < y < 1 sind und ÿ2 ÿ2 ÿ 2 Liter ÿ1 + wew, (y). Eine wünschenswerte Erweiterung dieser Ergebnisse wäre ein
Spezifikation
der Wurzeln von

$$hÿ,ÿ(w) = ÿ + ÿw + wew \qquad (66)$$

Machine Translated by Google

für beliebige Werte von $\ddot{y}$ und ÿ. Angesichts der Definitionen von r0 und r1 ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Für bestimmte Fälle können jedoch Wurzeln aufgestellt werden. Beispielsweise sind die Wurzel

$$\frac{(1+k)^2}{e^{1+k}} + \frac{kw}{e^{1+k}} + \text{na ja, } 0 < k < 1, \tag{67}$$

sind ÿ1 ÿ k und ÿ1 ÿ k ÿ 2L 1+k , $\ddot{y}1\ 1\ddot{y}k$ und ergeben sich aus dem Fall y = $1\ddot{y}k$ 0 < k < 1. Als 1+k ,

Beispiel: die Wurzeln von

$$\frac{16}{9e\ 4/3} + \frac{m}{3e\ 4/3} + \text{weh} \tag{68}$$

sind ÿ4/3 und ÿ4/3 ÿ 2L $\ddot{y}1$ (1/2) ÿ ÿ4,927 und ergeben sich aus dem Fall y = 1/2, k = 1/3.

Impulsantwort eines linearen

Systems. Beachten Sie, dass $\ddot{y}yo\ \bar{y}$ +kywsiyvon=0,v gwo ist ()t () vo = ÿwo, d.h. die Wurzeln von ÿ+ ÿw+wew = 0 sind die negativen Zahlen der Wurzeln von ÿ+ ÿvÿveÿv = 0.

In Übereinstimmung mit (67) betrachten wir ein lineares System mit einer Impulsantwort definiert durch

$$h(t) = 1 \ddot{y}\ k1t \ddot{y}\ k2te\ddot{y}t\ ,\ (\ ) = \quad t1\ddot{y}\ 0, \tag{69}$$

$$(1 +) 0 <$$

wobei k1 = 2 , k2 = (1+k) $\overline{(1+k)}$ gemäß $\frac{k}{e^{1+k}}$ $\frac{}{2}$, eines solchen Systems ist definiert k < 1. Die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s} \quad \frac{k1}{2\ s} \quad \frac{}{k2\ (1 + s^2)} \tag{70}$$

2 und ist konsistent mit einem System, das aus einem Integrator, einer Kaskade aus zwei Integratoren und einem System zweiter Ordnung besteht. Die Wurzeln der Impulsantwort sind 1 + k und 1 + k + $\ddot{y}1\ 1\ddot{y}k$ 2L 1 10 ÿ ,1 4ÿ ,1 2ÿ Die $\overline{1+k}$.

Impulsantwort ist in Abbildung 11 für die Fälle von k ÿ {1/10, 1/4, 1/2} dargestellt.

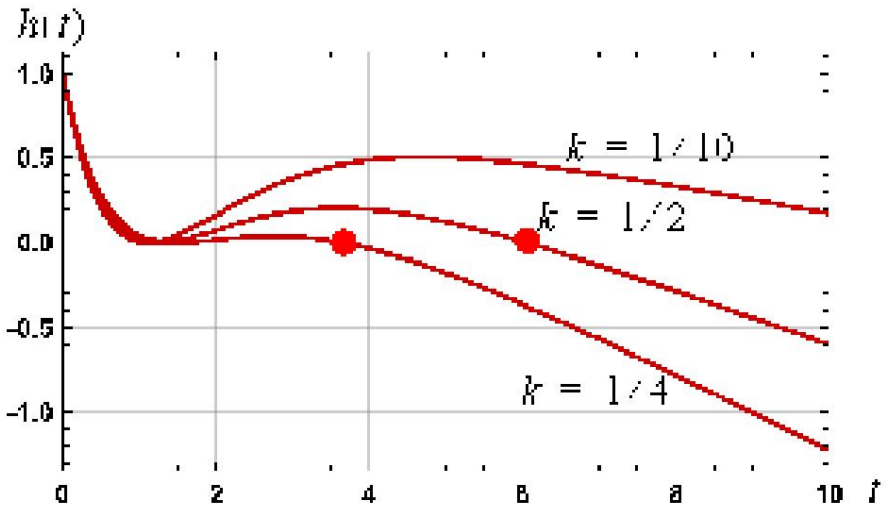


Abbildung 11. Graph der Impulsantwort der durch (69) definierten Übertragungsfunktion für Werte von k ÿ {1/10, 1/4, 1/2}.

7. Zusammenfassung der Ergebnisse und Schlussfolgerung 7.1.

Zusammenfassung der Ergebnisse ÿ( ) =1ÿ ÿ Die Näherungen für h (0) **sowie die zugehörigen relativen Fehlergrenzen** r0(y),r1 **(y) sind in Tabelle 1 aufgeführt . Die zugehörigen Näherungen für die inverse Langevin-Funktion sind in Tabelle 2** aufgeführt. **ÿ 1 10 ÿ ,1 4ÿ ,1 2ÿ**

$\ddot{y}1$

ÿ(),() (0)

Machine Translated by Google

Table 1. Zusammenfassung der Näherungen für $h^{(1)}_{(0)}(y)$, wie in (27) und (29) bis (33) definiert, und ihrer relativen Fehlergrenzen r0(y),r1(y) für das Intervall **[0,** 1).

Annäherung	Definition	Relative Fehlergrenze	Relativer Fehler Gebunden: 1. Ordnung—(42)	Relativer Fehler Gebunden: 2. Ordnung—(43)	Relativer Fehler Gebunden: 3. Ordnung—(44)
$h^{(1)}_{(0)}$ h 1,r0 (j),r1 (j)	$\frac{2}{1-y} \cdot 1 + y\,y\,y^{2}$	4,45 × 10−2	2,69 × 10−4	1,87 × 10−5	1,32 × 10−6
$h^{(1)}_{(0)}$ h 2,r0 (j),r1 (j)	$\frac{2}{1-j} \cdot 1 + c21\sin(y) + c22\sin y^{2}$	4,66 × 10−3	2,20 × 10−4	2,42 × 10−5	3,68 × 10−6
$h^{(1)}_{(0)}$ h 3,r0 (j),r1 (j)	$\frac{2}{\cdot 1 + y\,y\,y\,1-y^{2}} \frac{7/2}{\text{und } 2} + 2\sqrt[9/2]{}$	3,71 × 10−3	8,52 × 10−6	7,58 × 10−8	7,74 × 10−10
$h^{(1)}_{(0)}$ h 4,r0 (j),r1 (j)	$\frac{2}{\cdot 1 + y\,y\,y\,1-y^{2}} \frac{4}{\text{und } 2} + y^{6} \frac{7}{\text{und } 2}$	2,13 × 10−3	1,92 × 10−6	9,12 × 10−9	4,59 × 10−11
$h^{(1)}_{(0)}$ h 5,r0 (j),r1 (j)	$\frac{2}{\cdot 1 + y\,y\,y\,1-y^{2}} \frac{7/2}{\text{und } 2} + 2\sqrt[9/2]{} + c51y^{5}(1\ y\ y)(y\ y\ yo)e\ y3(yyyo)^{2}$	2,33 × 10−4	3,15 × 10−8	1,68 × 10−11	1,04 × 10−14
$h^{(1)}_{(0)}$ h 6,r0 (j),r1 (j)	$\frac{2}{1-y} \cdot 1 + y\,y\,y^{2} \frac{4}{\text{und } 2} + y^{6} \frac{7}{\text{und } 2} \cdot y\ \ 1 + y0y^{2}(1\ y\ ja)^{2}\ y \ 1 + y2y^{2} + y3y\,5^{3} + y4y\,4+ \ y\ y5y\ 7 + y7y\ 8 + y8y\ y$	4,58 × 10−5	4,07 × 10−10	2,43 × 10−14	1,92 × 10−18

Tabelle 2. Zusammenfassung der Näherungen, basierend auf den in Tabelle 1 aufgeführten Näherungen an $h^{(1)}_{(0)}$, **r0(y),r1(y) für die inverse Langevin-Funktion zusammen mit ihren zugehörigen relativen Grenzen für das Intervall [0,** 1]. **Die relativen Fehlergrenzen für die Schröder-basierten Näherungen erster, zweiter und dritter Ordnung ergeben sich aus der direkten Verwendung der Näherungen in der in Theorem 2 definierten allgemeinen Näheru**

Ca.	Definition	Relative Fehlergrenze	Relativer Fehler Gebunden: Erste Ordnung	Relative Fehlergrenze: Zweite Ordnung	Relative Fehlergrenze: Dritte Ordnung
$M^{(1)}_{1}$ (j)	$\frac{3\,\text{Jahre}}{1-j^{2}}\ \text{Jahre} \cdot 1\ y\ 3^{2}$	4,94 × 10−2	2,40 × 10−3	1,20 × 10−4	5,87 × 10−6
$L^{(1)}_{2}$ (j)	$\frac{3\,\text{Jahre}}{1-j^{2}}\ d21\sin(yy)+d22\sin(yy \div 1-y^{2})$	1,83 × 10−2	2,94 × 10−4	5,29 × 10−6	9,23 × 10−8
$L^{(1)}_{3}$ (j)	$3J \cdot 1\ y\ 2\ 1-J\ \frac{2}{\text{und } 3}\ \frac{5/2\ \text{Jahre}}{6} + \frac{9/2\ \text{Jahre}}{6}$	4,37 × 10−3	1,62 × 10−5	6,59 × 10−8	2,64 × 10−10
$M^{(1)}_{4}$ (j)	$\frac{3\,\text{Jahre}}{1-j^{2}}\ \text{Jahre} \cdot 1\ y\ 3^{2}\ \frac{3}{\text{und } 6}\ \frac{4}{\text{und } 6}\ \frac{5}{\text{Jahre} \div 3}\ \frac{6}{\text{Jahre} \div 6}\ \frac{7}{\text{und } 6}$	2,44 × 10−3	5,32 × 10−6	1,24 × 10−8	2,84 × 10−11
$M^{(1)}_{5}$ (j)	$\frac{3\,\text{Jahre}}{1-y^{2}}\ \text{Jahre} \cdot 1\ y\ 3^{2}\ \frac{5/2}{\text{und } 6} + \frac{9/2}{\text{und } 6}\ c51y\,5(1-y)(yyyo)^{2} \cdot e2\ y3(yyyo)\ \frac{3J}{1-J^{2}} \cdot y\ \text{und } 1\ y\ 3^{2}\ \frac{3}{\text{und } 6}\ \frac{4}{\text{und } 6}\ 6^{5}\ 6\ jj + 3\ \frac{7}{\text{Jahre} \div 6}\ y\ \frac{y0\ y(1-y)}{3}^{2}\ \cdot\ y^{2}\ 1\ y\ ja^{2}\ 3 + j\ \frac{3}{\text{Jahre}}\ \frac{4}{2}\ y\ y^{3}\ \frac{5}{\text{Jahre} \div 2}\ \frac{6}{\text{und } 2}\ y \cdot\ 1 + y2y\ y5y\ 3 + y3y + 5\ y7y\ + y4y\,4+ 7\ 8\ + y8y\ y$	4,85 × 10−5	2,32 × 10−9	1,14 × 10−13	5,48 × 10−18

7.2. Schlussfolgerungen

Die Beziehung zwischen der inversen Langevin-Funktion und der r0-r1-Lambert-W-Funktion wurde definiert. Die abgeleitete Beziehung führt zu neuen Näherungen für die inverse Langevin- Funktion mit potenziell niedrigeren relativen Fehlergrenzen als vergleichbare veröf

Es wurde gezeigt, dass verbesserte Näherungen für die r0-r1-Lambert W-Funktion mit deutlich niedrigeren relativen Fehlergrenzen durch Verwendung von Schröders Wurzelnäherungen der ersten Art definiert werden können. Näherungen für die inverse Langevin-Funktion können dann durch Verwendung der etablierten Beziehung zwischen den beiden Funktionen definiert werden. Ein alternativer Ansatz besteht darin, direkt eine etablierte Näherung für die inverse Langevin- Funktion in der allgemeinen Schröder-Näherungsform zu verwend

Machine Translated by Google

dass der erstere Ansatz wahrscheinlich zu einem einfacheren analytischen Ausdruck für eine festgelegte relative **Fehlergrenze führt .**

Es wurde gezeigt, wie die definierten Näherungen für die inverse Langevin-Funktion genutzt werden können, um Näherungen für das Integral der inversen Langevin-Funktion zu erstellen, mit im Allgemeinen niedrigen relativen Fehlergrenzen.

Die Verbindung zwischen der inversen Langevin-Funktion und der r0-r1-Lambert-W-Funktion wurde genutzt, um die Wurzeln der Impulsantwort eines benutzerdefinierten linearen Systems zu ermitteln, das aus einem Integrator, einer Kaskade aus zwei Integratoren und einem System zweiter Ordnung besteht.

Im Hinblick auf zukünftige Forschungen ist anzumerken, dass iterative Ansätze verwendet werden können, um Näherungen mit niedrigeren relativen Fehlergrenzen zu ermitteln, und dass mehrere Ergebnisse für die inverse Langevin-Funktion detailliert beschrieben wurden, z. B. [14,21]. Berinda [26] und Gdawiec [27] bieten beispielsweise einen Überblick über iterative Ansätze, die für Fixpunktprobleme verwendet werden können . Im Allgemeinen führen iterative Ansätze zu analytischen Näherungen mit einem hohen Grad an Komplexität und basieren auf einer Anfangsnäherung. Um Ergebnisse mit mäßiger Komplexität zu erzielen, ist eine niedrige Iterationsordnung sowie eine Anfangsnäherung mit einer niedrigen relativen Fehlergrenze und geringer Komplexität erforderlich. Neue Näherungen sind daher von Interesse und erfordern weitere Forschung.

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: Die Daten sind im Artikel enthalten.

Danksagungen: Der Autor bedankt sich herzlich bei A. Zoubir, SPG, Technische Universität Darmstadt, Deutschland, der einen Besuch ausrichtete, bei dem die grundlegenden Ergebnisse erzielt wurden, die diesem Papier zugrunde liegen.

Interessenkonflikte: Der Autor erklärt, dass kein Interessenkonflikt besteht.

Anhang A. Beweis von Theorem 1

Betrachten Sie die Funktion f(x, y) = **1 ÿ (1 ÿ** y)x **ÿ [1** + **(1** + **y)x]e** ^{ÿ2x} **für den allgemeinen Fall von x, y ÿ R, y** ÿ= **ÿ1 und den Transformationen**

$$z = 1 + (1 + y)x,\ x = \frac{zÿ1}{1+y,} \tag{A1}$$

$$w = \frac{ÿ2z}{1+y,} \quad z = \frac{ÿ(1+y)w}{2}. \tag{A2}$$

Die Definitionen von f2 und f1 gemäß f2(w, y) = f1(z, y) = **f(x,** y) **führen dann zu**

$$f1(z, y) = f\ \frac{z\ ÿ\ 1}{1\ ÿ\ y}, y = 1 + \frac{1 + y\ 1}{+\ y}\ \frac{(1\ ÿ\ y)z}{ÿ\ z\ \exp\ 1}\ \frac{ÿ2z}{1 + ja}\ \cdot \exp\ \frac{2}{1 + ja} \tag{A3}$$

$$f2(w, y) = f1\ \frac{ÿ(1 + y)w}{2} + , y = \frac{2}{1 + y}\ \frac{(1\ ÿ\ y)w}{2} + \frac{(1 + y)w \cdot}{2} \exp(w)\cdot \exp\ \frac{2}{1 + ja} \tag{A4}$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{2e\ ÿ2/(1+y)}{1+y} \cdot f2(w, y) = \frac{ÿ2/(1+y) + \text{wew} + 1+y}{(1+J)\ 2}\ \frac{(1ÿy)e\ ÿ2/(1+y)w\ 4e}{} \tag{A5}$$

$$= r0(y) + r1(y)w + wew = hr0(y),r1\ (y)\ (w)$$

Wann

$$(1+y)\ r0(y) = \frac{4e\ ÿ2/}{y}, r1(y) = (1+y)\ 1 + \frac{(1\ ÿ\ y)e\ ÿ2/(1+y)}{}. \tag{A6}$$

Machine Translated by Google

Aus (A1) und (A2) folgt, dass x = f2(w, y) = f(x, y), $\frac{ÿ1}{1+y}$ mit 2 und es folgt dann aus der Beziehung dass

$$k_{f(y)f2(w,\,y)} = k\,f(y)f\left(\frac{ÿ1}{1+ja}\right)^{\frac{m}{2}}, y = hr0(y),r1(y)(w) \tag{A7}$$

wenn $k_{(1+y)\,f(y)} \frac{2e\,ÿ2/}{= 1+y,}$ Dies ist das erste erforderliche Ergebnis.

Um das zuletzt genannte Ergebnis zu ermitteln, betrachten wir den speziellen Fall von f(x, y) = 0, 0 < y < 1, der den Pfad definiert

$$(x, y) : x = L^{ÿ1}(y),\ y \in ÿ\ (0, 1)\ . \tag{A8}$$

Entlang des Weges, der durch f(x, y) = 0, 0 < y < 1 und mit x = $\left(\frac{ÿ1}{1+y}\right)^{\frac{w}{2}}$, es ist so, dass

$$k\,f(y)f\left(\frac{ÿ1}{1+ja}\right)^{\frac{m}{2}}, y = r0(y) + r1(y)w + wew = hr0(y),r1(y)(w) = 0 \tag{A9}$$

Daher mit $w = ÿ^{2L_{r0(y),r1(y)}} \frac{ÿ1}{1+y\,ÿ1\,h(0)\,r0(y),r1(y)\,2}$ $\frac{ÿ2\,ÿ1}{}$ d. h. w = h (0). (w) folgt, dass $L^{ÿ1}(y) = \frac{ÿ1}{1+y}$ $\frac{}{}$, Dies ist das zuletzt genannte Ergebnis. Dieses Ergebnis gilt auch für den Fall y = 0.

Anhang B. Eingeschränkte Domänennäherungen für hr0(y),r1 (y) (w)

Anhang B.1. Fall 1: 0 < y << 1

Im Fall von 0 < y ÿ 1 und in Übereinstimmung mit der linken Grafik in Abbildung 4 liegt die Wurzel von hr0(y),r1 (y) , die von Interesse ist, nahe an der bekannten Wurzel von ÿ2/(1 + y) (siehe (21)), aber links davon. Betrachten wir hr0(y),r1 (y) (w), definiert durch (19), und den Fall von hr0(y),r1 (y) (w) = 0, d. h.

$$\frac{4e\,ÿ2/(1+y)}{(1+y)^2} + \frac{w(1\,ÿ\,y)e\,ÿ2/(1+y) + wew}{} = 0.\ 1 + y \tag{A10}$$

Mit der Form für w von w = ÿ2/(1 + y) + ÿ(y) folgt:

$$\frac{4}{(1+y)} \left(\frac{1\,ÿ\,y + 2}{1+ja}\right)^{\cdot\,\frac{ÿ2}{y}} + ÿ(y) + 1 + \frac{ÿ2}{} + ÿ(y)\,e = 0,1 + y^{ÿ(y)} \tag{A11}$$

Durch Vereinfachung und Taylor-Reihenentwicklung der Exponentialfunktion um den Nullpunkt erhält man:

$$2 + (1\,ÿ\,y)ÿ(y) + [ÿ2 + (1 + y)ÿ(y)]\,1 + ÿ(y) + \frac{2^{ÿ}(y)}{} + \cdots = 0,2 \tag{A12}$$

Erweiterungen erster, zweiter und dritter Ordnung für die Exponentialfunktion führen zu den Näherungen:

$$\begin{aligned} &ÿ \quad ÿ^2(y)[1 + y] = 0, \text{ erste Ordnung} \\ &2\,ÿ \quad \frac{}{} = 0, \text{ zweite Ordnung } (1+3y)ÿ(y) \\ &2\,ÿ \quad \frac{(1+y)ÿ\,(y)\,y + + 6\,6}{} \ ^{2(j)} = 0, \text{ dritte Ordnung} \end{aligned} \tag{A13}$$

mit Lösungen:

$$\begin{aligned} &ÿ \quad ÿ(y) = 0, \quad \text{erste} \\ &\quad ÿ(y) = 0, ÿ(y) = \frac{}{} \quad \text{zweite Ordnung} \\ &\quad ÿ1ÿ3y \pm ÿ\ 1ÿ18yÿ15y \frac{\text{Ordnung } ÿ2y\ 1+y,^2}{ÿ(y) = 0, ÿ(y) = 2(1+y)}, \quad \text{dritte Ordnung} \end{aligned} \tag{A14}$$

Machine Translated by Google

Betrachten wir die erste von Null verschiedene Lösung für ÿ(y), die die Lösung zweiter Ordnung von ÿ(y) = ÿ2y/(1 + y) ist. **Für den Fall y ÿ 0 impliziert diese Lösung w** = ÿ2, was **mit der Wurzel ÿ2/(1** + y) konsistent **ist .**

Die Lösung dritter Ordnung, die mit **ÿ(y) ÿ 0 konsistent ist , wenn y ÿ 0, ist ÿ1ÿ3y+ ÿ 1ÿ18yÿ15y**

ÿ(y) = 2(1+y) ÿ **ÿ6Jÿ24J** 1+J **und führt zu der Näherung:**

$$\text{hr0(j),r1 (j)} \quad \frac{\text{ÿ2ÿ6Jÿ24J } 1+J^{2}}{} \quad \text{ÿ 0, 0 < y ÿ 1.} \tag{A15}$$

Somit:

$$\text{r0(y),r1 (y) 1 + y} \quad \frac{\text{ÿ2 ÿ 6y ÿ 24y ÿ1 (0) ÿ h}^{2}}{} \quad \text{ÿ ÿ2 ÿ 4 Jahre ÿ 20 Jahre}^{2} \tag{A16}$$

nach Verwendung der Näherung (1 + y) **ÿ1 ÿ 1 ÿ y** + **y** **2** **.**

Anhang B.2. Fall 2: y -> 1 Für

y ÿ 1 ergeben Taylorreihenentwicklungen um den Punkt eins die Näherungen:

$$\begin{aligned} \text{r0(y)} &= \frac{\text{4e ÿ2/(1+y)}}{(1+y)^{2}} \text{ ÿ } \frac{}{\text{t}} \quad \frac{\text{1ÿy (1ÿy) 1 + +}}{\text{2e}} \quad \frac{}{\text{8e}}^{2} + \cdots \\ \text{(1+y) r1(y)} &= \frac{\text{(1ÿy)e ÿ2/}}{1+y} \text{ ÿ } \frac{\text{1ÿj}}{\text{2e}} \quad \frac{\text{(1ÿy)}^{3}}{\text{16e}} \end{aligned} \tag{A17}$$

Einsetzen dieser Näherungen in

$$\text{hr0(y),r1 (y) (w)} = \text{r}_{0}\text{(y)} + \text{r1(y)w} + \text{wew} = 0 \tag{A18}$$

Erträge

$$\frac{1}{\text{t}} \quad \frac{1 \text{ ÿ y} + +}{\text{2e}} \quad \frac{\text{(1 ÿ ja)}^{2}}{\text{8e}} + \cdots + \quad \frac{\text{1 ÿ ja}}{\text{2e}} \quad \frac{\text{(1 ÿ ja)}^{3}}{\text{16e}} \text{ ÿ · · · w} + \text{wew} = 0. \tag{A19}$$

Wenn y ÿ 1 von unten kommt, wird die Wurzel von (A18) zunehmend negativ (das ist aus einem Vergleich der linken und rechten Graphen in Abbildung 4 ersichtlich). Für den Fall von |w| ÿ 1 und w negativ wird der Term wew verschwindend klein, was zu

$$\text{w = ÿ} \quad \frac{\text{2 1ÿy (1ÿy) 1 + +}}{\text{1ÿy}} \text{ ÿ } \frac{\text{ÿ2}}{\text{1ÿy , y = 1 ÿ ÿ, 0 < ÿ ÿ 1,}} \tag{A20}$$

und das gewünschte Ergebnis

$$\text{ÿ, 0 < ÿ ÿ 1. r0(ÿ),r1 (y)} \quad \frac{\text{ÿ2}}{} \tag{A21}$$

Anhang C. Beweis für Schröder-Näherungen erster, zweiter und dritter Ordnung

Mit z = hr0(y),r1 (y) (w) = r h(w) = $_{0}$ **(y) + r1(y)w + wew, so folgt, unter Verwendung der Notation hr0(y),r1 (y)** (w), **dass**

$$\begin{aligned} &\text{h (1) (w)} = \text{r1(y) + (1 + w)ew , h (3) (w) = (3 + w) ew,} \quad \text{h (2) (w) = (2 + w)e w, · · · h (k) (w) = (k + w)e w.} \end{aligned} \tag{A22}$$

Aus Theorem 2 folgt dann, dass die Schröder-Näherung erster Ordnung

$$\text{h}_{1}^{\text{ÿ1}}\text{ (z) = w ÿ h} \quad \frac{\text{h(w) ÿ z}}{\text{(1) (w)}} \quad \text{w = h 0 ÿ1 (z)} = \frac{\text{ÿr0(y) + w r1(y)}^{\text{2 wochen}} + \text{z}}{\text{+ (1 + w)e w}} \quad \text{w = h 0 ÿ1 (z)} \tag{A23}$$

Machine Translated by Google

unter der Annahme einer anfänglichen Näherungsfunktion $h_0^{\ddot{y}1}$ für $h_{\ddot{y}1}$. Die Näherung für den Fall von $hz = 0$ ist

$$h_1^{\ddot{y}1} = r1(y) \frac{\ddot{y}r0(y) + w\,(0)^{2}\, e^{m}}{+\,(1 + w)e\,w}\Bigg|_{w = h_0^{\ddot{y}1}\,(0)} \tag{A24}$$

Die Substitution von r0 und r1, wie in (18) angegeben, liefert:

$$h_1^{\ddot{y}1}\,(0) = 2\,1\,\frac{\ddot{y}4 + (1 + y)\,2w\,2\,2\,\exp w + 1{+}y \quad \overline{\quad}}{\ddot{y}\,ja \qquad\qquad 2}$$
$$+\,(1 + y) \quad 2\,(1 + w)\,\exp w + 1{+}y\,w{=}h \quad \overline{\quad}\Bigg|_{0^{\ddot{y}1}\,(0)} \tag{A25}$$

Anhang C.1. Zweite Ordnung

Die Schröder-Approximation zweiter Ordnung für h, wie in Theorem 2 definiert, lautet

$$h_2^{\ddot{y}1}(z) = h_1^{\ddot{y}1}(z)\,\ddot{y}\,\frac{[h(w)\ddot{y}z]^{2}\,h\,(2)\,(w)}{2[h\,(1)\,(w)]^{3}}\Bigg|_{w = h_0^{\ddot{y}1}\,(z)}$$
$$= \frac{\ddot{y}r0(y){+}w^{2}\,e\,w + z}{r1(y){+}(1{+}w)e\,w}\,\frac{[r0(y){+}r1(y)w{+}wew\ddot{y}z]^{2}\,(2{+}w)e\,w}{2[r1(y){+}(1{+}w)e\,w]^{3}}\Bigg|_{w = h_0^{\ddot{y}1}\,(z)} \tag{A26}$$

und die Näherung für den Fall $z = 0$ lautet

$$h_2^{\ddot{y}1}(0) = \frac{\ddot{y}r0(y){+}w^{\text{2 wochen}}}{r1(y){+}(1{+}w)e\,w}\,\frac{[r0(y){+}r1(y)w{+}wew]^{2}\,(2{+}w)e\,w}{2[r1(y){+}(1{+}w)e\,w]^{3}}\Bigg|_{w = h_0^{\ddot{y}1}\,(0)} \tag{A27}$$

Das Einsetzen von r0 und r1 ergibt:

$$h_2^{\ddot{y}1}(0) = \frac{\ddot{y}4{+}(1{+}y)\,2w\,2 \quad \text{Erfahrungspunkte}\,\frac{2}{w{+}\,1{+}y}}{1\ddot{y}y\,2{+}(1{+}y)^{2}\,(1{+}w)\,\text{Erfahrung}\,w{+}\frac{}{2\,1{+}J}}$$
$$\frac{4{+}(1\ddot{y}y\,2\,)w{+}(1{+}y)\,2w \quad \text{Erfahrung}\,\frac{2}{w{+}\,1{+}y}\,^{2}\,(2{+}w)\,\exp w{+}\,1{+}y\,\frac{2}{}}{2(1{+}y)\,1\ddot{y}y{+}(1{+}y)(1{+}w)\,\exp w{+}\,\frac{}{2\,1{+}J}^{3}}\Bigg|_{w = h_0^{\ddot{y}1}\,(0)} \tag{A28}$$

Anhang C.2. Dritte Ordnung

Die Schröder-Approximation dritter Ordnung für h, wie in Theorem 2 definiert, lautet

$$H_3^{\ddot{y}1}(z) = h_2^{\ddot{y}1}(z)\,\ddot{y}\,\frac{[h(w)\,\ddot{y}\,z]^{3}\,h\,(3)\,(w)}{6\,\text{Stunden}\,(1)\,(w)^{4}}\cdot$$
$$\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}1 + \frac{3\,h\,(2)\,(w)^{2}}{h\,(1)\,(w)h\,(3)\,(w)}\,\ddot{y}\Bigg|_{w = h_0^{\ddot{y}1}\,(z)} \tag{A29}$$

und die Näherung für den Fall $z = 0$ lautet

$$h_3^{\ddot{y}1}(0) = h_2^{\ddot{y}1}(0)\,\ddot{y}\,\frac{[r0(y){+}r1(y)w{+}wew]^{2}\,(3{+}w)e\,w}{6[r1(y){+}(1{+}w)e\,w]^{4}}\cdot$$
$$\ddot{y}1 + \frac{3(2{+}w)^{2\,2w\,e}}{[r1(y){+}(1{+}w)e\,w](3{+}w)e\,w}\Bigg|_{w = h_0^{\ddot{y}1}\,(0)} \tag{A30}$$

Das Ersetzen von r0 und r1 ergibt das gewünschte Ergebnis:

$$h_3^{\ddot{y}1}(0) = h_2^{\ddot{y}1}(0)\ddot{y}$$
$$4 + 1\,\ddot{y}\,y^{2}\,w + (1 + y)\,2w\,\exp w + 1{+}y\,\frac{2}{}^{3}\,\exp w + 1{+}y\,\frac{2}{}\cdot$$
$$\frac{\ddot{y}(1\ddot{y}y)(3{+}w){+}(1{+}y)(9{+}8w{+}2w^{2})\,\exp w{+}\,\frac{}{2\,1{+}j}}{6\,(1{+}J)^{2}\,2\,1\ddot{y}y{+}(1{+}y)(1{+}w)\,\exp w{+}\,1{+}y\,\frac{}{}^{5}}\Bigg|_{w = h_0^{\ddot{y}1}\,(0)} \tag{A31}$$

Machine Translated by Google

Verweise

1. Langevin, P. Über die Theorie des Magnetismus. J. Phys. Theor. Appl. 1905, 4, 678–693. [CrossRef]
2. Fiasconaro, A.; Falo, F. Analytische Ergebnisse des erweiterbaren frei gegliederten Kettenmodells. Phys. A Stat. Mech. Appl. 2019, 532, 121929. [Querverweis]
3. Iliafar, S.; Vezenov, D.; Jagota, A. Dehnung einer frei gegliederten Kette in zwei Dimensionen. arXiv 2013, arXiv:1305.5951.
4. Itskov, M.; Dargazany, R.; Hornes, K. Taylor-Erweiterung der inversen Funktion mit Anwendung auf die Langevin-Funktion. Mathematik. Mech. Solids 2012, 17, 693–701. [CrossRef]
5. Nguessong, AN; Beda, T.; Peyraut, F. Ein neuer fehlerbasierter Ansatz zur Approximation der inversen Langevin-Funktion. Rheol. Acta 2014, 53, 585–591. [CrossRef]
6. Darabi, E.; Itskov, M. Eine einfache und genaue Näherung der inversen Langevin-Funktion. Rheol. Acta 2015, 54, 455–459. [Querverweis]
7. Jedynak, R. Approximation der inversen Langevin-Funktion erneut betrachtet. Rheol. Acta 2015, 54, 29–39. [CrossRef]
8. Kröger, M. Einfache, zulässige und genaue Approximanten der inversen Langevin- und Brillouin-Funktionen, relevant für starke Polymerdeformationen und -strömungen. J. Non-Newton. Fluid Mech. 2015, 223, 77–87. [CrossRef]
9. Marchi, BC; Arruda, EM Ein fehlerminimierender Ansatz für inverse Langevin-Näherungen. Rheol. Acta 2015, 54, 887–902. [Querverweis]
10. Rickaby, SR; Scott, NH Ein Vergleich von Modellen der Gummielastizität mit begrenzter Dehnung. Int. J. Non-Linear Mech. 2015, 68, 71–86. [Querverweis]
11. Petrosyan, R. Verbesserte Näherungen für einige Polymer-Erweiterungsmodelle. Rheol. Acta 2017, 56, 21–26. [CrossRef]
12. Jedynak, R. Eine umfassende Studie der mathematischen Methoden zur Approximation der inversen Langevin-Funktion. Mathematik. Mech. Solids 2018, 24, 1992–2016. [CrossRef]
13. Marchi, BC; Arruda, EM Verallgemeinerte fehlerminimierende, rationale inverse Langevin-Approximationen. Math. Mech. Solids 2019, 24, 1630–1647. [CrossRef]
14. Howard, RM Analytische Näherungen für die inverse Langevin-Funktion mittels Linearisierung, Fehlernäherung und Iteration. Rheol. Acta 2020, 59, 521–544. [CrossRef]
15. Mezÿo, I.; Keady, G. Einige physikalische Anwendungen verallgemeinerter Lambert-Funktionen. Eur. J. Phys. 2016, 37, 065802. [CrossRef]
16. Mezÿo, I. Zur Struktur der Lösungsmenge einer verallgemeinerten Euler-Lambert-Gleichung. J. Math. Anal. Appl. 2017, 455, 538–553. [Querverweis]
17. Mezÿo, I.; Baricz, Á. Zur Verallgemeinerung der Lambert-W-Funktion. Trans. Am. Math. Soc. 2017, 369, 7917–7934. [CrossRef]
18. Jamilla, C.; Mendoza, R.; Mezÿo, I. Lösungen von neutralen Differentialgleichungen mit Verzögerung unter Verwendung einer verallgemeinerten Lambert-W-Funktion. Appl. Math. Comput. 2020, 382, 125334. [CrossRef]
19. Petkoví´c, MS; Petkoví´c, LD; Herceg, Đ. Über Schröders Familien von Wurzelfindungsmethoden. J. Comput. Appl. Math. 2010, 233, 1755–1762. [CrossRef]
20. Dubeau, F. Polynomische und rationale Approximationen und die Verbindung zwischen Schröder-Prozessen der ersten und zweiten Art. Abstr. Appl. Anal. 2014, 2014, 719846. [CrossRef]
21. Howard, RM Schröder basierte inverse Funktionsapproximation. Axioms 2023, 12, 1042. [CrossRef]
22. Corless, RM; Gonnet, GH; Hare, DEG; Jeffrey, DJ; Knuth, DE Über die Lambert W-Funktion. Adv. Comput. Math. 1996, 5, 329–359. [CrossRef]
23. Howard, RM Analytische Näherungen für den Hauptzweig der Lambert-W-Funktion. Eur. J. Math. Anal. 2022, 2, 14. [Querverweis]
24. Lóczi, L. Garantierte und hochpräzise Auswertung der Lambert-W-Funktion. Appl. Math. Comput. 2022, 433, 127406.
25. Schröder, E. Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Mathe. Ann. 1870, 2, 317–365. [CrossRef]
26. Berinde, V.; Takens, F. Iterative Approximation von Fixpunkten; Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2007.
27. Gdawiec, K.; Kotarski, W.; Lisowska, A. Polynomiographie basierend auf den nicht-standardmäßigen Newton-ähnlichen Wurzelfindungsmethoden. Abstr. Appl. Anal. 2015, 2015, 797594. [CrossRef]

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Anwendungen der Differentialgeometrie Verknüpfung topologischer Bifurkationen zu chaotischen Strömungsfeldern

Peter D. Neilson 1,* und Megan D. Neilson [2]

[1] Fakultät für Elektrotechnik und Telekommunikation, University of New South Wales, Sydney, NSW 2052,
[2] Australien Unabhängiger Forscher, Fakultät für Elektrotechnik und Telekommunikation, University of New South Wales, Sydney, NSW 2052, Australien;
megan.neilson@gmail.com * Korrespondenz: p.neilson@unsw.edu.au

Zusammenfassung: In jedem Punkt p **einer glatten n-Mannigfaltigkeit** M **existieren** (n + 1) **schiefsymmetrische Tensorräume, die differentielle r-Formen** ÿ **mit** r = **0, 1,** · · · **n aufspannen. Da** d ẏ d **immer Null ist, wobei** d das äußere Differential **ist , folgt, dass jede exakte r-Form (d. h.** ÿ = *dÿ* , **wobei** ÿ **eine (rÿ1)-Form ist) geschlossen ist (d. h.** *dÿ* = **0), aber nicht jede geschlossene r-Form exakt ist. Daraus folgt die Existenz einer dritten Art differentieller r-Form, die geschlossen, aber nicht exakt ist. Solche Formen heißen** harmonische **Formen. Jeder glatten n-Mannigfaltigkeit liegt eine topologische Struktur zugrunde. Es gibt viele verschiedene mögliche topologische Strukturen. Was eine topologische Struktur von einer anderen unterscheidet, ist die Anzahl der Löcher unterschiedlicher Dimensionen, die sie besitzt. De Rhams Theorie der Differentialformen verbindet das Vorhandensein von r-dimensionalen Löchern in der zugrundeliegenden Topologie einer glatten n-Mannigfaltigkeit** M **mit dem Vorhandensein von harmonischen r-förmigen Feldern auf der glatten Mannigfaltigkeit. Um den Satz von de Rham zu verstehen, ist eine Menge Theorie erforderlich. In diesem Artikel fassen wir die Differentialgeometrie zusammen, die Löcher in der zugrundeliegenden Topologie einer glatten Mannigfaltigkeit mit harmonischen Feldern auf der Mannigfaltigkeit verbindet. Wir untersuchen die Anwendung von de Rhams Theorie auf (i) visuelle, (ii) mechanische, (iii) elektrische und (iv) Flüssigkeitsflusssysteme. Insbesondere betrachten wir harmonische Flussfelder in der intrazellulären wässrigen Lösung biologischer Zellen und schlagen auf mathematischer Grundlage eine mögliche Rolle harmonische**

Schlüsselwörter: Simplizialkomplexe; singuläre Homologiegruppen; singuläre Kohomologiegruppen; singuläre Kettenkomplexe; Graßmann-Algebra; Laplace- und harmonische Formen; de Rham-Kohomologiegruppen; de Rhams Theorem; Proteinfaltung

MSC: 53Z10;

check for updates

Zitat: Neilson, PD; Neilson, MD Anwendungen der Differentialgeometrie zur Verknüpfung topologischer Bifurkationen mit chaotischen Strömungsfeldern. AppliedMath **2024, 4, 763–790. https:// doi.org/ 10.3390/appliedmath4020041**

Wissenschaftlicher Redakteur: Massimo Ferri

Empfangen: 23. April 2024
Überarbeitet: 11. Juni 2024
Akzeptiert: 11. Juni 2024
Veröffentlicht: 15. Juni 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Ein bekanntes Zitat von Einstein besagt, dass die Gesetze der Mathematik, soweit sie sich auf die Realität beziehen, nicht sicher sind, und, soweit sie sicher sind, sich nicht auf die Realität beziehen. Dies mag zwar als kontrovers angesehen werden, es ist jedoch sicherlich so, dass mathematische Theorien physikalischer Prozesse einer Interpretation anhand experimenteller Beobachtungen bedürfen. Die Differentialgeometrie ist eine logische Struktur beweisbarer Aussagen, Theoreme und Lemmata, deren Wahrheit sich aus Axiomen, Definitionen und den elementaren Konnektoren der formalen Logik ergibt. Um die Differentialgeometrie auf physikalische Systeme anzuwenden, müssen Brücken zwischen Ereignissen und Variablen in der physikalischen Welt (vorzugsweise, aber nicht notwendigerweise messbar) und wohldefinierten Begr Diese Brücken sind intuitive Hypothesen, die die Realität mit der Mathematik verbinden, und ihr Wert ergibt sich aus der Qualität der Intuition des Praktikers. Wenn die Hypothese wahr ist, können bestimmte Gesetze der Mathematik auf das reale System angewendet werden. Aber selbst wenn experimentell nachgewiesen wird, dass die mathematischen Gesetze das Verhalten in der realen Welt beschreiben, beweist dies nicht die Hypothese. Andere Hypothesen können ebenso gu

Machine Translated by Google

Tatsächlich ist es nicht möglich, Wenn-Dann-Vermutungen zu beweisen, obwohl man leicht beweisen kann, dass sie falsch sind. In der angewandten Mathematik bleiben die „Wenn-Dann-Brücken“ zwischen Realität und Mathematik immer intuitiv. In Bezug auf die Gewissheit ist die Mathematik da

Dennoch ist es sinnvoll zu zeigen, dass die gleiche Mathematik auf eine Reihe realer Systeme nutzbringend angewendet werden kann.

De Rhams Kohomologiesatz der Differentialformen ist ein bemerkenswertes Stück Mathematik, das Bereiche der Mathematik miteinander verbindet, von denen man bisher dachte, sie seien nicht miteinander verbunden. Wir glauben, dass die mathematischen Fakten, die der Satz von de Rham liefert, von großer Bedeutung für das nichtlineare Verhalten und das Vorhandensein von kritischen Punkten und Singularitäten in den Zustandsräumen vieler verschiedener realer Systeme sind. In diesem Artikel betrachten wir eine Interpretation des Satzes im Hinblick auf experimentelle Beobachtungen der Dynamik von Flüssigkeitsströmungen. Im Wesentlichen verbindet de Rhams Kohomologietheorie die Existenz von Löchern verschiedener Dimensionen in der zugrundeliegenden Topologie glatter und Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit einem dritten Typ von Differentialform -Strömungsfeld auf der Mannigfaltigkeit, einem, das geschlossen, aber nicht exakt ist. Ein solches Strömungsfeld wird als harmonisches **Feld bezeichnet. Mit anderen Worten besteht unser Ziel darin, die Verbindungen zwischen den harmonischen Feldern der Mathematik und den physikalischen Strömungen realer nichtlinearer Systeme mit Singularitäten und kriti**

Um die Art nichtlinearer dynamischer Prozesse in der Welt zu illustrieren, die durch diese mathematische Verknüpfung verstanden werden können, betrachten wir die Blasen und den Flüssigkeitsfluss, die beim Einschenken eines Glases Champagner entstehen, oder die Bildung und den Fluss von Schaum, wenn eine Meereswelle an einem Strand bricht, oder die chaotische turbulente Strömung eines Gebirgsbachs um Felsen. Sogar die Metamorphose einer Raupe in eine Motte könnte in den Rahmen der Theorie fallen. Bestimmte Singularitäten in der nichtlinearen Dynamik visueller, mechanischer, elektrischer und Flüssigkeitsflusssysteme können mit harmonischen Feldern in Verbindung gebracht werden. Insbesondere werden wir die mögliche Rolle von Wirbeln und Strudeln in harmonischen Strömungsfeldern untersuchen, die durch die Anwesenheit von Organellen und anderen Molekülen in der intrazellulären wässrigen Lösung biologischer Zellen hervorgerufen werden, und zwar auf die Kinetik der Proteinfaltu

Unsere Suche nach dieser Verbindung wurde durch zwei scheinbar unabhängig voneinander stattfindende Ereignisse inspiriert. Erstens **haben wir bei unserer Analyse der Geometrie des binokularen dreidimensionalen visuellen Raums [1–3] festgestellt, dass drei verschiedene dreidimensionale Geometrien berücksichtigt werden müssen. Da ist natürlich die euklidische dreidimensionale Geometrie der Außenwelt. Aber die Geometrie des von den Sinnesrezeptoren kodierten dreidimensionalen visuellen Raums ist dadurch verzerrt (oder gekrümmt), dass die Größe der Bilder auf der Netzhaut der Augen umgekehrt proportional zur euklidischen Distanz zwischen dem Objekt in der Umgebung und dem Knotenpunkt des Auges ist [4]. Dieser intrinsische dreidimensionale Raum entspricht einer gekrümmten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit einer Metrik, die proportional zum Kehrwert des euklidischen Abstands im Quadrat ist [1]. Dies führt zu einer Singularität am Ursprung, wo die Metrik gegen unendlich geht. Der bewusst wahrgenommene dreidimensionale visuelle Raum ist wiederum anders, da viele verschiedene kognitive Mechanismen der Tiefenwahrnehmung ins Spiel kommen.**

Die Singularität am Ursprung wird durch die Existenz eines Lochs um das Egozentrum im visuellen Raum gewährleistet. Die Existenz eines solchen Lochs wird durch die Tatsache bestätigt, dass es nicht möglich ist, den eigenen Kopf zu sehen, geschweige denn das eigene Egozentrum. Dies wirft die Frage auf, welche Auswirkungen ein solches Loch im visuellen Raum auf den wahrgenommenen Fluss visueller Bilder hat.

Das zweite Ereignis betraf eine ungewöhnliche Häufung von Brustkrebsdiagnosen bei Frauen, die in einem australischen Fernsehstudio zusammenarbeiteten [5,6]. Es wurde spekuliert , dass die Krebserkrankungen durch austretende elektromagnetische Strahlung aus dem Fernsehsender verursacht werden könnten. Experten wurden hinzugezogen, um diese Hypothese zu prüfen. Sie fanden keine Hinweise auf problematische Strahlungsniveaus am Arbeitsplatz der Frauen. In den physikalischen Theorien des Elektromagnetismus gibt es mindestens zwei Arten von elektrischen Feldern. Eine wird durch Spannungsgradienten erzeugt und die Rotation der anderen wird durch sich ändernde Magnetfelder erzeugt. Diese beiden Feldarten sind unabhängig, da die Rotation eines Gradienten immer Null ist. Es stellt sich die Frage, ob es eine mysteriöse dritte Art von elektrischem Feld gibt, die mit den **Standardmesstechniken unentdeckt geblieben wäre ?** Die Differentialgeometrie legt nahe, dass dies der Fall ist. Nach **dem Satz von de Rham kann die Rotation eines elektrischen Felds Null sein, ohne dass es sich um den Gradienten handelt**

Machine Translated by Google

einer Spannung. Die Frage ist, ob es in der Natur einen solchen dritten Feldtyp gibt und wenn ja, welche Eigenschaften er hat?

Die Anwendung der Differentialgeometrie auf physikalische Systeme erfordert eine gründliche Kenntnis der mathematischen Theorie, da die Reihenfolge ihrer Anwendung nicht unbedingt der schönen logischen Abfolge folgt, in der die Theoreme entwickelt und bewie
Die Anwendung erfordert oft den Sprung von einem Punkt in der mathematischen Theorie zu einem entfernten Punkt, wobei eine Menge Mathematik die beiden Punkte miteinander verbindet. Außerdem ist das Verständnis des Satzes von de Rham nicht trivial. Man muss sich mit einem großen Teil der Differentialgeometrie auskennen. Daher beschreiben wir in Anhang A detailliert alle Schritte unserer vorgeschlagenen mathematischen Verknüpfung zwischen dem Auftreten und Verschwinden von Löchern in der zugrundeliegenden Topologie glatter und Riemannscher Mannigfaltigkeiten und dem Auftreten und Verschwinden harmonischer Strömungsfelder auf der Mannigfaltigkeit. Im folgenden Abschnitt geben wir dem Leser eine eher konzeptionelle Einführung in die Differentialgeometrie, die verwendet wird, um topologische Bifurkationen mit chaotischen Strömungsfeldern in der Natur in Beziehung zu setzen.

2. Zusammenfassung der relevanten Konzepte der Differentialgeometrie

2.1. Topologische Struktur

Eine wichtige Eigenschaft topologischer Räume ist, dass sie keine Metrik besitzen. Sie haben kein Größenmaß. Größe und Topologie können als unabhängige Eigenschaften betrachtet werden. Ein topologischer Raum, wie die Menge aller Punkte auf einer 2-Sphäre, kann auf die Größe eines Planeten ausgedehnt oder auf die Größe eines Atoms zusammengezogen werden, ohne dass sich seine topologische Struktur ändert. Solange er nicht geschnitten, zerrissen, durchstochen oder Teile davon zusammengeklebt werden, kann er in beliebiger Weise und um jeden Betrag verformt werden, ohne dass sich seine topologische Struktur ändert. Beispielsweise kann die 2-Sphäre zu einem langen, dünnen Seil gedehnt und zu einem Knoten gebunden werden, ohne dass sich seine Topologie ändert.

Alle verschiedenen Formen, in die ein topologischer Raum ohne Schneiden, Reißen, Durchstechen oder Kleben deformiert werden kann, können kontinuierlich, eins zu eins aufeinander abgebildet werden und sind kontinuierlich invertierbar. Dies ist eine spezielle Art von Abbildung, die als Homöomorphismus bezeichnet wird . Zwei **beliebige homöomorphe Räume haben alle dieselben topologischen Eigenschaften. Tatsächlich kann eine topologische Eigenschaft als eine Eigenschaft definiert werden, die von homöomorphen Ab**
Transformationen, bei denen die topologische Struktur unverändert bleibt, heißen Homotopien. **Ein bekanntes Beispiel ist die Transformation eines Kaffeebechers mit Henkel in einen Donut und umgekehrt [7]. Die mathematische Abbildung ([8],** **S. 348]) ist in Abbildung 1 dargestellt.**

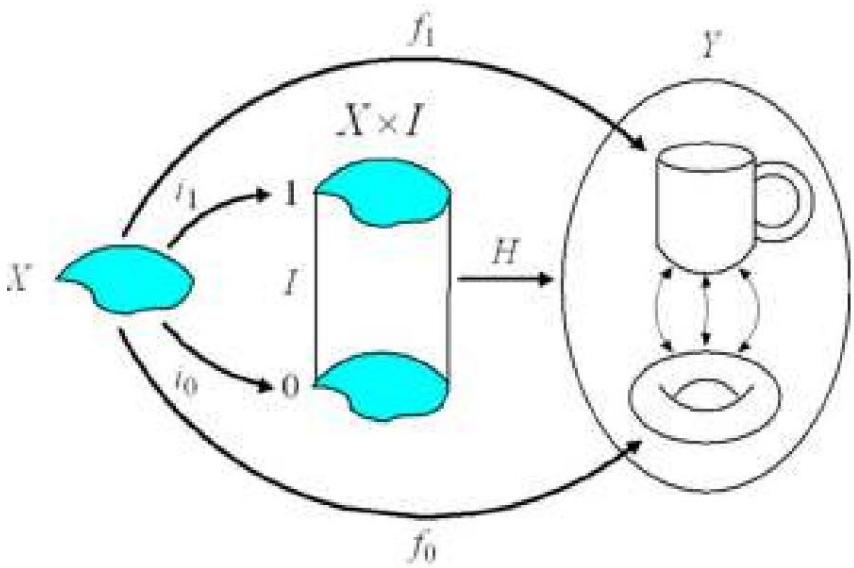


Abbildung 1. Ein Diagramm, das Homotopie veranschaulicht. Der 2-Torus (Oberfläche eines Donuts) im topologischen Raum Y **und die Kaffeetasse mit Henkel im topologischen Raum** Y **sind äquivalente topologische Str**
Diese sind nicht nur homöomorph verwandt (d. h. stetig, eins-zu-eins, auf und invertierbar), sondern

Machine Translated by Google

Es gibt kontinuierliche homotopische Abbildungen f0, f1 : X **ÿ** Y , **die den topologischen Raum** X **sowohl auf den 2-Torus als auch auf den Becher abbilden. Die Tatsache, dass der Donut kontinuierlich in den Becher verwandelt werden kann, impliziert die Existenz aller Zwischenformen bei der Transformation. Das Loch im Donut verwandelt sich in** das Loch zwischen dem Becher und seinem Henkel. Dies wird im Diagramm **durch den Sonderfall** Y = X **× I, f0** = **i0, f1** = **i1** illustriert , **wobei das Intervall** I **von 0 bis 1 variiert. Für jeden Punkt** x **ÿ X entspricht die Abbildung** f0(x) = i0(x) = (x, 0) **dem 2-Torus, die Abbildung** f1(x) = i1(x) = (x, 1) **entspricht dem Becher und alle anderen Punkte entlang des Intervalls** I **entsprechen den Zwischenformen. Dies wird im Diagramm durch die Homotopie H dargestellt. Allgemeiner ausgedrückt: Obwohl die topologischen Räume** X **und** Y **Löcher verschiedener Dimensionen enthalten können, müssen sie dieselbe topologische Struktur haben, damit die Homotopie** H **existiert. Mit anderen Worten: Damit f0, f1 :** X **ÿ** Y **homotopische Abbildungen sind, müssen die induzierten Homomorphismen (f0)ÿ,(f1)ÿ :** Hr(X) **ÿ** Hr(Y) **für alle** r **ÿ 0 zwischen den Homologiegrupp**

Es gibt jedoch keine Möglichkeit, eine 2-Kugel in einen 2-Torus umzuwandeln, ohne Löcher in die Kugel zu bohren. Die 2-Kugel und der 2-Torus haben nicht die gleiche topologische Struktur. AA Markov hat 1958 gezeigt (siehe [8]), dass es keinen Algorithmus gibt, der alle verschiedenen topologischen Strukturen bestimmen kann, die ein topologischer Raum mit Dimension 4 oder höher haben kann. Das Beste, was wir sagen können, ist, dass solche Räume eine große Anzahl möglicher unterschiedlicher topologischer Strukturen haben. Was topologische Räume im Grunde ausmacht Strukturen unterscheiden sich durch die unterschiedliche Anzahl von Löchern mit unterschiedlichen Abmessungen, die in der topologischer Raum (z. B. ist der Unterschied zwischen der Topologie einer Kugel und der Topologie eines Torus auf die Löcher im Torus zurückzuführen).

2.2. Topologische Bifurkationen

Basierend auf Smale [9] beschreiben Abrahams und Marsden [10] Bifurkationen in der zugrundeliegenden Topologie einer glatten Mannigfaltigkeit. Eine glatte Abbildung f : M **ÿ** N **zwischen glatten Mannigfaltigkeiten** M **und** N **ist lokal trivial in y0 ÿ** N , wenn es eine Umgebung U **von** (y) **gibt, die y0 ÿ** N, **so dass** f M ^{ÿ1} **eine glatte, richtig eingebettete Untermannigfaltigkeit (also eine Niveaumenge) für jedes** y **ÿ** U **in** N **und es diffeomorphe Abbildungen h|** f ÿ1(y) **für jedes** y ^{ÿ1} **: F** (y) **ÿ** f ^{ÿ1} **in (y0)** ist **für ÿ** U gibt **(d. h.** h **projiziert nahegelegene Niveaumengen** (y) **in** M **diffeomorph auf die Ebene** f ^{ÿ1} **(y0) in** M).

Menge f **Die Bifurkationsmenge von** f : M **ÿ** N **ist** ÿf := **y0 ÿ** N f **ist bei y0** nicht lokal trivial . (y) **ändert seine Mit anderen Worten, wenn** y **durch** ÿf verläuft , ^{ÿ1} **topologische Struktur. Sei** ÿ(f) bezeichnen f **die abgeschlossene Menge der kritischen Punkte** x **von** f **in M, d. h.**

$$ÿ(f) = x \text{ ÿ } \mathbf{M|} \, dx\, f : TxM \text{ ÿ } Tf(x)N$$

ist nicht surjektiv .

Nach dem Satz von Sard haben die singulären Werte f(ÿ(f)) **in** N **das Maß Null (d. h. sie sind isolierte Punkte mit leerem Inneren und ihre Vereinigung ist in N nirgends dicht). Die singulären Werte von** f(ÿ(f)) **sind die Bifurkationswerte von** f **in** N **[10]. Mit anderen Worten haben die Niveaumengen in** M **singulärer Bifurkationswerte in** N **eine topologische Struktur, die sich von den topologischen Strukturen benachbarter Niveaumengen in M unterscheidet. Die Anzahl der Löcher in der Niveaumenge in** M **eines Bifurkationswerts in** N **unterscheidet sich von der Anzahl der Löcher in den benachbarten Niveaumengen . Dies kann mit Isotropieuntergruppen, dem Scheibensatz, dem Rohrsatz, der Untermannigfaltigkeit vom (H)-Orbittyp, der Untermannigfaltigkeit vom (H)-Isotropietyp und der Untermannigfaltigkeit vom (H)-Fixpunkttyp** in Verbindung gebracht werden , **die von Ortega und Ratiu [11]** beschrieben wurden **und die den Begriff der kritischen Punkte in Untermannigfaltigkeiten erweit**

2.3. De Rhams Theorie

Wir geben hier nur eine kurze Beschreibung. Eine ausführlichere Zusammenfassung der Differentialtheorie Die Geometrie, die Bifurkationen mit harmonischen Strömungsfeldern verbindet, finden Sie in Anhang A.

Machine Translated by Google

Jede exakte Differential -r-Form $\ddot{y}$ **mit** r = **0, 1, · · · , n auf einer glatten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit** M **oder einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit** (M, g) **ist abgeschlossen (d. h.** $d\ddot{y}$ = **0), da** d **ÿ** d **immer Null ist. Eine abgeschlossene Differential- r-Form ist jedoch nic Differential- r-Formen, die geschlossen, aber nicht exakt sind, führen zu einem dritten Typ von Differential- r-Formen. Es gibt also drei Typen von Differential- r-Formen: (i) R-Formen** $\ddot{y}$, **deren äußere Ableitung ungleich Null ist (d. h.** $d\ddot{y}$ ÿ = **0), (ii) geschlossene R-Formen, die exakte Differentiale sind (d. h.** $\ddot{y} = d\ddot{y}$, **wobei** $\ddot{y}$ eine (r **ÿ** 1)-Form **ist) und (iii) R-Formen** $\ddot{y}$, **die geschlossen, aber nicht exakt sind. Dieser dritte Typ von R-Form heißt** harmonische **R-Form und ist im r-ten harmonischen Raum** Hr (M) **der Mannigfaltigkeit mit** r = **0, 1, · · · n enthalten. Sie ist auch ein Element in der r-ten de Rham-Kohomologiegruppe** Hr dR(M) **mit** r = **0, 1, · · · n.** Hr dR(M) **ist isomorph mit** Hr (M). **Sowohl** Hr(M) **als auch** Hr dR(M) **sind sowohl Vektorunterräume als auch Gruppen.**

Wenn $\ddot{y}$ **eine geschlossene r-Form (d. h.** $d\ddot{y}$ = **0) auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist und** zr **ein r-dimensionaler Zyklus in der zugrundeliegenden Topologie** X **der Mannigfaltigkeit, dann wird** das Integral von $\ddot{y}$ **über** zr als Periode von $\ddot{y}$ bezeichnet **(der Begriff Periode leitet sich von den Perioden elliptischer Integrale ab). Laut Stokes' Theorem verschwindet die Periode, wenn der r-Zyklus** zr **zufällig ein Rand** br **einer** (r + **1)-Kette** cr+1 ist **(d. h.** br = ÿcr+1), **da**

$$\int_{zr} \ddot{y} = \int_{\ddot{y}cr+1} \ddot{y} = br \qquad \int_{cr+1} d\ddot{y} = \mathbf{0} \text{ (da } d\ddot{y} = 0).$$

(Definitionen von Ketten, Zyklen und Grenzen finden Sie im Anhang **A.1).**

Daraus folgt der erste Satz von de Rham: Eine abgeschlossene Form ist global exakt genau dann, wenn alle ihre Perioden verschwinden [12]. Zu wissen, welche Formen global exakt sind und welche nicht, hat wichtige Konsequenzen. Beispielsweise ist (i) eine glatte 1-Form konservativ (d. h. ihr Linienintegral ist wegunabhängig), genau dann, wenn sie exakt ist, (ii) das Integral jeder global exakten Form über einer kompakten orientierten glatten Mannigfaltigkeit ohne Rand Null ist, (iii) das Integral global abgeschlossener Formen über Ränder Null ist und (iv) wenn das Integral einer abgeschlossenen r-Form über einer r-dimensionalen Untermannigfaltigkeit ohne Rand ungleich Null ist, dann ist die r-Form nicht exakt und die Untermannigfaltigkeit ist nicht der Rand einer kompakten orientierten Untermannigfaltigke

Eine bemerkenswerte Eigenschaft harmonischer Räume und de Rham-Kohomologiegruppen ist, dass sie homotopisch und topologisch invariant sind. Sie sind isomorph zu singulären Kohomologiegruppen Hr (M), **und diese sind wiederum isomorph zu singulären Homologiegruppen** Hr (M) **auf der zugrundeliegenden topologischen Struktur der glatten Mannigfaltigkeit** M **(siehe Anhang A.12). Dies ist in Abbildung 2 dargestellt.**

Dies ist in der Tat eine bemerkenswerte Eigenschaft, da es nicht sofort offensichtlich ist, dass Nähe und Genauigkeit von Differentialformen auf einer glatten Mannigfaltigkeit irgendetwas mit der zugrunde liegenden topologischen Struktur der Mannigfaltigkeit zu tun haben sollten. Aber de Rhams Theorie zeigt mathematisch, dass dies doch der Fall ist! Die r-te Homologiegruppe Hr(M) **ist isomorph zur r-ten de Rham-Kohomologiegruppe** Hr dR(M) **mit** r = **0, 1, · · · n.** Hr(M) **erkennt das Vorhandensein von r-dimensionalen Löchern in der zugrunde liegenden Topologie der glatten Mannigfaltigkeit M. Die Dimension von** Hr(M) **ist gleich der Anzahl der r-dimensionalen Löcher in der Topologie und wird als r-te Betti-Zahl** br **der Mannigfaltigkeit bezeichnet. Somit liefert de Rhams Theorie der Differentialformen die von uns gesuchte Verbindung zwischen Löchern in der topologischen Struktur einer glatten oder Riemannschen Mannigfaltigkeit und harmonischen Strömungsfeldern auf der Mannigfaltigkeit.**

Machine Translated by Google

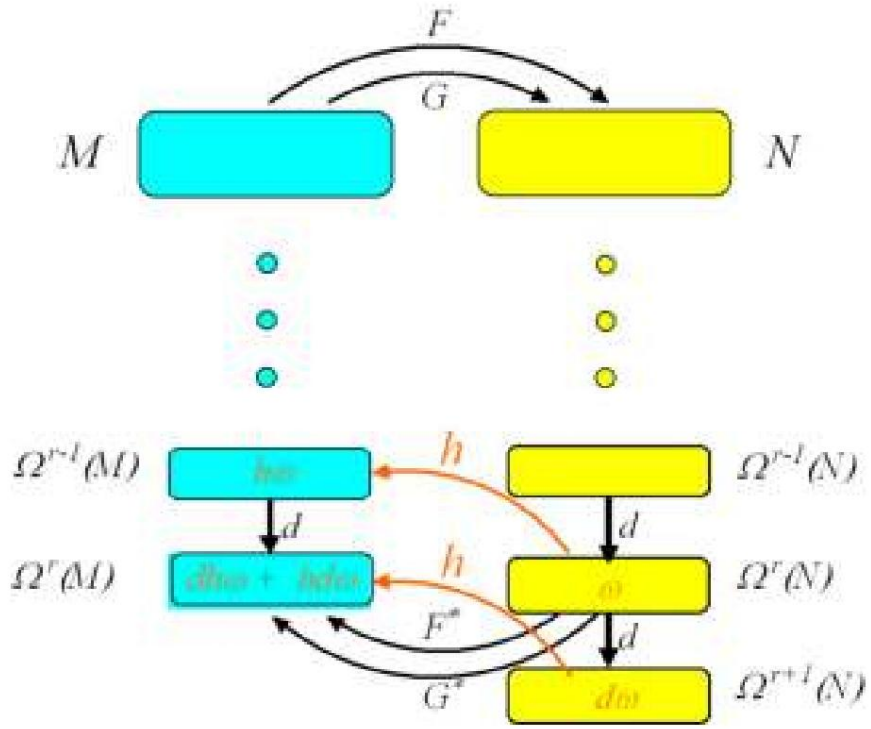


Abbildung 2. Ein Diagramm, das die Tatsache veranschaulicht, dass, wenn F, G : M ÿ N **diffeomorphe** Hr dR(M) **zwischen den glatten Mannigfaltigkeiten** M **und N** ÿ, Gÿ **Abbildungen zwischen :** Hr dR(N) ÿ **sind, dann die Pullback-Abbildungen** F **de Rham-Kohomologiegruppen** Hr dR(N) **und** Hr ÿ = G ÿ **. In** dR(M) **für alle Werte von** r **gleich sind, d. h.,** F **mit anderen Worten, wenn die Abbildungen** F **und** G **diffeomorph sind, haben sie dieselbe homöomorphe topologische Struktur und sind daher homotopieinvariant. Das bedeutet, dass homotopieäquivalente Mannigfaltigkeiten isomorphe de Rham-Gruppen haben. Die Bezeichnungen ÿrÿ1** (M), ÿr (M) **stellen die schiefsymmetrischen Tensorräume vom Grad** (r ÿ 1) **und Grad** (r) **für Differentialformen an jedem Punkt der glatten Mannigfaltigkeit M dar. Die Bezeichnungen ÿrÿ1** (N), ÿr (N), ÿr+1 (N) **stellen die schiefsymmetrischen Tensorräume vom Grad** (r ÿ 1), **N** dar. ÿr+1 **Grad** (r) **und Grad** (r + 1) **für Differentialformen an jedem Punkt der glatten Mannigfaltigkeit** (N) ÿ ÿr (M) **für alle Werte von** r **werden Homotopieoperatoren genannt. Untersuchung der Abbildungen** h : **Das Diagramm zeigt, dass, wenn die r-Form** *ÿ* **abgeschlossen ist, d. h.** *dÿ* ÿ, Gÿ **:** Hr dR(N) ÿ Hr dR(M) = **0, dann** d(h ÿ) = G *ÿÿ* ÿ F *ÿÿ.* **Mit anderen Worten** unterscheiden sich G *ÿÿ* **und** F *ÿÿ* **durch ein exaktes Differential** d(h ÿ). **Die Abbildungen** F **heißen kohomolog. Genau so werden gleiche Kohomologiegruppen definier**

2.4. Der Hodge-Laplace-Operator

Per Definition ist der Hodge-Laplace-Operator auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ÿ : ddÿ + d ÿd, **wobei** d **die äußere Ableitung** d : ÿr ÿ ÿr+1 **ÿ dÿ ist, wobei ÿ , der Hodge-Sternoperator ÿ :** ÿr ÿ ÿnÿr **und** ÿr **der schiefsymmetrische Tensorraum der r-Formen für** r = **0, 1,** · · · n **an jedem Punkt** p **auf einer n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit** M **oder einer Riemannschen Mannigfaltigkeit** (M, g) ist. **Der Laplace-Operator ÿ spielt eine wichtige Rolle in de Rhams Theorie der Differentialformen, da er der einzige Operator ist, mit dem harmonische Formen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit berechnet werden können. Der harmonische Raum** Hr (M) = ker(ÿÿr) **für** r = **0, 1,** · · · **n. (Denken Sie daran, dass harmonische r-Formen für alle Werte von** r auf einer glatten Mannigfaltigkeit oder einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit dem Vorhandensein von **r-dimensionalen Löchern in der zugrunde liegenden Topologie der Mannigfaltigkeit verbunden sind .)**

$$\ddot{y}^{r}: \ddot{y}^{r} \to \ddot{y}^{n-r+1} \quad (1)$$

2.5. Harmonische 0-Formen und 1-Formen

Harmonische 0-Formen werden durch die Gleichung ÿ *ÿ* = d ÿd *ÿ* = div grad **ÿ gegeben, wobei** *ÿ* **eine glatte reellwertige Funktion auf der glatten Mannigfaltigkeit** M **oder der Riemannschen Mannigfaltigkeit** (M, g) ist. **Potentialfelder in einer Flüssigkeit sind rotationsfreie und inkompressible (d. h. divergenzfreie) harmonische 0-Formen. Wir konzentrieren uns hier auf die Berechnung harmonischer 1-Formen auf Riemannschen Mannigfaltigkeite**

Machine Translated by Google

ihrer Bedeutung in der nichtlinearen Dynamik der physikalischen Systeme, die weiter unten besprochen werden.

Sei *ÿ* **eine Differential-1-Form in ÿ1** = T p ÿ M **an jedem Punkt** p **ÿ** (M, g). **Zuerst berechnen wir den Hodge-Laplace-Operator einer 1-Form** *ÿ* **auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit** (M, g), **d. h.** *ÿÿ* := **ddÿÿ** + d *ÿdÿ,* **und dann berechnen wir die harmonische 1-Form** *ÿ* , **indem wir den Laplace-Operator** *ÿÿ* = **0 setzen.**

Der Ricci-Krümmungstensor kann geometrisch wie folgt beschrieben werden. Seien (M, g) **eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und** p **ein Punkt, der zu** (M, g) gehört **(d. h.** p **ÿ** (M, **g)). Für jeden Einheitsvektor** *ÿ* **ÿ** TpM ist Ric(ÿ, ÿ) **die Summe der Schnittkrümmungen der 2-Ebenen in** TpM , **die durch** *(ÿ,* ÿ2), **· · · ,***(ÿ,* ÿn) aufgespannt werden, **wobei** (ÿ1, **· · · , ÿn)** eine beliebige **g-orthonormale Basis für** TpM **mit ÿ1** = ÿ **ist . Gegeben sei ein beliebiger Einheitsvektor** *ÿ* **ÿ** TpM . **Wähle eine g-orthonormale Basis** (ÿ1, **· · · , ÿn) für** TpM , **so dass ÿ1** = **ÿ. Dann** ist Ric(ÿ, ÿ) **gegeben durch**

$$\textbf{R11} = \textbf{Ri11} \quad = \ddot{y} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Rm}(\ddot{y}i, \ddot{y}\mathbf{1}, \ddot{y}\mathbf{1}, \ddot{y}i) = \ddot{y} \sum_{i=1}^{N} \ddot{y}(\ddot{y}\,\ddot{y}i\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}i)\ddot{y}, \ddot{y}i\ddot{y}.$$

Nach Lang [13] (S. 423–424) ist das innere Produkt des Ricci-Krümmungstensors mit dem Vektor *ÿ* **(also** ÿRic(ÿ), **ÿÿ) als die skalarwertige Form definiert, so dass wir bezüglich eines Orthonormalsystems ÿ1, · · · ,** ÿn **und eines beliebigen Einheitsvektorfeldes** *ÿ* **mit ÿ1** = **ÿ haben**

$$\ddot{y}\mathrm{Ric}(\ddot{y}), \ddot{y}\ddot{y} = \ddot{y} \text{ wobei} \sum_{i=1}^{N} \ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}i\,\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}i\ddot{y}\ddot{y})\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}i\ddot{y}$$

wir mit *ÿÿ,* **ÿÿ den Wert der 1-Form** *ÿ* **auf dem Vektorfeld ÿ bezeichnen. Als Operator ÿ2 auf 1-Formen ist der Laplace-Operator ÿ :) ÿ Ric).** In Bezug auf ÿi **von Variablen ausgedrückt** bedeutet dies *ÿÿÿ,* **ÿÿ** = **ÿ ÿ ÿ1 ÿ ÿ1 ist gegeben durch** (= **ÿ** $\sum_{i=1}^{N}$ $\sum_{i=1}^{N}$ **ÿÿ** ÿiÿ ÿi **ÿ, ÿÿ ÿ ÿ** i=1 **ÿ(ÿÿÿ** ÿi **ÿ ÿ ÿiÿÿ)ÿ, ÿiÿ.**

Um das innere Produkt des Hodge-Laplace-Operators *ÿÿÿ,* **ÿÿ** = ÿ(ddÿ + d ÿd)ÿ, **ÿÿ zu berechnen,** berechnen **wir (i) ÿddÿÿ, ÿÿ und (ii)** ÿd *ÿdÿ,* **ÿÿ separat und addieren dann:**

(i) Wir haben d *ÿÿ* = **ÿdivÿ ÿ** = ÿtr(ÿÿ) = **ÿ ÿ den 1-Form-** $\sum_{i=1}^{N}$ **ÿÿ** ÿi **ÿ, ÿiÿ, wobei** *ÿ* **ÿist der Dual von Körper** *ÿ* **und** ÿi **für** i = **1, · · ·** n **ist ein g-orthonormaler Rahmen von Vektorfeldern.**
Diese Orthonormalvektoren müssen mit dem riemannschen metrischen Gram– Schmidt-Orthogonalisierungsalgorithmus an jedem Punkt berechnet werden. Wir sehen, dass d *ÿÿ* **eine reellwertige Funktion** $\sum_{i=}^{N}$ **ÿ ÿ ÿÿ** ÿi **ÿ,** ÿiÿ **auf** (M, g) ist. **Für jeden Punkt** p **ÿ** (M, g) **gilt** *ÿÿ* f = *ÿ* f = ÿdf , **ÿÿ. Somit können wir schreiben**

$$\ddot{y}\ddot{y} \text{ (ÿ ÿ } \sum_{1}^{N} \ddot{y}\ddot{y} \ddot{y}i \textbf{ ÿ, ÿiÿ)} = \ddot{y}d(\ddot{y} \textbf{ ÿ } \sum_{i=1}^{N} \ddot{y}\ddot{y} \ddot{y}i \textbf{ ÿ, ÿiÿ), ÿÿ} = \textbf{ÿddÿÿ, ÿÿ} = \textbf{ÿ ÿ} \sum_{i=1}^{N} \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y} \ddot{y}i \textbf{ ÿ,} \ddot{y}i\ddot{y}. \textbf{ (1)}$$

(ii) Um d *ÿdÿ* **zu erhalten , beachten wir zunächst, dass wir, wenn** *ÿ* **eine r-Form ist , den Satz**

$$d\ddot{y}(\ddot{y}0, \textbf{ ÿ1 , } \cdots \textbf{ , ÿr)} = \ddot{y} \sum_{i=0}^{R} \textbf{(ÿ1) iÿ } \ddot{y}i\ddot{y}(\ddot{y}1 , \cdots \textbf{ , ÿiÿ1 , ÿ0,} \ddot{y}i+1 , \cdots \textbf{ , ÿr)}$$ **zu erhalten**

$$d\ddot{y}(\ddot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}, \textbf{ ÿÿ ÿ } \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}, \textbf{ ÿÿ} \qquad \textbf{(2)}$$

wobei *ÿ* **eine 1-Form und** *ÿ* **und** *ÿ* **Vektoren sind. Unter Verwendung der Tatsache, dass für jede r-Form** *ÿ*

$$d\ddot{y} = \ddot{y} \sum_{i=0}^{R} (\ddot{y}i \textbf{ ÿ ÿ } \ddot{y}i\ddot{y}) \textbf{ und } d(\ddot{y} \ddot{y}) = \ddot{y} \sum_{i=1}^{N} (\ddot{y}i \textbf{ ÿ ÿ } \ddot{y}i \textbf{ (ÿ } \ddot{y}))$$

wobei ÿi **für** i = **1, · · ·** , n **ist ein Orthonormalrahmen und** ÿi **für** i = **1, · · ·,** n **ist ein orthonormales Kosystem, folgt, dass**

$$d \ddot{y}\ddot{y} = \ddot{y}d \textbf{ ÿ } \ddot{y} = \textbf{ÿ} \sum_{i=1}^{N} \textbf{(ÿ } \ddot{y}i\ddot{y} \textbf{ ÿ } \ddot{y}i) \qquad \textbf{(3)}$$

wobei (ÿ ÿiÿ **ÿ** ÿi) **die Notation für ÿ** ÿiÿ **kontrahiert durch** ÿi ist **[13].**
Aus den Gleichungen (3) und (2) mit *ÿ* = ÿi **erhält man [13] (S. 424)**

$$\ddot{y}D^{\ddot{y}} d\ddot{y}, \textbf{ ÿÿ =ÿ} \sum_{i=1}^{N} \textbf{ÿÿ } \ddot{y}i\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}, \ddot{y}i\ddot{y} \textbf{ ÿ ÿ} \sum_{i=1}^{N} \textbf{ÿÿ } \ddot{y}i\ddot{y} \ddot{y}i \textbf{ ÿ, ÿÿ} \qquad \textbf{(4)}$$

Schließlich addieren wir die Gleichungen (1) und (4) und erhalten

$$\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}, \textbf{ ÿÿ} = \ddot{y}(ddÿ + d^{\ddot{y}} d)\ddot{y}, \textbf{ ÿÿ} = \textbf{ÿ ÿ } \sum_{i=1}^{N} \textbf{ÿÿ } \ddot{y}i\ddot{y} \ddot{y}i \textbf{ ÿ, ÿÿ ÿ ÿ} \sum_{i=1}^{N} \textbf{ÿ(ÿÿÿ } \ddot{y}i \textbf{ ÿ ÿ ÿiÿÿ)ÿ, ÿiÿ.} \qquad \textbf{(5)}$$

Machine Translated by Google

Für eine 1-Form auf einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gilt also **die Hodge ÿ2** ÿi **Der Laplace-Operator hat die Form ÿ** = **(ÿ ÿ) ÿ Ric, wobei Ric der Ricci-Krümmungsoperator ist . Die harmonische 1-Form erhält man dann, indem man den Laplace-Operator ÿ** *ÿ* **gleich Null setzt.**

3. Physikalische Beispiele

In der Natur nichtlinearer dynamischer Systeme gibt es eine endlose Vielfalt von Verhaltensweisen, die mit verschiedenen Singularitäten, kritischen Punkten und Entartungen in ihren Differentialgleichungen verbunden sind . Die meisten dieser Verhaltensweisen wurden noch nicht beschrieben, geschweige denn gelöst. Eine Familie solcher Verhaltensweisen, die in diesem Artikel betrachtet wird, ist mit der Existenz von Löchern verschiedener Dimensionen in der zugrunde liegenden Topologie des Zustandsraums des Systems verbunden. S Löcher erzeugen Differentialformen und Vektorfelder, die geschlossen, aber nicht exakt sind und 'No-Go'-Bereiche im dynamischen Zustand des Systems. Solche Löcher können das dynamische Verhalten des Systems dramatisch verändern. Isotropie-Untergruppen in der Wirkung einer Lie-Gruppe auf ein dynamisches System erzeugen beispielsweise dynamische Zustände, in die ein Vektorfeld (oder eine Teilmenge von Vektorfeldern) hineinfließen kann, aus denen es aber nicht herausfließen kann; eine Art Gleichgewichtspunkt-Falle für dynamische Zustände . Aber nichtlineare dynamische Systeme können in benachbarte Vektorfelder übergehen und um die Falle herumfließen, wodurch neuartige nichtlineare Verhaltensweisen entstehen [11]. Im Folgenden betrachten wir die Konsequenzen für das dynamische Verhalten von Singularitäten in den Differentialgleichungen, die zu Differentialformen führen, die in visuellen, mechanischen, elektrischen und **fluidischen physikalischen Systemen geschlossen, aber nicht exakt sind .**

3.1. Das menschliche visuelle System

Der binokulare dreidimensionale visuelle Raum des Menschen, der durch visuelle, propriozeptive und vestibuläre Sinnesrezeptoren kodiert wird, ist verzerrt (oder gekrümmt), da die Größe der 2D-Bilder auf der Netzhaut jedes Auges umgekehrt proportional zur euklidischen Distanz zwischen dem Knotenpunkt des Auges und dem Objekt in der Umgebung ist. Geometrisch gesehen entspricht der dreidimensionale visuelle Raum einer egozentrischen, negativ gekrümmten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit einer dreidimensionalen Kugel aus Punkten, die ungefähr am Ursprung (d. h. am Egozentrum) fehlen [1,2]. Dieses inhärente Loch entspricht der Tatsache, dass es nicht möglich ist, den eigenen Kopf zu sehen. Welchen Einfluss hat ein solches Loch am Ursprung im verzerrten dreidimensionalen visuellen Raum auf den wahrgenommenen Fluss visueller Bilder? Eine mögliche Antwort auf diese Frage liefern die Differentialgeometrie und der Satz von de Rham. (Beachten Sie, dass aufgrund neuronaler Pathologien auch andere Löcher im visuellen 3D-Raum möglich sind. Diese sogenannten Skotome werden hier nicht berücksichtigt.)

Bei einem 2D-Loch um den Ursprung (d. h. einer fehlenden 3D-Kugel aus Punkten um den Ursprung, die in einem 2-Zyklus eingeschlossen ist) impliziert der Satz von de Rham, dass geschlossene Differential -R-Formen für r = **0, 1, 2, 3 nicht global exakt sind. Die Einheitsvolumenform ÿ** = dx1 **ÿ** dx2 **ÿ** dx3 **ist eine geschlossene 3-Form im verzerrten 3D-Bildraum, und daher verhindert das Loch um den Ursprung, dass diese Volumen-3-Form global exakt ist. Das ist auch gut so, denn wenn es kein Loch um den Ursprung gäbe und die geschlossene Volumenform ÿ global exakt wäre, würden alle Perioden ÿ , die der Volumenform entsprechen, die über alle 3-Ketten (d. h. Volumina) integriert ist, die von 2-Zyklen eingeschlossen sind, verschwinden. Die zugrunde liegende Topologie des verzerrten 3D-Bildraums wäre so, dass das wahrgenommene Volumen ÿ jedes umschlossenen 3D-Raums gleich Null wäre. Mit anderen Worten: Es wäre nicht möglich, die Größe (also das Volumen) geschlossener dreidimensionaler Räume zu erfassen.**
Aus Alltagserfahrung wissen wir, dass wir die Größe des Raumes, in dem wir uns befinden, optisch wahrnehmen können. Dies entspricht der Vorhersage des Satzes von de Rham.

3.2. Mechanische Systeme **In**

Abwesenheit aller externen Kräfte spielt sich die Hamiltonsche Mechanik auf dem 2n- **dimensionalen Kotangentialbündel** T ÿQ = P **(oder Impulsphasenraum) einer n-dimensionalen Konfigurationsmannigfaltigkeit Q ab. Wenn man Position (Konfiguration)** q **und Impuls** p **als kanonische** Koordinaten verwendet, **existieren eine kanonische 1-Form** *ÿ* = pidqi **und eine kanonische geschlossene 2-Form** *ÿ* = dqi **ÿ** dpi **an jedem Punkt** (q, p) **auf** T ÿQ = P **(d. h. auf dem Impulsphasenraum des Hamiltonschen Systems). Die symplektische Struktur der 2-Form** *ÿ* = dqi **ÿ** dpi **definiert eine symplektische Geometrie auf dem System. Kontraktion des symplektischen 2-Formfelds** *ÿ* **durch ein Vektorfeld** *ÿ*

Machine Translated by Google

ergibt ein 1-Form-Feld *ÿ = Cÿÿÿ* **auf** T ÿQ = **P. Es gibt jedoch eine wunderbare Entdeckung, die für alle Hamiltonschen mechanischen Systeme gilt (und für alle Systeme, deren Dynamik durch Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben werden kann). Es gibt ein spezielles Vektorfeld** ÿh, **für das das 1-Form-Feld** *ÿ = Cÿhÿ* **ein exaktes 1-Form-Feld gleich** dh ist, **wobei** h **eine glatte reellwertige Funktion auf dem Impulsphasenraum** T ÿQ = **P ist. Die reellwertige Funktion** h **heißt Hamilton-Funktion und das Vektorfeld** ÿh **heißt Hamilton- Vektorfeld des Hamiltonschen mechanischen Systems. Wenn die reellwertige Funktion** h **gleich der Gesamtenergie des mechanischen Systems ist (d. h. gleich der Summe der kinetischen Energie und der potentiellen Energie des Systems, ausgedrückt als Funktion von Position und Impuls), dann ist der integrale Fluss des Hamiltonschen Vektorfelds** ÿh **im Impulsphasenraum** T ÿQ = P **gleich der freien Bewegung des mechanischen Systems. Da es per Definition keine Energie einbringende oder Energie abführende äußere Kraft gibt, bleibt die Gesamtenergie** h **des Systems im** integralen Fluss des Hamiltonschen Vektorfelds ÿh erhalten. Der integrale Fluss ist auf eine **(2n ÿ** 1) **-dimensionale Konturschale mit konstanter Energie (d. h. konstantem h) in** T ÿQ = **P beschränkt. Unterschiedliche Energieniveaus entsprechen Flüssen in unterschiedlichen Konturschalen mit konstanter Energie im Impulsphasenraum des Systems.**

Wenn jedoch ein eindimensionales Loch im Impulsphasenraum existiert, dann kann die 1-Form *ÿ = Cÿÿÿ* **gemäß dem Satz von de Rham nicht global exakt sein, und daher können weder die Hamiltonfunktion** h **noch das Hamiltonvektorfeld** ÿh **global definier**

Das exakte 1-Form-Feld *ÿ* = dh **wird durch ein harmonisches 1-Form-Feld ersetzt**

$$ÿ \; ÿ \; \mathbf{H1}\,(P)\; ÿ = H\; dR(P)^{1}$$

das ist geschlossen, aber nicht exakt.

3.3. Elektrodynamische Systeme

In der Elektrodynamik auf der 4D-Raumzeit von Minkowski können die Maxwell-Gleichungen wie folgt geschrieben werden: in Bezug auf Differentialformen als

$$ÿF^{\mu ÿ}_{,ÿ} = F\mu ÿ,ÿ + Fÿÿÿÿ,\mu + Fÿÿÿ\mu,ÿ = \mathbf{0\ (Quelle\ frei)}$$

$$F^{\mu ÿ}_{,ÿ} = \frac{4ÿ}{c} J\,\mu \textbf{ (quellengekoppelt),}$$

wobei F an jedem Punkt in der 4D-Minkowski- **Raumzeit eine schiefsymmetrische elektromagnetische 2-Form ,** J **an jedem Punkt ein aktueller 4-Vektor,** c **die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und ÿ der Hodge-Sternoperator (alles in Gaußschen Einheiten) ist .**

Die quellenfreien Gleichungen sind genau dann wahr, wenn ein 4-Kovektorfeld A **(d.ÿh. ein 1-Form-Feld) existiert, das als elektromagnetisches Potentialfeld bezeichnet wird, sodass** F = dA **(d.ÿh.** F **ist ein geschlossenes, global exaktes 2-Form-Feld in der 4D-flachen Minkowski-Raumzeit).**

Ein solches 1-Form-Feld A **kann durch die Addition eines äußeren Differentials** *dÿ* **einer glatten reellwertigen Funktion** *ÿ* **auf der 4D-Minkowski-Mannigfaltigkeit (d. h.** A **=** A + *dÿ)* verändert werden , **ohne** das geschlossene 2-Form-elektromagnetische Feld **F zu verändern .** F **bleibt unverändert, da** d **ÿ** d = dd immer Null **ist , und** F **kann wie folgt geschrieben werden:**

$$F = dA = dA + ddÿ = dA$$

Jede solche Transformation des elektromagnetischen Potentials A , **die keinen Einfluss auf das elektromagnetische Feld** F hat, **wird als** Eichtransformation bezeichnet. **Jede Wahl von** *ÿ* , die die **inhomogene Wellengleichung erfüllt,** wird als Lorentz-Eichung bezeichnet .

$$ÿÿ = ÿA\,\mu_{,\mu} \quad \textbf{so dass}$$

$$\text{Ein}_{\mu,\mu} = \text{EIN}\,\mu,\mu + ÿÿ = A\,\mu_{,\mu} \quad ÿ\,\text{Ein}\,\mu,\mu = \mathbf{0}$$

wobei der Operator ÿ **der Wellenoperator oder der d'Alembertsche Operator ist**

$$ÿÿ = \mathbf{ÿ2ÿ\ ÿ} \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\,c}\,\frac{ÿ\,2ÿ}{ÿt^{\mathbf{2}}}$$

Machine Translated by Google

Dies zeigt, dass ein elektromagnetisches Potential A **in der Lorentz-Eichung eine elektromagnetische Welle** *ÿÿ* transportieren kann , **die sich mit Lichtgeschwindigkeit** c **im Vakuum ausbreitet, ohne das elektromagnetische Feld F zu verändern. Das elektromagnetische Feld** F **ist das Medium, in dem sich die Welle ausbreitet, ohne dass ein Äther erforderlich ist. Es ist wichtig zu beachte**

$$\ddot{y}\ddot{y} = \ddot{y}A\,\mu \quad ,\mu = \textbf{ÿdiv ÿ grad } \ddot{y} = \textbf{ÿÿ2ÿ} = \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y},$$

d. h. der d'Alembertsche Wellenoperator ÿ **in der 4D-flachen Minkowski-Raumzeit ist gleich dem Laplace-Operator ÿ in einer flachen 4D-Raumzeit.**

Wenn jedoch in der 4D-Raumzeit-Mannigfaltigkeit ein eindimensionales Loch existiert, dann kann **das elektromagnetische Potential** A nach dem Satz von de Rham **nicht global exakt sein, und folglich kann die Lorentz-Eichung nicht definiert werden. Das globale elektromagnetische Potential-1-Form-Feld** A **wird durch ein harmonisches 1-Form-Feld ersetzt. Dies lässt die Frage nach der Existenz eines Äthers ungewiss.**

3.4. Flüssigkeitsströmung

Die Prinzipien der Strömungsmechanik sind seit langem ein Standard im Physikunterricht [14–16]. Betrachten Sie einen langsam fließenden Wasserstrom. Wasserpartikel in der Nähe der Grenze haften an der Grenze und haben daher eine Abwärtsgeschwindigkeit von Null. Wassermoleküle in dieser Grenzschicht bilden Wasserstoffbrücken miteinander, die die Oberflächenspannung erhöhen und die Dipolverteilung der elektrischen Ladung verändern. Punkte weg von der Grenze in Richtung der Mitte des Stroms haben höhere durchschnittliche Abwärtsströmungsgeschwindigkeiten. Dieses Strömungsmuster wird als Schichtenströmung bezeichnet. **Die zufällige Bewegung der Wasserpartikel aufgrund von thermischer Energie und elektrischen Feldern verursacht einen Austausch von Wasserpartikeln zwischen den verschiedenen Schichten, wobei die Partikel mit höherer Geschwindigkeit die langsameren beschleunigen und umgekehrt. Dies führt zu Scherspannungen und zur Übertragung von kinetischer Energie und Impuls zwischen den verschiedenen Schichten, was eine Eigenschaft des Wassers erzeugt, die als dynamische Viskosität μ bezeichnet wird. Die Viskosität variiert zwischen verschiedenen Flüssigkeiten und ist ein Maß für die Fließfähigkeit. Honig beispiels**

Stellen Sie sich nun einen schnell fließenden Gebirgsbach vor, der um Felsen herumfließt. Wasserpartikel können nicht durch die Felsen hindurchfließen, also müssen sie um sie herumfließen. Die Felsen bilden 2D-Löcher verschiedener Größen im Raum des Wassers (d. h. die 2D-Oberfläche jedes Felsens ist ein 2-Zyklus, der eine Grenze um ein Loch im Raum des Wasserflusses bildet). Wenn der Bach schnell genug fließt (aufgrund einer reichlichen Versorgung mit kinetischer Energie durch die Schwerkraft), verursacht die Strömung um die Felsen große Wirbel und Strudel in der Strömung. Diese großen Wirbel breiten sich nach außen aus und übertragen kinetische Energie auf kleinere Wirbel und Strudel. Diese erzeugen wiederum noch kleinere Wirbel. Diese Kaskade kinetischer Energie von größeren zu kleineren Wirbeln hängt von der Fließgeschwindigkeit (d. h. der verfügbaren kinetischen Energie) und der Energiedissipationsrate im Wasser aufgrund der Viskosität ab. Die Wirbel verschiedener Größen erscheinen und verschwinden auf unvorhersehbare Weise, wodurch lokale Tangentialgeschwindigkeiten und Drücke chaotisch und unvorhersehbar von Punkt zu Punkt variieren. Dies erhöht die Durchmischung. Erhöhte lokale Fließgeschwindigkeiten reduzieren den lokalen Druck, wodurch Gase im Wasser verdampfen und Blasen bilden können. Die Bildung und das Platzen von Blasen führen zu Energieverlust und erzeugen ein „gurgelndes“ Geräusch. Das chaotische Strömungsmuster, das mit einer solchen Energiekaskade von großen zu kleinen Wirbeln bei minimaler Energieableitung verbunden ist, wird als turbulente Strömung bezeichnet. **Turbulente Strömungen werden bei vielen Flüssigkeitsströmen in der Natur beobachtet, beispielsweise bei Meereswellen,**

3.4.1. Navier–Stokes–Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind nichtlineare partielle Differentialgleichungen, die die Bewegung viskoser Flüssigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum beschreiben. Sie wurden in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts über viele Jahre von Navier und Stokes entwickelt. Im Wesentlichen sind sie ein Ausdruck des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes; das heißt, Kraft ist gleich

Machine Translated by Google

inkompressible Navier–Stokes-Gleichungen können aus der konvektiven Form der Cauchy-Impulsgleichung und haben die Form

$$\ddot{y}\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{6}$$

$$\ddot{y}\mathbf{u}/\ddot{y}t + (\mathbf{u}\cdot\ddot{y})\mathbf{u} = \ddot{y}\,\ddot{y} \quad -\frac{1}{\ddot{y}}\ddot{y}p + \mu\ddot{y}2\mathbf{u} + \mathbf{F}. \tag{7}$$

Gleichung (6) ist eine Kontinuitätsgleichung, die die Impulserhaltung ausdrückt und auf inkompressible Fluide anwendbar ist. Die Lösung der Gleichungen ergibt die Fließgeschwindigkeit u **als Vektorfeld über dem 3D-Raum des Fluids. Der Vektor** u **gibt die Richtung und Größe der Geschwindigkeit des Fluids an jedem Punkt im 3D-Raum des Fluids zu jedem Zeitpunkt an.** ÿu/ÿt **ist die Zeitbeschleunigung. (u·ÿ)u oder u·(ÿu) ist die räumliche oder konvektive Beschleunigung (z. B. Wirbel und Strudel). Die konvektive Beschleunigung ist nicht linear und beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit** u **mit der Position. Sie erschwert die Lösung der Gleichungen und ist die vorherrschende Ursache für Turbulenzen.** ÿu **ist der Geschwindigkeitsgradient. Es handelt sich um eine Jacobi-Matrix oder einen Tensor zweiter Ordnung. Seine symmetrische Komponente** 1/2(ÿu + $(\ddot{y}u)^{T}$) **beschreibt Dehnung und Scherung, während seine schiefsymmetrische Komponente** 1/2(ÿu − $(\ddot{y}u)^{T}$) **beschreibt die Rotationsgeschwindigkeit.** $\ddot{y}$ **ist die Fluiddichte, während** ÿp **der Druckgradient ist.** $\mu\ddot{y}2\mathbf{u}$ **ist die Diffusionsdivergenz der Scherspannung aufgrund der Viskosität und** μ **ist die dynamische Viskosität des Fluids. Der symmetrische Scherspannungstensor** $\ddot{y}\ddot{y}$ **von** $\ddot{y}$ **ist gegeben durch**

$$2\mu\ddot{y}\cdot\ddot{y} = 2\mu\ddot{y}\cdot(1/2(\ddot{y}\mathbf{u} + (\ddot{y}u)^{T})) = \mu\ddot{y}2\mathbf{u} = \mu\ddot{y}\mathbf{u} \tag{8}$$

wobei ÿu = $\ddot{y}2\mathbf{u}$ **der Laplace-Operator von** u **im euklidischen Raum ist.** F **stellt alle auf die Flüssigkeit einwirkenden externen Kräfte dar, einschließlich Schwerkraft und elektromagnetischer Kräfte.**

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind analytisch schwer, wenn nicht gar unmöglich zu lösen. Computersimulationen unter Verwendung vereinfachender Annahmen wie zeitlicher und räumlicher Mittelung oder Bandpassfilterung können jedoch die simulierten Strömungsverhältnisse gut mit den experimentell gemessenen Strömungsverhältnissen abgleichen **[16].**

3.4.2. Reynoldszahl Die

Reynoldszahl ist eine dimensionslose Zahl, die von Osborne Reynolds (1842–1917) definiert wurde als

$$\mathbf{Re} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kräfte}} = \frac{\ddot{y}uL}{\mu}$$

wobei $\ddot{y}$ **= Dichte,** u = **Geschwindigkeit,** L = **charakteristische Länge (z. B. Größe von Steinen in einem Gebirgsbach) und** μ = **dynamische Viskosität.**

Die Reynoldszahl spielt eine wichtige Rolle bei der Interpretation der Navier-Stokes-Gleichungen und des Satzes von de Rham, denn wenn Re experimentell von einem kleinen auf einen großen Wert erhöht wird , beobachtet man, dass die Flüssigkeitsströmung einen Übergang von einer Schichtströmung zu einer turbulenten Strömung durchmacht. Der Übergang kann je nach Größe der Reynoldszahl in Stufen unterteilt werden. Wenn viskose Kräfte aufgrund von Scherspannungen in der Flüssigkeit die Trägheitskräfte dominieren, ist die Reynoldszahl klein (z. B. Re für Honig ÿ 0,001). Wenn Re klein ist, wird die Flüssigkeitsströmung von der Energiedissipation aufgrund der viskosen Scherspannungen dominiert, und folglich werden Wirbel und Strudel stark gedämpft. Das Ergebnis ist eine stabile Schichtströmung . Wenn Re erhöht wird, werden nach außen fließende dreidimensionale Druckwellen zwischen den Schichtschichten I Bei großen Reynoldszahlen dominieren die Trägheitskräfte und die viskose Dämpfung ist minimal. Aufgrund der relativ geringen Energiedissipation und Dämpfung kommt es zu turbulenten Strömungen. Wenn die Zufuhr kinetischer Energie die Energiedissipation übersteigt, erzeugen Instabilitäten in nichtlinearen konvektiven Wechselwirkungen eine Kaskade von Energietransfers von großen zu kleinen W und Wirbel.

Bei sehr großen Reynoldszahlen kann die Diffusionsdivergenz der Schubspannung aufgrund der Viskosität $\mu\ddot{y}2\mathbf{u}$ **in der Navier-Stokes-Gleichung praktisch vernachlässigt werden. Extrem**

Machine Translated by Google

Strömung entsteht, und die Energiekaskade erzeugt chaotische Rotationsströmungen im kleinen Maßstab einzelner Moleküle. Das Ignorieren von μÿ2u ist gleichbedeutend damit, den Laplace-Operator des Geschwindigkeitsvektorfelds im euklidischen Raum gleich Null zu setzen (d. h. ÿu = **ÿ2u** = 0), **wobei ÿ2u gleich dem Laplace-Operator** ÿu **im euklidischen Raum ist, in dem die Ricci-Krümmung Null ist. Laut de Rhams Kohomologietheorie ist ein solches Geschwindigkeitsvektorfeld ein globales harmonisches Strömungsfeld, das mit der Existenz von Löchern in der zugrunde liegenden Topologie des dreidimensionalen euklid Bei ausreichender Zufuhr kinetischer Energie ist die Existenz von Löchern (wie etwa Partikeln, Steinen und Blasen) im Raum einer Flüssigkeitsströmung mit extremer Turbulenz verbunden, da in der Flüssigkeit keine Energiedissipation stattfindet und auf molekularer Ebene chaotische Rotationsenergie vorhanden ist .**

4. Ein theoretischer Vorschlag

4.1. Biologische

Zellen **Biologische Prozesse regulieren die Körpertemperatur des Menschen auf 37 °C. Es gibt also reichlich thermische kinetische Energie für die Bewegung von wässrigen Lösungen innerhalb biologischer Zellen. Biologische Zellen sind dicht mit Organellen und anderen Molekülen gefüllt. Intrazelluläre Flüssigkeit kann nicht durch diese Organellen fließen, also muss sie um sie herum fließen. Mit anderen Worten enthält der 3D-Raum der intrazellulären wässrigen Lösung eine große Anzahl von Löchern verschiedener Formen und Größen. Wie oben beschrieben, zeigt der Satz von de Rham, dass das Vorhandensein solcher Löcher in der zugrunde liegenden Topologie des 3D-Raums einer Flüssigkeit einen dramatischen Einfluss auf die Vektor- und 1-Form-Flussfelder hat. Basierend auf der mathematischen Theorie schlagen wir vor, dass die thermische Bewegung intrazellulärer Flüssigkeit um Organellen eine Übertragung kinetischer Energie mit minimaler Energiedissipation von großen zu sehr kleinen Wirbeln und Strudeln auf molekularer Ebene erzeugt und das**

4.2. Proteinfaltung **Die**

Erforschung der Proteinfaltung begann vor etwa 60 Jahren. Vieles ist bekannt, aber vieles muss noch erforscht werden [17–19]. Proteine sind Polypeptidketten aus Aminosäuren, die von Ribosomen in biologischen Zellen zusammengesetzt werden. An langen Peptidketten können Hunderttausende von Atomen beteiligt sein . Die Reihenfolge der Aminosäureseitenketten in jeder Peptidkette wird durch Codons in mRNA-Molekülen festgelegt. Die Aminosäuresequenz bestimmt die 3D-Struktur, in die sich die Peptidkette spontan faltet. Die Faltung erfolgt innerhalb von Millisekunden und findet sogar dann statt, wenn die Peptidkette von einem Ribosom zusammengesetzt wird.

Die native 3D-Konformation der Peptidkette ist von entscheidender Bedeutung. Sie bestimmt die Funktion des Proteins. Verschiedene Funktionen von Tausenden verschiedener Proteine bilden die molekulare Maschinerie für lebende Systeme. Wenn die Proteine nicht richtig gefaltet sind, funktionieren sie nicht richtig, was zu vielen Erkrankungen wie amyotropher Lateralsklerose, Sichelzellenanämie, Alzheimer-Krankheit und Rinderwahnsinn führt, um nur einige zu nennen. Aber welche Mechanismen steuern die Faltung von Proteinen und was führt dazu, dass sie schief läuft?

Angesichts der extrem großen Anzahl möglicher Bindungswinkel zwischen den Atomen und Molekülen innerhalb der Peptidkette weist die Tatsache, dass die korrekte Faltung sehr schnell erfolgt, darauf hin, dass es sich nicht um einen zufälligen Versuch-und-Irrtum-Prozess handelt. Es muss einen physikalischen Prozess geben, der den Faltungspfad steuert. Es gibt auch ein Paradoxon. Die große Anzahl möglicher Konfigurationen der entfalteten Peptidkette faltet sich zu einer einzigartigen 3D-Struktur des funktionierenden Proteins. Dies verstößt gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Die Konformationsentropie des Proteins nimmt ab, wenn se

Das Paradoxon kann gelöst werden, indem man die intrazelluläre wässrige Lösung betrachtet, in die die Peptidketten eingetaucht sind. Es ist bekannt, dass diese eine entscheidende Rolle bei der Proteinfaltung spielt. Wenn ein gefaltetes Protein in Harnstoff (der als Reinigungsmittel wirkt) eingetaucht wird, entfaltet es sich und faltet sich wieder korrekt, wenn es in die intrazelluläre Flüssigkeit zurückgeführt wird. Ionenkonzentrationen, pH-Wert und Temperatur der intrazellulären Flüssigkeit müssen durch biologische Prozesse sorgfältig auf geeignete Werte reguliert werden. Wenn die Regulierung fehlschlägt, falten sich die von den Ribosomen zusammengesetzten Peptidketten nicht richtig. Eine vorherrschende thermodynamische Theorie für die Proteinfaltung führt die Rolle der intrazellulären

Machine Translated by Google

Hydrophobe Aminosäureseitenketten, die entlang der Peptidkette verteilt sind, bewirken, dass die diese Seitenketten umgebenden Wassermoleküle strukturiert werden, angetrieben durch ihre elektrischen Dipole und Wasserstoffbrücken zwischen den Wassermolekülen. Thermodynamische Gradienten der freien Energie bewirken, dass sich die Peptidkette faltet, sodass ihre hydrophoben Seitenketten in ihrem Kern eingeschlossen sind und so vor den umgebenden Wassermolekülen verborgen werden. Dadurch werden die Wassermoleküle aus der geordneten Struktur befreit, die durch die hydrophoben Seitenketten vorgegeben wird, wodurch die Entropie des Wassers zunimmt. Die Zunahme der Entropie des Wassers übersteigt die Abnahme der Konfigurationsentropie, die mit der Proteinfaltung einhergeht, sodass eine spontane Faltung thermodynamisch möglich ist.

Zusätzlich zu den thermodynamischen Gradienten der freien Energie in der intrazellulären Flüssigkeit gibt es viele andere chemische und elektrische potentielle Energiefelder, die die Peptidkette umgeben und ihre Faltung beeinflussen können, darunter kovalente, ionische und Wasserstoffbrücken, Spannungsgradienten und Van-der-Waals-Kräfte zwischen Atomen im Protein. Verschiedene Konfigurationen der Peptidkette bringen attraktive Stellen entlang der Kette in eine Ausrichtung. Diese Ausrichtungen ermöglichen die Bildung von Wasserstoffbrücken, Disulfidbrücken, Salzbrücken und mehr. Die damit verbundenen potentiellen Energiefelder treiben die Faltung des Proteins in Richtung der minimalen Energiekonfiguration, die durch die Aminosäuresequenz in der Peptidkette vorgegeben ist. Es gibt jedoch keine Garantie dafür, dass ein bestimmter Satz molekularer Bindungen und Salzbrücken der funktionalen minimalen Energiekonfiguration entspricht. Wenn es sich nur um eine lokale minimale Energiekonfiguration handelt, muss am Molekül gearbeitet werden, um seine Konfiguration aus der lokalen Energiefalle in ein tieferes Energietal zu b

4.3. Der Vorschlag:

Es erscheint nicht abwegig, anzunehmen, dass das Wackeln (Brownsche Bewegung) von Atomen und Molekülen in Peptidketten, das durch die Bewegung der intrazellulären Wasserlösung verursacht wird, eine bedeutende Rolle in der Kinematik der Proteinfaltung spielt. Der Satz von de Rham zeigt, dass Löcher in der darunterliegenden Topologie der intrazellulären Flüssigkeit mit globalen harmonischen **Strömungsfeldern im 3D-Raum der Flüssigkeit verbunden sind. Die experimentelle Untersuchung von Flüssigkeitsströmungen zusammen mit der Reynolds-Zahl, den Navier-Stokes-Gleichungen und dem Satz von de Rham stellt eine (mit experimentellen Beobachtungen übereinstimmende) Verbindung zwischen Löchern, extrem turbulenten Strömungen und harmonischen Strömungsfeldern her. Der Term μÿ2u** = **μÿu in der Navier-Stokes- Gleichung beschreibt die Diffusionsdivergenz der Scherspannung infolge der dynamischen Viskosität** *μ* **der Flüssigkeit. Experimentelle Studien zeigen, dass große Verhältnisse von Trägheitskräften zu viskosen Kräften (d. h. große Reynolds-Zahlen) mit extrem turbulenten Strömungen verbunden sind und der Term μÿ2u** = **μÿu in der Navier-Stokes-Gleichung effektiv ignoriert werden kann. Dies entspricht dem Setzen des Laplace-Operators des Geschwindigkeitsfelds** ÿu **gleich Null. In der Differentialgeometrie werden harmonische Vektor- und 1-Form-Felder genau so definiert (d. h. im euklidischen Raum** ÿu = **ÿ2u** = **0). Mit anderen Worten implizieren experimentelle Beobachtungen von Flüssigkeitsströmungen, dass harmonische Strömungsfelder, die mit der Strömung um Organellen und andere Moleküle (einschließlich Proteinmoleküle) verbunden sind, mit extrem turbulenten Strömungen verbunden sind. Das Vorhandensein von Löchern im 3D-Flüssigkeitsraum verhindert, dass geschlossene 1-Form- und Vektorströmungsfelder global exakt sind, und ersetzt sie durch harmonische 1-Form-Strömungsfelder. Mit anderen Worten: Bei ausreichender Versorgung mit kinetischer Energie liefert de Rhams Theorie eine formale Beschreibung des intrazellulären Flüssigkeitsfl**

Wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, können **harmonische Strömungsfelder, die mit Löchern in der zugrunde liegenden Topologie des Fluidraums verbunden sind, mathematisch berechnet werden, indem der Laplace-Operator des Strömungsfelds mit Null gleichgesetzt wird (d. h.** *ÿÿ* := **ddÿÿ** + d ÿdÿ = **0). Im euklidischen Raum ist der Laplace-Operator eines Vektorströmungsfelds jedoch gegeben durch** ÿu = ÿ2u, **und gemäß den Navier-Stokes-Gleichungen (6) und (7) ist die Einstellung von** ÿu = **ÿ2u** = **0 gleichbedeutend mit der Abwesenheit von viskoser Scherspannung und der Abwesenheit von Energiedissipation im Fluid. Es entsteht eine extrem turbulente Strömung. Eine reichliche Zufuhr thermischer kinetischer Energie bei vernachlässigbarer Energiedissipation im Fluid verursacht eine Kaskade der kinetischen Energieübertragung von großen Wirbeln und Strudeln zu in**

Machine Translated by Google

in Form chaotischer 3D-Rotationen einzelner Wassermoleküle. Wenn man bedenkt, dass Wassermoleküle in der Nähe hydrophober Aminosäureseitenketten Wasserstoffbrücken zueinander bilden und an hydrophilen Aminosäureseitenketten haften, erscheint es vernünftig anzunehmen, dass diese kinetische Energie zur Verfügung steht, um Arbeit an den Atomen **und Molekülen von Proteinpolypeptidketten zu verrichten (d. h. Energie zuzuführen) .**

Die auf die Proteinmoleküle ausgeübten Rotationsdrehmomente haben das richtige Energieniveau und die richtige Größenordnung, um auf die Bindungswinkel zwischen Atomen und Molekülen innerhalb der Peptidkette einzuwirken. Darüber hinaus wirken sie gleichzeitig auf alle Teile der Peptidkette und können **in Kombination mit thermodynamischen, chemischen und elektrischen Potenzialenergiegradienten, die die Peptidkette umgeben, eine wichtige Rolle bei der Proteinfaltung spielen. Sie liefern nicht nur die Energie, die zum Ausbrechen aus lokalen Energiefallen erforderlich ist, sondern können auch** die **Faltung in Richtung minimaler Energiekonfigurationen beschleunigen. Wie das „Annealing“ in Suchalgorithmen für minimale Varianz für neuronale Netzwerke ermöglichen die chaotischen harmonischen Strömungsfelder innerhalb intrazellulärer Flüssigkeiten die Faltung, um die einzigartige absolute minimale Energiekonfiguration des Proteins zu finden. Dies erfordert natürlich das entsprechende biologisch regulierte Niveau an verfügbarer Energie. Wenn die Körpertemperatur zu niedrig ist, hat der intrazelluläre Flüssigkeitsfluss nicht genügend Energie, um Peptidketten aus lokalen Energiefallen auszubre**

Eine schöne Analogie für die Brownsche Bewegung von Proteinmolekülen und Seitenketten, die durch die turbulente Strömung intrazellulärer Flüssigkeit um die dicht gepackten Organellen innerhalb der Zelle verursacht wird , **ist die chaotische Bewegung der Blätter und Zweige eines Baumes, die durch den Wind verursacht wird, der durch den Baum strömt.**

5. Diskussion

Um es noch einmal zusammenzufassen: Der Satz von de Rham zeigt, dass Löcher in der zugrunde liegenden Topologie einer glatten Mannigfaltigkeit mit geschlossenen Differentialformfeldern auf der Mannigfaltigkeit verbunden sind, die nicht exakt sind. Diese als harmonische Formfelder bekannten Felder können auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit berechnet werden, indem ihr Hodge-Laplace-Operator ÿ := ddÿ + d ÿd **gleich Null gesetzt wird, und auf einem euklidischen Raum, indem der Laplace-Operator ÿ** = **ÿ2 gleich Null gesetzt wird. Die Frage ist, ob solche harmonischen Formfelder in der Natur existieren und wenn ja, welche E**

Die Mathematik sagt uns, dass die integralen Strömungsfelder auf einer Kugel beispielsweise sehr verschieden von den Strömungsfeldern auf einem Torus sind, wobei der Unterschied auf das Loch im Torus zurückzuführen ist. Ebenso sagt dieselbe Mathematik für die in Abschnitt 3 beschriebenen physikalischen Systeme mit Sicherheit voraus, **dass das Verhalten von Vektor- und Differentialformfeldern auf ihren glatten Mannigfaltigkeiten durch das Auftreten eines oder mehrerer Löcher in der zugrunde liegenden Topologie der Mannigfaltigkeit grundlegend verändert werden sollte . Haben wir experimentelle Beweise dafür, dass dies der Fall ist? Und welche Implikationen ergeben sich**

5.1. Mechanische Systeme **In**

Abschnitt 3.2 haben wir mathematisch gezeigt, dass gemäß dem Satz von de Rham das Vorhandensein von Löchern im Impulsphasenraum eines mechanischen Systems verhindert, dass die Hamiltonfunktion h **und das Hamiltonvektorfeld** ÿh **global im Phasenraum definiert werden können. Obwohl dies eine definitive mathematische Vorhersage ist, bleibt es bis zur Verfügbarkeit geeigneter experimenteller Daten ungewiss, wie sich ein physikalisches mechanisches System mit Löchern in seinem Impulsphasenraum genau verhalten könnte. Welche Art von Strömungsfeld das global exakte 1-Formfeld** *ÿ = Cÿh ÿ* **in einem Hamiltonsystem ersetzen wird, muss noch entdeckt werden. Mit anderen Worten impliziert der Satz von de Rham, dass Änderungen in der Topologie des Zustandsraums eines mechanischen Systems ein anderes mathematisches Modell erfordern als das der Hamiltonmechanik.**

Dieses Problem gilt in ähnlicher Weise für **die Lagrange-Mechanik. Während sich die Hamilton-Mechanik auf dem Kotangentialbündel** (T ÿQ) **über der Konfigurationsmannigfaltigkeit** (Q) abspielt, **spielt sich die Lagrange-Mechanik auf dem Tangentialbündel** (TQ) **über der Konfigurationsmannigfaltigkeit** (Q) ab. **Die Legendre-Transformation** FL = TQ **ÿ** T ÿQ **bildet Punkte in** TQ **auf Punkte in** T ÿQ ab. **Lagrange- und Hamilton-Mechanik werden oft als dual zueinander beschrieben**

Machine Translated by Google

andere, weil, wenn die Gleichungen überall regulär sind, beide die gleiche Bewegungsbahn in der Konfigurationsmannigfaltigkeit Q ableiten. Die Dualität zwischen Lagrange- und Hamilton-Systemen erfordert jedoch, dass die Legendre-Transformation FL(. ÿ pi ein q glatter Eins-zu-eins-Diffeomorphismus ist, wobei L(q, . q) der Lagrange-Operator ist, der gleich der Differenz i zwischen der kinetischen Energie und der potentiellen Energie ist, q ist die i - te Komponente der Geschwindigkeit Vektor q und pi ist die i - te Komponente des Impulsvektors p. Die Dualität erfordert auch, dass sowohl die symplektische zweite Differentialform der Lagrangeschen Gleichung auf TQ als auch die symplektische zweite Differentialform der Hamiltonschen Gleichung auf T ÿQ nicht entartet sind. Viele mechanische Systeme in der realen Welt erfüllen diese Anforderungen jedoch nicht. Tatsächlich ist es diese Tatsache, die die Bedeutung des Theorems von Emmy Nètre ausmacht; nämlich, wenn eine Lagrangesche Gleichung L(q, . q) entartet ist und sich entlang einer Koordinate q nicht ändert, dann bleibt die zugehörige Komponente des Impulses pi erhalten. Das Entfernen von Entartungen und Singularitäten aus den Mannigfaltigkeiten führt zu Löchern, und diese verändern, wie de Rhams Theorie zeigt, das Verhalten des mechanischen Systems weg von dem, das von der klassischen Lagrangeschen und Hamiltonschen Mechanik vorhergesagt wird. Soweit wir wissen, steht die Modellierung mechanischer Systeme in der realen Welt, die Löcher in der Mannigfaltigkeit berücksichtigt, noch bevor. Wir hoffen, dass diese Darlegung des theoretischen Hintergrunds dazu beitragen

5.2. Elektrodynamische Systeme

In Abschnitt 3.3 haben wir mathematisch gezeigt, dass die Existenz von Löchern in der 4D- Raumzeit von Minkowski verhindert, dass Maxwells quellenfreie Gleichungen wahr sind. Das geschlossene elektromagnetische 2-Form-Feld F kann nicht global exakt sein, und das elektromagnetische 1-Form-Potentialfeld kann nicht global definiert werden. Folglich können globale Eichtransformationen des Potentialfelds, einschließlich der Lorentz-Eichung, nicht existieren. Wird das elektromagnetische 1-Form-Feld durch ein harmonisches 1-Form-Feld ersetzt und wenn ja, welche Eigenschaften wird es besitzen? Auch hier sind entsprechende experimentelle Beobachtungen physikalischer elektrodynamischer Systeme erforderlich, um diese Frag

Tatsächlich haben diese Implikationen Auswirkungen auf die Natur elektromagnetischer Strahlung selbst. Die wirbelnde Bewegung geladener Teilchen in der Sonne erzeugt wechselnde elektrische Ströme J und wechselnde Ladungsdichten ÿ. Aber wie die Maxwell-Gleichungen des Elektromagnetismus zeigen, sind J und *ÿ* genau die Energiequellen für magnetische Felder B und elektrische Felder E. Im Vakuum des Weltraums zwischen Sonne und Erde sind J und *ÿ* beide Null. Trotzdem erfüllen die gekoppelten Felder E und B , selbst wenn sowohl J als auch *ÿ* gleich Null sind, unter Verwendung der Rotation der Rotationsbeziehung und der Div- und Rotationsbeziehungen zwischen E und B in den Maxwell-Gleichungen die Wellengleichungen ÿ2E ÿ 1/c *2ÿ* 2E/ÿt 2 und ÿ2B ÿ 1/c *2ÿ* 2B/ÿt 2. Mit anderen Worten: E und B bilden gekoppelte elektromagnetische Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit c durch ein Vakuum bewegen können, obwohl sowohl J als auch *ÿ* gleich Null sind.

Doch in der Physik bleiben Fragen ungeklärt. Analog zu Wellen im Wasser und Schallwellen in der Luft ist zu erkennen, dass Wellen ein Medium benötigen, in dem sie sich fortbewegen können. Doch in welchem Medium bewegt sich eine elektromagnetische Welle im Vakuum fort? Ende des 19. Jahrhunderts schlug Lorentz vor, dass etwas namens Äther den gesamten Raum ausfülle und dass sich elektromagnetische Wellen im Äther mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen. Das Interferometer-Experiment von Michelson und Morley aus dem Jahr 1887 zeigte jedoch, dass es keinen Unterschied in der Lichtgeschwindigkeit von einem Stern gab, wenn sich die Erde auf den Stern zubewegte, im Vergleich zu der, wenn sich die Erde vom Stern wegbewegte. Dies stellte die Vorstellung in Frage, dass sich sowohl das Licht als auch die Erde im Raum relativ zu einem festen Äther bewegen. In jüngerer Zeit bietet der mathematische Ansatz der Teilchenphysik, die sogenannte Eichtheorie , eine alternative Erklärung, nämlich dass die elektrischen und magnetischen Felder selbst das Medium bilden, in dem sich das Licht fortbewegt. Doch wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, zeigt de Rhams Theorie der Differentialformen, dass die Eichtheorie selbst in der Nähe von Löchern in der M

Das Leben auf der Erde hängt im Wesentlichen von der Fähigkeit elektromagnetischer Wellen ab, Energie durch den leeren Raum zu transportieren. Maxwell stellte schon früh fest, dass Licht ein elektromagnetis

Machine Translated by Google

Welle. Durch Photosynthese absorbieren Pflanzen Energie aus dem auf sie fallenden Licht und wandeln diese in chemische Energie um, die in Zuckermolekülen gespeichert wird. Diese gespeicherte chemische Energie wiederum liefert den Großteil der biologischen Energie, die zum Erhalt des Lebens auf der Erde benötigt wird. Das Verständnis elektromagnetischer Felder und der Folgen des Auftretens von Löchern in ihnen ist daher ein wichtiges Anliegen.

5.3. Das menschliche visuelle System

Sowohl für mechanische als auch für elektrodynamische Systeme müssen die Implikationen des de Rhamschen Theorems noch experimentell untersucht werden. Für das menschliche visuelle System, das in Abschnitt 3.1 untersucht wurde, ist die Situation jedoch etwas anders. In diesem Fall verfügen wir über zusätzliche relevante Informationen, die wir aus unserem eigenen Bewusstsein ableiten. Wir wissen beispielsweise, dass sich in unserem wahrgenommenen binokularen 3D-Sehraum ein Loch um das Egozentrum befindet, weil wir unseren eigenen Kopf nicht sehen können. Wir wissen auch, dass die Größe eines wahrgenommenen visuellen Bildes zunimmt, wenn die euklidische Distanz zwischen dem Egozentrum und dem Objekt in der Umgebung abnimmt. Dies steht im Einklang mit experimentellen Daten, die zeigen, dass sich die Größe eines Bildes auf der Netzhaut umgekehrt proportional zur euklidischen Distanz zwischen dem Knotenpunkt des Auges und dem Objekt in der Umgebung ändert **[4]. Dadurch entsteht eine Singularität am Egozentrum im 3D-Sehraum, wo die Größe des Bildes auf der Netzhaut unendlich wird. Diese Singularität ist jedoch kein Problem, da sie innerhalb des Lochs um das Egozentrum liegt.** Der Satz von **De Rham zeigt, dass ein solches Loch verhindern sollte, dass wahrgenommene Bildflussfelder global exakt sind, und sie dur**

Die Frage, ob es im menschlichen Sehsystem solche harmonischen Flussfelder gibt und welche Eigenschaften sie besitzen, lässt sich bis zu einem gewissen Grad aus eigener Erfahrung beantworten. Wenn wir ein Objekt in der Außenwelt immer näher an das Egozentrum heranbringen, können wir es durch Konvergieren der Augen im binokularen Sichtfeld halten. Die wahrgenommene Größe des Bildes wird immer größer und beginnt, die Größe des wahrgenommenen visuellen Raums zu überschreiten. Schließlich erreichen wir die Grenze des Schielens. Das wahrgenommene visuelle Bild wird unscharf und zerfällt chaotisch. Es kann nicht mehr als zusammenhängendes Einzelbild wahrgenommen werden. Es wird physikalisch unmöglich, das Objekt näher an das Egozentrum heranzubringen . Es hat den Rand des L Persönliche Erfahrungen zeigen, dass harmonische visuell-bildliche Flussfelder im visuellen dreidimensionalen Raum in einem Bereich nahe der Grenze des Lochs um das Egozentrum auf unvorhersehbare, chaotische Weise zerfallen. Mit anderen Worten handelt es sich hierbei um ein Grenzschich

An dieser Stelle ist es wichtig zu erwähnen, dass Experimente in der menschlichen visuellen Wissenschaft uns zeigen, dass der visuelle Raum mehrere Abbildungen haben kann. Wir argumentieren, dass die grundlegende Abbildung die ist, die durch die überraschende Tatsache offenbart wird, dass es Menschen gibt, die infolge einer Hirnschädigung blind sind, sich aber dennoch in ihrer 3D-Umgebung bewegen und visuell gesteuerte Bewegungen mit der Präzision ausführen können, als ob sie sehen könnten. Dieses Phänomen wird als blindes Sehen bezeichnet [20]. Es zeigt, dass das Gehirn über ein System verfügt, das in der Lage ist, einen unterbewussten, egozentrischen 3D-visuellen Raum zu bilden, der eine Eins-zu-eins-Abbildung mit der euklidischen Außenwelt hat. Dieses unterbewusste visuelle System muss die Verzerrung dieses 3D-visuellen Raums berücksichtigen , eine Verzerrung, die auftritt, weil die Bilderkennung durch die Netzhaut auf einer 2D-Oberfläche erfolgt. Genauer gesagt ist die Verzerrung darauf zurückzuführen, dass die Größe eines Bildes auf der 2D- Netzhaut proportional zu dem Winkel variiert, den das **entsprechende Objekt in der 3D-euklidischen Außenwelt am Knotenpunkt des Auges einschließt [4]. Als Folge dieser Verzerrung** verändern **Änderungen der Position des Kopfes in der Umgebung und der Körperhaltung nicht nur die berechnete Größe und Position der kodierten visuellen Bilder von Objekten in der Umgebung und des Körpers in dieser Umgebung, sondern sie verändern auch Umrisse, Verd**

Mit anderen Worten, es gibt eine konforme Abbildung zwischen der euklidischen Außenwelt und dem verzerrten dreidimensionalen visuellen Raum des Unterbewusstseins. Eine konforme Abbildung bewahrt die infinitesimale Form von Objekten und Winkeln zwischen Koordinaten, aber die Größe der kodierten Bilder bleibt nicht erhalten. Bilder von Objekten schrumpfen in der Größe, wenn die relative Distanz zwischen dem Egozentrum und dem Objekt im euklidischen Raum zunimmt. Trotzd

Machine Translated by Google

Verzerrung, die konforme Abbildung mit der Außenwelt ist eins zu eins, auf und glatt, und dieselbe Verzerrung gilt für visuelle Bilder der Umgebung und visuelle Bilder des Körpers oder von Körperteilen in dieser Umgebung. Somit kann dieser verzerrte, unterbewusste, egozentrische 3D-Bildraum für die Planung und Ausführung visuell gesteuerter B

Allerdings gibt es viele Hinweise darauf, dass die unbewusste und die bewusste Wahrnehmung der visuellen Welt nicht identisch sind. Letztere kann durch eine Top-down-kognitive Verarbeitung visueller Bilder vermittelt werden, die auf Bayesschen statistischen Hypothesen beruht, die aus Erfahrungen im Laufe der Zeit abgeleitet wurden. Dies führt alle möglichen Illusionen in die bewusst wahrgenommene visuelle Welt ein. Eine beliebte Illusion ist die konkave Gesichtsmasken-Illusion. Da eine Person ihr Leben lang konvexe Gesichter betrachtet hat, nimmt sie die konkave Innenseite einer Gesichtsmaske bewusst als konvex wahr. Darüber hinaus scheint sich das illusorische konvexe Gesicht zu drehen und ihr zu folgen, wenn sie sich bewegt. Ein bewusst wahrgenommener visueller Raum, der Illusionen enthält, ist nicht das, was für die Planung und Kontrolle präziser visuell gesteuerter Bewegungen erforderlich ist. Der unbewusste dreidimensionale visuelle Raum, der direkt aus afferenten Signalen abgeleitet wird und frei von statistischen kognitiven Eingriffen ist, ist **für visuell gesteuerte Bewegungen besser geeignet [1–3].**

Diese Beschreibung des menschlichen visuellen Systems wird experimentell durch ein Experiment gestützt, das erstmals 1941 von Taylor durchgeführt und seither viele Male wiederholt wurde (siehe [3]). Eine Person hält im Dunkeln ihre Hand vor das Gesicht. Ein kurzer heller Lichtblitz brennt dann ein Bild der Hand in die Netzhaut ein (bleicht es aus). Dadurch entsteht ein wahrgenommenes Nachbild der Hand, das mehrere zehn Sekunden bestehen bleiben kann. Wenn die Person im Dunkeln die Hand in Richtung Gesicht bewegt oder das Gesicht in Richtung Hand, geschieht etwas Bemerkenswertes. Das Nachbild der Hand scheint kleiner zu werden, obwohl das in die Netzhaut eingebleichte Bild unverändert bleibt. Dies ist das Gegenteil von dem, was normalerweise passiert, denn je näher die Hand im Licht an das Gesicht herangeführt wird, desto größer scheint sie zu werden . Unsere Erklärung dafür ist, dass das Nervensystem propriozeptiv wahrgenommene Bewegungen des Körpers in erwartete Veränderungen seines visuellen Bildes umwandeln kann **[3]. Wenn das erwartete visuelle Bild vom tatsächlichen visuellen Bild abgezogen wird, scheint das wahrgenommene Körperbild nicht seine Größe zu ändern, sondern nur seine Position im Raum (sogenannte Größenkonstanz). Während des Nachbildexperiments erzeugt die Bewegung der Hand die erwartete Änderung des Netzhautbildes der Hand, aber das tatsächliche Netzhautbild ist in die Netzhaut eingebrannt und ändert sich daher nicht. Das Abziehen der erwarteten Größe des Bildes vom tatsächlichen Netzhautbild erzeugt eine illusorische Vergrößerung des Nachbildes.**

Wir haben eine Riemannsche Geometriebeschreibung der Berechnungen erstellt, die erforderlich sind, um propriozeptiv wahrgenommene Körperbewegungen in erwartete Änderungen in visuellen 3D-Bildern des Körpers umzuwandeln **[1–3]. Dies ist keine einfache Berechnung, da die Beziehung nichtlinear und multivariabel ist. Sie erfordert 116 Variablen, um die Konfiguration des Körpers zu spezifizieren, der sich in einer lokalen 3D-Umgebung bewegt. Für jeden Ort und jede Körperhaltung existiert ein dreidimensionaler verzerrter visueller Raum, und an jedem Punkt in diesem visuellen Raum existiert ein kodiertes visuelles Bild der Umgebung. Diese visuellen Bilder ändern sich von einem Ort und einer Körperhaltung zu einem anderen. Geometrisch gesehen entspricht jeder 3D-visuelle Raum einer egozentrischen, negativ gekrümmten Riemannschen Mar**

Diese Beziehung zwischen Bewegung und Sehen wird dadurch kompliziert, dass im visuellen Raum die 3D-Kugel aus Punkten um das Egozentrum herum fehlt [1,2]. Dieses inhärente Loch hat uns ursprünglich dazu inspiriert, darüber nachzudenken, wie die Differentialgeometrie und insbesondere der Satz von de Rham den Einfluss dieses Lochs auf den wahrgenommenen Fluss visueller Bilder beleuchten könnten. Der chaotische Zusammenbruch visueller Bilder in der Nähe der Grenze des Lochs wurde oben beschrieben.

5.4. Flüssigkeitsströmung

Kommen wir zu Abschnitt 3.4. Unsere bisher beste Interpretation der Eigenschaften von harmonischen Strömungsfeldern in der realen Welt stammt aus experimentellen Studien von Flüssigkeitsströmungen. Wie in diesem Abschnitt dargelegt, beschreiben Navier-Stokes-Gleichungen die Flüssigkeitsströmung im dreidimensionalen euklidischen Raum, wobei der Laplace-Operator des Vektorströmungsfelds u durch ÿu = ÿ2u **gegeben**

Machine Translated by Google

Das mit der Anwesenheit von Löchern (z. B. Partikeln, Steinen, Blasen usw.) im euklidischen Raum einer Flüssigkeit verbundene Feld erhält man, indem man den Laplace-Operator auf Null setzt (d. h. ÿu = **ÿ2u**
Wenn dies in die Navier-Stokes-Gleichung eingesetzt wird, erhält man extreme Turbulenzen, die mit experimentellen Beobachtungen extremer Turbulenzen im Zusammenhang mit großen Reynolds-Zahlen übereinstimmen. Trägheitskräfte ÿuL, **Geschwindigkeiten, Drücke, Temperaturen und kinetische Energie ändern sich alle auf chaotische Weise mit der Zeit und von Punkt zu Punkt im Raum. Wenn die Reynolds-Zahl einer Flüssigkeit experimentell erhöht wird, werden die energiedissipierenden viskosen Kräfte innerhalb der Flüssigkeit vernachlässigbar und das Verhalten der Flüssigkeitsströmung nähert sich dem eines theoretischen harmonischen Strömungsfelds an. Aufgrund des Fehlens der viskosen Dämpfung innerhalb der Flüssigkeit tritt eine Kaskade kinetischer Energieübertragung von großen zu kleinen Wirbeln auf und es entsteht ein chaotisches Strömungsfeld. Rotationswirbel und Rotationsenergie werden im kleinen Maßstab einzelner Moleküle in der Flüssigkeit verfügbar. Das Vorhandensein solcher kleinräumiger Wirbel in extrem turbulenten Flüssigkeitsströmungen, die durch Löcher im Flüssigkeitsraum entstehen, lässt darauf schließen, dass die extreme Turbulenz in der intrazellulären Flüssigkeit biologischer Zellen aufgrund der Löcher in der Flüssigkeit, die durch die dicht gepackten Organellen innerhalb der Flüssigkeit entstehen, von der Prote**

Von Punkt zu Punkt in der Flüssigkeit wechselnde Trägheitskräfte führen zu einer symmetrischen Masse-Trägheitsmatrix, die einem riemannschen metrischen Tensor für die kinetische Energie entspricht [21]. Dies bietet die Möglichkeit, die Navier-Stokes-Gleichungen zu verbessern. Eine riemannsche Metrik für die kinetische Energie ermöglicht es, den Flüssigkeitsfluss durch Vektorfelder auf einer dreidimensionalen gekrümmten riemannschen Mannigfaltigkeit zu beschreiben, anstatt im flachen dreidimensionalen euklidischen Raum der Navier-Stokes-Gleichungen. Wie in Abschnitt 3.4 gezeigt, erhält man **das harmonische 1-Form-Flussfeld** *ÿ* **auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit, indem man den Laplace-Operator der 1-Form** *ÿ* **auf der riemannschen Mannigfaltigkeit ÿ2 auf Null setzt (d. h.** $\ddot{y}\ddot{y} = (\ddot{y}\,\ddot{y}\,)\ddot{y}\,\ddot{y}\,\mathrm{Ric}^{N}_{(\ddot{y})} = 0$**). Die Ricci-Krümmung an jedem Punkt auf** ÿi **der Riemannschen Mannigfaltigkeit berücksichtigt nichtlineare Dynamiken, die auf Trägheitskräfte zurückzuführen sind, die sich von Punkt zu Punkt in der Flüssigkeit ändern. Dies sind die nichtlinearen Kräfte innerhalb der Flüssigkeit, die vorwiegend für turbulente Strömungen verantwortlich sind. Daher liefert die Beschreibung der Flüssigkeitsströmung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, die mit einer geeigneten Riemannschen Metrik ausgestattet ist, eine detailliertere Beschreibung der Flüssigkeitsströmung als die Navier-Stokes-Gleichungen. Aufgrund der chaotischen Natur turbulenter Strömungen sind jedoch stochastische Methoden erforderlich, um Schätzungen einer geeigneten Riemann-Metrik der kinetischen Energie als Funktion der Position in der Mannigfaltigkeit zu erhalten. Ein stochastisches Zeitreihenmodell der sich ändernden Riemann-Metrik erscheint notwendig.**

Zur Modellierung turbulenter Flüssigkeitsströmungen wurden Deep-Learning-Neuronale Netze eingesetzt [16]. Im Gegensatz zu einer „Black Box"-Lösung bietet die Differentialgeometrie jedoch eine allgemeinere mathematische Erklärung für turbulente Strömungen, die zum Verständnis der zugrunde liegenden physikalischen Phänomene beitragen kann.

5.5. Proteinfaltung **Es**

gibt zahlreiche experimentelle Beweise dafür, dass intrazelluläre wässrige Lösungen eine wichtige Rolle bei der Proteinfaltung spielen. Die Verfügbarkeit von Daten, mit denen Arbeitshypothesen über die genaue Natur der Wasser-Protein- Wechselwirkungen verifiziert oder widerlegt werden können, ist jedoch aufgrund der damit verbundenen experimentellen Schwierigkeiten begrenzt. Abgesehen davon liefern die vorhandenen Ergebnisse keine Unterstützung für die beliebte hydrophobe Theorie der Proteinfaltung. Stattdessen unterstützen die Daten, dass Wasser Wasserstoffbrücken zwischen Punkten in der Peptidkette bildet und diese Punkte dann zueinander zieht. Arbeiten zur Messung der Rolle von Wasser bei der Proteinfaltung durch Messung von Neutronenbeugungsmustern sind vielversprechend, aber die Technik ist nicht einfach und erfordert eine stochastische Analyse der Messdaten und den Einsatz von Computersimulationen, um das am besten zu den Daten passende Modell zu finden. Unterdessen scheint die allgemeine Schlussfolgerung, dass die Bewegung von Wasser bei der Proteinfaltung eine Rolle spielt, zweifelsfrei

Unser Vorschlag bezüglich der Brownschen Bewegung von Bindungswinkeln innerhalb von Peptidketten, die mit der turbulenten Rotation von Wassermolekülen verbunden sind, die um Organellen innerhalb der Zelle fließen, ist eine neuartige Hypothese. Sie basiert ausschließlich auf der Mathematik der Flüssigkeitsströmung (d. h. den Navier-Stokes-Gleichungen) in Verbindung mit dem de Rhamschen Theorem über den Einfluss von Löchern auf Strömungsfelder. Sie wartet auf experimentelle Tests, die über die Ressourcen der

Machine Translated by Google

vorliegende Autoren. Inzwischen sind wir von Folgendem überzeugt. Der logische Formalismus und die Sicherheit innerhalb der hier dargelegten mathematischen Formulierung machen es sehr wahrscheinlich, dass die experimentell beobachtete Brownsche Bewegung in der intrazellulären wässrigen Lösung während der Proteinfaltung grundlegend zum Faltungsprozess beiträgt. Wir hoffen, dass dies eine Orientierung für zukünftige Forschungen bieten kann.

6. Schlussfolgerungen

Ein Ziel dieses Artikels war es, den Nutzen der Anwendung der Differentialgeometrie zum Verständnis physikalischer Systeme aufzuzeigen, bei denen Löcher in einem umgebenden Strömungsfeld auftreten können. Nach de Rhams Theorie verändern Löcher den Charakter der umgebenden Felder und verwandeln sie in harmonische Felder, die geschlossen, aber nicht exakt sind. Dadurch wird die daraus resultierende Strömung einer Flüssigkeit chaotisch. Wir haben dieses Phänomen im Zusammenhang mit dem binokularen dreidimensionalen Sehen erörtert, das aufgrund eines Lochs im visuellen Strömungsfeld um das Egozentrum zusammenbricht. Wir weisen nun darauf hin, dass das Vorhandensein einer elektromagnetischen Abschirmung um eine Quelle elektromagnetischer Strahlung, wie etwa einen Fernsehsender, ein Loch im umgebenden dreidimensionalen Raum elektromagnetischer Felder erzeugt. Wir vermuten, dass die Entstehung chaotischer Strömungsfelder dem Problem des Fernsehstudios [5,6] zugrunde lag , **das uns teilweise dazu veranlasst hat, diese Theorie überhaupt erst zu** untersuchen. Bei den **durchgeführten Untersuchungen kon**

Wir hoffen, dass die hier vorgestellten Ideen für mechanische und elektrodynamische Systeme, für die offenbar keine Strömungsdaten vorliegen, für diejenigen von Interesse sind, die direkt in **diesen Bereichen arbeiten. Insbesondere sind wir optimistisch, dass unser Vorschlag zur Proteinfaltung den Wunsch wecken könnte, mithilfe der hier geschriebenen Tutorial-Informationen mehr über Differentialgeometrie und de Rham zu erfahren . Zusammenfassend vertrauen wir darauf, dass unsere Demonstration der Reichweite von de Rhams Kohomologietheorem über verschiedene reale Systeme hinweg dazu beitragen kann, die Aufmerksamkeit künftig allgemein auf dieses außergewöhnliche Stück Mathematik zu lenken. Schließlich liegt einer Fülle von Modellierungen und Simulationen die Vorstellung zugrunde, dass dieselbe Mathematik auf eine Reihe von Systemen angewendet werden kann, sei es mit mechanischen, elektrischen, chemischen, wirtschaftlichen, physiologischen, soziologischen oder kosmologischen Variablen usw. Die Differentialgeometrie hat in der Physik einen wichtigen Platz für diejenigen eingenommen, die die Natur verstehen wollen. Für diejenigen, die anderswo mathematische Neigungen und ein gewisses Fachwiss**

Beiträge der Autoren: Konzeptualisierung, PDN; Methodik, PDN; Schreiben – Vorbereitung des Originalentwurfs , PDN und MDN; Schreiben – Überprüfung und Bearbeitung, MDN und PDN. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu.

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: In dieser Studie wurden keine neuen Daten erstellt oder analysiert. Die Datenfreigabe ist für diesen Artikel nicht anwendbar.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Anhang A

Wie in der Einleitung erwähnt, sind umfassende Kenntnisse der geometrischen Theorie erforderlich, um genau zu verstehen, wie der Satz von de Rham Löcher in der Topologie glatter Mannigfaltigkeiten mit dem chaotischen Verhalten integraler Strömungsfelder auf einer Mannigfaltigkeit verknü Ein vollständiges Verständnis des Zusammenhangs hängt von der Vertrautheit mit (i) simplizialen Komplexen, (ii) singulären Homologiegruppen, (iii) singulären Kettenkomplexen, (iv) Kettenabbildungen, (v) der Berechnung singulärer Homologiegruppen, (vi) dem Mayer-Vietoris-Theorem, (vii) Homotopieinvarianz, (viii) singulärer Kohomologie und dem Korandoperator, (ix) schiefsymmetrischen Tensoren, (x) Graßmann-Algebra und (xi) de Rham-Kohomologiegruppen und dem Hodge-Sternoperator ab.

Machine Translated by Google

ator sowie Kenntnisse über den Laplace-Operator und harmonische Strömungsfelder. Einige davon wurden im Text angesprochen. In diesem Anhang A geben wir einen detaillierteren Überblick über die beteiligte Differentialgeometrie. Beweise sind in verschiedenen Texten verfügbar **[7,11,12,25–30].**

Anhang A.1. Simpliziale Komplexe

In 3D-euklidischen Räumen (P0), (P0, P1), (P0, **P1,** P2), (P0, **P1, P2,** P3), **wobei die** Pi **Punkte in R3** sind , **sind die simplizialen Bausteine, die entlang ihrer Begrenzungsflächen zusammengeklebt werden können, um 0-, 1-, 2- und 3-dimensionale orientierte verbundene· kompakte Unterräume in R3** zu bilden . **Diese geklebten Strukturen werden simpliziale Komplexe genannt, in die Differentialformen 0., 1., 2. bzw. 3. Grades integriert werden können. Ein Standard-3-Simplex ÿ3** = **(e0,e1,e2,e3) in R3 ist so definiert, dass e0** = **(0, 0,** 0), **e1** = **(1, 0 Dieses Standard-3-Simplex ÿ3 definiert ein kartesisches Koordinatensystem auf R3 , wobei e0 den Ursprung und e1,e2,e3 Einheitslängenvektoren entlang zueinander orthogonaler kartesischer Koordinaten definieren. alle Punkte 1 , 2 x , 3 x Ein 2-Simplex (P0, P1, P2) in R3 definiert ein Dreieck im 3D-Koordinatenraum** x , **das entlang seiner orientierten Begrenzungsflächen (P1,** P2),(P0, P2),(P0, **P3) sowie alle internen Punkte umfasst. Gegeben seien die Vektoren (v0, v1, v2) vom Ursprung e0 zu jedem der Punkte P0, P1 bzw. P2 . Wenn die Vektoren v1 ÿ v0 und v2 ÿ v0 linear unabhängig sind, bezeichnen wir die Punkte P0, P1 und P2 als affin unabhängig (anders als ein Vektorraum umfasst ein affiner Raum den Ursprung nicht). Während der Vektor v0** in **R3 verschoben wird, kann der affin unabhängige 2-Simplizes (P0, P1, P2)** an jede beliebige Stelle in **R3** verschoben werden . **Durch Aneinanderkleben einer Sammlung von 2-Simplizes entlang gemeinsamer Begrenzungsflächen kann eine als Simplizialkomplex bezeichnete zweidimensionale kompakte orientierte Oberfläche in R3 als 2-Kette konstruiert werden, die mit c2 bezeichnet wird.** In **Eine solche Oberfläche wird** R3 **können viele verschiedene 2-Ketten konstruiert werden . In R3 können viele verschiedene 0-Ketten (diskrete Punkte), 1-Ketten (Drahtgittermodelle), 2-Ketten (zweidimensionale Oberflächen) und 3-Ketten (dreidimensionale Unterräume) konstruiert werden . Im Allgemeinen sind Simplizialkomplexe abgeschlossene und beschränkte Polyeder.**

Gegeben sei eine dreidimensionale glatte Mannigfaltigkeit M. Ein 2-Simplex (P0, P1, P2) in R3 kann durch eine glatte Abbildung **ÿ2 in** M **abgebildet werden . Eine solche glatte Abbildung ist eine nichtlineare Abbildung, die zu einem singulären 2-Simplex in M führt. Wegen der nichtlinearen Abbildung sieht ein solcher singulärer 2-Simplex möglicherweise nicht mehr wie ein Dreieck aus. Er kann seinen Rang verlieren und sogar als einzelner Punkt erscheinen. Aus** diesem Grund wird er als singulärer Simplex **bezeichnet . Dasselbe gilt für ein, zwei und drei singuläre Simplexe in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.**

Von allen möglichen 2-Ketten c2 , die in **R3 konstruiert werden können , Es gibt einige 2-Ketten , die sich in sich selbst schließen (wie 2-Kugeln) und leere Ränder haben (d. h.** ÿc2 = 0). **Solche 2-Ketten mit leeren Rändern werden 2-Zyklen genannt und durch die Notation z2 dargestellt . Eine ähnliche Eigenschaft gilt für 0-, 1-, 2- und 3-Ketten in R3 , was 0-, 1-, 2- und 3-Zyklen mit Nullrändern ergibt.**

Anhang A.2. Singuläre Homologiegruppen

Singuläre 2-Zyklen in der zugrundeliegenden Topologie X **von** M **können verwendet werden, um die Existenz von 2-dimensionalen Löchern in M zu erkennen. Die singuläre 2-Homologiegruppe auf der zugrundeliegenden Topologie von** M **ist definiert als alle 2-Zyklen (dargestellt durch die freie abelsche Gruppe** Z2(M)) **auf der zugrundeliegenden Topologie von** M , **die keine Grenzen von 3-Ketten c3 sind. Solche 2-Zyklen schließen 2-dimensionale Löcher in der zugrundeliegenden Topologie ein. Definieren Sie** B2(M) **als alle 2-Zyklen in** Z2(M) , **die Grenzen von 3-Ketten c3 sind . Die singuläre 2-Homologiegruppe ist dann definiert durch den Quotienten** H2(M) = **Z2(M)/B2(M) (d. h. die Gruppe aller 2-Zyklen, die keine Grenzen von 3-Ketten sind). Die Dimension der freien abelschen Gruppe** H2(M) **ist gleich der Anzahl der zweidimensionalen Löcher in der zugrundeliegenden Topologie** X **von M. Dies lässt sich verallgemeinern auf Homologiegruppen r-ten Grades** Hr(M) = **Zr(M)/Br(M) mit** r = **0, 1,** · · · n **in der zugrundeliegenden Topologie** X **einer n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M. Diese intuitive Beschreibung singulärer Homologiegruppen lässt sich formalisieren, indem man eine Folge singulärer Homologiegruppen definiert, die an die zugrundeliegende Topologie glatter Mannigfaltigkeiten angehängt sind.**

Machine Translated by Google

Anhang A.3. Singuläre Kettenkomplexe **Eine**

lange Folge abelscher Gruppen, die durch Homomorphismen verbunden sind

$$\cdots \ddot{y}\ G_{r+1} \ddot{y}\ G_r \ddot{y} \overset{\ddot{y}_{r+1}}{} \overset{\ddot{y}_r}{} \mathbf{G_{r\ddot{y}1}} \ddot{y} \cdots$$

heißt exakt, wenn im $\ddot{y}_{r+1}$ = **ker** $\ddot{y}_r$ **für alle r.**

Der erste Isomorphiesatz für Gruppen impliziert, dass eine kurze 5-Term-Folge

$$\mathbf{0} \ddot{y} A \ddot{y} \ddot{y} B \ddot{y} \ddot{y} C \ddot{y} \mathbf{0}$$

ist genau dann exakt, wenn der Homomorphismus $\ddot{y}$: A **ÿ** B **injektiv und der Homomorphismus** $\ddot{y}$: B **ÿ** C **surjektiv ist. Das bedeutet, dass für eine kurze 4-Term-Folge**

$$\mathbf{0} \ddot{y} A \ddot{y} \ddot{y} B \ddot{y} \mathbf{0}$$

um genau zu sein, muss der Homomorphismus $\ddot{y}$: A **ÿ** B **sowohl injektiv als auch surjektiv sein. Diese Tatsache ist nützlich bei der Berechnung singulärer Homologiegruppen von topologischen Räumen höherer Dimension (z. B. hochdimensionale Sphären, die weiter unten beschrieben werden).**

Eine lange Folge freier abelscher Gruppen (Ketten) zusammen mit Homomorphismen

$$\ddot{y}\ C_{r+1} \ddot{y}\ C_r \ddot{y} \overset{\ddot{y}_{r+1}\ \ddot{y}_r \cdots}{} \mathbf{C_{r\ddot{y}1}} \ddot{y} \cdots$$

heißt singulärer Kettenkomplex, bezeichnet mit Cÿ, wenn die Komposition zweier beliebiger aufeinanderfolgender Homomorphismen $\ddot{y}_r$ **ÿ** $\ddot{y}_{r+1}$ **Null ergibt. Das ist dasselbe wie die Forderung im** $\ddot{y}_{r+1}$ = **ker** $\ddot{y}_r$.

Die r-te singuläre Homologiegruppe des singulären Kettenkomplexes Cÿ ist

$$H_r(C\ddot{y}) = \mathbf{ker}\ \ddot{y}_r / \mathbf{im}\ \ddot{y}_{r+1} = \mathbf{Z_r(X)/B_r(X)}$$

wobei $Z_r(X)$ **der Raum aller r-Zyklen in X ist und** $B_r(X)$ **der Raum aller r-Zyklen in** X , **die Grenzen von** (r + **1)-Ketten** C_{r+1} **in X sind. Daraus folgt, dass der singuläre Kettenkomplex Cÿ genau dann exakt ist ,** wenn $H_r(C\ddot{y})$ **für alle Werte von r Null ist. Mit anderen Worten liefern die singulären Homologiegruppen Hr** (Cÿ) **ein präzises Maß für das Versagen des Kettenkom**

Dies tritt auf, wenn in einer der r-Ketten ein oder mehrere r-dimensionale Löcher vorhanden sind.

Anhang A.4. Chain Maps **F#**

Eine Kettenabbildung F# : Cÿ(X) **ÿ** Dÿ(Y) **zwischen singulären Kettenkomplexen, die** jeweils **den topologischen Räumen** X **und Y zugeordnet sind, ist eine Sammlung von Homomorphismen F# :** Cr **ÿ** Dr **für alle** r , **sodass F# ÿ** $\ddot{y}_r$ = $\ddot{y}_r$ **ÿ F#, wie unten dargestellt:**

$$\begin{array}{ccccccc} X \ddot{y} C\ddot{y}(X) & \cdots \ddot{y} & F_{\ddot{y}_r} & \ddot{y} & C_r(X) \ddot{y} & \overset{\ddot{y}_r}{} & \mathbf{C_{r\ddot{y}1}(X)} \ddot{y} \cdots \ddot{y} \mathbf{F\#} \\ \ddot{y}\ \mathbf{F\#} & & & & \ddot{y}\ \mathbf{F\#}\ \ddot{y}_{r+1}\ \ddot{y}_r & & \\ Y \ddot{y} D\ddot{y}(Y) & \cdots \ddot{y} & D_r(Y) \ddot{y} & & & & \mathbf{D_{r\ddot{y}1}(Y)} \ddot{y} \cdots \end{array} .$$

Eine kontinuierliche Abbildung F : X **ÿ** Y **zwischen den topologischen Räumen** X **und** Y **induziert eine singuläre Kettenabbildung F # :** Cÿ(X) **ÿ** Dÿ(Y) **zwischen dem singulären Kettenkomplex** Cÿ(X) **und dem singulären Kettenkomplex** Dÿ(Y). **Diese Abbildung ist wie dargestellt durch die Homomorphismen F# :** Cr(X) **ÿ** Dr(Y) **für alle Werte von r definiert. Da F# ker** $\ddot{y}_r$ **auf ker** $\ddot{y}_r$ **und im** $\ddot{y}_{r+1}$ **auf im** $\ddot{y}_{r+1}$ **abbildet, folgt, dass die kontinuierliche Abbildung** F : X **ÿ** Y **zwischen den topologischen Räumen** X und **Y** einen **singulären Homologiegruppenhomomorphismus Fÿ : Hr(Cÿ(X)) ÿ Hr(Dÿ(Y)) für alle Werte von** r **induziert .**

Da das Bild eines beliebigen singulären Simplex zusammenhängend ist, muss es vollständig in einer wegzusammenhängenden Komponente des topologischen Raums X liegen. Daraus folgt, dass die r-te singuläre Homologiegruppe $H_r(X)$ **für** X **gleich der direkten Summe der r-ten singulären Homologiegruppen** $H_r(X\ddot{y})$ **für jede der wegzusammenhängenden Komponenten von** $X\ddot{y}$ **ist** $H_r(X)$.

Machine Translated by Google

Anhang A.5. Berechnung singulärer Homologiegruppen

Die oben angegebene Definition singulärer Homologiegruppen beinhaltet das Konzept von r-Kettenkomplexen , die aus allen möglichen r-Ketten bestehen, die in einem topologischen Raum konstruiert werden können. Dies ist eine sehr große Anzahl von r-Ketten, daher hilft sie uns nicht viel dabei, zu verstehen, wie wir singuläre Homologiegruppen tatsächlich berechnen können. Es wurden jedoch leistungsstarke Tools entwickelt, die auf der sogenannten exakten Mayer-Vietoris-Sequenz und dem Zickzack-Lemma basieren , **um die Homologiegruppen für die meisten, wenn nicht alle topologischen Räume zu berechnen. Einige singuläre Homologiegruppen können direkt aus der Definition abgeleitet werden, insbesondere (i) singuläre Homologiegruppen vom Grad Null** H0(X) **für jeden topologischen Raum** X **und (ii) alle singulären Homologiegruppen** Hr(X) **für alle Werte v**

Anhang A.5.1. Singuläre Homologiegruppen mit Grad Null

Für jeden topologischen Raum X ist der Rand ÿC0 **des nulldimensionalen Kettenkomplexes C0 Null , da es keine Cÿ1- Kette gibt. Daraus folgt, dass jede singuläre 0-Kette ein 0-Zyklus ist (d. h.** C0(X) = Z0(X)). **Andererseits ist eine singuläre 0-Kette eine formale lineare Kombination von Punkten** xi **in** X **mit ganzzahligen Koeffizienten (d. h. c0** = ÿi aixi). **Unter der Annahme, dass** X **wegzusammenhängend ist ,** können wir eine surjektive Abbildung *ÿ :* C0(X) **ÿ** Z **durch** *ÿ :* ÿi aixi **ÿ** ÿi ai **ÿ Z definieren, wobei** Z **die Gruppe aller ganzen Zahlen ist. Der Kernel dieser Abbildung entspricht allen Punkten** B0(X) **in** X , **die Randpunkte einer 1-Kette sind, und folglich gilt nach dem ersten Isomorphiesatz für Gruppen:**

$$Z0(X)/\ker \ddot{y} = \mathbf{Z0(X)/B0(X)} = H0(X).$$

Somit ist für jeden topologischen Raum **X der Nullstellen-Singular-Homologieraum** H0(X) **isomorph zur Gruppe der ganzen Zahlen Z, und die Dimension von** H0(X) **ist gleich der Anzahl der wegzusammenhängenden Komponenten in X. Diese Dimension ist die** Betti-Zahl **b0 .**

Anhang A.5.2. Homologiegruppen für diskrete topologische Räume Für

einen diskreten Raum X entspricht jeder isolierte Punkt einer verbundenen Komponente von X, daher ist H0(X) **eine freie abelsche Gruppe, die isomorph zur Gruppe der ganzen Zahlen** Z ist , **wobei die Dimension b0 gleich der Anzahl der diskreten Punkte in X ist. Obwohl jede verbundene Komponente von** X **ein einzelner isolierter Punkt ist, ist die Grenze** *ÿÿr* **für einen alternierende Summe** *ÿÿr* = $\sum_{ich=0}^{R}$ **(ÿ1)** *rÿr* **ÿ Fi,r** = **ÿ** $\sum_{ich=0}^{R}$ **singulären r-Simplex** ÿr **gegeben durch (ÿ1) rÿrÿ1, w ÿ singuläre i-te Randfläche. Bei einzelnen Punkträumen sind die singulären Flächen** ÿr **ÿ Fi,r alle gleich ÿr ÿ1. Daher ist** *ÿ :* Cr **ÿ Crÿ1 ein Isomorphismus, wenn** r **gerade ist, und Null, wenn** r **ungerade ist. Folglich erhalten wir einen singulären Kettenkomplex**

$$\mathbf{\cdots \ddot{y}\ C3\ \ddot{y}\ C2\ \ddot{y}\ C1\ \ddot{y}\ C0\ \ddot{y}\ 0}$$

wobei die Randabbildungen *ÿ :* Cr **ÿ Crÿ1 0-Abbildungen für ungerade Werte von** r **und Isomorphismen für gerade Werte von r sind. Daraus folgt, dass die Folge in jeder abelschen Gruppe** Cr **außer C0 exakt ist. Aber wir haben uns bereits mit** H0(X) **für C0 befasst. Da die singulären Homologiegruppen Hr** (X) **ein Maß für die Abweichung von der Exaktheit liefern, folgt daraus, dass die singuläre Homologiegruppe** Hr(X) **für jeden isolierten Punkt eines diskreten topologischen Raums** X für alle r > **0** gleich **Null ist .**

Anhang A.6. Mayer–Vietoris Theorem

Der Satz von Mayer–Vietoris ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung singulärer Homologiegruppen für topologische Räume. Wenn X **ein topologischer Raum ist und U,** V **offene Teilmengen von** X sind , **deren Vereinigung X ist, dann gibt es** für jedes r einen Homomorphismus, den man Konnexionshomomorphismus **ÿÿ :** Hr(X) **ÿ Hrÿ1(U ÿ** V) nennt, so **dass die folgende lange Folge von Homologiegruppen exakt ist:**

$$\mathbf{\cdots \ddot{y}}\ Hr(U\ \mathbf{\ddot{y}}\ V) \xrightarrow{ichy} \mathbf{\ddot{y}}\ Hr(U)\ \mathbf{\ddot{y}}\ Hr(V)\ \mathbf{k\ddot{y}\ddot{y}}\ \ddot{y}l\ddot{y} \xrightarrow{\ddot{y}\ddot{y}} Hr(X)\ \mathbf{\ddot{y}}\ \mathbf{Hr\ddot{y}1(U\ \ddot{y}}\ V)\ \mathbf{\ddot{y}} \cdots$$

Machine Translated by Google

wobei iÿ jÿ : Hr(U ÿ V) ÿ Hr(U) ÿ Hr(V) **mit** (iÿ **kÿ ÿ lÿ :** Hr(U) ÿ Hr(V) **jÿ)**[c] = (iÿ[c], jÿ[c]) **und]** ÿ Hr(X) **mit** (kÿ ÿ lÿ)([c], [c [c ÿ]) = kÿ[c] ÿ lÿ[c ÿ] **wobei** [c] **und** ÿ] **stellen singuläre Homologieklassen dar [8].**

Um zu veranschaulichen, wie der Satz **von Mayer–Vietoris mit anderen Eigenschaften topologischer Räume kombiniert werden kann, um singuläre Homologiegruppen zu berechnen, betrachten wir die Berechnung der singulären Homologiegruppen für alle Werte von** r **und für alle Dimensionen** n **einer Einheitskugel. Betrachten wir eine Einheitskugel** S n **mit offener Teilmenge** U **gleich** S n **ohne Südpol und offener Teilmenge** V **gleich** S n **ohne Nordpol. Ein Teil der exakten Mayer–Vietoris- Sequenz ist**

$$\text{Stunde (U)} \quad \text{Hr(V) ÿ Hr(S n) ÿ} \xrightarrow{\text{ÿÿ}} \text{Hrÿ1(U ÿ V) ÿ Hrÿ1(U) ÿ Hrÿ1(V)}$$

wobei der Verbindungshomomorphismus ÿÿ : Hr(S n) **ÿ Hrÿ1(U ÿ** V) ist. **Alle Punkte in** U **können zum Nordpol und alle Punkte in** V **zum Südpol kontrahiert werden. Das bedeutet, dass sowohl** U **als auch** V **kontrahierbar und daher einfach verbunden sind (d. h. keine Löcher enthalten). Daraus folgt, dass**

$$\text{Stunde (U)} \quad \text{Hr(V)} = \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{Hrÿ1(U) ÿ Hrÿ1(V)} = \mathbf{0}$$

Wenn r > **1 und** n **ÿ 1 ist, kann die genaue Folge folglich wie folgt umgeschrieben werden:**

$$\mathbf{0 ÿ} \text{ Hr(Sn) ÿ } \xrightarrow{\text{ÿÿ}} \mathbf{Hr ÿ1(U ÿ} \text{ V) } \mathbf{ÿ 0.}$$

Dies ist eine exakte 4-Term-Folge, wie oben beschrieben, und folglich ist der verbindende **Homomorphismus ÿÿ :** Hr(S n) **ÿ Hrÿ1(U ÿ** V) eine bijektive Abbildung (also ein Isomorphismus). Genau **wie der Äquator einer Einheits-2-Sphäre** S **die Äquatorialsphäre** (U **ÿ** V) **einer Einheits- n-Sphäre** S n **ist topologisch äquivalent zu einem Einheitskreis** S 1 **ist topologisch äquivalent zu einer Einheit** (n **ÿ** ÿ= **0 wenn 0** < r < **n. Wir wissen bereits, dass** H0(S n) ÿ= Z **und** Hr(S n) ÿ= **0 wenn** r > **n, also haben wir alle singulären Homologiegruppen für** 1)-) **für** r > **1 und** n **ÿ 1 und höherdimensionale Sphären.**

Anhang A.7. Homotopie-Invarianz

Ein 2-Torus T 2 **hat zwei eindimensionale Löcher und ein zweidimensionales Loch. In anderen Mit anderen Worten, er hat eine zweidimensionale singuläre Homologiegruppe** H1(T) 2 **ein ein-**vom Grad eins und **eine zweidimensionale singuläre** 2 **). Die Geometrie der Gummiplatte Homologiegruppe** H2(T **vom Grad zwei des 2-Torus, die es ermöglicht, ihn in viele verschiedene Größen und Formen zu verformen. Solange er nicht geschnitten, zerrissen, durchstochen** 2 **dürfen oder geklebt wird, können alle verschiedenen Größen und Formen von** T **homöomorph aufeinander abgebildet werden und die topologische Struktur bleibt unverändert (d. h. die Anzahl der Löcher** 2) **und damit** 2) **bleiben unverändert). Eine ähnliche Eigenschaft gilt für alle topologischen Räume. die Anzahl der Löcher verschiedener Dimensionen und damit ihre singulären Homologiegruppen** H1(T **und** H2(T) sind homotopisch und topologisch invariant. Seien **f0, f1 :** X **ÿ** Y **kontinuierliche homotopische Abbildungen (d. h.** f0(X) **in** Y **und** f1(X) **in** Y **können ineinander überführt werden, ohne ihre topologische Struktur zu ändern), dann sind** f0(X) **und** f1(X) **(zusammen mit allen Zwischenformen entlang des Homotopietransformationspfads zwischen** f0(X) **und** f1(X)) **haben dieselben singulären Homologiegruppen. Mit anderen Worten induzieren kontinuierliche Homotopieabbildungen f0, f1 :** X **ÿ** Y **singuläre Homologiegruppenhomomorphismen (f0)ÿ,(f1)ÿ :** Hr(X) **ÿ** Hr(Y) **für alle Werte von r. Eine kontinuierliche Abbildung F :** X **ÿ** Y **zwischen topologischen Räumen** X **und** Y **heißt Homotopieäquivalenz, falls es eine kontinuierliche Pull-Back-Abbildung G :** Y **ÿ** X gibt , **sodass die Komposition** F **ÿ** G **homotop zur Identitätsabbildung** IY **auf** Y **und die Komposition** G **ÿ** F **homotop zur Identitätsabbildung** IX **auf X ist. Falls F :** X **ÿ** Y **eine Homotopieäquivalenz zwischen topologischen Räumen** X **und Y ist, dann ist** die Abbildung **Fÿ :** Hr(X) **ÿ** Hr(Y) für jedes r **ÿ 0 ein Isomorphismus.**

Machine Translated by Google

Anhang A.8. Singuläre Kohomologie

Singuläre Homologiegruppen sind kovariante Funktoren von der Kategorie topologischer Räume bis zur Kategorie freier abelscher Gruppen. Für viele Anwendungen, einschließlich de Rhams Theorie der Differentialformen, sind kontravariante Funktoren nützlicher. Die singuläre Kohomologie ist eine Pullback-Version der singulären Homologie. Sie liefert keine neuen Informationen , sondern stellt einfach dieselben Informationen auf andere Weise dar.

Die Transformation vom kovarianten Funktor zum kontravarianten Funktor basiert auf der folgenden Tatsache. Wenn A **und** B **abelsche Gruppen unter punktweiser Addition sind, dann ist die Menge** Hom(A, B) **der Gruppenhomomorphismen von** A **nach** B **selbst eine abelsche Gruppe unter punktweiser Addition. Für jede feste abelsche Gruppe G ergibt** jeder Homomorphismus **f# :** A **ÿ** B **ÿ** Hom(B, G)) = *ÿ* **A. Diese ein induzierter Pull-Back-Homomorphismus** f # **:** Hom(B, G) **ÿ** Hom(A, G). **Wenn** *ÿ* B **Pullback- und** *ÿ* A **ÿ** Hom(A, G), **dann** f # *(ÿ* B **Abbildung kann verwendet werden, um die freie abelsche Gruppe aller singulären r-Ketten** Cr(X) **auf einem topologischen Raum** X **zur freien abelschen Gruppe aller singulären r-Koketten** C r (X; G) = Hom(Cr(X), G) **auf demselben topologischen Raum X. Für freie abelsche Gruppen ist die Gruppe** G **gleich der Gruppe der ganzen Zahlen Z. Eine kontinuierliche Abbildung** f : X **ÿ** Y **zwischen den topologischen Räumen** X **und** Y **induziert einen Homomorphismus f# :** Cr(X) **ÿ** Cr(Y) **zwischen den freien abelschen Gruppen aller möglichen r-Ketten auf** X **und** Y **(d. h.** c Y R **= f#c** X R **wo wir verwenden Sie die Notation** Y c R um eine einzelne **r-Kette in** Y **darzustellen). Es induziert auch einen Pull-Back-Homomorphismus** C r (Y; G) **ÿ** C r (X; G) **oder äquivalent** f : Hom(Cr(Y), G) **ÿ** Hom(Cr(X), G) : *ÿ* Y(f#c X r) **ÿ** (f #*ÿ* Y) **(dh** f # (c X r), **wobei** *ÿ* **ÿ** Hom(Cr(Y), **G)).**

Kogrenzoperator

Der Randoperator *ÿ :* **Cr+1(X) ÿ** Cr(X) **zwischen freien abelschen Gruppen aller möglichen** (r + **1)-Ketten und aller möglichen r-Ketten auf** X **induziert einen Pull-back-Korandoperator** *ÿ :* C r (X; G) **ÿ** C r+1 (X; G) **zwischen allen möglichen r-Koketten und allen möglichen** (r + 1)-**Cochains auf** X **(beachten Sie die steigenden Werte von r). Für die Kogrenze einer einzelnen r-Kette** c # ÿÿY) X R **wir** einfach f , **dies** # **:** (ÿÿY)(f#c X **erhalten** (c X r), **wobei** (ÿÿX)(c X r) = *(ÿ* X)(ÿc X r) **ÿ** (f **auf X,** r). **Mehr . zeigt, dass** f (ÿÿÿX)(c X r) = *(ÿ X)* # **ÿ** *ÿ* = *ÿ* **ÿ** f r) # **Es folgt auch, dass** *ÿ* **ÿ** *ÿ* = *ÿÿ* = **0, weil** *(ÿÿc* X **komplexe und Cochain- und** *ÿÿ* = **0. Da** *ÿÿ* = **0, existiert eine exakte lange Kokette Abbildung** f # **zwischen den topologischen Räumen** X **und** Y **(beachten Sie die abnehmende r).**

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{(X; G) } \ddot{y}\ \text{C}^{\ddot{y}\,\ddot{y}\cdots\ddot{y}\,\text{C}\,r+1} & & \text{(X; G) } \ddot{y}\cdots \\ & \ddot{y}\ f\cdot^{\#} & \text{r (X;G) } \ddot{y}\ \text{C} & \ddot{y}\ f^{\#} & \\ \cdots\ \ddot{y}\ \text{Dr+1 (Y; G)} & & \ddot{y}\ \text{(Y; G) } \ddot{y}\ \text{C} & & \ddot{y}\ f^{\#} \\ & & & & \ddot{y}\ r\ddot{y}1\ \ddot{y}\ \text{Dr} \\ & & & & \text{(Y; G) } \ddot{y}\cdots \end{array}$$

Eine r-Kokette *ÿ* X **ÿ** C r (X; G) **ist ein r-Kocyclus** *ÿ* X **ÿ** Z r (X; G) , **falls** *ÿÿX* = **0 (d. h. es hat ein** r **leere Kogrenze), und es ist ein begrenzender Kozyklus** *ÿ* X **gibt,**(X; G) , falls es einen Kozykel **ÿ** B (X; G) X **ÿ** C r**ÿ1 sodass** *ÿÿX* = **0 (d. h. es ist eine Kogrenze einer** (r **ÿ 1)-Kokette). Sowohl die** *ÿ* **r-Kozykel** Z r (X; G) **als auch die r-begrenzenden Kozykel** B r (X; G) **bleiben durch Kokettenabbildungen** f erhalten, sodass wir die **r-te singuläre Kohomologiegruppe von** X **mit Koeffizienten in** G **als den Quotienten** Hr (X; G) = **definieren können .** # Zr (X; **G)/B** r (X; G).

Man kann den Schluss ziehen, dass eine kontinuierliche Abbildung f : X **ÿ** Y **zwischen den topologischen Räumen** X **und** Y **einen Pull-Back-Homomorphismus** f # r (Y; G) **ÿ** C r (X; G) **zwischen r-ten singulären :** C **Koketten auf** Y **und r-ten singulären Koketten auf X induziert. Dies induziert wiederum einen Pull-Back-**G) **f** ÿ **auf** Y **Homomorphismus :** Hr (Y; G) **ÿ** Hr (X; G) **zwischen der r-ten singulären Kohomologiegruppe** Hr (Y; **und der r-ten singulären Kohomologiegruppe** Hr (X; G) **auf X. Genau wie singuläre Homologiegruppen** homotopisch und topologisch invariant sind, sind es **auch singuläre Kohomologiegruppen.**
Mit anderen Worten: Singuläre Kohomologiegruppen sind isomorph zu ihren entsprechenden singulären Homologiegruppen.

Anhang A.9. Schiefsymmetrische Tensoren auf einer glatten n-Mannigfaltigkeit

M **In jedem Punkt** p **auf einer glatten n-Mannigfaltigkeit M gibt es einen n-dimensionalen Tangentialraum** TpM **und einen n-dimensionalen Kotangentialraum** T ÿ p M. **Ein Kovektor oder eine 1-Form** *ÿ* **in** T p ÿ M

Machine Translated by Google

wirkt auf einen Vektor v **in** TpM **und transformiert ihn in eine reelle Zahl (d. h.** ÿ(v) = **ÿ,** v **ÿ R).**
Ein **schiefsymmetrischer Tensor vom Typ (0,** 2) T(X, Y), **der auf zwei Vektoren** X **und** Y **in** TpM operiert und **eine reelle Zahl ergibt, ändert das Vorzeichen, wenn die Reihenfolge der beiden Vektoren umgekehrt wird (d. h.** T(X, Y) = ÿT(Y, **X)). Wenn (e1, · · · ,en) Einheitsbasisvektoren sind, die den Tangentialvektor aufspannen, Raum** TpM **bei** p **ÿ** M **und** *(ÿ* **der** Kotangensvektorraum T $^{1}_{P}$**, · · · ,ÿ** und (e1, · · · ,en) **Einheitsbasiskovektoren sind, die dual zu (e1, · · ·** $^{ÿ}_{P}$**· ,en)** sind, das M **aufspannt ,** dann können wir den **schiefsymmetrischen Tensor** vom T(X, Y) **in der Form** T = Tj1 **j2** $^{ÿ j1 j2}$ **, Wo**

$$^{ÿ j1 j2} = (ÿ \text{ j1} \quad ^{ÿ j2 ÿ ÿ j2} \quad ^{ÿ} \text{j1)} = ÿ \text{ j1 ÿ } ÿ \text{ j2 mit j1} < \text{j2}$$

Dies definiert den Keilprodukt -ÿ- **j1** *ÿÿ* **j2 als Basis für den Typ (0,** 2) **schiefsymmetrisch Tensorraum ÿ2 bei** p **ÿ M, und** Tj1 **j2** ist die Komponente des **schiefsymmetrischen j1 ÿ** *ÿ* **j2-** Tensors (Vektors) **Typ (0,** 2) , **projiziert auf den Basisvektor** *ÿ-* **vom . Dies kann verallgemeinert werden zu einem Symmetrisierungs- (oder Alternierungs-)Operator A für einen Tensor** T vom Typ **(0, , schief-** n **schiefsymmetrischen** s), s = **0, 1, · · · gemäß der Formel**

$$AT(X1, \cdots, Xs) = \textbf{(ÿ1)} \; ÿT(Xa1 , \; \frac{\textbf{1}}{\textbf{ÿ!}} \; (a1 \cdots as) \quad \cdots \quad , Xas)$$

wobei s! die Anzahl der Permutationen P(n,r) = ist , **wenn die** $\frac{\textbf{N!}}{\text{werden}}$ **von** n **Objekten, die gleichzeitig** r genommen **Reihenfolge wichtig ist und mit** n = s **und** r = s **in diesem Fall,** ÿ(a1 ···as) $^{(nÿr)!}$ **ist die Summe über alle s! Permutationen der** s **Vektoren (X1, · · · ,** Xs), **und** *ÿ* **die Parität jeder Permutation ist (d. h.** *ÿ* = **0, wenn die Anzahl der Vertauschungen zweier Vektoren gerade ist und** *ÿ* = **1, wenn die Anzahl der Vertauschungen ungerade ist).**

Wenn ÿ eine r1-Form und ÿ eine r2-Form ist, dann ist ÿÿ ÿ = A(ÿ ÿ) eine (r1 + **r2)-Form.**

Das Keilprodukt ÿ ist (i)

assoziativ ÿ ÿ (ÿ ÿ ÿ) = **(ÿ ÿ** ÿ) **ÿ ÿ, (ii) (anti)-kommutativ**
(ÿ ÿ ÿ = **(ÿ1) r1 r2ÿ ÿ ÿ) und (iii) distributiv (ÿ** + ÿ) **ÿ ÿ** = **ÿ ÿ ÿ** + **ÿ ÿ**
ÿ wobei ÿ und ÿ hier beide r1-Formen sind.

Basisvektoren (schiefsymmetrische Tensoren), die den r-ten schiefsymmetrischen Tensor j1 ···jr-Raum ÿr (M) aufspannen, **sind** *ÿ* = *ÿ*

j1 ÿ · · · ÿ *ÿ* jr : **j1** < . . . < jr .

Anhang A.10. Graßmann-Algebra **Für**

jedes p **ÿ** M **auf einer glatten n-Mannigfaltigkeit M existiert eine Familie schiefsymmetrischer Tensorräume ÿ0** ÿn . $^{ÿ1 \; ÿ2}$ **,Die schiefsymmetrischen Tensoren in diesen schiefsymmetrischen Tensorräumen heißen Differentialformen. Eine r-Form in** ÿr **wirkt auf** r **Vektoren v1, · · · ,** vr **in** TpM **und transformiert sie in eine reelle Zahl für alle Werte von** r = **0, · · · n. Die Dimension jedes schiefsymmetrischen Tensorraums** ÿr **ist gegeben durch r!(nÿr)! . Nach dieser Formel sind die** $\frac{\textbf{N!}}{\text{schiefsymmetrischen Tensorräume ÿ0 und}}$ ÿn **beide eindimensional. Die Dimension steigt linear mit** r **von ÿ0 bis ÿ .** Die **Dimension von** ÿr **ist gleich der Dimension von ÿnÿr . Tatsächlich** $^{N}_{\textbf{2}}$ **und nimmt dann linear bis** ÿn ab . **Dies bedeutet, dass die ist der schiefsymmetrische Tensorraum ÿr** isomorph **zum schiefsymmetrischen Tensorraum ÿnÿr. Ein isomorpher Operator ÿ, bekannt als Hodge-Sternoperator, transformiert r-Formen in** ÿr **in** (n **ÿ r)-Formen in ÿnÿr für alle Werte von r. Für** r < **0 und** r > **n sind die schiefsymmetrischen Tensorräume** ÿr **leere Räume und die Differentialformen werden auf Null gesetzt. Ein Operator d, bekannt als äußere Ableitung, transformiert eine r-Form in eine** (r + **1)-Form. Wichtig ist, dass die Komposition** d **ÿ** d = dd **immer Null ist. Daraus folgt, dass es eine Folge von schiefsymmetrischen Tensorräumen gibt, die durch den äußeren Differentialoperator verbunden sind**

$$\textbf{0} \quad \overset{D}{\textbf{ÿ}} \; \textbf{ÿ0} \qquad d \; ÿ \cdots \qquad \overset{D}{d \; ÿ} \; ÿn \; ÿ \; \textbf{0}$$

wobei jeder Pfeil einem äußeren Differential d entspricht. Ein Operator d **ÿ transformiert eine r-Form in eine** (r **ÿ 1)-Form. Allgemeiner gesagt,** d **ÿ** = **(ÿ1)** $^{\text{Anzahl + Anzahl + 1}}$ **ÿ dÿ, wobei ÿ der Hodge**

Machine Translated by Google

Sternoperator, d. h. ein Isomorphismus zwischen ÿr **und** ÿnÿr **. Die Operatoren** d **und** d **ÿ sind nicht Sind Inverse voneinander, sondern Adjungierte. Die direkte Summe schiefsymmetrischer Tensorräume bildet eine graduierte Algebra ÿ = ÿ0 · · ·** ÿn , **die als äußere Algebra oder Graßmann-Algebra bezeichnet wird. Jede r-Form** *ÿ* , **für die** *dÿ* = **0 ist, heißt geschlossene r-Form, während jede r-Form** *ÿ* **gleich** *dÿ* , **wobei** *ÿ* **eine** (r **ÿ 1)-Form ist, exakte r-Form heißt.**

Anhang A.11. De Rham-Kohomologiegruppen

Aus der Graßmann-Algebra und der Tatsache, dass d **ÿ** d = dd = **0, folgt, dass jede exakte Differentialform geschlossen ist. Daraus folgt jedoch nicht, dass jede geschlossene Differentialform exakt ist. De Rhams Theorie der Differentialformen macht deutlich, dass die Exaktheit einer geschlossenen Differentialform einzig und allein von der zugrunde liegenden topologischen Struktur der Mannigfaltigkeit abhängt. Genauer gesagt hängt sie vom Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von Löchern verschiedener Dimensionen in der zugrunde liegenden Topologie ab. Wie die in diesem Anhang zusammengefasste Menge an Theorie zeigt, ist ein beträchtliches Maß an Differentialgeometrie erforderlich, um diese bemerkenswerte Tatsache zu würdigen. Da das äußere Differential** d : ÿr **ÿ** ÿr+1 **linear ist, sind sein Kernel** ker(dr) = Z r (M) = **geschlossene r-Formen und sein Bild** im(drÿ1) = B r (M) = **exakte r-Formen lineare Vektorräume. Da jede exakte Form geschlossen ist, folgt, dass die exakten** r-Formen r (M) **ÿ** Z r (M) **der geschlossenen r-Formen** (B- **Gruppe), sind . Somitkann die r-te de Rham-Kohomologie, ein Unterraum als Quotientenvektorraum definiert werden**

$$H\,r\,dR(M) = \quad Z\,r\,(M)/B\,r\,(M)$$

(d. h. der Raum aller geschlossenen Formen, die nicht exakt sind).

Während Hr dR(M) **ein reeller Vektorraum ist, ist es auch eine Lie-Gruppe unter Addition. Da** ÿr (M) = **0 für** r < **0 und** r > **n ist, folgt, dass** Hr dR(M) **für diese Werte von r gleich Null ist. Daraus folgt auch, dass** Hr dR(M) = **0 für 0 ÿ** r **ÿ** n **genau dann ist, wenn jede global abgeschlossene r-Form auf** M **global exakt ist.**

Der Vektorquotientenraum Z r (M)/B r (M) **unterteilt den Raum der geschlossenen r-Formen in Äquivalenzklassen . Für jede geschlossene r-Form** *ÿ* **auf** M , **die nicht exakt ist, bezeichnen wir** *[ÿ]* **als Äquivalenzklasse von ÿ. Wenn** *ÿ* **und ÿÿ zur selben Äquivalenzklasse gehören,** *[ÿ]* , **dann unterscheiden sie sich durch eine exakte r-Form (d. h.** *ÿ* **ÿ ÿÿ** = **dÿ), und wir sagen, dass** *ÿ* **und ÿÿ kohomolog sind.**
Dies lässt sich leicht anhand von Homologiegruppen visualisieren, wo es einfach bedeutet, dass mehrere r-Zyklen existieren können, die dasselbe r-dimensionale Loch enthalten. So wie eine kontinuierliche Abbildung f : X **ÿ** Y **zwischen topologischen Räumen** X **und** Y **einen Pull-Back-Homomorphismus** f **ÿ :** Hr (Y; G) **ÿ** Hr (X; G) **zwischen der r-ten singulären Kohomologiegruppe** Hr (Y; G) **auf** Y **und der r-ten singulären Kohomologiegruppe** Hr (X; G) **auf X induziert, induziert eine glatte Abbildung** F : M **ÿ** N **zwischen glatten Mannigfaltigkeiten** M **und** N **einen Pull-Back** F : Hr dR(N) **ÿ** Hr dR(M) **zwischen den r-ten de Rham-Kohomologiegruppen von** N **bzw. M. Dies entspricht einem kontravarianten Funktor zwischen der Kategorie der glatten Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und der Kategorie der de Rham-Kohomologiegruppen.**

Wir können uns ein interessantes Bild von einer Relation zwischen de Rham-Kohomologiegruppen H1 dR(M) vom Grad Eins auf einer verbundenen glatten Mannigfaltigkeit und der zugrunde liegenden Topologie X der Mannigfaltigkeit, gemessen durch die Fundamentalgruppe ÿ1(X, q), machen . Alle 1 **-** Zyklen **in** allen möglichen **2-Ketten in der zugrunde liegenden Topologie der glatten Mannigfaltigkeit** M , **die ein 1-dimensionales Loch enthalten, entsprechen nicht nur H1** dR(M) , **sondern auch der Fundamentalgruppe** ÿ1(X, q). **Die Fundamentalgruppe besteht aus allen Schleifen, die mit dem Punkt** q **in der zugrunde liegenden Topologie** X **von** M verbunden sind **und nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden können. Die Menge der Gruppenhomomorphismen Hom (ÿ1(X,** q), R) **von der Fundamentalgruppe** ÿ1(X, q) **zur additiven Gruppe der reellen Zahlen** R **ist ein Vektorraum unter Addition und Multiplikation mit Konstanten. Wir können eine lineare Abbildung ÿ : H1** dR(M) **ÿ Hom(ÿ1(X,** q), R) **wie folgt definieren: Gegeben sei eine Kohomologieklasse [ÿ] ÿ H1** dR(M). **Definieren Sie** *ÿ[ÿ] :* ÿ1(X, q) **ÿ** R **durch** *ÿ[ÿ]* = *ÿ* = **eine reelle Zahl, wobei** *[ÿ]* **eine beliebige Pfadhomotopieklasse in** ÿ1(X, q) ist **und** *ÿ* **eine beliebige stückweise glatte Kurve, die dieselbe Schleifenpfadklasse** [ÿ] darstellt. **Die Abbildung ÿ : H1** dR

Machine Translated by Google

Die der glatten Mannigfaltigkeit M zugrunde liegende **Technologie** X **ist einfach zusammenhängend (d. h. sie hat keine eindimensionalen Löcher und keine Schleifen, die nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden können).**

Anhang A.12. De Rhams Theorem **De**

Rhams Theorem beruht auf der Tatsache, dass de Rhams Kohomologiegruppen Hr dR(M) **für alle Werte von** r , genau wie singuläre Homologie- und singuläre Kohomologiegruppen, **homotopisch und topologisch invariant sind .** Nehmen wir an, dass glatte Abbildungen F : M **ÿ** N **und** G : M **ÿ** N **zwischen glatten Mannigfaltigkeiten** M **und** N **homotopisch sind (d. h.** F(M) **in** N kann in G(M) **in** N **umgewandelt werden und umgekehrt). Definieren Sie einen Homotopieoperator** h : ÿr (N) **ÿ ÿrÿ1** (M) **für alle Werte von** r. **Angenommen,** *ÿ* **ÿ** ÿr (N) **und** *ÿ* = *hÿ* **ÿ ÿrÿ1** (M), **so dass** d(hÿ) + h(dÿ) = G *ÿÿ* **ÿ** F *ÿÿ* **glatte Pullback-Abbildungen von** ÿr (N) **nach** ÿr (M) **für alle Werte von r sind. wobei** G ^{ÿ} **und** F ^{ÿ} **Wenn wir** *ÿ* **eine geschlossene r-Form auf** N sein **lassen (d. h.** *dÿ* = **0), finden wir** d(hÿ) = G *ÿÿ* **ÿ** F *ÿÿ.* **Folglich** unterscheiden sich G *ÿÿ* **und** F *ÿÿ* **durch eine exakte Form** d(hÿ) **in M, so dass** G : Hr dR(N) **ÿ** Hr dR(M) **für alle Werte von** r **ogös sind und die induzierten Pullback-Abbildungen** F ^{ÿ} **und** F ^{ÿ} **sind Cohomol- für alle Werte von** r **homotopisch und topologisch** ^{ÿ} **,** G ^{ÿ} **isomorph sind. De Rham-Kohomologiegruppen sind invariant. Daraus lässt sich folgern, dass, wenn** M **und** N **homotopieäquivalente glatte Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Rand sind,** Hr dR(N) ÿ= Hr dR(M) **für jeden Wert von r gilt. Glatte Homotopieäquivalenz** F : M **ÿ** N **zwischen glatten Mannigfaltigkeiten induziert Isomorphismen zwischen de Rham-Kohomologiegruppen.**

Aus dem Stokes-Theorem und der Definition einer Periode $_{zr}$*ÿ,* **wobei** zr **ein r-Zyklus und** *ÿ* **eine r-Form ist , können wir eine Klammer ÿ , ÿ:** Cr(M) **×** C r (M) **ÿ R definieren, wobei** Cr(M) **die freie abelsche Gruppe aller möglichen r-Ketten** cr **ÿ** Cr(M) **in** M **und** C r (M) **die freie abelsche Gruppe** r (M) **in M ist, indem wir** ÿcr , **ÿÿ := Formen)** *ÿ* **ÿ** C **ÿ setzen. Für jede r-Form ÿ ist die Abbildung gleichÿÿglich, ÿÿ linear auf** Cr (M), **und für jedes** $_{cr}$*ÿ* **ÿ** C r (M) ist **die Abbildung** *ÿ* **ÿÿ** ÿcr , **ÿÿ linear auf** C r (M). **Dies induziert eine Klammer auf der singulären r-Homologiegruppe Hr** (M) **und der r-ten de Rham-Kohomologiegruppe** Hr dR(M), **indem**

$$ÿ[zr], [ÿ]ÿ = ÿzr , \mathbf{ÿÿ} = \int_{zr}^{ÿ}$$

wobei [zr] **ÿ** Hr(M) **eine r-Homologieklasse,** *[ÿ]* **ÿ** Hr dR(M) **eine r-te de Rham-Kohomologieklasse ,** zr **ein beliebiger Vertreter von** [zr] **und** *ÿ* **ein beliebiger Vertreter von** [ÿ] ist. **Die Periode ist** $_{zr}$ ^{ÿ} **nur dann gleich Null, wenn die geschlossene r-Form** *ÿ* **exakt ist, andernfalls ist sie eine reelle Zahl ungle Für jede feste de Rham r-te Kohomologieklasse** [ÿ] ist **die Abbildung** f *[ÿ]* : Hr(M) **ÿ** R **gegeben durch** f *[ÿ]* ([zr]) = ÿ[zr], [ÿ]ÿ = *ÿ* **ist ein wohldefiniertes lineares Funktional auf** Hr(M). **Der Satz von de Rham besagt, dass diese Entsprechung zwischen linearen Funktionalen auf** Hr(M) **und de Rham-Kohomologieklassen** *[ÿ]* **ÿ** Hr dR(M) **bijektiv ist. Die bilineare Abbildung ÿ ,ÿ:** Hr(M) **×** Hr dR(M) **ÿ** R **ist in beiden Argumenten nicht-entartet [27]. Im Wesentlichen besagt der Satz von de Rham, dass die r-te de Rham-Kohomologiegruppe isomorph mit dem Dualraum der r-ten Homologiegruppe** ist **(d. h. mit dem Raum der singulären Kohomologiegruppe). Dies impliziert, dass eine r-Form** *ÿ* genau dann global exakt **ist , wenn alle ihre Perioden verschwinden. Dies kann nur geschehen, wenn in der zugrunde liegenden Topologie der glatten Mannigfaltigkeit keine r-dim**

Verweise

1. **Neilson, PD; Neilson, MD; Bye, RT Eine Riemannsche Geometrietheorie der dreidimensionalen binokularen visuellen Wahrnehmung.** Sehen **2018, 2, 43. [CrossRef] [PubMed]**
2. **Neilson, PD; Neilson, MD; Bye, RT Eine Riemannsche Geometrietheorie der Synergieauswahl für visuell gesteuerte Bewegung.** Vision **2021, 5, 26. [CrossRef] [PubMed]**
3. **Neilson, PD; Neilson, MD; Bye, RT Die Riemannsche Geometrietheorie der visuell gesteuerten Bewegung erklärt Nachbilder Illusionen und Größenkonstanz.** Vision **2022, 6, 37. [CrossRef] [PubMed]**
4. **Katz, M.; Kruger, PB Das menschliche Auge als optisches System, Kapitel 33. In** Duane's Clinical Ophthalmology; **Tasman, W., Jaeger, EA, Hrsg.; Lippincott, Williams und Wilkins: Philadelphia, PA, USA, 2006; Band 1.**

Machine Translated by Google

5. Armstrong, B.; Aitken, J.; Sim, M.; Swan, N. Abschlussbericht des unabhängigen Überprüfungs- und wissenschaftlichen Untersuchungsgremiums; **Australian Broadcasting Corporation: Sydney, NSW, Australien, 2007.**

6. Sitas, F.; O'Connell, DL; van Kemenade, CH; Short, MW; Zhao, K. Brustkrebsrisiko bei weiblichen Angestellten der Australian Broadcasting Corporation in Australien. Med. J. Aust. **2010,** 192, **651–654.** [CrossRef] [PubMed]

7. Vieira, L. Torus to Mug Morphing Animation. 2007. Online verfügbar: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mug_and_ Torus_morph.gif (abgerufen am 7. Juni 2024).

8. Lee, J. Einführung in topologische Mannigfaltigkeiten, **2. Auflage; Graduate Texts in Mathematics; Springer: New York, NY, USA, 2011; ISBN 978-1-4419-7939-1.**

9. Smale, S. Topologie und Mechanik. I. Inventiones Math. **1970,** 10, **305–331.** [CrossRef]

10. Abraham, R.; Marsden, JE Foundations of Mechanics, **2. Aufl.; AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society: Providence, Rhode Island, USA, 2008; ISBN 978-0-8218-4438-0.**

11. Ortega, J.-P.; Ratiu, T. Momentum Maps and Hamiltonian Reduction; **Progress in Mathematics; Birkhäuser: Basel, Schweiz, 2004; ISBN 978-0-8176-4307-2.**

12. Flanders, H. Differential Forms with Applications to the Physical Sciences; **Überarbeitete Ausgabe; Dover Publications: Mineola, NY, USA, 1989; ISBN 978-0-486-66169-8.**

13. Lang, S. Fundamentals of Differential Geometry; **Graduate Texts in Mathematics; Springer: New York, NY, USA, 1999; Band 191, ISBN 978-1-4612-6810-9.**

14. Feynman, RP; Leighton, RB; Sands, M. Die Feynman-Vorlesungen über Physik, Band II, Kap. 41: Die Strömung von nassem Wasser. 1963/2013. Online verfügbar: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_41.html (abgerufen am 21. April 2024).

15. Smits, AJ Vorlesungen in Strömungsmechanik: Viskose Strömungen und Turbulenzen; **Smits, AJ, Hrsg.; Fakultät für Maschinenbau, Princeton University: Princeton NJ, USA, 2009.**

16. Brunton, SL; Noack, BR; Koumoutsakos, P. Maschinelles Lernen für die Strömungsmechanik. Annu. Rev. Fluid Mech. **2020,** 52, **477–508.** [Querverweis]

17. Dobson, CM Proteinfaltung und -fehlfaltung. Nature **2003,** 426, **884–890.** [CrossRef] [PubMed]

18. Dill, KA; MacCallum, JL Das Proteinfaltungsproblem, 50 Jahre danach. Science **2012,** 338, **1042–1046.** [CrossRef] [PubMed]

19. The Royal Institution. Die Physik des Lebens: Wie Wasser Proteine faltet – mit Sylvia McLain; YouTube-Video, 45:07. 2017. Verfügbar online: https://www.youtube.com/watch?v=SaSntOkK-Vk (abgerufen am 7. Juni 2024).

20. Goodale, MA; Milner, D. Sight Unseen: Eine Erforschung des bewussten und unbewussten Sehens; **Oxford University Press: Oxford, UK, 2013; ISBN 978-0-19-175300-8.**

21. Bullo, F.; Lewis, AD Geometrische Steuerung mechanischer Systeme: Modellierung, Analyse und Entwurf einfacher mechanischer Steuerungssysteme; **Texte zur Angewandten Mathematik; Springer: New York, NY, USA, 2005; ISBN 978-0-387-22195-3.**

22. The Royal Institution. Proteinfaltung und Teilchenbeschleuniger: Eine neue Lösung – mit Sylvia McLain und Alan Soper; YouTube- Video, 7:21. 2016. Online verfügbar: https://www.youtube.com/watch?v=uSErKi_HWg8 (abgerufen am 7. Juni 2024).

23. Rhys, NH; Soper, AK; Dougan, L. Die Fähigkeit der Aminosäure Glutamin zur Bildung von Wasserstoffbrücken wurde durch Neutronenbeugung nachgewiesen Experimente. J. Phys. Chem. B **2012,** 116, **13308–13319.** [CrossRef] [PubMed]

24. Stewart, BW „Es wird keine mehr geben!“: Das Erbe des Brustkrebsclusters von Toowong. Med. J. Aust. **2007,** 187, **178–180.** [Querverweis] [PubMed]

25. Lee, JM Riemannsche Mannigfaltigkeiten: Eine Einführung in die Krümmung; **Graduate Texts in Mathematics; Springer: New York, NY, USA, 1997; ISBN 978-0-387-98271-7.**

26. Morita, S. Geometrie der Differentialformen; **American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 2001; ISBN 978-0-8218-1045-3.**

27. Szekeres, P. Ein Kurs in moderner mathematischer Physik: Gruppen, Hilbert-Raum und Differentialgeometrie; **Cambridge University Press: Cambridge, Großbritannien, 2004; ISBN 978-0-511-26329-3.**

28. Lee, JM Einführung in glatte Mannigfaltigkeiten, **2. Auflage; Graduate Texts in Mathematics; Springer: New York, NY, USA, 2013; ISBN 978-1-4419-9981-8.**

29. Tu, LW Differentialgeometrie: Zusammenhänge, Krümmung und charakteristische Klassen; **Graduate Texts in Mathematics; Springer International Publishing: Cham, Schweiz, 2017; ISBN 978-3-319-55082-4.**

30. Lee, JM Einführung in Riemannsche Mannigfaltigkeiten, **2. Auflage; Graduate Texts in Mathematics; Springer International Publishing: Cham, Schweiz, 2018; ISBN 978-3-319-91754-2.**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Innovative Wege zur Entwicklung und Nutzung spezifischer Zwecke Alternativen zur Lösung schwieriger kombinatorischer Netzwerkrouting- und geordneter Optimierungsprobleme

Santosh Kumar 1,* und Elias Munapo [2]

[1] Abteilung für Mathematik und Geowissenschaften, School of Sciences, RMIT University, Melbourne, VIC 3000, Australien;
[2] School of Economics and Decision Sciences, North West University, Mafikeng Campus, Mafikeng 2735, Südafrika; emunao@gmail.com
* Korrespondenz: santosh.kumarau@gmail.com

Zusammenfassung: Dieser Artikel untersucht einige aktuelle Beiträge der Autoren und ihrer Kollegen und hebt einige innovative Ideen hervor, die sie dazu veranlasst haben, einige schwierige kombinatorische Netzwerkrouting- und geordnete Optimierungsprobleme anzugehen. Der Handlungsreisende, der in die NP-schwere Kategorie fällt, wurde untersucht und als indexbeschränkter kürzester verbundener Graph gelöst, und daher wirft er eine Frage zu seiner „NP-schweren“ Kategorie auf. Das Routingproblem durch „K“ angegebene Knoten und geordnete optimale Lösungen sind rechnerisch anspruchsvoll, wurden jedoch rechnerisch machbar gemacht. Alle diese Ansätze basieren auf der strategischen Erstellung und Verwendung einer alternativen Lösung in dieser Situation. Die E

Schlüsselwörter: kürzestes verbundenes Netzwerk; minimale Handlungsreisendentour; NP-schwere Probleme; Pfad durch K spezifizierte Knoten; Index-Ausgleichssatz; indexbeschränktes verbundenes Netzwerk; Erstellung einer alternativen Lösung; geordnete Optimallösungen

check for updates

Zitat: Kumar, S.; Munapo, E. Innovative Wege zur Entwicklung und Nutzung zweckgebundener Alternativen zur Lösung schwieriger kombinatorischer Netzwerkrouting- und geordneter Optimierungsprobleme. AppliedMath **2024, 4, 791–805. https:// doi.org/ 10.3390/appliedmath4020042**

Wissenschaftlicher Redakteur: Carlo Bianca

Empfangen: 18. April 2024
Überarbeitet: 6. Juni 2024
Akzeptiert: 6. Juni 2024
Veröffentlicht: 18. Juni 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Die Mathematik der OR hat in vielen realen Entscheidungsprozessen in Industrie, Wirtschaft und Regierung Unterstützung geleistet. Der technologische Wandel war schon immer eine Quelle neuer Herausforderungen, und dementsprechend wurden neue mathematische Methoden und Werkzeuge entwickelt, um die notwendige Entscheidungsunterstützung für bessere und fundiertere Entscheidungen zu bieten. Routing-Probleme und ihre Varianten in der Graphentheorie haben **aufgrund verschiedener industrieller Anwendungen viel Aufmerksamkeit von Forschern auf sich gezogen .** Kürzeste Route, kürzester **verbundener Graph und der Handlungsreisende sind nur einige davon. Varianten dieser Probleme wurden von Zeit zu Zeit identifiziert. Die geordnete Optimierung ist ein weiteres Feld, in dem das Erreichen eines geordneten Optimums, d. h. der** k -ten besten, k **ÿ 2-Lösung, eine äußerst anspruchsvolle Aufgabe sein kann . In diesem Artikel überprüfen wir einige spezifische innovative Ideen zur Entwicklung einer Alternative in einer bestimmten Situation und verwenden diese alternative Lösung, um einige schwierige kombinatorische Optimierungssituationen zu lösen . Beispielsweise finden wir Folgendes: (1**

als indexbeschränkter minimal verbundener Graph;

(2) Der Pfad, der durch eine Menge von festgelegten Knoten verläuft, ist rechenintensiv, weil der Pfad immer durch eine Menge von festgelegten Knoten verlaufen muss. Er kann ebenfalls als indexbeschränkter minimal zusammenhängender Graph gelöst werden.

(3) Die zweitbeste Optimallösung für die kürzeste Route und das Zuordnungsproblem.

Alle diese Ansätze entwickeln eine alternative Lösung und nutzen diese Lösung auf strategische Weise, um das betreffende Problem zu lösen. Diese neuen Ansätze müssen weiter untersucht werden, um ihre Effizienz, sofern vorhanden, festzustellen. Diese Arbeit wird derzeit durchgeführt. Unter den oben genannten Problemen wurde die Mindesttour des Handlungs

Machine Translated by Google

als „NP schwer“; siehe [1]. Ebenso **wurden die Bestimmung der kürzesten Route durch „K“ spezifizierte** Knoten und das Finden einer geordneten optimalen Lösung als rechenintensiv eingestuft ; **siehe [2,3]. Ein auf dem indexbeschränkten kürzesten verbundenen Graphen basierender Ansatz für das Problem des Handlungsreisenden wirft die Frage auf: „Ist das TSP wirklich ein „NP-schweres“ Problem ?“ Eine ähnliche Frage stellt sich erneut für den Pfad durch K spezifizierte Knoten. Die Frage ist: „Ist der Pfad durch die spezifizierten Knoten rechenintensiv?“ Die Entwicklung des beschränkten minimalen Spannbaums basiert auf der Idee, eine Alternative zu entwickeln und diese Alternative zu nutzen, um den indexb**

Wir erweitern die Idee, eine alternative Lösung für die kürzeste Route und ein Zuweisungsproblem zu entwickeln, und finden die zweitbeste optimale Lösung für diese Probleme, ohne den Rechenaufwand übermäßig zu erhöhen. Dieser Ansatz befindet sich noch in der Anfangsphase, und es bedarf weiterer Rechenarbeit, um seine Recheneffizienz für versc

Viele Situationen aus dem wirklichen Leben lassen sich in Form eines Netzwerks darstellen, das aus Knoten und Verbindungen besteht. Diese Verbindungen werden durch die Verbindung der Knoten gebildet, und die diesen Verbindungen zugeordneten Gewichte stellen eine Art Maß für die Beziehung zwischen den Knoten dar. Das Netzwerk, das eine physische Situation darstellt, kann ein gerichtetes oder ein ungerichtetes Netzwerk sein. Die Analyse eines ungerichteten Netzwerks ist im Allgemeinen anspruchsvoller als die eines gerichteten Graphen, einfach weil die Richtungen in einem gerichteten Graphen zusätzliche Informationen liefern, die in einem ungerichteten Netzwerk fehlen. Viele industrielle Situationen wurden als gerichtete Netzwerke modelliert und mithilfe dynamischer Programmiertechniken analysiert; siehe [4–6]. Diese Probleme wurden nach der Transformation in ein Netzwerkmodell mithilfe der netzwerkbezogenen Theorie und Werkzeuge analysiert. Das Ergebnis der Analyse kann im Hinblick auf die reale Situation interpretiert werden, die als Net

Im Allgemeinen kann ein Netzwerk durch G(N, L) **dargestellt werden , wobei** N eine Menge von **Entitäten darstellt,** die durch die Knoten N = **{1, 2, . . . , n}** repräsentiert werden, **und** L **die Menge der Links ist, die verschiedene Knoten verbinden und Eigenschaften repräsentieren, die mit Paaren dieser Knoten verknüpft sind. Diese Links werden durch** (i, j) bezeichnet, **wobei** i **und** j **die Knoten 1, 2, . . . ,** n **und** i ÿ = **j sind. In gewichteten Netzwerken ordnen wir jedem Link eine Zahl zu, die ein quantitatives Maß für die Beziehung zwischen diesen beiden Knoten liefert . Es kann sich beispielsweise einfach um die Entfernung zwischen den beiden Knoten handeln oder um die Reisezeit zwischen dem Knotenpaar** i **und j.**
Dieses mit der Verbindung (i, j) **verbundene Gewicht** wird mit cij **bezeichnet ,** was **je nach Situation eine positive oder eine negative Größe sein kann .**

Einige in dieser Abhandlung verwendete Ideen wurden in Abschnitt 2 besprochen und ihre Anwendungen in Form des Handlungsreisenden- und Routingproblems in Abschnitt 3 vorgestellt. Das geordnete Optimumproblem wurde in Abschnitt 4 erörtert. **Abschließende Bemerkungen werden in Abschnitt 5 gegeben.**

2. Modifikation eines klassischen Problems des kürzesten verbundenen Netzwerks und seine Anwendungen

Das kürzeste verbundene Netzwerk (SCN) eines beliebigen ungerichteten verbundenen Netzwerks G(N, L) **ist ein klassisches Netzwerkproblem. Es umfasst** (n ÿ 1) **Links, wobei** n **die Anzahl der Knoten im gegebenen Netzwerk** G(N, L) **darstellt . Da das gegebene Netzwerk verbunden ist, muss es einen eindeutigen Pfad von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten geben, und dieser Pfad muss frei von Schleifen sein. Wenn in einem solchen verbundenen Graphen eine beliebige Verbindung entfernt wird, wird der Graph getrennt. Dieses SCN kann durch einen Greedy-Ansatz gemäß [9–11] erhalten werden. Eine Modifikation des Problems des kürzesten verbundenen Graphen wurde in [12]** diskutiert **und wird im Folgenden kurz vorgestellt.**

2.1. Änderung des Shortest Connect Network (SCN)

2.1.1. Erklärung des modifizierten kürzesten verbundenen Netzwerks

Für ein Netzwerk G(N, L) **kann die SCN mit jeder bekannten Methode ermittelt werden. Aus der SCN kann man für jeden Knoten einen Knotenindex ermitteln. Der Knotenindex ist die Anzahl der Links, die von diesem Knoten im SCN ausgehen. Es sei** ni **der Index des Knotens i, wobei 1 ÿ** ni **ÿ** (n **ÿ** 1). In der in **[12] diskutierten Modifikation, in der die SCN eingeschränk**

Machine Translated by Google

Knotenindex ni **erfüllt für jeden Knoten 1 ÿ** ni **ÿ 2. Das bedeutet, dass, wenn der ursprüngliche SCN die Einschränkung des Indexwerts für keinen Knoten erfüllt, der mit dem klassischen Ansatz erhaltene SCN so geändert werden muss, dass er die Bedingung 1 ÿ** ni **ÿ 2,** ÿi erfüllt. **In dem gegebenen indexbeschränkten Netzwerk haben zwei Knoten einen Indexwert von 1 und die anderen Knoten einen Indexwert von 2; sie bilden also einen Pfad, der zwei Knoten verbindet und durch alle anderen verbleibenden Knoten des Netzwerks verläuft. Wir können davon ausgehen, dass in dem gegebenen verbundenen Netzwerk alle Knoten so sind, dass von jedem Knoten mindestens zw**

2.1.2. Einige wesentliche Begriffe und ein Theorem zur Modifizierung des SCN, das durch den Greedy-Ansatz für ein indexbeschränktes SCN (IRSCN) erhalten wird

Die erforderlichen Terme sind die

folgenden: T1. Index eines Knotens: Da jeder ausgewählte Link zwei Indizes generiert, beträgt die Gesamtzahl **der Indizes der ausgewählten** (n **ÿ** 1) Links, die den SCN bilden, 2(n **ÿ** 1). **Bei einem Pfad, der durch alle Knoten verläuft, haben zwei dieser Knoten nur einen Indexwert (vom Startpunkt bis zum Ende des Pfads), und die verbleibenden** (n **ÿ** 2) **Knoten haben den Index 2. Der indexbeschränkte SCN oder IRSCN bildet einen Pfad, der zwei Knoten verbindet und durch alle anderen verbleibenden Knoten des Netzwerks verläuft.**

T2. Einfache und nicht einfache Verbindungen: Eine Verbindung, die zwei Knoten i und j verbindet , **heißt einfach, wenn** xij = **1, d. h. dieser Link gehört zum SCN, und wenn** xij ÿ = **1, dann ist es ein nicht-basischer Link.**

T3. Knoten mit hohem und niedrigem Index: Sobald ein SCN mit einer bekannten Methode identifiziert wurde, kennen wir die Werte der Knotenindizes für alle Knoten. Diese Werte sind gegeben durch 1 ÿ ni **ÿ** (n **ÿ** 1). **Sie müssen geändert werden, um die Bedingung 1 ÿ** ni **ÿ 2** ÿi zu erfüllen, **d. h. für die Ursprungs- und Zielknoten ist der** Index ni = **1 und für alle anderen verbleibenden** (n **ÿ** 2) **Knoten ist** ni = **2. Die Knoten mit hohem und niedrigem Index können leicht anhand ihres aktuellen Werts im Vergleich zum gewünschten Knotenindexwert für diesen Knoten identifizie**

T4. Nachbarknoten und Verbindungen: Ein Knoten i **wird als Nachbarknoten von Knoten j bezeichnet, wenn die Knoten** i **und** j **durch eine einzige Verbindung verbunden sind. In einem vollständig verbundenen Netzwerk sind alle Knoten Nachbarknoten, da alle Knoten durch eine direkte Verbindung verbunden sind. Eine Nachbarverbindung ist definiert als eine Verbindung, die von einem Nachbarknoten ausgeht.**

Theorem 1. Indexausgleichstheorem: Das Hinzufügen derselben Konstante zu allen Links, die vom selben Knoten ausgehen, ändert nichts an der relativen Qualität eines ausgewählten Links in der SCN, die mit dem Greedy-Ansatz erhalten wurde. Der Indexausgleichstheorem kann jedoch **Alternativen schaffen.** Aus der SCN, die mit dem Greedy-Ansatz erhalten wurde, kennen wir den Index für jeden Knoten; daher können Knoten mit niedrigem und hohem Index leicht identifiziert werden. Der Indexausgleichstheorem beginnt seine Arbeit, indem er allen Links, die vom selben Knoten ausgehen, der als Knoten mit hohem Index klassifiziert wurde, Konstanten hinzufügt. **Die Idee besteht darin, Alternativen für die Auswahl eines Links zu schaffen. Daher reduziert es den Index bei einem Knoten mit hohem Index und erhöht den Index eines Knotens mit niedrigem Index; wenn ein Link von einem Knoten mit hohem Index entfernt und auf einem Knoten mit niedrigem Indexwert platziert wird, wird das Ungleichgewicht reduziert.** Dieser Prozess wird wiederholt, bis alle Knoten den erforderlichen Index erreichen und alle Indexbeschränkungen erfüllen.

Theorem 2. Für jede gegebene SCN-Lösung kann ein Basislink geändert werden, indem allen von diesem Knoten ausgehenden Links eine Konstante hinzugefügt wird, d. h. der Status eines Links von Basis auf Nicht-Basis und der eines anderen Links von Nicht-Basis auf Basis geändert wird. Wiederholte Anwendungen können einen SCN-Pfad erzeugen, der zwei Knoten verbindet und durch alle anderen Knoten in einem Netzwerk verläuft, d. h. er erfüllt die Indexbedingung für jeden Knoten.

2.1.3. Numerische Darstellung

Betrachten Sie ein einfaches, aber interessantes triviales Beispiel: die in Tabelle 1 angegebenen cij- Werte.

Machine Translated by Google

Tabelle 1. Ein vollständig verbundenes Netzwerk mit 6 Knoten und gewichteten Links.

ich\j	1	2	3	4	5	6
1	-	1	1	1	1	1
2	1	-	2	2	2	2
3	1	2	-	3	3	3
4	1	2	3	-	4	4
5	1	2	3	4	-	5
6	1	2	3	4	5	-

Der SCN kann mithilfe des Greedy-Ansatzes ermittelt werden, der in Abbildung 1 dargestellt ist. Man kann von jedem beliebigen Knoten aus beginnen, beispielsweise von Knoten 6, und als ersten Link den Link (6,1) auswählen; der nächste Ausgewählte Links können (1,2), (1,3) usw. sein. Die SCN ist wie in Abbildung 1 angegeben.

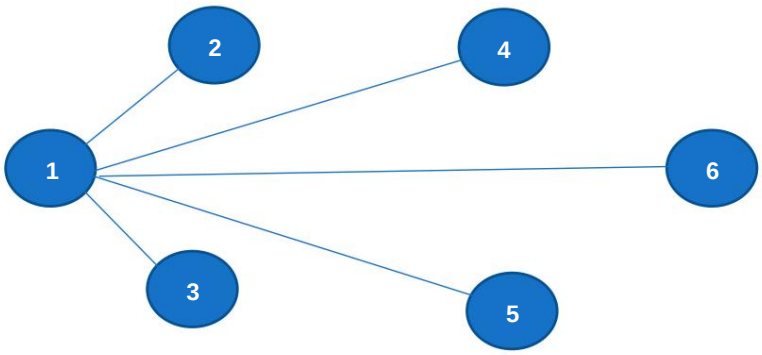


Abbildung 1. Kürzester verbundener Graph des Netzwerks aus Tabelle 1.

Die Inzidenzmatrix für den SCN in Abbildung 1 ist in Tabelle 2 dargestellt .

Tabelle 2. Häufigkeitsmatrix des SCN in Abbildung 1.

Knoten	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	5	1	1	1	1	1

Das bedeutet, wenn wir einen Pfad zwischen den Knoten 5 und 6 wollen, sind die Knoten 5 und 6 ausgeglichen mit einem Knotenindexwert von 1, und alle anderen Knoten sind unausgeglichen. Knoten 1 ist ein Knoten mit hohem Index und Knoten 2, 3 und 4 sind Knoten mit niedrigem Index. Als Anwendung des Indexausgleichstheorems fügen Sie allen Links, die vom Knoten mit hohem Index ausgehen, einen konstanten Wert von 1 hinzu. Knoten, der Knoten 1 ist; die relativen Vorzüge der Links (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) und (1,6) werden bleiben unverändert. Es wurde jedoch eine Alternative entwickelt, indem allen Links 1 hinzugefügt wird ausgehend von Knoten 1. Die Alternative ist ein Link, der von Knoten 2 ausgeht, statt eines Links beginnend bei Knoten 1. Daher kann die Verbindung (1,4) entfernt und durch die Verbindung (2,4) ersetzt werden. Diese Änderung ist möglich, da eine Alternative geschaffen wurde, um von Knoten 2 aus zu starten. Beachten Sie, dass es verringert den Index des Knotens mit dem höchsten Index um 1 und erhöht den Indexwert von der niedrigste Indexknoten 2 mal 1. Dies ist in Abbildung 2 dargestellt. Ähnlich verhält es sich, wenn 1 zu allen Links, die von den Knoten 1 und 2 ausgehen, kann der Link (1,5) entfernt und durch den Link ersetzt werden (3,5). Eine weitere Anwendung des Indexausgleichssatzes ergibt die SCN wie gezeigt in Abbildung 3.

Allerdings sind die Knoten 3 und 4 immer noch Knoten mit niedrigem Index und Knoten 1 ist ein Knoten mit hohem Index. Eine andere Anwendung ergibt die indexbeschränkte SCN, wie in Abbildung 3 dargestellt.

Machine Translated by Google

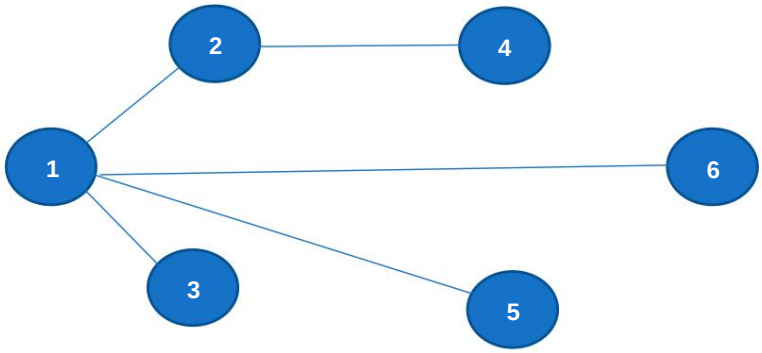


Abbildung 2. Verbessertes SCN.

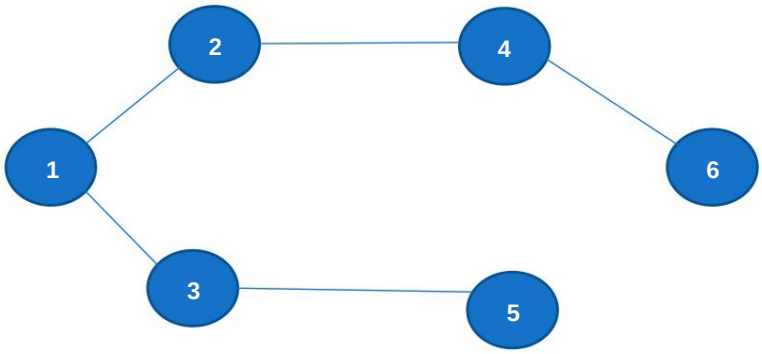


Abbildung 3. Indexbeschränkter SCN des Netzwerks in Tabelle 1.

Angenommen, unser Interesse wäre es, den kürzesten verbundenen Graphen mit einer Indexbeschränkung zu finden von 2 auf allen Knoten außer den Start- und Zielknoten, bei denen der Index auf 1 beschränkt ist. Die Gesamthäufigkeit der ausgewählten SCN beträgt 2(n ÿ 1) **= 10, wie in diesem Beispiel,** n **= 6. Mit anderen Worten, der IRSCN ist ein Pfad zwischen zwei Knoten und verläuft durch** (n ÿ 2) **Anzahl der Knoten. Das verbundene Netzwerk in Abbildung 3 ist ein erforderliches IRSCN und es kann nicht sei einzigartig.**

3. Der indexbeschränkte SCN und seine Anwendungen

3.1. Das Problem des Handlungsreisenden

Die minimale Handlungsreisendentour ist ein bekanntes Problem in der Graphentheorie. Es geht dabei um die Bestimmung einer Tour mit minimalen Kosten, die durch alle Knoten führt und Rückkehr in die Heimatstadt. Dieses klassische Problem des Handlungsreisenden hat viele industrielle Anwendungen und wurde als NP-schweres Problem klassifiziert; siehe [1,13–15]. Ein weiteres Problem Umgang mit allen Knoten in der Graphentheorie ist der kürzeste verbundene Graph, der wurde durch den Greedy-Ansatz erhalten; siehe [11]. In einer früheren Arbeit [12] haben die Autoren entwickelte einen Ansatz zur Konvertierung des kürzesten verbundenen Netzwerks (SCN) in einen indexbeschränkten kürzesten verbundenen Graphen, wie in Abschnitt 2 erläutert. Das indexbeschränkte SCN kann verwendet werden, um die minimale Reise des Handlungsreisenden zu finden. Die indexbeschränkte SCN ist wurde unter Verwendung des Index-Balancing-Theorems [12] entwickelt. Es wirft daher eine Frage auf: Ist die Problem des Handlungsreisenden wirklich NP-schwer? Das SCN in modifizierter Form wurde verwendet die Tour des Handlungsreisenden auf verschiedene Weise zu finden, [16,17], und schließlich das Minimum Spanning Tree unter der Indexbeschränkung wurde als gleichwertig mit dem Travelling Tree etabliert. Salesman-Tour [18]. Wir erläutern diese Ansätze kurz in den Abschnitten 3.1.1–3.1.3.

3.1.1. Ein minimaler Spannbaum-basierter Ansatz zur Ermittlung der minimalen Reiselänge Salesman Tour (MTST) des Netzwerks G(N, L): Ansatz 1 (Komplexität rC2)

Wir schlagen vor, die minimale Handlungsreisendentour vom Knoten aus zu starten mit einem minimaler Knotenindexwert, d. h. der Knoten, von dem aus eine Mindestanzahl von Links ausgeht. Es ist auch wahr, dass jeder Knoten zwei Links haben wird, die einen Teil bilden

Machine Translated by Google

der minimalen Handlungsreisendentour. Wenn der Minimalindexknoten durch
der Knoten p und sein Indexwert ist r, d. h., r Links gehen vom p aus, zwei davon
Links sind Teil der Mindestverkaufstour. Wir prüfen alle derartigen Möglichkeiten.
Wir bezeichnen diese r Verbindungen, die vom Knoten p ausgehen, mit pr . Die minimale Reisedauer
Die Identifizierung einer Salesman-Tour kann durch die Auswertung einer rC2- Anzahl indexbeschränkter kürzester
zusammenhängende Bäume aus dem modifizierten Netzwerk G((N ÿ 1),(L ÿ pr)) . Dieses Symbol zeigt
dass das geänderte Netzwerk nach dem Entfernen des Knotens p und aller Links erhalten wird, die
ausgehend vom Knoten p. Das modifizierte Netzwerk wird also (N ÿ 1) Knoten haben und die
Die Anzahl der Links ist gegeben durch (L ÿ pr). Jeder indexbeschränkte Baum wird zu einem Wanderbaum
Handlungsreisender, wenn die ersten beiden willkürlich ausgewählten Kanten mit diesem Pfad verbunden sind oder
IRSCN. Die erforderliche Mindest-Verkäufertour wird die mit dem Mindestwert
dieser rC2- Handelsreisenden-Touren.

Oben haben wir vorgeschlagen, die Handlungsreisendentour von einem Knoten aus zu starten, mit einem minimaler Knotenindexwert. Um diesen Punkt zu erklären, kann man sich das Netzwerk in Abbildung 4 ansehen und beachten Sie, dass der Indexwert von Knoten 1 3 ist; Knoten 2, 3 und 4 haben einen Indexwert von 5; und Anoden 5 und 6 haben einen Indexwert von 4. Diese Indexwerte sind die Anzahl der austretenden Links von diesem Knoten. Um den Rechenaufwand zu minimieren, sollten wir den Verkäufertour von Knoten 1, wo nur 3c2 Bewertungen erforderlich sind; mehr wäre erforderlich, wenn wir von einem anderen Knoten aus starten würden.

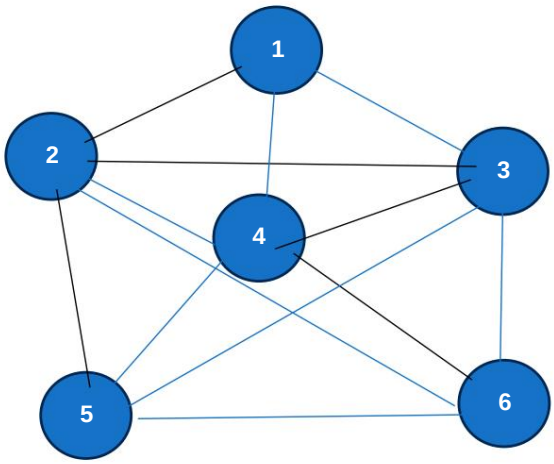


Abbildung 4. Gegebenes G(6, 13) -Netzwerk.

Dieser Ansatz wurde in [17] diskutiert.

3.1.2. Ein minimaler Spannbaum-basierter Ansatz zur Ermittlung der minimalen Reiselänge
Salesman Tour (MTST) von G(N, L): Ansatz 2 (Komplexität pr)

Wie oben besprochen, können wir wieder die indexbeschränkte kürzeste verbundene
Graph, um die minimale Reisedauer des Handlungsreisenden zu ermitteln. Betrachten Sie eine leicht andere
tion des gegebenen Netzwerks. Diesmal betrachten wir eine Modifikation und bezeichnen diese modifizierte
Netzwerk durch G(N,(L ÿ 1)). Das bedeutet, dass sich die Anzahl der Knoten nicht ändert und nur
eine Verbindung, die den Knoten p mit einem anderen Knoten, beispielsweise dem Knoten q, verbindet, wurde entfernt.
Links werden mit {(p, q1), (p, q2), . . ., (p, qr)} bezeichnet . In diesem Ansatz wird vorgeschlagen,
Finde die Anzahl r der kürzesten verbundenen Bäume, die die Knoten (p, q 1) verbinden, (p, q 2), . . ., (p, q R), nach
wobei immer nur ein Link auf einmal entfernt wird. Entfernen wir beispielsweise den Link (p, q 1) und finden Sie
IRSCN, der die Knoten p und q1 verbindet. Nach dem Verbinden des Links (p, q 1), die indexbeschränkte
Pfad wird zu einer Handlungsreisendentour. Ebenso finden wir den indexbeschränkten kürzesten
verbundene Netzwerke, die die Knoten p und qr verbinden , r = 1, 2, . . ., r. Nach dem Verbinden der Verbindung (p, qr)
und der minimale kürzeste verbundene Graph, wird es eine Handlungsreisendentour bilden und der minimale
dieser r Touren ist die erforderliche minimale Handlungsreisendentour. Daher reduziert sich die Komplexität auf r
indexbeschränkte kürzeste zusammenhängende Bäume im Vergleich zur Komplexität
rC2 , wie es beim vorherigen Ansatz der Fall war.

Machine Translated by Google

Dieser Ansatz wurde in [16] diskutiert.

3.1.3. Ein minimaler Spannbaum-basierter Ansatz, um festzustellen, dass die minimale Salesman-Tour dem Index-beschränkten minimalen Spannbaum entspricht: Ansatz 3 (Komplexität 1)

Lassen Sie den ausgewählten Knoten erneut p sein. Das gegebene Netzwerk G(N, L) **kann durch Hinzufügen von** ÿ **, geändert werden und die vom Knoten** p ausgehenden Links **werden ebenfalls als Knoten** p **von** ÿ **ausgehende Links hinzugefügt ;** das gegebene Netzwerk wird in **G{(N** + **1),(L** + pr)} **umgewandelt . Es Knoten** p **Beachten Sie, dass wir diesmal, anstatt einige Knoten oder Links zu entfernen, Knoten** p **und alle Links, die von diesem Knoten ausgehen, zum geänderten Netzwerk hinzufügen. Um einen Unterschied zwischen dem ausgewählten Knoten, seinem Duplikat und ebenso den Links, die vom duplizierten Knoten ausgehen, beizubehalten, haben wir die Notation „p“ und „p“ verwendet , die dupliziert wurden.** ÿ **Da der Knoten** p **und alle von ihm ausgehenden Links Ihre Verwendung ist nur einmal möglich, da die Existenz der duplizierten Links virtuell ist. Knoten** p **auf p, wir sprechen** ÿ **ist aufgrund von** ÿ **, wie man mit** ÿ **von einem Knoten p, der diesen virtuellen Entitäten umgeht, d. h. Knoten** p. **Da Knoten** p **und** p ÿ **und die zugehörigen virtuellen Links vom Knoten** p ÿ **.** ÿ **im Wesentlichen gleich sind, wird der indexbeschränkte Pfad vom Knoten** p **Wenn wir an** ÿ **eine Salesman-Tour bilden. In diesem Fall wird also mit Hilfe einiger kreativer und es den Knoten** p **denken, finden wir den indexbeschränkten kürzesten verbundenen Baum, der die Knoten** p **und** p ÿ, verbindet und **uns die erforderliche minimale Verkäufertour liefert.**

In der obigen Modifikation des gegebenen Netzwerks ist der übliche Greedy-Ansatz nicht direkt anwendbar, um den minimalen Spannbaum zu finden. Die Anzahl der zusätzlichen Links pr **Knoten** p hinzugefügten ÿ **ist nicht real; nur einer von ihnen existiert, wenn er als Teil des zum minimalen Spannbaums ausgewählt wird, und der andere Link muss verschwinden. Dies bedeutet, dass, sobald einer dieser Links grundlegend wird, der andere verschwinden muss. Mit anderen Worten, wenn der Link** ÿ **, q ist grundlegend ist, muss der Link** ÿ **, q wird eine unendliche Länge haben. Ebenso wird der ursprüngliche Link in einen unendlichen Wert geändert, wenn der duplizierte Link einfach ist. Wenn diese Links jedoch nicht einfach sind, können sie als nicht einfache Links koexistieren, da sie auf der Tour des Handlungsreisenden keine sinnvolle Existenz haben.**

Modifiziertes Netzwerk und Schritte zum Erhalten des minimalen Spannbaums von G{(N + **1),(L** + pr)}

Schritt 1: Entwickeln Sie für das gegebene Netzwerk G(N, L) **das Netzwerk G{(N** + **1),(L** + pr)} **und ordnen Sie die Links in aufsteigender Reihenfolge an. Anfangs sind alle Links nicht-basisch, sodass alle doppelten Links dieselben sind wie in** G(N, L) . **Duplizierte Links heißen Typ-2-Links und nicht duplizierte Links heißen Typ-1-Links. Die Anzahl der Typ-1-Links ist** (L ÿ pr) **und die der Typ-2-Links ist 2** pr . **Typ-2-Links sind so, dass anfangs mindestens zwei Links denselben Längenwert haben.**

Schritt 2: Setzen Sie einen Zähler K = 1. Wählen Sie den Link mit der minimalen Länge aus, nehmen Sie ihn in den minimalen Spannbaum auf und fahren Sie mit Schritt 3 fort.

Schritt 3: Wenn der ausgewählte Link vom Typ 1 ist und K < n, setzen Sie K = K + 1 und wählen Sie die nächste Mindestlänge . Wenn K = n, fahren Sie mit Schritt 7 fort.

Schritt 4: Wenn die ausgewählte Kante vom Typ 2 und K < n war, setzen Sie zuerst die Länge des doppelten Links auf ÿ und ordnen Sie die Längen dann in aufsteigender Reihenfolge neu an. Setzen Sie K = K + 1 und wählen Sie das nächste Minimum. Wenn K = n, fahren Sie mit Schritt 7 fort.

Schritt 5: Wenn der ausgewählte Link mit dem bisher gebildeten Spanning Tree einen Zyklus bildet, verwerfen Sie ihn oder schließen Sie ihn ein. Wenn dieser letzte Link vom Typ 1 war, kehren Sie zu Schritt 3 zurück. Wenn der ausgewählte Link vom Typ 2 war, fahren Sie mit Schritt 6 fort.

Schritt 6: Überprüfen Sie für die ausgewählte Kante Folgendes:

6.1: Wenn die Einbeziehung der Kante nicht zu einem isolierten Knoten im Netzwerk führt, verwerfen Sie sie.

6.2: Wenn Alternativen vorhanden sind, entscheiden Sie sich für die Kante, die ein besseres Gleichgewicht zwischen den Indizes der Knoten entwickelt, die den minimalen Spannbaum bilden.

Kehren Sie zu Schritt 4 zurück, da der ausgewählte Link vom Typ 2 ist.

Machine Translated by Google

tt

Schritt 7: Beenden Sie, da der minimale Spannbaum erreicht wurde.

Numerische Darstellung

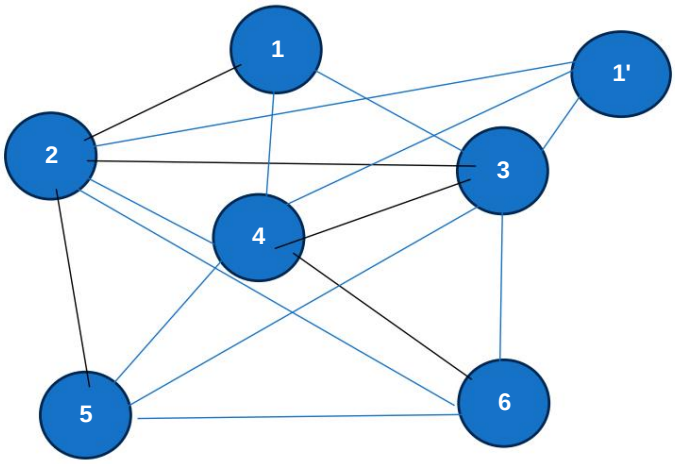
Betrachten wir das folgende Netzwerk G(6, 13) in Abbildung 4. Die Linkgewichte sind gegeben in Tabelle 3.

(6,13)

Tabelle 3. Verbindungsdistanzen für das Netzwerk in Abbildung 4.

F\T	1	2	3	4	5	6
1	-	12	10	10	-	-
2	12	-	15	11	11	16
3	10	15	-	7	14	12
4	10	11	7	-	10	11
5	-	11	14	10	-	9
6	-	16	12	11	9	-

Betrachten wir nun das modifizierte Netzwerk, das G((6 + 1), (13 + 3)) oder G(7, 16) sein wird, als **((6 + 1), (13 + 3)) (7, 16)**
in Abbildung 5 dargestellt, wo der Knoten 1 als 1' dupliziert wurde.



(7,16)

Abbildung 5. Modifiziertes Netzwerk G(7, 16).

Links vom Typ 1 sind (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6) und (5,6).

Links vom Typ 2 sind (1,2), (1,3), (1,4), (1',2), (1',3) und (1',4).

Wenn wir die Links in aufsteigender Reihenfolge anordnen, erhalten wir 7 (3,4)T1, 9(5,6)T1, 10(4,5)T1, 10(1,3)T2, 10(1,4)T2, 10(1',3)T2, 10(1',4)T2, 11(2,4)T1, 11(2,5)T1, 11(4,6)T1, 11(4,6)T1, 12 (3,6)T1, 12(1,2)T2, 12(1',2)T2, 15 (2,3)T1 und 16(2,6)T1.

Bestimmung der MST: Link 7(3,4) T1 eingeschlossen, Link 9(5,6) T1 eingeschlossen, 10(4,5) T1 eingeschlossen, 10(1,3) T2 eingeschlossen; jetzt wird jedoch der Link (1',3) auf unendlich geändert, so dass die Liste der aufsteigenden Reihenfolge wird wie folgt geändert:

10(1,4) T2, 10(1',4) T2, 11(2,4) T1, 11(2,5) T1, 11(4,6) T1, 11(4,6) T1, 12 (3,6) T1, 12(1,2) T2, 12(1',2) T2, 15 (2,3) T1 und 16(2,6) T1, ÿ(1',3) T2.

Beachten Sie, dass der Greedy-Ansatz den nächsten Link (1,4) der Länge 10 identifiziert, aber ein Kreis, und wenn wir uns für (1',4) entscheiden, ergibt sich auch ein Kreis 1-3-4-1', da die Knoten 1 und 1' das gleiche. Es wird auch ausgeschlossen. Der nächste Link (2,4) wird ausgeschlossen und der Link (2,5) wird eingeschlossen. Der Zusammenhang (4,6) ist ausgeschlossen. Abschließend erhalten wir Abbildung 6.

Machine Translated by Google

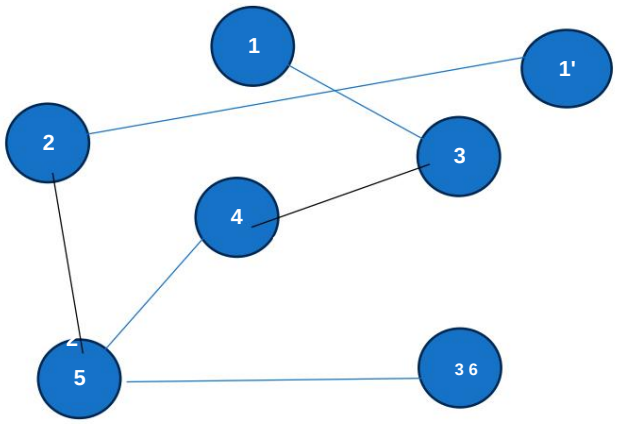


Abbildung 6. Spannbäume mit dem Greedy-Ansatz.

Betrachtet man Abbildung 6, stellt man fest, dass die Knoten 5 und 6 unausgeglichen sind, da der Knotenindex bei Knoten 5 ist 3 und der Knotenindex bei Knoten 6 ist 1. Wenn 1 zu allen Knoten hinzugefügt wird, die von Knoten 5, das mit dem Link (4,5) verbundene Gewicht wird gleich dem Gewicht des Links (4,6); daher wird es zu einer Alternative führen. Es schafft die Möglichkeit, den Link zu entfernen (4,5) und ersetzen Sie es durch den Link (4,6). Dies ist in Abbildung 7 dargestellt.

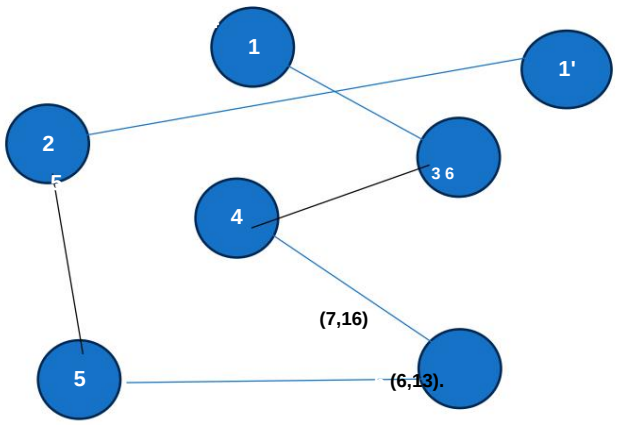


Abbildung 7. Der Pfad 1 -> 3 -> 4 -> 6 -> 5 -> 2 -> 1‘.

Dieser Weg im Netzwerk G(7, 16) hat die Interpretation eines indexbeschränkten Minimums Spanning Tree, der die Knoten 1 und 1' unter der Knotenindexbeschränkung verbindet, und eine Salesman-Tour Interpretation für das Netzwerk G(6, 13). Sie ist in Abbildung 8 dargestellt. Die Kosten für diese Tour betragen 12(1,2) + 11(2,5) +9(5,6) + 11(6,4) + 7(4,3) + 10((3,1) = 60 (1-> 2 - > 5 -> 6 -> 4 -> 3 -> 1).

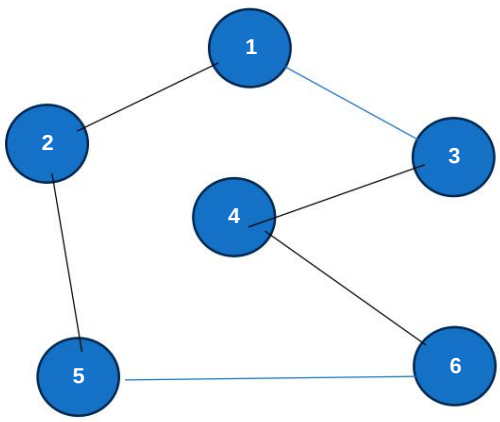


Abbildung 8. Der Spannbaum und die minimale Handlungsreisendentour.

Machine Translated by Google

3.2. Kürzester Pfad in einem ungerichteten Netzwerk unter der Bedingung, dass er durch K festgelegte Knoten führt.

Kalaba [19] schlug ein eingeschränktes Routing-Problem vor, bei dem ein Pfad vom Ursprungsknoten zum Zielknoten gefunden wird, der durch K festgelegte Knoten führt. Dieses Problem wurde in **[20]** mithilfe der **dynamischen Programmiertechnik gelöst . Wenn die festgelegte Menge leer ist, wird das Problem auf ein normales Routing-Problem reduziert, und wenn die Menge der festgelegten Knoten alle Knoten enthält und zum Ausgangspunkt zurückkehrt, wird es zum Problem der Handlungsreisendentour. Aufgrund der kombinatorischen Natur des Problems ist es schwierig, dieses Problem mithilfe der dynamischen Programmiertechnik zu lösen. Wenn dieses Problem jedoch mithilfe des kürzesten Spannbaums unter der Knotenindexbeschränkung gelöst wird, wird die Rechenlast beherrschbar. Alle Knoten sind im SCN enthalten, und** der kombinatorische Aspekt, der das Problem für den **dynamischen Programmieransatz rechenintensiv macht ,** wird geändert. Für die festgelegten Knoten wenden wir einfach eine **Indexbeschränkung an, indem wir sicherstellen, dass der festgelegte Knoten auf der Route besucht wird. Dies wird erreicht, indem eine Indexbeschränkung von 2 oder mehr auferlegt wird und sichergestellt wird, dass die Beschränkung eingehalten wird.**
Siehe zum Beispiel [21], wo die Autoren eine industrielle Anwendung von Serviceaufrufen betrachteten und das Problem in mathematischer Form als Pfad durch K spezifizierte Links entwickel
Alle diese Routing-Probleme, bei denen der Pfad auf eine Reihe von angegebenen Knoten oder Links beschränkt ist, sind rechnerisch anspruchsvoll, aber wenn diese Probleme als indexbeschränkter SCN versucht werden , wird die Rechenkomplexität reduziert. Tatsächlich ist es einfach , **den indexbeschränkten SCN unter allen Bedingungen zu finden ,** wie zum Beispiel

1 ÿ ni **ÿ** ki , wobei ki eine gegebene Zahl zwischen **1 ÿ** ki **ÿ** (n **ÿ** 1) ist.

4. Bestelltes Optimum

Die beste Lösung von K th (K **ÿ** 2) **ist im Allgemeinen ein geordnetes Optimierungsproblem. Die** K th **beste Lösung,** (K **ÿ** 2), **ist definiert als die beste Lösung nach Ausschluss von** (K **ÿ 1) geordneten Optimallösungen . Es gibt keine gut definierte Theorie zur Bestimmung geordneter Optimallösungen für Optimierungsprobleme, mit Ausnahme von [22], wo die Autoren eine charakteristische Gleichung entwickelten, die geordnete Optimallösungen für ein reines lineares ganzzahliges Programmierproblem identifiziert . Hier werden wir die Mathematik von OR-Problemen betrachten, um die zweitbeste Lösung zu finden, indem wir das Konzept einer alternativen Optimallösung verwenden. In der Vergangenheit wurden viele Vorschläge gemacht, aber sie können rechenintensiv sein. Diese Probleme treten in verschiedenen realen Situationen auf, und im Allgemeinen kann die beste oder optimale Lösung identifiziert werden, da alle vorhandenen Methoden Bedingungen für die Optimalität der Lösung definiert haben, und wenn diese Bedingungen erfüllt sind, kann man leicht schlussfolgern, dass die Optimallösung erreicht wurde. Das Vorhandensein der Optimalitätsbedingungen für die** K- **beste Lösung,** K **ÿ 2** (K **ÿ 1) Anzahl ,** th **wurde nicht definiert; vielmehr ist das** K th **optimal ist definiert als die beste, ohne dass der besten Lösungen. Ein Bedarf für die** K- **Situationen** th **eine beste Lösung entsteht in vielen verschiedene (siehe [2] für ein Beispiel), in denen die** K- **beste Lösung** th **für ein lineares Programm erforderlich ist, um das Problem der Extrempunkt-Programmierung in der Mathematik zu**
Das K th **analysieren. Die beste Lösung wird aus verschiedenen Gründen in verschiedenen Situationen benötigt. In diesem Abschnitt nähern wir uns dem Problem des geordneten Optimums, das rechenintensiv sein kann , indem wir wiederum eine alternative Lösung entwickeln und diese Lösung verwenden, um die zweitbeste Lösung zu ermitteln. Zwei Probleme wurden verwendet, um die Bestimmung der zweitbesten Lösung zu veranschaulichen: (1) die zweitkürzeste Route für ein Problem der kürzesten Route und (2) das Zuweisungsproblem . Für das Zuweisungsproblem schlug Murthy [3] eine Methode vor, um alle Zuweisungen nach steigenden Kosten zu ordnen. In einem** nXn- **Zuweisungsproblem erhielt Murthy [3] die zweitbeste Lösung, indem er** n **Zuweisungsprobleme löste, indem er jeweils einer der optimalen Zuweisungen hohe Kosten zuwies, und die beste aller dieser** n **Lösungen war die zweitbeste Lösung für dieses Problem. Seine Idee ist, dass sich die zweitbeste in mindestens einer Zuweisung von der besten unterscheiden wird, und er bewertet alle derartigen Möglichkeiten.**
In diesem Artikel geht es darum, die Länge der aktuellen optimalen Lösung um einen bestimmten Betrag zu erhöhen, um zwei oder mehr alternative optimale Lösungen zu etablieren. Eine

Machine Translated by Google

ff

Alternativlösungen sind die bestehenden optimalen Lösungen und die anderen sind neu erstellte alternative optimale Lösung. Da der Wert der optimalen Lösung in einem kontrollierter Weise haben diese beiden alternativen optimalen Lösungen eine interessante Interpretation der besten und der zweitbesten Lösungen in Bezug auf die ursprünglichen Kosteninformationen. Wir Veranschaulichen Sie die Idee anhand des kürzesten Wegeproblems in einem Netzwerk und einer Aufgabe Problem, die beste und zweitbeste Lösung zu finden.

4.1. Die zweitbeste Route für das konventionelle Routingproblem in einem gerichteten Netzwerk

Numerische Darstellung zur Ermittlung der zweitbesten kürzesten Route

Wenden wir die Idee der Entwicklung alternativer Lösungen auf das Netzwerkrouting an Das in Abbildung 9 betrachtete Problem wurde in Abbildung 10 transformiert, um die optimale Lösung zu finden.

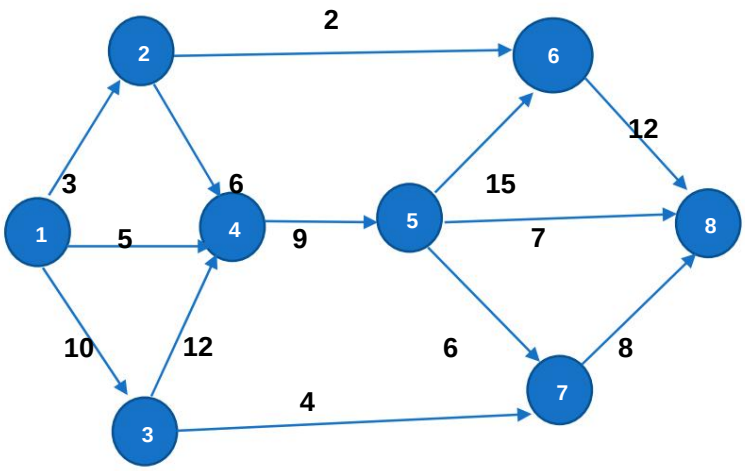


Abbildung 9. Gerichtetes Netzwerk.

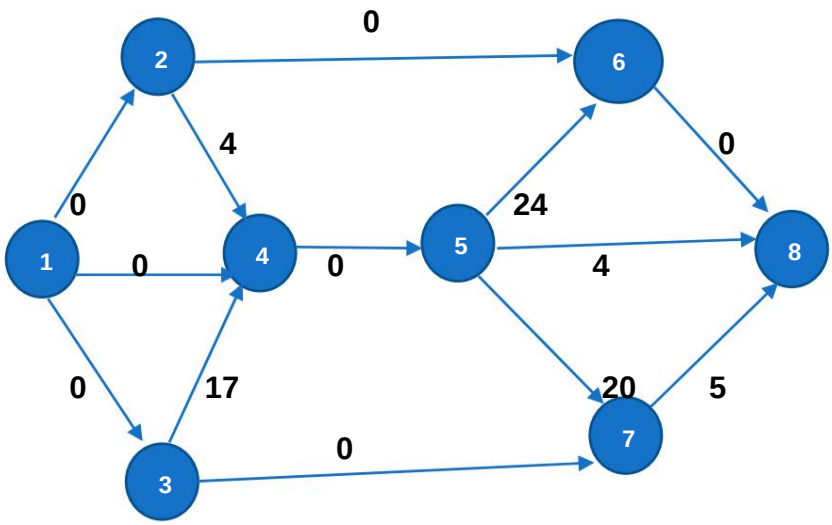


Abbildung 10. Das endgültig rekonstruierte Netzwerk nach 7 Iterationen.

Die optimale Lösung für das Netzwerk in Abbildung 9 wurde mit 17 Einheiten ermittelt, und die Pfad war 1 -> 2 -> 6 -> 8.

Wir verwenden den in [23] **entwickelten Ansatz der minimalen Gewichtung bei der Markierung . Die transformierten Netzwerk nach sieben Iterationen des Minimalgewicht-Label-Ansatzes ist in Abbildung 10 dargestellt.**

Die bei der Anwendung des Minimalgewicht-Etikettierungsansatzes generierten Etiketten sind zusammengefasst in Tabelle 4.

Machine Translated by Google

Tabelle 4. Mit der Methode der Mindestgewichtung von Etiketten erhaltene Etiketten.

Knoten	1	2	3	4	5	6	7	8
Etikett	(1,0)	(1,3)	(1,10)	(1,5)	(4,14)	(2,5)	(3,14)	(6,17)

Wir gelangen von Knoten 6 zu Knoten 8, von Knoten 2 zu Knoten 6 und von Knoten 2 zu Knoten 2 vom Knoten 1, was dazu führt, dass der optimale Pfad 1 -> 2 -> 6 -> 8 ist und die minimalen Kosten 17 sein.

Die minimalen Kosten ungleich Null betragen 4 in Abbildung 10 für zwei Links. Änderung des Gewichts mit dem Link (2,4) verknüpft ist, erzeugt keinen zweiten Pfad, sondern ändert das Gewicht verbunden mit dem Link (5,8) wird einen zweiten Pfad erzeugen. Wir können zwei alternative Pfade, wenn die Verbindung (6,8) um 4 Einheiten erhöht wird. Wenn das Problem erneut gelöst wird, gibt es zwei Wege, den besten und den zweitbesten.

Der beste Weg beträgt, wie oben angegeben, 17 Kosten und die Route verläuft von 1 zu 2 zu 6 zu 8.

Der zweitbeste Weg würde 21 kosten und die Route würde von 1 über 4 bis 5 bis 8 verlaufen.

Eine Erhöhung des Linkgewichts von (2,6) oder (6,8) um 4 Einheiten führt zu zwei alternativen Lösungen.

Die Grundidee besteht darin, die Länge der aktuellen optimalen Lösung um 4 Einheiten zu erhöhen, und wenn können wir zwei alternative optimale Pfade mit einer Gesamtlänge von 21 Einheiten festlegen, nachdem wir die Länge des aktuellen optimalen Pfades um 4 Einheiten, der vorherige Pfad ist optimal und der andere ist ein neuer Pfad mit einer Länge von 21. Der vorherige Pfad ist die beste Lösung und Der andere Weg ist die zweitbeste Lösung. Daher ist von diesen beiden alternativen Wegen Wir ermitteln die optimale und die zweitbeste Lösung für das Problem der kürzesten Route.

Diese Idee kann leicht auf das ungerichtete Netzwerk ausgeweitet werden, indem man die Beschriftung Der in [24] diskutierte Ansatz.

4.2. Numerische Illustration für die zweitbeste Lösung eines Zuordnungsproblems

Wir betrachten das Zuordnungsproblem von Murthy [3]. Die Zuordnung Das Problem ist in Tabelle 5 aufgeführt.

Tabelle 5. Zuweisungskostenwerte für Murthys Illustration.

R\C	1	2	3	4	5	6	7	8	9 Vÿ1	10
1 ÿ	7	51	52	87	38	60	74	66	0	20
2	50	12	0	64	8	53	0	46	76	42
3	27	77	0	18	22	48	44	13	0	57
4	62	0	3	8	5	6	14	0	26	39
5	0	97	0	5	13	0	41	31	62	48
6	79	68	0	0	15	12	17	47	35	43
7	76	99	48	27	34	0	0	0	28	0
8	0	20	9	27	46	15	84	19	3	24
9	56	10	45	39	0	93	67	79	19	24
10	27	0	39	53	46	24	69	46	23	1

ÿ und ÿ zeigen eine horizontale und eine vertikale Linie an.

Die optimale Lösung mit Gesamtkosten von 0 ergibt sich aus den folgenden Zuordnungen. wird mit A (1) bezeichnet und ist wie folgt:

$$\text{Und } (1) = \{(1,9), (2,7), (3,3), (4,8), (5,6), (6,4), (7,10), (8,1), (9,5), (10,2)\}.$$

Diese Zuordnungen sind in Tabelle 5 rot dargestellt. Vertikale Linien decken Null Einträge in den Spalten 9, 3, 4, 1, 5, 2 und 7. Die Zeilen werden durch drei horizontale Linien 4, 5 und

Machine Translated by Google

7. Für die zweitbeste Zuordnung löste Murthy 9 Probleme, indem er jeweils eine Zuordnung aus der optimalen Lösung auf ÿ setzte. Wenn wir beispielsweise die Verknüpfung (1,9) = ÿ setzen, kann das Problem erneut gelöst werden. In ähnlicher Weise löste Murthy 9 Zuordnungsprobleme, die von Murthy in [3] wie folgt zusammengefasst wurden:

M1 = **{(1,** 9)} = **10,**
M2 = **{(1,** 9), **(2,** 7)} = **14**

M3 = **{(1,** 9), **(2,** 7), **(3,** 3)} = Kosten **14**

M4 = **{(1,** 9), **(2,** 7), **(3,** 3), **(4,** 8)} = Kosten **1**

M5 = **{(1,** 9), **(2,** 7), **(3,** 3), **(4,** 8), **(5,** 6)} = Kosten **12**

M6 = **{(1,** 9), **(2,** 7), **(3,** 3), **(4,** 8), **(5,** 6), **(6,** 4)} = Kosten **53**

M7 = **{(1,** 9), **(2,** 7), **(3,** 3), **(4,** 8), **(5,** 6), **(6,** 4), **(7,** 10)} = Kosten **45**

M8 = **{(1,** 9), **(2,** 7), **(3,** 3), **(4,** 8), **(5,** 6), **(6,** 4), **(7,** 10), **(8,** 1)} = Kosten **47**

M9 = **{(1,** 9), **(2,** 7), **(3,** 3), **(4,** 8), **(5,** 6), **(6,** 4), **(7,** 10), **(8,** 1) **(9,** 5)} = Kosten **56**

Aus dem oben Gesagten schloss er, dass die zweitbeste Lösung der Zeichenfolge entspricht

M4. Diese Folge von Zuweisungen ist gegeben durch

A (2) = {(1,9), (2,7), (3,3), (4,2), (5,6), (6,4), (7,8), (8,1), (9,5), (10,10)} mit Gesamtkosten von 1.

Nun wenden wir das Konzept der Erstellung einer Alternative an. Aus Tabelle 5 geht hervor, dass das minimale von Null verschiedene Element 1 in der Zelle (10,10) ist. In Spalte 10 und Zeile 10 haben wir eine Zuweisung in der optimalen Lösung, die durch die Zeichenfolge A (1) gekennzeichnet ist. Diese Zuweisungen befinden sich in den Zellen (7,10) und (10,2). Um eine Alternative zu erstellen, werden die mit dem Element (7,10) verbundenen Kosten um eine Einheit erhöht oder die mit dem Element (10,2) verbundenen Kosten werden um eine Einheit erhöht. Daher enthält entweder Spalte 10 oder Zeile 10 keine Nullzahl, und durch Subtraktion des Minimums erstellen wir zwei Nullelemente in den Zellen (10,2) und (10,10) in Zeile 10, was zu zwei alternativen Lösungen führt . Ein ähnlicher Fall ergibt

Die beiden alternativen Optimallösungen führen zur besten und zweitbesten Lösung.

Erste Lösung: {(1,9), (2,7), (3,3), (4,2), (5,6), (6,4), (7,8), (8,1), (9.5), (10,10)}.

Zweite Lösung: {(1,9), (2,7), (3,3), (4,8), (5,6), (6,4), (7,10), (8,1), (9,5), (10,2)}.

In Bezug auf die Daten in Tabelle 5 ist die erste Lösung die zweitbeste mit Gesamtkosten von 1. Die zweite Lösung ist die optimale Lösung mit Gesamtkosten von 0, wie in [3] ermittelt.

Die Herausforderung besteht weiterhin darin, das K zu finden^{te} **Beste, wenn** K > **2.**

5. Schlussbemerkungen In

diesem Artikel haben wir einige kombinatorische Netzwerkoptimierungsprobleme betrachtet und in eine Form gebracht, die rechnerisch handhabbar wurde. Die zentrale Idee hinter diesen Transformationen ist die Entwicklung einer Alternative, und durch die Verwendung dieser Alternative haben wir die gewünschte Lösung erhalten. Die in diesem Artikel behandelten Probleme sind die folgenden: (1) Das Problem

des Handlungsreisenden; (2) Der Pfad

durch K angegebene Knoten; (3) Die geordnete

Optimallösung, d. h. die zweitbeste Lösung für das Problem der kürzesten Route und des Zuweisungsproblems.

Alle Ansätze verwenden die Alternativlösung, die in jeder Situation anders erstellt und zur Reduzierung der Rechenlast eingesetzt wurde. Der kombinatorische Aspekt des Handlungsreisenden und des Pfades durch vorgegebene Knoten wurde durch die Entwicklung des indexbeschränkten minimalen Spannbaums auf eine handhabbare Form reduziert.

Die zweitbeste Lösung für die kürzeste Route und das Zuordnungsproblem wurde dadurch erreicht, dass die optimale Lösung an eine kontrollierte und strategische Position gebracht wurde, um zwei optimale Lösungen zu erhalten, von denen eine die optimale und die andere die zweitbeste Lösung w

Unser Ansatz wirft auch einige Fragen auf, die einer weiteren Untersuchung bedürfen.

1. **Ist das Problem der minimalen Handlungsreisendentour wirklich NP-schwer?**
2. **Ist das Problem der eingeschränkten Weiterleitung rechenintensiv?**

Machine Translated by Google

3. Geordnete Optimierungen erfordern weitere Untersuchungen, um das K **für** th **am besten, wenn** K ÿ **3 die beiden in diesem Dokument diskutierten Fälle und für andere Situationen zu finden.**

Dieser Beitrag beschränkt sich auf einige klassische Probleme, da sich die Autoren schon lange mit diesen Themen beschäftigen. Es wäre jedoch wünschenswert, die Anwendung dieser Ideen auf Routing-Probleme zu untersuchen, die in [25–27] behandelt werden.

Die in diesem Artikel besprochenen Ansätze müssen noch weiter untersucht werden, um die Rechenleistung der verschiedenen in diesem Artikel diskutierten Situationen zu ermitteln. Dies wird derzeit untersucht und sobald es soweit ist, wird darüber berichtet.

Beiträge der Autoren: Konzeptualisierung, SK und EM; Software, SK und EM; Formale Analyse, EM; Untersuchung, SK; Datenkuratierung, EM; Schreiben – Originalentwurf, SK und EM. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu.

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: Die in der Studie vorgestellten Originalbeiträge sind im Artikel enthalten.

Danksagung: Die Autoren bedanken sich herzlich bei allen anonymen Gutachtern für ihre konstruktiven Vorschläge und Kommentare.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte vorliegen.

Verweise

1. **Nemhauser, G.; Wolsey, LA** Integer and Combinatorial Optimization; **John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 1988. [CrossRef]**
2. **Kumar, S.; Wagner, D. Einige Algorithmen zur Lösung von Extrempunkt-Programmierproblemen.** NZ Oper. Res. J. **1979, 7, 128–149.**
3. **Murty, KG Ein Algorithmus zur Rangfolge aller Aufgaben nach steigendem Aufwand.** Oper. Res. **1968,** 16, **682–687. [CrossRef]**
4. **Bellman, R.; Dreyfus, S.** Angewandte dynamische Programmierung; **Princeton University Press: Princeton, NJ, USA, 1962.**
5. **Hastings, NJ** Dynamische Programmierung mit Managementanwendungen; **OR-Reihe; American Mathematical Society: Butterworth, Malaysia; London, Großbritannien, 1973.**
6. **Saksena, JP** Dynamische Programmierung; **Siddarth Publications: Delhi, Indien, 2006.**
7. **Golden, B.; Raghavan, S.; Wasil, E.** Das Fahrzeugroutingproblem: Neueste Fortschritte und neue Herausforderungen; **Springer Science + Business Medien: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2008; ISBN 978-0-087-77777-1. [CrossRef]**
8. **Marrekchi, E.; Besbes, W.; Dhouib, D.; Demir, E. Ein Überblick über die jüngsten Fortschritte in der Operations Research-Literatur zu den Green- Routing-Problemen und ihren Variationen.** Ann. Oper. Res. **2021,** 304, **529–574. [CrossRef]**
9. **Anupam, G. Deterministic MST, Advanced Algorithms, CMU. Online verfügbar: http://www.cs.cmu.edu/~anupamg/advalgos15/Vorlesungen/Vorlesung01.pdf (abgerufen am 1. April 2024).**
10. **Kruskal, JB Über den kürzesten Spannbaum eines Graphen und das Problem des Handlungsreisenden.** Proc. Am. Math. Soc. **1956, 7, 48–50. [Querverweis]**
11. **Prim, R. Kürzestes verbundenes Netzwerk und einige Verallgemeinerungen.** Bell Syst. Tech. J. **1957,** 36, **1389–1401.**
12. **Munapo, E.; Kumar, S.; Lesaoana, M.; Nyamugure, P. Ein minimaler Spannbaum mit Index <=2.** Aust. Soc. Oper. Res. Bull. **2016,** 34, **1–14.**
13. **Hoffman, KL; Pedberg, M.; Rinaldi, G.** The Travelling Salesman Problem; **Kluer Academic Publishers: Amsterdam, Niederlande Länder, 2001. [CrossRef]**
14. **Korte, B.; Vygen, J.** Combinatorial Optimization: Theory and Applications; **Kapitel 21; Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2006; S. 501–535.**
15. **Laporte, G. Das Problem des Handlungsreisenden: Ein Überblick über exakte und approximative Algorithmen.** Eur. J. Oper. Res. **1992,** 59, **231–247. [CrossRef]**
16. **Kumar, S.; Munapo, E.; Lesaoana, M.; Nyamugure, P.** Ist das Problem des Handlungsreisenden tatsächlich NP-schwer? Kapitel 3 in Ingenieurwesen und Technologie: Aktuelle Innovationen und Forschung; **Mathani, A., Hrsg.; International Research Publication House: Delhi, Indien, 2017; S. 37–58, ISBN 978-93-86138-06-4.**
17. Kumar, S.; Munapo, E.; Lesaoana, M.; Nyamugure, P. Ein minimaler Spannbaum-basierter Ansatz für das **Problem des Handlungsreisenden .** Opsearch **2018,** 55, **150–164.**

Machine Translated by Google

18. Kumar, S.; Munapo, E.; Siguake, C.; Al-Rabeeah, M. Der minimale Spannbaum mit Knotenindex <=2 entspricht der minimalen Handlungsreisendentour. In Mathematics in Engineering Sciences: Novel Theories, Technologies and Applications; **Kapitel 8; Mathematical Engineering, Manufacturing, and Management Sciences Series; Ram, M., Hrsg.; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2020. Online verfügbar: https://www.crcpress.com/Mathematical-Engineering-Manufacturing-and-Management-Sciences/ Buchreihe/CRCMEMMS (abgerufen am 1. April 2024).**

19. Kalaba, R. Über einige kombinatorische Kommunikationsnetzwerkanalysen. Proc. Symp. Appl. Math. **1960,** 10. **[CrossRef]**

20. Saksena, JP; Kumar, S. Das Routingproblem mit K spezifizierten Knoten. Oper. Res. **1966,** 14, **909–913. [CrossRef]**

21. Kumar, S.; Munapo, E.; Nyamugure, P.; Tawanda, T. Pfad durch K spezifizierte Links: Eine Heuristik unter Verwendung der minimalen Spanning Baumansatz. Graph. Era Univ. J. **2023,** 11, **221–238.**

22. Kumar, S.; Munapo, E.; Jones, BC Ein durch eine Ganzzahlgleichung gesteuerter absteigender Pfad zu einem rein ganzzahligen Programm. Indian J. Math. **2007,** 49, **211–237.**

23. Munapo, E.; Jones, BC; Kumar, S. Eine Methode zur Kennzeichnung mit minimalem Gewicht und ihre Anwendung auf CPM-Netzwerke. ORiON S. Afr. J. Oper. Res. **2008,** 24, **37–48. [CrossRef]**

24. Kumar, S.; Munapo, E.; Ncube, O.; Sigauke, C. Eine Methode zur Kennzeichnung mit minimalem Gewicht zur Bestimmung des kürzesten Pfades in einem nicht gerichtetes Netzwerk. Int. J. Syst. Assur. Eng. Manag. **2013, 4, 13–18.**

25. Karimi-Managham, M.; Mohammadi, M.; Meyer, AM; Karimi-Managham, E.; Talbi, G. Maschinelles Lernen im Dienste von Metaheuristiken zur Lösung kombinatorischer Optimierungsprobleme: Ein aktueller Stand. Eur. J. Oper. Res. **2022,** 296, **393–422.** **[Querverweis]**

26. Labidi, H.; Azzouna, N.; Hassine, K.; Goudir, MS Ein verbesserter genetischer Algorithmus zur Lösung von multikriteriellen Fahrzeug-Routing Problem mit Umweltaspekten. Procedia Comput. Sci. **2023,** 225, **3866–3875. [CrossRef]**

27. Sabeenian, RS; Kumar, V.; Ravi, G.; Pudasaini, A. Eine Anwendung zur Lastverteilung in LKWs. Int. J. Recent Technol. Eng. (IJRTE) **2019, 8, 3203–3207. [CrossRef]**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Die Mechanik, die nichtdeterministischen Berechnungen in kortikalen neuronalen Netzwerken zugrunde liegt

Elizabeth A. Stoll

Western Institute for Advanced Study, Denver, CO 80202, USA; stoll@westerninstitute.org

Zusammenfassung: Kortikale Neuronen integrieren Upstream-Signale und zufälliges elektrisches Rauschen, um Signalergebnisse zu steuern , was zu statistisch zufälligen Aktivitätsmustern führt. Doch klassisch wird das Neuron als binäre Recheneinheit modelliert, die Shannon-Entropie kodiert. Hier wird das neuronale Membranpotential als Funktion des inhärent probabilistischen Ionenverhaltens modelliert. In diesem neuen Modell berechnet jedes Neuron die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von einem Aus-Zustand zu einem Ein-Zustand und kodiert so die Von-Neumann-Entropie. Komponentenreine Zustände werden in eine physikalische Informationsmenge integriert, und die Ableitung dieser hochdimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt Eigenwerte über das mehrskalige Quantensystem. In Übereinstimmung mit dem Hellman-Feynman-Theorem ist die Auflösung des Systemzustands mit einer spontanen Verschiebung der Ladungsverteilung verbunden, sodass dieser definierte Systemzustand sofort zur Vergangenheit wird, wenn eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung entsteht. Dieses mechanistische Modell liefert überprüfbare Vorhersagen bezüglich der Wellenlänge der freien Energie, die bei der Informationskompression freigesetzt wird , und der zeitlichen Beziehung dieser Ereignisse zu physiologischen Ergebnissen. Insgesamt zeigt dieses Modell, wie kortikale Neuronen **durch einen rechnerischen Pro**

Schlüsselwörter: Kortikales Neuron; neuronale Berechnung; thermodynamische Berechnung; probabilistische Kodierung; Zweizustands-Quantensysteme; Quanteninformation; Von-Neumann-Entropie

check for updates

Zitat: Stoll, EA Die Mechanik Grundlagen nichtdeterministischer Berechnungen in kortikalen neuronalen Netzwerken. AppliedMath **2024, 4, 806–827. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030043**

Akademische Herausgeber: Thomas Woolley und Gaige Wang

Empfangen: 25. November 2023

Überarbeitet: 25. Mai 2024

Akzeptiert: 30. Mai 2024

Veröffentlicht: 26. Juni 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Kortikale Neuronen haben höchst unvorhersehbare Signalergebnisse [1], im Gegensatz zu spinalen Neuronen, deren Signalergebnisse leicht durch die Analyse von Upstream- Eingängen vorhergesagt werden können **[2]. Kortikale Neuronen lassen zufälliges elektrisches Rauschen die Signalergebnisse steuern, wobei spontane unterschwellige Schwankungen des Membranpotentials erheblich zur Wahrscheinlichkeit eines Aktionspotentials** beitragen **[3,4]. Tatsächlich halten diese Zellen aktiv einen „kortikalen Up- State“ aufrecht, der nahe der Aktionspotentialschwelle schwebt und stochastischen Ereignissen erlaubt, Signalergebnisse** zu steuern **[5]. Dieser Prozess der rauschhaften Koinzidenzerkennung führt zu probabilistischen Feuerungsmustern, die mit Bayesscher Statistik [6], zufälligen Konnektivitätsmodellen [7], Fanofaktoranalyse der Inter-Spike-Variabilität [8] oder durch Modifizierung der Hodgkin- Huxley-Gleichungen zur Berücksichtigung von elektrischem Rauschen [9–11] modelliert werden können. Besonders hervorzuheben ist, dass die zuverlässigsten Modelle kortikaler Neuronen aus stochastischen Differentialgleichungen bestehen, die ein analoges Membranpotential basierend auf der Öffnungswahrscheinlichkeit von Ionenkanälen liefern und bei Aktivierung der Schwelle zu Spike-Verhalten** führen **[12]. Diese Methode modelliert „Rauschen“ an der Synapse als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess [13] oder durch**

Angesichts des Erfolgs dieser inhärent probabilistischen Computermodelle lohnt es sich, erneut zu prüfen, ob Zustandsübergänge in kortikalen Neuronen unter klassischen Annahmen modelliert werden sollten. Tatsächlich kann die zufällige Bewegung von nur wenigen Ionen ein kortikales Neuron über die Aktionspotentialschwelle treiben **[15,16], die Intervalle zwischen den Spikes auf der Ebene der einzelnen Einheit sind statistisch zufällig [3,4] und die Populationskodierung auf der Ebene des neuronalen Netzwerks ist statistisch zufällig [6–8]. Ereignisse auf Quantenebene beeinflussen makroskopische Ergebnisse auf der Ebene der Computereinheit** erheblich **[9–11] und probabilistische Modelle replizieren effektiv die Aktivität des kortikalen neuronalen Netzwerks [12–14]. Darüber hinaus können klassische Ansätze die**

Machine Translated by Google

außergewöhnliche Energieeffizienz des Gehirns, während ein Modell der Quantenberechnung [17] **kann . Um die Mechanik zu verstehen, die einem Rechenprozess zugrunde liegt, bei dem die Quantenunsicherheit** in situ **erhalten bleibt , wird es nützlich sein, einen mathematischen Rahmen für ein mehrskaliges Quantensystem zu entwickeln.**

Klassischerweise wird ein pulsierendes Neuron als binäre Einheit betrachtet, die sich immer in einem Ein- oder Aus-Zustand befindet. Hier wird das Neuron als Zweizustands-Quantensystem modelliert, bei dem es eine gewisse Wahrscheinlichkeit gibt, von einem Aus- in einen Ein-Zustand zu wechseln. Dieser neuronale Zustand hängt von der inhärent probabilistischen Position und dem Impuls jedes Ions in der Nähe ab. In diesem mehrskaligen Quantenmodell ist die Spannung eines kortikalen Neurons eine Funktion aller reinen Komponentenzustände , und **während eines Prozesses der Generierung und Komprimierung von Quanteninformationen wird aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ein optimaler Systemzustand im vorliegenden Kontext ausgewählt .** Dieser Rechenprozess liefert Eigenwerte für alle Zustandsvektoren und stellt die Unsicherheit im gesamten System sofort wieder her, wodurch der nächste Rechenzyklus ausgelöst wird. Dieses theoretische Modell bietet einen Mechanismus, mit dem kortikale Neuronen **durch einen Prozess der Quantenberechnung bei Umgebungstemperatur nichtdeterministische Signalergebnisse erzielen könnten,** und **liefert spezifische Vorhersagen, die im Labor getestet werden können.**

2. Methoden

2.1. Modellierung des kortikalen Neurons als Quantensystem mit zwei Zuständen

Während des Up-State verweilen kortikale Neuronen an ihrer Aktionspotentialschwelle, sodass sowohl Upstream-Signale als auch zufälliges elektrisches Rauschen ein Signalergebnis auslösen können. Während ein Neuron klassisch als binäres Logikgatter in einem „Ein“- oder „Aus“-Zustand interpretiert wird, der als 1 oder 0 kodiert ist, könnte man es auch so beschreiben, dass es eine gewisse Wahrscheinlichkeit hat, in einen „Ein“-Zustand zu wechseln oder in einem „Aus“-Zustand zu bleiben.

Bei diesem neuen Ansatz integriert ein kortikales Neuron Upstream-Signale mit zufälligem elektrischem Rauschen und definiert seinen Spannungszustand als Funktion der Zeit, während das System gestör Das Neuron beginnt im Aus-Zustand ÿ, ohne ein Aktionspotential auszulösen, und erreicht mit der Zeit t einen anderen Zustand ÿ. Und so entwickelt sich **der Zustand des Neurons über einen gewissen Zeitraum von t0 bis** t **von** *ÿ* **zu ÿ. Der Zeitverlauf von einem Zustand zum anderen ist gegeben durch:**

$$ÿÿ|U(t, \mathbf{t0})|ÿÿ \ . \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Zustandsänderung kann auf folgende Weise dargestellt werden:

$$\mathbf{ÿÿÿ|kÿÿk|U(t, t0)|jÿÿj|ÿÿ,} \tag{2}$$

so dass U **vollständig durch die Basiszustände** k **und** j beschrieben wird, die **jeweils den anfänglichen Aus-Zustand des Neurons und den Zustand des Neurons nach dem Zeitschritt darstellen :**

$$ÿk|U(t, \mathbf{t0})|jÿ \ , \tag{3}$$

Das Zeitintervall kann als t = **t0** + ÿt verstanden werden, **so dass die Identifizierung des Zustands von** Man kann **das Neuron** *ÿ* **zum Zeitpunkt** t **so verstehen, als ob es einen Weg von einem Zustand in einen anderen nimmt:**

$$ÿÿ|ÿ(t0 + ÿt)ÿ = ÿÿ|U(t0 + ÿt, t0)|ÿ(t0)ÿ \ . \tag{4}$$

Wenn ÿt = **0 ist, kann es zu keiner Zustandsänderung kommen. In diesem Fall gilt:**

$$|ÿ(t0 + ÿt)ÿ = |ÿ(t0)ÿ \ . \tag{5}$$

In jedem anderen Fall ist der Zustand des Neurons zum Zeitpunkt t **gegeben durch die orthonormale Basis Zustände** k **und j, mit Wahrscheinlichkeitsamplituden:**

$$Ck \ (t0 + ÿt) = ÿk|ÿ(t0)ÿ \tag{6}$$

Machine Translated by Google

Und:

$$Cj(t0 + ÿt) = ÿj|ÿ(t0)ÿ. \quad (7)$$

Der neuronale Zustand |*ÿÿ* **zum Zeitpunkt** t **kann daher als normierter Zustandsvektor ÿ beschrieben werden, in einer Überlagerung zweier orthonormaler Basiszustände** k **und j mit Wahrscheinlichkeitsamplituden** Ck **und** Cj . **Die Summe der quadrierten Moduli aller Wahrscheinlichkeitsamplituden ist gleich 1:**

$$|Ck|^2 + |Cj|^2 = 1. \quad (8)$$

Da das Neuron die zeitliche Entwicklung im Zustand |ÿ(t0)ÿ = **j beginnt, ist sein wahrscheinlicher Zustand zum Zeitpunkt** t **gegeben durch:**

$$ÿk|ÿ(t0 + ÿt)ÿ = ÿk|U(t0 + ÿt, t0)|ÿ(t0)ÿ . \quad (9)$$

Diese Gleichung kann auch in erweiterter Form als Summe aller Übergangswahrscheinlichkeiten geschrieben werden:

$$ÿk|ÿ(t)ÿ = ÿj\ ÿk|U(t0 + ÿt, t0)|ÿÿj|ÿ(t0)ÿ . \quad (10)$$

Für den Zustandsvektor ÿ(t) wird **die Wahrscheinlichkeit eines Zustandswechsels zum Zeitpunkt** t **beschrieben durch U-Matrix,** Ukj(t):

$$Ukj(t) = ÿk|U(t0 + ÿt, \mathbf{t0)|ÿ .} \quad (11)$$

Daher sind alle Wahrscheinlichkeitsamplituden von der **verstrichenen Zeit** ÿt abhängig:

$$Ck\ (t0 + ÿt) = ÿj\ Ukj(t)Cj(t0) . \quad (12)$$

Das Neuron unterliegt im Laufe der Zeit ÿt Störungen. **Wenn** ÿt = **0, kann es zu keiner Zustandsänderung kommen und** k = **j. Wenn** ÿt > **0, besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit einer Zustandsänderung, wobei** k ÿ= **j. Somit wird das Zweizustands-Quantensystem durch das Kronecker-Delta** ÿkj beschrieben:

$$ÿkj = \mathbf{ÿk|jÿ} = \begin{cases} \mathbf{1, wenn}\ k = j \\ \mathbf{0, wenn}\ k\ ÿ= j \end{cases} \quad (13)$$

Jeder der Koeffizienten der U-Matrix Ukj **unterscheidet sich von** ÿkj **um einen Betrag, der proportional zu** ÿt ist, **sodass:**

$$Ukj(t) = ÿkj + Wkjÿt . \textbf{ wobei } Wkj \quad (14)$$

= **ÿ(i/ˉh)Hˆ**kj(t), **wobei der Hamilton-Operatorterm Hˆ** kj(t) die **zeitliche Ableitung jedes der Koeffizienten von** Ukj **darstellt :**

$$Ukj(t) = ÿkj\ \mathbf{ÿ}\ \overset{ich}{\overline{\mathbf{H}}}\ \mathbf{H}ˆ\ kj(t)ÿt . \quad (15)$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude Ck (t) **zum Zeitpunkt** t **ist daher gegeben durch:**

$$Ck\ (t0 + ÿt) = \mathbf{ÿ}\ [ÿkj\ \mathbf{ÿ}\ \underset{J}{\overset{ich}{\overline{\mathbf{H}}}}\ \mathbf{H}ˆ\ kj(t)ÿt]Cj(t0) . \quad (16)$$

Da die Summe von ÿkjCj(t0) = **ÿ(t0) ist, vereinfacht sich die letztere Gleichung zu:**

$$Ck\ (t0 + ÿt)\ \mathbf{ÿ}\ Ck\ \mathbf{(t0)} = \mathbf{ÿ}\ \underset{J}{\overset{ich}{\overline{\mathbf{H}}}}\ \mathbf{ÿ}\ [Hˆ\ kj(t)ÿt]ÿ(t0) . \quad (17)$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung durch ÿt teilt, **wird deutlich, dass jede Zustandsänderung die Summe aller möglichen Störungen ist, die das untersuchte System von seinem Startzustand zum Zeitpunkt t0 an beeinflussen, einschließlich zufälliger Ereignisse. Auch hier** ist

Machine Translated by Google

Amplitude ÿiĮÿ(t0)ÿ **des Zustandsvektors** *ÿ* **in einem der Basiszustände** k = j **oder** k ÿ= j **zum Zeitpunkt t. Die zeitliche Ableitung dieser Wahrscheinlichkeitsfunktion ergibt also den eingeschlagenen Weg:**

$$\frac{\text{Ck (t0 + ÿt) ÿ Ck (t0)}}{\text{ÿt}} \quad \frac{}{\text{H ÿ}_{\text{J}}\,\text{Hˆ}\; kj(t)ÿ(t0)\;.} \tag{18}$$

Das System wird daher durch die zeitabhängige Schrödingergleichung beschrieben, mit jede Zustandsänderung im Zusammenhang mit einer Änderung der Energieverteilung:

$$\text{dt}\,\frac{dÿ}{} = \text{Hˆ}\; ÿ\;.\; \text{ih}^{-} \tag{19}$$

Dabei ist i **die imaginäre Einheit, h¯= h/2ÿ die reduzierte Planck-Konstante, Hˆ der Hamilton-Operator, der der Gesamtenergie des Systems entspricht, und** *ÿ* **der Eigenvektor, der das Quantensystem nach der Zeit t beschreibt .** Diese Gleichung beschreibt den Eigenzustand eines Systems als Funktion der **vergangenen Zeit** t und der **für die Umverteilung im System zur Verfügung stehenden Energiemenge, gegeben durch den Hamilton-Operator Hˆ . Mit dieser Gleichung kann ein Systemzustand als Verteilung von Wahrscheinlichkeiten definiert werden, die die möglichen Pfade darstellen, die seit der letzten Definition des Systemzustands eingeschlagen wurden. Durch Kombination der Gleichungen (18) und (19) stellen wir fest, dass die Wahrscheinlichkeit einer Zustandsänderung gleich der Summe aller Zeitableitungen des normierten Zustandsvektors ist:**

$$\frac{\text{Ck (t0 + ÿt) ÿ Ck (t0) ÿt}}{} = \text{ÿ dt}\,\frac{dÿ}{}\;. \tag{20}$$

2.2. Modellierung des Membranpotentials kortikaler Neuronen als Funktion reiner Komponentenzustände

Das dynamische Membranpotential eines kortikalen Neurons wurde zuvor mit der Fokker-Planck-Gleichung modelliert **[14], wobei die Eigenfunktionen** ÿi **und die Koeffizienten** ÿi **einen vollständigen Satz bilden , auf dessen Grundlage die Membranpotentialverteilung** P(V, t) **entwickelt werden kann:**

$$\text{P(V, t) = ÿ}\quad \text{ÿiÿi(V)e}\; ÿÿi\; t/ÿm \;. \tag{21}$$

Entscheidend ist, dass alle Eigenwerte reell und streng negativ sind und die Eigenfunktionen *L(ÿi)* = ÿÿiÿi **und** ÿi > **0 gehorchen. Eine Schlüsselkomponente dieses Modells ist** ÿm, **die Membranzeitkonstante des Neurons, die gegeben ist durch:**

$$ÿm = \frac{gL}{cm} + veae + viai\;, \tag{22}$$

wobei ve **und** vi **die erregenden bzw. hemmenden synaptischen Eingänge sind;** ae **und** ai **die erregenden bzw. hemmenden synaptischen Stärken sind;** cm **die Membrankapazität ist ; und** gL **die Membranleitfähigkeit im Zusammenhang mit einem Leckstrom ist, gegeben durch:**

$$gL = \frac{IL}{V\ ÿ\ VL}\;. \tag{23}$$

Der Gesamtstrom ergibt sich dann klassisch aus der Summe:

$$In = gL(t)(V\ ÿ\ VL) + ge(t)(V\ ÿ\ Ee) + gi(t)(V\ ÿ\ Ei)\;, \tag{24}$$

wobei Ee **und** Ei **die Umkehrpotentiale der erregenden bzw. hemmenden Synapsen sind . In** spinalen Neuronen **dominieren erregende und hemmende synaptische Eingänge alle Änderungen des Membranpotentials, und der Leckstrom trägt nicht wesentlich zu den Signalergebnissen bei . In** kortikalen Neuronen hingegen **sind erregende und hemmende Eingänge ausgeglichen.**

Machine Translated by Google

so dass Leckströme dominieren. Um den Beitrag einzelner Ionen zum Leckstrom zu modellieren, können wir die Stromdichte probabilistisch modellieren:

$$IL = \frac{}{q\ 2\ m}(ÿ\ ÿ\ ÿ)\ ,\ sÿ\ ÿ\ ÿsÿ \tag{25}$$

wobei m **die Masse jeder Punktladung q ist. In diesem Modell entwickelt sich** der neuronale Zustand |ÿnÿ **im Laufe der Zeit, wobei das Signalergebnis zum Zeitpunkt** t **eine Funktion aller Ionenzustände ist. Bemerkenswerterweise entwickelt sich auch der Zustand jedes Ions im System** |ÿiÿ **im Laufe der Zeit. Die zeitabhängige Schrödinger- Gleichung für die Position jedes Ions lautet:**

$$ich\ h\frac{D}{dt}|ÿ(r,\ t)ÿ = \mathbf{H\hat{}}\ |ÿ(r,\ t)ÿ\ . \tag{26}$$

Und die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für den Impuls jedes Ions lautet:

$$ich\ h\frac{D}{dt}|ÿ(s,\ t)ÿ = \mathbf{H\hat{}}\ |ÿ(s,\ t)ÿ\ . \tag{27}$$

Die Position jedes Ions wird durch eine Verteilung der Wahrscheinlichkeitsamplituden entlang der x-, y- und z -Achse angegeben. Der Impuls jedes Ions s ergibt sich **also aus der Ableitung der Wellenfunktion nach seiner Position r:**

$$ih^{-}\frac{dÿ}{dr}\ +ÿz\ ÿx\ ÿy\ ÿz\frac{ÿ\ ÿ\ ÿ = ih^{-}ÿx + ÿy}{}\ \ = ih^{-}ÿ\ . \tag{28}$$

Da Masse, Energie und elektrische Ladung erhalten bleiben, können wir die Kontinuitätsgleichung verwenden:

$$\frac{ÿÿ}{} = ÿÿr \cdot IL\ ,\ ÿt \tag{29}$$

wobei $ÿ = |ÿ(r,\ t)|^{2}$**. Daher gilt:**

$$\frac{ÿ|ÿ(r,\ t)|\ ÿt^{2}}{} = ÿÿr \cdot [\ \frac{}{q\ 2\ m}(ÿ^{ÿ}\ sÿ\ ÿ\ ÿsÿ\ \ ^{ÿ})]\ . \tag{30}$$

Da ÿr = ÿs/ih¯:

$$\frac{ÿ|ÿ(r,\ t)|\ ÿt^{2}}{} = ÿ\ \ \frac{ÿ\ qs2}{2mih^{-}}ÿ\ ÿ\ ÿ\ ÿ\ \frac{qs2}{2mih}\ ^{ÿ}\ . \tag{31}$$

Die zeitabhängige Schrödingergleichung zur Beschreibung des Hamiltonoperators des Systems, in Bezug auf den Impuls ist:

$$ih^{-}\frac{ÿÿ}{ÿt} = (\ \frac{}{2m}^{Sek.^{2}})ÿ\ . \tag{32}$$

Und seine komplexe Konjugation lautet:

$$ÿih^{-}\frac{ÿÿÿ}{ÿt} = (\ \frac{s^{2}}{2\ m})ÿ^{ÿ}\ . \tag{33}$$

Daher:

$$\frac{ÿÿ}{ÿt} = \frac{ÿ|ÿ(r,\ t)|\ ÿt^{2}}{ÿt\ ÿt}\ \ ÿ\ \frac{qÿÿ}{}\ qÿÿÿ = \frac{ÿ + ÿ}{}\ . \tag{34}$$

Die Summe aller synaptischen Leckströme für ein bestimmtes Neuron zum Zeitpunkt t **beträgt also:**

$$IL = \frac{qÿÿ/ÿt}{ÿÿ/ÿr}\ . \tag{35}$$

Machine Translated by Google

Wenn erregende und hemmende Eingänge während eines kortikalen Aufwärtszustands im Gleichgewicht sind, wird die Stromdichte eines Neurons effektiv durch die Summe aller Leckströme beschrieben:

$$\text{In} = \frac{\text{qÿÿ/ÿt}}{\text{ÿÿ/ÿr}} . \quad \textbf{(36)}$$

Daher **ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Neuron die Aktionspotentialschwelle** (Vth) überschreitet , **durch die Beziehung zwischen Strom und Spannung gegeben, wobei alle negativen Eigenwerte für** ÿ(r, t) **das Neuron dazu veranlassen, zu seinem Ruhepotential zurückzukehren:**

$$\text{V ÿ Vth} = \frac{1}{\text{gL}} \frac{\text{qÿÿ/ÿt}}{\text{ÿÿ/ÿr}} , \quad \textbf{(37)}$$

2.3. Modellierung der vom Mehrzustandssystem kodierten Informationen in Bezug auf die Von-Neumann-Entropie **Während kortikaler**

Aufwärtszustände halten Neuronen aktiv ein Ruhepotential nahe der Spannungsschwelle für das Auslösen eines Aktionspotentials aufrecht **[5], wodurch ein stochastischer Ionenaustritt eine Zustandsänderung in der Recheneinheit auslösen kann [3,4]. Zum Zeitpunkt t hat das Neuron entweder die Spannungsschwelle erreicht oder nicht; es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit für beide Ergebnisse. Das Neuron ist ein Zweizustands-Quantensystem, das von der inhärent probabilistischen Position und dem Impuls jedes Ions in der Nähe abhängt. Um das System entweder auf Neuronen- oder Ionenebene zu modellieren,** wird ÿx **als die Wahrscheinlichkeit definiert, dass ein Objekt von einem in einen anderen reinen Zustand übergeht:**

$$\text{ÿx} := \textbf{|ÿxÿÿÿx|.} \quad \textbf{(38)}$$

Die Dichtematrix *ÿ* **besteht aus einem Ensemble zueinander orthogonaler reiner Zustände** ÿx, **von denen jeder eine gewisse Auftrittswahrscheinlichkeit** px hat:

$$\textit{ÿ} = \textbf{ÿ}\ \textit{pxÿx} = \textbf{ÿ px|ÿxÿÿÿx|,} \quad \textbf{(39)}$$

Da das kortikale Neuron auf Ereignisse auf Quantenebene empfindlich reagiert, bleibt es in einem Zustand der Unsicherheit – es kodiert physikalisch „Informationen“ (die von Neumann-Entropie des Systems oder die gemischte Summe aller reinen Komponentenzustände). Die Menge der vom Neuron kodierten Informationen wird berechnet, indem das Volumen der Wahrscheinlichkeitsamplituden über eine hochdimensionale Dichtematrix verfolgt wird:

Die Gleichung lautet: S(ÿ) = ÿTr(ÿ **ln** ÿ). **(40)**

Hier ist der Makrozustand des Systems die gemischte Summe aller reinen Mikrozustände der Komponenten oder die gemischte Summe aller äußeren Produkte multipliziert mit ihren Übergangswahrscheinlichkeiten. Das innere Produkt ay *ÿ* **liefert die Wahrscheinlichkeit, die der Zustandsvektor** |ÿxÿ **dem Eigenvektor** ay zuweist . **Somit ist die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Eigenwer**

$$\text{p (ay)} = \text{ay } \textit{ÿ}\ \text{ay} . \quad \textbf{(41)}$$

Das Objekt befindet sich zum Zeitpunkt t0 in einem bestimmten Zustand **und es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass es sich zum Zeitpunkt t in einem anderen Zustand befindet , nachdem es vorübergehend als Verteilung möglicher Zustände definiert w Die Wahrscheinlichkeit, ein System in einem beliebigen Eigenzustand vorzufinden, kann mit der Born-Regel berechnet werden, die das innere Produkt des Zustandsvektors und seines Erwartungswerts mit der Wahrscheinlichkeit des Übergangs in einen bestimmten tatsächlichen Zustand** gleichsetzt **[18]. Diese Regel besagt, dass jede Messung der Observablen eine Wahrscheinlichkeit** *p(ÿa)* hat, **zum Zeitpunkt** t genau einem Wert **a für den Zustandsvektor** ÿ **zu entsprechen :**

$$\text{p (ÿa(t))} = \text{|ÿa|ÿ(t)ÿ|}^{2} . \quad \textbf{(42)}$$

Das Quadrat des Absolutwertes dieser Wellenfunktion ist eine reelle Zahl, aber die Wellenfunktion selbst ist eine komplexwertige Wahrscheinlichkeitsamplitude, die entlang einer Achse

Machine Translated by Google

orthogonal zu allen reellen Eigenwerten. Jeder Eigenwert a, der **entlang dieser Achse definiert ist, hängt** von **der verstrichenen Zeit ab. Wenn ausreichende Einschränkungen vorhanden sind, kann jeder reine Komponentenzustand** durch Auflösen des Hamiltonoperators zum Zeitpunkt **t definiert werden .** Wenn keine ausreichenden Einschränkungen vorhanden **sind , werden einige reine Komponentenzustände nicht aufgelöst und während dieses Rechenzyklus wird vom System eine gewisse Nettomenge an Entropie erze**

2.4. Erzeugung einer Verteilung möglicher Systemzustände aus der Quantenunsicherheit

Um die diesem Prozess zugrunde liegende Mechanik zu verstehen, **kann eine Berechnung möglicher Systemzustände** über das neuronale Netzwerk konzeptualisiert werden, indem die Poisson-Verteilung der Stromdichte für jedes Ion im System in Bezug auf jeden Bereich der neuronalen Membran modelliert wird, **wodurch eine Verteilung möglicher Pfade erzeugt wird. Da diese Ereignisse jedoch nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit oder unabhängig vom vorherigen Systemzustand auftreten, ist es angemessener, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Positions- und Impulsvektoren als** r(x) **bzw.** s(x) zu modellieren, **die jeweils über drei räumliche Achsen definiert sind, mit einer Gewichtungsfunktion** w(x) > **0:**

$$\mathbf{(r,s)} = \int_{\ddot{y}\ddot{y}}^{\ddot{y}} {}'^{R}(x)s(x)w(x)dx\ . \qquad \mathbf{(43)}$$

In diesem Sturm-Liouville-System stellt die Gewichtsfunktion w(x) **mathematisch einen quantenharmonischen Oszillator dar.** w(x) **verkörpert die Quantenunsicherheit des Ionenzustands und erzeugt auf natürliche Weise einen Hilbert-Raum für jeden Positions- und Impulseigenvektor. Wenn diese Operation symmetrisch oder hermitesch ist, sodass:**

$$\begin{aligned}(r, Ls) &= \int_{\ddot{y}\ddot{y}}^{\ddot{y}} L(r^{\ddot{y}}(x))s(x)w(x)dx \\ &= \int_{\ddot{y}\ddot{y}}^{\ddot{y}} {}'^{R}(x)L(s(x))w(x)dx \\ &= \mathbf{(Lr, s)}\ ,\end{aligned} \qquad \mathbf{(44)}$$

dann bilden alle Polynome vollständige Mengen im Hilbert-Raum mit reellen Eigenwerten und orthonormalen Eigenfunktionen und liefern Lösungen für die lineare Differenzierungsgleichung zweiter Ordnung, die gegeben ist durch:

$$Lu = \ddot{y}u\ , \qquad \mathbf{(45)}$$

Dabei ist *ÿ* **eine Konstante und** L **ein hermitescher Operator, der durch die reellen Funktionen von x, ÿ, ÿ und ÿ definiert ist:**

$$\ddot{y}(x) + \ddot{y}(x)\ .\ \frac{d^{\mathbf{2}}}{dx^2} + \frac{d}{dx}\ L = \ddot{y}(x) + \qquad \mathbf{(46)}$$

Die Verteilung der Ergebnisse für r(x) **und** s(x) **wird durch ÿ gegeben, die gemischte Summe der zueinander orthogonalen Zustände** ÿx, **die jeweils mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit** px auftreten:

$$\mathbf{\ddot{y}(r,s)} = \ddot{y}(pr(x)\ \ddot{y}r(x)\ )(ps(x)\ \ddot{y}s(x)\ )\ . \qquad \mathbf{(47)}$$

Die Entwicklung des Systemzustandes *ÿ* **über die Zeit** t **wird durch die Liouville–von Neumann-Gleichung:**

$$ih^{-}\frac{d}{dt}\ddot{y} = ih^{-}\dot{\mathbf{y}}\ px(|\ddot{y}x\dot{y}\ddot{y}\ddot{y}x| + \mathbf{|\ddot{y}x\dot{y}\ddot{y}\ddot{y}x|)}\ , \qquad \mathbf{(48)}$$

mit Eigenzuständen, die durch den Hamiltonoperator bereitgestellt werden:

$$ich\frac{D}{dt}|\ddot{y}x\dot{y}\rangle = \mathbf{H\hat{}}\ |\ddot{y}x\dot{y}\rangle\ . \qquad \mathbf{(49)}$$

und seine hermitesche Konjugation:

$$\ddot{y}ih^{-}\frac{D}{dt}\langle\ddot{y}\dot{y}x| = \mathbf{\ddot{y}\dot{y}x|H\hat{}}\ . \qquad \mathbf{(50)}$$

Machine Translated by Google

Das Einsetzen des Operators und des Konjugats in die Liouville-von-Neumann- Gleichung ergibt:

$$ih^{-}\frac{D}{dt}\ddot{y} = ih^{-}\ddot{y}(H^{\wedge}\ddot{y}x\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}xH^{\wedge}) = [H^{\wedge}, \ddot{y}x]\ . \tag{51}$$

Da die Zeit selbst von Natur aus ungewiss ist, wird die zeitliche Entwicklung des Systemzustands durch einen Zeitverschiebungsoperator U bereitgestellt:

$$U = e^{\ddot{y}iH\hat{t}}\ . \tag{52}$$

Eine unitäre Transformation, die von diesem Zeitverschiebungsoperator gesteuert wird, ermöglicht die Dichtematrix von ÿx(t0) **nach** ÿx(t) **zu entwickeln :**

$$\ddot{y}x(t0)\ \ddot{y}\ddot{y}\ \ddot{y}x(t) = U\ddot{y}x(t0)U^{\dagger}\ . \tag{53}$$

Durch diese unitäre Transformation werden Eigenwerte für jeden reinen Komponentenzustand gewonnen , wodurch Position und Impuls jedes Ions und der Spannungszustand jedes Neurons ermittelt werden. Diese Eigenwerte werden nur ermittelt, wenn der Hamiltonoperator ermittelt wird, wenn die Dimensionalität der Dichtematrix verringert wird, wenn die Wellenfunktion zusammenbricht, wenn lineare Korrelationen extrahiert werden oder wenn ein einzelner Systemzustand aus einer Verteilung möglicher Systemzustände ausgewählt wird. Dies sind alles gleichwertige Prozesse, die die Komprimierung von „Informationen“ oder von Neumann-Entropie darstellen. Und wichtig ist, dass dieses Multiskalensystem einen einzigen Zeitpunkt t hat, an dem sowohl Ionenzustände als auch Neuronenzustände ermittelt werden (obwohl am Ende jedes Rechen

2.5. Reduzierung der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einen einzigen beobachtbaren Systemzustand

Da die Position und der Impuls eines Ions zum Zeitpunkt t **davon abhängen, ob es während der Zeitentwicklung mit anderen Ionen oder elektrischen Feldern interagiert hat, muss die gegenseitige Abhängigkeit der Eigenvektoren berücksichtigt werden. Durch die Berechnung der Positionen und Impulse aller Ionen innerhalb eines temperaturdefinierten Systems im Verhältnis zueinander stellt dieser Ansatz sicher, dass sich herausstellt, dass die Ionen nicht die gleiche Position, den gleichen Spin und den gleichen Energiezustand einnehmen, was sie identisch machen würde. Dieses Ergebnis würde dazu führen, dass das Universum Masse verliert, und ist daher durch das Pauli-Prinzip verboten [19]. Dieses Erhaltungsprinzip kann auf jedes thermodynamische System angewendet werden, sodass die Gesamtmenge an Energie, die dem System zur Verfügung steht, nicht größer ist als die im System gespeicherte Energiemenge plus die Nettomenge an Energie, die im Laufe der Zeit t in das System gelangt ist . Im zentralen Nervensystem, das thermische Energie einfängt, um Rechenarbeit anzutreiben, wird die Verteilung der Systemzustände durch den Hamilton-Operator dargestellt:**

$$ich\ h\frac{D}{dt}|\ddot{y}(t)\ddot{y} = \mathbf{H}^{\wedge}|\ddot{y}(t)\ddot{y}\ . \tag{54}$$

In einem weit vom Gleichgewicht entfernten System, das thermodynamisch an seine Umgebung gekoppelt ist , kann man nicht davon ausgehen, dass die Brownsche Bewegung von Ionen im klassischen Grenzfall auftritt. Daher muss man die quantenmechanische Formulierung der Fokker-Planck- Gleichungen anwenden, die als Caldeira-Leggett-Modell bekannt ist [20–22]. Dabei berücksichtigt der Hamilton-Operator die Position r **und den Impuls** s **jedes Ions mit Masse** m **und Ladung q, das sich in einem Potential** V(r) bewegt, **wobei** *ÿ* **ein quantenharm**

$$\mathbf{H}^{\wedge}\mathbf{(r,s)} = \frac{\overset{2}{\text{Sek.}}}{\mathbf{2}} + V(r) + 2m\ \frac{\mathbf{1}}{-}\ddot{\mathbf{y}}\ \frac{(st\ \ddot{\mathbf{y}}\ crt)^{\mathbf{2}}}{M} + m\ddot{y}\ r\ t^{\mathbf{2\,2}}\ . \tag{55}$$

Da der Zustand jedes Ions (teilweise) vom Zustand aller anderen Ionen abhängt, muss das gesamte mehrskalige System zusammen betrachtet werden, wobei die Ionenpositionen von den Membranspannungen abhängen und umgekehrt. Diese kombinierte Wellenfunktion verknüpft jeden Zustandsvektor *ÿ* **mit dem Zeitablauf** t **und dem Hamilton-Operator H^ . Das Spektrum des Hamilton- Operators ist die Menge der möglichen Ergebnisse zum Zeitpunkt t. Der Hamil**

Machine Translated by Google

die Lagrange-Funktion der Position r, ihrer Zeitableitung rÿ und der Zeit t. Sie wird mithilfe der Legendre-Transformation berechnet, um die zur Änderung erforderliche Aktion zu minimieren:

$$\mathbf{H}\hat{}\,(ri, si, t) = \sum_{ich=1}^{N} \ddot{\mathbf{y}}\, si\, \mathbf{r\ddot{y}}\, i\, \ddot{\mathbf{y}}\, L(ri, r\ddot{y}\, i, t)\,. \tag{56}$$

Die durch **rÿ und sÿ dargestellten Vektorräume werden durch die Summe aller Störungen und Quantenschwingungen erzeugt, die mathematisch durch die Gewichtsfunktion innerhalb der Sturm-Liouville-Gleichung dargestellt werden. Infolgedessen ist die Ableitung des Hamilton-Operators mit allen Änderungen von Position, Impuls und Zeit verbunden und kann daher durch die partiellen Ableitungen dieser Eigenvektoren berechnet werden:**

$$dt\,.\,\ddot{y}ri\,\ddot{y}si\,\frac{\ddot{y}H\hat{}\,\ddot{y}H\hat{}\,\ddot{y}H\hat{}\,dH\hat{}}{} = dri + dsi + \frac{}{\ddot{y}t} \tag{57}$$

Die Phasenraumverteilung ÿ(r,s) beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Systemzustand aus dem gesamten Phasenraumvolumen d n r dn **s ausgewählt wird. Zur Beschreibung dieses Phasenraumvolumens liefert die Liouville-Gleichung die Entwicklung von ÿ(r,s) über die Zeit t:**

$$\frac{\ddot{y}\ddot{y}}{\ddot{y}t} + \sum_{ich=1}^{N} \ddot{\mathbf{y}}\, \frac{\ddot{y}\ddot{y}\;\ddot{y}\ddot{y}\;\mathbf{r\ddot{y}}\, i + \mathbf{s\ddot{y}}\, i}{\ddot{y}ri\;\ddot{y}si} = \frac{d\ddot{y}}{dt} = \mathbf{0}\,. \tag{58}$$

Aufgrund dieser geometrischen Einschränkung bleiben die Zustandsvektoren *(ÿ,* **ÿrÿ, ÿsÿ) im gesamten System erhalten und das Vektorfeld (rÿ,sÿ) weist eine Nulldivergenz auf. Dadurch können auch Temperatur und Energie im gesamten System erhalten bleiben. Die Kontinuitätsgleichung lautet:**

$$\frac{\ddot{y}\ddot{y}}{\ddot{y}t} + \sum_{ich=1}^{N} \ddot{\mathbf{y}}\, \frac{\ddot{y}(\ddot{y}r\ddot{y}\, i)}{\ddot{y}ri} + \frac{\ddot{y}(\ddot{y}s\ddot{y}}{i)\,\ddot{y}si} = \mathbf{0}\,. \tag{59}$$

Da *ÿÿ /* ÿt **gleich Null ist, kann die Kontinuität in der Wahrscheinlichkeitsdichte wie folgt bezeichnet werden:**

$$\ddot{y} \sum_{ich=1}^{N} \ddot{\mathbf{y}}\, \frac{\ddot{y}r\ddot{y}_{ich}}{\ddot{y}ri} + \frac{\ddot{y}s\ddot{y}_{ich}}{\ddot{y}si} = \mathbf{0}\,. \tag{60}$$

Und weil die Vektorräume rÿ und sÿ wie folgt definiert sind:

$$_{r\ddot{y}\,ich} = \frac{\ddot{y}H\hat{}}{\ddot{y}si}\,, \tag{61}$$

Und:

$$_{s\ddot{y}\,ich} = \frac{\ddot{y}H\hat{}}{\ddot{y}ri}\,, \tag{62}$$

die Kontinuitätsgesetze bleiben bestehen, während die zweite Ableitung des Hamiltonoperators gebildet wird. Dieser Vorgang identifiziert die beobachtbare Grenze des Gesamtvolumens möglicher Systemzustände:

$$\ddot{y} \sum_{ich=1}^{N} \ddot{\mathbf{y}}\, \frac{\ddot{y}\,2H\hat{}}{\ddot{y}ri\;\ddot{y}si} \cdot \frac{\ddot{y}\,2H\hat{}}{\ddot{y}si\;\ddot{y}ri} = \mathbf{0}\,. \tag{63}$$

In dieser Gleichung wird **die Beziehung zwischen der Dichtematrix** *ÿ* **und dem Hamilton-Operator, der die Energieverteilung im System beschreibt, deutlich, ebenso wie die Beziehung zwischen Positions- und Impulsvektoren und dem Hamilton-Operator.**

Sobald eine Spur über die Dichtematrizen gezogen wurde, die r(x) **und** s(x) darstellen, kann **die Gewichtsfunktion** w(x), **die der Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde liegt, in Bezug auf die anderen Parameter gelöst werden. Und so werden während einer systemweiten Berechnung Eigenwerte ausgewählt und Eigenzustände** ÿr(x) **und** ÿs(x) **vorübergehend aufgelöst. Es ist zu beachten, dass in dieser Formulierung zeitlich fortschreitender Ereignisse die Op**

Machine Translated by Google

und nicht die Vektorzustände. Das heißt, der Hamilton-Operator kann sich im Laufe der Zeit entwickeln (wobei Änderungen in Position und Impuls möglich sind), während die Vektorzustände selbst zeitunabhängig bleiben. Alle Ereignisse, die innerhalb einer Zeitentwicklung auftreten, können daher zum Ergebnis einer Berechnung beitragen. Dies schließt alle Quantenschwingungen und alle klassischen Eingangsströme ein, die während dieser Zeitentwicklung auftreten.

2.6. Wiederherstellen der Unsicherheit nach vorübergehender Definition des Systemzustands

Indem der Hamilton-Operator alle wahrscheinlichkeitsmäßigen Änderungen der Position und des Impulses jedes Ions mit der Energieverteilung im System in Beziehung setzt, stellt er effektiv alle beobachtbaren Ergebnisse dar. Die unitäre Basisänderung, die diesen Rechenprozess steuert, wird durch den Phasenfaktor exp(iHt /¯h)definiert. Daher führt jede Umkehr der Zeitrichtung dazu, dass positive Energien negativ werden – ein Ergebnis, das der erste Hauptsatz der Thermodynamik nicht zulässt, es sei denn, der Spin wird durch die Einführung eines elektrischen Dipolmoments ebenfalls umgekehrt [23]. Ein elektrisches Dipolmoment ist eine spontane Verschiebung des Energiezustands eines Elektrons in Gegenwart eines externen elektrischen Felds; dieses Ereignis wird hier erwartet, da die Wahrscheinlichkeitsverteilung reduziert und Eigenwerte b

Als das System zunächst durch seine äußere Umgebung gestört wurde, wurden alle reinen Zustandskomponenten (und der Hamilton-Operator) integriert, um ein Wahrscheinlichkeitsvolumen zu erze Nun können wir die Ableitung dieses Wahrscheinlichkeitsvolumens (und des Hamilton- Operators) nehmen, um Eigenwerte im Randbereich dieser hochdimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu definieren . Dadurch wird die Verteilung der Systemzustände auf einen einzigen verwirklichten Systemzustand reduziert, mit einem nicht-deterministischen Ergebnis:

$$\frac{dE}{d\ddot{y}} = \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}| \, |\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y} \, . \, d\ddot{y} \qquad \frac{dH\hat{}}{} \qquad (64)$$

Diese Gleichung ist der Hellman-Feynman-Satz und bildet den Kern der Quantenelektrodynamik [24,25]. Dabei ist jede Änderung der Position oder des Impulses eines Ions proportional zur Änderung des Hamilton-Operators, da der Hamilton-Operator allen potenziellen und kinetischen Energien im System entspricht. Es ist nützlich zu beachten, dass nicht die Gesamtenergiemenge im System unsicher ist, sondern vielmehr, wie diese Energie verteilt ist.

Das Maß möglicher Systemzustände oder energetischer Konfigurationen steht in direktem Zusammenhang mit der Gesamtentropie, die das System zu Beginn des Rechenzyklus kodiert hat [26]. Der Systemzustand nach Abschluss des Rechenzyklus steht in Zusammenhang mit jedem Parameter *ÿ ,* **der zum Hamiltonoperator beiträgt, wie etwa einer Verschiebung der Atomposition, des Impulses, der Umlaufbahn oder der elektrischen Feldstärke. Und so steht die Ableitung der Gesamtenergie im System** E **im Zusammenhang mit dem inneren Produkt der Zustandsvektoren** *ÿ* **und der Ableitung des Hamiltonoperators** $H\hat{}$ **, beides bezüglich des Parameters ÿ.**

Bei der Entwicklung dieser Lösung der Schrödinger-Gleichung entdeckte Richard Feynman, dass jeder Kollaps der Wellenfunktion eine diskrete Wirkung auf die Atome hat, aus denen er besteht. Dieses Ereignis geht mit einer Verschiebung der Ladungsverteilung über jedem Atom des Systems einher, im Verhältnis zu ihrem neu definierten Abstand voneinander [24,25]. Bei zwei Atomen, die mit einem Abstand D interagieren, beträgt das induzierte Dipolmoment für jedes Atom 1/D7 . **Je geringer der Abstand zwischen den Atomen, desto größer das Dipolmoment und desto stärker die Erhöhung des Drehimpulses . Infolgedessen ändert jede Störung des Systems – beispielsweise das Öffnen eines Ionenkanals oder eine Verschiebung des lokalen elektrischen Felds – den Zustand des Systems, und zwar in einer Weise, die mit dem ursprünglichen ungestörten Zustand und der Ableitung des Hamilton-Operators zusammenhängt. Die Zuweisung der Atompositionen im Verhältnis zu anderen Atomen im System geht mit einer Änderung der Anordnung der Elektronen um den Kern einher. Dieses Ereignis löst Van-der- Waals-Kräfte zwischen benac**

Zusammengefasst: Durch die Integration komplexwertiger Wahrscheinlichkeitsamplituden erzeugt das System eine Menge Quanteninformationen. Indem es die Ableitung dieses Volumens nimmt, identifiziert das System Eigenwerte im beobachtbaren Randbereich dieses hochdimensionalen Vektorraums. Während Eigenwerte ausgewählt werden, werden alle anderen Eigenzustände eliminiert. An diesem Punkt kollabiert die Wellenfunktion und die im System enthaltenen In

Machine Translated by Google

Gemäß dem Landauer-Prinzip ist jede Komprimierung von Informationen mit der Freisetzung von freier Energie verbunden **[29–32]. Diese freie Energie kann genutzt werden, um Arbeit im System zu verrichten, z. B. um das Ruhemembranpotential wiederherzustellen, da die Unsicherheit im rezeptiven Feld des Neurons abnimmt. Entscheidend ist, dass dieser bidirektionale Austausch von freier Energie und Entropie sicherstellt, dass die Gesamtenergie des Systems im Laufe der Berechnung erhalten bleibt, während der erste und zweite Hauptsatz der Thermodynamik eingehalten werden [26].**

Durch den Übergang von einem früheren Zustand zu einem späteren Zustand aktualisiert das System die Lösung eines Rechenproblems: Was ist der optimale Systemzustand zur Kodierung der umgebenden Umwelt? Dieser definierte Systemzustand ist jedoch vorübergehend, da er mit einer sofortigen Wiederherstellung der Unsicherheit durch eine Änderung der Ladungsverteilung um jedes Atom verbunden ist. Das durch den Kollaps der Wellenfunktion induzierte Dipolmoment löst dann neue atomare Wechselwirkungen aus – und bei aufeinanderfolgenden Messungen mit diskreten Ergebnissen, die die Verschränkung des Partikelsystems nicht zerstören, legt jede Messung mit dem Wert a **die Grundlage für einen neuen Zustand, der dann gemäß dem von Neumann-Projektionspostulat [33] eine nachfolgende zeitliche Entwicklung durchläuft. Unmittelbar nach der Lösung einer Wellenfunktion beginnt sich das System also erneut im Laufe der Zeit zu entwickeln, bildet einen neuen probabilistischen Systemzustand und durchläuft einen weiteren Rechenzyklus.**

2.7. Umwandlung probabilistischer Systemzustände in zeitlich irreversible Signalergebnisse

Die Ableitung des Hamiltonoperators beinhaltet die Ableitung aller reinen Komponentenzustände in Bezug auf alle Störungen seit dem letzten Detektionsereignis. Dieser Prozess komprimiert Informationen und ergibt Eigenwerte im Randbereich der hochdimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Während dieses Rechenvorgangs wird die komplexwertige Verteilung möglicher Systemzustände reduziert und die reinen Komponentenzustände im gesamten System (z. B. Ionenposition und -impuls) werden vorübergehend definiert. Dieser definierte mehrskalige Systemzustand wird jedoch sofort zur Vergangenheit, da die Ladungsverteilung über jedes Atom geändert wird und ein neuer probabilistischer Systemzustand entsteht.

Da der Erwartungswert für die Energie eines bestimmten Atoms ÿai ÿ|aiÿ **proportional zum Erwartungswert für seinen Spin ÿÿ|k|ÿÿ ist, verursacht die Energieverschiebung aufgrund des induzierten Dipolmoments eine Vorzeichenverschiebung in beiden Werten und die Zeitsymmetrie wird gebrochen. Im Wesentlichen sollten die resultierenden Dipolmomente, wenn Grundzustände ihre Entartung verlieren, die Anziehung zwischen Natriumionen außerhalb des Neurons und Atomen, aus denen die Lipiddoppelschicht der Nervenmembran besteht, verändern. Es wird erwartet, dass die resultierenden Van-der-Waals-Kräfte eine zulässige Verletzung der Zeitumkehrsymmetrie verursachen und dadurch die Kausalität innerhalb des Systems bewirken, da Informationen komprimiert, Eigenwerte identifi**

Ein System wird jedoch nur dann Verstöße gegen die Zeitumkehrsymmetrie aufweisen, wenn Quantenunsicherheit zur Dynamik der thermischen Fluktuation und Dissipation beiträgt. Nur wenn gleichzeitige Signalereignisse und zufällige Schwingungen eine Änderung des Membranwiderstands innerhalb der zeitlichen Parameter der Ionendissipation und der Kinetik der Gleichrichtung der Ionenpumpe auslösen, tragen inhärent probabilistische Ereignisse zur Steuerung einer neuronalen Zustands

2.8. Bedingungen, unter denen Quantenfluktuationen zur Dissipationsdynamik beitragen

Eine physikalische Struktur, die aktiv ein elektrochemisches Ruhepotential erzeugt, erzeugt Entropie und Wärme. Die Nervenmembran bietet Widerstand, und daher wird bei elektrischen Wechselwirkungen eine gewisse Menge freier Energie in Entropie umgewandelt.

In einem Wärmespeichersystem geht diese Energie jedoch nicht unbedingt irreversibel verloren; sie kann auch zur Arbeit genutzt werden [34]. Das Fluktuations-Dissipationstheorem von Callen und Welton besagt, dass thermische Fluktuationen eine Antwortfunktion erzeugen, die die Impedanz der Struktur beeinflusst und durch ÿ(t) **gegeben ist :**

$$\ddot{y}(t) = \dot{y}\dot{y}\, dt \quad \frac{A(t)\ddot{y}(t)}{} \cdot \qquad \textbf{(65)}$$

wobei $\dot{y}$ = kBT, ÿ(t) **die Heaviside-Stufenfunktion und** A(t) **der Erwartungswert von** Ok (t) ist, **einer Observablen, die in einem dynamischen System thermischen Schwankungen unterliegt. Wenn die Zeitskalen der Dekohärenz innerhalb des Systems länger sind als die Zeitskalen der Ionendissipation**

Machine Translated by Google

und Ionisierungsdynamik kann Quantenunsicherheit wesentlich zum Ionenverhalten an der neuronalen Membran beitragen **[35]. Das heißt, wenn eine zeitabhängige Änderung der Spannung eines** Neurons **auf irgendwelchen Quantenfluktuationen in der Position oder im Impuls von nahegelegenen** Ionen beruht, **dann wird der Ensemble-Durchschnitt jeder Observablen (ein Maß für die Fluktuation, gegeben durch den hermiteschen Operator** [Ok (t), **Oj(t0)]) mit der Antwortfunktion (einem Maß für die Dissipation, gegeben durch** ÿ(t **ÿ** t0)) **als Funktion der Zeit in Beziehung stehen. Diese Beziehung wird durch die Kubo- Fluktuations-Dissipationsformel [36,37] gegeben**

$$ÿ(t \ \mathbf{ÿ\ t0}) = iÿ(t \ \mathbf{ÿ\ t0})\ \mathbf{ÿ\ [\ Ok}\ (t),Oj(t0)\ ]\ ÿ\ . \tag{66}$$

Diese Antwortfunktion ÿ(t) **kann als Funktion von Schwingungsereignissen dargestellt werden:**

$$ÿ(t) = \int_{ÿÿ}^{ÿ} \frac{dÿ}{2ÿ}\ e^{\,iÿtÿ(ÿ)}\ . \tag{67}$$

Wenn t < **0, dann** wird *iÿt* **negativ sein und** e *iÿt* **wird Null sein, also die gesamte Antwortfunktion.** ÿ(t) **wird Null sein. Daher können die Quantenzustände, die dieser Spektralfunktion zugrunde liegen, nur kausal zur Dissipationsdynamik beitragen, wenn die Zeit in Vorwärtsrichtung voranschreitet.**
Die Fourier-Transformation der Antwortfunktion berücksichtigt die Dissipations- und Fluktuationsdynamik im Frequenzbereich, gegeben durch *ÿ(ÿ):*

$$ÿ(ÿ) = ÿi \int_{\mathbf{0}}^{ÿ} \mathrm{Tr}\ (\ e^{\ ÿH\hat{}\ [\ Ok\ (t),Oj(t0)]\ )}\ e^{\ iÿt}\ dt\ . \tag{68}$$

Diese zeitabhängige Funktion liefert die Dichte der möglichen Zustände eines Partikelsystems , die bei einer Störung oder einem sich ändernden elektrischen Feld entstehen. Daher ist [Ok (t), Oj(t0)] **einfach eine Beschreibung, wie sich die Dichtematrix, die Wellenfunktion oder der Hamiltonoperator im Laufe einer gewissen Zeitentwicklung ändert, verglichen mit der Wahrscheinlichkeit, dass sich alle Energiezustände bei einer Zeitumkehr auf dieselbe Weise neu anordnen würden. Daher kann** die **Antwortfunktion** *ÿ(ÿ)* in erweiterter Form geschrieben werden:

$$ÿ(ÿ) = ÿi \int_{\mathbf{0}}^{ÿ} \mathbf{dtÿmn}\ e^{\,iÿt\ e}\ ÿEmÿ\ [\ ÿm|\mathbf{Ok}\ |nÿÿn|Oj\ \mathbf{|mÿe\ i(EmÿEn)t} \\ \mathbf{ÿ\ ÿm|Oj}\ |nÿÿn|Ok\ \mathbf{|mÿe\ i(EnÿEm)t\ ]}\ \ . \tag{69}$$

Wenn die Unsicherheit in Bezug auf Position und Impuls eines Ions in Gegenwart eines sich ständig ändernden elektrischen Felds bestehen bleibt, können Quantenfluktuationen zum Ionenverhalten beitragen und den Zustand der Ionen beeinflussen, die mit dem elektrochemischen Potenzial der Nervenmembran interagieren. In diesem Fall können Quantenfluktuationen zur Wahrscheinlichkeit einer Zustandsänderung in der makroskopischen Recheneinheit beitragen, von einem Der Zustand jedes Neurons zum Zeitpunkt der Lösung des Hamilton-Operators bestimmt jedoch seine Reaktion. Neuronen in einem kortikalen Up-State, die stochastischen Ereignissen erlauben, ein Signalergebnis zu steuern, können in Richtung der Aktionspotentialschwelle oder von ihr weg geschoben werden, wenn die Unsicherheit abrupt abnimmt. Tatsächlich werden nur **Neuronen in einem kortikalen Up-State geschoben, die zufälligem Rauschen erlauben, ein Signalergebnis zu steuern. Neuronen, die aus einem Ruhezustand eine überschwellige Stimulation erhalten, weisen dagegen**

2.9. Annahmen des Modells **2.9.1.**

Neuronen sind funktionell isoliert, bleiben aber empfindlich gegenüber äußeren Störungen

Dieses Modell geht davon aus, dass Neuronen funktionell isoliert sind, aber empfindlich auf externe Störungen reagieren. Die Architektur eines tiefschichtigen neuronalen Netzwerks lässt Störungen von außerhalb des Systems selbst zu, während die Physiologie einzelner Recheneinheiten in den tieferen Schichten isolierte Berechnungen zulässt.

In Bezug auf die Netzwerkarchitektur: Neuronen im Thalamus, die Signale aus der Peripherie empfangen, weisen deterministische Zündmuster auf, die Abbildungen innerhalb ihrer rezeptiven Felder getreu darstellen **[38,39]. Diese Neuronen synapsen auf tiefere**

Machine Translated by Google

des neuronalen Netzwerks, wobei Signale auf primäre sensorische Neuronen und kortikale Neuronen höherer Ordnung kaskadieren, die zunehmend mehrere Eingaben mit Rauschen integrieren, um probabilistische Ergebnisse zu erzielen [40,41]. Neuronen im motorischen Kortex und in den Basalganglien integrieren verschiedene Eingaben, um willkürliche Bewegungen einzuleiten und andere Bewegungen zu hemmen [42,43]. Diese Neuronen bilden Synapsen mit nachgeschalteten motorischen Regionen im Thalamus, der Formatio reticularis und dem Rückenmark, wobei diese Signale auf periphere Neuronen mit deterministischen Ergebnissen konvergieren, die die Streckung und Beugung bestimmt Im Wesentlichen empfangen Neuronen höherer Ordnung in den tiefsten Schichten der Hirnrinde Nachrichten aus dem Inneren des Systems selbst, wobei diese Störungen die Außenwelt darstellen.

Im Hinblick auf die neuronale Physiologie: In kortikalen Neuronen werden erregende und hemmende Eingänge aktiv ausgeglichen, so dass thermische Schwankungen jedes Verlassen des Gleichgewichtspotentials dominieren [5]. Während ein überschwelliger Reiz durchaus zu Spike-Verhalten in Neuronen des primären sensorischen Kortex führen kann [46,47], führt zufälliges elektrisches Rauschen zu Spike-Verhalten in kortikalen Neuronen höherer Ordnung [3,4]. In diesen Bereichen sind Signalergebnisse eher probabilistisch [48,49]. Aus diesem Grund ist die Modellierung des Beitrags von Rauschen zu Signalergebnissen ein sinnvoller Ansatz. Insbesondere in peripheren Neuronen und oberflächlichen Schichten der kortikalen Schaltkreise reicht zufälliges Rauschen nicht aus, um Signalergebnisse zu beeinflussen, und die Recheneinheiten selbst sind sehr robust gegenüber Rauschen, so dass thermische Schwankungen nicht wesentlich zu neuronalen Ergebnissen beitragen und diese Terme aus der Gleichung fallen. Ein Neuron im kortikalen Up-State, das sich in der Nähe der Aktionspotentialschwelle befindet und zufälliges elektrisches Rauschen die Signalergebnisse steuern lässt, ist jedoch äußerst rauschempfindlich. In diesem Fall muss das Rauschen mechanistisch berücksichtigt werden, um die Wahrscheinlichkeit des Übergangs des Neurons vom

2.9.2. Unsicherheit im Zustand einzelner Ionen beeinflusst den Spannungszustand des Neurons

Dieses Modell geht davon aus, dass eine Änderung des Zustands sehr weniger Ionen die Wahrscheinlichkeit beeinflussen kann, dass ein Neuron ein Aktionspotential abfeuert. Wenn Neuronen in einem kortikalen Up-State sind, kann eine Erhöhung des Membranpotentials um 1 mV ein Neuron leicht über die Schwelle treiben [15]. Diese Spannungsänderung entspricht einem Strom von 1 pA oder nur 10 Natriumionen, die sich im Verlauf einer Mikrosekunde durch einen Kanal bewegen [16]. Da die zufällige Bewegung von nur wenigen Natriumionen ein kortikales Neuron über die Aktionspotentialschwelle treiben kann und diese Zellen erhebliche Leckströme aufweisen [50], scheinen Ereignisse auf Quantenebene makroskopische Ergebnisse auf der Ebene der Recheneinheit zu beeinfl

Von Neuronen im Up-State des Cortex wird erwartet, dass sie maximale Informationsmengen kodieren, mit hohen Wahrscheinlichkeitsamplituden für jedes Ergebnis k = j und k ÿ = j. Doch für Ionen werden die Wahrscheinlichkeitsamplituden sowohl im Positions- als auch im Impulsraum fast überall Null sein . Bei Ionen außerhalb des Gehirns ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich im nächsten Augenblick in einem Cortexneuron befinden, vernachlässigbar. Und bei Ionen, die sich bereits im Gehirn befinden, sind die Wahrscheinlichkeitsamplituden weitgehend um die jüngsten Positions- und Impulswerte zentriert, außer im Zusammenhang mit der Öffnung eines nahegelegenen Ionenkanals oder einer Verschiebung des lokalen elektrischen Felds. Ein unwahrscheinliches Ergebnis für ein Ion könnte eine Positionsänderung sein, die einem Leck über eine Nervenmembran entspricht, wobei dieses Ereignis den Spannungszustand des Neurons beeinflusst.

Hier wird jedes Ion durch eine Wellenfunktion oder eine Verteilung von Eigenzuständen beschrieben. Während der unitären Transformation werden alle nicht unterscheidbaren Zustände (z. B. lineare Korrelationen zwischen reinen Zuständen) eliminiert, wodurch die Von-Neumann-Entropie des Syste Durch die Zuweisung von Eigenwerten für jedes Ion wird die Spannung der neuronalen Membran definiert und die Zelle erreicht entweder die Aktionspotentialschwelle oder nicht. Wenn die Unsicherheit während der Berechnung verringert wird und Eigenwerte zugewiesen werden, werden die Informationen komprimiert, freie Energie freigesetzt und das Neuron stellt sein Ruhepotential wieder her. Wenn die Informationen nicht komprimiert werden können und keine Eigenwerte zugewiesen werden können, wird keine freie Energie freigesetzt und das Neuron feuert ein Aktionspotential ab

Machine Translated by Google

2.9.3. Die geschätzten Dekohärenzzeitskalen erfüllen die Kriterien für ein Quantensystem

Das Modell für Dekohärenz in neuronalen Systemen, das sich auf Wechselwirkungen zwischen Natriumionen und dem neuronalen Membranpotential konzentriert, wurde ursprünglich von Max Tegmark [35] entwickelt. Dieses Modell wurde unter Verwendung der neuesten Coulomb-Streudaten, die in einem Schwesterpapier vorgestellt werden, zusammen mit der Matrixalgebra-Formulierung der Quanteninformationserzeugung und -kompression [51] neu berechnet. Diese Schätzungen zeigen, dass die Dekohärenz-Zeitskalen an der neuronalen Membran tatsächlich länger sind als die Ionendissipationsraten und daher die Kriterien für ein Quantensystem erfüllen – allerdings nur für kortikale Neuronen im Up-State.

Ein kortikales Neuron im Up-State ist effektiv isoliert, da erregende und hemmende Eingänge ausgeglichen sind, sodass zufällige thermische Schwankungen die Signalergebnisse bestimmen. Zwar gibt es Upstream-Eingänge, aber diese Upstream-Eingänge bestimmen nicht die Signalergebnisse in kortikalen Neuronen – das tun thermische Schwankungen. Aus diesem Grund wird jede Recheneinheit als Quantensystem mit zwei Zuständen modelliert, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit des Übergangs vom Aus-Zust Natürlich ist das Neuron nicht wirklich isoliert; es existiert innerhalb eines Schaltkreises, und daher kann ein überschwelliger Reiz es immer noch über die Aktionspotentialschwelle bringen und es feuern lassen. Das Konzept, den Beitrag von Quantenrauschen zum Zustand der Recheneinheit zu modellieren, ist immer gültig; in vielen Schaltkreisen sind die Dekohärenzzeitskalen jedoch zu kurz oder das zufällige Rauschen reicht nicht aus, um die Signalergebnisse zu beeinflussen, oder die Recheneinheiten selbst sind robust gegenüber Rauschen, sodass thermische Schwankungen nicht wesentlich zu den neuronalen Ergebnissen beitragen, und diese Begriffe

Nur in einem kortikalen Up-State kann man davon ausgehen, dass die Unsicherheit sowohl des neuronalen Membranpotentials als auch der extrazellulären Ionenposition ausreichend lange anhält, um lineare Korrelationen zu reduzieren – die Wellenfunktion zusammenbrechen zu lassen, Informationen zu komprimieren, freie Energie freizusetzen, den Atomimpuls zu verändern – und am Ende der Berechnung Spannungsänderungen in der Recheneinheit zu beobachten .

3. Ergebnisse

3.1. Die erwartete Wellenlänge der spontanen Freisetzung freier Energie während der Informationskompression

Wenn kortikale neuronale Netzwerke Quantenberechnungen bei Umgebungstemperatur durchführen, müssen diese thermodynamischen Systeme, die weit vom Gleichgewicht entfernt sind, bidirektional freie Energie gegen Informationen austauschen , wobei jede freie Energie, die während der **Anfangsphase des thermodynamischen Berechnungszyklus für die Informationserzeugung aufgewendet** wird, während der Informationskompressionsphase teilweise zurückgewonnen **wird. Daher sollten diskrete Mengen freier Energie freigesetzt werden, lokal zu jeder Unsicherheitsreduzierung, da ein optimaler Systemzustand aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ausgewählt wird. Jede thermische Fluktuation sollte einer Verschiebung des atomaren Dipolmoments entsprechen , was den Drehimpuls einzelner Ionen erhöht. Diese Ereignisse sollten daher beobachtbar sein. Um diese Hypothese zu überprüfen, können wir die erwarteten Auswirkungen der Quantenfluktuations-Dissipationsdyna**

Wenn die Störung des Zustandes eines Ions während einer bestimmten Zeitentwicklung auf zufälligen Änderungen des Spins oder Energiezustandes eines seiner Komponenten, also eines Elektrons, beruht, dann wird der Ensemble- Durchschnittswert jeder Observablen (ein Maß für die Fluktuation, gegeben durch ÿxˆ(t), **xˆ(0)ÿ) mit der Antwortfunktion (einem Maß für die Dissipation, gegeben durch** ÿ(t)) **im Frequenzbereich Diese Beziehung modelliert im Wesentlichen, wie das Schwingungsverhalten eines Quantensystems entlang einer imaginären Achse die thermische Dynamik des beobachtbaren Systems beeinflusst:**

$$ÿ(t) = iÿ(t \; \mathbf{ÿ\ t0)}\; ÿxˆ(t), \; \mathbf{xˆ(0)ÿ,} \qquad \textbf{(70)}$$

Machine Translated by Google

wobei ÿ(t) **die Heaviside-Stufenfunktion ist und die Antwort** ÿ(t) **einen Erwartungswert für** x(t) liefert, **eine zeitabhängige „beobachtbare Größe“, die in einem dynamischen System thermischen Schwankungen unterliegt. Die zeitabhängige Gleichung lautet:**

$$f(t) = \frac{d\ddot{y}}{} \, e^{i\ddot{y}t} \, e^{2\ddot{y}} \, f(\ddot{y}), \tag{71}$$

und seine Fourier-Transformation ist gegeben durch:

$$f(\ddot{y}) = \int f(t)\, e^{\ddot{y}i\ddot{y}t}\, dt\,. \tag{72}$$

Wenn die Eigenwerte reell sein sollen, muss auch die Summe des Realteils und des Imaginärteils der Antwortfunktion über einen gewissen Zeitverlauf ÿ(t **ÿ t0) reell sein. Die vollständige Antwortfunktion ergibt sich aus:**

$$\ddot{y}(\ddot{y}) = \text{Re}\ddot{y}(\ddot{y}) + \text{Im}\ddot{y}(\ddot{y})\,. \tag{73}$$

Der Realteil der Antwortfunktion ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \text{Re}\ddot{y}(\ddot{y}) &= \frac{1}{2}\,[\ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}) \ddot{y}\, \ddot{y}^{\dagger}(\ddot{y})\ddot{y}] \\ &= \frac{1}{2}\int_{\ddot{y}\ddot{y}}^{\ddot{y}} dt\, e^{i\ddot{y}t}\,[\ddot{y}\ddot{y}(t) \ddot{y}\, \ddot{y}(\ddot{y}t)\ddot{y}]. \end{aligned} \tag{74}$$

Und der Imaginärteil der Antwortfunktion ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{Im}\ddot{y}(\ddot{y}) &= \ddot{y}\,\frac{i}{2}\,[\ddot{y}\ddot{y}(\ddot{y}) \ddot{y}\, \ddot{y}^{\dagger}(\ddot{y})\ddot{y}] \\ &= \frac{i}{2}\int_{\ddot{y}\ddot{y}}^{\ddot{y}} dt\, e^{i\ddot{y}t}\,[\ddot{y}\ddot{y}(t) \ddot{y}\, \ddot{y}(\ddot{y}t)\ddot{y}]\,. \end{aligned} \tag{75}$$

Die Energie der Quantenfluktuationen *E(ÿ)* **hängt von der Frequenz ÿ ab:**

$$E(\ddot{y}) = \frac{\ddot{y}\hbar\ddot{y}}{2}\coth\frac{\ddot{y}\hbar\ddot{y}}{2}\,, \tag{76}$$

wobei *ÿ* = 1/kBT. **Das klassische Leistungsspektrum ist mit der komplexwertigen Quantenspektraldichte so verknüpft, dass Quantenrauschen unter bestimmten Bedingungen zur lokalen thermischen Dichte beitragen kann:**

$$\int_{\ddot{y}\ddot{y}}^{\ddot{y}} \ddot{y}\hat{x}(t)\, \ddot{y}\, \hat{x}(t0)\ddot{y}\, e^{i\ddot{y}t}\, dt = \frac{1}{\ddot{y}E(\ddot{y})}\int_{\ddot{y}\ddot{y}}^{\ddot{y}} \ddot{y}\hat{x}(t)\, \ddot{y}\, \hat{x}(t0)\ddot{y}\, e^{i\ddot{y}t}\, dt. \tag{77}$$

Wenn E > kBT, **bei hoher Temperatur, breiter Verteilung der Elektronen über die Energiezustände und geringer Besetzung der Energiezustände, dann ist der Quantenbeitrag zum Ionenverhalten vernachlässigbar und das Verhalten der Ionen reduziert sich auf die Boltzmann-Maxwell-Statistik. Wenn** E < kBT, **bei Elektronen mit niedriger Frequenz, die dem Rayleigh-Jeans-Gesetz gehorchen, dann ist der Quantenbeitrag zum Ionenverhalten ebenfalls vernachlässigbar und das Verhalten der Ionen reduziert sich wiederum auf die klassische Boltzmann-Maxwell-Statistik. Nur bei hoher Teilchendichte, wenn die Energie eines Ions größer ist als sein chemisches Potenzial und** E > kBT, **tragen Quantenfluktuationen zum Ionenverhalten bei. Dies soll im Gehirn von Säugetieren der Fall sein.**

Wenn Quantenfluktuationen tatsächlich zum Ionenverhalten in biologischen Systemen beitragen, dann muss E größer als kBT sein. **Da:**

$$\text{kBT} = (1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(310\ \text{K}) = 4{,}28 \times 10^{-21}\ \text{J}, \tag{78}$$

Machine Translated by Google

Und:

$$f = \frac{E}{H} = \frac{4{,}28 \times 10^{-21}\ \text{kg m}^2/\text{s}^2}{6{,}46 \times 10^{12}\ \text{Hz}, 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{kg m}^2/\text{s}} \quad (79)$$

Es wird erwartet, dass hochenergetische Partikel mit E > kBT **im zentralen Nervensystem bei 37 ° C (310 K) beobachtet werden. Insbesondere sollten diese hochenergetischen Partikel eine Frequenz von** f > **6,46 x 1012 Hz, eine Wellenlänge von** *ÿ* < **46 Mikrometer oder eine Energie von** E > **0,0267 eV im Infrarotlichtspektrum aufweisen. Spontane Emissionen von Photonen in diesem Bereich wurden tatsächlich im Gehirngewebe von Säugetieren beobachtet [52–55] ,** und **es wurde gezeigt, dass eine Infrarotstimulation des** Gehirns eine funktionelle Wirkung auf die neuronale Aktivität hat **[56–58]. Weitere Studien sind erforderlich, um die genauen Wellenlängen dieser Photonenemissionen zu messen und diese Ereignisse zeitlich mit neuronalen Signalergebnissen**

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bei der Informationskompression im Gehirn von Säugetieren Photonen freigesetzt werden sollten, insbesondere im Infrarotbereich des elektromagnetischen Spektrums. Da der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet werden kann, muss jedes System, das in der Lage ist, die Entropie zu reduzieren, um eine nicht-deterministische Berechnung durchzuführen, bei der Informationskompression freie Energie freisetzen. Wenn Quantencomputer in kortikalen neuronalen Netzwerken tatsächlich vorkommen, sollten spontane thermische Schwankungen beobachtet werden, lokal bei jeder Verringerung der Unsicherheit. Diese thermischen Schwankungen werden voraussichtlich eine synchrone Aktivi

Daher ist bei diesem Ansatz die Verringerung der thermodynamischen Entropie sowohl mit der Auswahl eines optimalen Systemzustands aus einer großen Wahrscheinlichkeitsverteilung (einer, der thermodynamisch bevorzugt mit der umgebenden Umwelt korreliert) als auch mit der Freigabe thermischer freier Energie (die verwendet wird, um die Lösung dieses **Rechenproblems physikalisch zu instanziieren)** verbunden.

3.2. Spezifische Vorhersagen dieses

Modells **Wenn kortikale neuronale Netzwerke tatsächlich Quantencomputersysteme und keine klassischen Computersysteme sind, dann sollten im Neokortex Hinweise auf die Generierung und Komprimierung von Quanteninformationen beobachtet werden. Daher macht diese Theorie spezifische Vorhersagen hinsichtlich der Energieeffizienz des Gehirns [17], hinsichtlich der Coulomb-Streuung und der Dekohärenz-Zeitskalen an der neuronalen Membran [51] und hinsichtlich der erwarteten Auswirkungen elektromagnetischer Stimulation und pharmakologischer Interventionen in kortikalen neuronalen Netzwerken [59]. Einige zusätzliche spezifische Vorhersagen des theoretischen Rahmens, die durch das vorliegende Modell angeregt wurden , umfassen Folgendes.**

3.2.1. Thermische freie Energie wird während der Berechnung spontan freigesetzt, wenn Informationen komprimiert

werden. Infrarotpartikel mit Wellenlängen von *ÿ* < **46 Mikrometer oder** f > **6,46 × 1012 Hz sollten während der kortikalen Informationsverarbeitung spontan an der Nervenmembran erscheinen. Diese Vorhersage muss mit empfindlichen Infrarot-Erkennungsgeräten und nicht mit klassischen Elektroden oder Bildgebungssystemen getestet werden; die spontane Freisetzung von Partikeln mit Infrarotwellenlänge sollte im Gehirn beobachtet werden, wenn Unsicherheit in Signalergebnisse aufgelöst wird. Eine quantitative Zunahme dieser Partikel sollte beispielsweise bei der Wahrnehmung eines sehr unsicheren visuellen oder akustischen Reizes beobachtet werden, mit einer starken zeitlichen Übereinstimmung mit ereigniskorrelierten P300-Potenzialen in der Großhirnrinde. Im Gegensatz dazu sollte diese spontane Freisetzung thermischer freier Energie im Falle eines epileptischen Anfalls nicht auftreten – wenn die konstitutive Aktivierung der Ionenkanäle und nicht die Informationsverarbeitung zu einer hochsynchronisierten neuronalen Aktivität in der gesamten Großhirnrinde führt.** Natürlich **wurden spontane Photonenemissionen in** diesem Bereich im **Gehirngewebe** von Säugetieren beobachtet **[52–55],** und **es wurde gezeigt, dass die Infrarotstimulation** des Gehirns einen funktionellen Effekt auf die neuronale **Aktivität** hat **[56–58].** Es sind **jedoch weitere Studien erforderlich, um die genauen Wellenlängen dieser Photonenemissionen zu messen und zu bewerten, ob diese Ereignisse zei Wenn das Gehirn zyklisch Entropie erzeugt und komprimiert, sollte das System eine viel höhere Energieeffizienz aufweisen als unter klassischen Bedingungen erwartet (Tabelle 1).**

Machine Translated by Google

Tabelle 1. Ein Vergleich der Erklärungskraft: die Energieeffizienz des neuronalen Netzwerks.

Klassische Modelle		
Vorgeschlagener Mechanismus	**Vorhergesagte Beobachtung**	**Beweise dafür/dagegen: Der**
Die Energieeffizienz des Systems ist das Ergebnis optimaler synaptischer Gewichtung, optimaler Ionenkanalverteilung und anderer molekularer Mechanismen.	Die Nettoproduktion physikalischer Entropie im menschlichen Gehirn ist mit klassischen Annahmen vereinbar, wobei der ATP-Umsatz eine gewisse Menge an Entropie erzeugt.	Rechenaufwand für jeden Spike beträgt erstaunliche 0,1 W: Im Kontext einer bekannten Kalorienaufnahme weicht dieser Energiebedarf „um den Faktor 108 ab .“ [60]
Gegenwärtiges Modell		
Vorgeschlagener	**Vorhergesagte Beobachtung**	**Beweise dafür/dagegen „Die**
Mechanismus: Die Energieeffizienz des Systems ist das Ergebnis der Informationskomprimierung, wobei neuronale Ergebnisse durch die Extraktion von Korrelationen, Konsistenzen oder „Vorhersagewerten“ hervorgerufen werden.	Die Nettoproduktion physikalischer Entropie im menschlichen Gehirn ist viel zu gering, um die Annahmen eines klassischen Systems aufrechtzuerhalten, wobei die pro Kalorie geleistete Arbeitsmenge eine nahezu perfekte Nutzung aufweist	Energieeffizienz des menschlichen Gehirns steht im Einklang mit diesem Modell der nicht-deterministischen Berechnung.“ [17] „Dieser Rechenprozess maximiert die Verfügbarkeit freier Energie.“ [26]

3.2.2. Die spontane Freisetzung thermischer freier Energie während der Informationskompression führt zu synchronisierter Aktivierung im gesamten neuronalen Netzwerk

Dieses Modell beschreibt sowohl einen Rechenvorgang als auch einen thermodynamischen Vorgang, da Informationskompression sowohl die Auswahl eines optimalen Systemzustands aus einer großen Wahrscheinlichkeitsverteilung als auch die Reduzierung der Entropie ist. Dieses systemweite thermorechnerische Ereignis, das die Unsicherheit in den reinen Komponentenzuständen auflöst, führt voraussichtlich zu einer spontanen Freisetzung von freier Energie. Neuronen, die die Unsicherheit während der Berechnung reduzieren, sollten daher freie Energie zurückgewinnen und ihr Ruhepotential wiederherstellen; Neuronen, die die Unsicherheit in ihrem rezeptiven Feld beibehalten, sollte Diese systemweite Berechnung sollte daher zur synchronen Aktivierung eines statistisch zufälligen Neuronenensembles im gesamten Netzwerk führen. Synchrone neuronale Aktivität wird in kortikalen neuronalen Netzwerken tatsächlich in einem Frequenzbereich beobachtet und gilt als Korrelat kognitiver Prozesse höherer Ordnung [61,62]. Entscheidend ist, dass die hochfrequenten Schwingungen, die während Wahrnehmungsaufgaben beobachtet werden, unter klassischen Annahmen und Zeitskalen nicht durch Kopplung und Rekrutierung modelliert werden können **[63,64]. Hier wird vorhergesagt, dass Informationskompressionsereignisse spontane synchronisie Diese koordinierte Aktivität tritt voraussichtlich in Zellen auf, die zufälliges Rauschen zulassen, um Signalergebnisse zu steuern (z. B. kortikale neuronale Schaltkreise), jedoch nicht in Zellen, die vollständig deterministisch agieren (z. B. spinale Reflexschaltkreise). Während diese oszillierende Aktivität, die in einem Frequenzbereich auftritt, im Gehirn von Säugetieren beobachtet wurde, könnten zusätzliche Studien die mögliche Korrelation zwischen probabilistischer Kodierung und Aktivität auf Netzwerkebene bei Vogel- und Kopffüßlerarten** untersuchen . **Wenn synchrone Aktivität durch klassische Methoden der Signalausbreitung verursacht wird und nicht das Ergebnis einer systemweiten nichtdeterministischen Berechnung ist, dann sollten sowohl klassische Simulationen kortikaler neuronaler Netzwerke als auch spinaler Reflexschaltkreise schnelle und langsame Schwingungen problemlos demonstrieren. Wenn stattdessen synchrone Aktivität im gesamten Netzwerk durch Informationskompression in Verbindung mit freier Energiefreisetzung verursacht wird, dann sollte synchrones Feuern durch Absorption der vorhergesagten Wellenlängen eliminiert und durch Einführung dieser Wellenlängen ausgelöst werden. Kurz gesagt: Wenn ein klassisches Modell richtig ist, dann sollten klassische Mechanismen problemlos Schwingungen in einem Bereich verschachtelter Frequenzen erzeugen, und wenn das vorliegende Modell richtig ist, dann sollte die zyklische Ge**

Machine Translated by Google

Tabelle 2. Ein Vergleich der Erklärungskraft: die synchrone Aktivierung spärlicher neuronaler Ensembles.

Klassische Modelle		
Vorgeschlagener Mechanismus:	**Vorhergesagte Beobachtung**	**Beweise dafür/dagegen Diese**
Die beobachtete synchrone Aktivierung eines Bereichs verschachtelter Frequenzen ist das Ergebnis einer Informationskodierung, wobei die neuronalen Signalergebnisse durch einen gemeinsamen Reiz ausgelöst werden.	**Eine Kombination aus Gap Junctions, chemischen Synapsen, ephaptischer Kopplung, Änderungen der Ionenkonzentration und Optimierung der neuronalen Konnektivität im Laufe der Zeit führt zu einer synchronen Aktivierung.**	**Ereignisse lassen sich nicht ohne weiteres simulieren: „Es ist jedoch schwierig, den genauen Beitrag jedes Mechanismus zu einer bestimmten Art von Schwingung zu ermitteln.“ [65] Das Problem ist „nicht trivial.“ [66]**
Gegenwärtiges Modell		
Vorgeschlagener Mechanismus:	**Vorhergesagte Beobachtung**	**Beweise dafür/dagegen: Die**
Die beobachtete synchrone Aktivierung eines Bereichs verschachtelter Frequenzen ist das Ergebnis einer Informationskomprimierung, wobei neuronale Signalergebnisse durch die Extraktion von Korrelationen hervorgerufen werden.	**Ein Infrarot-Photonenimpuls senkt das Membranpotential einiger Neuronen, während andere Neuronen im Up-State der Hirnrinde feuern, was zu einer synchronen Feuerung, jedoch nicht zu iktaler Aktivität im gesamten Netzwerk führt.**	**Vorhersagen dieses Modells sollten getestet werden: Insbesondere wird erwartet, dass die spontane Freisetzung von Infrarotphotonen zeitlich mit neuronalen Schwingungen korreliert, nicht jedoch mit iktaler Aktivität.**

4. Diskussion

Das Neuron wird klassisch als Transistor betrachtet, der sich immer entweder im Ein- oder im Aus- Zustand befindet. Hier wird das kortikale Neuron als Qubit modelliert, bei dem es im Laufe der Zeit mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vom Aus- in den Ein-Zustand wechselt. Bei diesem neuen Ansatz beruht eine Zustandsänderung in der Recheneinheit auf inhärent probabilistischen Ereignissen auf Ione

Rauschen spielt eine entscheidende Rolle in kortikalen neuronalen Netzwerken und anderen komplexen dynamischen Systemen, da es die Informationsübertragung durch einen Mechanismus stochastischer Resonanz erleichtert **[67,68]. Zufälliges elektrisches Rauschen löst Phasenübergänge in einzelnen Recheneinheiten aus , was zu den stark variablen Intervallen zwischen den Spikes führt, die in kortikalen Neuronen** beobachtet werden **[69]. Zufälliges elektrisches Rauschen führt auch zu synchronisierter Aktivität und großflächigen Schwingungen auf Systemebene [70]. Rauschinduzierte resonante Aktivierung und rauschverstärkte** Stabilität werden sowohl in neuronalen Netzwerken **[71] als auch in me**

Das Ergebnis eines verrauschten Rechenprozesses auf Netzwerkebene ist „sparse populational coding“ – die synchrone Aktivierung eines statistisch zufälligen Ensembles spärlich verteilter Neuronen im Netzwerk [73,74]. Diese neuronale Aktivität entspricht der Realisierung einer multisensorischen Wahrnehmung [62,63,75,76]. Insbesondere werden spärliches populational coding und Wahrnehmungsrealisierung in neuronalen Netzwerken beobachtet, die empfindlich auf zufälliges elektrisches Rauschen reagieren (wie der Neokortex von Säugetieren), nicht jedoch in neuronalen Netzwerken, die gegenüber zufälligem elektrischem Rauschen robust sind (wie spinale Reflexsch

Viele frühere Modelle verwendeten klassische Methoden, um das Interspike-Intervall oder die synchrone Zündung statistisch zufälliger Neuronenensembles auf Netzwerkebene zu beschreiben **[9–14,67–72]. Keine dieser Methoden liefert jedoch mechanistische Einblicke in die Art und Weise, wie einzelne kortikale Neuronen die Signalergebnisse steuern, indem sie thermoelektrischem Rauschen erlauben, die neuronalen Signalergebnisse zu beeinflussen. Der vorliegende Ansatz zeigt, wie verrauschte Kodierung an der Synapse mechanistisch mit probabilistischen Signalergebnissen verknüpft ist. Diese Methode macht spezifische Vorhersagen, die im Labor getestet werden können, um zu beurteilen, ob das Gehirn ein klassisches System (wie üblicherweise angeno**

Hameroff und Penrose haben ebenfalls vorgeschlagen, dass das Gehirn ein Quantensystem ist, bei dem eine orchestrierte objektive Reduktion des Systemzustands entsprechend der bewussten Erfahrung erfolgt [77]. Tatsächlich ist der Kollaps alternativer Eigenzustände **sowohl in der OrchOR-Theorie als auch im vorliegenden Modell eine Schlüsseleigenschaft kortikaler neuronaler** Netzwerke. Die OrchOR-Theorie konzentriert sich jedoch **auf die Rolle der Quantendekohärenz bei der Mikrotubuli-Dynamik, während der vorliegende Bericht den Beitrag zufälligen elektronischen Rauschens zum Membranpotential kortikaler Neuronen modelliert . Der erstere Ansatz steht in keinem Zusammenhang mit etablierten Mechanismen der neuronalen Informationsverarbeitung, während der letztere Ansatz in hohem Maße mit den bekannten Beiträgen der Brownschen Bewegung zu den**

Machine Translated by Google

Während die Idee des Gehirns als Quantensystem oft als höchst umstritten angesehen wurde, haben Forscher im Bereich der Computational Neuroscience dieses Konzept kürzlich aufgegriffen, um bedeutende Fortschritte bei der Modellierung neuronaler Netzwerke und beim maschinellen Lernen voranzutreiben **[78–80], aufbauend auf früheren Bemühungen, Rauschen in das Hodgkin- und Huxley- Mo Wenn diese Ansätze jedoch in einer klassischen Computerarchitektur implementiert werden, ist weder eine physikalische Informationskomprimierung noch eine freie Energiefreisetzung möglich. Um diesen Rechenprozess in einer künstlich geschaffenen neuronalen Netzwerkarchitektur zu erreichen, müsste** ein Netzwerk von **Recheneinheiten mit probabilistischem Gating-Verhalten und ähnlichen Dekohärenz-Zeitskalen** wie das Säugetiergehirn aufgebaut werden .

In diesem Modell werden inhärent probabilistische Komponentenzustände integriert, um einen Hamilton-Operator zu bilden. Der Hamilton-Operator wird dann in Bezug auf alle Störungen des Systems differenziert. Die aus diesem Rechenprozess resultierende Umverteilung der Energie weist jedem Ion im System zu einem bestimmten Zeitpunkt Eigenwerte für Position und Impuls zu. Dieser Prozess definiert den Spannungszustand jedes Neurons, da Ereignisse auf Quantenebene die Ergebnisse auf der Ebene der Recheneinheit beeinflussen. Diese Studie zeigt, wie Neuronen in einem kortikalen Up-State einen Zustand der Unsicherheit beibehalten und physisch Informationen generieren und komprimieren, um nicht-deterministische Signalergebnisse zu erzielen. Dieses Modell ist ausdrücklich eine Form der Quantenberechnung bei Raumtemperatur. Es gibt drei weitere Möglichkeiten, diesen Berechnungsprozess zu beschreiben, die in Schwesterberichten

bereitgestellt werden: Gemäß den Gesetzen der Thermodynamik muss freie Energie aufgewendet werden, um Informationen zu erzeugen, und diese freie Energie wird bei der Informationskomprimierung teilwe In diesem Modell können probabilistische Komponentenzustände algebraisch durch eine Dichtematrix dargestellt werden [51]. Die Dichtematrix erfährt einen unitären Basiswechsel, da der Systemzustand im Laufe der Zeit durch seine Umgebung gestört wird. Die Diagonalisierung der Dichtematrix ergibt eine Nulldeterminante, was zu Observablen am Randbereich dieser hochdimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung führt.

Entsprechend den Gesetzen der Holographie lassen sich diese probabilistischen Komponenten-Reinzustände auch geometrisch als komplexwertige Wellen bzw. Wellenfunktionen darstellen [59]. Diese komplexwertigen Wahrscheinlichkeitsamplituden interferieren konstruktiv und destruktiv auf der empfindlichen, ladungserfassenden Polymeroberfläche der Nervenmembran. Als Ergebnis dieser physikalischen Interferenz zwischen Wahrscheinlichkeitsamplituden kollabiert die Wellenfunktion und Eigenwerte werden im Randbereich der hochdimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung aktualisiert. Dieser Prozess der physikalischen Kodierung von Informationen auf der Oberfläche der Polymer-Nervenmembran erzeugt eine holografische Projektion des kodierten Inhalts.

Gemäß den Gesetzen der Thermodynamik muss die Entropie immer zunehmen und die Gesamtenergie des Systems muss erhalten bleiben. Unter klassischen Annahmen müsste die meiste freie Energie in der Großhirnrinde in Entropie umgewandelt werden, da ein optimaler Systemzustand aus einer großen Wahrscheinlichkeitsverteilung ausgewählt wird und alle anderen möglichen Systemzustände verloren gehen. Die beobachtete Energieeffizienz des Gehirns legt jedoch nahe, dass dies nic Durch die Modellierung des Systems als zyklisch generierendes und komprimierendes System von Quanteninformationen kann die außerordentliche Energieeffizienz des Gehirns erklärt werden, ohne den ersten oder zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen [17]. Dieser neuartige Ansatz stellt auch eine tiefe Verbindung zwischen prädiktiver Verarbeitung und den thermodynamischen Grenzen der Quantenberechnung her [26]. Die Erzielung einer spärlichen Populationskodierung durch einen Prozess inhärent probabilistischer Berechnung kann zu allgemein intelligenteren und energieeffizienteren neuronalen Netzwerken führen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das vorliegende Modell der Hamilton-Mechanik durch diese Modelle der Matrizenmechanik, der Wellenmechanik und der durch Wetware instanziierten thermodynamischen Berechnung ergänzt wird, die denselben Prozess der Informationserzeugung und -komprimierung demonstrieren . Kortikale Neuronen lassen sich tatsächlich besser als Qubits beschreiben, die die von Neumann-Entropie kodieren, als als klassische Bits, die die Shannon-Entropie kodieren. Dieser theoretische Rahmen für Quantenberechnungen bei Umgebungstemperatur könnte nicht nur nützliche Einblicke in die Funktionsweise biologischer Systeme liefern, sondern auch Fortsc

Machine Translated by Google

Finanzierung: Der Autor erhielt für diese Arbeit Unterstützung vom Western Institute for Advanced Study sowie großzügige Spenden von Jason Palmer, Bala Parthasarathy und Dave Parker.

Datenverfügbarkeitserklärung: Alle Methoden, Materialien und Daten, die zur Wiederholung dieser Studie erforderlich sind, sind im Manuskript enthalten.

Interessenkonflikte: Der Autor erklärt, dass keine Interessenkonflikte bestehen. Die Geldgeber hatten keinen Einfluss auf die Gestaltung der Studie, auf die Erhebung, Analyse oder Interpretation der Daten, auf das Schreiben des Manuskripts oder auf die Entscheidung, die Ergebnisse zu veröffentlichen.

Verweise

1. **Softky, WR; Koch, C. Die höchst unregelmäßige Zündung kortikaler Zellen ist nicht vereinbar mit der zeitlichen Integration zufälliger EPSPs.** J. Neurosci. **1993,** 13, **334–350.** [CrossRef] [PubMed]
2. **Powers, RK; Binder, MD Effektive Modulation des synaptischen Stroms und der Motoneuron-Feuerrate.** J. Neurophysiol. **1995,** 74, **793–801.** [Querverweis] [PubMed]
3. **Stern, EA; Kincaid, AE; Wilson, CJ Spontane subthreshold Membranpotentialschwankungen und Aktionspotentialvariabilität von corticostriatalen und striatalen Neuronen der Ratte in vivo.** J. Neurophysiol. **1997,** 77, **1697–1715.** [CrossRef] [PubMed]
4. **Dorval, AD; White, JA Kanalrauschen ist für Perithreshold-Oszillationen in entorhinalen Sternneuronen von wesentlicher Bedeutung.** J. Neurosci. **2005,** 25, **10025–10028.** [CrossRef] [PubMed]
5. **Haider, B.; Duque, A.; Hasenstaub, AR; McCormick, DA Neokortikale Netzwerkaktivität in vivo wird erzeugt durch eine dynamische Gleichgewicht von Erregung und Hemmung.** J. Neurosci. **2006,** 26, **4535–4545.** [CrossRef] [PubMed]
6. **Beck, JM; Ma, WJ; Kiani, R.; Hanks, T.; Churchland, AK; Roitman, J.; Shadlen, MN; Latham, PE; Pouget, A. Probabilistische Populationscodes für Bayesianische Entscheidungsfindung.** Neuron **2008,** 60, **1142–1152.** [CrossRef] [PubMed]
7. **Maoz, O.; Tkaÿcik, G.; Esteki, MS; Kiani, R.; Schneidman, E. Lernen probabilistischer neuronaler Repräsentationen mit zufällig verbundene Schaltkreise.** Proc. Natl. Acad. Sci. USA **2020,** 117, **25066–25073.** [CrossRef] [PubMed]
8. **Fayaz, S.; Fakharian, MA; Ghazizadeh, A. Stimulus-Präsentation kann Spike-Unregelmäßigkeiten in subkortikalen und kortikalen Regionen.** PLoS Comput. Biol. **2022,** 18, **e1010256.** [CrossRef] [PubMed]
9. **Rinzel, J.; Miller, RN Numerische Berechnung stabiler und instabiler periodischer Lösungen der Hodgkin-Huxley-Gleichungen.** Math. Biosci. **1980,** 49, **27–59.** [CrossRef]
10. **Rowat, P. Interspike-Intervallstatistik im stochastischen Hodgkin-Huxley-Modell: Koexistenz von Gammafrequenz-Bursts und hochgradig unregelmäßige Zündung.** Neural Comput. **2007,** 19, **1215–1250.** [CrossRef]
11. **Austin, TD Die Entstehung der deterministischen Hodgkin-Huxley-Gleichungen als Grenzwert aus dem zugrunde liegenden stochastischen Ionenkanalmechanismus .** Ann. Appl. Prob. **2008,** 18, **1279–1325.** [CrossRef]
12. **Montbrió, E.; Pazó, D. Die exakte Mittelfeldtheorie erklärt die Doppelrolle elektrischer Synapsen bei der kollektiven Synchronisation.** **2020,** 125 , **248101.** [CrossRef] [PubMed]
13. **Goldman, JS; Kusch, L.; Aquilue, D.; Yalcinkaya, BH; Depannemaecker, D.; Ancourt, K.; Nghiem, T.-AE; Jirsa, V.; Destexhe, A.** **Eine umfassende neuronale Simulation von Tiefschlaf und hochreaktiver Wachheitsdynamik.** Front. Comput. Neurosci. **2021,** 16, **1058957.** [CrossRef] [PubMed]
14. **Ostojic, SJ Interspike-Intervallverteilungen von feuernden Neuronen, die durch schwankende Eingänge gesteuert werden.** J. Neurophysiol. **2011,** 106, **361–373.** [Querverweis] [PubMed]
15. **Armstrong, CM; Hille, B. Spannungsgesteuerte Ionenkanäle und elektrische Erregbarkeit.** Neuron **1998,** 20, **371–380.** [CrossRef] [PubMed]
16. **Chung, S.-H.; Hoyles, M.; Allen, T.; Kuyucak, S. Untersuchung ionischer Ströme durch einen Modellmembrankanal unter Verwendung der Brownschen Dynamik.** Biophys. J. **1998,** 75, **793–809.** [CrossRef]
17. **Stoll, EA Ein thermodynamisches Modell nichtdeterministischer Berechnungen in kortikalen neuronalen Netzwerken.** Phys. Biol. **2024,** 21, **016003.** [Querverweis]
18. **Born, M. Statistische Interpretation der Quantenmechanik.** Science **1955,** 122, **675–679.** [CrossRef] [PubMed]
19. **Pauli, W. Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren.** Z. Phys. **1925,** 31, **765–783.** [CrossRef]
20. **Caldeira, AO; Leggett, AJ Pfadintegralansatz zur quantenmechanischen Brownschen Bewegung.** Phys. A **1983,** 121, **587–616.** [CrossRef]
21. **Caldeira, AO; Leggett, AJ Quantentunneln in einem dissipativen System.** Ann. Phys. **1983,** 149, **374–456.** [CrossRef]
22. **Chang, L.-D.; Waxman, D. Quanten-Fokker-Planck-Gleichung.** J. Phys. C **1985,** 18, **5873–5879.** [CrossRef]
23. **Khriplovich, IB; Lamoreaux, SK** CP-Verletzung ohne Strangeness: Elektrische Dipolmomente von Teilchen, Atomen und Molekülen; **Springer: Berlin, Deutschland, 2012**
24. **Feynman, RP Kräfte in Molekülen.** Phys. Rev. **1939,** 56, **340.** [CrossRef]
25. **Esteve, JG; Falceto, F.; Garcia Canal, C. Verallgemeinerung des Hellmann-Feynman-Theorems.** Phys. Lett. A **2010,** 374, **819–822.** [Querverweis]
26. **Stoll, EA Ein energieeffizienter Prozess nichtdeterministischer Berechnungen fördert die Entstehung prädiktiver Modelle und explorativen Verhaltens.** Front. Cognit. **2024, 2, 1171273** [CrossRef]
27. **Bethe, HA Die elektromagnetische Verschiebung von Energieniveaus.** Phys. Rev. **1947,** 72, **339.** [CrossRef]
28. **Holstein, BA Die van der Waals Wechselwirkung.** Am. J. Phys. **2001,** 69, **441–449.** [CrossRef]

Machine Translated by Google

29. Landauer, R. Irreversibilität und Wärmeentwicklung im Rechenprozess. IBM J. Res. Dev. **1961, 5, 183–191. [CrossRef]**

30. Berut, A.; Arakelyan, A.; Petrosyan, A.; Ciliberto, S.; Dillenschneider, R.; Lutz, E. Experimentelle Überprüfung von Landauer Prinzip, das Information und Thermodynamik verbindet. Nature **2012,** 483, **187–189. [CrossRef]**

31. Jun, Y.; Gavrilov, M.; Beckhoefer, J. Hochpräziser Test des Landauer-Prinzips in einer Rückkopplungsfalle . 113, **190601. [CrossRef]**

32. Yan, LL; Xiong, TP; Rehan, K.; Zhou, F.; Liang, DF; Chen, L.; Zhang, JQ; Yang, WL; Ma, ZH; Feng, M. Einzelatomdemonstration des Quanten-Landauer-Prinzips. Phys. Rev. Lett. **2018,** 120, **210601. [CrossRef] [PubMed]**

33. Von Neumann, J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik; **Springer: Berlin, Deutschland, 1932; Band 205, S. 116277.**

34. Callen, HB; Welton, TA Irreversibilität und verallgemeinertes Rauschen. Phys. Rev. **1951,** 83, **34. [CrossRef]**

35. Tegmark, M. Warum das Gehirn wahrscheinlich kein Quantencomputer ist. Inf. Sci. **2000,** 128, **155–179. [CrossRef]**

36. Kubo, R. Das Fluktuations-Dissipations-Theorem. Rep. Prog. Phys. **1966,** 29, **255–284. [CrossRef]**

37. Martyushev, LM; Nazarova, AS; Seleznev, VD Zum Problem der minimalen Entropieproduktion im stationären Nichtgleichgewichtszustand. J. Phys. A **1966,** 40, **371–380. [CrossRef]**

38. Taube, JS Interspike-Intervallanalysen enthüllen unregelmäßige Feuerungsmuster in kurzen, aber nicht langen Intervallen in den Kopfrichtungszellen von Ratten. J. Neurophysiol. **2010,** 104, **1635–1648. [CrossRef] [PubMed]**

39. Naito, T.; Sadakane, O.; Okamoto, M.; Sato, H. Orientierungsabstimmung der Umgebungsunterdrückung im seitlichen Kniehöcker und im primären visuellen Kortex der Katze. Neuroscience **2007,** 149, **962–975. [CrossRef] [PubMed]**

40. Averbeck, BB; Latham, PE; Pouget, A. Neuronale Korrelationen, Populationskodierung und Berechnung. Nat. Rev. Neurosci. **2006, 7, 358–366. [CrossRef]**

41. Shadlen, MN; Newsome, WT Die variable Entladung kortikaler Neuronen: Auswirkungen auf Konnektivität, Berechnung und Informationskodierung. J. Neurosci. **1998,** 18, **3870–3896. [CrossRef]**

42. Lee, D.; Port, NL; Kruse, W.; Georgopoulos, AP Variabilität und korreliertes Rauschen bei der Entladung von Neuronen in motorischen und parietalen Bereichen des Primatenkortex. J. Neurosci. **1998,** 18, **1161–1170. [CrossRef]**

43. Cui, H.; Anderson, RA Verschiedene Darstellungen potenzieller und ausgewählter motorischer Pläne durch unterschiedliche parietale Bereiche. J. Neurosci. **2011,** 31, **18130–18136. [CrossRef]**

44. Jackson, A.; Mavoori, J.; Fetz, EE Korrelationen zwischen den gleichen motorischen Kortexzellen und Armmuskeln während einer trainierten Aufgabe, frei Verhalten und natürlicher Schlaf beim Makaken. J. Neurophysiol. **2007,** 97, **360–374. [CrossRef]**

45. Russo, AA; Bittner, SR; Perkins, SM; Seely, JS; London, BM; Lara, AH; Miri, A.; Marshall, NJ; Kohn, A.; Jessell, TM; et al. Der Motorkortex bettet muskelähnliche Befehle in eine entwirrte Populationsreaktion ein. Neuron **2018,** 97, **953–966. [CrossRef]**

46. Hubel, DH; Wiesel, TN Rezeptive Felder einzelner Neuronen im striären Kortex der Katze. J. Physiol. **1959,** 148, **574–591. [CrossRef]**

47. Mendonça, PR; Vargas-Caballero, M.; Erdélyi, F.; Szabó, G.; Paulsen, O.; Robinson, HP Stochastische und deterministische Dynamik intrinsisch unregelmäßiger Entladung in kortikalen hemmenden Interneuronen. eLife **2016, 5, e16475. [CrossRef]**

48. Wimmer, K.; Compte, A.; Roxin, A.; Peixoto, D.; Renart, A.; de la Rocha, J. Sensorische Integrationsdynamik in einem hierarchischen Netzwerk erklärt Auswahlwahrscheinlichkeiten im corticalen Bereich MT. Nat. Commun. **2015, 6, 6177 [CrossRef] [PubMed]**

49. Melloni, L.; Schwiedrzik, CM; Müller, N.; Rodriguez, E.; Singer, W. Erwartungen verändern die Signaturen und das Timing elektrophysiologischer Korrelate der Wahrnehmungswahrnehmung. J. Neurosci. **2011,** 31, **1386–1396. [CrossRef]**

50. Huang, S.; Hong, S.; De Schutter, E. Nichtlineare Leckströme beeinflussen die Physiologie von Säugetierneuronen. Front. Cell. Neurosci. **2015, 9, 432.**

51. Stoll, EA Zufälliges elektrisches Rauschen treibt nichtdeterministische Berechnungen in kortikalen neuronalen Netzwerken an. bioRxiv **2022. [CrossRef]**

52. Isojima, Y.; Isoshima, T.; Nagai, K.; Kikuchi, K.; Nakagawa, H. Ultraschwache Biochemie-Lumineszenz im Hippocampus von Ratten nachgewiesen Scheiben. Neuroreport **1995, 6, 658–660. [CrossRef]**

53. Kobayashi, M.; Takeda, M.; Sato, T.; Yamazaki, Y.; Kaneko, K.; Ito, K.; Kato, H.; Inaba, H. In-vivo-Bildgebung der spontanen ultraschwachen Photonenemission aus dem Gehirn einer Ratte in Korrelation mit dem zerebralen Energiestoffwechsel. Neurosci. Res. **1999,** 34, **103–113. [Querverweis] [PubMed]**

54. Kataoka, Y.; Cui, Y.; Yamagata, A.; Niigaki, M.; Hirohata, T.; Oishi, N.; Watanabe, Y. Aktivitätsabhängige Oxidation von Nervengewebe emittiert intrinsische ultraschwache Photonen. Biochem. Biophys. Res. Commun. **2001,** 285, **1007–1011. [CrossRef] [PubMed]**

55. Tang, R.; Dai, J. Räumlich-zeitliche Bildgebung von Glutamat-induzierten biophotonischen Aktivitäten und Übertragung in neuronalen Schaltkreisen. PLoS ONE **2014, 9, e85643. [CrossRef] [PubMed]**

56. Amaroli, A.; Marcoli, M.; Venturini, A.; Passalacqua, M.; Agnati, LF; Signore, A.; Raffetto, M.; Maura, G.; Benedicenti, S.; Cervetto, C. Nahinfrarot-Laserphotonen induzieren die Glutamatfreisetzung aus cerebrokortikalen Nervenendigungen. J. Biophotonics **2018,** 11, **e201800102. [CrossRef] [PubMed]**

57. Naeser, MA; Ho, MD; Martin, PI; Hamblin, MR; Koo, BB Verbesserte funktionelle Konnektivität innerhalb intrinsischer neuronaler Netzwerke bei chronischem Schlaganfall nach Behandlung mit roter/nahinfraroter transkranieller Photobiomodulation. Photobiomodul. Photomed. Laser Surg. **2020,** 38, **115–131. [PubMed]**

58. Tan, X.; Rajguru, S.; Young, H.; Xia, N.; Stock, SR; Xiao, X.; Richter, CP Strahlungsenergie, die für die neuronale Stimulation durch Infrarot erforderlich ist. Sci. Rep. **2015, 5, 13273. [CrossRef] [PubMed]**

59. Stoll, EA Die Modellierung von Elektroneninterferenzen an der neuronalen Membran ergibt eine holographische Projektion repräsentativer Informationen Inhalt. bioRxiv **2022. [CrossRef]**

Machine Translated by Google

60. Levy, WB; Calvert, VG Kommunikation verbraucht 35 mal mehr Energie als Berechnungen im menschlichen Kortex, aber beide Kosten sind erforderlich, um die Synapsenzahl vorherzusagen. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **2021,** 118, **e2008173118.** [CrossRef]

61. Buzsaki, G.; Draguhn, A. Neuronale Oszillationen in kortikalen Netzwerken. Science **2004,** 304, **1926–1929.** [CrossRef]

62. Engel, AK; Singer, W. Zeitliche Bindung und die neuronalen Korrelate der sensorischen Wahrnehmung. Trends Cogn. Sci. **2001, 5, 16–25.** [Querverweis]

63. Stacey, WC; Krieger, A.; Litt, B. Netzwerkrekrutierung zu kohärenten Schwingungen in einem hippocampalen Computermodell. J. Neurophysiol. **2011,** 105, **1464–1481.** [CrossRef]

64. Whittington, MA; Cunningham, MO; LeBeau, FEN; Racca, C.; Traub, RD Mehrere Ursprünge des kortikalen Gammarhythmus. Dev. Neurobiol. **2010,** 71, **92–106.** [CrossRef]

65. Timofeev, I.; Bazhenov, M.; Seigneur, J.; Sejnowski, T. Neuronale Synchronisation und thalamokortikale Rhythmen im Schlaf, im Wachzustand und bei Epilepsie. In Jasper's Basic Mechanisms of the Epilepsies, **4. Auflage; Oxford University Press: Oxford, Großbritannien, 2012.**

66. Gansel, KS Neuronale Synchronizität in kortikalen Netzwerken: Mechanismen und Implikationen für die Verarbeitung und Kodierung neuronaler Informationen. Vorderseite. Integr. Neurosci. **2022,** 16, **900715.** [CrossRef]

67. Astumian, RD; Moss, F. Die konstruktive Rolle von Rauschen bei fluktuationsgetriebenem Transport und stochastischer Resonanz. Chaos **1998, 8, 533–538.** [CrossRef] [PubMed]

68. Lucarini, V. Stochastische Resonanz in Nichtgleichgewichtssystemen. Phys. Rev. E **2019,** 100, **062124.** [CrossRef]

69. Lindner, B.; Schimansky-Geier, L. Analytische Annäherung an das stochastische Fitz-Hugh-Nagumo-System und die Kohärenzresonanz. Chem. Rev. E **1999,** 60, **7270–7276.** [CrossRef]

70. Lindner, B.; Garcia-Ojalvo, J.; Neiman, A.; Schimansky-Geier, L. Auswirkungen von Rauschen in erregbaren Systemen . 392, **321–424.** [CrossRef]

71. Valenti, D.; Augello, G.; Spagnolo, B. Dynamik eines FitzHugh-Nagumo-Systems, das autokorreliertem Rauschen ausgesetzt ist. Eur. Phys. J. B **2008,** 65, **443–451.** [CrossRef]

72. Surazhevsky, IA; Demim, VA; Ilyasov, AI; Emelyanov, AV; Nikiruy, KE; Rylkov, VV; Shchanikov, SA; Bordanov, IA; Gerasimova, SA; Guseinov, DV; et al. Rauschunterstützte Persistenz und Wiederherstellung des Gedächtniszustands in einem memristiven, spitzenden neuromorphen Netzwerk. Chaos **2021,** 146, **110890.**

73. Geisler, C.; Brunel, N.; Wang, XJ Beiträge der intrinsischen Membrandynamik zu schnellen Netzwerkoszillationen mit unregelmäßigen neuronale Entladungen. J. Physiol. **2005,** 94, **4344–4361.**

74. Brunel, N. Dynamik dünn vernetzter Netzwerke erregender und hemmender Neuronen. J. Comput. Neurosci. **2000, 8, 183–208.** [CrossRef]

75. Csibra, G.; Davis, G.; Spratling, MW; Johnson, MH Gamma-Oszillationen und Objektverarbeitung im kindlichen Gehirn. Science **2000,** 290, **1582–1585.** [CrossRef] [PubMed]

76. Herrmann, CS; Knight, RT Mechanismen der menschlichen Aufmerksamkeit: Ereigniskorrelierte Potentiale und Schwingungen. Neurosci. Biobehav. Rev. **2001,** 25, **465–476.** [CrossRef] [PubMed]

77. Hameroff, SR; Penrose, R. Bewusstsein im Universum: Eine Überprüfung der „OrchOR"-Theorie. Phys. Life Rev. **2014,** 11, **39–78.** [Querverweis] [PubMed]

78. Khalid, M.; Wu, J.; Ali, TM; Ameen, T.; Altaher, AS; Moustafa, AA; Zhu, Q.; Xiong, R. Cortico-Hippocampale computergestützte Modellierung unter Verwendung quanteninspirierter neuronaler Netzwerke. Front. Comput. Neurosci. **2020,** 14, **80.** [CrossRef] [PubMed]

79. Wang, Z.; Xu, M.; Zhang, Y. Quantenpulsgekoppeltes neuronales Netzwerk. Neural Netw. **2022,** 152, **105–117.** [CrossRef] [PubMed]

80. Jeswal, SK; Chakraverty, S. Jüngste Entwicklungen und Anwendungen in Quanten-Neuronalen Netzwerken: Ein Überblick. Arch. Comput. Methods Eng. **2019,** 26, **793–807.** [CrossRef]

81. Adair, RK Rauschen und stochastische Resonanz in spannungsgesteuerten Ionenkanälen. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **2003,** 100, **12099–12104.** [Querverweis]

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Vorschläge zur Netzwerkgüterechnung

Marina Bershadsky 1,†, Božidar Ivankovi´c 2,* ,† und Marko Puši´c 2,†

1 Fakultät für Informatik, Shamoon College of Engineering (SCE), 56 Bialik, Be'er Sheva 8410802, Israel; Marinab@ac.sce.ac.il
Fachhochschule Hrvatsko
2 Zagorje Krapina, Šetalište Hrvatskog Narodnog Preporoda 6, 49000 Krapina, Kroatien; marko.pusic@vhzk.hr

* Korrespondenz: bozidar.ivankovic@vhzk.hr; Tel.: +385-98-407-189
† Diese Autoren haben zu gleichen Teilen zu der Arbeit beigetragen.

Zusammenfassung: Wir prägen den Begriff „Netzwerkgüte“ für einen Wert, den wir für ein in eine bestimmte Umgebung eingebettetes Netzwerk als Metrik definieren, die die Eignung dieses Netzwerks zur Erfüllung einer Nachfrage beschreibt. Es werden drei Formeln vorgeschlagen, um die Metrik aus drei variablen Werten zu berechnen. Die erste Variable berücksichtigt Teile der Umgebung, die vom Netzwerk angezogen werden. Für diese Teile der Umgebung definieren wir einen Wert, der die Kosten misst, die den Benutzern entstehen, wenn ihnen die Nutzung des Netzwerks verweigert wird. Zu guter Letzt werden die Kosten für die Netzwerkwartung berücksichtigt. Die Ergebnisse werden erzielt, nachdem der Schwerpunkt auf Infrastruktur- und Transportnetzwerke gelegt wurde, können aber auch für andere Netzwerktypen verwendet

Schlüsselwörter: Netzwerkbewertung, Netzwerkgüte, Nachfragezentrum, Netzwerkträgheit

1. Einleitung

Ein Netzwerk ist so konzipiert, dass es die Anforderungen einer bestimmten Umgebung erfüllt. Es gibt drei Wesentliche Faktoren, die bei der Bewertung eines Netzwerks in einer beliebigen

Umgebung berücksichtigt werden müssen: - Die Reichweite des Netzwerks innerhalb der Umgebung; - Die Verfügbarkeit des Netzwerks für Benutzer, wie sie sich in den für den Benutzer entstehenden Kosten widerspiegelt; - Die mit dem Netzwerk verbundenen Wartungskosten.

Wenn die Nachfrage die Netzwerkkapazität übersteigt, können einige Bereiche möglicherweise nicht bedient werden, der Service kann teurer werden oder die Wartungskosten können steigen. Außerdem können mehrere Netzwerke in dieselbe Umgebung eingebettet sein, um die Nachfrage einer Umgebung zu bedienen

Um die Funktion eines Netzwerks zu bewerten, haben wir in diesem Artikel die Funktion „Netzwerkgüte“ definiert und Formeln zur Berechnung von Gütewerten und zum Vergleich von zwei oder mehr Infrastrukturnetzwerken vorgeschlagen, die in derselben Umgebung eingebettet sind. Wir haben auch gründlic

Alle Theoreme, Propositionen, Lemmata und Korollare lassen sich nur schwer glaubhaft beweisen, da in der verfügbaren Literatur bislang kein ähnlicher Ansatz verfolgt wurde.

Der derzeit vorherrschende Begriff zur Bewertung von Netzwerkfunktionen ist „Quality of Service“ (QoS), und im Laufe der Jahre wurden viele Millionen Artikel zu diesem Thema veröffentlicht . Eine kürzlich veröffentlichte Arbeit von Kanellopoulos et al. in [1] bietet einen umfassenden Überblick über Netzwerkarchitekturen und -protokolle. Die Autoren präsentieren jedoch nur einen qualitativen Vergleich der Netzwerkanforderungen für einige Smart City-Anwendungen (SCAs) und vergeben keine Gesamtpunktzahl, die eine Einstufung der Alternativen ermöglichen würde. Karakus und Durresi haben einen umfassenden Überblicksartikel [2] zur umfassenden Untersuchung von QoS in Software-Defined Networking (SDN)/OpenFlow-Netzwerken verfasst. Die Autoren bieten einen detaillierten Überblick über die SDN-Architektur und unterteilen 43 verschiedene Methoden gemäß zwei Ansätzen zur Aufrechterhaltung der Fähigkeit eines Netzwerks, die erforderlichen Dienste für ein ausgewähltes Verkehrsszenario bereitzustellen . Obwohl klar ist, dass das weiche Quality and Outcomes Framework (QoF) den harten QoF-Ansatz übertrifft, ist keine quantitative Metrik definiert.

check for updates

Zitat: Bershadsky, M.; Ivankovi´c, B.; Puši´c, M. Netzwerkgüte Infinitesimalrechnung. AppliedMath 2024, 4, 828–842. https://doi.org/ 10.3390/ appliedmath4030044

Wissenschaftlicher Herausgeber: Takayuki Hibi

Erhalten: 12. Januar 2024
Überarbeitet: 10. Juni 2024
Akzeptiert: 20. Juni 2024
Veröffentlicht: 2. Juli 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.
Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

Machine Translated by Google

In anderen Arbeiten werden Netzwerkeinbettungen im Hinblick auf die Lösung komplexer Probleme diskutiert, sobald ein Netzwerk definiert ist. In [3] wird die Social Network Analysis (SNA) als leistungsfähige Technik zum Aufbau und zur Aufrechterhaltung sozialer Beziehungen innerhalb des Netz In sozialen Netzwerken interagieren und kommunizieren Benutzer miteinander und veröffentlichen auch personalisierte Inhalte. Das neuartige Dynamic Attributed Network Embedding (DANE) wird in [4] experimentell untersucht , um Lernaufgaben wie Knotenklassifizierung, Netzwerk-Clusterbildung und Link-Vorhersage voranzutreiben. Die Netzwerkeinbettung nutzt die Knotennähe, um eine niedrigdimensionale Knotenvektordarstellung für jeden Knoten innerhalb des bestehenden sozialen Netzwerks zu erlernen und untersucht so, wie soziale Beziehungen hergestellt und entwickelt werden. Die SNA-Werte werden jedoch auch nur qualitativ angegeben, da DANE ausgewertet wird. In [5] betrachten Salkhi et al. Netzwerke als Mittel zur Bewertung struktureller Isolation und Knotenintegration, zur Beurteilung ihrer Erreichbarkeit und Navigierbarkeit innerhalb des Graphen und zur Vorhersage potenzieller struktureller Änderungen, die die Entwicklung des Netzwerks beeinflussen können. Allerdings wird auch hier kein quantitativer Wert angegeben, um entweder Isolation oder Integration im gegebenen Szenario zu messen.

Als Anwendungsbereich für die Präsentation unseres Ansatzes haben wir öffentliche Verkehrsnetze gewählt. Normalerweise entstehen Verkehrsinfrastrukturnetze auf natürliche Weise, wenn die Nachfrage in einer Umgebung steigt. Ein bestehendes Netz kann die Anforderungen der Umgebung jedoch nicht rechtzeitig Im letzten Abschnitt haben wir verschiedene Alternativen für ÖPNV-Routen vorgestellt, die ein Verkehrsmittel mit ausreichendem Volumen und ausreichender Geschwindigkeit aufnehmen könnten, um den ÖPNV so attraktiv wie möglich zu machen. Trotz Recherche in der verfügbaren Literatur konnten wir kein Instrument zur quantitativen Auswahl heuristisch gezeichneter Varianten finden.

Bogdanova et al. untersuchen in [6] die Verkehrseinrichtungen einer komfortablen städtischen Umgebung , wobei der „Netzkomfort“ anhand der Anzahl der Benutzer gemessen wird, die weniger als 500 (oder 800) Meter zur Fahrt haben, im Verhältnis zur Gesamtbevölkerung. Die Sicherheitsbewertung des öffentlichen Verkehrsnetzes errechnet sich aus der Zahl der im öffentlichen Nahverkehr verletzten Bürger dividiert durch die Gesamtzahl der Fahrgäste, die ihn nutzen. Verkehrssysteme sind für moderne Volkswirtschaften immer wichtiger geworden, wie Colon et al. in [7] beschreiben. In [8] schlägt Guliot ein Entscheidungstool vor, das mehrere alternative Szenarien für die Neukonfiguration von Verkehrsdiensten bietet . Jedes Szenario umfasst eine Reihe bestehender Linien, die geschlossen werden sollen, und das entsprechende Verspätungsprofil, das durch die Schließung jeder Linie verursacht wird. Eine andere Studie von Wang et al. [9] befasst sich mit der unausgewogenen Stadtentwicklung durch Verbesserung der Verkehrseffizienz, Verringerung von Verkehrsstaus und Unfällen und Koordination des Nahverkehrs. Kuo et al. in [10] betonen sie die Bedeutung eines jederzeit verfügbaren öffentlichen Nahverkehrs, der die Nachfrage in Echtz In [11] stellen Nes et al. ein Optimierungsmodell zur Routenauswahl, Frequenzzuweisung und Bestimmung der Fahrgastzahlen im bestehenden Netz durch die Generierung einer Menge möglicher Routen vor.

Der Rest dieses Dokuments ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 führen wir unsere Terminologie ein und skizzieren die Methodik, einschließlich Lemmata und Theoreme und deren Beweise, die unseren Ansatz untermauern. In Abschnitt 3 präsentieren wir Ergebnisse und diskutieren sie. Im folgenden Abschnitt bieten wir ein Beispiel für unseren vorgeschlagenen Ansatz (Abschnitt 4) und im letzten Abschnitt präsentieren wir Schlussfolgerungen (Abschnitt 5).

2. Terminologie und grundlegende Theorie

In diesem Abschnitt definieren wir die Begriffe, die wir in Theoremen und Lemmata verwenden. Unsere Terminologie verwenden wir aus den Bereichen Mengenlehre, Graphentheorie und analytische geometrische Analysis. Zunächst nehmen wir an, dass sich jede Umgebung innerhalb eines „Bodens“ befindet: eines Staates, eines Kontinents oder der Erde als Ganzes. Der Boden ist eine zweidimensionale Ebene.

Definition 1 (Netzwerkumgebung und -größe). Die Netzwerkumgebung **U** ist ein Teil des Geländes, der eindeutig durch seine Verwaltungsgrenzen oder auf andere eindeutige Weise definiert ist und bestimmt, welche Standorte innerhalb und welche außerhalb des Geländes liegen. Die Fläche von **U** wird mit **μ(U)** bezeichnet und in Quadraten gemessen .

Machine Translated by Google

Die Netzwerkumgebung ist in Zonen unterteilt, die Bedarfspunkte umfassen, an denen die Nachfrage konzentriert ist. Verschiedene Zonen teilen sich nicht die gleichen Bedarfspunkte: mathematisch gesehen sind sie voneinander getrennt.

Definition 2 (Nachfragezone und Nachfragepunkt). Die Nachfragezone T_i, $i = \mathbf{1, \ldots, n}$ ist Teil der Netzwerkumgebung: $T_i \ddot{y} U$. Weiterhin gilt für alle **i,** j, $\mathbf{U} = \bigcup_{i=1}^{N} T_i$ und $T_i \ddot{y} T_j = \ddot{y}$ für $i \ddot{y} = j$.

Der Nachfragepunkt $P_{ij} \ddot{y} T_i$, $j = \mathbf{1, \ldots,} m(i)$ ist ein Punkt mit positivem assoziierten Wert $Q(P_{ij})$, der konzentriert sich die Nachfrage auf P_{ij}.

Die Anzahl der Bedarfspunkte beträgt $m(i)$ **und variiert von Zone zu Zone. Die formale Definition finden Sie weiter unten.**

Definition 3. Angenommen, für jedes T_i gibt es $m(i) \ddot{y} N$ und eine endliche Menge $\mathbf{N^{-}} = \mathbf{\{1, 2, \ldots,} m(i)\}$ mit der injektiven Funktion $p_i : \mathbf{N^{-}} \ddot{y} T_i$, bezeichnet als $p_i(j) = P_{ij}$, und $p_i(j) \ddot{y} = p_i(k)$, wenn $j \ddot{y} = k$. Dann ist $Q_i : p_i(N^{-}) \ddot{y} R+$ die Nachfragemenge, die im Nachfragepunkt P_{ij} gegeben ist, bezeichnet als $Q_i(P_{ij}) = Q_{ij}$.

Um die Netzwerkgüte zu berechnen, benötigen wir Koordinaten, ein Zahlenpaar, das bestimmt eindeutig die Position eines Punktes auf der Ebene.

Definition 4 (Koordinierte Netzwerkumgebung). Eine Umgebung ist koordiniert, wenn jeder Punkt eindeutig durch ein Paar reeller Zahlen (x, y) definiert werden kann.

Die Koordinaten sind für algebraische Berechnungen notwendig, und wir garantieren dies durch und beweist damit das folgende Lemma.

Lemma 1. Jede Netzwerkumgebung kann koordiniert werden.

Beweis von Lemma 1. Wir setzen einen wohlbekannten Ort in der Umgebung als Paar (0, 0). **Wir setzen die West-Ost-Richtung durch (0,** 0) **als Abszisse und die Süd-Nord-Richtung als Ordinatenachse. Dann ist jeder Punkt** P **ÿ U** eindeutig durch das Paar P **ÿ** (x, y) **definiert . Normalerweise gilt Pij** = (xij, yij).

□

Unser Ziel ist die Bewertung eines Netzwerks. Dazu müssen wir algebraisch definieren: „Segment“ zwischen zwei Punkten.

Definition 5. Ein Segment zwischen zwei Punkten A und B mit den Koordinaten (xA, yA) bzw. (xB, yB) ist eine Menge, die aus allen Punkten auf der geraden Linie besteht, die die beiden Punkte verbindet.

$$\overline{AB} = \{P : P = \mathbf{(1 \ddot{y} t)}A + tB, t \ddot{y} \mathbf{[0, 1]}\}. \quad \mathbf{(1)}$$

In der Graphenterminologie [12] ist ein Graph ein Paar G = (N, E) , **das durch eine gegebene Menge von Knoten** N **und eine Menge von Kanten** E definiert ist , **die als Relation** E **ÿ** N **× N gegeben sind. Dies bedeutet, dass** E **eine Menge von Paaren ist, die aus der Menge aller möglichen Paare aller in N gegebenen Knoten entnommen wurden. In unserem Aufsatz ist ein Netzwerk ein verbundener Graph** G = (N, E), **wobei** E **eine Menge von Segmenten und** N **eine Menge ihrer Endpunkte ist. Da** E **ÿ** N **× N ist, ist ein Netzwerk korrekt definiert, und wir beweisen dies formal im folgenden Theorem, wobei** E = N **× N.**

Satz 1. Jede Menge von Segmenten definiert einen Graphen.

Beweis von Theorem 4. Für eine gegebene Menge von Segmenten $\{\overline{A_iB_i}, i = \mathbf{1, 2, \ldots s}\}$ **bezeichnen wir jedes Segment** $\overline{A_iB_i} = (A_i, B_i)$ **als Element in der Menge der Kanten** $E = \{(A_i, B_i)\ i = \mathbf{1, 2, \ldots s}\}$**, mit** |E| = **s. Weiterhin liefert jedes Segment** $\overline{A_iB_i}$ **zwei Punkte in der Menge der Knoten** $N = \{A_i, B_i\ i = \mathbf{1, 2, \ldots s}\}$ **mit** |N| **ÿ** 2s **Elementen, da verschiedene Segmente einen Endpunkt in**

Machine Translated by Google

gemeinsam. Dann erzeugt die gegebene Segmentmenge G = (N, E) **mit** E = N **×** N **ÿ** N **× N, im bekannten Sinn der Graphdefinition.** □

Ein Pfad ist eine Folge von verketteten Segmenten. Pfadsegmente {AiBi , i = **1, ... , p} gelten als verkettet, wenn ein Segmentendpunkt mit dem Startpunkt des nächsten Segments oder dem Endpunkt des Pfades übereinstimmt:** Bi = Ai+1 , i = **1, ... ,** p **- 1. Abbildung 3 zeigt einen Pfad.**

Für die folgende Definition benötigen wir den Pfadterm.

Definition 6 (Zusammenhängender Graph). Ein Graph ist zusammenhängend, wenn ein beliebiges Knotenpaar einen Pfad hat, der beginnt an einem und endet am anderen Knoten.

Das Konzept eines verbundenen Graphen ist notwendig, um in unserem Artikel ein Netzwerk zu definieren, da nicht jeder Graph ein Netzwerk ist. Definition 6 führt uns zur Definition des Netzwerks, das wir in unserem Artikel auswerten und das unten angegeben ist.

Definition 7 (Netzwerk). Ein Netzwerk ist ein verbundener Graph, der aus einer Reihe von Segmenten besteht.

Im folgenden Theorem beweisen wir, dass jedes durch Gleichung (1) definierte Segment **entspricht einer eindeutigen Gleichung, die aus den Randpunkten des Segments abgeleitet wird.**

Satz 2. Wir lassen A = (xA, yA) und B = (xB, yB) Punkte in einer Umgebung sein, die von einem Koordinatengitter abgedeckt wird. Dann ist das Segment AB definiert als Menge

$$\overline{AB} = \{(x, y) \text{ ÿ } [xA, xB] \times [yA, yB] : (yB \text{ ÿ } yA)x + (xA \text{ ÿ } xB)y + xByA \text{ ÿ } xAyB = 0\}. \quad (2)$$

Beweis von Theorem 2. Aus Lemma 1 und Gleichung (1) erhalten wir x ÿ xA = t(xB ÿ xA), y ÿ yA y ÿ yA = yA) **und** $\frac{x \text{ ÿ } xA}{xB \text{ ÿ } xA} = \frac{t(yB \text{ ÿ }}{}$ **. Da** t ÿ **[0,** 1], **haben wir** (x, y) ÿ yB ÿ yA [xA, xB] **×** [yA, yB]. **Nun** ergibt (yB ÿ yA)(x ÿ xA) ÿ (xB ÿ xA)(y ÿ yA) = **0 Gleichung (2).** y ÿ yA = **t. Wenn** (x, y) ÿ

Aus Gleichung (2) ergibt sich weiterhin, dass $\frac{x \text{ ÿ } xA}{xB \text{ ÿ } xA} = \frac{}{yB \text{ ÿ } yA}$

[xA, xB] **×** [yA, yB], **dann** ist t ÿ **[0,** 1], **und Gleichung (1) ergibt sich sofort.** □

Abbildungÿ1 veranschaulicht die Positionen der verschiedenen Punkte außerhalb des betreffenden Segments. Nachdem Gleichung (2) bewiesen ist, können wir mit Theorem 2 die quadratische Distanz zwischen einem Punkt und einem Segment berechnen . Im folgenden Theorem leiten wir die Formeln für die quadratische Distanz für die Position jedes in Abbildung 1 dargestellten Punkts her.

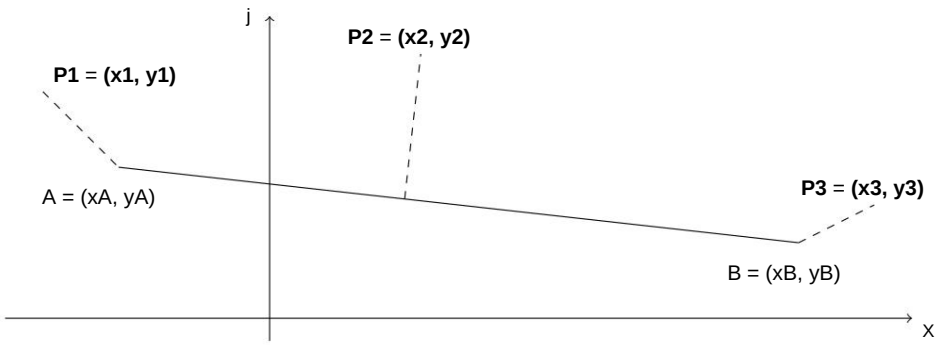


Abbildung 1. Entfernungen vom Segment im Zusammenhang mit den Positionen der Nachfragezonen.

Theorem 3. Die quadratische Distanz zwischen dem Punkt P = (x, y) **ÿ {P1, P2, P3}** und der Strecke $\overline{AB}$ ist gegeben durch

$$^{2}_{\text{Tage}}(P, \overline{AB}) = (x \text{ ÿ } xA)^{2} + (y \text{ ÿ } yA)^{2}, \text{ wenn } (x \text{ ÿ } xA)(xB \text{ ÿ } xA) + (y \text{ ÿ } yA)(yB \text{ ÿ } yA) < 0 \quad (3)$$

$$^{2}_{\text{Tage}}(P, \overline{AB}) = (x \text{ ÿ } xB)^{2} + (y \text{ ÿ } yB)^{2}, \text{ wenn } (x \text{ ÿ } xB)(xA \text{ ÿ } xB) + (y \text{ ÿ } yB)(yA \text{ ÿ } yB) < 0 \quad (4)$$

Machine Translated by Google

oder

$$\text{Tage}^{2}(P, \overline{AB}) = + \frac{[(yB \ddot{y} yA)x + (xA \ddot{y} xB)y + xByA \ddot{y} xAyB]^{2}}{(yB \ddot{y} yA)^{2} \quad (xA \ddot{y} xB)^{2}} \tag{5}$$

in allen anderen Fällen.

Gleichung (5) ergibt sich, wenn wir ÿÿAB definieren **als lineare Kombination von Vektoren** ÿi = **(1,** 0) **ÿ (0,** 0) **und ÿj** = **(0,** 1) **ÿ (0,** 0), **was die Einheitsschritte in Ost- bzw. Nordrichtung darstellt . Dann ist der Vektor** ÿÿAB **gegeben durch**

$$ÿÿAB = (xB \ddot{y} xA)ÿi + (yB \ddot{y} yA)ÿj, \tag{6}$$

wobei A = (xA, yA) **und** B = (xB, yB) **bereits definiert sind. Der Kosinus des Winkels** ÿ(PAB) **mit dem Scheitelpunkt bei A ist gegeben durch die Formel**

$$\cos(ÿPAB) = \frac{ÿÿAP \cdot ÿÿAB}{ÿÿAP2 \cdot ÿÿAB2\,.} \tag{7}$$

Hier stellen wir fest, dass ÿi ·ÿj = **0 und ÿi 2** = ÿj **2** = **1. Weiterhin** gilt cos(ÿPAB) < **0 für 90ÿ ÿ und 180ÿ** , cos(ÿPAB) > **0 für 0ÿ ÿ** ÿPAB **ÿ 90ÿ .** ÿPAB **ÿ**

Darüber hinaus bilden wir das Kreuzprodukt ÿi ×ÿj **mit ÿi** ×ÿj = ÿÿj ×ÿi **und der Fläche** |ÿi ×ÿj| = **1. Genauer gesagt** ist ÿi ×ÿj **ein Vektor senkrecht** zu ÿi und ÿj, **er gehört also nicht zur Umgebung Be Anschließend folgt der Beweis von Theorem 3. Weitere Details zu Vektorprodukten finden sich in [13].**

Beweis von Theorem 3. Im Fall P = **P1 haben wir** ÿÿAP · ÿÿAB < **0, und dann ist Gleichung (3) gültig. Wenn** P = **P3, dann** ist ÿÿBP · ÿÿBA < **0, und Gleichung (4) ist gültig.**

In anderen Fällen setzen wir die Flächen des Dreiecks ÿ(PAB) gleich , **die mit zwei Ansätzen berechnet wurden,**

$$\frac{1}{2} \cdot d(P, \overline{AB}) \cdot |\overline{AB}| = \frac{1}{2} |\, ÿÿAP \times ÿÿBP|, \tag{8}$$

wobei das Vektorprodukt im dreidimensionalen Raum berechnet wird, nachdem die Umgebung U im Sinne von P = (x, **y,** 0) **eingebettet wurde . Der Betrag auf der rechten Seite in Gleichung (8) ist gleich**

$$\begin{aligned} &|[(x \ddot{y} xA)ÿi + (y \ddot{y} yA)ÿj] \times [(x \ddot{y} xB)ÿi + (y \ddot{y} yB)ÿj]| = | \\ &x(yA \ddot{y} yB) + y(xB \ddot{y} xA) + xAyB \ddot{y} xByA| \cdot |ÿi \times ÿj| = |(yB \ddot{y} \\ &yA)x + (xA \ddot{y} xB)y + xByA \ddot{y} xAyB|, \end{aligned} \tag{9}$$

weil Fläche |ÿi ×ÿj| = **1. Auf der linken Seite der Gleichung (8) haben wir**

$$d(P, \overline{AB}) \cdot \sqrt{(xA \ddot{y} xB)^{2} + (yA \ddot{y} yB)^{2}}. \tag{10}$$

Wenn wir die Gleichungen **(9) und (10) in Gleichung** (8) **einsetzen , erhalten wir nach dem Aufräumen (5).** □

In Definition 2 definieren wir einen Bedarfspunkt als einen Punkt, dem eine positive Zahl zugewiesen ist , die den Bedarf an diesem Punkt darstellt. Es ist wichtig zu beachten, dass nicht jeder Punkt einen Bedarfswert hat. Gemäß Definition 2 enthält eine Bedarfszone nur eine begrenzte Anzahl von Bedarfspunkten. Wenn ein Punkt in der Bedarfszone keinen Bedarf hat, ist

3. Ergebnisse und Diskussion

In diesem Abschnitt erklären wir die Grundlagen unserer Theorie, beginnend mit dem Zonennachfragezentrum. Jede Nachfragezone hat einen eindeutigen Nachfragezentrumspunkt. Dieser Punkt wird ähnlich wie die Schwerpunktberechnung in der Physik berechnet. Hier wird die Berechnung als folgendes Theorem angegeben.

Machine Translated by Google

Theorem 4 (Zonennachfragezentrum). Jede Nachfragezone Ti hat einen eindeutigen Nachfragezentrumspunkt Pi mit den Koordinaten Pi = **(xTi , yTi),** berechnet mit der Formel

$$\mathbf{xTi} = \frac{Qi1 \cdot xi1 + Qi2 \cdot xi2 + \cdots + Qim(i) \cdot xim(i)}{\mathbf{Q(Ti)}}$$

$$\mathbf{yTi} = \frac{Qi1 \cdot yi1 + Qi2 \cdot yi2 + \cdots + Qim(i) \cdot yim(i)}{\mathbf{Q(Ti)}}, \qquad \textbf{(11)}$$

wobei **Q(Ti)** = Qi1 + Qi2 + · · · + Qim(i) die gesamte Zonennachfrage konzentriert auf Pi ist .

Die Anzahl der Bedarfspunkte innerhalb von Ti **hängt von** Ti ab **und wird daher mit** m(i) bezeichnet.

Beweis von Theorem 4. Wir beweisen die Berechnung der x-Koordinate aus Gleichung (11), indem wir die Punkte P1 := Pi1 **und P3 :=** Pi3 **aus Abbildung 1 nehmen. Wenn wir annehmen, dass Masse** Qi1 > Qi3 **ist, dann** liegen xi1 **und ihr Schwerpunkt xi13 auf der Abszissenachse, wie in Abbildung 2** gezeigt. xi3 ,

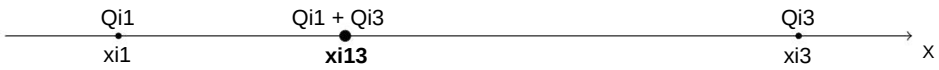


Abbildung 2. Berechnung des Bedarfszentrums mit zwei Bedarfspunkten.

Der Mittelpunkt xi13 der „Wippe“ in Abbildung 2 muss dem folgenden „Gleichgewichtsgesetz“ genügen:

$$Q(Pi1) \cdot (xi13 \ddot{y} \mathbf{xi1}) = Q(Pi3) \cdot (xi3 \ddot{y} \mathbf{xi13}). \qquad \textbf{(12)}$$

Nach Gleichung (12) ist die Abszissenlage des Schwerpunktes

$$\mathbf{xi13} = \frac{Qi1xi1 + Qi1xi1}{Qi1 + Qi1}. \qquad \textbf{(13)}$$

Als nächstes erweitern wir die Berechnung um P2 := Pi2 . **Angenommen,** Q(Pi2) **ÿ** Qi1 + Qi3 , **dann Wir erhalten wir den Schwerpunkt zwischen (13) mit** Qi1 + Qi3 **und P2 :=** Pi2 **mit** Q(Pi2):

$$\mathbf{xi132} = \frac{Qi1xi1 + Qi3xi3 + Qi2xi2}{Qi1 + Qi3 + Qi2}. \qquad \textbf{(14)}$$

Weiterführend erhalten wir einen vorletzten Schwerpunkt:

$$xi1...[m(i)\ddot{y}1] = \frac{\ddot{y}_{j=}^{m(i)\ddot{y}1} Qijxij}{\ddot{y}_{=1}^{1\ m(i)\ \ddot{y}\ 1} Qij}. \qquad \textbf{(15)}$$

Zusammen mit dem letzten Bedarfspunkt gelangen wir zu Gleichung (11) (dieses Verfahren wird allgemein als „nachdenkender Durchschnitt“ bezeichnet).

Die quadratische Distanz zwischen der Bedarfszone und dem Netzwerk ist die minimale quadratische Distanz zwischen dem Zentrum der Bedarfszone und einem Netzwerksegment. Der folgende Satz garantiert Existenz und Eindeutigkeit.

Theorem 5. Für ein gegebenes Netzwerk $\bigcup_{j=1}^{s} AjBj$, und für jedes Pi , wobei i = **1, . . . ,** n, existiert

$$\text{ich}^{2\,2\,d=d}(Pi) = \mathbf{min}_J\{d^2(Pi, AjBj)\}, \text{ für jedes i = } \mathbf{1, . . . ,} \ \mathbf{N.} \qquad \textbf{(16)}$$

Machine Translated by Google

Im folgenden Beweis zeigen wir die Induktion als Anregung für Programmanwendungen. Im Beispielabschnitt verwenden wir nur das Excel-Tool zur Berechnung der Mindestdistanz, obwohl die Anzahl der Segmente und Zonen groß ist.

Beweis von Theorem 5. Da das Netzwerk endlich ist, ist die Mindestdistanz immer gegeben.
Als nächstes führen wir eine Induktion mit dem Index j durch, 1 ÿ j **ÿ s.**

Für Induktionsbasis j = **1 haben wir** d **2** = d **2** (Pi , A1B1) = **min** {d ^{2} (Pi , A1B1), d ^{2} (Pi , A2B2)} = **min** {d ^{2} (Pi , A1B1), d ^{2} (Pi , A2B2)}. **Für** j **= 2 ,** d = **min** d i **2 2 wir nehmen** **jÿ1** **jÿ1** **jÿ2**

Für Schritt j = s **ÿ 1 nehmen wir an, dass für Graph** **sÿ1** AjBj **es existiert** j=1

$D^2_{..} = \min_{jÿsÿ1}\{d^2(Pi , \overline{AjBj})\}.$

Wenn j = **s, trennen wir** $\overline{AjBj} = \overline{\bigcup_{j=1}^{sÿ1} AjBj} ÿ \overline{AsBs}$, **und dann haben wir**

$$D^2_{..} = \min_{jÿsÿ1}\{d^2(Pi , \overline{AjBj}), d^2_{..}(Pi , \overline{AsBs})\}$$
$$= \min_{jÿs}\{D^2(Pi , \overline{AjBj})\},$$

für jedes i = **1, . . . , n. Es wurde bewiesen, dass für jede Zone** Fi **mit einem Nachfragezentrum am Punkt** Pi eine quadratische Distanz existiert . **Sie ist eindeutig, denn wenn das Minimum existiert, ist es immer nur ein Wert.** □

Als Nächstes führen wir die „Trägheit“ der Nachfragezone ein. Wir erinnern daran, dass im Gesamtkonzept der Netzwerkgüte ein höherer Wert einen besseren Netzwerkdienst innerhalb der Umgebung anzeigt.

Um die Güte des Netzwerks zu bestimmen, berechnen wir die Trägheit der Nachfragezone, die zum Netzwerk „gravitiert“. Die Trägheit einer Nachfragezone wird bestimmt, indem die Nachfrage der Zone mit der minimalen quadratischen Entfernung zwischen dem Zentrum der Nachfragezone und einem Netzwerksegment multipliziert wird. Wir formulieren die Trägheit einer Nachfragezone anhand der folgenden Definitio

Definition 8 (Trägheit der Nachfragezone). Die Trägheit der i-ten Nachfragezone ist das Produkt

$$Mi = \mathbf{Q(Ti)} \cdot d^2_{ich.}, \quad i = \mathbf{1, . . . , n,} \qquad \mathbf{(17)}$$

wobei **d2** aus Gleichung (16) und **Q(Ti)** aus Theorem 4 berechnet wird. i

Es ist zu beachten, dass **bei der Berechnung der Systemträgheit nicht alle Zonen berücksichtigt werden, in denen Bedarf an Netzdiensten besteht .** Um den Netzdienst nutzen zu können, **müssen sich deren Benutzer selbstständig mit dem Netz verbinden.**

In einem Infrastrukturnetzwerk beeinflussen zwei Arten von Distanzen die Wahl des Netzwerks für einen Dienst durch einen Benutzer. Eine kurze Distanz veranlasst den Benutzer, das vorgeschlagene Netzwerk gegenüber anderen Optionen zu wählen. Wenn sich beispielsweise eine Bushaltestelle in der Nähe der Wohnung einer Person befindet, würde diese Person nur den Bus statt ihres Autos benutzen. Umgekehrt stellt eine größere Distanz eine Grenze dar, ab der der Benutzer das gegebene Netzwerk indirekt nutzen wird. In der folgenden Definition definieren wir beide Arten von Distanzen formal: Gravitations- und Anziehun

Definition 9 (Gravitations- und Anziehungszonen und -distanzen). Die Nachfragezone Ti , wobei i = **1, . . . ,** n, **gravitiert** zum Netzwerk, genau dann, wenn di < D für die Gravitationsdistanz D, die ein im Voraus bestimmter Wert ist , gilt.

Die Nachfragezone Tj mit j = **1, ... ,** n wird vom Netz **angezogen ,** wenn dj < d bei einer Anziehungsdistanz d gilt, die ebenfalls ein im Voraus bestimmter Wert ist.

Machine Translated by Google

Weitere Diskussionen zu d **und** D **in Bezug auf öffentliche Verkehrsnetze finden sich in [14].**

Der Wert D **stellt eine akzeptable Distanz von bis zu zwei Kilometern dar, die man zu Fuß zurücklegen kann, um das Netzwerk zu erreichen. Gleichzeitig** ist d **die Distanz von einigen hundert Metern, die ein Benutzer zu Fuß zurücklegen möchte, anstatt ein anderes Transportmittel zu verwenden.**

Die Gesamtträgheit eines Netzes ist die Summe der Trägheit aller Gravitationsbedarfszonen.

Die Qualität eines Netzwerks wird durch die geringe Netzwerkträgheit bestimmt. Ein einfaches Beispiel ist in Abbildung 3 dargestellt.

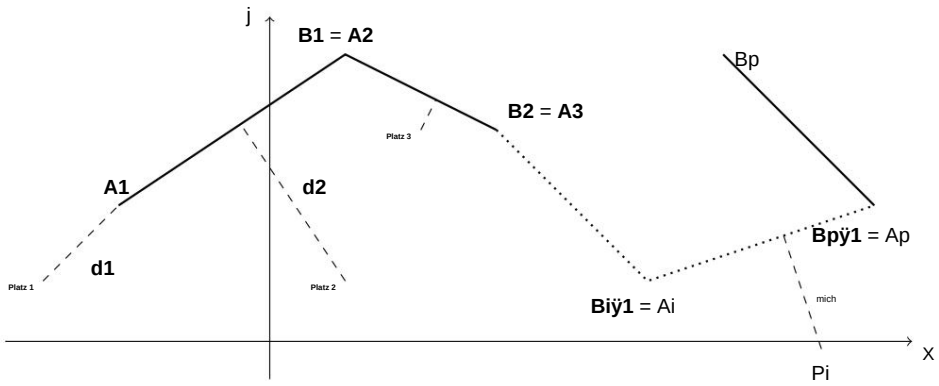


Abbildung 3. Berechnung der Momentenzonenträgheit entlang des Pfades in einem Netzwerk.

Definition 10 (Netzwerkträgheit und Anzahl der Gravitationszonen). Die Netzwerkträgheit wird berechnet, indem die Trägheit aller Gravitationszonen im Netzwerk addiert wird.

$$M = \ddot{y}_{ich=1}^{k} \ddot{y} Mi = \ddot{y}_{ich=1}^{k} Q(Ti)d_{ich}^{2}, \quad (18)$$

Es gibt k Nachfragezonen, die zum Netzwerk tendieren und jeweils durch Ti dargestellt werden .

Die Gesamtlänge eines Netzwerks ist die Summe seiner Segmentlängen.

Definition 11 (Netzwerklänge). Für ein gegebenes Netzwerk ist die Länge $\overline{AjBj}^{S}$, j=1

$$l = \ddot{y}_{j=1}^{S} |AjBj| = \ddot{y}_{j=1}^{S} \sqrt{(xBj \ddot{y} xAj)^2 + (yBj \ddot{y} yAj)^2}. \quad (19)$$

Bei der Berechnung der Güte eines Netzwerks berücksichtigen wir drei wesentliche Faktoren: die Anzahl der Gravitationszonen (k), die Trägheit (M) und die Länge (l). Ein Netzwerk gilt als gut, wenn es über möglichst viele verbundene Zonen verfügt und seine Trägheit und Länge möglichst gering sind .

Als nächstes liefern wir eine schwache Definition für eine Netzwerk-Gütefunktionsformel, die zum Beweis der Aussagen als unsere Hauptergebnisse erforderlich ist.

Definition 12. Eine Netzwerk-Gütefunktion mit drei Variablen wird ordnungsgemäß durch die Formel g(k, **M,** l) definiert , wenn sie mit zunehmenden k zunimmt und mit abnehmenden l und M abnimmt.

Bei korrekter Definition gemäß Definition 12 ermöglicht **der Wert der Netzwerkgütefunktion eine quantitative Netzwerkbewertung in dem Sinne, dass zwei oder mehr Netzwerke, die in dieselbe Umgebung eingebettet sind, so eingestuft werden, dass das Netzwerk mit einem höheren Gütewert das „bessere“ ist.**

Wir schlagen drei Formeln vor, die mit der Anzahl der Gravitationszonen zunehmen und mit der Länge und Trägheit des Netzwerks abnehmen. Sie werden in der Reihenfolge vorgestellt, in de

Machine Translated by Google

wurden entwickelt und haben den gleichen Beweis, da Erhöhen und Verringern durch positive bzw. negative partielle Ableitungen bestimmt werden.

Satz 1. Wenn k Zonen vom Netzwerk angezogen werden und das Netzwerk eine Trägheit von M bei einer Länge von l hat, dann ist die Netzwerkgütefunktion gegeben durch die Formel

$$\mathbf{3}\ g1(k, \mathbf{M,}\ l) = l\ \frac{k\ \mathbf{2} + k}{\mathbf{2}\ + M}. \tag{20}$$

Satz 1 umreißt, wie Gleichung (20) die Güte des Netzwerks nach Definition 12 quantifiziert. **Als nächstes diskutieren wir die Potenzen, die** l **und** k **in (20) zugeschrieben werden. Wir stellen fest, dass die Dimension von** l **2 im Nenner dieselbe ist wie die von M, also km2 . Der Zähler hebt die Anzahl der Gravitationszonen hervor und vergleicht sie mit den Wertgraden des Nenners.** l **2 hat nämlich Grad zwei, aber** M **aus (18) hat insgesamt Grad drei, da es durch Multiplikation von Nachfrage mit Quadratdistanz erhalten wird. In Übereinstimmung mit Definition 12** definiert **Gleichung (20) eine korrekte Gütefunktion in drei Variablen: k, M und l.**

Die partiellen Ableitungen der Gleichung (20) sind gegeben durch

$$\frac{\ddot{y}g1(k, \mathbf{M,}\ l)}{\ddot{y}k} = \frac{2k + 3k\ l\ \mathbf{2}}{\mathbf{2}\ + M\ k} = \frac{\mathbf{2} + 3k}{k\ \mathbf{3}}\ g1(k, \mathbf{M,}\ l),\ k + \tag{21}$$

$$\frac{\ddot{y}g1(k, \mathbf{M,}\ l)}{\ddot{y}M}\ {}_{=\ddot{y}}\ \frac{\mathbf{2} + k\ \mathbf{3}}{\mathbf{2}\ \mathbf{2}\ + M)} = \frac{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{1}}{+ M}\ g1(k, \mathbf{M,}\ l),\ l\ \mathbf{2} \tag{22}$$

$$\frac{\ddot{y}g1(k, \mathbf{M,}\ l)}{\ddot{y}l} = \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2l}\ (l\ \frac{(lk\ \mathbf{2} + k\ \mathbf{3}}{\mathbf{2}\ \mathbf{2}\ + M)} = \frac{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{2\ Liter}}{+ M}\ g1(k, \mathbf{M,}\ l).\ l\ \mathbf{2} \tag{23}$$

Da die Netzlänge üblicherweise mehr als einen halben Kilometer beträgt, ergibt sich aus den Gleichungen (21)–(23) die folgende Ungleichung:

$$\frac{\ddot{y}g1(k, \mathbf{M,}\ l)}{\ddot{y}k}\ \mathbf{0} > \ddot{y}M\ \frac{\ddot{y}g1(k, \mathbf{M,}\ l)}{} > \frac{\ddot{y}g1(k, \mathbf{M,}\ l)}{\ddot{y}l}. \tag{24}$$

Proposition 2. Gegeben seien k, M und l aus Proposition 1. Die Netzwerkgütefunktion kann mit der folgenden Gleichung ausgedrückt werden:

$$g2(k, \mathbf{M,}\ l) = + l\ \mathbf{2}\ \frac{k\ \mathbf{2}\ k\ \mathbf{3}}{M}. \tag{25}$$

Im Folgenden bieten wir die partiellen Ableitungen der Funktion in (25) an:

$$\frac{\ddot{y}g2(k, \mathbf{M,}\ l)}{\ddot{y}k} = \frac{\mathbf{2}\ 2k\ 3k +}{l\ \mathbf{2}}$$

$$\frac{\ddot{y}g2(k, \mathbf{M,}\ l)}{\ddot{y}M}\ {}_{=\ddot{y}}\ \frac{}{Mk3}$$

$$\frac{\ddot{y}g2(k, \mathbf{M,}\ l)\ \ddot{y}l}{}\ {}_{=\ddot{y}}\ \frac{\mathbf{M2}}{2k2l3}.$$

Diese führen zu folgenden Ungleichungen:

$$\frac{\ddot{y}g\ \ddot{y}g\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{0}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}k}{\ddot{y}l}, \frac{\ddot{y}g}{\ddot{y}M}. \tag{26}$$

Satz 3. Wir lassen **k,** M und l wie in den vorherigen Sätzen gegeben sein. Wir lassen d und D positive Werte aus Definition 9 sein und lassen **Q(Ti)** wie in Satz 4 berechnen .

In der gegebenen Umgebung stellt n die Gesamtzahl der Nachfragezonen dar, die das Netzwerk bedienen soll. Dann wird die Netzwerkgütefunktion durch die Gleichung definiert

Machine Translated by Google

$$g(k, \mathbf{M}, l) = \mathbf{2}\,\mathbf{2} \cdot n \quad \frac{k\ \mathbf{2} \cdot \mu(U) +}{\cdot D \cdot l} \quad \frac{k\,\mathbf{3} \cdot d^{\,\mathbf{2}} \cdot \ddot{y}_{i=1}^{k} \mathbf{Q(Ti)}}{\mathbf{3}\,\mathbf{2} \cdot n \ \cdot M}. \tag{27}$$

Gleichung (27) ist dimensionslos. Dies ist insbesondere dann von Nutzen, wenn alle Nachfragezonen im Sinne von Definition 9 attraktiv zum Netz tendieren . Unter Berücksicht die Werte von n, d, D **und der Gesamtnachfragewert** $\ddot{y}_{ich=1}^{N}$ Q(Ti) **bestätigt das folgende Ergebnis die Verwendung der Gleichung (25) in der Netzwerkgütefunktion.**

Korollar 1. Wenn n = k, **μ(U)** = D ⋅ l und di = d für jedes Ti **ÿ** U, dann ist der nach Gleichung (27) berechnete Wert gleich eins, d. h. **1** = **100 %.**

Beweis des Korollars 1. Wenn die Entfernungen aller Zonen zum Netzwerk di = **d sind und wenn alle Zonen gravitieren zum Netzwerk mit** k = **n, dann bietet (18)** M = d $^{\mathbf{2}} \cdot {}^{N}_{ich=1}$ **Wenn** di ÿ **d ,** **Gleichung (27) liefert ein Ergebnis, das größer als 100% ist, und das Netz ist zu gut oder überkapazitätiert.** □

Wenn die Bedingungen in Korollar 1 erfüllt sind, dann sagen wir, dass das Netzwerk verfügbar ist mit Distanz D **und attraktiv mit Distanz d. Als nächstes beweisen wir alle Aussagen.**

Die Beweise der Propositionen 1–3. Im Sinne der Definition 12 sind **die Beweise aller Propositionen gleich, da die Basisanforderungen erfüllt sind. Nach (26)** steigen **alle Werte g1, g2 und** g **mit** k **und fallen mit** l **und M, wie gefordert.** □

In Gleichung (27) ist die Potenz in $^{\mathbf{2}}$ **wird verwendet, weil in unserem Beispielabschnitt** $\ddot{y}^{\mathbf{2}}$ **ÿ μ(U) ÿ** n^{2} **, wenn** n **ÿ μ(U). Kubikmeter** n^{3} **wird verwendet, weil in unserem Beispiel** $n \ddot{y} \ddot{y}_{ich=1}^{N}$ **Q(Ti) wenn** n $\ddot{y}_{ich=1}^{N}$ Q(Ti).

Um Verwirrung zu vermeiden, die durch das Auftreten von Quadrat- und Kubikexponenten in den Gleichungen (20) bis (27) entstehen kann, fügen wir den folgenden Satz hinzu, der die Deckenfunktion ÿxÿ **einer reellen Zahl** x verwendet , **um die kleinste ganze Zahl zu bestimmen, die größer oder gleich x ist.**

Theorem 6. Wir lassen die Werte **k, l,** M wie in Proposition 1 sein und lassen **n, d,** D und **Q(Ti)** wie in Proposition 3 sein. Wir definieren *ÿ* und *ÿ* wie folgt:

$$\ddot{y} = \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{log}\,n\ \mu(\mathbf{U})\ddot{\mathbf{y}} \text{ und } \ddot{y} = \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{log}\,n\ \mathrm{Q(Ti)}\ddot{y}.\ \ddot{y}_{ich=1}^{N} \tag{28}$$

Wenn **ÿ,** *ÿ* > 0, dann ist der Wert der Funktion

$$G(k, \mathbf{M}, l) = \frac{k\,\ddot{y} \cdot \mu(U)\ \mathbf{2}}{\cdot n^{\ \ddot{y}} \cdot D \cdot l} + \frac{k\,\ddot{y} \cdot d\,\mathbf{2} \quad \cdot \ddot{y}_{ich=1}^{N} \mathbf{Q(Ti)}}{\mathbf{2} \cdot n\ \ddot{y} \cdot M} \tag{29}$$

hängt zunehmend von k und abnehmend von l und M ab. Abhängig von beliebigen Werten für d und D kann **G** kleiner oder größer als 100 % sein.

Beweis. Wiederum partielle Ableitungen $\frac{\ddot{y}G}{\ddot{y}k} > \mathbf{0} > \frac{\ddot{y}G}{\ddot{y}l}, \frac{\ddot{y}G}{\ddot{y}M}.$ □

Bemerkung 1. Formel (27) ist ein Sonderfall von (29), wenn *ÿ* = **2** und *ÿ* = 3.

Machine Translated by Google

Im nächsten Abschnitt schlagen wir ein Korridornetz für den öffentlichen Stadtverkehr (PCT) vor. Die Methode kombiniert Umweltphysik und soziale Beobachtungen, Verhaltensstatistiken und Heuristiken und wendet die vorgeschlagene Theorie an, um mehrere Netzwerk

4. Beispiel:

Der städtische Verkehr ist eine entscheidende Säule für die Mobilität der Bürger in Städten, die ein Bevölkerungswachstum und eine territoriale Ausdehnung verzeichnen. Der private Verkehr neigt dazu, den städtischen Verkehr so weit zu verstopfen, dass er Orte innerhalb des Stadtgebiets nicht mehr miteinander verbinden kann.

Es ist notwendig, in neue öffentliche Verkehrsmittel zu investieren, um die Bevölkerung aufgrund ihrer Verfügbarkeit, Geschwindigkeit und Kapazität zur Nutzung zu bewegen. Neue Verkehrsmittel erfordern neue K

Nachfolgend finden Sie ein Beispiel für das vorgeschlagene Verfahren zur heuristischen Gestaltung und Bewertung von Vorschlägen für öffentliche Stadtverkehrskorridore. Im Folgenden demonstrieren wir den Prozess Schritt für Schritt.

Das ursprüngliche Ziel war, ein Netzwerk für den öffentlichen Nahverkehr mit hoher Kapazität und Geschwindigkeit vorzuschlagen. Normalerweise werden Netzwerke mithilfe der Spanning Tree- oder der Kleinstquadrate-Methode eingebettet, wir haben jedoch ein Netzwerk nach mehreren heuristisch ermittelten Varianten vorgeschlagen und die beste ausgewählt. Im vorherigen Abschnitt haben wir mehrere Funktionen zur Berechnung der Güte eines in eine Umgebung eingebetteten Netzwerks zur Erfüllung der Verkehrsanforderungen der Benutzer vorgeschlagen . **In diesem Abschnitt haben wir sie angewendet, um mehrere Netzwerkvarianten zu vergleichen, die wir nach umfangreichen statistischen Untersuchungen heuristisch ermittelt haben.**

Oberste Voraussetzung war die Berücksichtigung der natürlichen Hindernisse in der Umgebung. In Abbildung 4 sind von Norden nach Süden vier rote Barrieren in der Stadt Zagreb dargestellt: der Berg, die Eisenbahn, der Fluss und die Autobahn.

Abbildung 4. Natürliche Umwelt der Gespanschaft Zagreb.

Die Zoneneinteilung wurde von der früheren administrativen Einteilung in lokale Gemeinden übernommen und ist in Abbildung 5 dargestellt. Bedarfspunkte sind Gebäude, Schulen, Supermärkte und andere Orte, an denen sich Menschen aufhalten können. Der Bedarf ist die Anzahl der Einwohner oder Benutzer, die aus verschiedenen Berichten entnommen wurden . Bedarfszentren werden nach (11) berechnet, **nachdem das Koordinatensystem gemäß Lemma 1 erstellt wurde. Es ist auch notwendig, das Trägheitsm**

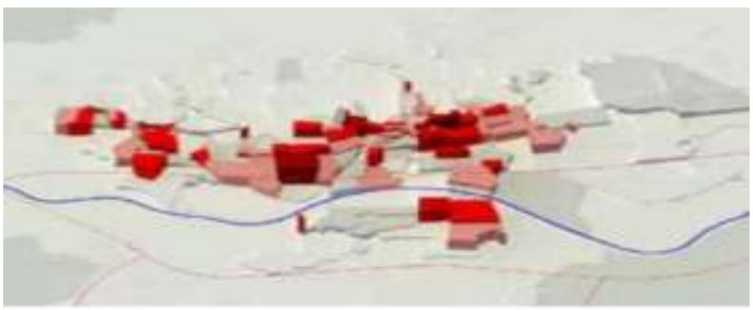


Abbildung 5. Lokale Bevölkerungszentren der Stadt Zagreb. Je dunkler die rote Farbe, desto größer die Bevölkerung an diesem Ort. Quelle: ZagrebPlan [15].

Machine Translated by Google

Nachdem die Umgebung aufgeteilt war (siehe Abbildung 5) und wir die in Abbildung 4 dargestellten Barrieren berücksichtigt hatten , skizzierten wir aus Segmenten bestehende Korridore (siehe G Die Segmente wurden entsprechend den Hauptverkehrsflussrichtungen eingebettet. Die Flussrichtungen wurden nach statistischer Überwachung ermittelt und sind in Abbildung 6 dargestellt.

Abbildung 6. Passagierströme in der Stadt Zagreb.

Der heuristische Entwurfsprozess wurde durch die neun **in den Abbildungen 7 bis 9 dargestellten Korridornetzvarianten geführt . Die Netzträgheit für jede dieser Varianten wurde nach den Gleichungen (17) und (18) berechnet.**

Abbildung 7. Die ersten vorgeschlagenen Korridornetzvarianten.

Abbildung 8. Die zweite vorgeschlagene Korridornetzvariante.

Machine Translated by Google

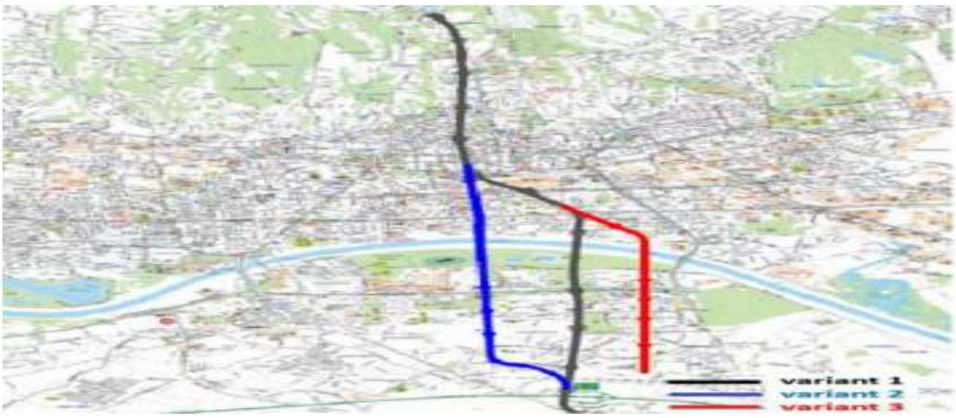


Abbildung 9. Das dritte vorgeschlagene Korridornetzwerk.

Die Varianten des Korridornetzes in Abbildung 7 sind kreisförmig eingezeichnet und basieren auf der Strömungen aus Abbildung 6. Nur Zonen bis D = **4 km werden als Gravitationszonen für Trägheitsberechnung.**

Die Varianten in Abbildung 9 sind entsprechend der Nord-Süd-Richtung in Abbildung 6 eingezeichnet. Neue, geänderte Korridore erfordern die Berücksichtigung von Abbildung 5.

Die Korridore in Abbildung 8 erstrecken sich in West-Ost-Richtung und folgen den Strömen von Abbildung 6. Anschließend werden diese Richtungen mit Linien in Nord-Süd-Richtung verbunden. Die Der Prozess wird fortgesetzt, indem die West-Süd-Richtung in Abbildung 6 betrachtet wird. Eine gute öffentliche Verkehrsanbindung Das Netzwerk regt die Bürger dazu an, das öffentliche Verkehrsnetz anstelle des privaten Transports zu nutzen Geräte, wenn es geschaffen wird, um die erforderliche Gehstrecke zu reduzieren, wie durch Netzwerk ausgedrückt Trägheit (siehe Gleichung (18)).

Die in den Vorschlägen 1–3 vorgeschlagenen Formeln **wurden verwendet, um verschiedene Korridornetze quantitativ zu vergleichen, wobei die Netzverfügbarkeit anhand der Anzahl der Gravitationsknotenpunkte untersucht wu Nachfragezonen und Netzkosten sind etwa proportional zur Netzlänge.**

In der Stadt Zagreb beträgt die Umgebungsfläche μ(U) = 250 km2 , die Verkehrsnachfrage ist $\ddot{y}_{ich=1}^{N}$ **Q(Ti) = 680.000, und die Gesamtzahl der Umgebungsteile beträgt** n **= 160. Werte** d **= 200 m und** D = 4 km wurden gemäß den Empfehlungen in **[14] gewählt .**

In den Abbildungen 7–9 werden drei Arten von Varianten vorgeschlagen, je nach dem Passagierfluss Richtungen aus Abbildung 6. In Tabelle 1 sind Gütewerte für jede Variante aufgeführt, und die besten Die Gütewerte der Variante werden berücksichtigt. Dann sammeln wir das endgültige Netzwerk in Abbildung 10 indem man die erste Variante aus den Abbildungen **7 und 8 und die dritte Variante aus Abbildung 9 übernimmt .**

Tabelle 1. Netzwerkgüte der Netzwerke unter Verwendung der Gleichungen (20), (25) und (27).

Figur	Variante M (km2)		l (km)	k	g1/km2	g2/km2	G/%
Abbildung 7	1	27.000	22.3	47	3,86	8.29	13,33 %
	2	17.000	27,5	36	2,70	4.46	6,65 %
	3	9000	16.4	21	1,05	2,67	3,61 %
Abbildung 8	1	17.000	19,6	36	1,05	6.12	8,95 %
	2	13.000	19.2	33	2,76	5,72	7,82 %
	3	11.000	18,7	28	2,00	4.24	5,76 %
Abbildung 9	1	13.000	11.8	21	2,77	3,88	4,78 %
	2	4000	13.7	18	2,00	3.18	3,36 %
	3	10.000	9,8	20	0,83	4,96	5,23 %
Abbildung 10	Finale	58.000	53,7	213	159	182	81,52 %
Abbildung 11	Tram	25.000	116	93	21	107	19,80 %

Zum Vergleich haben wir Werte für die temporäre Zagreb Electrician Tramway berechnet Netzwerk in Abbildung 11.

Machine Translated by Google

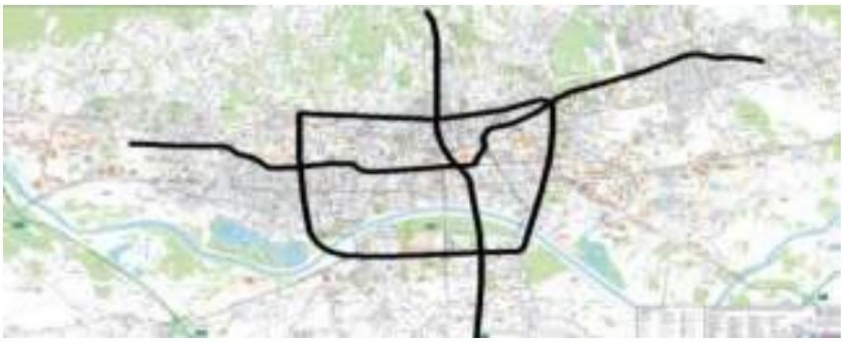


Abbildung 10. Die endgültig vorgeschlagene Korridornetzvariante.

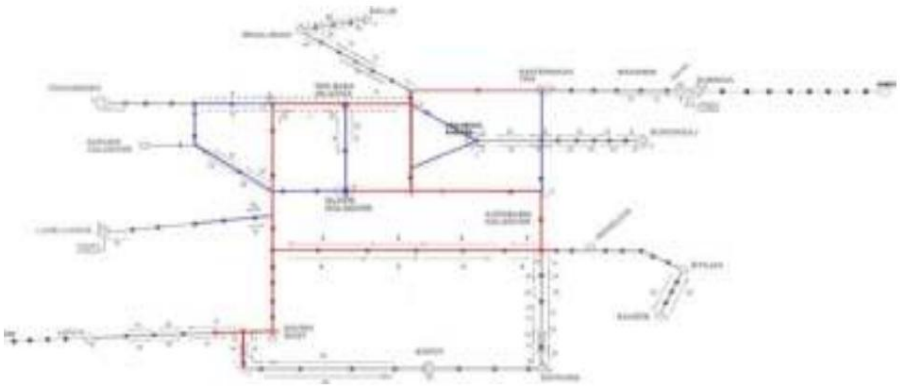


Abbildung 11. Bestehendes ZET-Netzwerk. Quelle: Fahrplan der ZET-Niederlassung (2020).

5. Schlussfolgerungen

Wir bieten mathematische Ausdrücke an, die die Güte verschiedener Netzwerke auf der Grundlage von (i) Abdeckung, (ii) Verfügbarkeit und (iii) Wartungskosten quantifizieren. Obwohl das Modell heuristisch entwickelt wurde, zeigen wir, dass es ein zuverlässiges Werkzeug zur Bewertung verschiedener Netzwerke sein kann, die für die Einbettung in eine Umgebung vorgeschlagen werden.

Die laufende Diskussion über die Verwendung von Heuristiken zur Erstellung mathematischer Formeln dreht sich um die Anwendung von Faustregeln, Intuition und gesundem Menschenverstand, um eine ausreichend gute und schnelle Lösung zu finden. Heuristiken auf der Grundlage von Erfahrung und Intuition sind manchmal besser als exakte Methoden oder umfassende Simulationsverfahren. Darüber hinaus bietet der heuristische Ansatz eine gute Lösung, wenn in der Literatur nichts Vergleichbares verfügbar ist, um ein Netzwerk quantitativ mit einem eindeutigen Wert zu bewerten.

Es ist jedoch wichtig, die Ergebnisse der Heuristiken zu bewerten. Das erste Problem, das wir angehen, ist die Auswahl der besten Netzwerkvariante unter den heuristisch ermittelten Varianten. Wir schlagen in Abschnitt 4 mehrere Varianten zur Lösung des Problems vor **und begründen unseren Ansatz zur Auswahl der besten Option.**

Schließlich planen wir, diese Arbeit in Zukunft weiterzuentwickeln.

Beiträge der Autoren: Konzeptualisierung und Validierung, MB; Methodik und formale Analyse, BI; Untersuchung, Ressourcen und Vorbereitung des Originalentwurfs, MP. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu.

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: Datenfreigabe nicht anwendbar.

Danksagungen: Wir danken der Krapina University of Applied Sciences und dem Sami Shamoon College of Engineering für ihre moralische Unterstützung.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Machine Translated by Google

Verweise

1. **Kanellopoulos, D.; Sharma, VK; Panagiotakopoulos, T.; Kameas, A. Netzwerkarchitekturen und Protokolle für IoT-Anwendungen in Smart Cities: Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven.** Electronics **2022,** 12, **2490.** [CrossRef]
2. Karakus , M.; Durresi , A. Quality of Service (QoS) **in Software Defined Networking (SDN).** **200–218.** [CrossRef]
3. **Smit, LC; Dikken, J.; Schuurmans, MJ; de Wit, NJ; Bleijenberg, N. Wert der Analyse sozialer Netzwerke für die Entwicklung und Bewertung komplexer Gesundheitsinterventionen: Eine Scoping-Überprüfung.** BMJ Open **2020,** 10, **e039681.** [CrossRef] [PubMed] [PubMed Zentral]
4. **Li, J.; Harsh, D.; Hu, X.; Tang, J.; Yi, C.; Liu, H. Attributed Network Embedding for Learning in a Dynamic Environment. In Proceedings of the CIKM'17, Singapur, 6.–10. November 2017; Sitzung 2D: Network Embedding 2.** [CrossRef]
5. **Salkhi Khasraghi, G.; Volchenkov, D.; Nejat, A.; Hernandez, R. Universitätscampus als komplexes dynamisches Fußgängernetzwerk: Eine Fallstudie zu Begehbarkeitsmustern an der Texas Tech University.** Mathematics2023, 12, **140.** [CrossRef]
6. **Bogdanova, TV; Evdokimov, KA Transportkomponente einer komfortablen städtischen Umgebung.** Inov. Investitionen **2021,** 2021, **163–170.**
7. **Colon, C.; Hallegatte, S.; Rozenberg, J. Kritikalitätsanalyse des Transportnetzwerks eines Landes über eine agentenbasierte Lieferkette Modell . 2021, 4, 209–215.** [CrossRef]
8. **Guillot, M.; Furno, A.; Aghezzaf, E.; El Faouzi, N. Transportnetzwerk-Downsizing basierend auf optimalem Subnetzwerk.** Commun. Transp. Res. **2022, 2, 100079.** [CrossRef]
9. **Wang, S.; Wang, Z. Strategie zur gemeinsamen Entwicklung und Regulierung des Verkehrsaufkommens in einem städtischen Ballungsraum.** Nachhaltigkeit **2022,** 15, **14742.** [CrossRef]
10. **Kuo, Y.; Leung, JM; Yan, Y. Öffentlicher Nahverkehr für Smart Cities: Aktuelle Innovationen und zukünftige Herausforderungen.** Eur. J. Oper. Res. **2023,** 306, **1001–1026.** [CrossRef]
11. **Nes, VR; Hamerslag, R.; Immers, R. Design of Public Transport Networks.** Transp. Res. Rec. **1988,** 1202, **74–83.**
12. **Wilson, RJ** Einführung in die Graphentheorie, **4. Auflage; Longman Group Ltd.: Harlow, UK, 1996. Online verfügbar: https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wilsongraph.pdf (abgerufen am 20. Februar 2023).**
13. **Lang, S. Einführung in die lineare Algebra. In** Springer Books on Elementary Mathematics; **Springer: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 1986; ISBN 978–1-4612-7002-7. Online verfügbar: https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~richard/teaching/f2014/Lin_alg_Lang.pdf (abgerufen am 15. April 2024). 14. Šimunović,LJ.; Cosi**
´**c, M. Osobitosti Pješačkoga Prometa. In** Nemotorizirani Promet; **Hrvoje Gold; Fakultät für Verkehrs- und Transportwissenschaften : Zagreb, Kroatien, 2015; S. 3–9.**
15. **Online verfügbar: https://www.zagreb.hr/UserDocsImages/arhiva/zagrebplan-ciljeviiprioritetirazvojado2020.pdf (abgerufen ar 12. Dezember 2020).**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Langfristige und mittelfristige Finanzstrategien für Aktien mit Dynamische Bayes-Netze

Karl Lewis [†], **Mark Anthony Caruana** [†] **und David Paul Suda** *,†

Abteilung für Statistik und Operations Research, Fakultät für Naturwissenschaften, Universität Malta, 2080 Msida, Malta; karl.lewis.17@um.edu.mt (KL); mark.caruana@um.edu.mt (MAC)

* Korrespondenz: david.suda@um.edu.mt; Tel.: +356-9986-9884 Diese

† Autoren haben zu gleichen Teilen zu dieser Arbeit beigetragen.

Zusammenfassung: Die Entwicklung einer Finanzhandelsstrategie, die langfristige Gewinne ermöglicht, ist ein sehr häufiges Problem im Finanzwesen. Ziel dieses Dokuments ist es, einen mathematisch strengen Rahmen für das Problem zu formulieren und die erzielten Ergebnisse zu vergleichen und gegenüberzustellen. Der wichtigste Ansatz basiert auf dynamischen Bayes-Netzen (DBNs). Im Rahmen der DBN-Umgebung werden eine langfristige sowie eine kurzfristige Handelsstrategie betrachtet und auf zwölf Aktien aus entwickelten und sich entwickelnden Märkten angewendet. Es wird der Schluss gezogen, dass sowohl die in diesem Dokument vorgeschlagenen langfristigen als auch mittelfristigen Strategien die Benchmark-Handelsstrategie „Buy-and-Hold“ (B&H) übertreffen. Trotz der klaren Vorteile der ersteren Handelsstrategien werden die Einschränkungen dieses Modells sowie mögliche Verbesserungen erörtert.

Schlüsselwörter: Finanzen; dynamische Bayes-Netze; Handelsstrategien; Aktien

1. Einleitung

In diesem Artikel werden dynamische Bayes-Netze (DBNs) verwendet, um das Problem der Erlangung und Prüfung einer Finanzstrategie zu untersuchen, deren Rendite höher ist als die Buy-and-Hold-Strategie für ein bestimmtes Eigenkapital. Ein Bayes-Netz (BN) ist eine grafische und kompakte Darstellung einer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF), die bedingte Unabhängigkeit nutzt und zur Modellierung eines Systems unter einer Zeitinstanz verwendet werden kann. DBNs erweitern das BN auf mehr als einen Zeitraum, d. h. DBNs sind eine zeitlich gesteuerte Erweiterung von BNs.

Die Verwendung von DBNs gegenüber anderen Modellen, wie z. B. einfachen Zeitreihenmodellen, bietet folgende Vorteile: Erstens können DBNs sogenannte versteckte (oder latente) Variablen einbeziehen, die entweder die Beobachtungen der beobachtbaren Zufallsvariablen steuern oder von denen angenommen wird, dass sie diese steuern . Diese versteckten Variablen sind Zufallsvariablen, deren wahrer Wert nicht direkt gemessen werden kann, manchmal aufgrund von Instrumentenunzulänglichkeiten und manchmal einfach, weil die Existenz dieser Variablen hypothetisch ist. Beispiele für solche versteckten Variablen sind die Intelligenz einer Person (die mit keinem Instrument präzise gemessen werden kann) oder der Zustand (Bullen- oder Bärenmarkt) eines Finanzmarkts (dessen Existenz selbst hypothetisch ist). Zweitens ermöglichen DBNs, da sie ein Ableger von BNs sind, kompakte Darstellungen einer ansonsten möglicherweise umständlichen gemeinsamen Verteilung. Russell und Norvig [1] argumentieren, dass aufgrund der bedingten Unabhängigkeit die Darstellung einer gemeinsamen Verteilung als DBN alle redundanten Terme eliminieren kann, was wiederum auch die Parameterschätzung vereinfacht . Murphy [2] gibt an, dass ein weiterer Vorteil von DBNs die Leichtigkeit ist, mit der Variationen des vorliegenden Modells eingeführt werden können. DBNs können verwendet werden, um sowohl grundlegende Hidden-Markov-Modelle (HMMs) als auch HMMs mit Variationen darzustellen, wie z. B. HMMs mit einer Mischung aus Gaußschen Ausgaben, autoregressive HMMs, Input-Output-HMMs und hierarchische HMMs. DBNs können auch verwendet werden, um Kalman-Filtermodelle darzustellen, bei denen im Gegensatz zu HMMs der verborgene Zustand kontinuierlich und nicht diskret ist. Schließlich können DBNs auch Fragen zu verschiedenen Arten von Argumentation oder Schlussfolgerung beantworten, wie z. B.

check for updates

Zitat: Lewis, K.; Caruana, MA; Suda D. Lang- und mittelfristige Finanzstrategien für Aktien unter Verwendung dynamischer Bayes-Netzwerke. AppliedMath 2024, 4, 843–855. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030045

Wissenschaftlicher Herausgeber: Tommi Sottinen

Empfangen: 28. April 2024
Überarbeitet: 21. Juni 2024
Akzeptiert: 24. Juni 2024
Veröffentlicht: 3. Juli 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Machine Translated by Google

als diagnostische **Inferenz (von Wirkungen auf Ursachen),** kausale **Inferenz (von Ursachen auf Wirkungen),** interkausale **Inferenz (zwischen Ursachen derselben Wirkung) und gemischte Inferenz (eine Mischung aus zwei beliebigen der oben genannten Schlussfolgerungsarten).**

In diesem Forschungspapier verwenden wir das Kurs-Gewinn-Verhältnis (KGV) in den besprochenen Modellen. In der Literatur finden sich verschiedene Arbeiten, die das besagte KGV zur Prüfung von Anlagestrategien anwenden. Besonders hervorzuheben ist hier Basu [3]. Dieses Verhältnis wurde auch in zahlreichen anderen Veröffentlichungen verwendet, unter anderem von Lleo [4] und Angelini [5]. Chang und Tian [6] verwenden BNs ebenfalls zur Modellierung der qualitativen und quantitativen Beziehungen zwischen mehreren Variablen, die die Dynamik des Aktienindex S&P 500 beeinflussen, mit dem Ziel, Handelsentscheidungen zu optimieren, nämlich wann eine Short-Position eröffnet und wann eine Long-Position eingegangen werden soll. Damiano et al. [7] stützen ihre Arbeit auf eine frühere Studie, nämlich die von Tayal [8], in der HHMMs zur Analyse von Finanzdaten verwendet werden. Die von Tayal erzielten Ergebnisse werden in der Arbeit von Damiano et al. wiedergegeben und es werden weitere Einblicke gegeben. Damiano et al. [7] kommen zu dem Schluss, dass die probabilistische Inferenz die Identifizierung zweier unterschiedlicher Zustände in Hochfrequenzdaten ermöglicht , die hauptsächlich durch Kauf- und Verkaufs

Historisch betrachtet wird angenommen, dass Paul Dagum die Entwicklung von DBNs in den frühen 1990er Jahren angestoßen hat , und zwar mit den Arbeiten von Dagum et al. [9] im Jahr 1992 und von Dagum et al. [10] im Jahr 1995. Seitdem werden DBNs in verschiedenen Bereichen eingesetzt, insbesondere im Finanz- und Wir Zu den weiteren Bereichen gehören jedoch (ohne darauf beschränkt zu sein) Spracherkennung (Murphy [2], Zweig, Russell [11] und Nefian et al. [12]), Biologie (Yao et al. [13], Raval et al. [14], Murphy und Mian [15]), Robotik (Prembida et al. [16], Patel et al. [17]), Bildverarbeitung (Delage et al. [18]) und Fehlererkennung (Cozar et al. [19]). Parameterschätzungstechniken von DBNs werden von Benhamou et al. **[20] diskutiert , während Murphy [21] an den theoretischen Grundlagen von DBNs arbeitet.**

Der Rest dieses Dokuments ist wie folgt strukturiert. Abschnitt 2 stellt die theoretischen Grundlagen von DBNs vor. In Abschnitt 3 werden DBNs auf zwölf Aktien aus Industrie- und Entwicklungsländern angewendet und die Kapitalrendite wird dargestellt. Der Grund für die Berücksichtigung sowohl von Industrie- als auch Entwicklungsländern besteht darin, die Robustheit des Modells unter verschiedenen wirtschaftlichen Bedingungen und Wachstumsmustern zu testen . Abschließend werden im Schlussabschnitt die wichtigsten Punkte und erzielten Ergebnisse hervorgehoben.

2. Theoretischer Rahmen

Dieses Modell basiert auf der Arbeit von Wang [22] und nutzt zwei Phänomene der Verhaltensökonomie – die Verhaltensvolatilität **und** die Rückkehr zum Mittelwert. **Die Verhaltensvolatilität bezeichnet das Phänomen, dass marktbezogene Ereignisse wie irrationale Handelstransaktionen unerfahrener Händler dazu führen, dass der Kurs einer Aktie von seinem „wahren“ Wert abweicht. Ereignisse wie diese beeinflussen den Marktpreis kontinuierlich, bis sich ihre Auswirkungen entweder gegenseitig aufheben oder bis rationale Anleger diese Auswirkungen durch ihre rationalen Handelsgeschäfte ausg Dieses Phänomen wird als** Mittelwertumkehr bezeichnet. **Die Theorie der Mittelwertumkehr ist nicht nur auf den Aktienkurs anwendbar, sondern auf alle preisbezogenen Kennzahlen, wie etwa das Kurs-Gewinn-Verhältnis (KGV) (Aktienkurs geteilt durch den Gewinn pro Aktie). Infolgedessen kann man sich nur dann zum Kauf (oder Verkauf) einer Aktie entschließen, wenn eine Kennzahl, die der Theorie der Mittelwertumkehr folgt, weit vom Mittelwert abweicht, da man weiß, dass der „wahre“ Wert der Kennzahl irgendwann in der Zukunft wieder erreicht wird .**

Ein gerichtetes grafisches Modell **(DGM) ist die Darstellung eines Wahrscheinlichkeitsmodells, das Annahmen bedingter Unabhängigkeit durch einen gerichteten Graphen verwendet, wobei die Knoten (beachten Sie, dass die Begriffe „Zustand“, „Zufallsvariable“, „Knoten“ und „Knoten“ synonym verwendet werden können) des Graphen Zufallsvariablen darstellen und die Bögen die bedingte Abhängigkeit zwischen Paaren von Zufallsvariablen darstellen. Ein Bogen von Knoten** A **zu Knoten** B **stellt die Aussage** „A **verursacht B“ dar (Murphy [2]). DGMs sind aufgrund ihrer Kompaktheit praktisch, da sie eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung aufweisen – für** N **binäre Zufallsvariablen kann die allgemeine geschlossene Form der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen** O(2 N) Parameter benötigen, während das grafische Modell **aufgrund des Weglassens von Begriffen durch Aussagen bedingter Unabhängigkeit dieselben Informationen mit weniger Parametern liefern kann .**

Machine Translated by Google

Ein Bayes-Netz **ist ein DGM, das eine Menge von Zufallsvariablen X1, ...,** Xn **und ihre bedingten Abhängigkeiten durch einen gerichteten** azyklischen **Graphen (DAG) darstellt, der mit** G = **(V,** E) bezeichnet wird. **Jeder Knoten in V stellt eine Zufallsvariable** Xi dar , **und jede gerichtete Kante in E stellt die bedingte Abhängigkeit einer Zufallsvariable von einer anderen dar.** Jedem Knoten Xi **ist eine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung zugeordnet , und die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Knotenmenge V ist gegeben durch P[V] = ÿ** $\prod_{i=1}^{N}$ P[Xi **|** Eltern(Xi)]. **Die Verallgemeinerung eines BN auf mehrere Zeitscheiben führt zur Definition eines DBN. Ein** dynamisches Bayes-Netzwerk **ist als Paar (B0,** Bÿ) definiert, **wobei B0 das BN ist, das die** vorherige Wahrscheinlichkeit **(oder die Anfangszustandswahrscheinlichkeit) darstellt, d.ÿh. die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen zum Zeitpunkt 0, und Bÿ ein zeitliches BN mit zwei Schnitten ist, das** die Übergangswahrscheinlichkeiten **vom Zeitpunkt** t **ÿ 1 zum Zeitpunkt** t **für jeden Knoten** X **in der Knotenmenge V des Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Knotenmenge V über alle Zeitscheiben ist gegeben durch:**

$$\mathbf{P[V]} = \mathbf{P[V0]}\ \mathbf{P[V1:T]} = \ddot{y} \prod_{\mathbf{Xi\ddot{y}V}} P[Xi0 \mid \text{Eltern}(Xi0)] \ddot{y}_{t=1}^{T} \ddot{y}_{\mathbf{Xi\ddot{y}V}} P[Xit \mid \text{Eltern}(Xit)],$$

wobei Vt1 :t2 **sich auf die Menge aller Eckpunkte bezieht, die von der Zeit t1 bis zur Zeit t2 indiziert sind. Ein DBN kann durch seine Übergangsmatrix** At = P[Xt = j **| Xtÿ1** = i] **und seine vorherige Verteilung** ÿ(i) = P[X1 = i] parametrisiert werden. **Wenn angenommen wird, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Zeitscheiben konstant sind (At** = **A), dann werden sie als** homogen bezeichnet **und haben eine viel kompaktere gemeinsame Verteilungsfunktion. Bei der bildlichen Darstellung eines DBN werden normalerweise zwei oder drei Zeitscheiben angezeigt – die erste Zeitscheibe und die darauffolgenden ein oder zwei –, da angenommen wird, dass sich seine Struktur im Laufe der Zeit repliziert.**

Eine wichtige Eigenschaft von DAGs ist, dass „Knoten so angeordnet werden können, dass Eltern vor Kindern kommen. Dies wird als topologische Anordnung bezeichnet **und kann aus jedem DAG erstellt werden.“ (Murphy [23]). Bei einer solchen Anordnung wird die** geordnete Markov-Eigenschaft **(oder** lokale Markov-Eigenschaft) **definiert als die „Annahme, dass ein Knoten nur von seinen Eltern abhängt, nicht von allen seinen Vorgängern in der Anordnung“ (Murphy [23]). Diese Annahme ist in der Tat eine Verallgemeinerung der Markov-Eigenschaft für Markov-Ketten.**

2.1. Inferenz für DBNs **Das**

Ziel der Inferenz ist es, den Wert der latenten Zustände anhand der Beobachtungen der beobachtbaren Zustände abzuleiten, d. h. die Randwerte P[Xt = i **|** *y1:ÿ] abzuleiten.* **Wenn** *ÿ* = **t, wird der Vorgang als** Filterung **(oder** „Now-Casting“) bezeichnet; **wenn** *ÿ* > **t, dann ist dies** Glättung; **und wenn** *ÿ* < **t, dann würde man** eine Vorhersage **(oder** Prognose) durchführen. **Ein häufig verwendeter Inferenzalgorithmus für DBNs ist der** Vorwärts-Rückwärts-Algorithmus. **In diesem Algorithmus wird dynamische Programmierung durch zwei Schritte, sogenannte** Durchläufe, implementiert, **die in entgegengesetzter Richtung ablaufen – einer läuft vorwärts in der Zeit, während der andere rückwärts läuft. Beachten Sie, dass vorausgesetzt wird, dass die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix, die Emissionswahrscheinlichkeitsmatrix und die Vorwahrscheinlichkeiten alle bekannt sind. Im** Vorwärtsdurchlauf wird **der Wert von** ÿt(i) := P[Xt = i **| y1:t] rekursiv ermittelt . Im** Rückwärtsdurchlauf **wird der Wert von** ÿt(i) := P[yt+1:T **|** Xt = i] ebenfalls **rekursiv ermittelt, allerdings in entgegengesetzter chronologischer Reihenfolge (von Zeitpunkt** T **bis Zeitpunkt 2). Nachdem die Vorwärts- und Rückwärtsdurchläufe abgeschlossen sind, kann** schließlich der Wert für ÿt(i) := P[Xt = i **| y1:T] ermittelt werden:**

$$P[Xt = i \mid \mathbf{y1:T}] = \frac{P[yt+1:T \mid Xt = i]P[Xt = i \mid \mathbf{y1:t}]\ \ddot{y}t(i)}{\mathbf{P[y1:T]}} =$$

wobei P[y1:T] = $\ddot{y}_{T\ t=1\ ct}$.

2.2. Lernende DBNs **In**

diesem Zusammenhang bezieht sich Lernen auf den Prozess der Parameterschätzung. Bei der Parameterschätzung kann Lernen entweder durch einen Maximum-Likelihood-Ansatz (ML) oder durch den Maximum-a-posteriori-Ansatz (MAP) erfolgen. Bei Verwendung von ML werden die Daten verwendet, um Parameterschätzungen durch die Lösung des Optimierungsproblems zu erhalten:

Machine Translated by Google

$\ddot{y}^{\ddot{y}}_{ML}$ = **arg maxÿ** P[Y **|** ÿ] = **arg maxÿ log** P[Y **|** ÿ] , **wobei** *ÿ* **der Satz der zu schätzenden Parameter ist. Normalerweise** enthält *ÿ* **die Übergangsmatrix und Parameter, die sich auf die in der Emissionsmatrix verwendete Wahrscheinlichkeitsverteilung beziehen. Bei Verwendung der MAP-Methode hingegen wird das obige Optimierungsproblem leicht angepasst und lautet** *ÿ* **arg maxÿ log** P[Y **|** ÿ] + **log** *P[ÿ] ,* **wobei** *P[ÿ]* **die** $\ddot{y}^{\ddot{y}}_{KARTE}$ **= Parameter-A-priori-Verteilung ist. Der Ansatz zum Lösen der obigen Optimierungsprobleme besteht in einer Anpassung des Expectation-Maximization (EM)-Algorithmus, der als** Baum-Welch- **Algorithmus bekannt ist und nachweislich ein lokales Optimum für die obigen Optimierungsprobleme liefert (Baum et al. [24], Dempster et al.** [25]). Dabei wird der Vorwärts-Rückwärts-Algorithmus als Unterprogramm verwendet. In Fällen, in denen **die Modellparameter unbekannt sind, wird daher** zuerst der Baum-Welch-Algorithmus verwendet, um **die Modellparameter zu schätzen (oder zu lernen). Anschließend wird der Vorwärts-Rückwärts-Algorithmus verwendet, um die posterioren Randzahlen abzuleiten.**

2.3. Anwendung der Theorie

Die Haupthypothese des Modells ist, dass der Aktienkurs eines Unternehmens nicht immer dem „wahren“ inneren Wert des Unternehmens entspricht. Unter Ausnutzung der Phänomene der Verhaltensvolatilität und der Rückkehr zum Mittelwert werden temporäre Effekte, die dazu führen, dass Aktienkennzahlen von ihrem „wahren“ Wert abweichen, in zwei Kategorien eingeteilt: kurzfristige Effekte (Dauer einiger Tage) und mittelfristige Effekte (Dauer mehrerer Wochen).

Es wird angenommen, dass der fundamentale Wert eines Unternehmens i **zum Zeitpunkt t, bezeichnet mit** $\ddot{y}^{\ddot{y}}_{Es}$ **,** P **ist direkt proportional zu seinem Jahresgewinn zum Zeitpunkt t, bezeichnet mit Ei,t , mit der** fundamentalen Das PE-Verhältnis, **bezeichnet mit** PEÿ **i,t , fungiert als Proportionalitätskonstante:**

$$\ddot{y}^{\ddot{y}}_{Grube} = (PE\ddot{y}_{i,t})(Ei,t).$$

Andererseits ist das beobachtete KGV **(öffentlich verfügbar), Pi,t, wobei Pi,t den tatsächlichen** i **zum Zeitpunkt** t bezeichnet , **gegeben durch Handelspreis eines mit** PEi,t bezeichneten **Unternehmens** PEi,t = **Ei,t .**

Beachten Sie, dass ab diesem Punkt der Index i **wegfällt, da die Analyse der Aktien univariat durchgeführt. Die daraus resultierende Modellgleichung lautet:**

$$P_t = P_{\ddot{t}^{\ddot{y}}}(1 + Z_t)(1 + \ddot{y}_t) \Rightarrow \ddot{y}\ y_t = \ln PE\ddot{y}(1 + Z_t) + \ln 1 + \ddot{y}_t$$

$$\Rightarrow \ddot{y}\ y_t = \ln PE\ddot{y}(1 + Z_t) + \ddot{y}_t \quad (1)$$

wobei $y_t = \ln P_t$ E_t , **{Zt}tÿN ist eine zeitdiskrete Markow-Kette, die die mittelfristigen Effekte Rauscheffekte und** ÿt **ÿ N (0,** $\ddot{y}^2$ **modelliert.) ist eine Zufallsvariable, die die kurzfristigen Rauscheffekte mo Aufgrund der obigen Modellgleichung ist das verwendete Modell nur für Unternehmen anwendbar, die während des gesamten Untersuchungszeitraums positive Erträge erwirtschaften. Darüber hinaus ist zu beachten, dass** yt **eine beobachtbare Größe ist (da dies sowohl für** Pt **als auch** für Et der Fall **ist),** PEÿ **und** Zt jedoch **nicht. Es wird angenommen, dass sowohl** Zt **als auch** PEÿ **diskrete Werte haben; daher ist** Zt **ÿ {a1, . . . ,** aM} **und** PEÿ **ÿ {b1, . . . ,** bN} , **wobei** M **und** N **die Anzahl der möglichen latenten Zustände von** Zt **bzw.** PEÿ darstellen .

Im Folgenden werden die in diesem Modell verwendeten Annahmen zur bedingten Unabhängigkeit vorgestellt:

$$\ddot{y}\ t\ \ddot{y}\ 1, \ddot{y}\ i, j\ \ddot{y}\ 1,$$

$$Z_t\ \ddot{y}\ PE\ddot{y} \mid \ddot{y}. \quad (2)$$

$$Z_i\ \ddot{y}\ Z_j \mid Z_k\ \ddot{y}\ k\ \ddot{y}\ \{i + 1, \ldots, j\ \ddot{y}\ 1\}\ y_i\ \ddot{y}\ Z_j \mid Z_k\ , \quad (3)$$

$$PE\ddot{y}\ \ddot{y}\ k\ \ddot{y}\ \{i, \ldots, j\ \ddot{y}\ 1\}\ \text{oder}\ k\ \ddot{y}\ \{j + 1, \ldots, i\}.\ y_i\ \ddot{y}\ y_j \mid Z_k\ , PE\ddot{y} \quad (4)$$

$$\ddot{y}\ k\ \ddot{y}\ \{i, \ldots, j\}. \quad (5)$$

Machine Translated by Google

Für t ÿ **2 und r,s ÿ {1, . . . , M}** ist **die Matrix W :=** [wrs]M×M **definiert als Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix, wobei**

$$wrs := P[Zt = as \mid Ztÿ1 = ar].$$

Beachten Sie, dass wrs ÿ **[0,** 1] **und** $\sum_{s=1}^{M}$ ÿ wrs = **1. Für** t ÿ **1,** m ÿ **{1, . . . , M} und** n ÿ **{1, . . . , N}** ist **die Matrix** Dt := [dmn(yt)]M×N **definiert als die Emissionswahrscheinlichkeitsmatrix zum Zeitpunkt t, wobei**

$$dmn(yt) := P[yt \mid Zt = am, PEÿ = bn].$$

wobei dmn(yt) ÿ **N** (ln[bn(1 + am)], ÿ- ^{2}**). Für** m ÿ **{1, . . . , M} und** n ÿ **{1, . . . , N} ist die Vektoren u :=** (um)mÿN **und v :=** (vn)nÿN **als die anfänglichen Wahrscheinlichkeitsvektoren definiert sind , die die anfänglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen enthalten, wobei**

$$um := P[Z1 = am]; \qquad vn := P[PEÿ = bn].$$

Beachten Sie, dass um, vn ÿ **[0,** 1], ÿ $\sum_{m=1}^{M}$ um = **1 und** ÿ $\sum_{n=1}^{N}$ vn = **1. Diese Vorverteilungen dienen dazu, eventuell vorhandenes Expertenwissen des Forschers einzubeziehen. Eine grafische Darstellung des oben beschriebenen Modells finden Sie in Abbildung 1.**

Nachdem wir die für die Inferenz erforderlichen Prinzipien dargelegt haben, wird nun das Ziel der Analyse klarer: den Wert von PEÿ abzuleiten , **um den fundamentalen Preis einer Aktie abzuschätzen und auf dieser Grundlage eine Handelsstrategie zu formulieren. Darüber hinaus ist es auch nützlich, den Wert von** Zt abzuleiten , **da dies zum Testen einer alternativen Handelsstrategie verwendet werden kann. In diesem Zusammenhang werden die verwendeten Daten in einen Trainings- und einen Testdatensatz aufgeteilt. Der Satz der Modellparameter ist gegeben durch** *ÿ* = **{W, u, v,** *ÿ* **2}. Der Raum der möglichen Parameter is**

$$ÿ = ÿ : \text{um, vn, wrs } ÿ [0, 1], \quad \sum_{m=1}^{M} ÿ \text{ um} = 1, \quad \sum_{n=1}^{N} ÿ \text{ vn} = 1, \quad \sum_{s=1}^{M} ÿ \; ^{2}\text{wrs} = 1, ÿ > 0. \tag{6}$$

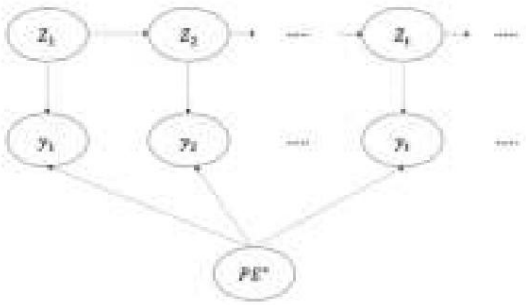


Abbildung 1. Darstellung des oben beschriebenen Modells mithilfe eines DBN, wobei yt **beobachtbar ist und** PEÿ **und** Zt **latente, diskrete Variablen sind.**

Anschließend folgen Lernen und Inferenz. Da die Parameter in *ÿ* **unbekannt sind, müssen sie zunächst geschätzt werden (Lernverfahren). Wie erwähnt, ist der Algorithmus, der zum Erhalten der MAP-Schätzungen verwendet wird, der Baum-Welch-Algorithmus. Nachdem die unbekannten Modellparameter geschätzt wurden, wird der Vorwärts-Rückwärts-Algorithmus auf die Parameterschätzungen angewendet, um den konstanten Wert von** PEÿ **für den Trainingssatz und den Testsatz abzuleiten und den Wert von** Zt **durch Glättung für den Trainingssatz und durch Filterung für den Testsat**

- **Filterwahrscheinlichkeiten:** P[ZT, PEÿ **| y1:T,** ÿ]; •
Glättungswahrscheinlichkeiten: P[Zt , PEÿ **| y1:T,** ÿ], **wobei** t ÿ **{1, . . . ,** T ÿ **1}.**

2.4. Inferenz mit bekannten Parametern

Gemäß dem Vorwärtsdurchlauf des Vorwärts-Rückwärts-Algorithmus werden die folgenden Definitionen vorgenommen und Gleichungen für die Filterwahrscheinlichkeiten abgeleitet:

ÿ t ÿ **{1, . . . , T},** m ÿ **{1, . . . , M},** n ÿ **{1, . . . , N},**

Machine Translated by Google

$$\ddot{y}tmn := P[Zt = am, PE\ddot{y} = bn \mid \mathbf{y1:t}, \ddot{y}] ;$$

$$\ddot{y}1mn = \ddot{y} \frac{\mathbf{dmn(y1)umvn}}{\sum_{m\ddot{y}=1}^{M} \ddot{y} \sum_{n\,\ddot{y}\,=\,1}^{N} \mathbf{dm\ddot{y}n}\, \ddot{y}(y1)um\ddot{y}vn}\ \ddot{y};$$

$$\ddot{y}tmn = \frac{dmn(yt)\ \ddot{y} \sum_{ich\,=\,1}^{M} P[Zt\ddot{y}1 = ai, \quad PE\ddot{y} = bn \mid \mathbf{y1:t\ddot{y}1]wmi}}{ct}\ ;$$

$$ct := \sum_{m\,=\,1}^{M} \ddot{y} \sum_{n\,=\,1}^{N} \ddot{y}\ dmn(yt) \sum_{ich\,=\,1}^{M} \ddot{y}\ P[Zt\ddot{y}1 = ai, PE\ddot{y} = bn \mid \mathbf{y1:t\ddot{y}1]wmi.}$$

Nach der Definition der Filterwahrscheinlichkeiten ergeben sich die Glättungswahrscheinlichkeiten durch die mit ÿtmn **bezeichnete Schätzung :**

$$\ddot{y}\ t\ \ddot{y}\ \mathbf{\{1, \ldots, T\ \ddot{y}\ 1\},}\ m\ \ddot{y}\ \mathbf{\{1, \ldots, M\},}\ n\ \ddot{y}\ \mathbf{\{1, \ldots, N\},}$$

$$\ddot{y}tmn := P[Zt = am, PE\ddot{y} = bn \mid y1{:}T].$$

Als nächstes muss gemäß dem Rückwärtsdurchlauf des Vorwärts-Rückwärts-Algorithmus die Definition von ÿtmn **angegeben werden, um die Werte für** ÿtmn erhalten zu können:

$$\frac{P[yt+1{:}T \mid Zt = am, PE\ddot{y} = bn]\ \ddot{y}tmn :=}{P[yt+1{:}T \mid \mathbf{y1:t}\ ]} = \frac{P[yt+1{:}T \mid Zt = am, PE\ddot{y} = bn]}{\ddot{y} \sum_{t\,\ddot{y}=t+1}^{T} ct\ \ddot{y}}$$

Daher ergibt sich gemäß dem Vorwärts-Rückwärts-Algorithmus:

$$\ddot{y}tmn = \ddot{y}tmn\ddot{y}tmn.$$

Was noch herzuleiten bleibt, sind die Ausdrücke für ÿtmn $\ddot{y}\ t\ \ddot{y}\ \mathbf{\{1, \ldots, T\ \ddot{y}\ 1\}:}$

$$\mathbf{\ddot{y}(T\ddot{y}1)mn} = \frac{\ddot{y}^{\ddot{y}}\mathbf{(T\ddot{y}1)mn}}{cT} = \frac{\ddot{y}\sum_{i\,=\,1}^{M} din(yT)wim}{\ddot{y}\sum_{m\,=\,1}^{M} \ddot{y}\sum_{n\,=\,1}^{N} cT}.$$

Für ÿtmn $\ddot{y}\ t\ \ddot{y}\ \mathbf{\{1, \ldots, T\ \ddot{y}\ 2\},}\ m\ \ddot{y}\ \mathbf{\{1, \ldots, M\},}\ n\ \ddot{y}\ \mathbf{\{1, \ldots, N\}:}$

$$\ddot{y}^{\ddot{y}}tmn = \sum_{ich\,=\,1}^{M} \ddot{y}\ \ddot{y}^{\ddot{y}}(t+1)indin(yt+1)wim\ ; \qquad \ddot{y}tmn = \frac{\ddot{y}\sum_{i=1}^{M} \ddot{y}(t+1)indin(yt+1)wim}{ct+1}.$$

Mit Ausdrücken sowohl für die Glättungs- als auch für die Filterwahrscheinlichkeiten, Die wahrscheinlichen Werte der latenten Variablen PEÿ **und** Zt **werden durch Marginalisierung ermittelt:**

$$PE\ddot{y} = \mathbf{arg\ max}\ bn \sum_{m\,=\,1}^{M} \ddot{y}\ P[Zt = am, PE\ddot{y} = bn \mid \mathbf{y1:T}] = \mathbf{arg\ max}_{Mrd.} \sum_{m\,=\,1}^{M} \ddot{y}\ \ddot{y}tmn$$

Um die Schätzung Zt **für den latenten Zustand** Zt zu finden , **wird eine Glättung auf den Trainingssatz angewendet während auf den Testsatz gefiltert wird:**

$$Zt = \mathbf{arg\ max}_{Bin} \sum_{n\,=\,1}^{N} \ddot{y}\ \ddot{y}tmn\ \ddot{y}\ t\ \ddot{y}\ \{t : yt\ \ddot{y}\ Xtrain\};$$

$$Zt = \mathbf{arg\ max}_{Bin} \sum_{n\,=\,1}^{N} \ddot{y}\ \ddot{y}tmn\ \ddot{y}\ t\ \ddot{y}\ \{t : yt\ \ddot{y}\ Xtest\}.$$

wobei Xtrain **und** Xtest **den Trainingssatz bzw. den Testsatz bezeichnen.**

Machine Translated by Google

2.5. Unbekannte Parameter lernen

Das Optimierungsproblem beim Lernen ist gegeben durch ÿMAP = **arg max** $_{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}$ **P** *ÿ* **|** ja $^{T}_{\mathbf{1}}$ **und ist gelöst mit dem Baum-Welch-Algorithmus (beachten Sie, dass in den folgenden Ausdrücken** *ÿ* technisch gesehen mit einem Hut-Hochzeichen (ˆ) geschrieben werden **sollte , da es sich um einen Satz von Parameterschätzungen handelt): 1. Setzen Sie** j = **1.**

2. Setze *ÿ* **(1)** ÿ *ÿ* **(0)** > *ÿ* **3.**

während *ÿ* (j) ÿ *ÿ* **(jÿ1)** > *ÿ* **do**

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P Zt = am, PEÿ = bn **| y1:T,** *ÿ* (j) **ÿ t, m,** n

(ich) (ii) Lösen Sie das Problem der eingeschränkten Maximierung

$$\textbf{arg max}_{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}} \; Q\,\ddot{y};\ddot{y}\,(j) + \ln P[\ddot{y}]\,\}\,\ddot{y}(j+1) =$$

wobei $Q\,\ddot{y};\ddot{y}\,(j) = \mathbf{E}_{Z1:T,PE\ddot{y}|y1:T,\ddot{y}\,(j)}\,\ln P[y1:T, Z1:T, PE\ddot{y} \mid \ddot{y}]$.

(iii) Inkrement j

Ein Ausdruck in geschlossener Form kann für Q **ÿ;** *ÿ* (j) **durch Verwendung der Glättungswahrscheinlichkeiten erhalten werden :**

$$\begin{aligned} Q\,\ddot{y};\ddot{y}\,(j) = {} & \sum_{t=1}^{T\ddot{y}1}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \ddot{y}_{tmn}^{(j\ddot{y}1)}\,\ddot{y}_{tmn}^{(j\ddot{y}1)}\ln[dmn(yt)] + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \ddot{y}_{Tmn}^{(j\ddot{y}1)}\ln[dmn(yT)] \\ & + \sum_{t\,\ddot{y}=2}^{T\ddot{y}1}\sum_{i,m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \ddot{y}\,\ddot{y}_{tmn}^{(j\ddot{y}1)}\,\frac{d_{mn}^{(j\ddot{y}1)}(yt)\,\ddot{y}_{mi}^{(j\ddot{y}1)}\,w_{(t\ddot{y}1)in}^{(j\ddot{y}1)}}{c_t}\ln[wmi] \\ & + \sum_{ich,\,m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \ddot{y}\,\ddot{y}\,\frac{d_{mn}^{(j\ddot{y}1)}(yT)\,w_{mi}^{(j\ddot{y}1)}}{c_T}\,\ddot{y}_{\mathbf{T\ddot{y}1,in}}^{(j\ddot{y}1)}\ln[wmi] \\ & + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \ddot{y}\,\ddot{y}_{1\,Min.}^{(j\ddot{y}1)}\,{}_{1\,Min.}^{(j\ddot{y}1)}(\ln[um] + \ln[vn]).\,\ddot{y} \end{aligned}$$

Im Argument des Maximierungsproblems oben ist **ln** *P[ÿ]* **der Logarithmus Vorverteilung** *P[ÿ],* **wobei** *P[ÿ]* = P[u]P[v]P[W]P[ÿ **ors angenommen wird.** ^{2}**von], da die Unabhängigkeit der pri Innerhalb dieser Vorverteilung können zwei Arten von Expertenwissen enthalten sein – Vorwissen über den ungefähren Wert von** PEÿ **und Vorwissen über die Persistenz der mittelfristigen Rauscheffekte, die jeweils durch die Vorverteilung P[v] und die Vorverteilung P[W]** kodiert werden .

Die Vorhersage für den Vektor v wird durch die Dirichlet-Verteilung dargestellt:

$$\frac{\ddot{y}(k1 + \mathbf{k2} + \ldots + kN)\;\mathbf{f(v)} =}{\mathbf{\ddot{y}(k1)\ddot{y}(k2).\,.\,.}\;\ddot{y}(kN)} \prod_{\ddot{y}n=1}^{N} v_{n}^{kn\ddot{y}1} \qquad \textbf{(7)}$$

Die Werte kn **für** n **ÿ {1, . . . , N} entsprechen intuitiv dem Grad der Überzeugung eines Experten, dass** bn **der „wahre“ Wert für** PEÿ ist . **Für diese Analyse gilt** kn = **1 ÿ n. Die Vorhersage für die Matrix W wird ebenfalls aus der Dirichlet-Verteilung f(W)** = **ÿ** $\prod_{m=1}^{M}$ f(wm) abgeleitet, **wobei** wm = **(wim)i=1,...,M und**

$$= \frac{\ddot{y}(k1m + \mathbf{k2m} + \ldots + kMm)\;\mathbf{f(wm)}}{\mathbf{\ddot{y}(k1m)\ddot{y}(k2m).\,.\,.}\;\ddot{y}(kMn)} \prod_{\ddot{y}m=1}^{M} w_{ich\,bin}^{kim\ddot{y}1} .$$

Da W die Übergangsmatrix für die verborgene Markow-Kette {Zt}tÿN ist, stellen **die diagonalen Einträge von W** die Wahrscheinlichkeit dar, dass ein bestimmter Zustand bestehen bleibt (zum **nächsten Zeitpunkt unverändert bleibt).** Je größer der Wert von Zt **(oder entsprechend am), d**

Machine Translated by Google

Persistenz des Zustands. In dieser Analyse **werden die Einträge außerhalb der Diagonalen (für weitere Informationen zu den Werten der Nebendiagonalen** sei dem Leser **Wang [22] empfohlen)** auf 0 gesetzt.

Unter Berücksichtigung aller oben genannten Punkte ergibt sich für den Logarithmus des vorherigen *P[ÿ]*

$$\ln P[\ddot{y}] = \ln P[W] + \ln P[v] = \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} \ddot{y}\,(kim\ \ddot{y}\ 1)\ln[wim] + \sum_{n=1}^{N} \ddot{y}\,(kn\ \ddot{y}\ 1)\ln[vn] + \mathbf{s1},$$

wobei s1 = **ln** $\frac{\ddot{y}(k1+k2+\ldots+kN)}{\ddot{y}(k1)\ddot{y}(k2)\ldots\ddot{y}(kN)}$ + **ln** $\frac{\ddot{y}(k1m+k2m+\ldots+kMm)}{\ddot{y}(k1m)\ddot{y}(k2m)\ldots\ddot{y}(kMn)}$.

Die Konstante s1 ist nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Sie wird irrelevant, wenn Maximierung im Baum-Welch-Algorithmus.

Mit den festgelegten Prioren ist das eingeschränkte Optimierungsproblem nun vollständig definiert. Beachten Sie, dass nur die Gleichheitsbeschränkungen in (6) berücksichtigt werden, da die Ungleichheitsbeschränkungen am Ende immer noch erfüllt werden. Daher kann die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwendet werden, um dieses Optimierungsproblem zu lösen. Die Ausdrücke für die Schätzer der vier betreffenden Variablen sind unten angegeben:

$$u_{(j)} = \sum_{n=1}^{N} \ddot{y}^{(j\ddot{y}1)\,(j\ddot{y}1)\,\ddot{y}\,\ddot{y}}_{1mn\ ;\ 1mn} \tag{8}$$

$$v_{(j)} = \frac{\sum_{m=1}^{M} {}^{(J)}_{1mn(Z1,\ PE\ddot{y}\ )} + (kn\ \ddot{y}\ 1)\ \ddot{y}}{1 + \ddot{y}\sum_{\ddot{y}=1}^{N}(kn\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ 1)} = \frac{\ddot{y}\ddot{y}\sum_{m=1}^{M}{}^{(j\ddot{y}1)\,(j\ddot{y}1)}_{1mn} + (kn\ \ddot{y}\ 1)\ \ddot{y}}{1 + \ddot{y}\sum_{\ddot{y}=1}^{N}(kn\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ 1)}; \tag{9}$$

$$w_{(j)} = \frac{\ddot{y}\sum_{t\ddot{y}=2}^{T}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N} q^{(J)}_{\tau^{\ddot{y}},m,i,n}\,(Zt\ \ddot{y},\ Zt\ \ddot{y}\ddot{y}1\ ,PE\ddot{y}\ ) + (kmi\ \ddot{y}\ 1)}{\ddot{y}\sum_{t\ddot{y}=2}^{T}\ddot{y}\sum_{m=1}^{M}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N} q^{(j)}_{\tau^{\ddot{y}},m,ich,n}\,(Zt\ \ddot{y},\ Zt\ \ddot{y}\ddot{y}1\ ,\ PE\ddot{y}) + \ddot{y}\sum_{m\ddot{y}=1}^{M}(km\ddot{y}\ i\ \ddot{y}\ 1)} = \frac{\ddot{y}^{(J)}_{t\ddot{y},m,i,n}}{\ddot{y}\ddot{y}\sum_{m\ddot{y}=1}^{M}{}^{(j)}_{t\ddot{y},m,i,n}}, \tag{10}$$

Wo

$$\ddot{y}^{(J)}_{t\ddot{y},m,i,n} = \sum_{t\ddot{y}=2}^{T\ddot{y}1}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N}\ddot{y}\ddot{y}^{(j\ddot{y}1)\,t}_{\ddot{y}mn}\,\frac{d^{(j\ddot{y}1)}_{mn}(yt\ \ddot{y})}{c^{(j\ddot{y}1)}_{t\ddot{y}}}\,w^{(j\ddot{y}1)\,t\ddot{y}}_{mi}\,{}_{\ddot{y}\ddot{y}1,i,n} + \sum_{n=1}^{N}\ddot{y}\,\frac{d^{(j\ddot{y}1)}_{mn}(yT)^{(j\ddot{y}1)}}{c_T}\,w^{(j\ddot{y}1)\,\ddot{y}}_{mi}\,{}^{(j\ddot{y}1)}_{(T\ddot{y}1)in} + (kmi\ \ddot{y}\ 1)$$

$$\ddot{y}2^{(j\ddot{y}1)} = \frac{\ddot{y}\sum_{t=1}^{T\ddot{y}1}\ddot{y}\sum_{m=1}^{M}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N}{}^{\ddot{y}\,(j\ddot{y}1)\,(j\ddot{y}1)\,\ddot{y}}_{\ddot{y}\,tmn}\,(yt\ \ddot{y}\ln[bn(1+am)])2}{\sum_{t=1}^{T\ddot{y}1}\ddot{y}\sum_{m=1}^{M}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N}{}^{\ddot{y}\,(j\ddot{y}1)\,(j\ddot{y}1)\,\ddot{y}}_{\ddot{y}\,tmn}\ \sum_{m=1}^{M}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N}{}^{(j\ddot{y}1)}_{\ddot{y}\,Tmn}} + \frac{\ddot{y}\sum_{m=1}^{M}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N}{}^{(j\ddot{y}1)}_{\ddot{y}\,Tmn}\,(yT\ \ddot{y}\ln[bn(1+am)])2}{\ddot{y}\sum_{t=1}^{T\ddot{y}1}\ddot{y}\sum_{m=1}^{M}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N}{}^{\ddot{y}\,(j\ddot{y}1)\,(j\ddot{y}1)\,\ddot{y}}_{\ddot{y}\,tmn} + \ddot{y}\sum_{m=1}^{M}\ddot{y}\sum_{n=1}^{N}{}^{(j\ddot{y}1)}_{\ddot{y}\,Tmn}}. \tag{11}$$

3. Analysemethodik und Ergebnisse

Für die Analyse dieses Papiers wurden zwölf Aktien ausgewählt (siehe Tabelle 1) – neun aus einem entwickelten Markt (USA) und drei aus Schwellenmärkten (Brasilien und China). Der Trainingssatz enthält Daten vom 1. Januar 2011 bis zum 31. Dezember 2019, während der Testsatz Daten vom 1. Januar 2020 bis zum 30. September 2020 enthält. Unter Verwendung einer rollierenden Sharpe-Ratio der letzten 12 Monate als Referenzpunkt zeigten alle Aktien im Testzeitraum durchschnittliche oder überdurchschnittliche Renditen (im Vergleich zu einer S&P-Benchmark), mit Ausnahme der beiden unterdurchschnittlich abschneidenden brasilianischen Aktien [26]. Für den oben genannten Zeitraum wurden für jede Aktie zwei Datensätze erhoben – tägliche Preisdaten und vierteljährli

Machine Translated by Google

Tabelle 1. Ergebnistabelle, die die Kapitalrendite als Prozentsatz der investierten Summe zeigt.

Werte in Klammern sind negativ.

Aktie	Schwellenwerte für die LT-Strategie				Schwellenwerte für MT-Strategie 0,05				Profitieren Sie von B&H
	0,05	0,10 0,20	0,15		0,03	0,10	0,07		
AAPL (USA)	55,30 %	55,30 %	55,30 %	55,30 %	69,51 %	57,82 %	48,06 %	76,02 %	55,30 %
ADBE (USA)	25,46 %	37,86 %	44,45 % 0 %		46,65 %	46,65 %	46,65 %	46,65 %	46,65 %
BLK (USA)	12,98 %	12,98 %	12,98 %	12,98 %	33,92 %	34,66 %	20,85 %	20,85 %	12,98 %
KOSTEN (USA)	22,59 %	22,59 %	22,59 %	22,59 %	50,12 %	42,85 %	28,21 % 0 %		22,59 %
HD (USA)	28,71 %	28,71 %	28,71 %	28,71 %	57,76 %	51,31 %	37,99 %	47,35 %	28,71 %
ITUB (BZ)	(39,86 %) (29,36 %) (29,36 %) (27,57 %) 9,10 % 27,17 % 29,34 % 61,09					7,07 %	7,07 %	(9,59 %)	(55,85 %)
MA (USA)	% 60,41 % 47,70 %					32,57 %	24,66 %	34,39 %	11,93 %
MCD (USA)	11,38 %	11,38 %	11,38 %	11,38 %	18,94 %	18,94 %	30,63 %	30,63 %	11,38 %
NTES (CHN) 47,89 % NVDA		50,84 %	57,35 %	39,54 %	39,54 %	39,54 %	39,54 %	39,54 %	39,54 %
(USA) 125,90 % 125,90 % 125,90 % 125,90 % 149,00 % 156,79 % 125,90 % 125,90 % 125,90 %									
SAN (BZ) (14,35 %) (17,78 %) (17,78 %) (57,17 %) (57,17 %) (57,17 %) (57,17 %) (57,17 %)									
UNH (USA) 7,95 % 19,88 %	7,95 %		15,90 %		72,41 %	21,83 %	38,58 %	2,87 %	7,95 %
Durchschnitt	26,12 %	25,07 %	32,38 %	27,61 %	44,79 %	37,74 %	32,60 %	29,79 %	20,83 %
S/N/N Gesamt	4/7/1	4/7/1 5/6/1 17/27/4		4/7/1	9/3/0	9/3/0 7/4/1 31/14/3		6/4/2	

Nach der vorläufigen Datenbereinigungs- und -aufbereitungsphase werden die Anfangswerte der Vektoren Als nächstes werden **a** = (am) **und b** = (bn) **gesetzt. Prioren des Vektors v und der Matrix W werden wie besprochen gesetzt früher; der Prior für u wird auf die diskrete Gleichverteilung gesetzt, und der Anfangswert von** $\dot{y}^2$ **wird auf 5 gesetzt. Das Parameterlernen wird dann vor der Inferenz der latenten Zustände durchgeführt** PEÿ **und** Zt . **Es folgt eine Simulation der Handelsstrategien. Die vorgeschlagenen Handelsstrategien von Wang [22] , die in diesem Papier verwendet wird, wird mit der Benchmark-B&H-Strategie verglichen. Für beide vorgeschlagenen Handelsstrategien** bezeichnen wir **den Betrag des zum Zeitpunkt verfügbaren Bargeldes t;** Nt **bezeichnet die Einheiten eines Wertpapiers, die zum Zeitpunkt t gehalten werden;** Ttrain **stellt die Größe des Trainingsset; und lass** T **die Größe des Datensatzes darstellen (Summe der Größen von Trainings- und Test Sets). Sowohl die langfristigen als auch die mittelfristigen Handelsstrategien können durch drei mögliche Handlungsweisen (im Folgenden mit (i), (ii) und (iii) bezeichnet) zum Zeitpunkt t; das heißt Handlungsweisen (i) bis (ii) sind beiden Handelsstrategien gemeinsam:**

(i) Wenn PEt **ÿ** At(1 **ÿ** Tr) **und** It > **0, dann kaufen Sie das Wertpapier mit dem gesamten verfügbaren Bargeldbestand** It . **Daher ist** Nt+1 = $\frac{Es}{PT}$ **und** It+1 = **0.**

(ii) Wenn PEt **ÿ** At(1 + Tr) **und** It = **0, dann verkaufe alle gehaltenen Einheiten** Nt . **Daher ist** Nt+1 = **0 und** It+1 = PtNt .

(iii) Wenn weder (i) noch (ii) erfüllt sind, führen Sie keine Transaktionen aus. Daher gilt Nt+1 = Nt **und** Es+1 = Es .

Beachten Sie, dass At **als Basiswert gilt und von der Handelsstrategie abhängt. Der Der Schwellenwert** Tr **ÿ (0,** 1) **dient als Sensitivitätsmaß, das definiert, wie sehr der Anleger will** PEt **zulassen** = $\frac{Pt}{Et}$ von der Basislinie At **abzuweichen, bevor ein bestimmter Vorgehensweise in den Handelsstrategien. Dies wird deutlich, wenn man bedenkt, wie die Vorgehensweisen definiert. Der Gesamtgewinn am Ende der Handelsperiode ergibt sich aus** IT + PTNT **ÿ** ITtrain+1.

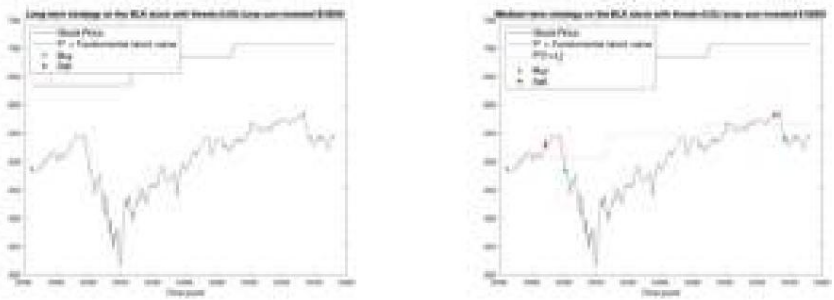
Die erste Handelsstrategie ist die sogenannte „Langzeitstrategie“, bei der der Handel auf der Grundlage des konstanten Wertes von PEÿ erfolgt, also At = **PEÿ. Die alternative Strategie ist die „mittelfristige Strategie“, bei der der Handel im Hinblick auf die dynamische Werte von PEÿ(1** + Zt), **wobei jedes** Zt **dynamisch durch Filterung geschätzt wird. Daher für die mittelfristige Strategie gilt:** At = **PEÿ(1** + Zt).

Die Ergebnisse zu den BLK- und ITUB-Aktien werden in diesem Dokument grafisch detailliert dargestellt. Erstens legt die langfristige Strategie auf Basis der BLK-Aktiendaten nahe, dass der Anleger die Bestand zum Zeitpunkt 2265 = Ttrain + **1 und hält den Bestand für den Rest der Periode. Diese Strategie stimmt mit der B&H-Strategie überein, und daher entspricht der Gewinn aus der langfristigen Strategie dem Gewinn aus der B&H-Strategie, der 1298,04 USD beträgt. Dies entspricht einer Rendite von 12,98 % auf die ursprüngliche Investition von 10.000 USD. Andererseits**

Machine Translated by Google

Die mittelfristige Strategie schlägt vor, dass der Anleger die Aktie zu den Zeitpunkten 2265, 2301 und 2437 kauft, sie zu den Zeitpunkten 2289 und 2431 verkauft und sie für die restlichen Zeitpunk Dies würde einen Gewinn von 3391,85 USD ergeben; das entspricht einer Rendite von 33,92 % auf die ursprüngliche Investition von 10.000 USD im neunmonatigen Zeitraum, den der Testsatz abdeckt. Das bedeutet, dass die mittelfristige Strategie die B&H-Strategie um 20,94 % schlägt. Abbildung 2 veranschaulicht die langfristige und die mittelfristige Strategie.

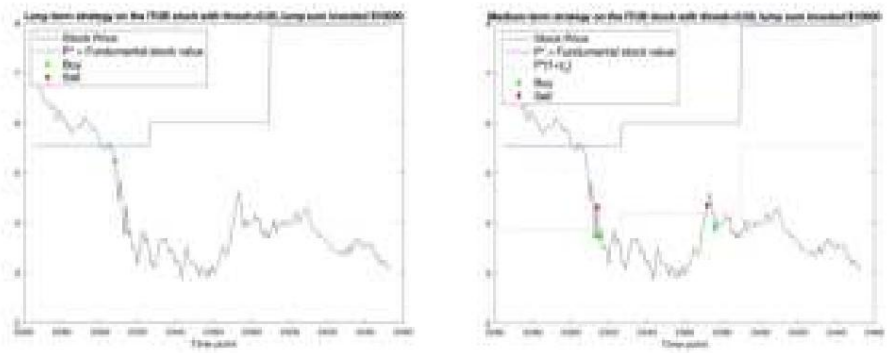
Als nächstes besprechen wir die ITUB-Aktiendaten. Die langfristige Strategie schlägt vor, dass der Anleger die Aktie zum Zeitpunkt 2308 kauft und für den Rest des Zeitraums hält. Die Umsetzung dieser Strategie würde einen Verlust von 3986,16 USD ergeben, was einem Verlust von 39,86 % der ursprünglichen Investition von 10.000 USD entspricht. Die Buy-and-Hold-Strategie würde jedoch einen größeren Verlust von 5584,67 USD ergeben. Im Gegensatz dazu schlägt die mittelfristige Strategie vor, dass der Anleger die Aktie zu den Zeitpunkten 2313, 2315 und 2376 kauft, sie zu den Zeitpunkten 2314 und 2372 verkauft und sie für die restlichen Zeitpunkte hält. Dies würde tatsächlich einen Gewinn von 909,81 USD ergeben. Obwohl dies nur eine Rendite von 9,1 % der ursprünglichen Investition von 10.000 USD ist, bietet die mittelfristige Strategie dem Anleger eine Strategie, mit der er oder sie in einer Zeit, in der die Aktie tatsächlich abstürzt, einen Gewinn erzielen kann. Abbildung 3 veranschaulicht die langfristige Strategie bzw. die mitt



a) Langfristige Strategie **b) Mittelfristige Strategie**

Abbildung 2. Simulierte Strategien für die BLK-Aktie.

Allgemeiner gesehen sehen wir in Tabelle 1 , dass die mittlere Strategie **für BLK, COST, HD, ITUB, MA, MCD, NVDA und UNH durchweg überlegen war** (für verschiedene Schwellenwerte). **Für ITUB ergibt sich mit der Strategie bei allen Schwellenwerten außer einem ein leichter Gewinn, obwohl bei anderen Strategien ein Verlust verzeichnet wird. Die langfristige Strategie war für NTES und SAN durchweg überlegen. Für ADBE bot keine der beiden Strategien Vorteile, während für AAPL der Erfolg der mittelfristigen Strategie von der Wahl des Schwellenwerts abhängt. Im Fazit werden diese Ergebnisse weiter analysiert.**



a) Langfristige Strategie **b) Mittelfristige Strategie**

Abbildung 3. Simulierte Strategien für die IUTB-Aktie.

Machine Translated by Google

4. Schlussfolgerungen

Durch die Verwendung von DBNs wird das Modell für Aktienbewegungen von Wang [22] für unseren vorhandenen Aktiendatensatz erstellt. Dieses Modell umfasst zwei latente Zustände – einen, der die mittelfristigen Rauscheffekte modelliert, und einen, der das wahre fundamentale KGV eines Unternehmens modelliert, wobei letzteres während des gesamten Untersuchungszeitraums als konstant angenommen wird. Der Vorwärts- Rückwärts-Algorithmus und der Baum-Welch-Algorithmus (Variante des EM-Algorithmus) werden verwendet, um Parameterlernen und Inferenz durchzuführen. Basierend auf diesem angepassten Modell werden die langfristigen und mittelfristigen Strategien auf die zwölf hier untersuchten Aktien angewendet, wobei neun dieser Aktien auf einem entwickelten Markt und der Rest auf einem Schwellenmarkt gehandelt werden. Insgesamt übertreffen sowohl die langfristigen als auch die mittelfristigen Strategien die Benchmark-Handelsstrategie von B&H 17 bzw. 31 Mal bei insgesamt 48 Versuchsdurchläufen für jede Strategie (vier für jede der zwölf Aktien). Die von Wang vorgeschlagenen Strategien verlieren nur vier bzw. drei Mal gegen B&H. Darüber hinaus ist die Outperformance dieser Handelsstrategien erheblich. Während der durchschnittliche Gewinn aller Aktien bei Verwendung der B&H-Strategie 20,83 % beträgt, beträgt der durchschnittliche Gewinn aller Aktien und aller Schwellenwerte bei der langfristigen Strategie 27,78 % und bei der mittelfristigen Strategie 36,23 %. Abschließend ergibt sich, dass diese Handelsstrategien dem Anleger Handelsvorschläge liefern, die in bestimmten Fällen sogar einen Verlust bei der B&H-Strategie in einen Gewinn verwandeln können, wie dies bei der ITUB-Aktie der Fall war . Diese Aktie befan

Wie bei jedem statistischen Modell besteht auch bei dem in dieser Arbeit implementierten Modell Verbesserungsbedarf . Die erste und bedeutendste Einschränkung ist die Tatsache, dass das Modell nur Aktien modellieren kann, die während des untersuchten Zeitraums einen positiven Gewinn pro Aktie hatten. Dies liegt an der linken Seite der Modellgleichung, also Gleichung (1). In bestimmten Zeiten, wie etwa während Pandemien oder Rezessionen, kann es erheblich schwierig sein, ein Unternehmen zu finden, das während des untersuchten Zeitraums in mindestens einem Quartal keinen Verlust verzeichnet hat. Eine zweite Einschränkung ist die fehlende Nutzung von Expertenwissen. Bei realen Investitionen wird Fachwissen auf diesem Gebiet als sehr wertvoll angesehen, und nur erfahrenen Anlegern wird im Allgemeinen empfohlen, aktiv zu handeln. Da das Modell in diesem Papier die Einbeziehung von Expertenwissen zulässt, ist es in der Tat eine Einschränkung, dass dieses Wissen nicht genutzt wird. Eine weitere Einschränkung im Zusammenhang mit Expertenwissen ist die Einschränkung, dass bei **dieser Analyse keine Handelsgebühren oder Provisionen berücksichtigt werden . Obwohl das vorgeschlagene Modell die Berücksichtigung von Provisionen in den Handelsstrategien ermöglicht, waren zum Zeitpunkt der Erstellung dieses Artikels keine Ker**

Es ist bekannt, dass sich bei der Ausführung mehrerer Trades gewisse Handelsgebühren mitunter so summieren können, dass sich ein Gewinn durch die Berücksichtigung dieser Gebühren in einen Verlust verwandeln kann , was die Buy-and-Hold-Strategie rentabler machen würde.

Verbesserungen der oben genannten Einschränkungen können den Wert des Modells steigern und sollten bei künftigen Arbeiten berücksichtigt werden. Eine weitere Verbesserung, die das Modell in realen Szenarien anwendbarer macht, ist die Einbeziehung einer Variablen zur Messung der Liquidität einer Aktie. Denn die Vorschläge der Handelsstrategien zum Kauf- und Verkaufszeitpunkt einer Aktie sind nutzlos, wenn die Aktie selbst nicht liquide ist . Bis die Aktie liquide genug wird, um eine tatsächliche **Handelsmöglichkeit zu ergeben, können sich die Preise ändern ,** und wenn sich der Preis erheblich ändert, wird **der Vorschlag selbst offensichtlich nutzlos. In dieser Studie wurde die Liquidität nicht als Problem angesehen, da es sich bei allen 12 betrachteten Aktien um Large-Cap-Aktien handelt.**

Die Wahl der verwendeten historischen Daten ist immer eine wichtige Entscheidung, da die Länge der Zeitreihe eine große Rolle spielt. Grundsätzlich sind längere Zeitreihen kürzeren vorzuziehen, aber wenn die historischen Daten Regimeänderungen enthalten, kann dies die Prognoseleistung des Modells beeinträchtigen. Darüber hinaus können zukünftige Regimeänderungen, die im Testzeitraum auftreten können, ebenfalls die Prognoseleistung des Modells beeinträchtigen.

Schließlich sind weitere Verbesserungen, die in zukünftigen Studien umgesetzt werden können, weitere und tiefergehende Experimente und Tests sowie die Möglichkeit von Leerverkäufen. Zunächst können Experimente auf Portfolioebene mit den hier untersuchten Aktien durchg

Machine Translated by Google

um zu verstehen, wie sich die Gewinne ändern, wenn eine Gruppe von Aktien zusammen betrachtet wird – zum Beispiel können Stichproben von neun der zwölf hier untersuchten Aktien zur Bildung von Portfolios herangezogen werden, und das „optimale“ Portfolio kann ermittelt werden. Abgesehen davon kann in zukünftigen Studien mehr Zeit für die Kreuzvalidierung aufgewendet werden, um die Vorschläge der Handelsstrategien in dieser Arbeit weiter zu verbessern. Außerdem könnten die Eigenschaften aller verwendeten Schätzer in zukünftigen Arbeiten abgeleitet werden, um ihr Verhalten besser zu verstehen. Schließlich erlaubt diese Strategie keine Leerverkäufe von Aktien; Erweiterungen des Modells, die dies ermöglichen, könnten vorgeschlagen werden.

Autorenbeiträge: Alle drei Autoren haben gleichermaßen hart an diesem Artikel gearbeitet. KL kümmerte sich um die Codierung in MATLAB und den Abschnitt „Ergebnisse“, MAC und DPS kümmerten sich um die Methodik und den theoretischen Inhalt des Artikels. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version **des Manuskripts gelesen und ihr zugestimmt .**

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Datenverfügbarkeitserklärung: Alle Daten sind frei verfügbar bei Yahoo Finance unter https:// finance.yahoo.com/.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Abkürzungen

In diesem Manuskript werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

BN Bayesianisches Netzwerk
DAG Gerichteter azyklischer Graph
DBN Dynamisches Bayes-Netzwerk
DGM Gerichtetes grafisches Modell
EM-Erwartungsmaximierung
HNN Verstecktes Markov-Modell
PDF-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
MAP Maximum a posteriori
ML Maximale Wahrscheinlichkeit

Verweise

1. **Russell, S.; Norvig, P.** Künstliche Intelligenz: Ein moderner Ansatz, **2. Auflage; Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.**
2. **Murphy, K. Dynamische Bayessche Netze: Darstellung, Inferenz und Lernen. Dissertation, University of California, Berkeley, CA, USA, 2002.**
3. **Basu, S. Investment Performance von Stammaktien im Verhältnis zu ihren Kurs-Gewinn-Verhältnissen: Ein Test des effizienten Marktes Hypothese.** J. Financ. **1977,** 23, **3. 663–673. 4.**
Lleo, S.; Ziemba, WT Eine Geschichte von zwei Indizes: Vorhersage von Aktienmarktabschwüngen in China. 2020. [CrossRef]
5. **Angelini, N.; Bormetti, G.; Marmi, S.; Nardini, F. Value Matters: Vorhersagbarkeit von Aktienindexrenditen.** SSRN **2012. [CrossRef]**
6. **Chang, KC; Tian, Z. Marktanalyse und Handelsstrategien mit Bayesschen Netzen. In Proceedings der 18. Internationalen Konferenz zur Informationsfusion, FUSION 2015, Washington, DC, USA, 6.–9. Juli 2015; S. 1922–1929.**
7. **Damiano, L.; Peterson, B.; Weylandt, M. Regime Switching und technischer Handel mit dynamischen Bayes-Netzen in Frequenzbörsen, 2017.**
8. **Tayal, A.** Regime Switching und technischer Handel mit dynamischen Bayes-Netzwerken in Hochfrequenz-Aktienmärkten; **University of Waterloo: Waterloo, ON, Kanada, 2009.**
9. **Dagum, P.; Galper, A.; Horvitz, E. Dynamische Netzwerkmodelle für Prognosen. In Proceedings der achten Konferenz über Unsicherheit in der künstlichen Intelligenz, Stanford, CA, USA, 17.–19. Juli 1992; S. 41–48.**
10. **Dagum, P.; Galper, A.; Horvitz E. Unsicheres Denken und Prognosen.** Int. J. Forecast. **1995,** 11, **73–87. [CrossRef]**
11. **Zweig, Z.; Russell S. Spracherkennung mit dynamischen Bayes-Netzwerken. 1998. Online verfügbar: http://www.cse.msu.edu/ ~cse841/papers/zweig.pdf (abgerufen am 28. April 2024).**
12. **Nefian, A.; Liang, L.; Pi, X.; Liu, X.; Murphy, K. Dynamische Bayes-Netzwerke für audiovisuelle Spracherkennung.** EURASIP J. Adv. Signal Process. **2002,** 11, **783042. [CrossRef]**
13. **Yao, XQ; Zhu, H.; She, Z. Ein dynamischer Bayesianischer Netzwerkansatz zur Vorhersage der Sekundärstruktur von Proteinen.** BMC Bioinform. **2008, 9, 49. [CrossRef] [PubMed]**
14. **Raval, A.; Ghahramani, Z.; Wild, DL Ein Bayesianisches Netzwerkmodell für Proteinfaltung und Remote-Homolog-Erkennung.** Bioinformatics **2002,** 18, **788–801. [CrossRef] [PubMed]**

Machine Translated by Google

15. Murphy, K.; Mian, S. Modelling Gene Expression Data Using Dynamic Bayesian Networks. 1996. Online verfügbar: https://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Papers/ismb99.pdf (abgerufen am 28. April 2024).
16. Prembida, C.; Souza, FAA; Faria, DR Dynamisches Bayes-Netzwerk zur semantischen Ortsklassifizierung in der mobilen Robotik. Auton. Roboter. 2016, 5, 1161–1172. [CrossRef]
17. Patel, M.; Miro, JV ; Dissanayake, G. Dynamische Bayes-Netzwerke für Lerninteraktionen zwischen assistierenden Roboter-Gehhilfen und menschlichen Benutzern. 2010. Online verfügbar: https://opus.lib.uts.edu.au/bitstream/10453/16294/1/2010000382.pdf (abgerufen am 28. April 2024).
18. Delage, E.; Lee, HAY Ein dynamisches Bayes-Netzwerkmodell für die autonome 3D-Rekonstruktion aus einem einzelnen Innenraumbild. In Proceedings der 2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'06), New York, NY, USA, 17.–22. Juni 2006; Band 2, S. 2418–2428. [CrossRef]
19. Cozar, J. ; Puerta J. ;Gamez, JA Eine Anwendung dynamischer Bayesscher Netze zur Zustandsüberwachung und Fehlervorhersage in ein Sensorsystem: Eine Fallstudie. Int. J. Comput. Intell. Syst. 2017, 10 , 176. [CrossRef]
20. Benhamou, E.; Atif, J.; Laraki, R. Ein neuer Ansatz zum Lernen in dynamischen Bayes-Netzwerken (DBNs). SSRN Electron. J. 2018. [Querverweis]
21. Murphy, K. Eine Einführung in grafische Modelle. 2001. Online verfügbar: https://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Bayes/bnintro.html (abgerufen am 28. April 2024).
22. Wang, H. Bayesianische probabilistische Inferenz auf Aktienpreisdynamik auf Unternehmensebene. Dissertation, Suranaree University of Technologie, Nakhon Ratchasima, Thailand, 2016.
23. Murphy, K. Maschinelles Lernen: Eine probabilistische Perspektive; MIT Press: Cambridge, MA, USA, 2012.
24. Baum, LE; Petries, T.; Soules, G.; Weiss, N. Eine Maximierungstechnik in der statistischen Analyse probabilistischer Funktionen von Markow-Ketten. Ann. Math. Stat. 1970, 41, 1, 167–171. [CrossRef]
25. Dempster, AP; Laird, NM; Rubin, DB Maximum Likelihood aus unvollständigen Daten über den EM-Algorithmus. JR Stat. Soc. Ser. B 1977, 39 , 1–22 .
26. PortfoliosLab. Online verfügbar: https://portfolioslab.com/ (abgerufen am 28. April 2024).

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Von algebro-geometrischen Lösungen der Toda-Gleichung zu Sato-Formeln

Pierre Gaillard

Faculté des Sciences Mirande, Université de Bourgogne Franche-Comté, 2100 Dijon, Frankreich; pierre.gaillard@u-bourgogne.fr

Zusammenfassung: Wir wissen, dass die Entartung von Lösungen für partielle Differentialgleichungen, die in Form von Theta-Funktionen auf Riemann-Flächen gegeben sind, wichtige Ergebnisse über bestimmte Lösungen liefert, wie im Fall der NLS-Gleichung. Hier entarteten wir die sogenannten Finite-Gap-Lösungen der Toda-Gittergleichung aus der allgemeinen Formulierung in Form von abelschen Funktionen, wenn die Lücken zu Punkten tendieren. Diese Entartung ermöglicht es uns, die Sato-Formeln wiederherzustellen, ohne die inverse Streutheorie oder geometrische oder repräsentationstheoretische Methoden zu verwenden.

Schlüsselwörter: Riemannsche Flächen; Theta-Funktionen; abelsche Integrale; Baker-Akhiezer-Funktionen; Sato-Formeln

MSC: 35C99, 35Q35, 35Q53

1. Einleitung

Zur Darstellung der Toda-Gleichung können verschiedene Formulierungen gewählt werden. In der Originalarbeit von 1967 [1] wurde die Schwingung einer gleichförmigen Kette von Teilchen mit nichtlinearer Wechselwirkung untersucht, und Toda betrachtete die folgende Gleichung für das n-te Teilchen in der Kette: $m\ddot{y}_n = \dot{y}_{n-1}(\dot{y}) - \dot{y}_n(\dot{y}) + \dot{y}_{n+1}(\dot{y}) - \dot{y}_n$, **(1)**

wobei m **die Masse der Teilchen und** $\dot{y}(r)$ **die Wechselwirkungsenergie zwischen benachbarten Teilchen ist. Einige Lösungen wurden für bestimmte Wechselwirkungen** $\dot{y}$ **konstruiert.**

Die gleiche Gleichung wurde 1976 von Date und Tanaka mit m = 1 betrachtet **[2] und sie konstruierten einige allgemeine Lösungen, allerdings in Form von Integralen, die schwer anzuwenden s**

Im Anhang der Arbeit von Dubrovin [3], die 1981 veröffentlicht wurde, betrachtete Krichever die nichtabelsche Version dieser Gleichung und lieferte Lösungen in Form der Theta- Funktion auf Riemann-Flächen.

Im Jahr 1995 betrachteten Matveev und Stahlhoffen [4] die folgende Version der Toda-Gleichung:

$$\ddot{y}_n x(u_n) = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}). \quad (2)$$

Sie verwendeten die Darboux-Transformation, um Lösungen für diese Gleichung zu konstruieren in Bezug auf von Casoratis.

Im Jahr 2014 verwendeten Zhang und Zhou [5] die folgende Darstellung der Toda-Gleichung

$$\dot{y}_x \dot{y}_t(u_n) = (\dot{y}_t(u_n) + \dot{y}(t))(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}). \quad (3)$$

Sie verwendeten die Verallgemeinerung der Exp-Funktion, um Mehrwellenlösungen für diese Gleichung zu konstruieren.

Kürzlich untersuchten Sun, Ma und Yu [5] die folgende Darstellung der Toda-Gleichung:

$$\dot{y}(u_n) = 4(\exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1})). \quad (4)$$

check for updates

Zitat: Gaillard, P. Aus Algebro Geometrische Lösungen des Toda Gleichung zu Sato-Formeln. AppliedMath **2024, 4, 856–867. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030046**

Wissenschaftlicher Redakteur: Carlo Bianca

Empfangen: 26. April 2024
Überarbeitet: 2. Juli 2024
Akzeptiert: 2. Juli 2024
Veröffentlicht: 9. Juli 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

Machine Translated by Google

Sie verwendeten eine logarithmische Transformation, um bestimmte Lösungen in Form von Logarithmen zu erhalten.

Im Jahr 2020 betrachtete Duarte [6] die folgende Darstellung der Toda-Gleichung:

$$\ddot{y}\ddot{y}2x\ (\mathrm{u}(x, \mathbf{y,}\ n)) + \ddot{y}\ddot{y}2\ (\underset{j}{\mathrm{u}}(x, \mathbf{y,}\ n)) =$$
$$\exp(\mathrm{u}(x, \mathbf{y,}\ n\ \ddot{\mathbf{y}}\ 1)\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathrm{u}(x, \mathbf{y,}\ n))\ \ddot{\mathbf{y}}\ \exp(\mathrm{u}(x, \mathbf{y,}\ n)\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathrm{u}(x, \mathbf{y,}\ n + 1)).$$

Er verwendete einen speziellen Ansatz in Kombination mit den Eigenschaften der Laplace-Gleichung, um Konstruieren Sie einige Lösungen anhand trigonometrischer Funktionen.

Ebenfalls im Jahr 2020 untersuchten Schiebold und Nilson [7] eine andere Version der Toda-Gleichung in der Form

$$\ddot{y}_{\mathbf{2}\ x\ddot{y}}(\mathbf{log(1} + \mathrm{un})) = \mathrm{un}+1\ \ddot{\mathbf{y}}\ 2\mathrm{un} + \mathrm{un}+1. \tag{5}$$

Sie konstruierten Lösungen im Rahmen der linearen Algebra mittels Determinanten.

Hier betrachten wir die Toda-Gleichung in der folgenden Darstellung [8–11]:

$$\ddot{\mathbf{y}}\ \frac{\mathrm{rn}}{\mathrm{rn}+1}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \overline{\mathrm{cn}}\ddot{\mathrm{y}}\mathrm{n}+1 + \mathit{vn}\ddot{\mathit{y}}\mathit{n} + \frac{\mathrm{rn}}{\mathbf{rn}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{1}}\ \overline{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{cn}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{1}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{n}\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{1}} = \ddot{\mathit{y}}\ddot{\mathit{y}}\mathit{n}$$
$$\ddot{\mathit{y}}\ddot{\mathit{y}}\ \ddot{\mathit{y}}\mathit{t}\ddot{\mathit{y}}\mathit{n} = \ddot{\mathbf{y}}\ \overline{\mathrm{cn}\ddot{\mathrm{y}}\mathrm{n}+1} + \ddot{\mathrm{y}}\mathrm{t}\ \mathbf{(ln}\ \mathrm{rn})\ddot{\mathrm{y}}\mathrm{n}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{\mathit{y}}\mathit{cn}\ddot{\mathit{y}}1\ddot{\mathit{y}}\mathit{n}\ddot{\mathit{y}}1,\ \ddot{\mathbf{y}}\ddot{\mathbf{y}}\ 2\mathrm{rn}+1\ \frac{\mathrm{rn}}{2\mathrm{rn}\ddot{\mathrm{y}}1} \tag{6}$$

mit

$$\mathrm{cn} = \frac{\mathrm{t}\ 2\mathrm{l}0\ \ddot{\mathit{y}}^{\mathbf{2}}(\mathrm{tV}\ddot{\mathrm{y}}\ddot{\mathrm{y}} + \mathrm{nD} + \mathrm{Z})}{\ddot{\mathrm{y}}(\mathrm{tV}\ddot{\mathrm{y}}\ddot{\mathrm{y}} + (\mathrm{n} + 1)\mathrm{D} + \mathrm{Z})\ddot{\mathrm{y}}(\mathrm{tV}\ddot{\mathrm{y}}\ddot{\mathrm{y}} + (\mathrm{n}\ \ddot{\mathbf{y}}\ 1)\mathrm{D} + \mathrm{Z})\ \ddot{\mathrm{y}}(\mathrm{tV}\ddot{\mathrm{y}}\ddot{\mathrm{y}}} \tag{7}$$

$$+ \ddot{\mathrm{y}}\mathrm{t}\ \mathbf{ln}\ \ddot{\mathrm{y}}(\mathrm{tV}\ddot{\mathrm{y}}\ddot{\mathrm{y}} + \mathrm{nD}\ \frac{+ (\mathrm{n}\ \ddot{\mathbf{y}}\ 1)\mathrm{D} + \mathrm{Z})\ \mathrm{vn} = \ddot{\mathrm{y}}\mathrm{R}0}{+ \mathrm{Z})}, \tag{8}$$

wobei $\ddot{y}$ **die klassische Riemann-Theta-Funktion ist.**

Wir wissen, dass die Entartung der Lösungen von partiellen Differentialgleichungen, die durch Riemannsche Theta- Funktionen gegeben sind, einige wichtige partikuläre Lösungen liefert. Im Fall der NLS-Gleichung ist es uns gelungen, eine quasi-rationale Lösung zu konstruieren, die die Determinante der Ordnung N **für jede positive Ganzzahl** N enthält, die von 2N **ÿ 2 reellen Parametern abhängt [12]. Im Fall der KdV-Gleichung haben wir Lösungen in Form von Fredholm-Determinanten und Wronskianen [13] aus Baker-Akhiezer-Funktionen konstruiert.**

In dieser Studie haben wir mit dieser Methode Sato-Formeln für die Toda-Gleichung wiederhergestellt.

Ausgehend von Lösungen mit finiten Lücken, die als Riemannsche Theta-Funktionen angegeben sind, haben wir einige quasi-rationale Lösungen konstruiert und unter Ausnutzung der Entartung die Sato-Formeln wiederhergestellt, wie sie im Rahmen der NLS-Gleichung [14] gegeben sind.

Genauer gesagt haben wir Multisoliton-Lösungen aus Lösungen mit finiten Lücken durch einen Grenzübergang abgeleitet , d. h. indem wir Lücken zu Punkten in einer bestimmten Riemann-Oberfläche tendieren ließen. Dies wurde im Geiste von [14] oder neuerdings [13] erreicht. Eine Stärke dieses Ansatzes ist, dass er nicht auf inverser Streutheorie oder geometrischen und darstellungstheoretischen Methoden beruht, was eine neue Perspektive auf das Problem bietet.

Wir betrachten die Riemann-Fläche ÿ, dargestellt durch die ÿ- $\underset{\mathrm{k}\ =\ 1}{\overset{\mathrm{G}}{}}\mathrm{akbk}\ \mathrm{a}_{\mathrm{k}}^{\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{1}\ \ddot{\mathbf{y}}\mathbf{1}\ \mathrm{b}}\ \mathrm{k}$ **der algebraischen Kurve, definiert durch [8,9]**

$$\ddot{\mathit{y}}^{\mathbf{2}} = \ddot{\mathbf{y}}_{\mathrm{j}\ =\ 1}^{2\mathrm{g}+2}\ (\mathrm{z}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathrm{Ej}),$$

mit Ej ÿ= Ek , j ÿ= **k.**

Betrachten wir ÿÿÿ und ÿÿ $_{\mathbf{0}}$ **[11] abelsche Integrale, Überprüfung**

$$\underset{\text{nein}}{\mathbf{d}\ddot{\mathbf{y}}\ddot{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}}(\mathrm{P}) = \underset{\text{nein}}{\mathbf{d}\ddot{\mathbf{y}}\ddot{\mathbf{y}}_{\mathbf{0}}}(\mathrm{P}) = \mathbf{0} \qquad \mathrm{k} = \mathbf{1, \ldots, g,} \tag{9}$$

mit folgendem asymptotischen Verhalten für P = *(ÿ,* z) **ÿ ÿ [11],**

Machine Translated by Google

$$\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}_1(P) = \pm \frac{1}{2}(z + \mathbf{R0} + O(z^{\ddot{y}1})), \qquad P \ddot{y} P \pm_{\ddot{y}} \tag{10}$$

$$\ddot{y}\ddot{y}_0(P) = \pm(\mathbf{ln}\ z \ddot{y}\ \mathbf{l0} + O(z^{\ddot{y}1})), \qquad P \ddot{y} P \pm_{\ddot{y},} \tag{11}$$

$$\ddot{y} = \pm(z\ g+1 + O(z\ g)), \qquad P \ddot{y} P \pm_{\ddot{y}.} \tag{12}$$

Die Vektoren V'', **D, X und** Z **werden definiert durch**

$$V_j'' = \frac{1}{2\ddot{y}i} \int_{b_j} d\ddot{y}\ddot{y}_1, \tag{13}$$

$$D = U(P \ddot{y}) \ddot{y} U(P \ddot{y}\ddot{y}), \tag{14}$$

$$X = K + \sum_{j=1}^{G} \ddot{y}_j U(P_j), \qquad Z = U(P \ddot{y}) \ddot{y} X, \tag{15}$$

wobei K **der Vektor der Riemann-Konstanten ist.**

U(P) **ist das klassische abelsche Integral** dU.

P0 Die Lösungen des Systems (6) können **[10,11] wie folgt geschrieben werden :**

$$\ddot{y}n(P, t) = \tilde{r}n(t)e^{n\ddot{y}_0^{\ddot{y}}(P)+t\ddot{y}_1''(P)} \frac{\ddot{y}(U(P) + \mathbf{tV}\ddot{y}\ddot{y} + nD \ddot{y} X)}{\ddot{y}(U(P) \ddot{y} X)}, \tag{16}$$

mit

$$\tilde{r}n(t) = rn(t) \frac{\ddot{y}(Z)\ddot{y}(Z \ddot{y} D)}{\ddot{y}(t\mathbf{V}\ddot{y}\ddot{y} + nD + Z)\ddot{y}(t\mathbf{V}\ddot{y}\ddot{y} + (n \ddot{y} 1)D + Z)}^{\bar{1}2}. \tag{17}$$

2. Entartung von Lösungen

Nehmen wir an, dass Ej **reell sind,** Em < Ej **wenn** m < **j, und versuchen wir die Grenzen aller Objekte in Formel** (16) auszuwerten , **wenn** E2m, E2mÿ1 gegen ÿÿm **tendiert ,** ÿm = $\ddot{y}^{2}_{\text{м,}}$ ÿm > **0, für 1 ÿ** m **ÿ g.**

Wie im vorigen Abschnitt wird $\ddot{y}$ **aus der Matrix der B-Perioden des Oberfläche ÿ sind die Koeffizienten** cjk **mit abelschen Differentialen** dUj verknüpft **durch**

$$dU_j = \frac{\sum_{k=1}^{g} \mathbf{g\ddot{y}k} \ddot{y} \text{ cjkz}}{dz, 2g+2 (z \ddot{y} Ek) \ddot{y}} \tag{18}$$

und die Koeffizienten cjk **erhält man durch Lösen des linearen Gleichungssystems**

$$\int_{\text{nein}} dU_j = \ddot{y}jk, \ \mathbf{1} \ddot{y} j \ddot{y} \mathbf{g,} \ \mathbf{1} \ddot{y} k \ddot{y} \mathbf{g.}$$

Im weiteren Verlauf dieses Artikels verwenden wir die folgenden Notationen:

$$\ddot{y}mj = (\ddot{y}m + \mathbf{E2g+1)(}\ \ddot{y}\mathbf{j} + E2g+2\ ),\ \ddot{y}jm = (\ \ddot{y}j + E2g+1\ )\mathbf{(}\ddot{y}\mathbf{m} + E2g+2), Ck(z) = (z \ddot{y} \mathbf{E2g+1)(}\ddot{y}\mathbf{k} \ddot{y} E2g+2), Dk(z) = (z \ddot{y} \mathbf{E2g+2)(}\ddot{y}\mathbf{k} \ddot{y} E2g+1), Lk = \ddot{y}k + E2g+1, Mk = \ddot{y}k + E2g+2, F(z) = z \ddot{y} E2g+1, G(z) = z \ddot{y} E2g+2. \tag{19}$$

2.1. Grenzwert von $P(z) = \ddot{y}_{j=1}^{2g+2}(z \ddot{y} Ej)$

Nun untersuchen wir den Grenzwert von $P(z) = \ddot{y}_{j=1}^{2g+2}(z \ddot{y} Ej)$.

Machine Translated by Google

Der Grenzwert von P(z) = ÿ $\prod_{j=1}^{2g+2}$ (z ÿ Ej) **ist offensichtlich gleich** P˜(z) = ÿ j=1 $\sum_{(z+\ddot{y}j)}^{G} \frac{2}{}$ (z ÿ **E2g+1)(z** ÿ E2g+2) **oder, mit (19),**

$$P\tilde{}(z) = \ddot{y}\ j=1 \sum^{G} ((z+\ddot{y}j)F(z)G(z))2\ . \qquad \textbf{(20)}$$

2.2. Grenze von dUm = $\frac{\ddot{y}\ \sum_{k=1}^{G} cmk\ \ddot{g}\ddot{y}k}{2g\frac{z}{k}2\ \ddot{y}\ \textbf{(z}\ddot{y}\textbf{Ek)}}$ dz

Nun untersuchen wir den Grenzwert von dUm = $\frac{g\ \ddot{g}\ddot{y}\textbf{k}\ \ddot{y}\ k=1\ cmkz}{dz.2g+2\ (z\ \ddot{y}\ Ek\ )\ \ddot{y}\ k=1\ \ddot{y}m(z)}$

$\frac{dz,}{\ddot{y}\ \textbf{E2g+1}}$ **wobei** (z + ÿj) (z

Der Grenzwert von dUm **ist gleich** dUm = g ÿ j=1 $\frac{\tilde{}}{\textbf{(z}\ \ddot{y}\ E2g+2)}$

ÿm(z) = ÿ $\sum_{k=1}^{G} c\tilde{}mkz\ \ddot{g}\ddot{y}k$ **Die Normalisierungsbedingung nimmt im Grenzwert die Form an.**

$$dUj\ \ddot{y} = \ddot{y}kj, \frac{2\ddot{y}i\ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}k\ )}{\textbf{ymÿ=k}\ (\ddot{y}m\ \ddot{y}\ \ddot{y}k\ )\ (\ddot{y}k + \textbf{E2g+1)(}\ddot{y}\textbf{k} + E2g+2)} \qquad \textbf{(21)}$$

nein

Dies beweist, dass die Zahlen ÿÿm, m ÿ= k **die Nullstellen der Polynome** ÿk (z) sind. **Daher** kann ÿk (z) als ÿk (z) = c˜k1 **ymÿ=k** (z + ÿm) **geschrieben werden .**

Nach (21) erhalten wir im Grenzwert

$$c\tilde{}k1 = \frac{}{(\ddot{y}k + \textbf{E2g+1)(}\ddot{y}\textbf{k} + E2g+2)\ 2\ddot{y}i}\ .$$

Also,

$$\ddot{y}k\ (z) = \frac{}{\frac{(\ddot{y}k + \textbf{E2g+1)(}\ddot{y}\textbf{k} + E2g+2)}{2\ddot{y}i}}\ \textbf{ymÿ=k}\ (z + \ddot{y}m).$$

Darüber hinaus,

$$dU\tilde{}k\ (z) = \frac{\ddot{y}k\ (z)dz}{(z\ \ddot{y}\ \textbf{E2g+1)(z}\ \ddot{y}\ E2g+2)\ \ddot{y}\ \prod_{m=1}^{G}(z+\ddot{y}m)};$$

mit anderen Worten,

$$dU\tilde{}k\ (z) = dz, \frac{}{(\ddot{y}k + \textbf{E2g+1)(}\ddot{y}\textbf{k} + E2g+2)}$$

und mit (19),

$$dU\tilde{}k\ (z) = dz. \frac{LkMk}{2\ddot{y}iF(z)G(z)(z+\ddot{y}k\ )} \qquad \textbf{(22)}$$

2.3. Grenze von Bmk

Gegenstand dieses Unterabschnitts ist die Untersuchung der Grenze von Bmk.
Wir haben

$$ich = \frac{E2g+2\ \textbf{1}\ dUk\ \ddot{y}}{\ddot{y}m\qquad\qquad \textbf{2}}\ B\tilde{}mk.$$

Das Integral I **kann leicht entlang der reellen Achse auf dem oberen Blatt der Oberfläche** ÿ **berechnet werden, und wir erhalten**

Machine Translated by Google

$$B\tilde{}mk = \frac{\text{ich}}{\ddot{y}} \ln \frac{\sqrt{(\ddot{y}m + \mathbf{E2g+1})(\ddot{y}\mathbf{k} + E2g+2)} + \sqrt{(\ddot{y}k + \mathbf{E2g+1})(\ddot{y}\mathbf{m} + E2g+2)}}{\sqrt{(\ddot{y}m + \mathbf{E2g+1})(\ddot{y}\mathbf{k} + E2g+2)}\ \ddot{y}\ \sqrt{(\ddot{y}k + \mathbf{E2g+1})(\ddot{y}\mathbf{m} + E2g+2)}},$$

oder mit den vorherigen Bezeichnungen (19),

$$B\tilde{}mk = \frac{\text{ich}}{\ddot{y}mk\ \ddot{y}\ \ddot{y}km} \frac{\ddot{y}mk + \ddot{y}km \ln \ddot{y}}{}. \quad (23)$$

Daher tendiert iBkk **zu ÿÿ.**
Darüber hinaus haben wir

$$\int_{E2g+2}^{P} dU\tilde{}_k = \frac{\ddot{y}i}{2\ddot{y}} \ln \frac{\sqrt{(z\ \ddot{y}\ \mathbf{E2g+1})(\ddot{y}\mathbf{k} + E2g+2)} + \sqrt{(z\ \ddot{y}\ \mathbf{E2g+2})(\ddot{y}\mathbf{k} + E2g+1)}}{\sqrt{(z\ \ddot{y}\ \mathbf{E2g+1})(\ddot{y}\mathbf{k} + E2g+2)}\ \ddot{y}\ \sqrt{(z\ \ddot{y}\ \mathbf{E2g+2})(\ddot{y}\mathbf{k} + E2g+1)}},$$

oder mit den vorherigen Bezeichnungen (19),

$$\int_{E2g+2}^{P} dU\tilde{}_k = \frac{\ddot{y}i}{2\ddot{y}} \ln \frac{Ck(z) + Dk(z)}{Ck(z)\ \ddot{y}\ Dk(z)}. \quad (24)$$

2.4. Grenzwert von $\ddot{y}_1''$

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir den Grenzwert von ÿ ÿ 1 1 .

" ist ein abelsches Integral zweiter Art, das die Bedingungen erfüllt

$$\int_{nein} d\ddot{y}\ {}_1''(P) = \mathbf{0, 1}\ \ddot{y}\ k\ \ddot{y}\ \mathbf{g},$$

so dass

$$\mathbf{1}\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}_{(P) = \pm}(z + \mathbf{R0} \mp O(z\ \mathbf{1\ 2}\ \ddot{y}_1)), \quad P\ \ddot{y}\ P\ \pm_{\ddot{y}}$$

Der Grenzwert von dÿÿÿ $\ddot{y}_{j=1}$ **(P) ist gleich dÿ˜ "** $_1$ **(P) =** $\int_{E2g+2}^{\ddot{y}(z)} \mathbf{1}\ g\ \frac{}{dz,\ (z + \ddot{y}j)\ (z\ \ddot{y}\ \mathbf{E2g+1})(z\ \ddot{y}}$

wobei $\ddot{y}(z) = \ddot{y}\ (P) = \sum_{k=0}^{g+1} c\tilde{}kz\ \mathbf{g+1}\ddot{y}\mathbf{k}$ ist . **Darüber hinaus haben wir** $\ddot{y}_1$ **für** $\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}(P)$ **, wobei die Bedingung** $\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}_1$ **2** erfüllt $z + \mathbf{O(1)}$ **wenn** $z\ \ddot{y}\ \pm\ddot{y}$**, dann haben wir**
$\mathbf{c\tilde{}0} = \frac{\mathbf{1}}{}$

$$\int_{nein} d\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}_1\ (P) = \mathbf{0, 1}\ \ddot{y}\ k\ \ddot{y}\ g$$

beweisen, dass ÿÿ1, . . . , *ÿÿg* **die Nullstellen von ÿ sind; also gilt** $\ddot{y}(z) = \ddot{y} \prod_{m=1}^{G} (z + \ddot{y}m)(z\ \ddot{y}\ \ddot{y})$.

Wir haben $P(z) = \ddot{y}\ (z + \ddot{y}m)$ **und** $\prod_{k=1}^{2g+2} (z\ \ddot{y}\ Ek)$ **tendiert zu** $P\tilde{}(z) = (z\ \ddot{y}\ \mathbf{E2g+1})(z\ \ddot{y}\ E2g+2)\ \ddot{y} \prod_{m=1}^{G}$ **erhalten**

$$d\ddot{y}\tilde{}_{\ddot{y}}(z) = dz;\ \mathbf{1\ 2}\ \frac{z}{(z\ \ddot{y}\ \mathbf{E2g+1})(z\ \ddot{y}\ E2g+2)}$$

ÿÿÿ (P) **tendiert zu 1**

$$\ddot{y}\tilde{}\ {}_1''(P) = \mathbf{1} \int_{E2g+2}^{z} \frac{Sie}{\mathbf{2}\ (u\ \ddot{y}\ \mathbf{E2g+1})(u\ \ddot{y}\ E2g+2)} du.$$

Machine Translated by Google

Dies kann ausgewertet werden und ergibt

$$\text{ÿ}_1(P) = \frac{\text{E2g+1} + \text{E2g+2}}{4}\,\ln\frac{\overline{z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+1}} + z\,\overline{\text{ÿ}\,\text{E2g+2}}}{\overline{z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+1}}\,\text{ÿ}\,z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+2}} + \frac{1}{2}\,\overline{(z\,\text{ÿ}\,\mathbf{E2g+1})(z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+2})}.$$

Mit den in **(19)** **definierten Notationen kann es umgeschrieben werden als**

$$\text{ÿ}_1(P) = \ln\frac{\text{E2g+1} + \text{E2g+2}}{4}\,\frac{F(z) + G(z)\,\text{ÿ}}{F(z)\,\text{ÿ}\,G(z)} + \frac{1}{2}F(z)G(z). \qquad \textbf{(25)}$$

2.5. Grenzwert von ÿ_0

Wir betrachten ÿ_0, **und wir untersuchen seine Grenzen.**

ÿ_0 **ist ein abelsches Integral dritter Art, das die Bedingungen erfüllt**

$$\text{dÿ}_0(P) = \mathbf{0,1}\,\text{ÿ}\,k\,\text{ÿ}\,\mathbf{g},$$

so dass

$$\text{ÿÿ}_0(P) = \pm(\ln z\,\text{ÿ}\,\mathbf{I0} + O(z^{\text{ÿ1}})), \qquad P\,\text{ÿ}\,P_{\text{ÿ}}^{\pm}.$$

Der Grenzwert von $\text{dÿÿ}_0(P)$ **ist gleich**

$$\text{dÿ˜ÿ}\,0(P) = g\,\text{ÿ}\prod_{j=1}^{\text{ÿ}}\frac{\text{ÿ}\sum_{k=0}^{G}\tilde{c}kz\,\mathbf{gÿk}}{(z + \text{ÿj})\,(z\,\text{ÿ}\,\mathbf{E2g+1})(z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+2})}\,dz.$$

$\text{ÿÿ}_0(P)$ **erfüllt die Bedingung** $\text{ÿÿ}_0(P) = \pm\ln(z) + \mathbf{O(1)}$, **und wenn** $z\,\text{ÿ}\,\pm\text{ÿ}$, dann **haben wir** $\tilde{c}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.

Darüber hinaus sind die Bedingungen

$$\text{dÿÿ}_0(P) = \mathbf{0,1}\,\text{ÿ}\,k\,\text{ÿ}\,g$$

beweisen, dass ÿÿ1, . . . , *ÿÿg* **die Nullstellen von ÿ sind; daher** kann ÿ(z), **definiert durch** $\text{ÿ}(z)\sum_{k=0}^{G}\tilde{c}kz\,\mathbf{gÿk}$, **dürfen** = ÿ, als ÿ(z) = **ÿ geschrieben werden.** $\prod_{m=1}^{G}(z + \text{ÿm})$.

Da $P(z) = \text{ÿ}\prod_{k=1}^{2g+2}(z\,\text{ÿ}\,Ek)$ **tendiert zu** $\tilde{P}(z) = \overline{(z\,\text{ÿ}\,\mathbf{E2g+1})(z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+2})}\,\text{ÿ}\prod_{m=1}^{G}(z + \text{ÿm})$, **wir erhalten**

$$\mathbf{d\tilde{ÿ}ÿ}\,0(z) = \frac{\mathbf{1}}{\overline{(z\,\text{ÿ}\,\mathbf{E2g+1})(z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+2})}}\,dz,$$

und $\text{ÿÿ}_0(P)$ **tendiert zu** $\tilde{\text{ÿ}}\text{ÿ}\,1(P) = \int_{\text{E2g+2}}^{z}\frac{\mathbf{1}}{\overline{(u\,\text{ÿ}\,\mathbf{E2g+1})(u\,\text{ÿ}\,\text{E2g+2})}}\,du.$

Dies kann berechnet werden und ergibt

$$\tilde{\text{ÿ}}\,\text{ÿ}_0(P) = \ln\frac{\overline{z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+1}} + z\,\overline{\text{ÿ}\,\text{E2g+2}}}{\overline{z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+1}}\,\text{ÿ}\,z\,\text{ÿ}\,\text{E2g+2}}.$$

Man kann es mit **(19)** **schreiben als**

$$\tilde{\text{ÿ}}\,\text{ÿ}_0(P) = \ln\frac{F(z) + G(z)}{F(z)\,\text{ÿ}\,G(z)}. \qquad \textbf{(26)}$$

2.6. Grenzwert von X

Wir leiten den Grenzwert von X ab.

Aus den vorherigen Abschnitten

$$\tilde{B}mk = \frac{\text{ÿmk} + \text{ÿkm}\,\ln\text{ÿ}}{\text{ÿmk}\,\text{ÿ}\,\text{ÿkm}},$$

Machine Translated by Google

$$\tilde{U}_k(P) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{C_k(z) + D_k(z))}{C_k(z) \cdot D_k(z)} .$$

Da K **definiert ist durch** $K_m = \sum_{j=1}^{m} B_{jm} \cdot$ **und** $X = K + \sum_{j=1}^{g} U(P_j)$ **können wir schreiben**

$$X_m \cdot \tilde{X}_m = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j\neq m}^{g} \cdot \ln \frac{\gamma_{mj} + \gamma_{jm}}{\gamma_{jm}} + \frac{m}{2} + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \cdot \ln \frac{C_m(z_j) + D_m(z_j)}{C_m(z_j) \cdot D_m(z_j)} + \text{ich}\pi. \quad (27)$$

2.7. Grenzwert von $U(P_k)$, $U(P_k)$, D und Z **ln**

diesem Unterabschnitt untersuchen wir den Grenzwert von $U(P_k)$, $U(P_k)$, **D und Z.**

Aus den vorangegangenen Abschnitten kann man leicht die Grenzen von $\tilde{U}_k$ **ableiten wie**

$$\lim_{P \to P_k} \tilde{U}_k(P) = \ln \frac{-\text{ich}\pi}{2\pi i} \cdot \frac{\sqrt{\gamma_k + E_{2g+2}} + \sqrt{\gamma_k + E_{2g+1}}\sqrt{\gamma_k + }}{\sqrt{E_{2g+2}} \cdot \sqrt{\gamma_k + E_{2g+1}}},$$

oder

$$\lim_{P \to P_k} \tilde{U}_k(P) = \ln \frac{-\text{ich}\pi}{2\pi i} \cdot \frac{M_k + L_k}{M_k + L_k} . \quad (28)$$

$$D_k = U_k(P_k) - U_k(P_{k\pm 1}) \cdot \tilde{D}_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{M_k + iL_k}{M_k - iL_k} . \quad (29)$$

Daher,

$$\lim_{P \to P_k \pm} \tilde{U}_k(P) = \ln \frac{-\text{ich}\pi}{2\pi i} \cdot \frac{\sqrt{\gamma_k + E_{2g+2}} + \sqrt{\gamma_k + E_{2g+1}}\sqrt{\gamma_k + }}{\sqrt{E_{2g+2}} \cdot \sqrt{\gamma_k + E_{2g+1}}} \cdot D_k ,$$

oder

$$\lim_{P \to P_k \pm} \tilde{U}_k(P) = \ln \frac{-\text{ich}\pi}{2\pi i} \cdot \frac{M_k + L_k}{M_k + L_k} + \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{M_k + iL_k}{M_k - iL_k} . \quad (30)$$

Daher ist der Grenzwert von $Z = U(P_k) + K$ **gegeben durch**

$$Z_k = \tilde{Z}_k - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1, j\neq k}^{g} \cdot \ln \frac{\gamma_{kj} + \gamma_{jk}}{\gamma_{kj} - \gamma_{jk}} + \frac{k}{2} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \cdot \ln \frac{C_k(z_j) + D_k(z_j)}{C_k(z_j) - D_k(z_j)} - i\pi \cdot \ln 2\pi i \cdot \frac{M_k + L_k}{M_k - L_k} \quad (31)$$

2.8. Grenzwert von $V_{\gamma\gamma}$

In diesem Abschnitt wird der Grenzwert von $V_{d\gamma\gamma}''$ **wird untersucht.**

(13) definiert $\frac{1}{2\pi i} b_k$ γ V_{in} **1**

Wir haben $I = \int_{E_{2g+2}} d\gamma_1 \, V''_{\gamma\gamma_k} \cdot \gamma \, \frac{1}{2} b_k \, . \, d\tilde{\gamma}''$

Wie bei der Bestimmung der Grenze von γ $''_1$, **wir haben**

$$\int_{\gamma\gamma_k}^{E_{2g+2}} d\tilde{\gamma}'' (P) = \gamma_1 \frac{E_{2g+1} + E_{2g+2}}{4} \ln \frac{\sqrt{\gamma_k + E_{2g+1}} + \sqrt{\gamma_k + E_{2g+2}}\sqrt{\gamma_k + }}{\sqrt{E_{2g+1}} \cdot \sqrt{\gamma_k + E_{2g+2}}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\gamma_k + E_{2g+1})(\gamma_k + E_{2g+2})}.$$

Also,

$$V_k'' = \frac{1}{2\pi i b_k} d\gamma'' \, {}_1 \, \gamma \, \tilde{V}'' - \frac{E_{2g+1} + E_{2g+2}}{4\pi i} \ln \frac{\sqrt{\gamma_k + E_{2g+1}} + \sqrt{\gamma_k + E_{2g+2}}\sqrt{\gamma_k + }}{\sqrt{E_{2g+1}} \cdot \sqrt{\gamma_k + E_{2g+2}}}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sqrt{(\gamma_k + E_{2g+1})(\gamma_k + E_{2g+2})},$$

$$V'_k = \frac{E_{2g+1} + E_{2g+2}}{4\pi i} \frac{L_k \cdot M_k}{L_k + M_k} \ln \frac{1}{2\pi i} L_k M_k . \quad (32)$$

Machine Translated by Google

2.9. Grenzwert von ÿ(p)

Wir bestimmen den Grenzwert von ÿ(p).

Bezeichnen wir A **als Argument von** ÿ(p) = **ÿkÿZg** exp{ÿi(Bk|k) + **2ÿi(k|p)}.**

A **kann in der Form umgeschrieben werden**

$$A = \ddot{y}i \quad \overset{G}{\underset{j=1}{\ddot{y}}} Bjjkj(kj\ \ddot{y}\ 1) + 2\ddot{y}i\ \ddot{y} \quad \underset{j>m}{} s.o.n.e. + \quad \overset{G}{\underset{j=1}{\ddot{y}}} \ddot{y}i(2pj + Bjj)kj\ .$$

Unter Verwendung der Ungleichung kj(kj **ÿ** 1) **ÿ 0 für alle** k **ÿ Z** g **und der Tatsache, dass** iBkk **gegen** können wir den Grenzwert ˜*ÿ* **von** ÿ(p) **auf eine endliche Summe über die Vektoren** k **ÿ Z** g **, ÿÿ tendiert, so dass jedes reduzieren.** kj **muss gleich 0 oder 1 sein.**

In diesem Abschnitt berechnen wir den Grenzwert aller Terme im Ausdruck der Lösung ÿ(P, t) **in ÿ. Wir bezeichnen** Pi **als Argumente dieser verschiedenen Ausdrücke.**

Wir untersuchen zunächst die Terme von r˜n , die den Argumenten p1 = Z = U(P **ÿ) ÿ X, p2** = Z **ÿ D, p3** = **tVÿÿ** + nD **ÿ Z, p4** = **tVÿÿ** + (n **ÿ** 1)D **ÿ Z** entsprechen.

Dann untersuchen wir die verbleibenden Terme von ÿn, **die den Argumenten entsprechen p5** = U(P) **ÿ X, p6** = U(P) + **tVÿÿ** + nD **ÿ X.**

Mit diesen Notationen kann die Lösung ÿ(n, , **t,** z) **wie folgt geschrieben werden:**

$$\ddot{y}n(P, z) = rn(t) \quad \frac{\ddot{y}(p1)\ddot{y}(p2)}{\ddot{y}(p3)\ddot{y}(p4)} \quad \frac{1}{2}\frac{\ddot{y}(p6)}{\ddot{y}(p5)} e^{n\ddot{y}\ddot{y}_0(P)+t\ddot{y}\ddot{y}_1(P)}.$$

2.10. Grenzwert von ÿ(p1)

Wir bezeichnen p1 als den Term Z = U(P **ÿ) ÿ X.**

Wir untersuchen seine Grenzen.

Dann ist ÿ(p1) **ÿ ˜ÿ1:**

$$\tilde{}\ddot{y}1 = \ddot{y}\ \mathbf{exp}\ \ddot{y}\ \mathbf{k\ddot{y}Zg,}\ kj = \mathbf{0}\ \text{oder}\ \mathbf{1}\ \underset{j>l}{} \mathbf{ln}\ \frac{\ddot{y}lj\ \ddot{y}\ \ddot{y}jl + \mathbf{2}}{kjkl + \ddot{y}lj + \ddot{y}jl} \quad \overset{G}{\underset{j=1}{kj\ \mathbf{ln}}} \quad \frac{Mj + Lj\ \ddot{y}}{Mj\ \ddot{y}\ Lj}$$

$$\ddot{y}\ \mathbf{2\ ln}\ \ddot{y}jl\ \ddot{y}\ \frac{\ddot{y}jl + \ddot{y}lj +}{\ddot{y}lj\ l\ddot{y}=j}\ j\ddot{y}i + \quad \overset{G}{\underset{l=1}{\ddot{y}\ \mathbf{ln}}} + \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl)\ \ddot{y}\ Dj(zl)}\ .$$

2.11. Grenzwert von ÿ(p2)

Wir betrachten p2 = Z **ÿ D. Wir untersuchen seinen Grenzwert.**

Dann ist ÿ(p2) **ÿ ˜ÿ2. Da** Dj **ÿ D˜ dass** j, **Es ist leicht zu sehen,**

$$\tilde{}\ddot{y}2 = \ddot{y}\ \mathbf{exp}\ \ddot{y}\ \mathbf{k\ddot{y}Zg,}\ kj = \mathbf{0}\ \text{oder}\ \mathbf{1}\ \underset{j>l}{} \mathbf{ln}\ \frac{\ddot{y}lj\ \ddot{y}\ \ddot{y}jl + \mathbf{2}}{kjkl + \ddot{y}lj + \ddot{y}jl} \quad \overset{G}{\underset{j=1}{kj\ \mathbf{ln}}} \quad \frac{Mj + Lj\ \ddot{y}}{Mj\ \ddot{y}\ Lj}$$

$$\ddot{y}\ \mathbf{2\ ln}\ \ddot{y}jl\ \ddot{y}\ \frac{\ddot{y}jl + \ddot{y}lj +}{\ddot{y}lj\ l\ddot{y}=j}\ j\ddot{y}i + \quad \overset{G}{\underset{l=1}{\ddot{y}\ \mathbf{ln}}} + \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl)\ \ddot{y}\ Dj(zl)} + \overset{G}{\mathbf{ln}} \quad \frac{Mj + iLj\ \ddot{y}}{Mj\ \ddot{y}\ iLj\ j=1}\ .$$

2.12. Grenzwert von ÿ(p3)

Sei p3 tV ÿÿ + nD + **Z. Wir untersuchen seinen Grenzwert.**

Dann ist ÿ(p3) **ÿ ˜ÿ3:**

$$\tilde{}\ddot{y}3 = \ddot{y}\ \mathbf{k\ddot{y}Zg,}\ kj = \mathbf{0}\ \text{oder}\ \mathbf{1}\ \mathbf{exp}\ \ddot{y}\ \underset{j>l}{} \mathbf{ln}\ \frac{\ddot{y}lj\ \ddot{y}\ \ddot{y}jl + \mathbf{2}}{kjkl + \ddot{y}lj + \ddot{y}jl} \quad \overset{G}{\underset{j=1}{kj\ \mathbf{ln}}} \quad \frac{Lj + Mj\ \ddot{y}}{Lj\ \ddot{y}\ Mj}$$

$$+t \quad \frac{ZB+1 + ZB2g+2}{\mathbf{2}} \quad \mathbf{ln}\ \frac{Lj\ \ddot{y}\ Mj}{Lj + Mj}\ \ddot{y}\ LjMj + n\ \mathbf{ln} \quad \frac{Mj + iLj}{Mj\ \ddot{y}\ iLj}$$

Machine Translated by Google

$$+ \ddot{y} \underset{l\ddot{y}=j}{} \ln + \frac{\ddot{y}jl + \ddot{y}lj}{j\ddot{y}i + \ddot{y}jl} \frac{\mathbf{2}}{\ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}lj} \qquad \ddot{\mathbf{y}} \overset{G}{\underset{l=1}{}} \ln \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl)\ \ddot{\mathbf{y}}\ Dj(zl)} .$$

2.13. Grenzwert von ÿ(p4)

Wir betrachten p4 = **tVÿÿ** + (n **ÿ** 1)D + **Z;** ÿ(p4) **ÿ ˜ÿ4. Wir bestimmen den Grenzwert.**

Als Dj **ÿ D˜ dass ist leicht zu überprüfen,**

$$\tilde{}\ddot{y}4 = \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{exp}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{k\ddot{y}Zg,}\ kj = \mathbf{0}\ \text{oder}\ \mathbf{1}\ \ddot{y}lj + \underset{j>l}{} \frac{\ddot{y}lj\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}jl}{\ddot{y}jl} \underset{j=1}{\overset{}{}} kjkl + \mathbf{2}\ \ln \overset{G}{} kj\ \ln \frac{Lj + Mj\ \ddot{\mathbf{y}}}{Lj\ \ddot{\mathbf{y}}\ Mj}$$

$$+t \frac{Eg+1 + E2g+2}{\mathbf{2}} \ln \frac{Lj\ \ddot{\mathbf{y}}\ Mj}{Lj + Mj} + LjMj + (n\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{1})\ln \frac{Mj + iLj}{Mj\ \ddot{\mathbf{y}}\ iLj}$$

$$+ \ddot{y} \underset{l\ddot{y}=j}{} \ddot{y}lj \frac{\ddot{y}jl + \ddot{y}lj\ \ddot{\mathbf{y}}}{\mathbf{2}\ \ln + j\ddot{y}i + \ddot{y}jl\ \ddot{\mathbf{y}}} \overset{G}{\underset{l=1}{}} \ln \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl)\ \ddot{\mathbf{y}}\ Dj(zl)} .$$

2.14. Grenzwert von ÿ(p5)

Der Term p5 = U(P) **ÿ** X **tendiert zu p˜5** = **U˜** (P) **ÿ X˜** .
Wir bestimmen seine Grenze.

Dann ist ÿ(p5) **ÿ ˜ÿ5:**

$$\tilde{}\ddot{y}5 = \ddot{\mathbf{y}} \underset{\mathbf{k\ddot{y}Zg,}\ kj = \mathbf{0}\ \text{oder}\ \mathbf{1}}{} \mathbf{exp}\ \ddot{\mathbf{y}} \underset{j>l}{} \overset{\mathbf{2\ Zeilen}}{} \frac{\ddot{y}lj\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}jl}{\ddot{y}jl} kjkl + \ddot{y}lj + \overset{G}{\underset{j=1}{\ddot{\mathbf{y}}}} kj\ \ln \frac{Cj(z)\ \ddot{\mathbf{y}}\ Dj(z)}{Cj(z) + Dj(z)}$$

$$+ \ddot{y} \underset{l\ddot{y}=j}{} \ddot{y}lj \frac{\ddot{y}jl + \ddot{y}lj\ \ddot{\mathbf{y}}}{\mathbf{2}\ \ln + j\ddot{y}i + \ddot{y}jl\ \ddot{\mathbf{y}}} \overset{G}{\underset{l=1}{}} \ln \frac{Cj(zl + Dj(zl}{Cj(zl\ \ddot{\mathbf{y}}\ Dj(zl} .$$

2.15. Grenzwert von ÿ(p6)

Der Term p6 = U(P) + **tVÿÿ** + nD **ÿ** X **tendiert zu p˜6** = **U˜** (P) + tV˜ **ÿÿ ÿ X˜** + nD˜ .
Dann bestimmen wir seinen Grenzwert. ÿ(p6) **ÿ** *˜ÿ6 :*

$$\tilde{}\ddot{y}6 = \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{exp}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{k\ddot{y}Zg,}\ kj = \mathbf{0}\ \text{oder}\ \mathbf{1} \underset{j>l}{} \ln \frac{\ddot{y}lj\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}jl}{kjkl + \ddot{y}lj + \ddot{y}jl} \frac{\mathbf{2}}{j=1} \overset{G}{} kj\ \ln \frac{Lj + Mj\ \ddot{\mathbf{y}}}{Lj\ \ddot{\mathbf{y}}\ Mj}$$

$$+t \frac{Eg+1 + E2g+2}{\mathbf{2}} \ln \frac{Lj\ \ddot{\mathbf{y}}\ Mj}{Lj + Mj}\ \ddot{\mathbf{y}}\ LjMj + n\ \ln \frac{Mj + iLj}{Mj\ \ddot{\mathbf{y}}\ iLj}$$

$$+ \ddot{\mathbf{y}} \underset{l\ddot{y}=j}{} \ln \frac{\ddot{y}jl + \ddot{y}lj\ \mathbf{2}}{\ddot{y}jl\ \ddot{\mathbf{y}}\ \ddot{y}lj} + j\ddot{y}i\ \ddot{\mathbf{y}} \overset{G}{\underset{l=1}{\ddot{\mathbf{y}}}} \ln \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl)\ \ddot{\mathbf{y}}\ Dj(zl)} + \ln \frac{Cj(z)\ \ddot{\mathbf{y}}\ Dj(z)}{Cj(z) + Dj(z)} .$$

2.16. Grenzwert von Lösungen

ÿ Aus dem vorigen Abschnitt können wir den Grenzwert ÿ˜ von ÿ ableiten. Er nimmt die folgende Form an:

$$\ddot{y}\tilde{}(z, \mathbf{n,}\ t)) = \frac{rn(t)\ \tilde{}\ddot{y}1\ \tilde{}\ddot{y}2}{\tilde{}\ddot{y}5} \overset{\bar{1}\,2}{} \times \frac{t^{\,n\ \ln \frac{F(z)+G(z)}{F(z)\ddot{y}G(z)} + t \frac{E2g+1+E2g}{4} + 2\ \ln \frac{E(z)+G(z)}{F(z)\ddot{y}G(z)}}}{\tilde{}\ddot{y}3\ \tilde{}\ddot{y}4} \overset{\bar{1}\,2}{} {}^{1+\bar{2}} F(z)G(z) \overset{}{\tilde{}\ddot{y}6} .$$

Im vorherigen Ausdruck sind **˜ÿ1, ˜ÿ2 und** *˜ÿ5* **unabhängig von** n **und t.**
Nur ˜ÿ3, ˜ÿ4 und *˜ÿ6* **hängen von** n **und t ab.**
Wir wählen den Sonderfall, in dem t = **0.**
Wir ersetzen n **durch x.**
Wir bezeichnen c **als den Koeffizienten, definiert durch**

Machine Translated by Google

$$c = \frac{rn(0)\ \tilde{}\ddot{y}1\ \tilde{}\ddot{y}2}{\tilde{}\ddot{y}5}.$$

Wir bezeichnen H **als die Funktion definiert durch**

$$H(z) = \frac{F(z)\ \ddot{y}\ G(z)}{F(z) + G(z)}.$$

In den verschiedenen Summen mit ÿ bleiben nur Terme mit kj = 1 übrig. Die Summen können also nur auf die Teilmengen J **von [1;** g] **der ganzen Zahl** N **reduziert werden. Wir bezeichnen** aj **als den Term** $a_j = \ddot{y}1 - \frac{Mj+iLj}{}$ Dann **kann der Term** *˜ÿ6* geschrieben werden als

$$\tilde{}\ddot{y}6 = \ddot{y}_{J\ddot{y}\{1,\ldots,g\}\ j,l\ddot{y}J,\ j<l} \ddot{y}_{\ddot{y}lj\ \ddot{y}\ \ddot{y}jl} \ln \frac{Lj + Mj\ \ddot{y}}{Lj\ \ddot{y}\ Mj} + \ddot{y}jl \Big)^2_{j\ddot{y}J}$$

$$\ddot{y}_{\ddot{y}jl\ \ddot{y}\ \ddot{y}lj\ l\ddot{y}Jl\ddot{y}=j} \ddot{y}jl + \ddot{y}lj \ln \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl) + Dj(zl)} \Big)^2_{j\ddot{y}J} \frac{Cj(z)\ \ddot{y}\ Dj(z)}{Cj(z) + Dj(z)}\ t\ \ddot{y}jj\ddot{y}J\ j\ddot{y}i\ t\ \ddot{y}2x\ \ddot{y}jj\ddot{y}J\ aj.$$

Wir bezeichnen *ÿ* **als die Funktion definiert durch**

$$\ddot{y}(x) = \tilde{}\ddot{y}3(x) = \ddot{y}\ \ddot{y}\ \ln\ \ddot{y}lj + \ddot{y}jl\ J\ddot{y}\{1,\ldots,g\}\ j,l\ddot{y}J,\ _{j<l} \frac{\ddot{y}lj\ \ddot{y}\ \ddot{y}jl}{} \Big)^2_{j\ddot{y}J} \frac{Lj + Mj\ \ddot{y}}{Lj\ \ddot{y}\ Mj}$$

$$\ddot{y}_{\ddot{y}jl\ \ddot{y}\ \ddot{y}lj\ l\ddot{y}Jl\ddot{y}=j} \ddot{y}jl + \ddot{y}lj \ln \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl)\ \ddot{y}\ Dj(zl)} \Big)^2_{j\ddot{y}J}\ t\ \ddot{y}jj\ddot{y}J\ j\ddot{y}i\ t\ \ddot{y}2x\ \ddot{y}jj\ddot{y}J\ aj.$$

Somit kann die Lösung ÿ˜ wie folgt geschrieben werden:

$$\ddot{y}\tilde{}(x, z) = \frac{\exp(xH(z))\ddot{y}(x, z)}{c\ \ddot{y}(x)\ddot{y}(x\ \ddot{y}\ 1)}. \quad \textbf{(33)}$$

Hier kehren wir zur Sato-Formulierung der Lösung zurück, wie sie in [15] angegeben ist.

Dieser Ausdruck ist der Lösung auf Seite 5830 sehr ähnlich, und der Ausdruck Die Lösung ist gegeben durch

$$\ddot{y}\tilde{}(x, z) = \frac{\exp(xz)\ddot{y}(x, z)}{\ddot{y}(x)\ddot{y}(x\ \ddot{y}\ 1)}. \quad \textbf{(34)}$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Aussagen liegt darin, dass diese beiden

Gleichungen werden unterschiedlich behandelt:

Van Diejen denkt über die Gleichung nach

$$a(x)f(x + 1) + b(x)f\ ^{\ddot{y}}x) + a(x\ \ddot{y}\ 1)f(x\ \ddot{y}\ 1) = \ddot{y}\ f(x);$$

hier betrachten wir (1)

$$\frac{rn}{}\ \ddot{y}\ \overline{cn}\ddot{y}n+1 + vn\ddot{y}n + rn+1\ \frac{rn}{rn\ddot{y}1}\ \ddot{y}\ \overline{cn\ddot{y}1\ddot{y}n\ddot{y}1} = \ddot{y}\ddot{y}n.$$

2.17. Begrenzung der zugehörigen Potentiale

In diesem Unterabschnitt bestimmen wir die Grenze der zugehörigen Potenziale.

Die Potentiale un = **ÿ** cn **und** vn **werden in (6) und (7)** beschrieben **als**

$$cn = \frac{t\ 2l0\ \ddot{y}^2(tV\ddot{y}\ddot{y} + nD +}{Z)\ \ddot{y}(tV\ddot{y}\ddot{y} + (n + 1)D + Z)\ddot{y}(tV\ddot{y}\ddot{y} + (n\ \ddot{y}\ 1)D + Z)}$$

Machine Translated by Google

$$\ddot{y}R0 + \ddot{y}t \ln \ddot{y}(tV\ddot{y}\ddot{y} + \frac{\ddot{y}(tV\ddot{y}\ddot{y} + (n\ \ddot{y}\ 1)D + Z)\ vn =}{nD + Z)}.$$

Der Grenzwert von un ist **also gleich**

$$\tilde{u}n = k1\frac{\ddot{y}(x)}{\ddot{y}(x + 1)\ddot{y}(x\ \ddot{y}\ 1)},$$

was bis auf die Konstante k1 mit [15] **(S. 5830) übereinstimmt .**

Mit ÿ(x) = ÿtÿ(tV˜ **ÿÿ** + xD˜ + Z˜)t=0 ist **der Grenzwert von** vn **gleich** ÿ(x **ÿ** 1) **v˜n** =

$$1)\quad \frac{k2 + \ddot{y}(x\ \ddot{y}}{\ddot{y}(x)}\quad \frac{\ddot{y}(x)}{\ddot{y}(x)},$$

welche bis auf die Konstante k2 der in [15] **(S. 5830) beschriebenen ähnelt .**

3. Schlussfolgerungen

Wir haben die Entartung von Lösungen einiger partieller Differentialgleichungen, die durch Riemannsche Theta-Funktionen gegeben sind, ausgenutzt, um einige wichtige Lösungen zu erhalten. Insbesondere ist es uns im Fall der NLS-Gleichung gelungen, eine quasi-rationale Lösung zu konstruieren, die die Determinante der Ordnung N **für jede positive Ganzzahl** N enthält, die von 2N **ÿ 2 reellen Parametern abhängt** [12]. **Im Fall der KdV-Gleichung haben wir aus abelschen Funktionen Lösungen in Form der Fredholm-Determinanten und Wronski-Determinanten** konstruiert [13].

In dieser Studie ist es uns gelungen, mit dieser Methode die Sato-Formeln für die Toda-Gleichung wiederherzustellen . Aus Lösungen, die in Form der Baker-Akiezer-Funktionen gegeben waren, gelang es uns, durch Entartung, wie sie im Rahmen der NLS-Gleichung [14] **gegeben ist , einige quasi- rationale Lösungen zu konstruieren und die Sato-Formeln für die Toda-Gleichung wiederherzu**

Genauer gesagt haben wir Multisoliton-Lösungen aus Lösungen mit finiten Lücken durch einen Grenzübergang abgeleitet , d. h. indem wir Lücken zu Punkten in einer bestimmten Riemann-Oberfläche tendieren ließen. Eine Stärke dieses Ansatzes ist, dass er nicht auf inverser Streutheorie oder geometrischen und darstellungstheoretischen Methoden beruht, was eine andere Perspektive auf das P

Die Entartung der Lösungen der NLS-Gleichung hat es ermöglicht, neue quasi-rationale Lösungen der Ordnung N zu konstruieren , **die von** 2N **- 2 reellen Parametern abhängen, und diese bis zur Ordnung 23 zu konstruieren, die vorher unbekannt waren. Im Fall der KdV-Gleichung ermöglichte die Entartung der Lösungen, die Lösungen zu finden, die durch die Darboux- Methode gegeben sind, die eine Brücke zwischen dem Ansatz der geometrischen Algebra und dem Rahmen der Darboux-Transformationen bildete . In diesem Artikel ist dies in etwa die gleiche Situation wie bei der KdV-Gleichung, bei der wir den algebraisch-geometrischen Ansatz mit dem Rahmen der inversen Streumethode verknüpft haben.**

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung zur Datenverfügbarkeit: Die Daten, die die Ergebnisse dieser Studie stützen, sind im Artikel verfügbar.

Interessenkonflikte: Der Autor erklärt, dass keine Interessenkonflikte vorliegen.

Verweise

1. **Toda, M. Schwingung einer Kette mit nichtlinearer Wechselwirkung.** J. Phys. Soc. Jap. **1967, 6, 22–431. [CrossRef]**
2. **Date, E.; Tanaka, S. Periodische Multi-Soliton-Lösungen der Korteweg-de-Vries-Gleichung und des Toda-Gitters.** Suppl. Prog. Theor. Phys. **1976,** 59, **107–125. [CrossRef]**
3. **Dubrovin, BA Theta-Funktionen und nichtlineare Gleichungen.** Russ. Math. Surv. **1981,** 36, **11. [CrossRef]**
4. **Stahlhofen, AA; Matveev, VB Positionen für Toda-Gitter und verwandte Spektralprobleme.** Phys. A Math. Gen. **1995,** 28, **1957–1965. [Querverweis]**
5. **Zhang, S.; Zhou, YY Mehrwellenlösungen für die Toda-Gittergleichung durch Verallgemeinerung der exp-Funktionsmethode.** Int. J. Appl. Math. **2014,** 44, **1–6.**
6. **Duarte, VN Eine Klasse von Lösungen der zweidimensionalen Toda-Gittergleichung.** Phys. Lett. **2021,** 385, **126979. [CrossRef]**
7. **Nilson, T.; Schiebold, C. Lösungsformeln für das zweidimensionale Toda-Gitter und partikelartige Solitonen mit unerwarteten asymptotisches Verhalten.** J. Nonliner. Math. Phys. **2020,** 27, **57–94. [CrossRef]**

Machine Translated by Google

8. Bellokolos, ED; Bobenko, AI; Enol'skii, VZ; Its, AR; Matveev, VB Algebro-geometrischer Ansatz für nichtlineare integrierbare Gleichungen; **Reihe zur nichtlinearen Dynamik; Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg, Deutschland, 1996.**

9. Dubrovin, BA; Matveev, VB; Novikov, SP Integrierbare Systeme: Nichtlineare Gleichungen vom Korteweg-De Vries-Typ, lineare Operatoren in endlichen Zonen und abelsche Varietäten; **Lecture Notes Series; London Mathematical Society: London, Großbritannien, 1976; Band 60, Seiten 53–140.**

10. Krichever, I. Das periodische nichtabelsche Toda-Gitter und zweidimensionale Verallgemeinerung. Uspekhi Math Nauka **1981,** 36, **72–77.**

11. Smirnov, AO Elliptische Solitonen integrierbarer nichtlinearer Gleichungen; **Staatliche Universität St. Petersburg: Sankt Petersburg, Russland, 2002; S. 1–170.**

12. Gaillard, P. Familien quasi-rationaler Lösungen der NLS-Gleichung und Multi-Rogue-Wellen. J. Phys. A Meth. Theor. **2011,** 44, **435204.** **[Querverweis]**

13. Gaillard, P. Entartete Riemannsche Theta-Funktionen, Fredholm- und Wronski-Darstellungen der Lösungen der KdV-Gleichung und der entartete rationale Fall. J. Geom. Phys. **2021,** 161, **104059.** **[CrossRef]**

14. Its, AR; Rybin, AV; Salle, MA Genaue Integration der NLS-Gleichung. Theor. Math. Phys. **1988,** 74, **29–32.** **[CrossRef]**

15. Diejen, JFV Eine Sato-Formel für reflexionslose Differenzenoperatoren. J. Math. Phys. **1999,** 40, **5822–5834.** **[CrossRef]**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Grundlegendes Schaltungsmodell von Spannungsquellenumrichtern: Methodik und Modellierung

Christian Bipongo Ndeke *, Marco Adonis und Ali Almaktoof

Fakultät für Elektrotechnik, Elektronik und Computertechnik, Cape Peninsula University of Technology, Kapstadt 7535, Südafrika; adonisma@cput.ac.za (MA); almaktoofa@cput.ac.za (AA)
*** Korrespondenz: ndekechristian@gmail.com oder 219385017@mycput.ac.za; Tel.: +27-62-836-2466**

Zusammenfassung: Spannungsquellenumrichter (VSCs) haben sich als Schlüsselkomponenten moderner Stromversorgungssysteme herausgestellt , da sie eine effiziente Energieumwandlung und flexible Leistungsflusssteuerung ermöglichen. Das Verständnis des grundlegenden Schaltungsmodells von VSCs ist für deren genaue Modellierung und Analyse in Stromversorgungsstudien unerlässlich . Ein grundlegendes Schaltungsmodell eines Spannungsquellenumrichters, das an einen LC-Filter angeschlossen ist, ist unerlässlich, da es die harmonischen Verzerrungen ve Dies garantiert eine saubere und stabile Stromversorgung, die für die Integration mehrerer erneuerbarer Energiequellen und empfindlicher Lasten erforderlich ist. In diesem Dokument wird eine umfassende Methodik zur Entwicklung eines grundlegenden Schaltungsmodells für VSCs vorgestellt, die sich auf die wichtigsten Komponenten und beteiligten Prinzipien konzentriert . Die Methodik umfasst die Modellierung der Raumzeiger-Pulsweitenmodulation (SVPWM) sowie des direkten Quadratur-Null-Synchron-Referenzrahmens. Verschiedene Designkontrollen, einschließlich des Designs der Stromkontrollschleife im S-Bereich, des Designs der Gleichstrom-Busspannungskontrollschleife (DC) im S-Bereich und des Designs der Wechselstrom-Spannungskontrollschleife (AC) im S-Bereich, werden untersucht, um das dynamische Die vorgeschlagene Methodik bietet einen systematischen Rahmen für die Modellierung von VSCs, der es Ingenieuren und Forschern ermöglicht, ihre Leistung zu analysieren und ihre Auswirkungen auf die Stabilität und den Betrieb des Stromsystems zu bewerten. Zukünftige Studien können anhand von Fallstudien und Simulationsszenarien durchgeführt werden, um die Effizienz und Anwendbarkeit der entwickelten Modelle bei der Analyse von VSC-basierten Leistungselektronikanwendungen, einschließlich Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragungssystemen (HGÜ) und flexiblen Wechselstrom-Übertragungssystemen (FACTS), zu zeigen. Die Bedeutung dieser Arbeit liegt in ihrem Potenzial, das Verständnis und die Anwendung von VSCs zu verbessern und so zu widerstandsfähigeren und effizienteren Stromsystemen beizutragen. Indem diese Studie eine solide Grundlage für zukünftige Forschung und Entwicklung bietet, unterstützt sie die fortlaufende Integration erneuerbarer Energiequellen und die Weiterentwicklung moderner elektrischer Infrastruktur.

Schlüsselwörter: Spannungsquellenumrichter; LC-Filter; Stromregelung; Gleichspannungsregelung; Wechselspannungsregelung

check for updates

Zitat: Ndeke, CB; Adonis, M.; Almaktoof, A. Grundlegendes Schaltungsmodell von Spannungsquellenumrichtern: Methodik und Modellierung. AppliedMath **2024, 4, 889–907. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030048**

Wissenschaftlicher Redakteur: Jun-Juh Yan

Empfangen: 21. Mai 2024
Überarbeitet: 16. Juli 2024
Akzeptiert: 18. Juli 2024
Veröffentlicht: 29. Juli 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Spannungsquellenumrichter (VSCs) sind zu integralen Bestandteilen moderner Stromversorgungssysteme geworden und spielen eine entscheidende Rolle bei der effizienten Energieumwandlung und der flexiblen Steuerung des Leistungsflusses [1]. Da die Anforderungen an die Integration erneuerbarer Energien, die Stabilisierung des Netzes und eine verbesserte Netzzuverlässigkeit weiter steigen, ist die genaue Modellierung und Analyse von VSCs von größter Bedeutung geworden [2,3]. Die primäre Stromschnittstelle, die verteilte Stromerzeugung (DGs) mit Mikronetzen verbindet, ist der AC-DC-Umrichter. Der Spannungsquellenumrichter funktioniert in zwei unterschiedlichen Modi: Er arbeitet als aktiver Gleichrichter für die Gleichstrombussteuerung und fungiert, wie in Abbildung 1 dargestellt, als Wechselrichter während der Netzeinspeisung und des Netzbildungsbetriebs unter Verwendung unterschiedlicher Regelkreise [4]. Das Verständnis des grundlegenden Schaltungsmodells von VSCs sowie der Methoden für ihre Steuerung und Modellierung ist für Ingenieure und Forscher von entscheidender Bedeutung, um VSC-basierte Leistungselek

Machine Translated by Google

Methodiübersicht, Steuerungsstrategien und Modellierungstechniken im Zusammenhang mit dem grundlegenden Schaltungsmodell von VSCs. Dieses Dokument befasst sich mit den grundlegenden Prinzipien, die dem Betrieb von VSCs zugrunde liegen, und konzentriert sich dabei auf die wichtigsten Komponenten und ihre Interaktionen innerhalb der Schaltung. Ein Schwerpunkt liegt auf der Erläuterung verschiedener Methoden, wie z. B. der Raumvektor- Pulsweitenmodulation (SVPWM), dem direkten Quadratur-Null-Synchron-Referenzrahmen und ihrer Integration in VSC-Schaltungen.

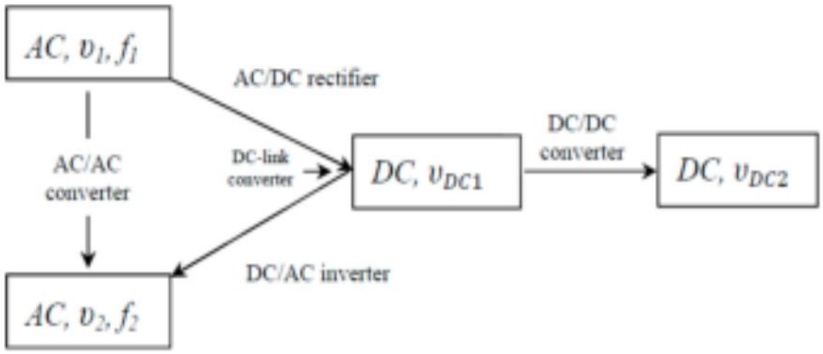


Abbildung 1. Halbleiter-Stromrichtergruppen basierend auf ihrer Betriebstransformation [6].

Ein grundlegendes Spannungsquellenumrichter-Schaltungsmodell, das mit dem LC-Filter verbunden ist, ist von entscheidender Bedeutung, da es dazu beiträgt, harmonische Verzerrungen zu reduzieren und die allgemeine Stromqualität im Mikronetz zu verbessern. Dies gewährleistet eine stabile und saubere Stromversorgung, die für empfindliche Lasten und die Integration verschiedener erneuerbarer Energiequellen unerlässlich ist. Es spielt auch eine Schlüsselrolle bei der Umwandlung von Gleichstrom aus erneuerbaren Quellen wie Sonnenkollektoren oder Batterien in Wechselstrom, der für die meisten Lasten und für die Synchronisierung mit dem Hauptnetz erforderlich ist . Der LC-Filter hilft dabei, die Ausgabe zu glätten und den Umwandlungsprozess effizienter zu gestalten . Das Verständnis des VSC-Schaltungsmodells und seiner Interaktion mit dem LC-Filter ist für die Entwicklung von Systemen von entscheidender Bedeutung, die sich nahtlos in das Hauptnetz integrieren oder im Inselmodus arbeiten lassen. Dadurch wird sichergestellt, dass das Mikronetz Schwankungen bei Angebot und Nachfrage bewältigen kann, ohne die Stabilität zu beeinträchtigen. Im Wesentlichen liegt die Bedeutung der Einführung des grundlegenden VSC-Schaltungsmodells, das mit dem LC-Filter verbunden ist, in seiner Fähigkeit, wichtige Herausforderungen bei der Energieumwandlung, Stabilität, Integration

Darüber hinaus untersucht dieser Beitrag verschiedene Steuerungsstrategien, die in VSCs eingesetzt werden, um Spannung, Strom und Leistungsfluss sowohl in netzgekoppelten als auch in eigenständigen Anwendungen zu regeln. Es werden verschiedene Steuerungstechniken unter Verwendung von Pulsweitenmodulation (PWM) und Proportional -Integral-Steuerung (PI) erörtert. Darüber hinaus werden auch die Modellierungsaspekte des Designs und der Steuerung von VSCs eingeführt, um genaue und dynamische Modelle zu entwickeln, die das transiente und stationäre Verhalten dieser Geräte erfassen. Um die Relevanz und Anwendbarkeit der vorgestellten Modelle in realen Szenarien sicherzustellen, müssen praktische Überlegungen wie Parameterschätzung, Validierung und Implementierungsherausforderungen berücksichtigt werden . Es wird empfohlen, Fallstudien und Simulationen durchzuführen, um die Effizienz und Genauigkeit der vorgestellten Methoden und Steuerungsstrategien bei der Analyse von VSC-basierten Leistungselektronikanwendungen wie flexiblen Wechselstromübertragungssystemen (FACTS), netzgekoppelten erneuerbaren Energiesystemen und Hochspannungs-Gleichstrom- Übertragungssystemen (HGÜ) zu demonstrieren.

Die folgenden Abschnitte beschreiben die verbleibenden Teile des Dokuments: In Abschnitt 2 wird die zweistufige netzgekoppelte VSC-Modellierung mit einem LC-Filter vorgestellt. Der Entwurf der Stromregelschleife im S-Bereich wird in Abschnitt 3 vorgestellt. Abschnitt 4 präsentiert den Entwurf einer DC-Busspannungsregelschleife im S-Bereich. In Abschnitt 5 wird der Entwurf einer AC-Spannungsregelschleife im S-Bereich vorgestellt. Abschnitt 6 enthält eine kurze Diskussion und Abschnitt 7 schließt das Dokument ab.

Machine Translated by Google

2. Modellierung eines zweistufigen netzgekoppelten VSC mit LC-Filter Ein

typisches Schaltungsmodell eines zweistufigen Wechselrichters mit einem LC-Filter, der an eine dreiphasige Last angeschlossen ist, ist in Abbildung 2 dargestellt. Das an die Anschlüsse a, a`, b, `b, c und c` angelegte Signal regelt die Leistung der sechs Schalter, die den Ausgang bilden, bezeichnet als S1 bis S6. Es wird angenommen, dass die Schalter S1 bis S6 komplementär sind [7]. Normalerweise wird ein Spannungswandler mit einem LCL-Filter durch einen herkömmlichen Linearregler geregelt, der durch eine Dämpfungsschleife ergänzt wird, um die Stabilität des Systems sicherzustellen [8]. Außerdem können sowohl das dreiphasige Wechselstromsystem als auch die gleichstromseitige Spannungsquelle direkt vom VSC mit Strom versorgt werden. ff Folglich gibt es zwei unterschiedliche Betriebsarten für den VSC, entweder den Wechselrichtermodus (DC/AC) oder den Gleichrichtermodus (AC/DC).

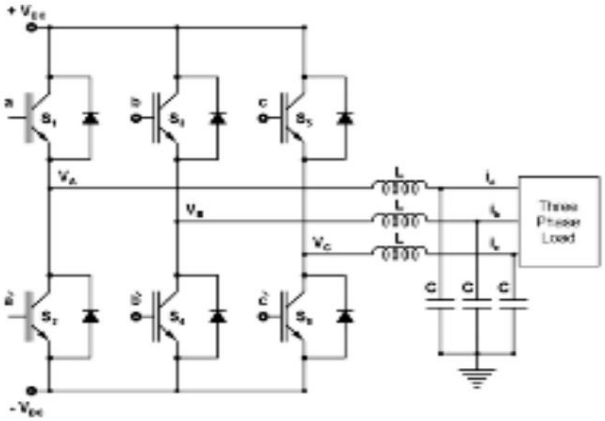


Abbildung 2. Spannungsquellenumrichter mit drei Phase-2-Pegeln [7].

Um die dezentralen Erzeugungssysteme an das Netz anzuschließen, werden üblicherweise dreiphasige Pulsweitenmodulations- Spannungsquellenumrichter (PWM-VSCs) eingesetzt, da sie im Vergleich zu anderen Umrichtern eine bessere Steuerbarkeit und einen höheren Wirkungsgrad aufweisen [9]. Um eine DC-seitige Spannungsregelung und Leistungsfaktorregelung am Anschlusspunkt (PCC) zu ermöglichen, wird eine zweistufige PWM-VSC-Topologie verwendet. Die Implementierung der PWM führt jedoch dazu, dass im Wechselspannungsspektrum Basisband- und Seitenbandoberwellen auftreten, was den Einsatz von Filtern zur Reduzierung der Oberwellen des Netzstroms erforderlich macht [10].

2.1. Methode der Raumvektor-Pulsweitenmodulation (SVPWM) Die Verwendung

der Dreiecksvergleichsstrategie vereinfacht die Ausführung dieses Verfahrens. Im Vergleich zum Dreieckvergleichs-PWM wird eine 15%ige Steigerung der Wechselspannung erreicht und die Gesamtharmonische Verzerrung (THD) von Spannung und Strom reduziert. Ein Standard-Raumzeigerdiagramm eines zweistufigen Spannungsquellenwechselrichters (VSI) mit Schaltzuständen in den sechs Sektoren ist in Abbildung 3 dargestellt [11]. Tabelle 1 zeigt, dass ein typischer dreiphasiger, zweistufiger Spannungsquellenwechselrichter acht Schaltzustände hat, wobei sechs aktive Zustände Spannungsvektoren von entweder +Vdc oder ÿVdc erzeugen und zwei Nullzustände Spannungsvektoren mit Nullamplitude erzeugen. In Abbildung 3 stellen die Schaltzustände 000 und 111 die Nullzustände dar, während die Raumzeigerebene durch die aktiven Zustände in sechs gleich große Sektoren unterteilt ist. Diese Methodologie verwendet einen rotierenden Referenzvektor, wie in Abbildung 3 dargestellt , der einmal während jedes Unterzyklus Ts abgetastet wird [12]. Das Hauptziel besteht darin, den Vektor der Referenzspannung Vre f unter Verwendung von acht Schaltmodellen zu schätzen .

Abbildung 3 zeigt, dass zwei der möglichen Ausgangsspannungsvektoren (V1 und V7) sind Null- oder Nullvektoren, dargestellt durch gleiche Werte in allen drei Phasen (000 oder 111). Die Die verbleibenden sechs Vektoren (V1, ..., V6) sind ungleich Null und alle räumlich um 60° voneinander getrennt .

Beim SVPWM-Ansatz wurde willkürlich angenommen, dass die Nullspannungsvektorzeit gleichmäßig zwischen t0 und t7 aufgeteilt wird, was bedeutet, dass T0 = T7.

Machine Translated by Google

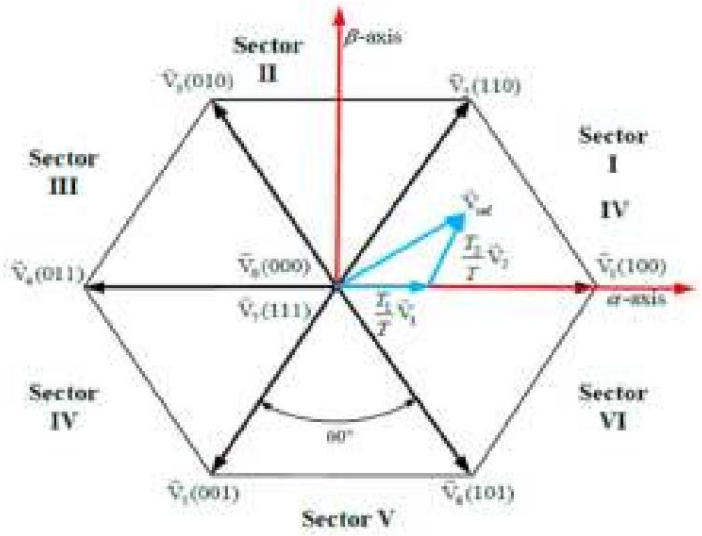


Abbildung 3. Ein typisches SVPWM-Diagramm für einen Spannungsquellenwechselrichter mit zwei Ebenen.

Tabelle 1. Phasenspannungen, Ausgangsspannungen zwischen den Phasen und Schaltvektoren.

Spannungsvektoren	Vektoren umschalten			Spannung zwischen Phase und Neutralleiter			Außenleiterspannung		
	Staffel 1	Staffel 2	S3	Lieferwagen	Vbn	Vcn	Vab	Vbc	Vca
ÿ V0	0	0	0	0	0	= + + 0	0	0	0
ÿ Version 1	1	0	0	2 / 3 V Gleichstrom	ÿ1_ 3 V Gleichstrom	ÿ1_ 3 V DC =	VDC	0	ÿVDC
ÿ Version 2	1	1	0	1 / 3 V Gleichstrom	1 / 3 V Gleichstrom +	ÿ2_ 3 V Gleichstrom	0	VDC	ÿVDC
ÿ Version 3	0	1	0	ÿ1_ 3 V Gleichstrom	2 / 3 V Gleichstrom	ÿ1_ 3 V DC	ÿVDC	VDC	0
ÿ Version 4	0	1	1	ÿ2_ 3 V Gleichstrom	1 / 3 V Gleichstrom	= + 1 _ 3 V Gleichstrom	ÿVDC	0	VDC
ÿ Version 5	0	0	1	ÿ1_ 3 V Gleichstrom	ÿ1_ 3 V Gleichstrom	2 / 3 V Gleichstrom	0	ÿVDC	VDC
ÿ V6	1	0	1	1 / 3 V Gleichstrom	ÿ2_ 3 V Gleichstrom	1 / 3 V Gleichstrom	VDC	ÿVDC	0
ÿ Version 7	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Zur Berechnung des Abtastintervalls wird Folgendes verwendet:

$$Ts = \mathbf{T0} + \mathbf{T1} + \mathbf{T2} \quad (1)$$

oder

$$TS = \mathbf{T0} + Tmod \quad (2)$$

mit

$$Tmod = \mathbf{T1} + \mathbf{T2} \quad (3)$$

wobei Tmod **die Modulationszeit ist; T0, T1 und T2 die Zeitintervalle sind; und** Ts **die Abtastintervall. Bei der Untersuchung des ersten Sektors wird der Referenzspannungsvektor** ÿ Vre f **kann als Funktionsvektoren dargestellt werden:**

$$\ddot{y}_{Vref} = \frac{\mathbf{T1}}{TS}\ddot{y}_{\mathbf{V1}} + \frac{\mathbf{T2}}{TS}\ddot{y}_{\text{Version 2}} \quad (4)$$

$$\ddot{y}_{Vref}\ \cos\ddot{y} + \mathbf{sin}\ \ddot{y} = \frac{\mathbf{T1}}{TS}\ddot{y}_{\text{Version 1}}\ \mathbf{cos\ (0)\ Sünde\ (0)} + \frac{\mathbf{T2}}{TS}\ddot{y}_{\text{Version 2}}\ \mathbf{cos\ (ÿ/3)\ Sünde\ (ÿ/3)} \quad (5)$$

Machine Translated by Google

Gleichung (5) kann in zwei Teile zerlegt und wie folgt ausgedrückt werden:

$$V_{ref}\cos\ddot{y} = \frac{2}{3}V_{dc}\left[V_1\cos(0) + V_2\cos(\ddot{y}/3)\right] \quad (6)$$

$$V_{ref}\sin\ddot{y} = \frac{2}{3}V_{dc}\left[V_1\sin(0) + V_2\sin(\ddot{y}/3)\right] \quad (7)$$

Die Gleichungen für die Stichprobenintervalle erhält man durch Lösen von T2 mit Gleichung (7), und sin ( ) Anschließend werden die Ergebnisse in Gleichung (6) eingesetzt.

$$T_1 = mT_s\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\ddot{y}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} \quad (8)$$

$$T_2 = mT_s\frac{\sin(\ddot{y})}{\sin\frac{\pi}{3}} \quad (9)$$

$$T_0 = T_S - T_1 - T_2 \quad (10)$$

Der Modulationsindex $m = \frac{V_{ref}}{V_{dc}}$ **wird wie folgt dargestellt: 0 ÿ ÿ ÿ 60ÿ , und** TS **ist die halbe Periode für den Wechsel des Trägers. Die folgenden Formeln stellen die Verweildauern für jeden Sektor dar:**

$$T_1 = mT_S\sin\left(\frac{\pi}{3}-\ddot{y}\right)\sin\ddot{y} \quad (11)$$

$$T_2 = mT_S\sin\ddot{y}\,\ddot{y} \quad (12)$$

Abbildung 4 zeigt die SVPWM-Ausgabeschaltsequenz im ersten Sektor.

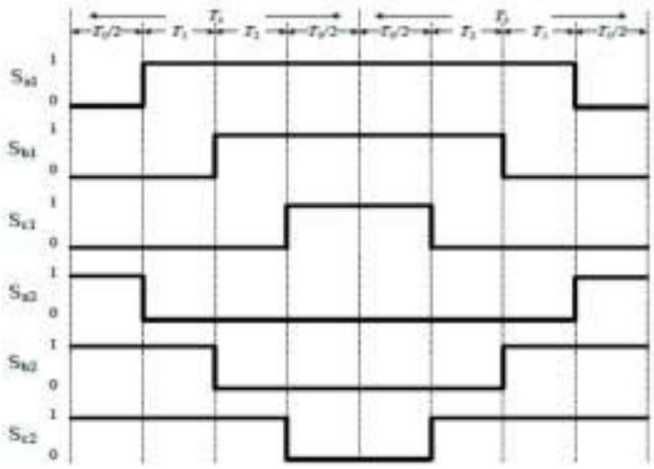


Abbildung 4. Ausgabeschaltsequenz im ersten Sektor.

Die Schaltperioden für die oberen und unteren Schalter sind für jeden Sektor in Tabelle 2 zusammengefasst **[13].**

Tabelle 2. Berechnung der Umschaltzeit für jeden Sektor.

Branchen	Obere Schalter (S1, S3, S5)	Untere Schalter (S4, S6, S2)
Sektor 1	S1 = T1 + T2 + T0/2 S3 = T2 + T0/2 S5 = T0/2	S4 = T0/2 S6 = T1 + T0/2 S2 = T1 + T2 + T0/2
Sektor 2	S1 = T1 + T0/2 S3 = T1 + T2 + T0/2 S5 = T0/2	S4 = T2 + T0/2 S6 = T0/2 S2 = T1 + T2 + T0/2

Machine Translated by Google

Tabelle 2. Fortsetzung

Branchen	Obere Schalter (S1, S3, S5)	Untere Schalter (S4, S6, S2)
Sektor 3	**S1** = **T0/2** **S3** = **T1** + **T2** + **T0/2** **S5** = **T2** + **T0/2**	**S4** = **T1** + **T2** + **T0/2** **S6** = **T0/2** **S2** = **T1** + **T0/2**
Sektor 4	**S1** = **T0/2** **S3** = **T1** + **T0/2** **S5** = **T1** + **T2** + **T0/2**	**S4** = **T1** + **T2** + **T0/2** **S6** = **T2** + **T0/2** **S2** = **T0/2**
Sektor 5	**S1** = **T2** + **T0/2** **S3** = **T0/2** **S5** = **T1** + **T2** + **T0/2**	**S4** = **T1** + **T0/2** **S6** = **T1** + **T2** + **T0/2** **S2** = **T0/2**
Sektor 6	**S1** = **T1** + **T2** + **T0/2** **S3** = **T0/2** **S5** = **T1** + **T0/2**	**S4** = **T0/2** **S6** = **T1** + **T2** + **T0/2** **S2** = **T2** + **T0/2**

2.2. Direkte Quadratur-Null-Synchron-Referenzrahmen-Methodik

Die Methode des synchronen Referenzrahmens Direct Quadrature Zero (DQZ) ist eine in der Leistungselektronik, insbesondere in VSIs, weit verbreitete Regelungstechnik, um eine präzise und effiziente Steuerung von dreiphasigen Wechselstromsystemen zu erreichen **[14]. Diese Methode wird häufig in netzgekoppelten erneuerbaren Energiesystemen (wie Wind- und Solarwechselrichtern), drehzahlgeregelten Antrieben für Motoren, aktiven Leistungsfiltern zur Oberwellenminderung und anderen Anwendungen eingesetzt, die eine präzise Steuerung der Wechselspannung und der Stromwellenform erfordern [15] Bei der DQZ-Methode des synchronen Referenzrahmens werden die dreiphasigen Wechselstromsignale (normalerweise Spannungen oder Ströme) in einen rotierenden Referenzrahmen umgewandelt, der auf die Wechselstromfrequenz des Systems ausgerichtet ist. Diese Umwandlung vereinfacht die Steuerung der VSIs, indem die relevanten Komponenten (wie Wirkleistung, Blindleistung und harmonische Komponenten) voneinander entkoppelt werden.**

Die dreiphasigen Wechselstromsignale werden mittels Clarke- und Park-Transformationen **[16]** aus dem Zeitbereich (a, **b,** c- **Referenzrahmen) in den rotierenden DQZ-Referenzrahmen** transformiert. **Die Park-Transformation dreht die** *ÿÿ-* **Komponenten in ein stationäres DQZ-Referenzsystem** (d, **q, 0), wobei** die d- **und** q- **Komponenten jeweils die Direkt- und Quadraturkomponenten der Signale darstellen und 0 die Nullsequenzkomponente darstellt [17]. Die Clarke-Transformation wandelt dreiphasige Mengen** (a, **b, c) in zweiphasige Mengen** *(ÿ,* **ÿ) um, die die symmetrischen Komponenten der Wechselstromsignale darstellen. Im DQZ-Referenzsystem werden Steuerungsstrategien wie Proportional-Integral-Regler (PI) oder fortgeschrittenere Algorithmen angewendet, um die** d- **und** q- **Komponenten der Referenzsignale zu regeln. Diese Regler passen die Schaltmuster der Halbleiterbauelemente des VSI (normalerweise IGBTs) an, um die gewünschte Wechselstrom-Ausgangsspannungswellenform zu erzeugen, und gewährleisten so die präzise Steuerung der Spannungsgröße, Frequenz und Wellenformqualität**

Die überarbeiteten Dreiphasenstromwerte (ia, ib , ic) **werden in Abbildung 5 als Projektionen auf die neue Referenzachse** *(iÿ,* **iÿ) dargestellt. Wenn ein Dreiphasen-Dreileitersystem ausgeglichen ist und die Nullachse die Gleichtaktkomponente darstellt, wird der gesamte Phasenstrom auf Null gesetzt. Somit können die Variablen** *ÿ* **und** *ÿ* **ein im ABC- Referenzrahmen definiertes System vollständig charakterisieren.**

Die Ausgabevariablen ABC werden in der folgenden Gleichung (13) beschrieben:

$$= \text{IMcos } ÿt\ ÿ \qquad \frac{ib}{3} \quad ic = \textbf{IMcos}\ ÿt + \qquad \frac{2ÿ\ ;}{3} \qquad \textbf{(13)}$$

wobei t **die zum Erreichen des stationären Zustands benötigte Zeit und** ÿ **die konstante Synchronfrequenz ist. Gleichung (14) drückt die** *ÿÿ0-* **Transformation in komplexer Form aus, während Gleichung (15) sie in Matrixform ausdrückt.**

Machine Translated by Google

$$Ist = i\ddot{y} + ji\ddot{y} = \frac{2}{3}\left(ia + ib\,e^{\frac{j2\ddot{y}}{3}} + Eis\,3^{\frac{\ddot{y}j2\ddot{y}\,3}{}}\right) \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} i\ddot{y} \\ i\ddot{y} \\ i0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\ddot{y}1}{2} & \frac{\ddot{y}1}{2} \\ 0 & \frac{\ddot{y}\,3}{2} & \frac{\ddot{y}\,\ddot{y}\,3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ia \\ ib \\ ic \end{bmatrix} \quad (15)$$

Die Referenzachsenströme sind *iÿ, iÿ* **und i0, während die Dreiphasenströme** *iÿ,* ib **und** ic sind.

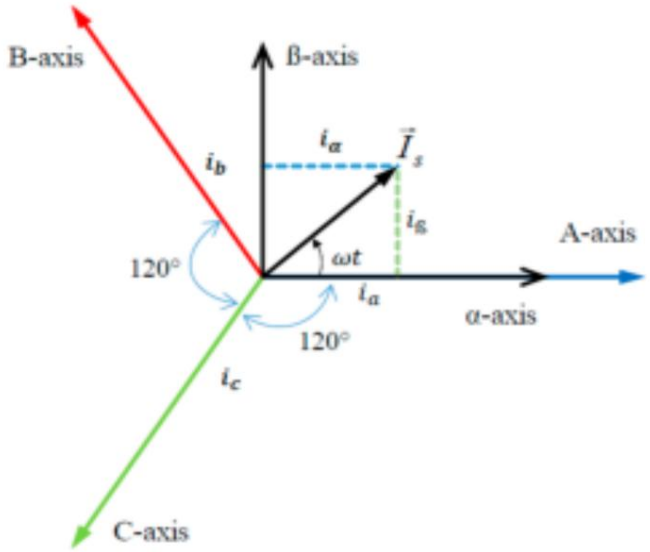


Abbildung 5. Raumzeiger und *ÿÿÿ0-* **Referenzrahmen.**

Bei Verwendung der Park-Transformation mit einer Verschiebung von **ÿ90° rotiert der Rahmen mit der gleichen Frequenz um die 0-Achse wie die Sinuskurven, die die Zeiger definieren, während sich das System im** *ÿÿ0-* **Rahmen**

Wie in Abbildung 6 zu sehen ist, wird die Komponente auf die Q-Achse transformiert, die positioniert ist 90ÿ im Quadraturwinkel zur Direktkomponente, und die *ÿÿ-* **Komponente wird** *ÿ ÿ* **auf die d-Achse transformiert, die mit Rotationsvektor in einer Linie liegt.**

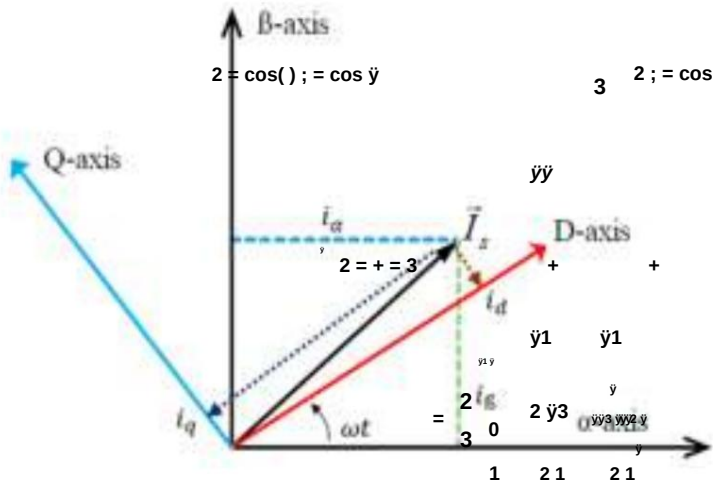


Abbildung 6. Raumzeiger und DQ0-Referenzrahmen.

Die Gleichungen (16) und (17) drücken die DQ0-Transformation in komplexer bzw. Matrixdarstellung aus .

$$\ddot{y} \qquad = 1 = 0\ \ddot{y}j(\ddot{y}t\ddot{y}) \qquad = 0$$
$$Ist = i\ddot{y} + ji\ddot{y}\,e^{ICH\,S} \qquad = id + iq \qquad \ddot{y}\ddot{y} \quad (16)$$

$$\ddot{y}\ddot{y}_{\,2}$$
$$\ddot{y}\sin(\,)\,)\,\sin(\,+\ddot{y}\,3\,\ddot{y}\,2\,\ddot{y}\cos(\,)\,\cos(\ddot{y}t\,\ddot{y}\,\ddot{y}$$
$$= \qquad \qquad 3\ 3\,\ddot{y}\,2\,)\cos(\,+\,)\ \ddot{y}\ \ddot{y}\,)\,\ddot{y}$$

Machine Translated by Google

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (17)$$

Folglich erzeugt die Rotation DC-Werte aus den periodischen Signalen. Da der rotierende Rahmen der a-Achse um 90 Grad folgt, fallen bei t = 0 die Q- und A-Achse zusammen. Wenn Is **genau auf den Referenzwinkel** ψt ausgerichtet ist, sind id = **1,** iq = **0 und i0** = **0 die DQ0** - **Komponenten. Die vollständigen Transformationen von DQ0 nach ABC und ihre entsprechenden Inversen werden wie folgt dargestellt:**

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\omega t) & \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos(\omega t) & \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\omega t) & \cos & 1 \\ \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

3. Entwurf des Regelkreises für den Strom im S-Bereich Der Entwurf

des Stromregelkreises im S-Bereich für einen dreiphasigen zweistufigen VSI ist ein entscheidender Aspekt, um den präzisen und stabilen Betrieb des Wechselrichters sicherzustellen. Diese Entwurfsmethode nutzt die klassische Steuerungstheorie im S-Bereich, um eine effektive Regelung der Ausgangsströme des Wechselrichters zu erreichen. Laut Wencong et al. ändert dieser Regelkreis die Ausgangsspannung des Wechselrichters, um die Einspeisung des erforderlichen Stroms in das Stromnetz zu ermöglichen [19]. Der dreiphasige VSI wird typischerweise mithilfe einer Reihe von Differentialgleichungen modelliert, die die Beziehung zwischen der Eingangsgleichspannung, den Schaltzuständen des Wechselrichters und den Ausgangswechselströmen beschreiben. Diese Gleichungen werden in das synchrone Referenzsystem (dq-System) transformiert, um die dreiphasigen Wechselströme in zwei orthogonale Komponenten (d-Achse und q-Achse) zu entkoppeln, was den Entwurf der Steuerung vereinfacht . Die Systemdynamik wird durch Übertragungsfunktionen im S-Bereich dargestellt, die die Steuereingänge (Referenzspannungen) mit den Ausgängen (tatsächliche Ströme) in Beziehung setzen. Bei einem VSI umfasst die Übertragungsfunktion typischerweise die LC-Filterdynamik des Wechselrichters und den Einfluss der Lastimpedanz. Abbildung 7 zeigt die schematische Darstellung eines dreiphasigen, zweistufigen VSC mit einem L-Filter. Rf **und** Lf s

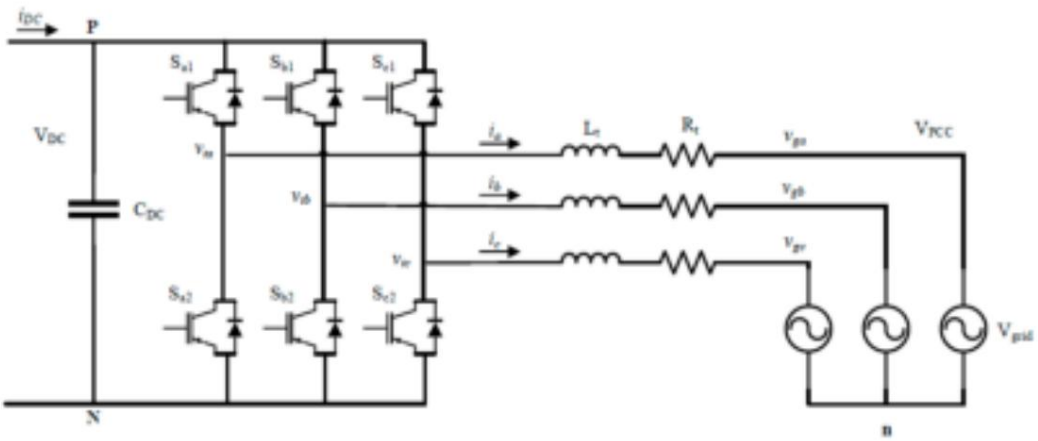
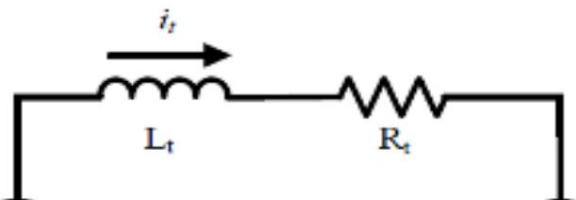


Abbildung 7. Ein zweistufiges VSC-Schaltbild mit integriertem L-Filter.

Ein reduzierter äquivalenter Schaltkreis pro Phase kann durch Anwenden des Spannungsgesetzes von Kirchhoff auf den oben gezeigten Schaltkreis erzeugt werden, wie in Abbildung 8 dargestellt.

ff



Machine Translated by Google

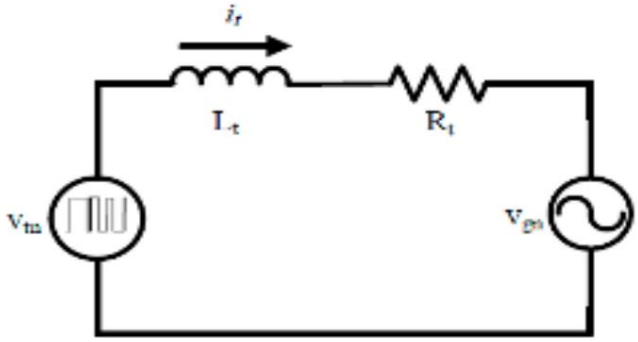


Abbildung 8. Ein L-Filter in einem vereinfachten VSC-Prophasenkreis.

Die Netzspannung vgn **wird in Abbildung 8 als relativ feste Komponente dargestellt, die als störend angesehen werden kann. Infolgedessen kann** der Strom itn durch Ändern der Ausgangsspannung vtn **des Wechselrichters** geregelt werden . **Folglich fungiert der VSC als Energiequelle, die Strom in das Netz einspeist. Das Spannungsgesetz von Kirchhoff ergibt, wenn es auf die drei Stromkreise pro Phase angewendet wird, Folgendes:**

$$\begin{aligned} v_{tan} &= L_f \frac{di_a}{dt} + R_f i_a + v_{gan} \\ v_{tbn} &= L_f \frac{di_b}{dt} + R_f i_b + v_{gbn} \\ v_{tcn} &= L_f \frac{di_c}{dt} + H_F - I_C + v_{gcn} \end{aligned} \tag{20}$$

Variablen vtan, vtbn **und** vtcn **repräsentieren die drei Ausgangsspannungen des Wechselrichters pro Phase;** Lf **und** Rf **bezeichnen die Induktivität und den Widerstand zwischen den Konverterschaltern und dem gemeinsamen Kopplungspunkt (PCC);** vgan, vgbn **und** vgcn **stehen für die drei Netzspannungen pro Phase ; und** ia, ib **und** ic **repräsentieren die drei Wechselrichterströme pro Phase. Indem wir alle drei Gleichungen aus (20) in eine einzige Gleichung zusammenfassen, erhalten wir Folgendes:**

$$v_{t,abc} = L_f \frac{di_{abc}}{dt} + R_f i_{abc} + v_{g,abc} \tag{21}$$

Mit Hilfe von Gleichung (15) lässt sich Gleichung (21) in das Referenzsystem ÿÿ0 übertragen, woraus sich ergibt

$$\mathbf{v_{t,ÿÿ}} = L_f \frac{di_{ÿÿ}}{dt} + R_f i_{ÿÿ} + \mathbf{v_{g,ÿÿ}} \quad , \tag{22}$$

Wenn wir den Referenzrahmen dq0 **in (16) verwenden und den Vorgang für Gleichung (22) wiederholen, erhalten wir**

$$\begin{aligned} \mathbf{v_{t,dq}} &= v_{t,ÿÿ} e^{ÿj(ÿtÿ \frac{ÿ}{2})} \\ v_{t,dq} &= L_f \frac{di_{dq}}{dt} + R_f i_{dq} + \mathbf{v_{g,dq}} \end{aligned} \tag{23}$$

Der a, b, c -Rahmen kann in die beiden Komponenten d **und** q **aufgeteilt werden ,** wie in **Abschnitt 2.1 beschrieben .**

$$L_f \frac{di_{td}}{dt} = v_{td} + L_f ÿ i_q \ ÿ R_f i_d \ ÿ v_{gd} \tag{24}$$

$$L_f \frac{di_q}{dt} = v_{tq} + L_f ÿ i_q \ ÿ R_f i_q \ ÿ v_{gq} \ dt \tag{25}$$

mit $v_{td} = \frac{V}{ÿ_{DC}}$ **3** m_d **und** $v_{tq} = \frac{V}{ÿ_{DC}}$ **3** m_q, **wobei** m_{dq} **der Modulationsindex ist, und** $\frac{V}{ÿ_{DC}\sqrt{3}}$ **ist das SVPWM-Verstärkungskonverter.**

Die id- **und** iq- **Dynamik sind aufgrund des** in den Gleichungen (24) **und (25) gefundenen Termes** Lf ÿ miteinander verbunden. Um die d- **und** q **-Subsysteme zu entkoppeln und die Netzstörungseingänge** vgd **und** vgq zu berücksichtigen, **muss der Modulationsindex für jedes wie folgt angegeben werden:**

$$m_d = \frac{ÿ\sqrt{3}}{V_{DC}} u_d \ ÿ L_f i_q \ ÿ v_{gd} \tag{26}$$

Machine Translated by Google

$$m2 = \frac{\ddot{y}\,\overline{3}}{VDC}\; uq\; \ddot{y}\; Lf\; \ddot{y}id + vgq \tag{27}$$

Für das d- **Subsystem ist der antizipatorische Term** ÿLf ÿiq + vgd, **während er für das** q- **Subsystem** ÿLf ÿid + vgq **ist . Gleichung (26) kann in (24) eingesetzt werden, woraus sich ergibt**

$$Lf = \frac{tat}{dt}\; ud\; \ddot{y}\; Rf\; id \tag{28}$$

Gleichung (27) kann auf die gleiche Weise in (25) eingesetzt werden, um zu erhalten

$$Lf = \frac{diq}{uq\; \ddot{y}\; Rf\; iq\; dt} \tag{29}$$

mit uq **als Ausgabe des PI-Kompensators.**

Die Steuersysteme der Stromregelkreise sind in der d- **und** q **-Achse gleich, wie in (28) und (29) zu sehen ist. Daher können die verknüpften Kompensatoren gleich sein. Infolgedessen werden nur die Verstärkungen der Stromregelkompensatoren in der d-Achse bestimmt. Wenn Gleichung (29) mit der Laplace-Methode transformiert wird, erhält man die folgende**

$$Lf\; sId(s) = ud(s)\; \ddot{y}\; Rf\; Id(s)\; ud\,(s)$$
$$ID(s) = \frac{}{\text{Links + Rechts}} \tag{30}$$

Die Regelanlage kann daher wie folgt ausgedrückt werden:

$$\text{Hausarzt (Gymnasium)} = \frac{1}{Lf\; s + Rf} \tag{31}$$

Die folgende Gleichung (32) zeigt, dass der Kompensator ein PI-Regler ist:

$$Gc(s) = \frac{(\;)}{} = \frac{kps + ki}{S} \tag{32}$$

Abbildung 9 veranschaulicht die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises in der d-Achse:

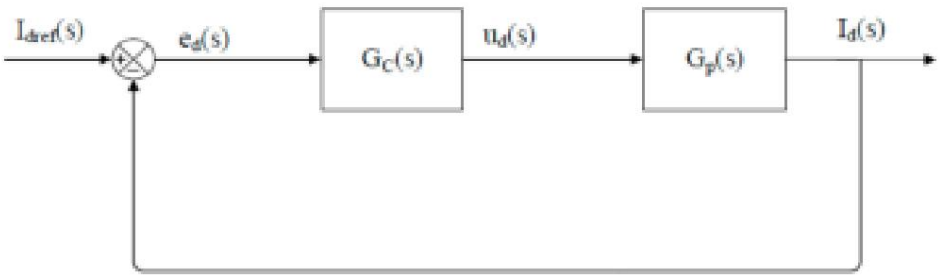


Abbildung 9. Blockdiagramm des stromgesteuerten VSC-Systems in vereinfachter Form.

Aus Gleichung (33) ergibt sich folgende Leerlaufverstärkung:

$$Gol(s) = \frac{(\;)}{} = GC(s)GP(s)\;(\;) \tag{33}$$

Ersetzt man die Gleichungen für den Kompensator und die Regelanlage durch ihre Terme, erhält man folgende Gleichung (33):

$$Gol(s) = \frac{(\;)}{} = \frac{kps + ki}{S} \times \frac{1\;1}{Lf\; s + Rf} = \frac{kps + ki + 2}{Lf\; s + Rf\; s} = \frac{kp}{Lf\; s} + \frac{ki\; s + \overline{\;} + kp}{s + \frac{Rf}{Lf}} \tag{34}$$

Sobald die Terme kp $\frac{ki}{}$ = Die Rf **werden durch Anwendung des Polkompensationsansatzes ausgeglichen, die Leerlaufverstärkung vorliegen, wird Gleichung (34) von der Übertragungsfunktion zweiter auf die Übertragungsfunktion erster Ordnung wie folgt reduziert:**

$$(\;) =$$

Machine Translated by Google

$$Gol(s) = \frac{kp}{Lf\ s} \quad (35)$$

Gleichung (36) stellt die Stromreglerverstärkung im geschlossenen Regelkreis in der d-Achse dar:

$$Gi(s) = Gcl(s) = \frac{Gol(s)}{1 + Gold(s)} \quad (36)$$

Man kann Gleichung (35) in Gleichung (36) einsetzen, um den folgenden Ausdruck für die Closed-Look-Verstärkung zu erhalten:

$$\frac{ID(s)\ kp}{Idre\ f(s)\ kp + Lf\ s} = Gi(s) = \quad (37)$$

Durch Ersetzen von $kp \frac{Lf}{ÿi}$ **und** $ki = \frac{Rf}{ÿi}$**, der Closed-Look-Gewinn wird**

$$Gi(s) = \frac{1}{ÿi\ s + 1} \quad (38)$$

Die resultierende konstante Zeit der geschlossenen Schleife wird als ÿi geschrieben . **Daher gilt:**

Die Formel liefert die Einschwingzeit erster Ordnung im geschlossenen Regelkreis:

$$ti, Absetzen = 4{,}6ÿi \quad (39)$$

4. Entwurf des Regelkreises für die DC-Busspannung im S-Bereich

Zur Aufrechterhaltung eines ausgeglichenen Leistungsflusses ist die DC-Bus-Spannungsregelungstechnik von wesentlicher Bedeutung. Die Implementierung dieser Steuerung ist zwingend erforderlich, da sie es dem Spannungsquellenumrichter ermöglicht, als Gleichrichter zu fungieren, Wechselstrom in Gleichstrom umzuwandeln und die Steuerung der Zwischenkreiskondensatorspannung zur Versorgung einer Ausgangslast zu erleichtern. Darüber hinaus hilft diese Steuerungstechnik bei intermittierenden Gleichstromquellen wie PV-Systemen dabei, die Stromregelkreisreferenz anzupassen, um den Gleichstromeingang effektiv zu regeln [20]. Die Schaltung aus Abbildung 7 ist in Abbildung 10 dargestellt , wobei ein Entladewiderstand RB **und zusätzliche Rückkopplungssignale** (iDC **und** iL) **hinzugefügt wurden, um die DC-Steuerungsmodellierung zu vereinfachen.**

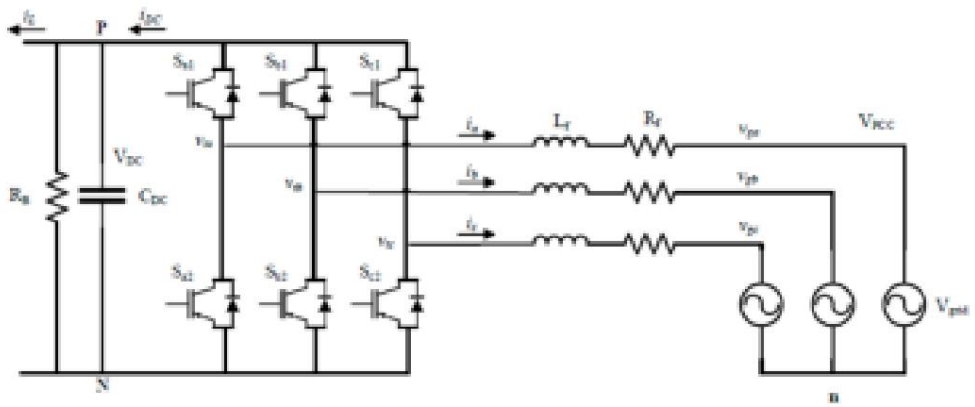
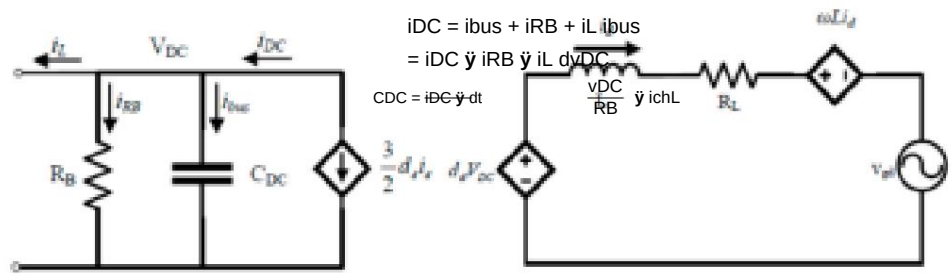


Abbildung 10. Zweistufiger VSC mit einem L-Filter und einem Ableitwiderstand im Gleichstromzwischenkreis.

Der Widerstand und die Induktivität zwischen dem PCC und dem Wechselrichterausgang betragen Rf **und** Lf . **Da die aktive Leistungsübertragung das Laden und Entladen des Zwischenkreiskondensators ermöglicht , kann die in der DQ-synchronen Referenzrahmenkonfiguration gezeigte Schaltung nur für die d-Achsenkomponente modelliert werden . Daher wird für dieses Verfahren weder ein momentaner Blindstrom noch die q-Achsenkomponente benötigt, wie Abbildung 11 zeigt.**

Die folgenden Gleichungen veranschaulichen die spannungsdynamische Gleichung des Zwischenkreiskondensators:

$$iDC = ibus + iRB + iL\ ibus$$
$$= iDC\ ÿ\ iRB\ ÿ\ iL\ dvDC \quad (40)$$
$$CDC = \frac{iDC\ ÿ\ dt}{\frac{vDC}{RB}\ ÿ\ ichL}$$



Machine Translated by Google

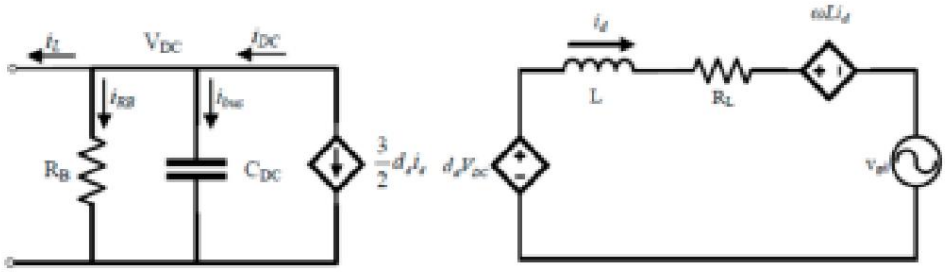


Abbildung 11. VSC- D-Achsen-Komponentenkonfiguration mit einem Entladewiderstand und einem L-Filter.

Gleichung (40) kann mit der Laplace-Transformation transformiert werden zu

$$\text{VDC(s)} = \frac{\text{sCDC} + \frac{1}{\text{RB}}}{\text{VDC(s)} = \text{IDC(S)} - \text{IL(s)}} \quad \text{ud(s)} = \frac{\text{RB}}{\text{sCDCRB} + 1}\,\text{ud(s)} \tag{41}$$

Die Formel zur Berechnung des PI-Kompensatorausgangs ud(s) **lautet** ud(s) = IDC(s) **-** IL(s), **wobei** IL(s) **der Rückkopplungsterm ist. Dadurch kann der Regler vermeiden, einen Messwert zu erfinden. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache wird das Steuersystem wie folgt geschrieben:**

$$\text{GI(s)} = \frac{\text{RB}}{\text{sCDCRB} + 1} \tag{42}$$

Der Zusammenhang dieser Ströme stellt sich unter der Annahme eines $\eta(t) = \eta(t) = \eta(t)$ **dass der** iDC nur durch den **aus dem Netz bezogenen Strom direkt gesteuert werden kann ,** wie folgt dar:

$$\text{P3}\eta = \text{PDC} \tag{43}$$

Die Wirkleistung ergibt sich zu

$$\text{P3}\eta = \frac{3}{2}\,\text{vgdid} + \text{vgqiq} \tag{44}$$

Die DC-Busleistung erhält man durch Ersetzen von Gleichung (44) durch (43), was zu folgendem Ergebnis führt:

$$\frac{3}{2}\,\text{vgdid} = \eta\text{iDCVDC} \tag{45}$$

Die folgende Gleichung beschreibt die Beziehung zwischen der Zeitkonstante ηDC **des Regelkreises für die Zwischenkreisspannung und der Zeitkonstante** ηi **des Stromregelkreises:**

$$\eta\text{i} \approx \eta\text{DC} \tag{46}$$

Die Beziehung zwischen diesen beiden Regelkreisen kann durch die folgende Gleichung (47) ausgedrückt werden, wenn die Bedingung in Gleichung (46) erfüllt ist, id **=** Idre f , **und die beiden Regelkreise entkoppelt sind.**

$$\text{Idre f} = \frac{2}{3}\,\frac{\text{VDC}}{\text{vgd}}\,\text{IDC} \tag{47}$$

Der innere Verstärkungskoeffizient ergibt sich aus der Beziehung zwischen Idre f **und** IDC **und wird wie folgt angegeben:**

$$\text{Kinner} = \frac{\text{IDC}}{\text{Idre f}} = \frac{3}{2}\,\frac{\text{vgd}}{\text{VDC}} \tag{48}$$

Basierend auf dem Folgenden wird angenommen, dass der Kompensator ein PI-Regler ist, ausgedrückt als

$$\text{GC(s)} = \frac{\text{kps} + \text{ki}}{\text{s}} \tag{49}$$

Die ausgewählte Methode zur Gleichspannungsregelung verwendet einen Kaskadenansatz, der eine äußere Schleife zur Spannungsregelung des Gleichstrombusses und eine innere Schleife zur Stromregelung Diese Taktik garantiert, dass die Reaktionszeit des aktuellen Reglers schneller ist als die des

Machine Translated by Google

der Regler der Gleichspannung gemäß Gleichung (46). Die Gleichspannungsschleife betrachtet die Stromschleife als konstante Verstärkung, was eine allmähliche Verschiebung der Stromreferenz und damit eine fehlerfreie Reaktion des Stromreglers ermöglicht. Folglich sind die (+) ( ) = Dynamiken der beiden in Abbildung 11 dargestellten Schaltkreise effektiv getrennt. Abbildung 12 × + 1 zeigt ein Blockdiagramm der Gleichspannungsschleife eines VSC-Systems in vereinfachter Form.

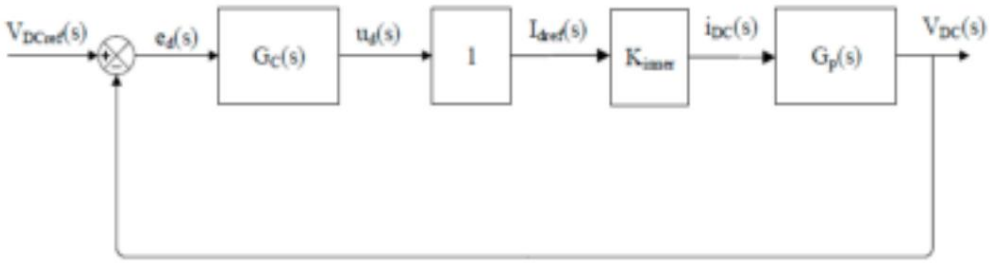


Abbildung 12. Vereinfachtes DC-Link-Spannungsschleifenmodell des VSC-Systems.

Gleichung (50) liefert die Verstärkung im offenen Regelkreis basierend auf Abbildung 12.

$$Gol(s) = GC(S)GP(S)Kinner \tag{50}$$

Die Gleichungen (42) und (49) können in (50) eingesetzt werden, um folgendes

$$Gol(s) = \frac{kps + ki}{S} \times \frac{RB}{2CDCRB + s\,sCDCRB + 1} \times Kinner = \frac{KinnerRB\,kps + ki}{S\,sCDCRB + 1} \tag{51}$$

In Bezug auf die Stromregelung in der d-Achse wird die Verstärkung des geschlossenen Regelkreises ausgedrückt als Gleichung (52):

$$GDC(S) = Gcl(s) = \frac{Gol(s)}{1 + Gold(s)} \tag{52}$$

Wenn Gleichung (51) in (52) eingesetzt wird, erhält man

$$GDC(s) = \frac{Kinner\,kps + ki\,/CDC}{S^2 + \frac{KinnerRBkp+1}{CDCRB}\,s + \frac{Kinnerki}{CDC}} \tag{53}$$

Da Gleichung (53) einen Zähler erster Ordnung hat, wird ein Vorfilter eingerichtet, um diesen Term zu eliminieren. Dadurch kann (53) an die Standardübertragungsfunktion zweiter Ordnung angepasst werden , die lautet:

$$GPF(s) = \frac{GDC,\ erwünscht(e)}{GDC,\ alt(e)} = \frac{ki}{kps + ki} \tag{54}$$

Die Verstärkung im geschlossenen Regelkreis der Stromregelung in der d-Achse kann durch Multiplikation der Gleichungen (53) und (54) ermittelt werden. Das Ergebnis ist wie folgt:

$$GDC(s) = \frac{\frac{Kinnerki}{CDC}}{S^2 + \frac{KinnerRBkp+1}{CDCRB}\,s + \frac{Kinnerki}{CDC}} \tag{55}$$

Die Verstärkung im geschlossenen Regelkreis der Stromregelung in der d-Achse kann durch Multiplikation der Gleichungen (53) und (54) ermittelt werden. Das Ergebnis ist wie folgt:

$$kp = \frac{2\ddot{y}\ddot{y}nCDCRB \ddot{y} 1}{KinnerRB} = 4{,}6 \times \tag{56}$$

$$ki = \frac{\ddot{y}n\,2CDC}{Kinner} \tag{57}$$

Machine Translated by Google

Die zweite Einschwingzeit des geschlossenen Regelkreises beträgt daher:

$$\ddot{y}DC = \frac{1}{\ddot{y}\ddot{y}n} \quad (58)$$

$$tDC,Einstellung = \mathbf{4,6} \times \ddot{y}DC$$

5. Entwurf des Regelkreises für die Wechselspannung im S-Bereich

Wenn ein Fehler oder Stromausfall das Hauptnetz daran hindert, Strom zu liefern, ein VSC Das System im Gridforming-Modus erstellt eine Gitterreferenz und erleichtert die Übertragung aktiver oder Blindleistungen während des Mikronetzbetriebs im isolierten Modus. Dadurch kann das Mikronetz weiter betrieben werden [21]. Die dreiphasige VSI wird mithilfe von Differentialgleichungen mo die den Zusammenhang zwischen der Eingangsgleichspannung, den Schaltzuständen der Wechselrichter und die Ausgangswechselspannungen. Die Dynamik des VSI-Systems, einschließlich der LC Filter (die typischerweise zur Glättung des Wechselrichterausgangs verwendet werden), wie in Abbildung 13 dargestellt, sind im S-Bereich durch Transferfunktionen repräsentiert [22].

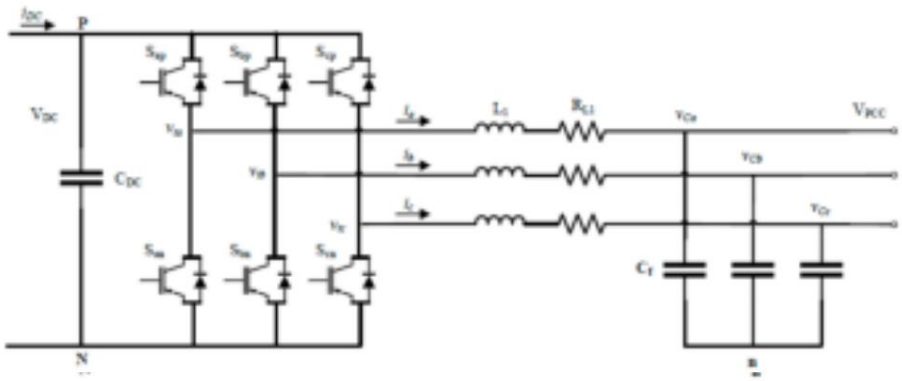


Abbildung 13. Zweistufiger VSC mit einem LC-Filter.

Die Widerstände zwischen dem Konverter und dem Filterkondensator werden als RL1 dargestellt. **und L1. Ein komprimierter Ersatzschaltkreis pro Phase, der unter Verwendung des Spannungsgesetzes von Kirchhoff ist in Abbildung 14 dargestellt.**

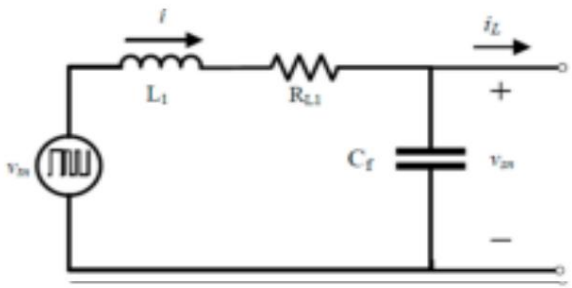


Abbildung 14. Ein VSC mit einem LC-Filter pro Phase in einer vereinfachten Darstellung.

Die Phasenströme für jeden der drei Phasenstromkreise erhält man durch das aktuelle Gesetz von Kirchhoff wie folgt:

$$ia = iC\,fa + iLa$$
$$ib = iC\,fb + iLb \quad (59)$$
$$ic = iC\,fc + iLc$$

Kombiniert man die drei Gleichungen aus (59), erhält man folgendes:

$$iabc = iC\,f,abc + iL,abc \quad (60)$$

Mithilfe der ABC-ÿÿ0- Transformation auf Gleichung (60) erhält man das folgende Ergebnis:

$$iC\,f,\ddot{y}\ddot{y} = \ddot{y}\ddot{y} + iL,\ddot{y}\ddot{y} \quad (61)$$

Machine Translated by Google

Mit Gleichung (16) kann die ÿÿ0-dq0 -Transformation wie folgt umgewandelt werden:

$$iC\,f\,,dq = iC\,f\,,ÿÿe^{ÿj(ÿtÿ\ \frac{ÿ}{2})} \tag{62}$$

$$\mathbf{iC,dq} = idq\ \mathbf{ÿ}\ \mathbf{iL,dq} \tag{63}$$

Folglich kann, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, die a-, b-, c- **Rahmenreferenz in** d- **und** q- **Komponenten aufgeteilt und über die Stromregelschleifen in** d- **und** q- **Achsen kaskadiert werden, was zu**

$$Vgl.\frac{DVD}{\quad} = Cf\ ÿvsq + id\ \mathbf{ÿ}\ iLd\ dt \tag{64}$$

$$Vgl.\frac{dvsq}{dt} = ÿCf\ ÿvsd + iq\ \mathbf{ÿ}\ iLq \tag{65}$$

Die Existenz der Cf *ÿ*- **Terme in den Gleichungen (64) und (65) führt dazu, dass die** vsd- **und** vsq- **Dynamik gekoppelt sind. Die Feedforward-Terme** ÿCf ÿvsq + iLd **für die d-Achsen-Komponente und** Cf ÿvsd + iLq **für die q-Achsen-Komponente werden eingeführt, um sie zu entkoppeln und die Laststörungseingänge** iLd **und** iLq zu berücksichtigen. **Darüber hinaus sind die Steuereinheiten der d -Achsen- und q-Achsen-Komponenten dieselben, wie in den Gleichungen (64) und (65) gezeigt; daher gilt:**

$$\frac{DVD}{DT} = \frac{\mathbf{1}}{Vgl.}[ud\,] \tag{66}$$

ud **ist der Ausgang des PI-Kompensators. Gleichung (66) wird gelöst durch Anwendung der Laplace-Transformation, die Folgendes ergibt:**

$$Vsd(s) = \frac{ud(s)}{sCf} \tag{67}$$

Als Ergebnis ergibt sich folgendes Regelwerk:

$$GP(s) = \frac{\mathbf{1}}{sCf} \tag{68}$$

Darüber hinaus wird angenommen, dass die Zeitkonstante der Regelschleife für die Wechselspannung, ÿv, **fünfmal größer ist als die Zeitkonstante der Stromregelschleife, ÿi. Wenn diese Annahme erfüllt ist, werden die beiden Regelkreise entkoppelt. Der Sachverhalt ist wie folgt:**

$$ÿi\ \mathbf{ÿ}\ ÿv \tag{69}$$

Daher werden die Eingänge der Stromregelkreise in den Gleichungen (70) und (71) dargestellt, und Idq(s) = Idqre f(s) **für die Regelschleife der Wechselspannung.**

$$Idre\,f(s) = ud(s)\ \mathbf{ÿ}\ Cf\ ÿVsq(s) + ILd(s) \tag{70}$$

$$Iqre\,f(s) = uq(s) + Cf\ ÿVsd(s) + ILq(s) \tag{71}$$

Gleichung (72) gibt die PI-Reglerverstärkung an.

$$GC(s) = \frac{kps + ki}{s} \tag{72}$$

Da die Steuerwerke der Gleichung (68) für die d- **und** q- **Komponenten gleich sind, können auch die entsprechenden Kompensatoren gleich sein. Mit Bezug auf Abbildung 15** sind **die einzigen Informationen, die als nächstes gesammelt werden müssen, die Verstärkungen der Spannungssteuerkompensatoren in der d-Achse. Das Folgende ist die Verstärkung im offenen Regelkreis:**

$$Gol(s) = GC(s)GP(s) \tag{73}$$

Machine Translated by Google

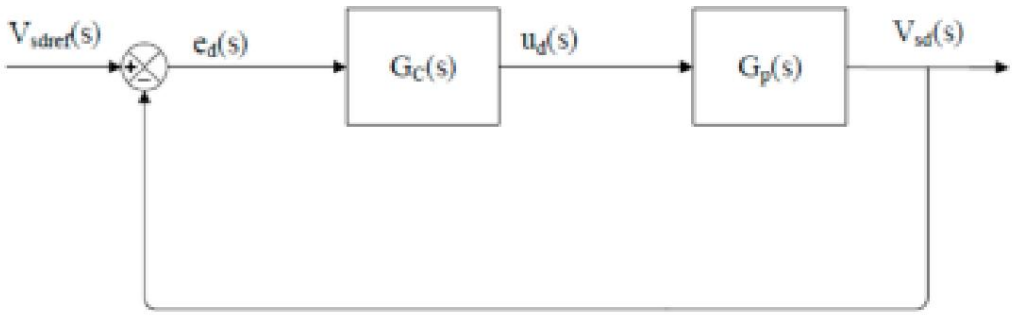


Abbildung 15. Ein Blockdiagramm für die AC-Spannungsschleife des VSC-Systems in vereinfachter Form.

GC(s) **und** GP(s) **können durch die entsprechenden Werte ersetzt werden, um das folgende Ergebnis zu erhalten:**

$$\text{Gol(s)} = \frac{\text{kps + ki}}{\text{S}} \times \frac{1}{\text{sCf}} = \frac{\text{kps + ki}}{\text{s 2Cf}} \quad (74)$$

Die Verstärkung der Stromregelung in der d-Achse im geschlossenen Regelkreis kann wie folgt dargestellt werden:

$$\text{Gv(s)} = \text{Gcl(s)} = \frac{\text{Gol(s)}}{1 + \text{Gold(s)}} \quad (75)$$

Wenn Gleichung (74) in (75) eingesetzt wird, ergibt sich

$$\text{Gv(s)} = \frac{\frac{(\text{kps+ki})}{\text{Vgl.}}}{\text{s}^2 + \frac{\text{kp}}{\text{Vgl.}}\text{ ki s} + \frac{}{\text{Vgl.}}} \quad (76)$$

Abbildung 15 **zeigt das vereinfachte Blockdiagramm der Wechselspannungsschleife des VSC-Systems .**

Da der Zähler erster Ordnung in Gleichung (76) gestrichen werden muss, muss ein Vorfilter 1 entwickelt werden, damit Gleichung (76) der herkömmlichen Übertragungsfunktion zweiter Ordnung entspricht. Wie unten angegeben, ist ein Vorfilter erforderlich.

$$\text{GPF(s)} = \frac{\text{GDC, erwünscht(e)}}{\text{GDC, alt(e)}} = \frac{}{\text{ki kps + ki}} \quad (77)$$

Das Ergebnis der Multiplikation der Gleichungen (76) und (77) ist:

$$\text{ki Gv(s)} = \text{s 2Cf + kps + ki} \quad (78)$$

Durch Auflösen der Ergebnisse der Nennerkoeffizienten von Gleichung (78) werden die Verstärkungen der Proportional- und Integralregler gelöst für

$$\text{kp} = 2ÿÿnCf \quad (79)$$

$$\text{ki} = ÿn\ 2Cf \quad (80)$$

Als Ergebnis ergibt sich die Regelkreiszeitkonstante der Wechselspannung zu

$$ÿv = \frac{1}{ÿÿn} \quad (81)$$

Um die beiden Regelkreise zu entkoppeln, wird davon ausgegangen, dass die Systemeinschwingzeit für diese zweite Ordnung im geschlossenen Regelkreis fünfmal länger ist als die Einschwingzeit des vorhandenen Rege Mit anderen Worten:

Machine Translated by Google

$$t_{v,\text{Einschwingzeit}} = \frac{4.6}{\ddot{y}\ddot{y}_n} = 4{,}6 \times 5 \times \ddot{y}_i = 5 \times t_{i,\text{Einschwingzeit}} \quad (82)$$

6. Diskussion

In diesem Diskussionsabschnitt werden die wichtigsten Aspekte des grundlegenden Schaltungsmodells von VSCs untersucht. Die verschiedenen Methoden und Steuerungsstrategien, die in VSCs eingesetzt werden, einschließlich der SVPWM- Methode, der DQZ-Methode des synchronen Referenzrahmens, des Designs des Stroms, der DC-Busspannung und der AC-Spannungssteuerungsschleifen in der S-Domäne, werden in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3. Zusammenfassung des grundlegenden Schaltungsmodells von Spannungsquellenumrichtern.

SVPWM-Methodik	**SVPWM ist eine weit verbreitete Technik zur Steuerung von VSCs, da sie hervorragende Ausgangswellenformen mit geringerer harmonischer Verzerrung erzeugen kann. Durch die effektive Synthese des gewünschten Ausgangsspannungsvektors ermöglicht SVPWM die präzise Steuerung des VSC-Ausgangs. Herausforderungen wie Rechenkomplexität und Schaltfrequenzbeschränkungen müssen** jedoch **sorgfältig angegangen werden, um eine optimale Leistung sicherzustellen.**
DQZ-synchrone Referenzrahmenmethodik	**Die DQ0-Methode des synchronen Referenzrahmens ist ein leistungsstarkes Werkzeug zur Analyse und Steuerung von VSCs, insbesondere in netzgekoppelten Anwendungen. Durch die Transformation des Dreiphasensystems in einen zweidimensionalen Raum mit direkten** (d) **und Quadraturachsen** (q) **vereinfacht diese Methode die Steuerungs- und Modellierungsprozesse. Sie ermöglicht die genaue Darstellung der Systemdynamik und erleichtert die Entwicklung von Steuerungsalgorithmen, wodurch die Gesamtleistung und Stabilität von VSC-basierten Systemen verbessert wird.**
Entwurf des Regelkreises für den Strom im S-Bereich	**Eine effektive Stromregelung ist entscheidend für eine genaue und dynamische Reaktion in VSCs, insbesondere in Anwendungen, die eine präzise Regelung des Stromflusses erfordern. Durch die Entwicklung von Stromregelkreisen im S-Bereich können Ingenieure fortschrittliche Regelungstechniken nutzen, um gewünschte Leistungsziele wie schnelle Reaktion, geringes Überschwingen und robuste Stabilität zu erreichen. Die Implementierung ausgefeilter Regelungsalgorithmen wie Proportional-Integral- Regler oder modellprädiktive Regelung (MPC) kann die Effizienz der Stromregelkreise in VSCs weiter verbessern.**
Entwurf des Regelkreises für die DC-Busspannung im S-Bereich	**Der Regelkreis für die DC-Busspannung spielt eine entscheidende Rolle bei der Aufrechterhaltung eines stabilen Betriebs und der Gewährleistung einer zuverlässigen Leistung von VSCs. Durch die Regulierung der DC-Busspannung ermöglicht dieser Regelkreis eine effiziente Energieumwandlung und eine reibungslose Leistungsübertragung zwischen dem VSC und dem Netz oder der Last. Die Gestaltung des DC-Busspannungsregelkreises in der S-Domäne ermöglicht die präzise Abstimmung der Reglerparameter und dynamischen Reaktionseigenschaften und gewährleistet so eine optimale Leistung unter unterschiedlichen Betriebsb**
Entwurf des Regelkreises für die Wechselspannung im S-Bereich	**Bei netzgekoppelten VSC-Anwendungen ist der Regelkreis für die Wechselspannung entscheidend, um die Ausgangsspannung so zu regeln, dass sie den Netzanforderungen wie Spannungshöhe und Frequenz entspricht. Durch die Entwicklung des Regelkreises für die Wechselspannung im S-Bereich können Ingenieure robuste Steuerungsstrategien entwickeln, um die Netzstabilität aufrechtzuerhalten, Spannungsoberwellen zu mildern und die nahtlose Integration erneuerbarer Energiequellen sicherzustellen. Fortgeschrittene Steuerungstechniken wie prädiktive Steuerung und adaptive Steuerung können eingesetzt werden, um die Effizienz und Flexibilität des Regelkreises für die Wechselspannung in VSCs zu verbessern.**

7. Schlussfolgerungen

In diesem Dokument wurde das grundlegende VSC-Schaltungsmodell mit einem LC-Ausgangsfilter vorgestellt. Die wichtigste Stromschnittstelle zwischen verteilten Generatoren und dem Mikronetz ist der AC-DC-Wandler. Es wurden zwei Betriebsarten für einen Spannungsquellenwandler beobachtet . Er fungiert als aktiver Gleichrichter, wenn er als DC-Bus-Steuerung verwendet wird. Er verwendet eine Vielzahl von Regelkreisen, um im Netzeinspeisungs- und Net Außerdem wurde ein ausführliches Handbuch vorgestellt, das eine Vielzahl von Techniken abdeckt, darunter SVPWM, den DQZ-Synchronrahmen und die Phasenregelschleife. Darüber hinaus dient dieses Dokument als umfassender Leitfaden zum Verständnis des grundlegenden Schaltungsmodells von VSCs, der Methoden zu ihrer Steuerung und der Techniken zu ihrer genauen Modellierung. Indem dieses Dokument **Einblicke in die grundlegenden Prinzipien und praktischen Überlegungen im Zusammenhang mit VSCs bietet, soll es zur Weiterentwicklung von VSC-basierten Leistungselektronikanwendungen und ihrer Integration in moderne Stromversorgungssyste**

Machine Translated by Google

Zuverlässigkeit und Nachhaltigkeit. Es müssen Fallstudien und Simulationen durchgeführt werden, um die Wirksamkeit und Genauigkeit der vorgestellten Methoden und Steuerungsstrategien bei der Analyse von VSC-basierten Leistungselektronikanwendungen zu veranschaulichen.

Beiträge des Autors: Konzeptualisierung; Methodik; formale Analyse; Schreiben – Vorbereitung des Originalentwurfs , CBN; Schreiben – Überprüfung und Bearbeitung; Aufsicht; Projektverwaltung, MA und AA Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und stimmen ihr zu.

Finanzierung: Diese Forschung wurde von der National Research Foundation (NRF) unter der Fördernummer PMDS22052313773 gefördert und das APC wurde von der Cape Peninsula University of Technology finanziert.

Erklärung des Institutional Review Board: An dieser Forschung sind weder Menschen noch Tiere beteiligt. Daher war für die Datenerhebung für dieses Projekt keine Zustimmung der Teilnehmer erforderlich.

Datenverfügbarkeitserklärung: Anfragen für den Zugriff auf die Datensätze können an den entsprechenden Autor gerichtet werden.

Danksagungen: Als korrespondierender Autor bestätige ich, dass dieser Artikel im Rahmen meiner Doktorarbeit unter Aufsicht und mit Unterstützung von Marco Adonis angefertigt wurde und dass Ali Almaktoof die Leitung und Redaktion übernahm und das Manuskript vor der Veröffentlichung überprüfte.

Interessenkonflikte: Es liegen keine offengelegten Interessenkonflikte in Bezug auf diese Veröffentlichung vor.

Verweise

1. **Jing, T.; Maklakov, AS Eine Überprüfung von Spannungsquellenumrichtern für Energieanwendungen. In Proceedings der Internationalen Ural-Konferenz für grüne Energie (UralCon) 2018, Tscheljabinsk, Russische Föderation, 4.–6. Oktober 2018; S. 275–281.**
2. **Brodzicki, M.; Klucznik, J.; Czapp, S. Bewertung der Auswirkungen von VSC auf das Stromnetz anhand einer geeigneten PQ-Fähigkeitskurve.** Elektronik **2023,** 12, **2462. [CrossRef]**
3. **Ndeke, CB; Adonis, M.; Almaktoof, A. Energiemanagementstrategie für ein hybrides Mikronetzsystem mit erneuerbarer Energie.** Energie **2024, 4, 1. [CrossRef]**
4. **Monteiro, V.; Monteiro, LF; Franco, FL; Mandrioli, R.; Ricco, M.; Grandi, G.; Afonso, JL Die Rolle von Front-End-AC/DC-Wandlern in hybriden AC/DC-Smart Homes: Analyse und experimentelle Validierung.** Electronics **2021,** 10, **2601. [CrossRef]**
5. **Xiong, L.; Liu, X.; Liu, Y.; Zhuo, F. Modellierung und Stabilitätsprobleme von Spannungsquellen-Umrichter-dominierten Stromversorgungssystemen: Ein Überblick.** CSEE J. Power Energy Syst. **2022, 8, 1530–1549.**
6. **Almaktoof, AMA Multilevel-Wechselrichter mit Finite-Set-Modell-prädiktiver Stromregelung für erneuerbare Energiesysteme Anwendungen. Doktorarbeit, Cape Peninsula University, Kapstadt, Südafrika, März 2015.**
7. **Gaballah, M.; El-Bardini, M. Kostengünstige digitale Signalerzeugung für den Antrieb von Raumvektor-PWM-Wechselrichtern.** Ain Shams Eng. J. **2013, 4, 763–774. [CrossRef]**
8. **Jeong, M.; Gfrörer, T.; Biela, J. Erweiterung des stabilen Parameterbereichs von LCL-Filtern für netzgekoppelte Umrichter durch inhärente Dämpfung der modellprädiktiven Regelung (MPC). In Proceedings des 2022 IEEE 23rd Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL), Tel Aviv, Israel, 20.–23. Juni 2022.**
9. **Bernet, D.; Hiller, M. Netzgekoppelte Mittelspannungsumrichter mit parallelen aktiven Spannungsquellenfiltern.** IET Electr. Power Appl. **2019,** 13, **1507–1513. [CrossRef]**
10. **Kouchaki, A.; Nymand, M. Analytisches Design eines passiven LCL-Filters für dreiphasige, zweistufige Gleichrichter mit Leistungsfaktorkorrekt** IEEE Trans. Power Electron. **2018,** 33, **3012–3022. [CrossRef]**
11. **Kumar Peddapelli, S. 2. Raumvektor-Pulsweitenmodulationstechnik. In** Pulsweitenmodulation: Analyse und Leistung in Multilevel-Wechselrichtern; **De Gruyter Oldenbourg: Berlin, Deutschland; Boston, MA, USA, 2017; S. 13–22. [CrossRef]**
12. **Lewicki, A.; Odeh, CI; Kondratenko, D.; Morawiec, M. Hybridisierte Raumvektor-Pulsweitenmodulation für mehrphasigen zweistufigen Spannungsquellenwechselrichter.** IEEE Trans. Power Electron. **2022,** 37, **7663–7674. [CrossRef]**
13. **Doan, NS; Tsvetkov, AN; Nguyen, TH Untersuchung und Implementierung eines Raumvektor-Pulsweitenmodulations-Wechselrichters auf einem Arduino.** E3S Web Conf. **2021,** 288, **4–9. [CrossRef]**
14. **Waqas, M.; Ahmed, T.; Elavarasan, RM; Waqar, A.; Leong, K.; Pugazhendhi, R.; Das, N.; Jeelani, MW DQ Transformationsbasierte Steuerung eines einphasigen netzgekoppelten Wechselrichters. In Proceedings der 31. Australasian Universities Power Engineering Conference (AUPEC) 2021, virtuell, 26.–30. September 2021.**
15. **Venkatramanan, D.; Singh, MK; Ajala, O.; Dominguez-Garcia, A.; Dhople, S. Integrierte Systemmodelle für Netzwerke mit Generatoren und Wechselrichtern.** arXiv **2022, arXiv:2203.08253.**
16. **Altahir, AAR Park und Clark Transformations: A Short Review. April 2020, S. 2–5. Online verfügbar: https://www.researchga te.net/profile/Ali-Altahir/publication/340681625_Park_and_Clark_Transformations_Park_and_Clark_Transformations_A_Short_Review/links/5e98bb8a4585150839e3768b/Park-and-Clark-Transformations-Park-and-Clark-Transformations-A-Short -Rezension.pdf (abgerufen am 27. Mai 2024).**

Machine Translated by Google

17. **Casado-Machado, F.; Martinez-Ramos, JL; Barragan-Villarejo, M.; Maza-Ortega, JM; Rosendo-Macias, JA Reduzierte Referenzrahmentransformation : Dekonstruktion dreiphasiger Vierleitersysteme.** IEEE Access **2020, 8, 143021–143032. [CrossRef]**
18. **O'Rourke, CJ; Qasim, MM; Overlin, MR; Kirtley, JL Eine geometrische Interpretation von Referenzrahmen und Transformationen: Dq0, Clarke und Park.** IEEE Trans. Energy Convers. **2019,** 34, **2070–2083. [CrossRef]**
19. **Hollweg, GV; Khan, SA; Chaturvedi, S.; Fan, Y.; Wang, M.; Su, W. Netzgekoppelte Umrichter: Ein kurzer Überblick über Topologien, Ausgangsfilter, Stromregelung und Betrieb in schwachen Netzen.** Energies **2023,** 16, **3611. [CrossRef]**
20. **Ali, M.; Yaqoob, M.; Cao, L.; Loo, KH Verbesserung der DC-Bus-Spannungsregelung in kaskadierten Umrichtersystemen durch ein neues Sensorloses Laststrom-Vorwärtsregelungsschema.** IET Power Electron. **2021,** 14, **1457–1467. [CrossRef]**
21. **Wu, H.; Wang, X. Steuerung gitterbildender VSCs: Eine Perspektive der adaptiven schnellen/langsamen internen Spannungsquelle.** IEEE Trans. **2023,** 38, **10151–10169. [CrossRef]**
22. **Sadeque, F.; Fateh, F. Über Steuerungsschemata für netzbildende Wechselrichter. In Proceedings der 2022 IEEE Kansas Power and Energy Conference (KPEC), Manhattan, KS, USA, 25.–26. April 2022.**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Komplexe Optimierungsprobleme mit maschinellem Lernen lösen †

Steven Prestwich

Fakultät für Informatik und Informationstechnologie, University College Cork, T12 XF62 Cork, Irland; s.prestwich@cs.ucc.ie; Tel.: +353-36-21-420-5911

† **Dieser Artikel ist eine erweiterte Version unseres Artikels, der auf der 9. Internationalen Konferenz für maschinelles Lernen, Optimierung und Datenwissenschaft, LOD 2023 (Grasmere, Lake District, Großbritannien, 22.–26. September 2023), veröffentlicht**

Zusammenfassung: Die meisten Optimierungsforschungen konzentrieren sich auf relativ einfache Fälle: einen Entscheidungsträger, ein Ziel und möglicherweise eine Reihe von Einschränkungen. Optimierungsprobleme in der realen Welt sind jedoch häufig mit Komplikationen verbunden: Sie können mehrere Ziele, mehrere Agenten, mehrere Phasen oder mehrere Ebenen umfassen und Unsicherheiten, Teilwissen oder nichtlineare Ziele aufweisen. Jedes dieser Probleme hat zu Forschungsbereichen mit speziellen Lösungsmethoden geführt. Wenn jedoch neue hybride Probleme auftreten, ist in der Regel kein Löser verfügbar. Wir definieren eine breite Klasse diskreter Optimierungsprobleme, die als Einflussprogramm bezeichnet werden , und beschreiben einen leichtgewichtigen Algorithmus, der auf Multi-Agent-Multi-Ziel-Verstärkungslernen mit Stichproben basiert. Wir zeigen, dass er zur Lösung von Problemen aus einer Vielzahl von Literaturbereichen verwendet werden kann: Constraint-Programmierung, Bayes-Netzwerke, stochastische Programmierung, Einflussdiagramme (Standard, begrenzter Speicher und mehrere Ziele) und Spieltheorie (Multi-Level-Programmierung, Bayes-Spiele und Level-k-Argumentation). Wir erwarten, dass er für das schnelle Prototyping von Lösungsmethoden für neue hybride Probleme n

Schlüsselwörter: Multi-Ziel; Multi-Agent; Verstärkungslernen; Optimierung

1. Einleitung

Optimierungsprobleme sind in der künstlichen Intelligenz, der Operationsforschung und in vielen anderen Anwendungsbereichen allgegenwärtig. In ihrer einfachsten Form erfordern sie, dass wir eine Reihe von Entscheidungen treffen, um eine Zielfunktion zu optimieren, möglicherweise unter Einhaltung bestimmter Einschränkungen. Eine Entscheidung wird normalerweise durch die Zuweisung eines Domänenwerts zu einer Entscheidungsvariablen dargestellt, wobei die Domäne eine Reihe von reellen Zahlen, ganzen Zahlen, Kategorien oder Datenstrukturen sein kann. Verschiedene Domänen, Einschränkungen und Ziele werden durch unterschiedliche Methoden unterstützt. Gemischt-ganzzahlige lineare Programmierung (MILP) und allgemeiner mathematische Programmierung, Einschränkungsprogrammierung (CP), dynamische Programmierung und Metaheuristiken (wie lokale Suche und genetische Algorithmen) können auf solche Probleme angewendet werden.

Viele Optimierungsprobleme sind jedoch komplexer. Insbesondere können sie Unsicherheit beinhalten, die durch Zufallsvariablen modelliert werden kann , **die nicht von einem Entscheidungsträger kontrolliert werden. Stattdessen nehmen sie Werte entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsverteilung an . Die stochastische Programmierung ist eine Erweiterung von MILP, die solche Probleme modelliert.**
In mehrstufigen stochastischen Programmen können Entscheidungs- und Zufallsvariablen verschachtelt sein, sodass wir Entscheidungen treffen müssen, ohne die Werte einiger Zufallsvariablen zu kennen.
Nachdem wir Entscheidungen getroffen haben, können wir einige Zufallsvariablen beobachten, müssen dann aber Entscheidungen für die nächste Stufe treffen usw. Die Lösung eines mehrstufigen Problems besteht nicht in einer einfachen Reihe von Entscheidungen, sondern in einer Strategie in Form eines Baums, die Reaktionen auf Zufallse
Normalerweise wird angenommen, dass Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Entscheidungen nicht beeinflusst werden (exogene Unsicherheit). **Bei manchen Anwendungen sind die Verteilungen jedoch entscheidungsabhängig** (endogene Unsicherheit). **Im letzteren Fall wird häufig die stochastische dynamische Programmierung verwendet.**

Eine weitere mögliche Komplikation ist, dass ein Entscheidungsträger oder Akteur **mehrere Ziele haben könnte: zum Beispiel den Gewinn zu maximieren und gleichzeitig die Umweltschäden zu minimieren. Für solche Probleme muss eine Art Kompromiss gefunden werden. Eine weitere Komplikatio**

check for updates

Zitat: Prestwich, S. Lösen komplexer Optimierungsprobleme durch maschinelles Lernen. AppliedMath **2024, 4, 908–926. https://doi.org/ 10.3390/ appliedmath4030049**

Wissenschaftliche Herausgeber: Libor Pekaÿr und Jinyun Yuan

Empfangen: 8. Mai 2024
Überarbeitet: 24. Juli 2024
Akzeptiert: 29. Juli 2024
Veröffentlicht: 31. Juli 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

Machine Translated by Google

Das Problem kann mehrere Agenten betreffen. Bei der mehrstufigen Programmierung muss ein Agent eine Entscheidung treffen, in der er weiß, wie ein anderer Agent reagieren wird, der wiederum andere Agenten berücksichtigen muss. Das Wissen kann unvollständig sein: Ein Agent weiß möglicherweise nicht genau, wie ein Gegner handeln wird oder gehandelt hat, und muss eine Entscheidung auf der Grundlage vo

Einflussdiagramme (IDs) sind ein besonders ausdrucksstarker Formalismus, der mehrstufige Entscheidungsprobleme mit endogener Unsicherheit modellieren kann. Zufallsvariablen können unabhängig oder durch bedingte Wahrscheinlichkeitstabellen verbunden sein und ein Bayes-Netzwerk bilden. Beobachtungen oder beobachtete Werte von Zufallsvariablen sind ebenfalls zulässig, und die Bayes-Inferenz kann verwendet werden, um auf der Grundlage dieser Beobachtungen auf die Verteilungen unbeobachteter Zufallsvariablen zu schließen . Zum Lösen von IDs stehen mehrere exakte und ungefähre Methoden

Ein maschineller Lernansatz für komplexe Optimierungsprobleme ist das bestärkende Lernen (RL) [1] , mit dem mehrstufige Entscheidungsprobleme in stochastischen Umgebungen gelöst werden können . Multi-Agent-RL wurde bekanntlich verwendet, um durch Selbstspiel das Spielen von Spielen wie Go und Schach auf übermenschlichem Niveau zu erlernen [2]. Es wurden auch Algorithmen für multiobjektives RL entwickelt und diese Erweiterungen im Bereich des multiobjektiven Multi-Agent-RL kombiniert . Ähnliche Entwicklungen gab es in der Literatur zur evolutionären Berechnung.

Somit steht uns eine breite Palette verfügbarer Technologien zur Verfügung, von denen jede in der Lage ist, bestimmte Arten von Problemen effizient zu lösen. Wenn wir jedoch mit einem neuen Optimierungsproblem mit hybriden Merkmalen konfrontiert werden, könnte es sein, dass kein Löser verfügbar ist. Einige Hybride wurden untersucht, beispielsweise das mehrzielige bestärkende Lernen mit Beschränkungen [3] und die zweistufige mehrzielige stochastische ganzzahlige lineare Programmierung [4]. IDs wurden erweitert, um nichtlineare Dienstprogramme [5], mehrere Agenten [6–10], mehrere Ziele [11,12], harte Beschränkungen [13] und teilweise beobachtete Variablen [14] zu handhaben – allerdings nicht alles in einem System. Aber es gibt keine Methode für komplexe Hybride im Allgemeinen. Um ein hypothetisches Beispiel zu nehmen: Es gibt keine offensichtliche Möglichkeit, ein diskretes zweistufiges Optimierungsproblem zu modellieren und zu lösen, dessen Leitproblem ein nichtlineares , durch Zufall beschränktes stochastisches Programm ist und dessen Nachfolger ein zweizieliges Beschränkungsbefriedigungsproblem und ein gewichtetes Max-SAT-Problem sind. Ein Forscher, der mit einem solchen Problem konfrontiert wird, muss einen neuen Ansatz erfinden oder vereinfachende Annahmen treffen, um es in einen bestehenden Rahmen einzufügen. Eine allgemeine Methode, die mit all diesen Komplikationen zurechtkommt, wäre zumindest für eine vorläufige Untersuchung seh

Ein weiterer Nachteil der Fragmentierung von Technologien ist, dass es schwierig ist, verschiedene Ansätze zu vergleichen. Angenommen, wir haben es mit einer neuen Anwendung mit zwei Entscheidungsträgern zu tun, sind uns aber nicht sicher, wie wir sie am besten modellieren. Sollen wir sie als ein zweistufiges Programm (siehe Abschnitt 3.8) oder als ein Bayes-Spiel (siehe Abschnitt 3.9) behandeln, Level-k-Denken verwenden (siehe Abschnitt 3.10), einen Entscheidungsträger als Zufallsvariable modellieren und ein stochastisches Programm implementieren (siehe Abschnitt 3.6) oder einen Erwartungswert eines Agenten nehmen und ihn auf ein Constraint-Programm reduzieren (siehe Abschnitt 3.1)? Einige Vereinfachungen könnten für das Ziel kaum einen Unterschied machen, während andere die Durchführbarkeit unmöglich machen könnten. Jeder Ansatz erfordert eine andere Technologie , deren Beherrschung viel Zeit und möglicherweise auch Geld kostet. Eine Methode, die allgemein genug ist, um alle diese Modelle zu lösen, wäre für Rapid Prototyping von großem Nutzen, um die Konse

In diesem Artikel beschreiben wir eine sehr allgemeine Klasse diskreter Optimierungsprobleme, die wir als Influence Program (IP) bezeichnen und die eine breite Palette von Problemen aus der Operationsforschung, der künstlichen Intelligenz und der Spieltheorie verallgemeinern (der Name ist von der Flexibilität von Influence Programs inspiriert). Wir präsentieren auch einen einfachen Löser für IPs, der auf einer Kombination aus Multi-Agent-Multi-Objective-Reinforcement-Learning und Markov-Chain-Monte-Carlo-Sampling basiert . RL wurde als vereinheitlichender Ansatz für sequentielle Entscheidungsfindung unter Unsicherheit vorgeschlagen [15] und hat komplexe gegnerische Spiele gelöst, was es

Dieses Papier erweitert unsere bisherige Arbeit. Eine frühe Version unter Verwendung logischer Programmierung wurde in [16] beschrieben, und eine neuere C-basierte Version erscheint in [17] , wo unsere Problemklasse als „gemischtes Einflussdiagramm“ bezeichnet wurde. Dieses Papier erweitert [17], indem es das Problem formalisiert , mehr verwandte Arbeit liefert, einfache Ablehnungsstichproben durch Gibbs- Stichproben ersetzt und ein breiteres Spektrum an Problemen löst. Abschnitt 2 formalisiert das Pro

Machine Translated by Google

und beschreibt den Algorithmus. Abschnitt 3 wendet ihn auf eine Reihe von Problemen aus unterschiedlicher Optimierungsliteratur an, um seine Flexibilität und Benutzerfreundlichkeit zu demonstrieren. Abschließend fasst Abschnitt 4 die Ergebnisse zusammen und diskutiert zukünftige Arbeiten.

2. Das Influence Programming Framework

Wir stellen nun unser IP-Framework und einen Algorithmus vor, nachdem wir damit verbundene Arbeiten besprochen haben.

2.1. Verwandte Arbeiten

Es wurde bereits viel Arbeit in das Thema Multi-Objective RL (MORL) gesteckt. Die Literatur zu MORL ist zu umfangreich, um sie hier zu überblicken, aber eine aktuelle Übersicht über MORL-Algorithmen mit einer Diskussion dieser Themen findet sich in [18]. Einige Methoden verwenden Skalarisierung, um MORL in RL umzuwandeln, was sie wie mehrere andere zu einer Single-Policy-Methode macht. Die Skalarisierung wurde kritisiert, weil sie nur zu einer einzigen Policy führt, und einige MORL-Algorithmen approximieren Pareto-Fronten und lernen Policies für eine Reihe von Gewichtungen. Die Skalarisierung wurde auch kritisiert, weil es schwierig sein kann, geeignete Gewichte auszuwählen, und weil die Entscheidungsgewalt bei der Auswahl in die Hände der Ingenieure gelegt wird, die den Algorithmus ausführen. Die meisten dieser Methoden verwenden lineare Skalarisierung. Trotz der Mängel der Skalarisierung werden wir zeigen, dass sie bei einer Reihe von Problemen gute Ergebnisse liefern kann. Sie ist außerdem einfach zu implementieren und hat wenig Laufzeitaufwand, was für unseren leichtgewichtigen Ansatz wichtig ist. Ergebnisse, die gewichtete Metriken verwenden, sind auch weniger empfindlich gegenüber der Wahl der Gewichte [1

Viel Arbeit wurde auch in Multi-Agent RL (MARL) gesteckt, und eine aktuelle MARL- Umfrage findet sich in [20]. Weniger Arbeit wurde an der Schnittstelle von MARL und MORL geleistet: Multi-Objective Multi-Agent RL (MOMARL). Eine Übersicht über MOMARL und verwandte Algorithmen findet sich in [21]. Aufgrund der Komplexität von MOMARL-Problemen gibt es nicht einmal eine einheitliche Definition dessen, was eine Lösung darstellt. MO-MIX [22] ist ein MOMARL-Algorithmus, der lineare Skalarisierung und Deep RL verwendet, bei dem ein künstliches neuronales Netzwerk zur Zustandsaggregation verwendet wird.

2.2. Die Problemklasse

Wir definieren ein (diskretes) Einflussprogramm (IP) als ein Tupel ÿV, D, A, U,L, O,P ÿ , wobei:

- **V** = **ÿv1, . . . ,** vnÿ **ist eine geordnete Liste von Variablen** vi ; • **D** = **ÿD1, . . . ,** Dnÿ **ist eine Liste der entsprechenden endlichen Domänen** Di **möglicher Werte, normalerweise Bereiche ganzer Zahlen oder Mengen symbolischer Namen;**
- **A** = **ÿA1, . . . ,** Anÿ **ist eine Liste der entsprechenden** Agenten **(Entscheidungsträger)** Ai , **die symbolische Namen (fett) haben;**
- U **ist eine Funktion, die eine Gesamtvariablenzuweisung einem Nutzenvektor für jeden Agenten zuordnet; • L ist eine Menge gerichteter Verbindungen** vi **ÿ** vj (i < **j)** **zwischen Variablen; • O ist eine Menge von** Beobachtungen, wobei eine Beobachtung eine Zuweisung vi = dj **eine** dj **ÿ** Di **zu einer Zufallsvariable** xi ;
- **P ist eine Funktion, die jeder Zufallsvariablen** vj eine Wahrscheinlichkeit zuweist, wenn **für jede Variable** vi **eine Zuordnung vorliegt, sodass** vi **ÿ** vj **ÿ L: Sie wird normalerweise durch eine (bedingte) Wahrscheinlichkeitstabelle dargestellt.**

Jede Variable ist genau einem Agenten zugeordnet, und wir lassen die Möglichkeit von Zufallsvariablen zu, deren Agent den Namen Zufall hat. Die Links L definieren, welche Variablen für spätere Entscheidungen und Zufallsvariablenverteilungen sichtbar sind. Ein Nutzen ist eine Funktion, die eine Gesamtvariablenzuweisung (ein Wert pro Variable) einem realen Wert zuordnet: Wir lassen Nutzen programmierbar zu, sodass der Benutzer eine kleine Funktion schreiben muss, um Nutzen aus einer Gesamtvariablenzuweisung zu berechnen. Jeder Agent hat neben dem Zufall mindestens einen Nutzen. Das Ziel eines IP besteht darin, für jeden Agenten eine Richtlinie zu finden, die seine Nutzen im Kontext von Beobachtungen und intervariablen Sichtbarkeit Pareto-optimiert .

Machine Translated by Google

2.3. Ein Algorithmus

Wir beschreiben nun den INFPROG -Algorithmus, der in Algorithmus 1 dargestellt ist. Es handelt sich dabei um einen einfachen Forschungsprototyp, der bekannte Techniken verwendet und nur dazu dient, die Flexibilität unseres Ansatzes zu demonstrieren. Viele andere Methodenkombinationen sind potenziell mög

INFPROG basiert auf einem einfachen RL-Algorithmus: Infinite-Step tabular SARSA mit *ÿ*- **greedy Aktionsauswahl und Lernrate** *ÿ* **[1].** Infinite-Step **bedeutet, dass die Belohnung für alle Werte in der Episode gleichmäßig unterstützt wird, was robuster ist als Q-Learning bei unbeobachteten Variablen [1].** Tabular **bedeutet, dass Zustands-Aktions-Paare Werte in einer Tabelle haben. Der Diskontierungsfaktor** *ÿ* **wird auf 1 gesetzt, da unser RL-Problem episodisch ist. Wenn ein Agent mehrere Nutzen hat, werden diese skalarisiert, sodass es einen Nutzen pro Agent gibt (siehe Abschnitt 2.6).**
Die skalierten Ziele werden als Belohnungen verwendet und am Ende jeder Episode berechnet, wenn allen Variablen aktualisierte Werte zugewiesen wurden, und für diese Agenten in frühere Zustände zurückversetzt (a[v] **bezeichnet den Agenten a, der der Variable v entspricht): Der Benutzer muss für diesen Schritt Code bereitstellen . Der Benutzer ist jedoch wahrscheinlich nicht am Wert des skalierten Ziels interessiert, daher werden geglättete Versionen der ursprünglichen Ziele ausgedruckt: Dies sind die Werte, die wir melden.**

Algorithmus 1 Der INFPROG -Algorithmus zum Lösen von IPs

Erfordert: ganze Zahlen H, E **und einen Nutzen-Hyperparameter ÿ**
initialisieren *ÿ* = **1,** *ÿ* = **1,** qH,v,i = **0 für**
Episode e = **1** E **do für** v·=
v1 . . . vn **do**
wenn v **Zufall ist, dann**
Stichprobe von xv **aus seiner**
Verteilung, sonst wenn U[0,
1] < *ÿ,* **dann Zufallsstichprobe**
von xv **ÿ** Dv , **sonst**
xv = **argminiÿDv** (qH,v,i) **end**
if end
for für
jeden Agenten a do
berechne skalarisiertes Ziel fa(ÿv) **mit ÿ end for für**
v = **v1 . . .**
vn **do** qH,v,xv = *ÿ* fa[v]
(ÿv) + **(1 ÿ ÿ)qH,v,xv**
Ende für
Update *ÿ* **und** *ÿ*
Ende für

Der Nutzen wird am Ende einer Episode berechnet: In RL-Begriffen ist dies eine spärliche Belohnung , **die das Lernen erschweren kann. In zukünftigen Arbeiten könnten wir mehrere Wertknoten wie in IDs zulassen oder spärliche Belohnungen durch Hinzufügen von RL-Techniken wie** Hindsight Experience Replay **[23] kompensieren. Diese Technik wurde für Off-Policy-RL-Algorithmen entwickelt, aber SARSA ist On-Policy, sodass einige Algorithmusänderungen erforderlich wären: zum Beispiel das Ersetzen von SARSA durch Q-Learning oder einen neueren Deep-RL-Algorithmus. Es gibt viele Möglichkeiten und dieser Bereich ist reif für die Erforschung.**

Die Parameter *ÿ* **und** *ÿ* **beginnen bei 1 und fallen auf 0 ab. Im RL wurden viele Abklingschemata vorgeschlagen, und wir wählen willkürlich** *ÿ* = *ÿ* = ((E **ÿ e)/E)** [3] **. In unserer Verwendung von RL ist ein** Zustand **eine Zuweisung zu Variablen v1 . . .** vi **für ein bestimmtes** i = **1 . . . n, eine** Aktion **ist die Zuweisung eines Wertes zu einer Entscheidungsvariablen** vi+1 , **eine** Episode **weist alle Variablen zu und die** Belohnung **ist der Nutzen (Zielfunktionswert), der am Ende einer Episode berechnet wird. Die** qH,v,xv **sind Zustands-Aktionswerte, die zur Definition der Richtlinie verwendet werden, die die erwartete Belohnung optimi**

Beachten Sie, dass es für einige Probleme wahrscheinlich besser wäre, SARSA mit einer Eignungsspur und 0 < *ÿ* < **1** zu verwenden *(ÿ* **ist ein Hyperparameter, der mit Eignungsspuren verwendet wird [1]). Wir werden dies in zukünftigen Arbeiten untersuchen. Für unsere Forschung haben wir jedoch einen Proto**

Machine Translated by Google

Setzen Sie ÿ **effektiv** = **1, indem Sie SARSA mit unendlichen Schritten wählen und so den Algorithmus durch Entfernen eines Hyperparameters vereinfachen, der angepasst werden muss.**

2.4. Zustandsaggregation

Jede Entscheidung kann von allen vorherigen Entscheidungen und Zufallsereignissen abhängen (siehe jedoch Abschnitt 3.5), sodass eine Strategie eine große Anzahl unterschiedlicher Zustände beinhalten kann. Um dieses Problem zu lösen, gruppieren RL-Algorithmen Zustände über Zustandsaggregationsmethoden . **Wir wählen eine einfache Form namens** Random Tile Coding **[1], genauer** Zobrist-Hashing **[24] mit** H **Hash- Tabelleneinträgen für eine große Ganzzahl H. Dies funktioniert wie folgt. Jedem (Entscheidungs- oder Zufalls-) Variablen-Wert-Paar** ÿv, **xÿ weisen wir eine zufällige Ganzzahl** rvx zu , **die fest bleibt. Zu jedem Zeitpunkt während einer Episode haben wir eine Menge** S **von Zuweisungen** ÿv, **xÿ und wir nehmen das Exklusiv-Oder der** rvx- **Werte (das heißt, ihre Bitmuster), die mit den Zuweisungen** XS = ÿv,xÿ **Schließlich verwenden wir** XS, **um ein Array** V **mit** H **Einträgen zu indizieren: der Wert von** qH,v,xv wird in V[XS **mod** H] **gespeichert (in allen unseren Experimenten legen wir** H = **2 × 108** fest).

Der INFPROG -Algorithmus verwendet zwei numerische Hyperparameter: eine Ganzzahl H, **die für die Zustandsaggregation verwendet wird, und eine Ganzzahl** E , **die die Anzahl der vom Solver verwendeten Iterationen ar Wenn** H **ausreichend groß ist, sind Hash-Kollisionen unwahrscheinlich und wir haben für jeden angetroffenen Zustand ein eindeutiges Array-Element. Man könnte erwarten, dass Zobrist-Hashing schlecht funktioniert, wenn die Anzahl der Zustände die Größe der Hash-Tabelle erreicht oder überschreitet, weil Hash-Kollisionen die Werte verschiedener Zustands-Aktions-Paare verwechseln. Überraschenderweise kann es auch dann gut funktionieren, wenn Hash-Kollisionen häufig sind, und wurde in der Schachprogrammierung verwendet [25].**

2.5. Stichproben

INFPROG nimmt Stichproben von Zufallsvariablen unter Verwendung eines Markov-Chain-Monte-Carlo-Algorithmus (MCMC) wie bei der probabilistischen Programmierung. Somit ist jede SARSA-Episode auch ein Durchlauf durch die Zufallsvariablen. Unsere frühere Arbeit [16,17] verwendete Ablehnungsstichproben: Wenn am Ende einer SARSA-Episode die Zufallsvariablen nicht mit den Beobachtungen übereinstimmten, wurde die Episode abgelehnt, in dem Sinne, dass die Belohnungen nicht auf frühere Zustände zurückgeführt wurden. Dies funktionierte bei einigen Problemen, ist aber unpraktisch, wenn die Wahrscheinlichkeiten sehr gering sind, und die Verwendung eines MCMC-Algorithmus wurde als zukünftige Arbeit vorgeschlagen. INFPROG verwendet Gibbs-Stichproben und kann solche F

In den Experimenten stellten wir fest, dass einige Werte der bedingten Wahrscheinlichkeitstabelle, die auf 0 oder 1 gesetzt waren, angepasst werden mussten: Dies ist ein bekannter Fehlermodus der Gibbs-Stichprobennahme. Tatsächlich ersetzen **wir Gibbs für Optimierungsprobleme ohne Beobachtungen (was auf die meisten Probleme zutrifft) durch einfache inverse Transformationsstichprobennahme.**

2.6. Mehrere Ziele **Viele reale**

Anwendungen haben mehrere Ziele und wir müssen einen Kompromiss finden. Ziele können im RL auf mehr als eine Weise kombiniert werden und ein einfacher und beliebter Ansatz ist die lineare Skalarisierung: **Man nimmt eine lineare Kombination der Ziele und erhält ein einzelnes** Ziel, das als RL-Belohnung verwendet werden kann. Dies hat den Nachteil, dass es keine **Lösungen in einem nicht-konvexen Bereich der Pareto-Front erzeugen kann .** Es kann auch schwierig sein , **geeignete Gewichte zu wählen, insbesondere wenn die Ziele unterschiedliche Einheiten verwenden.**

Ein anderer Ansatz besteht darin, die Ziele nach Wichtigkeit zu ordnen und dann nach dem lexikographisch besten Ergebnis zu suchen. Dies hat dasselbe Problem wie die lineare Skalarisierung (obwohl neuere Arbeiten sich damit befassen [26]), das behoben werden kann, indem alle Ziele außer dem unwichtigsten mit Schwellenwerten versehen werden , eine Methode, die als lexikographisches Sortieren mit Schwellenwerten bezeichnet wird **[27]. Dies hat jedoch den Nachteil, dass ein spezifischer RL-Algorithmus verwendet wird. Darüber hinaus ist in einigen unserer Anwendungen das wichtigste Ziel die Minimierung von Einschränkungsverletzungen, und dies sollte nicht**

Machine Translated by Google

Die von uns gewählte Methode besteht darin, die verschiedenen Ziele mittels gewichteter metrischer Skalarisierung **[19] auf ein einziges Ziel zu reduzieren. Dabei wird die Distanz zwischen dem Wertevektor fo** für **die Ziele** o **und einem** utopischen Punkt **uÿ im Mehrzielraum minimiert:**

$$\min_{x \ddot{y} o} w_o |f_o(x) \ddot{y} u_o|^{\ddot{y}} \quad 1/\ddot{y}$$

für ein p **ÿ** 1 und **vom Benutzer gewählte Gewichte w. Die Notwendigkeit, Gewichte zu wählen, ist ein** Nachteil **in Bezug auf die Benutzerfreundlichkeit, aber ein Vorteil ist, dass wir sie anpassen können, um verschiedene Punkte auf der Pareto-Front zu finden. Der Spezialfall der** Tschebyscheff-Skalarisierung (p = **ÿ) macht theoretisch garantiert die gesamte Pareto-Front erreichbar, aber die Lp-Normen** (p = **1, 2) könnten in der Praxis besser abschneiden [28].** In Experimenten haben wir **trotz der theoretischen Vorteile von Tschebyscheff mit L1 bessere Ergebnisse erzielt als mit L2 oder Lÿ ,** daher werden wir **L1 verwenden.**
In künftigen Arbeiten könnte es jedoch besser sein, das Tschebyscheff-Modell zu verwenden und nach Möglichkeiten zur Verbesserung der Ergebnisse zu suchen.

Der utopische Punkt wird während der Suche oft so angepasst, dass er knapp hinter dem bisher gefundenen besten Punkt liegt, aber INFPROG verwendet einen festen, vom Benutzer angegebenen u . **Je nachdem, ob jedes Ziel maximiert oder minimiert werden soll, wählen wir einen Wert, der optimal oder hoch/niedrig genug ist, um unerreichbar zu sein.**

Um **INFPROG auf ein Optimierungsproblem anzuwenden, müssen wir daher** auch einen **Hyperparameter ÿ** zur Verfügung stellen , **der die Skalarisierung steuert: eine Liste von Unterlisten von Paaren. Jedes Paar ist ein utopischer Wert, der einen gewünschten Nutzen plus ein Gewicht ausdrückt, und jede Unterliste entspricht einem Agenten und enthält ein Paar für jeden Nutzen des Agenten. Wir werden immer Gewichte wählen, die sich für jeden Agenten zu 1 summieren, obwohl dies nicht unbedingt erforderlich ist. Die Verwendung von ÿ wird unten anhand von Beispielen veranschaulicht.**

2.7. Eine intuitive Erklärung

Um dem Leser zu helfen, geben wir nun eine intuitive Erklärung, wie der Algorithmus funktioniert. Die äußere Schleife des Algorithmus führt E Episoden aus **(ein Begriff aus RL), wobei** E **ein vom Benutzer gewählter ganzzahliger Hyperparameter ist. Jede Episode durchläuft die Variablen in der durch die Liste ÿv1, . . . , vnÿ** angegebenen Reihenfolge **und weist jeder einen Wert zu**

Einer Entscheidungsvariablen wird ein Wert wie im SARSA-Algorithmus zugewiesen: Während der frühen Episoden erfolgt die Zuweisung weitgehend zufällig, in späteren Episoden werden die Werte jedoch gieriger zugewiesen, um die geschätzte erwartete Belohnung zu maximieren **(ein weiterer RL-Begriff, der dem** Nutzen **in Einflussdiagrammen und dem** Zielfunktionswert **bei der allgemeinen Optimierung entspricht).**
Der Grad der Gier wird durch den Parameter *ÿ* gesteuert, der von 1 (völlig **zufällig) in der ersten Episode auf 0 (völlig gierig) in der letzten Episode abfällt. In RL-Algorithmen führt diese Strategie theoretisch zu einer optimalen Richtlinie.**

Einer Zufallsvariablen wird durch Stichprobennahme ein Wert zugewiesen, sodass eine Episode SARSA mit Stichprobennahme verschachtelt. In RL-Begriffen ist die Zuweisung der Zufallsvariablen einfach Teil der Umgebung, in der der Agent arbeitet. Im Sonderfall, in dem alle Variablen Zufallsvariablen sind , ist das IP ein Bayes-Netzwerk und eine Episode reduziert sich auf einen MCMC-Sweep durch die Variablen.

Am Ende einer Episode wird für jeden Agenten eine Belohnung berechnet und wie bei SARSA für alle früheren Zustände gesichert , mit der kleinen Komplikation, dass in unserer Multi-Agenten-Version jede Belohnung für den entsprechenden Agenten gesichert werden muss.

Die Wahl des tabellarischen SARSA-Algorithmus mit unendlichen Schritten war weitgehend willkürlich und hat sowohl Vor- als auch Nachteile. Ein On-Policy-Algorithmus wie SARSA gilt als konsistenter und stabiler als ein Off-Policy-Algorithmus wie Q-Learning, ist aber auch langsamer und weniger effizient. Die Wahl eines tabellarischen Algorithmus fiel aufgrund seiner einfachen Implementierung. Die Wahl der unendlichen Schritte entspricht der Einstellung *von ÿ* = **1 in einer RL-Berechtigungsspur, wodurch es sich eher um eine Monte-Carlo-Methode als um eine Methode der zeitlichen Differenz handelt. Erstere gelten bei unbeobachteten Variablen als robuster, da sie nicht auf der Markov-Eigenschaft basieren.**

Machine Translated by Google

Die Beschränkung auf Belohnungen, die nur am Ende einer Episode auftreten, wurde entwickelt, um die Implementierung und Benutzeroberfläche zu vereinfachen. In einigen Fällen wäre es vorzuziehen, Zwischenbelohnungen zuzulassen, wenn diese im Problem natürlich auftreten. Dies würde jedoch erfordern, dass der Benutzer mehrere Codeteile schreibt und angibt, wann jed

Für unseren Forschungsprototyp haben wir den einfacheren Weg gewählt.

Was die Notwendigkeit für den Benutzer betrifft, programmierbare Hilfsfunktionen bereitzustellen: Obwohl dies weniger benutzerfreundlich erscheinen mag als eine Art Spezifikationssprache, ist es äußerst flexibel. Wir stellen fest, dass im Bereich der probabilistischen Programmierung ein ähnlicher Ansatz verfolgt wird **[29,30].**

3. Anwendungen

In diesem Abschnitt nehmen wir kleine Probleme aus einer Reihe von Studien in der Literatur, modellieren sie als IPs und lösen sie mit INFPROG. Wir werden unsere Methode nicht hinsichtlich der Effizienz mit anderen vergleichen, da dies nicht das Ziel des Artikels ist. Aus demselben Grund berichten wir nur über wenige Laufzeiten, obwohl diese recht kurz sind – normalerweise einige Sekunden und höchstens einige Minuten. Tatsächlich erwarten wir nicht, dass sie bei einer bestimmten Problemklasse konkurrenzfähig ist, obwohl sie als RL-basierte Methode bei Anwendungen aus der RL-Literatur einigermaßen gut funktionieren sollte . Unser Ziel hier ist nur zu zeigen, dass ein einziger Löser eine Vielzahl von Optimierungsproblemen lösen kann und damit eine Lücke in der Optimierungstechnologie schließt. Wir beabsichtigen, in zukünftigen Arbeiten schnellere, skalierbarere und benutzerfreundlichere IP-Löser zu implementieren, und wir hoffen, dass auch

3.1. Constraint-Programmierung

Zunächst betrachten wir ein „einfaches“ Optimierungsproblem: ein Agent und ein Ziel. Wir nehmen ein bekanntes Constraint-Satisfaction-Problem **(CSP), das als Acht-Damen-Problem bekannt ist: Platzieren Sie acht Schachdamen auf einem Standard-8 × 8-Schachbrett so, dass sich keine zwei Damen gegenseitig angreifen (indem sie sich in derselben Reihe, Spalte oder Diagonale befinden). Dies ist ein beliebtes Problem in der Constraint-Programmierung [31], und das kleinere Vier-Damen-Problem i Das erste Beispiel ist eine Lösung, da keine zwei Damen in derselben Reihe, Spalte oder Diagonale stehen. Das zweite Beispiel ist keine Lösung, da es drei Einschränkungen verletzt: Die Damen in den ersten beiden Reihen stehen in derselben Spalte, die in den letzten beiden Reihen liegen auf derselben Diagonale und die in der ersten und dritten Reihe liegen auf einer anderen Diagonale.**

Wir behandeln acht Damen als Max-CSP- **Problem, bei dem das Ziel darin besteht, die Anzahl der erfüllten Einschränkungen zu maximieren (in diesem Fall die Anzahl der Einschränkungsverletzungen auf 0 zu minimieren). Wir werden zwei mögliche IP-Modelle betrachten.**

	Q		
			Q
Q			
		Q	

eine Lösung

	Q		
	Q		
			Q
		Q	

eine Nicht-Lösung

Abbildung 1. Das 4-Damen-Problem.

3.1.1. Ein spärliches

Modell Das Problem kann wie folgt modelliert werden: V = ÿv1, . . . , v8ÿ, **jedes** Di = **{1, . . . , 8}, A** = ÿa, . . . , aÿ **(alle Variablen gehören zum selben Agenten a), U** = ÿÿviolÿÿ **wobei** viol **zählt Verletzungen von Einschränkungen:**

$$\ddot{y}_{\substack{8 \\ \text{ich ÿ1}}} \ddot{y} \text{ vi = vj ÿ |i ÿ j|} = |\text{vi ÿ vj}| \text{ i=2 j=1}$$

· ist die Iverson-Klammer , **die den Wert 1 annimmt, wenn ihr Argument wahr ist, und 0, wenn es falsch ist. P ist die leere Funktion (es gibt keine Wahrscheinlichkeitstabellen, da es keine Zufallsvariablen gibt) und L** = **O** = ÿ. **Der Nutzen-Hyperparameter ist ÿ** = ÿÿÿ0, 1ÿÿÿ: **ein Agent mit einem Nutzen , dessen utopischer Punkt 0 und zugehöriges Gewicht 1 ist.**

Machine Translated by Google

Obwohl wir die Laufzeiten im Allgemeinen nicht angeben, könnte ein Beispiel für den Leser interessant sein . Unser Solver ist in C implementiert und wird auf einer Intel(R) Core(TM) i5-6500 CPU @ 3,20 GHz mit 8 GB System-RAM (Intel, Santa Clara, CA, USA) ausgeführt. Bei 107 Episoden benötigt der Solver 10,3 s pro Durchlauf und hat in 100 Durchläufen 70 Mal eine korrekte Lösung gefunden. Die anderen 30 Male enthielt die Lösung eine Einschränkungsverletzung, was zeigt, dass INFPROG in lokalen Optima gefangen sein kann. Er ist auch mit nur 106 Episoden recht erfolgreich und findet 61 korrekte Lösungen.

Dieses Ergebnis ist nicht konkurrenzfähig mit Methoden wie Constraint-Programmierung, ganzzahliger Programmierung oder lokaler Suche, die das Problem alle schneller und zuverlässiger lösen können. Aber wie bereits erwähnt, ist unser Ziel Flexibilität bei einer breiten Palette von Problemen, nicht Effizienz bei einer bestimmten Problemklasse.

3.1.2. Ein dichtes Modell

Wir haben das vorherige Modell als spärlich bezeichnet , **weil es nur wenige Links (0) hatte. Als alternatives** dichtes **Modell können wir Links zum IP von jeder Entscheidungsvariable zu jeder früheren hinzufügen: L** = {vi **ÿ** vj ‖i < **j}. Diese sind nicht logisch notwendig, liefern aber mehr Informationen zu den Entscheidungsvariablen. Mit dem dichten IP haben wir bei acht Königinnen mit nur 105 Episoden 100 % Erfolg erzielt, und selbst mit nur 30.000 Episoden war der Erfolg 69 %. Dies deutet darauf hin, dass die Leistung verbessert wird, wenn Entscheidungen für alle nachfolgenden Entscheidungen sichtbar gemacht werden .** Das Hinzufügen dieser Links erzeugt jedoch eine Anzahl von Zuständen, die **exponentiell zur Anzahl der Variablen sind ,** was viele Hash-Kollisionen in **INFPROG verursacht, was wiederum die Leistung beeinträchtigen kann.**

Dieses Phänomen ist im RL wohlbekannt. Betrachten wir als Beispiel das Problem der Aufzugssteuerung, bei dem wir eine Reihe von Aufzügen steuern müssen, um die erwarteten Wartezeiten zu minimieren. Selbst wenn wir das Problem auf diskrete Zeit beschränken, hat es aufgrund der vielen möglichen Kombinationen von Aufzugspositionen, Bewegungsrichtungen und gedrückten Tasten eine große Anzahl von Zuständen. Im Prinzip wäre es am besten, jeden Zustand separat zu behandeln, und die überlegene Leistung unseres dichten Modells unterstützt diese Ansicht, aber die kombinatorische Explosion macht sie fü

Eine Möglichkeit, die Explosion zu vermeiden, besteht darin, jeden Aufzug in einem verteilten RL- Ansatz **unabhängig zu behandeln – siehe beispielsweise [32]. Für jeden Aufzug gibt es einen Entscheidungsagenten, und sie kommunizieren nicht miteinander, aber sie haben ein gemeinsames Ziel und lernen indirekt, zusammenzuarbeiten. Eine aktuelle Übersicht über verteiltes RL mit Anwendungen findet sich in [33]. Unser spärliches IP funktioniert auf die gleiche Weise, obwohl wir nur einen Agenten verwendet haben: Wir könnten stattdessen für jede Variable einen separaten Agenten verwenden, aber das macht keinen Unterschied, da sie dasselbe Ziel haben.**

Durch die Kontrolle der Verbindungen zwischen Variablen kann INFPROG problemlos **vollständig, teilweise und nicht verteilte RL-Methoden emulieren .** Für nachfolgende Probleme werden wir **eine Mischung aus spärlichen und dichten Modellen verwenden.**

3.2. Bayesianische Netze

Von einem Problem mit ausschließlich Entscheidungsvariablen gelangen wir zu einem Problem mit ausschließlich Zufallsvariablen: Pearls Alarmbeispiel [34]. Dies ist ein Beispiel für probabilistische Inferenz, **wie sie im Bereich der probabilistischen Programmierung durchgeführt wird: die Ableitung einer bedingten Wahrscheinlichkeit aus einem probabilistischen Programm.**

In diesem kleinen Problem hat ein Haus einen Alarm, der durch ein Erdbeben oder einen Einbruch ausgelöst werden kann, jeweils mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Wir haben auch bedingte Wahrscheinlichkeiten für den Alarm unter verschiedenen Umständen: wenn ein Einbruch stattfindet/nicht stattfindet und wenn ein Erdbeben stattfindet/nicht stattfindet . Wenn der Alarm aktiviert wurde, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbruch stattgefunden hat? Die Antwort beeinflusst unser Handeln.

Machine Translated by Google

Wir können dies als IP modellieren. Die Variablen sind V = {Einbruch, Erdbeben, Alarm}, **die Domänen D sind alle** {ja, **nein}, die Agenten A sind alle Zufall, die Links sind L** = {Einbruch **ÿ** Alarm, Erdbeben **ÿ** Alarm} **wie im Bayesschen Netzwerk, die Wahrscheinlichkeiten P sind:**

Pr[Einbruch = ja] = **0,7**
Pr[Erdbeben = ja] = **0,2**
Pr[Alarm = ja|Einbruch = ja,Erdbeben = ja] = **0,9** Pr[Alarm = ja|
Einbruch = ja,Erdbeben = nein] = **0,8** Pr[Alarm = ja|Einbruch =
nein,Erdbeben = ja] = **0,1** Pr[Alarm = ja|Einbruch =
nein,Erdbeben = nein] = **0,2**

Es gibt eine Beobachtung O = {alarm = ja} **und der Nutzenvektor ist**

U = ÿÿErdbeben = jaÿÿ

Die Aufgabe besteht daher darin, die bedingte Wahrscheinlichkeit Pr[Erdbeben = ja|Alarm = ja] zu berechnen. **Wir können dies als Nutzen betrachten, obwohl der einzige Akteur der Zufall ist, sodass wir nicht versuchen, ihn durch Entscheidungen zu optimieren. Es gibt keine Entscheidungsträger, daher ist der Nutzen-Hyperparameter ÿ** = ÿÿÿÿÿ**. INFPROG wendet Gibbs-Stichproben an und findet einen erwarteten „Nutzen“ von ungefähr 0,23, was die richtige Wahrscheinlichkeit ist.**

In den folgenden Beispielen werden wir keine Beobachtungen verwenden, da sie bei den meisten Optimierungsproblemen nicht vorkommen. Sie können jedoch verwendet werden, um den Wert von Informationen zu berechnen **und zu bestimmen, welche Variablen die Unsicherheit einer interessierenden Variable am wa**

3.3. Einflussdiagramme

Wir wenden uns nun Problemen zu, die sowohl Entscheidungs- als auch Zufallsvariablen enthalten. Einflussdiagramme [35] sind beliebte grafische Modelle in der Entscheidungsanalyse und können wichtige Beziehungen zwischen Unsicherheiten, Entscheidungen und Werten modellieren. Sie wurden ursprünglich als Werkzeuge zur Formulierung von Problemen konzipiert , haben sich aber auch als effiziente Rechenwerkzeuge erwiesen. Sie haben viele Anwendungen, darunter medizinische Diagnose [36], Cybersicherheit [37] und Risikomanagement [38].

Eine ID ist ein gerichteter azyklischer Graph mit drei Knotentypen: Entscheidungsknoten **entsprechen Entscheidungsvariablen und werden als Rechtecke dargestellt;** Zufallsknoten **(oder** Unsicherheitsknoten) **entsprechen** Zufallsvariablen **und werden als Ovale dargestellt;** Wertknoten **entsprechen Präferenzen oder Zielen und werden als abgerundete Rechtecke oder Polygone wie Rauten dargestellt.**

Jede Zufallsvariable ist mit einer bedingten Wahrscheinlichkeitstabelle verknüpft, die ihre Verteilung für jede Wertekombination ihrer übergeordneten Variablen im Diagramm angibt. Jede Entscheidungsvariable hat auch einen Satz übergeordneter Variablen im Diagramm und ihr Wert hängt nur von deren Werten ab. Die Entscheidungsvariablen werden normalerweise als zeitlich geordnet betrachtet und Zufallsvariablen werden an verschiedenen Punkten in der Anordnung beobachtet. Eine Standardannahme der ID ist Nicht-Vergessen, **was bedeutet, dass die übergeordneten Variablen einer Entscheidungsvariablen alle ihre Vorgänger im Diagramm sind: Daher kann eine Entscheidung von allem abhängen, was zuvor geschehen ist. Alle Variablen sind diskret.**

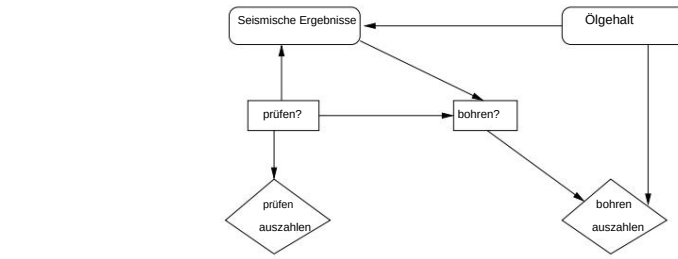
Jeder Werteknoten ist mit einer Tabelle verknüpft, die den Nutzen **(eine reelle Zahl) jeder Kombination von Werten der übergeordneten Variablen zeigt. Eine** Entscheidungsrichtlinie **ist eine Regel für jede Entscheidungsvariable, die angibt, wie ihr Wert aus denen ihrer übergeordneten Variablen ausgewählt werden soll. Jede Richtlinie hat einen** erwarteten Gesamtnutzen **(dies ist eine Erwartung aufgrund der Zufallsvariablen) und** das Lösen **einer ID bedeutet das Berechnen ihrer optimalen Richtlinie, die den maximalen erwart**

Es gibt mehrere Methoden zur Lösung von IDs. Einige sind exakt und basieren auf Variableneliminierung [39–43], während andere approximativ sind [44–48]. Abgesehen von unserer Arbeit ([16,17] und diesem Artikel) sind uns jedoch keine anderen Anwendungen von RL zur Lösung von IDs bekannt, was überraschend erscheint, da sowohl IDs als auch RL zur Modellierung und Lösung sequentieller Entsch Die Hauptverbindung, die normalerweise zwischen den beiden hergestellt wird, besteht darin, dass IDs Probleme modellieren können, die durch RL angegangen werden können. Beispielsweise wurden kausale IDs verwendet, um Sicherheitsrahmen für künstliche allgemeine Intelligenz zu modellieren, die häufig RL verwenden [49]. Unser RL-basierter Ans

Machine Translated by Google

zwischen exakten und approximativen Methoden: Bei ausreichendem Speicher und ausreichender Trainingszeit hat es das Potenzial, eine optimale Lösung zu finden, aber es gibt keine Garantie dafür. Wir erwarten nicht, Es ist so effizient wie spezialisierte Algorithmen, kann aber IDs mit Erweiterungen wie begrenzter Speicher (siehe Abschnitt 3.5), mehrere Agenten und mehrere Ziele. Darüber hinaus Die jüngsten Erfolge von Deep RL machen seine Anwendung auf große IDs zu einer vielversprechenden Forschungsrichtung. In diesem Artikel beschränken wir uns jedoch darauf zu zeigen, dass RL tatsächlich IDs lösen kann.

Wir verwenden die Oil Wildcatter ID aus Abbildung 2, ein bekanntes Problem, das in [50]. Ein Ölsucher muss entscheiden, ob er an einer bestimmten Stelle nach Öl bohren möchte oder nicht. Vor dem Bohren können sie einen seismischen Test durchführen, der dabei hilft, die geologischen Struktur der Site. Das Testergebnis kann geschlossen **(was auf signifikantes Öl hinweist),** offen **(was auf etwas Öl) oder** diffus **(wahrscheinlich kein Öl). Der spezielle Wert** notest **bedeutet, dass die Testergebnisse nicht verfügbar, wenn der seismische Test nicht durchgeführt wird. Die** Testentscheidung **hängt nicht von andere Variable, aber die** Bohrentscheidung **hängt davon ab, ob ein Test durchgeführt wurde, und wenn ja, von seiner Ergebnis. Die** Ölvariable **ist nicht beobachtbar, daher hängt keine Entscheidung davon ab (das unterscheidet sich von** Vergessen **seines Wertes, der in Abschnitt 3.5 behandelt wird).**



Inhalt	Pr[O]		
	trocknen	nass	einweichen
	0,5	0,3	0,2

Testauszahlung U1(T)	
prüfen	
ja nein	ÿ10
	0

Seismische Ergebnisse	Inhalt	Pr[S|O, T] Test	geschlossen	offen	diffus	notest
trocken	Ja	0,1	0,3	0,6	0	
trocken	NEIN	0	0	0	1	
nass	Ja	0,3	0,4	0,3	0	
nass	NEIN	0	0	0	1	
einweichen	Ja	0,5	0,4	0,1	0	
einweichen	NEIN	0	0	0	1	

Drill-Auszahlung	sinhalt-Drill	U2(O, D)
trocken	Ja	ÿ70
trocken	NEIN	0
nass	Ja	50
nass	NEIN	0
einweichen	Ja	200
einweichen	NEIN	0

Abbildung 2. Diagramm zum Einfluss von Öl-Wildcatter.

Ein IP-Modell sieht wie folgt aus. Die Variablen sind V = **ÿÖl,Test,Seismik,** Bohrungÿ, **die Domänen Sind**

D = ÿ{trocken, nass, eingeweicht}, {ja, **nein},** {geschlossen, offen, diffus, nicht bekannt}, {ja, **nein}ÿ**

die Agenten sind A = **ÿChance, Unternehmen, Chance, Unternehmenÿ, die Links sind L** = {drill **ÿ** seismische, Bohr- **ÿ** Test} **(ID-Links zu Versorgungseinrichtungen sind nicht Teil eines IP), es gibt keine Beobachtungen (O** = **ÿ), der Nutzenvektor ist U** = **ÿÿt** + **dÿÿ, wobei** t **die Testauszahlung und** d **die Übung ist Auszahlung, und die Wahrscheinlichkeiten sind wie in Abbildung 2 dargestellt. Der Nutzen-Hyperparameter ist ÿ** = **ÿÿÿ1000, 1ÿÿÿ: ein Agent mit einem zu maximierenden Ziel.**

Die bekannte optimale Strategie unter Berücksichtigung der oben genannten Nutzen und Wahrscheinlichkeiten lautet wie folgt: Führen Sie den Erdbebentest durch und bohren Sie, wenn das Testergebnis offen oder geschlossen ist. INFPROG findet dies Lösung und gibt eine gute Annäherung an den korrekten erwarteten Nutzen an: 22,5.

3.4. Einflussdiagramme mit mehreren Zielen

Als erstes Beispiel für eine Mehrzieloptimierung verwenden wir einen bi-objektiven Öl-Wildcatter ID aus [12]. Neben der Maximierung des Nutzens besteht das Ziel darin, die Umweltauswirkungen zu minimieren Schaden. Das IP ist wie in Abschnitt 3.3, mit Ausnahme zusätzlicher Auszahlungen: Der Nutzen des Testens ist jetzt (ÿ10, 10), während der Nutzen des Bohrens (ÿ70, 18), **(50,** 12) **und (200,** 8) **für trockene, nasse,**

Machine Translated by Google

und soak: In jedem Fall ist der erste Wert der ursprüngliche Nutzen, während sich der zweite **Wert auf den neuen Nutzen bezieht. Statt einer optimalen Lösung gibt es vier Pareto-optimale Lösungen mit jeweils zwei Nutzenwerten: (1) testen, dann bohren, wenn das Ergebnis geschlossen oder offen ist, mit Nutzen (22,5, 17,56); (2) nicht testen, sondern bohren, mit Nutzen (20, 14,2); (3) testen, dann bohren, wenn das Ergebnis geschlossen ist, mit Nutzen (11, 12,78); (4) nicht testen oder bohr**

Die Nutzen sind nun U = ÿÿÿp, dÿÿÿ, **wobei** p **wie zuvor der Gewinn und** d **der Umweltschaden ist. Mit einem Nutzen-Hyperparameter ÿ** = ÿÿÿ**1000, 0,55ÿ,ÿÿ1000, 0,45ÿÿÿ** hat **INFPROG in mehreren Durchläufen die Strategien (1), (2) und (4) gefunden, aber nicht (3).**

3.5. Einflussdiagramme mit begrenztem Speicher

Standard-IDs sind für Situationen konzipiert, in denen ein einzelner, nicht vergesslicher Agent beteiligt ist. Diagramme mit begrenztem Gedächtnis (LIMIDs) [14] sind Verallgemeinerungen von IDs, die Entscheidungsfindung mit begrenzten Informationen und gleichzeitige Entscheidungen ermöglichen und viel kleinere Richtlinien haben können. Sie lockern die Regularitäts- (totale Variablenordnung) und Nicht-Vergessens -Annahmen von IDs. LIMIDs gelten als schwieriger optimal zu lösen als IDs. Wir handhaben die Eigenschaft des begrenzten Gedächtnisses auf einfache Weise: Während des Zobrist-Hashings **enthält die Menge** S **nur Zuweisungen, die für die Entscheidungsvariable sichtbar sind (wie durch die**

Als Beispiel verwenden wir ein Schweinezuchtproblem aus [14]. Ein Schweinezüchter züchtet Schweine vier Monate lang und verkauft sie dann. Während dieser Zeit kann das Schwein eine Krankheit entwickeln, muss es aber nicht. Wenn es die Krankheit hat, wenn es verkauft werden muss, dann muss es zum Schlachten verkauft werden und sein erwarteter Marktpreis beträgt 300. Wenn es krankheitsfrei ist, dann beträgt Einmal im Monat testet ein Tierarzt das Schwein auf die Krankheit. Wenn es krank ist, zeigt der Test dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,80 an, und wenn es gesund ist, zeigt der Test dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,90 an. Bei jedem monatlichen Besuch behandelt der Chirurg das Schwein, muss es aber nicht, und die Behandlung kostet 100. Ein Schwein hat die Krankheit im ersten Monat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,10. Ein gesundes Schwein entwickelt die Krankheit im nächsten Monat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,20 ohne Behandlung und 0,10 mit Behandlung. Ein krankes Schwein bleibt im nächsten Monat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,90 ohne Behandlung und 0,50 mit Behan

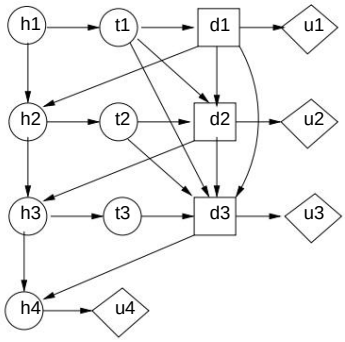


Abbildung 3. Einflussdiagramm zur Schweinezucht.

Ein IP zur Modellierung dieses Problems sieht wie folgt aus. Die Variablen sind V = ÿhi , ti , di , ... , **h4ÿ** (i = **1, 2, 3), die Domänen D sind** {gesund, ungesund} **für** hi , {pos, neg} **für** ti **und** {behandeln, verlassen} **für** di , **es gibt einen Agenten in A , den wir Züchter nennen, die Links sind L** = {hi **ÿ** hi+1 , hi **ÿ** tj(i < j), ti **ÿ** dj(i **ÿ** j), di **ÿ hi+1}, P enthält die gezeigten Wahrscheinlichkeiten, U** = ÿÿu1 + **u2** + **u3** + **u4ÿÿ und O** = **ÿ.**

Unter Verwendung eines Nutzen-Hyperparameters ÿ = ÿÿÿ**1000, 1ÿÿÿ** findet **INFPROG fast immer die optimale Strategie mit einem erwarteten Nutzen von ungefähr 727: Ignorieren Sie den ersten Test und behandeln Sie nicht, befolgen Sie dann die Ergebnisse der beiden anderen Tests (behandeln Sie, wenn positiv). Wie in [16] angemerkt,** wird in **[14] eine andere Strategie angegeben : Behandeln Sie im dritten Monat, wenn die Tests 1 und 2 oder 3 positiv sind. Wir stellen fest, dass ihre Strategie einen erwarteten Nutzen von 725,884 hat, während unsere optimal ist. Sie berichten über denselben erwarteten Nutzen wie wir, daher gl**

Machine Translated by Google

3.6. Mehrstufige stochastische Programmierung

Die stochastische Programmierung [51] modelliert und löst Probleme mit Entscheidungs- und Zufallsvariablen, wobei die Verteilungen der letzteren bekannt sind. Probleme können ein oder mehrere Phasen haben: In jeder Phase werden Entscheidungen getroffen und dann werden Zufallsvariablen beobachtet. Eine Lösung ist keine einfache Zuweisung von Variablen, sondern eine Strategie, die uns sagt, wie wir Entscheidungen unter Berücksichtigung der Zuweisungen zu Variablen in früheren Phasen treffen sollen. Die stochastische Programmierung stammt aus den 1950er Jahren und ist heute ein wichtiges Forschungsgebiet in der mathematischen Programmierung und im Operations Research.

Wir zeigen nun, dass diskrete stochastische Programme als IPs modelliert und gelöst werden können. Wir verwenden ein zweistufiges stochastisches Programm aus [52]:

max z = **1,5x1** + 4x2 + E[Q(x1, x2)], **wobei**
Q(x1, **x2) der Wert von max** 16y1 + 19y2
+ 23y3 + 28y4 ist , **sodass** 2y1 + 3y2 + 4y3 + 5y4 **ÿ ÿ1**
ÿ x1 6y1 + **y2** + 3y3 + 2y4 **ÿ ÿ2 ÿ x2 ,**
wobei 0 ÿ x1, x2 ÿ 5, yi **ÿ {0, 1}** (i = **1, 2,**
3, 4) **ÿ1, ÿ2 gleichmäßig verteilt auf {5, 5,5, . . . , 15}**

Eine Lösung für dieses Problem besteht aus festen Zuweisungen für x1, x2 und Zuweisungen für yi , die von den zufälligen *ÿ* **-Werten abhängen. Die optimale Strategie hat ein Ziel von 61,32.**

Wir modellieren das Problem als IP wie folgt. Die Variablen sind

$$\mathbf{V} = \ddot{y}x1, x2, \ddot{y}1, \ddot{y}2, y1, y2, y3, y4\ddot{y}$$

die Agenten sind

$$\mathbf{A} = \ddot{y}opt, opt, Chance, Chance, opt, opt, opt, opt\ddot{y}$$

(wir wählen den Namen opt für den nicht zufälligen Agenten), die Domänen sind

$$\mathbf{D} = \ddot{y}D1, D1, D2, D2, D3, D3, D3, D3\ddot{y}$$

wobei D1 = **{0, . . . , 5}, D2** = **{5, 5,5, . . . , 15} und D3** = **{0, 1}, P den** ÿi **-Domänenwerten gleiche Wahrscheinlichkeiten zuweist** und **O** = **ÿ.**

Wie in Abschnitt 3.1 modellieren wir Einschränkungen, indem wir als zusätzliches Ziel die Minimierung ihrer Verletzungen festlegen und eine hohe Gewichtung wählen, um die Durchführbarkeit zu priorisieren. In diesem Problem haben wir jedoch auch ein Ziel, daher verwenden wir zwei Nutzen: den ersten, um die Anzahl der Einschränkungsverletzungen auf 0 zu minimieren, und den zweiten, um z zu maximieren. Daher gilt U = ÿÿviol, **zÿÿ. Der Nutzen- Hyperparameter ist ÿ** = **ÿÿÿÿ10, 0,99ÿ,ÿ100, 0,01ÿÿÿ.**

3.6.1. Ein spärliches Modell

In diesem IP lauten die Links L = *{ÿi* **ÿ** yj |ÿi, **j}. In mehreren Durchläufen mit bis zu 107 Episoden** hat **INFPROG Richtlinien mit einem erwarteten Nutzen von ungefähr 55 gefunden. Das ist ziemlich gut, aber weniger als das bekannte Optimum von 61,32. Eine Erhöhung auf 109 Episoden machte keinen Unterschied.**

3.6.2. Ein dichtes Modell

Um die Ergebnisse zu verbessern, haben wir der spärlichen IP die folgenden Links hinzugefügt: x1 ÿ x2, xi **ÿ** yj (ÿi, **j} und** yi **ÿ** yj (i < j). **In mehreren Durchläufen von 108 Episoden** hat **INFPROG Richtlinien mit einer erwarteten Belohnung von ungefähr 60 gefunden, was nahe am Optimum liegt.**

3.7. Zufallsbeschränkte Programmierung

Eine Zufalls- **(oder** Wahrscheinlichkeits-) Beschränkung ist eine Beschränkung, die mit einer bestimmten **Wahrscheinlichkeitsschwelle erfüllt werden muss :** Pr[C(x,r)] **ÿ** *ÿ* **für eine Beschränkung** C **auf Entscheidungsvariablen** x **und Zufallsvariablen r. Zufallsbeschränkte Programmierung [53] ist eine Methode zur Optimierung unter Unsicherheit und hat viele Anwendungen, da sie eine natürliche Art der Modellierung von Unsicherheit ist. Zufallsbeschränkungen sind normalerweise Ungleichungen, aber wir lassen jede Form von Bes**

Machine Translated by Google

wurden auch im Bereich des sicheren (oder eingeschränkten) RL unter Verwendung verschiedener Ansätze verwendet [54,55], und unser Ansatz ist mit dem von [3] verwandt. Sie scheinen nicht zu IDs hinzugefügt worden zu se

Wir modellieren Zufallsbeschränkungen, indem wir für jede ein neues Ziel hinzufügen, mit einer Belohnung von 1 für die Erfüllung und 0 für die Verletzung, und den utopischen Wert für dieses Ziel auf die gewünschte Wahrscheinlichkeitsschwelle setzen. Das Gewicht, das dem Ziel beigemessen wird, sollte hoch sein.

Beispielsweise modifizieren wir das stochastische Programm aus Abschnitt 3.6, indem wir Wahrscheinlichkeiten zu den beiden harten Einschränkungen:

Pr[2y1 + 3y2 + 4y3 + 5y4 **ÿ ÿ1 ÿ x1]** = **0,7** (a)
Pr[6y1 + **y2** + 3y3 + 2y4 **ÿ ÿ2 ÿ x2]** = **0,9** (b)

Beachten Sie, dass die Zufallsbeschränkungen die Form Pr[·] = p haben **und nicht die übliche** Form Pr[·] **ÿ p.** Aufgrund seines mehrzieligen Ansatzes kann **INFPROG die Wahrscheinlichkeitsschwellen nicht garantiert erfüllen: Anstatt die Erfüllung einer Zufallsbeschränkung zu erzwingen, sodass sie eine Schwellenwahrscheinlichkeit überschreitet, versucht es, die Schwelle in einem Kompromiss mit anderen Zielen zu erreichen. Es kann jedoch als exploratives Werkzeug verwendet werden, um eine Richtlinie mit den gewünschten Eigenschaften zu finden, und der Benutzer kann die Schwellenwerte iterativ erhöhen.**

Um dieses Problem zu modellieren, modifizieren wir das dichte Modell aus Abschnitt 3.6 und fügen für jede Zufallsbeschränkung ein neues Ziel hinzu. Der Nutzenvektor ist nun U = ÿÿviola, violb , **zÿÿ. Der Nutzenhyperparameter ist**

ÿ = **ÿÿÿ0,7, 0,496ÿ,ÿ0,9, 0,496ÿ,ÿ100, 0,008ÿÿÿ**

Um dieses dreifache Ziel-IP zu lösen, haben wir mit verschiedenen Gewichtungen experimentiert und eine Reihe von Strategien mit unterschiedlichen Kompromissen zwischen den Zufallsbeschränkungen und dem ursprünglichen Ziel gefunden. Nicht alle Lösungen waren nützlich, aber mit den Gewichtungen (0,496, 0,496, 0,008) haben wir eine Strategie mit Zielen (0,74, 0,95, 71) gefunden , **die die Anforderungen erfüllt. Durch die Lockerung der harten Beschränkungen auf Zufallsbeschränkungen konnten wir das Ziel** z **von 60**

3.8. Mehrstufige Programmierung

Viele Probleme in Wirtschaft, Diplomatie, Krieg, Politik, Industrie, Gaming und anderen Bereichen betreffen mehrere Agenten, die Teil der Umgebung des jeweils anderen sind. Multi-Agent-RL kann auf diese Probleme angewendet werden, ebenso wie verschiedene Formen der ID: Bi-Agent-IDs [7], Multi-Agent- IDs [8], spieltheoriebasierte IDs [10], Netzwerke von IDs [6] und interakt LIMIDs können mehrere Agenten modellieren, aber nur den kooperativen Fall, in dem sie alle dasselbe Ziel haben.

Der häufigste Fall ist ein Bi-Level-Programm **oder** ein Stackelberg-Spiel. **Diese beinhalten normalerweise kontinuierliche Variablen und es wurde relativ wenig Arbeit an diskreten Bi-Level-Programmen geleistet [56], sodass neue Methoden von Interesse sind. Als noch anspruchsvollerer Fall verwenden wir jedoch ein diskretes** Tri-Level-Programm, **das in mindestens zwei Veröffentlichungen untersucht wurde [57,58] und in Abbildu**

maxx1 z1 = **(x1** + x2 + **2x3** + 4)(ÿx1 ÿ x2 + x3 + **2x4** + 1)
wobei x2 löst
maxx2 z2 = **2x2** + x3 + **3x4**
wobei x3, x3, x3, x3, x3, x3 lösen, für gegebene x1, x2
maxx3...x8 z3 = $\frac{2x1+3x2+2x3ÿ3x4}{5x1+11x2+x5+29}$
vorbehaltlich
ÿ3x1 + **7x2** + x3 + x5 = 10 **14x1** + **4x2** + x6 = 6 x1 + x2 + x3 ÿ x4 +
x7 = 5 **2x1** + x2 + **2x4** + x8 = 8 5 ÿ x3 ÿ 20 4 ÿ x4 ÿ 30 0 ÿ x1 ÿ 5 0 ÿ x2 ÿ
0 ÿ x8 ÿ 20 2 1 ÿ x5 ÿ 20 0 ÿ x6 ÿ 30 0 ÿ x7 ÿ 15

Abbildung 4. Ein dreistufiges nichtlineares Programm.

Dreistufige Programme wurden verwendet, um Probleme in den Bereichen Supply Chain Management, Netzwerkverteidigung, Planung, Logistik und Wirtschaft zu modellieren. Sie umfassen drei Agenten: Der erste ist der Leiter der obersten Ebene, **der zweite ist der (mittlere) Gefolgsmann und der dritte ist der** (unterste) **Gefolgsmann. Sie sind hierarchisch organisiert: Der Leiter trifft zuerst Entscheidungen,**

Machine Translated by Google

Der Anhänger der mittleren Ebene reagiert, dann reagiert der Anhänger der unteren Ebene. Eine Übersicht über die mehrstufige Programmierung findet sich in [59], einschließlich eines Abschnitts über den dreistufigen Fall. Dezentralisierte Entscheidungsfindungsprobleme in einem hierarchischen Managementsystem umfassen oft mehr als zwei Ebenen. Als andere Anwendung erwähnen wir [60] , wo die dreistufige Programmierung zur Modellierung eines Verteidiger-Angreifer-Verteidiger-Problems bei der Verteidigung eines Stromnetzes verwendet wird.

Dieses Problem ist auch deshalb von Interesse, weil seine Ziele für den Anführer quadratisch, für den Anhänger auf mittlerer Ebene linear und für den Anhänger auf unterster Ebene fraktional sind. Nichtlineare Ziele wurden den IDs in **[5] unter Verwendung nichtlinearer optimaler Steuerungsnäherungen hinzugefügt .**

Wir modellieren das Problem mit dem folgenden IP. Die Variablen sind V = **ÿx1, . . . , x8ÿ, und ihre Domänen sind Bereiche ganzzahliger Werte D** = **ÿ0 ÿ 5, 0 ÿ 2, 5 ÿ 20, 4 ÿ 30, 1 ÿ 20, 0 ÿ 30, 0 ÿ 15, 0 ÿ 20ÿ. Die Agenten sind A** = **ÿAnführer, Mitte, unten, . . . , untenÿ: v1 ist eine Anführervariable der obersten Ebene, v2 ist eine Anführervariable der mittleren Ebene und v3–v8 sind Ve Die Verbindungen sind L** = {xi **ÿ** xj **|i < j} (ein dichtes Modell im Sinne von Abschnitt 3.1), die Nutzen sind**

U = ÿÿGamben, z1ÿ,ÿGamben, z2ÿ,ÿGamben, **z3ÿÿ**

und O = **ÿ. Das erste von allen Agenten verwendete Ziel ist die Anzahl der Constraint-Verletzungen, die 0 sein sollte: Die Constraints stellen sicher, dass jede Lösung auf** drei Ebenen durchführbar ist , **sodass alle Agenten für Verletzungen bestraft werden sollten (in diesem Problem darf kein Agent eine Entscheidung treffen , die zu einer Constraint-Verletzung führt). Die sekundären Ziele sind z1, z2, z3. Verwendung eines Nutzen- Hyperparameters**

ÿ = **ÿÿÿ0, 0.99999ÿ,ÿ1000, 0.00001ÿÿ,ÿÿ0, 0.999ÿ,ÿ100, 0.001ÿÿ,ÿÿ0, 0.99ÿ,ÿ1, 0.01ÿÿ)**

Dies ist der komplexeste ÿ- Wert, den wir verwendet haben, daher geben wir einige Erklärungen. Das dreistufige Problem wurde mit drei Agenten modelliert, von denen jeder zwei Ziele hat (eines für die Problemziele und eines, um die Erfüllung der Einschränkungen zu maximieren). Wir verwenden gewichtete metrische Skalarisierung, um dies auf drei Agenten mit jeweils einem Ziel zu reduzieren, sodass wir drei utopische Punkte angeben müssen (einen pro Agent). Jeder utopische Punkt hat zwei ideale Zielwerte und ein zugehöriges Gewicht für jeden Wert. So hat beispielsweise Agent 1 einen utopischen Punkt ÿ0, 0,99999ÿ mit zugehörigen Gewichten ÿ1000, 0,00001ÿ.

In wiederholten Durchläufen mit 107 Episoden findet **INFPROG zuverlässig die richtige Strategie (0, 0, 9, 4, 1, 6, 0, 0) mit Zielen ((0, 396),(0, 21),(0,** 0,2)). Wie in **[17] ausgeführt ,** ist **das erste Ziel in [58] mit 612 angegeben, aber es lässt sich nachweisen, dass die Lösung z1** = **396 ergibt. Die suboptimalen Lösungen, die es manchmal findet, erkennt man an ihren niedriger**

3.9. Bayesianische Spiele

Die Annahmen der klassischen Spieltheorie erfordern vollständige Informationen, was jedoch oft unrealistisch ist. Bayesianische Spiele waren eine Entwicklung, die unvollständige (private oder geheime) Informationen zuließ und gleichzeitig unendliche Berechnungen vermied [61]. Ein wichtiges Merkmal ist, dass ein Spieler einen „Typ“ haben kann, der den anderen Spielern unbekannt ist und seinen Geisteszustand darstellt.

Als einfaches Beispiel nehmen wir ein bekanntes Problem namens Sheriff-Dilemma. **Es gibt zwei Spieler: einen Sheriff und einen bewaffneten Verdächtigen. Der Verdächtige kann zwei Typen haben, einen Kriminellen oder einen Zivilisten, und nur er weiß, welcher Typ er ist. Der Sheriff muss wissen, ob er schießen soll, ohne den Typ des Verdächtigen zu kennen, während der Verdächtige diese Informationen verwenden darf . Auszahlungsmatrizen für die verschiedenen Möglichkeiten sind in Abbildung 5 dargestellt, wobei in jedem Fall die erste Abbildung eine Auszahlung für den Verdächtigen und die zw**

Wir können dies wie folgt als IP modellieren. Die Variablen sind V = ÿTyp, Verdächtiger, Sheriffÿ **mit Domänen**

D = ÿ{Verbrecher, Zivilist}, {schießen, nicht}, {schießen, nicht}ÿ

die Agenten sind A = **ÿZufall, Verdächtiger, Sheriffÿ. Die Links sind L** = {Typ **ÿ** Verdächtiger}, **sodass der Verdächtige, aber nicht der Sheriff, den Typ des Verdächtigen kennen kann. Die Typwahrscheinlichkeiten P sind** p **für** Pr[Krimineller] **und 1 ÿ** p **für** Pr[Zivilist], **die Nutzen sind U** = **ÿÿVerdächtigerÿ,ÿSheriffÿÿ und O** = **ÿ.**

Machine Translated by Google

Mithilfe eines Nutzen-Hyperparameters ÿ = ÿÿÿ100, 1ÿÿ, ÿÿ100, 1ÿÿÿ und 1000 Episoden findet **INF -PROG zuverlässig die richtige Strategie: Der Verdächtige schießt genau dann, wenn er ein Krimineller ist, und der Sheriff schießt genau dann, wenn p > dann sind mehr Episoden erforderlich, um den Stichprobenfehler zu verringern.**

	Sheriff	
Aktionstyp: Krimineller schießt		nicht
Verdächtigen Aktion schießt 0,0	2,ÿ2	nicht ÿ2,ÿ1 ÿ1,1

	Sheriff-	
Aktionstyp: Zivilist erschießt		nicht
verdächtige Aktion erschießt ÿ3,ÿ1	ÿ1,ÿ2	nicht ÿ2,ÿ1 0,0

Abbildung 5. Auszahlungen für das Sheriff-Dilemma.

3.10. Level-k-Reasoning

Bayesianische Spiele wurden auch dafür kritisiert, dass sie unrealistische Annahmen treffen, die nicht immer das Verhalten in der realen Welt vorhersagen. Ein anderer spieltheoretischer Ansatz für unvollständige Informationen ist das Level-k-Reasoning **[62,63], das davon ausgeht, dass die Spieler strategisch, aber mit begrenzter Rationalität spielen .** Es wurde kürzlich in der kontroversen Risikoanalyse **zur Modellierung von Problemen in der Terrorismusbekämpfung [64] und anderen Bereichen verwendet .**

Wir betrachten ein einfaches Problem der Stufe k: den keynesianischen Schönheitswettbewerb. **Die Teilnehmer des Wettbewerbs werden gebeten, eine Zahl zu wählen, von der sie hoffen, dass sie so nahe wie möglich an einem Bruchteil** p **des Durchschnitts der Entscheidungen aller Teilnehmer liegt. Die klassische Spieltheorie sagt voraus, dass alle Spieler 0 wählen werden, was das Nash-Gleichgewicht ist. Die Schlussfolgerung ist, d zufällig ist es am besten,** p **mal den Mittelwert zu wählen: 50p oder ungefähr 33, wenn** p = $\frac{2}{3}$ **(was ein beliebter Wert ist). Aber alle Spieler wissen das, also sollten sie stattdessen** p **mal diesen Wert wählen, ungefähr 25. Aber alle Spieler wissen das, also ist die logische Schlussfolgerung, dass 0 die einzig vernünftige Wahl ist, aber in Experimenten wählen nur wenige Leute 0.**

Beim Level-k-Denken treffen wir Annahmen über die anderen Spieler. Wir könnten annehmen, dass alle anderen Spieler Level-0-Denker sind, die nicht strategisch denken. Sie wählen einfach eine Zahl gleichmäßig zufällig: c0 ÿ U[0, 100] (wir beschränken unsere Zahlen auf ganze Zahlen, da unsere Methode diskret ist). Unter dieser Annahme sollten wir Level-1-Denken verwenden und p- mal die erwartete Level-0-Wahl **wählen : 33. Wenn wir stattdessen annehmen, dass alle anderen Spieler Level 1 sind, sollten wir Level-2-Denken verwenden und 22 wählen. Ähnlich sollten wir Level-3-Denken verwenden und 15 wählen, wenn wir annehmen, dass alle**

Wir können diese Probleme als IPs modellieren und lösen, wie wir jetzt anhand des Schönheitswettbewerbs zeigen . Die Variablen repräsentieren die Entscheidungen der hypothetischen Spieler der Stufe k (k = 0, 1, 2) und des realen Spielers der Stufe 3: V = ÿc0, c1, c2, c3ÿ. Die Domänen in D sind a Die Agenten sind A = ÿZufall, P1, P2, P3ÿ. Die Zufallswahrscheinlichkeiten sind alle $\frac{1}{101}$**. Es gibt keine Verbindungen, da alle Entscheidungen gleichzeitig getroffen werden, ohne die anderen Entscheidungen zu kenner Es gibt keine Beobachtungen, also ist O = ÿ. Der Spieler auf Level i sollte so nahe wie möglich an** das p **-fache des Wertes kommen, den er vom Spieler auf Level (i ÿ** 1) erwartet , **d. h.** |ci **ÿ** pciÿ1 **| sollte minimiert werden ,** sodass die Nutzen **ÿÿ|c1 ÿ pc0|ÿ,ÿ|c2 ÿ pc1|ÿ,ÿ|c3 ÿ pc2|ÿÿ sind .** Wenn wir **INFPROG mit 106 Episoden und einem Nutzen-Hyperparameter ÿ = ÿÿÿ0, 1ÿÿ,ÿÿ0, 1ÿÿ,ÿÿ0, 1ÿÿÿ anwenden , um alle Nutzen zu minimieren , finden wir c1 mit Werten von ungefähr 29–37, c2 19–25 und c3 13–15. Die Verwendung von mehr Episoden reduziert die Varianz dieser Zahlen.**

3.11. Praktische Auswirkungen

Wir haben gezeigt, dass eine Vielzahl von Problemen aus verschiedenen Bereichen der Literatur als IPs modelliert werden können und dass diese mit dem INFPROG- Solver gelöst werden können. Natürlich behaupten wir nicht, dass jedes **Problem aus dem Operations Research, der Spieltheorie usw. mit unserem Ansatz gelöst werden kann, insbesondere da er derzeit nur diskrete Variablen verarbeiten ka Wir glauben jedoch, dass es interessante praktische Auswirkungen hat.**

Erstens ist unser Ansatz für Rapid Prototyping geeignet. Nur wenige Forscher beherrschen stochastische Programmierung, dynamische Programmierung, Spieltheorie, maschinelles Lernen und viele andere Bereiche. Wenn man mit einem neuen komplexen Optimierungsproblem konfrontiert wird, ist nicht immer klar, wie man es modelliert, und in der Praxis treffen wir aufgrund unseres Hintergrunds oft vereinfachende Annahmen. Ein stochastischer Programmierer könnte ein Multi-Agenten-Probl

Machine Translated by Google

indem wir einen Gegner mit Zufallsvariablen modellieren, oder so tun, als ob Entscheidungen die Verteilung von Zufallsvariablen nicht beeinflussen könnten, oder ein mehrstufiges Problem durch ein zweistufiges approximieren. Ein Constraint- oder Integer-Programmierer könnte eine Zufallsvariable durch eine Erwartung approximieren. Ein Spieltheoretiker könnte ein Nullsummenspiel oder vollständiges Wissen annehmen, selbst wenn dies unrealistisch ist. Im Allgemeinen ist es schwer zu wissen, ob unsere Designentscheidungen vernünftig sind. Wir glauben, dass ein Tool wie INFPROG in den frühen Phasen der Modellierung nützlich ist , da es uns ermöglicht, die Konsequenzen verschiedener Vereinfachungen zu untersuchen, ohne mehrere Forschungsbereiche beherrschen zu müssen: Wir können einfach die Problemformulierung ändern und das Ergebnis beobachten. Einige Vereinfachungen könnten nur geringe Änderungen in der Lösungsqualität bewirken, während andere die Qualität stark reduzieren oder ein Problem sogar unlösbar machen könnten. Die Modelle mit acht Damen und stochastischen Programmen können als Beispiele betrachtet werden: In beiden Fällen haben wir unterschiedliche Modelle implementiert und die resultierenden Zielwerte verglichen, was zu dem Sch

Zweitens hoffen wir, dass unser Ansatz an sich nützlich sein wird. Er basiert auf Multi-Agent-Multi-Objective-RL, einem sehr allgemeinen Paradigma mit vielen Anwendungsmöglichkeiten. Bei spezifischen Problemen erwarten wir nicht, dass **INFPROG mit spezialisierten Algorithmen konkurrieren kann, aber bei Problemen, die von Natur aus komplex sind, könnte es ein nützliches Werkzeug sein, da es nur wenig verfügbare Software gibt, die in der Lage ist, Probleme mit mehreren Agenten, mehreren Zielen, zufälligen Ereignissen und Teilwissen zu lösen.**

Es sei darauf hingewiesen, dass INFPROG lediglich ein Forschungsprototyp ist und wir es sicherlich nicht als fertiges Produkt betrachten. Wir hoffen, dass in Zukunft wettbewerbsfähigere IP-Algorithmen entstehen werden, insbesondere auf der Grundlage von Deep RL und implementiert auf hochparalleler Hardware. Dies sollte die Skalierbarkeit des IP-Ansatzes für komplexe Optimierungsprobleme erheblich verbessern, da RL bereits seine Fähigkeit gezeigt hat, große Multi-Agenten- Probleme wie das Erlernen des Go-Spiels zu bewältigen.

3.12. Eine kleine Fallstudie

Um unseren Ansatz genauer zu veranschaulichen, zeigen wir in Abbildung 6 das programmierbare Dienstprogramm für das Problem **„Oil Wildcatter“ aus Abschnitt 3.3 .** Der Benutzer muss eine C-Funktion namens „ Dienstprogramm“ **mit zwei Argumenten bereitstellen: ein eindimensionales Array** v **mit ganzzahligen Zufalls- und Entscheidungsvariablen und ein zweidimensionales Array** u **mit Dienstprogrammen. Diese Funktion wird am Ende einer Episode aufgerufen, sodass wir davon ausgehen können, dass allen Variablen in** v **Werte zugewiesen wurden. (* und** ** **sind C-Notationen, die die Array-Dimensionalität angeben).**

```
void Dienstprogramm(int* v, float** u) {

    int Öl=v[0], Test=v[1], Seismik=v[2], Bohren=v[3], nein=0, ja=1, trocken=0,
        nass=1, einweichen=2, Unternehmen=1; Float Bohrauszahlung,
    Testauszahlung;

    wenn (test==yes) test_payoff= –10,0; sonst test_payoff=0,0;

    wenn (Öl==trocken && Bohren==ja) Bohrauszahlung= –70,0; sonst wenn (Öl==nass
    && Bohren==ja) Bohrauszahlung= 50,0; sonst wenn (Öl==einweichen && Bohren==ja)
    Bohrauszahlung= 200,0; sonst
                                        Bohrauszahlung = 0,0;

    u[Unternehmen][0]=Bohr_Auszahlung+Test_Auszahlung;
}
```

Abbildung 6. Programmierbares Dienstprogramm für das Beispiel der Ölsuche.

Zur besseren Lesbarkeit haben wir ganzzahlige Variablen erstellt, um die IP-Variablen (z. B. Öl = v[0]), **ihre möglichen Werte (z. B.** ja = 0) **und den einzigen Agenten** (Unternehmen – beachten Sie , **dass Zufallsvariablen die Agentennummer 0 zugewiesen wird) zu benennen. Der Gesamtgewinn ist die Summe der Bohr- und Testgewinne, und diese Summe wird dem einzigen Nutzen** u[1][0] **im Problem zugewiesen. Der zweite Index ist** 0 , **weil die Nutzen eines Agenten ab 0 nummeriert sind: Für ein bi-objektives Problem wie das in Abschnitt 3.4** müssten wir auch u[Unternehmen][1] **einen Wert zuweisen .**

Machine Translated by Google

Der Benutzer muss außerdem eine kleine Textdatei bereitstellen, in der die Parameter des Problems beschrieben werden (Anzahl der Agenten, Variablen, Domänengrößen usw.). Wir zeigen kein Beispiel, da INFPROG derzeit ein Forschungsprototyp ist und eine benutzerfreundliche Spezifikations

4. Schlussfolgerungen

Dieses Papier leistet zwei Beiträge. Erstens definiert es eine neue Klasse von Optimierungsproblemen, genannt Influence Program (IP), die allgemein genug ist, um eine Vielzahl von Problemen aus den Bereichen Operations Research, künstliche Intelligenz, Spieltheorie und Adversarial Risk Analysis abzudecken. Zweitens schlägt es einen Algorithmus namens INFPROG vor , **der auf Reinforcement Learning plus Sampling basiert. INFPROG ist ein leichtgewichtiger Löser, der weder eine Grafikverarbeitungseinheit noch andere spezielle Hardware benötigt. Wir haben die Flexibilität von IP anhand von Beispielen aus unterschiedlicher Literatur demonstriert: Unseres Wissens nach kann kein anderer Löser diese Bandbreite an Optimierungsproblemen bewältigen. Unsere Arbeit zeigt auch, dass viele bestehende Probleme aus anderer Literatur als Benchmark-Probleme für Multi-Objective- und/oder Multi-Agent- Reinforcement-Learning-Algorithmen dienen können, an denen es mangelt [18].**

Wir gehen davon aus, dass IPs für hybride Optimierungsprobleme nützlich sind, die nicht gut in eine bestimmte Klasse passen und für die es keine verfügbaren Löser gibt. Eine ertragreiche Quelle für Anwendungen könnte das sichere Verstärkungslernen sein, bei dem Einschränkungen verwendet werden, um robuste und sichere Richtlin Es könnte auch für das schnelle Prototyping verschiedener Modelle nützlich sein, um zu untersuchen, wie man ein neues Problem modelliert, um die Auswirkungen des Verbergens von Informationen oder das Treffen vereinfachender Annahmen zu testen. Schließlich könnte es als Lehrmittel zum Verständnis der verschiedenen Modelle von Optimierungsproblemen verwendet werden.

In zukünftigen Arbeiten werden wir die Anwendung unserer Methode auf komplexe Probleme der realen Welt untersuchen. Die aktuelle INFPROG- Implementierung ist nur ein Forschungsprototyp, der das Potenzial eines einheitlichen Ansatzes für eine breite Palette komplexer Optimierungsprobleme demonstrieren soll . **Er kann nur diskrete Variablen verarbeiten, verwendet eine einfache und recht schwache Form der Zustandsaggregation (Random Tile Coding) und verfügt nicht über eine klare Benutzeroberfläche. Wir hoffen, eine benutzerfreundlichere Version zu entwickeln, die auch kontinuierliche Variablen enthält, und eine leistungsfähigere Zustandsaggregation zu verwenden: Die beiden letztgenannten Verbesserungen könnten durch den Wechsel von SARSA zu einem Akteur-Kritiker-Algorithmus wie**

Finanzierung: Dieses Material basiert auf Arbeiten, die von der Science Foundation Ireland im Rahmen des Zuschusses Nr. 12/RC/2289-P2 gefördert werden, der vom Europäischen Fonds für regionale Entwicklung kofinanziert wird. Wir möchten uns auch für die Unterstützung des Science Foundation Ireland CONFIRM Centre for Smart Manufacturing, Forschungscode 16/RC/3918, und des EU H2020 ICT48-Projekts TAILOR unter Vertrag Nr. 952215 bedanken.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: In dieser Studie wurden keine neuen Daten erstellt oder analysiert. Die Datenfreigabe ist für diesen Artikel nicht anwendbar.

Interessenkonflikte: Die Geldgeber hatten keinen Einfluss auf die Gestaltung der Studie, auf die Erhebung, Analyse oder Interpretation der Daten, auf das Verfassen des Manuskripts oder auf die Entscheidung zur Veröffentlichung der Ergebni

Verweise

1. **Sutton, RS; Barto, AG** Reinforcement Learning: Eine Einführung; **MIT Press: Cambridge, MA, USA, 1998. 2.**
Silver, D.; Hubert, T.; Schrittwieser, J.; Antonoglou, I.; Lai, M.; Guez, A.; Lanctot, M.; Sifre, L.; Kumaran, D.; Graepel, T.; Lillicrap, T.; Simonyan, K.; Hassabis, D. Ein allgemeiner Reinforcement-Learning-Algorithmus, der Schach, Shogi und Go durch Selbstspiel meistert. Science **2018,** 362, **1140–1144. [CrossRef] [PubMed]**
3. **Huang, SH; Abdolmaleki, A.; Vezzani, G.; Brakel, P.; Mankowitz, DJ; Neunert, M.; Bohez, S.; Tassa, Y.; Heess, N.; Riedmiller, MA; Hadsell, R. Ein eingeschränktes Framework für mehrzieliges Reinforcement-Learning. In Proceedings der 5. Konferenz zum Thema Roboterlernen, London, Großbritannien, 8.–11. November 2021; S. 883–893.**
4. **Elshafei, MMK; El-Sherberry, MS Interaktives zweistufiges multiobjektives stochastisches ganzzahliges lineares Programmierproblem.** Trends Appl. Sci. Res. **2008, 3, 154–164.**
5. **Kratochvíl, V.; Vomlel, J. Einflussdiagramme zur Geschwindigkeitsprofiloptimierung.** Int. J. Approx. Reason. **2017,** 88, **567–586. [CrossRef]**

Machine Translated by Google

6. **Gal, Y.; Pfeffer, A. Netzwerke von Einflussdiagrammen: Ein Formalismus zur Darstellung der Überzeugungen und Entscheidungsprozesse von Agenten** J. Artif. Intell. Res. **2008,** 33, **109–147. [CrossRef]**
7. **González-Ortega, J.; Insua, DR; Cano, J. Adversarial Risk Analysis für Bi-Agent-Einflussdiagramme: Ein algorithmischer Ansatz.** Eur. J. Oper. Res. **2019,** 273, **1085–1096. [CrossRef]**
8. **Koller, D.; Milch, B. Multi-Agent Influence Diagrams zur Darstellung und Lösung von Spielen.** Games Econ. Behav. **2001,** 45, **181–221. [Querverweis]**
9. **Polich, K.; Gmytrasiewicz, G. Interaktive dynamische Einflussdiagramme. In Proceedings der 6. Internationalen gemeinsamen Konferenz über autonome Agenten und Multiagentensysteme, Communications in Computer and Information Science, Honolulu, HI, USA, 14.–18. Mai 2007; Band 288, Seiten 623–630.**
10. **Zhou, LH; Kevin, L.; Liu, WY Spieltheoriebasierte Einflussdiagramme.** Expert Syst. **2013,** 30, **341–351. [CrossRef]**
11. **Diehl, M.; Haimes, Y. Einflussdiagramme mit mehreren Zielen und Tradeoff-Analyse.** IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part A **2004,** 34, **293–304. [CrossRef]**
12. **Marinescu, R.; Razak, A.; Wilson, N. Multi-objective Influence Diagrams. In Proceedings der 28. Konferenz über Unsicherheit in der künstlichen Intelligenz, Catalina Island, CA, USA, 5.–17. August 2012; Seiten 574–583.**
13. **Jenzarli, A. Information/Relevanz-Einflussdiagramme. In Proceedings der 11. Konferenz über Unsicherheit in der künstlichen Intelligence (UAI), Montreal, QC, Kanada, 18.–20. August 1995; S. 329–337.**
14. **Lauritzen, SL; Nilsson, D. Darstellung und Lösung von Entscheidungsproblemen mit begrenzten Informationen.** Manag. Sci. **2001,** 47, **1238–1251. [CrossRef]**
15. **Powell, WB** Reinforcement Learning und stochastische Optimierung: Ein einheitlicher Rahmen für sequentielle Entscheidungen; **Wiley: Hoboken, NJ, USA, 2022.**
16. **Prestwich, SD; Toffano, F.; Wilson, N. Eine probabilistische Programmiersprache für Einflussdiagramme. In Proceedings of the 11. Internationale Konferenz zum skalierbaren Unsicherheitsmanagement, Granada, Spanien, 4.–6. Oktober 2017.**
17. **Prestwich, SD Lösen gemischter Einflussdiagramme durch bestärkendes Lernen. In Proceedings der 9. Internationalen Konferenz für maschinelles Lernen, Optimierung und Datenwissenschaft, Grasmere, Großbritannien, 22.–26. September 2023.**
18. **Hayes, CF; R ÿadulescu, R.; Bargiacchi, E.; Källström, J.; Macfarlane, M.; Reymond, M.; Verstraeten, T.; Zintgraf, LM; Dazeley, R.; Heintz, F.; et al. Ein praktischer Leitfaden für multi-objektives bestärkendes Lernen und Planen.** Auton. Agent. Multi-Agenten-Syste **2022,** 36, **26. [CrossRef]**
19. **van Moffaert, K.; Drugan, MM; Nowé, A. Scalarized Multi-Objective Reinforcement Learning: Neue Designtechniken. In Proceedings des IEEE Symposium on Adaptive Dynamic Programming and Reinforcement Learning, Singapur, 16.–19. April 2013; S. 191–199.**
20. **Zhang, K.; Yang, Z.; Ba¸sar, T. Multi-Agent Reinforcement Learning: Ein selektiver Überblick über Theorien und Algorithmen. Im** Handbook of Reinforcement Learning and Control; **Vamvoudakis, KG, Wan, Y., Lewis, FL, Cansever, D., Hrsg.; Studies in Systems, Decision and Control; Springer: Cham, Schweiz, 2021; Band 325.**
21. **R ÿadulescu, R.; Mannion, P.; Roijers, DM; Nowé, A. Multi-Objective Multi-Agent Decision Making: Eine nutzenbasierte Analyse und Umfrage.** Auton. Agenten Multi-Agenten-Systeme. **2020,** 34, **10. [CrossRef]**
22. **Hu, T.; Luo, B.; Yang, C.; Huang, T. MO-MIX: Multi-Objective Multi-Agent Cooperative Decision-Making mit Deep Reinforcement ment Learning.** IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. **2023,** 45, **12098–12112. [CrossRef] [PubMed]**
23. **Andrychowicz, M.; Wolski, F.; Ray, A.; Schneider, J.; Fong, R.; Welinder, P.; McGrew, B.; Tobin, J.; Abbeel, P.; Zaremba, W. Rückblick, Erfahrung, Wiederholung. In Proceedings der 31. Internationalen Konferenz für neuronale Informationsverarbeitungssysteme, Long Beach, CA, USA, 4.–9. Dezember 2017; S. 5055–5065.**
24. **Zobrist, AL Eine neue Hashing-Methode mit Anwendung für Spiele.** ICGA J. **1990,** 13, **69–73.**
25. **Hyatt, RM; Cozzie, A. Die Wirkung von Hash-Signaturkollisionen in einem Schachprogramm.** ICGA J. **2005,** 28, **131–139. [CrossRef]**
26. **Skalse, J.; Hammond, L.; Griffin, C.; Abate, A. Lexikographisches multi-objektives Verstärkungslernen. In Proceedings der 31. Internationale gemeinsame Konferenz für künstliche Intelligenz, Wien, Österreich, 23.–29. Juli 2022; S. 3430–3436.**
27. **Gábor, Z.; Kalmár, Z.; Szepesvári, C. Multikriterielles Verstärkungslernen. In Proceedings der 15. Internationalen Konferenz on Machine Learning, Madison, WA, USA, 24.–27. Juli 1998; S. 197–205.**
28. **Giagkiozis, I.; Fleming, PJ Methoden zur Mehrzieloptimierung: Eine Analyse.** Inf. Sci. **2015,** 293, **338–350. [CrossRef]**
29. **Gordon, AD; Henzinger, TA; Nori, AV; Rajamani, SK Probabilistische Programmierung. In Proceedings der International Konferenz zum Thema Software Engineering, Hyderabad, Indien, 31. Mai–7. Juni 2014.**
30. **Pfeffer, A.** Practical Probabilistic Programming; **Manning Publications: Shelter Island, NY, USA, 2016.**
31. **Rossi, F.; van Beek, P.; Walsh, T. (Hrsg.)** Handbook of Constraint Programming; **Elsevier: Amsterdam, Niederlande, 2006.**
32. **Crites, RH; Barto, AG Aufzugsgruppensteuerung mit mehreren Reinforcement-Learning-Agenten.** Mach. Learn. **1998,** 33, **235–262. [Querverweis]**
33. **Useng, M.; Avdulrahman, S. Eine Umfrage zum verteilten bestärkenden Lernen.** Mesopotamian J. Big Data **2022,** 2022, **44–50. [Querverweis]**
34. **Pearl, J.** Probabilistisches Denken in intelligenten Systemen: Netzwerke plausibler Schlussfolgerungen; **Reihe zu Darstellung und Denken; Morgan Kaufman Publishers: Burlington, MA, USA, 1988.**
35. **Howard, RA; Matheson, JE Einflussdiagramme. In** Readings in Decision Analysis; **Strategic Decisions Group: Menlo Park, CA, USA, 1981; Kapitel 38, S. 763–771.**

Machine Translated by Google

36. Nease, RF, Jr.; Owens, DK Verwendung von Einflussdiagrammen zur Strukturierung medizinischer Entscheidungen. Med. Decis. Mak. **1997,** 17, **263–275.** [Querverweis] [PubMed]

37. Chockalingam, S.; Maathuis, C. Einflussdiagramme in der Cybersicherheit: Konzeptualisierung und mögliche Anwendungen. In Proceedings der 22. Europäischen Konferenz für Cyberkrieg und -sicherheit, Piräus, Griechenland, 22.–23. Juni 2023; Band 22.

38. Carriger, JF; Newman, MC Einflussdiagramme als Entscheidungshilfe für das Pestizid-Risikomanagement. Integr. Umwelt. Bewerten. Manag. **2011, 8, 339–350.** [CrossRef]

39. Dechter, R. Eine neue Perspektive auf Algorithmen zur Optimierung von Strategien unter Unsicherheit. In Künstliche Intelligenz-Planungssysteme; **Gesellschaft zur Förderung künstlicher Intelligenz: Washington, DC, USA, 2000; S. 72–81.**

40. Jensen, F.; Jensen, V.; Dittmer, S. Von Einflussdiagrammen zu Knotenbäumen. In Unsicherheit in der künstlichen Intelligenz; **Morgan Kaufmann: Burlington, MA, USA, 1994; S. 367–373.**

41. Shachter, RD Evaluating Influence Diagrams. Oper. Res. **1986,** 34, **871–882.** [CrossRef]

42. Shenoy, P. Bewertungsbasierte Systeme für Bayesianische Entscheidungsanalyse. Oper. Res. **1992,** 40, **463–484.** [CrossRef]

43. Tatman, JA; Shachter, RD Dynamische Programmierung und Einflussdiagramme. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **1990,** 20, **365–379.** [Querverweis]

44. Cano, A.; Gómez, M.; Moral, S. Eine Vorwärts-Rückwärts-Monte-Carlo-Methode zum Lösen von Einflussdiagrammen. Int. J. Ca. Grund. **2006,** 42, **119–135.** [CrossRef]

45. Charnes, JM; Shenoy, PP Mehrstufige Monte-Carlo-Methode zum Lösen von Einflussdiagrammen mithilfe lokaler Berechnungen. Manag. 2004 , 50, **405–418.** [CrossRef]

46. Marinescu, R.; Lee, J.; Dechter, R. Ein neues Begrenzungsschema für Einflussdiagramme. In Proceedings der 35. Konferenz für künstliche Intelligenz, Vancouver, BC, Kanada, 2.–9. Februar 2021; Association for the Advancement of Artificial Intelligence: Washington, DC, USA, 2021; S. 12158–12165.

47. Watthayu, W. Darstellung und Lösung von Einflussdiagrammen bei multikriteriellen Entscheidungsprozessen: Eine Methode zur Verbreitung von Loopy-Beliefs. In Proceedings des International Symposium on Computer Science and its Applications, Hobart, TAS, Australien, 13.–15. Oktober 2008; S. 118–125.

48. Yuan, C.; Wu, X. Lösen von Einflussdiagrammen mithilfe der heuristischen Suche. In Proceedings des International Symposium on Artificial Intelligenz und Mathematik, Sanya, China, 23.–24. Oktober 2010.

49. Everitt, T.; Kumar, R.; Krakovna, V.; Legg, S. Modellierung von AGI-Sicherheitsrahmen mit kausalen Einflussdiagrammen. In Proceedings des Workshops zur Sicherheit künstlicher Intelligenz, CEUR Workshop, Honolulu, HI, USA, 27. Januar 2019; Band 2419.

50. Raiffa, H. Entscheidungsanalyse; **Addison-Wesley: Reading, MA, USA, 1968.**

51. Birge, JR; Louveaux, FV Einführung in die stochastische Programmierung; **Springer: New York, NY, USA, 2011.**

52. Ahmed, S.; Tawarmalani, M.; Sahinidis, NV Ein endlicher Branch-and-Bound-Algorithmus für zweistufige stochastische ganzzahlige Programme. Math.-Programm. **2004,** 100, **355–377.** [CrossRef]

53. Charnes, A.; Cooper, WW Chance-Constrained Programming. Manag. Sci. **1959, 6, 73–79.** [CrossRef]

54. García, J.; Fernández, F. Eine umfassende Untersuchung zum sicheren bestärkenden Lernen. J. Mach. Learn. Res. **2015,** 16, **1437–1480.**

55. Gu, S.; Yang, L.; Du, Y.; Chen, G.; Walter; Wang, J.; Yang, Y.; Knoll, AC Eine Überprüfung des sicheren bestärkenden Lernens: Methoden, Theorie und Anwendungen. arXiv **2022, arXiv:2205.10330.**

56. Kovacs, A.; Kis, T. Constraint Programming Approach to a Bilevel Scheduling Problem. Constraints **2011,** 16, **317–340.** [CrossRef]

57. Arora, R.; Arora, SR Ein Algorithmus für nichtlineare mehrstufige ganzzahlige Programmierprobleme. Int. J. Comput. Sci. Math. **2010, 3, 211–225.** [CrossRef]

58. Mishra, S.; Verma, AB Ein nicht-differenzieller Ansatz zur Lösung dreistufiger Programmierprobleme. Am. Int. J. Res. Sci. Technol. Mathe. **2015.**

59. Lu, J.; Han, J.; Hu, Y.; Zhang, G. Entscheidungsfindung auf mehreren Ebenen: Eine Untersuchung. Inf. Sci. **2016,** 346–347, **463–487.** [CrossRef]

60. Alguacil, N.; Delgadillo, A.; Arroyo, JM Ein dreistufiger Programmieransatz für die Verteidigungsplanung des Stromnetzes. Comput. Oper. Res. **2014,** 41, **282–290.** [CrossRef]

61. Harsanyi, JC Spiele mit unvollständigen Informationen, gespielt von „Bayesianischen" Spielern, I–III: Teil I. Das Basismodell. Manag. Sci. **2004,** 50, **1804–1817.** [CrossRef]

62. Nagel, R. Entwirrung in Ratespielen: Eine experimentelle Studie. Am. Econ. Rev. **1995,** 85, **1313–1326.**

63. Stahl, DO; Wilson, PW Über Spielermodelle anderer Spieler: Theorie und experimentelle Evidenz. Games Econ. Behav. **1995,** 10, **218–254.** [CrossRef]

64. Rothschild, C.; Albert, L.; Guikema, S. Adversarial Risk Analysis mit unvollständigen Informationen: Ein Level-k-Ansatz. Risikoanalytik. **2011,** 32, **1219–1231.** [CrossRef]

65. Schulman, J.; Wolski, F.; Dhariwal, P.; Radford, A.; Klimov, O. Proximal Policy Optimization Algorithms. arXiv **2017, arXiv:1707.06347.**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Mehrdimensionale Datenanalyse der tiefen Sprache in JRR Tolkien und C.S. Lewis enthüllen enge mathematische Zusammenhänge

Emilio Matricciani

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria (DEIB), Politecnico di Milano, 20133 Mailand, Italien; emilio.matricciani@polimi.it

Zusammenfassung: Gelehrte der englischen Literatur sind sich einig, dass J.R.R. Tolkien die Schriften von C.S. Lewis beeinflusst hat. Zum ersten Mal haben wir diese Frage mathematisch untersucht, indem wir eine originelle mehrdimensionale Analyse linguistischer Parameter durchgeführt haben, die auf oberflächlichen, tiefen Sprachvariablen und linguistischen Kanälen basiert. Um unsere Untersuchung in den Rahmen der englischen Literatur einzuordnen, haben wir einige Romane früherer Autoren wie C. Dickens, G. MacDonald und anderen untersucht. Die tiefen Sprachvariablen und die linguistischen Kanäle, die in diesem Artikel erörtert werden, sind wahrscheinlich auf die unbewusste Gestaltung der Autoren zurückzuführen und offenbaren Verbindungen zwischen Texten, die weit über das Bewusstsein der Autoren hinausgehen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Kapazität des erweiterten Kurzzeitgedächtnisses, das von Lesern verlangt wird, der universelle Lesbarkeitsindex von Texten, die geometrische Darstellung von Texten und die Feinabstimmung linguistischer Kanäle innerhalb von Texten – alles Werkzeuge, die in der Arbeit ausführlich erörtert werden – starke Verbindungen zwischen „Der Herr der Ringe“ **(Tolkien),** „Die Chroniken von Narnia“, „Die Weltraumtrilogie **“ (Lewis) und den Romanen von MacDonald offenbarten un**

Schlüsselwörter: alphabetische Sprachen; erweitertes Kurzzeitgedächtnis; menschliche Kommunikation; menschlicher Geist; Sätze: mathematische Modellierung; universeller Lesbarkeitsindex

check for updates

Zitat: Matricciani, E. Mehrdimensionale Datenanalyse der tiefen Sprache bei JRR Tolkien und CS Lewis enthüllt enge mathematische Zusammenhänge. AppliedMath **2024, 4, 927–949. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030050**

Wissenschaftlicher Herausgeber: Libor Pekař

Empfangen: 17. Juni 2024
Überarbeitet: 29. Juli 2024
Akzeptiert: 31. Juli 2024
Veröffentlicht: 1. August 2024

Copyright: © 2024 beim Autor. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.

Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

In zahlreichen Artikeln – von denen einige hier aus der umfangreichen Literatur zu diesem Thema wiedergegeben werden **[1–8]** – erklären Gelehrte der englischen Literatur übereinstimmend, dass **die Schriften von CS Lewis von JRR Tolkien beeinflusst wurden. Der Zweck des vorliegenden Artikels besteht nicht darin, die große Literaturmenge anhand der typischen Herangehensweise von Literaturgelehrten zu durchleuchten – was nicht unser Spezialgebiet ist –, sondern diese Frage mathematisch und statistisch zu untersuchen – eine Studie , die noch nie zuvor durchgeführt wurde – und zwar unter Verwendung neuester Methoden, die bei der Erforschung des Einflusses oberflächlicher und tiefer Sprachvariablen [9,10] und linguistischer Kanäle [11] in literarischen Texten entwickelt wurden. Da Gelehrte den Einfluss von George MacDonald auf beide erwähnen, betrachten wir einige Romane dieses früheren Autors. Um all diese Romane in den Rahmen der englischen Literatur einzuordnen , betrachten wir einige Romane anderer früherer Autoren wie C. Dickens und anderer.**

Nach dieser Einführung stellen wir in Abschnitt 2 die betrachteten literarischen Texte (Romane) vor. In Abschnitt 3 berichten wir über die Abfolge von Wörtern, Sätzen und Interpunktionen im Vergleich zu Kapiteln für einige Romane und definieren einen Index, der nützlich ist, um die Regelmäßigkeit synthetisch zu beschreiben, da wir glauben, dass die Autoren diese bewusst entworfen haben. In Abschnitt 4 beginnen wir mit der Untersuchung der vier tiefen Sprachvariablen. Um Missverständnissen vorzubeugen, beziehen sich diese Variablen und die daraus abgeleiteten linguistischen Kanäle auf die „Oberflächenstruktur“ von Texten und nicht auf die „tiefe“ Struktur, die in der kognitiven Theorie erwähnt wird. In Abschnitt 5 berichten wir über Ergebnisse zum erweiterten Kurzzeitgedächtnis und einem universellen Lesbarkeitsindex. Beide Themen befassen sich mit Puffern des menschlichen Kurzzeitgedächtnisses. In Abschnitt 6 stellen wir literarische Texte geometrisch in der kartesischen Ebene dar, indem wir lineare Kombinationen tiefer Sprachvariablen definieren und die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass ein Text mit einem anderen verwechselt werden kann. In Abschnitt 7 zeigen wir die linearen Beziehungen zwischen linguistischen Variablen in d

Machine Translated by Google

Wir berichten über die Theorie der sprachlichen Kanäle. In Abschnitt 9 wenden wir sie auf die Romane an, die derzeit untersucht. Abschließend fassen wir in Abschnitt 10 die wichtigsten Ergebnisse zusammen und ziehen ein Fazit. In den Anhängen sind numerische Daten aufgeführt.

2. Datenbank literarischer Texte (Romane)

Lassen Sie uns zunächst die Datenbank literarischer Texte vorstellen, die in diesem Artikel verwendet wird. Tabelle 1 listet einige grundlegende Statistiken der Romane von Tolkien, Lewis und MacDonald auf. Um diese Texte im Rahmen der früheren englischen Literatur, betrachten wir Romane von Charles Dickens (Tabelle 2) und andere Autoren (Tabelle 3).

Tabelle 1. Romane von Tolkien, Lewis und MacDonald, mit Erscheinungsjahr. Anzahl der Kapitel (d. h. die Anzahl der Stichproben, die bei der Berechnung der unten angegebenen Regressionslinien berücksichtigt werden), Gesamtzahl der in den Wörtern (C) enthaltenen Zeichen, **Gesamtzahl der Wörter** W **und Sätze (S). Titel, Fußnoten und sonstiges Fremdmaterial aus den digitalen Texten wurden gelöscht.**

John R.R. Tolkien (1892–1973)	Kapitel (M)	Charaktere (C)	Wörter (W)	Sätze (S)
Der Hobbit (1937)	19	394.154	95.914	5890
Der Herr der Ringe (1954–1955)	62	1.906.531	472.173	34.601
Das Silmarillion (posthum, 1977)	24	429.639	101.627	3346
Clive S. Lewis (1898–1963)				
Dienstanweisungen für einen Unterteufel (1942)	31	135.204	31.040	1330
Die Weltraumtrilogie (1938–1945)	123	1.243.141	295.240	20.124
Die Chroniken von Narnia (1950–1956)	110	1.318.482	322.544	23.515
George MacDonald (1824–1905)				
Phantastes: Eine Feenromanze für Männer und Frauen (1858)	25	283.676	67.551	3274
Im Rücken des Nordwindes (1871)	38	349.041	90.697	5017
Die Prinzessin und der Kobold (1872)	32	208.325	51.090	3205
Lilith: Eine Romanze (1895)	47	386.522	94.127	6271

Tabelle 2. Romane von Charles Dickens, mit Erscheinungsjahr. Anzahl der Kapitel (M, **d. h. die Anzahl der bei der Berechnung der unten angegebenen Regressionslinien berücksichtigten Proben), Gesamtzahl der in den Wörtern enthaltene Zeichen** (C), **Gesamtzahl der Wörter** W **und Sätze (S).**

Roman (Erscheinungsjahr)	Kapitel (M)	Charaktere (C)	Wörter (W)	Sätze (S)
Die Abenteuer von Oliver Twist (1837–1839)	53	679.008	160.604	9121
David Copperfield (1849–1850)	64	1.469.251	363.284	19.610
Bleak House (1852–1853)	64	1.480.523	350.020	20.967
Eine Geschichte aus zwei Städten (1859)	45	607.424	142.762	8098
Unser gemeinsamer Freund (1864–1865)	67	1.394.753	330.593	17.409

Wir haben den digitalen Text eines Romans (WinWord-Datei) verwendet und für jedes Kapitel gezählt, die Anzahl der Zeichen, Wörter, Sätze und Interpunktionen (Satzzeichen). Vor Dabei haben wir die Titel, Fußnoten und anderes Fremdmaterial gelöscht, das in die digitalen Texte, eine mühselige Arbeit. Das Zählen ist sehr einfach, wenn auch zeitaufwendig. Winword liefert direkt die Anzahl der Zeichen und Wörter. Die Anzahl der Sätze wurde berechnet, indem WinWord jeden Punkt durch einen Punkt ersetzte: natürlich, Diese Aktion ändert den Text nicht, gibt aber die Anzahl dieser Ersetzungen an und daher die Anzahl der Punkte. Das gleiche Verfahren wurde für Fragezeichen wiederholt und Ausrufezeichen. Die Summe der drei Summen ergibt die Gesamtzahl der Sätze im analysierten Text. Das gleiche Verfahren ergibt die Gesamtzahl der Kommas, Doppelpunkte und Semikolons. Die Summe dieser letzteren Werte mit der Gesamtzahl der Sätze ergibt die Gesamtzahl der Interpunktionen.

Machine Translated by Google

Tabelle 3. Romane von Autoren der englischen Literatur, mit Erscheinungsjahr. Anzahl der Kapitel (M, d. h. die Anzahl der Stichproben, die bei der Berechnung der unten angegebenen Regressionslinien berücksichtigt wurden), insgesamt Anzahl der in den Wörtern enthaltenen Zeichen (C), **Gesamtzahl der Wörter W und Sätze (S).**

Roman (Autor, Jahr)	Kapitel (M)	Charaktere (C)	Wörter (W)	Sätze (S)
Stolz und Vorurteil **(J. Austen, 1813)**	61	537.005	121.934	6013
Vanity Fair **(W. Thackeray, 1847–1848)**	66	1.285.688	277.716	13.007
Moby Dick **(H. Melville, 1851)**	132	92,2351	203.983	9582
Die Mühle am Floss **(G. Eliot, 1860)**	57	888.867	207.358	9018
Alice im Wunderland **(L. Carroll, 1865)**	12	107.452	27.170	1629
Die Abenteuer des Huckleberry Finn **(M. Twain, 1884)**	42	427.473	110.997	5887
Das Dschungelbuch **(R. Kipling, 1894)**	9	209.935	51.090	3214
Der Krieg der Welten **(HG Wells, 1897)**	27	265.499	60.556	3306
Der Zauberer von Oz **(LF Baum, 1900)**	22	156.973	39.074	2219
Der Hund von Baskerville **(AC Doyle, 1901–1902)**	15	245.327	59.132	4080
Peter Pan **(JM Barrie, 1902)**	17	194.105	47.097	31,77
Martin Eden **(J. London, 1908–1909)**	45	601.672	139.281	9173

Eine gewisse Homogenität ist in Romanen **desselben Autors festzustellen. Die Geschichten in** Die Weltraumtrilogie **und** die Chroniken von Narnia **von Lewis werden mit ungefähr der gleichen Anzahl von Kapitel, Wörter und Sätze, wie es auch bei einigen Romanen MacDonalds der Fall ist, wie etwa** At der Rücken des Nordwinds **und** Lilith: Eine Romanze. **Eine gewisse Homogenität findet sich in** David Copperfield, Bleak House **und** Unser gemeinsamer Freund **(von Dickens) und in** Die Abenteuer von Oliver Twist **und** A Tale of Two Cities. **Diese Zahlenwerte sind unserer Meinung nach nicht zufällig, sondern von den Autoren bewusst gesteuert, ein Thema, dem wir im nächsten Abschnitt näher nachgehen.**

3. Bewusste Gestaltung von Texten: Wörter, Sätze und Interpunktionen versus Kapitel

Zunächst untersuchen wir die linguistischen Variablen, die unserer Meinung nach von den Autoren bewusst entworfen wurden. Im Einzelnen zeigen wir die Wortreihen, Sätze und Interpunktionen gegenüber Kapitel.

Betrachten wir ein literarisches Werk (einen Roman) und seine Unterteilung in unzusammenhängende Blöcke Text, der lang genug ist, um zuverlässige Durchschnittswerte zu erhalten. Sei nS **die Anzahl der Sätze in einem Textblock enthalten,** nW **die Anzahl der Wörter in den** nS **Sätzen,** nC **die** Anzahl der in den nW Wörtern **enthaltenen Zeichen und** nI **die Anzahl der Satzzeichen (Interpunktionen), die in den** nS- **Sätzen enthalten sind.**

10/110 = 0,09

Abbildung 1 zeigt die Serie nW **gegenüber der normalisierten Kapitelnummer für** Der Herr der Ringe, Die Chroniken von Narnia, Die Weltraum-Trilogie.

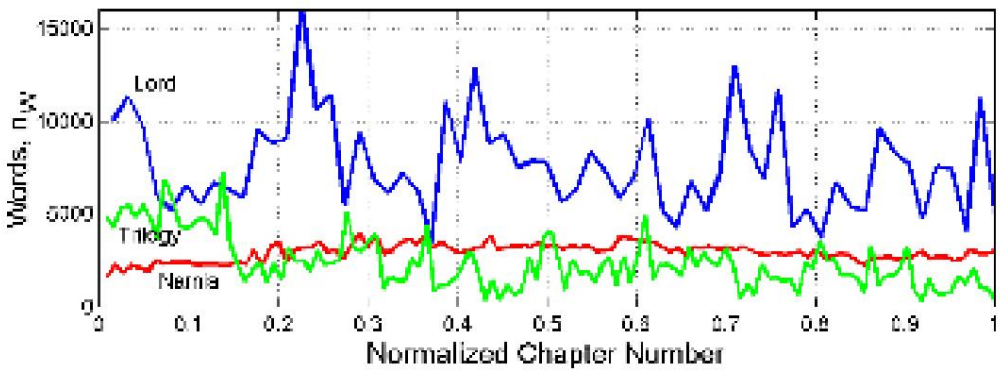


Abbildung 1. Wortreihen gegenüber der normalisierten Kapitelnummer. Blaue Linie: Der Herr der Ringe (Herr); **rote Linie:** Die Chroniken von Narnia (Narnia); **grüne Linie:** Die Weltraum-Trilogie (Trilogie).

Machine Translated by Google

Beispielsweise beträgt der normalisierte Wert von Kapitel 10 in Die Chroniken von Narnia **10/110 = 0,09 in der x–Skala von Abbildung 1. Diese Normalisierung ermöglicht die synoptische Darstellung von Romanen mit einem unterschiedliche Anzahl von Kapiteln.**

In den Chroniken von Narnia **(im Folgenden** der Kürze halber Narnia **genannt) können wir eine praktisch konstanter Wert** nW **im Vergleich zu** Der Herr der Ringe (Lord) **und** The Space Trilogie (Trilogie).

Definieren wir einen synthetischen Index zur Beschreibung der in Abbildung 1 dargestellten Reihe, nämlich der Variationskoeffizient ÿ, gegeben durch die Standardabweichung ÿnW **geteilt durch den Mittelwert Wert** < nW >

$$\ddot{y} = \frac{\ddot{y}nW}{< nW >} \quad (1)$$

In den Tabellen 4 und 5 sind *ÿ* **für** nW, nS **und** nI **aufgeführt . Da** nS **und** nI **sehr gut korrelieren mit** nS, **die drei Dispersionskoeffizienten sind ungefähr gleich.**

Tabelle 4. Der Dispersionskoeffizient in den Wort-, Satz- und Interpunktionsreihen in der angegebene Romane von Tolkien, Lewis und MacDonald.

Roman	Wörter	Sätze	Interpunktionen	Durchschnitt
Der Hobbit	0,49	0,48	0,50	0,49
Der Herr der Ringe	0,34	0,36	0,34	0,35
Das Silmarillion	0,73	0,86	0,80	0,80
Dienstanweisungen für einen Unterteufel	0,07	0,17	0,14	0,13
Die Weltraum-Trilogie	0,60	0,61	0,58	0,59
Die Chroniken von Narnia	0,16	0,20	0,20	0,19
Im Rücken des Nordwindes	0,54	0,61	0,56	0,57
Phantastes: Eine Feen-Romanze für Männer und Frauen	0,66	0,73	0,63	0,67
Lilith: Eine Romanze	0,43	0,53	0,46	0,47
Die Prinzessin und der Kobold	0,53	0,75	0,62	0,64

Tabelle 5. Der Dispersionskoeffizient in den Wort-, Satz- und Interpunktionsreihen in der angegebene Romane.

Roman	Wörter	Sätze	Interpunktionen	Durchschnitt
Die Abenteuer von Oliver Twist	0,31	0,33	0,32	0,32
David Copperfield	0,37	0,38	0,37	0,37
Blödes Haus	0,28	0,31	0,30	0,30
Eine Geschichte aus zwei Städten	0,52	0,57	0,52	0,54
Unser gemeinsamer Freund	0,26	0,29	0,27	0,27
Martin Eden	0,29	0,33	0,29	0,31
Der Hund von Baskerville	0,26	0,29	0,25	0,27
Peter Pan	0,29	0,41	0,33	0,34

In Narnia *ist ÿ* = **0,16, in Lord** *ist ÿ* = **0,34 und in Trilogy** *ist ÿ* = **0,60. Beachten wir auch die Mindestwert** *ÿ* = **0,07 in** „Buchstaben für einen Unterteufel“ (Screwtape).

Der Gesamtmittelwert (Wörter, Sätze und Interpunktionen gemischt) beträgt < *ÿ* >= **0,44 und die Standardabweichung** *ÿÿ* = **0,18. Daher** ist Screwtape **praktisch mehr als 2 ×** *ÿÿ* **vom Mittelwert, ebenso wie** Silmarillion **auf der anderen Seite, und** Narnia **liegt bei etwa 1,5 ×** *ÿÿ* . **Im Gegensatz dazu** liegen Trilogy, Lord **und** The Hobbit (Der Hobbit) **innerhalb von 1 ×** *ÿÿ* .

Aus diesen Ergebnissen geht hervor, dass Lewis die Kapitel von Narnia **und** Screwtape entworfen hat **mit einer fast gleichmäßigen Verteilung von Wörtern, Sätzen und Interpunktionen, sehr wahrscheinlich**

Machine Translated by Google

wegen der Zielgruppe von Narnia **(also Kinder) und dem in** Screwtape verwendeten fiktionalen Mittel „Briefe“. **In** Trilogy **scheint das Design sehr unterschiedlich zu sein** *(ÿ* = **0,60, gut innerhalb von 1 ×** *ÿÿ),* **wahrscheinlich aufgrund der Entwicklung der erzählten Science-Fiction-Geschichte.**

Tolkien ging anders vor als Lewis, denn er scheint die Kapitel eher zufällig und innerhalb von 1 × *ÿÿ* gestaltet zu haben , **wie** Hobbit **und** Lord **zeigen. Eine Ausnahme bildet** das posthum veröffentlichte Silmarillion, **ein Text, der weit davon entfernt ist, ein „Roman“ zu sein.**

Beachten Sie abschließend, dass die Romane von MacDonald homogenere Werte aufweisen, die denen von „Hobbit“ **und** „Trilogie“ **sowie den anderen in Tabelle 5** aufgeführten Romanen sehr **ähnlich sind .**

Abschließend lässt sich sagen, dass die Analyse der Wortreihen, Sätze und Interpunktionen pro Kapitel keine wahrscheinlichen Verbindungen zwischen Tolkien, Lewis und MacDonald aufzeigt. Jeder Autor strukturierte seine Verwendung von Wörtern, Sätzen und Interpunktion nach unterschiedlichen Plänen, die nicht nur zwischen den Autoren, sondern auch zwischen verschiedenen Roman

Es gibt jedoch linguistische Variablen, die – wie wir für moderne und antike literarische Texte berichtet haben – nicht bewusst von Autoren entworfen/verwaltet werden; daher sind diese Variablen die besten Kandidaten, um verborgene mathematische/statistische Verbindungen zwischen Texten aufzudecken. Im nächsten Abschnitt beginnen wir mit der Behandlung dieser Variablen, mit dem spezifischen Ziel, Tolkien und Lewis zu vergleichen, obwohl dieser Vergleich im allgemeineren Rahmen der in Abschnitt **2 genannten Autoren stattfindet .**

4. Oberflächentiefe Sprachvariablen

Wir beginnen mit der Untersuchung der vier stochastischen Variablen, die wir als tiefe Sprachvariablen bezeichnet haben, und folgen dabei unserer allgemeinen statistischen Theorie zu alphabetischen Sprachen [9–11]. Um möglichen Missverständnissen vorzubeugen, beziehen sich diese Variablen und die aus ihnen abgeleiteten linguistischen Kanäle auf die „Oberflächenstruktur“ von Texten und nicht auf die „tiefe“ Struktur, die in der

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 3 untersuchten Variablen beruhen die Variablen der tiefen Sprache wahrscheinlich auf unbewusster Gestaltung. Wie in [9–11] gezeigt, offenbaren sie Verbindungen zwischen Texten, die weit über das Bewusstsein der Autoren hinausgehen. Daher sind die geometrische Darstellung von Texten [10] und die Feinabstimmung linguistischer Kanäle [11] Werkzeuge, die besser geeignet sind, Verbindungen aufzudecken. Sie können wahrscheinlich auch den Einfluss eines Autors auf einen anderen anzeigen.

Wir haben die Anzahl der Zeichen pro Kapitel nC **und die Anzahl der IPs pro Kapitel** definiert **und die vier Variablen der tiefen Sprache sind [9] die Anzahl der Zeichen** CP: nIP ,

$$\mathbf{CP} = \frac{\mathbf{nC}}{\mathbf{nW}} \tag{2}$$

die Anzahl der Wörter pro Satz PF:

$$\mathbf{PF} = \frac{\mathbf{nW}}{\mathbf{nS}} \tag{3}$$

die Anzahl der Interpunktionen pro Wort, das sogenannte Wortintervall IP:

$$\mathbf{IP} = \frac{\mathbf{nI}}{\mathbf{nW}} \tag{4}$$

die Anzahl der Wortintervalle pro Satz MF:

$$\mathbf{MF} = \frac{\mathbf{nIP}}{\mathbf{nS}} \tag{5}$$

Gleichung (5) kann auch als MF = PF/IP geschrieben werden.

In den Tabellen 6–9 sind der Mittelwert und die Standardabweichung dieser Variablen aufgeführt. Beachten Sie, dass diese Werte berechnet wurden, indem jedes Kapitel anhand seiner Wortanzahl gewichtet wurde, um zu vermeiden, dass kurze Kapitel genauso viel wiegen wie lange. Beispielsweise hat Kapitel 1 von Lord **10097 Wörter; daher beträgt sein statistisches Gewicht 10097/472173 ÿ 0**
Beachten Sie auch, dass der in Abschnitt **2 verwendete Streuungskoeffizient berechnet wurde, indem jedes Kapitel mit 1/62 und nicht mit 10097/472173 gewichtet wurde ,** um optisch mit der in Abbildung **1 dargestellten Reihe übereinzustimmen**

Machine Translated by Google

Tabelle 6. John RR Tolkien. Mittelwert und Standardabweichung (in Klammern) von < CP **>,** < PF **>,** < IP **>,** < MF > **in den angegebenen Romanen. Mittelwert und Standardabweichung wurden berechnet durch Gewichten Sie jedes Kapitel anhand der Anzahl seiner Wörter.**

Roman	Cp	PF	IP	MF
Der Hobbit	**4,11 (0,06)**	**16,54 (2,03)**	**7,93 (0,98)**	**2,09 (0,12)**
Der Herr der Ringe	**4,04 (0,08)**	**13,92 (1,98)**	**6,68 (0,51)**	**2,08 (0,20)**
Das Silmarillion	**4,23 (0,08)**	**31,21 (5,32)**	**8,58 (0,58)**	**3,62 (0,42)**

Tabelle 7. Clive S. Lewis. Mittelwert und Standardabweichung (in Klammern) von < CP **>,** < PF **>,** < IP **>,** < MF > **in den angegebenen Romanen. Mittelwert und Standardabweichung wurden berechnet durch Gewichten Sie jedes Kapitel anhand der Anzahl seiner Wörter.**

Roman	Cp	PF	IP	MF
Dienstanweisungen für einen Unterteufel	**4,36 (0,12)**	**23,95 (3,82)**	**9,72 (1,00)**	**2,47 (032)**
Die Weltraum-Trilogie	**4,21 (0,16)**	**15,25 (3,05)**	**7,47 (0,98)**	**2,03 (0,22)**
Die Chroniken von Narnia	**4,09 (0,09)**	**13,97 (1,94)**	**7,10 (0,89)**	**1,97 (0,15)**

Tabelle 8. George MacDonald. Mittelwert und Standardabweichung (in Klammern) von < CP **>,** < PF **>,** < IP **>,** < MF > **in den angegebenen Romanen. Mittelwert und Standardabweichung wurden berechnet durch Gewichten Sie jedes Kapitel anhand der Anzahl seiner Wörter.**

Im Rücken des Nordwindes	**3,85 (0,11)**	**15,52 (3,34)**	**6,76 (0,77)**	**2,29 (0,35)**
Phantastes: Eine Feen-Romanze für Männer und Frauen	**4,20 (0,12)**	**21,15 (3,58)**	**6,43 (0,49)**	**3,28 (0,45)**
Lilith: Eine Romanze	**4,11 (0,25)**	**15,87 (3,89)**	**6,43 (0,57)**	**2,45 (0,42)**
Die Prinzessin und der Kobold	**4,08 (0,14)**	**17,81 (4,05)**	**7,09 (1,22)**	**2,46 (0,53)**

Tabelle 9. Andere Autoren. Mittelwert und Standardabweichung (in Klammern) von < CP **>,** < PF **>,** < IP **>,** < MF > **in den angegebenen Romanen. Mittelwert und Standardabweichung wurden berechnet durch Gewichten Sie jedes Kapitel anhand der Anzahl seiner Wörter.**

Roman	<CP>	<PF>	<IP>	<MF>
Die Abenteuer von Oliver Twist	**4,23 (0,09)**	**18,04 (3,13)**	**5,70 (0,52)**	**3,16 (0,34)**
David Copperfield	**4,04 (0,12)**	**18,83 (2,50)**	**5,61 (0,30)**	**3,35 (0,33)**
Blödes Haus	**4,23 (0,14)**	**16,95 (2,21)**	**6,59 (0,49)**	**2,57 (0,21)**
Eine Geschichte aus zwei Städten	**4,26 (0,12)**	**18,27 (4,24)**	**6,19 (0,46)**	**2,93 (0,46)**
Unser gemeinsamer Freund	**4,22 (0,12)**	**16,46 (2,01)**	**6,03 (0,37)**	**2,73 (0,27)**
Stolz und Vorurteil	**4,40 (0,14)**	**21,31 (5,02)**	**7,16 (0,46)**	**2,95 (0,46)**
Vanity Fair	**4,63 (0,08)**	**21,95 (3,67)**	**6,73 (0,63)**	**3,25 (0,39)**
Moby Dick	**4,52 (0,16)**	**23,82 (7,44)**	**6,45 (0,99)**	**3,64 (0,80)**
Die Mühle am Floss	**4,29 (0,13)**	**23,84 (4,99)**	**7,09 (0,69)**	**3,35 (0,48)**
Alice im Wunderland	**3,96 (0,08)**	**17,19 (3,20)**	**5,79 (0,55)**	**2,95 (0,28)**
Die Abenteuer des Huckleberry Finn	**3,85 (0,10)**	**19,39 (3,12)**	**6,63 (0,67)**	**2,94 (0,48)**
Das Dschungelbuch	**4,11 (0,09)**	**16,46 (3,09)**	**7,14 (0,53)**	**2,29 (0,30)**
Der Krieg der Welten	**4,38 (0,18)**	**19,22 (4,13)**	**7,67 (0,92)**	**2,48 (0,31)**
Der Zauberer von Oz	**4,02 (0,10)**	**17,90 (2,23)**	**7,63 (0,64)**	**2,34 (0,15)**
Der Hund von Baskerville	**4,15 (0,12)**	**15,07 (3,16)**	**7,83 (0,94)**	**1,91 (0,22)**
Peter Pan	**4,12 (0,09)**	**15,65 (3,98)**	**6,35 (0,92)**	**2,44 (0,37)**
Martin Eden	**4,32 (0,13)**	**15,61 (2,71)**	**6,76 (0,64)**	**2,30 (0,26)**

Machine Translated by Google

Insbesondere sei M **die Anzahl der Stichproben (also der Kapitel), dann ist der Mittelwert** < PF > **gegeben durch**

$$< \mathbf{PF} >= \ddot{y} \quad \sum_{k=1}^{M} \mathbf{PF,k} \times \mathbf{nW,k/} \quad \ddot{y} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{nW,k} \tag{6}$$

Um nicht in die Irre geführt zu werden, beachten Sie bitte, dass $< PF >= \frac{1}{M} \ddot{y} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{PF,k}$ $\ddot{y} = \ddot{y} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{nW,k/} \ddot{y} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{nS,k=W/S.}$

Mit anderen Worten, < PF > **ergibt sich nicht aus der Gesamtzahl der Wörter** W **geteilt durch die Gesamtzahl der Sätze S oder dadurch, dass jedem Kapitel** das Gewicht **1/M** zugewiesen wird. Die drei Werte **stimmen nur dann überein, wenn alle Textblöcke die gleiche Anzahl Wörter und die gleiche Anzahl Sätze enthalten, was jedoch nicht der Fall war. Die gleichen Beobachtungen gelten für alle a**

Aus den Tabellen **6–9 lassen sich die folgenden Merkmale ableiten .** Lord **und** Narnia **haben dasselbe** < PF **>.** Silmarillion **unterscheidet sich deutlich von** Lord **und** Hobbit, **was mit dem unterschiedlichen Dispersionskoeffizienten übereinstimmt.** Screwtape **unterscheidet sich deutlich von** Narnia **und** Trilogy. In Dickens' Romanen herrscht große Homogenität und **in allen Romanen herrscht große Homogenität in** < CP > .

In den nächsten Abschnitten verwenden wir < PF **>,** < IP > **und** < MF >, **um interessante Indizes zu berechnen, die mit dem Kurzzeitgedächtnis von Lesern zusammenhängen.**

5. Erweitertes Kurzzeitgedächtnis von Schreibern/Lesern und universeller Lesbarkeitsindex

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den linguistischen Variablen, die von Autoren höchstwahrscheinlich nicht bewusst gesteuert werden, da diese natürlich auch als Leser ihrer eigenen Texte fungieren. Wir berichten zunächst über Erkenntnisse zum erweiterten Kurzzeitgedächtnis und dann über Erkenntnisse zu einem universellen Lesbarkeitsindex. Beide Themen befassen sich mit Puffern des menschlichen Kurz

5.1. Erweitertes Kurzzeitgedächtnis und Multiplizitätsfaktor **In**

[12,13] haben wir vermutet, dass das menschliche Kurzzeitgedächtnis auf zwei unabhängige Variablen reagiert, die offenbar zwei Kurzzeitgedächtnispuffer in Reihe schalten, Bestandteile dessen, was wir das erweiterte Kurzzeitgedächtnis (E–STM) genannt haben.
Der erste Puffer wird nach der Anzahl der Wörter zwischen zwei aufeinanderfolgenden Interpunktionen modelliert, also nach der Variablen IP, **dem Wortintervall, das Millers 7 ± 2-Gesetz [14] folgt. Der zweite Puffer wird nach der Anzahl der Wortintervalle (IPÿs) in einem Satz modelliert, also nach der Variablen MF, und liegt ungefähr im Bereich von 1 bis 7.**

In [13] haben wir die Muster untersucht (die von der Größe der beiden Puffer abhängen), die die Anzahl der Sätze bestimmen, die theoretisch im E–STM einer bestimmten Kapazität aufgezeichnet werden können. Diese Muster wurden dann mit der Anzahl der Sätze verglichen, die tatsächlich in Romanen der italienischen und englischen Literatur vorkommen. Wir haben festgestellt, dass die meisten Autoren für Leser mit kleinen Gedächtnispuffern schreiben und daher gezwungen sind, Satzmuster wiederzuverwenden, um mehrere Bedeutungen zu vermitteln. Dieses Verhalten wird durch den Multiplizitätsfaktor ÿ quantifiziert, der als Verhältnis zwischen der Anzahl der Sätze in einem Roman und der Anzahl der Sätze definiert ist, die theoretisch von den beiden Puf

Wir haben festgestellt, dass $\ddot{y} > 1$ **wahrscheinlicher ist als** $\ddot{y} < 1$ **und häufig** $\ddot{y} \ddot{y} 1$**. Im letzteren Fall verwenden die Autoren oft dasselbe Muster der Wortanzahl. Nur wenige Romane weisen** $\ddot{y} < 1$ **auf; in diesem Fall verwenden die Autoren einige oder die meisten dieser Muster nicht. Die in den derzeit untersuchten Romanen gefundenen** *ÿ*- Werte sind in den Tabellen **10 und 11 aufgeführt .**

Tabelle 10. Multiplizitätsfaktor ÿ, universeller Lesbarkeitsindex < GU > **und Anzahl der Schuljahre** Y **in den angegebenen Romanen von Tolkien, Lewis, MacDonald.**

Roman	*ÿ*	<GU>	Y
Der Hobbit	**39,4**	**52,4**	**9.9**
Der Herr der Ringe	**368.1**	**64,2**	**7.4**
Das Silmarillion	**0,2**	**38,7**	**>13**

Machine Translated by Google

Tabelle 10. Fortsetzung

Roman	ÿ	<GU>	Y
Dienstanweisungen für einen Unterteufel	1.4	33,5	>13
Die Weltraum-Trilogie	186,3	56,2	9,0
Die Chroniken von Narnia	297,7	61.1	7.9
Im Rücken des Nordwindes	26.3	63,9	7.5
Phantastes: Eine Feen-Romanze für Männer und Frauen	24.3	56,6	8.9
Lilith: Eine Romanze	1.4	63,0	7.5
Die Prinzessin und der Kobold	8,5	58,2	8.4

Tabelle 11. Multiplizitätsfaktor ÿ, universeller Lese-Index < GU > **und Anzahl der Schuljahre in die angegebenen Romane der englischen Literatur.**

Roman	ÿ	<GU>	Y
Die Abenteuer von Oliver Twist	9,46	63,19	7.5
David Copperfield	12,63	64,78	7.2
Blödes Haus	56,98	58,74	8.3
Eine Geschichte aus zwei Städten	11,89	59,91	8,0
Unser gemeinsamer Freund	43,41	62,68	7.6
Stolz und Vorurteil	5.20	50,33	10.4
Vanity Fair	5.26	49,74	10.5
Moby Dick	1,56	52,63	9.9
Die Mühle am Floss	2.17	50,22	10.5
Alice im Wunderland	2,90	59,27	8.1
Die Abenteuer des Huckleberry Finn	7.05	60,42	8,0
Das Dschungelbuch	14.10	57,59	8.6
Der Krieg der Welten	6,72	49,05	10.8
Der Zauberer von Oz	7.02	53,83	9,5
Der Hund von Baskerville	43,87	54,87	9.2
Peter Pan	13.07	63,60	7.5
Martin Eden	46,33	58,53	8.2

5.2. Universeller Lesbarkeitsindex

In Referenz [14] haben wir einen universellen Lesbarkeitsindex vorgeschlagen, der gegeben ist durch

$$GU = \mathbf{89–10\ kCP} + \mathbf{300/PF–6\ (IP–6)} \quad \textbf{(7)}$$

$$k = < CP,ITA \mathbf{>/<} CP,Eng > \quad \textbf{(8)}$$

In Gleichung (8) ist < Cp,ITA >= **4,48,** < Cp,ENG >= **4,24. Unter Verwendung der Gleichungen (7) und (8) Der Durchschnittswert** < kCP > **einer Sprache muss dem des Italienischen entsprechen, nämlich 4,48. Der Grund für diese Wahl ist, dass** CP **ein typischer Parameter einer Sprache ist** Dies würde, wenn es nicht skaliert würde, die GU **verzerren, ohne die Leseschwierigkeiten wirklich zu quantifizieren für Leser, die in ihrer Sprache im Durchschnitt daran gewöhnt sind, kürzere oder längere Wörter zu lesen als im Italienischen. Diese Skalierung vermeidet daher die Änderung von** GU **aus dem einzigen Grund, dass ein Sprache hat im Durchschnitt kürzere (wie Englisch) oder längere Wörter als Italienisch. In jedem Fall** Cp **beeinflusst Gleichung (7) viel weniger als** PF **oder** IP.

Die Werte von < GU **> – berechnet wie die anderen linguistischen Variablen, d. h. durch Gewichtung Die nach der Anzahl der Wörter sortierten Kapitel (Beispiele) sind in den Tabellen 10 und 11 aufgeführt.**

Machine Translated by Google

Der Leser könnte versucht sein, Gleichung (7) durch Einsetzen der in den Tabellen 6–9 angegebenen Mittelwerte zu berechnen . Dies ist natürlich möglich, es ist jedoch zu beachten, dass die so erhaltenen Werte immer kleiner oder gleich den aus den Stichproben berechneten Mittelwerten sind (daher handelt es sich um Untergrenzen) (siehe Anhang A). Für Lord würden wir **beispielsweise statt 64,9 61,9 erhalten.**

Es ist interessant, diese Mittelwerte in die Mindestanzahl an Schuljahren Y zu „dekodieren“ , die erforderlich ist, damit ein Roman gemäß dem **als Referenz angenommenen italienischen Schulsystem „leicht“ lesbar ist,** siehe Abbildung **1 von [15].** Die Ergebnisse sind auch in **den Tabellen 10 und** 11 **aufgeführt .**

5.3. Diskussion

Aus den in den vorhergehenden **Unterabschnitten vorgestellten Ergebnissen lassen sich mehrere interessante**

Beobachtungen ziehen . (a). Silmarillion **mit** *ÿ* = **0,2 unterscheidet sich recht stark von anderen Werken Tolkiens. Mathematisch liegt dies an seinen großen** < MF >= **3,62 und** < IP >= **8,58. In der Praxis beträgt die Anzahl der theoretischen Sätze, die das E–STM zum Lesen dieses Textes zulässt, nur 1/ ÿ = 5 mal die Anzahl der tatsächlich im Text verwendeten Satzmuster. Der Leser benötigt ein leistungsstarkes E–STM und Lesefähigkeit, da** GU = **38,7 und** Y > **13. Dies gilt nicht für** Hobbit *(ÿ* = **39,4,** GU = **52,4,** Y **= 9,9) und** Lord *(ÿ* = **368,1,** GU = **64,2,** Y = **7,4), in denen Tolkien Muster viele Male wiederverwendet, besonders in** Lord. **(b).** Lord **und** Narnia **weisen sehr**
große Werte auf, *ÿ* = **368,1 und** *ÿ* = **297,7, und sehr ähnliche GUs und Schuljahre:** GU = **64,2,** Y = **7,4 bzw.** GU = **61,1,** Y = **7,9.**
Satzmuster werden von Lewis in diesem Roman viele Male wiederverwendet, nicht jedoch in Screwtape *(ÿ* = **1,4), das schwieriger zu lesen ist** (GU = **33,5) und mehr Schuljahre erfordert ,** Y > **13. Außerdem** haben Lord **und** Narnia **praktisch den gleichen** < PF **>ÿ 14. (c). Im Allgemeinen** ist Narnia Lord **näher als** Trilogy, **obwohl die Anzahl der Wörter und Sätze in** Trilogy **und** Narnia **ziemlich ähnlich ist (Tabelle 1). Dieser Unterschied zwischen** Trilogy (GU = **56,2,** Y = **9) und** Narnia (GU = **61,1,** Y = **7,9) könnte von den unterschiedlichen Lesern abhängen, die angesprochen werden, Kinder für** Narnia **und Erwachsene für** Trilogy, **mit unterschiedlichen Lesefähigkeiten, wie** GU **anzeigt. (d). Die Romane von MacDonald weisen Werte von** *ÿ*
und GU auf , **die denen der anderen sehr ähnlich sind.**
Englische Romane.
(e). Beachten Sie die Homogenität in Dickens Romanen, die etwa Y = **7 ÿ 8 Jahre** erfordern
Schul- und Lesbarkeitsindex < GU >= **59 ÿ 65.**

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Lord **und** Narnia **die Romane sind, die Leser mit sehr ähnlichen E–STM-Puffern ansprechen, Satzmuster auf ähnliche Weise wiederverwenden, die gleiche Anzahl von Wörtern pro Satz enthalten und im Vergleich zu anderen Romanen von Tolkien und Lewis die gleichen Lesefähigkeiten und Schuljahre erfordern . Die mathematischen Zusammenhänge zwischen** Lord **und** Narnia **werden im nächsten Abschnitt weiter untersucht, in dem die vier tiefen Sprachparameter verwendet werden, um Texte geometrisch darzustellen.**

6. Geometrische Darstellung von Texten

Die Mittelwerte der Tabellen 6–9 können verwendet werden, um zu beurteilen, wie „nah“ oder mathematisch ähnlich sich Texte im kartesischen Koordinatensystem sind, indem lineare Kombinationen von Variablen der tiefen Sprache definiert werden. Texte werden dann als Vektoren modelliert; die Darstellung wird ausführlich in [9,10] erörtert **und hier kurz in Erinnerung gerufen. Eine Erweiterung dieser geometrischen Darstellung von Texten ermöglicht die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Text mit einem anderen verwechselt werden kann ,** eine Erweiterung des in **[16] erörterten Problems in zwei Dimensionen . Die Werte der bedingten Wahrscheinlichkeit zwischen zwei Texten (Autoren) können als Index betrachtet werden, der angibt, wer wen beeinflusst hat.**

Machine Translated by Google

6.1. Vektordarstellung von Texten

Betrachten wir die folgenden sechs Vektoren der angegebenen Komponenten der tiefen Sprache Variablen: $\vec{R1}$ = (<CP> , <PF>) , $\vec{R2}$ = (<MF> , <PF>) , $\vec{R3}$ = (<IP> , <PF>) , $\vec{R4}$ = (< CP **>,** < MF **>),** $\vec{R5}$ = (<IP> , <MF>) , $\vec{R6}$ = (< IP **>,** < CP **>) und deren resultierende Vektorsumme:**

$$\vec{R} = \vec{y} \sum_{k=1}^{6} \vec{Rk} = x \vec{ich} + y \vec{J} \quad (9)$$

Die Wahl des Parameters, den die Komponente auf der Abszissen- und Ordinatenachse darstellt, ist nicht wichtig, da nach der Auswahl die numerischen Ergebnisse **davon abhängen ,** nicht jedoch die relativen Vergleiche und allgemeinen Schlussfolgerungen. **(1=0, 1=0) (1=1, 1=1)**

Im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems sind zwei Texte wahrscheinlich mathematisch verbunden – sie weisen nahe Endpunkte des Vektors (9) auf –, wenn ihre relative pythagoräische Distanz gering ist. Eine geringe Distanz bedeutet, dass die Texte **gemäß den vier tiefen Sprachvariablen eine ähnliche mathematische Struktur aufweisen .**

Indem wir die Vektorkomponenten x **und** y der Gleichung (9) betrachten, erhalten wir das **in Abbildung** 2 dargestellte **Streudiagramm, wobei** X **und** Y normalisierte Koordinaten sind, die berechnet werden, indem man Lord **an den Ursprung** (X = **0,** Y = 0) **und** Silmarillion **an** den Ursprung (X = **1,** Y = 1) **setzt , gemäß den linearen Transformationen:**

$$X = \frac{x - xHerr}{xSilma - xLord} \quad (10)$$

$$X = \frac{y - yHerr}{ySilma - yLord} \quad (11)$$

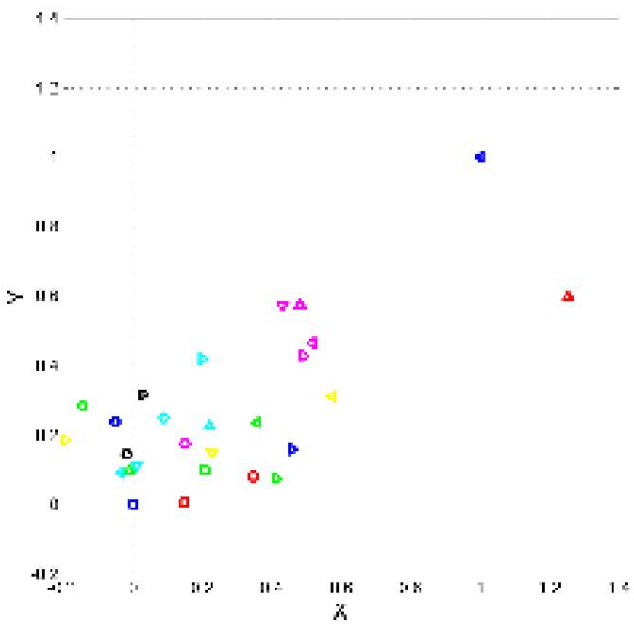


Abbildung 2. Normalisierte Koordinaten X **und** Y **des Endpunkts von Vektor (5), sodass** Lord, **blaues Quadrat, bei (0,0) und** Silmarillion, **blaues Dreieck, das nach links zeigt, bei (1,1) liegt.** Narnia: **rotes Quadrat;** Trilogie: **roter Kreis;** Hobbit: **blaues Dreieck, das nach rechts zeigt;** Screwtape: **rotes Dreieck, das nach oben zeigt;** Rückseite: **cyanfarbenes Dreieck, das nach links zeigt;** Lilith: **cyanfarbenes Dreieck, das nach unten zeigt;** Rückseite: cyanfarbenes Dreieck , **das nach links zeigt;** Phantastes: **cyanfarbenes Dreieck, das nach rechts zeigt;** Princess: **cyanfarbenes Dreieck, das nach oben zeigt;** Oliver: **blauer Kreis;** David: **grüner Kreis;** Tale: **cyanfarbener Kreis;** Bleak: **magentafarbener Kreis;** Mutual: **schwarzer Kreis;** Pride: **magentafarbenes** Dreieck, **das nach rechts zeigt;** Vanity: **magentafarbenes Dreieck, das nach links zeigt;** Moby: **magentafarbenes Dreieck, das nach unten zeigt;** Mill: **magentafarbenes Dreieck, das nach oben zeigt;** Alice: **gelbes Dreieck, das nach rechts zeigt;** Jungle: **gelbes Dreieck, das nach unten zeigt;** War: **gelbes Dreieck, das nach rechts zeigt;** Oz: **grünes Dreieck, das nach links zeigt;** Bask: **grünes Dreieck nach rechts;** Peter: **grünes Dreieck nach oben;** Martin: **grünes Quadrat;** Finn: **schwarzes Dreieck n**

< 0,2

Machine Translated by Google

Aus Abbildung 2 können wir erkennen, dass Silmarillion **und** Screwtape **deutlich weit von allen anderen untersuchten Texten entfernt sind, was ihre bemerkenswerte Vielfalt, wie bereits erwähnt, kennzeichnet; daher** werden **wir sie in den folgenden Analysen vernachlässigen. Darüber hinaus sind** Pride, Vanity, Moby **und** Floss **zusammen gruppiert und weit von** Trilogy, Narnia **und** Lord entfernt; **daher werden wir sie in den folgenden Analysen nicht weiter berücksichtigen.**

Der vollständige Satz der pythagoräischen Distanz d **zwischen Textpaaren ist in Anhang B aufgeführt. Diese Daten beschreiben synthetisch die Nähe von Texten und können Literaturwissenschaftlern bisher nicht berücksichtigte Verbindungen zwischen Texten aufzeigen.**

Abbildung 3 zeigt Beispiele dieser Distanzen in Bezug auf Lord, Narnia **und** Trilogy. **In Bezug auf die Fälle, in denen** d < **0,2 ist, können wir Folgendes beobachten: (a). Die Texte, die** Lord am nächsten kommen, **sind** Narnia, Back, Lilith, Mutual **und** Peter. **(b).** Die Texte, die Narnia **am nächsten kommen, sind** Lord, Lilith, Bleak, Martin **und** Peter. **(c). Die Texte, die** Trilogy am nächsten kommen, **sind** Hobbit, Martin **und** Peter.

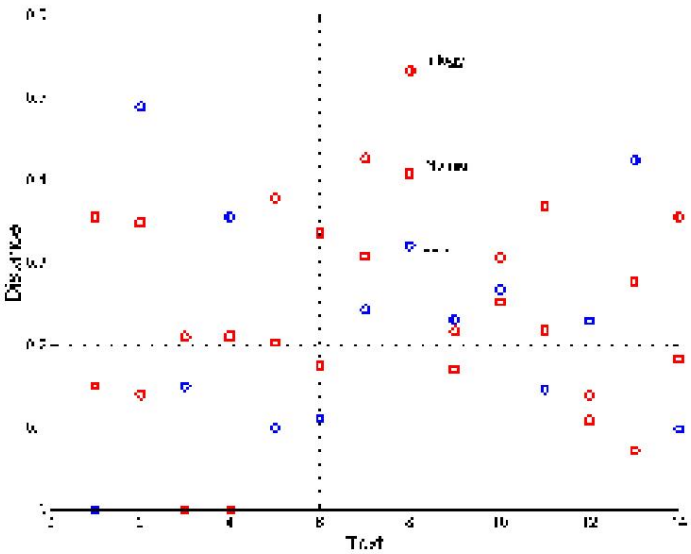


Abbildung 3. Pythagoräische Distanz d **zwischen Textpaaren unter Berücksichtigung** von Lord **(die Distanzen in diesem Fall sind mit blauen Kreisen gekennzeichnet),** Narnia **(rote Quadrate) und Trilogy (rote Kreise). Legende:** Lord **1,** Hobbit **2,** Narnia **3,** Trilogy **4,** Back **5,** Lilith **6,** Oliver **7,** David **8,** Bleak **9,** Tale **10,** Mutual **11,** Martin **12,** Bask **13,** Peter **14.**

Neben der Nähe zu früheren Romanen weisen Lord **und** Narnia **große Ähnlichkeiten zueinander und zu zwei Romanen von MacDonald auf.**

Diese Bemerkungen beziehen sich jedoch auf die „durchschnittliche“ Darstellung von Vektoren, deren Endpunkt nur von Mittelwerten abhängt. Die Standardabweichung der vier Variablen der tiefen Sprache, die in den Tabellen 6–9 aufgeführt sind, führt tatsächlich zu einer Datenstreuung. Daher untersuchen und diskutieren wir dieses Problem im nächsten Unterabschnitt, indem wir die Wahrscheinlichkeit (die sogenannte „Fehlerwahrscheinlichkeit“) berechnen, mit der ein Text mathematisch mit einem anderen verwechselt werden kann.

6.2. Fehlerwahrscheinlichkeit: Ein Index zur Beurteilung, wer wen beeinflusst hat

Neben dem Vektor R **von Gleichung (9) – aufgrund von Mittelwerten – können wir eine andere Vektor aufgrund der Standardabweichung der vier Variablen der tiefen Sprache, die zu R** addiert wird. **+ In diesem Fall ist der endgültige Zufallsvektor, der einen Text beschreibt, gegeben durch**

$$T = R + \ddot{y} \qquad (12)$$

Um nun einen Einblick in diese neue Beschreibung zu erhalten, betrachten wir die Fläche eines Kreises zentriert am Endpunkt von R.

= 0,5 × (+)

=

Machine Translated by Google

Wir legen den Betrag (Radius) $\ddot{y}$ **wie folgt fest. Zuerst addieren wir die Varianzen der tiefen** y . **Dann**
Sprachvariablen, die die Komponenten x **und** y **bestimmen.** $\ddot{y}$ **Betrachten sie** $\ddot{y}$ **und** $^{2}_{x,}$ $_{y}$ ^{2}
wir berechnen den Durchschnittswert $\ddot{y}^{2}_{\ddot{y}} = 0{,}5 \times \ddot{y} + \ddot{y}\,y$ x **schließlich setzen wir**

$$\ddot{y} = \ddot{y}\ddot{y} \quad (13)$$

Da nun bei der Berechnung der Koordinaten x **und** y $\ddot{y}$ **von** $_{\ddot{y}}$ **Keine Variable aus einer tiefen Sprache kann zweimal oder öfter summiert werden, wir addieren ihre Standardabweichung (bezeichnet als Sigma) zweimal oder öfter, bevor wir quadrieren. Beispielsweise** erscheint IP, in der **x-Komponente dreimal; daher beträgt sein Beitrag zur Gesamtvarianz auf der x-Achse das 9-fache der Varianz, berechnet aus**
die in den Tabellen **6–9 angegebene Standardabweichung . Für** Lord **beträgt sie beispielsweise 9 × 0,512 . Nach diesen Berechnungen werden die Werte des 1–Sigma-Kreises gemäß den Gleichungen (10) und (11)** in die normalisierten **Koordinaten X,** Y transformiert.

Abbildung 4 zeigt ein signifikantes Beispiel mit Lord, Narnia, Trilogy, Back **und** Peter.
Wir sehen, dass Lord fast vollständig mit Narnia **und teilweise mit** Trilogy **verwechselt werden kann , aber nicht umgekehrt.** Lord kann auch mit Peter **und** Back **verwechselt werden ,** was **auf starke Verbindungen zu diesen früheren Romanen hinweist.**

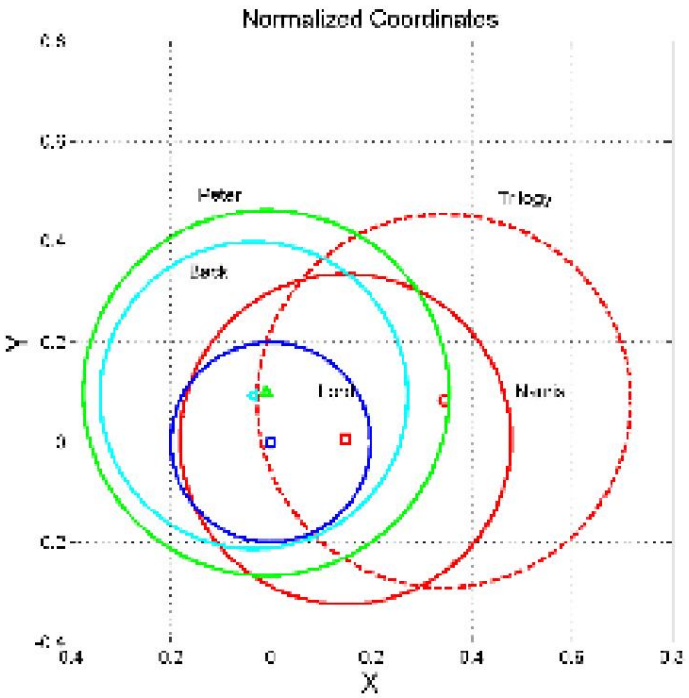


Abbildung 4. Normalisierte Koordinaten X **und** Y **des Endpunkts des Vektors (5) und der 1–Sigma-Kreise, so dass** Lord, **blaues Quadrat, bei (0,0) und** Silmarillion, **blaues nach links zeigendes Dreieck, bei (1,1) liegt.** Lord: **blaues Quadrat (blauer 1–Sigma-Kreis);** Narnia: **rotes Quadrat (roter 1–Sigma-Kreis);** Trilogie: **roter Kreis (gestrichelter roter 1–Sigma- Kreis);** Rückseite: **cyanfarbenes nach links zeigendes Dreieck (cyanfarbener 1–Sigma-Kreis);** Peter: **grünes nach oben zeigendes Dreieck (grüner 1–Sigma-Kreis).**

Nun können wir die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Text mit einem anderen verwechselt wird, abschätzen, indem wir das Flächenverhältnis berechnen. Dieses Verfahren ist korrekt, wenn wir annehmen, dass die bivariate Dichte der normalisierten Koordinaten $\ddot{y}$X, ÿY, **zentriert bei R, gleichmäßig ist. Unter dieser Annahme können wir Wahrscheinlichkeiten als Flächenverhältnis berechnen [17,1**

Die Hypothese der wesentlichen Einheitlichkeit um R herum **sollte dadurch gerechtfertigt werden, feststellt, dass = (/) die Koordinaten X,** Y **wahrscheinlich gemäß einer log-normalen bivariaten Dichte verteilt sind, da der Logarithmus der vier Variablen der tiefen Sprache, die sich in Gleichung (9) (/) ( ) kombinieren, als Gaußsche Verteilung modelliert werden kann. Für den zentralen Grenzwertsatz sollten ungefähr ein Gaußsches Modell für die linearen Werte erwarten, jedoch mit einer deutlich größeren**

Machine Translated by Google

Standardabweichung als die der einzelnen Variablen. Daher im Bereich nahe $\ddot{y}$ **R, der Die bivariate Dichtefunktion sollte keine Spitzen aufweisen, daher die Modellierung mit gleichmäßiger Dichte.**

Nun können wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten berechnen. Sei A **die gemeinsame Fläche zweier 1–Sigma-Kreise (d. h. die Fläche proportional zur gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Texte), sei A1 die Fläche des 1–Sigma-Kreises von Text 1 und A2 die Fläche des 1–Sigma-Kreises von Text 2. Da Wahrscheinlichkeiten sind proportional zu Flächen, wir erhalten die folgenden Beziehungen:**

$$\frac{A}{A1} = \frac{\text{Die Gleichung lautet :}}{P(A1)} = \frac{P(A2/A1)P(A1)}{P(A1)} = P(A2/A1) \quad (14)$$

$$\frac{A}{A2} = \frac{\text{Die Gleichung lautet :}}{P(A2)} = \frac{P(A1/A2)P(A2)}{P(A2)} = P(A1/A2) \quad (15)$$

Mit anderen Worten, A/A1 **ergibt die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A2/A1), dass Teil des Textes 2 kann mit Text 1 verwechselt werden (oder „enthalten“);** A/A2 **gibt die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A1/A2), dass ein Teil von Text 1 mit Text 2 verwechselt werden kann. Beachten Sie, dass diese bedingten Wahrscheinlichkeiten von der Distanz zwischen zwei Texten und von den 1–Sigma-Radien abhängen (A**

Natürlich können diese gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten auf drei oder mehr Texte ausgedehnt werden, z. B. in Abbildung 4: Wir könnten die von Lord, Narnia **und** Trilogy **gemeinsam genutzte Fläche und die entsprechende gemeinsame Wahrscheinlichkeit berechnen, was in der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt wird.**

Wir denken, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten und die visuelle Darstellung von 1–Sigma-Kreisen geben nützliche Hinweise, um mögliche versteckte Verbindungen zwischen Texten herzustellen und vielleicht sogar zwischen den Autoren, da die beteiligten Variablen von ihnen nicht bewusst verwaltet werden.

In Tabelle 12 wird **die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A2/A1) in den Spalten angegeben; daher A1 bezieht sich auf den Text, der in der oberen Zeile angegeben ist. P(A1/A2) wird in den Zeilen angegeben. A2 bezieht sich auf den in der linken Spalte angegebenen Text.**

Tabelle 12. Bedingte Wahrscheinlichkeit zwischen den angegebenen Romanen. P(A2/A1) wird in den Spalten angegeben; Daher bezieht sich **A1 auf den in der oberen Zeile angegebenen Text. P(A1/A2) wird in den Zeilen angegeben; daher A2 bezieht sich auf den Text in der linken Spalte. Wenn wir beispielsweise annehmen,** dass Lord **Text 1 ist (Spalte 1 von Tabelle 12) und** Narnia **als Text 2 (Zeile 3), erhalten wir P(A2/A1)** = **0,974 und umgekehrt. Wenn wir annehmen,** dass Narnia **als Text 1 (Spalte 3) und** Lord **als Text 2 (Zeile 1) erhalten wir P(A2/A1)** = **0,356.**

	Roman Lord Hobbit	Narnia	Trilogie	Zurück	Lilith	Oliver	David	Bleak	Tale	Mutual	Martin	Bask	Peter
	Lord **1** Hobbit	**0,031**	**0,356**	**0,142**	**0,423**	**0,511**	**0,277**	**0,041**	**0,307**	**0,231**	**0,619**	**0,301**	**0,078**	**0,299**
1	**0,099** Narnia **0,974**		**0,421**	**0,731**	**0,171**	**0,225**	**0,074**		**0,592**	**0,376**	**0,060**	**0,665**	**0,833**	**0,227**
2	Trilogie **0,498**	**1**		**0,550**	**0,647**	**0,781**	**0,489**	**0**	**0,927**	**0,625**	**0,886**	**0,949**	**0,462**	**0,602**
3	Zurück Lililth Oliver	**0,354**	**1**		**0,400**	**0,510**	**0,297**		**0,921**	**0,608**	**0,473**	**0,978**	**0,908**	**0,421**
4	**0,352**	**0,786**	**0,704**	**1**		**0,997**	**0,866**	**0,166**	**0,763**	**0,692**		**0,566**	**0,179**	**0,707**
5	David **1 0,891**	**0,124**	**0,559**	**0,270**	**1**		**0,741**	**0**	**0,762**	**0,661**		**0,546**	**0,169**	**0,521**
6	**0,024** Bleak **0,307**	**0,121**	**0,498**	**0,254**	**0,735**	**1**		**0,796**	**0,444**	**0,579**	**1 1**	**0,239**	**0,043**	**0,378**
7	Tale **0,330** Mutual		**0,227**		**0,466**	**0,540**	**1**		**0,029**	**0,173**	**0,917**	**0,001**		**0,168**
8	**0,390** Martin **0,490**	**0,029**	**0,035**	**0,108**	**0,195**	**0,186**	**0,416**	**0,559**		**0,598**	**0,262**	**0,558**	**0**	**0,296**
9	Bask **0,250** Peter	**0**	**0,339**	**0**	**0,323**	**0,437**	**0,350**	**0,913**	**1**		**0,526**	**0,484**	**0,208**	**0,385**
10	**1**	**0,182**	**0,327**	**0,264**	**0,417**	**0,541**	**0,650**	**1**	**0,852**	**1**		**0,205**	**0,176**	**0,188**
11		**0,165**	**0,204**	**0,248**	**0,266**	**0,361**	**0,454**	**0,051**	**0,331**	**0,342**	**0,774**		**0,031**	**0,384**
12		**0,012**	**0,565**	**0,085**	**0,389**	**0,509**	**0,307**		**0,906**	**0,551**	**1**	**1**		**0,289**
13 14		**0,333**	**0,826**	**0,545**	**0,736**	**0,455**	**0,838**	**0,402**	**0,244**	**1**	**0,312**	**1**	**0,110**	**0,996**	**0,427**	**0,285**	**0,664**	**0,958**	**0,397**	**0,904**	**0,529**	**0,160**	**0,785**	**0,790**	**0,396**	**1**	**0,300**	**1**

Beachten Sie, dass P(A2/A1) = **1 bedeutet,** dass A = **A1 ist; daher kann Text 1 völlig verwechselt werden mit Text 2. P(A1/A2)** = **1 bedeutet** A = **A2; daher kann Text 2 völlig mit Text 1 verwechselt werden.**

Nehmen wir beispielsweise an, dass Lord **Text 1 (Spalte 1 von Tabelle 12) und** Narnia **Text 2 (Zeile 3) ist. erhalten wir P(A2/A1)** = **0,974 und umgekehrt. Wenn wir** Narnia **als Text 1 (Spalte 3) annehmen und** Lord **als Text 2 (Zeile 1) verwenden, erhalten wir P(A2/A1)** = **0,356. Diese Daten zeigen, dass** Lord mit einer Wahrscheinlichkeit nahe 1 **mit** Narnia verwechselt werden , **aber nicht umgekehrt. Mit anderen Worten, in Wenn die in diesem Artikel betrachtete Datenbank eine Maschine zufällig ein Kapitel aus** Lord extrahiert, **eine andere Maschine, die diese Wahl nicht kennt, könnte sie** Lord zuschreiben, **aber auch mit abnehmender Wahrscheinlichkeit für** Back, Peter, Narnia **und** Lilith.

Machine Translated by Google

Im Gegenteil, wenn der Text aus Narnia stammt , dann ist er eher zuzuschreiben
Peter **oder** Trilogie **als** Lord **oder andere Texte.**

Wir glauben, dass diese bedingten Wahrscheinlichkeiten Aufschluss darüber geben, wer wen stärker beeinflusst hat. Mit anderen Worten: Tolkien hat Lewis stärker beeinflusst als umgekehrt.

Nun können wir einen synthetischen Parameter definieren, der angibt, wie oft zwei Texte im Durchschnitt irrtümlicherweise miteinander verwechselt werden können. Der Parameter ist die Wahrscheinlichkeit (siehe [16] für ein ähnliches Problem):

$$pe = P(A2/A1)P(A1) + P(A1/A2)P(A2) = 0,5 \times [P(A2/A1) + P(A1/A2)] \quad (16)$$

Da wir nun beim Vergleich zweier Texte P(A1) = P(A2) = **0,5 annehmen können, erhalten wir**

$$pe = 0,5 \times [P(A2/A1) + P(A1/A2)] \quad (17)$$

Wenn pe = **0, gibt es keine Schnittmenge zwischen den beiden 1–Sigma-Kreisen. Die beiden Texte können nicht miteinander verwechselt werden; daher besteht keine mathematische Verbindung, die die Parameter der tiefen Sprache einbezieht (das ist bei** Screwtape **und** Silmarillion der Fall, die **miteinander verwechselt werden können ,** aber nicht mit den anderen Texten). Wenn pe = **1, können die beiden Texte völlig verwechselt werden und die beiden 1–Sigma-Kreise fallen zusammen. Anhang D gibt die Werte von** pe **für alle Romanpaare > 0,5 y 0,5** an.

Um eine grobe Analyse zu ermöglichen, ist es sinnvoll, pe = **0,5 als Referenzschwelle anzunehmen, also die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen einer fairen Münze Kopf oder Zahl zu erhalten. Wenn** pe > **0,5, dann können zwei Texte nicht zufällig verwechselt werden; wenn** pe **ÿ 0,5, dann ist es unwahrscheinlich, dass zwei Texte verwechselt werden.**

Um pe **zu visualisieren , zeichnet Abbildung 5** pe , **wenn Text 1** Lord ist **(Spalte 1 von Tabelle 12),** Narnia **(Spalte 3) oder** Trilogie **(Spalte 4). Wir stellen fest, dass** pe > **0,5 in den folgenden Fällen: (a).**
Lord **als Text 1:** Narnia, Back, Lilith, Mutual, Peter. **(b).** Narnia **als Text 1:** Lord, Trilogie, Back, Lilith, Bleak, Mutual, Martin, Peter. **(c).** Trilogie **als Text 1:** Hobbit, Narnia, Bleak, Martin, Bask.

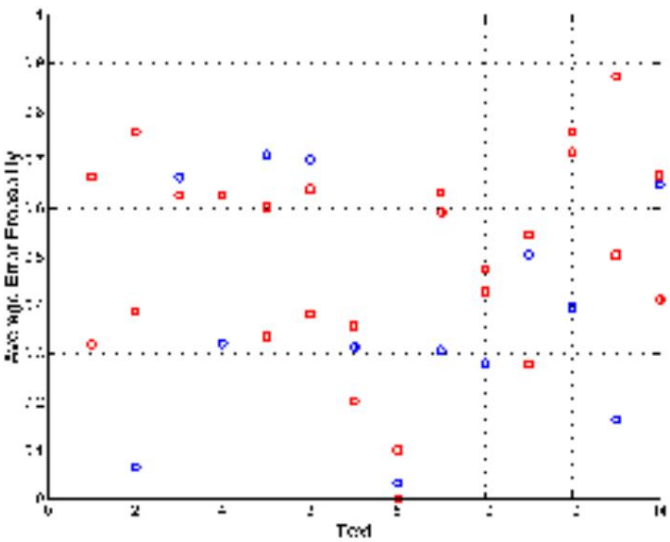


Abbildung 5. Fehlerwahrscheinlichkeit pe **gegenüber Text 2.** Lord **(die Wahrscheinlichkeiten, die sich auf diesen Fall beziehen, sind mit blauen Kreisen gekennzeichnet),** Narnia **(rote Quadrate) und** Trilogie **(rote Kreise). Textschlüssel:** Lord **1,** Hobbit **2,** Narnia **3,** Trilogie **4,** Back **5,** Lilith **6,** Oliver **7,** David **8,** Bleak **9,** Tale **10,** Mutual **11,** Martin **12,** Bask **1**

Wir können wiederholen, dass Tolkien (Lord) **eine bedeutende Verbindung zu Lewis** (Narnia), **zu MacDonald** (Back, Lilith) **und zu Barrie** (Peter) aufweist, **nicht jedoch zu den Romanen von Dickens, bei denen im Gegenteil eine Verbindung zu Lewis besteht.**

Machine Translated by Google

Im nächsten Abschnitt werden die vier Variablen der tiefen Sprache herausgegriffen, um sie zu berücksichtigen linguistische Kanäle, die in Texten existieren. Dies ist die Analyse, die wir die „Feinabstimmung“ von Texte [11].

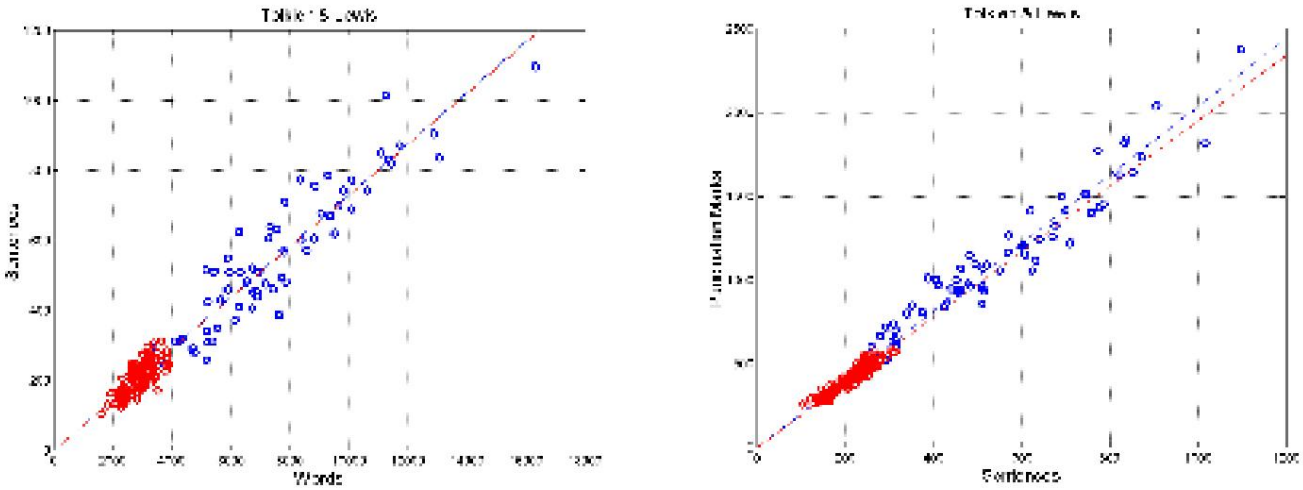
7. Lineare Beziehungen in literarischen Texten

Die Theorie der linguistischen Kanäle, auf die wir im nächsten Abschnitt zurückkommen werden, ist basierend auf der Regressionslinie zwischen linguistischen Variablen:

$$y = mx + \quad (18)$$

Daher zeigen wir Beispiele dieser linearen Beziehungen, die in Lord **und** Narnia zu finden sind.

Abbildung 6a zeigt das Streudiagramm von nS **gegenüber** nW **von** Lord **und** Narnia. **In** Narnia **ist die Die Steigung der Regressionsgerade beträgt** m = **0,0729 und der Korrelationskoeffizient** r = **0,7610.** Lord, m = **0,0731 und** r = **0,9199. Da die durchschnittlichen Beziehungen – also Gleichung (18) – praktisch identisch – siehe auch die Werte von** < PF > **in den Tabellen 6 und 7 – während die Korrelation Koeffizienten – also die Streuung der Daten – nicht, diese Tatsache wird den Satz beeinflussen Kanal, der in Abschnitt 9 besprochen wird.**



(A) **(B)**

Abbildung 6. (a) Streudiagramm von nS **gegenüber** nW **in** Lord **(blau) und** Narnia **(rot); (b)** nI **gegenüber** nS **in** Lord **(blau) und** Narnia **(rot).**

Ähnliche Beobachtungen können für Abbildung 6b gemacht werden , die nI **gegenüber** nS zeigt **in** Lord **und** Narnia. **Wir finden** nW = **2,0872,** r = **0,9609 in** Lord **und** m = **1,9520 und** r = **0,9384 in** Narnia. **Anhang E enthält den vollständigen Satz dieser Parameter.**

Abbildung 7 zeigt die Streudiagramme von Lord **und** Trilogy. **In** Trilogy **ist für** nS **gegenüber** nW **m = 0,0672,** r = **0,9325; für** nI **gegenüber** nS m = **1,9664,** r = **0,9830.**

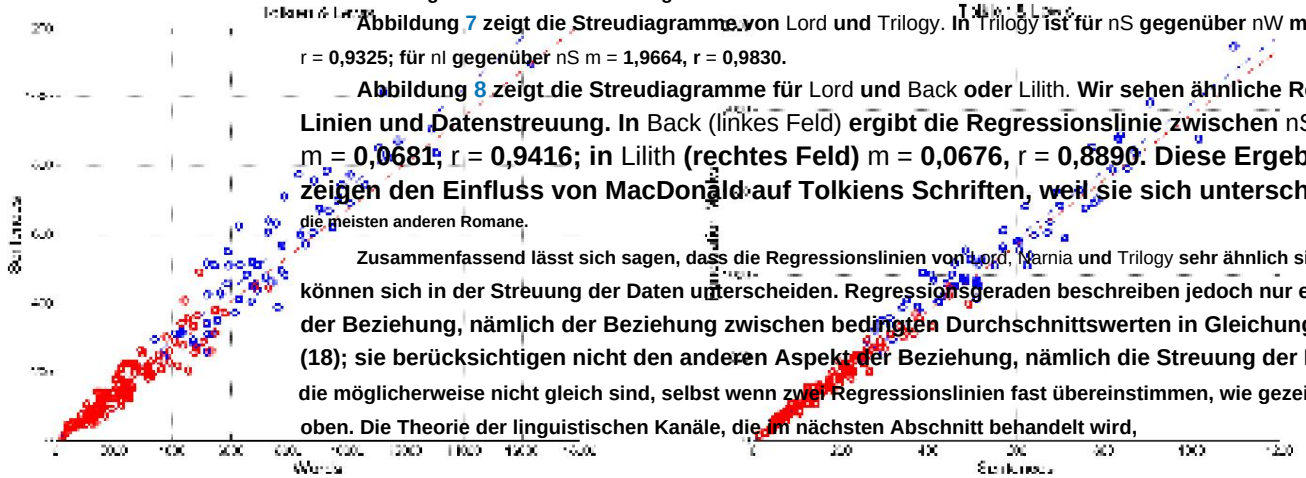
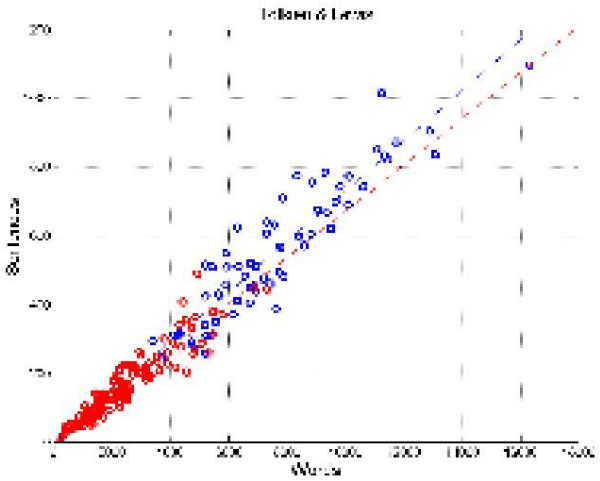


Abbildung 8 zeigt die Streudiagramme für Lord **und** Back **oder** Lilith. **Wir sehen ähnliche Regression Linien und Datenstreuung. In** Back (linkes Feld) **ergibt die Regressionslinie zwischen** nS **und** nW m = **0,0681,** r = **0,9416; in** Lilith **(rechtes Feld)** m = **0,0676,** r = **0,8890. Diese Ergebnisse zeigen den Einfluss von MacDonald auf Tolkiens Schriften, weil sie sich unterscheiden von die meisten anderen Romane.**

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Regressionslinien von Lord, Narnia **und** Trilogy **sehr ähnlich sind, aber sie können sich in der Streuung der Daten unterscheiden. Regressionsgeraden beschreiben jedoch nur einen Aspekt der Beziehung, nämlich der Beziehung zwischen bedingten Durchschnittswerten in Gleichung (18); sie berücksichtigen nicht den anderen Aspekt der Beziehung, nämlich die Streuung der Daten, die möglicherweise nicht gleich sind, selbst wenn zwei Regressionslinien fast übereinstimmen, wie gezeigt oben. Die Theorie der linguistischen Kanäle, die im nächsten Abschnitt behandelt wird,**

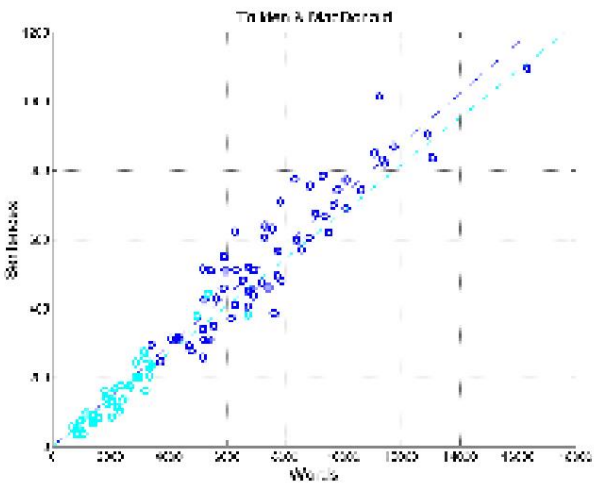
Machine Translated by Google

berücksichtigt sowohl Steigungen als auch Korrelationskoeffizienten und bietet ein „Feintuning“-Tool zum Vergleichen von Sätzen durch Herausheben jedes der vier Deep Language-Parameter.



(A) **(B)**

Abbildung 7. (a) Streudiagramm von nS **gegenüber** nW **in** Lord **(blau) und** Trilogy **(rot); (b)** nl **gegenüber** nS **in** Lord **(blau) und** Trilogy **(rot).**



(A) **(B)**

Abbildung 8. Streudiagramm der Anzahl der Sätze nS **gegenüber der Anzahl der Wörter** nW: **(a)** Lord **(blau) und** Back **(cyan); (b)** Lord **(blau) und** Lilith **(cyan).**

8. Theorie der linguistischen Kanäle In

diesem Abschnitt erinnern wir uns an die allgemeine Theorie der linguistischen Kanäle [11]. In einem literarischen Werk können eine unabhängige (Referenz-)Variable x **(z. B.** nW**) und eine abhängige Variable** y **(z. B.** nS**) durch die Regressionsgerade in Beziehung gesetzt werden, die durch Gleichung (18) gegeben ist.**

Betrachten wir zwei verschiedene Textblöcke Yk **und** Yj , **z. B. die Kapitel von Werk** k **und Werk j. Gleichung (18) gibt nicht die vollständige Beziehung zwischen zwei Variablen wieder, da sie nur bedingte Durchschnittswerte verknüpft. Wir können allgemeinere lineare Beziehungen schreiben, die die Streuung der Daten – gemessen durch die Korrelationskoeffizienten** rk **bzw.** rj **– um die Durchschnittswerte (gemessen durch die S**

$$yk = mkx + nk \quad (19)$$

$$yj = mjx + nj \quad (20)$$

Machine Translated by Google

Die linearen Modelle Gleichungen (19) und (20) führen additives „Rauschen“ durch die stochastischen Variablen nk **und** nj **mit dem Mittelwert Null** ein **[9,11,15]. Das Rauschen ist auf den Korrelationskoeffizienten** |r| ÿ= **1 zurückzuführen.**

Wir können zwei literarische Werke vergleichen, indem **wir x eliminieren ;** daher vergleichen wir die **Ausgabevariable** y **für dieselbe Anzahl der Eingabevariablen x. Beispielsweise können wir die Anzahl der Sätze in zwei Romanen – für eine gleiche Anzahl von Wörtern – vergleichen, indem wir nicht nur die durchschnittliche Beziehung berücksichtigen, Gleichung (18), sondern auch die Streuung der Daten, gemessen durch den Korrelationskoeffizienten, Gleichungen (19) und (20). Wir bezeichnen diesen Kommunikationskanal als „Satzkanal“, S-Kanal, und diese Verarbeitung als „Feinabstimmung“, weil sie** die Analyse der Daten vertieft und mehr Einblick in die Beziehung zwischen **zwei literarischen Werken oder anderen Texten geben kann .**

Durch Eliminieren von x **aus den Gleichungen (19) und (20) erhalten wir die lineare Beziehung zwischen der eingegebenen Anzahl von Sätzen im Werk** Yk **(jetzt der Referenz-Eingabetext) und der Anzahl von Sätzen im Text** Yj **(jetzt der Ausgabetext):**

$$\text{mk mk}\frac{\text{mj}}{}\text{mj nk} + \frac{}{\text{nj}}\text{nj yj} = \text{yk}- \tag{21}$$

Im Vergleich zum neuen Referenzwerk Yk ist **die Steigung** mjk **gegeben durch**

$$\mathbf{mjk} = \mathbf{mj/mk} \tag{22}$$

Die Rauschquelle, die den Korrelationskoeffizienten zwischen Yk **und** Yj erzeugt , **ist gegeben durch**

$$\mathbf{mk}\quad\frac{\mathbf{mj}}{}\mathbf{nk} + \mathbf{nj} = -\mathbf{mjknk} + \mathbf{nj\ njk} = - \tag{23}$$

Das „Regressionsrausch-zu-Signal-Verhältnis“ Rm aufgrund von mjk ÿ= **1 des neuen Kanals ist gegeben durch**

$$\mathbf{Rm} = \mathbf{mjk}-12 \tag{24}$$

Der unbekannte Korrelationskoeffizient rjk **zwischen** yj **und** yk **ist gegeben durch**

$$\mathbf{rjk} = \mathbf{cos\ arcos\ rj} - \mathbf{arcos(rk)} \tag{25}$$

Das „Korrelationsrauschen-zu-Signal-Verhältnis“, , aufgrund von rjk < **1, des neuen Kanals von Rr Text** Yk **zu Text** Yj, **ist gegeben durch**

$$\mathbf{Rr} = \frac{1-r_{jk}^{2}}{m2\ jk\ 2\ r_{jk}} \tag{26}$$

Da die beiden Rauschquellen disjunkt und additiv sind, ist das Gesamtrausch-Signal-Verhältnis des Kanals, der Text Yk **mit Text** Yj verbindet , **gegeben durch**

$$\mathbf{R} = \mathbf{Rm} + \mathbf{Rr} \tag{27}$$

Man beachte, dass Gleichung (27) grafisch dargestellt werden kann [10]. Schließlich werden die Gesamtsumme und die Die partiellen Signal-Rausch-Verhältnisse sind gegeben durch

$$\text{ÿdB} = \mathbf{-10 \times log10R} \tag{28}$$

$$\mathbf{ÿm,dB} = \mathbf{-10 \times log10Rm} \tag{29}$$

$$\mathbf{ÿr,dB} = \mathbf{-10 \times log10Rr} \tag{30}$$

Natürlich erwarten wir, dass kein Kanal rjk = **1 und** mjk = **1 ergeben kann; daher ist** ÿdB = **ÿ, ein Fall, der als idealer Kanal bezeichnet wird, es sei denn, ein Text wird mit sich selbst verglichen. In der Praxis finden wir immer** rjk < **1 und** mjk ÿ= **1. Die Steigung** mjk **misst die multiplikative „Verzerrung“ der abhängigen Variable im Vergleich zur unabhängigen Variable; der Korrelationskoeffizient rjk** misst , **wie „präzise“ die lineare beste Anpassung ist.**

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Steigung mjk **die Quelle des Regressionsrauschens** Rm ist **und die Korrelation Der Koeffizient** rjk **ist hauptsächlich die Quelle des Korrelationsrauschens des Kanals** Rr .

Machine Translated by Google

9. Sprachkanäle

In langen Texten (wie Romanen, Aufsätzen usw.) können wir mindestens vier linguistische lineare Kanäle [11], und zwar:

(a). Satzkanal (S–Kanal)

(b). Interpunktionskanal (I–Kanal)

(c). Wortintervallkanal, WI–Kanal

(d). Zeichenkanal (C–Kanal).

In S–Kanälen wird die Anzahl der Sätze zweier Texte mit der gleichen **Anzahl von Wörter. Diese Kanäle beschreiben, wie viele Sätze der Autor des Textes** j **schreibt, verglichen dem Autor des Textes** k **(Referenztext) zuzuordnen, indem er die gleiche Anzahl Wörter verwendet. Daher Kanäle sind stärker mit** PF verknüpft **als mit anderen Parametern. Es ist sehr wahrscheinlich, dass sie die Stil des Autors.**

In I–Kanälen wird die Anzahl der Wortintervalle zweier Texte für dieselbe **Anzahl der Sätze. Diese Kanäle beschreiben, wie viele kurze Texte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Satzzeichen (der Länge** IP) **zwei Autoren verwenden; daher sind diese K** mit MF **verknüpft als mit anderen Parametern. Da** MF **sehr wahrscheinlich mit dem E–STM verknüpft ist, I–Kanäle hängen mehr mit dem zweiten Puffer des E–STM des Lesers zusammen als mit dem Stil des Schriftsteller.**

In WI–Kanälen wird die Anzahl der Wörter in einem Wortintervall (d. h. IP) **verglichen für die** gleiche **Anzahl von Interpunktionen. Diese Kanäle sind stärker mit** IP verknüpft **als mit anderen Parameter. Da** IP **sehr wahrscheinlich mit dem E–STM verbunden ist, sind WI–Kanäle mehr mit dem ersten Puffer des E–STM des Lesers als mit dem Stil des Autors zusammenhängt.**

In C–Kanälen wird die Anzahl der Zeichen zweier Texte mit der gleichen Anzahl verglichen. von Wörtern. Sie beziehen sich mehr auf die verwendete Sprache, z. B. Englisch, als auf die anderen Parameter, es sei denn, es handelt sich um Aufsätze oder wissenschaftliche Texte, da letztere Texte verwenden im Durchschnitt längere Wörter [9].

Als Beispiel sind in Tabelle 13 die Gesamt- und Teil-Signal-Rausch-Verhältnisse ÿdB aufgeführt. ÿm,dB, **ÿr,dB in den vier Kanälen, indem** Lord **als Referenztext (Eingabetext) betrachtet wird. In anderen Wörter, Text** j **wird mit Text** k **(Referenztext, d. h.** Herr) verglichen.

Tabelle 13. Gesamt- und Teil-Signal-Rausch-Verhältnisse ÿdB, ÿm,dB, **ÿr,dB in den vier Kanälen unter Berücksichtigung von** Lord **als Referenztext (Eingabetext).**

	S-Kanal			I-Kanal			WI–Kanal			C-Kanal		
Roman	**ÿdB**	**ÿm,dB**	**ÿr,dB**	**ÿdB**	**ÿm,dB**	**ÿr,dB**	**ÿdB**	**ÿm,dB**	**ÿr,dB**	**ÿdB**	**ÿm,dB**	**ÿr,dB**
Der Hobbit	**14,60**	**15,48**	**21,94**	**15.04**	**30.08**	**15.18**	**15.61**	**15,77**	**30.19**	**28,87**	**35,90**	**29,83**
Narnia	**10.12**	**51,26**	**10.12**	**21,83**	**27,57**	**23.18**	**7,94**	**27.08**	**7,99**	**23.14**	**37,47**	**23.30**
Trilogie	**21.27**	**21,86**	**30,24**	**20.07**	**29.18**	**20,64**	**18,74**	**19.21**	**28,63**	**27,61**	**27,85**	**40,30**
	21.10	**23.30**	**25.11**	**20,96**	**24.12**	**23,82**	**21,96**	**57,42**	**21,96**	**26,52**	**26,68**	**41,05**
Zurück	**19,92**	**22.47**	**23.44**	**18.47**	**19.15**	**26,87**	**20,86**	**26,28**	**22.33**	**19.17**	**33,98**	**19.31**
Lililth	**12,87**	**12,93**	**31,51**	**5,72**	**5,74**	**29.30**	**16,54**	**16,56**	**40,83**	**26,50**	**26,63**	**41,73**
Oliver	**11.43**	**11.52**	**28,37**	**4.18**	**4.19**	**30,77**	**14.43**	**16.10**	**19.37**	**32,88**	**51,53**	**32,94**
David	**14,91**	**14,93**	**38.01**	**12.10**	**12.29**	**25,80**	**29.00**	**36,33**	**29,88**	**21,76**	**26,69**	**23.45**
Bleak Tale	**12,66**	**13,31**	**21.25**	**8.26**	**8,56**	**19,99**	**16,13**	**22,76**	**17.20**	**25,88**	**25,89**	**55.01**
Mutual	**16,13** Martin	**16,22**	**33,05**	**9,97**	**10,00**	**31,20**	**19,40**	**20,33**	**26,55**	**23,24**	**26,87**	**25,70**
16,00 Bask	**10,92**	**20,01**	**18,20**	**18,04**	**20,74**	**21,38**	**29,30**	**40,14**	**29,68**	**21,11**	**23,16**	**25,34**
Peter	**18,10**	**23,84**	**11,14**	**18,77**	**20,81**	**23,03**	**11,77**	**15,70**	**14,02**	**26,34**	**32,54**	**27,53**
		24,41	**19,25**	**17,31**	**17,53**	**30,45**	**16,67**	**22,23**	**18,09**	**31,19**	**34,62**	**33,81**

Anhang F gibt ÿdB **für alle im Artikel berücksichtigten Romane an.**

Machen wir einige grundsätzliche Bemerkungen zu Tabelle 13, die für jeden Referenztext. Die Signal-Rausch-Verhältnisse der C–Kanäle sind praktisch die größten, von 19,17 dB (Lilith) **bis 31,19 dB** (Back). **Diese Ergebnisse sagen einfach aus, dass alle Autoren verwenden dieselbe Sprache und schreiben Texte derselben Art, nämlich Romane, keine Essays**

Machine Translated by Google

oder wissenschaftliche/akademische Arbeiten. Diese Kanäle sind nicht dazu geeignet, große Unterschiede zwischen Texten oder Autoren zu unterscheiden oder zu bewerten.

In den drei anderen Kanälen können wir feststellen, dass Trilogy, Back **und** Lilith **die größten Signal-Rausch-Verhältnisse aufweisen, etwa 19 bis 22 dB; daher sind diese Romane Lord sehr ähnlich .** Mit anderen Worten, diese Kanäle scheinen den wahrscheinlichen Einfluss von MacDonald **auf** Lord **und** Trilogy **und die Verbindung zwischen** Lord **und** Trilogy **zu bestätigen .**

Im Gegensatz dazu weist Narnia **schlechte Werte im S–Kanal (10,12 dB) und WI–Kanal (7,94 dB) auf. Diese niedrigen Werte werden durch das Korrelationsrauschen bestimmt, da** R = Rm + Rr **ÿ** Rr .

Wenn wir nur ÿm,dB betrachten – also nur die Regressionsgerade –, dann erkennen wir einen starken Zusammenhang mit Lord , **da ÿm,dB** = **51,26 dB. Wie wir bereits in Bezug auf Abbildung 6 festgestellt haben, sind die Regressionsgerade praktisch identisch, die Streuung der Daten jedoch nicht. Lewis ist in** „Narnia “ bei **der (unbewussten) Gestaltung dieser beiden sprachlichen Kanäle weniger „regelmäßig“ als in** „Trilogy **“ oder Tolkien in „ Lord“ .**

10. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Gelehrte der englischen Literatur sind sich einig, dass JRR Tolkien CS beeinflusst hat Lewis‘ Schriften. Zum ersten Mal haben wir dieses Problem mathematisch untersucht, indem wir eine originelle mehrdimensionale Analyse linguistischer Parameter verwendeten, die auf oberflächlichen tiefen Sprachvariablen und linguistischen Kanälen basiert.

Um unsere Untersuchung in den Rahmen der englischen Literatur einzuordnen, haben wir auch einige Romane früherer Autoren wie Charles Dickens und anderer berücksichtigt, darunter George MacDonald, da Wissenschaftler seinen wahrscheinlichen Einfluss auf Tolkien und Lewis erwähnen.

In unserer mehrdimensionalen Analyse wurden unserer Meinung nach nur die Wort-, Satz- und Interpunktionsreihen pro Kapitel von den Autoren bewusst geplant und weisen insbesondere nicht auf starke Verbindungen zwischen Tolkien, Lewis und MacDonald hin. Jeder Autor verteilte Wörter, Sätze und Interpunktionen von Autor zu Autor **und manchmal sogar von Roman zu Roman desselben Autors anders .**

Im Gegenteil, die tiefen Sprachvariablen und die linguistischen Kanäle, die in diesem Artikel erörtert werden, beruhen wahrscheinlich auf unbewusster Gestaltung und können Zusammenhänge zwischen Texten aufdecken, die weit über das Bewusstsein des Autors hinausgehen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Puffer des erweiterten Kurzzeitgedächtnisses, die Leser benötigen, der universelle Lesbarkeitsindex von Texten, die geometrische Darstellung von Texten und die Feinabstimmung linguistischer Kanäle – alles Werkzeuge, die in diesem Artikel ausführlich erörtert werden – starke Verbindungen zwischen „ Der Herr der Ringe“ **(Tolkien),** „Die Chroniken von Narnia“ **und** „Die Weltraumtrilogie **“ (Lewis) auf der einen Seite und auch eine starke Verbindung mit einigen Romanen von MacDonald auf der anderen Seite offenbart haben, was im Wesentlichen mit der Aussage von Gelehrten der englischen Literatur übereinstimmt.**

Finanzierung: Diese Forschung erhielt keine externe Finanzierung.

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: Die Daten sind im Artikel enthalten.

Danksagungen: Der Autor möchte den vielen Wissenschaftlern danken, die mit großer Sorgfalt und Liebe digitale Texte bereithalten, die Lesern und Wissenschaftlern verschiedener akademischer Disziplinen zur Verfügung stehen, wie beispielsweise der Perseus Digital Library und dem Project Gutenberg.

Interessenkonflikte: Der Autor erklärt, dass keine Interessenkonflikte vorliegen.

Anhang A. Untere Grenze des Durchschnittsindex für die universelle Lesbarkeit

Der Mittelwert von GU ist gegeben durch

$$< GU >= \mathbf{89–10k<} < CP > \mathbf{+300} < 1/PF \mathbf{>–6(<} < IP > \mathbf{–6)} \quad \textbf{(A1)}$$

Machine Translated by Google

Der durch Einführung des Mittelwerts der Variablen berechnete Wert ergibt sich aus

$$\text{GU,Mittelwert} = \mathbf{89–10k<}\ \text{CP}\ \mathbf{>+300/<}\ \text{PF}\ \mathbf{>–6(<}\ \text{IP}\ \mathbf{>–6)} \tag{A2}$$

daher

$$\langle \text{GU} \rangle - \text{GU,Mittelwert} = \mathbf{300 \times} \left(\frac{1}{\langle \text{PF} \rangle} - \left\langle \frac{1}{\text{PF}} \right\rangle \right) \tag{A3}$$

Nun kann mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung bewiesen werden, dass 1/< x **>ÿ< 1/x >; deshalb** < GU > –GU,Mittelwert **ÿ 0; somit** < GU **>ÿ** GU,Mittelwert.

Anhang B. Pythagoräischer Abstand d zwischen Textpaaren

Tabelle A1. Pythagoräischer Abstand d **zwischen Textpaaren.**

Roman Lord Hobbit Narnia Trilogie Zurück Lilith Oliver David Bleak									**Geschichte gegenseitig Martin Bask Peter**				
Herr **0**													
Hobbit **0,488** Narnia	**0**												
0,150 Trilogie **0,355**	**0,348**	**0**											
Zurück **0,099** Lililth	**0,140**	**0,211**	**0**										
0,112 Oliver **0,244**	**0,499**	**0,203**	**0,379**	**0**									
David **0,320** Bleak	**0,453**	**0,174**	**0,336**	**0,048**	**0**								
0,231 Tale **0,267**	**0,518**	**0,307**	**0,426**	**0,146**	**0,141**	**0**							
Mutual **0,146** Martin	**0,620**	**0,407**	**0,532**	**0,222**	**0,234**	**0,106**	**0**						
0,230 Bask **0,424**	**0,312**	**0,170**	**0,217**	**0,201**	**0,153**	**0,211**	**0,316**	**0**					
Peter **0,098**	**0,381**	**0,252**	**0,305**	**0,201**	**0,161**	**0,143**	**0,239**	**0,096**	**0**				
	0,479	**0,218**	**0,369**	**0,055**	**0,044**	**0,099**	**0,190**	**0,170**	**0,151**	**0**			
	0,2612	**0,109**	**0,139**	**0,241**	**0,197**	**0,294**	**0,400**	**0,096**	**0,192**	**0,230**	**0**		
	0,0964	**0,277**	**0,072**	**0,451**	**0,408**	**0,496**	**0,602**	**0,286**	**0,371**	**0,441**	**0,211**	**0**	
	0,4744	**0,183**	**0,355**	**0,025**	**0,024**	**0,146**	**0,232**	**0,177**	**0,182**	**0,048**	**0,217**	**0,427**	**0**

Anhang C. Gemeinsamer Bereich zwischen Kreisen

Wir listen den Matlab-Code zur Berechnung des gemeinsamen Bereichs zwischen Text auf, heruntergeladen von
https://it.mathworks.com/matlabcentral/answers/273066%E2%80%93overlapping%E2%80%93Bereich%E2%80%93zwischen%E2%80%93zwei%E2%80%93Kreise (abgerufen am 15. Juni 2024).

Der Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier Kreise sei d und ihre beiden Radien seien r1 und r2.

Dann kann die Fläche A des Überlappungsbereichs der beiden Kreise wie folgt berechnet werden: Matlabs a'tan2'-Funktion:

```
t = Quadratwurzel((d+r1+r2)*(d+r1-r2)*(d-r1+r2)*(-d+r1+r2));

A = r1^2*atan2(t,d^2+r1^2-r2^2)+r2^2*atan2(t,d^2-r1^2+r2^2)-t/2;
```

Anhang D. Bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit

Tabelle A2. Fehlerwahrscheinlichkeit zwischen den angegebenen Texten.

	Herr	Hobbit Narnia Trilogie Zurück	Lilith	Oliver David	Kahl	Geschichte	Gegenseitiger Martin Bask	Peter
Lord	—-							
Hobbit **0,065** Narnia	—-							
0,665 Trilogie **0,320**	**0,387** —-							
0,711 0,701 0,314 Zurück	**0,759 0,627** —-							
David	**0,148 0,603 0,335** —-							
Lilith	**0,033**	**0,173 0,639 0,382 0,866** —-						
Oliver	Bleak	**0,051 0,358 0,203 0,666 0 0,101 0 0,496 0,387**	**0,641**	—-				
0,307 Tale **0,280**		**0,633 0,593 0,543 0,270 0,475 0,428 0,554**	**0,372**	**0,664**	—-			
Mutual **0,505** Martin		**0,036 0,545 0,279 0,633 0,499. 0,7 57 0,716**	**0,560**	**0,397**	**0,040**	—-		
0,395 Bask **0,164**		**0,478 0,830 0,504 0,873 0,211 0,231 0,669**	**0,601**	**0,615**	**0,300**	**0,725**	—-	
Peter **0,649**		**0,412 0,853**	**0,681**	**0,686**	**0,273**	**0,428**	**0,558** —-	
			0,528	**0,273**	**0,003**	**0,732**	**0,517**	**0,367** —-
			0,241	**0,077**		**0,439**	**0,286**	**0,095**	**0,591** —-
			0,761	**0,687**	**0 0,568**	**0,642**	**0,644**	**0,594**	**0,587**	**0,294** —-

Machine Translated by Google

Anhang E. Steigung und Korrelationskoeffizient der Regressionsgeraden

Tabelle A3. Steigung/Korrelationskoeffizient der Regressionsgerade y = mx, **Gleichung (18), Modellierung der angegebenen Variablen (abhängig/unabhängig). Wir behalten vier Ziffern bei, da sich einige Romane nur unterscheiden an der dritten und vierten Ziffer.**

Roman	Sätze/Wörter	Interpunktionen/Sätze	Wörter/Interpunktionen	Zeichen/Wörter
Herr	0,0731/0,9199	2,0372/0,9609	6,6134/0,9609	4,0367/0,9982
Der Hobbit	0,0608/0,9532	2,1010/0,9936	7,6902/0,9532	4,1014/0,9996
Narnia	0,0729/0,7610	1,9520/0,9384	6,9062/0,7991	4,0907/0,9919
Trilogie	0,0672/0,9325	1,9664/0,9830	7,3380/0,9696	4,2002/0,9976
Zurück	0,0681/0,9416	2,1640/0,9759	6,6045/0,9799	3,8496/0,9976
Lilith	0,0676/0,8890	2,2619/0,9488	6,2926/0,9800	4,1174/0,9863
Oliver	0,0566/0,9059	3,0893/0,9544	5,6302/0,9638	4,2248/0,9977
David	0,0537/0,9390	3,2949/0,9657	5,5775/0,9882	4,0474/0,9966
Kahl	0,0600/0,9258	2,5324/0,9715	6.51250.9694	4,2235/0,9923
Geschichte	0,0573/0,9574	2,7972/0,9785	6,1323/0,9912	4,2417/0,9983
Gegenseitig	0,0618/0,9299	2,6814/0,9549	5,9766/0,9740	4,2197/0,9940
Martin	0,0658/0,8583	2,2243/0,9364	6,6785/0,9514	4,3171/0,9939
Sich aalen	0,0684/0,7706	1,8517/0,9366	7,6984/0,9005	4,1320/0,9949
Peter	0,0687/0,8686	2,3080/0,9679	6,1018/0,9152	4,1117/0,9968

Anhang F. Gesamtsignal-Rausch-Verhältnisse ÿdB in den vier Sprachkanälen

Die Tabellen A4–A7 geben den Signal-Rausch-Abstand ÿdB **in den Kanälen zwischen dem Eingangstext** k **(Referenz) in der ersten Zeile und der Ausgabetext** j **in der linken Spalte. Für Beispiel: In Tabelle A4 lautet der Eingabetext** Lord **und der Ausgabetext** Trilogy, **dann** ist ÿdB = **21,27 dB; umgekehrt,** ÿdB = **20,44. Eine leichte Asymmetrie ist typisch für linguistische Kanäle [12,15].**

Tabelle A4. Gesamtsignal-Rausch-Verhältnisse ÿdB, **S-Kanäle.**

Roman Lord Hobbit Narnia Trilogie Zurück Lilith Oliver David Bleak Lord **ÿ 12,65 10,08 20,44 18,92 10,61 8,68** Geschichte gegenseitig Martin Bask Peter
13,19 10,18 14,63 14,51 Hobbit **14,60 ÿ 8,21 19,11 14,75 15,23 17,00 21,64 24,02 23,05 12,73** Narnia **10,12 5,30 ÿ 8,21 11,54 6,81 4,19 6,85 4,15 9,79 17,14**
7,11 13,32 Trilogie **21,27 18,00 9,58 ÿ 30,77 19,49 13,81 11,98 19,02 14,21 21,14 15,10** Zurück **21,10 17,94 8,87 30,56 ÿ 17,45 12,67 11,43 16,83 8,50 13,08**
14,07 19,31 13,65 Lililth **19,92 13,16 12,79 19,39 17,58 ÿ 13,92 9,70 10,37 15,86 10,98 16,86 23,03** Oliver **12,87 17,07 10,19 15,51 14,60 15,61 ÿ 19,50 23,39 13,54**
22,67 16,83 19,93 15,65 David **11,43 18,20 8,42 13,92 13,49 12,83 20,29 ÿ 19,17 21,60 17,53 12,38 9,69 16,57**
8,86 15,12
13,29 26,92
11.20 14.50
9,09 11,86
Kahl **14,91 21,86 9,79 19.30 18.05 17,27 21,95 18,12 ÿ 19,17 30,17 15,67 10,43 15.34**
Geschichte **12,66 24,57 7,84 15,85 15,69 13.21 16,61 20,78 19,89 ÿ 19,45 11,91 8.23 11,93**
Gegenseitig **16,13 22,78 9,70 21,87 20,24 18.07 18,92 16,27 29,88 18,43 ÿ 15,64 10,19 15,76**
Martin **16,00 11,43 14,86 15,46 14,23 23,46 13,93 9,79 14.29 9,78 14,62 ÿ 16,34 26,65**
Sonnen Sie **sich 10.92 6,53 23,97 9.38 8,78 13.09 8,49 5,56 8.33 5.38 8.51 15,69 ÿ 15,21**
Petrus **18,10 11,21 14,52 16,19 14,96 26,66 12,56 9.04 13,59 9.38 14,24 26,20 15,13 ÿ**

Tabelle A5. Gesamtsignal-Rausch-Verhältnisse ÿdB, **I-Kanäle.**

Roman Lord Hobbit Narnia Trilogie Zurück Lilith Oliver David Bleak Lord **ÿ 15,57 21,18 9,35** Geschichte gegenseitig Martin Bask Peter
19,50 21,74 19,50 8.36 14,05 11,16 12,37 19,14 17,61 18.44
Hobbit **15,04 ÿ 11,25 19,77 19,33 13.61 9.23 8,52 13,97 11,74 11,60 12,29 10,07 16,07**
Narnia **21,83 12,48 ÿ 15,46 16.18 17.10 8,65 7,72 12.20 9,93 11,23 18,24 25,28 15.11**
Trilogie **20,07 20,66 15,33 ÿ 20,28 15.03 8,61 7,83 12,86 10,53 11,05 14,25 14.16 15,95**

Machine Translated by Google

Tabelle A5. Forts.

Roman Lord Hobbit Narnia-Trilogie Zurück Lilith Oliver David Bleak Zurück **20,96 18,83 14,72 19,35 ÿ 19,45 10,31** Geschichte gegenseitig Martin Bask Peter
16,69 12,90 13,81 **9.26** **17.18** **12,61 23,09**
Lilith **18,47 12,40 15,76 13,22** **18,74 ÿ 11,43** **10,00 17,75 13,45 16,06 27,65** **12,92 23,22**
Oliver **5.72** **5.21** **4.61** **4.42** **7.06** **8,72 ÿ 22,73 12,64 16,56 16,36** **8.04** **3.42** **9,25**
David **4.18** **4.22** **3.04** **3.25** **5,57** **6,66** **22,01 ÿ 10,38 14,45 12,63** **5,99** **1,96** **7.38**
Trostlos **12.10 11.84** **9,57** **10,56** **15.30** **16.42** **14,53** **12,69 ÿ 20,10 21,84 14,23** **7,91** **20.13**
Geschichte **8,26** **9.01** **6.36** **7,46** **10,66** **11.20** **17,84** **16.02 19.15 ÿ 19.40** **9,88** **5.04** **13.18**
Gegenseitig **9,97** **8,68** **8,40** **8.02** **11.71** **14,57** **17,59** **14,48 21,08 20,07 ÿ 13,28** **6,83** **15.34**
Martin **18.04 11.32 17.10** **12.46** **16,71 27,92 10,97** **9,59** **15,87 12,48 15,04 ÿ 13,93** **19,38**
Sonnen **18,77 12,04 25,74 15,14 14,57 14,71** **7,92** **7.11** **10,98** **9.06** **10,12 15,52 ÿ 13,36**
Peter **17,31 14,69 13,28** **14.34** **22,40 22,88 11,85** **10,47 20,95 14,94 16,77 18,77 11,10 ÿ**

Tabelle A6. Gesamtsignal-Rausch-Verhältnisse ÿdB, **WI–Kanäle.**

Roman Lord Hobbit Narnia Trilogie Zurück Lilith Oliver David Bleak Lord **ÿ 16,96 8,69** Hobbit **15,61 ÿ 7,80** Geschichte gegenseitig Martin Bask Peter
19,72 **21,94 20,11 15,14** **12,42 28,75 14,96 18,33 29,47 13,83** **15.46**
22.03 **13,72** **11,77** **8,65** **7.24** **14.25** **9,46** **10,34 16,38** **16,86** **10,64**
Narnia **7.94** **9,59 ÿ 7,96** **6.03** **5.48** **5.46** **3.05** **6,96** **3,80** **5.44** **8,92** **13,77 10,57**
Trilogie **18,74 22,69** Zurück **6,92 ÿ 18,24** **15.14** **10.32** **9.40** **17,94 12,40 12,81 18,24 13,92** **10,84**
21,96 15,48 Lilith **20,86 13,90** **6,80** **19,30 ÿ 26,10 14,37** **14,32 26,03 19,46 19,22 19,02** **11,69** **12.07**
Oliver **16,54 11,40 12,64 18,25** **7.07** **16,59** **26,52 ÿ 17,01** **17,17 24,86 22,59 24,34 18,32** **11.15** **12,89**
ÿ 18,55 17,28 16,43 23,12 15,86 David **8,63 10,55 12,03 18,98 15,72 ÿ 15,66 20,68 20,29 13,45 6,50** Bleak **29,00 15,86 7,97 18,98 26,27 24,36 15,99** **10,46** **16.18**
13,95 ÿ 17,22 20,71 23,33 Märchen **14,90 12,16 5,82 14,41 23,01 15,15 19,82 18,16 ÿ 19,83 14,60 Gegenseitig** 19,40 **12,72 7,83 14,60 20,15** **9,04** **11,74**
22,43 19,37 21,49 20,26 ÿ 17,75 Martin **29,30 17,61 9,50 19,33 18,82** Bask **11,77 16,84 12,10 13,11 9,38** Peter **16,67 13,01 12,48 13,17 13,36** **12,70** **14.34**
9,60 **10.71**
10,94 **14,62**
17,40 **14,28** **11,19 22,92 13,25 16,43 ÿ 14,97 16,69**
8,32 **7,06** **4,92 10,38 6,29 7,77 13,14 ÿ 11,52**
13,42 **14,94** **10,26 15,40 10,80 14,27 17,92 13,59 ÿ**

Tabelle A7. Gesamtsignal-Rausch-Verhältnisse ÿdB, **C-Kanäle.**

Roman Lord Hobbit Narnia Trilogie Zurück Lilith Oliver David Bleak Lord **ÿ 29,12 23,37 27,97 26,10** Hobbit **28,87 ÿ** Geschichte gegenseitig Martin Bask Peter
20,03 26,66 22,08 Narnia **23,14 20,07 ÿ 24,11 21,11 28,25 23,63** **19,51 26,91 32,93 22,42 26,31 23,84 21,90 26,70 31,43**
26,63 30,01 22,43 29,10 25,22 Trilogie **27,61 26,30 23,69 ÿ 20,81** **17,21 26,33 24,95 20,20 27,13 21,51 20,64 22,77 25,73**
19,94 44,44 27,92 25,21 36,70 27,87 26,30 Zurück **26,52 22,80 21,89 21,57 ÿ 19,06 21,03 25,94 19,85 20,63 20,44 18,83** Lilith **19,17 17,15 28,14 20,28** **31.08 26.48**
18,09 ÿ 20,09 21,25 26,43 19,28 24,45 23,08 **28,81 32,34**
22,56 23,80
23,79 21,31
Oliver **26,50 25,91** **23.13** **44,38** **20.22** **19,65 ÿ 26,67 24,97 39,76 27,56 26,57 27,81 30,39**
David **32,88 25,17 26,81** **28,28** **25,48 21,54 27,08 ÿ 24,77 25,80 26,30 23,38** **31,25 36,01**
Trostlos **21,76 19,71** **29,73** **25.11** **18,84 26,05 24,98 24,22 ÿ 23,63 36,70 31,88** **29,79** **25,53**
Geschichte **25,88 26,71 21,87 36,57 19,78** **18,78 39,69 25,31 23,56 ÿ 25,70 25,32** **25,80 28,24**
Gegenseitig **23,24 21,04 28,76 27,79** **19,51 24,05 27,59 25,83 36,72 25,79 ÿ 32,93** **32,78 27,93**
Martin **21.11 19.88 24.71** **25,90** **17,72 22,43 26,23 22,73 31,63 25,03 32,73 ÿ 26,77 24,53**
Bask **26,34 22,64 30,92 29,07 21,84 23,73 28,13 30,99 30,08 26,19 32,99 27,17 ÿ 33,27**
Petrus **31,19 25,68 26,39** **32,56** **23,22 21,33 30,67 35,87 25,93 28,59 28,28 25,08** **33,36 ÿ**

Verweise

1. **Carpenter, H.** The Inklings: CS Lewis, JRR Tolkien, Charles Williams und ihre Freunde; **Houghton Mifflin: Boston, MA, USA, 1979.**
2. **Glyer, DP** The Company They Keep. CS Lewis und JRR Tolkien als Schriftsteller in der Gemeinschaft; **Kent State University Press: Kent, OH, USA, 2007.**
3. **Duriez, C.; Porter, D.** The Inklings Handbook: Ein umfassender Leitfaden zu Leben, Denken und Schriften von CS Lewis, JRR Tolkien, Charles Williams, Owen Barfield und ihre Freunde; **Chalice Press: Nashville, TN, USA, 2001.**
4. **Isley, WLCS Lewis über Freundschaft.** Inklings Forever **2008, 6, 9. Online verfügbar: https://pillars.taylor.edu/inklings_forever/vol6/iss1/9 (abgerufen am 30. Mai 2024).**
5. **Sammons, MC** War of the Fantasy Worlds: CS Lewis und JRR Tolkien über Kunst und Vorstellungskraft; **Praeger: Westport, CT, USA, 2010.**
6. **Duriez, C.** The Oxford Inklings. Lewis, Tolkien und ihr Kreis; **Lion Books: Oxford, Großbritannien, 2015.**

Machine Translated by Google

7. Hooper, W. The Inklings. In CS Lewis and His Circle. Essays und Memoiren der Oxford CS Lewis Society; **White, R., Wolfe, J., Wolfe, BN, Hrsg.; Oxford University Press: New York, NY, USA; Oxford, Großbritannien, 2015; Seiten 197–213.**

8. Gokulapriya, TJRR Tolkiens literarische Werke: Eine Rezension. Int. Rev. Lit. Stud. **2022, 4, 31–39.**

9. Matricciani, E. Tiefe Sprachstatistik des Italienischen in sieben Jahrhunderten Literatur und empirische Verbindungen mit Millers 7 ÿ 2 Gesetz und das Kurzzeitgedächtnis. Open J. Stat. **2019, 9, 373–406. [CrossRef]**

10. Matricciani, E. Eine statistische Theorie der Sprachübersetzung basierend auf der Kommunikationstheorie. Open J. Stat. **2020,** 10, **936–997. [Querverweis]**

11. Matricciani, E. Mehrere Kommunikationskanäle in literarischen Texten. Open J. Stat. **2022,** 12, **486–520. [CrossRef]**

12. Matricciani, E. Besteht das Kurzzeitgedächtnis aus zwei Verarbeitungseinheiten? Hinweise aus der italienischen und englischen Literatur Jahrhunderte. Information **2024,** 15, **6. [CrossRef]**

13. Matricciani, E. Eine mathematische Struktur, die Sätzen zugrunde liegt, und ihre Verbindung mit dem Kurzzeitgedächtnis. Appl. Math **2024, 4, 120–142. [CrossRef]**

14. Miller, GA Die magische Zahl Sieben, plus oder minus zwei. Einige Grenzen unserer Kapazität zur Informationsverarbeitung. Psychol. Rev. **1956,** 63, **81–97. [CrossRef] [PubMed]**

15. Matricciani, E. Lesbarkeitsindizes sagen nicht alles über die Lesbarkeit eines Textes aus. Analytics **2023, 2, 296–314. [CrossRef]**

16. Matricciani, E. Linguistische mathematische Beziehungen, die beim Übersetzen von Texten gerettet oder verloren gehen: Erweiterung der statistischen Theorie de Übersetzung und ihre Anwendung auf das Neue Testament. Information **2022,** 13, **20. [CrossRef]**

17. Papoulis Papoulis, A. Wahrscheinlichkeit & Statistik; **Prentice Hall: Hoboken, NJ, USA, 1990.**

18. Lindgren, BW Statistical Theory, **2. Auflage; MacMillan Company: New York, NY, USA, 1968.**

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultieren.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Artikel

Tschebyscheff-Pseudospektralmethode für fraktionale Differentiale Gleichungen in nicht überlappenden partitionierten Domänen

Shina Daniel Oloniiju [1,*], Nancy Mukwevho [1,2], Yusuf Olatunji Tijani [1] und Olumuyiwa Otegbeye [3]

[1] Fakultät für Mathematik, Rhodes University, Makhanda, PO Box 94, Grahamstown 6140, Südafrika; nancy.mukwevho@univen.ac.za (NM); yusuf.tijani@ru.ac.za (YOT)
[2] Abteilung für Mathematik und Computerwissenschaften, Universität von Venda, Private Bag X5050, Thohoyandou 0950, Südafrika
[3] Fakultät für Informatik und angewandte Mathematik, Universität Witwatersrand, Private Bag 3 Braamfontein, Johannesburg 2050, Südafrika; olumuyiwa.otegbeye@wits.ac.za
* Korrespondenz: s.oloniiju@ru.ac.za

Zusammenfassung: Bruchteil-Differentialoperatoren sind von Natur aus nicht-lokal, daher eignen sich globale Methoden wie Spektralmethoden gut für die Handhabung dieser nicht-lokalen Operatoren. Die Langzeitintegration von Differentialmodellen wie chaotischen dynamischen Systemen bringt besondere Herausforderungen und Überlegungen mit sich, die mehrdomänenbasierte numerische Methoden bei der Behandlung solcher Probleme vorteilhaft machen. Diese Studie schlägt eine neuartige mehrdomänenbasierte pseudospektrale Methode vor, die auf der ersten Art von Tschebyscheff-Polynomen und der Gauß-Lobatto-Quadratur für bruchteil-Anfangswertprobleme basiert. Die vorgeschlagene Technik umfasst die Aufteilung der Problemdomäne in nicht überlappende Unterdomänen, die Berechnung des Bruchteil-Differentialoperators in jeder Unterdomäne als Summe der „lokalen“ und „Gedächtnis“-Teile und die Ableitung der entsprechenden Differenzierungsmatrizen zur Entwicklung der numerischen Schemata. Die lineare Stabilitätsanalyse zeigt, dass das numerische Schema für bestimmte Werte beliebiger nicht-ganzzahliger Ordnung absolut stabil und für andere bedingt stabil ist. Numerische Beispiele, die von einzelnen linearen Gleichungen bis zu Systemen nichtlinearer Gleichungen reichen, zeigen, dass der Mehrdomänenansatz geeigneter, effizienter und genauer ist

Schlüsselwörter: Multi-Domain; Pseudospektralmethode; fraktionale Differentialgleichungen; Tschebyscheff -Polynome; Gauss-Lobatto-Quadratur; Stabilitätsanalyse

check for updates

Zitat: Oloniiju, SD; Mukwevho, N.; Tijani, YO; Otegbeye, O. Tschebyscheff-Pseudospektralmethode für fraktionale Differentialgleichungen in nicht überlappenden partitionierten Domänen. AppliedMath 2024, 4, 950–974. https://doi.org/10.3390/ appliedmath4030051

Wissenschaftliche Herausgeber: Renhai Wang und Junesang Choi

Empfangen: 26. Juni 2024
Überarbeitet: 29. Juli 2024
Akzeptiert: 30. Juli 2024
Veröffentlicht: 2. August 2024

Copyright: © 2024 bei den Autoren. Lizenznehmer MDPI, Basel, Schweiz.
Dieser Artikel ist ein Open Access-Artikel vertrieben unter den Bedingungen und Bedingungen der Creative Commons Namensnennungslizenz (CC BY) (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Einleitung

Bruchteil-Differentialgleichungen (FDEs) gewinnen in Ingenieurwissenschaften , Wissenschaft, Finanzwesen und anderen Bereichen zunehmend an Bedeutung. Im Gegensatz zu klassischen Differentialgleichungen, die auf Ableitungen ganzer Ordnung beschränkt sind, führen FDEs einen höheren Grad an Komplexität in Differentialgleichungen ein, indem sie beliebige Ableitungen nicht ganzer Ordnung einbeziehen. Bruchteil- Differentialoperatoren können auf verschiedene Weise definiert werden, wobei die gängigsten Definitionen diejenigen sind, die singuläre Kernel beinhalten, wie die Riemann-Liouville- und Caputo-Bruchteil-Differentialoperatoren [1,2]. Diese Definitionen basieren auf Integralen mit Potenzfunktionskernen, was manchmal zu Singularitäten führen und numerische Näherungen komplizieren kann. Diese Differentialoperatoren mit Potenzfunktionskernen sind jedoch vorteilhaft für die Entwicklung spektralbasierter Methoden unter Verwendung von Basisfunktionen wie den Tschebyscheff- und Legendre- Polynomen, da diese Polynome in Potenzreihenform ausgedrückt werden können. Daher wird die Caputo-Ableitung in der in dieser Studie vorgeschlagenen numerischen Methode verwendet. In den letzten Jahren gab es jedoch ein erhebliches Interesse an nicht-singulären Kerneln, die einen alternativen Rahmen für die Definition von Bruchoperatoren bieten. Beispiele hierfür sind die Bruchoperatoren Caputo–Fabrizio und Atangana–Baleanu, die die Exponential- bzw. Mittag-Leffler-Fur

Machine Translated by Google

Diese zusätzliche Komplexität ermöglicht es fraktionalen Differentialoperatoren, die Gedächtniseffekte eines Systems zu erfassen oder gedächtnisinhärente Phänomene zu beschreiben. Infolgedessen bieten FDEs einen robusteren Rahmen für die Modellierung der komplexen Dynamik komplexer Systeme in verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen [5,6]. Das Finden analytischer Lösungen für fraktionale Differentialgleichungen (FDEs) ist besonders schwierig; mehrere Studien haben jedoch analytische Lösungen und Methoden für FDEs vorgeschlagen. Beispielsweise leiteten Ahmadian und Darvishi [7] Solitonen- und Wanderwellenlösungen unter Verwendung der tanh-coth-, tan-cot-, sech-csch- und sec-csc-Erweiterungsmethoden für die (1 + 1)-dimensionale fraktionale Biswas-Milovic-Gleichung ab [8]. Kumar et al. [9] schlugen eine modifizierte Laplace-Zerlegungsmethode vor, die die Laplace-Transformation und die Adomian-Zerlegungsmethoden hybridisiert, um die fraktionale Navier-Stokes-Gleichung zu analysieren, die die instationäre Strömung einer Newtonschen Flüssigkeit in einem Rohr modelliert. Die fraktional symmetrische regulierte Gleichung für lange Wellen wurde analytisch mit Methoden wie der G '/G- Erweiterungsmethode [10], der G '/G- Erweiterungsmethode Andere analytische Methoden, die für FDEs verwendet wurden, sind unter anderem die Sumudu-Transformation [14], die Kudryashov-Methode [15] und verschiedene semi-analytische Techniken wie die Exp-Expansionsmethode [16,17] und die Sinus-Cosinus-Methode [18] . Numerische Methoden spielen ebenfalls eine wichtige Rolle bei der Erlangung genauer Lösungen für FDEs und liefern wertvolle Einblicke in die Dynamik von Systemen, die durch FDEs beschrieben werden [19,20].

Es wurden viele numerische Methoden zur Approximation von FDE-Lösungen vorgeschlagen. So führten beispielsweise Hattaf et al. [21] ein neuartiges numerisches Verfahren zur Approximation der verallgemeinerten Hattaf-Fraktionalableitung (GHF) ein, das einen fraktionalen Differentialoperator mit nicht-singulärem Kernel beinhaltet. Das entwickelte numerische Verfahren wurde an FDEs mit analytischen Lösungen getestet, um seine Genauigkeit durch Vergleich der Näherungslösungen mit den exakten Lösungen zu verifizieren. Nichtlineare FDEs, die die Dynamik einer HIV-Infektion beschreiben, wurden ebenfalls gelöst, um die Anwendbarkeit des Verfahrens auf reale Probleme zu demonstrieren. Die Prädiktor-Korrektor-Methoden (PCMs) für FDEs wurden von Kumar et al. [22], Jhinga und Daftardar-Gejji [23] und Lee et al. [24] vorgeschlagen. Diese Studien zeigten, dass PCMs FDEs schneller lösen und die Rechenzeit drastisch reduzieren. Kumar et al. [25] führten zwei rechnerisch effiziente numerische Techniken auf Grundlage der Mittelpunkts- und der Heun-Methode für lineare und nichtlineare fraktionale Anfangswertprobleme (IVPs) ein. Die Studie kam zu dem Schluss, dass die vorgeschlagenen Methoden erhebliche Vorteile gegenüber den traditionellen und verbesserten Euler-Methoden bieten.

Die nichtlokale Natur fraktionaler Differentialoperatoren macht die Analyse und das Finden von Lösungen von FDEs manchmal zu herkulischen Aufgaben [26]. Spektralmethoden haben sich als leistungsfähige numerische Technik zur Approximation von Lösungen von FDEs erwiesen [27–29]. Anders als andere traditionelle numerische Techniken sind spektralbasierte Methoden global und hochgenau, was sie effizient zur Lösung von Differentialgleichungen macht [30]. Zahlreiche Studien haben sich die globale Natur spektralbasierter Methoden zunutze gemacht, um fraktionale Differentialoperatoren zu diskretisieren und numerische Lösungen von FDEs zu erhalten [31]. Zayernouri und Karniadakis [32] und Zhao et al. [33] schlugen eine exponentiell konvergente Galerkin-Spektralmethode für FDEs vor. Zayernouri und Karniadakis [32] verglichen die Leistung der entwickelten spektralbasierten Methode und der etablierten Methode der finiten Differenzen (FDM) und kamen zu dem Schluss, dass die vorgeschlagene Methode hinsichtlich der Konvergenzrate eine bessere Leistung erbringt als die FDM. Khader und Sweilam [34] verwendeten die Legendre-Pseudospektralmethode, um die fraktionale Advektions-Dispersionsgleichung mit dem Caputo-Fraktional-Differentialoperator zu lösen. Die Studie analysierte die Genauigkeit des neuen diskreten fraktionalen Differentialoperators, indem seine Konvergenzrate untersucht und der maximal mögliche Fehler geschätzt wurde. Die Ergebnisse stimmten mit vorhandenen Ergebnissen aus der Literatur überein. Stochastische fraktionale Differentialgleichungen wurden von Cardone et al. [35] mithilfe der spektralen Kollokationsmethode gelöst. Bei dieser Methode wird eine vollständig diskrete Version des ursprünglichen kontinuierlichen Operators erhalten und ein System nichtlinearer algebraischer Gleichung

Machine Translated by Google

Spektralmethoden weisen bei Differentialgleichungen mit ausreichend glatten Lösungen eine exponentielle Konvergenz auf. Aufgrund dieser hohen Genauigkeit sind Spektralmethoden, insbesondere die Chebyshev-Pseudospektralmethode, eine beliebte Wahl zum Lösen einer Vielzahl von fraktionalen Differentialgleichungen. So verwendete beispielsweise Doha [36] die Chebyshev- Pseudospektralmethode zur Approximation der Lösungen fraktionaler Differentialgleichungen mit mehreren Termen . Ebenso verwendete Sweilam [37] diese Methode zur numerischen Lösung fraktionaler Integro-Differentialgleichungen. Weitere Studien, die die Chebyshev-Pseudospektralmethode zur Approximation der Lösung fraktionaler Differentialgleichungen verwendeten, umfassen unter anderem die von Dabiri [38] und Oloniiju et al. [39,40,41] . Diese wünschenswerte Eigenschaft der spektralen Konvergenz kann sich jedoch bei großen Zeitbereichen oder nicht glatten Lösungen verschlechtern [42]. Der Multidomänenansatz bewältigt diese Herausforderungen, indem er eine genaue und rechnerisch effiziente Möglichkeit bietet, potenziell nicht glatte Lösungen zu bewältigen. Außerdem können die numerische Stabilität und Genauigkeit verbessert werden, indem der Problembereich, insbesondere zeitabhängiger Probleme, in kleinere Unterbereiche zerlegt wird [43]. Samuel und Motsa [44] beschrieben eine mehrdomänen-spektrale Kollokationsmethode zum Lösen hyperbolischer partieller Differenzialgleichungen (PDEs) mit einem großen Zeitbereich. Die Studie zeigte, dass die Aufteilung des Berechnungsbereichs in kleinere Unterbereiche genaue Ergebnisse liefert und die Rechenzeit verkürzt. Birem und Klein [45] stellten eine mehrdomänen-spektrale Methode für die Schrödinger-Gleichung vor. Jung und Olmos-Liceaga [46] führten eine nichtkonforme und nichtüberlappende mehrdomänen-spektrale Methode zur Simulation von Wanderwellenlösungen in Reaktions-Diffusionsgleichungen ein. Die Methode weist drei wesentliche Merkmale auf: hohe Genauigkeit und Konvergenzrate, adaptives Gitter und Mehrdomänentechnik. Qin et al. [47] schlugen eine mehrdomänen-Legendre-Galerkin-Methode der kleinsten Quadrate für lineare Differenzialgleichungen mit variablen Koeffizienten vor. Die Studie ergab zwei Schlüsseleigenschaften der Methode: Kontinuität, die Konsistenz und Glät

Diese Studie untersucht die Chebyshev-Pseudospektralmethode in einem Multidomänen-Umfeld als neuartigen Ansatz zur Lösung von FDEs. Dabei wird der Problembereich in eine endliche Anzahl nicht überlappender Unterbereiche aufgeteilt. Der Multidomänen-Ansatz für FDEs wurde auf Probleme in der Biologie [48] und im Finanzwesen [49,50] angewendet. Maleki und Kajani [48] verwendeten die Multidomänen-Legendre-Gauss-Pseudospektralmethode, um Lösungen für das fraktionale Volterra-Bevölkerungswachstumsmodell zu approximieren. Die Studie demonstrierte die Wirksamkeit der vorgeschlagenen Methode bei der Bewältigung einer breiten Palette von Integro-Differentialgleichungen , einschließlich solcher mit ganzzahliger und gebrochener Ordnung. Bambe Moutsinga et al. [49] entwickelten eine spektralbasierte Methode für fraktionale Differentialgleichungen, die die Bewertung innerhalb eines affinen Sprungdiffusionsrahmens, chaotische und hyperchaotische Systeme und fraktionale Preismodelle für Kryptowährungen modelliert. Die Studie ergab, dass die entwickelte Spektralmethode die auf der Euler-M Kharazmi [50] untersuchte einen datengesteuerten Ansatz zur Lösung stochastischer fraktionaler partieller Differentialgleichungen (SFPDEs) unter Verwendung von Multi-Domain-Spektralmethoden. Zhao et al. [51] schlugen eine Multi-Domain-Spektralkollokationsmethode (MDSCM) zur Lösung nichtlinearer FDEs vor. Die MDSCM zeigte einen erheblichen Vorteil gegenüber den Single-Domain-Spektralmethoden beim Erreichen hoher Genauigkeit für Differentialgleichungen mit wenig regulären Lösun Klein und Stoilov [52] schlugen eine numerische Technik für den fraktionalen Laplace-Operator vor, die auf den fraktionalen Riesz-Operatoren basiert, die auf R definiert sind. Die Integranden werden mithilfe der zugrunde liegenden Zq- Kurve transformiert, um eine genaue Berechnung innerhalb jedes Teilintervalls sicherzustellen. Die transformierten Integrale innerhalb jedes Teilintervalls werden dann mithilfe des Clenshaw-Curtis- Algorithmus gelöst. Tavassoli Kajani [53] schlug eine modifizierte Müntz-Legendre-Kollokationstechnik in einer einzelnen Domäne und in einer Multidomänen-Umgebung für die fraktionale Pantographengleichung vor. Xu und Hesthaven [54] schlugen eine hochgenaue und stabile Multidomänen- Spektralmethode mit einer Strafmethode für fraktionale partielle Advektions- und Diffusionsgleichungen vor . Die Studie kam zu dem Schluss, dass d

Machine Translated by Google

für die langfristige Integration von FDEs. Es wurde auch festgestellt, dass die Konvergenzrate mit der theoretischen Analyse des Schemas übereinstimmt.

Ziel der vorliegenden Studie ist die Einführung einer neuen numerischen Methode, der nicht überlappenden mehrdomänenigen Chebyshev-Pseudospektralmethode, die auf der ersten Art von Chebyshev- Polynomen und der Gauß-Lobatto-Quadratur für fraktionale Differentialgleichungen basiert. Die Wahl der Chebyshev-Polynome beruht auf ihrer Orthogonalitätseigenschaft in Bezug auf ihre Gewichtsfunktion, die die Projektion der Näherungslösung auf den Polynomraum vereinfacht. Darüber hinaus ist die Berechnung der Chebyshev-Gauss-Lobatto-Quadraturgewichte und -knoten recht unkompliziert, was den Rechenaufwand im Vergleich zu anderen orthogonalen Polynomen reduziert. Die vorgeschlagene Methode funktioniert, indem die Domäne einer fraktionalen Differe
Das Neue an dieser Studie ist ihr Ansatz, den Bereich eines fraktionalen Anfangswertproblems in nicht überlappende Teilintervalle aufzuteilen und die Lösung des Problems auf den Raum der orthogonalen Tschebyscheff-Polynome erster Art zu projizieren. Bei dieser Technik wird der fraktionale Differentialoperator in die Summe der „lokalen“ und „Speicher“-Komponenten innerhalb jedes Teilbereichs aufgeteilt. Um die Vielseitigkeit und Effizienz der vorgeschlagenen Methode zu demonstrieren, werden Stabilitätsanalysen und numerische Experimente an verschiedenen Arten fraktionaler Differentialgleichungen durchgeführt. Eine numerische Fehleranalyse wird durchgeführt, um die Vorteile des Ansatzes der Bereichszerlegung gegenüber der einbereichigen Tschebyscheff-Pseudospektralmethode zu demonstrieren.

Der Rest des Artikels ist wie folgt gegliedert: Abschnitt 2 liefert bestimmte vorläufige Definitionen, die für die Entwicklung der numerischen Verfahren erforderlich sind. Abschnitt 3 ist der Entwicklung und Analyse des numerischen Verfahrens für FDEs unter Verwendung der Tschebyscheff-Polynome auf der Gauss-Lobatto-Quadratur in nicht überlappenden partitionierten Bereichen gewidmet. Abschnitt 4 demonstriert die Genauigkeit und Wirksamkeit der numerischen Methode anhand einiger Beispiele, die von linearen Einzelgleichungen bis zu Systemen nichtlinearer Gleichungen reichen, die eine langfristige Integration erfordern. Abschnitt 5 schließt die Studie schließlich ab.

2. Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Konzepte und Bruchoperatoren vorgestellt und definiert, die zur Entwicklung des numerischen Schemas erforderlich sind.

Definition 1. Angenommen, u : [a, b] ÿ R ist eine stetige Funktion, $\ddot{y} > 0$ und das Riemann-Liouville- Integral gebrochener Ordnung von u(t) ist definiert als [55]

$$\text{RL}_{\text{ein}}\,\text{Içh}\,\ddot{y}\,\mathbf{u(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\ddot{y}(\ddot{y})}\,\mathbf{t}\,\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1}\,\ddot{y}\,\mathbf{u(t)} = \ddot{y}(\ddot{y})\dfrac{1}{\mathbf{A}}\int_{\ddot{y}\ddot{y}}^{\mathbf{t}}(\mathbf{t}\,\ddot{y}\,\ddot{y})\,\ddot{y}\ddot{y}1u(\ddot{y})d\ddot{y}, & \mathbf{t} > \mathbf{0},\ \ddot{y} > \mathbf{0}, \\ \ddot{y}\ddot{y}\,\mathbf{u(t)},\ \ddot{y} = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{1}$$

wobei ÿ die Euler-Gammafunktion und t ÿÿ1 ÿ u(t) das Faltungsprodukt der Potenzfunktion ist , tÿÿ1 , und die Funktion u(t).

Definition 2 (Bruchteilhaftes Integral von (t ÿ a) j). Für die Potenzfunktion (t ÿ a) j ist das , der Bruchteil Integral wie folgt definiert: [56]

$$\text{RL}_{\text{ein}}\,\text{Içh}\,\ddot{y}\,(\mathbf{t}\,\ddot{y}\,\mathbf{a})\,\mathbf{j} = \frac{\ddot{y}(\mathbf{j}+\mathbf{1})}{\ddot{y}+\mathbf{1})}(\mathbf{t}\,\ddot{y}\,\mathbf{a})\,\mathbf{j}+\ddot{y}\,\ddot{y}(\mathbf{j}+\cdot \tag{2}$$

Definition 3. Der linksseitige Caputo-Fraktional-Differentialoperator ist definiert als [55]

$$\text{C}_{\text{ein}}\mathbf{D}\,\ddot{y}\,\mathbf{u(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y})}\,\mathbf{t}\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\mathbf{1}\ \ddot{y}\,\mathbf{u}\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,\mathbf{(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y})}\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{t}}(\mathbf{t}\,\ddot{y}\,\ddot{y})\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1u\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,\mathbf{(\ddot{y})d\ddot{y}},\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\,\ddot{y}\,\mathbf{1} < \ddot{y}\,\ddot{y}\,\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}, \tag{3}$$

Machine Translated by Google

wobei *ÿÿÿ* **die Obergrenze von ÿ ist,** *ÿÿÿ* **ÿ** *ÿ* **und t ÿÿÿ** $^{ÿ\,u}$ *ÿÿÿ* **(t) ist das Faltungsprodukt der ÿÿÿ1 Potenzfunktion, tÿÿÿÿÿÿ1 die ÿÿÿ-te ganzzahlige Ableitung der Funktion u(t).**

Definition 4 (Fraktionale Ableitung von (t ÿ a) **j). Die fraktionale Ableitung von (t ÿ** a) **j ist definiert als [56]**

$$ {}_{\text{ein}}^{c}D\,ÿ\,(t\ ÿ\ a)^{j} = \begin{cases} 0 & j\ ÿ\ N0, \quad j < ÿÿÿ\ j \\ \dfrac{ÿ(j+1)}{ÿ(j+1-ÿÿÿ)}(t\ ÿ\ a)^{jÿÿ\ j\ ÿ\ N0,} & ÿ\ ÿÿÿ. \end{cases} \tag{4} $$

Definition 5. Die in dieser Studie verwendeten Kollokationspunkte sind die Tschebyscheff-Gauß- Lobatto-Punkte, definiert als tr $\frac{}{N}$ **ÿ cosrÿ ; r = 0(1)N [57].**

3. Numerische Diskretisierung und Analyse mittels der Pseudospektralmethode

Dieser Abschnitt führt in die numerische Diskretisierung eines fraktionalen Anfangswertproblems unter Verwendung von Tschebyscheff-Polynomen erster Art und der Gauss-Lobatto-Quadratur ein. Er behandelt die Näherungen der fraktionalen Ableitung einer beliebigen Funktion sowohl in einem einzelnen Bereich als auch in partitionierten, nicht überlappenden Bereichen. Zunächst wird die polynomische Näherung einer beliebigen Funktion u(t), die auf einem Intervall **[0,** h] **stetig ist ,** in Form verschobener Tschebyscheff-Polynome erster Art **vorgestellt . Diese Polynome erhält man durch die folgende Reku**

$$ ÿh,0(t) = 1,\ ÿh,1(t) = \frac{2\,t}{H}\ ÿ\ 1,\ ÿh,j+1\ (t) = 2ÿh,1(t)\cdot ÿh,j\ (t)\ ÿ\ ÿh,jÿ1\ (t),\ j\ ÿ\ 1. \tag{5} $$

Die Funktion u(t) wird wie folgt dargestellt:

$$ u(t)\ ÿ\ Uh\ (t) = \sum_{j=0}^{ÿ} uˆjÿÿh,j\ (t),\ t\ ÿ\ [0,\ h], \tag{6} $$

wobei die Koeffizienten uˆj in Gleichung (6) die ÿ **2 Orthogonalitätsbedingung der verschobenen** Tschebyscheff-Polynome erster Art **erfüllen , die bezüglich des inneren Produkt**

$$ uˆj = ÿUh\ (t),\ ÿh,j\ (t)ÿ = ÿj \int_{0}^{H} \frac{Uh\ (t)ÿh,j\ (t)\ dt = ÿ}{ÿj\ i=0} ht\ ÿ\ t\ 2 \approx \frac{1}{ÿ} \sum_{i=0}^{ÿ} Uh\ (ti)ÿh,j\ (ti)ÿi\ , \tag{7} $$

Wo

$$ ÿj = \begin{cases} \text{Andernfalls} \\ \frac{ÿ}{2} \quad \text{ist } ÿ\ j = 0. \end{cases} \tag{8} $$

Wenn eine verkürzte Näherung N-ter Ordnung der Funktion betrachtet und an N + 1 verschiedenen Chebyshev-Gauss-Lobatto-Punkten (CGL-Punkten) kolokalisiert wird, mit tr ÿ [0, h];r = 0(

$$ u(t)\ ÿ \sum_{ich=0}^{N} ÿ\ Uh\ (ti)ÿi \sum_{ÿj\ j=0}^{N} ÿ \frac{1}{ÿ} ÿh,j\ (ti)ÿh,j\ (tr), \quad r = 0(1)N, \tag{9} $$

wobei ÿi die mit der Tschebyscheff-Gauß-Lobatto-Quadratur verbundene Christoffel-Zahl ist und wie folgt definiert ist:

$$ ÿi = \begin{cases} \frac{ÿ}{2N} & ich = 0, N \\ \frac{ÿ}{N} & ansonsten. \end{cases} \tag{10} $$

Mithilfe der folgenden Matrixdarstellungen

Machine Translated by Google

$$\ddot{y} = \begin{matrix} \ddot{y} & \ddot{y}0 & & \\ & \ddot{y}1 & & \\ & & \ddots & \\ \ddot{y} & & & \ddot{y} \\ & & \ddot{y}N & \ddot{y} \end{matrix}, \quad \ddot{y} = \begin{matrix} \ddot{y} & \frac{1}{\ddot{y}0} & & \\ & \overline{1\ddot{y}1} & & \\ & & \ddots & \\ \ddot{y} & & & \ddot{y} \\ & & \overline{1\ddot{y}N} & \ddot{y} \end{matrix}, \quad \ddot{y}h = \begin{matrix} \ddot{y} & \ddot{y}h,0(t0) & \ddot{y}h,0(t1) & \ldots & \ddot{y}h,0(tN) \\ \ddot{y} & \ddot{y}h,1(t0) & \ddot{y}h,1(t1) & \ldots & \ddot{y}h,1(tN) \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{y} & \ddot{y}h,N(t0) & \ddot{y}h,N(t1) & \cdots & \ddot{y}h,N(tN) \end{matrix}, \tag{11}$$

Gleichung (9) kann ausgedrückt werden als

$$\mathbf{u(t)}\ \ddot{y} \sum_{ich=0}^{N} \mathbf{Uh\ (t)Ei(tr)} = \mathbf{E\ TUh}\ ,\ \ddot{y} \tag{12}$$

wobei E = *ÿ* ÿT *ÿ* ÿh **und Uh** = **[Uh (t0) Uh (t1) . . . Äh** (tN)]T.

3.1. Die Diskretisierung des fraktionalen Differentialoperators in einer einzigen Domäne

Nun wollen wir die beliebige nicht-ganzzahlige Ordnung der Funktion u(t) approximieren. Unter der Annahme, dass u(t) ÿ Cp ([0, h]), **wobei p ÿ N** + *ÿÿÿ* + **1, den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen darstellt, t > 0 und** *ÿ* **> 0, dann ist die Näherung für die beliebige nicht- ganzzahlige Ableitung von u(t) gegeben durch**

$$\overset{C}{0}\mathbf{D}_{,\ddot{y}}\ \mathbf{u(t)}\ \ddot{y}\ \ddot{y} \sum_{ich=0}^{N} \mathbf{Uh}\ (ti)\ddot{y}i\ \ddot{y}\ \ddot{y}\mathbf{h,j}\ \mathbf{(ti)}\ \overline{\ddot{y}}\mathbf{j} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{} \qquad \overset{C}{0}{}^{\text{Die Gleichung lautet : D } \ddot{y} \text{ t } \ddot{y}\text{h,j (t).}} \tag{13}$$

Die gebrochene Ableitung des Tschebyscheff-Polynoms $\overset{C}{0}\ddot{y}$ **t ÿh,j (t) ergibt sich indem man die Reihenform des Polynoms [56] wie folgt verwendet:**

$$\overset{C}{0}\mathbf{D}\ \ddot{y}\ \mathbf{t}\ \ddot{y}\mathbf{h,j}\ \mathbf{(t)} = \mathbf{j} \sum_{k=}^{J} \frac{\mathbf{(\ddot{y}1)\ j\ddot{y}k\ (j + k\ \ddot{y}\ 1)!22k\ \ddot{y}\ (j\ \ddot{y}}}{\mathbf{k)!(2k)!h}} \overset{C}{0}\mathbf{D}\ \ddot{y}\ \mathbf{t}^{\mathbf{k}} = \mathbf{j} \sum_{\mathbf{k=\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}}}^{\mathbf{J}} \frac{\mathbf{(\ddot{y}1)\ j\ddot{y}k\ (j + k\ \ddot{y}\ 1)!22k}}{\mathbf{\ddot{y}\ k)!(2k)!h}} \frac{\ddot{y}(k+1)\ \mathbf{t}^{\mathbf{k\ddot{y}\ddot{y}\ (j}}}{\ddot{y}(k\ \ddot{y}\ \ddot{y} + 1)} . \tag{14}$$

Wenn wir nun **t kÿÿ als Linearkombination von verschobenen Tschebyscheff-Polynomen erster Art** an den CGL-Punkten **approximieren , lässt sich Gleichung (14) wie folgt ausdrücken [39]:**

$$\overset{C}{0}\mathbf{D}\ \ddot{y}\ \mathbf{t}\ \ddot{y}\mathbf{h,j}\ \mathbf{(t)}\ \ddot{y}\ \mathbf{hD}\ (\ddot{y})\ddot{y}\mathbf{h}\ , \tag{15}$$

wobei hD(ÿ) = **ÿ ÿ ÿ** ÿT ***ÿ*** **und ÿ, ÿ und ÿ Matrizen sind, deren Einträge definiert sind wie folgt:**

$$\ddot{y}\mathbf{j,k} = \begin{cases} \ddot{y}\ \mathbf{1} & \mathbf{j = 0,\ k = 0\ j =} \\ \dfrac{\mathbf{j(\ddot{y}1)\ j\ddot{y}k\ (j+k\ddot{y}1)!22j}\ (j\ddot{y}k)!}{(2k)!\mathbf{h}} & \mathbf{k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{ansonsten} \end{cases} 1(1)N, \ \mathbf{k = 0(1)j}\ , \quad \ddot{y}\mathbf{k,k} = \begin{cases} \mathbf{0}\ \dfrac{\ddot{y}(k+1)}{\ddot{y}(k\ddot{y}\ddot{y}+1)} & \mathbf{k < \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ k} \\ = \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}(1)N & \end{cases}\ , \quad \ddot{y} \tag{16}$$

$$\ddot{y}\mathbf{p,k} = \begin{cases} \ddot{y}\ \mathbf{0} & \mathbf{k < \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ k} \\ \ddot{y}\ \dfrac{\ddot{y}\ \overline{\ddot{y}\mathbf{h}}\ k\ddot{y}\ddot{y}+p\ddot{y}(k\ddot{y}\ddot{y}+p+\ \frac{1}{2})}{\ddot{y}(k\ddot{y}\ddot{y}+p+1)} & \\ \ddot{y} & \end{cases} = \mathbf{\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}(1)N,\ p} = 0(1)s,\ \mathbf{s} = 0(1)N.$$

Daher wird **u(t)** $\overset{C}{0}\mathbf{D}\ \ddot{y}$ **nun als** angenähert

$$\overset{C}{0}\mathbf{D}\ \ddot{y}\ \mathbf{u(t)}\ \ddot{y}\ \mathbf{(0,hD\ddot{y})}^{T}\ \mathbf{\ddot{A}h}\ , \tag{17}$$

wobei 0,hDÿ = ***ÿ*** ÿT **-Matrix** ***ÿ*** hD(ÿ) **ÿh . Wir beziehen uns auf (0,hDÿ),** ^{T} **als fraktionale Differenzierung im Definitionsbereich [0,** h].

Machine Translated by Google

3.2. Diskretisierung des fraktionalen Differentialoperators in nicht überlappenden

partitionierten Domänen Angenommen, u(t) sei definiert in t ÿ [0, T], **partitioniert in q nicht überlappende Teilintervalle, so dass 0 = t0 < t1 < . . . < tq = T und hl = tl ÿ tlÿ1 , l** = 1(1)q. **Angenommen, t ÿ [tl ,** tl+1] **und** *ÿÿÿ* **ÿ 1 <** *ÿ* **ÿ ÿÿÿ; dann,**

$$
\begin{aligned}
{}_{0}^{C}D_{\ddot{y}}\,\mathbf{u(t)} &= \frac{1}{\ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y})}\int_{0}^{\tau}(\mathbf{t}\ \ddot{y}\ \ddot{y})\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1u\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ (\ddot{y})d\ddot{y} \qquad \ddot{y}\\
&= \sum_{e=1}^{\ddot{m}}\ddot{y}\ {}_{te\ddot{y}1}^{C}D_{\ddot{y}}\,\mathbf{u(t)} + \mathbf{te}\ {}_{tl}^{C}D_{\ddot{y}}\,\mathbf{u(t)} \qquad \mathbf{(18)}\\
&= \sum_{e=1}^{\ddot{m}}\ddot{y}\ \frac{1}{\ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y})}\int_{te\ddot{y}1}^{te}(\mathbf{t}\ \ddot{y}\ \ddot{y})\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1u\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ (\ddot{y})d\ddot{y} + \frac{1}{\ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ \ddot{y}\ \ddot{y})}\int_{tl}^{\tau}(\mathbf{t}\ \ddot{y}\ \ddot{y})\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1u\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ \mathbf{(\ddot{y})d\ddot{y}.}
\end{aligned}
$$

Der erste Term in Gleichung (18) ist das „Gedächtnis“, und der letzte Term der Gleichung ist die lokale Ableitung beliebiger Ordnung von u(t) bezüglich t ÿ [tl , tl+1]. **Die Ableitung beliebiger Ordnung im ersten Teilbereich ist lokal und wird ohne Gedächtnisterm berechnet. Die beiden Terme in Gleichung (18) werden separat approximiert. Wenn die Länge hl jedes Teilbereichs [tl ,** tl+1] **äquivalent zu h (aus der Diskretisierung in einem einzigen Bereich) in Abschnitt 3.1** ist **und wir an N + 1 verschiedenen CGL-Punkten t** zusammenlegen, **dann wird der zweite Term in Gleichung (18) wie folgt approximiert:**

$$
{}_{tl}^{C}D_{\ddot{y}}\,\mathbf{u(t)}\ \ddot{y}\ \mathbf{(tl\ ,hlD}\ {}^{\ddot{y}}_{\mathbf{l}})^{\mathsf{T}}\ \mathbf{Uhl\ ,l\ ,}\qquad \mathbf{t\ \ddot{y}\ [tl\ ,}\ \mathrm{tl{+}1}\ ]. \qquad \mathbf{(19)}
$$

Der erste Term in Gleichung (18), das „Gedächtnis“, also die beliebige nicht ganzzahlige Ableitung ${}_{te\ddot{y}1}^{C}D_{\ddot{y}}\,\mathbf{u(t)}$ **wird approximiert als te**

$$
{}_{te\ddot{y}1}^{C}D_{\ddot{y}}\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ \mathbf{u(t)}\ \ddot{y}\ \sum_{ich=0}^{N}\mathbf{Uh\ (t\ e\ )}\ddot{y}i\ \sum_{j=0}^{N}\ddot{y}\mathbf{hl\ ,j\ (t\ e\ )\ te}\ \ddot{m}\ {}_{te\ddot{y}1}^{C}D_{\ddot{y}}\,\ddot{y}\mathbf{te\ \ddot{y}hl\ ,j}\ (t),\ \text{und ich}\ \ddot{y}\ \mathbf{[te\ddot{y}1,\ te\ ].} \qquad \mathbf{(20)}
$$

Die Ableitung ${}_{te\ddot{y}1}^{C}D_{\ddot{y}}\,\ddot{y}\ddot{y},\ \ddot{y}\mathbf{te\ \ddot{y}hl\ ,j\ (t)}$ **an den CGL-Punkten** $t_{\ddot{m}R}$ **wird angenähert als** ${}_{te\ddot{y}1}^{C}D_{\ddot{y}}\,\ddot{y}\mathbf{te\ \ddot{y}hl\ ,j\ (t\ r\ )}\ \ddot{y}^{\ddot{m}}$ **wobei die Einträge von ÿ wie folgt definiert sind**

$$
\ddot{y}\mathbf{j,r} = \frac{\ddot{y}\ \mathbf{0}}{\ddot{y}\ \mathbf{J!}\ \ddot{y}(\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y})(j\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y})!}\ \mathbf{te}\ te\ddot{y}1^{(T_{\ddot{m}R}}\ \ddot{y}\ \ddot{y})\ \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}1\ddot{y}\ddot{y}\ (\ddot{y}\ \ddot{y}\ \mathbf{te\ddot{y}1)\ j\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}d\ddot{y},}\ \begin{matrix}\mathbf{j} < \ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}\\ \ddot{m}r\ddot{y}[tl\ ,tl{+}1\ ]\\ j=\ddot{y}\ddot{y}\ddot{y}(1)N,\ \mathbf{r=0(1)N.}\end{matrix} \qquad \mathbf{(21)}
$$

Das Integral in Gleichung (21) kann mit jeder Quadraturformel berechnet werden, beispielsweise mit Newton-Cotes- oder Gauß-Quadraturformeln. Daher wird der erste Term von Gleichung (18) dann wie folgt berechnet:

$$
\ddot{y}^{\ddot{m}}\ {}_{te\ e=1}^{C}D_{\ddot{y}}\,\mathbf{u(t)}\ \ddot{y}\ te\ddot{y}1\ \sum_{e=1}^{\ddot{m}}\ddot{y}\ \mathbf{(te\ddot{y}1\ ,teD}\ {}^{\ddot{y}}_{\mathbf{e}})^{\mathsf{T}}\ \mathbf{Uhl\ ,e\ ,} \qquad \mathbf{(22)}
$$

wobei Uhl ,e [te\ddot{y}1, = [Uhl (t e 0) **Uhl (t e** $\frac{}{1}$ **. . . Uhl (t e** $_{\ddot{m}N}$ **)]T, t** $_{\ddot{m}t}$ **sind die CGL-Punkte, die abgebildet werden auf te] und te\ddot{y}1 ,teD** $^{\ddot{y}}_{t}$ ***ÿ*** ÿT ***ÿ ÿ ÿ. hl***

3.3. Pseudospektrale Diskretisierung von FIVPs in nicht überlappenden partitionierten Bereichen

Betrachten Sie das Problem des gebrochenen Anfangswerts (FIVP)

$$
\begin{aligned}
&{}_{0}^{C}D_{\ddot{y}}\,\mathbf{u(t)} = \ddot{y}u(t) + \mathbf{f(t),} \qquad \mathbf{t\ \ddot{y}\ (0,}\ T],\\
&\mathbf{u(0)} = \mathbf{u0,}
\end{aligned} \qquad \mathbf{(23)}
$$

wobei *ÿ* **ÿ** C **und** *ÿ* **ÿ (0,** 1). **Angenommen, die Domäne [0,** T] **ist in q nicht überlappende Domänen partitioniert, so dass 0 = t0 < t1 < t2 < . . . < tq = T, und wie zuvor definieren wir hl = tl ÿ tlÿ1 ,**

Machine Translated by Google

Um die Lösung der Gleichung (23) auf einer beliebigen Definitionsebene [tl , tl+1] **zu erhalten, schreiben wir die Gleichung wie** folgt um :

$$\ddot{y} \quad \ddot{y} \; C_{te\ddot{y}1}\, D_{te}^{\ddot{y}}\; u(t) + \; {}_{C}D_{tl}^{\ddot{y}}\; \ddot{y}\, u(t) = \ddot{y}u(t) + f(t), \qquad t \ddot{y} [tl\ , tl+1\ ], \qquad l = 1(1)q \ddot{y} 1, \tag{24}$$

Dabei gilt: u(0) = u0.

Nehmen wir an, dass die Lösung u(t) von Gleichung (24) als lineare Kombination von Funktionen approximiert werden kann, die sich im Raum der verschobenen Tschebyscheff-Polynome von höchstens Grad N auf der CGL-Quadratur befinden. Unter Verwendung der Diskretisierungen des Differentialoperators aus den Abschnitten 3.1 und 3.2 ist **das FIVP (24) nun äquivalent zu den folgenden algebraischen Systemen:**

$$\begin{aligned} &(0{,}hlD\ {}^{\ddot{y}}_{1})\ TUhl\ ,1 \quad = E\, f\bar{1} \\ &Uhl\ (t\ {}^{1}_{0}) = u0,\ t \ddot{y} [t0,\ t1 \ddot{y} t0 + hl\ ], \end{aligned} \tag{25}$$

Und

$$\begin{aligned} &\ddot{y}\ (te\ddot{y}1\ ,teD\ {}^{\ddot{y}}_{e})\ TUhl\ ,e + (tl\ ,hlD\ {}^{\ddot{y}}_{m})\ TUhl\ ,l \quad = \ddot{y}E\ {}^{T}_{l}\ Uhl\ ,\ l + E\ {}^{T}_{m}f \\ &Uhl\ (t\ {}^{m}_{0}) = Uhl\ (t\ {}^{l\ \ddot{y}1}_{N}), \qquad t \ddot{y} [tl\ ,\ tl+1 \ddot{y} tl + hl\ ], \qquad l = 2(1)q \ddot{y} 1, \end{aligned} \tag{26}$$

wobei f = [f(t 0), f(t 1), . . . , f(t N)]T **und l** = 1(1)q.

3.4. Die numerische Stabilität des Schemas

Die Stabilität der vorgeschlagenen numerischen Methode wird durch die Betrachtung des folgenden linearen fraktionalen Anfangswertproblems demonstriert

$${}^{C}_{0}D\ \ddot{y}\ u(t) = \ddot{y}u(t),\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ C\ \mathbf{st}\ \mathrm{Re}(\ddot{y})\ \ddot{y}\ 0,\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ (0,\ 1),\ t \ddot{y} [0,\ h],\ h \ddot{y} R+, \tag{27}$$

deren exakte Lösung u(t) = u0Eÿ,1(ÿt $\ddot{y}$) **ist, wobei Eÿ,1(·) die zweiparametrige Mittag- Leffler-Funktion ist. Wenn wir eine Aufteilung des Bereichs [0,** h] **in q** = **h gleiche Teilbereiche betrachten,** ergibt sich **die Diskretisierung der Modellgleichung (27) durch die vorgeschlagene numerische Methode in einem beliebigen Teilbereich [tl ,** tl+1] **ÿ [tl , tl** + **hl] als**

$$\frac{1}{h\ {}^{\ddot{y}}_{m}}\ (0{,}hlD\ {}^{\ddot{y}}_{m})^{T}\ \ddot{y}\ \ddot{y}E\ {}^{T}_{l}\ Uhl\ ,\ l\ {}^{=\ddot{y}} \quad \ddot{y}\ (te\ddot{y}1\ ,teD\ {}^{\ddot{y}}_{e})\ TUhl\ ,e\ . \tag{28}$$

Hier ist (teÿ1 ,teD $e^{\ddot{y}}$)T **ist die Gedächtnisdifferenzierungsmatrix wie in Gleichung (22), (0,hlD die fraktionale** $({}^{\ddot{y}}_{m})^{T}$ **ist Differenzierungsmatrix in einer einzelnen Domäne [0, hl] und (tl ,hlD** $({}^{\ddot{y}}_{l})^{T}\ddot{y}\ \frac{1}{\text{Stunde}\ddot{y}}\ (0{,}hlD\ {}^{\ddot{y}}_{m})$ **T.**

Um die Stabilität des vorgeschlagenen pseudospektralen numerischen Verfahrens zu untersuchen, definieren wir die Stabilitätsmatrix

$$S(w) = [P \ddot{y} wQ]\ \ddot{y}1R, \tag{29}$$

wobei w = $\ddot{y}h$ $\ddot{y}$ **und P, Q und R die Matrizen sind, die jeweils definiert sind als l**

Machine Translated by Google

$$P = \begin{bmatrix} (0,hlD\ \ddot{y}_2)^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (0,hlD\ \ddot{y}_3)^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (0,hlD\ \ddot{y}_Q)^T \end{bmatrix} \ddot{y}, \quad Q = \begin{bmatrix} E_0^T & 0 & \dots & 0 \\ 2^T & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E_q^T \end{bmatrix} \ddot{y},$$

$$R = \begin{bmatrix} \ddot{y}h\,\ddot{y}_{(t0,t1D\ l} & 0 & \dots & 0 \\ \ddot{y}h\,\ddot{y}_{(t0,t1D\ l} & \ddot{y}h\,\ddot{y}_{(t1,t2D\ l} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{y}h\,\ddot{y}_{(t0,t1D\ l} & \ddot{y}h\,\ddot{y}_{(t1,t2D\ l} & \dots & \ddot{y}h\,\ddot{y}_{(tq\ddot{y}2,tq\ddot{y}1D} \end{bmatrix} \ddot{y} \tag{30}$$

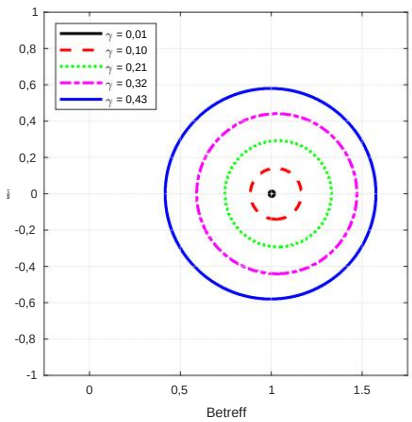
Die Stabilität des numerischen Schemas wird durch die Eigenwerte von S(w) bestimmt. Der Stabilitätsbereich des numerischen Schemas (28) wird typischerweise durch die Menge der Punkte in der C-Ebene definiert, für die der Spektralradius oder der Modul des dominanten Eigenwerts kleiner oder gleich 1 ist. Wenn es mehr als einen von Null verschiedenen Eigenwert gibt, der die Stabilitätsschwelle von 1 überschreiten könnte, wird der Stabilitätsbereich bestimmt, indem diese Eigenwerte und die Bereiche berücksichtigt werden, in denen diese Eigenwerte eine Größe kleiner oder gleich 1 haben. Der Gesamtstabilitätsbereich des numerischen Schemas wäre dann die Schnittmenge dieser Bereiche. Wenn der Stabilitätsbereich Re(w) **ÿ 0 (die gesamte linke Hälfte der C-Ebene) umfasst, dann wird das numerische Schema als absolut stabil (A-stabil) bezeichnet [58]. Wenn zusätzlich zur A-Stabilität die Grenze des dominanten Eigenwerts gegen Null tendiert, während w** gegen **ÿÿ tendiert , dann wird das numerische Schema als Lubich-stabil (L-stabil) bezeichnet [59]. Die L-Stabilitätseigenschaft bedeutet, dass alle Komponenten, die Instabilität im numerischen Verfahren verursachen können, mit zunehmender Länge des Teilbereichs hl** gedämpft werden, was insbesondere bei der **langfristigen Integration steifer Differentialgleichungen wichtig ist .** Zur Veranschaulichung zeigt Tabelle **1 den dominanten Eigenwert, den Stabilitätsbereich und die Stabilitätseigenschaft für eine lineare Diskretisierung (N** = **1) von Gleichung (28) mit zwei Teilbereichen (q** = **2) Wie in der Tabelle gezeigt, ist der Stabilitätsbereich des numerischen Schemas das Äußere einiger geschlossener Scheiben in C; die Grenzen dieser Scheiben sind in Abbildung 1 dargestellt. Wie in der Abbildung angegeben, erfüllen die Stabilitätsbereiche für** *ÿ* = **0,01, 0,10, 0,21, 0,32, 0,43, 0,54, 0,65 die** Bedingungen für absolute und Lubich-Stabilität, und daher ist das numerische Schema für diese *ÿ*- **Werte absolut und Lubich-stabil. Die numerischen Schemata für** *ÿ* = **0,76, 0,87, 0,98 sind jedoch nicht absolut stabil und daher nicht L-stabil.**

In Abbildung 2 sind die Stabilitätsbereiche für eine quadratische Näherung mit q = **3 und q** = **5 für** *ÿ* = **0,21, 0,54, 0,98 dargestellt. Der Stabilitätsbereich in der Abbildung ist der Bereich außerhalb der elliptischen Scheiben, was zeigt, dass die Stabilitätsbereiche für die Teilbereiche q** = **3 und q** = 5 **gleich sind. In beiden Fällen ergibt sich jedoch eine unterschiedliche Anzahl von Eigenwerten mit dem Potenzial, die Stabilitätsschwelle zu überschreiten. Für q** = **3 gibt es einen von Null verschiedenen dominanten Eigenwert für** *ÿ* = **0,21 und 0,54, und es gibt vier von Null verschiedene Eigenwerte für** *ÿ* = **0,98 mit dem Potenzial, die Stabilitätsschwelle von 1 zu überschreiten. Für q** = **5** haben *ÿ* = **0,21, 0,54, 0,98 alle acht von Null verschiedene Eigenwerte, die die Stabilitätsschwelle überschreiten können.** Nimmt **man jedoch die Schnittmenge** der resultierenden Stabilitätsbereiche aus diesen Eigenwerten, **erhält man für jeden dargestellten** *ÿ*- **Wert denselben Stabilitätsbereich mit q** = 3, wie in Abbildung **2 dargestellt. Die Abbildung zeigt , dass die numerischen Schemata für** *ÿ* = **0,21 und** *ÿ* = **0,54 absolut stabil sind und das Schema für** *ÿ* = **0,98 nicht absolut stabil ist (bedingte Stabilität). Obwohl keine allgemeine Schlussfolgerung über die Stabilität des numerischen Schemas gezogen werden kann, kann aus dieser Analyse gefolgert werden, dass die Frage, ob das numerische Schema absolut oder bedingt stabil ist, vom Wert der beliebigen nicht ganzzahligen Ordnung der fraktionalen Different**

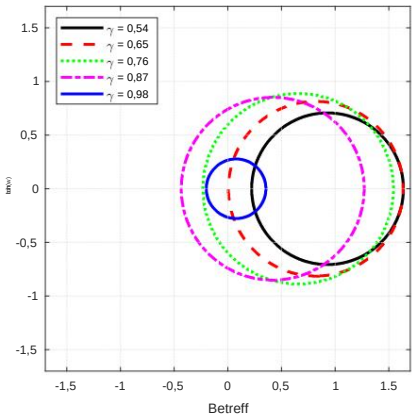
Machine Translated by Google

Tabelle 1. Der dominante Eigenwert, der Stabilitätsbereich und die Stabilitätseigenschaft für einige ausgewählte Werte beliebiger Ordnung, ÿ, für eine lineare Näherung (N = 1) mit q = 2.

ÿ	Dominanter Eigenwert	Stabilitätsregion	Stabilitätseigenschaft
0,01	ÿ124958025860977 / 9007199254740992w ÿ 9034579827725136	9034579827725136 w ÿ / 9007199254740992 ÿ 124958025860977 / 9007199254740992	A–stabil L-stabil
0,10	ÿ1254334826011059 / 9007199254740992w ÿ 9235870117935490	w ÿ 9235870117935490 / 9007199254740992 1254334826011059 ÿ / 9007199254740992	A–stabil L-stabil
0,21	ÿ2627472107360489 / 9007199254740992w ÿ 9350065552559051	9350065552559051 w ÿ / 9007199254740992 2627472107360489 ÿ / 9007199254740992	A–stabil L-stabil
0,32	ÿ3959902260456486 / 9007199254740992w ÿ 9279409270142741	w ÿ 9279409270142741 / 9007199254740992 3959902260456486 ÿ / 9007199254740992	A–stabil L-stabil
0,43	ÿ10428492653806604 / 18014398509481984w ÿ 17946001659717557	w ÿ 17946001659717557 / 18014398509481984 10428492653806604 ÿ / 18014398509481984	A–stabil L-stabil
0,54	ÿ12700697864360454 / 18014398509481984w ÿ 16735571476860095	w ÿ 16735571476860095 / 18014398509481984 12700697864360454 ÿ / 18014398509481984	A–stabil L-stabil
0,65	ÿ7316166143825643 / 9007199254740992w ÿ 7382436898791357	7382436898791357 w ÿ / 9007199254740992 7316166143825643 ÿ / 9007199254740992	A–stabil L-stabil
0,76	ÿ15952263845377693 / 18014398509481984w ÿ 11810807580156978	w ÿ 11810807580156978 / 18014398509481984 15952263845377693 ÿ / 18014398509481984	
0,87	ÿ30618033637964479 / 36028797018963968w ÿ 15079171789616800	w ÿ 15079171789616800 / 36028797018963968 30618033637964479 ÿ / 36028797018963968	
0,98	ÿ9934148207590571 / 36028797018963968w ÿ 2781302084999484	w ÿ 2781302084999484 / 36028797018963968 ÿ 9934148207590571 / 36028797018963968	

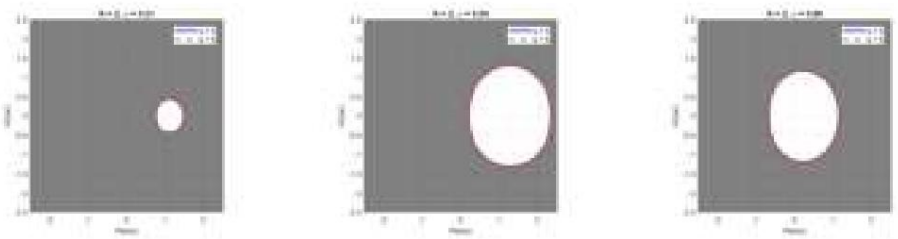


(A)



(B)

Abbildung 1. Die Grenzen der geschlossenen Scheiben in Tabelle 1. Der Stabilitätsbereich der linearen Diskretisierung mit zwei Teildomänen für die angegebenen Werte beliebiger nicht-ganzzahliger Ordnung, (a) ÿ = 0,01, 0,10, 0,21, 0,32, 0,43 und (b) ÿ = 0,54, 0,65, 0,76, 0,87, 0,98, liegt außerhalb dieser Kreise.



(A) (B) (C)

Abbildung 2. Die Stabilitätsbereiche quadratischer Näherungen mit q = 3 und q = 5 für (a) ÿ = 0,21, (b) ÿ = 0,54 und (c) ÿ = 0,98. Die Stabilitätsbereiche sind die schattierten Bereiche außerhalb der elliptischen Scheiben.

Machine Translated by Google

4. Numerische Experimente und Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden eine Reihe von Zahlenbeispielen vorgestellt, die von einzelnen linearen Gleichungen bis zu Systemen nichtlinearer Gleichungen reichen, zusammen mit den Ergebnissen. Detaillierte Analys Ergebnisse für jedes Beispiel werden zur Veranschaulichung der wichtigsten Beobachtungen bereitgestellt. Für eine umfassende Zum Verständnis der in diesen Beispielen verwendeten numerischen Methoden siehe die Beschreibung siehe Abschnitt 3.

Beispiel 1. Betrachten Sie die lineare fraktionale Differentialgleichung [60]

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\ddot{y}}\,u(t) + u(t) = \ddot{y}(3\,\frac{2t\,2\ddot{y}\ddot{y}}{\ddot{y}\,\ddot{y})} - \frac{t\,1\ddot{y}\ddot{y}}{\ddot{y}(2\,\ddot{y}\,\ddot{y})}\,2 + t\ \ddot{y}\,t,\ 0 < \ddot{y}\,\ddot{y}\,1,\ t\,\ddot{y}\,[0,\,T], \tag{31} $$

mit Anfangsbedingung $u(0) = 0$ und exakter Lösung $u(t) = t^{2\,\ddot{y}\,t.}$

Tabelle 2 zeigt den absoluten Fehler zwischen der Näherungs- und der exakten Lösung unter Verwendung von die nichtüberlappende Multi-Domain-Pseudospektralmethode mit der CGL-Quadratur und die Tschebyscheff-Polynome als Basisfunktionen. Die Tabelle enthält auch numerische Ergebnisse erhalten, ohne die Domäne zu zerlegen. Diese vergleichende Analyse unterstreicht die Genauigkeit und Wirksamkeit des Multi-Domain-Ansatzes bei der Reduzierung von Fehlern und der Verbesserung die Genauigkeit der numerischen Lösung. Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass für die fraktionalen Größenordnung von $\ddot{y} = 0{,}5$, obwohl der maximale absolute Fehler im Multi-Domain-Setup nicht in Bezug auf signifikante Nullen abnimmt, sondern mit zunehmendem **q** abnimmt . Dies zeigt, dass Obwohl minimal, ist die Verwendung mehrerer Subdomains von Vorteil. Vergleicht man die Fehler zum Single-Domain-Ergebnis gibt es eine zusätzliche signifikante Null im Fehler des Multi-Domain-Ansatz, was darauf hindeutet, dass der Multi-Domain-Ansatz effektiver ist für dieses Problem.

Tabelle 2. Maximaler absoluter Fehler für Beispiel 1 in Single-Domain- und Multi-Domain-Setups.

	N = 10, $\ddot{y} = 0{,}5$			N = 10, T = 6,0		
Q	T = 1,0	T = 3,0	T = 6,0	$\ddot{y} = 0{,}2$	$\ddot{y} = 0{,}6$	$\ddot{y} = 0{,}8$
	7,7426 × 10ÿ5	6,2253 × 10ÿ4	2,7903 × 10ÿ3	1,3625 × 10ÿ3	3,6161 × 10ÿ3	5,2468 × 10ÿ3
5 10	4,0800 × 10ÿ5	5,2107 × 10ÿ4	2,2192 × 10ÿ3	6,7562 × 10ÿ4	1,9440 × 10ÿ3	2,8829 × 10ÿ3
20	2,3538 × 10ÿ5	4,4940 × 10ÿ4	1,8850 × 10ÿ3	4,4076 × 10ÿ4	1,5245 × 10ÿ3	2,1135 × 10ÿ3
50	2,0489 × 10ÿ5	4,1298 × 10ÿ4	1,6596 × 10ÿ3	3,8984 × 10ÿ4	1,2966 × 10ÿ3	1,5794 × 10ÿ3
100	2,0286 × 10ÿ5	4,0279 × 10ÿ4	1,6132 × 10ÿ3	3,8131 × 10ÿ4	1,2746 × 10ÿ3	1,4322 × 10ÿ3
200	2,0374 × 10ÿ5	4,0190 × 10ÿ4	1,6047 × 10ÿ3	3,8224 × 10ÿ4	1,2946 × 10ÿ3	1,3898 × 10ÿ3
			Einzelne Domäne			
	3,3518 × 10ÿ4	1,0362 × 10ÿ3	2,1415 × 10ÿ3 9,0794 × 10ÿ4		2,5580 × 10ÿ3	2,9839 × 10ÿ3

Aus Tabelle 2 geht die Wirksamkeit der vorgeschlagenen numerischen Technik zur Erzielung einer genaue Näherungslösung für eine lineare FDE ist offensichtlich, so dass wir in den folgenden Beispielen Berücksichtigen Sie nichtlineare FDEs, um die numerische Methode weiter zu validieren.

Beispiel 2. Betrachten Sie die nichtlineare fraktionale Differentialgleichung [60]

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\ddot{y}}\,u(t)\,\ddot{y}\,u^{2}(t) = \ddot{y}\ \frac{2}{(t+1)^{2}},\quad 0 < \ddot{y}\,\ddot{y}\,1,\ t\,\ddot{y}\,[0,\,T], \tag{32} $$

wobei die Anfangsbedingung $u(0) = \ddot{y}2$ ist und die exakte Lösung für $\ddot{y} = 1$ gegeben ist durch $u(t) = \frac{2}{(t+1)}$.

Machine Translated by Google

Tabelle 3 zeigt die Näherungslösung, die unter Verwendung zweier unterschiedlicher Teildomänen erreicht wurde in der vorgeschlagenen Methode. Die Lösungen in diesen Teilbereichen entsprechen den numerischen Werten wurde in Odibat und Momani [60] beschrieben. Es ist zu beachten, dass geschlossene Lösungen für $\ddot{y} = 0{,}2$ und $\ddot{y} = 0{,}4$ sind nicht verfügbar. Für $\ddot{y} = 1$ ist die Genauigkeit der vorgeschlagenen Methode ist unbestreitbar. Um die Genauigkeit der vorgeschlagenen Methode weiter zu untermauern, Tabelle 4 zeigt, dass der Restfehler für verschiedene Werte konstant nahe Null liegt von ÿ. Dies deutet darauf hin, dass die vorgeschlagene Methode das Problem in Beispiel 2 effektiv löst.

Tabelle 3. Näherungslösung von Beispiel 2 unter Verwendung zweier verschiedener Teilbereiche, q, und der numerischen Werte, die in Odibat und Momani berichtet wurden [60].

T	$\ddot{y} = 0{,}2$		$\ddot{y} = 0{,}4$		$\ddot{y} = 1{,}0$		
	q = 10	q = 20 Gemeldet [60]	q = 10	q = 20 Gemeldet [60]	q = 10	q = 20	Genau
0,0	ÿ2,0000	ÿ2,0000	ÿ2,0000	ÿ2,0000	ÿ2,0000	ÿ2,0000	ÿ2,0000
0,2	ÿ1,4454	ÿ1,4455	ÿ1,4864	ÿ1,4874	ÿ1,4874	ÿ1,4899	ÿ1,6666 ÿ1,6666 ÿ1,6666
0,4	ÿ1,3295	ÿ1,3296	ÿ1,3665	ÿ1,3506	ÿ1,3506	ÿ1,3525	ÿ1,4285 ÿ1,4285 ÿ1,4285
0,6	ÿ1,2477	ÿ1,2478	ÿ1,2822	ÿ1,2525	ÿ1,2526	ÿ1,2541	ÿ1,2500 ÿ1,2500 ÿ1,2500
0,8	ÿ1,1867	ÿ1,1868	ÿ1,2192	ÿ1,1774	ÿ1,1774	ÿ1,1787	ÿ1,1111 ÿ1,1111 ÿ1,1111
1,0	ÿ1,1396	ÿ1,1397	ÿ1,1704	ÿ1,1177	ÿ1,1178	ÿ1,1189	ÿ0,9999 ÿ1,0000 ÿ1,0000

Tabelle 4. Die Restfehler von Beispiel 2 an ausgewählten Punkten unter Verwendung von zwei verschiedenen Teildomänen, q, für verschiedene Werte der gebrochenen Ordnung ÿ.

T	$\ddot{y} = 0{,}2$		$\ddot{y} = 0{,}4$		$\ddot{y} = 0{,}6$	
	q = 10	q = 20	q = 10	q = 20	q = 10	q = 20
0,2	4,4230 × 10ÿ9	4,8561 × 10ÿ13	9,7841 × 10ÿ11	9,2539 × 10ÿ12	3,2469 × 10ÿ10	5,2865 × 10ÿ11
0,4	9,3414 × 10ÿ13	2,1760 × 10ÿ13	1,6637 × 10ÿ11	3,8897 × 10ÿ12	9,3717 × 10ÿ11	2,0417 × 10ÿ11
0,6	4,9305 × 10ÿ13	1,2423 × 10ÿ13	8,9744 × 10ÿ12	2,1446 × 10ÿ12	4,9785 × 10ÿ11	1,1396 × 10ÿ11
0,8	2,8477 × 10ÿ13	7,1831 × 10ÿ14	5,4355 × 10ÿ12	1,3228 × 10ÿ12	3,0330 × 10ÿ11	7,1187 × 10ÿ12
1.0	1,7807 × 10ÿ13	4,6629 × 10ÿ14	3,5078 × 10ÿ12	8,6397 × 10ÿ13	1,9900 × 10ÿ11	4,6949 × 10ÿ12

Beispiel 3. Als nächstes betrachten wir die nichtlineare fraktionale Differentialgleichung [61]

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\ddot{y}}\, u(t) + u(t) = \frac{2t^{2-\ddot{y}}}{\ddot{y}(3-\ddot{y})} - \frac{t^{1-\ddot{y}}}{\ddot{y}(2-\ddot{y})} + \left(t^{2-\ddot{y}} - t + 1\right)^{2}, \quad 0 < \ddot{y} \le 1, \quad t \in [0, T], \tag{33} $$

mit der Anfangsbedingung $u(0) = 1$ und deren exakte Lösung $u(t) = t^{2-\ddot{y}} - t + 1$.

Tabelle 5 zeigt den maximalen absoluten Fehler der Differenz zwischen dem exakten und Näherungslösungen, die mit der Multi-Domain- und Single-Domain-Methode erzielt werden. Es Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass Übereinstimmung mit dem in Tabelle 2 beobachteten Trend besteht . die Domäne der FDE wird größer, der Fehler im Einzeldomänenschema verschlechtert sich; Im Vergleich dazu ist die Fehlergröße beim Multidomänenschema jedoch besser. Wir stellen fest, dass die Größe des Fehlers mit zunehmendem $\ddot{y}$ zunimmt , ähnlich dem Trend in Tabelle 2 beobachtet.

Machine Translated by Google

Tabelle 5. Der maximale absolute Fehler der Differenz zwischen der exakten und der ungefähren Lösung von Beispiel 3 für unterschiedliche Anzahlen von Unterdomänen, q.

	N = 10, ÿ = 0,5			N = 10, T = 6,0		
Q	T = 1,0	T = 3,0	T = 6,0	ÿ = 0,2	ÿ = 0,6	ÿ = 0,8
	6,5833 × 10–5	4,5300 × 10ÿ4	7,7010 × 10ÿ4	1,6897 × 10ÿ4	9,9126 × 10ÿ4	1,0256 × 10ÿ3
5 10	3,6216 × 10–5	2,6020 × 10ÿ4	4,7125 × 10ÿ4	1,0248 × 10ÿ4	6,3577 × 10ÿ4	7,4647 × 10ÿ4
20	1,9347 × 10–5	1,3492 × 10ÿ4	2,8073 × 10ÿ4	5,5876 × 10ÿ5	3,9608 × 10ÿ4	5,1975 × 10ÿ4
50	1,6865 × 10–5	8,2634 × 10ÿ5	1,3621 × 10ÿ4	2,3143 × 10ÿ5	2,0636 × 10ÿ4	3,2248 × 10ÿ4
100	1,6547 × 10–5	6,7163 × 10ÿ5	8,2558 × 10ÿ5	1,0361 × 10ÿ5	1,1932 × 10ÿ4	2,1211 × 10ÿ4
200	1,6576 × 10–5	5,9548 × 10ÿ5	6,7326 × 10ÿ5	7,5375 × 10ÿ6	7,6523 × 10ÿ5	1,3480 × 10ÿ4
			Einzelne Domäne			
	3,1847 × 10ÿ4	9,0415 × 10ÿ4	1,7639 × 10ÿ3 6,1773 × 10ÿ4		1,9684 × 10ÿ3	2,2669 × 10ÿ3

Beispiel 4. Betrachten Sie die Anfangswert-fraktionelle homogene Bagley-Torvik-Differentialgleichung

$$ {}_{0}^{C}D_{\tau}^{\ddot{y}}\, u(t) + u\, \ddot{y}\ddot{y}(t) + u(t) = 0, \text{ für } t \ddot{y} (0, T] \text{ und } \ddot{y} \ddot{y} (1, 2), \tag{34} $$

unter den Anfangsbedingungen u(0) = 1,0 und uÿ (0) = 0.

Ersetzen wir die rechte Seite der Gleichung (34) durch 2 + 4 $\frac{\overline{T}}{\ddot{y}}$ **2 + t und setze t ÿ (0,** 1], **unter den Anfangsbedingungen u(0) = 0,0 und u** $^{\ddot{y}}$**(0) = 0, dann ist die geschlossene Lösung gegeben als u(t) = t** ^{2} **wenn ÿ = 1,5. Tabelle 6 zeigt die Fehler, die sich aus der absoluten Wert der Differenz zwischen den numerischen Lösungen, die durch die Multi-Domain-Technik und die exakten Lösungen, und diese werden mit den Fehlern verglichen, die durch die Methode der evolutionären künstlichen neuronalen Netze in der Studie von Raja et al. [62].**

Tabelle 6. Die absoluten Fehler der Differenz zwischen den exakten und numerischen Lösungen von Beispiel 4 bei verschiedenen t- Werten unter Verwendung von N = 12 und q = 400 im Vergleich mit den Fehlern in der Arbeit von Raja et al. [62].

T	Genaue Lösung	Aktuelles Ergebnis	Aktueller Fehler	Gemeldeter Fehler [62]
0,1	0,01	0,01000	1,83183 × 10ÿ7	5,48 × 10ÿ5
0,3	0,09	0,09005	1,26966 × 10ÿ6	2,66 × 10ÿ3
0,5	0,25	0,25014	6,69388 × 10ÿ6	1,67 × 10ÿ2
0,7	0,49	0,49026	3,40281 × 10ÿ5	5,80 × 10ÿ2
0,9	0,81	0,81040	1,25968 × 10ÿ4	1,50 × 10ÿ1
1,0	1,00	1,00048	2,12565 × 10ÿ4	2,25 × 10ÿ1

Tabelle 6 vergleicht die exakten und ungefähren Lösungen, die mit der Multi-Domain-Methode bei verschiedenen t- Werten erhalten wurden, und die zugehörigen Fehler bei jedem t. Die Fehler sind verglichen mit denen von Raja et al. [62]. Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Näherungslösungen stimmen besser mit den exakten Lösungen überein als die Ergebnisse von Raja et al. [62], und dies bestätigt die Effizienz der vorgeschlagenen Methode, da sie ein neuronales Netzwerk übertrifft Ansatz, der als effizient und zuverlässig gilt.

Um die Genauigkeit der vorgeschlagenen Multi-Domain-Methode weiter zu validieren, wurde die Unendlichkeit Norm des Residuums für verschiedene Anzahlen von Unterdomänen wird dargestellt. Tabelle 7 gibt die Unendlichkeitsnorm der Restfehler für Beispiel 4. Der Restfehler ergibt sich aus das diskrete Äquivalent der Gleichung (34), definiert durch

$$ \text{Residuum} = \sum_{e=1}^{\ddot{y}} (te\ddot{y}1, teD_{e}^{\ddot{y}}) TUhl, e + (tl, hlD_{\ddot{y}}^{\ddot{y}}) TUhl, l + (tl, hlD2\, l) TUhl, l + E_{l\,Uhl,\,l}^{T}. \tag{35} $$

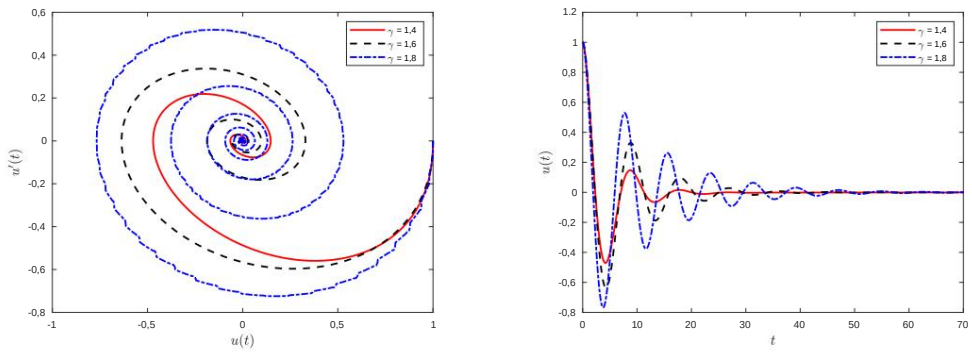
Machine Translated by Google

Tabelle 7 zeigt, dass die Methode effizient bei der Lösung von Differentialgleichungen gebrochener Ordnung ist. Gleichungen mit unterschiedlichen Werten beliebiger nicht ganzzahliger Ordnung, da der Restfehler sehr klein für verschiedene Bruchordnungen, was die Wirksamkeit der Multi- Domain-Technik demonstriert.

Tabelle 7. Die maximalen Residualfehler für Beispiel 4 für verschiedene T- Werte, gebrochene Ordnungen und unterschiedliche Anzahl von Multidomänen, q.

	N = 10, ÿ = 1,5			N = 10, T = 6,0		
Q	T = 1,0	T = 3,0	T = 6,0	ÿ = 1,2	ÿ = 1,6	ÿ = 1,8
10	1,115 × 10ÿ10	1,158 × 10ÿ11	1,933 × 10ÿ12	1,031 × 10ÿ12	1,870 × 10ÿ12	3,445 × 10ÿ12
20	7,346 × 10ÿ10	6,618 × 10ÿ11	1,158 × 10ÿ11	1,078 × 10ÿ11	2,104 × 10ÿ11	2,765 × 10ÿ11

Um die erzielten Ergebnisse weiter zu validieren, reproduzieren wir die erhaltenen Lösungsprofile von Zafar et al. [63] und beobachten eine ausgezeichnete Übereinstimmung im Ergebnis, wie in Abbildung 3 gezeigt.



(A) (B)

Abbildung 3. Die Dynamik der Bagley–Torvik-Gleichung (34) für verschiedene Werte von ÿ mit T = 70, N = 10 und q = 400: (a) das Phasenporträt für die u ÿ u ÿ Ebene und (b) das u(t) -Profil.

In den restlichen Beispielen dieses Abschnitts betrachten wir Systeme gekoppelter fraktionaler Anfangswertprobleme, die chaotische Systeme beschreiben. Diese Gleichungen weisen oft langfristige Dynamik auf und erfordern ausnahmslos eine langfristige Integration, um die zugrunde liegende Dynamik. Daher ist eine numerische Technik wie die Multi-Domain-Die Chebyshev-Pseudospektralmethode, die eine Langzeitintegration bewältigen kann, ist eine perfekte Lösung zur Lösung solcher Systeme, wie die Ergebnisse in den nächsten vier Beispielen bestätigen.

Beispiel 5. Betrachten Sie das fraktionale chaotische System von Differentialgleichungen, die eine Gedächtnisinhärentes elektrisches System [64]

$$
\begin{aligned}
{}_{0}^{C}D_{\ddot{y}}\, u1(t) &= \frac{u2(t)}{c}, \\
{}_{0}^{C}D_{\ddot{y}}\, u2(t) &= \ddot{y}\,\frac{1}{M}\,u1(t) + \ddot{y}u2(t)(u3(t))2\,\ddot{y}\,\ddot{y}u2(t), \\
{}_{0}^{C}D_{\ddot{y}}\, u3(t) &= \ddot{y}u2(t)\,\ddot{y}\,\ddot{y}u3(t) + u2(t)u3(t),
\end{aligned}
\qquad t \ddot{y} (0, T], \ddot{y} \ddot{y} (0, 1], \tag{36}
$$

unter dem folgenden Anfangszustand (0,1, 0,0, 0,1). Hier gilt c = 0,70, L = 3,00, ÿ = 1,10 und ÿ = 0,60. Die Spannung am Kondensator c wird durch die Variable u1(t) dargestellt, und der Strom durch die Induktivität L wird durch die Variable u2(t) repräsentiert, und der interne Zustand des memristiven System wird durch die Variable u3(t) bezeichnet.

Der durchschnittliche maximale Restfehler für das System (36) ist in Tabelle 8 angegeben . Wir bemerken hier, dass die maximalen Restfehler in Tabelle 8 und den nachfolgenden Tabellen in diesem

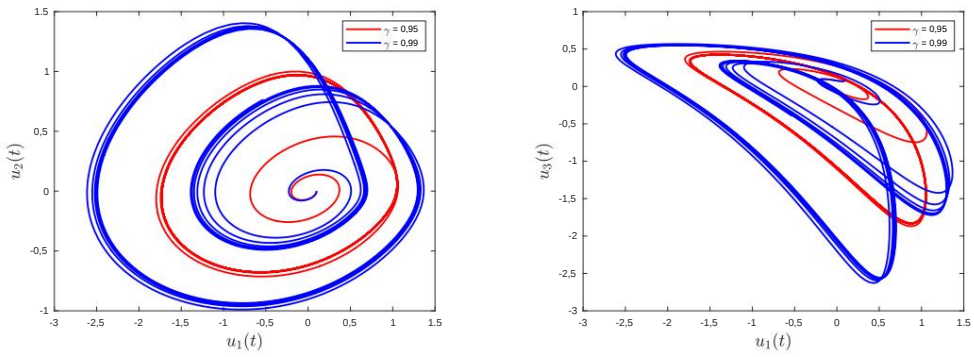
Machine Translated by Google

Abschnitt werden als Durchschnitt der maximalen Residuen der Gleichungen im System erhalten. Die Residuen werden analog zu Gleichung (35) berechnet. Aus Tabelle 8 ist ersichtlich, dass für verschiedenen gebrochenen Ordnungen und scheinbar großen Domänen, [0, T], ist ein hohes Maß an Genauigkeit erhalten, wenn die Multi-Domain-Chebyshev-Pseudospektralmethode verwendet wird. Aufgrund der inhärent chaotischen Natur des Problems, erfordert die Dynamik des Systems typischerweise eine großen physikalischen Bereich vollständig zu entwickeln und diese komplexen langfristigen Verhaltensweisen wird die physische Domäne in eine große Zahl kleinerer Unterdomänen aufgeteilt. Die Tabelle zeigt, dass der Durchschnitt der maximalen Restfehler geringfügig abnimmt wenn die Anzahl der Subdomänen zunimmt. Diese umgekehrte Beziehung zwischen der Anzahl von Subdomänen und der Restfehler unterstreicht die Anwendbarkeit der Multi-Domain Technik bei der Arbeit mit dieser Art von System, das eine langfristige Integration erfordert. Diese wird besonders deutlich, wenn man den Fehler mit dem Fehler vergleicht, der mit der Single- Domain-Methode verbunden ist. Wie bereits in den vorherigen Beispielen beobachtet und nun bestätigt Laut Tabelle 8 ist der mit der Single-Domain-Methode verbundene Fehler größer als der Fehler erhalten, wenn der Multi-Domain-Ansatz verwendet wird.

Tabelle 8. Die Restfehler für Beispiel 5 für zwei Werte von T unter Verwendung von N = 10 und für verschiedene Zahlen von Teildomänen q, mit c = 0,70, L = 3,00, $\ddot{y}$ = 1,10 und $\ddot{y}$ = 0,60.

	T = 20,0			T = 50,0		
Q	$\ddot{y}$ = 0,7	$\ddot{y}$ = 0,8	$\ddot{y}$ = 0,9	$\ddot{y}$ = 0,7	$\ddot{y}$ = 0,8	$\ddot{y}$ = 0,9
100	2,515 × 10ÿ11	7,810 × 10ÿ12	8,503 × 10ÿ12	8,781 × 10ÿ11	3,336 × 10ÿ11	8,054 × 10ÿ10
200	9,780 × 10ÿ12	2,590 × 10ÿ12	2,144 × 10ÿ12	3,434 × 10ÿ11	1,113 × 10ÿ11	1,935 × 10ÿ10
300	5,544 × 10ÿ12	1,365 × 10ÿ12	9,795 × 10ÿ13	1,973 × 10ÿ11	5,817 × 10ÿ12	8,468 × 10ÿ11
400	3,717 × 10ÿ12	8,632 × 10ÿ13	5,718 × 10ÿ13	1,319 × 10ÿ11	3,701 × 10ÿ12	4,723 × 10ÿ11
500	2,720 × 10ÿ12	6,125 × 10ÿ13	4,095 × 10ÿ13	9,769 × 10ÿ12	2,592 × 10ÿ12	3,004 × 10ÿ11
			Einzelne Domäne			
	2,397 × 10ÿ9	2,439 × 10ÿ9	1,920 × 10ÿ7 3,101 × 10ÿ8		4,108 × 10ÿ7	5,427 × 10ÿ7

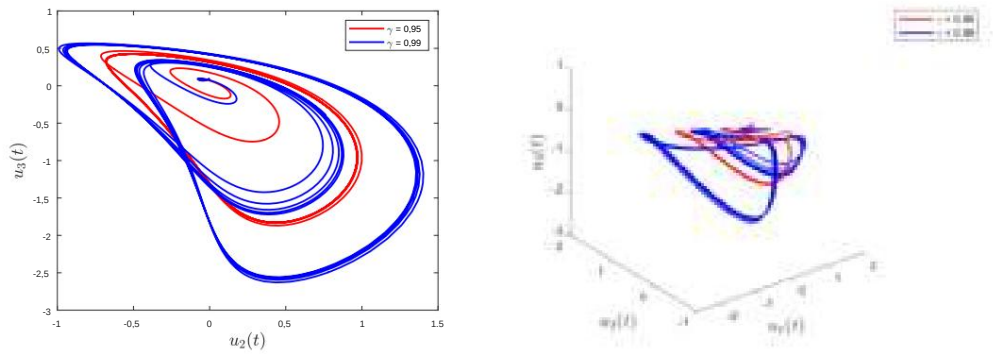
Um den numerischen Ergebnissen dieses Beispiels noch mehr Glaubwürdigkeit zu verleihen, reproduzieren wir die Dynamik in Form von Phasenporträts des memristiven chaotischen elektrischen Systems als wurde in der Arbeit von Sene [64] berichtet. Wie in Abbildung 4 gezeigt, besteht eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen diesen Phasenporträts und denen im Werk von Sene [64].



(A) (B)

Abbildung 4. Fortsetzung

Machine Translated by Google



(CD)

Abbildung 4. Die Phasenporträts der chaotischen Systeme (36) für die (a) u1 ÿ u2 Ebene, (b) u1 ÿ u3 Ebene, (c) u2 ÿ u3 Ebene und (d) u1 ÿ u2 ÿ u3 Fläche mit *ÿ* = 0,95 und 0,99, T = 250, N = 13 und q = 85

Beispiel 6. Betrachten Sie die fraktionalen modifizierten Streck-Twist-Faltungs-Differentialgleichungen [65]

$$
\begin{aligned}
&{}_{0}^{C}\mathbf{D}_{\ddot{y}}\, u1(t) = \ddot{y}1u3(t)\ \ddot{y}\ 8u1(t)u2(t),\ t\ \ddot{y}\ (0,\ T],\ \ddot{y}\ \ddot{y}\ (0,\ 1],\\
&{}_{0}^{C}\mathbf{D}_{\ddot{y}}\, u2(t) = 11(u1(t))2 + 3(u2(t))2 + (u3(t))2 + \ddot{y}2u1(t)u3(t)\ \ddot{y}\ 3\ddot{y}2\ 3\ ,\\
&{}_{0}^{C}\mathbf{D}_{\ddot{y}}\, u3(t) = 2\ 1\ \ddot{y}\ \ddot{y}4\ u2(t)u3(t)\ \ddot{y}\ \ddot{y}1u1(t)\ \ddot{y}\ \ddot{y}2u1(t)u2(t),
\end{aligned}
\qquad (37)
$$

unter dem Anfangszustand (0,2, ÿ0,2, 0,2), mit *ÿ* = 1,00, ÿ1 = 0,2, ÿ2 = 2,0, ÿ3 = 1,0 und ÿ4 = 0,1.

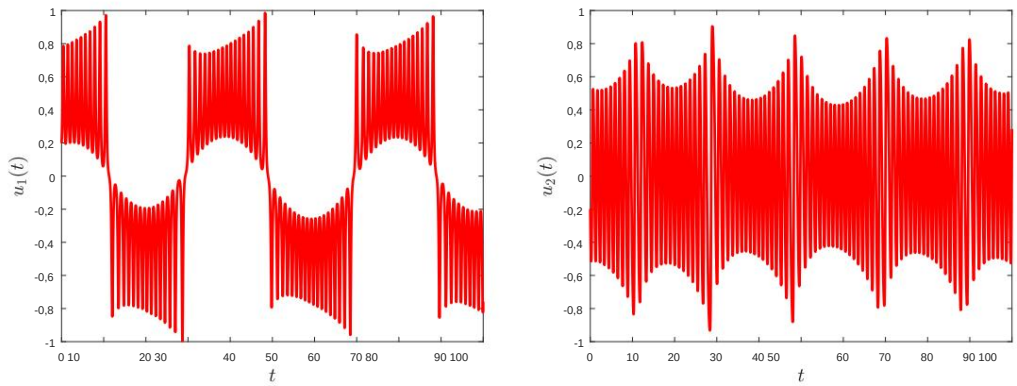
Ähnlich wie im vorherigen Beispiel erfordert dieses System typischerweise einen großen physikalischen Bereich, um sich vollständig zu stabilisieren und zu entwickeln, und wenn es in einem einzigen Bereich gelöst wird, ist die numerische Lösung instabil, wie die durchschnittlichen Restfehler in einem einzigen Bereich in Tabelle 9 zeigen. Wir präsentieren die durchschnittlichen maximalen Restfehler für verschiedene gebrochene Ordnungen und relativ große Bereiche, [0, T], **für verschiedene relativ große Anzahlen von Unterbereichen in Tabelle 9. Es besteht eine Übereinstimmung zwischen dem Genauigkeitsgrad, der für die Ergebnisse in Tabelle 9** beobachtet wurde , **und denen, die in den vorherigen Beispielen erzielt wurden. Der für die verschiedenen verwendeten Unterbereichszahlen erzielte Fehler ist gering, was darauf hindeutet, dass die vorgeschlagene mehrdomänige Chebyshev-Pseudospektralmethode dieses System von FDEs effizient löst. Mit** zunehmendem **q wird beobachtet, dass sich der durchschnittliche Restfehler verbessert, was zu einer höheren Genauigkeit führt. Die überlegene Wirksamkeit des mehrdomänigen Ansatzes gegenüber dem eindomänigen numerischen Schema wird in diesem Beispiel geringfügig deutlicher. In diesem Fall wird beobachtet, dass das eindomänige numerische Schema ziemlich große numerische Fehler erzeugt, während die mehrdomänige Technik einen höheren Genauigkeitsgrad erreichen kann. Diese Unterschiede im Leistungsniveau unterstreichen die Einschränkungen im Anwendungsbereich des Single-Domain-Schemas, während** der Multi-Domain-Ansatz

Abbildung 5 zeigt das Verhalten der Lösungsprofile bei der Entwicklung **von t . Die Ergebnisse sind wie erwartet und stimmen vollständig mit den Ergebnissen von Azam et al. [65] überein. In Abbildung 6 ist auch zu beobachten , dass das chaotische System durch die verschiedenen Zustände fließt, indem es sich um die Quadranten dreht und windet . Diese Dynamik wurde auch von Azam et al. [65]** erfasst **und bestätigt die in dieser Studie vorgelegten numerischen Ergebnisse.**

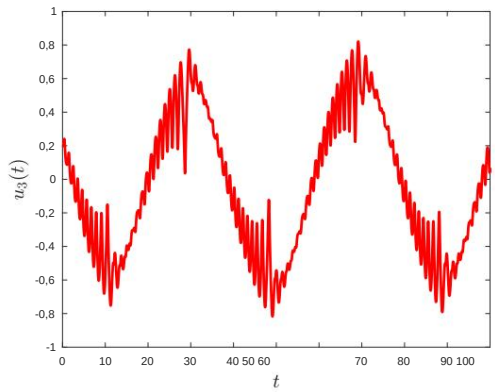
Machine Translated by Google

Tabelle 9. Die durchschnittlichen maximalen Restfehler für Beispiel 6 für zwei Werte von T und verschiedene Anzahl der Teildomänen q mit N = 10. Die folgenden Parameterwerte werden verwendet: ÿ1 = 0,2, ÿ2 = 2,0, ÿ3 = 1,0 und ÿ4 = 0,1.

	T = 20,0			T = 50,0		
Q	ÿ = 0,7	ÿ = 0,8	ÿ = 0,9	ÿ = 0,7	ÿ = 0,8	ÿ = 0,9
100	1,292 × 10ÿ8	4,793 × 10ÿ8	2,171 × 10ÿ8	1,364 × 10ÿ10	1,059 × 10ÿ8	4,952 × 10ÿ8
200	1,883 × 10ÿ8	1,192 × 10ÿ8	6,393 × 10ÿ9	1,060 × 10ÿ8	2,928 × 10ÿ8	4,607 × 10ÿ8
300	8,108 × 10ÿ9	5,539 × 10ÿ9	3,267 × 10ÿ9	1,826 × 10ÿ8	3,502 × 10ÿ8	1,144 × 10ÿ8
400	4,546 × 10ÿ9	3,223 × 10ÿ9	1,790 × 10ÿ9	2,750 × 10ÿ8	1,284 × 10ÿ8	1,065 × 10ÿ8
500	3,082 × 10ÿ9	2,098 × 10ÿ9	1,182 × 10ÿ9	1,883 × 10ÿ8	1,194 × 10ÿ8	6,393 × 10ÿ9
			Einzelne Domäne			
	1.730 × 101	1,999 × 101	2,419 × 101	8,388 × 101	2,195 × 10ÿ1	4,131 × 101



(A) **(B)**



(C)

Abbildung 5. Die zeitliche Entwicklung von u1(t), u2(t), u3(t) **des chaotischen Systems (37) mit** ÿ = **1,00, ÿ1 = 0,2, T = 100, N = 13 und q = 350.**

Machine Translated by Google

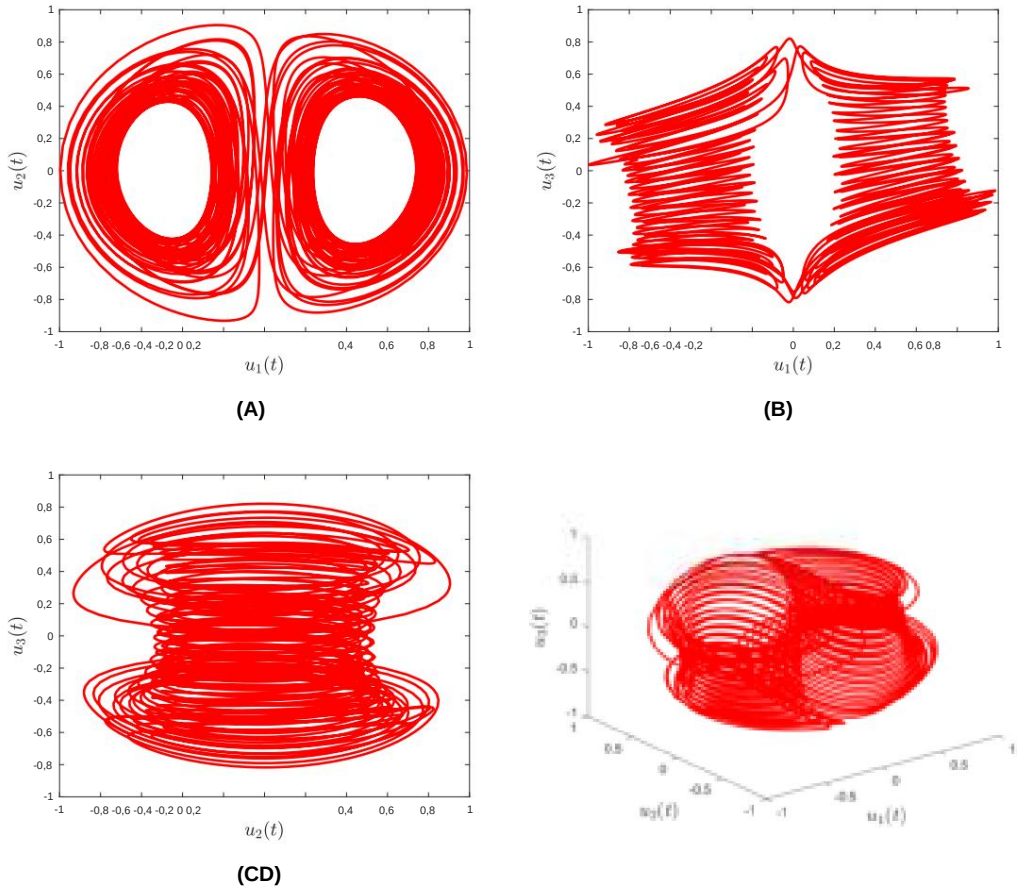


Abbildung 6. Die Phasenporträts des chaotischen Systems (37) für die (a) u1 ÿ u2 Ebene, (b) u1 ÿ u3 Ebene, (c) u2 ÿ u3 Ebene und (d) u1 ÿ u2 ÿ u3 Oberfläche mit $\ddot{y}$ **= 1,00, ÿ1 = 0,2, T = 100, N = 13 und q = 350.**

Beispiel 7. Betrachten Sie die fraktionalen Rossler Differentialgleichungen [66]

$$\begin{aligned} {}_{0}^{C}\mathbf{D}_{\tau}^{\ddot{y}}u1(t) &= \ddot{y}u2(t)\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{u3(t),\ t\ \ddot{y}\ (0,}\ T],\ \ddot{y}\ \ddot{\mathbf{y}}\ \mathbf{(0,}\ 1], \\ {}_{0}^{C}\mathbf{D}_{\tau}^{\ddot{y}}u2(t) &= u1(t) + \ddot{y}1u2(t), \\ {}_{0}^{C}\mathbf{D}_{\tau}^{\ddot{y}}u3(t) &= \mathbf{0,2} + \mathbf{u1(t)u3(t)}\ \ddot{\mathbf{y}}\ 10u3(t), \end{aligned} \qquad \begin{matrix} \ddot{y} \\ ,,, \\ ,,, \end{matrix} \qquad \textbf{(38)}$$

mit folgenden Anfangsbedingungen: (1, 1, 1), **mit ÿ1 = 0,4 und** $\ddot{y}$ **= 0,9.**

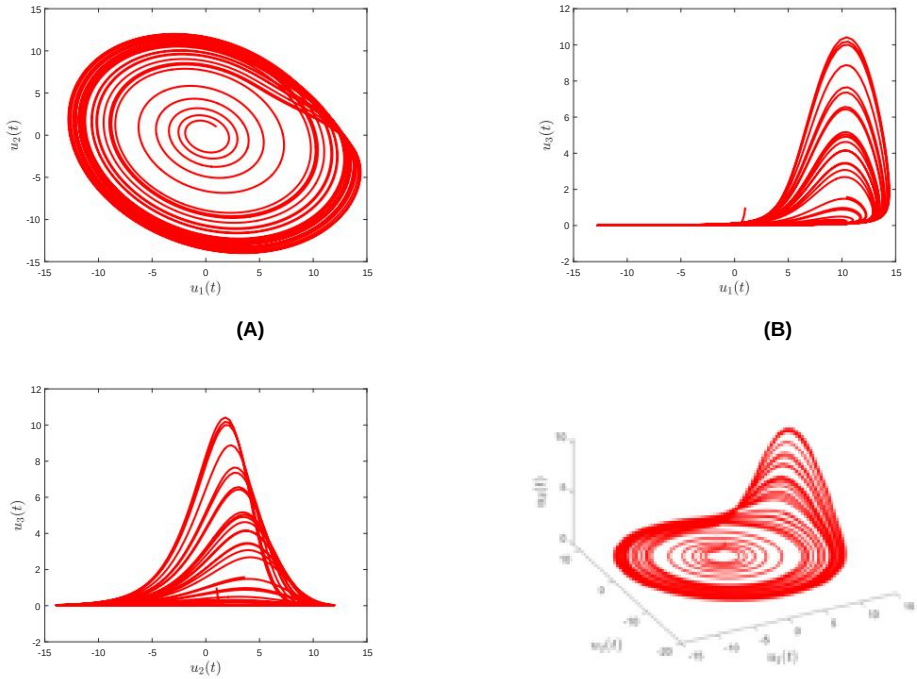
Tabelle 10 zeigt die durchschnittlichen maximalen Restfehler für Gleichung (38) für ausgewählte Werte beliebiger nicht-ganzzahliger Ordnung, ÿ, und für zwei Domänen, (0, T). **Die Ergebnisse sind für verschiedene Anzahlen von Domänenzerlegungen dargestellt. Aus Tabelle 10 können wir ersehen, dass die Die Restfehler sind gering, was darauf schließen lässt, dass die Näherungslösungen genau sind. wurde in dieser Studie mehrfach bestätigt, eine Erhöhung der Anzahl der verwendeten Subdomänen führt zu genaueren Lösungen. Es wird auch gezeigt, dass die Verwendung des Single-Domain-Ansatzes führt zu einer geringeren Genauigkeit der erhaltenen Näherungslösungen.**

Machine Translated by Google

Tabelle 10. Die Restfehler für Beispiel 7 zu zwei Endzeiten T unter Verwendung der Anzahl der Gitterpunkte N = 10 für unterschiedliche Anzahlen von Unterdomänen q und ÿ1 = 0,40.

	T = 20,0			T = 50,0		
Q	ÿ = 0,7	ÿ = 0,8	ÿ = 0,9	ÿ = 0,7	ÿ = 0,8	ÿ = 0,9
100	1,073 × 10ÿ7	4,973 × 10ÿ8	1,171 × 10ÿ8	1,469 × 10ÿ7	1,469 × 10ÿ7	1,893 × 10ÿ7
200	5,544 × 10ÿ8	1,857 × 10ÿ8	3,569 × 10ÿ9	1,269 × 10ÿ7	6,666 × 10ÿ8	4,696 × 10ÿ8
300	3,479 × 10ÿ8	1,015 × 10ÿ8	1,740 × 10ÿ9	9,241 × 10ÿ8	3,853 × 10ÿ8	3,299 × 10ÿ8
400	2,459 × 10ÿ8	6,520 × 10ÿ9	1,042 × 10ÿ9	6,979 × 10ÿ8	2,574 × 10ÿ8	1,933 × 10ÿ8
500	1,859 × 10ÿ8	4,653 × 10ÿ9	7,023 × 10ÿ10	5,544 × 10ÿ8	1,857 × 10ÿ8	1,189 × 10ÿ8
			Einzelne Domäne			
	1,594 × 10ÿ4	2,218 × 10ÿ4	6,733 × 10ÿ5 1,725 × 10ÿ4		2,518 × 10ÿ4	3,726 × 10ÿ4

Abbildung 7 zeigt die Phasenporträts für das chaotische System, und das Ergebnis stimmt mit Die in Li et al. [66] erzielten Ergebnisse wurden bestätigt , wodurch die vorliegenden numerischen Lösungen validiert wurden.



(A) (B)

(CD)

Abbildung 7. Die Phasenporträts der chaotischen Systeme (38) für die (a) u1 -u2 Ebene, (b) u1 ÿ u3 Ebene, (c) u2 ÿ u3 Ebene und (d) u1 ÿ u2 ÿ u3 Oberfläche mit ÿ = 0,90, ÿ1 = 0,4, T = 200, N = 10 und q = 900.

Beispiel 8. Betrachten Sie das folgende nichtlineare fraktionale chaotische System [67]

$$\begin{aligned} {}_{0}^{C}D_{\tau}^{\ddot{y}}\, u1(t) &= \ddot{y}1u1(t) + u2(t) + u2(t)u3(t),\ t \ddot{y} (0, T],\ \ddot{y} \ddot{y} (0, 1], \\ {}_{0}^{C}D_{\tau}^{\ddot{y}}\, u2(t) &= \ddot{y}u1(t)u3(t) + u2(t)u3(t), \\ {}_{0}^{C}D_{\tau}^{\ddot{y}}\, u3(t) &= \ddot{y}\ddot{y}2u3(t) \ddot{y} \ddot{y}3u1(t)u2(t) \ddot{y} m1, \end{aligned} \tag{39}$$

wobei der Anfangszustand als (0,2, 0,2, 0,2) gegeben ist, ÿ1 = ÿ2 = ÿ3 = 1,0, m1 = 0,0 und ÿ = 0,9.

In Tabelle 11 sind die durchschnittlichen maximalen Restfehler für Gleichung (39) dargestellt. Die Tabelle zeigt, dass eine Erhöhung der Anzahl partitionierter Domänen in höherer Genauigkeit der Näherungslösungen für die ausgewählten gebrochenen Ordnungen und Domänen. Die durchschnittlichen maximalen Restfehler sind gering, was bestätigt, dass

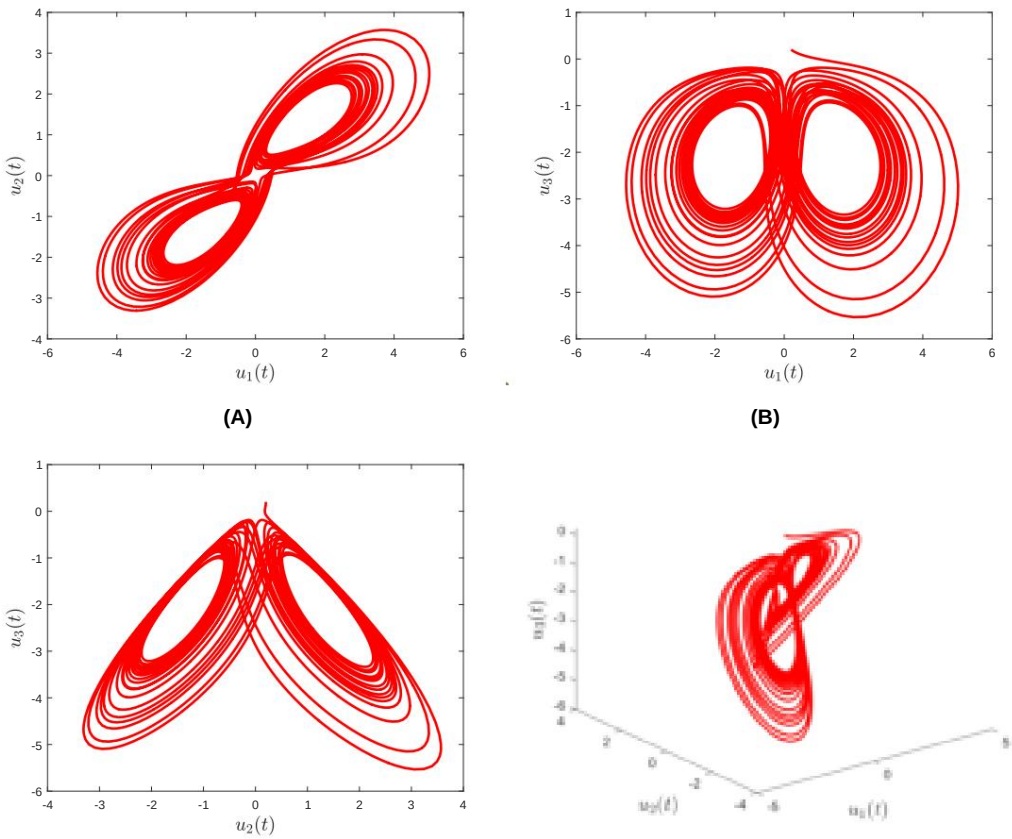
Machine Translated by Google

Die vorgeschlagene Multi-Domain-Methode ist für dieses fraktionale Differentialmodell hocheffizient.
im Gegensatz zum Single-Domain-Ansatz, der nicht so genau ist.

Tabelle 11. Die durchschnittlichen maximalen Restfehler für Beispiel 8 in zwei verschiedenen Domänen (0, T] mit N = 10 für unterschiedliche Anzahlen von Teildomänen q, ÿ1 = ÿ2 = ÿ3 = 1,0 und m1 = 0,0.

	T = 20,0			T = 50,0		
Q	ÿ = 0,7	ÿ = 0,8	ÿ = 0,9	ÿ = 0,7	ÿ = 0,8	ÿ = 0,9
100	4,114 × 10ÿ8	6,012 × 10ÿ8	5,802 × 10ÿ8	2,142 × 10ÿ7	1,226 × 10ÿ7	2,711 × 10ÿ7
200	1,305 × 10ÿ8	1,673 × 10ÿ8	1,559 × 10ÿ8	5,335 × 10ÿ8	6,845 × 10ÿ8	7,236 × 10ÿ8
300	6,155 × 10ÿ9	7,361 × 10ÿ9	7,034 × 10ÿ9	3,422 × 10ÿ8	4,357 × 10ÿ8	4,049 × 10ÿ8
400	3,398 × 10ÿ9	4,196 × 10ÿ9	3,935 × 10ÿ9	2,050 × 10ÿ8	2,575 × 10ÿ8	2,436 × 10ÿ8
500	2,195 × 10ÿ9	2,720 × 10ÿ9	2,540 × 10ÿ9	1,304 × 10ÿ8	1,676 × 10ÿ8	1,559 × 10ÿ8
			Einzelne Domäne			
	3,055 × 10ÿ2	1,225 × 10ÿ2	9,667 × 10ÿ1 2,279 × 10ÿ2		6,453 × 101	4,708 × 101

Wir präsentieren die Phasenporträts des chaotischen Systems in Abbildung 8. Die Abbildung bestätigt
Die von Sene [67] **berichtete Dynamik ist in ausgezeichneter Übereinstimmung mit den zuvor publiziertes Ergebnis. Die Übereinstimmung zwischen den hier vorgestellten Phasenporträts und denen**
Die in der Studie von Sene [67] dokumentierten
Zuverlässigkeit der aktuellen numerischen Methode.



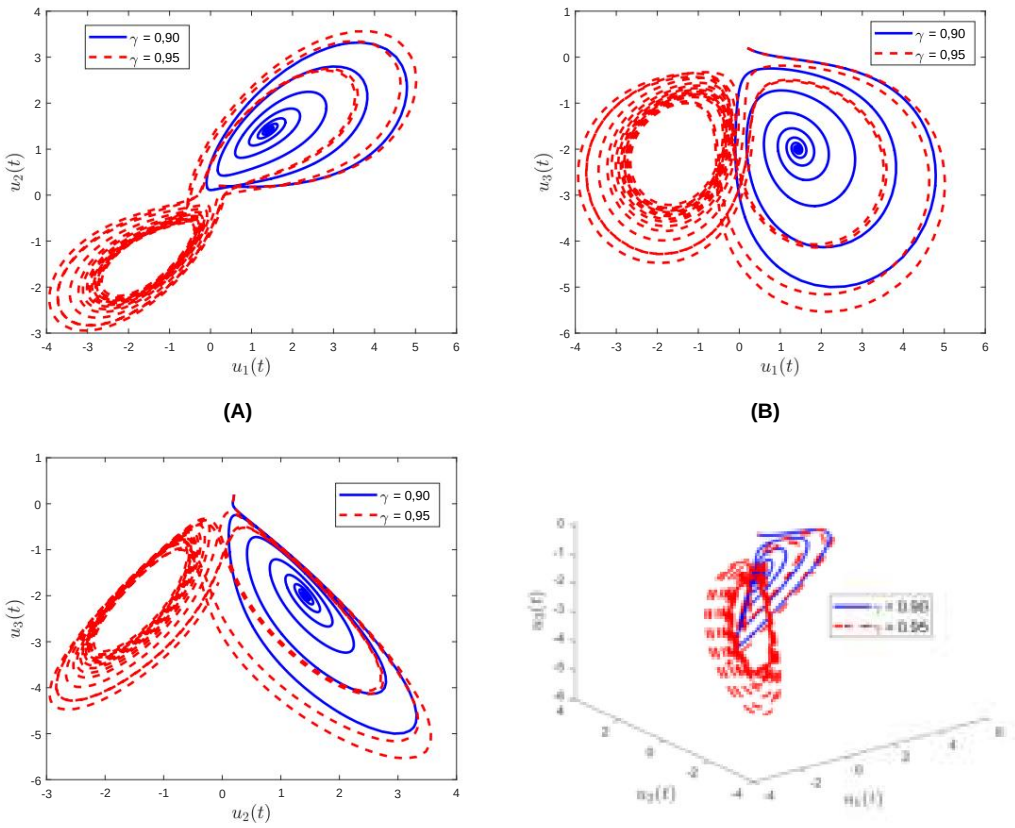
(A) **(B)**

(CD)

Abbildung 8. Die Phasenporträts der chaotischen Systeme (39) für die (a) u1 ÿ u2 Ebene, (b) u1 ÿ u3 Ebene, (c) u2 ÿ u3 Ebene und (d) u1 ÿ u2 ÿ u3 Oberfläche mit ÿ = 0,95, T = 150, N = 10 und q = 800.

Machine Translated by Google

Abbildung 9 zeigt die Phasenporträts des chaotischen Systems in Gleichung (39) unter Verwendung von zwei verschiedene $\ddot{y}$ -Werte. Die Abbildung rechtfertigt, dass die Dynamik des chaotischen Systems abhängt von die willkürliche reale Ordnung.



(A) (B)

(CD)

Abbildung 9. Die Phasenporträts der chaotischen Systeme (39) für die (a) u1 ÿ u2 Ebene, (b) u1 ÿ u3 Ebene, (c) u2 ÿ u3 Ebene und (d) u1 ÿ u2 ÿ u3 Oberfläche mit $\ddot{y}$ = 0,90 und 0,95, T = 80, N = 10 und q = 350.

Abbildung 10 zeigt die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse (das maximale absolute Residuum in jedem Teilbereich) jeder Gleichung in den chaotischen Systemen, die Gleichungen (36)–(39). Die Abbildungen zeigen, dass die Genauigkeit der Lösungen, die durch Die Mehrdomänen-Chebyshev-Pseudospektralmethode ist hoch und erreicht manchmal Fehler, die kleiner sind als die bisher in den Tabellen angegebenen. Wie man deutlich beobachten kann, Wenn die Anzahl der Teildomänen im Berechnungsbereich zunimmt, verringert sich der Restfehler entsprechend. In einigen Fällen wird der Restfehler auf die Größenordnung von reduziert 10ÿ16. Die Residualfehler bei einer kleinen Anzahl von Subdomänen zeigen jedoch bereits gute Genauigkeit, was zeigt, dass die Verwendung des in diesem Artikel vorgeschlagenen Multi-Domain-Ansatzes Studie ist sehr effizient bei der Lösung von fraktionalen Differentialgleichungen, die typischerweise erfordern langfristige Integration.

Machine Translated by Google

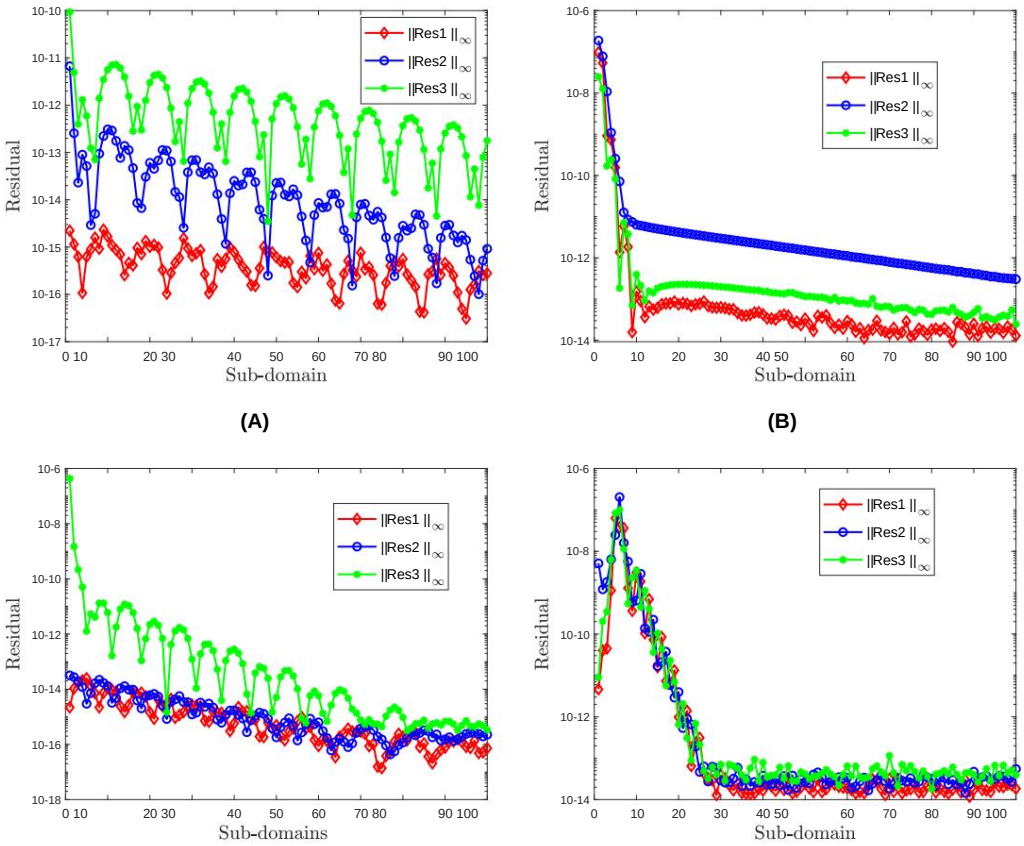


Abbildung 10. Der maximale Restfehler in jedem Bereich für (a) Gleichung (36) (b) Gleichung (37) (c) Gleichung (38) und (d) Gleichung (39) unter Verwendung von $\ddot{y}$ = 0,8, T = 50, N = 10 und q = 100.

5. Schlussfolgerungen

In dieser Studie wurde ein neuartiger Ansatz vorgestellt, die mehrdomänige Chebyshev-Pseudospektralmethode zur Lösung fraktionaler Differentialgleichungen. Die Neuheit der Methode ergab sich aus der Verwendung nicht überlappender Mehrdomänen, Chebyshev-Polynomen erster Art und Gauss-Lobatto-Kollokationspunkten bei der Entwicklung des Schemas, das speziell für die Handhabung fraktionaler Differentialgleichungen angepasst wurde. Die Methode nutzt die globalen Eigenschaften spektralbasierter Methoden zur Diskretisierung nichtlokaler Operatoren wie fraktionaler Differentialoperatoren, die exponentielle Konvergenz der auf Chebyshev-Polynomen basierenden Pseudospektralmethode und die Fähigkeit des mehrdomänenbasierten Ansatzes, die Genauigkeit von Lösungen für Probleme mit Langzeitdynamik aufrechtzuerhalten. Der Stabilitätsbereich des mehrdomänenbasierten Schemas wurde durch eine lineare Stabilitätsanalyse festgelegt. Die Stabilitätsanalyse zeigte, dass es möglich ist, ein absolutes und Lubich-stabiles numerisches Schema für einige Werte beliebiger nicht ganzzahliger Ordnung zu erhalten. Es wurden mehrere numerische Experimente mit linearen und nichtlinearen einzelnen FDEs und Systemen nichtlinearer FDEs durchgeführt. Die Beispiele wurden sorgfältig ausgewählt, um verschiedene Komplexitätsstufen abzudecken, darunter auch Probleme mit gebrochenen Anfangswerten und Langzeitdynamik, wie etwa chaotische Systeme, die nachweislich erheblich von einem mehrdomänenbasierten numerischen Verfahren profitieren. Diese Beispiele haben gezeigt, dass die vorgeschlagene mehrdomänenbasierte numerische Methode sehr genaue Ergebnisse liefert. Zur Validierung der Methode wurden die in dieser Studie erzielten numerischen Ergebnisse mit analytischen Lösungen (sofern verfügbar) und Näherungslösungen aus der Literatur verglichen. Es zeigte sich, dass die vorgeschlagene Methode genauere Lösungen lieferte als die Näherungslösungen aus der Literatur. Wo keine genaue L

Machine Translated by Google

In zukünftigen Studien werden wir die Anwendbarkeit der Tschebyscheff-Pseudospektralmethode in nicht überlappenden oder überlappenden partitionierten Bereichen auf fraktionale Randwertprobleme mit nichtlinearer Dynamik untersuchen.

Beiträge der Autoren: SDO: Konzeptualisierung, Untersuchung, Methodik, Software, Schreiben – Originalentwurf, Überprüfung und Bearbeitung, Überwachung. NM: Untersuchung, Methodik, Schreiben – Originalentwurf, Überprüfung und Bearbeitung. YOT: Untersuchung, Methodik, Schreiben – Originalentwurf, Überprüfung und Bearbeitung. OO: Konzeptualisierung, Methodik, Schreiben – Originalentwurf, Überprüfung und Bearbeitung, Überwachung. Alle Autoren haben die veröffentlichte Version des Manuskripts gelesen und ihr zugestimmt.

Finanzierung: Diese Arbeit basiert auf der Forschung, die teilweise von der National Research Foundation of South Africa (Ref.-Nummer TTK2204163593) unterstützt wurde. Das APC wurde von der University of Witwatersrand fina

Erklärung des Institutional Review Board: Nicht zutreffend.

Einverständniserklärung: Nicht zutreffend.

Datenverfügbarkeitserklärung: Die generierten Daten sind im Artikel enthalten.

Danksagungen: Yusuf Olatunji Tijani dankt der Rhodes University für ihre Unterstützung.

Interessenkonflikte: Die Autoren erklären, dass keine Interessenkonflikte bestehen.

Abkürzungen

In diesem Manuskript werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

CGL Tschebyscheff–Gauß–Lobatto
FDEs Bruchteil-Differentialgleichungen
MSCM Multi-Domain Spektrale Kollokationsmethode

Verweise

1. Podlubny, I. Fractional Differential Equations: Eine Einführung in fraktionale Ableitungen, fraktionale Differentialgleichungen, in Methoden der Ihre Lösung und einige ihrer Anwendungen; Elsevier: Amsterdam, Niederlande, 1998.
2. Oldham, K.; Spanier, J. Die Theorie der Bruchrechnung und Anwendungen der Differenzierung und Integration auf beliebige Ordnung; Elsevier: Amsterdam, Niederlande, 1974.
3. Caputo, M.; Fabrizio, M. Eine neue Definition der fraktionalen Ableitung ohne singulären Kern. Prog. Fract. Differ. Appl. 2015, 1, 73–85.
4. Atangana, A.; Baleanu, D. Neue fraktionale Ableitungen mit nichtlokalem und nichtsingulärem Kernel: Theorie und Anwendung auf Wärme Übertragungsmodell. arXiv 2016, arXiv:1602.03408.
5. Javadi, R.; Mesgarani, H.; Nikan, O.; Avazzadeh, Z. Lösen von Differentialgleichungen mit gebrochener Ordnung mithilfe eines neuronalen Netzwerks mit fraktionaler radialer Basisfunktion. Symmetry 2023, 15, 1275. [CrossRef]
6. Benchochra, M.; Karapinar, E.; Lazreg, JE; Salim, A. Bruchgleichungen: Neue Fortschritte für verallgemeinerte Bruchgleichungen Derivate; Springer: Cham, Schweiz, 2023.
7. Ahmadian, S.; Darvishi, M. Bruchversion der (1+1)-dimensionalen Biswas–Milovic-Gleichung und ihre Lösungen. Optik 2016, 127, 10135–10147. [CrossRef]
8. Manafian, J.; Lakestani, M. Ein neuer analytischer Ansatz zur Lösung einiger partieller Differentialgleichungen mit gebrochener Ordnung. Indian J. 2017, 91, 243–258 .
9. Kumar, S.; Kumar, D.; Abbasbandy, S.; Rashidi, M. Analytische Lösung der fraktionalen Navier–Stokes-Gleichung unter Verwendung modifizierter Laplace-Zerlegungsmethode. Ain Shams Eng. J. 2014, 5, 569–574. [CrossRef]
10. Shakeel, M.; Mohyud-Din, ST Eine neuartige (G'/G)-Expansionsmethode und ihre Anwendung auf die raum-zeitliche fraktionale symmetrische regularisierte Langwellengleichung (SRLW). Adv. Trends Math. 2015, 2, 1–16. [CrossRef]
11. Zhu, Q.; Qi, J. Exakte Lösungen der nichtlinearen raumzeitlichen fraktionalen partiellen Differentialgleichung symmetrischer regularisierter langer Wellen (SRLW) Gleichung unter Verwendung von zwei Methoden. Adv. Math. Phys. 2022, 2022, 8062119. [CrossRef]
12. Senol, M. Neue analytische Lösungen der fraktional symmetrischen regularisierten Langwellengleichung. Rev. Mex. De Física 2020, 66, 297–307. [Querverweis]
13. Ünal, S.Ç.; Da¸scÿo ÿglu, A.; Bayram, DV Jacobi elliptische Funktion Lösungen von Raum-Zeit fraktional symmetrisch regularisierten langen Wellengleichung. Math. Sci. Appl. E-Notes 2021, 9, 53–63. [CrossRef]
14. Tuluce Demiray, S.; Bulut, H.; Belgacem, FBM Sumudu-Transformationsmethode für analytische Lösungen des fraktionalen Typs gewöhnlich Differentialgleichungen. Math. Probl. Eng. 2015, 2015, 131690. [CrossRef]
15. Kumar, D.; Darvishi, M.; Joardar, A. Modifizierte Kudryashov-Methode und ihre Anwendung auf die fraktionale Version der Vielfalt von Boussinesq-ähnliche Gleichungen in flachem Wasser. Opt. Quantum Electron. 2018, 50, 128. [CrossRef]

Machine Translated by Google

16. He, JH Exp-Funktionsmethode für fraktionale Differentialgleichungen. Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2013, 14, 363–366. [CrossRef]
17. Ahmadian, S.; Darvishi, M. Ein neues fraktionales Biswas–Milovic-Modell mit seinen periodischen Solitonenlösungen. Optik 2016, 127, 7694–7703. [Querverweis]
18. Turan, DA Eine Sinus-Cosinus-Wavelet-Methode für die Näherungslösungen der fraktionalen Bagley-Torvik-Gleichung. Sigma J. Eng. Nat. Wissenschaft. Ve Fen Bilim. Derg. 2022, 40, 150–154.
19. Khan, A.; Shah, K.; Luo, D. Numerische Lösungen für einige Familien von Differentialgleichungen gebrochener Ordnung durch Laguerre- Polynome. In Nichtlineare Systeme – Theoretische Aspekte und aktuelle Anwendungen; IntechOpen: London, Großbritannien, 2020.
20. Sun, ZZ; Gao, GH Fractional Differential Equations: Finite Difference Methods; Walter de Gruyter GmbH & Co KG: Berlin, Deutschland, 2020.
21. Hattaf, K.; Hajhouji, Z.; Ait Ichou, M.; Yousfi, N. Eine numerische Methode für fraktionale Differentialgleichungen mit neuen verallgemeinerten Hattaf Bruchableitung. Math. Probl. Eng. 2022, 2022, 3358071. [CrossRef]
22. Kumar, M.; Jhinga, A.; Daftardar-Gejji, V. Numerische Methoden höherer Ordnung für Differentialgleichungen mit fraktionaler Verzögerung. Indian J. Reine angewandte Mathematik. 2024, 1–22. [CrossRef]
23. Jhinga, A.; Daftardar-Gejji, V. Eine neue numerische Methode zur Lösung von Differentialgleichungen mit fraktionaler Verzögerung. Comput. Appl. Math. 2019, 38, 166. [CrossRef]
24. Lee, S.; Kim, H.; Jang, B. Eine neuartige numerische Methode zur Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen mit gebrochener Ordnung und ihre Anwendungen. Fractal Fract. 2024, 8, 65. [CrossRef]
25. Kumar, S.; Shaw, PK; Abdel-Aty, AH; Mahmoud, EE Eine numerische Studie über fraktionale Differentialgleichungen mit Bevölkerungswachstumsmodell . Numer. Methoden Partielle Differenzialgleichungen 2024, 40, e22684. [CrossRef]
26. Bhrawy, AH; Taha, TM; Machado, JAT Ein Überblick über operationelle Matrizen und Spektraltechniken für die Bruchrechnung. Nichtlineare Dyn. 2015, 81, 1023–1052. [CrossRef]
27. Baleanu, D.; Bhrawy, A.; Taha, T. Eine modifizierte verallgemeinerte Laguerre-Spektralmethode für fraktionale Differentialgleichungen auf der Halblinie. In Proceedings of the Abstract and Applied Analysis; Wiley Online Library: Hoboken, NJ, USA, 2013; Band 2013, S. 413529.
28. Delkhosh, M.; Parand, K. Eine neue Berechnungsmethode basierend auf fraktionalen Lagrange-Funktionen zur Lösung mehrgliedriger fraktionaler Differentialgleichungen. Numerische Algorithmen 2021, 88, 729–766. [CrossRef]
29. Xu, Q.; Zheng, Z. Spektrale Kollokationsmethode für fraktionale Differential-/Integralgleichungen mit verallgemeinertem fraktionalen Operator. Int. J. Differ. Gleichungen 2019, 2019, 3734617. [CrossRef]
30. Raslan, KR; Abd El Salam, MA; Ali, KK; Mohamed, EM Spektrale Tau-Methode zur Lösung allgemeiner Differentialgleichungen mit gebrochener Ordnung Gleichungen mit linearem Funktionalargument. J. Egypt. Math. Soc. 2019, 27, 33. [CrossRef]
31. Shen, J.; Sheng, C. Spektralmethoden für fraktionale Differentialgleichungen unter Verwendung verallgemeinerter Jacobi-Funktionen. Handb. Fract. Calc. Appl. Numer. Methods 2019, 3, 127–155.
32. Zayernouri, M.; Karniadakis, GE Exponentiell genaue Spektral- und Spektralelementmethoden für fraktionale ODEs. J. Comput. 2014, 257, 460–480 .
33. Zhao, J.; Zhang, Y.; Xu, Y. Implizite Runge–Kutta- und spektrale Galerkin-Methoden für Riesz-Raum-Fraktional-/Verteiltordnung Diffusionsgleichung. Comput. Appl. Math. 2020, 39, 47. [CrossRef]
34. Khader, M.; Sweilam, N. Näherungslösungen für die fraktionale Advektions-Dispersionsgleichung unter Verwendung der Legendre-Pseudospektraltheorie Methode. Comput. Appl. Math. 2014, 33, 739–750. [CrossRef]
35. Cardone, A.; D'Ambrosio, R.; Paternoster, B. Eine Spektralmethode für stochastische fraktionale Differentialgleichungen. Appl. Numer. Math. 2019, 139, 115–119 .
36. Doha, EH; Bhrawy, AH; Ezz-Eldien, SS Effiziente Tschebyscheff-Spektralmethoden zur Lösung mehrgliedriger gebrochener Ordnungen Differentialgleichungen. Angewandte Mathematik. Modell. 2011, 35, 5662–5672. [CrossRef]
37. Sweilam, NH; Khader, MM Eine pseudospektrale Tschebyscheff-Methode zur Lösung integro-differentialer Gleichungen gebrochener Ordnung. ANZIAM J. 2010, 51, 464–475. [CrossRef]
38. Dabiri, A.; Karimi, L. Eine Chebyshev-Pseudospektralmethode zur Lösung optimaler Steuerungsprobleme mit gebrochener Ordnung. In Proceedings der American Control Conference 2019, Philadelphia, PA, USA, 10.–12. Juli 2019.
39. Oloniiju, SD; Goqo, SP; Sibanda, P. Eine geometrisch konvergente pseudospektrale Methode für mehrdimensionale zweiseitige Raumfraktionale partielle Differentialgleichungen. J. Appl. Anal. Comput. 2021, 11, 1699–1717. [CrossRef] [PubMed]
40. Oloniiju, SD; Goqo, SP; Sibanda, P. Eine Chebyshev-Pseudospektralmethode für die numerischen Lösungen von fraktionalen gewöhnlichen Differentialgleichungen verteilter Ordnung. Appl. Math. E-Notes 2022, 22, 132–141.
41. Oloniiju, SD; Goqo, SP; Sibanda, P. Eine pseudospektrale Methode für zweiseitige räumliche fraktionale Differentialgleichungen mit zeitlich verteilter Ordnung . Taiwan. J. Math. 2021, 25, 959–979. [CrossRef]
42. Adel, M.; Khader, MM; Assiri, TA; Kallel, W. Numerische Simulation für das COVID-19-Modell unter Verwendung einer Multidomänen-Spektralrelaxationstechnik . Symmetry 2023, 15, 931. [CrossRef]
43. Mkhatshwa, M.; Khumalo, M.; Dlamini, P. Multi-Domain-Multivariate spektrale Kollokationsmethode für (2+1)-dimensionale nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Partielle Differentialgleichungen Appl. Math. 2022, 6, 100440. [CrossRef]
44. Samuel, F.; Motsa, S. Lösen hyperbolischer partieller Differentialgleichungen mit einer hochpräzisen multidomänen-bivariaten spektralen Kollokationsmethode. Wave Motion 2019, 88, 57–72. [CrossRef]
45. Birem, M.; Klein, C. Multidomain-Spektralmethode für Schrödingergleichungen. Adv. Comput. Math. 2016, 42, 395–423. [CrossRef]

Machine Translated by Google

46. Jung, JH; Olmos-Liceaga, D. Eine Chebyshev-Multidomain-Adaptive-Mesh-Methode für Reaktions-Diffusionsgleichungen. Appl. Numer. Math. 2023, 190, 283–302. [CrossRef]
47. Qin, Y.; Chen, Y.; Huang, Y.; Ma, H. Multidomain Legendre-Galerkin kleinste Quadrate Methode für lineare Differentialgleichungen mit variable Koeffizienten. Numer. Math. Theory Methods Appl. 2020, 13, 665–688.
48. Maleki, M.; Kajani, MT Numerische Näherungen für Volterras Bevölkerungswachstumsmodell mit gebrochener Ordnung über eine Domänenpseudospektralmethode. Appl. Math. Model. 2015, 39, 4300–4308. [CrossRef]
49. Bambe Moutsinga, CR Robuste zeitspektrale Methoden zur Lösung gebrochener Differentialgleichungen im Finanzwesen. Dissertation, Universität Pretoria, Pretoria, Südafrika, 2021.
50. Kharazmi, E. Datengesteuerte Einzel-/Mehrdomänen-Spektralmethoden für stochastische fraktionale PDEs. Doktorarbeit, Michigan State Universität, East Lansing, MI, USA, 2018.
51. Zhao, T.; Mao, Z.; Karniadakis, GE Multi-Domain-Spektralkollokationsmethode für nichtlineare fraktionale Differentialgleichungen variabler Ordnung Gleichungen. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2019, 348, 377–395. [CrossRef]
52. Klein, C.; Stoilov, N. Multidomain-Spektralansatz für rationale fraktionale Ableitungen. Stud. Appl. Math. 2024, 152, 1110–1132. [Querverweis]
53. Tavassoli Kajani, M. Numerische Lösung von fraktionalen Pantographengleichungen über Müntz–Legendre-Polynome. Math. Sci. 2023, 18, 387–395. [CrossRef]
54. Xu, Q.; Hesthaven, JS Stabile mehrdomänenspektrale Strafmethoden für fraktionale partielle Differentialgleichungen. J. Comput. Phys. 2014, 257, 241–258. [CrossRef]
55. Hayat, U.; Kamran, A.; Ambreen, B.; Yildirim, A.; Mohyud-din, ST Zum System zeitfraktionaler partieller Differentialgleichungen. Walailak J. Sci. Technol. (WJST) 2013, 10, 437–448.
56. Oloniiju, S.; Nkomo, N.; Goqo, S.; Sibanda, P. Verschobene Tschebyscheff-Spektralmethode für zweidimensionale raumzeitliche fraktionale Partielle Differentialgleichungen. Preprints 2022, 2022050138. [CrossRef]
57. Trefethen, LN Finite Differenzen- und Spektralmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen; Cornell University: New York, USA, 1996.
58. Dahlquist, GG Ein spezielles Stabilitätsproblem für lineare Mehrschrittverfahren. BIT Numer. Math. 1963, 3, 27–43. [CrossRef]
59. Ehle, BL Über Padé-Approximationen der Exponentialfunktion und A-stabile Methoden zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen . Dissertation, University of Waterloo, Waterloo, ON, USA, 1969.
60. Odibat, ZM; Momani, S. Ein Algorithmus zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen gebrochener Ordnung. J. Appl. Math. Informatik 2008, 26, 15–27.
61. Li, C.; Yi, Q.; Chen, A. Finite-Differenzen-Methoden mit nicht-uniformen Maschen für nichtlineare fraktionale Differentialgleichungen. J. 2016, 316, 614–631 .
62. Raja, MAZ; Khan, JA; Qureshi, IM Lösung des fraktionalen Ordnungssystems der Bagley-Torvik-Gleichung unter Verwendung evolutionärer Computergestützte Intelligenz. Math. Probl. Eng. 2011, 2011. [CrossRef]
63. Zafar, AA; Kudra, G.; Awrejcewicz, J. Eine Untersuchung der fraktionalen Bagley-Torvik-Gleichung. Entropy 2019, 22, 28. [CrossRef] [PubMed]
64. Sene, N. Einführung in das chaotische System mit gebrochener Ordnung unter dem gebrochenen Operator im Sinne von Caputo. Alex. Eng. J. 2021, 60, 3997–4014. [CrossRef]
65. Azam, A.; Aqeel, M.; Ahmad, S.; Ahmad, F. Chaotisches Verhalten des modifizierten Stretch-Twist-Fold (STF)-Flusses mit fraktalen Eigenschaften. Nichtlineare Dyn. 2017, 90, 1–12. [CrossRef]
66. Li, C.; Liao, X.; Yu, J. Synchronisation von chaotischen Systemen mit gebrochener Ordnung. Phys. Rev. E 2003, 68, 067203. [CrossRef]
67. Sene, N. Untersuchung eines chaotischen Systems mit gebrochener Ordnung, dargestellt durch den Caputo-Operator. Complexity 2021, 2021, 5534872. [Querverweis]

Haftungsausschluss/Anmerkung des Herausgebers: Die in allen Veröffentlichungen enthaltenen Aussagen, Meinungen und Daten sind ausschließlich die der einzelnen Autoren und Mitwirkenden und nicht die von MDPI und/oder den Herausgebern. MDPI und/oder die Herausgeber lehnen jegliche Verantwortung für Personen- oder Sachschäden ab, die aus den im Inhalt erwähnten Ideen, Methoden, Anweisungen oder Produkten resultiere