

5. Introduction à la géométrie et à la cinématique du robot

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la terminologie et la notation de base utilisées dans la géométrie et la cinématique des robots, et de discuter des méthodes utilisées pour l'analyse et le contrôle des manipulateurs de robots. La portée de cette discussion sera limitée, pour la plupart, aux robots à géométrie plane. L'analyse des manipulateurs à géométrie tridimensionnelle se retrouve dans n'importe quel texte de robotique¹.

5.1 Quelques définitions et exemples

Nous utiliserons le terme système mécanique pour décrire un système ou un ensemble de corps rigides ou flexibles pouvant être reliés entre eux par des articulations. Un mécanisme est un système mécanique dont le but principal est de transférer le mouvement et/ou les forces d'une ou plusieurs sources vers une ou plusieurs sorties. Une tringlerie est un système mécanique composé de corps rigides appelés maillons qui sont reliés soit par des articulations à broches, soit par des articulations coulissantes. Dans cette section, nous considérerons les systèmes mécaniques constitués de corps rigides, mais nous considérerons également d'autres types de joints.

Degrés de liberté d'un système

Le nombre de variables indépendantes (ou coordonnées) nécessaires pour spécifier complètement la configuration du système mécanique.

Bien que la définition ci-dessus du nombre de degrés de liberté soit motivée par la nécessité de décrire ou d'analyser un système mécanique, elle est également très importante pour contrôler ou piloter un système mécanique. C'est aussi le nombre d'entrées indépendantes nécessaires pour entraîner tous les corps rigides du système mécanique.

Exemples :

- (a) Un point sur un plan a deux degrés de liberté. Un point de l'espace a trois degrés de liberté.
- (b) Un pendule limité à osciller dans un plan a un degré de liberté.

¹En particulier, deux livres offrent un excellent traitement tout en gardant les mathématiques à un niveau très simple : (a) Craig, JJ Introduction to Robotics, Addison-Wesley, 1989 ; et (b) Paul, R., Robot Manipulators, Mathematics, Programming and Control, The MIT Press, Cambridge, 1981.

- (c) Un corps rigide planaire (ou une lame) a trois degrés de liberté. Il y en a deux si l'on considère traductions et une supplémentaire lorsque vous incluez des rotations.
- (d) Le système mécanique composé de deux corps rigides plans reliés par une articulation à goupille a quatre degrés de liberté. La spécification de la position et de l'orientation du premier corps rigide nécessite trois variables. Puisque le second tourne par rapport au premier, nous avons besoin d'une variable supplémentaire pour décrire son mouvement. Ainsi, le nombre total de variables indépendantes ou le nombre de degrés de liberté est de quatre. (e) Un corps rigide en trois dimensions a six degrés de liberté. Il existe trois degrés de liberté de translation. De plus, il existe trois manières différentes de faire pivoter un corps rigide. Par exemple, considérez les rotations autour des axes x , y et z . Il s'avère que toute rotation de corps rigide peut être accomplie par des rotations successives autour des axes x , y et z . Si les trois angles de rotation sont considérés comme les variables qui décrivent la rotation du corps rigide, il est évident qu'il existe trois degrés de liberté de rotation.
- (f) Deux corps rigides en trois dimensions reliés par une articulation à axe ont sept degrés de liberté. La spécification de la position et de l'orientation du premier corps rigide nécessite six variables. Puisque le second tourne par rapport au premier, nous avons besoin d'une variable supplémentaire pour décrire son mouvement. Ainsi, le nombre total de variables indépendantes ou le nombre de degrés de liberté est sept.

Chaîne cinématique

Un système de corps rigides reliés entre eux par des articulations. Une chaîne est dite fermée si elle forme une boucle fermée. Une chaîne qui n'est pas fermée est appelée chaîne ouverte.

Chaîne série

Si chaque maillon d'une chaîne ouverte, à l'exception du premier et du dernier maillon, est relié à deux autres liens c'est ce qu'on appelle une chaîne en série.

Un exemple de chaîne en série peut être vu dans le schéma du robot² de la série PUMA 560, un robot industriel fabriqué par Unimation Inc., illustré à la figure 1. Le tronc est boulonné à une table fixe ou au sol. L'épaule tourne autour d'un axe vertical par rapport au tronc. Le bras supérieur tourne autour d'un axe horizontal par rapport à l'épaule. Cette rotation est la rotation de l'articulation de l'épaule. L'avant-bras tourne autour d'un axe horizontal (le coude) par rapport à la partie supérieure du bras. Enfin, le poignet est constitué d'un assemblage de trois corps rigides avec trois

²La machine universelle programmable pour l'assemblage (PUMA) a été développée en 1978 par Unimation Inc. en utilisant un ensemble de spécifications fournies par General Motors.

rotations supplémentaires. Ainsi, le bras du robot se compose de sept corps rigides (le premier est fixe) et de six articulations reliant les corps rigides.

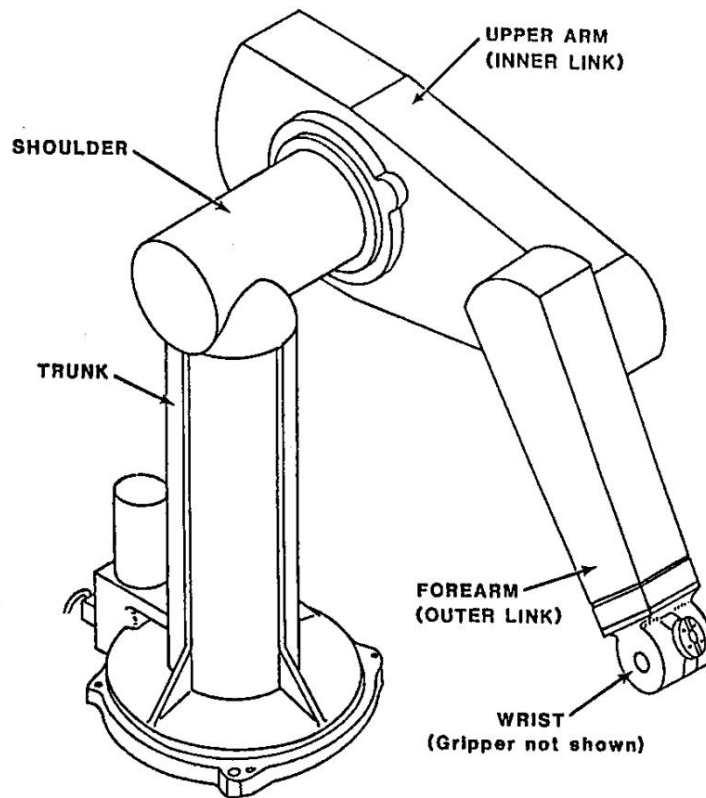


Figure 1 Le robot manipulateur PUMA 560 à six degrés de liberté.

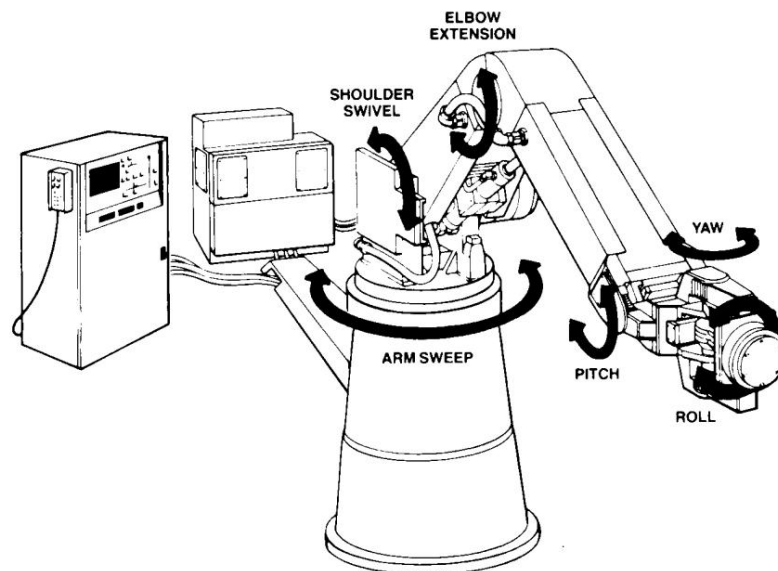


Figure 2 Le robot manipulateur T3 à six degrés de liberté.

Un autre schéma d'un bras de robot industriel, le T3 fabriqué par Cincinnati Milacron, est illustré à la figure 2. Là encore, il est possible de le modéliser comme un ensemble de sept corps rigides (le premier étant fixe) reliés par six articulations³.

Types d'articulations

Il existe principalement quatre types d'articulations que l'on trouve dans les robots manipulateurs : ⁱ

Articulation tournante, rotative ou à goupille (R) ⁱ

Articulation prismatique ou coulissante (P) ⁱ

Articulation sphérique ou à rotule (S) ⁱ

Articulation hélicoïdale ou à vis (H)

L'articulation rotoïde permet une rotation entre les deux maillons de liaison. Le meilleur exemple en est la charnière utilisée pour fixer une porte au cadre. L'articulation prismatique permet une pure translation entre les deux maillons de liaison. La liaison entre un piston et un cylindre dans un moteur à combustion interne ou un compresseur se fait par l'intermédiaire d'un joint prismatique. L'articulation sphérique entre deux maillons permet au premier maillon de tourner de toutes les manières possibles par rapport au second. Le meilleur exemple de ceci est vu dans le corps humain. Les articulations de l'épaule et de la hanche, appelées rotules, sont des articulations sphériques. Le joint hélicoïdal permet un mouvement hélicoïdal entre les deux corps de liaison. Un bon exemple de ceci est le mouvement relatif entre un boulon et un écrou.

Chaîne plane

Tous les maillons d'une chaîne plane sont contraints de se déplacer dans ou parallèlement au même plan.

Une chaîne plane ne peut autoriser que des joints prismatiques et tournants. En effet, les axes des articulations rotoïdes doivent être perpendiculaires au plan de la chaîne tandis que les axes des articulations prismatiques doivent être parallèles ou se trouver dans le plan de la chaîne.

Un exemple de chaîne plane est illustré à la figure 3. Presque tous les moteurs à combustion interne utilisent un mécanisme à manivelle coulissante. La haute pression des gaz en expansion dans la chambre de combustion est utilisée pour translater le piston et le mécanisme convertit ce mouvement de translation en mouvement de rotation de la manivelle. Ce système mécanique se compose de trois joints rotoïdes et d'un joint prismatique.

L'exemple de la figure 3 est une chaîne cinématique fermée et plane. Des exemples de chaînes planes en série sont illustrés aux figures 4 et 5.

³Il s'agit d'un modèle pratique. Un modèle cinématique plus précis est nécessaire pour modéliser le couplage entre l'actionneur qui entraîne l'articulation du coude et l'articulation du coude.

Connectivité d'une articulation

Le nombre de degrés de liberté d'un corps rigide relié à un corps rigide fixe par l'articulation.

Les articulations rotoïde, prismatique et hélicoïdale ont une connectivité de 1. L'articulation sphérique a une connectivité de 3.

Parfois on utilise le terme « degré de liberté d'une articulation » au lieu de la connectivité d'une articulation.

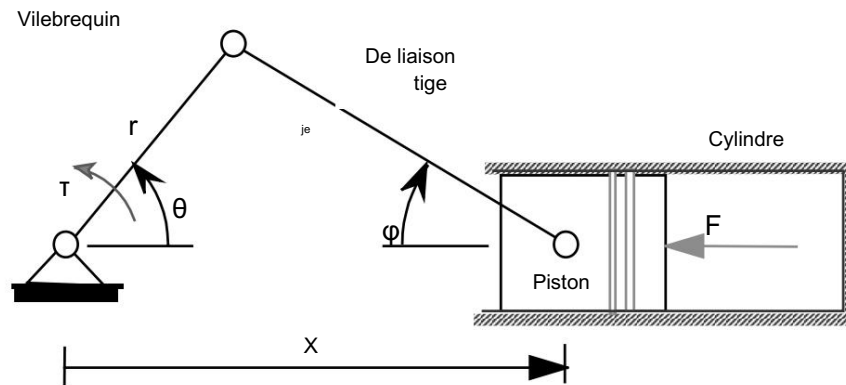


Figure 3 Un schéma d'un mécanisme à manivelle coulissante

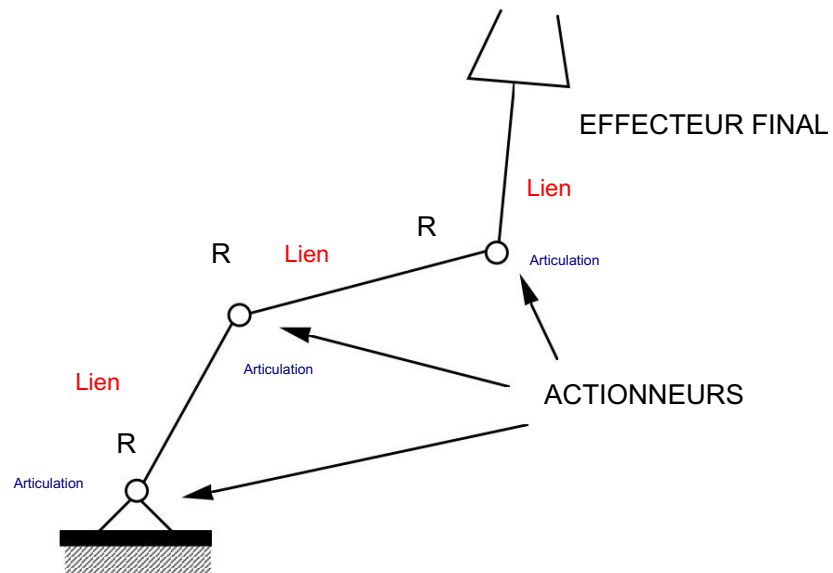


Figure 4 Un schéma d'un manipulateur planaire avec trois articulations rotoïdes

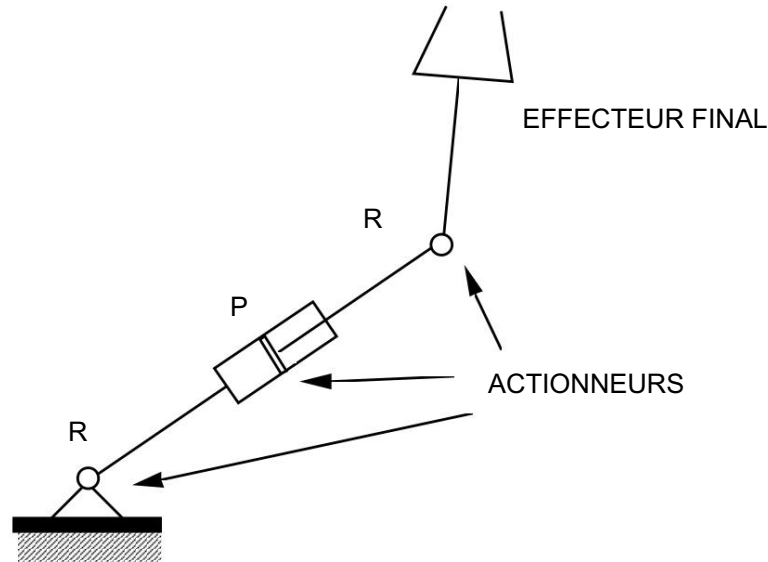


Figure 5 Schéma d'un manipulateur planaire avec deux articulations rotoïdes et une articulation prismatique

Mobilité

La mobilité d'une chaîne est le nombre de degrés de liberté de la chaîne.

La plupart des livres utiliseront le terme "nombre de degrés de liberté" pour la mobilité. Dans une chaîne en série, la mobilité de la chaîne est facilement calculée. S'il y a n articulations et que l'articulation i a une connectivité f_i ,

$$M = \sum_{i=1}^n f_i$$

La plupart des robots industriels ont des articulations tournantes ou prismatiques ($f_i = 1$) et donc la mobilité ou le nombre de degrés de liberté du bras du robot est également égal au nombre d'articulations.

Parfois, un robot à n degrés de liberté ou un robot à mobilité n est également appelé robot à n axes.

Puisqu'un corps rigide dans l'espace a six degrés de liberté, les robots les plus généraux sont conçus pour avoir six articulations. De cette façon, l'effecteur terminal ou le lien le plus éloigné de la base peut être amené à adopter n'importe quelle position ou orientation (dans une certaine plage). Cependant, si l'effecteur final doit se déplacer dans un plan, le robot n'a besoin que de trois degrés de liberté. Deux exemples⁴ de robots planaires à trois degrés de liberté (techniquement, des robots à trois mobilités) sont illustrés aux figures 4 et 5.

⁴ Notez que nous ne comptons pas l'ouverture et la fermeture de la pince comme un degré de liberté. La pince est généralement complètement ouverte ou complètement fermée et elle n'est pas contrôlée en permanence comme le sont les autres articulations. Aussi, la liberté de préhension ne participe pas au positionnement et à l'orientation d'une pièce tenue par la pince.

Lorsque des boucles fermées sont présentes dans la chaîne cinématique (c'est-à-dire que la chaîne n'est plus sérielle, ni même ouverte), il est plus difficile de déterminer le nombre de degrés de liberté ou la mobilité du robot. Mais il existe une formule simple que l'on peut dériver à cette fin.

Soit n le nombre de liaisons mobiles et soit g le nombre d'articulations, f_i étant la connectivité de l'articulation i . Chaque corps rigide a six degrés si l'on considère les mouvements spatiaux. S'il n'y avait pas d'articulations, puisqu'il y a n corps rigides en mouvement, le système aurait $6n$ degrés de liberté. L'effet de chaque articulation est de contraindre le mouvement relatif des deux corps de liaison. Si l'articulation a une connectivité f_i , elle impose $(6-f_i)$ des contraintes sur le mouvement relatif. En d'autres termes, puisqu'il existe f_i différentes manières pour un corps de se déplacer par rapport à un autre, il existe $(6-f_i)$ différentes manières dont le corps est contraint de se déplacer par rapport à un autre. Ainsi, le nombre de degrés de liberté ou la mobilité d'une chaîne (y compris le cas particulier d'une chaîne série) est donné par :

$$M = 6n - \sum_{i=1}^g (6 - f_i)$$

ou,

$$M = 6n - \sum_{i=1}^g (6 - f_i) \quad (2)$$

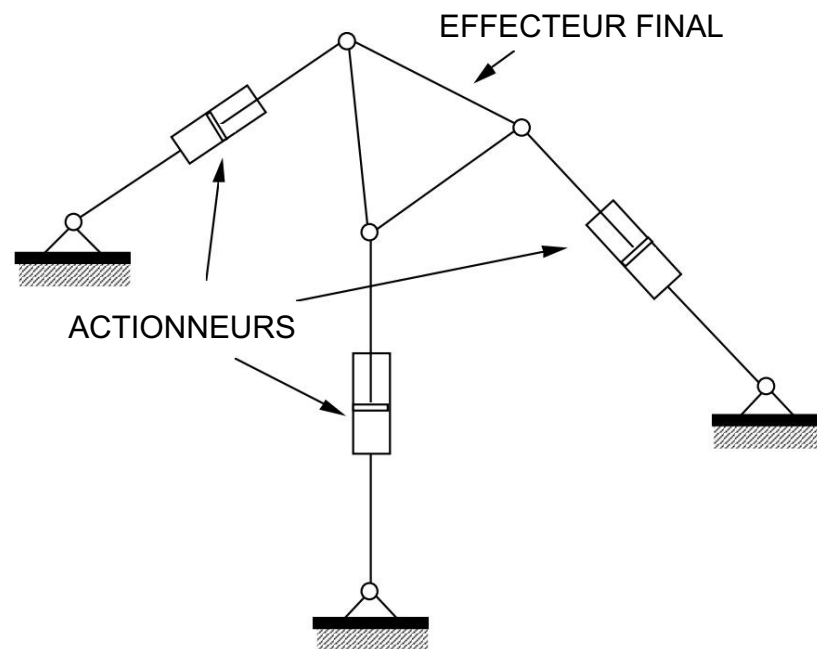


Figure 6 Un manipulateur parallèle planaire.

Dans le cas particulier du mouvement planaire, puisque chaque corps rigide non contraint a 3 degrés de liberté, cette équation est modifiée en :

$$Mngf_3() \sum_{p=1}^g \quad (3)$$

Exemple 1

Dans les figures 4 et 5, puisque $n = g = 3$, l'équation (3) se réduit au cas particulier de l'équation (1). Et puisque $f_1 = f_2 = f_3 = 1$, et $M=g$.

Exemple 2

Dans le mécanisme à manivelle coulissante représenté sur la figure 3, $n = 3$ et $g = 4$. Puisqu'il s'agit d'un mécanisme plan, nous utilisons l'équation (2). Les quatre articulations ont une connectivité un : $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$, et $M=1$.

Exemple 3

Considérons le manipulateur parallèle illustré à la figure 6. Ici, $n = 7$, $g=9$ et $f_i=1$. Selon

Équation (3), $M=3$. Il y a en conséquence trois actionneurs dans le manipulateur. Comparez cet agencement avec l'agencement représenté sur les figures 4 et 5. Les trois actionneurs sont montés en parallèle sur la figure 6. Sur les figures 4 et 5, ils sont montés "séquentiellement" dans un mode en série.

La plateforme Stewart

Le dispositif Stewart-Gough ou Stewart Platform⁵ est une chaîne cinématique à six degrés de liberté (mobilité six) avec des boucles fermées. La chaîne cinématique se compose d'une base et d'une plate-forme mobile dont chacune est un hexagone spatial. Voir Figure 7. Chaque sommet de l'hexagone de base est relié à un sommet de l'hexagone de la plate-forme mobile par une jambe. De même, chaque sommet de l'hexagone mobile est relié à un sommet de l'hexagone de base par une jambe. Il y a six jambes de ce type. Chaque jambe a une chaîne en série composée de deux articulations rotoïdes avec des axes qui se croisent, une articulation prismatique et une articulation sphérique. Typiquement, les joints prismatiques sont actionnés.

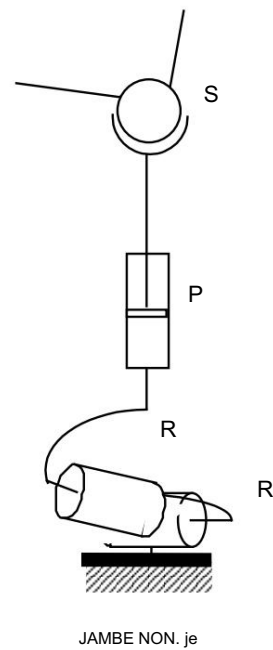
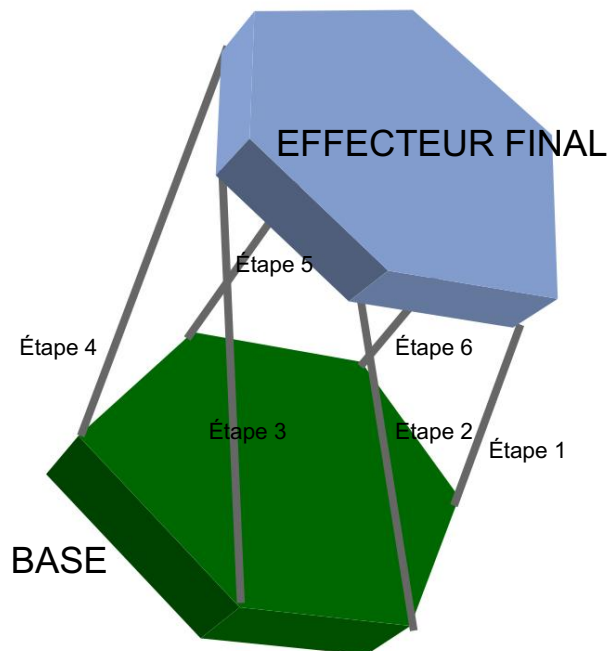
La mobilité d'une plate-forme Stewart peut être facilement vérifiée à six. Chaque jambe a trois maillons et quatre articulations. Si nous incluons la plate-forme mobile,

$$n = 6 \times 3 + 1 = 19.$$

5D. Stewart, «Une plate-forme à six degrés de liberté», The Institution of Mechanical Engineers, Actes 1965-66, vol. 180 Partie 1, n° 15, pages 371-386.



(a) Une machine-outil basée sur la plate-forme Stewart (Ingersoll Rand)⁶



(b) Un schéma montrant les six jambes (à gauche) et la chaîne RRPS (à droite).

Figure 7 La plate-forme Stewart

⁶M. Valenti, "Machine Tools Get Smarter", Mechanical Engineering, Vol.117, No.11, novembre 1995.

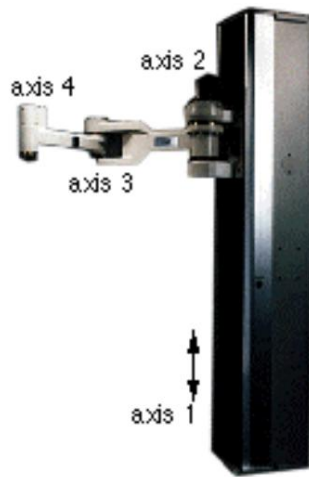
La connectivité de la rotule et de l'articulation prismatique est une. La connectivité de l'articulation sphérique est de trois. Puisqu'il y a 6×2 articulations rotoïdes, 6 articulations prismatiques et 6 articulations sphériques,

$$\sum_{i=1}^g F_i + 12 \times 6 \times 3 = 36$$

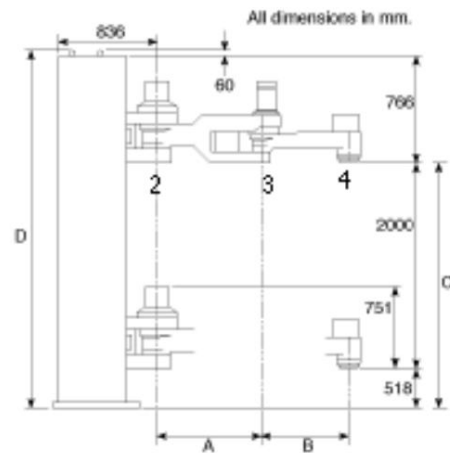
Selon l'équation (3),

$$M = 6 \times 19 - 24 + 36 = 6$$

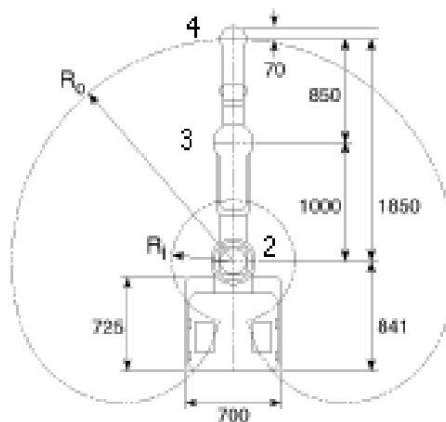
La plate-forme Stewart dispose d'actionneurs pour ses six articulations prismatiques et il est donc possible de contrôler les six degrés de liberté.



(a) Le palettiseur Adept 1850



(b) vue latérale (les axes 2 à 4 sont numérotés)



(c) vue de dessus (les axes 2-4 sont numérotés)

Figure 8 Le palettiseur Adept 1850 II existe

quatre degrés de liberté dans ce manipulateur SCARA. L'articulation 1 est une articulation coulissante qui porte le bras manipulateur vers le haut ou vers le bas. Les joints 2 à 4 sont des joints tournants à axes verticaux.

5.2 Géométrie des robots manipulateurs planaires

La modélisation mathématique des liens spatiaux est assez complexe. Il est utile de commencer par des robots planaires car la cinématique des mécanismes planaires est généralement beaucoup plus simple à analyser. De plus, des exemples planaires illustrent les problèmes de base rencontrés dans la conception, l'analyse et le contrôle de robots sans avoir à s'impliquer trop profondément dans les mathématiques. Cependant, alors que les exemples dont nous discuterons impliqueront des chaînes cinématiques qui sont planes, toutes les définitions et idées présentées dans cette section sont générales et s'étendent aux mécanismes spatiaux les plus généraux.

Nous commencerons par l'exemple du manipulateur planaire à trois articulations rotoïdes. Le manipulateur est appelé manipulateur planaire 3R. Bien qu'il n'y ait pas de robots industriels à trois degrés de liberté (ddl) avec cette géométrie, la géométrie planaire 3R peut être trouvée dans de nombreux robots manipulateurs. Par exemple, le pivotement de l'épaule, l'extension du coude et le pas du robot Cincinnati Milacron T3 (Figure 2) peuvent être décrits comme une chaîne 3R plane. De même, dans un manipulateur SCARA à quatre degrés de liberté (Figure 8), si nous ignorons l'articulation prismatique pour abaisser ou relever la pince, les trois autres articulations forment une chaîne 3R plane. Ainsi, il est instructif d'étudier le manipulateur planaire 3R comme exemple.

Afin de spécifier la géométrie du robot planaire 3R, nous avons besoin de trois paramètres, l_1 , l_2 et l_3 . Ce sont les trois longueurs de lien. Dans la figure 9, les trois angles d'articulation sont étiquetés θ_1 , θ_2 et θ_3 . Celles-ci sont évidemment variables. Les définitions précises des longueurs de lien et des angles de joint sont comme suit. Pour chaque paire d'axes adjacents on peut définir une normale commune ou la perpendiculaire entre les axes.

• La i ème normale commune est la perpendiculaire entre les axes de l'articulation i et de l'articulation $i+1$.

• La i ème longueur de liaison est la longueur de la i ème normale commune, ou la distance entre les axes pour l'articulation i et l'articulation $i+1$.

• Le i ème angle d'articulation est l'angle entre la $(i-1)$ ème normale commune et la i ème normale commune mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre allant de la $(i-1)$ ème normale commune à la i ème normale commune.

Notez qu'il existe une certaine ambiguïté en ce qui concerne la longueur du lien le plus distal et l'angle articulaire du lien le plus proximal. Nous définissons la longueur de lien du lien le plus distal à partir de l'axe articulaire le plus distal jusqu'à un point de référence ou un point d'outil sur l'effecteur terminal⁷. Généralement, il s'agit du centre du préhenseur ou du point final de l'outil. Puisqu'il n'y a pas de normale commune zéro, nous mesurons le premier angle d'articulation à partir d'une ligne de référence pratique. Ici, nous avons choisi qu'il s'agisse de l'axe x d'un système de coordonnées fixe défini de manière pratique.

⁷Le point de référence est souvent appelé le point central de l'outil (TCP).

Un autre ensemble de variables qu'il est utile de définir est l'ensemble de coordonnées de l'effecteur terminal.

Ces coordonnées définissent la position et l'orientation de l'effecteur terminal. Avec un choix pratique d'un point de référence sur l'effecteur terminal, nous pouvons décrire la position de l'effecteur terminal en utilisant les coordonnées du point de référence (x, y) et l'orientation en utilisant l'angle φ . Les trois coordonnées de l'effecteur terminal (x, y, φ) spécifient complètement la position et l'orientation de l'extrémité

effecteur⁸.

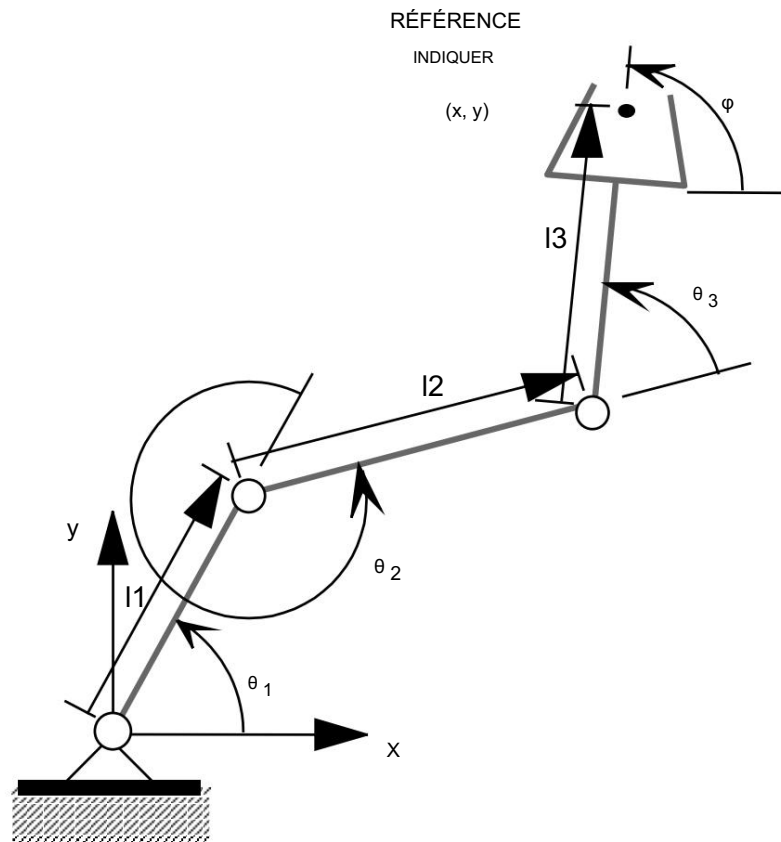


Figure 9 Les variables articulaires et les longueurs de liaison pour un manipulateur planaire 3R

Comme autre exemple, considérons le robot cylindrique à trois degrés de liberté de la figure 10. Si nous ignorons le la liberté de levage, la rotation de la base et l'extension du bras nous donnent le robot à deux degrés de liberté représenté sur la figure 11 que nous pouvons appeler le manipulateur RP. Il se compose d'une articulation rotoïde et d'une articulation prismatique comme indiqué sur la figure. θ_1 , la rotation de la base, et d_2 , l'extension du bras, sont les deux variables articulaires. Notez qu'il n'y a pas de paramètres constants tels que les trois longueurs de liaison dans le manipulateur 3R. La variable jointe θ_1 est définie comme précédemment. Puisqu'il n'y a pas de normale commune zéro,

⁸La description de la position et de l'orientation d'un corps rigide tridimensionnel est nettement plus compliquée. Pour un manipulateur spatial, un ensemble typique de coordonnées de l'effecteur final comprendrait trois variables (x, y, z) pour la position et trois angles d'Euler (θ, φ, ψ) pour l'orientation.

on mesure l'angle de l'articulation à partir de l'axe x que l'on a choisi horizontal. d_2 est défini comme la distance entre l'axe articulaire 1 et le point de référence sur l'effecteur terminal. Comme dans l'exemple précédent, les coordonnées de l'effecteur terminal sont des variables qui spécifient complètement la position et l'orientation de l'effecteur terminal. Dans la figure, ce sont (x, y, φ) .

Enfin, considérons un robot cartésien constitué de deux articulations prismatiques à angle droit. La chaîne PP se retrouve dans les tables xy, les traceurs et les fraiseuses. Un schéma est illustré à la figure 12. Le manipulateur spatial le plus simple est basé sur la chaîne PPP, qui a une troisième articulation prismatique. Les trois axes d'articulation sont mutuellement orthogonaux. Le robot Gantry de la figure 13 a cette géométrie. Si vous ignorez le degré de liberté vertical haut/bas, il s'agit d'un manipulateur PP.



Figure 10 Le robot cylindrique RT3300 (Seiko)

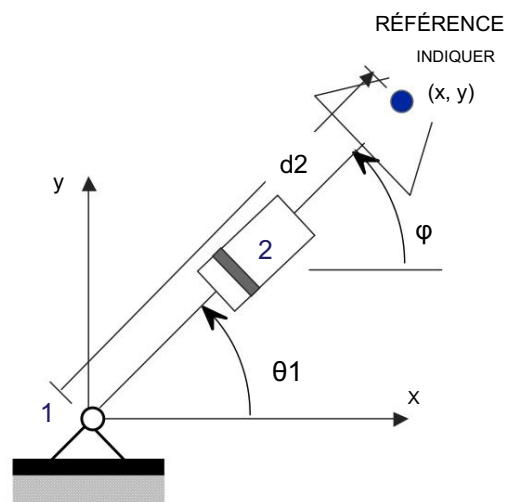


Figure 11 Les variables articulaires et les longueurs de liaison pour un manipulateur planaire RP

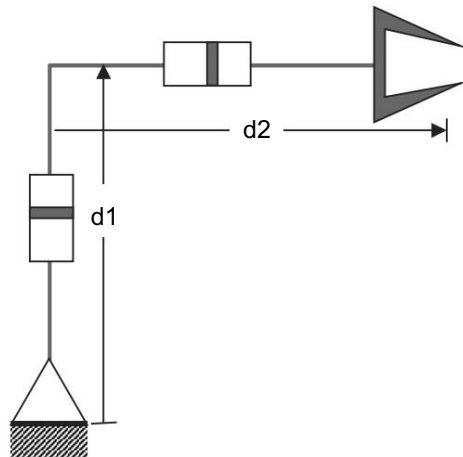


Figure 12 Les variables articulaires pour un manipulateur planaire PP

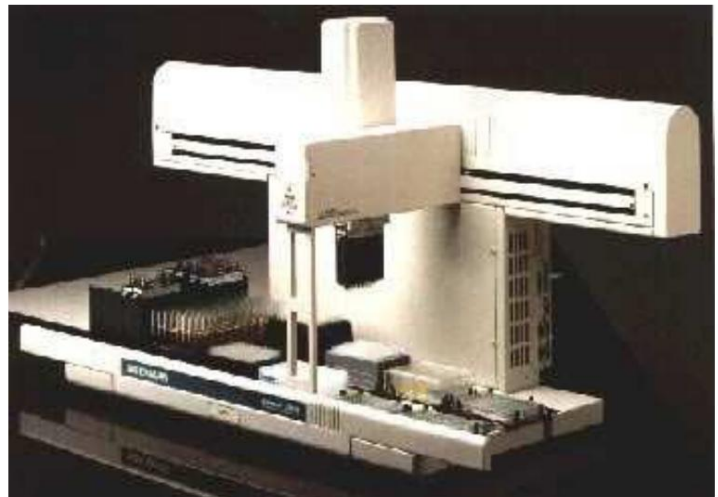
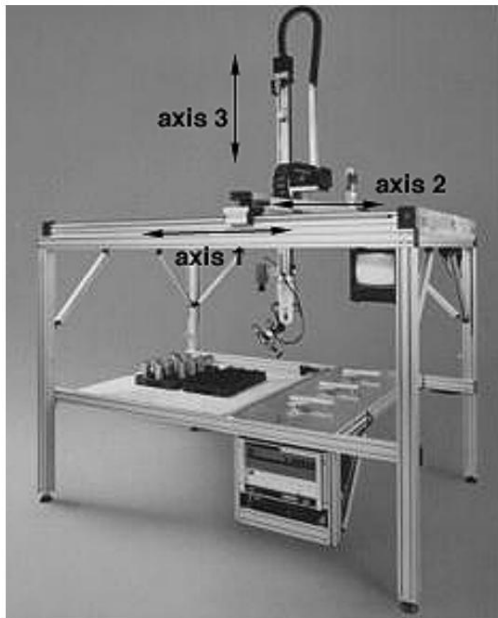


Figure 13 Le robot manipulateur G365 Gantry (CRS Robotics) à gauche, et le Biomek Station de travail d'automatisation de laboratoire 2000 (Beckman Coulter) à droite, les deux ont des outils monté à la fin d'une chaîne PPP .

L'effecteur terminal d'un manipulateur qui n'a que des articulations prismatiques est contraint de rester dans la même orientation. Ainsi, les coordonnées de l'effecteur terminal pour le manipulateur PP incluent uniquement les coordonnées du point de référence sur l'effecteur terminal (x, y).

En résumé, dans chaque cas, nous avons défini un ensemble de paramètres constants appelés longueurs de lien (l_i) et ensemble de variables articulaires ou de coordonnées articulaires constitué soit d'angles articulaires (θ_i) soit de déplacements

(di). Nous avons également défini un ensemble de variables appelées coordonnées de l'effecteur terminal. Les longueurs de liaison sont des paramètres constants qui définissent la géométrie du manipulateur. Les variables d'articulation définissent la configuration du manipulateur en spécifiant la position de chaque articulation. Les coordonnées de l'effecteur terminal définissent la position et l'orientation de l'effecteur terminal. Si les coordonnées articulaires spécifient la configuration du manipulateur, elles doivent également spécifier la position et l'orientation de l'effecteur terminal. Ainsi, on devrait s'attendre à trouver une dépendance explicite des coordonnées de l'effecteur terminal sur les coordonnées articulaires. Bien que cela ne soit pas évident, il existe également une dépendance des coordonnées articulaires sur les coordonnées de l'effecteur terminal. La prochaine sous-section abordera cette dépendance et analysera la cinématique des robots manipulateurs.

5.3 Analyse cinématique des chaînes série planaires

La cinématique est l'étude du mouvement. Dans cette sous-section, nous explorerons la relation entre les mouvements articulaires et les mouvements des effecteurs terminaux. Plus précisément, nous essaierons de développer des équations qui rendront explicite la dépendance des coordonnées de l'effecteur final aux coordonnées articulaires et vice versa.

Nous commencerons par l'exemple du manipulateur planaire 3R. À partir de la trigonométrie de base, la position et l'orientation de l'effecteur terminal peuvent être écrites en termes de coordonnées articulaires de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y_1 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Notez que tous les angles ont été mesurés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et que les longueurs de liaison sont supposées positives d'un axe articulaire à l'axe articulaire immédiatement distal.

L'équation (4) est un ensemble de trois équations non linéaires⁹ qui décrivent la relation entre les coordonnées de l'effecteur terminal et les coordonnées de l'articulation. Notez que nous avons des équations explicites pour les coordonnées de l'effecteur final en termes de coordonnées articulaires. Cependant, pour trouver les coordonnées articulaires pour un ensemble donné de coordonnées d'effecteur terminal (x , y , ϕ), il faut résoudre les équations non linéaires pour θ_1 , θ_2 et θ_3 .

La cinématique du manipulateur planaire RP est plus facile à formuler. Les équations sont :

⁹La troisième équation est linéaire mais le système d'équations est non linéaire.

$$\begin{aligned} x_2 &= d_2 \cos \theta_1 \\ y_2 &= d_2 \sin \theta_1 \\ \theta_1 &= \arctan \left(\frac{y_2}{x_2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Là encore, les coordonnées de l'effecteur terminal sont explicitement données en termes de coordonnées articulaires. Cependant, puisque les équations sont plus simples (que dans (4)), vous vous attendriez à ce que l'algèbre impliquée dans la résolution des coordonnées articulaires en termes de coordonnées de l'effecteur terminal soit plus facile. Notez que contrairement à (4), il y a maintenant trois équations dans seulement deux coordonnées conjointes, θ_1 et d_2 . Ainsi, en général, nous ne pouvons pas résoudre les coordonnées articulaires pour un ensemble arbitraire de coordonnées d'effecteur terminal. Autrement dit, le robot ne peut pas, en déplaçant ses deux articulations, atteindre une position et une orientation arbitraires de l'effecteur final.

Considérons plutôt uniquement la position de l'effecteur décrit par (x, y) , le coordonnées du point d'outil de l'effecteur terminal ou du point de référence. Nous n'avons que deux équations :

$$\begin{aligned} x &= d_2 \cos \theta_1 \\ y &= d_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Étant donné les coordonnées de l'effecteur terminal (x, y) , les variables conjointes peuvent être calculées comme étant :

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta_1 &= \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Notez que nous avons limité d_2 à des valeurs positives. Un d_2 négatif peut être physiquement obtenu en permettant au point de référence de l'effecteur terminal de passer par l'origine du système de coordonnées xy vers un autre quadrant. Dans ce cas, on obtient une autre solution :

$$\begin{aligned} d_2 &= -\sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta_1 &= \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Dans les deux cas (7-8), la fonction tangente inverse est multivaluée¹⁰. En particulier,

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi), \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Cependant, si nous limitons θ_1 à la plage $0 < \theta_1 < 2\pi$, il existe une valeur unique de θ_1 qui est cohérente avec le (x, y) donné et le d_2 calculé (pour lequel il y a deux choix).

¹⁰Dans l'annexe 1, nous définissons une autre fonction tangente inverse appelée atan2 qui prend deux arguments, le sinus et le cosinus d'un angle, et renvoie un angle unique dans l'intervalle $[0, 2\pi)$.

L'existence de solutions multiples est typique lorsque nous résolvons des équations non linéaires. Comme nous le verrons plus tard, cela pose des questions intéressantes lorsque l'on considère le contrôle des robots manipulateurs.

Le manipulateur cartésien planaire est trivial à analyser. Les équations pour l'analyse cinématique sont:

$$x = d_2, \quad y = d_1 \quad (\text{dix})$$

La simplicité des équations cinématiques rend la conversion des coordonnées de l'articulation à l'effecteur terminal et inversement triviale. C'est la raison pour laquelle les chaînes en PP sont si populaires dans les équipements d'automatisation tels que les robots, les ponts roulants et les fraiseuses.

Cinématique directe

Comme vu précédemment, il existe deux types de coordonnées utiles pour décrire le paramétrage du système. Si nous concentrons notre attention sur la tâche et l'effecteur final, nous préférons utiliser les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées de l'effecteur final. L'ensemble de toutes ces coordonnées est généralement appelé espace cartésien ou espace effecteur terminal¹¹. L'autre ensemble de coordonnées est ce que l'on appelle les coordonnées articulaires qui sont utiles pour décrire la configuration de l'enclenchement mécanique. L'ensemble de toutes ces coordonnées est généralement appelé l'espace articulaire.

En robotique, il est souvent nécessaire de pouvoir « mapper » les coordonnées des articulations aux coordonnées des effecteurs terminaux. Cette carte ou la procédure utilisée pour obtenir les coordonnées de l'effecteur terminal à partir de l'articulation coordonnées est appelée cinématique directe.

Par exemple, pour le manipulateur 3-R, la procédure se réduit à simplement substituer les valeurs des angles articulaires dans les équations

$$\begin{aligned} x &= d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \phi &= \theta_1 + \theta_2 \end{aligned}$$

et déterminer les coordonnées cartésiennes, x , y et ϕ . Pour les autres exemples de chaînes ouvertes discutés jusqu'ici (RP, PP) le processus est encore plus simple (puisque les équations sont plus simples). En fait, pour toutes les chaînes sérielles (chaînes spatiales incluses), la procédure de cinématique directe est assez simple avant.

En revanche, la même procédure se complique si le mécanisme contient une ou plusieurs boucles fermées. De plus, la cinématique directe peut produire plus d'une solution ou

¹¹ Comme chaque membre de cet ensemble est un n-uplet, on peut le considérer comme un vecteur et l'espace est en réalité un espace vectoriel. Mais nous n'aurons pas besoin de cette abstraction ici.

pas de solution dans de tels cas. Par exemple, dans le manipulateur parallèle plan de la figure 3, les positions ou coordonnées des articulations sont les longueurs des trois liaisons télescopiques (q_1, q_2, q_3) et les coordonnées de l'effecteur terminal (x, y, φ) sont la position et l'orientation de le triangle flottant. On peut montrer qu'en fonction de la valeur de (q_1, q_2, q_3), le nombre de solutions (réelles) pour (x, y, φ) peut aller de zéro à six. Pour la plate-forme Stewart de la figure 4, ce nombre se situe entre zéro et quarante.

5.4 Cinématique inverse

L'analyse ou la procédure utilisée pour calculer les coordonnées de l'articulation pour un ensemble donné de coordonnées de l'effecteur terminal est appelée cinématique inverse. Fondamentalement, cette procédure consiste à résoudre un ensemble d'équations. Cependant, les équations sont, en général, non linéaires et complexes, et par conséquent, l'analyse cinématique inverse peut devenir très complexe. De plus, comme mentionné précédemment, même s'il est possible de résoudre les équations non linéaires, l'unicité n'est pas garantie. Il se peut qu'il n'y ait pas (et en général, il n'y aura pas) d'ensemble unique¹² de coordonnées articulaires pour les coordonnées de l'effecteur terminal donné.

Nous avons vu que pour le manipulateur RP, les équations cinématiques directes sont :

$$\begin{aligned} x &= d_2 \cos \theta_1 \\ y &= d_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Si l'on restreint l'articulation rotoïde à un angle d'articulation dans l'intervalle $[0, 2\pi)$, il y a deux solutions pour la cinématique inverse :

$$d_2 = \sigma \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta_1 = \text{atan2} \left(\frac{y}{d_2}, \frac{x}{d_2} \right), \quad \sigma = \pm 1$$

Ici, nous avons utilisé la fonction atan2 de l'annexe 1 pour spécifier de manière unique l'angle d'articulation θ_1 . Cependant, selon le choix de σ , il existe deux solutions pour d_2 , et donc pour θ_1 .

L'analyse de la cinématique inverse pour un manipulateur planaire 3-R semble être compliquée mais nous pouvons en déduire des solutions analytiques. Rappelons que les équations cinématiques directes (4) sont :

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4a)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4b)$$

$$(\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4c)$$

¹²Le seul cas où l'analyse est triviale est le manipulateur PP. Dans ce cas, il existe une solution unique pour le cinématique inverse.

Nous supposons que les coordonnées cartésiennes, x , y et φ nous sont données et nous voulons trouver des expressions analytiques pour les angles articulaires θ_1 , θ_2 et θ_3 en termes de coordonnées cartésiennes.

En substituant (4c) dans (4a) et (4b) nous pouvons éliminer θ_3 de sorte que nous avons deux équations en θ_1 et θ_2 :

$$(X - l_3 \cos \varphi = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (d)$$

$$y - l_3 \sin \varphi = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (e)$$

où les inconnues ont été regroupées sur le côté droit ; le côté gauche ne dépend que de l'effecteur final ou des coordonnées cartésiennes et sont donc connus.

Renommez les membres de gauche, $x' = x - l_3 \cos \varphi$, $y' = y - l_3 \sin \varphi$, par commodité. Nous regroupons dans (d) et (e), placez les deux côtés dans chaque équation et additionnez-les :

$$\begin{aligned} & (x')^2 + (y')^2 = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)^2 \\ & \quad + \end{aligned}$$

Après avoir réarrangé les termes, nous obtenons une seule équation non linéaire en θ_1 :

$$(x')^2 + (y')^2 - l_1^2 - l_2^2 = 2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (F)$$

Remarquez que nous avons commencé avec trois équations non linéaires à trois inconnues dans (ac). Nous avons réduit le problème à résoudre deux équations non linéaires à deux inconnues (de). Et maintenant, nous l'avons simplifié davantage pour résoudre une seule équation non linéaire à une inconnue (f).

L'équation (f) est du type

$$P \cos \alpha + Q \sin \alpha + R = 0 \quad (g)$$

Les équations de ce type peuvent être résolues à l'aide d'une simple substitution comme le montre l'annexe 2. Il existe deux solutions pour θ_1 données par :

$$\theta_1 = \arctan \frac{-y' \pm \sqrt{(x')^2 + (y')^2 - l_1^2 - l_2^2}}{x' \pm \sqrt{(x')^2 + (y')^2 - l_1^2 - l_2^2}} \quad (h)$$

où,

$$2 = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 - l_1^2 - l_2^2}, \quad x' = x - l_3 \cos \varphi, \quad y' = y - l_3 \sin \varphi$$

et $\sigma = \pm 1$.

Notons qu'il existe deux solutions pour θ_1 , l'une correspondant à $\sigma=+1$, l'autre correspondant à $\sigma=-1$. La substitution de l'une de ces solutions dans les équations (d) et (e) nous donne :

$$\begin{aligned} \text{parce que } (\theta_1 = \theta_2) & \quad \frac{x' - l_1 \cos \theta_1}{l_2} \\ \text{péché } (\theta_1 = \theta_2) & \quad \frac{y' - l_1 \sin \theta_1}{l_2} \end{aligned}$$

Cela nous permet de résoudre pour θ_2 en utilisant la fonction atan2 de l'annexe 1 :

$$\theta_2 = \text{atan2} \left(\frac{y' - l_1 \sin \theta_1}{l_2}, \frac{x' - l_1 \cos \theta_1}{l_2} \right) \quad (je)$$

Ainsi, pour chaque solution de θ_1 , il existe une solution (unique) pour θ_2 .

Enfin, θ_3 peut être facilement déterminé à partir de (c) :

$$\theta_3 = \varphi - \theta_1 - \theta_2 \quad (j)$$

Les équations (hj) sont la solution cinématique inverse pour le manipulateur 3-R. Pour une position et une orientation d'effecteur donné, il existe deux manières différentes d'y parvenir, chacune correspondant à une valeur différente de σ . Ces différentes configurations sont illustrées à la figure 14.

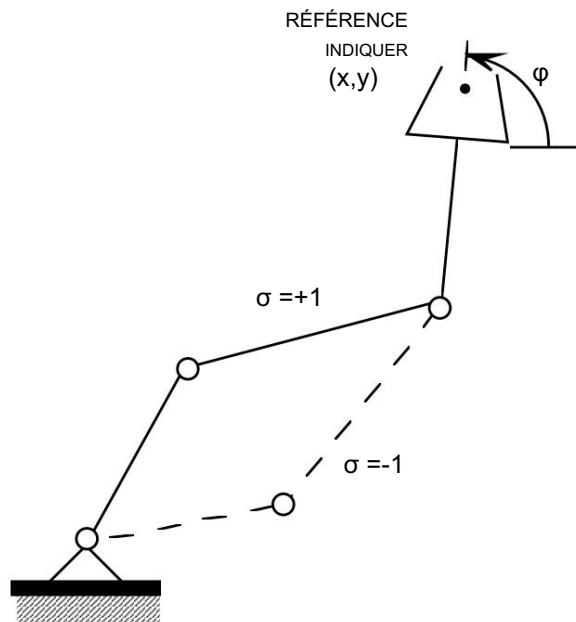


Figure 14 Les deux solutions cinématiques inverses pour le manipulateur 3R : configuration « coude vers le haut » ($\sigma=+1$) et configuration « coude vers le bas » ($\sigma=-1$)

Commander à un robot de déplacer l'effecteur terminal vers une certaine position et orientation est ambigu car il existe deux configurations parmi lesquelles le robot doit choisir. De

D'un point de vue pratique, si les limites articulaires sont telles qu'une configuration ne peut être atteinte, cette ambiguïté est automatiquement levée¹³.

5.5 Analyse de vitesse

Lors du contrôle d'un robot pour aller d'une position à une autre, il ne suffit pas de déterminer les coordonnées de l'articulation et de l'effecteur terminal de la position cible. Il peut être nécessaire de contrôler en permanence la trajectoire ou le chemin emprunté par le robot lorsqu'il se déplace vers la position cible. Ceci est essentiel pour éviter les obstacles dans l'espace de travail. Plus important encore, il existe des tâches où la trajectoire de l'effecteur terminal est critique. Par exemple, lors du soudage, il est nécessaire de maintenir l'outil dans une orientation souhaitée et à une distance fixe de la pièce tout en se déplaçant uniformément¹⁴ le long d'une trajectoire souhaitée. Ainsi, il faut contrôler la vitesse de l'effecteur terminal ou de l'outil pendant le mouvement. Étant donné que l'action de contrôle se produit au niveau des articulations, il est uniquement possible de contrôler les vitesses des articulations. Par conséquent, il est nécessaire de pouvoir prendre les vitesses d'effecteur terminal souhaitées et de calculer à partir de celles-ci les vitesses articulaires. Tout cela nécessite une analyse cinématique plus détaillée, qui traite des vitesses ou du taux de changement de coordonnées contrairement à la section précédente où nous n'avons examiné que les positions ou les coordonnées.

Prenons l'exemple du manipulateur 3R. En différenciant l'équation (4) par rapport à temps, il est possible d'obtenir des équations qui relient les différentes vitesses.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{\text{eff}} \\ \dot{y}_{\text{eff}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \cos \theta_1 & \cos(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

où nous avons utilisé la notation abrégée :

$$\begin{aligned} s1 &= \sin \theta_1, s12 = \sin(\theta_1 + \theta_2), s123 = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ c1 &= \cos \theta_1, c12 = \cos(\theta_1 + \theta_2), c123 = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

$\dot{\theta}_i$ désigne la vitesse de l'articulation pour la i ème articulation ou la dérivée temporelle des angles de l' i ème articulation, et $\dot{x}$ & $\dot{y}$, et $\dot{\phi}$ sont les dérivées temporelles des coordonnées de l'effecteur final. En réarrangeant les termes, nous pouvons écrire cette équation sous forme matricielle :

¹³Cela est vrai du bras humain. Si vous considérez les mouvements planaires, parce que le coude humain ne peut pas être hyper étendu, il existe une solution unique pour la cinématique inverse. Ainsi le système nerveux central n'a pas à se soucier de la configuration à adopter pour une tâche d'atteinte.

¹⁴Dans certains cas, un mouvement de tissage est nécessaire et la trajectoire de l'outil est plus compliquée.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{12} + d_{13} + 1 \\ d_{22} + d_{23} + 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{123} \\ c_{123} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

La matrice 3×3 est appelée matrice jacobienne¹⁵ et nous la désignerons par le symbole J. Si vous regardez les éléments de la matrice, ils expriment le taux de changement des coordonnées de l'effecteur final par rapport aux coordonnées articulaires :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_3} \end{pmatrix}$$

Étant donné la vitesse à laquelle les articulations changent, ou le vecteur des vitesses articulaires,

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix},$$

en utilisant l'équation (11), nous pouvons obtenir des expressions pour les vitesses de l'effecteur final,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

Si la matrice jacobienne est non singulière (son déterminant est non nul et la matrice est inversible), alors nous pouvons obtenir l'expression suivante pour les vitesses conjoints en fonction de l'effecteur final vitesses :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{p}} \quad (12)$$

Ainsi, si la tâche (par exemple, le soudage) est spécifiée en termes de vitesse souhaitée de l'effecteur final,

L'équation (12) peut être utilisée pour calculer la vitesse articulaire souhaitée à condition que le jacobien ne soit pas singulier :

¹⁵Le nom jacobien vient de la terminologie utilisée dans le calcul multidimensionnel.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\left(\frac{s_1}{l_1} \frac{s_2}{l_2} \frac{s_3}{l_3} + \frac{1}{l_3}\right) \dot{\theta}_2 - \left(\frac{s_1}{l_1} \frac{s_2}{l_2} + \frac{1}{l_2}\right) \dot{\theta}_3 - \frac{s_1}{l_1} \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_2 &= \left(\frac{c_1}{l_1} \frac{c_2}{l_2} + \frac{1}{l_2}\right) \dot{\theta}_1 + \left(\frac{c_1}{l_1} \frac{s_2}{l_2} + \frac{1}{l_2}\right) \dot{\theta}_3 + \frac{c_1}{l_1} \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{1}{l_3} \dot{\theta}_1 + \frac{1}{l_3} \dot{\theta}_2 + \frac{1}{l_3} \dot{\phi} \end{aligned}$$

Naturellement nous voulons déterminer les conditions sous lesquelles le jacobien devient singulier. Cela peut être fait en calculant le déterminant de J et en le mettant à zéro. Heureusement, l'expression du déterminant du jacobien, dans cet exemple, peut être simplifiée à l'aide d'identités trigonométriques pour :

$$|J| = l_1 l_2 \sin \theta_2 \quad (13)$$

Cela signifie que le jacobien est singulier uniquement lorsque θ_2 vaut 0 ou 180 degrés. Physiquement, cela correspond au coude complètement étendu ou complètement fléchi. Ainsi, tant que nous éviterons de passer par cette configuration, le robot pourra suivre n'importe quelle vitesse d'effecteur final souhaitée.

5.6 Annexe

5.6.1 L'ambiguïté dans les fonctions trigonométriques inverses

Les fonctions trigonométriques inverses ont plusieurs valeurs. Même dans une plage de 360 degrés, ils ont deux valeurs. Par exemple, si

$$y = \sin x$$

la fonction sin inverse donne deux valeurs dans un intervalle de 360 degrés :

$$\sin^{-1} y = x, \pi - x$$

Bien sûr, nous pouvons ajouter ou soustraire 2π de l'une ou l'autre de ces solutions et obtenir une autre solution.

Cela est également vrai pour les fonctions cosinus inverse et tangente inverse. Si

$$y = \cos x,$$

la fonction cosinus inverse donne :

$$\cos^{-1} y = x, -x$$

De même, pour la fonction tangente

$$y = \tan x,$$

la fonction tangente inverse donne :

$$\tan^{-1}y = x, \pi + x$$

Cette multiplicité est particulièrement gênante dans le contrôle des robots où une ambiguïté peut signifier qu'il y a plus d'une façon d'atteindre une position souhaitée (voir la discussion sur la cinématique inverse). Ce problème est contourné en définissant la fonction atan2 qui nécessite deux arguments et renvoie une réponse unique dans une plage de 360°.

La fonction atan2 prend comme arguments le sinus et le cosinus d'un nombre et renvoie le nombre. Ainsi si

$$s = \sin x ; c = \cos x$$

la fonction atan2 prend s et c comme argument et renvoie x :

$$\text{atan2}(s, c) = x$$

L'idée principale est que les informations supplémentaires fournies par le deuxième argument éliminent l'ambiguïté dans la résolution de x. Pour voir cela, considérons le problème simple où l'on nous donne :

$$s = \frac{1}{2} ; c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et nous devons résoudre pour x. Si nous utilisons la fonction sinus inverse et restreignons la réponse à l'intervalle $[0, 2\pi)$, nous obtenons le résultat :

$$x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Puisque nous savons que le cosinus est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ on peut vérifier rapidement en prenant les cosinus des deux candidats 2 , solutions que la première solution est correcte et que la seconde est incorrecte.

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La fonction atan2 passe par un algorithme similaire pour trouver une solution unique dans la plage $[0, 2\pi)$.

$$\text{atan2} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

La fonction atan2 est une fonction standard dans la plupart des compilateurs C, Pascal et Fortran.

5.6.2 Solution de l'équation non linéaire en (g)

$$P \cos \alpha + Q \sin \alpha + R = 0 \quad (g)$$

Définissons γ de sorte que

$$\cos \gamma = -\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad \text{et} \quad \sin \gamma = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Notez que cela est toujours possible. γ peut être déterminé en utilisant la fonction atan2 :

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{Q}{P}$$

Maintenant (g) peut être réécrit comme suit :

$$\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha + \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 0$$

ou

$$\cos(\alpha - \gamma) = -\frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Cela nous donne deux solutions pour α en fonction de l'angle connu γ :

$$\alpha = \gamma \pm \cos^{-1} \left(\frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \right), \quad \sigma = \pm 1$$