

5. Введение в геометрию и кинематику роботов

Цель этой главы — представить основную терминологию и обозначения, используемые в геометрии и кинематике роботов, а также обсудить методы, используемые для анализа и управления манипуляторами роботов. Объем этого обсуждения будет ограничен по большей части роботами с планарной геометрией. Анализ манипуляторов с трехмерной геометрией можно найти в любом учебнике по робототехнике¹.

5.1 Некоторые определения и примеры

Мы будем использовать термин «механическая система» для описания системы или набора жестких или гибких тел, которые могут быть соединены между собой шарнирами. Механизм – это механическая система, основной целью которой является передача движения и/или сил от одного или нескольких источников к одному или нескольким выходам. Рычажный механизм представляет собой механическую систему, состоящую из твердых тел, называемых звеньями, которые соединены шарнирными соединениями или скользящими соединениями. В этом разделе мы рассмотрим механические системы, состоящие из твердых тел, но также рассмотрим и другие типы соединений.

Степени свободы системы

Количество независимых переменных (или координат), необходимых для полного определения конфигурации механической системы.

Хотя приведенное выше определение числа степеней свободы мотивировано необходимостью описания или анализа механической системы, оно также очень важно для управления механической системой или управления ею. Это также количество независимых входов, необходимых для привода всех твердых тел в механической системе.

Примеры:

- (a) Точка на плоскости имеет две степени свободы. Точка в пространстве имеет три степени свободы.
- (b) Маятник, ограниченный возможностью качания в плоскости, имеет одну степень свободы.

¹ В частности, две книги предлагают превосходную трактовку, сохраняя математику на очень простом уровне: (a) Craig, JJ Introduction to Robotics, Addison-Wesley, 1989; и (b) Пол, Р., Манипуляторы роботов, математика, программирование и управление, MIT Press, Кембридж, 1981.

в) Плоское твердое тело (или пластинка) имеет три степени свободы. Есть два, если вы считаете переводы и дополнительный, когда вы включаете повороты.

г) механическая система, состоящая из двух плоских твердых тел, соединенных шарнирным соединением, имеет четыре степени свободы. Задание положения и ориентации первого твердого тела требует трех переменных. Так как второй вращается относительно первого, нам нужна дополнительная переменная для описания его движения. Таким образом, общее число независимых переменных или число степеней свободы равно четырем. (е) Твердое тело в трех измерениях имеет шесть степеней свободы. Имеются три поступательные степени свободы. Кроме того, существует три различных способа поворота твердого тела.

Например, рассмотрим вращение вокруг осей x , y и z . Оказывается, любое вращение твердого тела можно совершить последовательными поворотами вокруг осей x , y и z . Если три угла поворота считать переменными, описывающими вращение твердого тела, очевидно, что имеются три вращательные степени свободы.

(f) Два твердых тела в трех измерениях, соединенные шарнирным соединением, имеют семь степеней свободы. Задание положения и ориентации первого твердого тела требует шести переменных.

Так как второй вращается относительно первого, нам нужна дополнительная переменная для описания его движения. Таким образом, общее число независимых переменных или число степеней свободы семь.

Кинематическая цепь

Система твердых тел, соединенных шарнирами. Цепь называется замкнутой, если она образует замкнутый контур.

Цепь, которая не замкнута, называется открытой цепью.

Последовательная цепочка

Если каждое звено открытой цепи, кроме первого и последнего, соединено с двумя другими звеньями называется последовательной цепью.

Пример последовательной цепи можно увидеть на схеме робота серии PUMA 5602, промышленного робота производства Unimation Inc., показанного на рисунке 1. Ствол прикреплен болтами к неподвижному столу или полу. Плечо вращается вокруг вертикальной оси по отношению к туловищу. Плечо вращается вокруг горизонтальной оси относительно плеча. Это вращение является ротация плечевого сустава. Предплечье вращается вокруг горизонтальной оси (локоть) по отношению к плечу. Наконец, запястье состоит из трех твердых тел с тремя

2 Программируемая универсальная сборочная машина (PUMA) была разработана в 1978 году компанией Unimation Inc. с использованием набора спецификаций, предоставленных General Motors.

дополнительные обороты. Таким образом, рука робота состоит из семи твердых тел (первое неподвижно) и шести шарниров, соединяющих твердые тела.

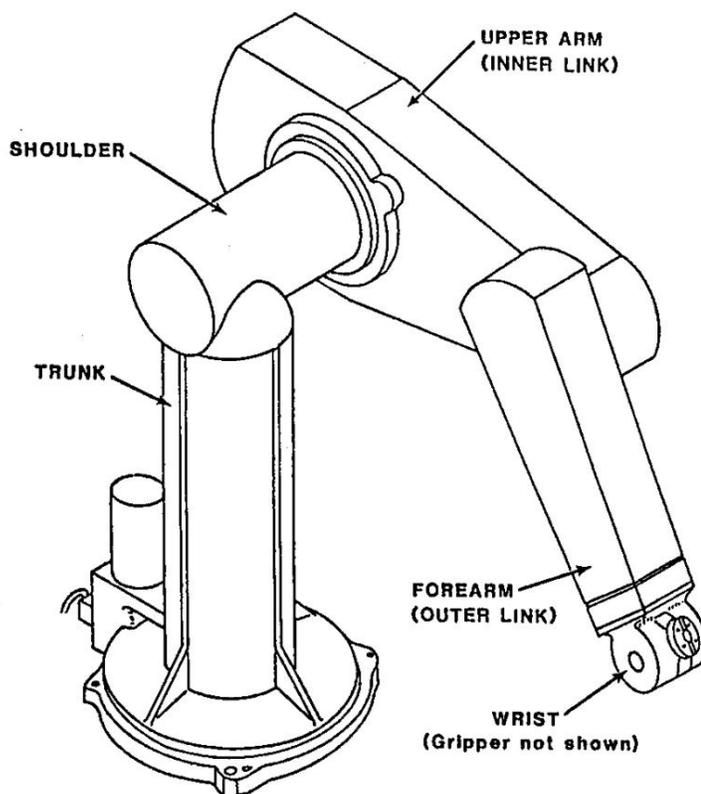


Рис. 1 Робот-манипулятор PUMA 560 с шестью степенями свободы.

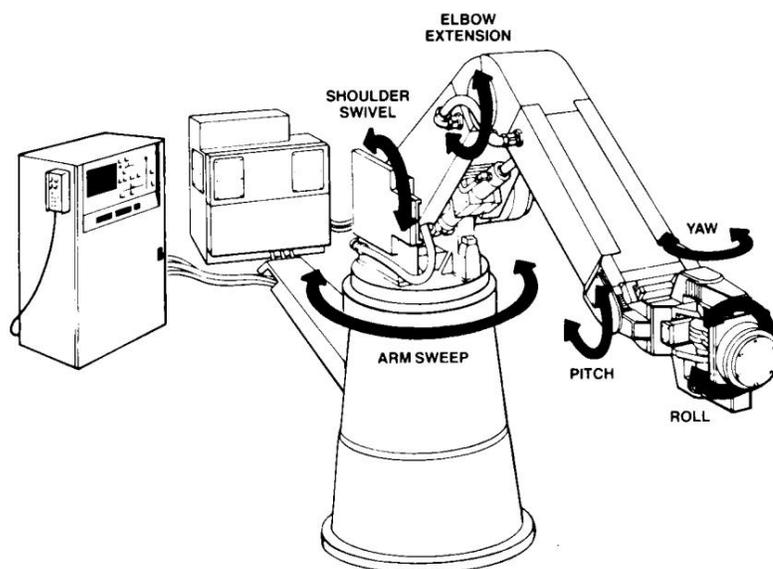


Рис. 2 Робот-манипулятор ТЗ с шестью степенями свободы.

Еще одна схема промышленного робота-манипулятора, ТЗ, сделанного Cincinnati Milacron, показана на рисунке 2. И снова его можно смоделировать как набор из семи твердых тел (первое неподвижно), соединенных шестью шарнирами³.

Типы суставов

В роботах-манипуляторах в основном используются четыре типа соединений: i Революционное,

поворотное или штифтовое соединение (R) i

Призматическое или скользящее соединение

(P) i Сферическое или шаровое

соединение (S) i Спиральное или винтовое соединение (H)

Вращающееся соединение обеспечивает вращение между двумя соединительными звеньями. Лучшим примером этого является петля, используемая для крепления двери к раме. Призматический шарнир обеспечивает чистое перемещение между двумя соединительными звеньями. Соединение между поршнем и цилиндром в двигателе внутреннего сгорания или компрессоре осуществляется через призматический шарнир. Сферический шарнир между двумя звеньями позволяет первому звену вращаться всеми возможными способами относительно второго. Лучший пример этого можно увидеть в человеческом теле. Плечевые и тазобедренные суставы, называемые шаровидными суставами, представляют собой сферические суставы. Спиральное соединение обеспечивает спиральное движение между двумя соединительными телами. Хорошим примером этого является относительное движение между болтом и гайкой.

Плоская цепь

Все звенья плоской цепи вынуждены двигаться в одной или параллельной плоскости.

Плоская цепь может допускать только призматические и вращательные соединения. На самом деле оси вращающихся шарниров должны быть перпендикулярны плоскости цепи, а оси призматических шарниров должны быть параллельны или лежать в плоскости цепи.

Пример плоской цепи показан на рисунке 3. Почти во всех двигателях внутреннего сгорания используется кривошипно-шатунный механизм. Высокое давление расширяющихся газов в камере сгорания используется для перемещения поршня, и механизм преобразует это поступательное движение во вращательное движение кривошипа. Эта механическая система состоит из трех вращающихся шарниров и одного призматического шарнира.

Пример на Рисунке 3 представляет собой плоскую замкнутую кинематическую цепь. Примеры плоских последовательных цепей показаны на рисунках 4 и 5.

3Эта удобная модель. Требуется более точная кинематическая модель для моделирования связи между приводом, приводящим в движение локтевой сустав, и локтевым суставом.

Связность сустава

Количество степеней свободы твердого тела, соединенного с неподвижным твердым телом через шарнир.

Вращательное, призматическое и винтовое соединение имеют связность 1. Сферическое соединение имеет связность 3. Иногда вместо связности соединения используют термин «степень свободы соединения».

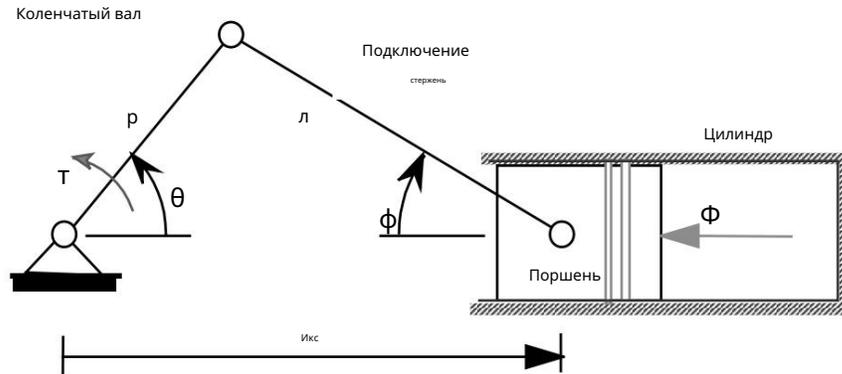


Рисунок 3. Схема кривошипно-шатунного механизма.

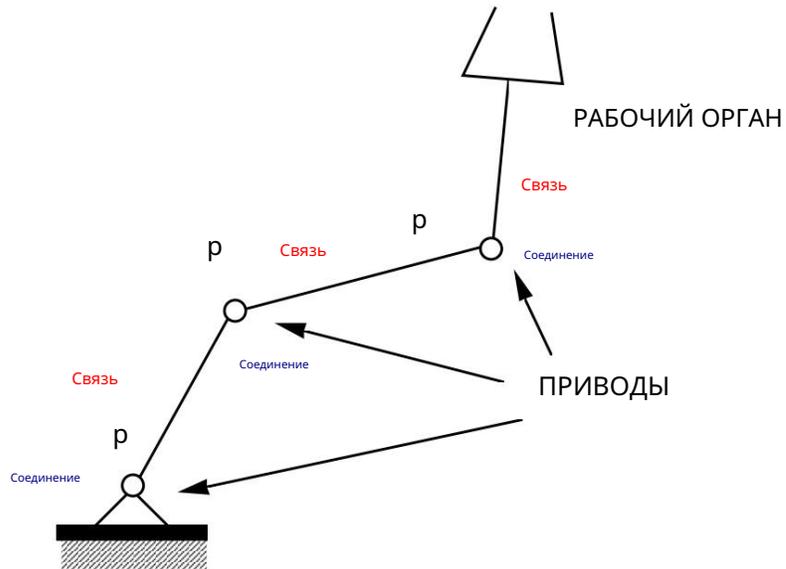


Рис. 4. Схема плоского манипулятора с тремя вращающимися шарнирами.

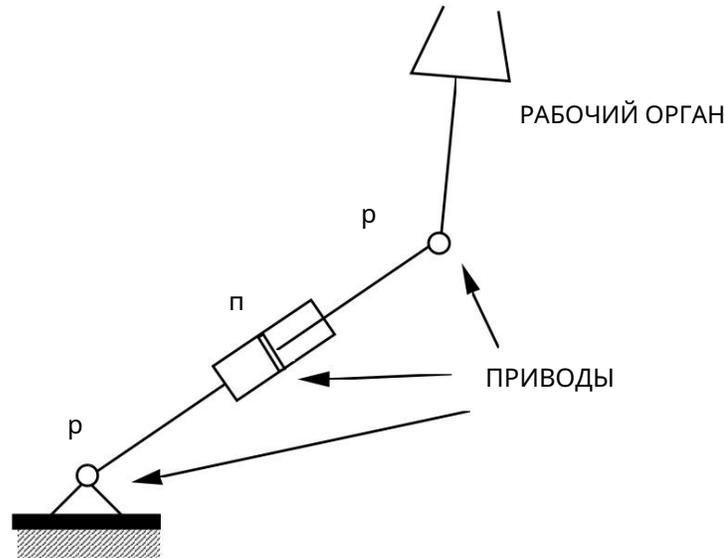


Рис. 5. Схема плоского манипулятора с двумя вращающимися и одним призматическим шарнирами.

Мобильность

Подвижность цепи — это число степеней свободы цепи.

В большинстве книг для обозначения подвижности используется термин «количество степеней свободы». В последовательной цепи подвижность цепи легко вычисляется. Если есть n суставов и соединение i имеет связность f_i ,

$$M \phi = n - \sum_{i=1}^n f_i$$

Большинство промышленных роботов имеют вращательные или призматические соединения ($f_i = 1$), поэтому подвижность или количество степеней свободы манипулятора робота также равно количеству соединений.

Иногда робот со степенью свободы n или робот с подвижностью n также называют роботом с n осями.

Поскольку твердое тело в космосе имеет шесть степеней свободы, большинство роботов имеют шесть шарниров. Таким образом, можно заставить концевой эффектор или звено, наиболее удаленное от основания, принять любое положение или ориентацию (в пределах некоторого диапазона). Однако, если концевой эффектор должен перемещаться в плоскости, робот должен иметь только три степени свободы. Два примера⁴ плоских роботов с тремя степенями свободы (технически роботы с тремя мобильностями) показаны на рисунках 4 и 5.

⁴Обратите внимание, что мы не считаем открытие и закрытие захвата степенью свободы. Захват обычно полностью открыт или полностью закрыт, и он не контролируется постоянно, как другие соединения. Кроме того, свобода захвата не влияет на позиционирование и ориентацию детали, удерживаемой захватом.

В частном случае плоского движения, поскольку каждое твердое тело без ограничений имеет 3 степени свободы, это уравнение изменяется следующим образом:

$$M = 3n - \sum_{j=1}^g f_j \quad (3)$$

Пример 1

На рисунках 4 и 5, поскольку $n=g=3$, уравнение (3) сводится к частному случаю уравнения (1). А так как $f_1 = f_2 = f_3 = 1$, а $M=g$.

Пример 2

В кривошипно-шатунном механизме, показанном на фиг.3, $n=3$ и $g=4$. Поскольку это планарный механизм, мы используем уравнение (2). Все четыре сустава имеют связность один: $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$, и $M=1$.

Пример 3.

Рассмотрим параллельный манипулятор, показанный на рисунке 6. Здесь $n = 7$, $g=9$ и $f_i=1$. В соответствии с Уравнение (3), $M = 3$. Соответственно в манипуляторе имеется три исполнительных механизма. Сравните это расположение с расположением, показанным на рисунках 4 и 5. Три привода установлены параллельно на рисунке 6. На рисунках 4 и 5 они установлены «последовательно» в серийная мода.

Платформа Стюарта

Устройство Stewart-Gough или Stewart Platform5 представляет собой кинематическую цепь с шестью степенями свободы (шесть подвижностей) с замкнутыми контурами. Кинематическая цепь состоит из основания и подвижной платформы, каждая из которых представляет собой пространственный шестиугольник. См. рис. 7. Каждая вершина базового шестиугольника соединена с одной вершиной шестиугольника подвижной платформы одной ногой. Точно так же каждая вершина подвижного шестиугольника соединена катетом с вершиной базового шестиугольника. Таких ножек шесть. Каждая ножка имеет последовательную цепь, состоящую из двух вращающихся шарниров с пересекающимися осями, призматического шарнира и шарового шарнира. Обычно приводятся в действие призматические соединения.

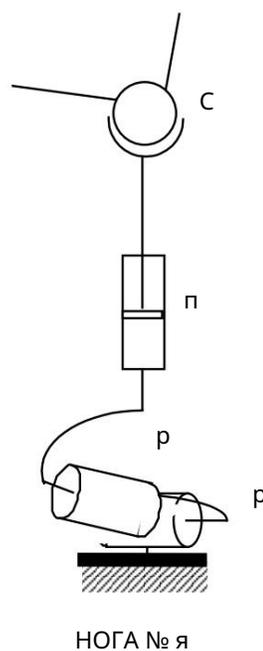
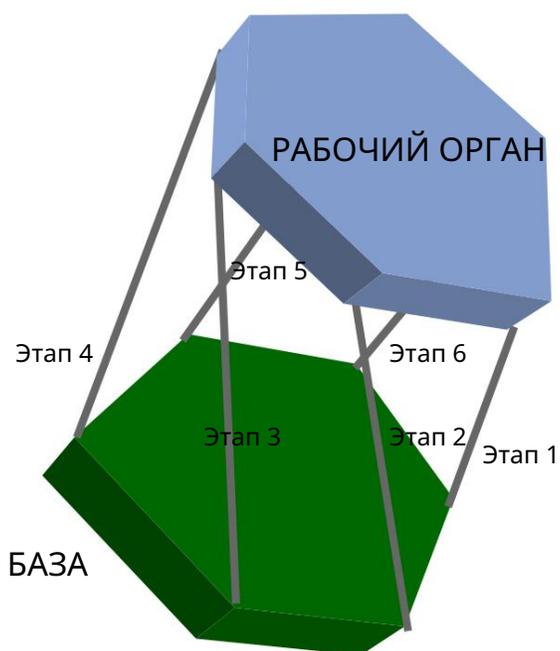
Легко проверить, что мобильность платформы Стюарта равна шести. Каждая нога имеет три звена и четыре сустава. Если мы включим движущуюся платформу,

$$n = 6 \times 3 + 1 = 19.$$

5Д. Стюарт, «Платформа с шестью степенями свободы», Институт инженеров-механиков, Proceedings 1965-66, Vol. 180 ч. 1, № 15, стр. 371-386.



(a) Станок на платформе Stewart (Ingersoll Rand)6



(b) Схема, показывающая шесть ветвей (слева) и цепь RRPS (справа).

Рис. 7 Платформа Стюарта

6М. Валенти, «Станки становятся умнее», Машиностроение, Том 117, № 11, ноябрь 1995 г.

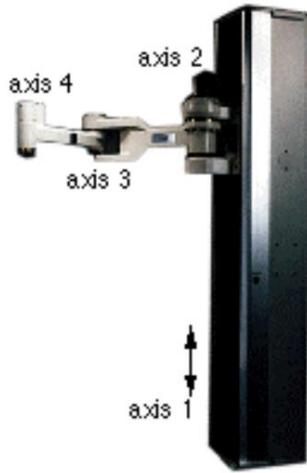
Связь вращения и призматического шарнира одинакова. Связность шарового шарнира равна трем. Так как имеется 6×2 шарнирных соединения, 6 призматических шарниров и 6 сферических шарниров,

$$F = \sum_{i=1}^n f_i - 6n + 6 = 36$$

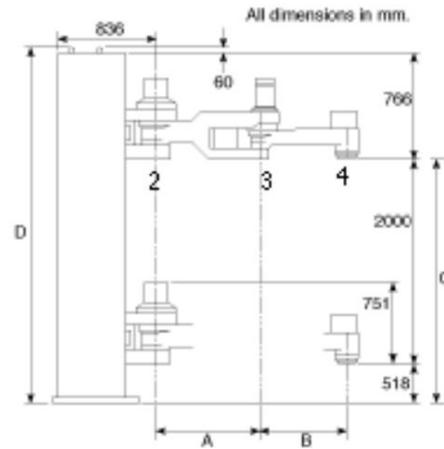
Согласно уравнению (3),

$$M = 6 - 19 - 24 + 36 = 6$$

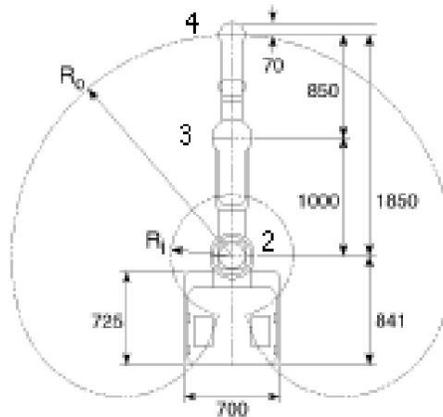
Платформа Стюарта имеет приводы для всех шести призматических шарниров, поэтому можно управлять всеми шестью степенями свободы.



(а) Паллетизатор Adept 1850



(б) вид сбоку (оси 2-4 пронумерованы)



(в) вид сверху (оси 2-4 пронумерованы)

Рисунок 8 Паллетайзер Adept 1850 Этот

манипулятор SCARA имеет четыре степени свободы. Соединение 1 представляет собой скользящее соединение, которое перемещает руку манипулятора вверх или вниз. Шарниры 2-4 представляют собой поворотные шарниры с вертикальными осями.

5.2 Геометрия планарных роботов-манипуляторов

Математическое моделирование пространственных связей весьма сложно. Полезно начать с планарных роботов, потому что кинематику планарных механизмов обычно намного проще анализировать.

Кроме того, плоские примеры иллюстрируют основные проблемы, возникающие при проектировании, анализе и управлении роботами, без необходимости слишком глубоко вникать в математику. Однако, хотя примеры, которые мы будем обсуждать, будут касаться кинематических цепей, которые являются плоскими, все определения и идеи, представленные в этом разделе, являются общими и распространяются на самые общие пространственные механизмы.

Начнем с примера плоского манипулятора с тремя вращающимися шарнирами. Манипулятор называется планарным 3R-манипулятором. Хотя у промышленных роботов с такой геометрией может не быть трех степеней свободы (степеней свободы), плоская геометрия 3R может быть найдена во многих манипуляторах роботов. Например, поворот плеча, разгибание локтя и шаг робота Cincinnati Milacron T3 (рис. 2) можно описать как плоскую цепь 3R. Точно так же в манипуляторе SCARA с четырьмя степенями свободы (рис. 8), если мы игнорируем призматический шарнир для опускания или подъема захвата, остальные три шарнира образуют плоскую цепь 3R. Таким образом, поучительно рассмотреть на примере планарного манипулятора 3R.

Чтобы задать геометрию плоского 3R-робота, нам потребуются три параметра: l_1 , l_2 и l_3 . Это три длины ссылок. На рисунке 9 три угловых соединения обозначены θ_1 , θ_2 и θ_3 . Они явно переменные. Точные определения длин звеньев и углов шарнира приведены ниже.

следующее. Для каждой пары смежных осей мы можем определить общую нормаль или перпендикуляр между осями.

• i -я общая нормаль – это перпендикуляр между осями сустава i и сустава $i+1$. • Длина i -го звена — это длина i -й общей нормали или расстояние между осями

для соединения i и соединения $i+1$.

i -й угол соединения — это угол между $(i-1)$ -й общей нормалью и i -й общей нормалью, измеренный против часовой стрелки, идущий от $(i-1)$ -й общей нормали к i -й обычной нормальной.

Обратите внимание, что существует некоторая неопределенность в отношении длины звена самого дистального звена и угла сустава самого проксимального звена. Мы определяем длину звена самого дистального звена от самой дальней оси сустава до контрольной точки или точки инструмента на концевом эффекторе⁷. Как правило, это центр захвата или конечная точка инструмента. Поскольку нет нулевой общей нормали, мы измеряем первый угол соединения от удобной базовой линии. Здесь мы выбрали это как ось x удобно определенной фиксированной системы координат.

⁷Опорную точку часто называют центральной точкой инструмента (TCP).

Еще один набор переменных, который полезно определить, — это набор координат конечного эффектора.

Эти координаты определяют положение и ориентацию концевой эффектора. При удобном выборе точки отсчета на концевом зажиме положение рабочего органа можно описать координатами точки отсчета (x, y) , а ориентацию - углом ϕ . Три координаты концевой эффектора (x, y, ϕ) полностью определяют положение и ориентацию конца.

эффектор8.

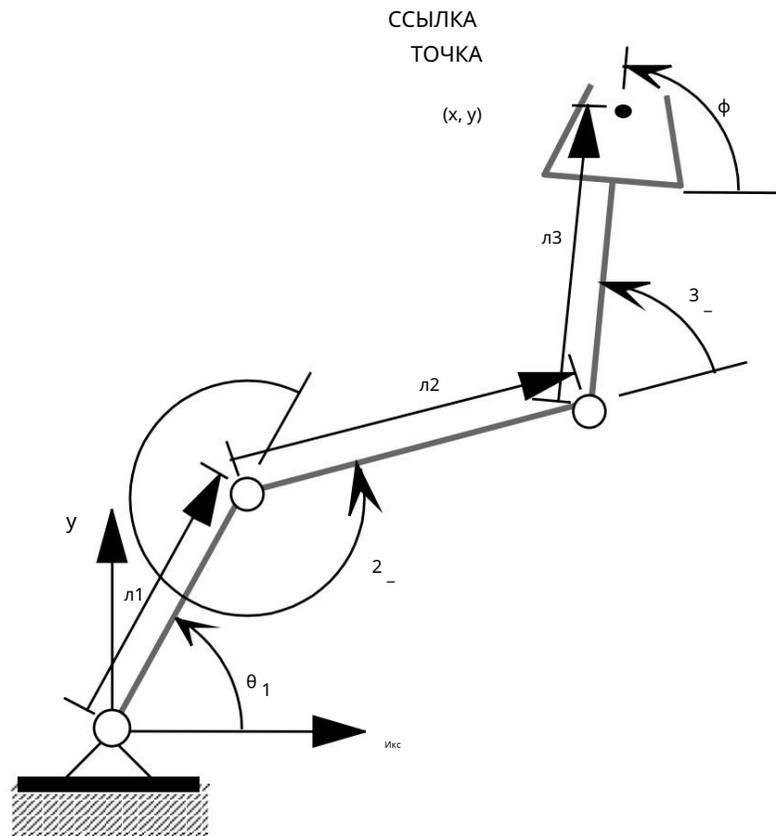


Рис. 9. Совместные переменные и длины звеньев для плоского манипулятора 3R.

В качестве другого примера рассмотрим цилиндрического робота с тремя степенями свободы на рисунке 10. Если мы проигнорируем свободу подъема, вращение основания и разгибание руки дают нам робота с двумя степенями свободы, показанного на рисунке 11, который мы можем назвать манипулятором RP. Он состоит из вращательного соединения и призматического соединения, как показано на рисунке. θ_1 , базовое вращение, и d_2 , разгибание руки, являются двумя совместными переменными. Обратите внимание, что в манипуляторе 3R нет постоянных параметров, таких как длина трех звеньев. Совместная переменная θ_1 определяется, как и раньше. Поскольку не существует нулевой общей нормали,

8Описание положения и ориентации трехмерного твердого тела значительно сложнее.

Для пространственного манипулятора типичный набор координат конечного эффектора будет включать три переменные (x, y, z) для положения и три угла Эйлера (θ, ϕ, ψ) для ориентации.

мы измеряем угол сустава от оси x , которую мы выбрали горизонтальной. d_2 определяется как расстояние от оси сустава 1 до контрольной точки на концевом эффекторе. Как и в предыдущем примере, координаты концевой зажима — это переменные, которые полностью определяют положение и ориентацию концевой зажима. На рисунке это (x, y, ϕ) .

Наконец, рассмотрим декартова робота, состоящего из двух призматических сочленений под прямым углом. Цепочка РР используется в столах x, y , плоттерах и фрезерных станках. Схема показана на рис. 12. Простейший пространственный манипулятор основан на цепочке ППП, имеющей третье призматическое соединение. Три шарнирные оси взаимно ортогональны. Робот Gantry на рис. 13 имеет такую геометрию. Если вы игнорируете вертикальную степень свободы вверх/вниз, это манипулятор РР.



Рис. 10 Цилиндрический робот RT3300 (Seiko)

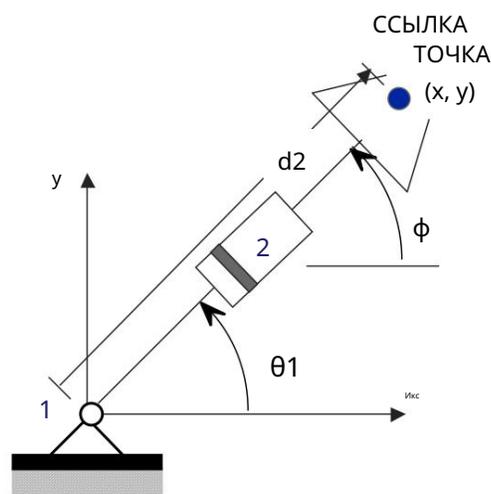


Рис. 11 Совместные переменные и длины звеньев плоского манипулятора РР

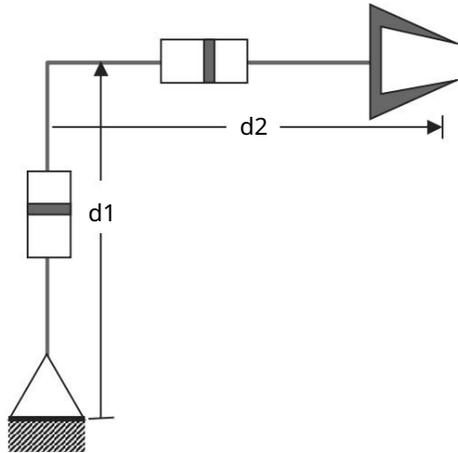


Рисунок 12 Совместные переменные для планарного манипулятора PP

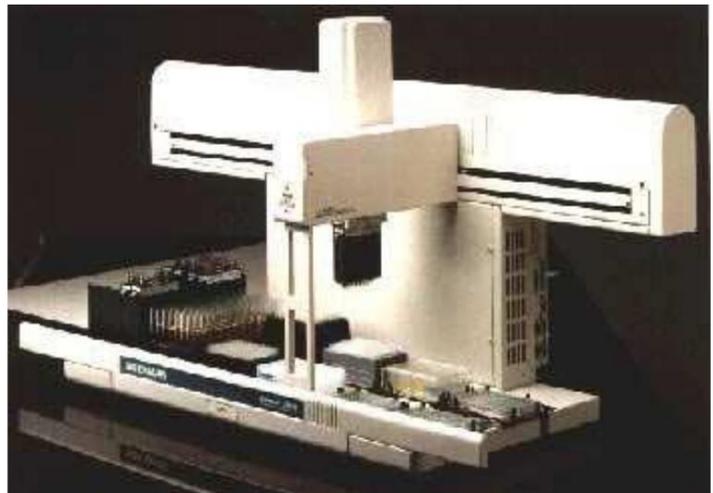
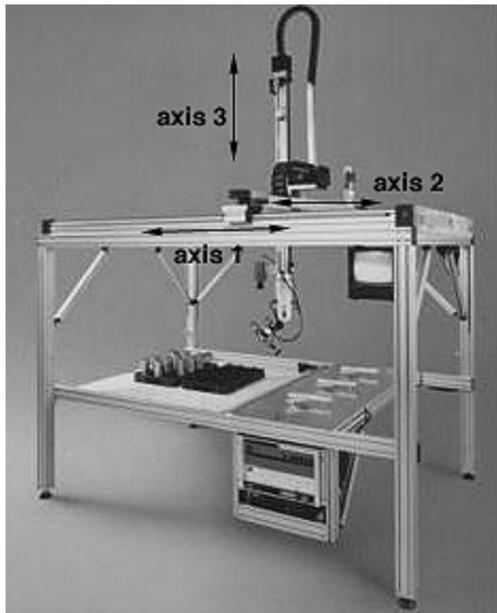


Рис. 13 Робот-манипулятор G365 Gantry (CRS Robotics) слева и Biomek

Рабочая станция автоматизации лаборатории 2000 г. (Beckman Coulter) справа, обе имеют инструменты. монтируется в конце цепочки PPP .

Концевой эффектор манипулятора, который имеет только призматические соединения, вынужден оставаться в той же ориентации. Таким образом, координаты концевой зажима для манипулятора PP включают только координаты контрольной точки на концевом зажиме (x, y).

Таким образом, в каждом случае мы определили набор постоянных параметров, называемых длинами ссылок (l_i) и набор переменных суставов или координат суставов, состоящий из углов шарнира (θ_i) или перемещений

(ди). Мы также определили набор переменных, называемых координатами конечного эффектора. Длины звеньев являются постоянными параметрами, определяющими геометрию манипулятора. Переменные соединения определяют конфигурацию манипулятора, указывая положение каждого соединения. Координаты концевой зажима определяют положение и ориентацию концевой зажима. Если координаты сустава определяют конфигурацию манипулятора, они также должны указывать положение и ориентацию концевой зажима. Таким образом, следует ожидать явной зависимости координат конечного эффектора от координат сустава. Хотя это может быть неочевидно, существует также зависимость координат сустава на координаты конечного эффектора. В следующем подразделе будет рассмотрена эта зависимость и проанализирована кинематика роботов-манипуляторов.

5.3 Кинематический анализ плоских последовательных цепей

Кинематика изучает движение. В этом подразделе мы исследуем взаимосвязь между движениями суставов и движениями конечных эффекторов. Точнее, мы попытаемся разработать уравнения, которые сделают явной зависимость координат конечного эффектора от координат сустава и наоборот.

Мы начнем с примера планарного манипулятора 3R. Из базовой тригонометрии положение и ориентация конечного эффектора могут быть записаны в терминах координат сустава следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Обратите внимание, что все углы были измерены против часовой стрелки, и предполагается, что длины звеньев положительны при движении от одной оси сустава к ближайшей дистальной оси сустава.

Уравнение (4) представляет собой набор из трех нелинейных уравнений, которые описывают взаимосвязь между координатами конечного эффектора и координатами сустава. Обратите внимание, что у нас есть явные уравнения для координат конечного эффектора в терминах совместных координат. Однако, чтобы найти совместные координаты для заданного набора координат конечного эффектора (x, y, ϕ), необходимо решить нелинейные уравнения для θ_1, θ_2 и θ_3 .

Кинематику планарного манипулятора РП сформулировать проще. Уравнения:

⁹Третье уравнение линейное, но система уравнений нелинейная.

$$\begin{aligned} x &= d_2 \cos \theta_1 \\ y &= d_2 \sin \theta_1 \\ \theta &= \varphi_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Снова координаты конечного эффектора явно заданы в терминах совместных координат.

Однако, поскольку уравнения проще (чем в (4)), можно было бы ожидать, что алгебра, используемая для решения совместных координат в терминах координат рабочего органа, будет проще. Обратите внимание, что в отличие от (4) теперь имеется три уравнения только для двух совместных координат, θ_1 и d_2 . Таким образом, в общем случае мы не можем найти координаты сустава для произвольного набора координат конечного эффектора.

Другими словами, робот не может, двигая двумя своими суставами, достичь произвольного положения и ориентации конечного исполнительного органа.

Давайте вместо этого рассмотрим только положение конечного эффектора, описываемое (x, y) , т.е. координаты точки инструмента концевой эффектора или контрольной точки. У нас есть только два уравнения:

$$\begin{aligned} x &= d_2 \cos \theta_1 \\ y &= d_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая координаты конечного эффектора (x, y) , переменные сустава могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} d_2 &= + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta_1 &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (7)$$

Обратите внимание, что мы ограничили d_2 положительными значениями. Отрицательное значение d_2 может быть физически достигнуто за счет того, что контрольная точка конечного исполнительного элемента проходит через начало системы координат xy в другой квадрант. В этом случае получаем другое решение:

$$\begin{aligned} d_2 &= - \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta_1 &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (8)$$

В обоих случаях (7-8) функция арктангенса многозначна¹⁰. В частности,

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi), \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Однако, если мы ограничим θ_1 диапазоном $0 < \theta_1 \leq 2\pi$, существует уникальное значение θ_1 , которое согласуется с заданным (x, y) и вычисленным d_2 (для которого есть два варианта).

¹⁰В Приложении 1 мы определяем еще одну функцию арктангенса, называемую atan_2 , которая принимает два аргумента, синус и косинус угла, и возвращает уникальный угол в диапазоне $[0, 2\pi)$.

Существование нескольких решений типично, когда мы решаем нелинейные уравнения. Как мы увидим позже, это ставит некоторые интересные вопросы, когда мы рассматриваем управление роботами-манипуляторами.

Плоский декартовский манипулятор легко анализировать. Уравнения для кинематического анализа

являются:

$$x = d_2, \quad y = d_1 \quad (10)$$

Простота кинематических уравнений делает преобразование из сустава в координаты конечного эффектора и обратно тривиальным. Именно по этой причине полипропиленовые цепи так популярны в таком оборудовании автоматизации, как роботы, мостовые краны и фрезерные станки.

Прямая кинематика

Как было показано ранее, существует два типа координат, полезных для описания конфигурации системы. Если мы сосредоточим наше внимание на задаче и концевом эффекторе, мы предпочтем использовать декартовы координаты или координаты конечного эффектора. Набор всех таких координат обычно называют декартовым пространством или пространством конечных эффекторов¹¹. Другой набор координат — это так называемые координаты соединения, которые полезны для описания конфигурации механического соединения. Множество всех таких координат обычно называют совместным пространством.

В робототехнике часто необходимо иметь возможность «сопоставлять» координаты суставов с координатами конечного эффектора. Эта карта или процедура, используемая для получения координат конечного эффектора из сустава. координат называется прямой кинематикой.

Например, для манипулятора 3-R процедура сводится к простой подстановке значений шарнирных углов в уравнения

$$\begin{aligned} X_{L=0} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_3 \end{pmatrix} \\ \text{ИЛИ} & \begin{pmatrix} \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 & l_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и определение декартовых координат x , y и φ . Для других примеров открытых цепей, обсуждавшихся до сих пор (RP, PP), процесс еще проще (поскольку уравнения проще). Фактически, для всех последовательных цепей (включая пространственные) процедура прямой кинематики достаточно прямолинейна. вперед.

С другой стороны, та же процедура усложняется, если механизм содержит один или несколько замкнутых контуров. Кроме того, прямая кинематика может давать более одного решения или

¹¹Поскольку каждый член этого набора является n -кортежем, мы можем думать о нем как о векторе, а пространство на самом деле является векторным пространством. Но нам не понадобится здесь эта абстракция.

нет решения в таких случаях. Например, в плоскопараллельном манипуляторе на рис. 3 положения или координаты сочленений — это длины трех телескопических звеньев (q_1, q_2, q_3), а координаты концевых эффекторов (x, y, φ) — это положение и ориентация плавающий треугольник. Можно показать, что в зависимости от значения (q_1, q_2, q_3) количество (действительных) решений для (x, y, φ) может быть от нуля до шести. Для платформы Stewart на рис. 4 это число может варьироваться от нуля до сорока.

5.4 Инверсная кинематика

Анализ или процедура, которая используется для вычисления координат сустава для заданного набора координат конечного эффектора, называется инверсной кинематикой. По сути, эта процедура включает в себя решение набора уравнений. Однако уравнения, как правило, нелинейны и сложны, и поэтому анализ обратной кинематики может стать весьма сложным. Кроме того, как упоминалось ранее, даже если возможно решить нелинейные уравнения, уникальность не гарантируется. Не может быть (и вообще не будет) уникального набора координат сустава для заданных координат конечного эффектора.

Мы видели, что для манипулятора RP уравнения прямой кинематики таковы:

$$\begin{aligned} x &= d_2 \cos \theta_1 \\ y &= d_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Если мы ограничим вращательный шарнир так, чтобы угол шарнира находился в интервале $[0, 2\pi)$, есть два решения для обратной кинематики:

$$d_2 = \sigma \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta_1 = \text{atan2} \left(\frac{y}{\Gamma_2}, \frac{x}{\Gamma_2} \right), \quad \sigma = \pm 1$$

Здесь мы использовали функцию atan2 из Приложения 1, чтобы однозначно задать угол соединения θ_1 . Однако в зависимости от выбора σ есть два решения для d_2 , а значит, и для θ_1 .

Анализ инверсной кинематики плоского манипулятора 3-R кажется сложным, но мы можем получить аналитические решения. Напомним, что уравнения прямой кинематики (4):

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4a)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4b)$$

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (4b)$$

¹² Единственный случай, когда анализ тривиален, — это манипулятор PP. В этом случае существует единственное решение для инверсной кинематики.

Предположим, что нам даны декартовы координаты x , y и φ , и мы хотим найти аналитические выражения для углов θ_1 , θ_2 и θ_3 через декартовы координаты.

Подставив (4с) в (4а) и (4б), мы можем исключить θ_3 , так что мы получим два уравнения относительно θ_1 и θ_2 :

$$(x - l_2 \cos \varphi = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (г)$$

$$y - l_2 \sin \varphi = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (д)$$

где неизвестные сгруппированы в правой части; левая часть зависит только от конечного эффектора или декартовых координат и поэтому известна.

Переименуйте левые части, $x' = x - l_2 \cos \varphi$, $y' = y - l_2 \sin \varphi$, для удобства. Мы перегруппируем (е), возведем в квадрат обе части в каждом уравнении и сложим их:

$$\begin{aligned} & (x')^2 + (y')^2 = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)^2 \\ & \text{или} \quad (x')^2 + (y')^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

После перестановки членов получаем одно нелинейное уравнение относительно θ_1 :

$$(x')^2 + (y')^2 - l_1^2 - l_2^2 = 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (е)$$

Обратите внимание, что мы начали с трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными в (ас). Мы свели задачу к решению двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными (де). А теперь мы еще больше упростили его до решения одного нелинейного уравнения с одним неизвестным (ф).

Уравнение (ф) имеет вид

$$P \cos \alpha + Q \sin \alpha + R = 0 \quad (г)$$

Уравнения этого типа могут быть решены с помощью простой замены, как показано в Приложении 2. Есть два решения для θ_1 :

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{-R \pm \sqrt{R^2 - P^2 - Q^2}}{P} \right) \quad (\text{час})$$

где,

$$P = l_1^2 + l_2^2 - x'^2 - y'^2, \quad Q = 2l_1 l_2, \quad R = x'x' + y'y'$$

и $\alpha \pm \pi$.

Обратите внимание, что есть два решения для θ_1 , одно соответствует $\sigma=+1$, другое соответствует $\sigma=-1$. Подстановка любого из этих решений обратно в уравнения (d) и (e) дает нам:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2) &= \frac{x' - l_1 \cos \theta_1}{l_2} \\ \sin(\theta_2) &= \frac{y' - l_1 \sin \theta_1}{l_2} \end{aligned}$$

Это позволяет нам найти θ_2 с помощью функции atan2 в Приложении 1:

$$\theta_2 = \text{atan2} \left(\frac{y' - l_1 \sin \theta_1}{l_2}, \frac{x' - l_1 \cos \theta_1}{l_2} \right) \quad (\text{я})$$

Таким образом, для каждого решения для θ_1 существует одно (единственное) решение для θ_2 .

Наконец, θ_3 можно легко определить из (с):

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{к})$$

Уравнения (hj) представляют собой решение обратной кинематики для манипулятора 3-R. Для данного положения и ориентации конечного эффектора есть два разных способа его достижения, каждый из которых соответствует разным значениям σ . Эти различные конфигурации показаны на рисунке 14.

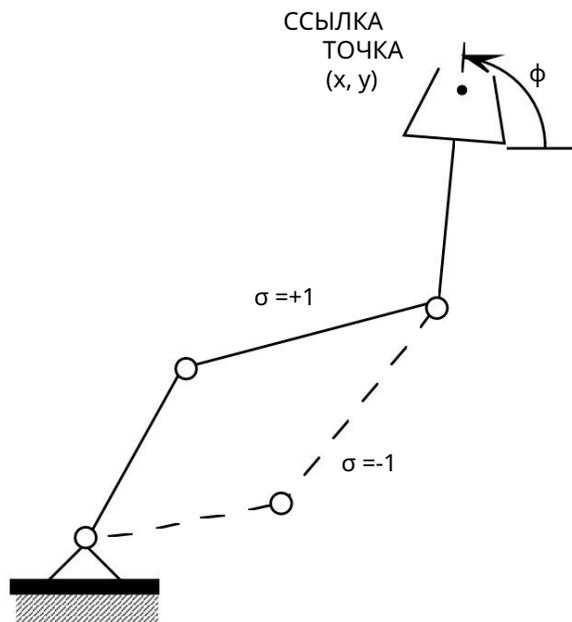


Рис. 14 Два инверсных кинематических решения для манипулятора 3R: конфигурация «локоть вверх» ($\sigma=+1$) и конфигурация «локоть вниз» ($\sigma=-1$)

Дать роботу команду переместить концевой эффектор в определенное положение и ориентацию неоднозначно, потому что есть две конфигурации, из которых робот должен выбирать. Из

$$\begin{matrix}
 \dot{x} \\
 \dot{y} \\
 \dot{\varphi}
 \end{matrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} \\
 \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_3} \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_3}
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 \dot{\theta}_1 \\
 \dot{\theta}_2 \\
 \dot{\theta}_3
 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Матрица 3×3 называется матрицей Якоби¹⁵, и мы будем обозначать ее символом J. Если вы посмотрите на элементы матрицы, они выражают скорость изменения координат конечного эффектора по отношению к координатам сустава:

$$\begin{matrix}
 \text{Икс} & \text{Икс} & \text{Икс} \\
 \theta_{12} & \theta & \theta_3 \\
 \text{Дж} & \text{ГГГГ} & \\
 \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\
 \varphi & \varphi & \varphi \\
 \theta_1 & \theta_2 & \theta_3
 \end{matrix}$$

Учитывая скорость, с которой изменяются суставы, или вектор скоростей суставов,

$$\begin{pmatrix}
 \dot{\theta}_1 \\
 \dot{\theta}_2 \\
 \dot{\theta}_3
 \end{pmatrix},$$

используя уравнение (11), мы можем получить выражения для скоростей конечных эффекторов,

$$\begin{pmatrix}
 \dot{x} \\
 \dot{y} \\
 \dot{\varphi}
 \end{pmatrix}$$

Если матрица Якоби несингулярна (ее определитель отличен от нуля и матрица обратима), то мы можем получить следующее выражение для совместных скоростей через концевой эффектор скорости:

$$\begin{pmatrix}
 \dot{x} \\
 \dot{y} \\
 \dot{\varphi}
 \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix}
 \dot{p} \\
 \dot{q} \\
 \dot{r}
 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Таким образом, если задача (например, сварка) определяется желаемой скоростью рабочего органа, Уравнение (12) можно использовать для вычисления желаемой совместной скорости при условии, что якобиан не является сингулярным:

¹⁵Название якобиана происходит от терминологии, используемой в многомерном исчислении.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \begin{pmatrix} c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 \\ s_1 & s_1 c_2 & s_1 c_2 c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s_1 c_2 & -s_1 c_2 c_3 \\ c_1 & c_1 c_2 \\ c_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\ \dot{\theta}_2 &= \begin{pmatrix} -s_1 & -s_1 c_2 \\ c_1 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 c_2 & s_1 c_2 c_3 \\ -c_1 & -c_1 c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\ \dot{\theta}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s_1 c_2 c_3 & -s_1 c_2 c_3^2 \\ c_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Естественно, мы хотим определить условия, при которых якобиан становится сингулярным. Это можно сделать, вычислив определитель J и приравняв его к нулю. К счастью, выражение для определителя якобиана в этом примере можно упростить с помощью тригонометрических тождеств:

$$|J| = l_1 l_2 \sin \theta_2 \quad (13)$$

Это означает, что якобиан сингулярен только тогда, когда θ_2 равно 0 или 180 градусам.

Физически это соответствует полностью разогнутому или полностью согнутому локтю. Таким образом, пока мы избегаем этой конфигурации, робот сможет следовать любой желаемой скорости рабочего органа.

5.6 Приложение

5.6.1 Неоднозначность в обратных тригонометрических функциях

Обратные тригонометрические функции имеют несколько значений. Даже в диапазоне 360 градусов они имеют два значения. Например, если

$$y = \sin x$$

обратная функция \sin^{-1} дает два значения в интервале 360 градусов:

$$\sin^{-1} y = x, \pi - x$$

Конечно, мы можем добавить или вычесть 2π из любого из этих решений и получить другое решение.

Это относится и к функциям арккосинуса и арктангенса. Если

$$y = \cos x,$$

функция арккосинуса дает:

$$\cos^{-1} y = x, -x$$

Аналогично, для касательной функции

$$y = \tan x,$$

функция арктангенса дает:

$$\tan^{-1}y = x, \pi + x$$

Эта множественность особенно проблематична при управлении роботом, где неоднозначность может означать, что существует более одного способа достижения желаемого положения (см. обсуждение инверсной кинематики). Эту проблему можно обойти, определив функцию atan2 , которая требует два аргумента и возвращает уникальный ответ в диапазоне 360 мкс.

Функция atan2 принимает в качестве аргументов синус и косинус числа и возвращает число. Таким образом, если

$$s = \sin x; c = \cos x$$

функция atan2 принимает s и c в качестве аргумента и возвращает x :

$$\text{atan2}(s, c) = x$$

Основная идея состоит в том, что дополнительная информация, предоставляемая вторым аргументом, устраняет неоднозначность при нахождении x . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим простую задачу, в которой нам дано:

$$c = \frac{1}{2}; s = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и мы должны решить для x . Если мы воспользуемся функцией обратного синуса и ограничим ответ интервалом $[0, 2\pi)$, мы получим результат:

$$x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Поскольку мы знаем, что косинус $\frac{\sqrt{3}}{2}$ мы можем быстро проверить, взяв косинусы обоих кандидатов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, решений, что первое решение верное, а второе неверное.

$$\frac{\pi}{6} \text{ потому что } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ потому что } \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Функция atan2 проходит аналогичный алгоритм, чтобы найти единственное решение в диапазоне $[0, 2\pi)$.

$$\text{atan2}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Функция atan2 является стандартной функцией в большинстве компиляторов C, Pascal и Fortran.

5.6.2 Решение нелинейного уравнения в (g)

$$P \cos \alpha + Q \sin \alpha + R = 0 \quad (г)$$

Определить γ так, чтобы

$$\text{потому что } \gamma = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \quad \text{и } \sin \gamma = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

Обратите внимание, что это всегда возможно. γ можно определить с помощью функции atan2 :

$$\gamma = \text{atan2} \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right)$$

Теперь (g) можно переписать как:

$$\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma + \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2}} = 0$$

или

$$\cos(\alpha - \gamma) = -\frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

Это дает нам два решения для α через известный угол γ :

$$\alpha - \gamma = \pm \arccos \left(-\frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2}} \right), \quad \sigma = \pm 1$$