

Définition d'une métrique cinématique pour les robots manipulateurs

Krzysztof Tchoń Ignacy Dul, Iba Institut
d'Ingénierie Cybernétique Université
Technique de Wrocław ul.
Janiszewskiego 11/17,
50-372 Wrocław, Pologne

Abstrait

En utilisant une métrique riemannienne dans le groupe euclidien spécial, nous définissons une métrique cinématique sur l'espace de la cinématique des robots manipulateurs. La métrique peut être utilisée comme instrument dans la conception cinématique et l'évaluation des performances des robots manipulateurs.

Mots clés : cinématique, coordonnées exponentielles, métrique riemannienne, géodésiques, Métrique de Chebyshev, approximation.

1. INTRODUCTION

L'élément indispensable de la conception optimale de la cinématique des robots manipulateurs est constitué par la procédure d'évaluation. L'évaluation de la cinématique devrait établir un ordre de préférence cinématique et, éventuellement, conduire à la sélection de conceptions optimales. Plusieurs indices de performances cinématiques traités dans la littérature robotique répondent exactement à la question de l'évaluation ; cf. par exemple (Yoshikawa 1985, Klein et Blaho 1987, Park et Brockett 1989).

Le sujet de cet article peut également être considéré comme une contribution à la banque d'outils d'évaluation de la cinématique des robots manipulateurs. Plus précisément, nous proposons de faire reposer l'évaluation des cinématiques sur une mesure de distance (une métrique) entre cinématiques. Dans ce but, nous considérons la cinématique comme des cartes continues de l'espace interne compact (joint) X dans l'espace des positions externes et de l'orientation de l'effecteur, identifié avec le groupe euclidien spécial $SE(3)$. Notre construction d'une métrique cinématique est standard ; elle fournit une métrique, souvent appelée métrique de Chebyshev, sur l'ensemble des continus $(X, SE(3))$ de X dans cartes $C_0 SE(3)$, en exploitant une métrique riemannienne invariante à gauche, $f'' : X \rightarrow SE(3)$ et d : dans $SE(3)$. Ainsi, si $f' : SE(3) \times SE(3) \rightarrow \mathbb{R}$ est la métrique dans $SE(3)$ défini par la métrique riemannienne, alors la métrique de Chebyshev est définie comme $p(f', f'') = \max_{x \in X} d(f'(x), f''(x))$. Il faut cependant admettre que, puisqu'il n'y a pas de métrique riemannienne naturelle sur $SE(3)$, notre construction, bien que bien motivée et conduisant à des formules calculables, n'est pas la seule possible. Des arguments détaillés en faveur de la métrique riemannienne adoptée dans cet article seront fournis dans la section 2.

Après avoir introduit une structure métrique en C^p mesure $(X, SE(3))$, nous sommes en mesure non seulement de la distance entre deux cinématiques, mais aussi considérer la cinématique suivante problème d'approximation. Étant donné une performance cinématique prescrite $f \in C$ et une $^0(X, SE(3))$, famille de cinématiques k_v dépendant des paramètres géométriques $v \in V$ (dimensions des liaisons, angles de torsion, paramètres de décalage, (Paul 1981)), trouver la meilleure approximation cinématique de f au sens de la métrique p .

Comme étape intermédiaire naturelle vers la définition de la métrique dans l'ensemble de la cinématique du robot, nous avons trouvé des formules explicites pour les coordonnées exponentielles et pour la métrique d dans $SE(3)$. La dernière métrique définit la distance entre deux points dans $SE(3)$ comme étant égale à la longueur minimale d'une courbe joignant les points. La métrique de $SE(3)$ considérée ici ressemble à la mesure des écarts de déplacement et de rotation introduite dans (Taylor 1983), mais donne des valeurs de distance plus grandes qui reflètent plus précisément la structure géométrique intrinsèque de $SE(3)$. La construction de cette métrique donne également une approche spécifique de la planification de trajectoire pour le contrôle point à point des robots manipulateurs dans l'espace extérieur, qui repose sur le tracé d'une géodésique joignant deux points dans $SE(3)$. Une approche similaire à la planification de trajectoire dans l'espace interne d'un manipulateur a été décrite dans (Shin et McKay 1986).

Dans (Tcho'n et Dul, eba 1991) un algorithme a été présenté qui utilise des coordonnées exponentielles dans $SE(3)$ pour générer des trajectoires de longueur minimale (géodésique) dans l'espace de travail du manipulateur.

L'article est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous introduisons des concepts mathématiques de base tels qu'une définition de la métrique cinématique, des coordonnées exponentielles en $SE(3)$, des métriques riemanniennes invariantes à gauche en $SE(3)$, des géodésiques et une métrique en $SE(3)$ induite par la riemannienne. structure. Nous formulons également une liste d'exigences auxquelles devrait répondre une métrique riemannienne "raisonnable" sur $SE(3)$, et faisons un choix spécifique de la métrique. La section 3 contient les principaux résultats. Nous y donnons une formule explicite pour les coordonnées exponentielles dans $SE(3)$, définissons leur domaine de définition et fournissons une expression locale pour la métrique dans $SE(3)$. Dans la section 4, nous calculons la métrique cinématique pour 6 cinématiques exemplaires, y compris le manipulateur PUMA 600. La section 5 fournit un aperçu des applications robotiques prospectives de la métrique. L'article se termine par la section 6 traitant des propriétés de calcul de la métrique cinématique. L'importance des calculs symboliques est appréciée et des estimations calculables de la métrique dans $SE(3)$ sont proposées.

2 CONCEPTS DE BASE

Nous considérerons la cinématique de robots manipulateurs rigides à n degrés de liberté équipés d'articulations prismatiques ou rotoïdes. Une telle cinématique peut être représentée mathématiquement comme une carte continue

$$k : X \rightarrow SE(3), \quad (1) \text{ où } X \text{ est l'espace des variables internes du}$$

manipulateur (positions des articulations), $SE(3)$ désigne le groupe euclidien spécial des mouvements du corps rigide, (Brockett 1984, Loncaric 1985). En tenant compte des contraintes physiques de mouvement au niveau des articulations, nous arrivons à la conclusion que l'espace interne X est un sous-ensemble compact de R^n . Fixons un cadre de coordonnées de base pour le manipulateur. Alors le groupe $SE(3)$ peut être exprimé comme un produit semi-direct des rotations et translations par rapport au référentiel de base, donc $SE(3) = SO(3) \times R^3$. $SO(3)$ désigne ici le groupe orthogonal spécial dans R^3 , c'est-à-dire le

groupe de toutes les matrices 3 par 3 R avec $\det R = 1$ et $R \cdot R^T = I_3$, R_3 est le groupe des translations dans R^3 . Selon la représentation matricielle bien connue, tout élément de $SE(3)$

$SE(3)$ peut être considéré comme une matrice 4 par 4 de la forme avec $R \in SO(3)$,

$T \in R^3$, (Paul 1981). Étant donné une configuration $x \in X$ du manipulateur, la cinématique

$k(x) = \begin{pmatrix} R(x)T(x) \\ 1 \end{pmatrix}$ signifie que le cadre de coordonnées de l'effecteur a été décalé de

$T(x)$ par rapport au repère de base, tandis que son orientation est décrite par $R(x)$.

Notons K_n l'ensemble de toutes les cinématiques (1) à n degrés de liberté. Clairement, $K_n \subset C^n =$

C la manière la $^0(X, SE(3))$ - l'ensemble des cartes continues de X dans $SE(3)$. Un stan

plus courante de doter C^n d'une métrique renvoie à une métrique dans $SE(3)$. Supposons pour, f''

moment que d désigne une telle métrique. Ensuite, pour $f' \in C^n$ que nous définissons, (Engelking 1975)

$$\rho(f', f'') = \max_x d(f'(x), f''(x)) \quad (2)$$

Afin de construire la métrique d , nous devons étudier plus avant les propriétés de $SE(3)$.

Tout d'abord, nous observons que le groupe euclidien spécial $SE(3)$ porte la structure d'un groupe de Lie connexe, et $\dim SE(3) = 6$. En utilisant la structure différentiable de $SE(3)$ on peut considérer la cinématique (1) comme lisse (c'est-à-dire infiniment continûment dérivable) ou même des cartes analytiques. L'algèbre de Lie $se(3)$ du groupe euclidien est le produit $se(3) = so(3) \times R^3$, où $so(3)$ désigne l'ensemble de toutes les matrices antisymétriques de taille 3 sur 3. Avec $0 = \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}$

par rapport à l'identification $R^3 \ni r = [r] = \begin{pmatrix} r_3 \\ -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix} \in so(3)$, $se(3) \cong R^6$.

Il existe une application lisse $\exp : se(3) \rightarrow SE(3)$, localement un difféomorphisme, dont l'inversion introduit les coordonnées dites exponentielles dans $SE(3)$, $\exp^{-1} : (U, E) \rightarrow (R^6, 0)$, défini sur un voisinage ouvert U de l'élément d'unité $E = I_4 \in SE(3)$. Laisser

$s = \begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix} \in SE(3)$ U , et notons les coordonnées exponentielles de s par $(r, t) = \begin{pmatrix} [r] \\ t \end{pmatrix} \in R^6$

. Ensuite, de manière similaire à (Loncaric 1985), nous trouvons que $\exp \begin{pmatrix} [r] \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix}$ donne

$R = e^{T[r]A}$ où $A = M^{-1} \frac{ds}{ds}$ est la fonction exponentielle de la matrice.

par le théorème d'Euler, (Richtmyer 1981), les valeurs propres de R sont égales à 1, $e^{\pm i\alpha}$, $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (T^T r R - 1)$, $T^T r R = R_{11} + R_{22} + R_{33}$. Par conséquent, $[r]$ a des valeurs propres

$0, \pm i\alpha$, et les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \pm 2i \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2\alpha}$. Finalement,

puisque $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{\sin^2 \alpha}{2\alpha}$, on en déduit que pour $0 \leq \alpha < \pi$ l'exponentielle

coordonnées de $s = \begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix}$ sont bien définies et exprimés comme suit

$$\exp^{-1} \begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix} = (r, t) \text{ où } [r] = \ln R, \quad t = \text{UNE}^{-1} \cdot T \quad (3)$$

Ci-dessus $\ln R$ désigne le logarithme matriciel, voir (Gantmacher 1988). Deuxièmement, soit Q une matrice symétrique définie positive 6 par 6. Clairement, Q définit un produit scalaire dans R^6 en attribuant à tout $x, y \in R^6$ le nombre $(x, Qy) = x^T Qy$. La matrice Q peut être utilisée pour introduire une métrique riemannienne invariante à gauche dans $SE(3)$ en attribuant à $\xi, \eta \in T_s SE(3)$ la valeur de $(\xi, \eta)(s) = (L_{s^{-1}} \xi, Q L_{s^{-1}} \eta)$, (Arnold 1978). Ici $T_s SE(3)$ désigne l'espace tangent à $SE(3)$ en s , $L_{s^{-1}}$ est l'application tangente pour l'automorphisme interne gauche

$v \rightarrow s^{-1}v$ de $SE(3)$. La métrique riemannienne fait de $SE(3)$ une variété riemannienne et de s'' $SE(3)$ la nous permet de mesurer la distance entre toute courbe s dans $'$, longueur minimale d'un $SE(3)$ joignant s $'$, s'' , c'est-à-dire

$$d(s', s'') = \inf_{s(\cdot)} \int_t^{t'} \sqrt{(\dot{s}(t), \dot{s}(t))} dt \quad (4)$$

où $\dot{s}(t) = s'(t)$ est un vecteur tangent à $s(\cdot)$ en $s(t)$ et l'infimum est pris sur les courbes (lisse par morceaux) $s(\cdot)$ telles que $s(t') = s'$, $s(t'') = s''$. Troisièmement, la distance (4) peut être calculée efficacement en utilisant le fait que $SE(3)$ est géodésiquement complet, donc la courbe de longueur minimale joignant s s'' est réalisée par la géodésique, (Gallot, Hulin et Lafontaine 1987). De plus, par rapport à la métrique riemannienne invariante à gauche définie ci-dessus, la longueur d'arc de la jointure géodésique minimale s s'' est la même que la longueur d'arc

de la géodésique minimale dans $SE(3)$ entre I_4 et s U (U est le domaine de définition de s). Mais chaque fois que nous sommes exponentielles), la dernière longueur est la même que la valeur de la Q -norme de $\exp^{-1}(ss')$ en R_6 . Dans la section suivante, nous allons exploiter cette observation pour fournir une formule explicite pour la distance (4), et donc pour déterminer la métrique (2) pour un choix spécifique de Q .

Comme nous l'avons déjà mentionné, tout produit interne dans R_6 donne une métrique riemannienne invariante à gauche sur $SE(3)$, donc en fait nous avons affaire à une famille de telles métriques en fonction du choix de la matrice Q . Il est bien connu, voir par exemple (Loncaric 1985) qu'il n'y a pas de choix naturel de Q , en particulier, il n'existe pas de métrique riemannienne bi-invariante (c'est-à-dire simultanément invariante à gauche et à droite) sur $SE(3)$. Par contre, de telles métriques naturelles existent sur des sous-groupes de $SE(3)$: celui des rotations $SO(3)$, et celui des translations R_3 .

Ces métriques ne définissent pas une métrique naturelle sur $SE(3)$ principalement parce que $SE(3)$ est un semi-direct, pas le produit direct de $SO(3)$ et R_3 . Parmi les sous-groupes de $SE(3)$ on distinguera ceux des mouvements de vis, c'est-à-dire des rotations suivies de translations par rapport au même axe. Clairement, tout sous-groupe de mouvements de vis est abélien, isomorphe au produit direct de $SO(2)$ et R . Après cette introduction, nous sommes prêts à formuler la liste suivante d'exigences concernant une métrique riemannienne préférée sur $SE(3)$.

- je. La métrique restreinte à $SO(3)$ ou R_3 coïncide avec la valeur naturelle correspondante métrique.
- ii. La métrique doit respecter la structure du produit direct des sous-groupes de mouvement de vis de $SE(3)$, c'est-à-dire que pour un mouvement de vis donné, les grandeurs de la rotation et de la translation sont mesurées indépendamment.
- iii. La métrique doit être informatiquement aussi simple que possible.

En tenant compte des exigences ci-dessus, nous avons choisi pour d'autres considérations le produit scalaire euclidien dans R_6 en fixant $Q = I_6$. Dans la section 3, nous prouverons qu'il s'agit d'un bon choix et présenterons quelques arguments en faveur de son unicité.

3 PRINCIPAUX RÉSULTATS

Au vu des considérations précédentes, une étape nécessaire vers la détermination effective de la métrique (4) dans $SE(3)$ est de calculer les coordonnées exponentielles (3). Une formule appropriée est offerte par le résultat suivant

5

donc $BTB = I_3 + (2b - a = I_3 + \gamma \cdot [r]_{\times}^2)$ défini en (9). Ensuite, on voit facilement que $(t, t) = (\theta, \theta) + \gamma \cdot ([r]_{\times} \theta, [r]_{\times} \theta)$. Mais $[r]_{\times} \theta$ n'est que le produit croisé $r \times \theta$, (Brockett et Loncaric 1986), donc γ est multiplié par la longueur au carré de ce produit croisé. Il découle de l'algèbre vectorielle élémentaire que $(r \times \theta, r \times \theta) = r \cdot \theta$ $2 \cdot \sin^2 \beta$, où β est l'angle entre r et θ , $r \cdot \theta = (r, r)$. Puisque, par définition, $(r, \theta) = r \cdot \theta \cdot \cos 2\beta$, on en déduit que $(t, t) = (\theta, \theta) + \gamma \cdot ((r, r)(\theta, \theta) - (r, \theta)^2)$. CQFD

Remarque 3.1 On voit facilement que le coefficient γ dans (8) est toujours ≥ 0 . De même, par l'inégalité de Schwarz, le terme multiplié par γ dans (8) est également positif. En conséquence, le rhs de (8) est ≥ 0 . De plus, il résulte de l'orthogonalité de R' que $(\theta, \theta) = T$. Cela étant, les deux premiers termes de (8) peuvent être interprétés comme une mesure de la distance entre les rotations R', R'' et les translations T .

indépendamment, tandis que le troisième terme reflète le fait que $SE(3)$ n'est pas le produit direct mais seulement semi-direct de $SO(3)$ et R^3 . La contribution du dernier terme à la distance (8) n'est non nulle que si r et θ diffèrent de 0. Finalement, en invoquant l'expression (7), la formule (8) peut prendre les deux formes équivalentes suivantes :

$$d^2(s', s'') = \alpha^2 - \gamma \cdot (r, \theta)^2 + \delta \cdot (\theta, \theta) \text{ pour } \delta = \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2, \quad (10)$$

ou

$$d^2(s', s'') = \alpha^2 + (\theta, \theta) \cdot (\cos 2\beta + \delta \cdot \sin^2 \beta), \quad (11) \text{ où } \beta \text{ est l'angle entre}$$

les vecteurs r et θ introduit dans la preuve du théorème 3.1.

Peut-être que la forme (10) est la plus appropriée à des fins de calcul.

Remarque 3.2 Vérifions que la métrique (8) satisfait bien aux exigences i.-iii. énoncé s'' dans la section 2. Dans ce but, remarquons d'abord que, si nous posons $T = T_2$ en s, s'' , donc, c'est $T_2 SO(3)$, nous obtiendrons $d(s', s'') = (r, r) = \alpha^2$. De même, si $R' = R''$, on arrive à s'' être $(s', s'') = (\theta, \theta) = T - T$. Donc, je suis satisfait. Maintenant laissons, une paire de vis, mouvements effectués par rapport à un axe donné. Clairement, nous concluons que dans ce cas $\theta = T - T$, et r coïncide avec l'axe, donc l'angle β entre r et θ est égal à 0. Par conséquent, (11) donne d en accord avec l'exigence ii. Pour montrer que les formules (8), (10), (11) sont calculables, nous avons analysé plusieurs exemples représentatifs dans la section 4.

Remarque 3.3 Par une analyse approfondie d'une formule équivalente à (8), dérivée pour un

matrice 6x6 définie positive générale symétrique $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}$ avec Q_1, Q_3 symétriques,

on peut conclure que l'exigence i. donne $Q_1 = Q_3 = I_3$, tandis que ii. implique $Q_2 = 0$.

Cela étant, le produit scalaire euclidien dans R^6 semble être le seul qui respecte les exigences i. et ii. Dans la section suivante, nous ferons des efforts considérables pour prouver que la métrique (8) satisfait également à l'exigence iii.

Après avoir défini une métrique dans $SE(3)$, nous doterons C_n de la métrique (2) dans une droite

voie vers l'avant. A savoir, laissez $f', f'' \in C_n$, $x \in X$ et $f'(x) = R'(x)^T f'(x) \circ 1$, $f''(x) =$

$$R''(x) T''(x) 0 1$$

. Sous l'hypothèse que $f'(x) - 1 f''(x) \in U$, $d(f'(x), f''(x))$ peut être

trouvé en utilisant les expressions (8)-(11). Par conséquent, nous calculons

$$\rho(f', f'') = \max_{x \in X} d(f'(x), f''(x)).$$

Il est à noter que, grâce à la compacité de X , l'espace métrique (C_n, ρ) possède de belles propriétés topologiques. En particulier, il s'ensuit que (C_n, ρ) est un espace métrique complet, et que la convergence dans (C_n, ρ) signifie la convergence uniforme. Les deux propriétés jouent un rôle clé dans l'étude des problèmes d'approximation dans (C_n, ρ) . La métrique ρ , restreinte à la cinématique $K_n \subset C_n$, définit un espace métrique de la cinématique (K_n, ρ) . Par conséquent, ρ sera appelé la métrique cinématique.

4 CALCUL DE LA CINEMATIQUE METRIC

Ci-dessous, nous allons calculer la métrique cinématique pour plusieurs exemples de cinématiques de robots manipulateurs.

Exemple 4.1 Double pendule.

La cinématique du double pendule est donnée par la formule bien connue

$$k(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 + x_2) - \sin(x_1 + x_2) 0 d \cos x_1 + l \cos(x_1 + x_2) & \sin(x_1 + x_2) \\ \cos(x_1 + x_2) 0 d \sin x_1 + l \sin(x_1 + x_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = R(x) T(x) 0 1 \quad (12)$$

Soient $k_v(x)$, $k_v'(x)$ une paire de pendules doubles qui diffèrent par leurs paramètres géométriques (les longueurs des liens d, l) avec $v = (d, l)$, $v' = (d', l')$. On souhaite calculer la distance $\rho(k_v, k_v')$ selon la formule (12). Dans ce but, nous observons d'abord que l'espace interne de (12) coïncide avec un sous-ensemble compact $X \subset \mathbb{R}^2$ (un rectangle, si (12) a des limites articulations, ou le tore T^2 pour des articulations illimitées). Alors, pour trouver $\rho(k_v, k_v')$, il faut pour calculer $d(k_v(x), k_v'(x))$ comme indiqué par (8)-(11). Il est évident que $\alpha(x) = \alpha = 0$, donc pour tout v, v' ; $k_v(x) - 1 k_v'(x) \in U$. De plus, du fait de la forme de k_v, k_v' la partie rotationnelle des coordonnées exponentielles disparaît de (10), d'où

$$d(k_v(x), k_v'(x)) = (d - d')^2 + 2(d - d')(l - l') \cos x_2 + (l - l')^2 \quad (13)$$

Maintenant, en supposant que $x_2 \in [-\pi, \pi]$, nous concluons que

$$\rho(k_v, k_v') = \max_{x \in X} d(k_v(x), k_v'(x)) = |d - d'| + |l - l'| \quad (14)$$

Il résulte de (14) que la topologie imposée à l'ensemble des doubles pendules par la métrique ρ coïncide avec celle induite par la norme en valeur absolue dans l'espace des paramètres géométriques. Le résultat (14) se généralise immédiatement aux n -pendules, (Dul, eba et Tcho'n

1990).

Les exemples suivants porteront sur une cinématique générale à 2 degrés de liberté ne contenant que des liaisons rotoïdes et dépendant de 6 paramètres géométriques. La cinématique d'un manipulateur général 2R peut être décrite comme suit : (pour l'abréviation nous posons $c_i = \cos \alpha_i$ et $s_i = \sin \alpha_i$)

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 \cos \alpha_1 & -c_1 s_2 \cos \alpha_2 - s_1 c_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + s_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 \cos \alpha_1 & -s_1 s_2 \cos \alpha_2 + c_1 c_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 c_2 \\ s_2 \sin \alpha_1 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 0 \\ 0 & \end{matrix} \\
 k(x) = & \begin{matrix} c_1 s_2 \text{péché } \alpha_2 + s_1 c_2 \cos \alpha_1 \text{péché } \alpha_2 + s_1 \text{péché } \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 s_1 s_2 \text{péché } \alpha_2 - c_1 c_2 \cos \alpha_1 \text{péché } \alpha_2 - c_1 \\ \text{péché } \alpha_1 \cos \alpha_2 - c_2 \text{péché } \alpha_1 \text{péché } \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 0 a_2 c_1 c_2 - a_2 s_1 s_2 \cos \alpha_1 + \\ d_2 s_1 \sin \alpha_1 + a_1 c_1 a_2 s_1 c_2 + a_2 c_1 s_2 \cos \alpha_1 - d_2 c_1 \\ \sin \alpha_1 + a_1 s_1 a_2 s_2 \sin \alpha_1 + d_2 \\ \cos \alpha_1 + d_1 1 \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Dans (15) α_1, α_2 sont les angles de torsion, a_1, a_2 décrivent les longueurs des maillons ; d_1, d_2 désignent les paramètres de décalage, (Paul 1981). On observe facilement que (15) devient identique pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ $a_1 \neq d$ est le , $a_2 = l$, à (12) $d_1 = d_2 = 0$. Le domaine de définition de (15) même que celui de (12). Ci-dessous nous allons calculer la métrique (2) pour 3 cinématiques particulières du manipulateur général 2R.

Exemple 4.2 Général Manipulateur 2R (1).

Soient $k_v(x), k_v'(x)$ une paire de manipulateurs généraux 2R qui ne diffèrent que par leur $d_1 = d, d =$ angles de torsion $\alpha_2, \alpha_1' = 0$, $0 = d_1 = d_2 = d_2$, $a_1 = a_1$, $a_2 = a_2$. En effet on a $v = (\alpha_2, a_1, a_2)$, $v' = (\alpha_1', a_1', a_2)$. Maintenant, nous devons déterminer la distance $d(k_v(x), k_v'(x))$ conformément à (8)-(11). Par un simple calcul on trouve que $\alpha(x) = \alpha = |\alpha_2 - \alpha_1|$, $\theta(x) = \theta = 0$, donc

$$d(k_v(x), k_v'(x)) = |\alpha_2 - \alpha_1| \tag{16}$$

à condition que $\alpha < \pi$. Puisque le rhs de (15) est indépendant de x X , nous concluons immédiatement que

$$\rho(k_v, k_v') = |\alpha_2 - \alpha_1| \tag{17}$$

A nouveau la topologie imposée par la métrique (2) coïncide avec celle induite par la norme des valeurs absolues dans le (sous)espace des paramètres géométriques.

Exemple 4.3 Général Manipulateur 2R (2).

Comme précédemment, notons $k_v(x), k_v'(x)$ une paire de manipulateurs généraux 2R (15), mais maintenant on suppose seulement que $\alpha_1 = \alpha_1' = 0$ $d_1 = d$ donc $v = (\alpha_2, a_1, a_2)$, $v' = (\alpha_1', a_1', a_2)$. Pour déterminer la distance $d(k_v(x), k_v'(x))$ on commence par 2 | et $r(x) = r = \alpha(-1, 0, 0)^T$. Ensuite on calculant $\alpha(x) = \alpha = |\alpha_2 - \alpha_1|$ trouve

$T'(x) - T(x) = T(r, \theta) - T = (0, 0, d)$ où $d = d$ donc pour $\alpha < \frac{\pi}{2} - d_2$. Maintenant on vérifie facilement que $= 0$, π (10) et (2) donner la formule de distance suivante

$$\rho(kv, kv') = d(kv(x), kv'(x)) = \frac{\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2}} + 4 \sin^2 \frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{2} + (d'^2 - d_2)^2 \quad (18)$$

La relation (18) reste la même lorsque les manipulateurs diffèrent de d_1 au lieu de d_2 .

Exemple 4.4 Manipulateur général 2R (3).

On suppose que $kv(x)$, $kv'(x)$ désignent les manipulateurs 2R généraux (15), les $\alpha_1, d_1, \alpha_2, a_2, d_2$ qui diffèrent de tous = paramètres géométriques sauf pour $\alpha_1 = \alpha d'_1$, $d'_1 \neq 0$. Donc, nous avons maintenant $v = (a_1, d_1, \alpha_2, a_2, d_2)$, $v' = (a'_1, \alpha'_2, a'_2, d'_2)$. Avec ces données, en utilisant un peu de calcul formel, nous avons trouvé le expression suivante pour la distance au carré (10), valable pour $\alpha = |\alpha_2 - \alpha'|$ $\frac{\pi}{2} < \pi$:

$$d^2(kv(x), kv'(x)) = 4 \frac{(\alpha^2 - \alpha'^2)}{\sin^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2}} + (a_1 - a'_1)^2 \sin^2 x_2 + (a_1 - a'_1)^2 \cos^2 x_2 + 2(a_1 - a'_1)(a_2 - a'_2) \cos x_2 + (\alpha^2 - \alpha'^2)^2 + \frac{(\alpha^2 - \alpha'^2)}{4 \sin^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2}} ((d_1 - d'_1) + (d_2 - d'_2))^2 + (a_2 - a'_2)^2 \quad (19)$$

La maximisation de (19) par rapport à $x_2 \in [-\pi, \pi]$ produit la métrique (2) définie comme suit. On pose $\omega =$

$$\rho(kv, kv') = (\alpha^2 - \alpha'^2)^2 + (a_2 - a'_2)^2 \frac{\omega^2}{\sin^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2}} + \omega^2 ((a_1 - a'_1)^2 + ((d_1 - d'_1) + (d_2 - d'_2))^2) \quad (20)$$

si

$$|a_2 - a'_2| \leq (\omega^2 - 1)|a_1 - a'_1|,$$

alors que sinon

$$\rho(kv, kv') = (\alpha^2 - \alpha'^2)^2 + (|a_1 - a'_1| + |a_2 - a'_2|)^2 + \omega^2 ((d_1 - d'_1) + (d_2 - d'_2))^2 \quad (21)$$

En particulier, si $a_2 = a'_2$ alors la formule (20) s'applique, donc dans ce cas

$$\rho(kv, kv') = \frac{\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2}} + 4 \sin^2 \frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{2} + (a_1 - a'_1)^2 + ((d_1 - d'_1) + (d_2 - d'_2))^2 \quad (22)$$

Il est facile de voir que (22) se spécialise en (18) pour $a_1 = a'_1$, $d'_1 = d_1$.

Exemple 4.5 PUMA 600 (1).

Nous considérerons la cinématique du manipulateur PUMA 600 telle que décrite dans (Bazerghi, Goldenberg et Apkarian 1984), voir aussi (Tarn et al. 1986). Soit $kv(x)$, $kv'(x)$ la cinématique d'une paire de PUMA, où nous avons supposé pour des raisons de simplicité que $x_3 \in [-\pi, \pi]$, qui ne diffèrent que par des paramètres géométriques translationnels. En accord

avec la notation utilisée dans (Bazerghi, Goldenberg et Apkarian 1984) cela signifie que $v = (l_2, l_3, r_3, r_4)$, $v' = (l_2', l_3', r_3', r_4')$. De plus, nous prenons $r_3 = r_4 = 0$. Clairement, dans ce cas $r(x)$ dans (10) est égal à 0, et, avec une aide modérée de calcul formel, nous calculons la distance au carré (10) comme suit

$$d^2(kv(x), kv'(x)) = (l_2 - l_2')^2 + (l_3 - l_3')^2 + (r_3 - r_3')^2 + (r_4 - r_4')^2 + 2(l_2 - l_2')(r_4 - r_4') \sin x_3 + (l_3 - l_3') \cos x_3. \quad (23)$$

maximisant (23) par rapport à $x_3 \in [-\pi, \pi]$ on trouve la métrique (2) :

$$\rho(kv, kv') = \sqrt{(l_2 - l_2')^2 + (l_3 - l_3')^2 + (r_4 - r_4')^2 + (r_3 - r_3')^2}. \quad (24)$$

Exemple 4.6 PUMA 600 (2).

Maintenant, nous prenons une paire de PUMA $kv(x)$, $kv'(x)$ ayant $l_3 = l_4 = 0$ et $r_3 = r_4 = 0$, mais entre les axes avec des torsions arbitraires α_4, α_4' articulaires 3 et 4. Donc, maintenant $v = (l_2, \alpha_4, r_4)$, $v' = (l_2', \alpha_4')$. Soit $x_3, x_4 \in [-\pi, \pi]$. En invoquant un peu d'algèbre informatique, nous pouvons trouver le α_4 l'expression suivante pour la distance au carré (10) :

$$2j(kv(x), kv'(x)) = (\alpha_4 - \alpha_4')^2 + \frac{(\alpha_4 - \alpha_4')^2}{4 \sin^2 \alpha_4 - \alpha_4'} ((l_2 - l_2')^2 + (r_4 - r_4')^2) + (l_2 - l_2')^2 (1 - \frac{(\alpha_4 - \alpha_4')^2}{4 \sin^2 \alpha_4 - \alpha_4'}) \cos^2 x_3 \cos^2 x_4 + 2(l_2 - l_2')(r_4 - r_4') \frac{(\alpha_4 - \alpha_4')^2}{4 \sin^2 \alpha_4 - \alpha_4'} \sin x_3. \quad (25)$$

On observe facilement que le maximum de (25) sera supposé en $x_4 = \frac{\pi}{2}$ pour $\alpha_4 = \alpha_4' - \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pm \frac{\pi}{2}$, ainsi $\alpha_4 \in [-\pi, \pi]$ la métrique (2) est définie comme suit :

$$\rho(kv, kv') = \sqrt{\frac{(\alpha_4 - \alpha_4')^2}{4 \sin^2 \alpha_4 - \alpha_4'} + (l_2 - l_2')^2 + (r_4 - r_4')^2}. \quad (26)$$

5 APPLICATIONS PROSPECTIVES DU KI

MÉTRIQUE NÉMATIQUE

Par introduction de la métrique cinématique nous avons doté l'ensemble des cinématiques robotiques K_n d'une structure métrique et topologique. Nous avons appris des exemples étudiés dans la section 4 que la convergence dans l'espace (K_n, ρ) a une interprétation naturelle en termes de convergence par rapport aux paramètres géométriques de la cinématique. Il s'ensuit qu'une suite de cinématiques $k_i \in K_n$ converge vers $k \in K_n$, si les paramètres géométriques de k_i convergent, au sens approprié, vers les paramètres géométriques de k . De plus, la distance $\rho(k', k'')$ entre deux cinématiques peut être exprimée par des distances entre paramètres géométriques de la cinématique, il est donc possible, via la métrique cinématique, d'estimer les effets d'un changement de paramètres spécifiques sur les performances cinématiques d'un manipulateur. En particulier, compte tenu de certaines cinématiques nominales, on peut découvrir des écarts admissibles dans les paramètres géométriques nominaux dont l'effet sur la cinématique tombera dans les limites de tolérance prescrites. De cette manière, nous pouvons également étudier la sensibilité de la cinématique par rapport aux paramètres géométriques de

un manipulateur.

La métrique cinématique définit une mesure de qualité de la cinématique, interprétée comme la distance entre une cinématique donnée et une cinématique de modèle spécifique. Si le modèle a été choisi de telle manière qu'il reflète les performances cinématiques souhaitables d'un manipulateur, par exemple assume l'une des formes normales proposées dans (Tcho'n 1991), la mesure de la qualité fournit un outil naturel pour l'évaluation des performances cinématiques des manipulateurs. La métrique cinématique attribue une signification précise au problème d'approximation cinématique énoncé comme suit. Étant donné une transformation $f: X \rightarrow SE(3)$ de l'espace interne X d'un manipulateur dans le groupe euclidien spécial $SE(3)$, et une famille de cinématiques $k_v \in K_n$ dépendant des paramètres géométriques $v \in V$, la cinématique de calcul $k_v \in K_n$, aussi proche que possible de f par rapport à la métrique cinématique. Il est clair que le problème d'approximation peut être formulé mathématiquement comme un problème d'optimisation consistant à trouver les valeurs optimales des paramètres géométriques $v \in V$ tels que $p(k_v, f) = \min_{v \in V} p(k_v, f)$. Soit f que la performance cinématique souhaitable d'un manipulateur. Si $p(k_v, f) = 0$, on dit Alors k_v réalise la performance f , sinon k_v est la meilleure approximation de f .

Un constituant important de la métrique cinématique est la métrique d sur le groupe euclidien spécial. Cette métrique sert de mesure de distance entre les positions et les orientations du $s'' \in SE(3)$, par effecteur du manipulateur. Étant donné deux points s' , exemple les positions et orientations initiales et finales de l'effecteur dans l'espace externe, la distance $d(s', s'')$, définie par (10), est égale à la longueur minimale d'une courbe en $SE(3)$ joignant s' et s'' . Cette courbe, dite géodésique, est un analogue de la droite dans la géométrie euclidienne. Le mouvement le long des géodésiques n'a pas besoin d'accélération. Nous suggérons que les arcs de géodésiques sont des trajectoires naturelles en $SE(3)$ à suivre dans le contrôle point à point des robots manipulateurs. La métrique d dans $SE(3)$ nous fournit également un outil adéquat pour estimer la taille de l'espace de travail du manipulateur.

La métrique d , liée via la cinématique à l'espace interne X d'un manipulateur, définit une distance entre points du diagramme de bifurcation de la cinématique (Tcho'n 1991). En particulier, pour une cinématique non singulière à 6 degrés de liberté, d induit une distance entre configurations d'un manipulateur.

Considérons enfin un couple de cinématiques $k_v, k_{v'} \in K_n$, d'un manipulateur fixe, différant par certains de ses paramètres géométriques. Il découle de la définition de la métrique p que $p(k_v, k_{v'})$ est la distance maximale d entre $k_v(x)$, $k_{v'}(x)$ par rapport à $x \in X$. Une analyse des exemples de la section 4 révèle que la distance $d(k_v(x), k_{v'}(x))$ ne dépend pas de toutes mais de quelques variables internes. Dans les exemples 4.2 4.3 cette distance est la même pour tout $x \in X$.

Un manipulateur dont les cinématiques k_v et $k_{v'}$ ont la propriété que $d(k_v(x), k_{v'}(x))$ est constant pour tout $x \in X$ (donc égal à $p(k_v, k_{v'})$) que nous souhaitons appeler uniforme. Le nombre de variables internes apparaissant dans $d(k_v(x), k_{v'}(x))$ est une mesure de la non-uniformité du manipulateur, que l'on peut appeler sa co-uniformité. Les manipulateurs PUMA étudiés dans les exemples 4.5, 4.6 ont eu, respectivement, la couniformité 1 et 2.

6. CONCLUSION

Nous concluons cet article par un commentaire sur les propriétés de calcul de la métrique cinématique. Il est à noter que, sauf pour quelques cas simples comme ceux présentés dans les exemples 4.1 – 4.3, la quantité de calculs nécessaires pour déterminer la métrique cinématique est remarquable. Il existe deux sources de complications calculatoires : le calcul de la métrique d , définie par (10), en fonction de variables internes, et

la maximisation de d sur l'espace interne. Les problèmes liés à la métrique d peuvent être considérablement atténués en utilisant les calculs symboliques proposés par des logiciels comme MACSYMA ou REDUCE. De tels calculs semblent être efficaces jusqu'à ce que la cinématique ne diffère pas de plus d'un paramètre géométrique de rotation (un angle de torsion entre une paire d'axes articulaires voisins). Si plus de twists sont présents, une difficulté essentielle apparaît dans la détermination des coordonnées exponentielles selon l'expression (9). La deuxième source de difficultés calculatoires, c'est-à-dire la maximisation de d sur l'espace interne, bénéficie modérément de l'utilisation des calculs symboliques. Heureusement, dans de nombreux cas, la courbure d'un manipulateur est petite, de sorte que le problème de maximisation est de faible dimension.

Dans le cas où la détermination exacte de la métrique cinématique est difficile voire impossible, on peut recourir à des expressions approchées de la métrique. Ci-dessous, nous présentons deux de ces expressions. En fait, elles fournissent des limites inférieure et supérieure calculables pour la distance carrée définie par (10). La première expression élimine la partie informatiquement impliquée (r, θ) de (10). En fait, les estimations suivantes peuvent être déduites facilement de (11):

$$L = \alpha^2 + (\theta, \theta) \leq \text{ré}^2(k'(x), k''(x)) \leq \alpha^2 + \delta(\theta, \theta) = R(27) \delta \text{ et } \theta \text{ sont liés à}$$

où a , $k'(x)$, $k''(x)$ via (8) et (10). Clairement, pour $|\alpha| \leq \pi$, la droite de (27) est bornée par $E = \alpha(\theta, \theta)$. La qualité des estimations dans (27) a été illustrée sur la Fig. 6.1 : a, b, c, en montrant la dépendance des ensembles de niveaux de L, R et E sur la distance de rotation $\alpha = r$ et la distance de translation θ . Les ensembles de niveaux de d

d^2 se situent entre ceux de L et R .

La deuxième estimation va plus loin que (27), et réduit la difficulté liée à k'' à plusieurs le calcul de k' malvenu lorsque la cinématique k se tord entre axes articulaires. Cette estimation, α , particulièrement est basée sur l'inégalité $\cos \alpha \geq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ partout, et $\cos \alpha \leq 1 - \frac{1}{\pi}\alpha$ (9), on déduit de (27) $\frac{1}{2}\alpha^2$, valide les bornes inférieure et supérieure d^2 , valable pour $|\alpha| \leq \pi$. En utilisant ces inégalités et formules suivantes pour $d^2(k'(x), k''(x))$:

$$B(x) \leq d^2(k'(x), k''(x)) \leq \frac{2\pi}{4} B(x), \quad (28)$$

où

$$B(x) = 3 - T^T r(R'(x)R''(x)) + T''(x) - T'(x)^2$$

7 REMERCIEMENTS

Ce travail a été soutenu par le ministère polonais de l'éducation. Les auteurs ont le plaisir de remercier M.Krzysztof Arent, MEng pour avoir effectué des calculs symboliques à l'appui des exemples 4.4 - 4.6.

Les références

- [] Arnold VI 1978. Méthodes mathématiques de la mécanique classique. Berlin : Springer Verlag.
- [] Bazerghi A., Goldenberg AA et Apkarian J. 1984. Un modèle cinématique exact du manipulateur PUMA 600. IEEE Trans. sur Syst. L'homme et la cybernétique, 14(3):483-487.

- [] Brockett RW 1984. Robots manipulateurs et produit d'exponentielles pour mlti. Théorie mathématique des réseaux et des systèmes, éd. PA Fuhrmann. Berlin : Springer-Verlag, p. 120-129.
- [] Brockett RW et Loncaric J. 1986. The geometry of compliance programming. Théorie et applications des systèmes de contrôle non linéaires, éd. CIByrnes, A. Lindquist. Amsterdam: North-Holland, pp. 35-42.
- [] Dul eba I., et Tcho'n K., 1990 (19-21 sept.) Une distance cinématique entre pendula à n degrés de liberté. Proc. 3e Nat. Conférence sur la robotique. Wroclaw : Technical University Publisher, vol.I., pp. 22-26 (en polonais).
- [] Engelking R. 1975. Topologie générale Varsovie : Éditeurs scientifiques polonais (en polonais).
- [] Gallot S., Hulin D., et Lafontaine J. 1987. Géométrie Riemannienne. Berlin : Springer Verlag.
- [] Gantmacher FR 1988. Théorie matricielle. Moscou : Nauka (en russe).
- [] Klein CA et Blaho BE 1987. Mesures de dextérité pour la conception et le contrôle de manipulateurs cinématiquement redondants. Int.J.Robotics Res. 6(2): 72-83.
- [] Loncaric J. 1985. Analyse géométrique des mécanismes compliants en robotique. doctorat thèse, Harvard University, Division of Applied Sciences.
- [] Park FC et Brockett RW 1989. Cartes harmoniques et conception optimale du mécanisme. Préimpression. Université de Harvard, Division des sciences appliquées.
- [] Paul RP 1981. Robots Manipulateurs : Mathématiques, Programmation et Contrôle. Cambridge : MIT Press.
- [] Richtmyer RD 1981. Principes de physique mathématique avancée, vol.2. Berlin : Springer Verlag.
- [] Shin KG et McKay ND 1986. Sélection de trajectoires géométriques de temps quasi-minimum pour les manipulateurs robotiques. IEEE Trans. sur Autom. Contrôle, 31(6): 501-510.
- [] Tarn TJ, et al. 1986 (octobre). Équations dynamiques pour le bras de robot PUMA 560 à six bras. Rép. SSM-RL-86-05. St.Louis, : Laboratoire de Robotique.
- [] Taylor RH 1983. Planification et exécution de trajectoires de manipulateurs en ligne droite. Robot Motion : Planification et contrôle, éd. M. Brady et. Al. Cambridge : MIT Press, pp.265-286.
- [] Tcho'n K. 1991. Topologie différentielle des robots manipulateurs redondants. Int.J.Robototics Res., 10(5), à paraître.
- [] Tcho'n K., et Dul eba I. 1991. Sur l'inversion de la cinématique singulière et la génération de trajectoires géodésiques dans les robots manipulateurs. Préimpression. Université technique de Wroclaw, Institut d'ingénierie cybernétique.
- [] Yoshikawa T. 1985. Manipulabilité des mécanismes robotiques. Int.J.Robotique Rés.,4(2):3-9.