Notes de cours sur la cinématique

Dr Ing. Zdena Sant

CONTENU

1 INTRODUCTION... 4

2 CINEMATIQUE D'UNE PARTICULE... 9

2.1 Rapidité... .... dix

2.2 Accélération 11

2.2.1 Classement des mouvements 12

2.3 Transformation orthogonale 14

2.3.1 Transformation orthogonale des grandeurs vectorielles .... 14 Vitesse

2.3.2 sous forme matricielle utilisant la transformation orthogonale .... 16 Accélération sous forme

2.3.3 matricielle forme utilisant la transformation orthogonale 16

2.4 particule dans le système de coordonnées cylindriques - r, ,z 17

2.4.1 Le vecteur position .... 17 2.4.2 La vitesse .... 17 2.4.3 L'accélération................................ 18

2.4.4 Cas particuliers... 18

2.5 Trajectoire des particules.. 19

2.5.1 Mouvement rectiligne 19

2.5.2 Mouvement curviligne.. 20

2.6 Mouvement harmonique... 20

2.6.1 Composition des mouvements harmoniques de même sens .... 22 2.6.2 Composition de deux mouvements harmoniques perpendiculaires... 23

2.7 Mouvement d'un ensemble de particules 23

3 MOUVEMENT DU CORPS SOLIDE 24

3.1 Mouvement de translation d'un corps solide 24

3.1.1 Etude des grandeurs cinématiques 24

3.2 Rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe 25

3.2.1 Recherche de la vitesse d'un point quelconque 26

3.2.2 Recherche de l'accélération d'un point B quelconque 27

3.2.3 Conséquences de la cinématique des corps solides (la dépendance géométrique) 29

3.3 Mouvement planaire universel 31

3.3.1 Le poste 31

3.3.2 La vitesse... .... 32 3.3.3 Le pôle de mouvement .... 33 3.3.4 Recherche de l'accélération .... 35 3.3.5 Le centre instantané d'accélération – le pôle d' accélération 37

3.4 centre de la courbure de la trajectoire... 38

3.5 Mouvement combiné 41

3.5.1 Grandeurs cinématiques au moyen d'un mouvement combiné....................................... 42

3.5.2 La vitesse... .... 42 3.5.3 L'accélération 42

3.5.4 Accélération de Coriolis 43

3.5.5 Trouver le pôle du mouvement au moyen du mouvement combiné 44

3.6 Mouvement sphérique d'un corps 45

3.7 Espace universel Mouvement d'un corps 47

4 SYSTÈME D'ORGANISMES 48

4.1 Rotations simultanées autour d'axes concourants 48

4.2 Rotations simultanées autour d'axes parallèles.. 49

1. INTRODUCTION

La conception et l'analyse sont deux tâches vitales en ingénierie.

Le processus de conception signifie la synthèse lors de la phase de proposition de la taille, de la forme, du matériau les propriétés et les dispositions des pièces sont prescrites afin d'accomplir la tâche requise.

L'analyse est une technique ou plutôt un ensemble d'outils permettant une évaluation critique de la conception existante ou proposée afin de juger de son adéquation à la tâche.

Ainsi, la synthèse est un objectif qui peut être atteint par l'analyse.

L'ingénieur mécanique s'occupe de nombreuses tâches différentes qui sont en conjonction avec divers travaux processus qualifiés de processus technologiques.

Les processus technologiques impliquent le transport de matériaux, la génération et la transformation d'énergie, le transport d'informations. Tous ces processus nécessitent un mouvement mécanique, qui est effectué par des machines.

Pour être en mesure de créer une conception appropriée de la machine et du mécanisme, l'étude de la relation entre la géométrie et le mouvement des pièces d'une machine/d'un mécanisme et les forces qui provoquent le mouvement doit être effectuée. Ainsi la mécanique en tant que science est impliquée dans le processus de conception. La mécanique représente la science qui comprend la statique, la dynamique et la mécanique des matériaux.

La statique fournit une analyse des systèmes stationnaires tandis que la dynamique traite des systèmes qui changent avec le temps et, comme l'a suggéré Euler, l'étude du mouvement d'un corps rigide peut être séparée en deux parties, la partie géométrique et la partie mécanique. Dans la partie géométrique Cinématique
le transfert du corps d'une position à l'autre est recherché sans égard aux causes du mouvement. Le changement est représenté par des formules analytiques.

Ainsi, la cinématique est une étude du mouvement en dehors des forces produisant le mouvement qui est décrit par la position, le déplacement, la rotation, la vitesse, la vélocité et l'accélération.
En cinématique, nous supposons que tous les corps étudiés sont des corps rigides, leur déformation est donc négligeable et ne joue pas de rôle important, et le seul changement pris en compte dans ce cas est le changement de position.

La terminologie que nous utilisons a un sens précis comme tous les mots que nous utilisons pour nous exprimer tout en communiquant les uns avec les autres. Pour nous assurer que nous comprenons le sens, nous avons un thésaurus/glossaire disponible. Il est utile de clarifier certains termes surtout dans les domaines où la terminologie n'est pas très claire.

La structure représente la combinaison de corps rigides reliés entre eux par des articulations avec l'intention d'être rigides. Par conséquent, la structure ne fonctionne pas ou transforme le mouvement. La structure peut être déplacée d'un endroit à l'autre mais elle n'a pas de mobilité interne (pas de mouvement relatif entre ses membres).

Machines et mécanismes - leur but est d'utiliser le mouvement interne relatif dans la transmission puissance ou mouvement de transformation.

Machine – dispositif utilisé pour modifier, transmettre et diriger des forces pour atteindre un objectif spécifique.

Mécanisme - la partie mécanique d'une machine qui a pour fonction de transférer le mouvement et les forces de la source d'alimentation à une sortie. Le mécanisme transmet le mouvement du variateur ou de la liaison d'entrée au suiveur ou à la liaison de sortie.

Mécanisme planaire - chaque particule du mécanisme dessine des courbes planes dans l'espace et toutes les courbes se trouvent dans des plans parallèles. Le mouvement est limité à un espace bidimensionnel et le comportement de toutes les particules peut être observé en taille et forme réelles à partir d'une seule direction. Par conséquent, tous les mouvements peuvent être interprétés graphiquement. La plupart des mécanismes actuels sont des mécanismes planaires, nous nous concentrons donc sur eux.

Mécanisme sphérique - chaque lien a un point fixe lorsque la liaison se déplace et les points fixes de tous les liens se trouvent à un emplacement commun. Ainsi chaque point dessine une courbe sur la surface sphérique et toutes les surfaces sphériques sont concentriques.

Mécanisme spatial - n'a aucune restriction sur le mouvement relatif des particules. Chaque mécanisme contenant une paire de vis cinématiques est un mécanisme spatial car le mouvement relatif de la paire de vis est hélicoïdal.

Le mécanisme se compose généralement de :

Châssis – généralement une pièce qui ne présente aucun

mouvement Liens – les pièces individuelles du mécanisme créant la connexion rigide entre deux ou plusieurs éléments de paire cinématique différente. (Les ressorts ne peuvent pas être considérés comme des maillons puisqu'ils sont élastiques.)

La paire cinématique (KP) représente l'articulation entre les liaisons qui contrôle le mouvement relatif au moyen d'une surface de contact. Ainsi, certains mouvements sont limités tandis que d'autres sont autorisés. Le nombre de mouvements autorisés est décrit via la mobilité du KP. Les surfaces de contact sont supposées avoir une géométrie parfaite et entre les surfaces de contact il n'y a pas de jeu.

Articulation - connexion mobile entre des maillons appelés également paire cinématique (goupille, joint coulissant, joint à came) qui impose des contraintes au mouvement La chaîne

cinématique est formée de plusieurs maillons reliés de manière mobile par des articulations. La chaîne cinématique peut être fermée ou ouverte selon l'organisation des maillons connectés.

Lien simple - un corps rigide qui ne contient que deux articulations

Lien complexe - un corps rigide qui contient plus de deux articulations

Actionneur - est le composant qui entraîne le mécanisme

L'année dernière nous avons commencé à parler des fondements de la Mécanique – Statique et plus tard du transfert des forces et de leur effet sur les éléments de la structure/machine. Notre calcul des forces était basé uniquement sur la statique et au début nous avons supposé que les forces existent sur la structure ou sont appliquées très lentement afin qu'elles ne causent aucun effet dynamique sur la structure.

Cette situation est loin du monde réel puisqu'il n'y a rien de stationnaire dans le monde. (Donnez-moi un fixe pointe et je transformerai le monde. Archimède 287 av. J.-C. - 212 av. J.-C. mathématicien grec, physicien)

La cinématique traite de la façon dont les choses bougent. C'est une étude de la géométrie du mouvement qui implique la détermination de la position, du déplacement, de la vitesse, de la vélocité et de l'accélération.

Cette étude est effectuée sans tenir compte du système de force agissant sur un actionneur.

L'actionneur est un dispositif mécanique permettant de déplacer ou de contrôler un mécanisme ou un système.

Par conséquent, les quantités de base en cinématique sont l'espace et le temps tels que définis en statique.

La cinématique décrit le mouvement d'un objet dans l'espace en tenant compte de la dépendance temporelle.

Le mouvement est décrit par trois grandeurs cinématiques :

Le vecteur de position donne la position d'un point particulier dans l'espace à l'instant.

Le taux de changement de temps du vecteur de position décrit la vitesse du point.

Accélération - le taux de changement de la vitesse dans le temps

Toutes les grandeurs - position, vitesse et accélération sont des vecteurs qui peuvent être caractérisés par rapport à :

Changement d'une grandeur scalaire - mouvement uniforme
Mouvement uniformément accéléré
Mouvement accéléré non uniformément
Mouvement harmonique

Caractère de la trajectoire - 3D (mouvement dans l'espace)
2D (mouvement planaire)

Le type de trajectoire peut être spécifié comme suit : Mouvement rectiligne
Rotation
Mouvement planaire universel
Mouvement sphérique
Mouvement spatial universel
Mouvement complexe

L'ensemble des coordonnées indépendantes dans l'espace décrit la position d'un corps en temps fonction définit donc le mouvement d'un corps.

Le nombre de coordonnées indépendantes correspond au degré de liberté de l'objet ou de l'ensemble de corps couplés et s'exprime par la mobilité de l'objet.

Mobilité - le nombre de degrés de liberté possédés par le mécanisme. Le nombre de coordonnées indépendantes (entrées) est nécessaire pour positionner précisément tous les maillons du mécanisme par rapport au référentiel/

Pour le mécanisme plan : système de j

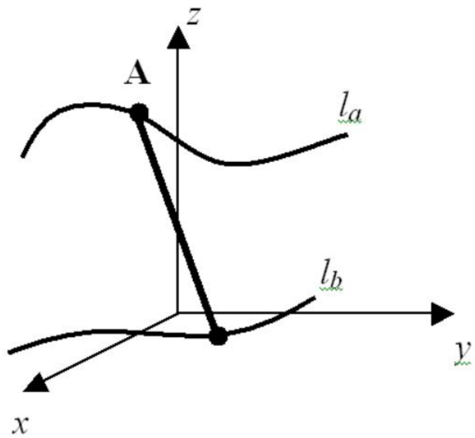
Pour le mécanisme spatial : coordonnées. ∑ DDL je (3 n −)1 = − − ∑ DDL je (6 n)1

Schéma cinématique - est une esquisse "dépouillée" du mécanisme (forme de squelette où seulement les dimensions qui influencent le mouvement du mécanisme sont indiquées).

Particule - est un corps modèle avec des dimensions physiques très petites/négligeables par rapport au rayon de courbure de sa trajectoire. La particule peut avoir une masse associée qui ne joue pas de rôle dans l'analyse cinématique.

Comment trouver le degré de liberté ?

1. Considérez une ligne sans contrainte se déplaçant dans l'espace



La condition non pénétrante entre les points UN B

$\overline{AB}$ = const. = l

nombre de degrés de liberté pour une droite en 3D :

deux points ⟹ 2*3 = 6 DOF

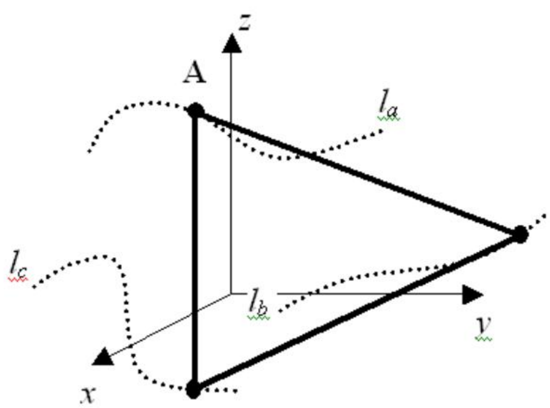
condition non pénétrante : $\overline{AB}$ = l

Ainsi i = 6 −1 = 5 DDL

Conclusion : Un lien libre AB possède cinq degrés de liberté lorsqu'il se déplace dans l'espace.

2. Considérez un corps sans contrainte dans l'espace

Combien de points décriront la position d'un corps ?



Trois points : 3*3 = 9 DOF

Condition non pénétrante (suppose un corps rigide) : $\overline{AB}$ = const. ; $\overline{AC}$ = const. ; $\overline{BC}$ = const.

donc m = 3

et 6 je = 3*3 − 3 = DOF

Conclusion : Un corps solide libre a six degrés de liberté lorsqu'il se déplace dans l'espace.

Pour pouvoir évaluer le DOF, le schéma cinématique du mécanisme doit être créé.

Les diagrammes doivent être dessinés à une échelle proportionnelle au mécanisme réel dans la position donnée.

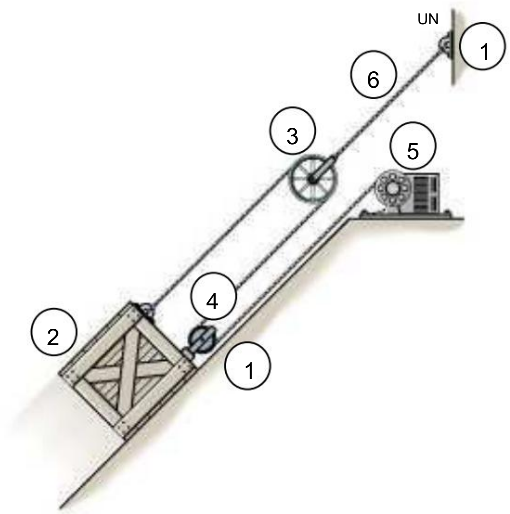
La convention est de numéroter les liens en commençant par le cadre de référence comme numéro un tandis que les articulations doivent être en lettres.

La stratégie adoptée doit consister à repérer sur l'ensemble réel des organes : le bâti, l'actionneur, et toutes les autres liaisons toutes les

articulations les points d'intérêt et tracer le schéma cinématique selon la convention.

Une fois que nous avons évalué la mobilité (degrés de liberté), nous pouvons identifier l'ensemble correspondant de coordonnées indépendantes (paramètres) et commencer l'analyse cinématique du mécanisme

en suivant la sous-tâche : a) définir
le référentiel (espace de base dans lequel le mouvement sera décrit) b) définir la position
d'un point/particule par rapport au référentiel c) décrire le type de mouvement
(contraint ou sans contrainte) d) écrire les conditions non pénétrantes
e) définir les coordonnées indépendantes f)
trouver la vitesse et l'accélération



1 Fondation

2 Caisse

3 Poulie

4 Poulie

5 Moteur/actionneur

6 Lien

Analyse conjointe : A ….

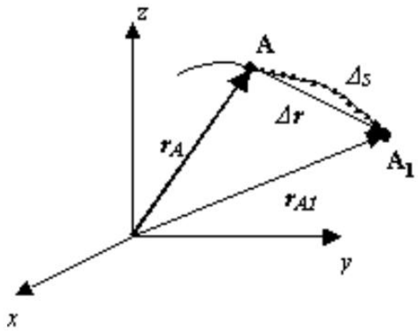
épingle …. 2 degrés de liberté

je = 3(6 1) (5 2 3 1)

L'analyse cinématique de l'ensemble des corps connectés peut être effectuée si nous pouvions décrire le mouvement de chaque segment/corps, puis identifier les grandeurs cinématiques au point d'intérêt dans la position ou le temps requis.

Commençons donc par la cinématique d'une particule qui est représentée sur le diagramme par un point.

2 CINEMATIQUE D'UNE PARTICULE



Le vecteur position rA décrit la position d'une particule/point A, par rapport au référentiel (CS x,y,z).

Le caractère d'un vecteur de position dépend du système de coordonnées arbitraire

A l'instant le point A a une position t)(tf)(rA
= r =

pendant l'intervalle de Δt le point se déplace vers un nouveau temps position A1 pouvant être décrite par un vecteur position rA1

$$r_{A1} = r_{UN} + \Delta r$$

où : Δr ....représente l'incrément du vecteur de position dans l'intervalle de temps

Δs …représente l'incrément de la trajectoire dans l'intervalle de temps

La distance représente la mesure de la position instantanée du point par rapport à l'origine.

La trajectoire/chemin du point particulier est le lieu de toutes les positions instantanées de ce point.

Le vecteur unitaire de la trajectoire :

τ …vecteur unitaire dans la direction tangente
$$\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{\text{dès}}$$

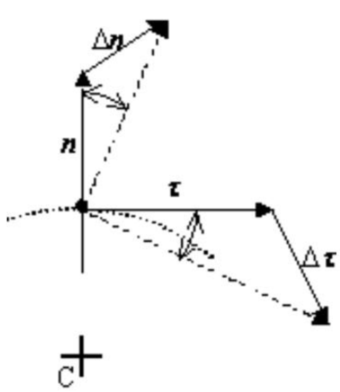
alors

$$\tau = \frac{d}{\text{dès}}(xyzjkijk) = + + \frac{dx}{\text{dès}} \frac{\text{mourir}}{\text{dès}} \frac{dz}{\text{dès}}$$

où $\frac{dx}{\text{dès}} = \cos\alpha_t$; $\frac{\text{mourir}}{\text{dès}} = \cos\beta_t$; $\frac{dz}{\text{dès}} = \cos\gamma_t$

sont les cosinus directionnels de la tangente à la trajectoire, et les angles αt, βt, γt sont les angles entre les axes x, y, z et le vecteur tangent τ

n …un vecteur unitaire dans la direction normale à la trajectoire a une orientation positive vers le centre de la courbure de la trajectoire



$$n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta} = \frac{d\tau}{d}$$

en tenant compte du rayon de courbure de la trajectoire R alors

ds R d.= et d $= \frac{\text{dès}}{R}$

ainsi $n = \frac{d\tau}{\frac{ds}{R}} = R.\frac{d\tau}{ds}$. Remplacement de τ on a

$$jn = R\frac{d^2r}{ds^2} = R\frac{dx^2}{\text{dès}^2} je \; R\frac{\text{mourir}^2}{\text{dès}^2} + R\frac{dz^2}{\text{dès}^2} k$$

où: $R\frac{dx^2}{ds^2} = \text{parce que}\,\alpha_n$; $R\frac{\text{mourir}^2}{\text{dès}^2} = \text{parce que}\,\beta_n$; $R\frac{dz^2}{ds^2} = \text{parce que}\,\gamma_n$ sont les cosinus directionnels de normale à la trajectoire, et αn ; βn; γn sont les angles entre les axes x, y, z et la normale

En cas de mouvement 3D, la trajectoire est une courbe 3D, donc le troisième vecteur unitaire dans la direction bi-normale doit être défini :

b … vecteur unitaire dans la direction bi-normale à la trajectoire est orienté d'une manière qui la direction positive du vecteur bi-normal se forme avec le système perpendiculaire orienté vers la droite normal et tangent.

$$b = \tau \times n$$

2.1 VITESSE

Est le taux de changement de temps du vecteur positionnel.

La vitesse moyenne de changement est définie comme $v_{\text{avril}} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$

Notre intérêt est de trouver une vitesse instantanée, qui représente le cas limite de la vitesse moyenne. La limite de temps pour le calcul de la vitesse instantanée approche de zéro. Δ

La vitesse instantanée est définie par : $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = r$

Quelle est la direction de la vitesse instantanée ?

Le bon sens ou plutôt l'intuition suggère que la vitesse a la direction tangente à la trajectoire. Prouvons donc mathématiquement cette affirmation :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{dr}{\text{dès}}\frac{\text{dès}}{dt} = \tau\, s = \tau\, v$$

depuis $s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{dès}}{dt} = v$

Ayant un vecteur positionnel défini comme : r = xi + yj + zk

alors la vitesse peut être décrite par ses composantes, puisque :

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(xi + yj + zk) = \frac{dx}{dt} i + \frac{\text{mourir}}{dt} j + \frac{dz}{dt} k = v_x\, i + v_y\, j + v_z\, k$$

où vx, vy, vz sont les composantes de la vitesse dans la direction des axes du repère.

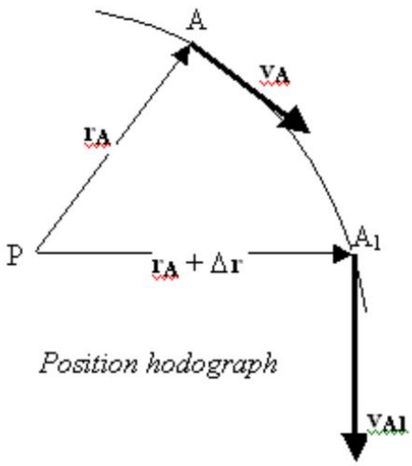
L'amplitude/module de vitesse : $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

avec cosinus directionnels : $\text{parce que}\,\alpha_v = \frac{v_x}{|v|}$; $\text{parce que}\,\beta_v = \frac{v_y}{|v|}$; $\text{parce que}\,\gamma_v = \frac{v_z}{|v|}$

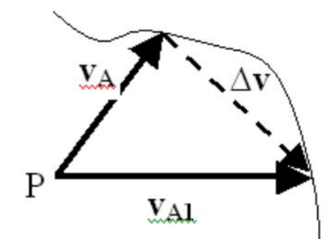
2.2 ACCÉLÉRATION

L'accélération d'un changement de position est le taux de changement de vitesse dans le temps.

Pour dériver l'expression de l'accélération, nous devons dessiner un diagramme vectoriel de vitesse appelé hodographe de vitesse.



Position hodograph



Velocity hodograph

Construire un hodographe basé sur la connaissance du chemin d'un point et de sa vitesse dans une position particulière A et A1 : Prenons un point arbitraire P par lequel les deux vitesses vA et vA1 passeront. Les extrémités de leurs vecteurs créent l' hodographe de courbe souhaité.

Basé sur l'hodographe $v_{A1} = v\ \Delta + v_{UN}$

L' accélération moyenne est donnée par $avr = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

L' accélération instantanée est donnée comme la valeur limite de l'accélération moyenne pour l'intervalle de temps $\Delta \to t\ 0$

$$un = \lim_{\to t\, 0} \frac{\Delta vv}{\Delta t} = = \frac{d}{dt} = _{\text{réalité virtuelle}}$$

La direction de l'accélération peut être trouvée à partir de $un = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau\ v) \ \frac{d\tau}{dt} v + \tau \frac{dv}{dt}$

Ainsi $un = \frac{d\tau}{dt}\frac{ds}{\text{dès}} v + \tau \frac{jj\,v}{dt} = \frac{\tau}{\text{dès}}\frac{\text{dès}}{dt} v + \tau \frac{jj\,v}{dt} 2 = \frac{\tau}{\text{dès}} + v \quad \tau \frac{dv}{dt}$

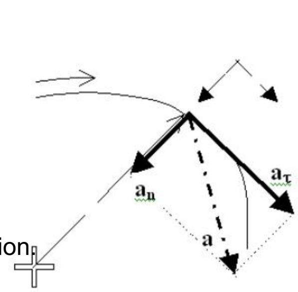
Puisque la direction de la normale est donnée par $n = R.\frac{d\tau}{\text{dès}}$ alors on peut substituer $\frac{d\tau}{\text{dès}} \frac{n}{\rho} =$ où

ρ représente le rayon de courbure à l'instant. Donc:

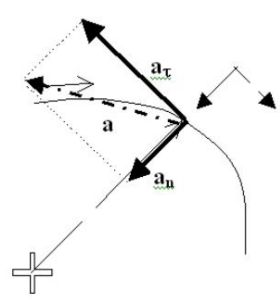
$$une = n\frac{v^2}{\rho} + \tau \frac{dv}{=n} \quad dt \frac{1}{\rho} \quad s^2 + \tau \quad s = un_n + un_t$$

Où $un_n e = n \frac{v^2}{\rho}$ est le accélération dans la direction normale, et

$a_t = \tau \quad s$ est la composante tangentielle de l'accélération



Accelerated motion



Decelerated motion

La direction de l'accélération normale est toujours orientée vers le centre de courbure instantanée de la trajectoire. La composante tangente de l'accélération capture le changement de grandeur d'une vitesse tandis que la composante normale capture le changement de direction d'une vitesse.

L'accélération résultante forme un angle β avec la direction normale : bronzer $\beta = \frac{|un_t|}{|un_n|}$

Ainsi l'accélération exprimée dans le repère rectangulaire aurait la forme :

$$un = \frac{jj\,v}{dt} = \frac{}{dt}\left(je_x v + v_y\, jk_z\right) = je_x une + une_y jk + une_z$$

$$un = \frac{d}{dt}\left(je + + = + + xyz\right) jkijk\ xyz$$

et la grandeur de l'accélération : $|un| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

L'orientation de l'accélération finale est donnée par les cosinus directionnels :

$$\text{parce que}\ \alpha_{un} = \frac{un_x}{|un|};\quad \text{parce que}\ \beta_{un} = \frac{un_y}{|un|};\quad \text{parce que}\ \gamma_{un} = \frac{un_z}{|un|}$$

et en même temps $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

La description précise du mouvement d'une particule est donnée par la fonction capturant toute la cinématique quantités f (,, , ,t) = 0 après un tn

2.2.1 Classification du mouvement

Considérez le mouvement de la particule le long de la ligne droite (dans la direction de l'axe x).

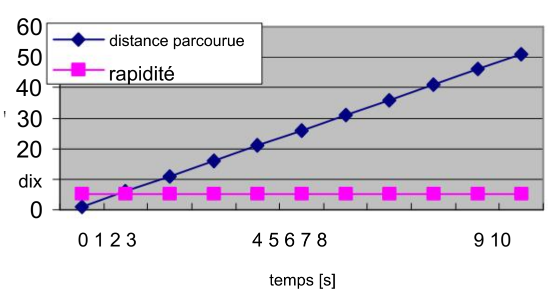
La composante tangentielle de l'accélération capture le changement d'amplitude de la vitesse, elle peut donc être utilisé pour distinguer le mouvement comme:

Mouvement uniforme

Description mathématique : = 0 donc un_t = = 0 à $\frac{DV}{dt}$ cela implique v = const.

Dans le cas où la tangente prend la direction de l'axe x alors $v_x = const$ · et l'équation $v_x = \frac{dx}{dt}$

représente l'équation différentielle simple résolue par séparation de variables $v_x \int_0^t dt = \int_{x_0}^{x} dx$, donnant ainsi la solution $x = x_0 + v_x t$



Mouvement uniformément accéléré/décéléré

Description mathématique : $a_t = const.$

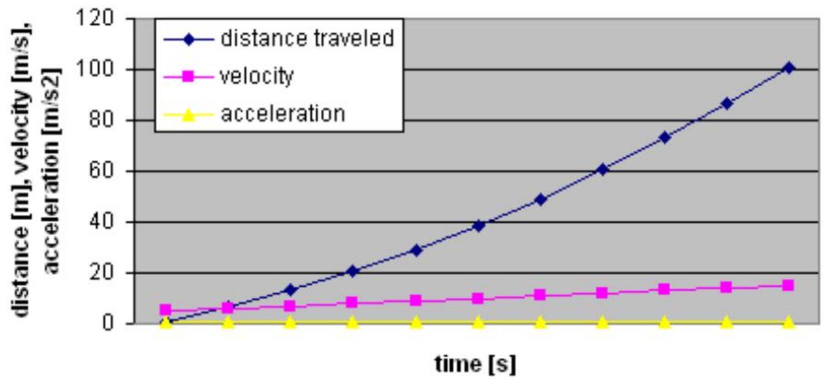
Dans le cas où la tangente prend la direction de l'axe x alors une $_x$ = const. et $un_x = \frac{DV_x}{dt}$ ainsi

hache $\int_0^t$ dt dv $\int_{v_0}^{v}$ = $_x$ conduisant à une solution vy $_x$ ta = 0 + $_x$

en même temps vx = $\frac{dx}{dt}$ donc ( ) v dtta $\int_0^t$ dx + 0 $_x$ = $\int_{x_0}^{x}$ qui donne la solution :

$$x = x_0 + tv_0 + ta \frac{1}{2}{}_x{}^2$$

La solution aboutit à une équation de trajectoire du point exprimée en fonction du temps.



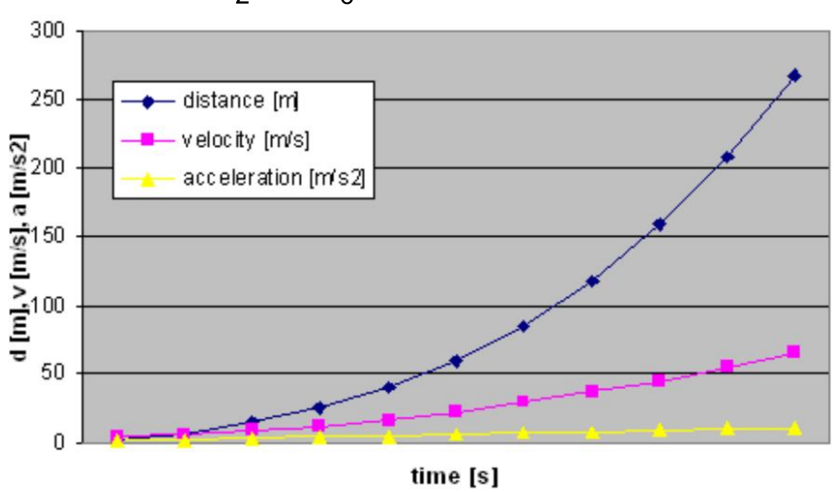
Mouvement accéléré non uniformément

Description mathématique : a_t = a $_x$ a kt = $_0$ ± (la fonction peut être définie différemment)

Donc $a_x \neq$ const . = $\frac{DV_x}{dt}$ donc ($\int_0^t$ un $_0$ ± kt dt) dv = $\int_{v_0}^{v}$ $_x$ avec solution

vv $_x$ ta kt = + ± 0 0 $\frac{1}{2}$ ^{2} depuis vx = $\frac{dx}{dt}$ alors $\int_0^t$ v $_0$ ta + kt $_0$ ± dt dx $\frac{1}{2}$ ^{2} = $\int_{x_0}^{x}$ qui donne le

équation de trajectoire $x = x_0 + tv_0 + \frac{1}{2} ta_0^2 \pm \frac{1}{6} kt^3$



Dr Ing. Zdenka Sant

10/2009

Mouvement avec d'autres changements de grandeurs cinématiques

Dans ce cas l'accélération est donnée en fonction d'autres grandeurs a = (,, tvrf)

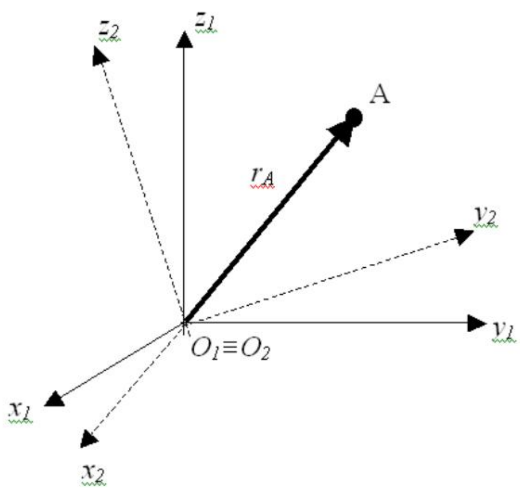
2.3 TRANSFORMATION ORTHOGONALE

Vous pouvez voir très clairement que la vitesse et l'accélération dépendent directement du vecteur positionnel. La forme du vecteur positionnel variera selon le type de système de coordonnées. Ainsi en repère rectangulaire (x, y,z) les grandeurs cinématiques sous forme vectorielle sont :

r = rx i + ry j + rzk (vecteur positionnel) j k)

je = $_x$v + v $_y$+ jk= v$_z$dt $\frac{d}{}$ (rje + r$_x$r$_y$ $_z$ (rapidité)

y = une$_x$je+ une + une = une j zk $\frac{d}{dt}$ ($_x$ je + + $_y$vvj zk = $\frac{d^2}{dt^2}$ ( ) rx je ry j rzk + + (accélération)



Soit le point A attaché au repère mobile , y ,z avec son origine x 2 2 2 coïncidant avec un système de coordonnées fixe x , y , z ; 1 1 1 O1 ≡ O2

La forme vectorielle d'une position du point A dans CS1 :

r 1 11 11 1jk1 UN z

et dans CS2 : r 2 22 2 2 = r + r + r j k 2

sous forme matricielle : $r_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ et $r_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$;

ou = À r$_1$ [xyz 1 1] et = À r$_2$ [xyz 2 2]

Pour exprimer le vecteur positionnel r 2 dans CS1, le vecteur doit être transformé. Ce processus est appelée transformation orthogonale des quantités vectorielles

2.3.1 Transformation orthogonale des grandeurs vectorielles

L'opération mathématique utilise la forme matricielle d'un vecteur.

Le CS1 est associé à un cadre/espace de base qui sert de cadre de référence fixe qui ne ne bouge pas.

Le point mobile A est relié au CS2, qui se déplace par rapport au référentiel.

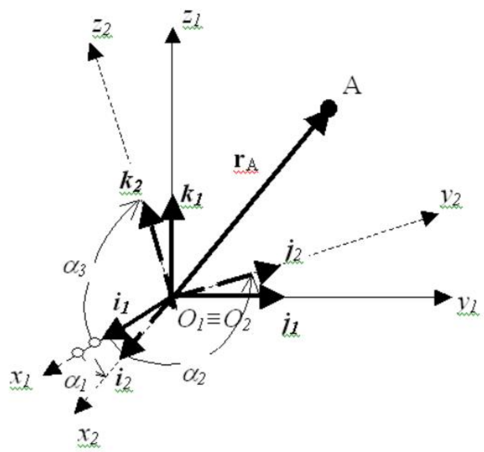
Ainsi la position du point A dans CS1 est

r 1 11 1 1 k1 = x + y + z j et en CS2

A r 2 22 22 2 = x + y + z j k 2

Dr Ing. Zdenka Sant

10/2009



Comment interpréter le vecteur positionnel r_2^{UN} dans CS1 ?

La tâche consiste à projeter le vecteur r_2^A dans CS1.

Projetant ainsi le vecteur r_2^{UN} dans la direction x1 :

$$X_1^{UN} = r_2^{UN}\, je = je\,(x_2^{UN}\, je + k\ \ je\ \ z^{UN})\ _1$$

où:

$$\text{parce que}\,\alpha_1 = \frac{je}{je_2} = je_1 \cos_2 \alpha_1$$

$$\text{parce que}\,\alpha_2 = \frac{je_1}{j_2} = j_1 \cos_2 \alpha_2$$

$$\text{parce que}\,\alpha_3 = \frac{je_1}{k_2} = k_1 \cos_2 \alpha_3$$

Ainsi $= x_{22\,1\,22\,1}^{UN} + y_{ji}^{UN} + z^{UN}\, ji\ x^{UN}_{2\,2\,1\,222\,1\,222\,2}\ A\ ki = x\ ii$ parce que $\alpha + y^{UN}\, jj$ parce que $\alpha + z^{UN}_{2\,22\,3}\, kk \cos \alpha$

$$X_1^{Un} = r_2^{Un}\, je = X\, je + y\, j + z\, k^{UN}\, je = X^{UN}\ )_1\ \ _2^{Un} \cos \alpha_1 + y_2^{Un} \cos \alpha_2 + z_2^{UN}\ \text{parce que}\ \alpha_3$$

$$y_1^{UN} = r_2^{UN}\, j = X\, je + y\, j + z\, k^{UN}\, j = X^{UN}\ )_1\ \ _2^{Un} \cos \beta_1 + y_2^{UN}\ \text{parce que}\ \beta_2 + z_2^{UN}\ \text{parce que}\ \beta_3$$

$$z_1^{Un} = r_2^{UN}\, k = X\, je + y\, j + z\, k^{UN}\, k = X^{UN}\ )_1\ \ _2^{Un} \cos \gamma_1 + y_2^{Un} \cos \gamma_2 + z_2^{UN}\ \text{parce que}\ \gamma_3$$

la réécriture de ces trois équations sous forme matricielle donnera

$$\begin{bmatrix} x_1^{UN} \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{parce que}\,\alpha_1 & \text{parce que}\,\alpha_2 & \text{parce que}\,\alpha_3 \\ \text{parce que}\,\beta_1 & \text{parce que}\,\beta_2 & \text{parce que}\,\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \text{parce que}\,\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^{UN} \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad r_1^{UN} = C_{21}\, r_2^{UN}$$

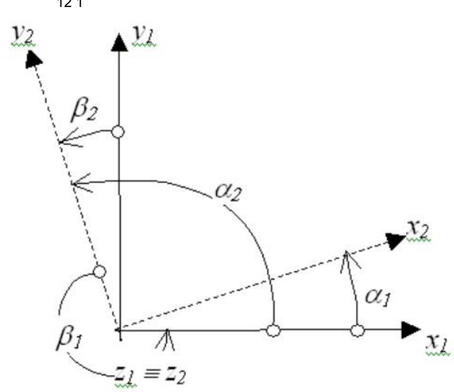
où $$C_{21} = \begin{bmatrix} \text{parce que}\,\alpha_1 & \text{parce que}\,\alpha_2 & \text{parce que}\,\alpha_3 \\ \text{parce que}\,\beta_1 & \text{parce que}\,\beta_2 & \text{parce que}\,\beta_3 \\ \text{parce que}\,\gamma_1 & \text{parce que}\,\gamma_2 & \text{parce que}\,\gamma_3 \end{bmatrix}$$

Analogiquement la transformation de CS1 en CS2 donne : $r_2^{UN} = C_{12}\, r_1^{UN}$

où

$$C_{12} = C_{21}^{J} = \begin{bmatrix} \text{parce que}\,\alpha_1 & \text{parce que}\,\beta_1 & \text{parce que}\,\gamma_1 \\ \text{parce que}\,\alpha_2 & \text{parce que}\,\beta_2 & \text{parce que}\,\gamma_2 \\ \text{parce que}\,\alpha_3 & \text{parce que}\,\beta_3 & \text{parce que}\,\gamma_3 \end{bmatrix}$$

et $C_{21}\, C_{21}^{J} = je$



Le mouvement planaire est un cas particulier lorsqu'à tout moment du mouvement $z_1 \equiv z_2$

$\alpha_1 =$; $\alpha_2 = \pm\frac{}{2}\pi$; $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$

$\beta_1 = \pm\frac{3}{2}\pi$; $\beta_2 =$; $\beta_3 = \frac{\pi}{2}$

$\gamma_1 = \frac{\pi}{;2}$ $\gamma_2 = \frac{\pi}{;2}$ $\gamma_3 = 0$

parce que − péché 0

et C21 = péché parce que 0 ≡ parce que − péché péché parce que

0 0 1

Une fois que le vecteur positionnel est exprimé sous forme matricielle et que la transformation orthogonale est utilisée, la vitesse et l'accélération peuvent être exprimées sous la même forme.

2.3.2 Vitesse sous forme matricielle utilisant la transformation orthogonale

La vitesse est la première dérivée du vecteur positionnel

Un vr = 1 = $\frac{d}{dt}$ (C r C r) = C r Un 221 + 221 UN

Si le point A ne change pas de position par rapport à l'origine CS2 alors r2 UN =const. et donc $r_2^{UN} = 0$ et $v_1^{Un} = C_{21} r_2^{UN}$

2.3.3 Accélération sous forme matricielle utilisant la transformation orthogonale

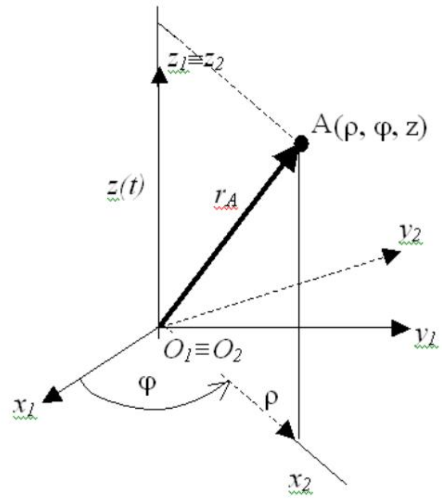
L'accélération est la dérivée première de la vitesse et une dérivée seconde du vecteur positionnel, donc

avr = C r C r C r UNE C = r 2 21 2 21 2 21 2 + + + UN UN

Si le point A ne change pas de position par rapport à l'origine CS2 alors r2 UN =const. et donc $r_2^{UN} = 0$ et $r_2^{UN} = 0$ donnant ainsi $une_1^{UN} = C_{21} r_2^{UN}$

2.4 PARTICULE DANS LE SYSTÈME DE COORDONNÉES CYLINDRIQUES - r, ,z

2.4.1 Le vecteur position



dans CS2 $r^{UN}_{2\,2\,2} = \rho i + z k$

Sous forme matricielle $r^{UN}_2 = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$

Ainsi $r^{Un}_1 = C_{21}\, r^{UN}_2$ et depuis

$$C_{21} = \begin{bmatrix} \text{parce que} & -\text{péché} & 0 \\ \text{péché} & \text{parce que} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r^{Un}_1 = C_{21}\, r^{UN}_2 = \begin{bmatrix} \text{parce que} & -\text{péché} & 0 \\ \text{péché} & \text{parce que} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\ \text{parce que} \\ \rho\ \text{péché} \\ z_2 \end{bmatrix}$$

sous forme vectorielle : $r^{UN}_1 = \rho$ parce que je $_1 + \rho$ péché $j_1 + z\, k_1$

2.4.2 La vitesse

Exprimé sous forme vectorielle $v^{A}_{\text{contre }2} = \frac{jj\, r}{dt} = \frac{}{dt}(\rho\, i k + z\, k) = \rho + \rho$ je $_2 + z\, k_2\ 2\ 2\ z\ 2$

où le vecteur unitaire k2 reste constant (la grandeur ainsi que la direction ne changent pas avec temps), donc $k_2 = 0$

Le vecteur unitaire i2 tourne dans le plan x, y autour de l'origine donc la vitesse est donnée par

$$v^{Un}_2 = \frac{d\rho}{dt}\,\text{je}_2 + \rho\frac{d\,\text{je}_2}{dt} + \frac{dz}{dt}k_2 \quad \text{où}$$

$\frac{d\,\text{je}_2}{dt} = \frac{d}{dt} \times = \times$ je $_2$ ω je $_z$ $_2$ j_2 ω représente le vecteur transverse perpendiculaire au vecteur unitaire i2.

Ainsi la vitesse 2 $\quad v^{Un} = \frac{d\rho}{dt}$ je $+ 2\,\rho\frac{d}{j}\ 2\ 2 + \frac{dz}{dt} k$ je $\rho + 2\,\rho\ j_{2\,2} + z\ k$

Où $\rho\ dt_2 = j v_\rho$ représente la composante radiale de la

ρ vitesse $_2$ $_t$ = jv représente la composante transversale de la vitesse

$z_2 = k v_z$ représente la composante z de la vitesse

sous forme matricielle : la vitesse de transposition dans CS2 $v^{J}_2 = [\rho\quad \rho\quad z]$

dans CS1 $v^{U}_1 = C_{21} v^{UN}_2 = \begin{bmatrix} \text{parce que} & -\text{péché} & 0 \\ \text{péché} & \text{parce que} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\ \text{parce que} - \rho\omega\ \text{péché} \\ \rho\ \text{péché} + \rho\omega\ \text{parce que} \\ z \end{bmatrix}$

2.4.3 L'accélération

sous forme vectorielle $\overset{A}{un\,2} = = \frac{jj\,v}{dt\,dt}$ — (ρ iik= ρ 2 2 dt) $\frac{d}{}$ (ρ je 2 ρ j 2 2 + z k)

$\overset{UN}{un\,2}$ ρ + ii =2 2 ρ + ρ j + ρ j + ρ j 2 2 + z k

$\overset{UN}{un\,2}$ = ρ + je 2 ρ ω j + ρ ω j + ρα j + ρ ω j 2 + z k 2

où: $\frac{dj_2}{dt}$ = ω j z — 2 −= je 2 ω

Donnant ainsi une accélération 2 UN = ρ + je 2 une 2 ρ j + ρ j 2 ρ ω² 2 2 + k

$\overset{UN}{un\,2}$ = −(ρ ρ ²) je + (ρ + 2ρ) j 2 2 + k

où (ρ) = une ρ² ρ représente l'accélération radiale

(ρ 2 + ρ) = un ρ représente l'accélération transversale

z = un z représente l'accélération dans la direction de l'axe z

sous forme matricielle :

$\overset{À}{un\,2}$ = − ρ ρ ² ρ + 2ρ z

un ∈ un 1 21 2 UN = parce que − péché 0 ρ − ρ²

péché parce que 0 ρ + 2 ρ

0 0 1 z

Dans cette présentation, nous avons associé l'angle à la coordonnée vectorielle = = k 1 k 2

angulaire, donc la vitesse = = k 1 ω k 1 ω

angulaire et l'accélération angulaire = = k 1 ω k 1 α

2.4.4 Cas particuliers

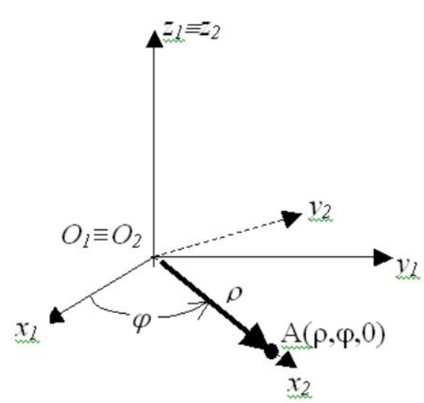
a) z=0 , ρ = const. , (t)

La particule (le point A) est restreinte au seul plan x,y et se déplace de manière à ce que la trajectoire du le point A est un cercle dans le plan x,y.

La vitesse et l'accélération exprimées en coordonnées générales dans le paragraphe précédent sont :

2 UN 2 je ρ + v ρ j 2 2 + z k

$\overset{UN}{un\,2}$ = −(ρ ρ ²) je + (2 2 ρ ρ) j 2 + k 2



Ainsi pour notre cas particulier dans CS2 : v 2 UN = ρ j 2

dans CS1 : v 1 UN = − ρ péché je + ρ parce que j 1 et accélération dans CS2 : $\text{UN}_{un\,2} = -\rho$ ^{2}je + ρ j 2

où $\text{UN}_{un\,2\,n} = -\rho$ ^{2} je 2 représente l'accélération normale toujours orientée vers le centre de courbure de la trajectoire

$\text{UN}_{un\,2T} = \rho$ j 2 représente la composante tangentielle d'une accélération

dans CS1 : $\text{UN}_{un\,1} = -(\rho$ 2 cos - ρ péché)je + (ρ parce que - ρ ^{2} péché)j 1

où - ρ ^{2} parce que = a_{nx} est la composante x de l'accélération normale dans CS1

- ρ péché = $un_{T\,x}$ est la composante x de l'accélération tangentielle dans CS1

ρ parce que = $un_{T\,y}$ est la composante y de l'accélération tangentielle dans CS1

- ρ ^{2} péché = a est la composante y de l'accélération normale dans CS1

b) z=0 , ρ(t), (t)

La particule (point) se déplace dans le plan x,y et la description du problème utilise les coordonnées polaires (ρ,)

2.5 TRAJECTOIRE DES PARTICULES

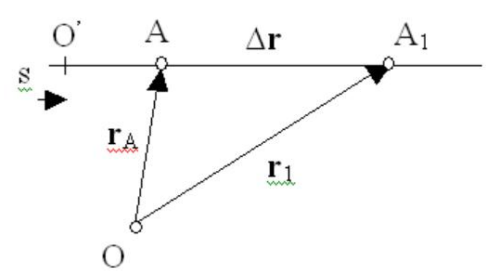
Le mouvement pourrait être classé en ce qui concerne la trajectoire comme :

2.5.1 Mouvement rectiligne

La position d'un point est décrite en fonction des coordonnées curvilignes s : r = r(s)

où $\frac{dr}{dès} = T$ et $T^2 = 1$

La condition nécessaire pour un mouvement rectiligne est donné par : τ = const.



La vitesse est donnée par :

$$= \frac{d\,rrv}{dt} = \frac{d}{dt} = \frac{dès}{dès} T \; s \frac{dr}{dès} \frac{dès}{dt}$$

et accélération : $un = = \frac{dv}{(\,dt} \frac{d}{dt} \; T \; s) \quad T \; s$

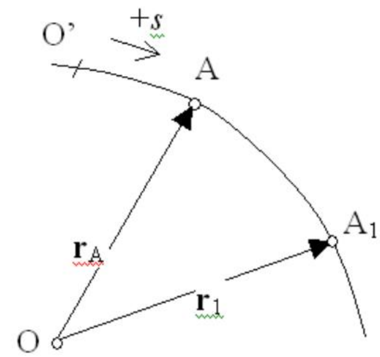
Si: s = const. donc 0 s = …mouvement rectiligne uniforme

s ≠ const. ainsi 0 s ≠ …..mouvement rectiligne accéléré

pour s = const puis mouvement rectiligne uniformément accéléré

pour s ≠ const puis mouvement rectiligne non uniformément accéléré

2.5.2 Mouvement curviligne



En cas de mouvement curviligne r = r(s) et s = s(t) et la vitesse est exprimée comme suit :

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} = \tau \frac{dès}{dès} s \frac{dr}{dès} \frac{dès}{dt}$$

Où $\tau^2 = 1$ ainsi que $\tau \neq$ const. puisque le vecteur unitaire change de direction

L'accélération vaut :

$$un = \frac{jj\,v}{(dt\,dt} \quad s\,\tau\,2n)\,s = s\,\tau \frac{1}{\rho} = \tau a a \quad n$$

Au cas où:

un) s = const. alors 0 s =

donc $une = n\frac{1}{\rho}s^2 = une_n$ et le point se déplace le long de la trajectoire circulaire avec uniforme rapidité .

b) s ≠ const · alors 0 s ≠ et le mouvement est accéléré de manière non uniforme ou

s = const. où $a = \tau s + n\frac{s^2}{\rho}$ mouvement est uniformément accéléré

2.6 MOUVEMENT HARMONIQUE

Le mouvement d'un point (particule) qui est décrit par l'équation x A = sin(ω t + représente)

où	UN	l'amplitude (écart max. par rapport à la position neutre) [m] représente la
	ω	fréquence angulaire [s-1] représente le
		déphasage [rad] représente la
	X	distance instantanée de la particule

s'appelle le mouvement harmonique

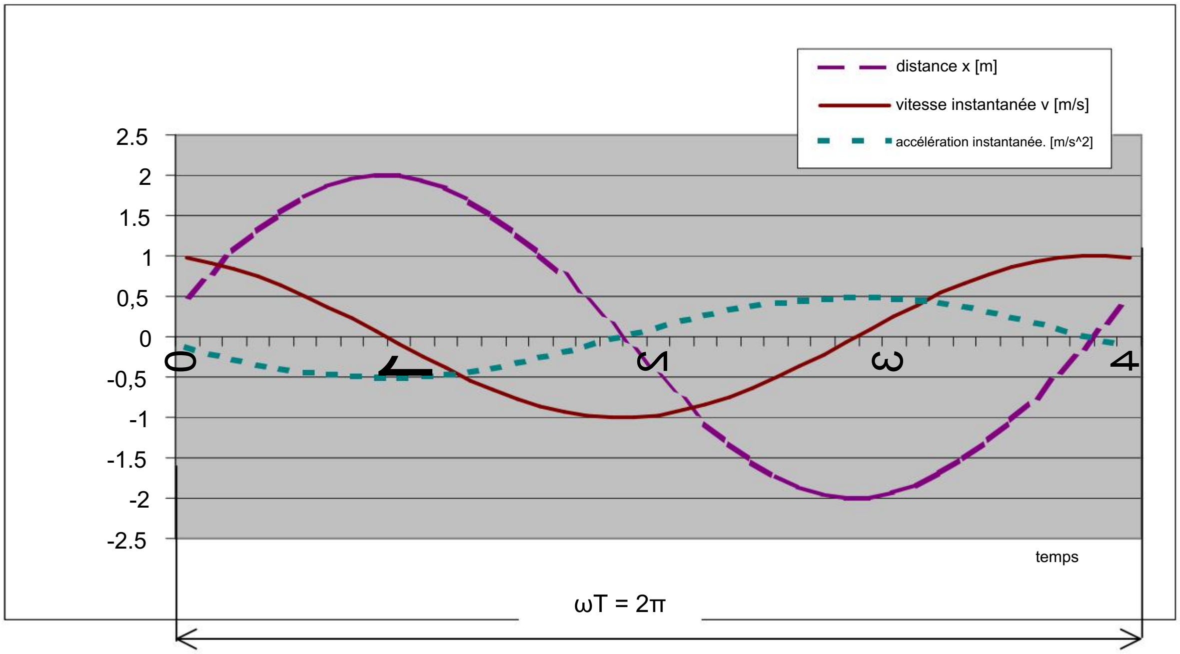
La vitesse est dans ce cas donnée par : $v = \frac{dx}{dt} = UN\,\omega\,car(\omega t +)$ et

L'accélération est donnée par : $un = \frac{dv}{dt} = UN\,\omega^2\,péché(\omega t +)$

Pour la condition initiale : t = 0, x = x0, v = v0, a = a0 les grandeurs cinématiques sont :

x0 = Asin ; v0 = A ω parce que ; $un_0 = -Un\omega^2$ péché

L'interprétation graphique du mouvement harmonique peut être représentée comme la rectification de tous grandeurs cinématiques dans le temps



Où T représente la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [s] donc fréquence $F = \frac{1}{J}$ [Hz]

L'amplitude du mouvement peut être exprimée à partir de x_0 = Asin et v_0 = A ω parce que

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$ et $$\text{bronzer} = \frac{\text{péché}}{\text{parce que}} = \frac{x_0 \omega}{v_0}$$

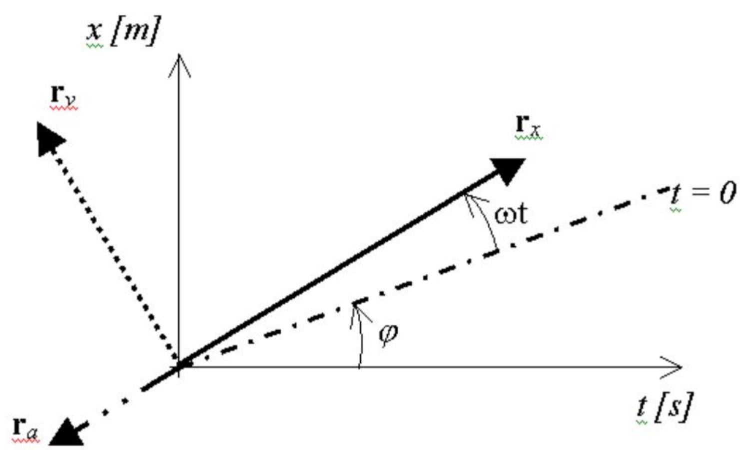
Ainsi les grandeurs cinématiques peuvent être exprimées en fonction du vecteur tournant rx, rv, ra

Où

|rx| = A ;

|rv| = Aω ;

|ra| = $A\omega^2$



2.6.1 Composition des mouvements harmoniques dans le même sens

a) Si ω1 = ω2 = … = ωn = ω alors

$$x_1 = A_1 \text{ péché}(\omega t + \varphi_1) \quad A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}$$

$$x_2 = A_2 \text{ péché}(\omega t + \varphi_2) \quad A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

.

.

$$x_n = A_n \text{ péché}(\omega t + \varphi_n) \quad A_n e^{i(\omega t + \varphi_n)}$$

Le mouvement résultant est à nouveau un mouvement harmonique décrit comme :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \text{Un}_j \text{ péché}(\omega t + \varphi_j) \quad \sum_{j=1}^{n} \text{Un}_j e^{i(\omega t + \varphi_j)} = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{i\omega t} e^{i\varphi_j} = e^{i\omega t} \sum A_j e^{i\varphi_j} \text{ donc}$$

$$x = A_v e^{i(\omega t + \varphi_v)}$$

en substituant à t = 0 on obtient : x

$$A_v e^{i\varphi_v} =$$

d'où nous obtenons l'amplitude finale et le déphasage

$$\text{Un}_V = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} \text{Un}_j \cos \varphi_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} \text{Un}_j \sin \varphi_j\right)^2}$$

$$\text{et} \quad \varphi_v = \frac{\sum_{j=1}^{n} \text{UN}_j \text{ péché } \varphi_j}{\sum_{j=1}^{n} \text{UN}_j \text{ parce que } \varphi_j}$$

b) Si ω1 ≠ ω2 ≠ .... ≠ ωn alors chaque mouvement est décrit par sa propre équation

$$x_1 = A_1 \text{ péché}(\omega_1 \text{ et } + \varphi_1) = A_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$x_2 = A_2 \text{ péché}(\omega_2 t + \varphi_2) \quad A_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$x_n = A_n \text{ péché}(\omega_n \text{ et } + \varphi_n) = A_n e^{i(\omega_n t + \varphi_n)}$$

et le mouvement final est décrit par l'équation :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \text{Un}_j \text{ péché}(\omega_j t + \varphi_j) \quad \sum_{j=1}^{n} A_j e^{i(\omega_j t + \varphi_j)}$$

Le mouvement final composé de mouvements harmoniques avec des fréquences angulaires différentes n'est pas un mouvement harmonique, puisque l'amplitude résultante n'est pas constante.

Au cas où $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{J}$ et $\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{J}$ et en même temps le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$ est un rationnel nombre le mouvement résultant est dit mouvement périodique.

2.6.2 Composition de deux mouvements harmoniques perpendiculaires

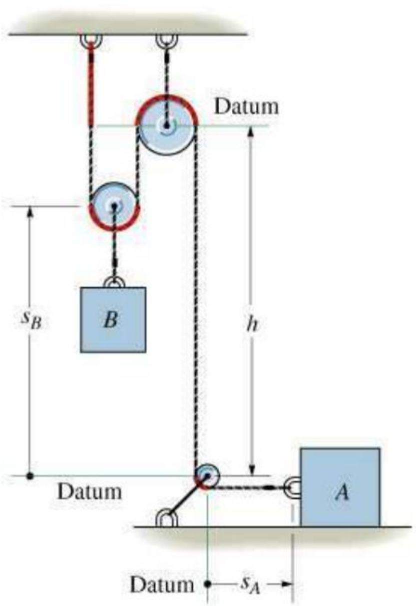
Le mouvement de deux particules se déplaçant dans deux directions perpendiculaires est défini par les équations :

xA= $_1$ péché(ω_1t + = $_1$) eA$_1$ $^{(ti\omega_{11}+\ )}$ et

et ūn $_2$ péché(ω_2 $_2$t + =) eA$_2$ $^{(ti\omega_{22}+\ )}$

Ces équations définissent des courbes dites image de Lissajous.
La solution est assez exigeante et dépasse notre portée.
Les solutions relativement simples existent pour des cas particuliers, lorsque ω1 = ω2 et l'hypothèse A1 = A2 conduisant à l'équation de l'ellipse sur les axes conjugués.

2.7 MOUVEMENT D'UN ENSEMBLE DE PARTICULES



L'ensemble de particules peut être soit un ensemble connecté, soit des particules, soit un nombre de deux ou plusieurs particules non connectées se déplaçant dans le même système de référence.

Ainsi, la relation entre les particules doit être prise en considération. Prenons le cas des particules A et B comme indiqué sur le schéma : les deux particules sont reliées par un câble inextensible porté sur les poulies. Cela impose une condition non pénétrable entre eux :

lshhs$_{UN}$ = + +2($_B$)

La longueur supplémentaire du câble entre la référence supérieure et le plafond ainsi que la portion du câble enserrant les poulies resteront constantes pendant le mouvement ne jouent donc aucun rôle dans la description cinématique.

L'étude de la mobilité de l'ensemble de particules définirait le nombre de particules indépendantes coordonnées qui dans notre cas est i =1

Le chemin d'une particule A n'est pas identique au chemin de la particule B et la relation entre eux doit être décrite en fonction des articulations impliquées. Ainsi, à l'exception de la condition de non-pénétration, le support en A doit être pris en considération ainsi que les supports des poulies et du corps B.

Ayant la condition de base de la longueur inextensible, nous pouvons évaluer la relation entre les vitesses de la particule A et B en tant que dérivée temporelle du l. Ainsi

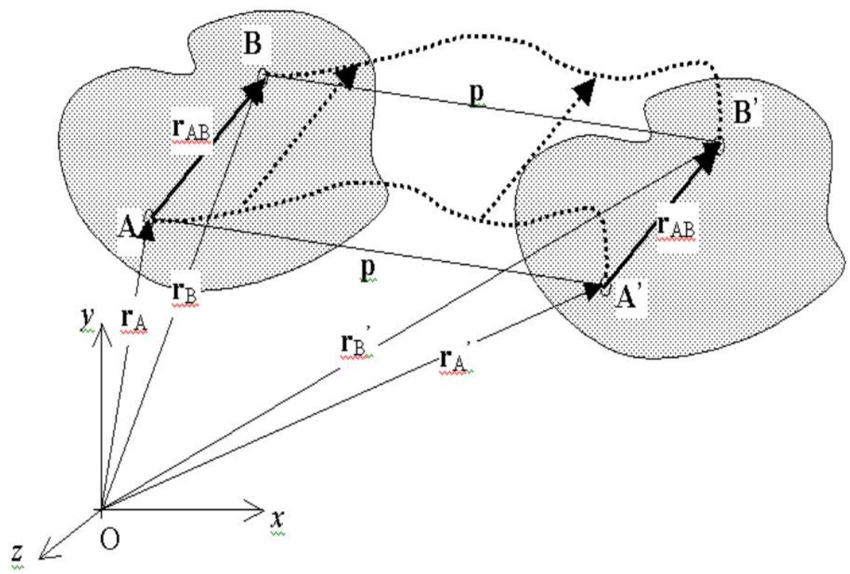
0 2v= + $_{UN}$ $_B$

Alors nous pouvons conclure que pour le mouvement de la particule A dans la direction positive (loin de la référence dans la direction de sA) la particule B se déplacera vers le haut avec une vitesse $v_B = \frac{v_{UN}}{2}$.

3 MOUVEMENT DU CORPS SOLIDE

Comme nous l'avons annoncé précédemment le corps modèle adopté en cinématique est à nouveau indéformable, donc la distance entre deux points A, B sur un corps solide suivra la règle mathématiquement exprimée par : $\overline{AB} = const$.

3.1 MOUVEMENT DE TRANSLATION D'UN CORPS SOLIDE



La position et la trajectoire de deux points A, B sont étudiées.

Si deux points mobiles tirent leur plans en deux parallèles à la trajectoire, donc leurs trajectoires sont des courbes parallèles. Le changement de position du point A vers A' et B vers B' est décrit par des vecteurs p parallèles. Le mouvement d'avance est rectiligne (trait plein) si le vecteur p est une ligne droite et curviligne s'il s'agit d'une courbe (ligne pointillée).

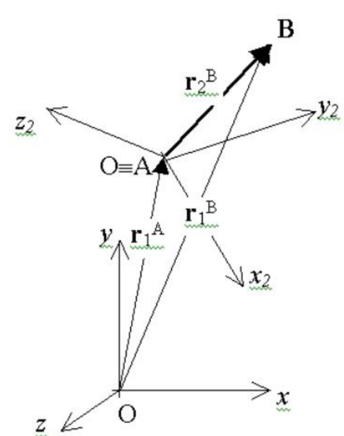
Le changement de position du point A est $r_{UN} = r_A + p$

du point B $r_{B'} = r_B + p$

Ainsi

$$r_{UN} - r = r_{UN} - r_B \quad \text{ou réarrangé} \quad r_{BA} - r = r - r_{BA}$$

En exprimant les vecteurs rB et rB'par rapport au point de référence A/A', nous pouvons prouver la déclaration précédente sur les vecteurs parallèles rBA = rB'A' = const.



3.1.1 Recherche de grandeurs cinématiques

Position

Le point A est le point de référence attaché au corps associé avec CS2 mobile (x2, y2, z2). La position d'un point B est donnée par

$$r_1^B = r_1^{UN} + r_1^{BA}$$

et

$$r_1^{BA} = x_2^{BA} \cos \alpha_1 + y_2^{BA} \text{ parce que } \alpha_2 + z_2^{BA} \text{ parce que } \alpha_3$$

donc la position du point B dans CS1 est

$$x_1^B = x_1^{UN} + x_2^{BA} \text{ parce que } \alpha_1 + y_2^{BA} \cos \alpha_2 + z_2^{BA} \text{ parce que } \alpha_3$$

$$y_1^B = y_1^{UN} + x_2^{BA} \cos \beta_1 + y_2^{BA} \text{ parce que } \beta_2 + z_2^{BA} \cos \beta_3$$

$$z_1^B = z_1^{Un} + x_2^{BA} \cos \gamma_1 + y_2^{BA} \cos \gamma_2 + z_2^{BA} \text{ parce que } \gamma_3$$

ou sous forme matricielle $r_1^B = r_1^{UN} + C_{21} \, r_2^{BA}$

La matrice de transformation C21 contient les cosinus de tous les angles parmi les axes du système de coordonnées. Puisque tous les vecteurs restent des vecteurs parallèles, les angles entre des axes particuliers sont constants. Donc $C_{21} = const$.

Rapidité

Sous forme vectorielle, la vitesse du point B est donnée par :

$$v_1^B = \frac{d r_1^B}{dt} = \frac{d}{dt}(r_1^{UN} + r_1^{BA}) = v_1^{UN} + v_1^{BA} = v_1^{UN} \quad \text{depuis le } r_1^{BA} = \text{const.}$$

Sous forme matricielle : $v_1^B = \dot{r}_1^B = \dot{r}_1^{UN} + \dot{C}_{21} r_2^{BA} + C_{21} \dot{r}_2^{BA}$

et $\dot{C}_{21} = 0$ depuis $C_{21} = const$.

Ainsi la forme matricielle finale est : $v_1^B = \dot{r}_1^B = \dot{r}_1^{UN} = v_1^{UN}$

Accélération

Sous forme vectorielle, l'accélération du point B est donnée par :

$$a_1^B = \frac{d v_1^B}{dt} = \frac{d}{dt}(v_1^{UN} + v_1^{BA}) = a_1^{UN} \quad \text{depuis } v_1^{BA} = 0$$

Sous forme matricielle : $a_1^B = \ddot{r}_1^B = \dot{v}_1^B = \dot{v}_1^{UN} = a_1^{UN}$

3.2 ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE

Si deux points d'un corps solide en mouvement sont fixes alors

$$v_{O1} = v_{O2} = 0$$

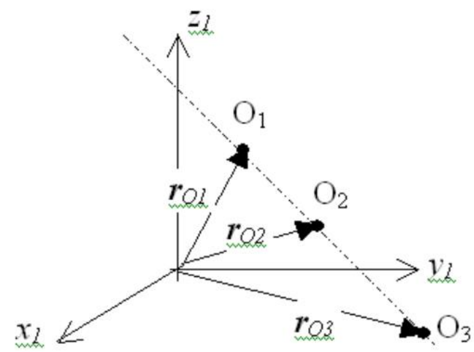
puis le corps solide tourne autour de l'axe qui passe par ces points O1 et O2.

Les vecteurs positionnels décrivent leur position dans CS1 par

$$r_{O1} = \text{const.}, \; r_{O2} = \text{const.}$$

Tout point sur la ligne spécifiée par les points O1 et O2 peut être décrit comme

$$r_{O3} = r + r_{O1\,OO}\,\lambda_{12}$$

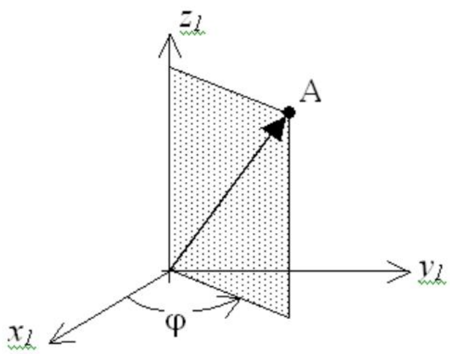


et la vitesse du point O3 est obtenue par la dérivée première de sa position, donc

$$\dot{r}_{O_3} = v_{O_3} = 0$$

Conclusion : Il y a une infinité de points, reposant sur la ligne spécifiée par les points O1 et O2, qui ont une vitesse nulle.

Le lieu de tous les points qui ont une vitesse nulle est appelé axe de rotation.



La trajectoire d'un point A situé dans le plan (x,z) tournant autour de l'axe z, est un cercle de rayon ρ, qui correspond à la projection du vecteur position rA dans le plan x,y .

La position instantanée d'un point A dépend de l'instant angle de rotation = (t)

plus loin on affecte à cette coordonnée angulaire une grandeur vectorielle qui suit la règle de la main droite.

La vitesse angulaire qui décrit le taux de changement de coordonnée angulaire est exprimée comme la valeur moyenne de la vitesse angulaire : $\omega_{moyen} = \frac{\Delta}{\Delta t}$

La vitesse angulaire instantanée est donnée par : $\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta}{\Delta t} = \frac{d}{dt} = \omega$ donc ω = = e

De la même manière, nous pouvons exprimer l'accélération angulaire.

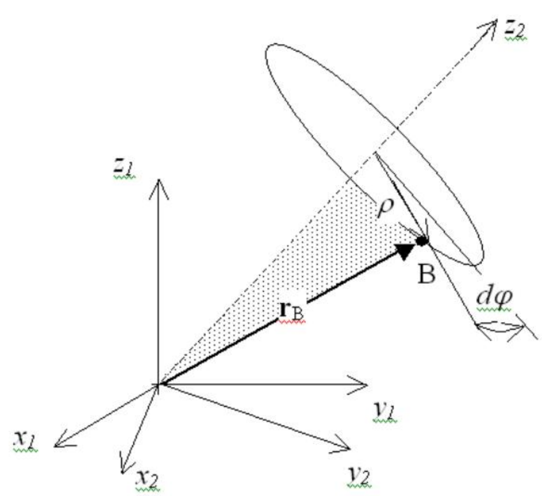
L'accélération moyenne est donnée par : $\alpha_{moyen} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ et

L'accélération instantanée est $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha$

donc α = ω = e

Si le corps solide tourne autour d'un axe fixe, tous les points du corps ont la même vitesse angulaire et la même accélération.

3.2.1 Trouver la vitesse d'un point arbitraire



Le point B est attaché au corps solide en rotation

Alors la position d'un point B dans CS2 est donnée par

$$r^B_2 = x^B_2 i_2 + y^B_2 j_2 + z^B_2 k_2$$

ou par rapport au point O' autour duquel le point B tourne de rayon ρ

$$r_2^B = r + \rho_2^{O'}$$

Le point B se déplace sur la trajectoire circulaire en temps Δt →0 a distance

$$dr = ré \quad \rho = d \quad r_B \sin\beta$$

sous forme vectorielle : $dr = ré \times r_B = d \times \rho$

puisque les vecteurs r et ρ se trouvent dans le même plan et forment avec le vecteur le plan auquel l'incrément de trajectoire dr est orthogonal (perpendiculaire).

Ainsi la vitesse du point B est d

$$v_B = \frac{dr}{dt} = \frac{}{dt} \times r_B = \frac{d}{dt} \times = \times = \rho \times \omega\ r\ \omega\ \rho_B$$

le module de vitesse : $|v_B| = \omega\ r_B \sin\beta = \omega\ \rho$

ou en vecteur à partir de :

$$v_B = \omega \times r_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = i(\omega_y r_z - \omega_z r_y) + j(\omega_z r_x - \omega_x r_z) + k(\omega_x r_y - \omega_y r_x)$$

alors $v_B = iv_x + jv_y + kv_z$ avec modules $|v_B| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

L'orientation de la vitesse linéaire est donnée par la règle de la main droite : saisir l'axe de rotation avec notre main droite de manière à ce que le pouce pointe dans la direction de la vitesse angulaire, puis les doigts montreraient la direction de la vitesse du point particulier d'un corps .

Si la position du point B est exprimée sous forme matricielle

$$r_1^B = C_{21} r_2^B$$

alors la vitesse est la dérivée première de la position, donc

$$v_1^B = \dot{r}_1^B = \frac{d}{dt}\left(C_{21} r_2^B\right) = \dot{C}_{21} r_2^B + C_{21} \dot{r}_2^B$$

Puisque le point B est attaché à et tourne avec CS2 alors

$r_2^B =$ const. et sa dérivée première est égale à zéro.

La vitesse du point B est donnée par $v_1^B = \dot{r}_1^B = \dot{C}_{21} r_2^B$

La dérivée première de la matrice de transformation $\dot{C}_{21} = \Omega_1 C_{21} = C_{21}\Omega_2$

et enfin $v_1^B = \Omega_1 C_{21} r_2^B = C_{21} \Omega_2 r_2^B$

3.2.2 Trouver l'accélération d'un point quelconque B

Sous forme vectorielle : $une_B = \dot{v}_B = \frac{d}{dt}(\omega \times r_B) = \alpha \times r_B + \omega \times v_B$

et simultanément $une_B = \frac{d}{dt}(\omega \times \rho) = \alpha \times \rho + \omega \times v_B$

Puisque le point B se déplace sur la trajectoire circulaire, l'accélération aura deux composantes

Composante tangentielle

$$a_B^t = \alpha \times \rho = \alpha \times r_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = i(\alpha_y r_z - \alpha_z r_y) + j(\alpha_z r_x - \alpha_x r_z) + k(\alpha_x r_y - \alpha_y r_x)$$

et accélération normale

$$a_B^n = \omega \times v_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = i(\omega_y v_z - \omega_z v_y) + j(\omega_z v_x - \omega_x v_z) + k(\omega_x v_y - \omega_y v_x)$$

Leurs modules sont :

$$|a_B^t| = \sqrt{(a_x^t)^2 + (a_y^t)^2 + (a_z^t)^2} \quad \text{ou} \quad |a_B^t| = \alpha r_B \sin\beta = \alpha\rho$$

et $$|a_B^n| = \sqrt{(a_x^n)^2 + (a_y^n)^2 + (a_z^n)^2} \quad \text{ou} \quad |a_B^n| = v_B\,\omega = \omega^2 \rho = \frac{v_B^2}{\rho}$$

Sous forme matricielle : $a_1^B = \dot{v}_1^B = \ddot{r}_1^B = \ddot{C}_{21} r_2^B + 2\dot{C}_{21}\dot{r}_2^B + C_{21}\ddot{r}_2^B$

qui conduit à $a_1^B = \dot{v}_1^B = \ddot{r}_1^B = \ddot{C}_{21} r_2^B$

alors la dérivée seconde de la matrice de transformation est :

$$\dot{C}_{21} = \Omega_1 C_{21}$$
$$\ddot{C}_{21} = \dot{\Omega}_1 C_{21} + \Omega_1 \dot{C}_{21} = \dot{\Omega}_1 C_{21} + \Omega_1^2 C_{21}$$
$$\ddot{C}_{21} = A_1 C_{21} + \Omega_1^2 C_{21}$$

Ainsi l'accélération du point B est

$$a_1^B = (A_1 C_{21} + \Omega_1^2 C_{21}) r_2^B = (A_1 + \Omega_1^2) C_{21} r_2^B = (A_1 + \Omega_1^2) r_1^B$$

où la première composante représente l'accélération tangentielle

$$a_1^{Bt} = A_1 C_{21} r_2^B = A_1 r_1^B = A_1 \rho \quad \text{où} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix}$$

et la deuxième composante représente l'accélération normale

$$a_1^{Bn} = \Omega_1^2 C_{21} r_2^B = \Omega_1^2 r_1^B = \Omega_1 v_1^B$$

Le cours du mouvement est enregistré par l'accélération tangentielle $a_T = \alpha\rho$

$$\text{où} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

Il peut y avoir deux situations :

un) ω = const. α = 0

Ainsi $a_T = 0$ et $a_n = \rho\,\omega^2 = \frac{v^2}{\rho}$

Ces caractéristiques représentent un mouvement uniforme de la particule sur le cercle et le l'accélération qui se produit est l'accélération normale.

b) $\omega \neq$ const. $\alpha \neq 0$

Dans ce cas l'accélération angulaire α peut devenir :

je) α = const. ainsi $\alpha_T = \alpha\,\rho$ = constante. (en supposant ρ = const.)

Ces caractéristiques représentent un mouvement uniformément accéléré sur la trajectoire circulaire – rotation uniformément accélérée.

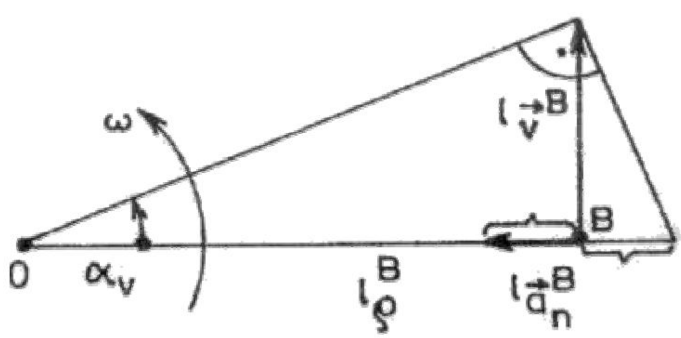
ii) $\alpha \neq$ const. ainsi $\alpha_T \neq \alpha\,\rho \neq$ const .

Ces caractéristiques représentent un mouvement non uniformément accéléré sur le cercle, rotation non uniformément accélérée.

Dans les deux cas, l'accélération normale se produira. $a_n = \rho\,\omega^2 = \frac{v^2}{\rho}$

3.2.3 Conséquences de la cinématique des corps solides (la dépendance géométrique)

Pour fournir la solution graphique des grandeurs cinématiques, nous devons enregistrer la vitesse et l'accélération sous forme graphique. À cette fin, l'échelle de longueur et de vitesse doit être donnée, tandis que les échelles restantes sont calculées.



Où l_ρ^B représente la longueur de le rayon vecteur ρ

$l_\rho = \frac{\rho}{s_l}$ donc $\rho = s_l\, l_\rho$

et vitesse $v = s_v\, l_v$

Par conséquent, l'angle αv est donné par

$\tan \alpha_v = \frac{l_v}{l_\rho} = \frac{v}{\rho}\,\frac{s_l}{s_v} = \omega\, k_v$

où k_v est une constante d'échelle de vitesse.

Puisque tous les points du corps ont la même vitesse angulaire ω, nous pouvons conclure - Phrase sur les vitesses :

α

Accélération – la solution graphique

Une composante tangentielle et normale de l'accélération doit être enregistrée

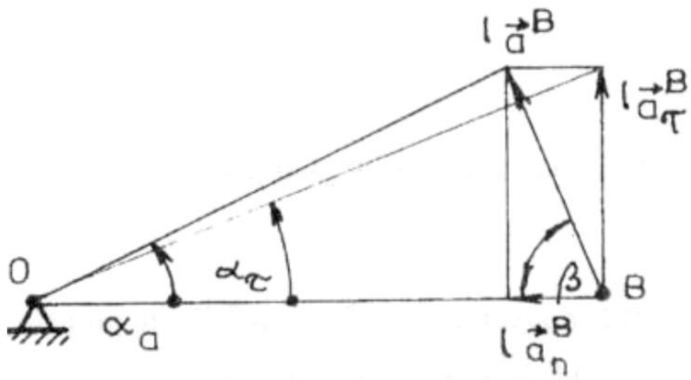
La composante normale de l'accélération :

$un^n = \rho \omega^2 = \frac{v^2}{\rho}$ ainsi de la loi d'Euclide sur la hauteur dans le triangle découle la construction graphique de l'accélération normale.

L'échelle d'accélération doit être calculée !!

Donc $un_n = \frac{sl^2_{vv}}{sl_{je}\,\rho} = sl_{aa}\,_n$ où $je_{un} = \frac{je_v^2}{je_\rho}$ et $\boxed{s_{un} = \frac{s_v^2}{s_{je}}}$

La composante tangentielle de l'accélération : $\alpha_T = \alpha\,\rho$



La direction de la composante tangentielle correspond à la direction de la vitesse, donc une autre analogie avec la vitesse est évidente.

bronzer $\alpha_{un_T} = = \frac{je_{un_T}}{je_\rho}$ $\frac{comme_T}{\rho}\frac{}{s_{un}}$ α k_{un_T}

où ka $_T$ est une tangentielle constante d'échelle d'accélération.

Puisque tous les points du corps ont la même accélération angulaire α, nous pouvons conclure :

Phrase sur l'accélération tangentielle :

$$\boxed{\alpha\ ^T}$$

L'accélération totale est donnée comme la somme de ses composants $aaa = ^T + ^n$

bronzer $\beta = = \frac{un^T}{un^n}$ $\frac{\alpha\rho}{\omega^2\rho} = = \frac{\alpha}{\omega^2}$ k_{un}

où ka représente la constante d'échelle de l'accélération totale.

Puisque α et ω sont constants pour tous les points du corps, nous concluons : L'accélération totale du point sur le corps solide en rotation fait un angle β par rapport à sa normale à la trajectoire qui reste constante pour tous les points du corps.

Et enfin on peut finaliser en fonction du background : bronzer $\alpha_{un} = \frac{je_{un_T}}{je_\rho - Imm_{un^n}} = \frac{\alpha}{la^{-1} - \omega^2}$

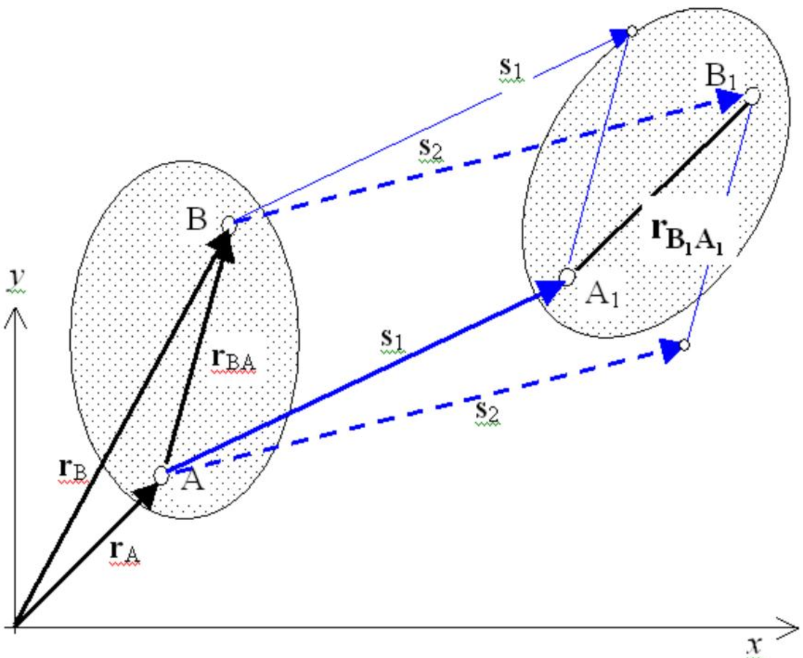
ainsi que les grandeurs cinématiques angulaires α, ω qui sont les mêmes pour tous les points du corps :

$$\boxed{\alpha}$$

3.3 MOUVEMENT PLAN UNIVERSEL

Si tous les points d'un corps se déplacent dans des plans parallèles au plan de base fixe (stationnaire), on dit alors que le corps se déplace dans un mouvement planaire.

Si les trajectoires de tous les points qui se trouvent sur la ligne perpendiculaire à ce plan sont des courbes planes alors le mouvement est un mouvement planaire universel.



La position initiale du corps est décrite via les points A, B. Un vecteur positionnel pour le point B utilisant un point de référence A le

décrit

position d'un corps :

$$r^B = r^{UN} + r^{BA}$$

Pendant l'intervalle de temps t leur position change vers un nouvel emplacement A1 et B1

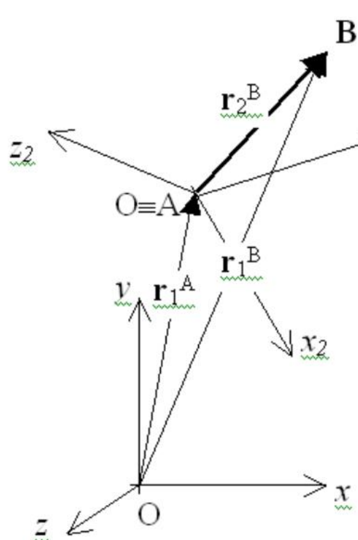
donc $r^{B}_1 = r^{A}_1 + r^{AB}_{11}$

Comme on le voit sur le schéma

$r^{BA} \neq r^{AB}_{11}$ mais

$\left|r^{BA}\right| = \left|r^{AB}_{11}\right|$, lequel signifie que le vecteur change d'orientation mais pas d'amplitude.

Par conséquent, nous pouvons imaginer le mouvement planaire universel comme une séquence de mouvement de translation suivi d'une rotation qui pourrait être exprimée brièvement comme suit : GPM = TM + RM Remarque : Les deux mouvements se produisent en même temps et cette approche est juste imaginaire.



3.3.1 Le poste

du point B peut être exprimé sous forme vectorielle ou matricielle :

$$r^B_1 = r^{UN}_1 + r^{BA}_1$$

avec utilisation de la matrice de transformation C21 :

$$r^B_1 = r^{Un}_1 + C_{21}\, r^{BA}_2$$

qui conduit à deux équations sous forme vectorielle :

$$x^B_1 = x^{Un}_1 + x^{BA}_2 \cos - y^{BA}_2 \text{ péché}$$
$$y^B_1 = y^{Un}_1 + x^{BA}_2 \text{ péché} + y^{BA}_2 \text{ parce que}$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x^B_1 \\ y^B_1 \\ z^B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{UN}_1 \\ y^{UN}_1 \\ z^{UN}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{parce que} & -\text{péché} & 0 \\ \text{péché} & \text{parce que} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{BA}_2 \\ y^{BA}_2 \\ z^{BA}_2 \end{bmatrix}$$

3.3.2 La vitesse

d'un point B peut s'exprimer :

sous forme vectorielle : $v_1^B = r + \frac{d}{dt}(r_1^{UN} + r_1^{BA}) = v_1^{UN} + v_1^{BA}$

ainsi $v_1^B = v_1^{UN} + \omega \times r_1^{BA}$

ou sous forme matricielle : $v_1^B = v_1^{UN} + v_1^{BA}$ C_{221} r^{BA}

$v_1^B = v_1^{Un} + C_{221} r^{BA} = v_1^{Un} + r_{11}^{BA}$

Il y a une rotation du point B par rapport au point A donc on dit qu'il y a un mouvement relatif du point B autour du point A.

Ainsi $v_1^{BA} = \omega \times r_1^{BA}$

où ω représente la vitesse angulaire d'un mouvement relatif par rapport au point A.

La vitesse angulaire relative est constante en tout point du corps donc : $\omega = \frac{v^{BA}_{contre}}{BA} = \frac{v^{Californie}}{Californie} = \text{const.}$

On obtient alors les composantes de la vitesse :

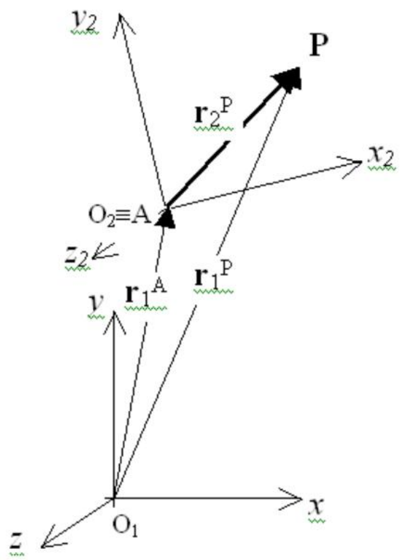
$$\begin{bmatrix} v_x^B \\ v_y^B \\ 0 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} v_x^{UN} \\ v_y^{UN} \\ 0 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{BA} \\ y^{BA} \\ 0 \end{bmatrix}_1$$

Solution graphique :

La vitesse d'un point A est connue, nous devons donc trouver la vitesse au point B en nous basant sur l'équation vectorielle : $v_1^B = v_1^{UN} + \omega \times r_1^{BA}$

3.3.3 Le pôle de mouvement

Si $\omega \neq 0$ alors il existe un seul point sur le corps qui a une vitesse nulle à l'instant et appartient au mobile (ou au plan attaché au mobile). Ce point est appelé centre instantané de rotation ou pôle de mouvement.



La position d'un pôle P est donnée par :

$$r_1^P = r_1^A + r_1^{PA}$$

sous forme matricielle : rrr 1 = + = + PA r C r Un 1 221

Alors la vitesse du pôle vaut : $v_1^P = v_1^A + v_1^{PA}$

puisque la vitesse linéaire à cet endroit est nulle, alors

$$0 = v_1^A + v_1^{PA} \rightarrow v_1^A = -v_1^{PA}$$

Pour un point de référence arbitraire, nous obtiendrions la même chose répondre:

$$0 = v_1^B + v_1^{PB} \rightarrow v_1^{PB} = -v_1^B$$

Pour trouver la position du pôle d'un corps se déplaçant avec GPM, nous devons multiplier l'équation de vitesse par la vitesse angulaire

Ainsi $\quad 0 = \omega \times v_1^A + \omega \times (\omega \times r_1^{PA})$

Réorganiser l'équation sous une forme $\quad 0 = \omega \times v_1^A + \omega [\omega (r_1^{PA}) - r_1^{PA} (\omega \omega)]$

tout en égalant $\quad \omega r_1^{PA} = 0 \quad$ et $\quad \omega \omega = \omega^2$

on a $\quad 0 = \omega \times v_1^A - (\omega^2 r_1^{PA})$

d'où nous assimilons le vecteur de position des pôles

$$r_1^{PA} = \frac{\omega \times v_1^A}{\omega^2} = \frac{\omega \times v_1^A}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x^A & v_y^A & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega^2}[i_1(-\omega v_y^A) + j_1(\omega v_x^A)]$$

Solution graphique :

Basé sur $v1 -= v1$ et UN

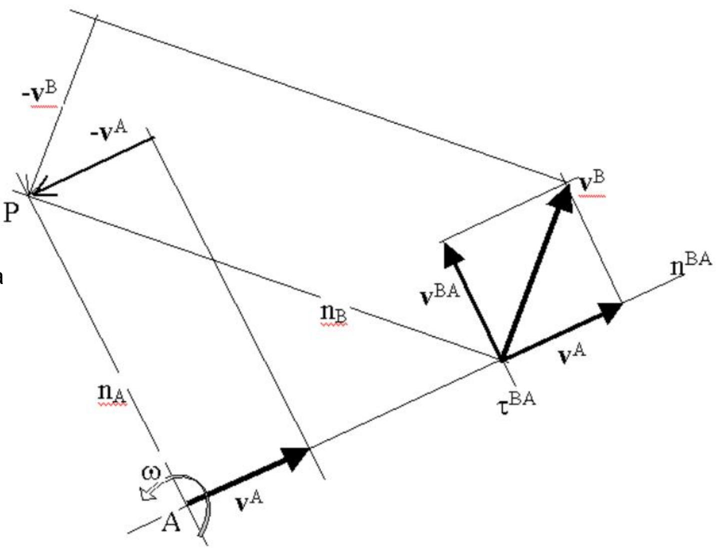
$v1 -= v1$ PB B

La vitesse v UN est connu et

la vitesse au point B est

$v1 = v1 + v1$ B UN BA

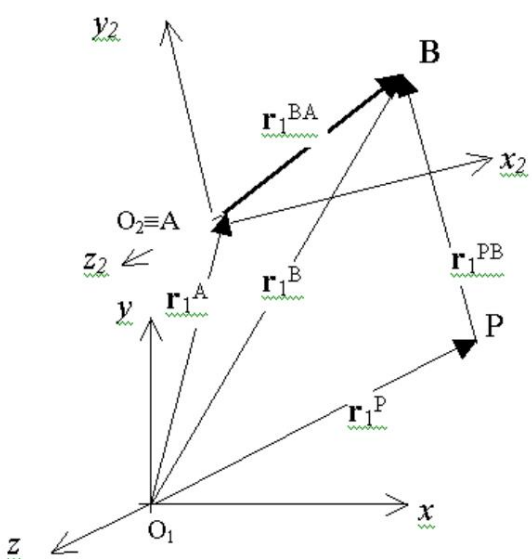
donc si nous connaissons la vitesse nous connaissons la direction d'une normale à la trajectoire.



Le pôle du mouvement est au

intersection des normales nA et nB.

Recherche de la vitesse au moyen du pôle



Position d'un point B $r = r + r$ BP BP 1 1 1

ou $r = r + C r$ B P 221 BP

Alors la vitesse vaut : $v = v + C r$ B P 1 221 BP

Comme la vitesse du pôle est nulle, on obtient

$v = C r$ B 1 221 BP

sous forme matricielle

BvX B v y = 0 −ω ω 0 0 0 0 cos 0 0 sin 1 0 − péché 0 parce que 0 0 1 X BP y BP 0 2

0 1

cela entraînerait

$v1x -= \omega_{y1}$ B BP et $v = 1a\ \omega_{x1}$ B BP

Donnant ainsi la vitesse finale

$$\left|v_1^B\right| = \sqrt{(v_{1\,fois}^B)^2 - (v_{1a}^B)^2}\quad \sqrt{(\omega_{y1}^{BP})^2 + (\omega_{x1}^{PB})^2} = \omega\sqrt{(y_1^{BP})^2 + (x_1^{BP})^2} = \omega r_1^{BP}$$

Alors la vitesse angulaire est $\omega = \dfrac{v_1^B}{r_1^{BP}}$

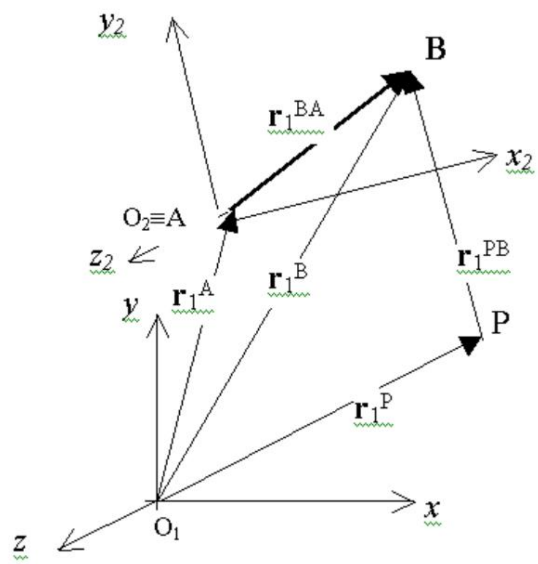
De ce résultat découle l'interprétation de la solution graphique :

$$\omega = = \frac{v_1^B}{r_1^{BP}} \quad \frac{sl}{sl} \text{ vvk } r^{BP} = \ v \text{ bronzer } \alpha_v$$

donnant ainsi bronzer α_v $= \dfrac{1}{k_v}\omega$

Conclusion:

α



3.3.4 Recherche analytique de l'accélération

Nous avons déjà trouvé le vecteur positionnel et r_1^B la vitesse v_1^B

$$r_1^B = r_1^{UN} + r_1^{BA}$$

$$v_1^B = v_1^{UN} + v_1^{BA}$$

où la vitesse v_1^{BA} représente le mouvement relatif du point B autour du point A qui peut être exprimé comme

$v_1^{BA} = \omega_1 \times r_1^{BA}$ sous forme vectorielle ou

$v_1^{BA} = C_{21} r_2^{BA} = r_{11}^{BA}$ sous forme matricielle.

Puisque nous avons prouvé que $a = r = v$

on peut déduire l'équation d'accélération $a_1^B = a_1^{UN} + a_1^{BA}$

Où l'accélération du mouvement relatif d'un point B autour du point A aura deux composantes puisque le mouvement relatif est la rotation avec un point fixe en A.

Ainsi $a_1^{BA} = \alpha \times r_1^{BA} + \omega \times v_1^{BA}$ sous forme vectorielle. L'accélération sous forme matricielle est un résultat de dérivation :

$$r_1^B = r_1^{UN} + r_1^{BA} = r_1^{UN} + C_{21} r_2^{BA}$$

$$v_1^B = v_1^{Un} + C_{21} r_2^{BA}$$

$$= a_1^B + a_1^{UN} + C_{21} r_2^{BA} + C_{21} r_2^{BA} + C_{21} r_2^{BA}$$

en cas de corps solide $r_2^{BA} = 0$ puisque la distance entre les points A et B ne change pas, donc

$$une_1^B = une_1^{Un} + UNE_{21} C_{22}\, r_1 + C_{21}\, r^{BA}$$

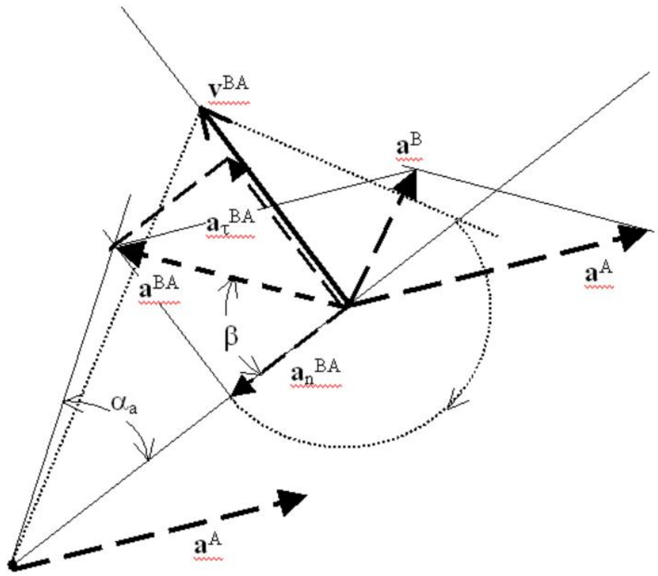
$$une_1^B = une_1^{Un} + (A_1 + {}_1)^2\, r_1^{BA}$$

où $UN_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix}$ représente la matrice semi-symétrique des angulaires accélération

Graphiquement

Pour trouver l'accélération, nous utiliserons l'équation principale

$$a^B = a^A + a^{BA}$$



L'accélération d'un point A est donnée et l'accélération du mouvement relatif du point B est décrite par deux composantes (tangentielle et normale) dans les directions respectives à la trajectoire du point B.

La composante normale de la se trouve à une accélération^{BA} partir du connu vitesse v^{BA} (graphiquement au moyen de Triangle d'Euclide).

Ainsi à l'instant instantané l'angle β entre l'accélération finale du mouvement relatif et la normale au

la trajectoire du mouvement relatif est donnée par

$$\text{bronzer}\ \beta = \frac{a_\tau^{BA}}{a_n^{BA}} = \frac{\alpha}{\omega^2} \quad \text{constante.}$$

Conclusion:

L'accélération finale du mouvement relatif autour du point A crée une composante β avec le angulaire normale de l'accélération qui est constante pour tous les points du corps se déplaçant avec un mouvement relatif.

De la même manière, nous pouvons observer la composante tangentielle de l'accélération et la valeur finale accélération. Ainsi cet angle est donné par :

$$\text{bronzer}\ \alpha_{un} = \frac{a_{\tau}^{BA}}{\rho_{je} - a_{n}^{BA}} = \frac{\alpha\ ss\ v^2}{sss\ (2\ 22\ \omega\ )} \quad \text{où} \quad \rho_{je} = \frac{v^2}{un}\ .$$

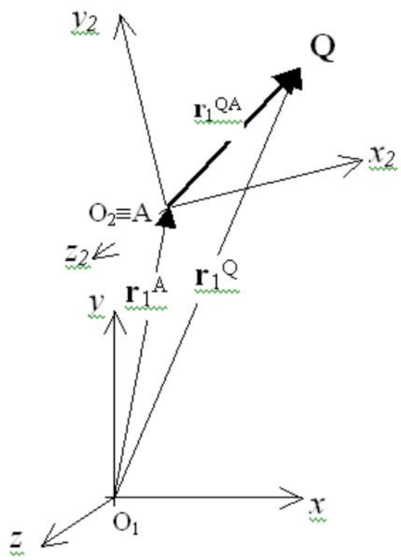
Puisque α et ω sont constants dans l'intervalle de temps donné pour tous les points du corps rigide, alors même le tan α_a = const.

Conclusion:

Les extrémités des composantes tangentes de l'accélération pour tous les points du corps sont vues depuis le centre de rotation sous le même angle α_{un} à l'instant instantané.

3.3.5 Le centre instantané d'accélération – le pôle d'accélération

De même que pour le pôle de vitesse P il y a un pôle d'accélération Q, le point qui a une accélération nulle à l'instant.



L'accélération pour ce pôle Q est donnée par :

une $^{AQ}_1$ = une + une $^{AQ}_1$ + une 1 $^{AQ}_{1n}$

QA une = une + α × r ^{AQ} + ω× ω× r ( )

Multiplier par α à partir de la gauche

QA α 0 [= α × a + α (× α × r$_1$ +) α × ω× ($^{AQ}_1$)]

nous recevons

$0 = \alpha \times$ une $+ (-\alpha^2 \; r_1^{AQ}) - (\omega^2)(\alpha \times r_1^{AQ})$

) et en remplaçant l'expression

$\alpha \times r_1^{AQ} =$ une $- (- \omega^2 r_1^{AQ}) =$ une $+ \omega^2 r_1^{AQ}$

nous trouvons le vecteur positionnel du pôle d'accélération

$$r_1^{AQ} = \frac{\alpha \times \text{un}_1 + \omega^2 \text{un}_1}{\alpha^2 + \omega^4}$$

Comparaison de cette expression avec l'expression du pôle de vitesse

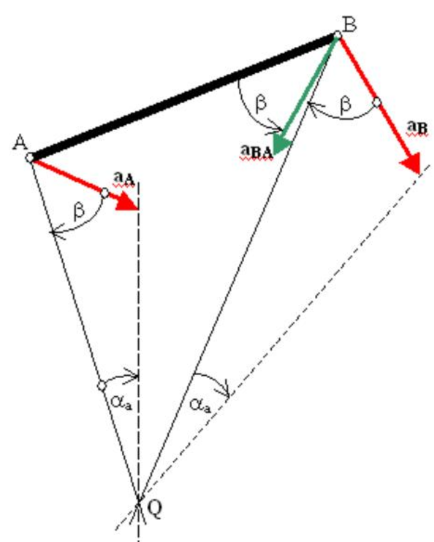
$$r_1^{PA} = \frac{\omega \times v_1}{\omega^2}$$

montre que ces deux expressions sont différentes, donc les deux pôles sont différents et on peut conclure :

Le pôle d'accélération n'est pas identique au pôle de vitesse

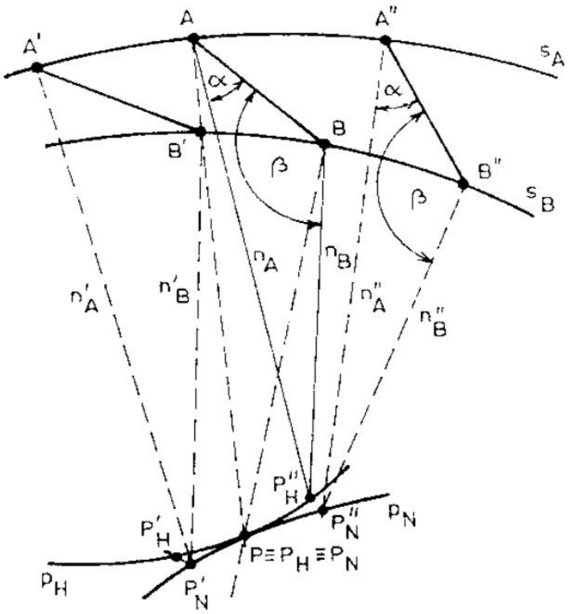
Si $\omega \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ alors il y a un point sur la plan en mouvement qui a une accélération $a^Q=0$.

Ce point se trouve à l'intersection des lignes qui font un angle β avec les directions d'accélération totale de chaque point sur le plan mobile.



Dr Ing. Zdenka Sant
10/2009

3.4 CENTRE DE LA COURBURE DE LA TRAJECTOIRE



Le corps, se déplaçant avec le mouvement planaire universel, est défini par deux points A et B et leurs trajectoires sA et sB que les points dessinent dans le plan. Ainsi, la position du pôle de vitesse qui se trouve à l'intersection de deux normales peut être trouvée à tout instant.

Le corps est connecté au CS2 mobile et les positions de tous les pôles instantanés de vitesse créent une courbe pH - le lieu de toutes ces positions est appelé la polode en mouvement tandis que les pôles connectés au plan fixe fixe CS1 créent une courbe affectée du symbole pN - la polode fixe.

Ainsi, nous pouvons imaginer le mouvement planaire universel comme un mouvement créé par le roulement du lieu des pôles pH (associé au plan mobile) sur le lieu des pôles pN (associé au repère).

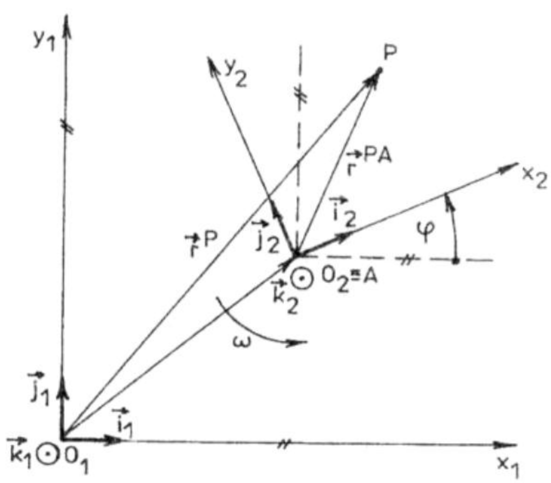
La vitesse polaire décrit le taux de variation de la position polaire.

Il est possible de trouver le taux de variation du vecteur positionnel en utilisant le point de référence A par rapport au repère fixe

$$v_{N}^{P} = +_{UN} \frac{\omega\ \check{u}n\tilde{e}\ \alpha\ v_{UN}}{\omega^{2}}$$

Et pour le pôle associé au plan mobile

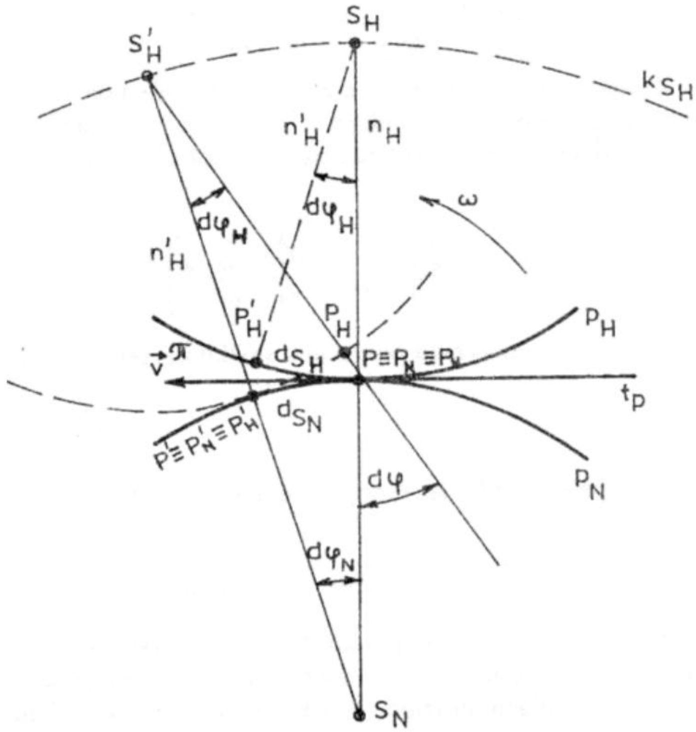
$$v_{H}^{P} = +_{UN} \frac{\omega\ \check{u}n\tilde{e}\ \alpha\ v_{UN}}{\omega^{2}}$$



Étant donné que les équations dérivées des vitesses sont identiques on peut assigner un symbole v^{π} polaires sont ses pôle de vitesse et conclure :

Le point où les deux lieux pN et pH se touchent à l'instant est le pôle de mouvement P (le centre instantané de rotation) et à ce point les deux courbes ont une tangente commune tp.

La vitesse polaire en tant que taux de variation de la position polaire se situera sur la tangente tp.



La tâche consiste à étudier la vitesse et l'accélération du point ou à définir la vitesse et l'accélération de l'ensemble du corps. Les points du mobile dessinent des trajectoires donc à l'instant où chaque point du mobile est caractérisé par sa normale au mouvement et le rayon de son

trajectoire.

En construisant la composante normale de l'accélération

$$n \frac{1}{\rho} s^2 = {}^{un}n$$

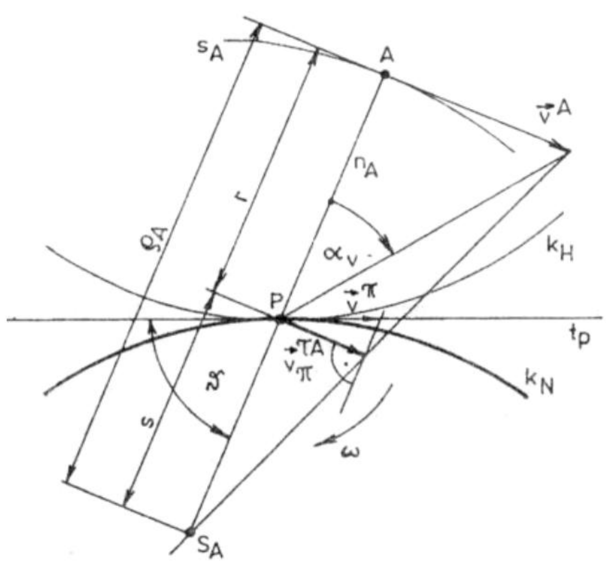
le centre de courbure de la

la trajectoire est nécessaire pour identifier le rayon ρ.

Pour trouver le centre de courbure nous pouvons utiliser différentes méthodes.

Seules deux méthodes sont présentées ici :

a) analytique – équation d'Euler-Savary



Le centre de courbure SA associé au point A du mobile qui trace la trajectoire sA est connu. Ainsi, nous pouvons trouver la vitesse polaire trouvée au moyen de la méthode graphique de Hartman est utilisée pour montrer que

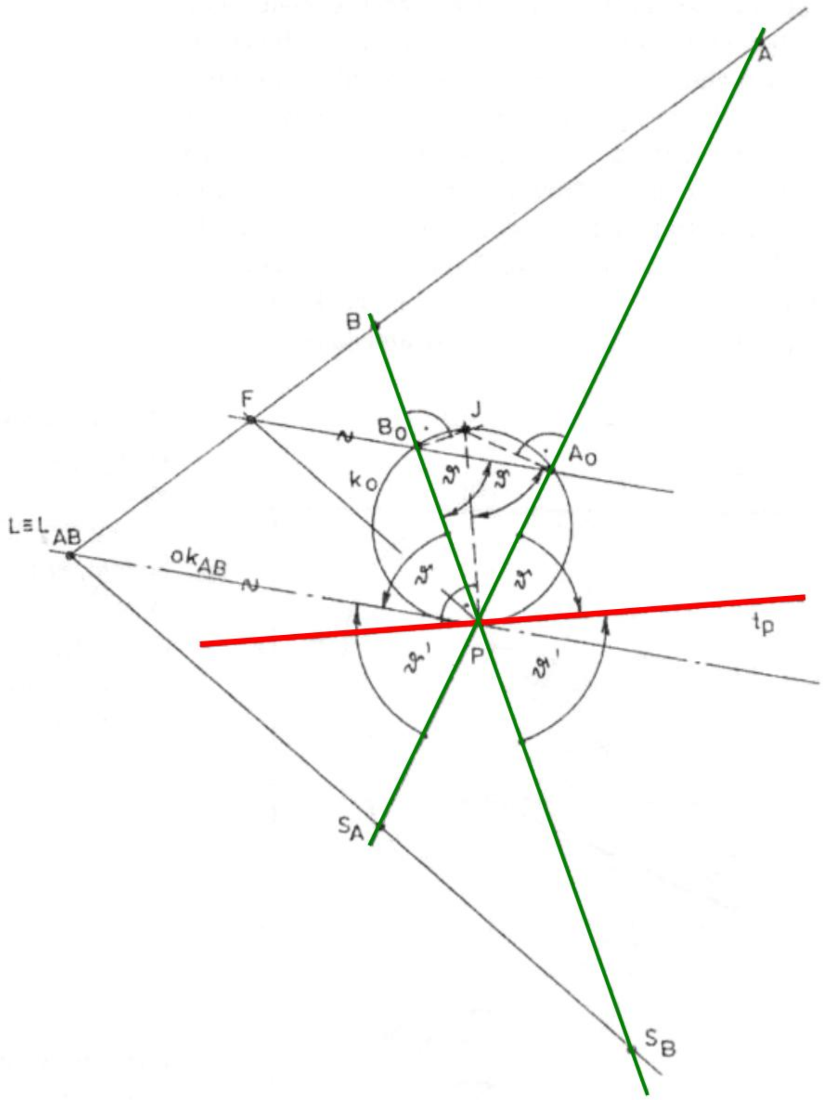
$$\frac{v^{Un}}{\rho^{UN}} = \frac{v_{\pi}^{T_{UN}} =}{srs} \quad \frac{-\omega}{+} \quad \frac{\pi^{péché}}{s}$$

$$\frac{\omega}{v_{\pi}} = = \kappa \quad \frac{rs+}{rs}_{péché} \quad 1 + \frac{1}{sr}_{péché} = \kappa$$

qui représente l'équation d'Euler-Savary

utilisé en solution analytique pour trouver le centre de courbure.

b) Méthode graphique de Bobillier



L'angle entre la normale d'un point et l'axe de colinéation est le même que l'angle mesuré entre la normale de l'autre point et la tangente aux lieux des pôles dans la direction opposée.

Il y a deux tâches :

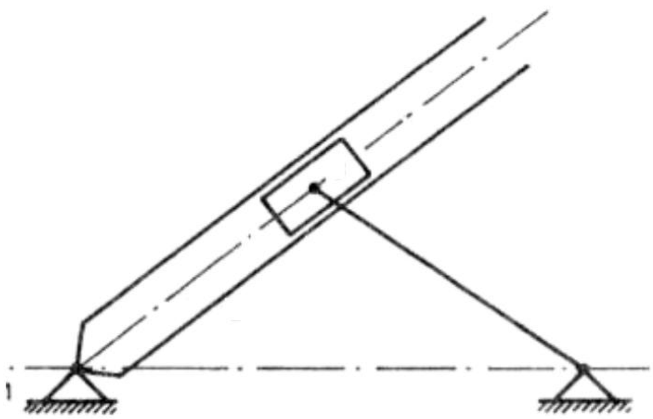
1. La tangente tp et un couple de points conjugués A, SA sont connus et le centre de courbure de la trajectoire du point C doit être identifié.

2. Les deux couples de points conjugués A,SA, et B, SB sont connus et le centre de courbure de la trajectoire du point C doit être identifié.

3.5 MOUVEMENT COMBINÉ

Le mécanisme consistant en un certain nombre de corps subit un mouvement planaire ou spatial qui pourrait être décrit comme une combinaison du mouvement relatif entre les corps et le

mouvement d'entraînement/portage de l'actionneur du système par rapport au référentiel.



Analyser le mouvement de chaque corps dans le mécanisme :

B1 – cadre de référence

B2-

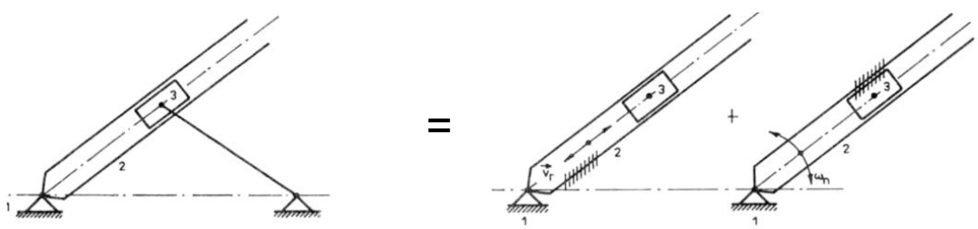
B3-

B4-

Mouvement des corps attachés à le cadre est identifié comme une rotation avec le centre de rotation fixe à O21 ou O41 ainsi le mouvement du corps est défini par la vitesse angulaire et l'accélération, ω et α respectivement. Dans le cas d'un mouvement simple comme la rotation ou la translation, nous sommes en mesure d'identifier la trajectoire et donc d'évaluer les grandeurs cinématiques sans aucun problème. Dans le cas d'un mouvement planaire ou spatial du corps, la trajectoire n'est pas une simple courbe et il peut donc y avoir un problème pour évaluer les grandeurs cinématiques.

Par conséquent, nous introduisons la stratégie basée sur le mouvement combiné et implémentons la division imaginaire du mouvement complexe en deux mouvements : le mouvement du point de référence et la rotation autour du point de référence.

On peut imaginer



Mouvement final 31 | Mouvement relatif 32 | Mouvement de conduite 21

Cela pourrait être enregistré par une équation symbolique 31 = 32 + 21

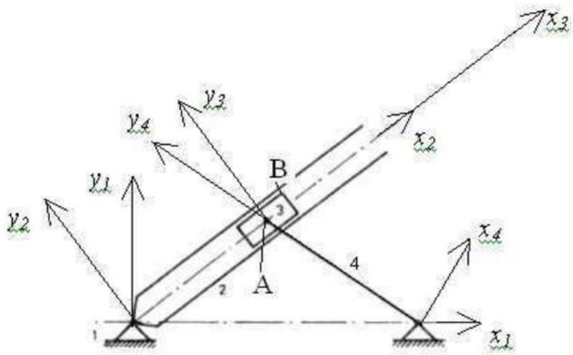
Et les quantités cinématiques peuvent être exprimées pour le point identifié B comme

Ainsi $v^B_{31} = v^B_{32} + v^B_{21}$

Mais $a^B_{31} = a^B_{32} + a^B_{21} + a^B_{cor}$

Pour prouver cette affirmation, nous devons définir la vitesse au point B

3.5.1 Grandeurs cinématiques par mouvement combiné

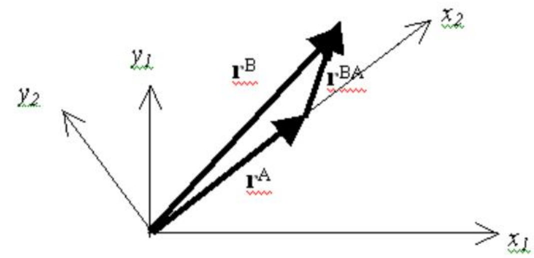


Le mouvement final d'un point B symboliquement :

31 = 32 + 21

ainsi que

31 = 34 + 41



Le vecteur position d'un point B est : r B 1 = r + r Un 1 = r + je BA X + j y UN 1 22 22 (BA BA)

3.5.2 La vitesse

d'un point B :

v B 1 = r B 1 = r + je UN 22 + je BA x 22 22 22 y BAx _ BA + j y BA)

où 2 je = ω × je 21 2

j 2 = ω × j 21 2

En substituant et en réarrangeant, nous recevons l'équation de la vitesse finale au point B exprimée

dans CS1 v B 1 = v UN 1 + ω × (je 21 22 22 x BA + j y BA) + je 22 x BA y + j 2 2 y BA où

le mouvement + × + x UN BA 21 2 (2 j 2 2 y BA) = B contre 21 représente la vitesse due à la conduite lorsqu'il

d'expression. Le point B se déplacerait avec la vitesse de conduite v21 B est connecté virtuellement au moteur en mouvement

plan 2 (CS2)

l'expression je x BA × v 2 2 j ans BA y 2 2 = 32 B représente la vitesse relative du point B par rapport à

le point A. Ainsi, nous confirmons l'équation précédente

v31 B = v32 B + v21 B

3.5.3 L'accélération

du point B est un produit de la dérivation de la vitesse

B un 1 = d/dt va BA = + α × je 1 21 (2 x 2 BA + j 2 y 2 BA) + ω × 21 je (2 2 BA je + + xx 2 2 BA j 2 y 2 BA + j 2 y 2 BA)

+ ω BA 2 i 2 + 2 xx BA j 2 y 2 ans BA + j 2 2 un y BA

Ainsi

aa BA = + α × je 1 21 (2 x 2 BA + j et 2 2 BA) + × × 21 21 [ω ω je (2 x 2 BA + j et 2 2 BA) je + 2 y 2 BA + j 2 y 2 y BA]

+ 2 BA ω × 21 je (2 2 x j 2 y 2 ans BA) je + + un x 2 2 BA j 2 un 2 y BA

Dr Ing. Zdenka Sant

Où l'expression

une αl2NE a1e = + × (je 2 2 j x BA + 2 ε t BA) 21 [2 2 ω je + × × + x 21 (BA j 2 ε t BA)] représente l'accélération

du mouvement moteur au point B

B C 2 ω ia = × 21 (v 2 2 x BA + j 2 2 y BA) représente l'accélération de Coriolis due au mouvement angulaire

d'entraînement et à la vitesse linéaire du mouvement relatif

à B 32 = je + a 2 2 x BA j un 2 2 y BA représente l'accélération du mouvement relatif au point B

Enfin, nous pouvons conclure que tout en exprimant l'accélération finale au moyen du mouvement combiné (moteur et mouvement relatif) des corps, une composante appelée accélération de Coriolis doit être introduite.

3.5.4 Accélération de Coriolis

Accélération de Coriolis exprimée sous forme vectorielle : $a_C^B = 2\omega_{21} \times v_{32}^B$

Et sous forme matricielle : 2 a_C^B = 21 2 C v 21 BA = 2 21 1 entre BA

L'accélération de Coriolis exprime le changement de direction de la vitesse relative dû au mouvement d'entraînement en rotation et en même temps l'amplitude du changement de vitesse d'entraînement dû au mouvement relatif au point de référence.

Analyse de l'équation exprimant l'accélération de Coriolis :

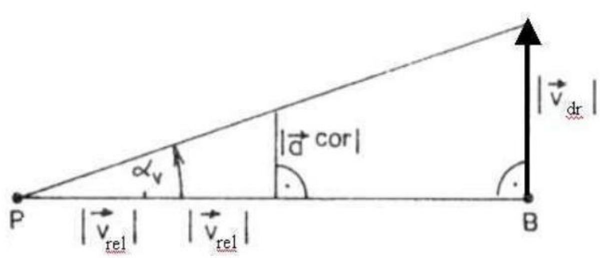
L'accélération de Coriolis a une valeur non nulle aC ≠ 0 si :

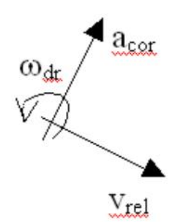
1) ωdr ≠ 0 le mouvement d'entraînement existe sous forme de rotation, GPM, mouvement sphérique ou GSM

2) vrel ≠ 0 le mouvement relatif entre les corps existe ⊥ 3)

ωdr vrel l'angle entre les vitesses angulaire et linéaire est différent de 0, et π

La direction et l'orientation de l'accélération de Coriolis sont données en faisant tourner la vitesse relative dans la direction du mouvement d'entraînement d'un angle π/2.

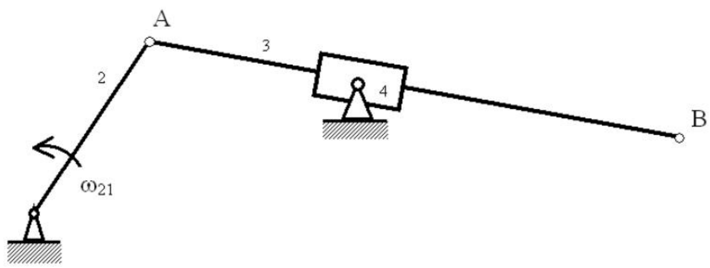




Dr Ing. Zdenka Sant

10/2009

3.5.5 Recherche du pôle de mouvement au moyen d'un mouvement combiné



Analyse du système :

B2 – MR

B3 – GPM

B4 – RM

Ainsi les corps B2 et B4 tournent autour du point de rotation fixe O21 et O41 respectivement. Ainsi les deux points O21 et O41 sont les pôles de rotation pour B2 et B4 respectivement.

Ainsi le pôle de B3 se trouve à l'intersection de deux normales à la trajectoire. La normale nA est donnée par deux points - O21 et A. Le point B dessine une courbe plane universelle avec un centre de courbure inconnu.

Ainsi en appliquant le principe du mouvement combiné on peut écrire symboliquement pour le mouvement de B3 :

31 = 32 + 21

où 32 décrit le pôle de mouvement relatif de B3 par rapport à B2 et

21 décrit le pôle de mouvement moteur de B2 par rapport au bâti (B1)

Par conséquent, en appliquant les pôles de mouvement sur B3, nous obtenons la direction de la normale qui peut être enregistrée symboliquement comme : n31 = O32 + O21

La deuxième équation symbolique enregistrant le mouvement combiné de B3 est 31 = 34 + 41

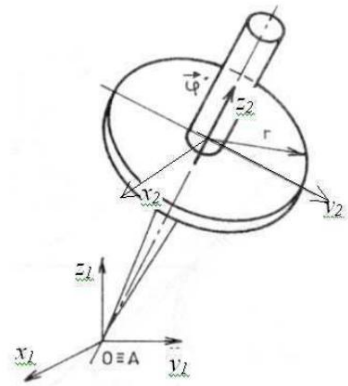
Ainsi la seconde normale pour B3 est : n31 = O34 + O41

Conclusion:

Le pôle du mouvement final, du mouvement relatif et du mouvement moteur se trouve sur la même ligne.

3.6 MOUVEMENT SPHÉRIQUE D'UN CORPS

Définition du mouvement
sphérique : Le corps se déplace avec un mouvement sphérique si un point du corps reste immobile à tout instant.

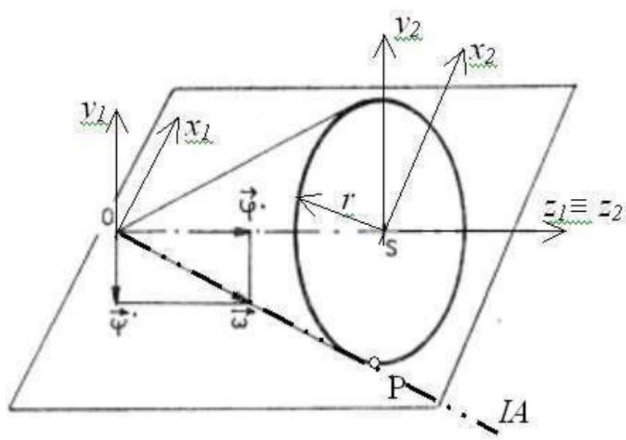


Les points du corps sont à distance constante du centre O, donc leurs trajectoires sont des courbes sphériques, courbes reposant sur des sphères de centre commun O.

Un point sur le corps reste stationnaire pendant le mouvement à tout moment, ainsi la nouvelle position du corps est donnée par une seule rotation autour de l'axe qui passe par le point stationnaire.

Cet axe est appelé axe instantané de rotation et coïncide avec le vecteur de la vitesse angulaire totale. Les points sur l'axe de rotation instantané ont une vitesse linéaire nulle à l'instant.

Ainsi le cône de rayon de base r qui roule sur le plan π partage avec ce plan une seule ligne à l'instant l' axe instantané de rotation. Cette ligne représente la région de contact entre la surface du cône et le plan sur lequel le cône roule.



En observant le mouvement du cône sur le plan, nous pouvons décrire le mouvement comme une rotation autour de l'axe de symétrie du cône z2-axe (l'axe naturel de rotation) avec une vitesse angulaire et la rotation avec une ψ autour de l'axe vitesse angulaire perpendiculaire au plan qui passe par l'axe stationnaire point sur le corps (axe y1).

En associant le deuxième système de coordonnées au corps en mouvement, nous pouvons identifier trois angles appelés angles d'Euler :

l'angle de nutation - décrivant la déviation de l'axe naturel d'un corps (z2) par rapport à l' axe (z1) du système de coordonnées fixe

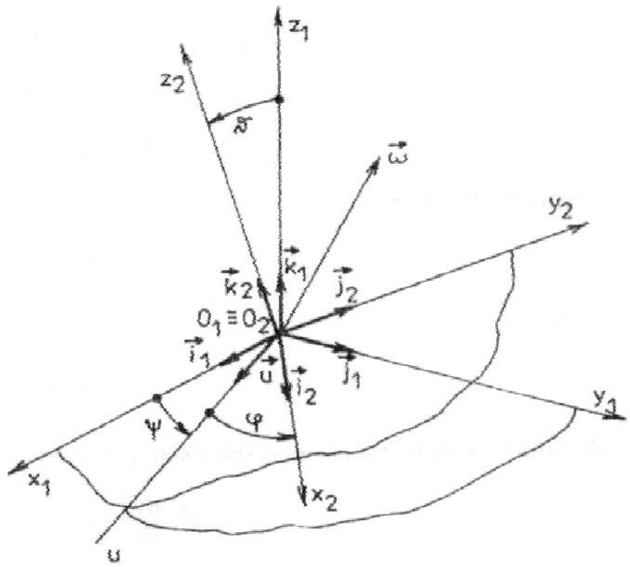
ψ l'angle de précession décrit le changement de position de l'axe naturel d'un cône par rapport à CS1

l'angle de rotation naturelle décrit le changement de position d'un point du corps par rapport à CS2

La vitesse angulaire totale est une résultante de la vitesse angulaire de nutation, de précession et de rotation naturelle. La direction de la vitesse angulaire coïncide avec l'axe instantané de rotation (IA).

Ainsi: $\omega = + +\psi$

La vitesse angulaire totale dans CS1 rectangulaire est enregistrée sous la forme ω = ω_x je + ω_y j + ωzk



Étant donné que les vitesses angulaires coïncident avec des axes de rotation particuliers, nous devons les transformer en CS1 ainsi recevant les composantes de la vitesse angulaire totale :

ω_x = péché péché ψ + parce que ψ
ω_y = - péché parce que ψ + péché ψ
ω_z = parce que + ψ

L'accélération angulaire : αω = $\frac{d}{dt}$ = $\frac{d}{dt}$ (e_ω ω) $\frac{de_\omega}{dt}$ ω + e $_\omega$ $\frac{d\omega}{dt}$

où

$\frac{de_\omega}{dt}$ = ψ̇ = e_ω α représente le changement de direction de la vitesse angulaire ω

La direction de α1 est perpendiculaire au plan contenant ψ et e $_\omega$ alors que l'orientation est donnée par la règle de la main droite.

La deuxième composante de l'accélération angulaire α = e 2 $_\omega$ $\frac{d\omega}{dt}$ repose sur l'axe naturel de rotation

Ainsi α α α = +1 donc la direction de l'accélération angulaire finale n'est pas 2 coïncident avec la direction de la vitesse angulaire totale.

L'accélération angulaire totale dans CS1 rectangulaire est enregistrée sous la forme α_x α_y = + jk α_z

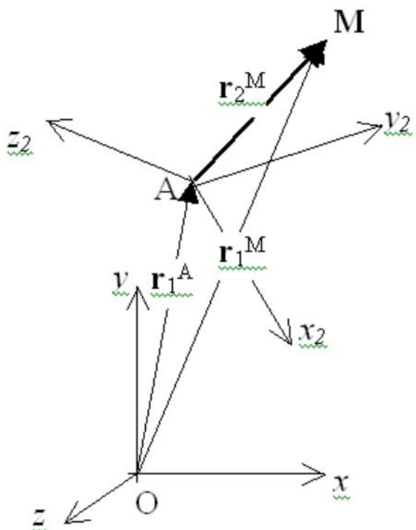
Dr Ing. Zdenka Sant
10/2009

3.7 MOUVEMENT D'UN CORPS DANS L'ESPACE UNIVERSEL

Définition:

Les trajectoires des points du corps se déplaçant avec un mouvement spatial universel sont un courbes spatiales. Ainsi, le type de mouvement est appelé mouvement spatial universel.

De même que nous avons décrit le mouvement planaire universel, nous pouvons imaginer que le mouvement final du corps consiste en la translation du corps et le mouvement sphérique, tandis que la translation et la rotation sont les mouvements décrits par rapport au point de référence sur le corps.



Si le point A est le point stationnaire pendant le mouvement sphérique, nous pouvons sélectionner ce point comme point de référence approprié tout en décrivant le mouvement final du corps.

Alors la position du point M sur le mobile est donnée

comme: $r_1^{MA} = r + r_1 \quad {}_1^{MA}$

et la vitesse et l'accélération dans CS1 données sous forme vectorielle :

$v_1^{MA} = v + \omega \times r \quad {}_1^{MA}$

$MA^{MA}\ une = une + \alpha \times r^{MA} + \omega \times \omega \times (r \quad)$ ${}_{1111}$

où α et ω sont des grandeurs cinématiques instantanées

sous forme matricielle : ^{MA} ±± 1 1 ± + ^{MA} $r_1 C\ r$ $_{221}$ ^{MA}

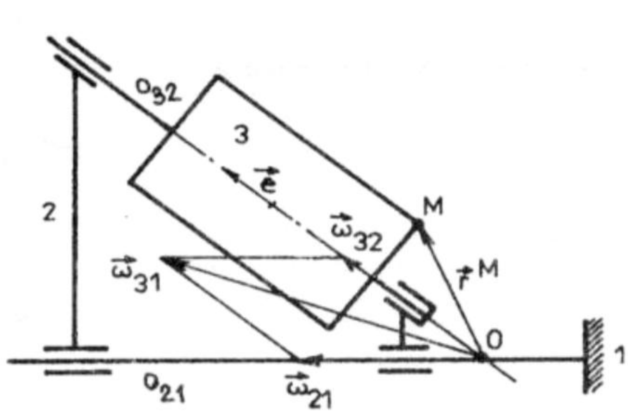
$v^{MA\ 1} = v + C\ r = v_1 \pm r_{1\ 221}$ ^{MA} $^{Un}_{1}$ $^{MA}_{11}$

$MA^{MA\ 1}\ une_1 = une_{1\ 221} + C\ r_{1\ 221} + C\ r = une^{MA\ A} + UNE_1\ r + r_{11}$ ^{MA} $^{2}_{1}$ ^{MA}

4 SYSTÈME DE CORPS

La stratégie d'évaluation des grandeurs cinématiques pour un seul corps peut également être étendue à un système de corps. Comme il a déjà été mentionné, le mouvement universel d'un corps particulier peut être décrit au moyen d'un mouvement combiné basé sur le mouvement relatif et moteur. Les deux mouvements, le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif, peuvent être de n'importe quel type - translation, rotation et mouvement planaire universel, etc.
Ainsi les grandeurs cinématiques d'un système de corps peuvent s'exprimer de la même manière. Avant la description du mouvement d'un corps particulier, il est utile sinon nécessaire d'analyser l'ensemble du système, de décrire la paire cinématique entre les corps, d'identifier la mobilité du système, d'identifier l'actionneur du système ainsi de définir la coordonnée indépendante, et définir enfin le type de mouvement de chaque corps du système.

4.1 ROTATIONS SIMULTANÉES AUTOUR D'AXES CONCURRENTS



Le corps B3 tourne autour de son axe de rotation naturel o32 (les lieux de tous les points qui restent fixes par rapport à B3), tandis que l'axe o32 est positionné sur le corps B2 qui tourne autour de son axe de rotation o21.

Le point O est stationnaire à tout moment donc le corps B3 se déplace avec un mouvement sphérique qui pourrait être interprété par l'équation symbolique comme un mouvement combiné 31 = 32 + 21

Ainsi on peut écrire pour la vitesse du point M $M_{31} = M_{32} + M_{21}$

représenté sous forme vectorielle par l'équation $v_{31}^{M} = \omega_{32} \times r^{M} + \omega_{21} \times r^{M}$ où $v_{31}^{M} = \omega_{31} \times r^{M}$

et enfin $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21}$

Ainsi, la vitesse angulaire finale est la somme de la vitesse angulaire du mouvement relatif et du mouvement moteur. Le vecteur de vitesse angulaire finale coïncide avec l'axe de rotation instantané.

L'accélération angulaire totale $\alpha_{31} = \frac{d}{dt}(\omega_{31}) = \frac{d}{dt}(e_{31}\omega_{31})$

Remplacement de la vitesse angulaire finale

$$\alpha_{31} = \frac{d}{dt}(\omega_{32} + \omega_{21}) = \frac{d}{dt}\omega_{32} + \frac{d}{dt}\omega_{21}$$

Alors l'accélération angulaire totale est $\alpha_{31} = e_{32}\frac{j\,\omega_{32}}{dt} + e_{21}\frac{j\,\omega_{21}}{dt}$

Où $\frac{d}{dt}(\omega_{32} e_{32}) = \frac{de_{32}}{dt}\omega_{32} + e_{32}\frac{d\omega_{32}}{dt} = (\omega_{21} \times \omega_{32} e_{32}) + \alpha_{32}$

et $\frac{d}{dt}(\omega_{21} e_{21}) = e_{21}\frac{d\omega_{21}}{dt} = e_{21}\alpha_{21} = \alpha_{21}$

donc l'accélération finale est donnée comme

$$\alpha_{31} = \alpha_{32} + \alpha_{21} + \omega_{21} \times \omega_{32}$$

Le dernier composant de l'équation est connu sous le nom d'accélération angulaire de revente

$$\alpha_{Res} = \omega_{21} \times \omega_{32}$$

La condition d'existence de l'accélération Resal : $\omega dr \neq 0$

$\omega rel \neq 0$

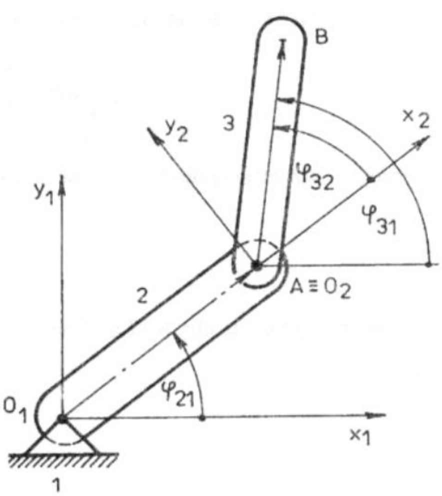
$\omega_{dr} \nparallel \omega_{rel}$

Les rotations simultanées sous forme matricielle :

vitesse angulaire: $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21} = \begin{bmatrix} \omega_{32x} \\ \omega_{32y} \\ \omega_{32z} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \omega_{21x} \\ \omega_{21y} \\ \omega_{21z} \end{bmatrix}_1$

accélération angulaire: $\alpha_{31} = \alpha_{32} + \alpha_{21} + \alpha_{res} = \begin{bmatrix} \alpha_{32x} \\ \alpha_{32y} \\ \alpha_{32z} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \alpha_{21x} \\ \alpha_{21y} \\ \alpha_{21z} \end{bmatrix}_1 + \omega_{21} \times \omega_{32}$

4.2 ROTATIONS SIMULTANÉES AUTOUR D'AXES PARALLÈLES



Étude des grandeurs cinématiques d'un mécanisme ou une partie de celui-ci nécessite de prendre en considération l'ensemble de la configuration des corps et des contraintes. Ainsi, la première étape consiste à analyser la mobilité en fonction des contraintes, à identifier l'actionneur qui contrôle le mouvement du système et à identifier le mouvement de chaque corps.

Ainsi, le système donné se compose de : B1 - cadre fixe

B2 – lien tournant

B3 - mouvement planaire universel

Les contraintes limitant le mouvement du système sont deux broches attachées au B2

B2 tourne autour de son centre de rotation fixe O1 et ses points dessinent des courbes planes – cercles concentriques.

B3 tourne autour du centre de rotation O2 qui relie B3 à B2

Ainsi le mouvement relatif est la rotation de B3 par rapport à B2 avec une vitesse angulaire ω32 et le mouvement moteur est la rotation de B2 par rapport à la fondation B1 avec une vitesse angulaire ω21.

Donc: kkk + 31 32 21

avec vitesse angulaire ω +k31 ω32= ω_{21} k

totale et accélération angulaire α 32k21 α = k + α 31 depuis 0 α ω=ω× = Rés 21 32

Ainsi les grandeurs cinématiques pour un point particulier B peuvent être exprimées sous forme vectorielle :

pour poste : BA BA = + rrr 1 1 1

pour la vitesse vvv = + B B B 31 32 21

v ω r ω r + × B BA 21 B 31 32 1 1

pour l'accélération :

aaaa = + + BBBB 31 32 21 cor

ω r 32 = 32 1 × (une ω BA) + ×α r 32 1 BA + 21 1 × (× + ×) ω ω r α r 21 21 B B 31 21 (ω v × BA) 21 32

ou sous forme matricielle

rrr = + BA BA 1 1 1

pour poste : B r C 21 C r = UN + 1 21 2 BA où r C r = BA 2 32 3 BA

r C + CC r UN 1 21 2 21 B 32 3 BA

pour la vitesse : B v = 31 21 (C r CC r C 21 2 21 32 3 21 32 32 3 UN BA) + C r BA

pour l'accélération :

une CAC r UNE B 31 = (+ + + 21 32 21 32 2 2 (2) BA 2 21) (rr 1 1 A BA) + 2 21 21 32 32 3 C C r BA

L'analyse de la possibilité de mouvement montre deux cas :

1. Rotations simultanées avec la même orientation de vitesse angulaire
2. Rotation simultanée avec des vitesses angulaires de sens opposé

Dans les deux cas, le mouvement résultant est une rotation avec une vitesse angulaire ω31

L'ingénieur en mécanique est confronté à des problèmes liés aux rotations simultanées autour d'axes parallèles dans un certain nombre d'applications telles que la boîte de vitesses, la boîte de vitesses planétaire, etc.