Apuntes de clase sobre cinemática

Dra. Ing. Zdena Sant

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

El diseño y el análisis son dos tareas vitales en la ingeniería.

Proceso de diseño significa la síntesis durante la fase de propuesta el tamaño, forma, material se prescriben las propiedades y disposiciones de las partes para cumplir con la tarea requerida.

El análisis es una técnica o más bien un conjunto de herramientas que permiten la evaluación crítica del diseño existente o propuesto para juzgar su idoneidad para la tarea.

Por lo tanto, la síntesis es una meta que se puede alcanzar a través del análisis.

El ingeniero mecánico se ocupa de muchas tareas diferentes que están en conjunto con diversos trabajos. procesos denominados procesos tecnológicos.

Los procesos tecnológicos involucran transporte de material, generación y transformación de energía, transporte de información. Todos estos procesos requieren movimiento mecánico, que es realizado por máquinas.

Para poder crear un diseño apropiado de máquina y mecanismo, se debe investigar la relación entre la geometría y el movimiento de las partes de una máquina/mecanismo y las fuerzas que causan el movimiento. Así, la mecánica como ciencia está involucrada en el proceso de diseño.

La Mecánica representa la ciencia que incluye la Estática, la Dinámica y la Mecánica de Materiales.

La estática proporciona análisis de sistemas estacionarios, mientras que la dinámica se ocupa de sistemas que cambian con el tiempo y, como sugirió Euler, la investigación del movimiento de un cuerpo rígido puede dividirse en dos partes, la parte geométrica y la parte mecánica. Dentro de la parte geométrica Cinemática la transferencia del cuerpo de una posición a otra se investiga sin tener en cuenta las causas del movimiento. El cambio está representado por fórmulas analíticas.

Por lo tanto, la cinemática es un estudio del movimiento aparte de las fuerzas que producen el movimiento que es descrito por posición, desplazamiento, rotación, rapidez, velocidad y aceleración.

En cinemática asumimos que todos los cuerpos bajo investigación son cuerpos rígidos, por lo que su deformación es insignificante y no juega un papel importante, y el único cambio que se considera en este caso es el cambio en la posición.

La terminología que usamos tiene un significado preciso como todas las palabras que usamos para expresarnos mientras nos comunicamos entre nosotros. Para asegurarnos de que entendemos el significado, tenemos un diccionario de sinónimos/glosario disponible. Es útil aclarar ciertos términos, especialmente en áreas donde la terminología no es muy clara.

La estructura representa la combinación de cuerpos rígidos conectados entre sí por juntas con la intención de ser rígidos. Por lo tanto, la estructura no realiza trabajo ni transforma el movimiento. La estructura se puede mover de un lugar a otro pero no tiene movilidad interna (no hay movimiento relativo entre sus miembros).

Máquinas y mecanismos : su propósito es utilizar el movimiento interno relativo para transmitir potencia o movimiento transformador.

Máquina : dispositivo utilizado para alterar, transmitir y dirigir fuerzas para lograr un objetivo específico.

Mecanismo : la parte mecánica de una máquina que tiene la función de transferir movimiento y fuerzas de la fuente de energía a una salida. El mecanismo transmite el movimiento desde el accionamiento o el enlace de entrada al seguidor o el enlace de salida.

Mecanismo plano : cada partícula del mecanismo dibuja curvas planas en el espacio y todas las curvas se encuentran en planos paralelos. El movimiento está limitado al espacio bidimensional y el comportamiento de todas las partículas se puede observar en tamaño y forma reales desde una sola dirección. Por lo tanto, todos los movimientos se pueden interpretar gráficamente. La mayoría de los mecanismos actuales son mecanismos planos, por lo que nos centraremos en ellos.

Mecanismo esférico : cada enlace tiene un punto estacionario a medida que se mueve el enlace y los puntos estacionarios de todos los enlaces se encuentran en una ubicación común. Así cada punto dibuja una curva sobre la superficie esférica y todas las superficies esféricas son concéntricas.

Mecanismo espacial : no tiene restricciones en el movimiento relativo de las partículas. Cada mecanismo que contiene un par de tornillos cinemáticos es un mecanismo espacial porque el movimiento relativo del par de tornillos es helicoidal.

El mecanismo por lo general consta de:

Armazón : por lo general, una parte que no muestra movimiento

Eslabones : las partes individuales del mecanismo que crean la conexión rígida entre dos o más elementos de un par cinemático diferente. (Los resortes no pueden considerarse eslabones ya que son elásticos).

El par cinemático (KP) representa la unión entre eslabones que controla el movimiento relativo por medio de la superficie de acoplamiento, por lo que algunos movimientos están restringidos mientras que otros están permitidos. El número de movimientos permitidos se describe a través de la movilidad del KP. Se supone que las superficies coincidentes tienen una geometría perfecta y entre las superficies coincidentes no hay juego.

Articulación : conexión móvil entre eslabones denominada también par cinemático (pasador, articulación deslizante, articulación de leva) que impone restricciones al movimiento.

La cadena cinemática está formada por varios eslabones conectados entre sí de forma móvil mediante articulaciones. La cadena cinemática puede cerrarse o abrirse según la organización de los eslabones conectados.

Enlace simple : un cuerpo rígido que contiene solo dos articulaciones

Enlace complejo : un cuerpo rígido que contiene más de dos articulaciones

Actuador : es el componente que impulsa el mecanismo.

El año pasado empezamos a hablar de los fundamentos de la Mecánica – Estática y más adelante de la transferencia de las fuerzas y su efecto sobre los elementos de la estructura/máquina. Nuestro cálculo de las fuerzas se basó únicamente en la estática y al principio asumimos que las fuerzas existen en la estructura o se aplican muy lentamente para que no causen ningún efecto dinámico en la estructura.

Esta situación está lejos del mundo real ya que no hay nada estacionario en el mundo. (Dame un fijo Punto y voy a girar el mundo. Arquímedes 287 a. C. - 212 a. C. matemático, físico griego)

La cinemática se ocupa de la forma en que se mueven las cosas. Es un estudio de la geometría del movimiento que implica la determinación de la posición, el desplazamiento, la rapidez, la velocidad y la aceleración.

Esta investigación se realiza sin tener en cuenta el sistema de fuerzas que actúa sobre un actuador.

El actuador es un dispositivo mecánico para mover o controlar un mecanismo o sistema.

Por lo tanto, las cantidades básicas en Cinemática son el espacio y el tiempo tal como se definen en Estática.

La cinemática describe el movimiento de un objeto en el espacio considerando la dependencia del tiempo.

El movimiento se describe mediante tres cantidades cinemáticas:

El vector de posición da la posición de un punto particular en el espacio en el instante.

La tasa de cambio de tiempo del vector de posición describe la velocidad del punto.

Aceleración : la tasa de cambio de la velocidad en el tiempo

Todas las cantidades: posición, velocidad y aceleración son vectores que se pueden caracterizar con respecto a:

Cambio de una magnitud escalar – movimiento uniforme
Movimiento uniformemente acelerado
Movimiento acelerado no uniforme
Movimiento armónico

Carácter de la trayectoria - 3D (movimiento en el espacio)
2D (movimiento plano)

El tipo de trayectoria se puede especificar como: Movimiento rectilíneo
Rotación
Movimiento plano universal
movimiento esferico
Movimiento espacial universal
Movimiento complejo

El conjunto de coordenadas independientes en el espacio describe la posición de un cuerpo como un tiempo función define así el movimiento de un cuerpo.

El número de coordenadas independientes corresponde al grado de libertad del objeto o conjunto de cuerpos acoplados y se expresa como la movilidad del objeto.

Movilidad : el número de grados de libertad que posee el mecanismo. Se requiere el número de coordenadas independientes (entradas) para posicionar con precisión todos los enlaces del mecanismo con respecto al marco de referencia/sistema de

Para mecanismo plano: −∑ DOF coordenadas. = j −

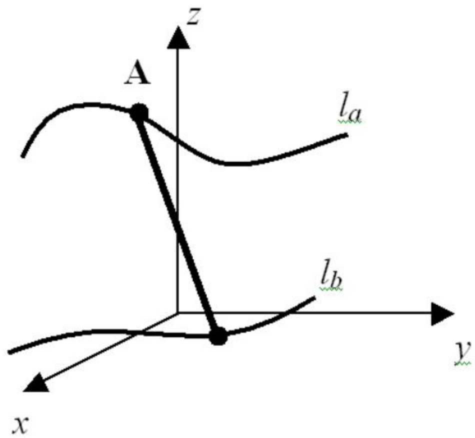
Para mecanismo espacial: −∑ yo D(3 F orte (6 1 norte − j) 1

Diagrama cinemático : es un boceto "desmontado" del mecanismo (forma de esqueleto donde solo se muestran las dimensiones que influyen en el movimiento del mecanismo).

Partícula : es un cuerpo modelo con dimensiones físicas muy pequeñas/insignificantes en comparación con el radio de la curvatura de su trayectoria. La partícula puede tener una masa asociada que no juega ningún papel en el análisis cinemático.

¿Cómo encontrar el grado de libertad?

1. Considere una línea sin restricciones que se mueve en el espacio



La condición de no penetración entre puntos

un, b

$\overline{AB}$ = const. = yo

número de grados de libertad para una línea en 3D: dos puntos ⟹ 2*3 = 6 DOF

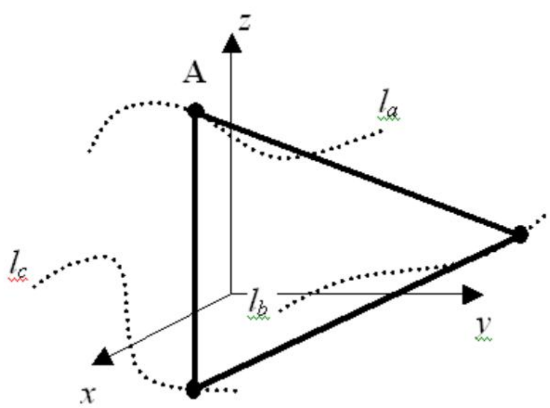
condición no penetrante: $\overline{AB}$ = I

Así i = 6 −1 = 5 DOF

Conclusión: Un eslabón libre AB tiene cinco grados de libertad cuando se mueve en el espacio.

2. Considere un cuerpo sin restricciones en el espacio

¿Cuántos puntos describirán la posición de un cuerpo?



Tres puntos: 3*3 = 9 DOF

Condición no penetrante (suponiendo cuerpo rígido):

AB = const.; CA = constante; BC = const.

por lo tanto m = 3

y 6 i = 3*3 − 3 = DOF

Conclusión: Un cuerpo sólido libre tiene seis grados de libertad cuando se mueve en el espacio.

Para poder evaluar el DOF, se debe crear el diagrama cinemático del mecanismo.

Los diagramas deben dibujarse a escala proporcional al mecanismo real en la posición dada.

La convención es numerar los enlaces comenzando con el marco de referencia como el número uno, mientras que las uniones deben tener letras.

La estrategia adoptada debe consistir en identificar en el conjunto real de cuerpos:

el marco, el actuador y todos los demás eslabones

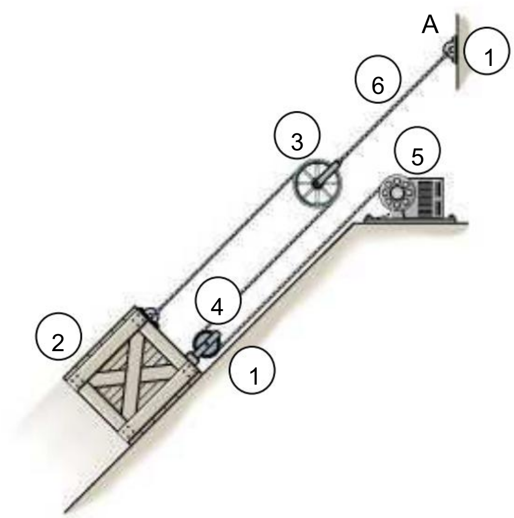
todas las

juntas cualquier punto

de interés y dibujar el diagrama cinemático de acuerdo con la convención.

Una vez que evaluamos la movilidad (grados de libertad) podemos identificar el correspondiente conjunto de coordenadas independientes (parámetros) y comenzar el análisis cinemático del mecanismo.

procediendo a través de la subtarea: a)
definir el marco de referencia (espacio básico en el que se describirá el movimiento) b) definir la posición de un punto/partícula con respecto al marco de referencia c) describir el tipo de movimiento (restringido o sin restricciones) d) escribir las condiciones de no penetración e) definir las coordenadas independientes f) encontrar la velocidad y la aceleración



1 Base

2 Caja

3 Polea

4 Polea

5 Motor/Actuador

6 Enlace

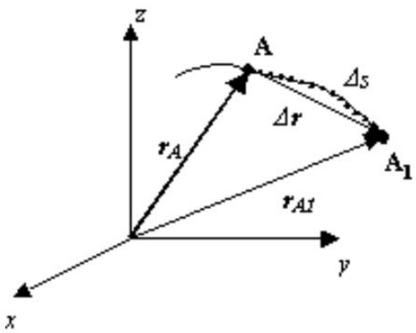
Análisis conjunto:
A…. alfiler …. 2 dof

yo = 3(6 − 1) (5 + 2 3 1)

El análisis cinemático de todo el conjunto de cuerpos conectados se puede realizar si somos capaces de describir el movimiento de cada segmento/cuerpo y luego identificar las cantidades cinemáticas en el punto de interés en la posición o tiempo requerido.

Entonces, comencemos con la cinemática de una partícula que se muestra en el diagrama como un punto.

2 CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA



El vector de posición rA describe la posición de una partícula/ punto A, con respecto al marco de referencia (CS x,y,z).

El carácter de un vector de posición depende del sistema de coordenadas arbitrario

En el instante el punto A tiene una posición
= r = t)(tf)(rA
durante el intervalo de tiempo Δt el punto se mueve a un nuevo posición A1 que puede ser descrita por un vector de posición rA1

$$r_{A1} = r_A + \Delta r$$

donde: Δr ....representa el incremento del vector de posición en el intervalo de tiempo

Δs ...representa el incremento de la trayectoria en el intervalo de tiempo

La Distancia representa la medida de la posición instantánea del punto con respecto al origen.

La trayectoria/camino del punto particular es el lugar geométrico de todas las posiciones instantáneas de ese punto.

El vector unitario de la trayectoria:

τ …vector unitario en la dirección de la tangente

$$\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds}$$

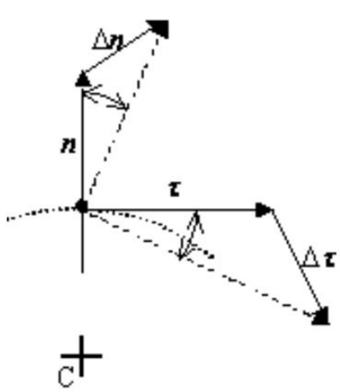
entonces

$$\tau = \frac{d}{ds}(xyz\,ijj) = + + \frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \quad \frac{dz}{ds}$$

dónde $\frac{dx}{ds}$ = porque α_t ; $\frac{dy}{ds}$ = porque β_t ; $\frac{dz}{ds}$ = porque γ_t

son los cosenos direccionales de la tangente a la trayectoria, y los ángulos αt, βt, γt son los ángulos entre los ejes x, y, z y el vector tangente τ

n …el vector unitario en la dirección normal a la trayectoria tiene una orientación positiva hacia el centro de la curvatura de la trayectoria



$$\text{norte} = \tau \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{d\tau}{d}$$

teniendo en cuenta el radio de curvatura de la trayectoria R entonces

$$ds\ R\ d. = \quad y \qquad d = \frac{ds}{R}$$

de este modo $n = = \frac{\frac{d\tau}{ds}}{R}$ $R.\frac{d\tau}{ds}$. Sustituyendo por τ obtenemos

$$jn = R = \frac{d^2 r}{ds^2} \quad R\frac{dx^2}{ds^2} i \quad R\frac{dy^2}{ds^2} + R\frac{dz^2}{ds^2} k$$

dónde: $R\frac{d^2x}{ds^2} = \text{porque}\,\alpha_n$; $R\frac{d^2y}{ds^2} = \text{porque}\,\beta_n$; $R\frac{d^2z}{ds^2} = \text{porque}\,\gamma_n$ son los cosenos direccionales de normal a la trayectoria, y αn; βn; γn son los ángulos entre los ejes x, y, z y la normal

En el caso de movimiento 3D, la trayectoria es una curva 3D, por lo que se debe definir un tercer vector unitario en dirección bi-normal:

b … el vector unitario en la dirección binormal a la trayectoria está orientado de tal manera que la dirección positiva de las formas vectoriales binormales junto con el sistema perpendicular orientado a la derecha normal y tangente.

$$b = \tau \times n$$

2.1 VELOCIDAD

Es la tasa de cambio en el tiempo del vector posicional.

La velocidad promedio de cambio se define como $v_{Avr} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$

Nuestro interés es encontrar una velocidad instantánea, que represente el caso límite de la velocidad media. El límite de tiempo para el cálculo de la velocidad instantánea se aproxima a cero. Δ

La velocidad instantánea se define como: $v = \text{límite}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$

¿Cuál es la dirección de la velocidad instantánea?

Un sentido común o mejor dicho intuición sugiere que la velocidad tiene la dirección tangente a la trayectoria Así que demostremos matemáticamente esta afirmación:

$$v = \text{límite}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta s} = \text{límite}_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}\ \text{límite}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \tau\,\dot{s} = \tau\,v$$

desde $\dot{s} = \text{límite}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$

Teniendo un vector posicional definido como: r = xi + yj + zk

entonces la velocidad puede ser descrita por sus componentes, ya que:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(xi + yj + zk) = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k = v_x i + v_y j + v_z k$$

donde vx, vy, vz son componentes de la velocidad en la dirección de los ejes del sistema de coordenadas.

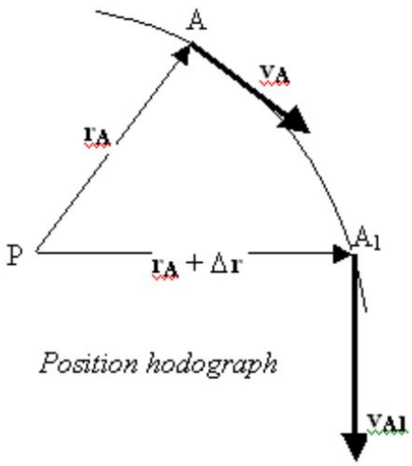
La magnitud/módulo de la velocidad: $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

con cosenos direccionales: $\text{porque}\,\alpha_v = \frac{v_x}{|v|}$; $\text{porque}\,\beta_v = \frac{v_{muy}}{|v|}$; $\text{porque}\,\gamma_v = \frac{v_z}{|v|}$

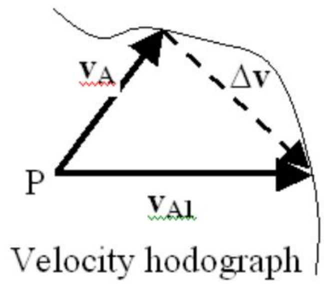
2.2 ACELERACIÓN

La aceleración de un cambio de posición es la tasa de cambio de velocidad en el tiempo.

Para derivar la expresión de la aceleración, necesitamos dibujar el diagrama vectorial de velocidad llamado hodógrafa de velocidad.



Position hodograph



Velocity hodograph

Construyendo una hodógrafa basada en el conocimiento de la trayectoria de un punto y su velocidad en una posición particular A y A1: Tengamos un punto P arbitrario a través del cual pasarán ambas velocidades , vA y vA1 . Los puntos finales de sus vectores están creando la hodógrafa de curva deseada.

Basado en hodógrafa $v_{A1} = v_A + \Delta v$

La aceleración promedio se da como $a_{avr} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

La aceleración instantánea se da como el valor límite de la aceleración promedio para el intervalo de tiempo $\Delta t \to 0$

$$a = \text{límite}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

La dirección de la aceleración se puede encontrar a partir de $un = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau v) = \frac{d\tau}{dt} v + \tau \frac{dv}{dt}$

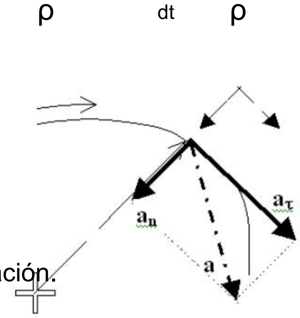
De este modo $un = \frac{d\tau}{dt} v + \tau \frac{dv}{dt} = \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dt} v + \tau \frac{dv}{dt} = \frac{d\tau}{ds} v^2 + \tau \frac{dv}{dt}$

Dado que la dirección de la normal se da como $norte = R \cdot \frac{d\tau}{ds}$ entonces podemos sustituir $\frac{d\tau}{ds} = \frac{n}{\rho}$ dónde ρ representa el radio de la curvatura en el instante. Por lo tanto:

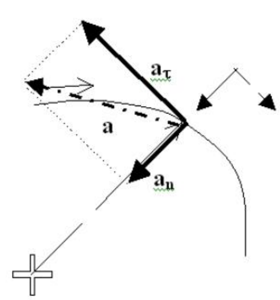
$$un = norte \frac{v^2}{\rho} + \tau \frac{dv}{dt} = norte \frac{1}{\rho} \dot{s}^2 + \tau \ddot{s} = un_n + un_t$$

Dónde $un_n = norte \frac{v^2}{\rho}$ es el aceleración en dirección normal, y

$a_t = \tau \ddot{s}$ es la componente tangencial de la aceleración.



Accelerated motion



Decelerated motion

La dirección de la aceleración normal siempre está orientada al centro de curvatura instantánea de la trayectoria. La componente tangente de la aceleración captura el cambio de magnitud de una velocidad mientras que la componente normal captura el cambio de dirección de una velocidad.

La aceleración resultante forma un ángulo β con dirección normal: broncearse $\beta = \frac{|a_t|}{|a_n|}$

Así la aceleración expresada en el sistema de coordenadas rectangulares tendría la forma:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(yo\ v_x + v_y\ jk_z) = yo\ un_x + un_y\ jk + un_z$$

$$a = \frac{d}{dt}(\ yo + + = + + xyz\ jkijk\ xyz)$$

y la magnitud de la aceleración: $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

La orientación de la aceleración final viene dada por los cosenos direccionales:

$$\text{porque}\ \alpha_a = \frac{a_x}{|a|};\quad \text{porque}\ \beta_a = \frac{a_y}{|a|};\quad \text{porque}\ \gamma_a = \frac{a_z}{|a|}$$

y al mismo tiempo $\text{porque}^2\alpha + \text{porque}^2\beta + \text{porque}^2\gamma = 1$

La descripción precisa del movimiento de una partícula está dada por la función que captura toda la cinemática. cantidades f (,, avr un ,t) = 0 Tennesse

2.2.1 Clasificación del movimiento

Considere el movimiento de la partícula a lo largo de la línea recta (en la dirección del eje x).

La componente tangencial de la aceleración captura el cambio de magnitud de la velocidad, por lo que puede utilizarse para distinguir el movimiento como:

Movimiento uniforme

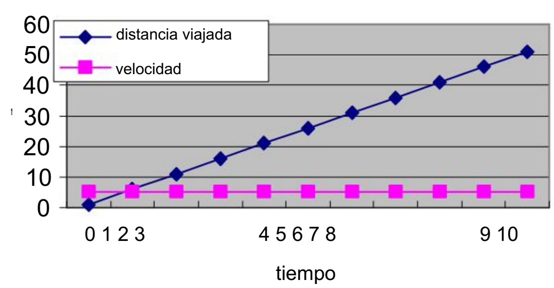
Descripción matemática: = 0 así = a_t = 0 en $\frac{dv}{dt}$ eso implica v = const.

En caso de que la tangente tome la dirección del eje x entonces $v_x =$ constante v · y ecuación vx = $\frac{dx}{dt}$

representa la ecuación diferencial simple resuelta por separación de

Variables $v_x \int_0^t dt = \int_{x_0}^{x} dx$, dando así

la solucion $x = x_0 + v_x$



Movimiento uniformemente acelerado/desacelerado

Descripción matemática: una $_t$ = const.

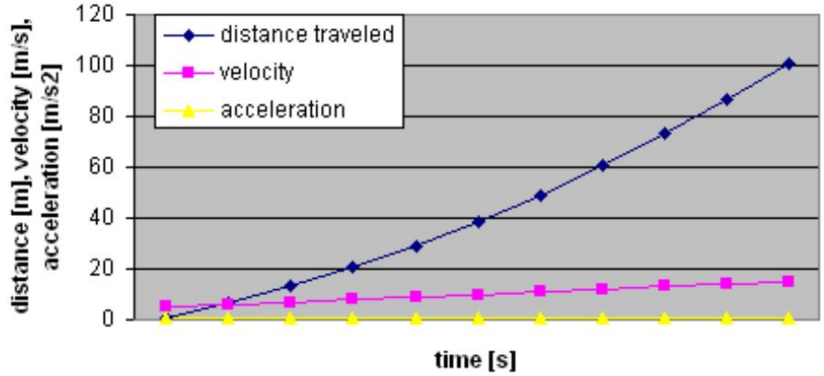
En caso de que la tangente tome la dirección del eje x entonces una $_x$ = const. y $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ de este modo

hacha $\int_0^t$ dt dv $\int_{v_0}^{v}$ = $_x$ que conduce a la solución vy $_x$ ta = 0 + $_x$

al mismo tiempo vx = $\frac{dx}{dt}$ por lo tanto ( ) v $\int_0^t$ dtta dx $_x$ = $\int_{x_0}^{x}$ que da la solución: + 0

$$x = x_0 + tv_0 + ta \frac{1}{2}{}_x{}^2$$

La solución conduce a una ecuación de trayectoria del punto expresada en función del tiempo.



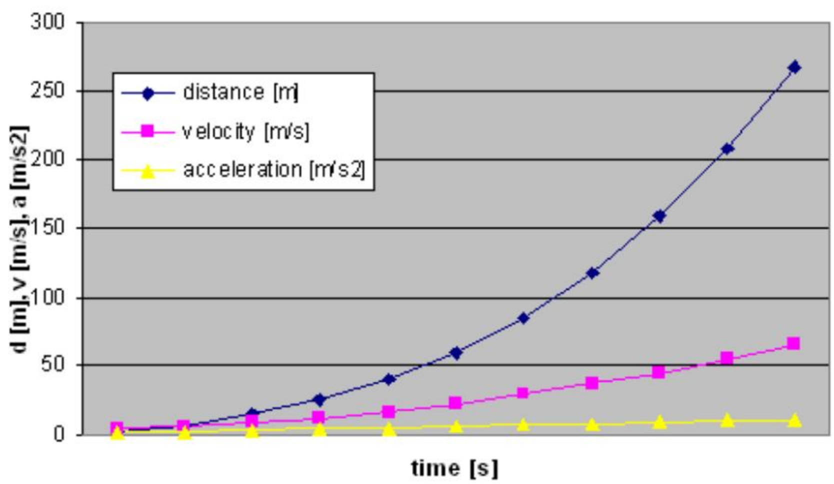
Movimiento acelerado no uniforme

Descripción matemática: aaa $_t$ kt = $_x$ = $_0$ ± (la función podría definirse de otra manera)

Así ≠ una $_x$ const . = $\frac{dv_x}{dt}$ por lo tanto $\int_0^t$ (un $_0$ ± kt dt) dv = $\int_{v_0}^{v}$ $_x$ con solucion

vv $_x$ ta kt = + ± 0 0 $\frac{1}{2}$ ^{2} desde vx = $\frac{dx}{dt}$ entonces $\int_0^t$ v $_0$ ta kt $_0$ dt dx $\frac{1}{2}$ ^{2} = $\int_{x_0}^{x}$ que da el + ±

ecuación de trayectoria $x_0 = x + tv_0 + ta_0 \frac{1}{2}{}^2 \pm kt \frac{1}{6}{}^3$



Dra. Ing. Zdenka Sant
10/2009

Movimiento con otros cambios de cantidades cinemáticas

En este caso la aceleración viene dada en función de otras cantidades a = (,, tvrf)

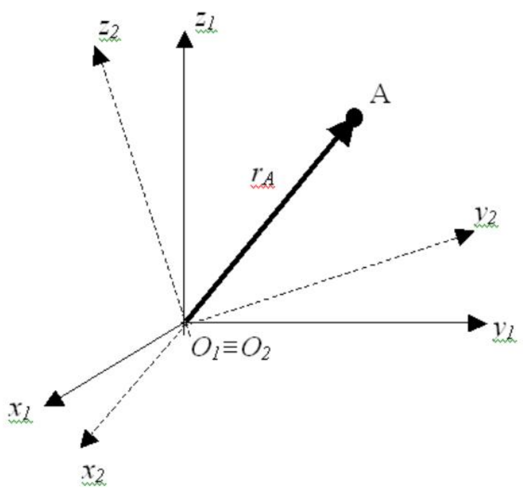
2.3 TRANSFORMACIÓN ORTOGONAL

Puedes ver muy claramente que la velocidad y la aceleración dependen directamente del vector posicional. La forma del vector posicional variará según el tipo de sistema de coordenadas. Así, en el sistema de coordenadas rectangulares (x, y, z) las cantidades cinemáticas en forma vectorial son:

$r = r_x i + r_y j + r_z k$ (vector posicional)

$v = v_x i + v_y j + v_z k = \frac{d}{dt}(r_x i + r_y j + r_z k)$ (velocidad)

$a = a_x i + a_y j + a_z k = \frac{d}{dt}(v_x i + v_y j + v_z k) = \frac{d^2}{dt^2}(r_x i + r_y j + r_z k)$ (aceleración)



Sea el punto A unido al sistema de coordenadas en movimiento x_2, y_2, z_2 con su origen coincidiendo con el sistema de coordenadas fijo x_1, y_1, z_1; $O1 \equiv O2$

La forma vectorial de una posición del punto A en CS1:

$$r_1^A = r_x^A i_1 + r_y^A j_1 + r_z^A k_1$$

y en CS2: $r_2^A = r_x^A i_2 + r_y^A j_2 + r_z^A k_2$

en forma matricial: $r_1^A = \begin{bmatrix} x_1^A \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ y $r_2^A = \begin{bmatrix} x_2^A \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$;

o en $r_1 = [x_1\ y_1\ z_1]$ y en $r_2 = [x_2\ y_2\ z_2]$

Para expresar el vector posicional r_2^A en CS1, el vector debe transformarse. este proceso es llamada Transformación Ortogonal de Cantidades Vectoriales

2.3.1 Transformación ortogonal de cantidades vectoriales

La operación matemática está utilizando la forma matricial de un vector.

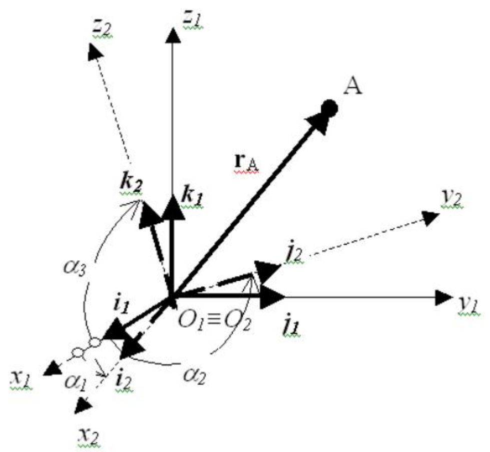
El CS1 está asociado con un marco/espacio básico que sirve como un marco de referencia fijo que no no moverse.

El punto móvil A está conectado al CS2, que se mueve con respecto al marco de referencia.

Por lo tanto, la posición del punto A en CS1 es

$r_1^A = x_1^A i_1 + y_1^A j_1 + z_1^A k_1$ y en cs2

$r_2^A = x_2^A i_2 + y_2^A j_2 + z_2^A k_2$



¿Cómo interpretamos el vector posicional r2? ^{A} en CS1?
La tarea es proyectar el vector r2 A en CS1.
Proyectando así el vector r2 ^{A} en la dirección x1 :

$$x_1^A = r_2^A \; yo_1 = (x_2^A yo_2 + y_2^A j_2 + z_2^A k_2) yo_1$$

dónde: $\text{porque}\,\alpha_1 = \frac{i_1}{i_2}\, yo = yo_1\, \text{porque}_2\, \alpha_1$

$$\text{porque}\,\alpha_2 = \frac{i_1}{j_2}\, yo = j_1 \;\text{porque}_2\,\alpha_2$$

$$\text{porque}\,\alpha_3 = \frac{i_1}{k_2}\, yo = k_1 \;\text{porque}_2\,\alpha_3$$

De este modo $x_1^A = x_2^A i_2 i_1 + y_2^A j_2 i_1 + z_2^A k_2 i_1 = x_2^A \text{ yo porque}\,\alpha_1 + y_2^A\, jj \text{ porque}\,\alpha_2 + z_2^A\, k \text{ porque}\,\alpha_3$

$$x_1^A = r_2^A\, yo_1 = (x_2^A yo_2 + y_2^A j_2 + z_2^A k_2)\, yo_1 = x_2^A \text{ porque}\,\alpha_1 + y_2^A \text{ porque}\,\alpha_2 + z_2^A \text{ porque}\,\alpha_3$$

$$y_1^A = r_2^A\, j_1 = (x_2^A yo_2 + y_2^A j_2 + z_2^A k_2)\, j_1 = x_2^A \text{ porque}\,\beta_1 + y_2^A \text{ porque}\,\beta_2 + z_2^A \text{ porque}\,\beta_3$$

$$z_1^A = r_2^A\, k_1 = (x_2^A yo_2 + y_2^A j_2 + z_2^A k_2)\, k_1 = x_2^A \text{ porque}\,\gamma_1 + y_2^A \text{ porque}\,\gamma_2 + z_2^A \text{ porque}\,\gamma_3$$

reescribir estas tres ecuaciones en forma matricial dará

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^A = \begin{bmatrix} \text{porque}\,\alpha_1 & \text{porque}\,\alpha_2 & \text{porque}\,\alpha_3 \\ \text{porque}\,\beta_1 & \text{porque}\,\beta_2 & \text{porque}\,\beta_3 \\ \text{porque}\,\gamma_1 & \text{porque}\,\gamma_2 & \text{porque}\,\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^A \qquad r_1^A = C_{21}\, r_2^A$$

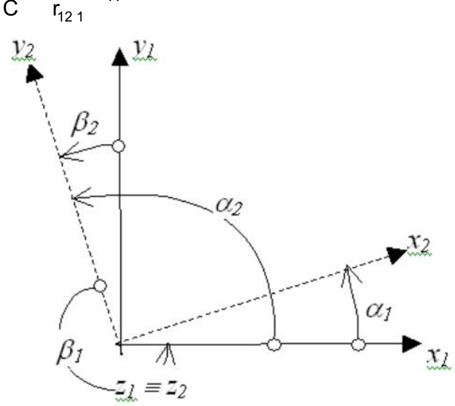
dónde $C_{21} = \begin{bmatrix} \text{porque}\,\alpha_1 & \text{porque}\,\alpha_2 & \text{porque}\,\alpha_3 \\ \text{porque}\,\beta_1 & \text{porque}\,\beta_2 & \text{porque}\,\beta_3 \\ \text{porque}\,\gamma_1 & \text{porque}\,\gamma_2 & \text{porque}\,\gamma_3 \end{bmatrix}$

La transformación analógica de CS1 a CS2 da: $r_2^A = C_{12}\, r_1^A$

donde

$$C_{12} = C_{21}^T = \begin{bmatrix} \text{porque}\,\alpha_1 & \text{porque}\,\beta_1 & \text{porque}\,\gamma_1 \\ \text{porque}\,\alpha_2 & \text{porque}\,\beta_2 & \text{porque}\,\gamma_2 \\ \text{porque}\,\alpha_3 & \text{porque}\,\beta_3 & \text{porque}\,\gamma_3 \end{bmatrix}$$

y $C_{21} C_{21}^T = yo$



El movimiento plano es un caso especial cuando en cualquier momento del movimiento $z_1 \equiv z_2$

$\alpha_1 =$; $\alpha_2 = +\frac{}{2}\pi$; $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$

$\beta_1 = +\frac{3}{2}\pi$; $\beta_2 =$; $\beta_3 = \frac{\pi}{2}$

$\gamma_1 = \frac{\pi}{;2}$ $\gamma_2 = \frac{\pi}{;2}$ $\gamma_3 = 0$

y

$$C21 = \begin{bmatrix} \text{porque} & -\text{pecado} & 0 \\ \text{pecado} & \text{porque} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \text{porque} & -\text{pecado} \\ \text{pecado} & \text{porque} \end{bmatrix}$$

Una vez que el vector posicional se expresa en forma de matriz y se utiliza la transformación ortogonal, la velocidad y la aceleración se pueden expresar de la misma forma.

2.3.2 Velocidad en forma matricial usando la transformación ortogonal

La velocidad es la primera derivada del vector posicional

$$Un_1^A\ v = r_1 = \frac{d}{dt}\left(C_{21} r_2^A\right) = C_{21} r_2 + C_{21} r^A$$

Si el punto A no cambia de posición con respecto al origen CS2 entonces r_2^A = const. y por lo tanto $r_2^A = 0$ y $v_1^{un} = C_{21} r_2^A$

2.3.3 Aceleración en forma matricial usando la transformación ortogonal

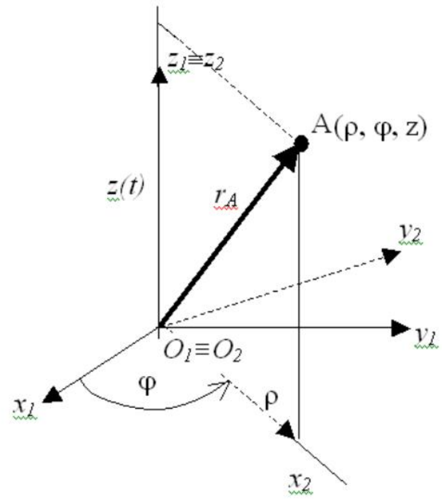
La aceleración es la primera derivada de la velocidad y la segunda derivada del vector posicional, por lo tanto

$$a_1^{un} = v_1^{un} = r_1^{un} = C_{21} r_2^A + 2 C_{21} r_2 + C_{21} r_2^A$$

Si el punto A no cambia de posición con respecto al origen CS2 entonces r_2^A = const. y por lo tanto $r_2^A = 0$ y dando así $r_2^A = 0$ $un_1^A = C_{21}\ r_2^A$

2.4 PARTICULA EN SISTEMA DE COORDENADAS CILINDRICAS - r, ,z

2.4.1 El vector de posición



en CS2 $\overset{A}{}_{222}$ ρ r zik = +

en forma de matriz $r_2^A = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$

Así r = C r 21 A 2 y puesto que

$$C_{21} = \begin{bmatrix} \text{porque} & -\text{pecado} & 0 \\ \text{pecado} & \text{porque} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_1^{un} = C_{21} r_2^A = \begin{bmatrix} \text{porque} & -\text{pecado} & 0 \\ \text{pecado} & \text{porque} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\ \text{porque} \\ \rho\ \text{pecado} \\ z_2 \end{bmatrix}$$

en forma vectorial: r_1^A = ρ porque yo + 1 ρ pecado j 1 1 + z k

2.4.2 La velocidad

Expresado en forma vectorial un v 2 = = dd / dt dt —(ρ ikik z +) = ρ + ρ + yo 2 + z k2 2 2z2

donde el vector unitario k2 permanece constante (la magnitud y la dirección no cambian con k tiempo), por lo tanto 2 = 0

El vector unitario i2 gira en el plano x, y alrededor del origen por lo que la velocidad se da como

$$\text{una } v_2 = \frac{d\rho}{dt} i_2 + \rho \frac{di_2}{dt} + \frac{dz}{dt} k_2$$ dónde

$\frac{di_2}{dt} = \frac{d}{dt}$ × = × = yo ω yo 2 2 j 2 ω representa el vector transversal perpendicular al vector unitario i2.

Así la velocidad 2 una v = $\frac{d\rho}{dt}$ yo + 2 ρ $\frac{d}{j}$ 2 2 + $\frac{dz}{dt}$ k yo ρ + 2 ρ j 2 2 + z k

Dónde ρ dt 2 = jv ρ representa la componente radial de la velocidad

ρ 2 = jv r representa la componente transversal de la velocidad

z 2 = kv z representa la componente z de la velocidad

en forma de matriz: la velocidad de transposición en CS2 $v_2^T = [\rho \quad \rho \quad z]$

en CS1 $v_1^{un} = C_{21} v_2^A = \begin{bmatrix} \text{porque} & -\text{pecado} & 0 \\ \text{pecado} & \text{porque} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\ \text{porque} - \rho\omega\ \text{pecado} \\ \rho\ \text{pecado} + \rho\omega\ \text{porque} \\ z \end{bmatrix}$

2.4.3 La aceleración

en forma vectorial $\underline{a}_2 = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\, i_2 + \rho\, \dot{\varphi}\, j_2 + \dot{z}\, k_2) = \frac{d}{dt}(\rho\, i_2 + \rho\, \omega\, j_2 + \dot{z}\, k_2)$

$a_2^A = \ddot{\rho}\, i_2 + \dot{\rho}\, \dot{i}_2 + \dot{\rho}\, \omega\, j_2 + \rho\, \dot{\omega}\, j_2 + \rho\, \omega\, \dot{j}_2 + \ddot{z}\, k_2$

$a_2^A = \ddot{\rho}\, i_2 + \dot{\rho}\, \omega\, j_2 + \dot{\rho}\, \omega\, j_2 + \rho\, \alpha\, j_2 + \rho\, \omega\, \dot{j}_2 + \ddot{z}\, k_2$

dónde: $\frac{d j_2}{dt} = \omega \times j_2 = -i_2\, \omega$

dando así la aceleración $a_2^A = \ddot{\rho}\, i_2 + 2\dot{\rho}\, \omega\, j_2 + \rho\, \alpha\, j_2 - \rho\, \omega^2\, i_2 + \ddot{z}\, k_2$

$a_2^A = (\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\varphi}^2)\, i_2 + (\rho\, \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\, \dot{\varphi})\, j_2 + \ddot{z}\, k_2$

dónde $(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\varphi}^2) = a_\rho$ representa la aceleración radial

$(\rho\, \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\, \dot{\varphi}) = a_\varphi$ representa la aceleración transversal

$\ddot{z} = a_z$ representa la aceleración en la dirección del eje z

en forma matricial:

$$a_2^A = \begin{bmatrix} \ddot{\rho} - \rho\, \dot{\varphi}^2 \\ \rho\, \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\, \dot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

$$a_1^A = C_{12}\, a_2^A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\rho} - \rho\, \dot{\varphi}^2 \\ \rho\, \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\, \dot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

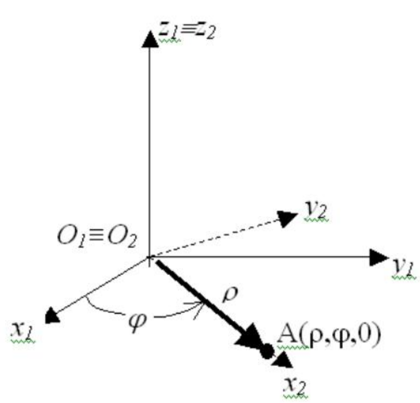
En esta presentación, asociamos el ángulo φ con la coordenada vectorial angular, por $\varphi = \varphi\, k_1 = \varphi\, k_2$ lo tanto, la velocidad angular $\omega = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}\, k_1 = \omega\, k_1$ y la aceleración angular $\alpha = \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}\, k_1 = \alpha\, k_1$

2.4.4 Casos especiales

a) $z=0$, ρ = constante, $\varphi(t)$

La partícula (el punto A) está restringida al plano x,y solamente y se mueve de tal manera que la trayectoria de la el punto A es un círculo en el plano x,y.

La velocidad y aceleración expresada en coordenadas generales en el párrafo anterior es:



$v_2^A = \dot{\rho}\, i_2 + \rho\, \dot{\varphi}\, j_2 + \dot{z}\, k_2$

$a_2^A = (\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\varphi}^2)\, i_2 + (\rho\, \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\, \dot{\varphi})\, j_2 + \ddot{z}\, k_2$

Así, para nuestro caso particular en CS2: $v_2^A = \rho\, \dot{\varphi}\, j_2$

en CS1: $v_1^A = -\rho\, \dot{\varphi} \sin\varphi\, i_1 + \rho\, \dot{\varphi} \cos\varphi\, j_1$

y aceleración en CS2: $A_{un\,2} = -\rho \dot{\ }^2 yo + \rho \ j\,2$

dónde $A_{un\,2n} = -\rho \ ^2_{yo\,2}$ representa la aceleración normal orientada siempre hacia el centro de curvatura de la trayectoria

$A_{un\,2T} = \rho \ j\,2$ representa la componente tangencial de una aceleración

en CS1: $A_{un\,1} = -(\rho \ ^2 \text{porque} - \rho \ \text{pecado})yo + (\rho \ \text{porque} - \rho \ ^2 \text{pecado})j\,1$

dónde $-\rho \ ^2 \text{porque} = a_{nx}$ es la componente x de la aceleración normal en CS1

$-\rho \ \text{pecado} = a_{Tx}$ es la componente x de la aceleración tangencial en CS1

$\rho \ \text{porque} = a_{Ty}$ es la componente y de la aceleración tangencial en CS1

$-\rho \ ^2 \text{pecado} = a_{ny}$ es la componente y de la aceleración normal en CS1

b) z=0 , ρ(t), (t)

La partícula (punto) se mueve en el plano x,y y la descripción del problema usa coordenadas polares (ρ,)

2.5 TRAYECTORIA DE PARTÍCULAS

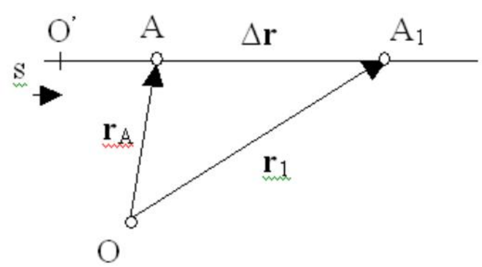
El movimiento podría clasificarse con respecto a la trayectoria como:

2.5.1 Movimiento rectilíneo

La posición de un punto se describe como una función de coordenadas curvilíneas s : r = r(s)

dónde $\frac{dr}{ds} = \tau$ y $\tau^2 = 1$

La condición necesaria para el movimiento rectilíneo es dado como: τ = const.



La velocidad se da como: d

$$= \frac{rvr}{dt} = \frac{d}{dt} = \frac{ds}{ds}\tau = s\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}$$

y aceleración: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau\ s) = \tau\ s$

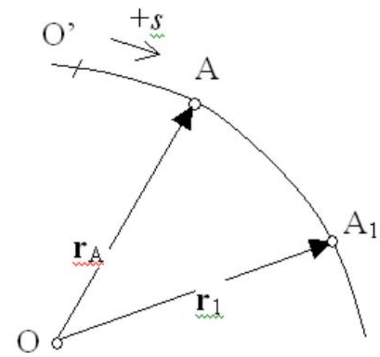
Si: s = constante. por lo tanto 0 s = …movimiento rectilíneo uniforme

s ≠ const. de este modo 0 s ≠ …..movimiento rectilíneo acelerado

para s = const entonces movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

para s ≠ const entonces movimiento rectilíneo no uniformemente acelerado

2.5.2 Movimiento curvilíneo



En caso de movimiento curvilíneo r = r(s) y s = s(t) y la velocidad se expresa como:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \tau\, \dot{s} \quad \frac{dr}{ds} \quad \frac{ds}{dt}$$

Dónde $\tau^2 = 1$ así como τ≠ const. ya que el vector unitario

cambia su dirección

la aceleración es:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau \dot{s}) = \tau\, \ddot{s} + \dot{s}^2 \frac{1}{\rho}$$

Automóvil club británico norte

En caso de que:

a) s = constante. entonces 0 s =

por lo tanto un = norte s = un $\frac{1\,2}{\rho}$ y el punto se mueve a lo largo de la trayectoria circular con uniforme

velocidad b)

s ≠ constante · entonces 0 s ≠ y el movimiento no se acelera uniformemente o

s = const. dónde un = τ s + n $\frac{s^2}{\rho}$ el movimiento se acelera uniformemente

2.6 MOVIMIENTO ARMÓNICO

El movimiento de un punto (partícula) que se describe mediante la ecuación x A = + sin(representa) ωt

dónde A la amplitud (desviación máxima de la posición neutra) [m] representa la frecuencia

ω angular [s-1] representa el cambio de fase [rad]

representa la distancia instantánea de

x la partícula

se llama movimiento armónico

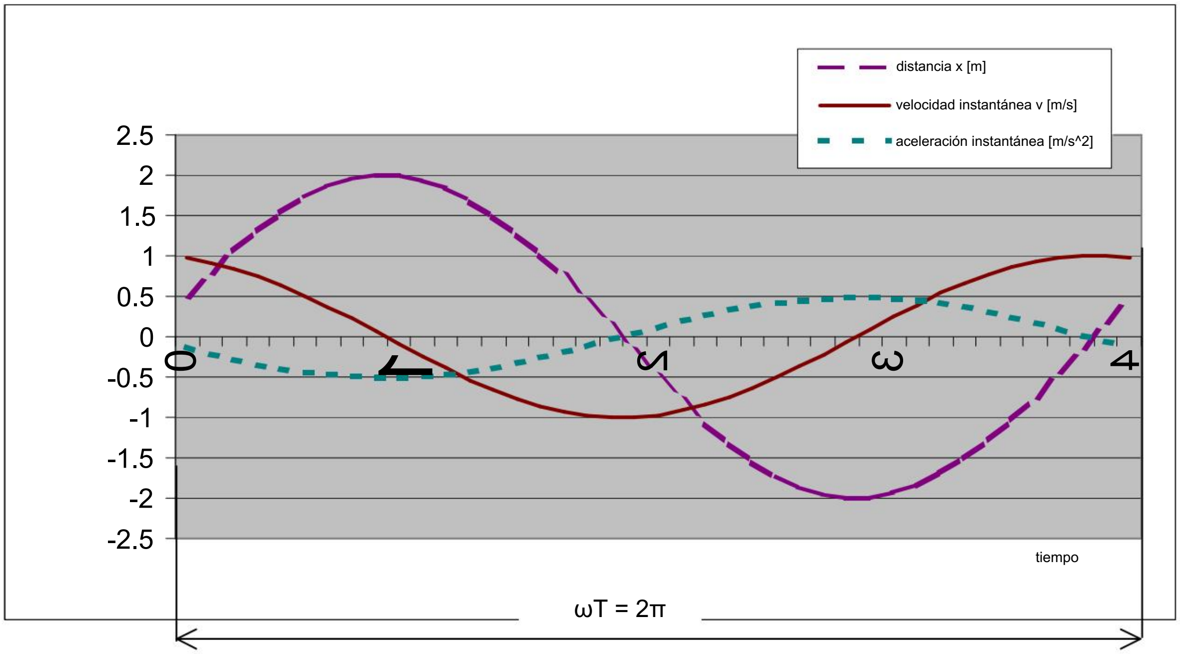
La velocidad en este caso se da como: $v = \frac{dx}{dt} = A\,\omega$ porque$(\omega t + \;)$ y

La aceleración viene dada por: $a = \frac{dv}{dt} = -A\,\omega^2$ pecado$(\omega t + \;)$

Para la condición inicial: t = 0, x = x0, v = v0, a = a0 las cantidades cinemáticas son:

x0 = Asen ; v0 = A ω porque ; $un_0 = -A\,\omega^2$ pecado

La interpretación gráfica del movimiento armónico se puede representar como la rectificación de todos magnitudes cinemáticas en el tiempo



Donde T representa el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [s] así frecuencia $F = \frac{1}{T}$ [Hz]

La amplitud del movimiento se puede expresar de x_0 = Asin y v_0 = A ω porque

$$A = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{y} \quad \text{broncearse} = \frac{\text{pecado}}{\text{porque}} = \frac{x_0 \omega}{v_0}$$

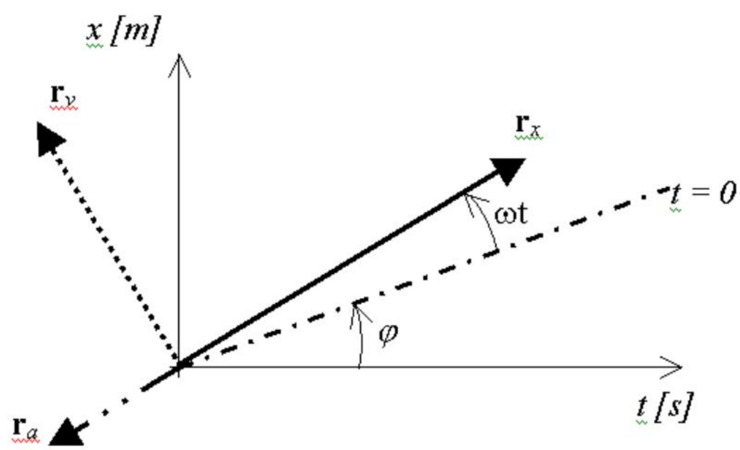
Por lo tanto, las cantidades cinemáticas se pueden expresar como función del vector giratorio rx, rv, ra

Dónde

$|rx| = A;$

$|rv| = A\omega;$

$|ra| = A\omega^2$



2.6.1 Composición de movimientos armónicos en la misma dirección

a) Si ω1 = ω2 = ⋯ = n = ω entonces

$$x_1 = A_1 \text{ pecado}(\omega t + \phi_1) \quad A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)}$$

$$x_2 = A_2 \text{ pecado}(\omega t + \phi_2) \quad A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)}$$

.

.

$$x_n = A_n \text{ pecado}(\omega t + \phi_n) \quad A_n e^{i(\omega t + \phi_n)}$$

El movimiento resultante es nuevamente un movimiento armónico descrito como:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} A_j \text{ pecado}(\omega t + \phi_j) \quad \sum_{j=1}^{n} A_j e^{i(\omega t + \phi_j)} = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{i\omega t} e^{i\phi_j} = e^{i\omega t} \sum A_j e^{i\phi_j} \text{ así}$$

$$x = A_v e^{i(\omega t + \phi_v)}$$

sustituyendo t = 0 obtenemos: $x = A_v e^{i\phi_v}$

de donde obtenemos la amplitud final y el cambio de fase

$$A_V = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} A_j \cos\phi_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \text{ sen}\,\phi_j\right)^2}$$

$$\text{y} \quad \phi_v = \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j \text{ pecado } \phi_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j \text{ porque } \phi_j}$$

b) Si ω1 ≠ ω2 ≠ .... ≠ ωn entonces cada movimiento es descrito por su propia ecuación

$$x_1 = A_1 \text{ pecado}(\omega_1 t + \phi_1) \quad A_1 y^{i(\omega_1 t + \phi_1)}$$

$$x_2 = A_2 \text{ pecado}(\omega_2 t + \phi_2) \quad A_2 y^{i(\omega_2 t + \phi_2)}$$

$$x_n = A_n \text{ pecado}(\omega_n t + \phi_n) \quad A_n y^{i(\omega_n t + \phi_n)}$$

y el movimiento final se describe mediante la ecuación:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} A_j \text{ pecado}(\omega_j t + \phi_j) \quad \sum_{j=1}^{n} A_j e^{i(\omega_j t + \phi_j)}$$

El movimiento final compuesto por movimientos armónicos con diferentes frecuencias angulares no es un movimiento armónico, ya que la amplitud resultante no es constante.

En caso de que $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{T}$ y $\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{T}$ y al mismo tiempo la relación $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$ es un racional número, se dice que el movimiento resultante es un movimiento periódico.

2.6.2 Composición de dos movimientos armónicos perpendiculares

El movimiento de dos partículas que se mueven en dos direcciones perpendiculares se define mediante ecuaciones:

$$x \bar{=} un_1 \, pecado(\omega_1 t + =_1) \quad eA_1^{(ti\omega_1 1 + \;)} \qquad y$$

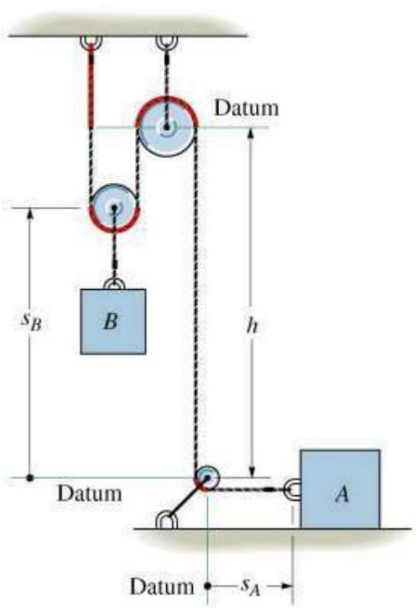
$$y \bar{=} un_2 \, pecado(\omega_2 t_2 + = \;) \quad eA_2^{(ti\omega_2 2 + \;)}$$

Estas ecuaciones definen curvas conocidas como cuadro de Lissajous.

La solución es bastante exigente y está más allá de nuestro alcance.

Las soluciones relativamente simples existen para casos especiales, cuando ω1 = ω2 y la suposición A1 = A2 lo que lleva a la ecuación de la elipse en los ejes conjugados.

2.7 MOVIMIENTO DE UN CONJUNTO DE PARTÍCULAS



El conjunto de partículas puede ser un conjunto conectado o partículas o un número de dos o más partículas no conectadas que se mueven en el mismo sistema de referencia.

Por lo tanto, la relación entre las partículas debe tenerse en cuenta. Tomemos el caso de las partículas A y B como se muestra en el diagrama: Ambas

partículas están conectadas a través de un cable inextensible. llevado sobre las poleas. Esto impone una condición de no penetrabilidad entre ellos:

$$lshhs_A = + +2(\;_B)$$

La longitud adicional del cable entre el punto de referencia superior y el techo, así como la parte del cable que abraza las poleas, permanecerán constantes durante el movimiento, por lo que no juegan ningún papel en la descripción cinemática.

Investigar la movilidad del conjunto de partículas definiría el número de independientes coordenadas que en nuestro caso es i =1

La trayectoria de una partícula A no es idéntica a la trayectoria de la partícula B y la relación entre ellas debe describirse en función de las articulaciones involucradas. Por lo tanto, excepto en la condición de no penetración, se debe tener en cuenta el soporte en A, así como los soportes para las poleas y el cuerpo B.

Teniendo la condición básica de la longitud inextensible podemos evaluar la relación entre las velocidades de la partícula A y B como una derivada temporal de la l. De este modo

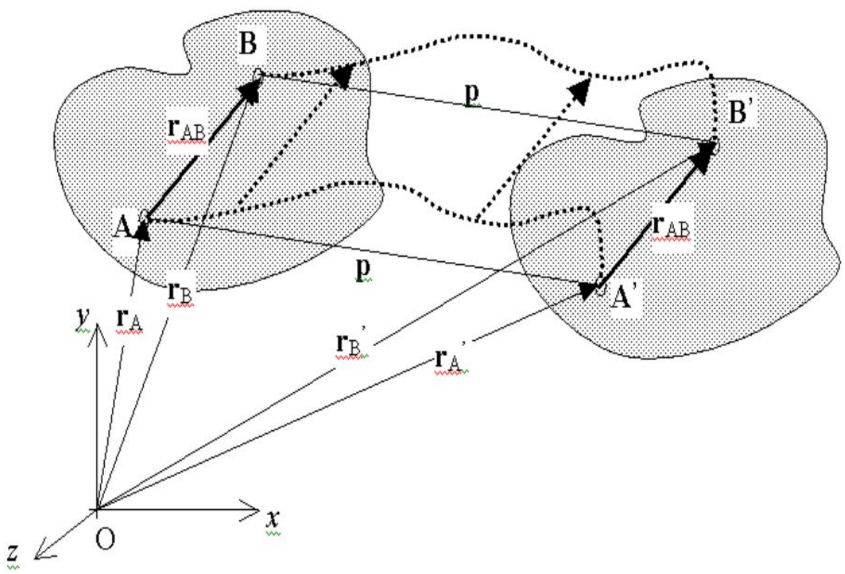
$$0\ 2v = +_A \quad _B$$

Entonces podemos concluir que para el movimiento de la partícula A en dirección positiva (alejándose del punto de referencia en la dirección de sA) la partícula B se moverá hacia arriba con velocidad $v_B = \frac{v_A}{2}$.

3 MOVIMIENTO DE CUERPO SÓLIDO

Como anunciamos antes, el cuerpo modelo adoptado en cinemática es nuevamente indeformable, por lo tanto, la distancia entre dos puntos A, B en un cuerpo sólido seguirá la regla matemáticamente expresada como: $\overline{AB} = const$.

3.1 MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN DE UN CUERPO SÓLIDO



Se investiga la posición y trayectoria de dos puntos A, B.

Si dos puntos en movimiento dibujarán sus trayectoria en dos planos paralelos, por lo que sus trayectorias son curvas paralelas. El cambio de posición del punto A al A' y del B al B' se describe mediante vectores p que son paralelos. El movimiento de avance es rectilíneo. (línea continua) si el vector p es una línea recta y curvilínea si es una curva (línea de puntos).

El cambio de posición del punto A es $r_{A'} = r_A + p$

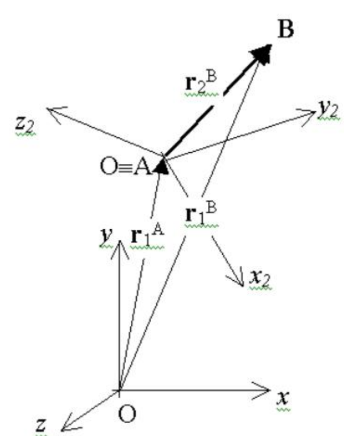
del punto B $r_{B'} = r_B + p$

De este modo

$r_A - r = r_{AB} - r_B$ o reordenado $r - r_{baba} = r - r$

Expresando los vectores rB y rB'con respecto al punto de referencia A/A' podemos probar la afirmación anterior sobre los vectores paralelos rBA = rB'A' = const.

3.1.1 Investigación de cantidades cinemáticas



Posición

El punto A es el punto de referencia adjunto al cuerpo asociado con CS2 en movimiento (x2, y2, z2). La posición de un punto B se da como

$r_1^B = r_1^A + r^{BA}$

y $r_1 = x_2^{BA} \cos\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_2 + z_2 \cos\alpha_3$

por tanto, la posición del punto B en CS1 es

$$x_1^B = x + x_1^A \quad {}_2 \text{ porque } \alpha_1 + y_2^{BA} \text{ porque } \alpha_2 + z_2 \text{ porque } \alpha_3$$

$$y_1^B = y + x_1^A \quad {}_2^{BA} \text{ porque } \beta_1 + y_2 \text{ porque } \beta_2 + z_2 \text{ porque } \beta_3$$

$$BA\ z = z_1^{un} + x \cos 1_2 \quad \gamma_1 + y_2^{BA} \text{ porque } \gamma_2 + z_2 \text{ porque } \gamma_3$$

o en forma matricial $r_1^B = r_1^A + C_{21}\, r_2$

La matriz de transformación C21 contiene los cosenos de todos los ángulos entre los ejes del sistema de coordenadas. Dado que todos los vectores siguen siendo vectores paralelos, los ángulos entre ejes particulares son constantes. Por lo tanto $C_{21} =$ constante.

Velocidad

En forma vectorial, la velocidad del punto B se da como:

$$v_1^B = \frac{d r_1^B}{dt} = \frac{d}{dt}(r_1^A + r_1)\ vv = +_1^A \quad {}_1 \quad {}_1^A \quad \text{desde el r1} \quad BA = \text{const.}$$

En forma matricial: $v r_1^B{}_1 = {}^B = r_1 C^B A + O r_{21\,2\,21\,2} +$

y C21 = 0 desde $C_{21} =$ constante.

Así, la forma matricial final es: $v_1^B\, r = r_1^B = {}_1^A \quad v1^A$

Aceleración

En forma vectorial, la aceleración del punto B se da como:

$$un_1^B = \frac{d v_1^B}{dt} = \frac{d}{dt}(vv^A)+ va_1 = {}_1^A = {}_1^A \quad \text{desde v1} = 0$$

En forma matricial: $a_1^B = r^B_{1\,v1\,v1\,a1} = {}^B = = {}^A \quad {}^A$

3.2 ROTACIÓN DE UN SÓLIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Si dos puntos de un cuerpo sólido en movimiento están estacionarios, entonces

$$vv_{O_1}\, 0 = = {}_{O2}$$

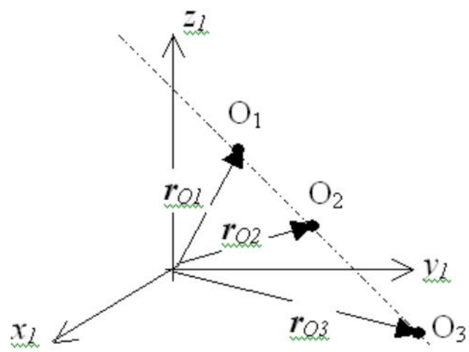
entonces el cuerpo sólido gira alrededor del eje que pasa por estos puntos O1 y O2.

Los vectores posicionales describen su posición en CS1 por

$$rO1 = \text{const.},\ rO2 = \text{const.}$$

Cualquier punto en la línea especificada por los puntos O1 y O2 se puede describir como

$$r_{O3} = r + r_{O1\,OO}\,\lambda_{12}$$

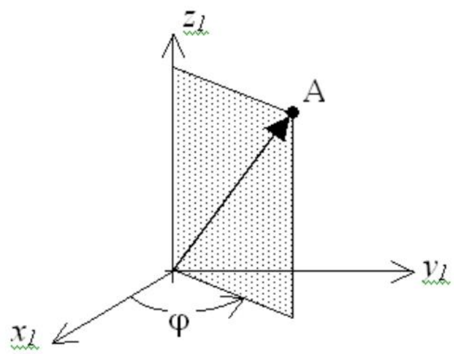


y la velocidad del punto O3 se obtiene por la primera derivada de su posición, así

$$r_{O_3} = v_{O_3} = 0$$

Conclusión: Hay infinidad de puntos, tendidos sobre la línea especificada por los puntos O1 y O2, que tienen una velocidad cero.

El lugar geométrico de todos los puntos que tienen velocidad cero es llamado eje de rotación.



La trayectoria de un punto A que se encuentra en el plano (x,z) girando alrededor del eje z, es un círculo con radio ρ, que corresponde a la proyección del vector de posición rA en el plano x,y .

La posición instantánea de un punto A depende del instante ángulo de rotación = (t) más adelante asignamos a esta coordenada angular una cantidad vectorial que sigue la regla de la mano derecha.

La velocidad angular que describe la tasa de cambio de la coordenada angular se expresa como el valor medio de la velocidad angular: $\omega_{afirmar} = \frac{\Delta}{\Delta t}$

La velocidad angular instantánea se da como: $\text{límite}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta}{\Delta t} = \frac{d}{dt} = \omega$ entonces ω = = mi

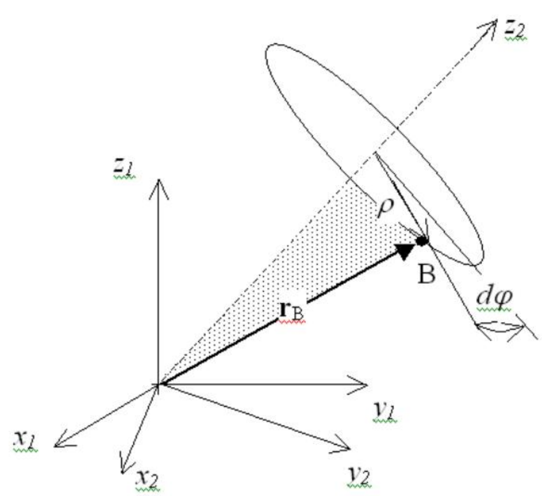
De la misma forma podemos expresar la aceleración angular.

La aceleración promedio se da como: $\alpha_{afirmar} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ y

La aceleración instantánea es $\text{límite}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha$

así α = ω = e

Si el cuerpo sólido gira alrededor de un eje fijo, todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad angular y aceleración.



3.2.1 Hallar la velocidad de un punto arbitrario

El punto B está unido al cuerpo sólido giratorio.

Entonces la posición de un punto B en CS2 se da como

$$r^B_2 = x^B_2 i_2 + y^B_2 j_2 + z^B_2 k_2$$

o con respecto al punto O' alrededor del cual el punto B gira con radio ρ

$$r_2^B = r_2^{O'} + \rho$$

El punto B se mueve en la trayectoria circular en el tiempo $\Delta t \to 0$ una distancia = d

$$dr = d\varphi\, \rho = d\varphi\, r_B \operatorname{sen}\beta$$

en forma vectorial: $dr = d\varphi \times r_B = d\varphi \times \rho$

ya que los vectores r y ρ se encuentran en el mismo plano y junto con el vector forman el plano al que el incremento de trayectoria dr es ortogonal (perpendicular).

Por tanto, la velocidad del punto B es d

$$v_B = \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times r_B = \omega \times r_B = \omega \times \rho$$

el módulo de velocidad: $|v_B| = \omega\, r_B \operatorname{sen}\beta = \omega\, \rho$

o en vector desde:

$$v_B = \omega \times r_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = i(\omega_y r_z - \omega_z r_y) + j(\omega_z r_x - \omega_x r_z) + k(\omega_x r_y - \omega_y r_x)$$

entonces $v_B = iv_x + jv_y + kv_z$ con módulo $|v_B| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

La orientación de la velocidad lineal viene dada por la regla de la mano derecha: agarrar el eje de rotación con la mano derecha de manera que el pulgar apunte en la dirección de la velocidad angular y luego los dedos mostrarán la dirección de la velocidad del punto particular de un cuerpo. .

Si la posición del punto B se expresa en forma matricial

$$r_1^B = C_{21} r_2^B$$

entonces la velocidad es la primera derivada de la posición, por lo tanto

$$v_1^B = \dot{r}_1^B = \frac{d}{dt}(C_{21} r_2^B) = \dot{C}_{21} r_2^B + C_{21} \dot{r}_2^B$$

Dado que el punto B está unido y gira con CS2 , entonces

$r_2^B =$ constante y su primera derivada es igual a cero.

La velocidad del punto B se da como $v_1^B = \dot{r}_1^B = \dot{C}_{21} r_2^B$

La primera derivada de la matriz de transformación $\dot{C}_{21} = \Omega_1 C_{21} = C_{21} \Omega_2$

y finalmente $v_1^B = \Omega_1 C_{21} r_2^B = C_{21} \Omega_2 r_2^B$

3.2.2 Hallar la aceleración de un punto arbitrario B

En forma vectorial: $a_B = \dot{v}_B = \frac{d}{dt}(\omega \times r_B) = \alpha \times r_B + \omega \times v_B$

y simultáneamente $a_B = \frac{d}{dt}(\omega \times \rho) = \alpha \times \rho + \omega \times v_B$

Como el punto B se mueve en la trayectoria circular, la aceleración tendrá dos componentes

Componente tangencial

$$un_B^T = \alpha \times \rho = \alpha \times r_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = yo\left(\alpha_y r_z - \alpha_z r_y\right) + j\left(\alpha_z r_x - \alpha_x r_z\right) + k\left(\alpha_x r_y - \alpha_y r_x\right)$$

y aceleración normal

$$un_B^- = \omega \times v_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = yo\left(\omega_y v_z - \omega_z v_y\right) + j\left(\omega_z v_x - \omega_x v_z\right) + k\left(\omega_x v_y - \omega_y v_x\right)$$

Sus módulos son:

$$\left|un_B^T\right| = \sqrt{(un_x^T)^2 + (un_y^T)^2 + (un_z^T)^2} \quad o \quad \left|a_B^T\right| = \alpha\rho_B \operatorname{sen}\beta = \alpha\rho$$

y $$\left|un_B^-\right| = \sqrt{(un_x^-)^2 + (un_y^-)^2 + (un_z^-)^2} \quad o \quad \left|un_B^-\right| = \omega v_B = \omega^2 \rho = \frac{v_B^2}{\rho}$$

En forma matricial: $$un_1^B = \dot{v}_1^B = \ddot{r}_1^B = \ddot{C}_{21} r_2^B + 2\dot{C}_{21}\dot{r}_2^B + C_{21}\ddot{r}_2^B$$

lo que lleva a $$un_1^B = \dot{v}_1^B = \ddot{r}_1^B = \ddot{C}_{21} r_2^B$$

entonces la segunda derivada de la matriz de transformación es:

$$\dot{C}_{21} = \dot{\Phi}_1 C_{21} + \Phi_1 \dot{C}_{21}$$

$$\ddot{C}_{21} = \ddot{\Phi}_1 C_{21} + \dot{\Phi}_1 \dot{C}_{21} + \dot{\Phi}_1 C_{21} + \Phi_1^2 C_{21}$$

$$\ddot{C}_{21} = A_1 C_{21} + \Phi_1^2 C_{21}$$

Por lo tanto, la aceleración del punto B es

$$a_1^B = (A_1 C_{21} + \Phi_1^2 C_{21}) r_2^B = (A_1 + \Phi_1^2) C_{21} r_2^B = (A_1 + \Phi_1^2) r_1^B$$

donde la primera componente representa la aceleración tangencial

$$a_1^{BT} = A_1 C_{21} r_2^B = A_1 r_1^B = A_1 \rho \qquad \text{dónde} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix}$$

y la segunda componente representa la aceleración normal

$$a_1^{B-} = \Phi_1^2 C_{21} r_2^B = \Phi_1^2 r_1^B = \Phi_1 v_1^B$$

El curso del movimiento es registrado por la aceleración tangencial $\alpha_T = \alpha \times \rho$

dónde $\alpha = \dot{\omega} = \dfrac{d\omega}{dt}$

Puede haber dos situaciones:

a) ω = constante α = 0

De este modo a^T 0 = y $a^- = \rho\ \omega^2 = \dfrac{v^2}{\rho}$

Estas características representan el movimiento uniforme de la partícula en el círculo y el aceleración que se produce es la aceleración normal.

b) $\omega \neq$ const. $\alpha \neq 0$

En este caso la aceleración angular α puede convertirse en:

i) α = constante de este modo $\alpha_T = \alpha\ \rho$ = constante. (asumiendo ρ = const.)

Estas características representan un movimiento uniformemente acelerado en la trayectoria circular. – rotación uniformemente acelerada.

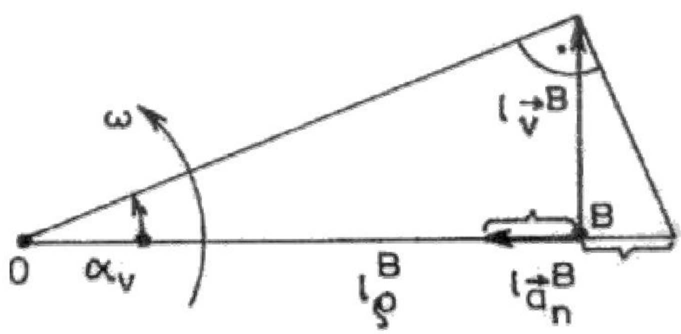
ii) $\alpha \neq$ const. de este modo $\alpha_T \neq \alpha\ \rho \neq$ constante.

Estas características representan un movimiento acelerado no uniforme en el círculo, Rotación no uniformemente acelerada.

En ambos casos se producirá la aceleración normal. $a^- = \rho\ \omega^2\ \dfrac{v^2}{\rho}$

3.2.3 Consecuencias de la cinemática de un cuerpo sólido (la dependencia geométrica)

Al proporcionar la solución gráfica para cantidades cinemáticas, necesitamos registrar la velocidad y la aceleración en forma gráfica. Para ello hay que dar la escala de longitud y velocidad, mientras se calculan las escalas restantes.



donde $l\rho^B$ representa la longitud de el radio vector ρ

$^{yo}\rho = \dfrac{\rho}{\text{así}}$ ρ = SL ρ

y velocidad v = s l v.v.

Por lo tanto, el ángulo αv se da como

broncearse α_v v = $\dfrac{yo}{yo\rho}$ = $\dfrac{\text{contra}}{\rho}\ \dfrac{}{s_v}$ $\omega\ k_v$

dónde kv es una constante de escala de velocidad.

Dado que todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad angular ω, podemos concluir - Oración sobre velocidades:

$\boxed{\alpha}$

Aceleración: la solución gráfica

Se deben registrar las componentes tangencial y normal de la aceleración.

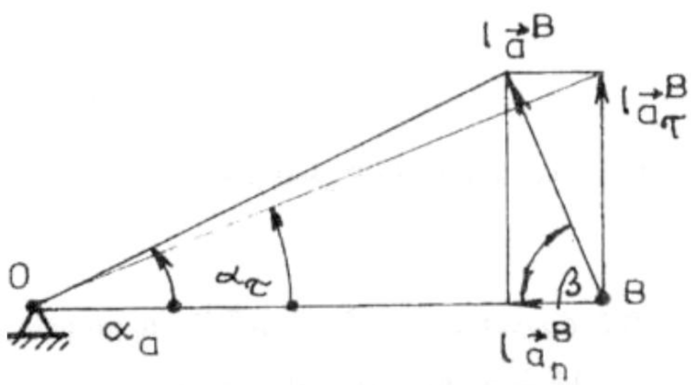
La componente normal de la aceleración:

$$a^{-} \; 2 = \rho = \omega \quad \frac{v^2}{\rho}$$ por tanto, de la ley de Euclides sobre la altura en el triángulo se sigue la construcción gráfica de la aceleración normal.

¡La escala de aceleración tiene que ser calculada!

Por lo tanto $a_{-} = \frac{SL^{2\,2}_{v.v.}}{SL_{yo}\ \rho} = SL$ dónde $_{un}^{yo} = \frac{{}^{yo}v^{2}}{{}^{yo}\rho}$ y $\boxed{s_a = \frac{s_v^2}{s_{yo}}}$

La componente tangencial de la aceleración: $\alpha\tau = \alpha \; \rho$



La dirección del componente tangencial corresponde a la dirección de la velocidad, por lo que es obvia una mayor analogía con la velocidad.

broncearse $\alpha_{a_\tau} = = \frac{{}^{yo}a_\tau}{{}^{yo}\rho}$ como $\frac{\tau}{\rho} \frac{yo}{s_a}$ $\alpha \quad k_{a_\tau}$

donde ka $^{\tau}$ es tangencial constante de escala de aceleración.

Dado que todos los puntos del cuerpo tienen la misma aceleración angular α, podemos concluir:

Oración sobre la aceleración tangencial:

$\alpha \; ^{\tau}$

La aceleración total se da como la suma de sus componentes. $aaa \overset{I}{=} +$ norte

broncearse $\beta = = \frac{a^{\tau}}{a^{-}} \quad \frac{\alpha\rho}{\omega^2\rho} = = \frac{\alpha}{\omega^2} \quad k_a$

donde ka representa la constante de escala de la aceleración total.

Dado que α y ω son constantes para todos los puntos del cuerpo,

concluimos: La aceleración total del punto en el cuerpo sólido giratorio forma un ángulo β con su normal a la trayectoria que permanece constante para todos los puntos del cuerpo.

Y finalmente podemos finalizar basándonos en el fondo: broncearse $\alpha_a = \frac{{}^{yo}a^{\tau}}{{}^{yo}\rho - mmm_a} = \frac{\alpha}{la^{-1} - \omega^2}$

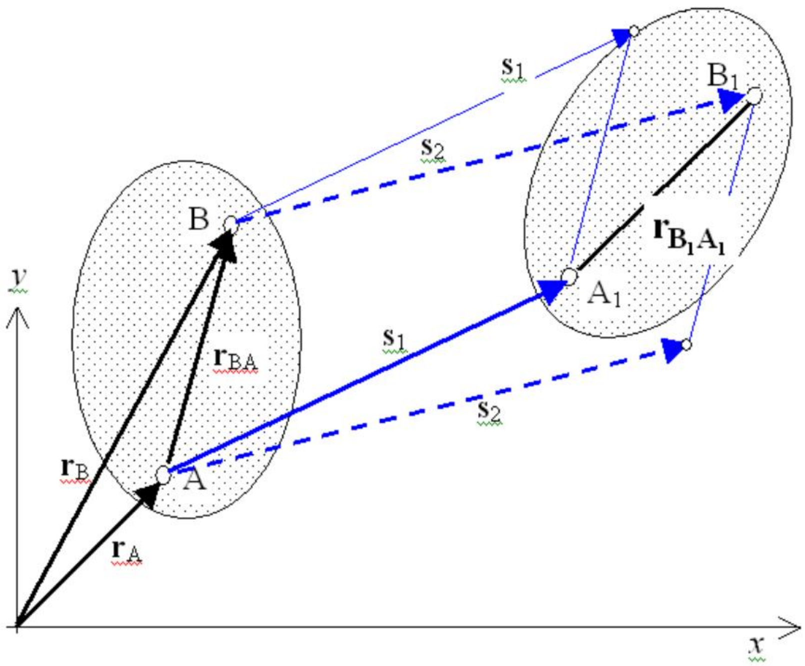
junto con las cantidades cinemáticas angulares α, ω que son iguales para todos los puntos del cuerpo:

α

3.3 MOVIMIENTO PLANO UNIVERSAL

Si todos los puntos de un cuerpo se mueven en planos paralelos al plano básico fijo (estacionario), decimos que el cuerpo se mueve en un movimiento plano.

Si las trayectorias de todos los puntos que se encuentran en la línea perpendicular a ese plano son curvas planas entonces el movimiento es un movimiento plano universal.



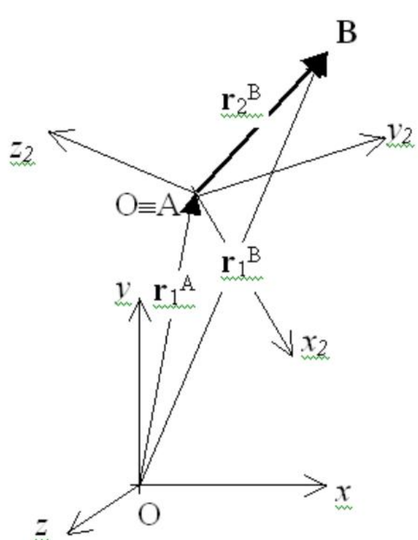
La posición inicial del cuerpo se describe a través de los puntos A, B. Un vector posicional para el punto B usando un punto de referencia A el inicial describe posición de un cuerpo:

$$r^B = r^A + r_{BA}$$

Durante el intervalo de tiempo t su posición cambia a una nueva ubicación A1 y B1 por lo tanto $r^{B1} = r^{A1} + r_{A_1B_1}$

Como se ve en el diagrama $r_{BA} \neq r_{A_1B_1}$ pero $\left| r_{11} \right| = \left| r_{AB} \right|$, cual significa que el vector cambia su orientación pero no su magnitud.

Por lo tanto, podemos imaginar el movimiento plano universal como una secuencia de movimiento de traslación seguido de una rotación que podría expresarse de manera abreviada como: GPM = TM + RM Nota: Ambos movimientos ocurren al mismo tiempo y este enfoque es simplemente imaginario.



3.3.1 La posición

del punto B se puede expresar en forma vectorial o matricial:

$$r_1^B = r_1^A + r^{\bar{1}}$$

con el uso de la matriz de transformación C21:

$$r^{B1} = r_1^{un} + C_{21}\, r^{\bar{2}}$$

que conduce a dos ecuaciones en forma vectorial:

$$x^{B1} = x_1^{un} + x_2^{BA} \text{ porque} - y_{\bar{2}} \text{ pecado}$$

$$y^{B1} = y_1^{un} + x_{\bar{2}} \text{ pecado} + y_{\bar{2}} \text{ porque}$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^B \\ y_1^B \\ z_1^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^A \\ y_1^A \\ z_1^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{porque} & -\text{pecado} & 0 \\ \text{pecado} & \text{porque} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{2}} \\ y_{\bar{2}} \\ z_{\bar{2}} \end{bmatrix}$$

3.3.2 La velocidad

de un punto B se puede expresar:

en forma vectorial: $v_1^B = r + r\left(\frac{d}{dt}\right) \quad v_1^A \; v1 \; v1 \; dt$

de este modo $v_1^B = v_1^A + \omega \times r_1$

o en forma matricial: $vvv_1^B = + _1^A + {}_1^{BA} \quad v_1^A C r \quad 221$

$v_1^B = v_1 + C r = v_1 + r^{BA} \quad 221 \quad 11$

Hay una rotación del punto B con respecto al punto A por lo que decimos que hay un movimiento relativo del punto B alrededor del punto A.

De este modo $v = \omega \times r_1$

donde ω representa la velocidad angular de un movimiento relativo con respecto al punto A.

La velocidad angular relativa es constante para todos los puntos del cuerpo, por lo tanto: $\omega = = = \frac{BAv}{} \quad \frac{v}{}$ constante

Entonces podemos obtener las componentes de la velocidad:

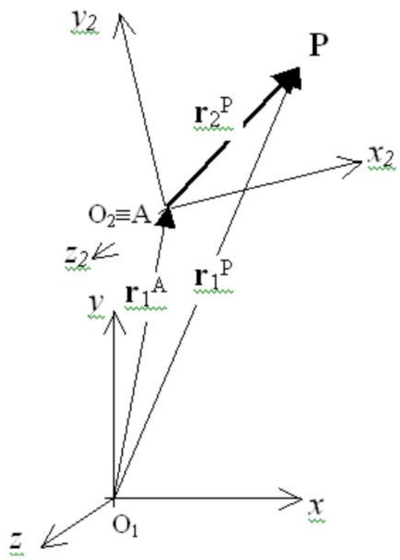
$$\begin{pmatrix} v_x^B \\ v_y^B \\ 0 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} v_x^A \\ v_y^A \\ 0 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}_1$$

Solución gráfica:

Se conoce la velocidad de un punto A, por lo que necesitamos encontrar la velocidad en el punto B en función de la ecuación vectorial: $v_1^B = v_1^A + \omega \times r_1$

3.3.3 El polo de movimiento

Si $\omega \neq 0$ entonces existe solo un punto en el cuerpo que tiene velocidad cero en el instante y pertenece al cuerpo en movimiento (o al plano unido al cuerpo en movimiento). Este punto se conoce como centro instantáneo de rotación o polo de movimiento.



La posición de un polo P se da como:

$$r_1 = r_1 + r_1$$

en forma matricial: rrr 1 = 1 + = + PAG A PA r C r un 1 221 Pensilvania

Entonces la velocidad del poste es: PAG A Pensilvania v1 = v1 + v1

como la velocidad lineal en este lugar es cero, entonces

un 0 = + un PA → = − vvvv Pensilvania

Para un punto de referencia arbitrario obtendríamos similar respuesta:

$$0 = v_1^B + v_1^{PB} \rightarrow v_1^{PB} = -v_1^B$$

Para encontrar la posición del polo de un cuerpo que se mueve con GPM tenemos que multiplicar la ecuación de velocidad por la velocidad angular

De este modo $0 = \omega \times v_1^{un} + \omega \times (\omega \times r_1^{Pensilvania})$

Reorganizar la ecuación en una forma $0 = \omega \times v_1^A + \omega[\omega (r_1 - r_1) (\omega \omega)]$

al igualar $\omega r_1^{PA} = 0$ y $\omega \omega = \omega^2$

obtenemos $0 = \omega \times v_1^{un} - (\omega^2 r_1^{Pensilvania})$

desde donde igualamos el vector de posición de polos

$$r_1^{Pensilvania} = \frac{\omega \times v_1^{un}}{\omega^2} = \frac{\times v_1^A}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} yo_1 & j_1 & k_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x^A & v_y^A & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega^2}[i_1(-\omega v_y^A) + j_1(\omega v_x^A)]$$

Dra. Ing. Zdenka Sant

10/2009

Solución gráfica:

Basado en $v_1^{A} -= v_1$ y

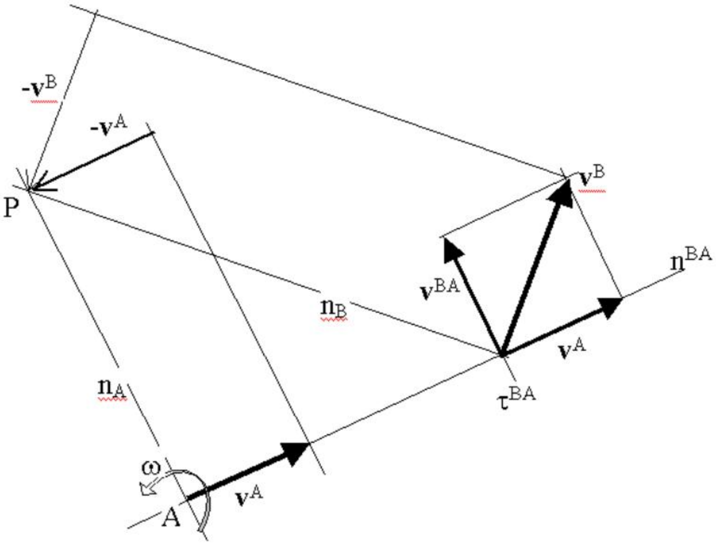
$v_1^{PB} -= v_1^{B}$

La velocidad v^{A} es conocido y la velocidad en el punto B es

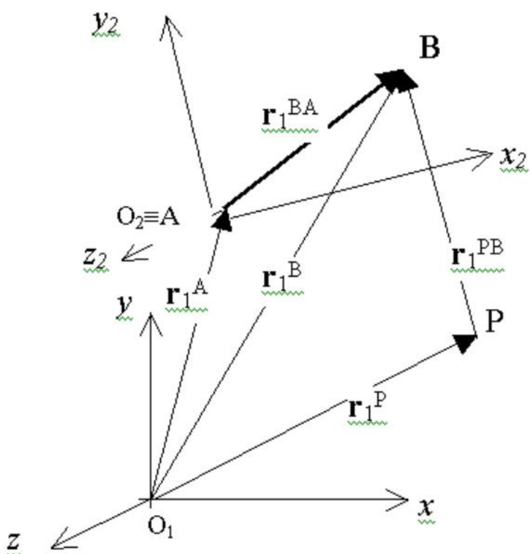
$v_1^{B} = v_1^{A} + v_1$

por tanto, si conocemos la velocidad, conocemos la dirección de una normal a la trayectoria

El polo de movimiento está en el intersección de las normales nA y nB.



Encontrar la velocidad por medio del polo.



Posición de un punto B $\quad r_1^{BP} = r_1^{BP} + r$

o $\quad r_1^{B} = r + C\, r_{221}^{PA}$

Entonces la velocidad es: $\quad v_1^{B} = v + \dot{C}\, r_{1\,221}^{PA}$

Como la velocidad del polo es cero, obtenemos

$$v_1^{B} = \dot{C}\, r_{1\,221}^{PA}$$

en forma de matriz

$$\begin{bmatrix} v_x^{B} \\ v_y^{B} \\ 0 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} \cos & -\text{pecado} & 0 \\ \text{sen} & \text{porque} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{PA} \\ y^{PA} \\ 0 \end{bmatrix}_2$$

eso resultaría en

$v_{1x}^{B} -= \omega y_1^{PA}$ y $v_{1\,año}^{B} = \omega x_1^{PA}$

Dando así la velocidad final

$$\left| v_1^{B} \right| = \sqrt{\left(v_{1x}^{B} \right)^2 + \left(v_{1\,año}^{B} \right)^2} = \sqrt{\left(\omega y_1^{PA} \right)^2 + \left(\omega x_1^{PA} \right)^2} = \omega \sqrt{\left(y_1^{PA} \right)^2 + \left(x_1^{PA} \right)^2} = \omega r_1^{PA}$$

Entonces la velocidad angular es $\quad \omega = \dfrac{v_1^{B}}{r_1^{PA}}$

De este resultado se sigue la interpretación para la solución gráfica:

$$\omega = \frac{v_1^{B}}{r_1^{PA}} = \frac{SL_{vvk}}{SL_{r^{PA}}} = v\ \text{broncearse}\ \alpha_v$$

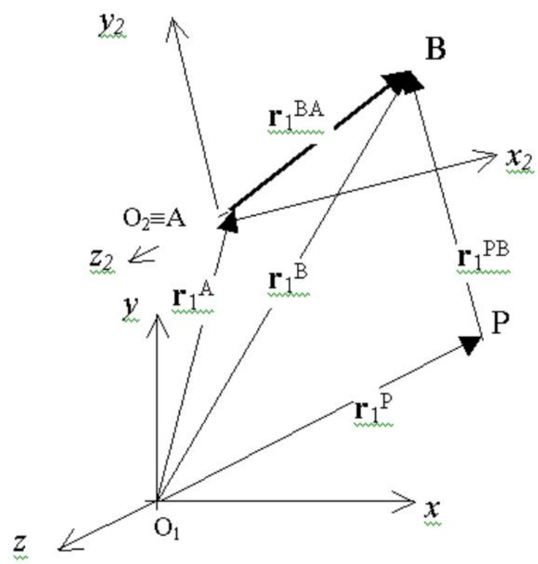
dando así

$$\text{broncado}\ \alpha_v = \frac{1}{k_v}\,\omega$$

Conclusión:

α

3.3.4 Hallar la aceleración Analíticamente



Ya hemos encontrado el vector posicional y la r_1^B velocidad v_1^B

$$r_1^B = r_1^A + r_1^{BA}$$

$$v_1^B = v_1^A + v_1^{BA}$$

donde la velocidad v_1^{BA} representa el movimiento relativo del punto B alrededor del punto A que se puede expresar como

$v = \omega \times r$ en forma vectorial o

$v = C r = r$ en forma matricial.

Ya que demostramos que $a = r = v$

podemos derivar la ecuacion de la aceleracion $a_1^B = a_1^A + a_1^{BA}$

Donde la aceleración del movimiento relativo de un punto B alrededor del punto A tendrá dos componentes ya que el movimiento relativo es la rotación con un punto fijo en A.

De este modo $a = \alpha \times r + \times \omega v_1$ en forma vectorial. La aceleración en forma matricial es una resultado de la derivación:

$$r_1^B = r_1^A + r = r_1^A + C_{21} r_2$$

$$v_1^B = v_1^A + C_{21} r_2$$

$$= a_1^B + C_{21} r_2 + C_{21} r_2 + C_{21} r_2$$

en caso de cuerpo sólido $r_2 = 0$ ya que la distancia entre los puntos A y B no cambia, por lo tanto

BA un = un + UN C r + C r

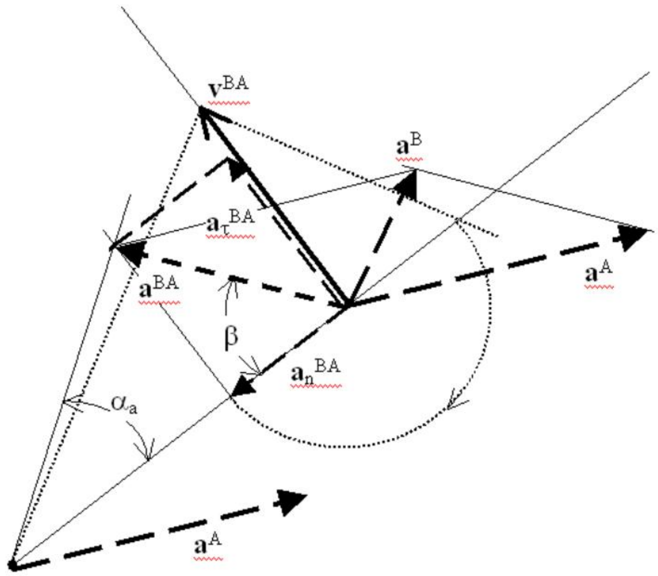
$$a_1^B = a_1^A + (A + \ ) \ r_1^2$$

dónde $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix}$ representa la matriz semisimétrica de angular aceleración

Gráficamente

Para encontrar la aceleración usaremos la ecuación principal

$$a1^{B} = a1^{A} + a1$$



Se da la aceleración de un punto A y la aceleración del movimiento relativo del punto B se describe mediante dos componentes (tangencial y normal) en las direcciones respectivas a la trayectoria del punto B.

El componente normal de la se encuentra aceleración un a partir de la conocida velocidad v (graficamente por medio de triángulo de Euclides).

Así, en el momento instantáneo, el ángulo β entre la aceleración final del movimiento relativo y la normal a la

la trayectoria del movimiento relativo viene dada por

$$\text{broncearse } \beta = = \frac{a_T}{a} \quad \frac{\alpha}{\omega^2} \quad \text{constante.}$$

Conclusión:

La aceleración final del movimiento relativo alrededor del punto A forma un ángulo normal β con el componente de la aceleración que es constante para todos los puntos del cuerpo que se mueven con movimiento relativo.

De manera similar podemos observar la componente tangencial de la aceleración y la final aceleración. Por lo tanto, este ángulo viene dado por:

$$\text{broncearse } \alpha_a = \frac{a_T^{yo}}{{}^{yo}\rho \; - \; a^{yo}} = \frac{\alpha \; ss \; v^2}{ss_{AV}(\; 2\,22 \; \omega \;)} \quad \text{dónde} \quad {}^{yo}\rho = \frac{v^{2}_{yo}}{yo} \; .$$

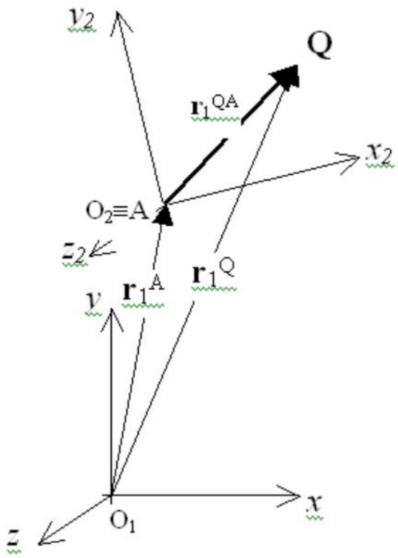
Dado que α y ω son constantes en el intervalo de tiempo dado para todos los puntos del cuerpo rígido, incluso la tan αa=const.

Conclusión:

Los puntos finales de las componentes tangentes de la aceleración para todos los puntos del cuerpo se ven desde el centro de rotación bajo el mismo ángulo α_a en el instante instante.

3.3.5 El centro instantáneo de aceleración – el polo de aceleración

Del mismo modo que para el polo de velocidad P, hay un polo de aceleración Q, el punto que tiene aceleración cero en el instante.



La aceleración de este polo Q viene dada por:

un$_1^Q$ = un + un 1 1 (control de calidad)

QA a = a_1^A + α ×r + ω× ω× r ( )

Multiplicando por α desde la izquierda

QA α ⊗ [= α ×a_1^A + α ×(α ×r + α)× ω× ($_1$)]

Nosotros recibimos

0 = α × un$_1^A$ + − ($α^2$ r_1 + − ($ω^2$)(α × r_1)

) y reemplazando la expresión

α ×r − = a − (− un$_1$ $ω^2$ r) − = un + $_1^A$ $ω^2$ r_1 encontramos el vector posicional del polo de aceleración

$$r_1 = \frac{un\ A \times + \omega^2 a_1^A}{\alpha^2 + \omega^4}$$

Comparando esta expresión con la expresión del polo de velocidad

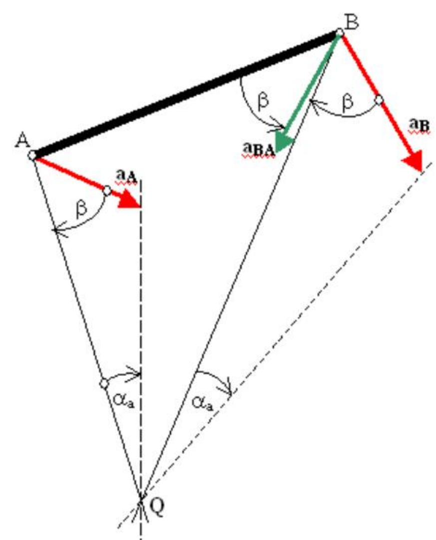
$$r_1^{pa} = \frac{\omega v \times {}_1^A}{\omega^2}$$

muestra que estas dos expresiones son diferentes, por lo tanto los dos polos son diferentes y podemos concluir:

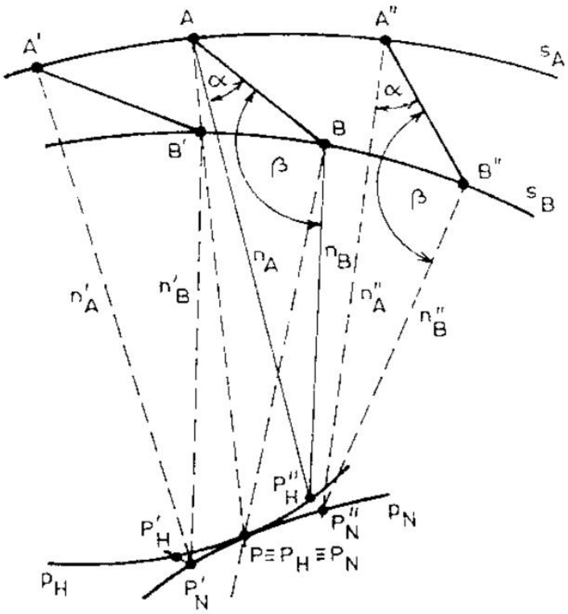
El polo de la aceleración no es idéntico al polo de la velocidad.

Si ω 0 ≠ y α ≠ 0 entonces hay un punto en el plano en movimiento que tiene aceleración a^q=0.

Este punto se encuentra en la intersección de líneas que forman un ángulo β con las direcciones de aceleración total de todos y cada uno de los puntos del plano en movimiento.



3.4 CENTRO DE LA CURVATURA DE LA TRAYECTORIA



El cuerpo, moviéndose con el movimiento plano universal, está definido por dos puntos A y B y sus trayectorias sA y sB que los puntos están dibujando en el plano. Así, la posición del polo de velocidad que se encuentra en la intersección de dos normales se puede encontrar en cualquier instante.

El cuerpo está conectado al CS2 en movimiento. y las posiciones de todos los polos instantáneos de velocidad están creando una curva pH: el lugar geométrico de todas esas posiciones se llama polo móvil mientras que los polos conectados al plano fijo estacionario CS1 crean una curva a la que se le asigna el símbolo pN : el polo fijo.

Por lo tanto, podemos imaginar el movimiento plano universal como un movimiento creado por el movimiento del lugar geométrico de los polos pH (asociado con el plano en movimiento) sobre el lugar geométrico de los polos pN (asociados con el marco fijo).

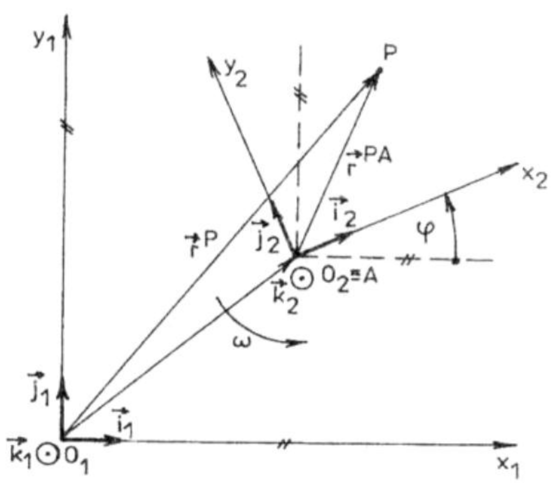
La velocidad del polo describe la tasa de cambio de la posición del polo.

Es posible encontrar la tasa de cambio del vector posicional usando el punto de referencia A con respecto al marco fijo

$$v^{PAG}_{norte} = v^A + \frac{\omega \times a^A + \alpha\, v^A}{\omega^2}$$

Y para el polo asociado con el plano en movimiento

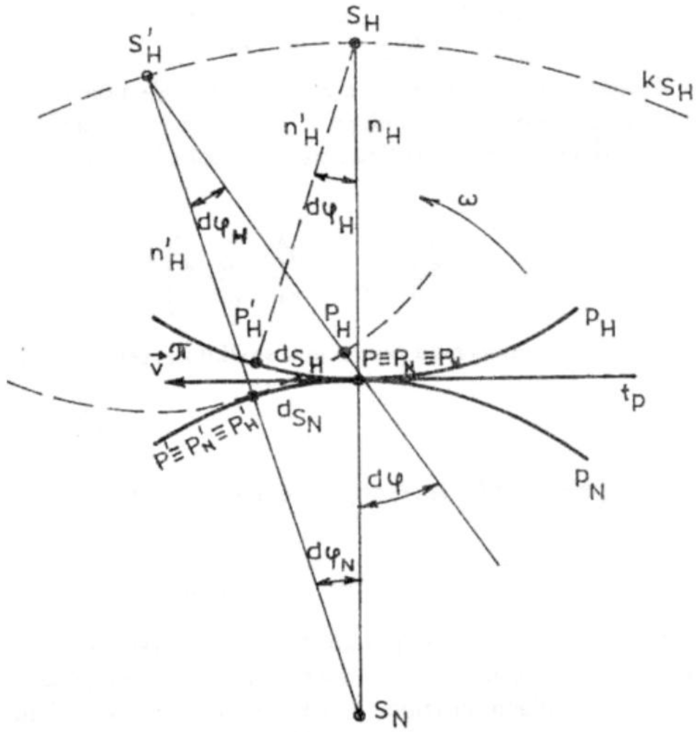
$$v^{PAG}_{H} = v^A + \frac{\omega \times a^A + \alpha\, v^A}{\omega^2}$$



Dado que las ecuaciones derivadas de las velocidades de los polos son sus son idénticos podemos asignar un símbolo v^{π} polo de la velocidad y concluya:

El punto donde ambos loci pN y pH se tocan en el instante es el polo de movimiento P (el centro instantáneo de rotación) y en este punto las dos curvas tienen una tangente común tp.

La velocidad del polo como tasa de cambio de la posición del polo estará sobre la tangente tp.



La tarea es investigar la velocidad y aceleración del punto o definir la velocidad y aceleración de todo el cuerpo. Los puntos del cuerpo en movimiento dibujan trayectorias, por lo que en el instante cada punto del cuerpo se caracteriza por su normal al movimiento y el radio de su

trayectoria.

Al construir la componente normal de la aceleración

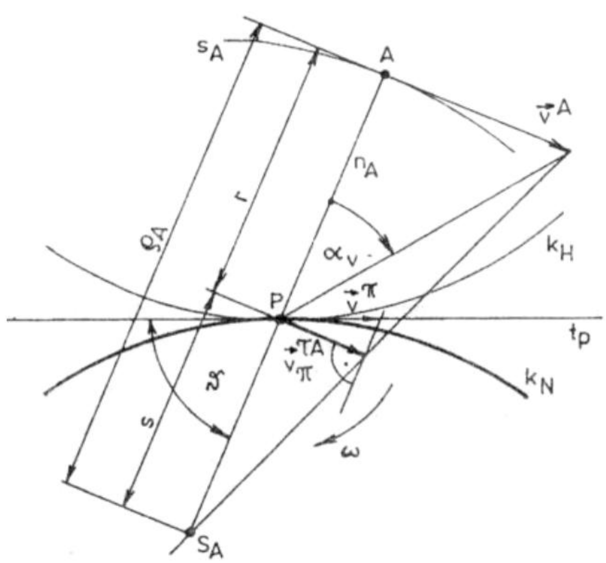
$$_{\text{norte}}\frac{1}{\rho} s^2 = a_{\text{norte}}$$

el centro de curvatura de la

se necesita la trayectoria para identificar el radio ρ.

Para encontrar el centro de curvatura podemos utilizar diferentes métodos.

Aquí solo se presentan dos métodos: a) analítico: ecuación de Euler-Savary



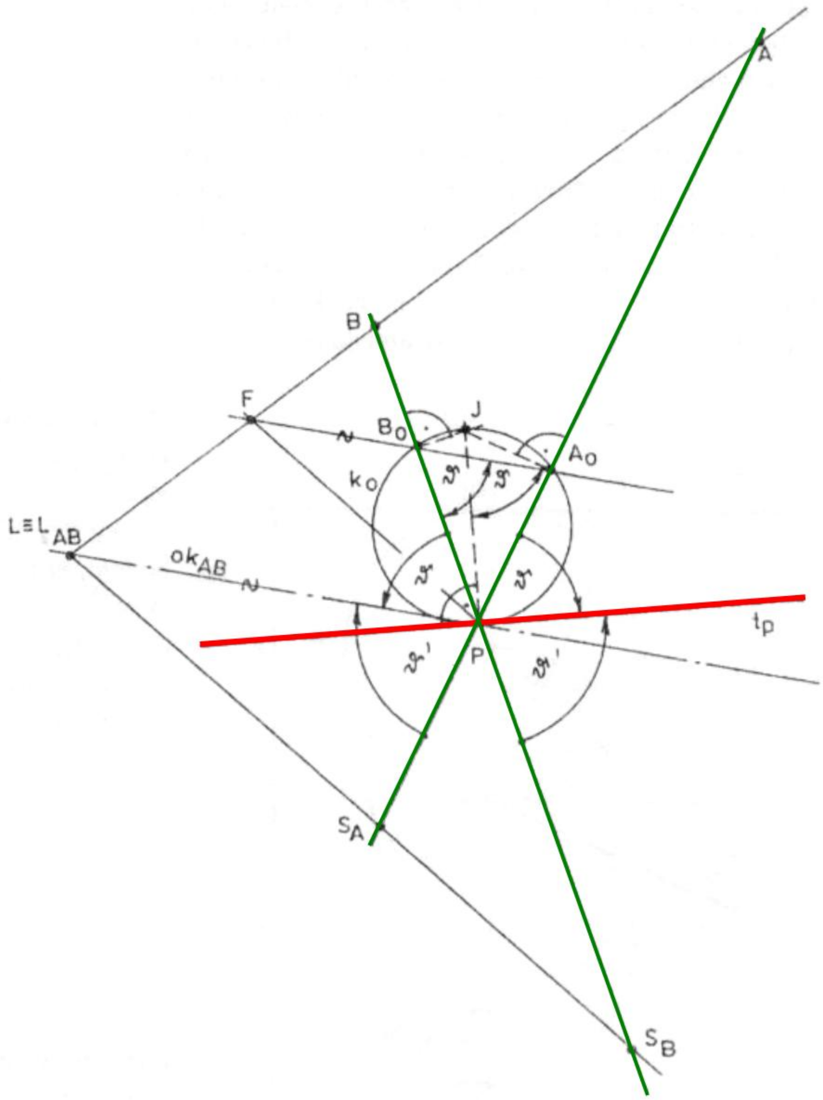
Se conoce el centro de curvatura SA asociado al punto A del móvil que dibuja la trayectoria sA . Por lo tanto, podemos encontrar la velocidad del polo encontrada por medio del método gráfico de Hartman que se usa para mostrar que

$$\frac{\text{una v}}{\rho_A} = \frac{v_\pi^{T_A}}{\text{señores}} \frac{\omega}{+} \frac{\pi^{\text{pecado}}}{s}$$

$$\frac{\omega}{v_\pi} = = k \quad \frac{rs+}{rs}_{\text{pecado}} \quad 1 + \frac{1}{\text{señor}}_{\text{pecado}} = k$$

que representa la ecuación de Euler-Savary utilizado en solución analítica para encontrar el centro de curvatura.

b) Método gráfico de Bobillier



El ángulo entre la normal de un punto y el eje de colineación es el mismo que el ángulo medido entre la normal del otro punto y la tangente al lugar geométrico de las posiciones polares en dirección opuesta.

Hay dos tareas:

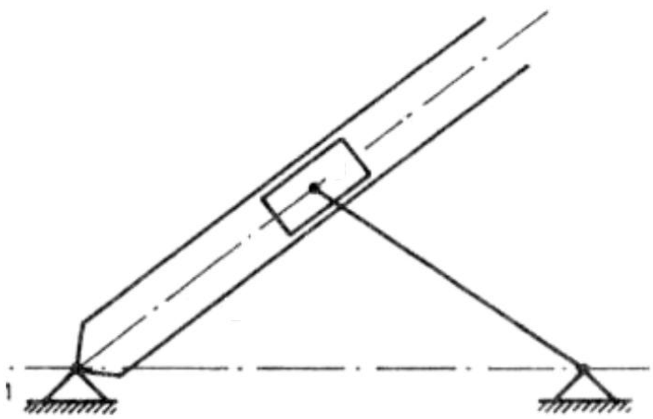
1. Se conocen la tangente tp y un par de puntos conjugados A, SA y se debe identificar el centro de curvatura de la trayectoria del punto C.

2. Se conocen los dos pares de puntos conjugados A,SA y B, SB y se debe identificar el centro de curvatura de la trayectoria del punto C.

3.5 MOVIMIENTO COMBINADO

El mecanismo que consiste en el número de cuerpos que experimentan un movimiento plano o espacial que podría describirse como una combinación del movimiento relativo entre los cuerpos y el

movimiento de conducción/transporte del actuador del sistema con respecto al marco de referencia.



Analizando el movimiento de cada cuerpo en el mecanismo:

B1 - marco de referencia

B2-

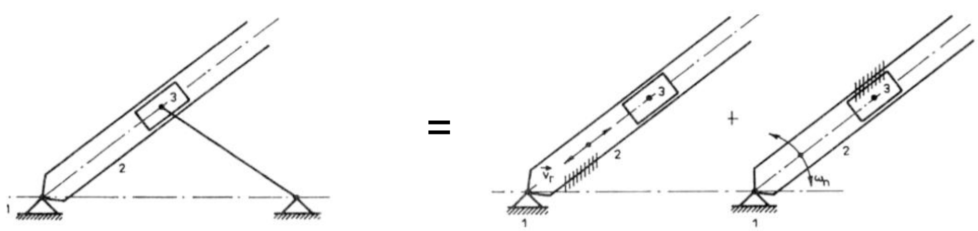
B3-

B4-

Movimiento de los cuerpos unidos a el marco se identifica como una rotación con el centro de rotación fijo en O_{21} u O_{41} , por lo tanto, el movimiento del cuerpo se define por la velocidad angular y la aceleración, ω y α respectivamente. En el caso de un movimiento simple como rotación o traslación, podemos identificar la trayectoria y evaluar las cantidades cinemáticas sin ningún problema. En el caso de un movimiento plano o espacial del cuerpo, la trayectoria no es una curva simple y, por lo tanto, podría haber un problema para evaluar las cantidades cinemáticas.

Por lo tanto, presentamos la estrategia basada en el movimiento combinado e implementamos una división imaginaria del movimiento complejo en dos movimientos: el movimiento del punto de referencia y la rotación alrededor del punto de referencia.

podemos imaginar



movimiento final 31 | Movimiento relativo 32 | movimiento de conducción 21

Esto podría ser registrado por una ecuación simbólica $31 = 32 + 21$

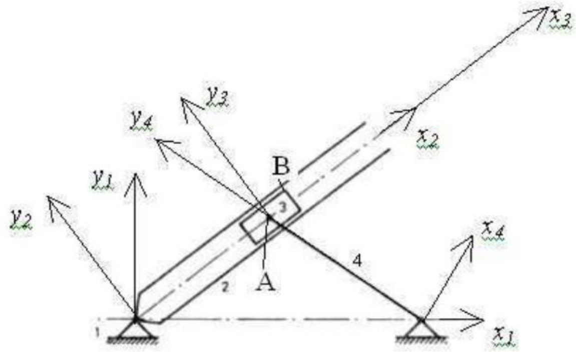
Y las cantidades cinemáticas se pueden expresar para el punto B identificado como

De este modo $v_{31}^{B} = v_{32}^{B} + v_{21}^{B}$

Pero $a_{31}^{B} = a_{32}^{B} + a_{21}^{B} + a_{\text{corazón}}^{B}$

Para probar esta afirmación, tenemos que definir la velocidad en el punto B

3.5.1 Magnitudes cinemáticas mediante movimiento combinado

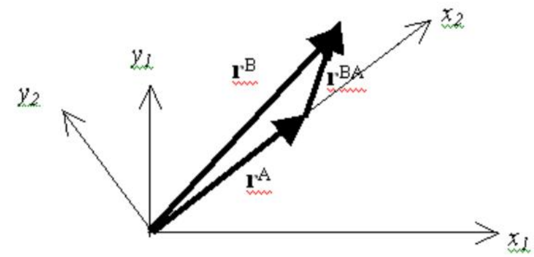


El movimiento final de un punto B simbólicamente:

31 = 32 + 21

así como

31 = 34 + 41



El vector posicional de un punto B es: r = r + r = r + yo x + j y 22 22 ( )

3.5.2 La velocidad

de un punto B:

v = r = r + yo 22 22 j y BA x + j y)

donde 2 yo = ω × yo 21 2

j = ω × j 21 2

Sustituyendo y reordenando obtenemos la ecuación de la velocidad final en el punto B expresada

en CS1 $v_1^B = v_1^A + ω × (yo_{22}$ x BA + j y) + yo v 2 2x + j 2 2 y dónde

el movimiento de + × + x BA 21 2 (j 2 2 BA) = v_{21}^B representa la velocidad debida a la conducción

expresión. El punto B se movería con velocidad impulsora v_{21}^B cuando está conectado virtualmente al movimiento avión 2 (CS2)

la expresion yo + v 2 2 x BA j años 2 2 = v_{32}^B representa la velocidad relativa del punto B con respecto a el punto A. Así confirmamos la ecuación anterior

$$v_{31}^B = v_{32}^B + v_{21}^B$$

3.5.3 La aceleración

del punto B es un producto de la derivación de la velocidad

a_1^B = d/dt va α×yo 21 (2 2 BA + j 2 2) + ×ω 21 (2 2 yo + + xx 2 2 j 2 2 BA + j 2 2)

+ w BA 2 i 2 + 2 xx j 2 2 años BA + j 2 2 y

De este modo

aa α yo 21 BA = + × (2 2 BA + j 2 2 BA) + × × [ω ω yo 21 21 (2 2 BA + j 2 2 BA) yo + 2 2 BA + j 2 2 y]

+ 2 BA ω 21 (yo 2 2 x j 2 2 años BA) + + un 2 2 yo j 2 2 y donde la expresión

B BA BA BA
α 21 1 2NA una = + × una (yo 2 2 jX + 2 2) 21 2 2 ω yo + × × + x 21 (j 2 2)] representa la aceleración

del movimiento de conducción en el punto B

= segundo 2 ω ia 21 C (v 2 2 BA + j 2 2 años) representa la aceleración de Coriolis debida al movimiento angular impulsor y la velocidad lineal del movimiento relativo

B BA
un 32 = yo + un 2 2 x j un 2 2 y representa la aceleración del movimiento relativo en el punto B

Finalmente podemos concluir que al expresar la aceleración final mediante el movimiento combinado (movimiento motriz y relativo) de los cuerpos se debe introducir una componente denominada aceleración de Coriolis.

3.5.4 Aceleración de Coriolis

Aceleración de Coriolis expresada en forma vectorial: B aC = ×2 ωv 21 32 B

Y en forma matricial: 2 aC = B 21 2 C v 21 = 2 21 + BAv

La aceleración de Coriolis expresa el cambio de dirección de la velocidad relativa debido al movimiento de conducción rotacional y, al mismo tiempo, la magnitud del cambio de la velocidad de conducción debido al movimiento relativo en el punto de referencia.

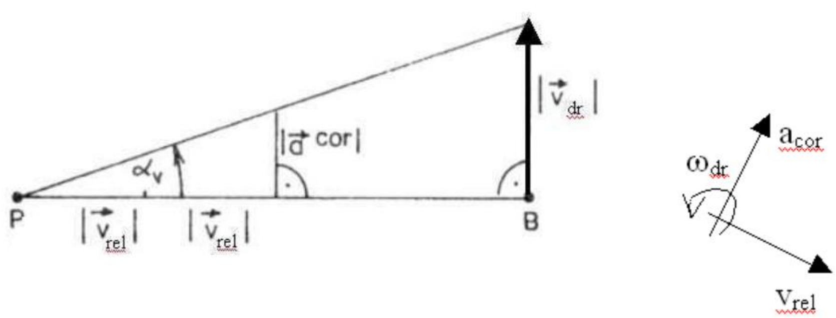
Analizando la ecuación que expresa la aceleración de Coriolis:

La aceleración de Coriolis tiene valor distinto de cero aC ≠ 0 si:

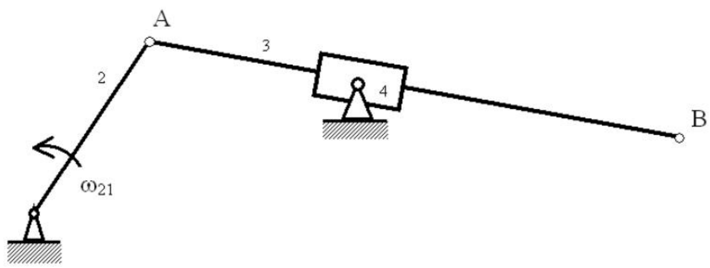
1) ωdr ≠ 0 el movimiento impulsor existe en forma de rotación, GPM, movimiento esférico o G/M

2) vrel ≠ 0 el movimiento relativo entre cuerpos existe ⊥ 3) ωdr vrel el ángulo entre las velocidades angular y lineal es diferente de 0, y π

La dirección y orientación de la aceleración de Coriolis se obtiene girando la velocidad relativa en la dirección del movimiento impulsor en un ángulo π/2.



3.5.5 Hallar el polo de movimiento mediante movimiento combinado



Analizando el sistema:
B2 – MD
B3 – GPM
B4 – MD

Así, los cuerpos B2 y B4 giran alrededor del punto fijo de rotación O21 y O41 respectivamente. Así, los dos puntos O21 y O41 son los polos de rotación de B2 y B4 respectivamente.

Así, el polo de B3 se encuentra en la intersección de dos normales a la trayectoria. La normal nA está dada por dos puntos: O21 y A. El punto B dibuja una curva plana universal con un centro de curvatura desconocido.

Así, aplicando el principio del movimiento combinado, podemos escribir simbólicamente para el movimiento de B3:

31 = 32 + 21

donde 32 describe el polo de movimiento relativo de B3 con respecto a B2 y

21 describe el polo de movimiento de conducción de B2 con respecto al marco (B1)

Por lo tanto, aplicando polos de movimiento en B3 obtenemos la dirección de la normal que se puede registrar simbólicamente como: n31 = O32 + O21

La segunda ecuación simbólica que registra el movimiento combinado de B3 es 31 = 34 + 41

Así, la segunda normal para B3 es: n31 = O34 + O41

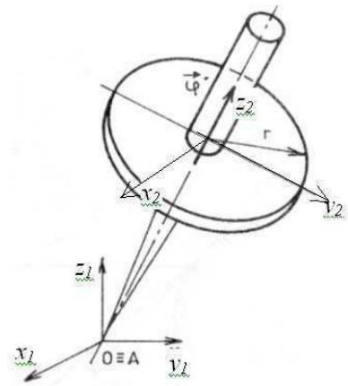
Conclusión:

El polo del movimiento final, el movimiento relativo y el movimiento impulsor se encuentra en la misma línea.

3.6 MOVIMIENTO ESFÉRICO DE UN CUERPO

Definición de movimiento esférico: El

cuerpo se mueve con un movimiento esférico si un punto del cuerpo permanece estacionario en cualquier instante.

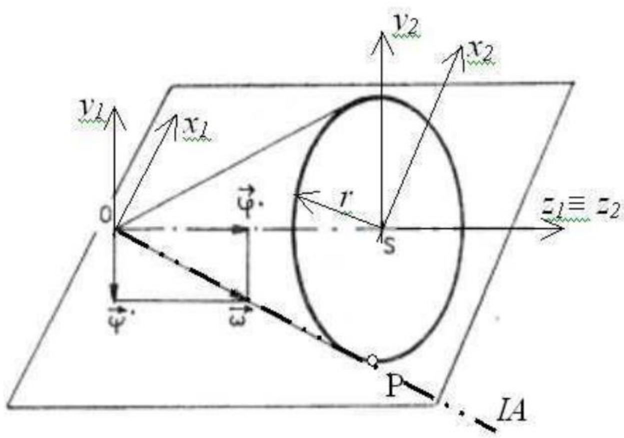


Los puntos del cuerpo están a una distancia constante del centro O, por lo que sus trayectorias son curvas esféricas, curvas que descansan sobre esferas con centro común O.

Un punto del cuerpo permanece estacionario durante el movimiento en cualquier instancia, por lo que la nueva posición del cuerpo viene dada por una sola rotación alrededor del eje que pasa por el punto estacionario.

Este eje se llama eje instantáneo de rotación y coincide con el vector de velocidad angular total. Los puntos en el eje instantáneo de rotación tienen velocidad lineal cero en el instante.

Así, el cono de radio base r que rueda sobre el plano π comparte con este plano una sola línea en el instante del eje instantáneo de rotación. Esta línea representa la región de contacto entre la superficie del cono y el plano sobre el cual rueda el cono.



Al observar el movimiento del cono en el plano, podemos describir el movimiento como una rotación alrededor del eje de simetría del cono z2-eje (el eje natural de rotación) con velocidad angular y la rotación con velocidad angular perpendicular al plano que pasa por ψ alrededor del eje el eje estacionario. punto en el cuerpo (eje y1).

Asociando el segundo sistema de coordenadas con el cuerpo en movimiento podemos identificar tres ángulos llamados ángulos de Euler:

el ángulo de nutación - que describe la desviación del eje natural de un cuerpo (z2) del eje (z1) del sistema de coordenadas fijo el ángulo de precesión

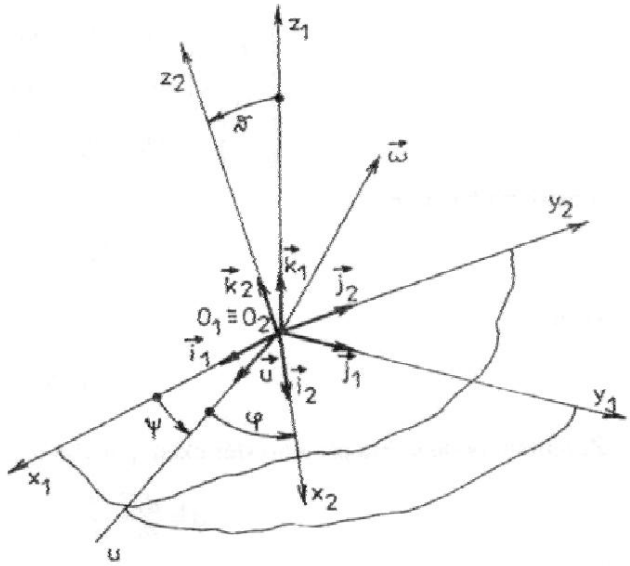
ψ describe el cambio de posición del eje natural de un cono con respecto a CS1

el ángulo de rotación natural describe el cambio de posición de un punto en el cuerpo con respecto a CS2

La velocidad angular total es la resultante de la velocidad angular de nutación, precesión y rotación natural. La dirección de la velocidad angular coincide con el eje instantáneo de rotación (IA).

De este modo: $\omega = + + \psi$

La velocidad angular total en CS1 rectangular se registra como ω = ω_x yo + ω_y j + ω_zk



Dado que las velocidades angulares coinciden con ejes de rotación particulares, necesitamos transformarlas en CS1, por lo tanto recibiendo las componentes de la velocidad angular total:

ω_x = pecado pecado ψ + porque ψ

ω_y = − pecado porque ψ + pecado ψ

ω_z = porque + ψ

La aceleración angular: $\alpha = \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}(mi_\omega\ \omega) \frac{d\,mi_\omega}{dt}\omega + mi_\omega \frac{d\omega}{dt}$

dónde

$\frac{d\,mi_\omega}{dt} = \psi =$ eωα representa el cambio de dirección de la velocidad angular ω

La dirección de α1 es perpendicular al plano que contiene ψ y e mientras que la orientación es dada por la regla de la mano derecha.

La segunda componente de la aceleración angular. α = mi $2_\omega \frac{d\omega}{dt}$ se encuentra en el eje natural de rotación

De este modo α α α = +1 por lo tanto, la dirección de la aceleración angular final no 2 coinciden con la dirección de la velocidad angular total.

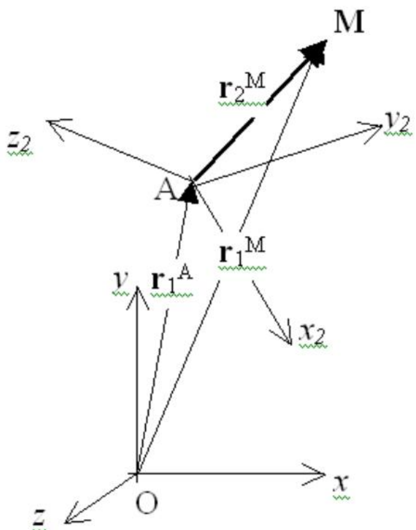
La aceleración angular total en CS1 rectangular se registra como α = + + jk α_xi α_y α_z

3.7 MOVIMIENTO ESPACIAL UNIVERSAL DE UN CUERPO

Definición:

Las trayectorias de puntos en el cuerpo que se mueven con movimiento espacial universal son un curvas espaciales. Por lo tanto, el tipo de movimiento se denomina movimiento espacial universal.

De manera similar a como describimos el movimiento plano universal, podemos imaginar que el movimiento final del cuerpo consiste en la traslación y el movimiento esférico del cuerpo, mientras que la traslación y la rotación son los movimientos descritos con respecto al punto de referencia del cuerpo.



Si el punto A es el punto estacionario durante el movimiento esférico, podemos seleccionar este punto para que sea el punto de referencia adecuado al describir el movimiento final del cuerpo.

Entonces se da la posición del punto M sobre el móvil

como: $r_1^{MAMÁ} = r_1 + r_1^{MAMÁ}$

y la velocidad y aceleración en CS1 dadas en forma vectorial:

$$v_1^{MAMÁ} = v_1 + \omega \times r_1^{MAMÁ}$$

$$MA_{1111}^{MAMÁ}\ un = un + \alpha \times r^{MAMÁ} + \omega\times \omega\times r\ (\qquad)$$

donde α y ω son cantidades cinemáticas instantáneas

en forma matricial: $MA\ rr\ 1\ 1\ 1 = + = + {}^{MAMÁ}\ r_1 C^A r_{221}^{MAMÁ}$

$$v^{MA\ 1} = v + C_1 r = v_{1\ 221} + r^{MA}\ {}^{un}_{1}\ {}_{11}^{MAMÁ}$$

$$MA^{MA\ 1}\ un = un + C_{1\ 221\ 1\ 221\ 1} r + C\ r = un + UN^{ma\ un}\ r + r_1\ {}_{11}^{MA}\ {}_1^{2\ MAMÁ}$$

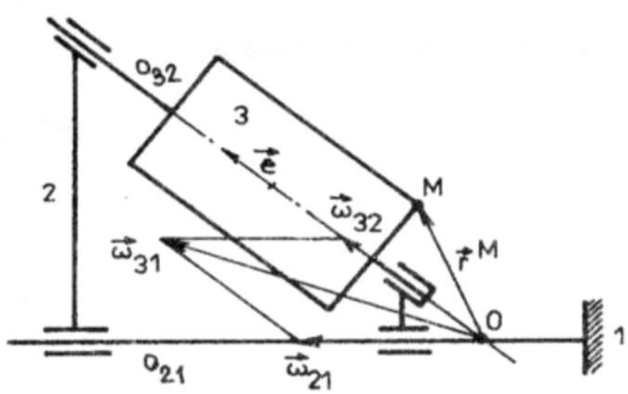
Dra. Ing. Zdenka Sant

4 SISTEMA DE CUERPOS

La estrategia de evaluar cantidades cinemáticas para un solo cuerpo puede extenderse también para un sistema de cuerpos. Como ya se mencionó, el movimiento universal de un cuerpo en particular se puede describir mediante un movimiento combinado basado en el movimiento relativo y de conducción. Ambos movimientos, el impulsor y el movimiento relativo, pueden ser de cualquier tipo: traslación, rotación y movimiento plano universal, etc.

Así, las cantidades cinemáticas para un sistema de cuerpos se pueden expresar de la misma manera. Antes de la descripción del movimiento de un cuerpo en particular, es útil, si no necesario, analizar todo el sistema, describir el par cinemático entre cuerpos, identificar la movilidad del sistema, identificar el actuador del sistema, así definir la coordenada independiente y finalmente definir el tipo de movimiento de cada cuerpo en el sistema.

4.1 ROTACIONES SIMULTÁNEAS ALREDEDOR DE EJES CONCURRENTES



El cuerpo B3 gira alrededor de su eje natural de rotación o32 (el lugar geométrico de todos los puntos que permanecen estacionarios con respecto a B3), mientras que el eje o32 está posicionado sobre el cuerpo B2 que gira alrededor de su eje de rotación o21.

El punto O está estacionario en cualquier momento, por lo tanto, el cuerpo B3 se mueve con un movimiento esférico que podría interpretarse mediante una ecuación simbólica como un movimiento combinado 31 = 32 + 21

Así podemos escribir para la velocidad del punto M $v_{31}^M = v_{32}^M + v_{21}^M$

representado en forma vectorial por la ecuación $v_{31}^M = \omega_{32} \times r_1 + \omega_{21} \times r_1$ dónde $v_{31}^M = \omega_{31} \times r_1$

y finalmente $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21}$

Así, la velocidad angular final es la suma de la velocidad angular del movimiento relativo y de conducción. El vector de velocidad angular final coincide con el eje instantáneo de rotación.

La aceleración angular total $\alpha_{31} = \frac{d}{dt}(\omega_{31}) = \frac{d}{dt}(\omega_{31})$

Sustituyendo la velocidad angular final

$$\alpha_{31} = \frac{d}{dt}(\omega_{32} + \omega_{21}) = \frac{d}{dt}\omega_{32} + \frac{d}{dt}\omega_{21}$$

Entonces la aceleración angular total es $\alpha_{31} = \frac{d}{dt}\omega_{32} + \frac{d}{dt}\omega_{21}$

Dónde $\frac{d}{(dt} \text{mi}\, \omega_{32\,32}) = \frac{d\, \text{mi}_{32}}{dt} + 32\ \text{mi}\ 32 \qquad \frac{d\omega_{32}}{dt} = (\; 21\ 32\ 32\ 32\ 32\ 21\ 32\ 32 \times + = \times) + \omega\ \text{mi}\ \text{mi}\ \text{mi}\ \omega\ \omega\ \alpha$

y $\frac{d}{(dt} \text{mi}_{21}\ 21) = \text{mi}_{21} \frac{d\omega_{21}}{dt} = \text{mi}\ 21\ 21 = \alpha \quad \alpha_{21}$

por lo tanto, la aceleración final se da como

$$\alpha\ \alpha\ \alpha\ \omega\ \omega = + + \times\ 31\ 32\ 21\ 21\ 32$$

El último componente de la ecuación se conoce como aceleración angular de reventa.

$$\alpha_{Re}\ \omega_{21}\ \omega_{32\,s} = \times$$

La condición de existencia de la aceleración Resal: $\omega\ dr \neq 0$

$\omega rel \neq 0$

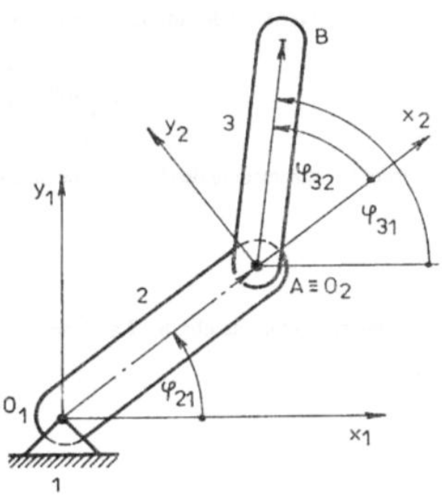
$\omega\ \omega\ \cancel{dr}\ rel$

Las rotaciones simultáneas en forma matricial:

velocidad angular: $31\ 32\ 21 = + = \omega\ \omega\ \omega \quad \begin{matrix} \omega_{32x\_} \\ \omega_{32\,\text{años}} \\ \omega_{32z} \end{matrix}_1 + \begin{matrix} \omega_{21X} \\ \omega_{21y} \\ \omega_{21z} \end{matrix}_1$

aceleración angular: $= + + = \alpha\ \alpha\ \alpha\ 31\ 32\ 21\ res \quad \begin{matrix} \alpha_{32x\_} \\ \alpha_{32\,\text{años}} \\ \alpha_{32z} \end{matrix}_1 + \begin{matrix} \alpha_{21X} \\ \alpha_{21\,\text{años}} \\ \alpha_{21z} \end{matrix}_1 + \omega_{21\,32}$

4.2 ROTACIONES SIMULTÁNEAS ALREDEDOR DE EJES PARALELOS



Investigación de cantidades cinemáticas de un mecanismo. o parte de ella requiere tomar en consideración la configuración completa de cuerpos y restricciones. Así, el primer paso es analizar la movilidad basada en restricciones, identificar el actuador que controla el movimiento del sistema e identificar el movimiento de cada cuerpo.

Por lo tanto, el sistema dado consta de: B1 - marco fijo

B2 – enlace giratorio

B3 - movimiento plano universal

Las restricciones que limitan el movimiento del sistema son dos pines, ambos unidos al B2

B2 gira alrededor de su centro estacionario de rotación O1 y sus puntos dibujan curvas planas – círculos concéntricos.

B3 gira alrededor del centro de rotación O2 que conecta B3 con B2

Así, el movimiento relativo es la rotación de B3 con respecto a B2 con velocidad angular ω32 y el movimiento impulsor es la rotación de B2 con respecto a la cimentación B1 con velocidad angular ω21.

Por lo tanto: kkk + 31 32 21

con velocidad angular total y ω +k31 ω32 ω21 k

aceleración angular α 32 21 α = k + α31 desde 0 α ω ω × = Resolución 21 32

Por lo tanto, las cantidades cinemáticas para un punto B en particular se pueden expresar en forma vectorial:

para la posición: BA BA = + rrr 1 1 1

para la velocidad vvv = + B B B 31 32 21

v ω r ω + × B 31 32 1 1 × 21 B

para aceleración:

aaaaaa + BBBBB 31 32 21 corazón

ω r 32 32 1 × (un ω BA) + × 32 1 BA + 21 1 × (× + × B) ω ω r α r 21 21 B (ωv × 21 32)

o en forma matricial

rrr = + BA BA 1 1 1

para la posición: segundo 21 r 21 2C r = + 1 A dónde r C r = 2 32 3

r C + CC r 1 21 2 21 32 3 B A

para la velocidad: v = 31 B 21 (C r CC r C 32 3 21 32 32 3 21 A) + Cr

para aceleración:

un CAC (UN + + + 21 32 21 32 2 21 B 31 2 BA (2 21) r (1 1 ABA +) + 2 21 21 C 32 32 3 Cr

El análisis de la posibilidad de movimiento muestra dos casos:

1. Rotaciones simultáneas con la misma orientación de velocidad angular
2. Rotaciones simultáneas con velocidades angulares en dirección opuesta

En ambos casos el movimiento resultante es una rotación con velocidad angular ω31

El ingeniero mecánico se enfrenta a problemas relacionados con las rotaciones simultáneas alrededor de un eje paralelo en varias aplicaciones, como la caja de cambios, la caja de cambios planetaria, etc.