Definición de una métrica cinemática para manipuladores de robots.

Krzysztof Tcho´n Ignacy Dul¸eba Instituto de Ingeniería Cibernética Universidad Técnica de Wroclaw ul. Janiszewskiego 17/11,
50-372 Breslavia, Polonia

Abstracto

Utilizando una métrica de Riemann en el grupo euclidiano especial, definimos una métrica cinemática en el espacio de cinemática de los manipuladores de robots. La métrica se puede utilizar como instrumento en el diseño cinemático y la evaluación del rendimiento de los manipuladores de robots.

Palabras clave: cinemática, coordenadas exponenciales, métrica riemanniana, geodésicas, Métrica de Chebyshev, aproximación.

1. INTRODUCCIÓN

El elemento indispensable del diseño óptimo de cinemáticas de robots manipuladores lo constituye el procedimiento de evaluación. La evaluación de la cinemática debe establecer un orden de preferencia cinemática y, eventualmente, conducir a la selección de diseños óptimos.
Varios índices de rendimiento cinemático tratados en la literatura robótica abordan exactamente el problema de la evaluación; cf. por ejemplo (Yoshikawa 1985, Klein y Blaho 1987, Park y Brockett 1989).
El tema de este artículo también puede considerarse como una contribución al acervo de herramientas de evaluación de la cinemática de los manipuladores de robots. Más específicamente, proponemos basar la evaluación de la cinemática en una medida de distancia (una métrica) entre cinemáticas. Con este fin, consideramos la cinemática como mapas continuos desde el espacio interno compacto (articulación) X hacia el espacio de posiciones externas y orientación del efector, identificado con el grupo euclidiano especial SE(3). Nuestra construcción de una métrica cinemática es estándar; proporciona una métrica, a menudo llamada métrica de Chebyshev, en el conjunto de mapas C^0 continuos (X, SE(3)) de X en SE(3), mediante la explotación de una métrica de Riemann en SE(3). Por lo tanto, ′ invariante por la izquierda, $f'' : X \longrightarrow SE(3)$ y $d : SE(3) \times SE(3) \longrightarrow R$ es la métrica si f en SE(3) definida por la métrica de Riemann, entonces la métrica de Chebyshev se define como $\rho(f', f'') = \max_{x \in X} d(f'(x), f''(x))$. Debe admitirse, sin embargo, que, dado que no existe una métrica riemanniana natural en SE(3), nuestra construcción, aunque bien motivada y conducente a fórmulas computables, no es la única posible. Los argumentos detallados a favor de la métrica riemanniana adoptada en este documento se proporcionarán en la Sección 2.

Habiendo introducido una estructura métrica en C, ^{0}(X, SE(3)), estamos en condiciones no sólo de mida la distancia entre dos cinemáticas, pero también considere la siguiente cinemática problema de aproximacion Dado un desempeño cinemático prescrito f C y una familia ^{0}(X, SE(3)), de cinemáticas kv dependientes de parámetros geométricos v V (dimensiones de eslabones, ángulos de torsión, parámetros de desplazamiento, (Paul 1981)), encuentre la mejor aproximación cinemática a f en el sentido de métrica ρ.

Como paso intermedio natural hacia la definición de la métrica en el conjunto de cinemáticas del robot, hemos encontrado fórmulas explícitas para las coordenadas exponenciales y para la métrica d en SE(3). La última métrica define la distancia entre dos puntos en SE(3) como igual a la longitud mínima de una curva que une los puntos. La métrica en SE(3) considerada aquí se parece a la medida para las desviaciones de desplazamiento y rotación introducidas en (Taylor 1983), pero da como resultado valores de distancia más grandes que reflejan con mayor precisión la estructura geométrica intrínseca de SE(3). La construcción de esta métrica también produce un enfoque específico para la planificación de trayectorias para el control punto a punto de manipuladores de robots en el espacio exterior, que se basa en el trazado de una geodésica que une dos puntos en SE(3). Un enfoque similar para la planificación de la trayectoria en el espacio interno de un manipulador se describe en (Shin y McKay 1986). En (Tcho´n y Dul¸eba 1991) se ha presentado un algoritmo que utiliza coordenadas exponenciales en SE(3) para la generación de trayectorias de longitud mínima (geodésica) en el espacio de trabajo del manipulador.

El documento está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, presentamos conceptos matemáticos básicos, como una definición de la métrica cinemática, coordenadas exponenciales en SE (3), métricas riemannianas invariantes por la izquierda en SE (3), geodésicas y una métrica en SE (3) inducida por el Riemannian estructura. También formulamos una lista de requisitos que debe cumplir una métrica riemanniana "razonable" en SE(3), y hacemos una elección específica de la métrica. La sección 3 contiene los principales resultados. Damos allí una fórmula explícita para las coordenadas exponenciales en SE(3), definimos su dominio de definición y proporcionamos una expresión local para la métrica en SE(3). En la sección 4, calculamos la métrica cinemática para 6 cinemáticas ejemplares, incluido el manipulador PUMA 600. La Sección 5 proporciona un bosquejo de posibles aplicaciones robóticas de la métrica. El artículo concluye con la sección 6 que trata de las propiedades computacionales de la métrica cinemática. Se aprecia la importancia de los cálculos simbólicos y se proponen estimaciones manejables computacionalmente de la métrica en SE(3).

2 CONCEPTOS BÁSICOS

Consideraremos la cinemática de manipuladores robóticos rígidos de n grados de libertad equipados con articulaciones prismáticas o giratorias. Dicha cinemática se puede representar matemáticamente como un mapa continuo

$k : X \longrightarrow SE(3)$, (1) donde X es el espacio de variables

internas del manipulador (posiciones de las articulaciones), SE(3)- representa el grupo euclidiano especial de movimientos del cuerpo rígido, (Brockett 1984, Loncaric 1985). Teniendo en cuenta las restricciones físicas de movimiento en las articulaciones, llegamos a la conclusión de que el espacio interno X es un subconjunto compacto de R^n . Fijemos un marco de coordenadas base para el manipulador. Entonces, el grupo SE(3) se puede expresar como un producto semidirecto de rotaciones y traslaciones con respecto al sistema base, por lo que SE(3) = SO(3) × R^3 . Aquí SO(3) denota el grupo ortogonal especial en R^3 , es decir, el , grupo de todas las matrices R de 3 por 3 con det R = 1 y R · RT = I3, R3 es el grupo de traslaciones en R3 . De acuerdo con la conocida representación matricial, cualquier elemento de RT 0 1

SE(3) puede considerarse como una matriz de 4 por 4 de la forma con R SO(3),

T R3 , (Paul 1981) . Dada una configuración x X del manipulador, la cinemática

k(x) = R(x) T(x) 0 1 significa que el marco de coordenadas del efector ha sido desplazado por

T(x) con respecto al marco base, mientras que su orientación está descrita por R(x) .

Denotemos por Kn el conjunto de todas las cinemáticas (1) con n grados de libertad. Claramente, Kn Cn = C Una ^{0}(X, SE(3)) - el conjunto de mapas continuos de X a SE(3). un estaño forma diferente de proporcionar una métrica a Cn se refiere a una métrica en SE(3). Supongamos que momento que d denota tal métrica. Entonces, para f ′ para , f″ Cn definimos, (Engelking 1975)

$$\rho(f', f'') = \max_{x \in X} d(f'(x), f''(x)) \quad (2)$$

Para construir la métrica d necesitamos investigar más a fondo las propiedades de SE(3).

Primero, observamos que el grupo euclidiano especial SE(3) tiene la estructura de un grupo de Lie conexo, y dim SE(3) = 6. Usando la estructura diferenciable de SE(3) uno puede considerar la cinemática (1) como suave (es decir, infinitamente continuamente diferenciable) o incluso mapas analíticos. El álgebra de Lie se(3) del grupo euclidiano es el producto se(3) = so(3)×R3 , donde so(3) denota el conjunto de todas las matrices asimétricas de tamaño 3 por 3. Con 0 − r3 r2 0 −r1 0

respecto a la identificación R3 r = [r] = r3 −r2 r1 so(3) , se(3) = R6 .

Existe una aplicación suave exp : se(3) −→ SE(3), localmente un difeomorfismo, cuya inversión introduce las llamadas coordenadas exponenciales en SE(3), exp−1 : (U, E) −→ (R6 , 0), definida sobre alguna vecindad abierta U del elemento unidad E = I4 SE(3). Dejar

s = RT 0 1 U, y denotamos las coordenadas exponenciales de s por (r, t) = [r] t 0 0

. Entonces, de manera similar a (Loncaric 1985), encontramos que exp [r] t 0 0 = RT 0 1 rendimientos

R = e T [r] , y T = A[r] donde A = As a función exponencial matricial. 1 0

el teorema de Euler, (Richtmyer 1981), los valores propios de R son iguales a 1, e con cos α = ±iα ,

1 2 · (TrR − 1), TrR = R11 + R22 + R33. En consecuencia, [r] tiene valores propios

0 , ±iα, y los valores propios de A ascienden a λ1 = 1, λ2,3 = pecado α ± 2i · sen2 α 2 α . Eventualmente,

ya que det A = λ1 · λ2 · λ3 = pecado α 2 α 2 2 , concluimos que para 0 ≤ α < π la exponencial

coordenadas de s = RT 0 1 están bien definidas y expresadas de la siguiente manera

exp−1 RT 0 1 = (r, t) donde [r] = ln R , t = un $^{-1}$ · T (3)

Arriba, ln R denota el logaritmo matricial, véase (Gantmacher 1988). Segundo, sea Q una matriz simétrica positiva definida de 6 por 6. Claramente, Q define un producto interno en R6 asignando a cualquier x, y R6 el número (x, Qy) = x TQy. La matriz Q se puede utilizar para introducir una métrica de Riemann invariante por la izquierda en SE(3) asignando a ξ, η TsSE(3) el valor de (ξ, η)(s) = (Ls−1 ξ, QLs −1 η), (Arnold 1978). Aquí TsSE(3) denota el espacio tangente a SE(3) en s, Ls−1 es el mapa tangente para el automorfismo interno izquierdo

$v \longrightarrow s^{-1} v$ de SE(3) . La métrica riemanniana hace que SE(3) sea una variedad riemanniana y s″ SE(3) nos permite medir la distancia entre cualquier curva s en ′, como la longitud mínima de un SE(3) que une s ′, s″, es decir

$$d(s', s'') = \inf_{s(\cdot)} \int_{t'}^{t''} \sqrt{(\sigma(t), \sigma(t))(s(t))}\, dt \tag{4}$$

donde σ(t) = ˙s(t) es un vector tangente a s(·) en s(t) y el mínimo se toma sobre las curvas s(·) (suaves por partes) tales que s(t ′) = s , s(t ″) = s ″. En tercer lugar, la distancia (4) se puede calcular de forma eficaz utilizando el hecho de que SE(3) es geodésicamente completa, por lo que la longitud mínima de la curva que une s s' ' se realiza mediante la geodésica (Gallot, Hulin y Lafontaine 1987). Además, frente a la métrica Riemanniana invariante por la izquierda definida anteriormente, la longitud del arco de la unión geodésica mínima s s″ es la misma que la longitud del arco ′, de la geodésica mínima en SE(3) entre I4 y s −1 s″. Pero siempre que s −1 s″ U (U es el dominio de definición de coordenadas exponenciales), la última longitud es igual al valor de la Q-norma de exp−1 (ss ″) en R6 . En la próxima sección explotaremos esta observación para proporcionar una fórmula explícita para la distancia (4) y, por lo tanto, para determinar la métrica (2) para una elección específica de Q.

Como ya hemos mencionado, cualquier producto interno en R6 produce una métrica riemanniana invariante por la izquierda en SE(3), por lo que de hecho estamos tratando con una familia de tales métricas dependiendo de la elección de la matriz Q. Es bien sabido, véase, por ejemplo, (Loncaric 1985) que no hay una elección natural de Q, en particular, no existe ninguna métrica riemanniana bi-invariante (es decir, invariante simultáneamente por la izquierda y la derecha) en SE(3). Por otro lado, tales métricas naturales existen en subgrupos de SE(3): el de rotaciones SO(3) y el de traslaciones R3 .
Estas métricas no definen una métrica natural en SE(3) principalmente porque SE(3) es un producto semidirecto, no directo, de SO(3) y R3 . Entre los subgrupos de SE(3) distinguiremos los de movimientos de tornillo, es decir, de rotaciones seguidas de traslaciones con respecto al mismo eje. Claramente, cualquier subgrupo de movimientos de tornillo es abeliano, isomorfo al producto directo de SO(2) y R. Después de esta introducción, estamos listos para formular la siguiente lista de requisitos relacionados con una métrica riemanniana preferida en SE(3).

- i. La métrica restringida a SO(3) o R3 coincide con la correspondiente natural métrica.
- ii. La métrica debe respetar la estructura del producto directo de los subgrupos de movimiento de tornillo de SE(3), es decir, para un movimiento de tornillo dado, las magnitudes de la rotación y la traslación se miden de forma independiente.
- iii. La métrica debe ser computacionalmente tan simple como sea posible.

Teniendo en cuenta los requisitos anteriores, hemos elegido para consideraciones adicionales el producto interno euclidiano en R6 estableciendo Q = I6. En la Sección 3 probaremos que esta es una elección correcta y presentaremos algunos argumentos a favor de su singularidad.

3 PRINCIPALES RESULTADOS

En vista de las consideraciones anteriores, un paso necesario para la determinación efectiva de la métrica (4) en SE(3) es calcular las coordenadas exponenciales (3). Una fórmula adecuada es ofrecida por el siguiente resultado

Lema 3.1 Dado $s = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ SE(3) con $\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Tr}R - 1)$. Entonces para $0 \leq \alpha < \pi$, las coordenadas exponenciales de s son iguales a

$$\exp^{-1} \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (r, t) \text{ donde } [r] = \frac{\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} \cdot (R - R^T) \quad , \quad t = A^{-1} \cdot T \quad (5)$$

y

$$A^{-1} = I_3 - \frac{1}{2} \cdot [r] + \frac{2 \operatorname{sen}\alpha - \alpha(1 + \cos\alpha)}{2\alpha^2 \operatorname{sen}\alpha} \cdot [r]^2 . \quad (6)$$

Prueba: Este es un ejercicio simple de álgebra lineal.

Las coordenadas exponenciales (5) consisten en las coordenadas de orientación ry las coordenadas de posición t. Están definidas sobre una vecindad U de E = I4 en SE(3). Para describir U explícitamente, primero observamos que las coordenadas de orientación r satisfacen la relación

$$(r, r) = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Tr}[r]^2 = \alpha^2 , \quad (7)$$

donde (·, ·) representa el producto interno en R3 . Ahora el Lema 3.1 y (7) dan inmediatamente la siguiente caracterización de U.

Corolario 3.1 El dominio de definición de coordenadas exponenciales (5) es una vecindad abierta U de E en SE(3) definida por $(r, r) < \pi^2$.

Habiendo encontrado las coordenadas exponenciales (5) en U SE(3), ahora estamos en posición de derivar una fórmula computable para la distancia (4). Como ya hemos mencionado, SE(3) es geodésicamente completo, por lo que el mínimo en (4) se asume en la geodésica mínima cuya longitud se puede calcular pasando a coordenadas exponenciales. Más específicamente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1 Sea $s' = \begin{pmatrix} R' & T' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s'' = \begin{pmatrix} R'' & T'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea tal que $s'^{-1} s''$ U como se define en el corolario 3.1. Suponga que la métrica riemanniana invariante por la izquierda en SE(3) viene dada por la matriz identidad Q = I6. Entonces la distancia (4) entre s , s″ está determinada por

$$d^2(s', s'') = (r, r) + (t, t) = (r, r) + (\theta, \theta) + \gamma \cdot ((r, r)(\theta, \theta) - (r, \theta)^2), \quad (8)$$

dónde

$$[r] = \frac{\alpha}{2 \operatorname{sen}\alpha} \cdot (R'^T R'' - R''^T R') , \quad \theta = R'^T (T'' - T'),$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{T\,r}(R'^T R'') - 1) , \ \gamma = \alpha^{-2} \left(\left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{pecado} \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - 1 \right) \quad (9)$$

Prueba: Basta calcular las coordenadas exponenciales de s Según $s'^{-1} s'' = \begin{pmatrix} R'^T R'' & R'^T (T'' - T') \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5),(6) son iguales a (r, t) con [r] dada por (9) y t = A−1 θ. Por (6), la matriz A−1 = I3 − escribiremos B = A−1 = I3+a[r]+b[r] del $\frac{1}{2}$ [r]+ $\frac{2 \operatorname{sen}\alpha - \alpha(1+\cos\alpha)}{2\alpha^2 \operatorname{sen}\alpha}$ $[r]^2$, con α, [r] definida en (9). Por simplicidad 2 . Lo producto (t, t) = (Bθ, Bθ). Claramente, BTB = I3 + que se debe hacer ahora es un cálculo. (2b−una simetría sesgada de [r], deducimos de su ecuación $^2)\cdot [r]^2 + b^2 \cdot [r]^4$. Debido a la característica que $[r]^4 = -\alpha^2 \cdot [r]^2$,

por lo tanto, BTB = I3 + (2b − a = I3 + γ · [r]) para γ definido en (9). A continuación, se ve fácilmente que (t, t) = (θ, θ) + γ · ([r] θ, [r]θ).Pero [r]θ es solo el producto vectorial r × θ, (Brockett y Loncaric 1986), por lo que γ se multiplica por la longitud al cuadrado de este producto vectorial. Del álgebra vectorial elemental se deduce que (r × θ, r × θ) = $r^2 \cdot \theta^2 \cdot \sin^2 \beta$, donde β es el ángulo entre r y θ, $r^2 \cdot \theta^2$ = (r, r). Ya que, por definición, $(r, u)^2 = r^2 \cdot \theta^2 \cdot \cos^2 \beta$, concluimos que (t, t) = (θ, θ) + γ · ((r, r)(θ, θ) − $(r, \theta)^2$).
QED

Observación 3.1 Se ve fácilmente que el coeficiente γ en (8) siempre es ≥ 0. De manera similar, por la desigualdad de Schwarz, el término multiplicado por γ en (8) tampoco es negativo. En consecuencia, la rhs de (8) es ≥ 0. Además, resulta de la ortogonalidad de R′ que (θ, θ) = $T'' - T'^2$. Siendo esto así, los dos primeros términos en (8) pueden interpretarse como una medida de la distancia entre las rotaciones R′ ,R″ y las traslaciones T″ ,T′ , realizado de forma independiente, mientras que el tercer término refleja el hecho de que SE(3) no es el producto directo sino semidirecto de SO(3) y R3 . La contribución del último término a la distancia (8) es distinta de cero solo si tanto r como θ difieren de 0. Eventualmente, invocando la expresión (7), la fórmula (8) se puede dar de las siguientes formas equivalentes:

$$d^2(s', s'') = \alpha^2 - \gamma \cdot (r, \theta)^2 + \delta \cdot (\theta, \theta) \text{ para } \delta = \left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{\text{pecado } \frac{\alpha}{2}}\right)^2, \tag{10}$$

o

$$d^2(s', s'') = \alpha^2 + (\theta, \theta) \cdot (\cos^2 \beta + \delta \cdot \text{sen}^2 \beta), \tag{11}$$

donde β es el ángulo entre los vectores r y θ introducido en la demostración del Teorema 3.1.
Quizás la forma (10) sea la más adecuada para fines computacionales.

Observación 3.2 Verifiquemos que la métrica (8) efectivamente satisface los requisitos i.-iii. declaró s″ en la Sección 2. Para ello primero observe que, si establecemos T′ = T″ En s′, s″, así que eso es, T SO(3), obtendremos $d^2(s', s'') = (r, r) = \alpha^2$. De manera similar, si R′ = R″, llegamos a que $d^2(s', s'') = (\theta, \theta) = T'' - T'^2$. Por lo tanto, yo. Está satisfecho. Ahora vamos a s′, s″ sea un par de tornillos movimientos realizados con un eje dado. Claramente, concluimos que en este caso θ = T″ −T′, y r coincide con el eje, por lo que el ángulo β entre r y θ es igual a 0. En consecuencia, (11) da d de acuerdo con el requisito ii. $d^2(s', s'') = \alpha^2 + T'' - T'^2$. Para mostrar que las fórmulas (8), (10), (11) son manejables computacionalmente, hemos analizado varios ejemplos representativos en la Sección 4.

Observación 3.3 Por un análisis completo de una fórmula equivalente a (8), derivada para un matriz general simétrica, definida positiva de 6x6 $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}$ con simétrico Q1, Q3, se puede concluir que el requisito i. resulta en Q1 = Q3 = I3, mientras que ii. implica Q2 = 0. Siendo así, el producto interior euclidiano en R6 parece ser el único que cumple con los requisitos i. y ii. En la siguiente sección haremos un esfuerzo considerable para probar que la métrica (8) cumple también el requisito iii.

Habiendo definido una métrica en SE(3), dotaremos a Cn de la métrica (2) en forma recta camino hacia adelante. Es decir, sea f′, f″ Cn , x X y $f'(x) = \begin{pmatrix} R'(x) & T'(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, f″(x) =

R″(x) T ″(x) 0 1 . Bajo el supuesto de que f ′ (x) $^{-1}$ f ″(x) U , d(f ′ (x), f″(x)) puede ser encontrado usando expresiones (8)-(11). En consecuencia, calculamos

$$\rho(f', f'') = \max_{x \in X} d(f'(x), f''(x)).$$

Vale la pena mencionar que, gracias a la compacidad de X, el espacio métrico (Cn, ρ) tiene buenas propiedades topológicas. En particular, se sigue que (Cn, ρ) es un espacio métrico completo, y que la convergencia en (Cn, ρ) significa la convergencia uniforme. Ambas propiedades juegan un papel clave en el estudio de problemas de aproximación en (Cn, ρ). La métrica ρ, restringida a la cinemática Kn Cn, define un espacio métrico de cinemática (Kn, ρ). Por lo tanto, ρ se denominará métrica cinemática.

4 CÁLCULO DEL MET CINEMÁTICO RIC

A continuación, calcularemos la métrica cinemática para varios ejemplos de cinemática de manipuladores de robots.

Ejemplo 4.1 Péndulo doble.

La cinemática del doble péndulo viene dada por la conocida fórmula

cos(x1 + x2) − sen(x1 + x2) 0 d cos x1 + l cos(x1 + x2) sen(x1 + x2) cos(x1 + x2) 0 d sen x1 + lsen(x1 + x2)

k(x) =

0	0	1	0	R(x) T(x) 0 1
0	0	0	1	=

(12)

Sean kv(x), kv ′(x) un par de péndulas dobles que se diferencian por sus parámetros geométricos (las longitudes de los eslabones d,l) con v = (d, l), v l′) . Deseamos calcular la distancia ρ(kv, kv ′) según la fórmula (2). Para ello observamos primero que el espacio interno de (12) coincide con un subconjunto compacto X R2 (un rectángulo, si (12) tiene límites articulaciones, o el toro ^{2} para juntas ilimitadas). Entonces, para encontrar ρ(kv, kv ′) , necesitamos T para calcular d(kv(x), kv ′(x)) como se indica mediante (8)-(11). Es evidente que α(x) = α = 0, entonces para cualquier v, v′ ; kv(x) −1kv ′(x) U. Además, debido a la forma de kv, kv ′ la parte rotacional de las coordenadas exponenciales desaparece de (10), por lo tanto

$$d(kv(x), kv'(x)) = \sqrt{(d - d')^2 + 2(d - d')(l - l') \text{ porque } x2 + (l - l')^2} \quad (13)$$

Ahora, suponiendo que x2 [−π, π], concluimos que

$$\rho(kv, kv') = \max_{|x|\leq\pi} d(kv(x), kv'(x)) = |d - d'| + |l - l'| \quad (14)$$

De (14) se sigue que la topología impuesta al conjunto de doble péndula por la métrica ρ coincide con la inducida por la norma de valor absoluto en el espacio de parámetros geométricos. El resultado (14) se generaliza inmediatamente a n-pendula, (Dul¸eba y Tcho´n

1990).

Los siguientes ejemplos se referirán a cinemáticas generales de 2 grados de libertad que contienen solo articulaciones giratorias y dependen de 6 parámetros geométricos. La cinemática de un manipulador 2R general se puede describir de la siguiente manera: (para abreviar establecemos $c_i = \cos x_i$ y $s_i = \operatorname{sen} x_i$)

$$k(x) = \begin{pmatrix} c_1c_2 - s_1s_2\cos\alpha_1 & -c_1s_2\cos\alpha_2 - s_1c_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + s_1\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 & c_1s_2\operatorname{sen}\alpha_2 + s_1c_2\cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 + s_1\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2 & a_2c_1c_2 - a_2s_1s_2\cos\alpha_1 + d_2s_1\operatorname{sen}\alpha_1 + a_1c_1 \\ s_1c_2 + c_1s_2\cos\alpha_1 & -s_1s_2\cos\alpha_2 + c_1c_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - c_1\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 & s_1s_2\operatorname{sen}\alpha_2 - c_1c_2\cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 - c_1\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2 & a_2s_1c_2 + a_2c_1s_2\cos\alpha_1 - d_2c_1\operatorname{sen}\alpha_1 + a_1s_1 \\ s_2\operatorname{sen}\alpha_1 & c_2\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 & -c_2\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 + \cos\alpha_1\cos\alpha_2 & a_2s_2\operatorname{sen}\alpha_1 + d_2\cos\alpha_1 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

En (15) α_1, α_2 son ángulos de torsión, a_1, a_2 describen longitudes de los enlaces; d_1, d_2 denotan parámetros de cambio (Paul 1981). Se observa fácilmente que (15) se vuelve idéntico a (12) $d_1 = d_2 =$ d es el mismo que el de (12). A , $a_2 = l$, 0. El dominio de definición de (15) para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ $a_1 =$ continuación calcularemos la métrica (2) para 3 cinemáticas particulares del manipulador general 2R.

Ejemplo 4.2 Manipulador general 2R (1).

Sean $k_v(x)$, $k_{v'}(x)$ un par de manipuladores 2R generales que se diferencian solo por su $d_1 = d_1' = 0$ ángulos de giro α_2, α_2' . Además, supondremos que $\alpha_1 = \alpha_1' = 0$, $= re_2 = re_2'$, $a_1 = a_1'$, $a_2 = $ un $_2'$. En efecto tenemos $v = (\alpha_2, a_1, a_2)$, $= (\alpha_2', a_1, a_2)$. Ahora necesitamos determinar la distancia $d(k_v(x), k_{v'}(x))$ de acuerdo con (8)-(11). Mediante un simple cálculo encontramos que $\alpha(x) = \alpha = |\alpha_2 - \alpha_2'|$, $\theta(x) = \theta = 0$, por lo tanto

$$d(k_v(x), k_{v'}(x)) = |\alpha_2 - \alpha_2'| \quad \text{(dieciséis)}$$

siempre que $\alpha < \pi$. Como la rhs de (15) es independiente de $x \in X$, concluimos inmediatamente que

$$\rho(k_v, k_{v'}) = |\alpha_2 - \alpha_2'| \quad (17)$$

De nuevo la topología impuesta por la métrica (2) coincide con la inducida por la norma de valor absoluto en el (sub)espacio de parámetros geométricos.

Ejemplo 4.3 Manipulador general 2R (2).

Como antes, sea $k_v(x)$, $k_{v'}(x)$ un par de manipuladores 2R generales (15), pero ahora solo se supone que $\alpha_1 = \alpha_1' = 0$ $d_1 = d_1'$, $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2'$, por lo tanto, $v = (\alpha_2, d_2)$, $v' = (\alpha_2', d_2')$. Para definir la distancia $d(k_v(x), k_{v'}(x))$ comenzamos calculando $\alpha(x) = \alpha = |\alpha_2 - \alpha_2'|$ y $r(x) = r = \alpha(-1, 0, 0)^T$. A continuación encontramos

$T'(x) - T(x) = T(r, \theta) = ' - T = (0, 0, d)$ donde $\bar{d} = d$ así que para $d'_2 - d_2$. Ahora se comprueba fácilmente que 0 , $\alpha < \pi$ (10) y (2) se obtiene la siguiente fórmula de distancia

$$\rho(kv, kv') = d(kv(x), kv'(x)) = \frac{\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2}}{\text{pecado}\,\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2}}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2} + (d'_2 - d_2)^2} \qquad (18)$$

La relación (18) sigue siendo la misma cuando los manipuladores difieren en d_1 en lugar de d_2.

Ejemplo 4.4 Manipulador general 2R (3).

Suponemos que $kv(x)$, $kv'(x)$ denotan manipuladores 2R generales (15), los parámetros que difieren por todos geométricos excepto $\alpha_1 = \alpha'_1$, $d'_1 = 0$. Entonces, ahora tenemos $v = (a_1, d_1, \alpha_2, a_2, d_2)$, $v' = (a'_1, \alpha'_2, a'_2, d'_2)$. Con estos datos, usando algo de álgebra computacional, hemos encontrado el siguiente expresión para el cuadrado de la distancia (10), válida para $\alpha = |\alpha_2 - \alpha'_2| < \pi$:

$$d^2(kv(x), kv'(x)) = 4\frac{(\alpha_2-\alpha'_2)^2}{\text{sen}^2\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2}}\left((a_1-a'_1)^2\,\text{sen}^2 x_2 + (a_1-a'_1)^2\cos^2 x_2 + 2(a_1-a'_1)(a_2-a'_2)\cos x_2\right) + (\alpha_2-\alpha'_2)^2 + \frac{(\alpha_2-\alpha'_2)^2}{4\,\text{sen}^2\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2}}\left((d_1-d'_1) + (d_2-d'_2)\right)^2 + (a_2-a'_1)^2_2 \qquad (19)$$

La maximización de (19) wrt $x_2 \in [-\pi, \pi]$ produce la métrica (2) definida como sigue. Ponemos $\omega = \frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2\,\text{sen}\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2}}$. Entonces

$$\rho(kv, kv') = \sqrt{(\alpha_2-\alpha'_2)^2 + (a_2-a'_2)^2\frac{\omega^2}{\omega^2-1} + \omega^2\left((a_1-a'_1)^2 + ((d_1-d'_1) + (d_2-d'_2))^2\right)} \qquad (20)$$

si

$$|a_2 - a'_2| \leq (\omega^2 - 1)|a_1 - a'_1|,$$

mientras que de otra manera

$$\rho(kv, kv') = \sqrt{(\alpha_2-\alpha'_2)^2 + (|a_1-a'_1| + |a_2-a'_2|)^2 + \omega^2((d_1-d'_1) + (d_2-d'_2))^2} \qquad (21)$$

En particular, si $a_2 = a'_2$ entonces se aplica la fórmula (20), por lo tanto, en este caso

$$\rho(kv, kv') = \frac{\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2}}{\text{pecado}\,\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2}}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha'_2}{2} + (a_1-a'_1)^2 + ((d_1-d'_1) + (d_2-d'_2))^2} \qquad (22)$$

Es fácil ver que (22) se especializa en (18) para $a_1 = a'_1$, $d_1 = d'_1$.

Ejemplo 4.5 PUMA 600 (1).

Consideraremos la cinemática del manipulador PUMA 600 como se describe en (Bazerghi, Goldenberg y Apkarian 1984), véase también (Tarn et al. 1986). Sean $kv(x)$, $kv'(x)$ la cinemática de un par de PUMA, donde hemos asumido por razones de simplicidad que $x_3 \in [-\pi, \pi]$, que difieren solo en los parámetros geométricos de traslación. De acuerdo con la notación utilizada en (Bazerghi, Goldenberg y Apkarian 1984) esto significa que v = (l2, l3, r3, r4), v′ = (l′2, l′3, r′3, r′4). Además establecemos r5 = r′5 . Claramente, en este caso r(x) en (10) es igual a 0, y, con una ayuda moderada de álgebra computacional, calculamos la distancia al cuadrado (10) de la siguiente manera

$$d^2(kv(x), kv'(x)) = (l2 - l'_2)^2 + (l3 - l'_3)^2 + (r3 - r'_3)^2 + (r4 - r'_4)^2 +$$

$$+ 2(l2 - l'_2)((r4 - r'_4) \text{ sen } x3 + (l3 - l'_3) \cos x3). \quad (23)$$

maximizar (23) wrt x3 ∈ [−π, π] encontramos la métrica (2) :

$$\rho(kv, kv') = \sqrt{(|l2 - l'_2| + \sqrt{(l3 - l'_3)^2 + (r4 - r'_4)^2})^2 + (r3 - r'_3)^2}. \quad (24)$$

Ejemplo 4.6 PUMA 600 (2).

Ahora tomamos un par de PUMA kv(x), kv ′(x) que tienen l3 = l′3 = 0 y r3 = r′3 = 0, pero entre los ejes articulares 3 y 4. con giros arbitrarios α4 (l′2, α′4 Entonces, ahora v = (l2, α4, r4) , v′ = r′4). Sean x3, x4 ∈ [−π, π],. Invocando algo de álgebra computacional podemos encontrar el siguiente expresión para la distancia al cuadrado (10) :

$$d^2(kv(x), kv'(x)) = (\alpha 4 - \alpha'_4)^2 + \frac{(\alpha 4 - \alpha'_4)^2}{4 \text{ sen}^2 \frac{\alpha 4 - \alpha'_4}{2}}((l2 - l'_2)^2 + (r4 - r'_4)^2) +$$

$$+ (l2 - l'_2)^2 (1 - \frac{(\alpha 4 - \alpha'_4)^2}{4 \text{ sen}^2 \frac{\alpha 4 - \alpha'_4}{2}}) \cos^2 x3 \cos^2 x4 + 2(l2 - l'_2)(r4 - r'_4) \frac{(\alpha 4 - \alpha'_4)^2}{4 \text{ sen}^2 \frac{\alpha 4 - \alpha'_4}{2}} \text{ pecado } x3. \quad (25)$$

Se observa fácilmente que se supondrá un máximo de (25) en x4 = para α = |α4 − α′4 | < π π/2 , x3 = ± π/2 , por eso la métrica (2) se define de la siguiente manera:

$$\rho(kv, kv') = \frac{\frac{\alpha 4 - \alpha'_4}{2}}{\text{pecado } \frac{\alpha 4 - \alpha'_4}{2}} \sqrt{4 \text{ sen}^2 \frac{\alpha 4 - \alpha'_4}{2} + (|l2 - l'_2| + |r4 - r'_4|)^2}. \quad (26)$$

5 APLICACIONES PROSPECTIVAS DEL KI NEMÁTICO MÉTRICO

Mediante la introducción de la métrica cinemática hemos dotado al conjunto de cinemáticas del robot Kn de estructuras métricas y topológicas. Hemos aprendido de los ejemplos estudiados en la sección 4 que la convergencia en el espacio (Kn, ρ) tiene una interpretación natural en términos de convergencia con parámetros geométricos de cinemática. De ello se deduce que una secuencia de cinemática ki ∈ Kn converge a k ∈ Kn, si los parámetros geométricos de ki convergen, en el sentido apropiado, a los parámetros geométricos de k. Además, la distancia ρ(k ′ , k′′) entre dos cinemáticas se puede expresar mediante distancias entre parámetros geométricos de la cinemática, por lo que es posible, a través de la métrica cinemática, estimar los efectos del cambio en parámetros específicos sobre el rendimiento cinemático. de un manipulador. En particular, dadas algunas cinemáticas nominales, podemos descubrir desviaciones admisibles en los parámetros geométricos nominales cuyo efecto sobre la cinemática caerá dentro de los límites de tolerancia prescritos. De esta manera también podemos investigar la sensibilidad de la cinemática con respecto a los parámetros geométricos de un manipulador

La métrica cinemática define una medida de calidad de la cinemática, interpretada como la distancia entre la cinemática dada y la cinemática de patrón específico. Si el patrón ha sido elegido de tal manera que refleje el desempeño cinemático deseable de un manipulador, por ejemplo, asume una de las formas normales propuestas en (Tcho´n 1991), la medida de calidad proporciona una herramienta natural para la evaluación del desempeño cinemático de los manipuladores. .

La métrica cinemática atribuye un significado preciso al problema de aproximación cinemática establecido de la siguiente manera. Dada una transformación $f : X \longrightarrow SE(3)$ del espacio interno X de un manipulador en el grupo euclidiano especial SE(3), y una familia de cinemáticas kv Kn dependiendo de parámetros geométricos v V , cinemática de diseño kv Kn, lo más cerca posible de f respecto a la métrica cinemática. Está claro que el problema de aproximación se puede formular matemáticamente como un problema de optimización para encontrar valores óptimos de parámetros geométricos v V tales que ρ(kv , f) = minv V ρ(kv, f). Describa f si ρ(kv , f) = 0, cinemático deseable de un manipulador. Entonces kv realiza , decimosque el rendimiento el rendimiento f, de lo contrario kv es la mejor aproximación a f.

Un componente importante de la métrica cinemática es la métrica d en el grupo euclidiano especial. Esta métrica sirve como medida de distancia entre posiciones y orientaciones de s″ SE(3), por efector del manipulador. Dados dos puntos s ′, ejemplo, posiciones y orientaciones inicial y final del efector en el espacio exterior, la distancia d(s ′ , s″), definida por (10), es igual a la longitud mínima de una curva en SE(3) que une s y s ″. Esta curva, llamada geodésica, es análoga a la línea recta en la geometría euclidiana. El movimiento a lo largo de las geodésicas no necesita aceleración. Sugerimos que los arcos de geodésicas son trayectorias naturales en SE(3) a seguir en el control punto a punto de manipuladores de robots. La métrica d en SE(3) también nos proporciona una herramienta adecuada para estimar el tamaño del espacio de trabajo del manipulador.

La métrica d, relacionada vía cinemática con el espacio interno X de un manipulador, define una distancia entre puntos del diagrama de bifurcación de la cinemática, (Tcho´n 1991). En particular, para cinemáticas no singulares de 6 grados de libertad, d induce una distancia entre las configuraciones de un manipulador.

Finalmente, consideremos un par de cinemáticas kv, kv ′ Kn, de un manipulador fijo, que difieren en algunos de sus parámetros geométricos. De la definición de ρ métrica se deduce que ρ(kv, kv ′) es la distancia máxima d entre kv(x), kv ′(x) wrt x X. Un análisis de los ejemplos de la sección 4 revela que la distancia d(kv(x), kv ′(x)) no depende de todas las variables internas salvo de unas pocas. En los Ejemplos 4.2 4.3 esta distancia es la misma para todo x X.

Un manipulador cuya cinemática kv y kv ′ tiene la propiedad de que d(kv(x), kv ′(x)) es constante para todo x X (por lo tanto igual a ρ(kv, kv ′)) lo llamaremos uniforme. El número de variables internas que aparecen en d(kv(x), kv ′(x)) es una medida de la falta de uniformidad del manipulador, que se puede llamar su uniformidad. Los manipuladores PUMA estudiados en los ejemplos 4.5 , 4.6 han tenido, respectivamente, la concordancia 1 y 2.

6. CONCLUSIÓN

Concluimos este artículo con un comentario sobre las propiedades computacionales de la métrica cinemática. Debe notarse que, excepto por algunos casos simples como los presentados en los ejemplos 4.1 a 4.3, la cantidad de cálculos necesarios para determinar la métrica cinemática es notable. Existen dos fuentes de complicaciones computacionales: el cálculo de la métrica d, definida por (10), en función de variables internas, y la maximización de d sobre el espacio interno. Los problemas relacionados con la métrica d pueden aliviarse considerablemente mediante el uso de cálculos simbólicos ofrecidos por paquetes de software como MACSYMA o REDUCE. Dichos cálculos parecen ser efectivos hasta que la cinemática no difiere en más de un parámetro geométrico rotacional (un ángulo de giro entre un par de ejes de articulación vecinos). Si hay más giros, surge una dificultad esencial en la determinación de las coordenadas exponenciales según la expresión (9). La segunda fuente de dificultades computacionales, es decir, la maximización de d sobre el espacio interno, se beneficia moderadamente del uso de cálculos simbólicos. Afortunadamente, en muchos casos la uniformidad de un manipulador es pequeña, por lo que el problema de maximización es de baja dimensión.

En el caso de que la determinación exacta de la métrica cinemática sea difícil o incluso imposible, podemos recurrir a expresiones aproximadas para la métrica. A continuación, presentamos dos expresiones de este tipo; de hecho, proporcionan límites inferiores y superiores manejables computacionalmente para la distancia al cuadrado definida por (10). La primera expresión elimina la parte computacionalmente involucrada (r, θ) de (10). De hecho, las siguientes estimaciones se pueden deducir fácilmente de (11):

$$L = \alpha^2 + (\theta, \theta) \leq re^2(k'(x), k''(x)) \leq \alpha^2 + \delta(\theta, \theta) = R \ (27), \delta \text{ y } \theta \text{ están}$$

donde α , relacionados con k ′ (x), k′′(x) mediante (8) y (10). Claramente, para |α| ≤ π, la derecha de (27) está acotada por E = α (θ, θ). La calidad de las estimaciones en (27) se ha ilustrado en la Fig. 6.1: a, b, c, al mostrar la dependencia de los conjuntos de nivel de L, R y E en la distancia de rotación α = r y la distancia de traslación = θ. Los conjuntos de niveles de d ^{2} + $\frac{pi^2}{4}$ ^{2} se encuentran entre los de L y R.

La segunda estimación va más allá que (27), y reduce la dificultad relacionada con k′′ tienen varios el cálculo inoportuno cuando la cinemática k se tuerce entre ejes articulares. Esta estimación se ′, de α, particularmente basa en la desigualdad cos α ≥ 1− 2 en todas partes, y cos α ≤ 1− π2α (9), deducimos de (27) $\frac{1}{2}$ ^{2} a , válido los siguientes límites inferior y superior ^{2} , válido para |α| ≤ π. Usando estas desigualdades y fórmulas para d ^{2} (k ′ (x), k′′ (x)):

$$B(x) \leq re^2(k'(x), k''(x)) \leq \frac{2\ pi}{4} B(x), \tag{28}$$

dónde

$$B(x) = 3 - T\, r(R'^T(x) R''(x)) + T''(x) - T'(X)^2$$

7 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por el Ministerio de Educación de Polonia. Los autores tienen el placer de agradecer al Sr. Krzysztof Arent, MEng por haber realizado cálculos simbólicos en apoyo de los Ejemplos 4.4 − 4.6.

Referencias

[ ] Arnold VI 1978. Métodos Matemáticos de la Mecánica Clásica. Berlín: Springer Verlag.

[ ] Bazerghi A., Goldenberg AA y Apkarian J. 1984. Un modelo cinemático exacto del manipulador PUMA 600. Trans. IEEE. en el sistema Hombre y Cibernética, 14(3):483-487.

[ ] Brockett RW 1984. Robots manipuladores y la fórmula del producto de exponenciales. Teoría Matemática de Redes y Sistemas, ed. PA Fuhrmann. Berlín: Springer-Verlag, págs. 120-129.

[ ] Brockett RW y Loncaric J. 1986. La geometría de la programación de cumplimiento. Teoría y aplicaciones de sistemas de control no lineales, ed. CIByrnes, A. Lindquist.Amsterdam: North-Holland, pp. 35-42.

[ ] Dul eba I., y Tcho´n K., 1990 (19-21 sept.) Una distancia cinemática entre pendulas con n grados de libertad. proc. 3º Nat. Conferencia sobre Robótica. Wroclaw: Technical University Publisher, vol.I., pp. 22-26 (en polaco).

[ ] Engelking R. 1975. Topología general Varsovia: Editores científicos polacos (en polaco).

[ ] Gallot S., Hulin D. y Lafontaine J. 1987. Geometría riemanniana. Berlín: Springer-Verlag.

[ ] Gantmacher FR 1988. Teoría de la matriz. Moscú: Nauka (en ruso).

[ ] Klein CA y Blaho BE 1987. Medidas de destreza para el diseño y control de manipuladores cinemáticamente redundantes. Int.J.Robotics Res. 6(2): 72-83.

[ ] Loncaric J. 1985. Análisis geométrico de mecanismos compatibles en robótica. Doctor. tesis, Universidad de Harvard, División de Ciencias Aplicadas.

[ ] Park FC y Brockett RW 1989. Mapas armónicos y el diseño óptimo del mecanismo. Preimpresión. Universidad de Harvard, División de Ciencias Aplicadas.

[ ] Paul RP 1981. Robot Manipuladores: Matemáticas, Programación y Control. Leva puente: MIT Press.

[ ] Richtmyer RD 1981. Principios de física matemática avanzada, vol.2. Berlín: Springer-Verlag.

[ ] Shin KG y McKay ND 1986. Selección de caminos geométricos de tiempo casi mínimo para manipuladores robóticos. Trans. IEEE. en autom. Control, 31(6): 501-510.

[ ] Tarn TJ, et al. 1986 (octubre). Ecuaciones dinámicas para el brazo robótico PUMA 560 de seis enlaces. representante SSM-RL-86-05. St.Louis, : Laboratorio de Robótica.

[ ] Taylor RH 1983. Planificación y ejecución de trayectorias de manipulador en línea recta. Robot Motion: planificación y control, ed. M. Brady et. Alabama. Cambridge: MIT Press, págs. 265-286.

[ ] Tcho´n K. 1991. Topología diferencial de manipuladores de robots redundantes. Int.J.Robototics Res., 10(5), por aparecer.

[ ] Tcho´n K., and Dul¸eba I. 1991. Sobre la inversión de cinemática singular y generación de trayectorias geodésicas en manipuladores de robots. Preimpresión. Universidad Técnica de Wroclaw, Instituto de Ingeniería Cibernética.

[ ] Yoshikawa T. 1985. Manipulabilidad de mecanismos robóticos. Int.J.Robotics Res.,4(2):3-9.