

Kapitel 3

VORWÄRTSKINEMATIK: DER DENAVID-HARTENBERG KONVENTION

In diesem Kapitel entwickeln wir die Vorwärts- oder Konfigurationskinematikgleichungen für starre Roboter. Das Problem der Vorwärtskinematik befasst sich mit der Beziehung zwischen den einzelnen Gelenken des Roboter manipulators und der Position und Ausrichtung des Werkzeugs oder Endeffektors. Formeller ausgedrückt besteht das Problem der Vorwärtskinematik darin, die Position und Ausrichtung des Endeffektors anhand der Werte für die Gelenkvariablen des Roboters zu bestimmen. Bei den Gelenkvariablen handelt es sich um die Winkel zwischen den Gelenken bei Revolut- oder Rotationsgelenken und um die Gelenkverlängerung bei Prismen- oder Schiebegelenken. Dem Problem der Vorwärtskinematik ist das Problem der Umkehrkinematik gegenüberzustellen, das im nächsten Kapitel untersucht wird und bei dem es um die Bestimmung von Werten für die Gelenkvariablen geht, die eine gewünschte Position und Ausrichtung für den Endeffektor des Roboters erreichen.

3.1 Kinematische Ketten

Wie in Kapitel 1 beschrieben, besteht ein Roboter manipulator aus einer Reihe von Gliedern, die durch verschiedene Gelenke miteinander verbunden sind. Die Gelenke können entweder sehr einfach sein, wie zum Beispiel ein Drehgelenk oder ein Prismengelenk, oder sie können komplexer sein, wie zum Beispiel ein Kugelgelenk. (Denken Sie daran, dass ein Drehgelenk s

72 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

ein Scharnier und ermöglicht eine relative Drehung um eine einzelne Achse, und ein prismatisches Gelenk ermöglicht eine lineare Bewegung entlang einer einzelnen Achse, nämlich ein Aus- oder Einfahren.) Der Unterschied zwischen den beiden Situationen besteht darin, dass das Gelenk im ersten Fall nur eine Bewegung hat ein einzelner Bewegungsfreiheitsgrad: der Drehwinkel im Fall eines Drehgelenks und der Betrag der linearen Verschiebung im Fall eines Prismengelenks. Im Gegensatz dazu hat ein Kugelgelenk zwei Freiheitsgrade. In diesem Buch wird durchgehend davon ausgegangen, dass alle Gelenke nur einen einzigen Freiheitsgrad haben. Beachten Sie, dass die Annahme keinen wirklichen Verlust an Allgemeingültigkeit bedeutet, da Gelenke wie ein Kugelgelenk (zwei Freiheitsgrade) oder ein sphärisches Handgelenk (drei Freiheitsgrade) immer als Folge betrachtet werden können von Verbindungen mit einem Freiheitsgrad und Verbindungsgliedern der Länge Null dazwischen.

Unter der Annahme, dass jedes Gelenk einen einzigen Freiheitsgrad hat, kann die Wirkung jedes Gelenks durch eine einzige reelle Zahl beschrieben werden: den Drehwinkel im Fall eines Drehgelenks oder die Verschiebung im Fall eines Prismengelenks. Das Ziel der Vorwärtskinematikanalyse besteht darin, die kumulative Wirkung des gesamten Satzes von Gelenkvariablen zu bestimmen. In diesem Kapitel werden wir eine Reihe von Konventionen entwickeln, die ein systematisches Verfahren zur Durchführung dieser Analyse bieten. Es ist natürlich möglich, eine Vorwärtskinematikanalyse auch ohne Berücksichtigung dieser Konventionen durchzuführen, wie wir es in Kapitel 1 für das Beispiel eines planaren Manipulators mit zwei Gliedern getan haben. Die kinematische Analyse eines Manipulators mit n -Links kann jedoch äußerst komplex sein und Die im Folgenden eingeführten Konventionen vereinfachen die Analyse erheblich. Darüber hinaus führen sie zu einer universellen Sprache, mit der Roboter ingenieure kommunizieren können.

Ein Roboter manipulator mit n Gelenken hat $n + 1$ Glieder, da jedes Gelenk zwei Glieder verbindet. Wir nummerieren die Gelenke von 1 bis n und die Verbindungen von 0 bis n , beginnend mit der Basis. Nach dieser Konvention verbindet das Gelenk i den Link $i - 1$ mit dem Link i . Wir gehen davon aus, dass die Position des Gelenks i in Bezug auf das Glied $i - 1$ feststeht. Wenn das Gelenk i betätigt wird, bewegt sich das Glied i . Daher ist Link 0 (das erste Link) fest und bewegt sich nicht, wenn die Gelenke betätigt werden. Natürlich könnte der Roboter manipulator selbst mobil sein (z. B. könnte er auf einer mobilen Plattform oder einem autonomen Fahrzeug montiert sein), aber wir werden diesen Fall in diesem Kapitel nicht betrachten, da er durch leichte Erweiterung der Techniken leicht gehandhabt werden kann hier vorgestellt.

Mit dem i Th joint, wir assoziieren eine gemeinsame Variable, die mit q_i bezeichnet wird. Bei einem Drehgelenk ist q_i der Drehwinkel und bei a

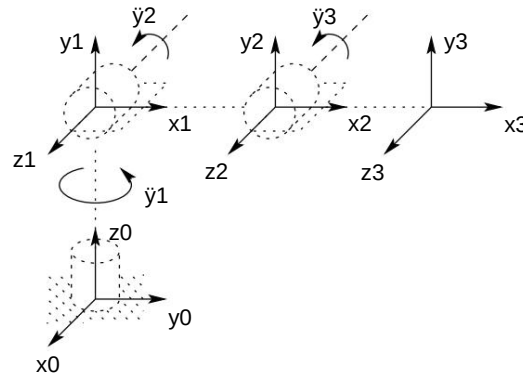


Abbildung 3.1: Am Ellenbogenmanipulator befestigte Koordinatenrahmen.

prismatisches Gelenk, q_i ist die Gelenkverschiebung:

$$q_i = \begin{matrix} \ddot{y}_i : \text{Gelenk } i \text{ umlaufend} \\ d_i : \text{Gelenk } i \text{ prismatisch} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Um die kinematische Analyse durchzuführen, befestigen wir starr an jedem Glied einen Koordinatenrahmen. Insbesondere fügen wir $o_i x_i y_i z_i$ dem Link i bei. Dies bedeutet, dass unabhängig von der Bewegung des Roboters die Koordinaten jedes Punktes auf der Verbindung i konstant sind, wenn sie im i -Koordinatenrahmen ausgedrückt werden. Wenn außerdem das Gelenk i betätigt wird, erfahren das Verbindungsglied i und sein befestigter Rahmen, $o_i x_i y_i z_i$, eine resultierende Bewegung.

Der Rahmen $o_0 x_0 y_0 z_0$, der an der Roboterbasis befestigt ist, wird als Inertialrahmen bezeichnet. Abbildung 3.1 veranschaulicht die Idee, Rahmen im Fall eines Ellenbogenmanipulators starr an Gelenken zu befestigen.

Nehmen wir nun an, A_i sei die homogene Transformationsmatrix, die die Position und Ausrichtung von $o_i x_i y_i z_i$ in Bezug auf $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ ausdrückt.

Die Matrix A_i ist nicht konstant, sondern variiert, wenn sich die Konfiguration des Roboters ändert. Die Annahme, dass alle Gelenke entweder rotierend oder prismatisch sind, bedeutet jedoch, dass A_i eine Funktion nur einer einzigen Gelenkvariablen ist, nämlich q_i . Mit anderen Worten,

$$A_i = A_i(q_i). \quad (3.2)$$

Nun wird die homogene Transformationsmatrix, die die Position und Orientierung von $o_j x_j y_j z_j$ in Bezug auf $o_i x_i y_i z_i$ ausdrückt, vereinbarungsgemäß Transformationsmatrix genannt und mit T_{ij} bezeichnet. Aus Kapitel 2 sehen wir das

$$T_{ij} = A_{i+1} A_{i+2} \dots A_j \quad \text{wenn } i < j$$

74 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

$$\begin{aligned} T_J^0 &= I, \text{ wenn } i = j \\ T_J^0 &= (T_{j-1}^0)^{j-1} \text{ wenn } j > i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Durch die Art und Weise, wie wir die verschiedenen Rahmen starr befestigt haben zu den entsprechenden Links folgt daraus, dass die Position eines beliebigen Punktes auf der Endeffektor ist, wenn er im Frame n ausgedrückt wird, eine Konstante, die unabhängig von ist Konfiguration des Roboters. Bezeichnen Sie die Position und Ausrichtung des Endeffektors in Bezug auf das Trägheits- oder Basissystem mit einem Drei-Vektor- $O_0 N$ (was die Koordinaten des Ursprungs des Endeffektorrahmens angibt mit bezüglich des Grundrahmens) und der 3×3 Rotationsmatrix R_{0n} , und definieren Sie die homogene Transformationsmatrix

$$H = \begin{pmatrix} R_{0n} & O_{0n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Dann die Position und Ausrichtung des Endeffektors im Inertialsystem sind gegeben durch

$$H = T_0^0 = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n). \quad (3.5)$$

Jede homogene Transformation A_i hat die Form

$$A_i = \begin{pmatrix} R_{i-1}^{i-1} & \ddot{O}_{i-1}^{i-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Somit

$$T_J^0 = A_{i+1} \cdots A_j = \begin{pmatrix} R_{i+1}^{i+1} & O_{i+1}^{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Die Matrix R_{i+1}^{i+1} drückt die Ausrichtung von o_{j+1}^{j+1} relativ zu o_{i+1}^{i+1} aus und ist durch die Rotationsteile der A-Matrizen gegeben als

$$R_J^0 = R_{i+1}^{i+1} \cdots R_J^J. \quad (3.8)$$

Die Koordinatenvektoren O_i^i werden rekursiv durch die Formel gegeben

$$\ddot{O}_J^0 = O_{j-1}^{j-1} + R_{j-1}^{j-1} \ddot{O}_j^j, \quad (3.9)$$

Diese Ausdrücke werden in Kapitel 5 nützlich sein, wenn wir Jacobi-Matrizen untersuchen.

Im Prinzip reicht es, die Kinematik weiterzuleiten! Bestimmen Sie die Funktionen $A_i(q_i)$ und multiplizieren Sie sie nach Bedarf miteinander. Es ist jedoch möglich, ein erhebliches Maß an Rationalisierung und Vereinfachung zu erreichen. Die Einführung weiterer Konventionen, etwa der Denavit-Hartenberg-Darstellung eines Gelenks, ist das Ziel des restlichen Kapitels.

3.2 Denavit Hartenberg-Vertretung

Obwohl es möglich ist, die gesamte Analyse in diesem Kapitel mit einem beliebigen Rahmen durchzuführen, der jedem Link beigelegt ist, ist es hilfreich, bei der Auswahl dieser Rahmen systematisch vorzugehen. Eine häufig verwendete Konvention zur Auswahl von Referenzrahmen in Roboteranwendungen ist die Denavit-Hartenberg- oder DH-Konvention. In dieser Konvention wird jede homogene Transformation A_i als Produkt von vier Grundtransformationen dargestellt:

$$A_i = R_{z, \ddot{y}_i} \text{Trans}_{z, d_i} \text{Trans}_{x, a_i} R_{x, \ddot{y}_i} \quad (3.10)$$

$$= \begin{pmatrix} \ddot{y}_i & 0 & 0 & c\ddot{y}_i \\ s\ddot{y}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\ddot{y}_i & s\ddot{y}_i & 0 \\ 0 & -s\ddot{y}_i & c\ddot{y}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \ddot{y}_i & c\ddot{y}_i & s\ddot{y}_i & a_i c\ddot{y}_i \\ s\ddot{y}_i & -s\ddot{y}_i & c\ddot{y}_i & a_i s\ddot{y}_i \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei die vier Größen $\ddot{y}_i$, d_i , a_i Parameter sind, die der Verbindung i und dem Gelenk i zugeordnet sind. Die vier Parameter a_i , $\ddot{y}_i$, d_i und $\ddot{y}_i$ in (3.10) erhalten im Allgemeinen die Namen Verbindungslänge, Verbindungsverdrehung, Verbindungsversatz bzw. Gelenkwinkel. Diese Namen leiten sich von bestimmten Aspekten der geometrischen Beziehung zwischen zwei Koordinatensystemen ab, wie weiter unten deutlich wird. Da die Matrix A_i eine Funktion einer einzelnen Variablen ist, stellt sich heraus, dass drei der oben genannten vier Größen für eine bestimmte Verbindung konstant sind, während der vierte Parameter, $\ddot{y}_i$ für ein Drehgelenk und d_i für ein Prisma, die Gelenkvariable ist.

Aus Kapitel 2 geht hervor, dass eine beliebige homogene Transformationsmatrix durch sechs Zahlen charakterisiert werden kann, beispielsweise drei Zahlen zur Angabe der vierten Spalte der Matrix und drei Euler-Winkel zur Angabe der oberen linken 3×3 - Rotationsmatrix. In der DH-Darstellung hingegen gibt es nur vier Parameter. Wie ist das möglich? Die Antwort ist, dass der Rahmen i zwar starr mit der Verbindung i verbunden sein muss, wir aber bei der Wahl des Ursprungs und der Koordinatenachsen des Rahmens erhebliche Freiheit haben. Beispielsweise ist es nicht erforderlich, dass der Ursprung O_i des Frames i am physischen Ende der Verbindung i platziert wird. Tatsächlich ist es nicht einmal notwendig, dass der Frame i innerhalb der physischen Verbindung platziert wird; Rahmen i könnte im freien Raum liegen – solange Rahmen i fest mit Link i verbunden ist. Durch geschickte Wahl des Ursprungs und der K

76 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

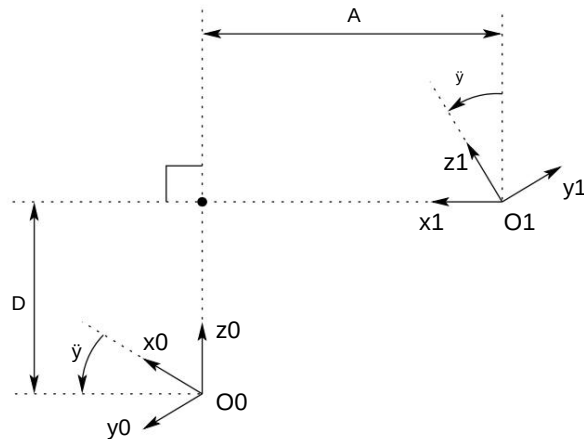


Abbildung 3.2: Koordinatensysteme, die die Annahmen DH1 und DH2 erfüllen.

Es werden zwischen sechs und vier (in manchen Fällen sogar weniger) benötigt. In Abschnitt 3.2.1 zeigen wir, warum und unter welchen Bedingungen dies möglich ist, und in Abschnitt 3.2.2 zeigen wir genau, wie die Koordinatenrahmenzuweisungen vorgenommen werden.

3.2.1 Existenz- und Einzigartigkeitsfragen

Offensichtlich ist es nicht möglich, eine beliebige homogene Transformation mit nur vier Parametern darzustellen. Daher beginnen wir damit, zu bestimmen, welche homogenen Transformationen in der Form (3.10) ausgedrückt werden können. Angenommen, wir erhalten zwei Frames, die mit den Frames 0 bzw. 1 bezeichnet werden. Dann gibt es eine eindeutige homogene Transformationsmatrix A , die die Koordinaten von Frame 1 in die von Frame 0 übernimmt. Nehmen wir nun an, dass die beiden Frames zwei zusätzliche Merkmale haben, nämlich:

(DH1) Die Achse x_1 steht senkrecht zur Achse z_0

(DH2) Die Achse x_1 schneidet die Achse z_0

wie in Abbildung 3.2 dargestellt. Unter diesen Bedingungen behaupten wir, dass es eindeutige Zahlen a, d, γ, β gibt, so dass

$$A = R_{z,\gamma} \text{Trans}_{z,d} \text{Trans}_{x,a} R_{x,\beta} . \quad (3.11)$$

Da γ und β Winkel sind, meinen wir natürlich, dass sie innerhalb eines Vielfachen von 2π eindeutig sind. Um zu zeigen, dass die Matrix A darin geschrieben werden kann

Form, schreibe A als

$$A = \begin{bmatrix} R_{01} & O_{01} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

th und r_i bezeichnen das i Spalte der Rotationsmatrix R_0 1. Das werden wir jetzt
Untersuchen Sie die Auswirkungen der beiden DH-Einschränkungen.

Wenn (DH1) erfüllt ist, dann steht x_1 senkrecht auf z_0 und es gilt $x_1 \cdot z_0 = 0$.

Drücken Sie diese Einschränkung in Bezug auf $o_0x_0y_0z_0$ aus, indem Sie die Tatsache nutzen, dass r_1 ist

Wir erhalten die Darstellung des Einheitsvektors x_1 in Bezug auf Frame 0

$$0 = x_1 \cdot z_0^0 \quad (3.13)$$

$$= [r_{11}, r_{21}, r_{31}]^T \cdot [0, 0, 1]^T \quad (3.14)$$

$$= r_{31}. \quad (3.15)$$

Da $r_{31} = 0$, müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass es eindeutige Winkel $\tilde{y}$ und $\tilde{y}$ gibt
so dass

$$R_1^0 = R_{x, \tilde{y}} R_{x, \tilde{y}} = \begin{bmatrix} c\tilde{y} & s\tilde{y} & 0 \\ -s\tilde{y} & c\tilde{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Die einzige Information, die wir haben, ist, dass $r_{31} = 0$, aber das reicht aus. Erste,
da jede Zeile und Spalte von R_0 1 muss eine Einheitslänge haben, $r_{31} = 0$ impliziert das

$$\begin{aligned} R_{11}^2 + R_{21}^2 &= 1, \\ R_{32}^2 + R_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Daher gibt es eindeutige $\tilde{y}$, $\tilde{y}$, so dass

$$(r_{11}, r_{21}) = (c\tilde{y}, s\tilde{y}), \quad (r_{33}, r_{32}) = (c\tilde{y}, s\tilde{y}). \quad (3.18)$$

Sobald $\tilde{y}$ und $\tilde{y}$ gefunden sind, ist es Routine, zu zeigen, dass die verbleibenden Elemente von
 R_{01} muss die in (3.16) gezeigte Form haben, unter Ausnutzung der Tatsache, dass R_0 ist eine Rotation
Matrix.

Als nächstes bedeutet die Annahme (DH2), dass die Verschiebung zwischen O_0 und
 O_1 kann als lineare Kombination der Vektoren z_0 und x_1 ausgedrückt werden. Das
kann geschrieben werden als $O_1 = O_0 + dz_0 + ax_1$. Auch hier können wir diese
Beziehung in den Koordinaten von $o_0x_0y_0z_0$ ausdrücken und erhalten

$$\tilde{O}_1^0 = O_0^0 + dz_0^0 + ax_1^0 \quad (3.19)$$

78 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

$$= \begin{pmatrix} \bar{y} & 0 & \bar{y} \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{y} & 0 & \bar{y} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \bar{y} & 0 & \bar{y} \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{y} & 0 & \bar{y} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \bar{y} & c\bar{y} & \bar{y} \\ 0 & s\bar{y} & \bar{y} \\ \bar{y} & 0 & \bar{y} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{y} & ac\bar{y} & \bar{y} \\ 0 & as\bar{y} & \bar{y} \\ \bar{y} & d & \bar{y} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Wenn wir die obigen Ergebnisse kombinieren, erhalten wir (3.10) wie behauptet. Wir sehen also, dass vier Parameter ausreichen, um jede homogene Transformation anzugeben, die die Einschränkungen (DH1) und (DH2) erfüllt.

Nachdem wir nun festgestellt haben, dass jede homogene Transformationsmatrix, die die obigen Bedingungen (DH1) und (DH2) erfüllt, in der Form (3.10) dargestellt werden kann, können wir tatsächlich jede der vier Größen in (3.10) physikalisch interpretieren. Der Parameter a ist der Abstand zwischen den Achsen z_0 und z_1 und wird entlang der Achse x_1 gemessen. Der Winkel $\bar{y}$ ist der Winkel zwischen den Achsen z_0 und z_1 , gemessen in einer Ebene normal zu x_1 . Der positive Sinn für $\bar{y}$ wird von z_0 bis z_1 durch die Rechte-Hand-Regel bestimmt, wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Der Parameter d ist der Abstand zwischen dem Ursprung

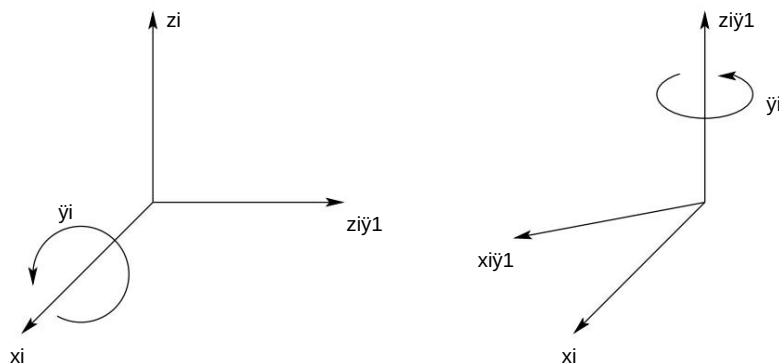


Abbildung 3.3: Positiver Sinn für $\bar{y}_i$ und $\bar{y}_i$.

00 und der Schnittpunkt der x_1 -Achse mit z_0 , gemessen entlang der z_0 -Achse. Schließlich ist $\bar{y}$ der Winkel zwischen x_0 und x_1 , gemessen in einer Ebene normal zu z_0 . Diese physikalischen Interpretationen werden sich bei der Entwicklung eines Verfahrens zur Zuweisung von Koordinatenrahmen, die die Einschränkungen (DH1) und (DH2) erfüllen, als nützlich erweisen, und wir richten unsere Aufmerksamkeit nun auf die Entwicklung eines solchen Verfahrens.

3.2.2 Zuweisung der Koordinatenrahmen

Für einen gegebenen Roboter manipulator kann man immer die Frames 0, wählen. ... ,n so, dass die beiden oben genannten Bedingungen erfüllt sind. Unter bestimmten Umständen erfordert dies die Platzierung des Ursprungs O_i des Rahmens i an einer Stelle, die intuitiv möglicherweise nicht zufriedenstellend ist, aber normalerweise ist dies nicht der Fall. Beim Lesen des folgenden Materials ist es wichtig zu bedenken, dass die Auswahl der verschiedenen Koordinatenrahmen nicht eindeutig ist, auch wenn sie durch die oben genannten Anforderungen eingeschränkt werden. Daher ist es möglich, dass verschiedene Ingenieure unterschiedliche, aber gleichermaßen korrekte Koordinatenrahmenzuordnungen für die Verbindungen des Roboters ableiten. Es ist jedoch $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ bleibt unabhängig von der Zuweisung gleich sehr wichtig zu beachten, dass das Endresultat (d. h. die Matrix T)

Zwischenverbindungsrahmen ist (vorausgesetzt, dass die Koordinatenrahmen für Verbindung n zusammenfallen). Wir werden mit der Ableitung des allgemeinen

Verfahrens beginnen. Anschließend werden wir verschiedene gemeinsame diskutieren Sonderfälle, in denen es möglich ist

Beachten Sie zunächst, dass die Wahl von z_i willkürlich ist. Insbesondere aus (3.16) sehen wir, dass wir durch geeignete Wahl von $\hat{y}_i$ und $\hat{y}_i$ jede beliebige Richtung für z_i erhalten können. Daher weisen wir für unseren ersten Schritt die Achsen z_0 , zu. ... , z_{n-1} auf eine intuitiv ansprechende Weise. Insbesondere weisen wir z_i als Betätigungsachse für Gelenk $i + 1$ zu. Somit ist z_0 die Betätigungsachse für Gelenk 1, z_1 die Betätigungsachse für Gelenk 2 usw. Es sind zwei Fälle zu berücksichtigen: (i) Wenn das Gelenk $i + 1$ drehbar ist, ist z_i die Rotationsachse des Gelenks $i + 1$; (ii) Wenn das Gelenk $i + 1$ prismatisch ist, ist z_i die Translationsachse des Gelenks $i + 1$. Auf den ersten Blick mag es etwas verwirrend erscheinen, z_i dem Gelenk $i + 1$ zuzuordnen, aber bedenken Sie, dass dies der von uns aufgestellten Konvention entspricht in Abschnitt 3.1, nämlich dass das Gelenk i in Bezug auf den Rahmen i fixiert ist und dass bei Betätigung des Gelenks i das Verbindungsglied i und der daran befestigte Rahmen $O_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ eine res

Sobald wir die Z-Achsen für die Verbindungen festgelegt haben, erstellen wir den Grundrahmen. Die Wahl des Untergestells ist nahezu beliebig. Wir können den Ursprung O_0 des Basisrahmens als einen beliebigen Punkt auf z_0 wählen. Wir wählen dann x_0, y_0 auf beliebige Weise, solange der resultierende Rahmen rechtshändig ist. Dadurch wird Frame 0 eingerichtet.

Sobald Frame 0 festgelegt ist, beginnen wir mit einem iterativen Prozess, in dem wir Frame i mithilfe von Frame $i - 1$ definieren, beginnend mit Frame 1. Abbildung 3.4 wird für das Verständnis des Prozesses hilfreich sein, den wir jetzt beschreiben.

Um den Rahmen i einzurichten, müssen drei Fälle betrachtet werden: (i) die Achsen z_{i-1}, z_i sind nicht koplanar, (ii) die Achsen z_{i-1}, z_i schneiden sich (iii) die Achsen z_{i-1}, z_i sind parallel. Beachten Sie, dass in beiden Fällen (ii) und (iii) die Achsen z_{i-1} und z_i koplanar sind. Diese Situation kommt tatsächlich recht häufig vor, wie wir in sehen werden

80KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

Abbildung 3.4: Denavit-Hartenberg-Rahmenzuordnung.

Abschnitt 3.3. Wir betrachten nun jeden dieser drei Fälle.

(i) z_{i-1} und z_i sind nicht koplanar: Wenn z_{i-1} und z_i nicht koplanar sind, dann existiert ein eindeutiges Liniensegment senkrecht zu z_{i-1} und z_i , so dass es beide Linien verbindet und eine minimale Länge hat. Die Linie, die diese gemeinsame Normale zu z_{i-1} und z_i enthält, definiert x_i und der Punkt, an dem diese Linie z_i schneidet, ist der Ursprung O_i . Konstruktionsbedingt sind beide Bedingungen (DH1) und (DH2) erfüllt und der Vektor von O_{i-1} nach O_i ist eine Linearkombination von z_{i-1} und x_i . Die Spezifikation des Rahmens i wird durch die Auswahl der Achse y_i zur Bildung eines rechten Rahmens vervollständigt. Da die Annahmen (DH1) und (DH2) erfüllt sind, hat die homogene Transformationsmatrix A_i die Form (3.10).

(ii) z_{i-1} ist parallel zu z_i : Wenn die Achsen z_{i-1} und z_i parallel sind, dann gibt es unendlich viele gemeinsame Normalen zwischen ihnen und Bedingung (DH1) spezifiziert x_i nicht vollständig. In diesem Fall können wir den Ursprung O_i an einer beliebigen Stelle entlang von z_i wählen. Oft wird O_i gewählt, um die resultierenden Gleichungen zu vereinfachen. Die Achse x_i wird dann entweder so gewählt, dass sie von O_i in Richtung z_{i-1} entlang der gemeinsamen Normalen verläuft, oder als das Gegenteil dieses Vektors. Eine übliche Methode zur Auswahl von O_i besteht darin, die Normale, die durch O_{i-1} verläuft, als x_i -Achse zu wählen; O_i ist dann der Punkt, an dem diese Normale z_i schneidet. In diesem Fall wäre d_i gleich Null. Sobald x_i festgelegt ist, wird y_i bestimmt, wie üblich durch die Rechte-Hand-Regel. Da die Achsen z_{i-1} und z_i parallel sind, ist θ_i in diesem Fall Null.

(iii) z_{i-1} schneidet z_i : In diesem Fall wird x_i normal zur Ebene gewählt, die durch z_i und z_{i-1} gebildet wird. Die positive Richtung von x_i ist beliebig. Am meisten

Die natürliche Wahl für den Ursprung O_i liegt in diesem Fall am Schnittpunkt von z_i und z_{i+1} . Es reicht jedoch jeder geeignete Punkt entlang der z_i -Achse aus. Beachten Sie, dass in diesem Fall der Parameter a_i gleich 0 ist.

Dieses konstruktive Verfahren funktioniert für Frames $0, \dots, n$ in einem n -Link-Roboter. Um die Konstruktion abzuschließen, ist es notwendig, Rahmen n anzugeben. Das endgültige Koordinatensystem $o_n x_n y_n z_n$ wird üblicherweise als Endeffektor oder Werkzeugrahmen bezeichnet (siehe Abbildung 3.5). Der Ursprung O_n ist am häufigsten

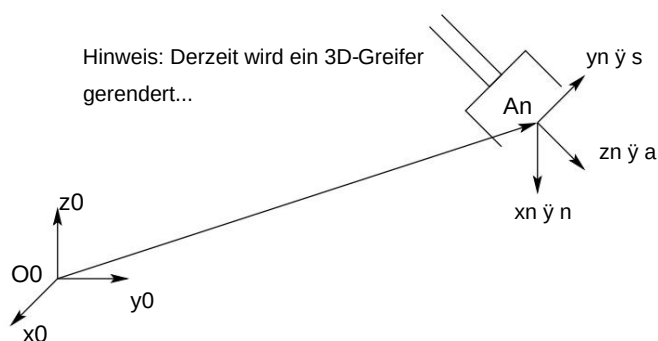


Abbildung 3.5: Werkzeugrahmenzuordnung.

symmetrisch zwischen den Fingern des Greifers platziert. Die Einheitsvektoren entlang der x_n -, y_n - und z_n -Achse werden mit n , s bzw. a bezeichnet. Die Terminologie ergibt sich aus der Tatsache, dass die Richtung a die Annäherungsrichtung ist, in dem Sinne, dass der Greifer typischerweise entlang der a -Richtung an ein Objekt heranfährt. Ebenso ist die s -Richtung die Gleitrichtung, die Richtung, entlang der die Finger des Greifers zum Öffnen und Schließen gleiten, und n ist die Richtung normal zur durch a und s gebildeten Ebene.

Bei modernen Robotern ist die endgültige Gelenkbewegung eine Drehung des Endeffektors um $\dot{\gamma}_n$ und die letzten beiden Gelenkachsen, z_{n-1} und z_n , fallen zusammen. In diesem Fall ist die Transformation zwischen den letzten beiden Koordinatensystemen eine Translation entlang z_{n-1} um eine Distanz d_n , gefolgt von einer Drehung von $\dot{\gamma}_n$ im Bogenmaß um z_{n-1} (oder davor). Dies ist eine wichtige Beobachtung, die die Berechnung der inversen Kinematik im nächsten Kapitel vereinfachen wird.

Beachten Sie abschließend die folgende wichtige Tatsache. In allen Fällen, unabhängig davon, ob es sich um ein Rotationsgelenk oder ein Prismengelenk handelt, sind die Größen a_i und $\dot{\gamma}_i$ immer für alle i konstant und charakteristisch für den Manipulator. Wenn das Gelenk i prismatisch ist, dann ist $\dot{\gamma}_i$ Gelenkvariable. Ähnlich, auch $\dot{\gamma}_i$ eine Konstante, während d_i das i ist. Wenn das Gelenk i rotatorisch ist, dann ist d_i Gelenkvariable und $\dot{\gamma}_i$ das i .

82KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

3.2.3 Zusammenfassung

Wir können das obige Verfahren basierend auf der DH-Konvention im folgenden Algorithmus zur Ableitung der Vorwärtskinematik für jeden Manipulator zusammenfassen.

Schritt 1: Lokalisieren und beschriften Sie die Gelenkachsen $z_0, \dots, z_{n-1}$.

Schritt 2: Grundrahmen aufbauen. Legen Sie den Ursprung irgendwo auf der z_0 -Achse fest.

Die x_0 - und y_0 -Achsen werden zweckmäßigerweise so gewählt, dass sie einen rechten Rahmen bilden.

Für $i = 1, \dots, n-1$, führen Sie die Schritte 3 bis 5 aus.

Schritt 3: Suchen Sie den Ursprung O_i dort, wo die gemeinsame Normale von z_i und z_{i-1} schneidet. Wenn z_i und z_{i-1} schneidet, lokalisieren Sie O_i an diesem Schnittpunkt. Wenn z_i und z_{i-1} parallel sind, platzieren Sie O_i an einer beliebigen geeigneten Position entlang z_i .

Schritt 4: Ermitteln Sie x_i entlang der gemeinsamen Normalen zwischen z_{i-1} und z_i durch oder in O_i , der Richtung normal zur Ebene $z_{i-1} \times z_i$, wenn sich z_{i-1} und z_i schneiden.

Schritt 5: Legen Sie y_i fest, um einen rechten Rahmen zu vervollständigen.

Schritt 6: Richten Sie den Endeffektorrahmen ein. Unter der Annahme, dass das n -te Gelenk drehbar ist, setzen Sie $z_n = a$ entlang der Richtung z_{n-1} . Legen Sie den Ursprung O_n bequem entlang der z_n fest, vorzugsweise in der Mitte des Greifers oder an der Spitze eines beliebigen Werkzeugs, das der Manipulator möglicherweise trägt. Setze $y_n = s$ in Richtung des Greiferschlusses und setze $x_n = n$ als $s \times a$. Wenn das Werkzeug kein einfacher Greifer ist, stellen Sie x_n und y_n bequem ein, um einen rechten Rahmen zu bilden.

Schritt 7: Erstellen Sie eine Tabelle mit Verbindungsparametern $a_i, \theta_i, d_i, \phi_i$.

a_i = Abstand entlang x_i von O_i bis zum Schnittpunkt von x_i und z_{i-1} Achsen.

d_i = Abstand entlang z_{i-1} von O_{i-1} bis zum Schnittpunkt der x_i - und z_{i-1} -Achsen. d_i ist variabel, wenn das Gelenk i prismatisch ist. θ_i = der Winkel

zwischen z_{i-1} und z_i , gemessen um x_i (siehe Abbildung).

3.3).

ϕ_i = der Winkel zwischen z_{i-1} und x_i , gemessen um z_{i-1} (siehe Abbildung 3.3). ϕ_i ist variabel, wenn das Gelenk i drehbar ist.

Schritt 8: Bilden Sie die homogenen Transformationsmatrizen A_i , indem Sie die obigen Parameter in (3.10) einsetzen.

Der endgültige Frame $o2x2y2z2$ wird festgelegt, indem der Ursprung $O2$ am Ende von Link 2 ausgewählt wird, wie gezeigt. Die Verbindungsparameter sind in Tabelle 3.1 aufgeführt. Die A-Matrizen sind

84 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

Tabelle 3.1: Link-Parameter für den 2-Link-Planarmanipulator.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2

Variable

bestimmt aus (3.10) als

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 & a_1 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 \\ -s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Die T-Matrizen sind somit gegeben durch

$$T_1^0 = A_1. \quad (3.24)$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ -s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Beachten Sie, dass die ersten beiden Einträge der letzten Spalte von T_2^0 sind das x und y Komponenten des Ursprungs O_2 im Grundrahmen; das ist,

$$\begin{aligned} x &= a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ y &= a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \quad (3.26)$$

sind die Koordinaten des Endeffektors im Basisrahmen. Der Rotationsteil von T_2^0 gibt die Ausrichtung des Rahmens $o_2 x_2 y_2 z_2$ relativ zum Grundrahmen an.

Beispiel 3.2 Zylindrischer Roboter mit drei Gliedern

Betrachten Sie nun den dreigliedrigen zylindrischen Roboter, der symbolisch durch dargestellt wird Abbildung 3.7. Wir legen O_0 fest, wie an Gelenk 1 gezeigt. Beachten Sie, dass die Platzierung von

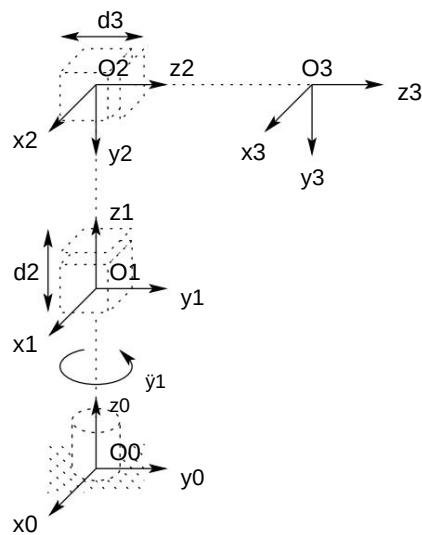


Abbildung 3.7: Dreigliedriger zylindrischer Manipulator.

Tabelle 3.2: Verbindungsparameter für den zylindrischen Manipulator mit 3 Verbindungen.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i	$\dot{\theta}_i$	$\ddot{\theta}_i$
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	2	0
3	0	0	0	0	3	0

Variable

der Ursprung O_0 entlang z_0 sowie die Richtung der x_0 -Achse sind beliebig. Unsere Wahl von O_0 ist die natürlichste, aber O_0 könnte genauso gut an Gelenk 2 platziert werden. Die Achse x_0 wird normal zur Seite gewählt. Da z_0 und z_1 zusammenfallen, wird als Nächstes der Ursprung O_1 wie gezeigt am Gelenk 1 gewählt. Die x_1 -Achse verläuft normal zur Seite, wenn $\dot{\theta}_1 = 0$, aber ihre Richtung ändert sich natürlich, da $\dot{\theta}_1$ variabel ist. Da sich z_2 und z_1 schneiden, wird der Ursprung O_2 an diesem Schnittpunkt platziert. Die Richtung von x_2 wird parallel zu x_1 gewählt, sodass $\dot{\theta}_2$ Null ist. Schließlich wird der dritte Frame am Ende von Link 3 ausgewählt, wie gezeigt.

Die Link-Parameter werden nun in Tabelle 3.2 angezeigt. Das entsprechende A

86 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

und T-Matrizen sind

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 & s_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 & s_1 & c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

ŷ

Beispiel 3.3 Kugelförmiges Handgelenk

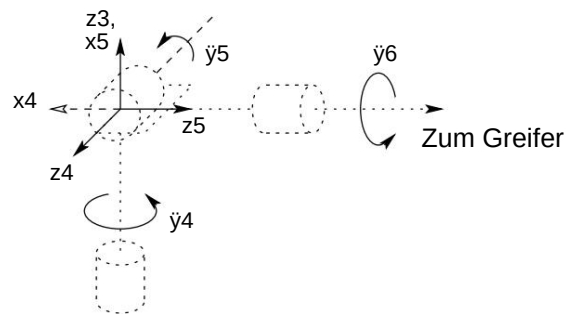


Abbildung 3.8: Die sphärische Handgelenkrahenzuordnung.

Die sphärische Handgelenkskonfiguration ist in Abbildung 3.8 dargestellt, in der sich die Gelenkachsen z_3 , z_4 , z_5 bei O schneiden. Die Denavit-Hartenberg-Parameter sind in Tabelle 3.3 dargestellt. Der Stanford-Manipulator ist ein Beispiel für einen Manipulator, der über ein solches Handgelenk verfügt. Tatsächlich gilt die folgende Analyse für praktisch alle sphärischen Handgelenke.

Tabelle 3.3: DH-Parameter für sphärisches Handgelenk.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i	$\dot{\theta}_i$	$\ddot{\theta}_i$
4				0	$\dot{\theta}_4$	$\ddot{\theta}_4$
5			0	90	$\dot{\theta}_5$	$\ddot{\theta}_5$
6				0	$\dot{\theta}_6$	$\ddot{\theta}_6$

Variable

Wir zeigen nun, dass die letzten drei Gelenkvariablen $\dot{\theta}_4$, $\dot{\theta}_5$, $\dot{\theta}_6$ die Euler-Winkel $\dot{\gamma}$, $\dot{\delta}$ bzw. $\dot{\epsilon}$ in Bezug auf den Koordinatenrahmen $o3x3y3z3$ sind. Um dies zu sehen, müssen wir nur die Matrizen A_4 , A_5 und A_6 unter Verwendung von Tabelle 3.3 und dem Ausdruck (3.10) berechnen. Das gibt

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & 0 & 0 & \dot{\theta}_5 & 0 \\ 0 & s_5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & \dot{\theta}_6 & 0 & 0 & s_6 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Wenn man diese miteinander multipliziert, erhält man die Ergebnisse

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{pmatrix} R_3^3 & O_3 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$= \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 \dot{\gamma} & s_4 s_6 \dot{\gamma} c_4 c_5 s_6 \dot{\gamma} & s_4 c_6 c_4 s_5 c_4 s_5 d_6 & s_4 c_5 c_6 + \\ c_4 s_6 \dot{\gamma} s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 s_4 s_5 s_4 s_5 d_6 & c_5 d_6 & 1 \\ \dot{\gamma} s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich des Rotationsteils R_3^3 von T_6^3 mit der Eulerschen Winkeltransformation T (2.51) zeigt, dass $\dot{\gamma}_4, \dot{\gamma}_5, \dot{\gamma}_6$ tatsächlich als die Euler-Winkel $\dot{\gamma}$, $\dot{\delta}$ und $\dot{\epsilon}$ in Bezug auf das Koordinatensystem $o3x3y3z3$ identifiziert werden können.

$\dot{\gamma}$

88 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

Beispiel 3.4 Zylindrischer Manipulator mit sphärischem Handgelenk

Angenommen, wir befestigen nun ein kugelförmiges Handgelenk am zylindrischen Manipulator aus Beispiel 3.3.2, wie in Abbildung 3.9 gezeigt. Beachten Sie, dass die Drehachse von

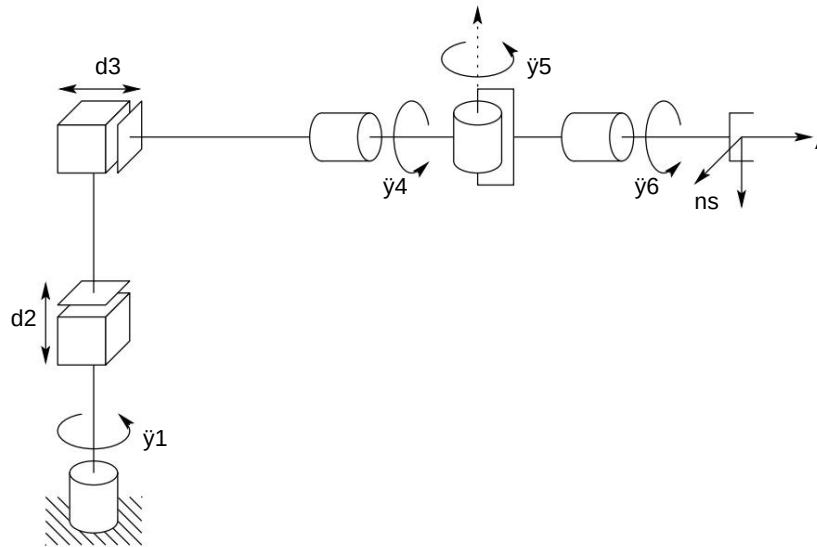


Abbildung 3.9: Zylindrischer Roboter mit sphärischem Handgelenk.

Gelenk 4 ist parallel zu z_2 und fällt somit mit der Achse z_3 aus Beispiel 3.3.2 zusammen.

Daraus folgt, dass wir die beiden vorherigen Ausdrücke (3.28) und (3.32) sofort kombinieren können, um die Vorwärtskinematik abzuleiten als

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3 \quad (3.33)$$

mit T_3^0 gegeben durch (3.28) und T_6^3 gegeben durch (3.32). Daher wird die Vorwärtskinematik dieses Manipulators beschrieben durch

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} c_1 d_3 + \dot{y}_1 d_1 + \dot{y}_2 d_2 & c_1 d_3 & \dot{y}_1 d_1 + \dot{y}_2 d_2 & 0 \\ c_1 d_3 & c_1 d_3 & \dot{y}_1 d_1 + \dot{y}_2 d_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{y}_1 d_1 + \dot{y}_2 d_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 \dot{y}_4 s_4 s_6 \dot{y}_5 c_4 c_5 s_6 \dot{y}_6 s_4 c_6 c_4 s_5 c_4 s_5 d_6 s_4 c_5 c_6 \\ c_4 s_6 \dot{y}_4 s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 s_4 s_5 s_4 s_5 d_6 & (3.34) & c_5 d_6 & 1 \\ \dot{y}_5 s_5 c_6 & s_5 c_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wo

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= c_1 c_4 c_5 c_6 \ddot{y} c_1 s_4 s_6 + s_1 s_5 c_6 \\
 r_{21} &= s_1 c_4 c_5 c_6 \ddot{y} s_1 s_4 s_6 \ddot{y} c_1 s_5 c_6 \\
 r_{31} &= \ddot{y} s_4 c_5 c_6 \ddot{y} c_4 s_6 \\
 r_{12} &= \ddot{y} c_1 c_4 c_5 s_6 \ddot{y} c_1 s_4 c_6 \ddot{y} s_1 s_5 c_6 \\
 r_{22} &= \ddot{y} s_1 c_4 c_5 s_6 \ddot{y} s_1 s_4 s_6 + c_1 s_5 c_6 \\
 r_{32} &= s_4 c_5 c_6 \ddot{y} c_4 c_6 \\
 r_{13} &= c_1 c_4 s_5 \ddot{y} s_1 c_5 \\
 r_{23} &= s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5 \\
 r_{33} &= \ddot{y} s_4 s_5 \\
 dx &= c_1 c_4 s_5 d_6 \ddot{y} s_1 c_5 d_6 \ddot{y} s_1 d_3 dy = \\
 & s_1 c_4 s_5 d_6 + c_1 c_5 d_6 + c_1 d_3 dz = \\
 & \ddot{y} s_4 s_5 d_6 + d_1 + d_2.
 \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass der größte Teil der Komplexität der Vorwärtskinematik dieses Manipulators aus der Ausrichtung des Endeffektors resultiert, während der Ausdruck für die Armposition aus (3.28) ziemlich einfach ist. Die Annahme eines sphärischen Handgelenks vereinfacht hier nicht nur die Ableitung der Vorwärtskinematik, sondern wird auch das Problem der inversen Kinematik im nächsten Kapitel erheblich vereinfachen.

$\ddot{y}$

Beispiel 3.5 Stanford-Manipulator Betrachten

Sie nun den in Abbildung 3.10 gezeigten Stanford-Manipulator. Dieser Manipulator ist ein Beispiel für einen sphärischen (RRP) Manipulator mit sphärischem Handgelenk. Dieser Manipulator weist einen Versatz im Schultergelenk auf, der sowohl die Probleme der Vorwärts- als auch der Rückwärtskinematik etwas erschwert.

Wir erstellen zunächst die gemeinsamen Koordinatensysteme mithilfe der DH-Konvention, wie gezeigt. Die Verbindungsparameter sind in Tabelle 3.4 aufgeführt.

Es ist einfach, die Matrizen A_i zu berechnen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \ddot{y} & c_1 & 0 & \ddot{y} s_1 & 0 & 0 \\ \ddot{y} & s_1 & c_1 & 0 & 0 & \ddot{y} 1 & 0 \\ \ddot{y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddot{y} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ddot{y} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

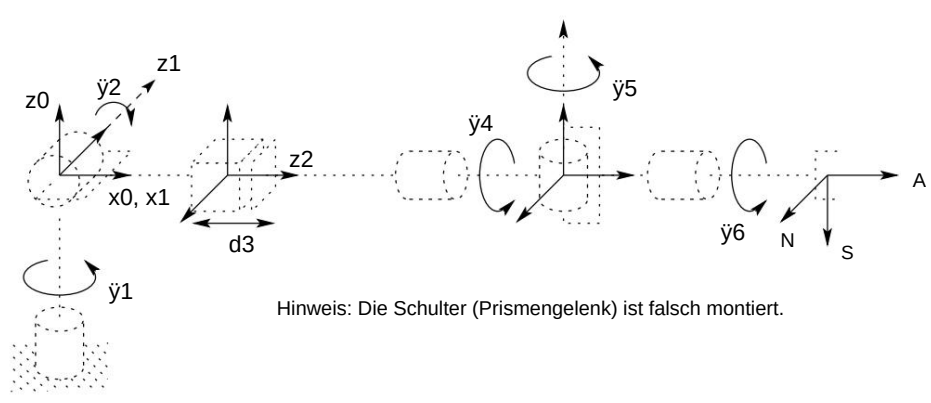


Abbildung 3.10: Zuordnung des DH-Koordinatenrahmens für den Stanford-Manipulator.

Tabelle 3.4: DH-Parameter für Stanford Manipulator.

Link	d_i	a_i	θ_i	ϕ_i	θ_i	ϕ_i	d_i	θ_i	ϕ_i	θ_i	ϕ_i
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Gelenkvariable

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 & s_2 & 0 & \ddots & c_2 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 & s_4 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 & s_5 & 0 & \ddot{y}c_5 \\ 0 & 0 & \ddot{y}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & \ddot{y}s_6 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 \\ s_6 & 0 & 1 & d_6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

T_6^0 ist dann gegeben als

$$T_6^0 = A_1 \cdot \dots \cdot A_6 \quad (3.41)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Wo

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1[c_2(c_4c_5c_6 \ddot{y} s_4s_6) \ddot{y} s_2s_5c_6] \ddot{y} d_2(s_4c_5c_6 + c_4s_6) & r_{21} &= \\ s_1[c_2(c_4c_5c_6 \ddot{y} s_4s_6) \ddot{y} s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) & r_{31} &= \\ \ddot{y}s_2(c_4c_5c_6 \ddot{y} s_4s_6) \ddot{y} c_2s_5c_6 & r_{12} &= \\ c_1[\ddot{y}c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] \ddot{y} s_1(\ddot{y}s_4c_5s_6 + c_4c_6) & r_{22} &= \\ \ddot{y}s_1[\ddot{y}c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(\ddot{y}s_4c_5s_6 + c_4c_6) & r_{32} &= s_2(c_4c_5s_6 \\ + s_4c_6) + c_2s_5s_6 & (3.43) & r_{13} = c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) \ddot{y} s_1s_4s_5 & r_{23} = s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) \\ + c_1s_4s_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{33} &= \ddot{y}s_2c_4s_5 + c_2c_5 \\ dx &= c_1s_2d_3 \ddot{y} s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 \ddot{y} s_1s_4s_5) & dy &= \\ s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) & dz &= c_2d_3 + \\ d_6(c_2c_5 \ddot{y} c_4s_2s_5). & (3.44) \end{aligned}$$

$\ddot{y}$

Beispiel 3.6 SCARA-Manipulator

Betrachten Sie als weiteres Beispiel für das allgemeine Verfahren den SCARA-Manipulator in Abbildung 3.11. Dieser Manipulator, der eine Abstraktion des AdeptOne-Roboters aus Abbildung 1.11 ist, besteht aus einem RRP-Arm und einem Handgelenk mit einem Freiheitsgrad, dessen Bewegung eine Rolle um die vertikale Achse ist. Der erste

92KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

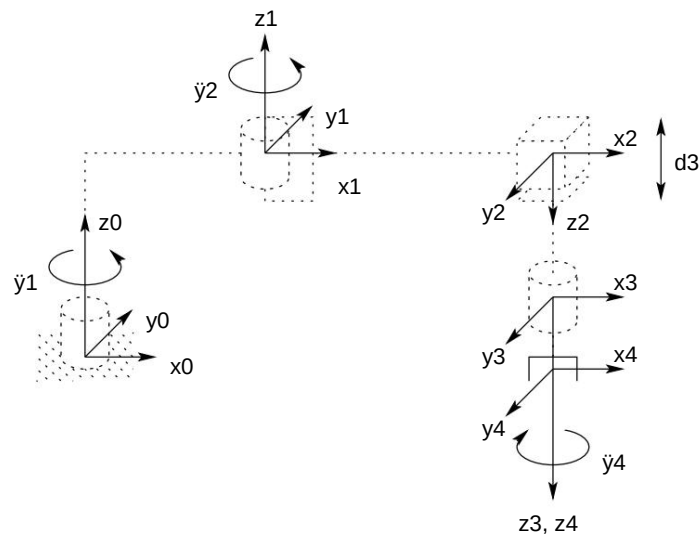


Abbildung 3.11: DH-Koordinatenrahmenzuordnung für den SCARA-Manipulator.

Tabelle 3.5: Gelenkparameter für SCARA.

Link	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	a_1	d_1	0	y_1
2	a_2	d_2	0	y_2
3	a_3	d_3	180	y_3
4	a_4	d_4	0	y_4

Gelenkvariable

Der Schritt besteht darin, die Gelenkachsen wie gezeigt zu lokalisieren und zu beschriften. Da alle Gelenkachsen parallel sind, haben wir eine gewisse Freiheit bei der Platzierung der Ursprünge. Der Einfachheit halber werden die Ursprünge wie gezeigt platziert. Wir legen die x_0 -Achse wie gezeigt in der Ebene der Seite fest. Dies ist völlig willkürlich und betrifft nur die Nullkonfiguration des Manipulators, also die Position des Manipulators, wenn $y_1 = 0$.

Die Verbindungsparameter sind in Tabelle 3.5 angegeben und die A-Matrizen lauten wie folgt

3.3. BEISPIELE

93

folgt.

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 \ddot{y}_1 & 0 & a_1 c_1 & s_1 \\ c_1 & 0 & a_1 s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_2 s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 \ddot{y}_2 & 0 & a_2 s_2 \\ \ddot{y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 \ddot{y}_4 & 0 & 0 & s_4 \\ c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Die vorwärtskinematischen Gleichungen sind daher gegeben durch

$$T_4^0 = A_1 \cdots A_4 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 c_4 + s_1 s_2 s_4 & \ddot{y}_1 c_1 c_2 c_4 + s_1 s_2 c_4 & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 s_1 c_4 \\ \ddot{y}_1 c_1 s_2 c_4 + \ddot{y}_2 s_1 s_2 c_4 & \ddot{y}_1 c_1 s_2 c_4 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 (3.49) \\ 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 $\ddot{y}$

3.4 Probleme

1. Überprüfen Sie die Aussage nach Gleichung (3.18), dass die Rotationsmatrix R die Form (3.16) hat, vorausgesetzt, die Annahmen DH1 und DH2 sind erfüllt.
2. Betrachten Sie den in Abbildung 3.12 gezeigten planaren Manipulator mit drei Gliedern. Ableiten

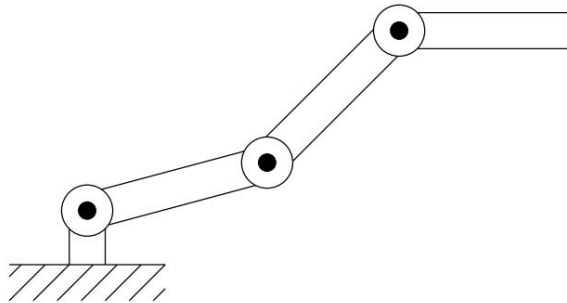


Abbildung 3.12: Dreigliedriger planarer Arm von Problem 3-2.

die vorwärtskinematischen Gleichungen unter Verwendung der DH-Konvention.

3. Betrachten Sie den zweigliedrigen kartesischen Manipulator aus Abbildung 3.13. Ableiten

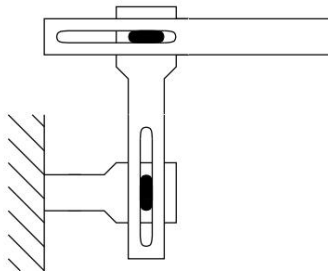


Abbildung 3.13: Zweigliedriger kartesischer Roboter von Problem 3-3.

die vorwärtskinematischen Gleichungen unter Verwendung der DH-Konvention.

4. Betrachten Sie den zweigliedrigen Manipulator aus Abbildung 3.14, dessen Gelenk 1 rotierend und Gelenk 2 prismatisch ist. Leiten Sie die Vorwärtskinematikgleichungen mithilfe der DH-Konvention her.
5. Betrachten Sie den dreigliedrigen planaren Manipulator aus Abbildung 3.15. Leiten Sie ab Vorwärtskinematische Gleichungen unter Verwendung der DH-Konvention.

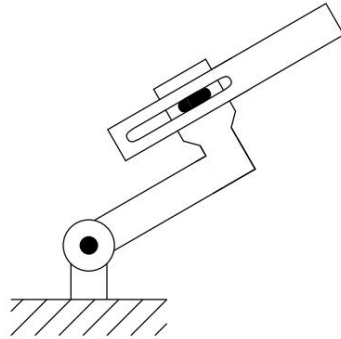


Abbildung 3.14: Zweigliedriger planarer Arm von Problem 3-4.

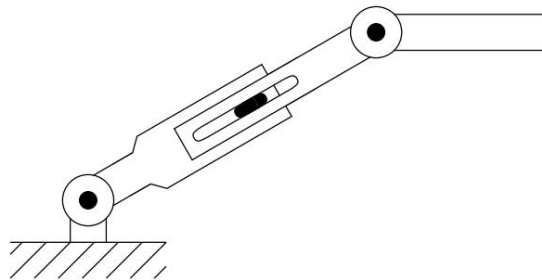


Abbildung 3.15: Dreigliedriger planarer Arm mit prismatischem Gelenk aus Problem 3-5.

6. Betrachten Sie den dreigliedrigen Gelenkroboter aus Abbildung 3.16. Leiten Sie die abwärtskinematischen Gleichungen unter Verwendung der DH-Konvention.
7. Betrachten Sie den dreigliedrigen kartesischen Manipulator aus Abbildung 3.17. Leiten Sie die Vorwärtskinematikgleichungen mithilfe der DH-Konvention her.
8. Befestigen Sie ein kugelförmiges Handgelenk am dreigliedrigen Gelenkmanipulator aus Problem 3-6, wie in Abbildung 3.18 gezeigt. Leiten Sie die Vorwärtskinematikgleichungen für diesen Manipulator her.
9. Befestigen Sie ein kugelförmiges Handgelenk am dreigliedrigen kartesischen Manipulator aus Problem 3-7, wie in Abbildung 3.19 gezeigt. Leiten Sie die Vorwärtskinematikgleichungen für diesen Manipulator her.
10. Betrachten Sie den in Abbildung 3.20 gezeigten Manipulator PUMA 260. Leiten Sie den vollständigen Satz vorwärtskinematischer Gleichungen ab, indem Sie geeignete DH-Koordinatenrahmen festlegen, eine Tabelle mit Verbindungsparametern erstellen, die A-Matrizen bilden usw.

96 KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

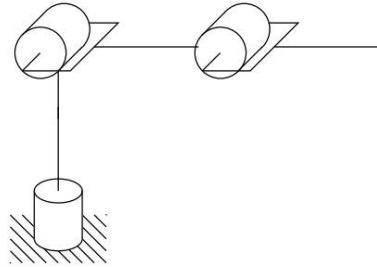


Abbildung 3.16: Dreigelenkiger Knickarmroboter.

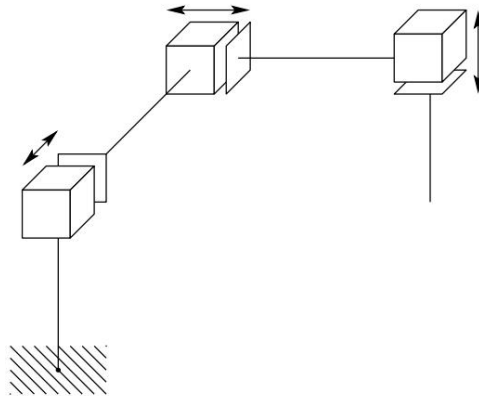
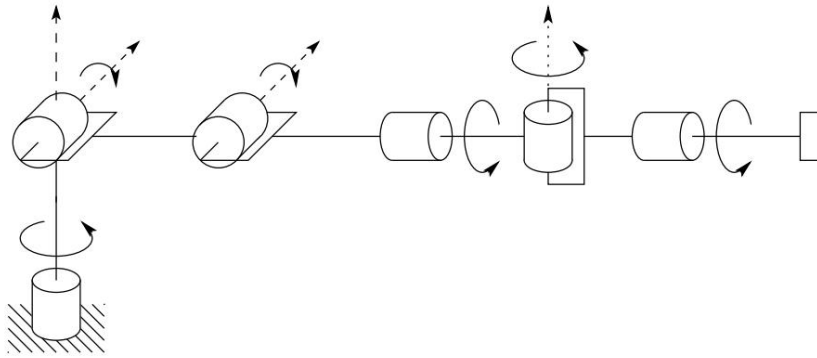


Abbildung 3.17: Dreigliedriger kartesischer Roboter.

11. Wiederholen Sie Aufgabe 3-9 für den in Abbildung 3.21 gezeigten Rhino XR-3-Roboter mit fünf Freiheitsgraden. (Hinweis: Sie sollten das Rhino-Handgelenk durch das sphärische Handgelenk ersetzen.)
12. Angenommen, ein Rhino XR-3 ist an einen Tisch geschraubt, auf dem ein koordinierter Rahmen $osxsyszs$ aufgebaut ist, wie in Abbildung 3.22 dargestellt. (Der Rahmen $osxsyszs$ wird oft als Stationsrahmen bezeichnet.) Bestimmen Sie anhand des Basisrahmens, den Sie in Aufgabe 3-11 erstellt haben, die homogene Transformation T_s , die den Basisrahmen mit dem Stationsrahmen in Beziehung setzt. Finden Sie die homogene Transformation T ist der $_5$ den Bezug zum Endeffektorrahmen Stationsrahmen. Wie ist die Position und Ausrichtung des Endeffektors im Stationsrahmen, wenn $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_5 = 0$?
13. Betrachten Sie den in Abbildung 3.23 gezeigten GMF S-400-Roboter. Zeichnen Sie die symbolische Darstellung für diesen Manipulator. Erstellen Sie DH-Koordinatenrahmen und schreiben Sie die Vorwärtskinematikgleichungen.



The diagram shows a mechanical system with a fixed base. A vertical column is connected to the base at its bottom. The column consists of three cylindrical segments. The first segment (bottom) has a rotational joint with the base, indicated by a curved arrow. The second segment has a rotational joint with the first, also indicated by a curved arrow. The third segment (top) has a rotational joint with the second, indicated by a curved arrow. A horizontal arm is connected to the top of the column. The arm consists of two rectangular blocks. The first block (bottom) has a prismatic joint with the column, indicated by a double-headed arrow. The second block (top) has a prismatic joint with the first, also indicated by a double-headed arrow. A cube is attached to the end of the arm. The cube has a rotational joint with the arm, indicated by a curved arrow. The cube is also connected to the top of the column by a vertical line, which has a rotational joint with the column, indicated by a curved arrow. The cube has a prismatic joint with the column, indicated by a double-headed arrow.

Abbildung 3.19: Kartesischer Manipulator mit kugelförmigem Handgelenk.

98KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

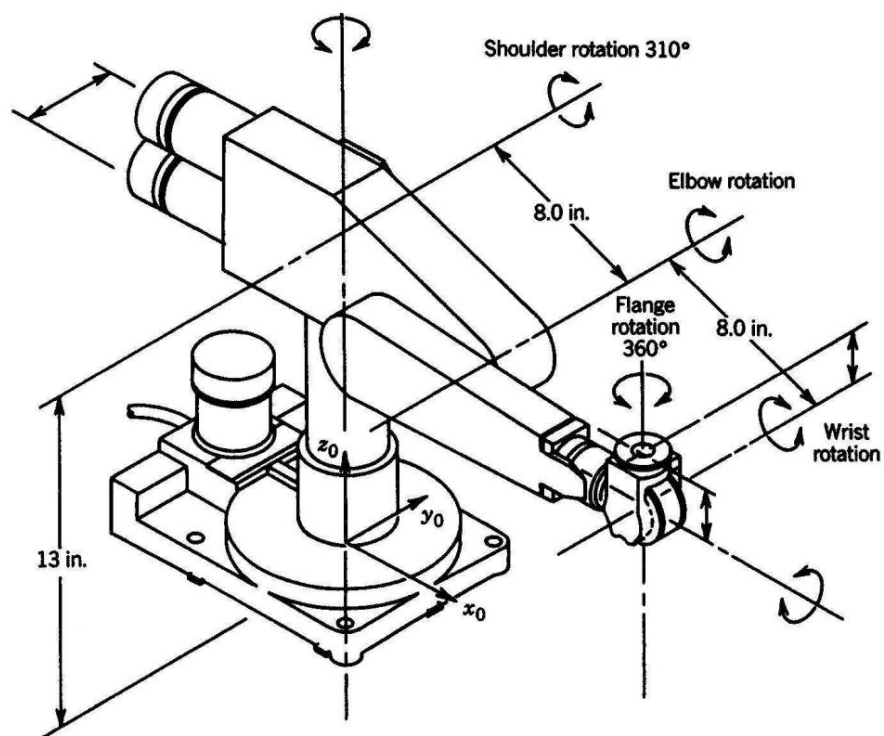


Abbildung 3.20: PUMA 260-Manipulator.

3.4. PROBLEME

99

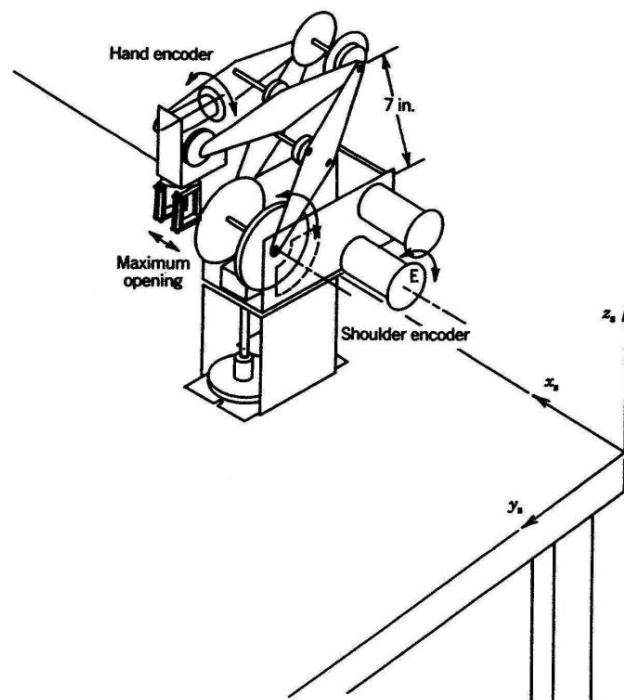


Abbildung 3.21: Rhino XR-3 Roboter.

100KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION

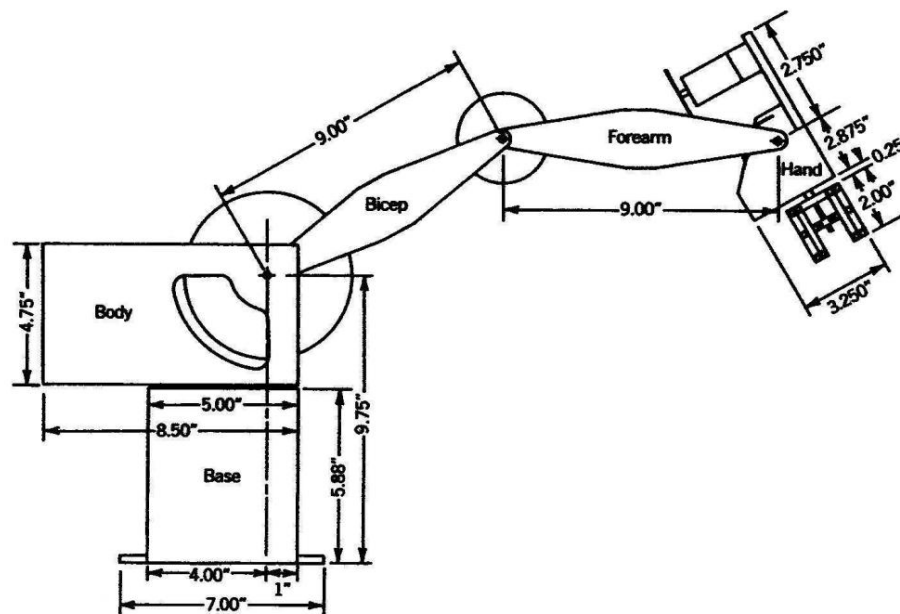


Abbildung 3.22: Rhino-Roboter an einem Tisch befestigt. Aus: Eine Robotertechnik Lehrbuch von Mohsen Shahinpoor. Copyright 1987, Harper & Row Publishers, Inc

3.4. PROBLEME

101

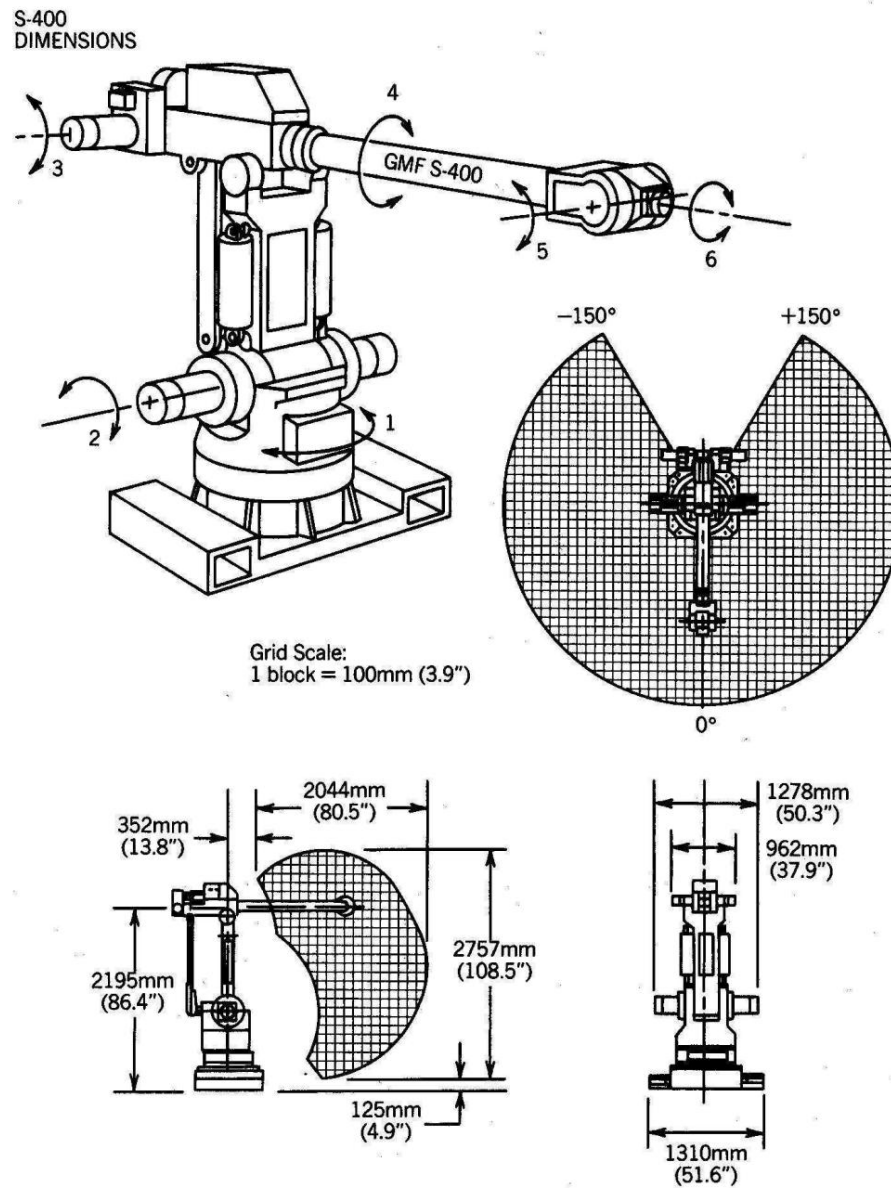


Abbildung 3.23: GMF S-400 Roboter. (Mit freundlicher Genehmigung von GMF Robotics.)

102KAPITEL 3. VORWÄRTSKINEMATIK: DIE DENAVIT-HARTENBERG-KONVENTION