

Drei Probleme in der Robotik

JM Selig

Fakultät für Informatik, Informationssysteme und Mathematik

South Bank University

London SE1 0AA, Großbritannien

Abstrakt

Drei ziemlich unterschiedliche Probleme in der Robotik werden mit derselben Technologie untersucht

niq ue aus der Schraubentheorie. Das erste Problem betrifft Federsysteme. Der

Die potentielle Funktion wird in Richtung einer beliebigen zu findenden Schraube differenziert

die Gleichgewichtslage. Das zweite Problem ist in Bezug auf die nahezu identisch

Berechnungen, die Lösung der kleinsten Quadrate für das Problem, die starre Bewegung zu finden

Es werden nur Daten über Punkte auf dem Körper gesucht, denen ein Körper unterzogen wird. Im

Als drittes Problem wird die Jacobi-Funktion einer Stewart-Plattform gefunden. Auch dies ist gelungen

durch Differenzieren bezüglich einer Schraube. Weitere Eigenschaften zweiter Ordnung der

Die ersten beiden Probleme werden untersucht. Die Hesse-Funktion der zweiten Ableitungen wird berechnet und

daher sind die Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtslagen des Federsystems

gefunden.

Notation

$\mathbb{R}^n$ n-dimensionaler euklidischer Raum.

$\mathbb{RP}^3$ dreidimensionaler projektiver Raum.

$SE(3)$ Die Gruppe der eigentlichen euklidischen Bewegungen in 3 Dimensionen, also starre Körper
Bewegungen.

$SO(3)$ Die Gruppe der Rotationen in 3 Dimensionen.

$\mathbf{R}$ Eine 3×3 - Rotationsmatrix.

$\mathbf{M}$ Eine 4×4 - Matrix, die eine starre Transformation darstellt, manchmal auch Homoge genannt
neoartige Darstellung.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ Die Positionsvektoren von Punkten im dreidimensionalen Raum.

$\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}$ Punkte im dreidimensionalen Raum, dargestellt als Punkte im 4-dimensionalen Raum, in
geteilte Form, $\tilde{\mathbf{a}}^T = (\mathbf{a}^T, 1)$ zum Beispiel.

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dreidimensionale Vektoren, dargestellt als 3×3 antisymmetrische Matrizen, so dass $\mathbf{A}\mathbf{x} =$
 $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ für jeden Vektor $\mathbf{x}$.

$\mathbf{I}_3$ Die 3×3 - Identitätsmatrix.

$\ddot{y}$ Federkonstante.

$\mathbf{J}$ 6×6 Jacobi-Matrix.

$\mathbf{K}$ 6×6 Steifigkeitsmatrix.

$\mathbf{S}$ 4×4 - Matrix, die ein Lie-Algebra-Element oder eine Schraube darstellt.

$\mathfrak{w} \in \mathfrak{g}$ 1 Vektor, der einen Schraubenschlüssel darstellt, der ein Element des Vektorraums ist, der dual ist

die Lie-Algebra.

1. Einleitung

Als Ball Ende des 19. Jahrhunderts seine Abhandlung [1] schrieb, wurde Sophus Lie geschrieben

Er beschäftigte sich mit dem, was er „kontinuierliche Gruppen“ nannte. Wenn Ball von Lies Arbeit wüsste, wäre das vielleicht nicht der Fall

Es war offensichtlich, dass es irgendeine Verbindung zu seinem eigenen hatte, seit Lie daran interessiert war

Symmetrien von Differentialgleichungen. Es war Klein, der später die Idee einführte

Diese „Lie-Gruppen“ könnte man sich als geometrische Symmetrien vorstellen. Es war nach beidem

Ball und Lie waren gestorben, als die „Lügentheorie“ begann, einen zentralen Platz in der Moderne einzunehmen

Geometrie. Insbesondere die Arbeiten von Killing und Cartan zu Lie-Algebren waren sehr in Mode

fließend. Weitere Einzelheiten zur Geschichte der Lie-Theorie finden Sie in [2]. Im Nachhinein betrachtet ist das möglich

Man sieht, dass Balls endliche Schrauben einfach Elemente einer Lie-Gruppe waren: der Gruppe von

richtige euklidische Transformationen in $\mathbb{R}^3$. Die Drehungen oder Motoren waren Elemente des

Lie-Algebra dieser Gruppe. Diese werden manchmal auch als Infinitesimalschrauben bezeichnet

obwohl genauer gesagt Kugelschrauben mit Elementen des Projekts identifiziert werden können

tive Raum gebildet aus der Lie-Algebra. Das sind die Linien durch den Ursprung der Lüge

Algebra.

Viele andere Elemente der Lie-Theorie waren auch in der Schraubentheorie von Ball vorhanden. Aber

vielleicht wurde ihre Bedeutung nicht voll gewürdigt. Zum Beispiel das Lie-Produkt oder

Lie-Bracket ist einfach das Kreuzprodukt von Schrauben. Für Ball war dies nur eine geometrische Sache

Operation, das Analogon des Vektorprodukts dreidimensionaler Vektoren.

Einige Autoren beziehen sich auf die Schraubentheorie und die Lie-Gruppenmethoden, als ob sie unterschiedlich wären

Ansätze. Die Ansicht dieses Autors ist, dass es keinen Unterschied zwischen ihnen gibt, Mist

Theorie ist einfach die Spezialisierung der Lie-Theorie auf die Gruppe der Starrkörpertransformationen

tionen. Der Name Schraubentheorie bleibt jedoch nützlich. Als beschreibende Kurzschrift und

Außerdem ist es eine Erinnerung daran, dass es Ball war, der vor Lie fast die gesamte Theorie ausgearbeitet hatte

Gruppen wurden erfunden!

Ein großer Teil der Robotik beschäftigt sich mit starren Bewegungen. In Kinematik und Dynamik

Untersucht werden die starren Bewegungen sowohl der Nutzlast als auch der Glieder des Roboters. Im Roboter

Ein häufiges Sehproblem besteht darin, die starre Bewegung der Kamera abzurufen

anhand der aufgenommenen Bilder. Daher ist die Gruppe der Starrkörperbewegungen ein zentrales Objekt

in der Robotik. Bisher wurde die Schraubentheorie häufig in der Roboterkinematik eingesetzt

eingeführt von der Mechanismen-Community. Es beginnt, in der Dynamik eingesetzt zu werden

und Steuerung von Robotern, ist in diesen Bereichen jedoch keineswegs das Mittel der ersten Wahl. In

Robot Vision sind diese Techniken kaum bekannt. Eines der Ziele dieser Arbeit ist es

zeigen, dass diese Methoden universell auf Probleme in der Robotik anwendbar sind

und um zu zeigen, dass eine Vielzahl von Problemen in der Robotik ein gemeinsames Grundthema haben.

Diese Arbeit nutzt die Tatsache, dass eine Lie-Gruppe eine Differentialmannigfaltigkeit ist. Um a zu minimieren

Für eine reibungslose Funktion auf einem solchen Raum ist die Maschinerie der Lagrange-Multiplikatoren nicht erforderlich.

Es ist möglich, direkt an der Mannigfaltigkeit zu arbeiten, es ist nicht notwendig, sich die Gruppe als solche vorzustellen

eingebettet in den kartesischen Raum, wie dies durch die Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren impliziert würde.

Die Differentiation entlang tangentialer Vektorfelder kann verwendet werden, um Gleichungen für a zu finden

stationäre Punkte einer Funktion. Die am bequemsten zu verwendenden Vektorfelder sind die linken

invariante Felder der Gruppe. Dies sind einfach Elemente der Lie-Algebra der Gruppe,

Abbildung 1: Ein starrer Körper, der an einem Federsystem aufgehängt ist

die Drehungen oder Schrauben. Daher könnte man sich diese Technik als „entlang der Differenzierung“ vorstellen eine Schraube“.

2 Federn

Stellen Sie sich einen starren Körper vor, der von einem Federsystem getragen wird, siehe Abbildung 1. Nehmen Sie weiter an

dass die Federn die natürliche Länge 0 haben, dem Hookeschen Gesetz gehorchen und sowohl drücken als auch ziehen können.

Die Federkonstanten $\tilde{y}_i$ der Federn können unterschiedlich sein. Die Schwerkraft wird hier ignoriert

der Einfachheit halber. Es ist jedoch nicht schwer vorstellbar, wie es in ein Mehr integriert werden könnte

anspruchsvolles Modell, entweder durch Modifizieren der unten abgeleiteten potenziellen Funktion

oder indem die Gleichungen für das Gleichgewicht geändert werden, um den Schraubenschlüssel aufgrund der Schwerkraft einzubeziehen.

Sei $\tilde{\mathbf{a}}_i^T = (\mathbf{a}_i^T, 1)$ die Punkte sein, an denen die Federn am Boden befestigt sind oder

Rahmen und $\tilde{\mathbf{b}}_i^T = (\mathbf{b}_i^T, 1)$ die entsprechenden Befestigungspunkte am starren Körper wenn

Der Körper befindet sich in einer Standard-Heimkonfiguration. Wenn der Körper einer Starre unterliegt

Bewegung, zu der sich die Befestigungspunkte bewegen,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{b_{ich}}^T &= \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{B}_i \\ \tilde{\mathbf{y}}^T &= \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{B}_i \end{aligned}$$

was mit $\tilde{\mathbf{y}}$ abgekürzt wird $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{b}}$. Die erste Frage, die dazu gestellt werden kann

Die Situation ist: Gibt es eine Gleichgewichtskonfiguration für den starren Körper?

Das Problem besteht darin, die potentielle Energie des Federsystems zu minimieren, das ist gegeben

durch die folgende Funktion,

$$\dot{y} = 2 \left(-\dot{y} \tilde{y}_i a_i^T \tilde{y} M b^T - \tilde{y}^T a_i^T \tilde{y} M b^T \right).$$

Beachten Sie, dass diese Funktion auf der Gruppe $SE(3)$ definiert ist, das heißt $\dot{y} : SE(3) \rightarrow \mathbb{R}$, als $\mathbf{M}$

Über die Gruppe hinweg variieren unterschiedliche Werte des potenziellen Ergebnisses.

Wenn dies nur eine Funktion auf $\mathbb{R}$ wäre^N Die stationären Punkte würden durch Berechnen gefunden

die partiellen Ableitungen und setzt sie dann auf Null. Die Standard-Angriffsmethode

Dieses Problem bestünde darin, die Matrixelemente mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren zu minimieren

Berücksichtigen Sie die Einschränkung, dass die Matrix ein Gruppenelement sein muss.

Die einfachere Methode für uneingeschränkte Funktionen kann jedoch mit nachgeahmt werden

eine vielfältige Theorie. Die stationären Punkte einer auf einer Mannigfaltigkeit definierten Funktion finden

Die Funktion muss entlang von Vektorfeldern auf der Mannigfaltigkeit differenziert werden. Wie üblich die

Die Ergebnisse werden auf Null gesetzt und dann werden die resultierenden Gleichungen gelöst, um die stationären Punkte zu finden.

Hierzu dient eine Menge von Vektorfeldern, die den Raum aller Vektorfelder aufspannen

Verteiler erforderlich.

Da die betrachtete Mannigfaltigkeit die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit einer Lie-Gruppe ist,

Ein solcher vollständiger Satz von Vektorfeldern ist immer verfügbar. Die Elemente der Lie-Algebra

Es können linksinvariante Vektorfelder verwendet werden.

Um entlang eines Vektorfeldes zu differenzieren, beträgt der Wert der Funktion an zwei Punkten com

Pared, die aktuelle Position und eine Position in geringer Entfernung entlang eines tangentialen Pfads

Vektorfeld, dann die Grenze der Differenz zwischen den Werten der Funktion an diesen

Da der Weg immer kürzer wird, werden benachbarte Punkte übernommen.

Lassen:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} & & \\ \ddot{\mathbf{y}} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}},$$

sei ein Lie-Algebra-Element oder eine Schraube in der 4×4 -Darstellung. Hier ist $\ddot{\mathbf{y}}$ ein 3×3

antisymmetrische Matrix, die einem Vektor $\ddot{\mathbf{y}}$ entspricht, also $\ddot{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \ddot{\mathbf{y}} \times \mathbf{x}$ für jeden Vektor

$\mathbf{x}$.

Wenn $\mathbf{M}$ ein in der 4×4 -Darstellung geschriebenes Gruppenelement ist, dann ist die Wirkung von $\mathbf{S}$ on

$\mathbf{M}$, wird durch die linke Übersetzung gegeben,

$$\mathbf{M}(\mathbf{t}) = \mathbf{e}^{-\mathbf{t} \mathbf{S} \mathbf{M}}.$$

Dies führt $\mathbf{M}$ entlang eines Pfades, der tangential zum durch $\mathbf{S}$ definierten Vektorfeld verläuft. Ableitung bilden

entlang des Pfades und dann das Setzen von $\mathbf{t} = 0$ ergibt,

$$\ddot{\mathbf{y}} \mathbf{S} \mathbf{M} = \mathbf{S} \mathbf{M}.$$

Daher ist die Ableitung des Potentials gegeben durch:

$$\ddot{\mathbf{y}} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{y}} \mathbf{M} \mathbf{b} - \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{b}^T.$$

Für das Gleichgewicht muss dies für beliebiges $\mathbf{S}$ verschwinden. Daher muss $\mathbf{S}$ abgetrennt werden, also

Betrachten Sie den Begriff,

$$\mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{b}^T = \ddot{\mathbf{y}} \times (\mathbf{R} \mathbf{b} + \mathbf{t}) + \mathbf{v} \quad \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{y}} \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{i}^T \ddot{\mathbf{y}}^T \mathbf{I} \mathbf{3} \quad \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \quad 0 \quad \ddot{\mathbf{y}} \quad \ddot{\mathbf{y}} \quad 0 \quad 0 \quad \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} \ddot{\mathbf{y}}.$$

Dabei ist $\mathbf{I} \mathbf{3}$ die 3×3 -Identitätsmatrix und $\mathbf{B} \mathbf{i}$ die entsprechende antisymmetrische Matrix

zu $\mathbf{b} \mathbf{i}$.

Setzt man dies in die Gleichgewichtsgleichung ein und nutzt die Tatsache, dass $\mathbf{S}$ und damit $\ddot{\mathbf{y}}$

und $\mathbf{v}$ beliebig sind, erhält man folgendes Ergebnis:

$$\ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{y}} \mathbf{M} \mathbf{b} - \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{b}^T = \ddot{\mathbf{y}} \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{i}^T \ddot{\mathbf{y}}^T \mathbf{I} \mathbf{3} \quad \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} = 0.$$

Nach ein wenig Manipulation erzeugt diese Matrixgleichung zwei Vektorgleichungen:

$$\sum_i \tilde{y}_i \mathbf{a}_i \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{R} \mathbf{b}_i - \mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

Und

$$\sum_i \tilde{y}_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{R} \mathbf{b}_i - \mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

Wenn die Gewichte $\tilde{y}_i$ alle gleich sind, dann besagt Gleichung 2, dass die Transformation optimal ist

ordnet die Schwerpunkte der **a**- Punkte den **b**- Punkten zu. Eine andere Möglichkeit, dies auszudrücken, ist das bei

Bei einer Gleichgewichtskonfiguration müssen die Schwerpunkte der beiden Punktmengen zusammenfallen. Zu

Fahren Sie fort und wählen Sie den Koordinatenursprung so, dass der Schwerpunkt der **b**- Punkte bei liegt

Ursprung, $\tilde{y}_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$. Der Translationsvektor ist nun durch Gleichung (2) gegeben als:

$$\mathbf{t} = \frac{\sum_i \tilde{y}_i \mathbf{a}_i \tilde{y}_i}{\sum_i \tilde{y}_i}.$$

In der obigen Form ist Gleichung (1) nicht sehr einfach zu handhaben, eine handlichere Form schon

die 3×3 -Darstellung. Eine kleine Berechnung bestätigt die antisymmetrische Matrix

entsprechend einem Vektorprodukt $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$, ist gegeben durch $\mathbf{q} \mathbf{p}^T - \mathbf{p} \mathbf{q}^T$. Daher in dieser Form die

Gleichung wird,

$$\sum_i \tilde{y}_i \mathbf{R} \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i^T - \sum_i \tilde{y}_i \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^T - \mathbf{t} \mathbf{R}^T = \mathbf{0},$$

wobei das Ergebnis $\mathbf{t} = \sum_i \tilde{y}_i \mathbf{a}_i / \sum_i \tilde{y}_i$ verwendet wurde. Nun schreiben wir: $\mathbf{P} = \sum_i \tilde{y}_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T$ ^{ich, das}

Gleichung wird;

$$\mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{R}^T \quad (3)$$

Dies zeigt, dass die Matrix $\mathbf{P} \mathbf{R}^T$ symmetrisch ist. Sei also $\mathbf{P} \mathbf{R}^T = \mathbf{Q}$, wobei $\mathbf{Q}$ sym ist

metrisch, dann

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{R}.$$

Dadurch wird die Matrix $\mathbf{P}$ als Produkt einer symmetrischen Matrix mit einer echten zerlegt

orthogonal. Dies ist im Wesentlichen die polare Zerlegung der Matrix. Beachten

dass die Polarzerlegung $\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{Q}\mathbf{Y}$ auch die Gleichung, die Rotationsmatrix $\mathbf{R}$, erfüllt

hier ist das Gleiche wie oben, aber die symmetrische Matrix $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R}$ ist einfach kongruent

zur ursprünglichen symmetrischen Matrix. Soweit es die Lösung für $\mathbf{R}$ dort betrifft

Es gibt keinen Unterschied zwischen diesen Lösungen. Tatsächlich die polare Zerlegung einer Matrix

spaltet es in eine orthogonale Matrix und eine nichtnegative symmetrische Matrix. Hier ein richtiges

Es werden eine orthogonale und eine symmetrische Matrix benötigt. Wenn die orthogonale Matrix aus dem

Die polare Zerlegung von $\mathbf{P}$ ist eine Spiegelung, dann ergibt die Multiplikation mit $\mathbf{Y}$ eine Drehung. Mehr

Einzelheiten zur Polarzerlegung einer Matrix finden sich beispielsweise in [3].

Die polare Zerlegung liefert eine Lösung, aber diese Lösung ist nicht eindeutig. Lassen

$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{P}$ sei die polare Zerlegung von $\mathbf{P}$, setze diese nun in die Gleichung (3) ein,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{P}^T.$$

Wenn man $\mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{i}$ schreibt, lautet die Gleichung:

$$\mathbf{R} \mathbf{i} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{Q} \mathbf{i}.$$

Angenommen, $\mathbf{v}$ liegt in Richtung der Rotationsachse von $\mathbf{R} \mathbf{i}$, sodass $\mathbf{R} \mathbf{i} \mathbf{v} = \mathbf{v}$, postmul

Wenn man die obige Gleichung mit $\mathbf{v}$ tippt, erhält man:

$$\mathbf{R} \mathbf{i} \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{v}.$$

Daher liegt $\mathbf{Q} \mathbf{v}$ entlang der Achse von $\mathbf{R} \mathbf{i}$ und so gilt:

$$\mathbf{Q} \mathbf{v} = \mu \mathbf{v},$$

für ein konstantes μ . Jede Lösung für die Rotation $\mathbf{R}_i$ muss ihre Rotationsachse haben

ausgerichtet mit einem Eigenvektor von $\mathbf{Q}$.

Die möglichen Drehwinkel können durch Berücksichtigung der Wirkung auf das Eigen ermittelt werden

Vektoren von $\mathbf{Q}$ unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix gegenseitig sind

senkrecht. Wenn die Matrix $\mathbf{P}$ nicht singulär ist, ist bekannt, dass die Polare de

Die Zusammensetzung ist einzigartig. Wenn die Eigenwerte von $\mathbf{Q}$ alle unterschiedlich sind und auch unterschiedlich sind

Beträge, dann sind die einzig möglichen Winkel 0 und $\hat{y}$. Dies ergibt insgesamt vier Lösungen:

$\mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3$ ist die oben gefundene Lösung, das heißt, $\mathbf{R}$ ist einfach die Drehung von der Polare de

Komposition. Die drei anderen Lösungen für $\mathbf{R}_i$ sind Drehungen von $\hat{y}$ im Bogenmaß um die drei

Eigenvektoren von $\mathbf{Q}$. Insgesamt gibt es also vier Lösungen für die Rotation $\mathbf{R} = \mathbf{R}_p \mathbf{R}_i$. In jedem

In diesem Fall ist $\mathbf{R}_p$ die Rotation aus der Polarzerlegung von $\mathbf{P}$ und $\mathbf{R}_i$ sind wie oben Rotationen

von $\hat{y}$ um den i -ten Eigenvektor von $\mathbf{Q}$, wobei die vierte Lösung durch $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}_3$ gegeben ist. Beachten

dass die vier Rotationen eine diskrete Untergruppe der Rotationsgruppe bilden, diese Untergruppe

ist die bekannte Klein-Viergruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Wenn eine der oben genannten Bedingungen nicht erfüllt ist, ist $\mathbf{P}$ singulär, zwei der Eigenwerte von

Wenn $\mathbf{Q}$ gleich ist oder die Summe zweier Eigenwerte Null ergibt, gibt es mehr Lösungen. Für

Wenn sich beispielsweise ein Paar Eigenwerte von $\mathbf{Q}$ zu Null summieren, dann ist jede Drehung um die verbleibenden Eigenwerte möglich

Der Eigenvektor erfüllt die Gleichung für $\mathbf{R}_i$.

Tatsache ist, dass es im allgemeinen Fall vier stationäre Punkte der potentiellen Energie gibt

Funktion gefunden wurde, ist nicht überraschend. Die Morsetheorie untersucht die Beziehung

zwischen Mannigfaltigkeiten und den kritischen Punkten der auf ihnen definierten Funktionen, siehe [4]. Der

Kritische Punkte oder hier stationäre Punkte entsprechen Zellen in einem zellulären Zerfall

tion der Mannigfaltigkeit. Die fragliche Mannigfaltigkeit ist hier die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit von

Rotationsgruppe $SO(3)$, dies ist als dreidimensionaler projektiver Raum bekannt, RP^3 . Der

Die minimale zelluläre Zersetzung von RP^3 besteht aus vier Zellen mit den Abmessungen 0, 1, 2 und 3

siehe [5, S. 105]. Daher hat eine allgemeine Funktion auf $SO(3)$ mindestens 4 kritische Punkte

Punkte. Darüber hinaus ist der Index der kritischen Punkte die Anzahl der negativen Eigenwerte

der hessischen Matrix gibt die Dimension der entsprechenden Zelle an. Also ohne

Bei weiteren Berechnungen wird bekannt sein, dass die vier kritischen Punkte einen lokalen Maxi bilden

Mama, ein lokales Minimum und zwei Arten von Sattelpunkten. Das Problem, welches zu finden

Die Lösung ist das Minimum, auf das später noch eingegangen wird.

Das Obige zeigt, dass im Allgemeinen, wenn die Matrix $\mathbf{P}$ nicht singulär ist, die

Das Federsystem von Abbildung 1 hat eine einzigartige stabile Gleichgewichtsposition. Darüber hinaus ist das System

Das System wird drei instabile Gleichgewichtspositionen haben. Dieses Ergebnis hängt nicht von der ab

Anzahl bzw. Anordnung der Federn solange $\det(\mathbf{P}) \neq 0$.

3 Starre Bewegung aus Punktdaten

Erwägen Sie ein Sichtsystem oder ein Entfernungsmesssystem, das den Standort messen kann

Punkte in 3 Dimensionen. Stellen Sie sich vor, dass ein starrer Körper eine Reihe bekannter Punkte hat

Position. Der Körper ist einer unbekannten starren Bewegung ausgesetzt und die Positionen der

Punkte werden gemessen. Diese Messungen enthalten Fehler und die zu beantwortende Frage

Hier geht es um die Frage: Wie lässt sich die starre Bewegung des Körpers abschätzen?

Die Positionen der bekannten Punkte seien $\mathbf{b}^i$ und entsprechende gemessene Punkte $\tilde{\mathbf{a}}^i$.

Schreiben Sie die unbekannte starre Transformation als $\mathbf{M}$, dann ist die Funktion

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{b} \quad \text{oder} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{b} \quad \text{ich,}$$

stellt die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den gemessenen Punkten und dar
ihre ideale (geräuschfreie) Position. Die Wahl von $\mathbf{M}$ zur Minimierung dieser Funktion ergibt ein Minimum
Quadratschätzung für die starre Transformation. Diese Funktion ist nahezu identisch mit der
Bei der im vorherigen Abschnitt untersuchten potentiellen Energiefunktion bestehen die einzigen Unterschiede darin
Gesamtfaktor von der Hälfte und dass alle y_i auf 1 gesetzt wurden.

Die Geschichte dieses Problems ist sehr interessant. Das Problem, den Dienstplan zu finden
Die Lösung ist eindeutig der interessante Teil und wurde erstmals 1957 von MacKenzie gelöst [6]. Er
bin im Zusammenhang mit der Kristallographie auf dieses Problem gestoßen. 1966 fand Wahba das
dasselbe Problem bei der Untersuchung der Ausrichtung künstlicher Satelliten, [7]. Im Jahr 1976 Moran
löste das Problem erneut mit Quaternionen, [8]. Die Motivation hierfür kam aus der Geologie,
insbesondere die Bewegung tektonischer Platten. Im Zusammenhang mit der Fertigung, Nadas
fand und löste das Problem 1978 erneut, [9]. Hier erfolgte der Antrag beim Hersteller
Herstellung von Keramiksubstraten für Siliziumchips. In der Robot-Vision-Community das Problem
wird üblicherweise Horn [10] zugeschrieben, siehe zum Beispiel [11, Kap. 5].

Die oben angegebene Lösung ist vielleicht etwas einfacher als die Standardargumente
die eine eingeschränkte Minimierung beinhalten, wobei die Einschränkungen verwendet werden, um das auszudrücken
Tatsache, dass die Matrizen in der Gruppe liegen müssen.

Die Standardlösungen basierten nicht immer auf der polaren Zerlegung.
Tatsächlich sind (zumindest) zwei andere Beschreibungen der Lösung möglich.

Um die Polarzerlegung einer Matrix zu berechnen, werden Texte zur numerischen Analyse empfohlen
Es wird empfohlen, mit der Singulärwertzerlegung der Matrix zu beginnen, siehe Beispiel
Bitte [12]. Daher ist es keine wirkliche Überraschung, dass die Lösung unseres Problems gefunden werden kann
direkt aus einer Singulärwertzerlegung.

Erinnern Sie sich an den Abschnitt oben: $\mathbf{RPT} = \mathbf{PRT}$, muss nach der Drehung gelöst werden

Matrix $\mathbf{R}$, wobei $\mathbf{P} = \mathbf{y} \mathbf{i} \mathbf{i} \mathbf{a} \mathbf{i} \mathbf{b}$ ^T_{ich}. Denken Sie außerdem daran, dass

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{p},$$

wobei $\mathbf{Q}$ symmetrisch war. Daher kann $\mathbf{Q}$ als $\mathbf{Q} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T$ mit $\mathbf{U}$ orthog diagonalisiert werden

onal und $\mathbf{D}$ -diagonal. Schreibe jetzt,

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{p} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T,$$

^T wo $\mathbf{V} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}$ ist immer noch orthogonal. Dies ist einfach die Singularwertzerlegung von

$\mathbf{P}$. Anders ausgedrückt: Nehmen wir an, die Singularwertzerlegung von $\mathbf{P}$ sei $\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$

dann sind die vier Lösungen $\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{i}$.

Eine andere Lösungsform kann wie folgt abgeleitet werden, beginnend mit dem Polar de

Zusammensetzung von $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{p},$$

wobei $\mathbf{Q}$ eine symmetrische Matrix ist. Die Nachmultiplikation dieser Gleichung mit ihrer Transponierten ergibt:

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{Q}^2. \text{ Schließlich ergibt sich durch Ersetzen von } \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{P} \mathbf{P}^T)^{1/2} \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{i}.$$

Es gibt mehrere verschiedene Quadratwurzeln der Matrix $(\mathbf{P} \mathbf{P}^T)$, die hier gezogen werden könnten,

Die Auswahl wird durch die Anforderung begrenzt, dass die Determinante von $\mathbf{R}$ 1 sein muss

bedeutet, dass die eindeutige positive Quadratwurzel gezogen werden muss, siehe [3, S. 405].

Betrachten Sie hier abschließend die Determinante der Matrix $\mathbf{P}$. Ein klassisches Ergebnis sagt uns das

die polare Zerlegung einer Matrix $\mathbf{P}$ ist eindeutig, wenn $\mathbf{P}$ nicht singulär ist, siehe [3, S. 413]

Zum Beispiel. Die klassische Polarzerlegung zerlegt die Matrix $\mathbf{P}$ in ein orthogonale Matrix und positiv-semidefinite symmetrische Matrix. Hier ein richtiges Orthogonal Matrix und eine symmetrische Matrix (nicht unbedingt positiv-semidefinit) werden benötigt, dies hat keinen Einfluss auf die Einzigartigkeit der Lösung.

Daher muss die Determinante der oben definierten Matrix $\mathbf{P}$ untersucht werden. Zu

Um die Diskussion zu vereinfachen, gehen wir davon aus, dass die Federsteifigkeiten $\tilde{y}_i$ alle auf 1 gesetzt wurden.

Bei weniger als drei Federn oder Punktpaaren ist die Determinante immer

Singular. Für drei Punktpaare ergibt eine einfache Berechnung:

$$\det(\mathbf{P}) = \det \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{y}_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3^T \end{pmatrix} = (a_1 a_2 a_3)(b_1 b_2 b_3),$$

Hier wurde das Skalartripelprodukt als $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{abc})$ geschrieben.

Die Verallgemeinerung auf n Punktpaare ergibt:

$$\det(\mathbf{P}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n} (\mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \dots \mathbf{a}_{i_n}) (\mathbf{b}_{i_1} \mathbf{b}_{i_2} \dots \mathbf{b}_{i_n}).$$

Dies ist sicherlich singular, wenn alle $\mathbf{a}$ -Punkte oder alle $\mathbf{b}$ -Punkte auf einer Ebene durch liegen

Herkunft.

4 Jacobi-Matrix für Stewart-Plattformen

Betrachten Sie eine allgemeine Stewart-Plattform. Dieser Manipulator verfügt über sechs gleichgeschaltete Beine. Jedes Bein besteht aus einem hydraulischen Aktuator zwischen einem Paar passiver Kugelgelenke. Die sechs Beine verbinden die Basis oder den Boden mit einer beweglichen Plattform. Durch Anpassen der Länge der sechs Beine kann die Plattform mithilfe der hydraulischen Antriebe manövriert werden mit sechs Freiheitsgraden. Siehe Abbildung 2.

Abbildung 2: Eine General-Stewart-Plattform

Bei Parallelmanipulatoren ist die inverse Kinematik unkompliziert
 die Vorwärtskinematik ist schwierig. Nehmen wir an, dass die Position und Ausrichtung des
 Plattform ist gegeben, die Beinlängen sind einfach zu finden. Sei $\mathbf{a}_i$ die Position des Zentrums
 des zum i -ten Bein gehörenden Kugelgelenks am Boden. In der Heimkonfiguration
 Die entsprechende Position des Gelenkzentrums auf der Plattform wird $\mathbf{b}_i$ sein. Also jetzt die
 Die Länge des i -ten Beins bzw. seines Quadrats kann geschrieben werden:

$$l_i^2 = \mathbf{a}_i^T \dot{\mathbf{y}} \mathbf{M} \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i^T \dot{\mathbf{y}} \mathbf{M} \mathbf{b}_i \quad i = 1, \dots, 6.$$

Wie üblich ist $\mathbf{M}$ eine starre Transformation, dieses Mal die Bewegung, die die Plattform übernimmt
 nach Hause zur aktuellen Position. Beachten Sie, dass die Beinlängen als Funktionen betrachtet werden können
 Es ist jedoch üblicher, diese als Komponenten einer Zuordnung zu betrachten
 von der Gruppe zum Raum der Beinlängen, $SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^6$. Ein Punkt in $\mathbb{R}^6$ ist gegeben
 Koordinaten als $(l_1, l_2, \dots, l_6)$. Gesucht wird der Jakobianer dieser Abbildung. Machen
 Dabei wird die Ableitung der Beinlängen gebildet,

$$\frac{dl_i}{dt} = 2l_i \dot{l}_i = \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{a}_i \dot{\mathbf{y}} \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i^T \dot{\mathbf{y}} \mathbf{b}_i.$$

Wenn man dies neu anordnet, erhält man:

$$\dot{l}_i = \frac{1}{2l_i} \mathbf{b}_i^T \dot{\mathbf{y}} \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i^T \dot{\mathbf{y}} \mathbf{b}_i = \frac{1}{2l_i} (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{y}} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{y}}.$$

Dies ergibt die Gelenkgeschwindigkeit jedes Beins als lineare Funktion der Geschwindigkeitsschraube des

Plattform. Das jacobianische $\mathbf{J}$ ist die Matrix, die die Formel erfüllt:

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_{11} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{16} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \ddot{\mathbf{y}}.$$

Es ist also ersichtlich, dass die Zeilen dieser Jacobi-Matrix einfach sind:

$$\frac{1}{(a_i \times b_i) l_i} \mathbf{b}_i^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{y}_i) \quad , \quad i = 1, \dots, 6.$$

Dies ist der Schlüssel, der durch eine Einheitskraft gegeben ist, die entlang des i -ten Beins gerichtet ist.

Betrachten Sie ein Federsystem wie in Abschnitt 2. Angenommen, es gibt nur sechs Federn.

Nun kann gezeigt werden, dass der mit der Gleichgewichtsposition verbundene Jacobi die Sünde ist regelmäßig. Um dies zu sehen, betrachten Sie die Gleichungen (1) und (2), die die Gleichgewichtsposition definieren.

Dinge so anordnen, dass die Gleichgewichtsposition die Referenzposition ist und daher

$\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ und $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, dann lauten die Gleichungen:

$$\ddot{\mathbf{y}} - \ddot{\mathbf{y}}_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i = \mathbf{0},$$

Und

$$\ddot{\mathbf{y}} - \ddot{\mathbf{y}}_i (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) = \mathbf{0}.$$

Im Sinne des Jacobi für eine entsprechende Stewart-Plattform, also eine, deren Bein Längen entsprechen den Längen der Federn, man erkennt, dass die Reihen der Jacobi sind linear abhängig und daher ist die Matrix singulär.

Das Vorwärtskinematikproblem einer Stewart-Plattform besteht darin, die Position zu bestimmen und Ausrichtung der Plattform angesichts der Beinlängen. Das ist aus gegebenem Anlass bekannt Für die Menge der Beinlängen gibt es endlich viele verschiedene Lösungen, im Allgemeinen 40. Unterscheiden Ent-Lösungen werden als unterschiedliche Posen bzw. Stellungen der Plattform bezeichnet. Ersetzen

Bei den Beinen mit Federn ist klar, dass die potentielle Funktion den gleichen Wert haben wird

Jede dieser Posen oder Körperhaltungen hängt nur von der Länge ab

Federn. Keine dieser Positionen wird jedoch ein Minimum der potentiellen Funktion sein

denn wie oben gezeigt wurde, ist die stabile Gleichgewichtslage eindeutig.

5 Die Steifigkeitsmatrix

Die in den letzten drei Abschnitten vorgestellten Probleme sind allgemein bekannt und wurden gelöst

mit vielen verschiedenen Methoden. Der Vorteil der hier untersuchten Methoden der Schraubentheorie ist

dass es relativ einfach ist, höhere Ableitungen zu untersuchen.

Beachten Sie zunächst, dass es aufgrund der Federn möglich ist, den Schraubenschlüssel zu finden. Im Allgemeinen a

Schraubenschlüssel ist ein 6-dimensionaler Vektor von Kräften und Drehmomenten,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix},$$

Dabei ist $\dot{\mathbf{y}}$ ein Moment um den Ursprung und $\mathbf{F}$ eine Kraft. Beachten Sie, dass dies bei Schraubenschlüsseln nicht der Fall ist

Elemente der Lie-Algebra, aber Elemente des Vektorraums, die dual zur Lie-Algebra sind. Normalerweise

Die auf ein Potential zurückzuführende Kraft ist durch seinen Gradienten gegeben. Das Gleiche gilt hier, in gewisser Hinsicht

der äußeren Ableitung d, $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{y}} d\mathbf{y}$. Kombinieren des Schraubenschlüssels mit einer beliebigen Schraube $\mathbf{S}$

gibt,

$$\mathbf{W}(\mathbf{S}) = \dot{\mathbf{y}} d\mathbf{y}(\mathbf{S}) = \dot{\mathbf{y}} \mathbf{S} \dot{\mathbf{y}},$$

siehe [13, S. 4.20] zum Beispiel. Diese Berechnungen wurden bereits in Abschnitt 2 durchgeführt

oben ist der Schraubenschlüssel gegeben durch:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_i \dot{\mathbf{y}}_{ia} \times (\mathbf{a}_i \dot{\mathbf{y}}_{Rbi} \dot{\mathbf{y}}_t) \\ \dot{\mathbf{y}}_i \dot{\mathbf{y}}_{ia} (\mathbf{a}_i \dot{\mathbf{y}}_{Rbi} \dot{\mathbf{y}}_t) \end{pmatrix},$$

Dies hätte natürlich auch aus der Elementarmechanik abgeleitet werden können.

Für die Federsysteme aus Abschnitt 2 ist die Steifigkeitsmatrix ein wichtiges Objekt. In diesem Abschnitt wird die Steifigkeitsmatrix durch die Bildung der zweiten Ableitungen berechnet der potentiellen Funktion.

Eine unendlich kleine Verschiebung des Körpers wird durch eine Schraube dargestellt. Der Schraubenschlüssel erzeugt durch eine Verschiebung $\mathbf{s}$ ist gegeben durch $\mathbf{W} = \mathbf{K}\mathbf{s}$, wobei $\mathbf{K}$ die Steifigkeitsmatrix ist.

Die Steifigkeitsmatrix ist die Hesse-Matrix der Potentialfunktion, also deren Matrix Partielle Ableitungen zweiter Ordnung, siehe [14, Kapitel 5]. Dies gilt nur im Gleichgewicht Position.

In der Robotik-Literatur gab es Versuche, diese Ideen auf Nicht-Roboter auszudehnen Gleichgewichtskonfigurationen, siehe zum Beispiel Griffis und Duffy [15] und Zefran und Kumar [16]. In dieser Arbeit wird jedoch die klassische Definition der Steifigkeitsmatrix verwendet

verwendet werden.

Schreiben Sie nun das Ergebnis oben für den Schraubenschlüssel als

$$\mathbf{W} = \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{I} \mathbf{3} \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T \ddot{\mathbf{y}} \mathbf{M} \mathbf{b}_i^T \text{ich.}$$

Die Differenzierung entlang einer beliebigen Schraube ergibt:

$$\ddot{\mathbf{y}} \mathbf{S} \mathbf{W} = \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{I} \mathbf{3} \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{B}_i \mathbf{R}^T + \mathbf{T} \mathbf{I} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T \mathbf{v},$$

unter Verwendung des Ergebnisses aus Abschnitt 2. Daher ist die Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T (\mathbf{A}_i \mathbf{R} \mathbf{B}_i \mathbf{R}^T + \mathbf{A}_i \mathbf{T}) \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T \mathbf{A}_i & \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T (\mathbf{R} \mathbf{B}_i \mathbf{R}^T + \mathbf{T}) \ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T \mathbf{I} \mathbf{3} \end{bmatrix}.$$

Wählen Sie dieses Mal den Ursprung am Punkt $\ddot{\mathbf{y}} \ddot{\mathbf{y}}^T \mathbf{A}_i$ und verwenden Sie dann das Gleichgewicht

Bedingung 2, um die Steifigkeitsmatrix zu vereinfachen,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \tilde{y}_i \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{i=1}^3 \tilde{y}_i \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}.$$

Das ist ein besonders schönes Ergebnis, das auf den ersten Blick jedoch etwas überraschend ist. Der Begriff $\sum_{i=1}^3 \tilde{y}_i \mathbf{I}_3$ in der unteren rechten Ecke bedeutet, dass das System in jedem Fall die gleiche Steifigkeit hat unabhängig von der Steifigkeit der einzelnen Federn und deren Anordnung.

Dies ist auf die Annahme zurückzuführen, dass die Federn eine natürliche Länge von Null haben.

Als nächstes wird das Problem betrachtet, den Index der gefundenen kritischen Punkte zu finden. Für Der Kürze halber stellt sich nur die Frage, welcher der kritischen Punkte ein Minimum des Potentials darstellt Energie, also ein stabiles Gleichgewicht, berücksichtigt werden. Das heißt: welche der Lösungen für $\mathbf{R}$ eine Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ mit allen positiven Eigenwerten ergibt? Beachten Sie, dass drei davon Eigenwerte von $\mathbf{K}$ sind einfach $\tilde{y}_i$, und dies ist positiv, wenn alle Federkonstanten $\tilde{y}_i$ sind positiv. Es ist also nur notwendig, die Eigenwerte des oberen linken Blocks von $\mathbf{K}$ zu untersuchen. Nach ein wenig Manipulation kann dies in Form der Matrix $\mathbf{P}$ oder ihrer Polarität geschrieben werden Zersetzung,

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{y}_i \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i^T = \mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{T} + \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{T}) \mathbf{I}_3 = \mathbf{R} \mathbf{Q} + \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{Q}) \mathbf{I}_3.$$

Hier repräsentiert $\text{Tr}()$ die Spur der Matrix. Nun hat diese Matrix die gleichen Eigenvektoren als $\mathbf{R} \mathbf{Q}$ und damit als $\mathbf{Q}$, wobei man bedenkt, dass $\mathbf{R} \mathbf{I}$ entweder die Identität oder eine Drehung von $\tilde{y}$ war um einen Eigenvektor von $\mathbf{Q}$. Nehmen Sie also an, dass die Eigenwerte von $\mathbf{Q}$ μ_1 , μ_2 und μ_3 sind mit entsprechenden Eigenvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$. Angenommen, $\mathbf{R} \mathbf{I}$ ist eine Rotation um Eigenvektor $\mathbf{e}_i$, die Eigenwerte der Matrizen können durch Betrachtung der Aktion ermittelt werden

auf den Eigenvektoren e_1 , e_2 und e_3 . Die Eigenwerte für $R_0Q + \text{Tr}(R_0Q)I_3$ sind:

$$(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3), \quad (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3) \text{ und } (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3).$$

Es muss nur eine weitere Matrix berücksichtigt werden, da die anderen nur zyklische Permutationen sind

sind die Eigenwerte von $R_1Q + \text{Tr}(R_1Q)I_3$,

$$(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3), \quad (\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3) \text{ und } (\mu_1 - \mu_2 - 2\mu_3).$$

Jetzt sind nur noch zwei Fälle zu berücksichtigen: Wenn $\det(P) > 0$, dann ist Q positiv-definit

und somit auch alle seine Eigenwerte. In diesem Fall ist der kritische Punkt leicht zu erkennen

dargestellt durch R_0 wird das Minimum sein. Dies ist die Lösung $R = R_p$.

Im anderen Fall $\det(P) < 0$ ergibt die klassische Polarzerlegung ein positives Ergebnis

bestimmte symmetrische Matrix und eine Spiegelung. Multipliziert man diese mit $\tilde{y}_1$, erhält man eine Rotation

und eine negativ-definite symmetrische Matrix. Das heißt, Q hat alle negativen Eigenwerte. Als

Nehmen Sie an, dass diese Eigenwerte die Ordnung $0 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$ haben, d. h. μ_1 ist das Eigen

Wert der kleinsten Größe, dann wird die Matrix $R_1Q + \text{Tr}(R_1Q)I_3$ alle positiv sein

Eigenwerte und daher entspricht R_1 dem Minimum des Potentials. Also im Allgemeinen,

Wenn $\det(P) < 0$ ist, ist die minimale Lösung durch $R = R_p R_i$ gegeben, wobei R_i eine Drehung von $\tilde{y}$ ist

über den Eigenvektor von Q mit Eigenwert kleinster Größe.

6. Schlussfolgerungen

Das Konzept, das die drei in dieser Arbeit untersuchten Probleme vereint, ist die Idee der Funktionen

definiert auf der Gruppe der Starrkörpertransformationen. Es war möglich, das zu finden

stationäre Punkte der Funktionen und klassifizieren Sie diese kritischen Punkte. Dabei handelt es sich um eine

einfache Technik der Differenzierung entlang einer Schraube.

Die Ergebnisse stimmen mit denen von Kanatani [11, Kap. 5] überein, seine Methoden vielleicht etwas eleganter als oben. Die hier verwendeten Methoden sind allgemeiner. Es wurden kritische Punkte der Potentialfunktion gefunden, nicht nur das Minimum und mit etwas mehr Aufwand hätte man den Index jedes Einzelnen finden können.

Diese Ideen sind von zentraler Bedeutung für das Thema Morsetheorie, ein damit zusammenhängendes Forschungsgebiet, das die kritischen Punkte der auf einer Mannigfaltigkeit definierten Funktionen zur Topologie der Mannigfaltigkeit selbst. In diesem Fall die Topologie der Mannigfaltigkeit, der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit der Gruppe $SO(3)$ ist bekannt, und dies kann verwendet werden, um etwas über den kritischen Punkt von ϕ zu sagen, die potentielle Funktion.

Das Problem der Federn ist insofern etwas künstlich, als Federn mit null Natallängen verwendet werden. Dies vereinfacht die Berechnungen. Eine Wiederholung ist möglich. Die meisten der oben genannten Analysen verwenden Federn mit endlicher natürlicher Länge, siehe [17]. Die Zahl der kritischen Punkte wird nun zu einem sehr schwierigen Problem, wird aber immer noch durch eingeschränkt die Topologie der Gruppe.

Das Problem der Schätzung einer starren Bewegung aus Punktdaten ist einigermaßen realistisch. Der Nutzen der Schätzung hängt von der Fehlerverteilung für die gemessenen Werte ab. Hierzu gibt es einige Ergebnisse in der Literatur, siehe [18]. Scheint es zu geben viel Spielraum für weitere Forschung in dieser Richtung.

An dieser Stelle bleibt nur Platz, um einen kurzen Blick auf die Auswirkungen zu werfen. Stewart-Plattform. Sicherlich mit der Technik des Differenzierens entlang einer Schraube. Beschleunigungseigenschaften der Stewart-Plattform konnten berechnet werden. Allerdings das Übliche. Hier treten Schwierigkeiten bei der geometrischen Definition einer zweiten Ableitung auf. Insbesondere. Unter bestimmten Umständen ist klar, was zu tun ist, zum Beispiel ist es nicht allzu schwer zu finden

Zur Dynamik einer Stewart-Plattform siehe [19]. Auch dies scheint ein fruchtbares Gebiet zu sein zukünftige Entwicklungen.

Verweise

- [1] RS-Kugel. **Die Theorie der Schrauben**. Cambridge University Press, Cambridge, 1900.
- [2] T. Hawkins. Die Geburt von Lies Gruppentheorie. **Mathematischer Intelligenzer**, 16(2), S. 6–17 1994.
- [3] RA Horn und CR Johnson. **Matrixanalyse**, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [4] J. Milnor. **Morse-Theorie**. Princeton University Press, New Jersey, 1969.
- [5] M. Greenberg. **Vorlesungen zur algebraischen Topologie**. WA Benjamin Inc., New York, 1967.
- [6] JK MacKenzie. Die Schätzung einer Orientierungsbeziehung. **Acta. Kristall**, 10, S. 62–62 1957.
- [7] G. Wahba. Abschnitt über Probleme und Lösungen: Eine Schätzung der kleinsten Quadrate für Satelliten Attitude. **SIAM rev**, 8, S. 384–385, 1966.
- [8] PAP Moran. Quaternionen, Haar-Maß und Schätzung des paläomagnetischen Rotation. In J. Gani (Hrsg.), **Perspectives in Prob. and Stats.**, S. 295–301, Applied Probability Trust, Sheffield 1975.

[9] A. Nadas. Kleinste Quadrate und Maximum-Likelihood-Schätzung starrer Bewegungen.

IBM Forschungsbericht, RC6945, IBM, Yorktown Heights, NY, 1978.

[10] BKP Horn. Geschlossene Lösung der absoluten Orientierung unter Verwendung von Einheitsquaternionen.

Zeitschrift der Optical Society of America, A-4:629–642, 1987.

[11] K. Kanatani. **Geometrische Berechnung für die maschinelle Bildverarbeitung**. Clarendon Press, Oxford, 1993.

[12] WH Press, SA Teukolsky, WT Vetterling und BP Flannery. **Numerisch**

Rezepte in C: die Kunst des wissenschaftlichen Rechnens 2. Auflage. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[13] BF Schutz. **Geometrische Methoden der Mathematischen Physik**. Universität Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[14] VI Arnold. **Geometrische Methoden der klassischen Mechanik**, Band 60 von **Graduate Texts in der Mathematik**. Springer-Verlag, New York, 1978.

[15] M. Griffiths und J. Duffy. Globale Steifigkeitsmodellierung einer Klasse einfacher Konformität Kupplung. **Mechanism and Machine Theory**, 28(2):207–224, 1993.

[16] M. Zefran und V. Kumar. Affiner Zusammenhang für die kartesische Steifigkeitsmatrix. In **Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, NM**, Seiten 1376–1381.

[17] JM Selig. Die räumliche Steifigkeitsmatrix von Simple Stretched Springs In **Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation 2000, San Francisco CA**, S. 3314–3319, 2000.

- [18] GS Watson. Statistik der Rotationen, In **Vorlesungsunterlagen in Mathematik**, Springer Verlag, **1379**, S. 398-413, 1989.
- [19] JM Selig und PR McAree. Eingeschränkte Roboterdynamik II: Parallele Maschinen
Journal of Robotic Systems, **16**, S. 487–498, 1999.