

5. Introducción a la Geometría y Cinemática de Robots

El objetivo de este capítulo es presentar la terminología y la notación básicas utilizadas en la geometría y la cinemática de los robots, y discutir los métodos utilizados para el análisis y control de los manipuladores de robots. El alcance de esta discusión se limitará, en su mayor parte, a los robots con geometría plana. El análisis de manipuladores con geometría tridimensional se puede encontrar en cualquier texto de robótica¹.

5.1 Algunas definiciones y ejemplos

Usaremos el término sistema mecánico para describir un sistema o una colección de cuerpos rígidos o flexibles que pueden estar conectados entre sí por juntas. Un mecanismo es un sistema mecánico que tiene el propósito principal de transferir movimiento y/o fuerzas de una o más fuentes a una o más salidas. Un enlace es un sistema mecánico que consta de cuerpos rígidos llamados enlaces que están conectados por juntas de pasador o juntas deslizantes. En esta sección, consideraremos sistemas mecánicos que consisten en cuerpos rígidos, pero también consideraremos otros tipos de uniones.

Grados de libertad de un sistema.

El número de variables independientes (o coordenadas) requeridas para especificar completamente la configuración del sistema mecánico.

Si bien la definición anterior del número de grados de libertad está motivada por la necesidad de describir o analizar un sistema mecánico, también es muy importante para controlar o impulsar un sistema mecánico. También es el número de entradas independientes requeridas para accionar todos los cuerpos rígidos en el sistema mecánico.

Ejemplos:

- (a) Un punto en un plano tiene dos grados de libertad. Un punto en el espacio tiene tres grados de libertad.
- (b) Un péndulo restringido a oscilar en un plano tiene un grado de libertad.

¹En particular, dos libros ofrecen un excelente tratamiento manteniendo las matemáticas en un nivel muy simple: (a) Craig, JJ Introducción a la robótica, Addison-Wesley, 1989; y (b) Paul, R., Manipuladores de robots, matemáticas, programación y control, The MIT Press, Cambridge, 1981.

- (c) Un cuerpo rígido plano (o una lámina) tiene tres grados de libertad. Hay dos si consideras traslaciones y uno adicional cuando incluye rotaciones.
- (d) El sistema mecánico que consta de dos cuerpos rígidos planos conectados por una articulación de pasador tiene cuatro grados de libertad. Especificar la posición y orientación del primer cuerpo rígido requiere tres variables. Dado que el segundo gira en relación con el primero, necesitamos una variable adicional para describir su movimiento. Así, el número total de variables independientes o el número de grados de libertad es cuatro. (e) Un cuerpo rígido en tres dimensiones tiene seis grados de libertad. Hay tres grados de libertad de traslación. Además, hay tres formas diferentes de rotar un cuerpo rígido.
- Por ejemplo, considere las rotaciones sobre los ejes x , y y z . Resulta que cualquier rotación de cuerpo rígido puede lograrse mediante rotaciones sucesivas sobre los ejes x , y y z . Si se considera que los tres ángulos de rotación son las variables que describen la rotación del cuerpo rígido, es evidente que hay tres grados de libertad de rotación.
- (f) Dos cuerpos rígidos en tres dimensiones conectados por una articulación de pasador tienen siete grados de libertad. Especificar la posición y orientación del primer cuerpo rígido requiere seis variables. Dado que el segundo gira en relación con el primero, necesitamos una variable adicional para describir su movimiento. Así, el número total de variables independientes o el número de grados de libertad es siete.

Cadena cinemática

Un sistema de cuerpos rígidos conectados entre sí por juntas. Una cadena se dice cerrada si forma un lazo cerrado. Una cadena que no está cerrada se llama cadena abierta.

cadena serial

Si cada eslabón de una cadena abierta, excepto el primero y el último, está conectado a otros dos enlaces se llama cadena en serie.

Se puede ver un ejemplo de una cadena en serie en el esquema del robot² de la serie PUMA 560, un robot industrial fabricado por Unimation Inc., que se muestra en la Figura 1. El baúl está atornillado a una mesa fija o al piso. El hombro gira alrededor de un eje vertical con respecto al tronco. La parte superior del brazo gira sobre un eje horizontal con respecto al hombro. Esta rotación es la rotación de la articulación del hombro. El antebrazo gira alrededor de un eje horizontal (el codo) con respecto a la parte superior del brazo. Finalmente, la muñeca consiste en un conjunto de tres cuerpos rígidos con tres

²La Máquina universal programable para ensamblaje (PUMA) fue desarrollada en 1978 por Unimation Inc. utilizando un conjunto de especificaciones proporcionadas por General Motors.

rotaciones adicionales. Así, el brazo del robot consta de siete cuerpos rígidos (el primero es fijo) y seis articulaciones que conectan los cuerpos rígidos.

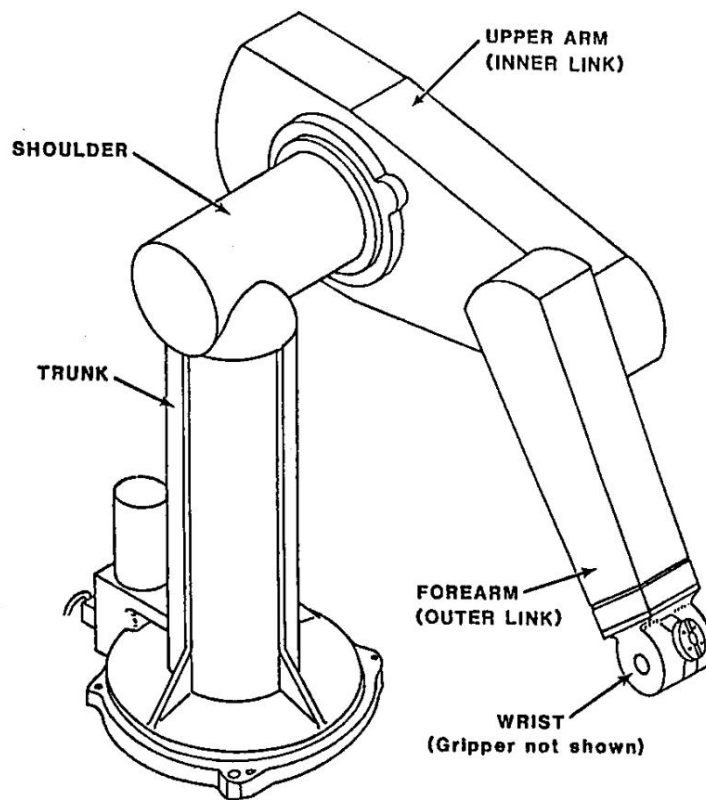


Figura 1 El robot manipulador PUMA 560 de seis grados de libertad.

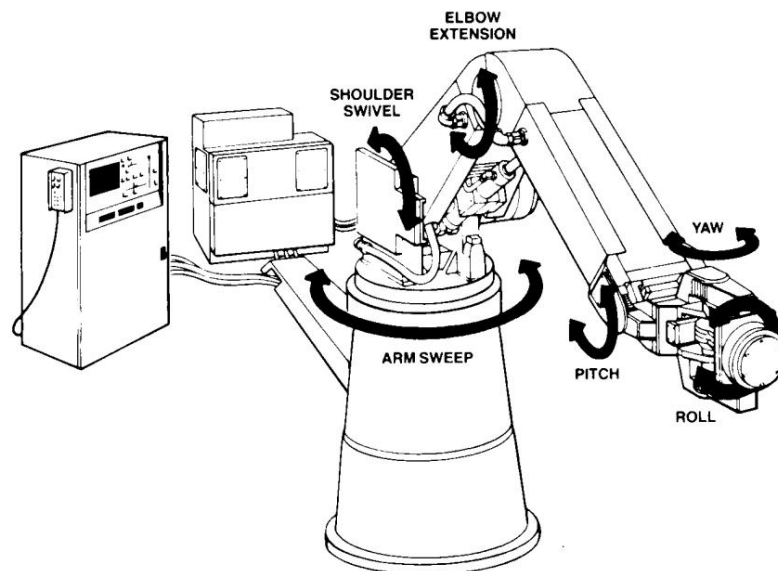


Figura 2 El robot manipulador T3 de seis grados de libertad.

Otro esquema de un brazo robótico industrial, el T3 fabricado por Cincinnati Milacron, se muestra en la Figura 2. Una vez más, es posible modelarlo como una colección de siete cuerpos rígidos (el primero fijo) conectados por seis articulaciones³.

tipos de juntas

Existen principalmente cuatro tipos de articulaciones que se encuentran en los manipuladores de robots: i Articulación giratoria, rotatoria o de pasador (R) i Articulación prismática o deslizante (P) i Articulación esférica o esférica (S) i Articulación helicoidal o de tornillo (H)

La articulación giratoria permite una rotación entre los dos eslabones de conexión. El mejor ejemplo de esto es la bisagra que se usa para unir una puerta al marco. La junta prismática permite una traslación pura entre los dos eslabones de conexión. La conexión entre un pistón y un cilindro en un motor de combustión interna o un compresor se realiza a través de una junta prismática. La unión esférica entre dos eslabones permite que el primer eslabón gire de todas las formas posibles con respecto al segundo. El mejor ejemplo de esto se ve en el cuerpo humano. Las articulaciones del hombro y la cadera, llamadas articulaciones esféricas, son articulaciones esféricas. La junta helicoidal permite un movimiento helicoidal entre los dos cuerpos de conexión. Un buen ejemplo de esto es el movimiento relativo entre un perno y una tuerca.

Cadena plana

Todos los eslabones de una cadena plana están obligados a moverse en o paralelos al mismo plano.

Una cadena plana solo puede permitir uniones prismáticas y giratorias. De hecho, los ejes de las articulaciones giratorias deben ser perpendiculares al plano de la cadena mientras que los ejes de las articulaciones prismáticas deben ser paralelos o estar en el plano de la cadena.

En la Figura 3 se muestra un ejemplo de una cadena plana. Casi todos los motores de combustión interna utilizan un mecanismo de manivela deslizante. La alta presión de los gases en expansión en la cámara de combustión se utiliza para trasladar el pistón y el mecanismo convierte este movimiento de traslación en el movimiento giratorio de la manivela. Este sistema mecánico consta de tres articulaciones giratorias y una articulación prismática.

El ejemplo de la Figura 3 es una cadena cinemática plana y cerrada. En las Figuras 4 y 5 se muestran ejemplos de cadenas seriales planas.

³Este es un modelo conveniente. Se requiere un modelo cinemático más preciso para modelar el acoplamiento entre el actuador que impulsa la articulación del codo y la articulación del codo.

Conectividad de una articulación

El número de grados de libertad de un cuerpo rígido conectado a un cuerpo rígido fijo a través de la unión.

La articulación giratoria, prismática y helicoidal tienen una conectividad 1. La articulación esférica tiene una conectividad de 3. A veces se usa el término "grado de libertad de una articulación" en lugar de la conectividad de una articulación.

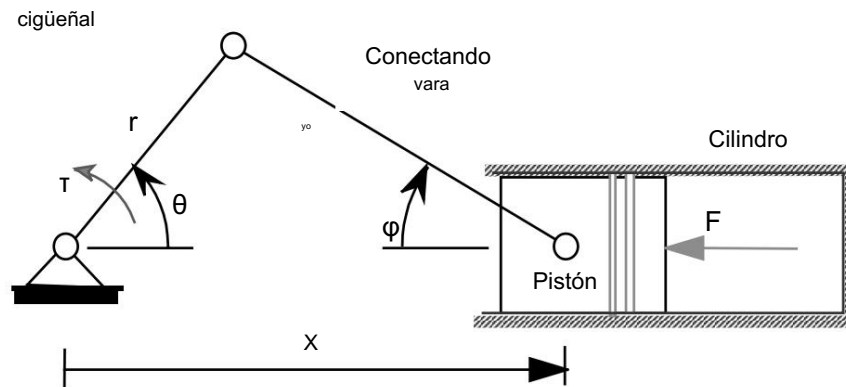


Figura 3 Esquema de un mecanismo de manivela deslizable

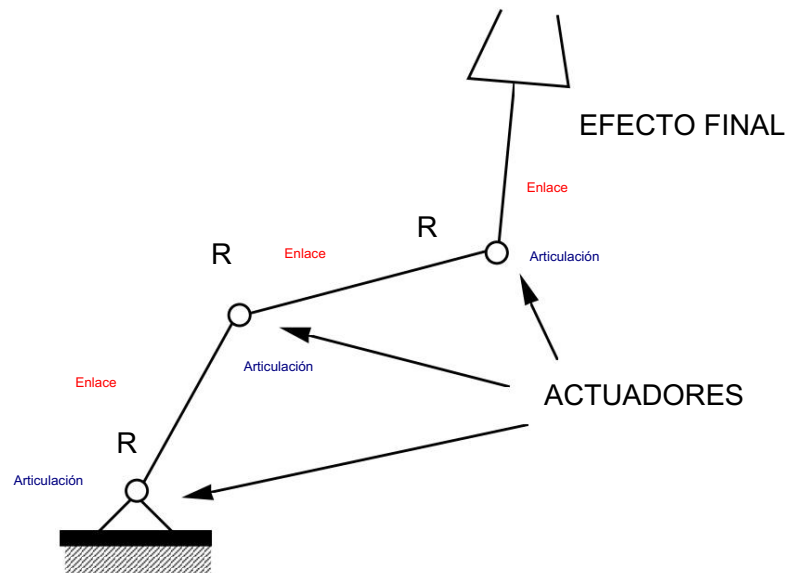


Figura 4 Esquema de un manipulador plano con tres articulaciones giratorias

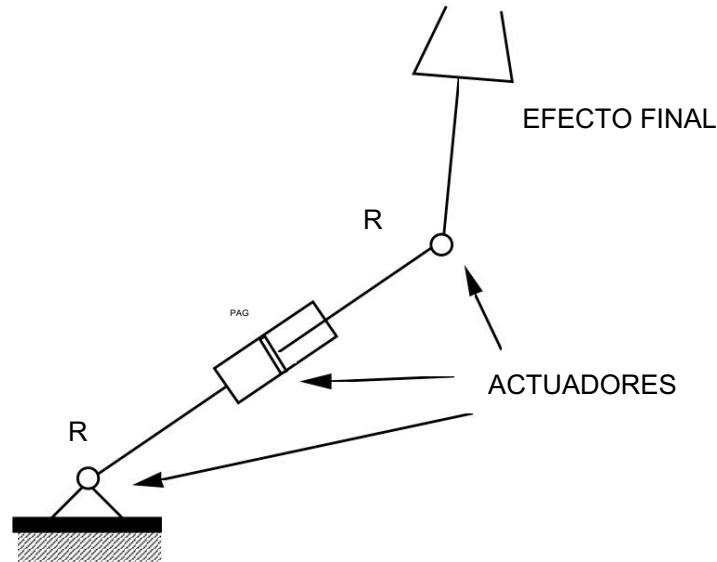


Figura 5 Esquema de un manipulador plano con dos articulaciones giratorias y una prismática

Movilidad

La movilidad de una cadena es el número de grados de libertad de la cadena.

La mayoría de los libros usarán el término "número de grados de libertad" para la movilidad. En una cadena en serie, la movilidad de la cadena se calcula fácilmente. Si hay n nudos y el nudo i tiene una conectividad f_i ,

$$Mf = \sum_{i=1}^n f_i$$

La mayoría de los robots industriales tienen articulaciones angulares o prismáticas ($f_i = 1$) y, por lo tanto, la movilidad o el número de grados de libertad del brazo del robot también es igual al número de articulaciones. A veces, un robot de n grados de libertad o un robot con movilidad n también se denomina robot de n ejes.

Dado que un cuerpo rígido en el espacio tiene seis grados de libertad, los robots más generales están diseñados para tener seis articulaciones. De esta manera, el efector final o el enlace que está más alejado de la base puede adoptar cualquier posición u orientación (dentro de algún rango). Sin embargo, si el efector final necesita moverse en un plano, el robot solo necesita tener tres grados de libertad. En las Figuras 4 y 5 se muestran dos ejemplos⁴ de robots planos de tres grados de libertad (técnicamente, tres robots de movilidad).

⁴Tenga en cuenta que no contamos la apertura y el cierre de la pinza como un grado de libertad. La pinza suele estar completamente abierta o completamente cerrada y no se controla continuamente como las otras articulaciones. Además, la libertad de la pinza no participa en el posicionamiento y orientación de una pieza sujeta por la pinza.

Cuando hay bucles cerrados en la cadena cinemática (es decir, la cadena ya no es en serie, ni siquiera abierta), es más difícil determinar el número de grados de libertad o la movilidad del robot. Pero hay una fórmula simple que uno puede derivar para este propósito.

Sea n el número de enlaces móviles y g el número de articulaciones, siendo f_i la conectividad de la articulación i . Cada cuerpo rígido tiene seis grados si consideramos los movimientos espaciales. Si no hubiera articulaciones, dado que hay n cuerpos rígidos en movimiento, el sistema tendría $6n$ grados de libertad. El efecto de cada articulación es restringir el movimiento relativo de los dos cuerpos que se conectan. Si la articulación tiene una conectividad f_i , impone restricciones $(6-f_i)$ sobre el movimiento relativo. En otras palabras, dado que hay f_i formas diferentes para que un cuerpo se mueva en relación con otro, existen $(6-f_i)$ diferentes formas en las que el cuerpo está restringido a moverse en relación con otro. Por tanto, el número de grados de libertad o la movilidad de una cadena (incluido el caso especial de una cadena en serie) viene dado por:

$$M = 6n - \sum_{i=1}^g (6 - f_i)$$

o,

$$M = 6n - \sum_{i=1}^g (6 - f_i) \quad (2)$$

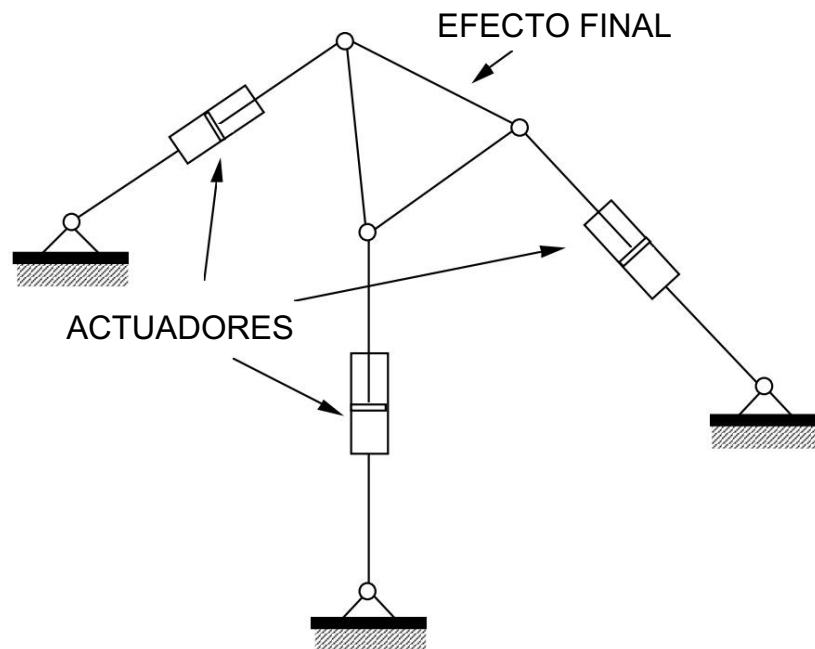


Figura 6 Un manipulador plano paralelo.

En el caso especial del movimiento plano, dado que cada cuerpo rígido sin restricciones tiene 3 grados de libertad, esta ecuación se modifica a:

$$Mngf() \sum_{i=1}^{g+m} i \quad (3)$$

Ejemplo 1

En las Figuras 4 y Figura 5, dado que $n=g=3$, la Ecuación (3) se reduce al caso especial de la Ecuación (1). Y como $f_1 = f_2 = f_3 = 1$, y $M=g$.

Ejemplo 2

En el mecanismo de manivela deslizante que se muestra en la Figura 3, $n=3$ y $g=4$. Dado que es un mecanismo plano, usamos la Ecuación (2). Las cuatro articulaciones tienen conectividad uno: $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$ y $M=1$.

Ejemplo 3

Considere el manipulador paralelo que se muestra en la Figura 6. Aquí, $n = 7$, $g=9$ y $f_i=1$. De acuerdo a Ecuación (3), $M=3$. En consecuencia, hay tres actuadores en el manipulador. Compare esta disposición con la disposición que se muestra en las Figuras 4 y 5. Los tres actuadores están montados en paralelo en la Figura 6. En las Figuras 4 y 5, están montados "secuencialmente" en un modo en serie.

La plataforma Stewart

El dispositivo Stewart-Gough o Stewart Platform⁵ es una cadena cinemática de seis grados de libertad (movilidad seis) con bucles cerrados. La cadena cinemática consta de una base y una plataforma móvil, cada una de las cuales es un hexágono espacial. Ver Figura 7. Cada vértice del hexágono base está conectado a un vértice del hexágono de la plataforma móvil por una pata. De manera similar, cada vértice del hexágono en movimiento está conectado a un vértice del hexágono base por un cateto. Hay seis patas de este tipo. Cada pata tiene una cadena en serie que consta de dos articulaciones giratorias con ejes que se cruzan, una articulación prismática y una articulación esférica. Normalmente se accionan las articulaciones prismáticas.

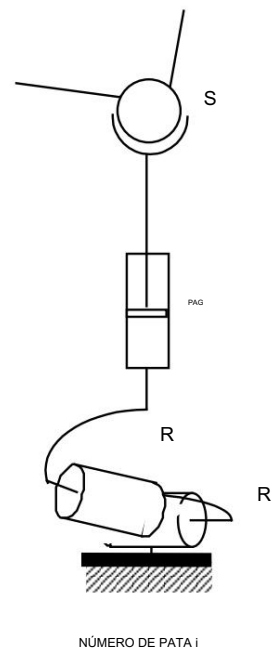
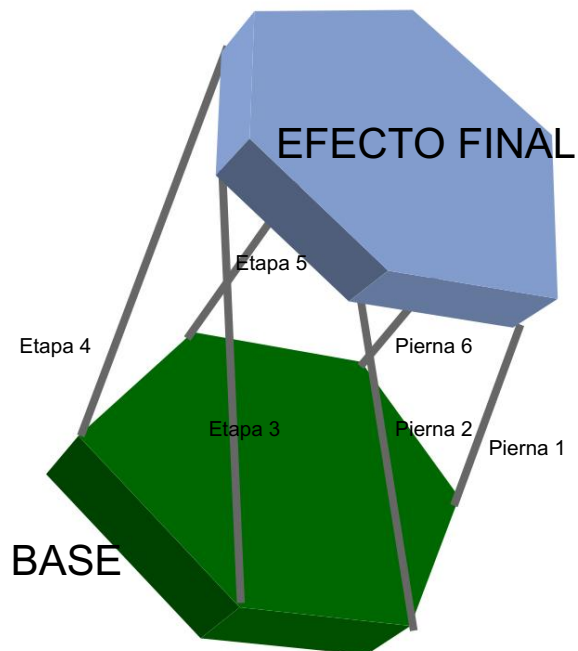
Se puede verificar fácilmente que la movilidad de una plataforma Stewart es seis. Cada pata tiene tres eslabones y cuatro articulaciones. Si incluimos la plataforma móvil,

$$n = 6 \times 3 + 1 = 19.$$

⁵D. Stewart, "Una plataforma con seis grados de libertad", The Institution of Mechanical Engineers, Procedimientos 1965-66, vol. 180 Parte 1, No. 15, páginas 371-386.



(a) Una máquina herramienta basada en la Plataforma Stewart (Ingersoll Rand)⁶



(b) Un esquema que muestra las seis patas (izquierda) y la cadena RRPS (derecha).

Figura 7 La Plataforma Stewart

6M. Valenti, "Las máquinas herramienta se vuelven más inteligentes", Ingeniería mecánica, Vol. 117, No. 11, noviembre de 1995.

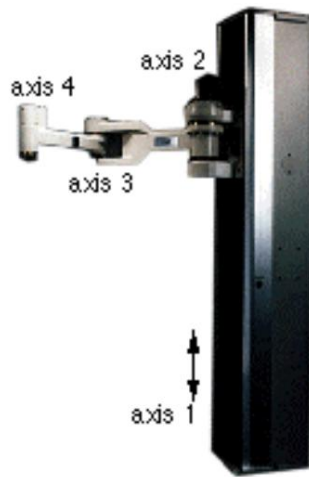
La conectividad de la revolución y la articulación prismática es una. La conectividad de la junta esférica es tres. Como hay 6×2 articulaciones giratorias, 6 articulaciones prismáticas y 6 articulaciones esféricas,

$$\sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} F_j = 36$$

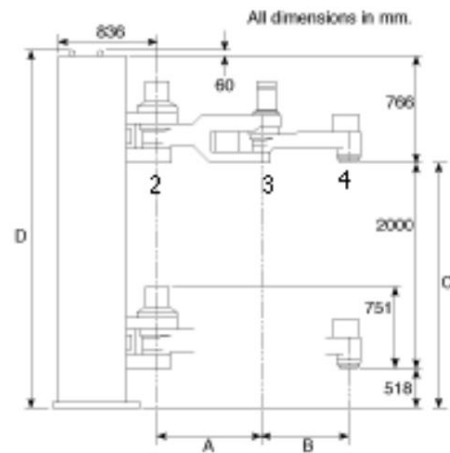
De acuerdo con la Ecuación (3),

$$\text{METRO} = 6 \cdot 19 - 24 + 36 = 6$$

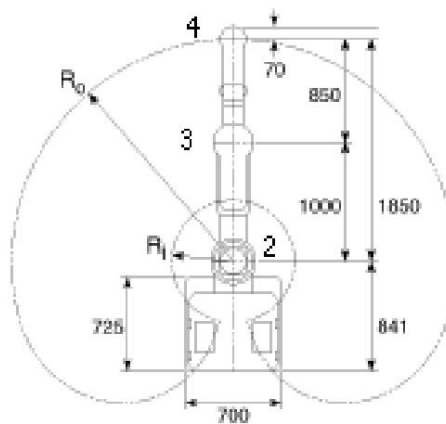
La plataforma Stewart tiene actuadores para sus seis articulaciones prismáticas y, por lo tanto, es posible controlar los seis grados de libertad.



(a) El paletizador Adept 1850



(b) vista lateral (los ejes 2-4 están numerados)



(c) vista superior (los ejes 2-4 están numerados)

Figura 8 Paletizador Adept 1850 Hay

cuatro grados de libertad en este manipulador SCARA. La articulación 1 es una articulación deslizante que lleva el brazo manipulador hacia arriba o hacia abajo. Las juntas 2-4 son juntas rotativas con ejes verticales.

5.2 Geometría de los manipuladores de robots planos

El modelado matemático de los vínculos espaciales es bastante complicado. Es útil comenzar con robots planos porque la cinemática de los mecanismos planos es generalmente mucho más simple de analizar.

Además, los ejemplos planos ilustran los problemas básicos que se encuentran en el diseño, análisis y control de robots sin tener que involucrarse demasiado en las matemáticas. Sin embargo, mientras que los ejemplos que discutiremos involucrarán cadenas cinemáticas que son planas, todas las definiciones e ideas presentadas en esta sección son generales y se extienden a los mecanismos espaciales más generales.

Comenzaremos con el ejemplo del manipulador plano con tres articulaciones giratorias. El manipulador se llama manipulador plano 3R. Si bien es posible que no haya robots industriales de tres grados de libertad (dof) con esta geometría, la geometría plana 3R se puede encontrar en muchos manipuladores de robots. Por ejemplo, el giro del hombro, la extensión del codo y la inclinación del robot Cincinnati Milacron T3 (Figura 2) se pueden describir como una cadena plana 3R. De manera similar, en un manipulador SCARA de cuatro grados de libertad (Figura 8), si ignoramos la articulación prismática para bajar o subir la pinza, las otras tres articulaciones forman una cadena plana 3R. Por lo tanto, es instructivo estudiar el manipulador plano 3R como ejemplo.

Para especificar la geometría del robot planar 3R, necesitamos tres parámetros, l_1 , l_2 y l_3 . Estas son las tres longitudes de enlace. En la Figura 9, los tres ángulos de articulación están etiquetados como θ_1 , θ_2 y θ_3 . Estos son obviamente variables. Las definiciones precisas para las longitudes de los eslabones y los ángulos de las juntas son como sigue. Para cada par de ejes adyacentes podemos definir una normal común o la perpendicular entre los ejes.

La i -ésima normal común es la perpendicular entre los ejes del nudo i y el nudo $i+1$. La i -ésima longitud del enlace es la longitud de la i -ésima normal común, o la distancia entre los ejes

para la articulación i y la articulación $i+1$.

El i -ésimo ángulo de articulación es el ángulo entre la $(i-1)$ -ésima normal común y la i -ésima normal común medida en sentido contrario a las manecillas del reloj y va desde la $(i-1)$ -ésima normal común a la i -ésima normales comunes.

Tenga en cuenta que existe cierta ambigüedad en lo que se refiere a la longitud del enlace más distal y el ángulo de articulación del enlace más proximal. Definimos la longitud del enlace del enlace más distal desde el eje de la articulación más distal hasta un punto de referencia o un punto de herramienta en el efector final⁷. Generalmente, este es el centro de la pinza o el punto final de la herramienta. Dado que no existe una normal común cero, medimos el ángulo de la primera articulación desde una línea de referencia conveniente. Aquí, hemos elegido que este sea el eje x de un sistema de coordenadas fijas convenientemente definido.

⁷El punto de referencia suele denominarse punto central de la herramienta (TCP).

Otro conjunto de variables que es útil definir es el conjunto de coordenadas para el efector final.

Estas coordenadas definen la posición y orientación del efector final. Con una elección conveniente de un punto de referencia en el efector final, podemos describir la posición del efector final usando las coordenadas del punto de referencia (x, y) y la orientación usando el ángulo φ . Las tres coordenadas del efector final (x, y, φ) especifican completamente la posición y orientación del final efector⁸.

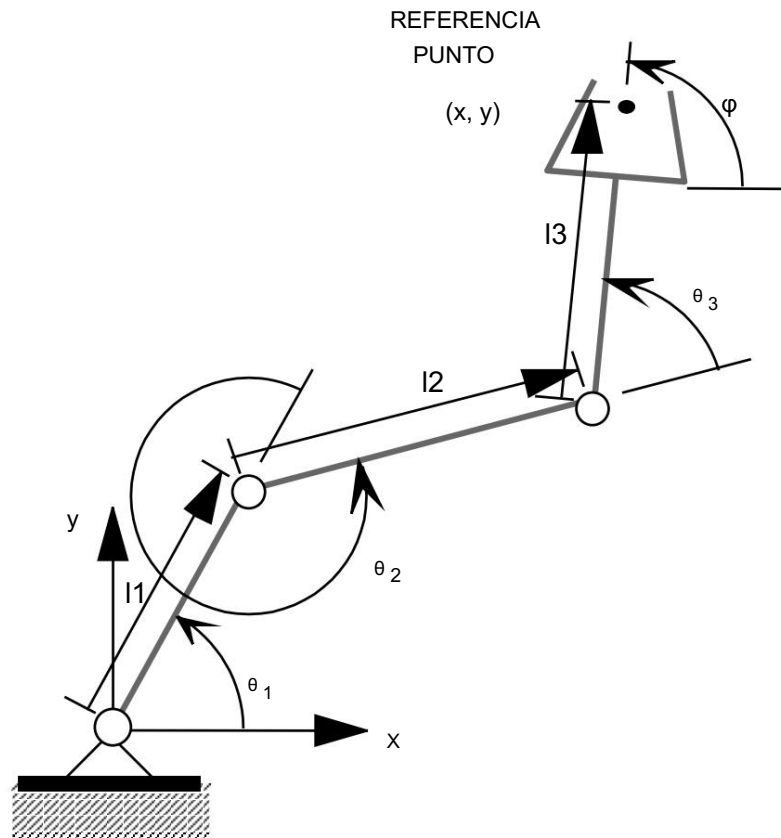


Figura 9 Variables conjuntas y longitudes de enlace para un manipulador plano 3R

Como otro ejemplo, considere el robot cilíndrico de tres grados de libertad en la Figura 10. Si ignoramos la libertad de elevación, la rotación de la base y la extensión del brazo nos dan el robot de dos grados de libertad que se muestra en la Figura 11 que podemos llamar el manipulador RP. Consiste en una articulación giratoria y una articulación prismática como se muestra en la figura. θ_1 , la rotación de la base, y d_2 , la extensión del brazo, son las dos variables articulares. Tenga en cuenta que no hay parámetros constantes como las tres longitudes de enlace en el manipulador 3R. La variable conjunta θ_1 se define como antes. Como no existe una normal común cero,

⁸La descripción de la posición y orientación de un cuerpo rígido tridimensional es significativamente más complicada. Para un manipulador espacial, un conjunto típico de coordenadas del efector final incluiría tres variables (x, y, z) para la posición y tres ángulos de Euler (θ, φ, ψ) para la orientación.

medimos el ángulo de la articulación desde el eje x que hemos elegido que sea horizontal. d_2 se define como la distancia desde el eje de articulación 1 hasta el punto de referencia en el efector final. Como en el ejemplo anterior, las coordenadas del efector final son variables que especifican completamente la posición y orientación del efector final. En la figura, son (x, y, ϕ) .

Finalmente, consideramos un robot cartesiano que consta de dos articulaciones prismáticas en ángulo recto. La cadena PP se encuentra en tablas xy, plotters y fresadoras. En la Figura 12 se muestra un esquema. El manipulador espacial más simple se basa en la cadena PPP, que tiene una tercera articulación prismática. Los tres ejes de articulación son mutuamente ortogonales. El robot Gantry de la Figura 13 tiene esta geometría. Si ignora el grado de libertad vertical arriba/abajo, es un manipulador PP.



Figura 10 El robot cilíndrico RT3300 (Seiko)

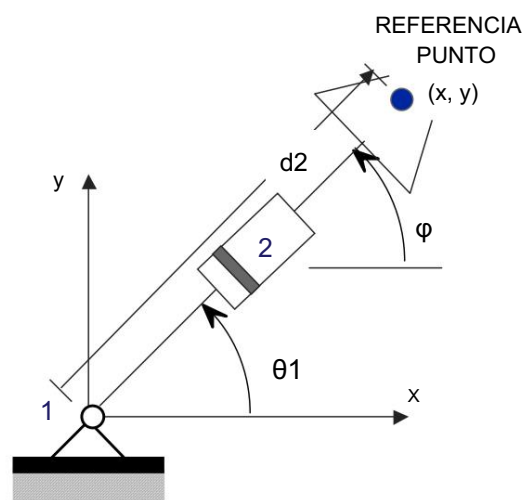


Figura 11 Las variables conjuntas y longitudes de enlace para un manipulador plano RP

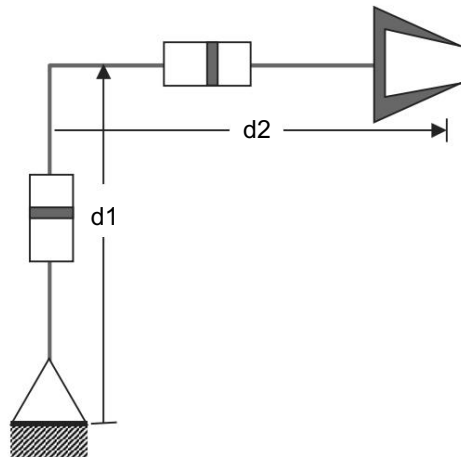


Figura 12 Las variables conjuntas para un manipulador plano PP

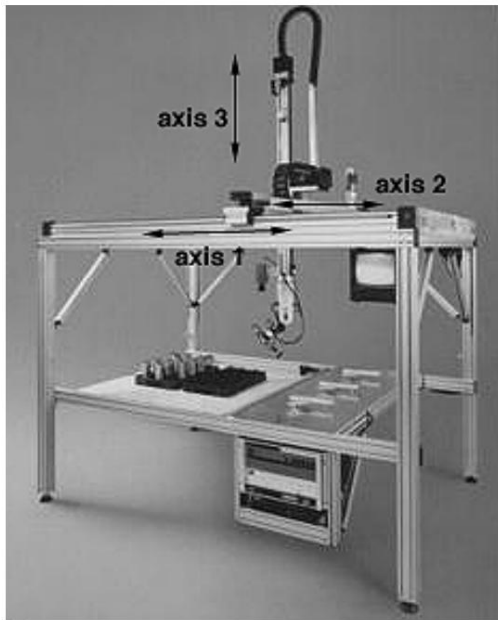


Figura 13 El manipulador de robot de pórtico G365 (CRS Robotics) a la izquierda y el Biomek Estación de trabajo de automatización de laboratorio 2000 (Beckman Coulter) a la derecha, ambas tienen herramientas montado al final de una cadena PPP .

El efector final de un manipulador que solo tiene articulaciones prismáticas está obligado a permanecer en la misma orientación. Por lo tanto, las coordenadas del efector final para el manipulador PP solo incluyen las coordenadas del punto de referencia en el efector final (x, y).

En resumen, en cada caso, definimos un conjunto de parámetros constantes llamados longitudes de enlace (l_i) y conjunto de variables conjuntas o coordenadas conjuntas que consisten en ángulos conjuntos (θ_i) o desplazamientos

(D_i). También definimos un conjunto de variables llamadas coordenadas del efector final. Las longitudes de enlace son parámetros constantes que definen la geometría del manipulador. Las variables conjuntas definen la configuración del manipulador especificando la posición de cada articulación. Las coordenadas del efector final definen la posición y orientación del efector final. Si las coordenadas conjuntas especifican la configuración del manipulador, también deben especificar la posición y orientación del efector final. Por lo tanto, uno debería esperar encontrar una dependencia explícita de las coordenadas del efector final en las coordenadas conjuntas. Aunque no sea obvio, también existe una dependencia

de las coordenadas conjuntas en las coordenadas del efector final. La siguiente subsección abordará esta dependencia y analizará la cinemática de los manipuladores de robots.

5.3 Análisis cinemático de cadenas seriales planas

La cinemática es el estudio del movimiento. En esta subsección, exploraremos la relación entre los movimientos articulares y los movimientos del efector final. Más precisamente, intentaremos desarrollar ecuaciones que hagan explícita la dependencia de las coordenadas del efector final con respecto a las coordenadas conjuntas y viceversa.

Comenzaremos con el ejemplo del manipulador plano 3R. A partir de la trigonometría básica, la posición y la orientación del efector final se pueden escribir en términos de las coordenadas conjuntas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y_1 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4)$$

Tenga en cuenta que todos los ángulos se han medido en el sentido contrario a las agujas del reloj y se supone que las longitudes de los enlaces son positivas desde el eje de una articulación hasta el eje de la articulación inmediatamente distal.

La ecuación (4) es un conjunto de tres ecuaciones no lineales⁹ que describen la relación entre las coordenadas del efector final y las coordenadas conjuntas. Observe que tenemos ecuaciones explícitas para las coordenadas del efector final en términos de coordenadas conjuntas. Sin embargo, para encontrar las coordenadas conjuntas para un conjunto dado de coordenadas del efector final (x , y , ϕ), es necesario resolver las ecuaciones no lineales para θ_1 , θ_2 y θ_3 .

La cinemática del manipulador RP planar es más fácil de formular. Las ecuaciones son:

⁹La tercera ecuación es lineal pero el sistema de ecuaciones no es lineal.

$$\begin{aligned}
 x &= d_2 \cos \theta_1 \\
 y &= d_2 \sin \theta_1 \\
 \theta &= \theta_1
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Nuevamente, las coordenadas del efector final se dan explícitamente en términos de las coordenadas conjuntas. Sin embargo, dado que las ecuaciones son más simples (que en (4)), esperaríamos que el álgebra involucrada en la resolución de las coordenadas conjuntas en términos de las coordenadas del efector final fuera más fácil. Observe que, en contraste con (4), ahora hay tres ecuaciones en solo dos coordenadas conjuntas, θ_1 y d_2 . Por lo tanto, en general, no podemos resolver las coordenadas conjuntas para un conjunto arbitrario de coordenadas del efector final. Dicho de otra manera, el robot no puede, moviendo sus dos articulaciones, alcanzar una posición y orientación arbitrarias del efector final.

En cambio, consideremos solo la posición del efector final descrito por (x, y) , el punto de referencia del efector final. Solo tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 x &= d_2 \cos \theta_1 \\
 y &= d_2 \sin \theta_1
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Dadas las coordenadas del efector final (x, y) , las variables conjuntas se pueden calcular para ser:

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \theta_1 &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Observe que restringimos d_2 a valores positivos. Puede lograrse físicamente un d_2 negativo permitiendo que el punto de referencia del efector final pase a través del origen del sistema de coordenadas xy hacia otro cuadrante. En este caso, obtenemos otra solución:

$$\begin{aligned}
 d_2 &= -\sqrt{x^2 + y^2} \\
 \theta_1 &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

En ambos casos (7-8), la función tangente inversa es multivaluada¹⁰. En particular,

$$\tan(\theta) = \tan(\theta + k\pi), \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots
 \tag{9}$$

Sin embargo, si limitamos θ_1 al rango $0 < \theta_1 < 2\pi$, hay un valor único de θ_1 que es consistente con el (x, y) dado y el d_2 calculado (para el cual hay dos opciones).

¹⁰En el Apéndice 1, definimos otra función de tangente inversa llamada atan2 que toma dos argumentos, el seno y el coseno de un ángulo, y devuelve un ángulo único en el rango $[0, 2\pi)$.

La existencia de múltiples soluciones es típica cuando resolvemos ecuaciones no lineales. Como veremos más adelante, esto plantea algunas preguntas interesantes cuando consideramos el control de manipuladores de robots.

El manipulador cartesiano planar es trivial de analizar. Las ecuaciones para el análisis cinemático son:

$$x = d_2, \quad y = d_1 \quad (10)$$

La simplicidad de las ecuaciones cinemáticas hace que la conversión de las coordenadas del efector final y de la articulación sea trivial. Esta es la razón por la que las cadenas de PP son tan populares en equipos de automatización como robots, puentes grúa y fresadoras.

cinemática directa

Como se vio anteriormente, hay dos tipos de coordenadas que son útiles para describir el configuración del sistema. Si enfocamos nuestra atención en la tarea y el efector final, preferiríamos usar coordenadas cartesianas o coordenadas del efector final. El conjunto de todas estas coordenadas se denomina generalmente espacio cartesiano o espacio efector final¹¹. El otro conjunto de coordenadas son las llamadas coordenadas conjuntas que son útiles para describir la configuración del linkage mecánico. El conjunto de todas estas coordenadas se denomina generalmente espacio de articulación.

En robótica, a menudo es necesario poder "mapear" las coordenadas de las articulaciones a las coordenadas del efector final. Este mapa o el procedimiento utilizado para obtener las coordenadas del efector final de la articulación coordenadas se llama cinemática directa.

Por ejemplo, para el manipulador 3-R, el procedimiento se reduce a simplemente sustituir los valores de los ángulos de articulación en las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + d_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y &= d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + d_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi &= \theta_1 \end{aligned}$$

y determinando las coordenadas cartesianas, x , y , y ϕ . Para los otros ejemplos de cadenas abiertas discutidos hasta ahora (RP, PP), el proceso es aún más simple (ya que las ecuaciones son más simples). De hecho, para todas las cadenas en serie (incluidas las cadenas espaciales), el procedimiento de cinemática directa es bastante sencillo. adelante.

Por otro lado, el mismo procedimiento se vuelve más complicado si el mecanismo contiene uno o más circuitos cerrados. Además, la cinemática directa puede producir más de una solución o

¹¹Como cada miembro de este conjunto es una n -tupla, podemos considerarlo como un vector y el espacio es realmente un espacio vectorial. Pero no necesitaremos esta abstracción aquí.

no hay solución en estos casos. Por ejemplo, en el manipulador plano paralelo de la Figura 3, las posiciones o coordenadas de las articulaciones son las longitudes de los tres enlaces telescópicos (q_1, q_2, q_3) y las coordenadas del efector final (x, y, ϕ) son la posición y orientación de el triángulo flotante. Se puede demostrar que dependiendo del valor de (q_1, q_2, q_3), el número de soluciones (reales) para (x, y, ϕ) puede ser de cero a seis. Para la Plataforma Stewart en la Figura 4, se ha demostrado que este número oscila entre cero y cuarenta.

5.4 Cinemática inversa

El análisis o procedimiento que se utiliza para calcular las coordenadas de articulación para un conjunto dado de coordenadas de efector final se denomina cinemática inversa. Básicamente, este procedimiento consiste en resolver un conjunto de ecuaciones. Sin embargo, las ecuaciones son, en general, no lineales y complejas y, por lo tanto, el análisis de cinemática inversa puede resultar bastante complicado. Además, como se mencionó anteriormente, incluso si es posible resolver las ecuaciones no lineales, la unicidad no está garantizada. Puede que no haya (y en general no habrá) un conjunto único¹² de coordenadas conjuntas para las coordenadas del efector final dado.

Vimos que para el manipulador RP, las ecuaciones de cinemática directa son:

$$\begin{aligned} x &= d_2 \cos \theta_1 \\ y &= d_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Si restringimos la articulación giratoria para que tenga un ángulo de articulación en el intervalo $[0, 2\pi)$, hay dos soluciones para la cinemática inversa:

$$r_{e2} = \sigma \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta_1 = \text{atan2} \left(\frac{y}{d_2}, \frac{x}{d_2} \right), \quad \sigma = \pm 1$$

Aquí hemos usado la función atan2 en el Apéndice 1 para especificar de manera única el ángulo de unión θ_1 . Sin embargo, dependiendo de la elección de σ , hay dos soluciones para d_2 y, por lo tanto, para θ_1 .

El análisis de cinemática inversa para un manipulador plano 3-R parece ser complicado pero podemos derivar soluciones analíticas. Recuerde que las ecuaciones de cinemática directa (4) son:

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4a)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4b)$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (4c)$$

¹²El único caso en el que el análisis es trivial es el del manipulador PP. En este caso, hay una única solución para el cinemática inversa.

Suponemos que tenemos las coordenadas cartesianas, x , y y φ y queremos encontrar expresiones analíticas para los ángulos conjuntos θ_1 , θ_2 y θ_3 en términos de las coordenadas cartesianas.

Sustituyendo (4c) en (4a) y (4b) podemos eliminar θ_3 para que tengamos dos ecuaciones en θ_1 y θ_2 :

$$(x - l_3 \cos \varphi = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (d)$$

$$y - l_3 \sin \varphi = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (e)$$

donde las incógnitas se han agrupado en el lado derecho; el lado izquierdo depende solo del efector final o coordenadas cartesianas y , por lo tanto, se conocen.

Renombra los lados izquierdos, $x' = x - l_3 \cos \varphi$, y términos $y' = y - l_3 \sin \varphi$, por conveniencia. nos reagrupamos en (d) y (e), eleva al cuadrado ambos lados en cada ecuación y súmalos:

$$\begin{aligned} (x')^2 &= (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 \\ &+ \\ (y')^2 &= (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)^2 \end{aligned}$$

Después de reorganizar los términos obtenemos una sola ecuación no lineal en θ_1 :

$$(x')^2 + (y')^2 - l_1^2 - l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (F)$$

Observe que comenzamos con tres ecuaciones no lineales con tres incógnitas en (ac). Reducimos el problema a resolver dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas (de). Y ahora lo hemos simplificado aún más para resolver una sola ecuación no lineal en una incógnita (f).

La ecuación (f) es del tipo

$$P \cos \alpha + Q \sin \alpha + R = 0 \quad (\text{gramo})$$

Las ecuaciones de este tipo se pueden resolver usando una sustitución simple como se muestra en el Apéndice 2.

Hay dos soluciones para θ_1 dadas por:

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - P^2 - R^2}}{P} \right) \quad (h)$$

dónde,

$$P = 2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad Q = l_1^2 + l_2^2 - x'^2 - y'^2, \quad R = l_1^2 + l_2^2 - x'^2 - y'^2$$

y $\sigma = \pm 1$.

Tenga en cuenta que hay dos soluciones para θ_1 , una correspondiente a $\sigma=+1$, la otra correspondiente a $\sigma=-1$. Sustituyendo cualquiera de estas soluciones en las Ecuaciones (d) y (e) nos da:

$$\begin{aligned} \text{porque } (\theta_1 = 2) \quad \frac{x' - l_1 \cos \theta_1}{l_2} \\ \text{pecado } (\theta_1 = 2) \quad \frac{y' - l_1 \sin \theta_1}{l_2} \end{aligned}$$

Esto nos permite resolver para θ_2 usando la función atan2 en el Apéndice 1:

$$\theta_2 = \text{atan2} \left(\frac{y' - l_1 \sin \theta_1}{l_2}, \frac{x' - l_1 \cos \theta_1}{l_2} \right) - \theta_1 \quad (i)$$

Por lo tanto, para cada solución de θ_1 , hay una solución (única) para θ_2 .

Finalmente, θ_3 se puede determinar fácilmente a partir de (c):

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (j)$$

Las ecuaciones (hj) son la solución cinemática inversa para el manipulador 3-R. Para una posición y orientación dadas del efector final, hay dos formas diferentes de alcanzarlo, cada una de las cuales corresponde a un valor diferente de σ . Estas diferentes configuraciones se muestran en la Figura 14.

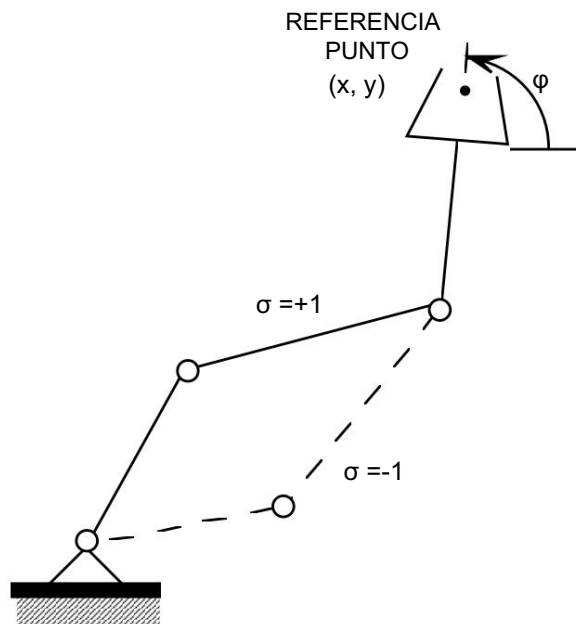


Figura 14 Las dos soluciones de cinemática inversa para el manipulador 3R : configuración “codo arriba” ($\sigma=+1$) y configuración “codo abajo” ($\sigma=-1$)

Ordenar a un robot que mueva el efector final a una determinada posición y orientación es ambiguo porque hay dos configuraciones entre las que debe elegir el robot. A partir de una

Desde el punto de vista práctico, si los límites de las juntas son tales que no se puede alcanzar una configuración, esta ambigüedad se resuelve automáticamente¹³.

5.5 Análisis de velocidad

Cuando se controla un robot para ir de una posición a otra, no basta con determinar las coordenadas del efector final y de la articulación de la posición objetivo. Puede ser necesario controlar continuamente la trayectoria o el camino tomado por el robot a medida que se mueve hacia la posición de destino. Esto es fundamental para evitar obstáculos en el espacio de trabajo. Más importante aún, hay tareas en las que la trayectoria del efector final es crítica. Por ejemplo, al soldar, es necesario mantener la herramienta en la orientación deseada ya una distancia fija de la pieza de trabajo mientras se mueve uniformemente¹⁴ a lo largo de la trayectoria deseada. Por lo tanto, se necesita controlar la velocidad del efector final o la herramienta durante el movimiento. Dado que la acción de control ocurre en las articulaciones, solo es posible controlar las velocidades de las articulaciones. Por lo tanto, existe la necesidad de poder tomar las velocidades deseadas del efector final y calcular a partir de ellas las velocidades de las articulaciones. Todo esto requiere un análisis cinemático más detallado, uno que aborde las velocidades o la tasa de cambio de las coordenadas en contraste con la sección anterior donde solo miramos las posiciones o las coordenadas.

Considere el manipulador 3R como un ejemplo. Derivando la Ecuación (4) con respecto a tiempo, es posible obtener ecuaciones que relacionan las diferentes velocidades.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{eff}} &= \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{y}_{\text{eff}} &= \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{z}_{\text{eff}} &= \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación abreviada:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin \theta_1, s_{12} = \sin (\theta_1 + \theta_2), s_{123} = \sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ c_1 &= \cos \theta_1, c_{12} = \cos (\theta_1 + \theta_2), c_{123} = \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

$\dot{\theta}_i$ denota la velocidad conjunta para la articulación i -ésima o la derivada temporal de los ángulos de la articulación i -ésima, y $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{\phi}$ son las derivadas temporales de las coordenadas del efector final. Reordenando los términos, podemos escribir esta ecuación en forma matricial:

¹³Esto es cierto del brazo humano. Si considera los movimientos planos, debido a que el codo humano no puede hiperextenderse, existe una solución única para la cinemática inversa. Así, el sistema nervioso central no tiene que preocuparse por qué configuración adoptar para una tarea de alcance.

¹⁴En algunos casos, se requiere un movimiento de oscilación y la trayectoria de la herramienta es más complicada.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (d_{12} s_{12} + 1) \dot{\theta}_1 + (d_{13} s_{12} s_{23} + 1) \dot{\theta}_2 + d_{13} s_{12} s_{23} \dot{\theta}_3 \\ \dot{y} &= (d_{22} s_{12} + 1) \dot{\theta}_1 + (d_{23} s_{12} s_{23} + 1) \dot{\theta}_2 + d_{23} s_{12} s_{23} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\varphi} &= \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (11)$$

La matriz de 3×3 se llama matriz jacobiana¹⁵ y la denotaremos con el símbolo J. Si observas los elementos de la matriz, expresan la tasa de cambio de las coordenadas del efector final con respecto a las coordenadas conjuntas:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

Dada la velocidad a la que cambian las articulaciones, o el vector de velocidades de las articulaciones,

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

usando la Ecuación (11), podemos obtener expresiones para las velocidades del efector final,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Si la matriz jacobiana no es singular (su determinante no es cero y la matriz es invertible), entonces podemos obtener la siguiente expresión para las velocidades conjuntas en términos del efector final velocidades:

$$\dot{\theta} = J^{-1} \dot{p} \quad (12)$$

Por lo tanto, si la tarea (por ejemplo, soldadura) se especifica en términos de una velocidad deseada del efector final, La ecuación (12) se puede utilizar para calcular la velocidad conjunta deseada siempre que el jacobiano no sea singular:

¹⁵El nombre jacobiano proviene de la terminología utilizada en el cálculo multidimensional.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1^{des} &= (s_1 s_2 s_3 + s_1 c_2 s_3) \dot{\theta}_2 + (s_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 c_3) \dot{\theta}_3 + s_1 c_2 c_3 \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_2 &= (c_1 s_2 s_3 + c_1 c_2 s_3) \dot{\theta}_1 + (c_1 c_2 c_3 + c_1 s_2 c_3) \dot{\theta}_3 + c_1 c_2 c_3 \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_3 &= (s_1 s_2 c_3 + s_1 c_2 c_3) \dot{\theta}_1 + (s_1 c_2 s_3 + s_1 s_2 s_3) \dot{\theta}_2 + s_1 c_2 s_3 \dot{\phi} \end{aligned}$$

Naturalmente, queremos determinar las condiciones bajo las cuales el jacobiano se convierte en singular. Esto se puede hacer calculando el determinante de J y poniéndolo a cero. Afortunadamente, la expresión del determinante del jacobiano, en este ejemplo, se puede simplificar usando identidades trigonométricas para:

$$|J| = l_1 l_2 \sin \theta_2 \quad (13)$$

Esto significa que el jacobiano es singular solo cuando θ_2 es 0 o 180 grados. Físicamente, esto corresponde a que el codo esté completamente extendido o completamente flexionado. Por lo tanto, siempre que evitemos pasar por esta configuración, el robot podrá seguir cualquier velocidad deseada del efector final.

5.6 Apéndice

5.6.1 La ambigüedad en las funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas tienen múltiples valores. Incluso dentro de un rango de 360 grados, tener dos valores. Por ejemplo, si

$$y = \sin x$$

la función sen inversa da dos valores en un intervalo de 360 grados:

$$\sin^{-1} y = x, \pi - x$$

Por supuesto, podemos sumar o restar 2π de cualquiera de estas soluciones y obtener otra solución.

Esto también es cierto para las funciones coseno inverso y tangente inversa. Si

$$y = \cos x,$$

la función coseno inversa produce:

$$\cos^{-1} y = x, -x$$

De manera similar, para la función tangente

$$y = \tan x,$$

la función tangente inversa produce:

$$\tan^{-1}y = x, \pi + x$$

Esta multiplicidad es particularmente problemática en el control de robots donde una ambigüedad puede significar que hay más de una forma de alcanzar una posición deseada (ver discusión sobre cinemática inversa). Este problema se soluciona definiendo la función atan2 que requiere dos argumentos y devuelve una respuesta única en un rango de 360°.

La función atan2 toma como argumentos el seno y el coseno de un número y devuelve el número. Así si

$$s = \sin x; c = \cos x$$

la función atan2 toma s y c como argumento y devuelve x:

$$\text{atan2}(s, c) = x$$

La idea principal es que la información adicional proporcionada por el segundo argumento elimina la ambigüedad al resolver para x. Para ver esto considere el problema simple donde se nos da:

$$s = \frac{1}{2}; c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y estamos obligados a resolver para x. Si usamos la función seno inversa y restringimos la respuesta para que esté en el intervalo $[0, 2\pi)$, obtenemos el resultado:

$$x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Como sabemos que el coseno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, podemos verificar rápidamente tomando cosenos de ambos candidatos soluciones que la primera solución es correcta y la segunda es incorrecta.

$$\text{porque } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ porque } \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La función atan2 pasa por un algoritmo similar para encontrar una solución única en el rango $[0, 2\pi)$.

$$\text{atan2}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

La función atan2 es una función estándar en la mayoría de los compiladores de C, Pascal y Fortran.

5.6.2 Solución de la ecuación no lineal en (g)

$$P \cos \alpha + Q \sin \alpha + R = 0$$

(gramo)

Defina γ tal que

$$\cos \gamma = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad \text{y} \quad \sin \gamma = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Tenga en cuenta que esto siempre es posible. γ se puede determinar usando la función $\arctan2$:

$$\gamma = \arctan2\left(\frac{Q}{P}\right) \quad \text{un bronceado} \quad \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Ahora (g) se puede reescribir como:

$$\cos(\alpha + \gamma) + \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 0$$

o

$$\alpha + \gamma = \arccos\left(-\frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right)$$

Esto nos da dos soluciones para α en términos del ángulo conocido γ :

$$\alpha + \gamma = \arccos\left(-\frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right), \sigma = \pm 1$$