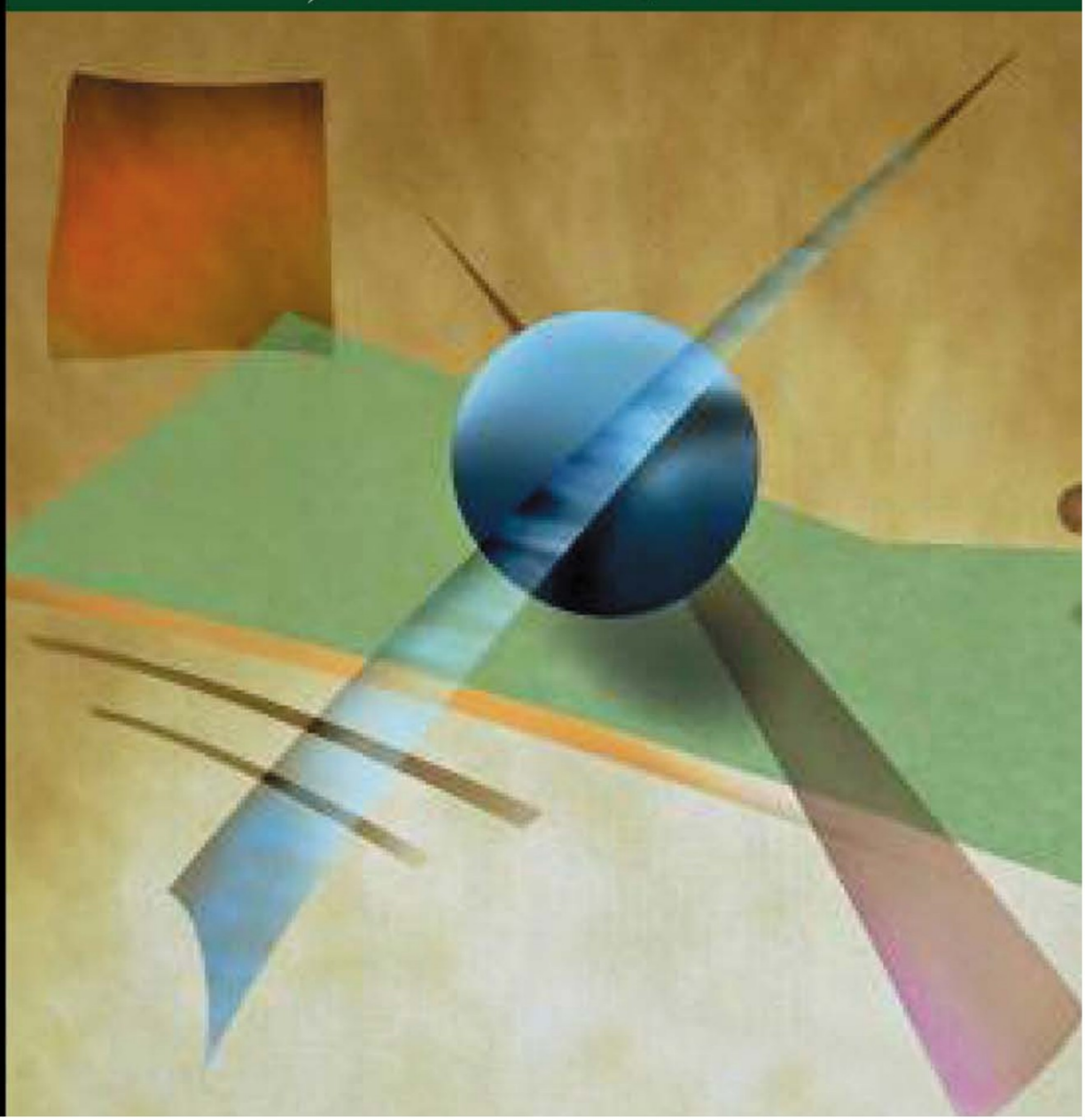
Machine Translated by Google

FACTS ON FILE SCIENCE LIBRARY

ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS

JAMES TANTON, PH.D.



Machine Translated by Google

ENCICLOPEDIA DE

Matemáticas

James Tanton, Ph.D.

Facts On File, Inc.

Machine Translated by Google

Enciclopedia de Matemáticas

Copyright © 2005 por James Tanton, Ph.D.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de este libro puede ser reproducida o utilizada de ninguna forma o por ningún medio, electrónico o mecánico, incluyendo fotocopias, grabaciones o cualquier sistema de almacenamiento o recuperación de información, sin el permiso por escrito del editor. Para información contactar:

hechos en archivo, inc.
132 West 31st Street
Nueva York NY 10001

Datos de catalogación en publicación de la Biblioteca del Congreso

Tanton, James Stuart, 1966–
Enciclopedia de las matemáticas/James Tanton. pag.
cm.
Incluye referencias bibliográficas e indice.
ISBN 0-8160-5124-0 1.
Matemáticas—Enciclopedia. I. Título.
QA5.T34 2005
510′.3—dc22 2004016785

Los libros Facts On File están disponibles con descuentos especiales cuando se compran en grandes cantidades para empresas, asociaciones, instituciones o promociones de ventas. Llame a nuestro Departamento de Ventas Especiales en Nueva York al (212) 967-8800 o (800) 322-8755.

Puede encontrar Facts On File en la World Wide Web en http://www.factsonfile.com

Diseño de texto por Joan M. Toro
Diseño de portada por Cathy Rincon
Ilustraciones por Richard Garratt

Impreso en los Estados Unidos de América

VB Hermitage 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Este libro está impreso en papel sin ácido.

Machine Translated by Google

CONTENIDO

Expresiones de gratitud
v

Introducción vi

Entradas de la A a la Z
1

Ensayos destacados:

"Historia de las Ecuaciones y Álgebra"
9

"Historia del Cálculo" 57

"Historia de las funciones"
208

"Historia de la Geometría"
226

"Historia de la Probabilidad y la Estadística"
414

"Historia de la trigonometría"
510

Apéndices:

Apéndice I
Cronología 539

Machine Translated by Google

Apéndice II
Bibliografía y Recursos Web 546

Apéndice III
Asociaciones
551

Índice
552

Machine Translated by Google

EXPRESIONES DE GRATITUD

Mi agradecimiento a James Elkins por leer una parte sustancial del
manuscrito, por sus invaluables comentarios y por plasmar mis ideas en
escribir una serie de entradas específicas. También agradezco a Frank K. Darmstadt,
editor ejecutivo de Facts On File, por su paciencia y aliento, y a Jodie Rhodes, agente
literaria, por animarme a seguir adelante.
este proyecto. También deseo agradecer a Tucker McElroy y John Tabak por tomarse
el tiempo para ofrecer consejos sobre cómo encontrar archivos de fotografías históricas.
y al personal de The Image Works por su trabajo en la búsqueda de fotografías
y conceder permiso para utilizarlos. Pero sobre todo, gracias a Lindy y
Turner por su amor y apoyo, siempre.

Machine Translated by Google

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas a menudo se presentan como una gran colección de hechos dispares para ser absorbidos (¡memorizados!) y utilizados solo con aplicaciones muy específicas en mente. Sin embargo, el desarrollo de las matemáticas ha sido un viaje que ha involucrado la mente y el espíritu humanos durante miles de años, ofreciendo alegría, juego e invención creativa. El teorema de Pitágoras, por ejemplo, aunque probablemente se desarrolló por primera vez para necesidades prácticas, proporcionó un gran interés intelectual a los eruditos babilónicos de 2000 a. C., que buscaban números de varios dígitos extraordinariamente grandes que satisficieran la famosa $a^2 + b^2 = c^2$ relación. Los eruditos de la antigua China se regocijaban al ordenar los números en cuadrículas para crear los primeros "cuadrados mágicos", y los eruditos del Renacimiento en Europa buscaban una fórmula para los números primos, aunque no tenían en mente ninguna aplicación práctica. Cada una de estas ideas estimuló más preguntas y más desarrollos en matemáticas, el estudio general de las ecuaciones diofánticas, los cuadrados semimágicos y los cuadrados latinos, y la criptografía de clave pública, por ejemplo, nuevamente, con y sin una aplicación práctica en mente. Casi todos los conceptos presentados a los estudiantes hoy en día tienen un lugar histórico y un contexto conceptual que es rico y significativo. El objetivo de la Enciclopedia de Matemáticas de Facts On File es unir ideas dispares y proporcionar un sentido de significado y contexto.

Gracias al formato enciclopédico, todos los lectores pueden encontrar rápidamente respuestas sencillas a preguntas que parecen preocupar tanto a estudiantes como a profesores:

• ¿Por qué el producto de dos números negativos es positivo? •
¿Qué es π y por qué el valor de este número es el mismo para todos los círculos?
• ¿Cuál es el valor de π para una forma diferente a un círculo? •
¿Todo número es una fracción?
• ¿Por qué funciona el algoritmo de división larga? •
¿Por qué dividir por una fracción es lo mismo que multiplicar por su recíproco? •
¿Cuál es el valor de i^i ? •
¿Qué es la cuarta dimensión?

Machine Translated by Google

Este texto también va más allá y presenta pruebas de muchos de los resultados.
discutido Por ejemplo, el lector puede encontrar, en las entradas correspondientes, un
prueba del teorema fundamental del álgebra, una prueba de la ley de Descartes de
signos, una prueba de que todo número tiene una factorización prima única, una prueba
de la fórmula de Bretschneider (generalizando la famosa fórmula de Brahmagupta),
y una derivación de la fórmula de Heron. Dicho material rara vez se presenta en
libros de texto estándar de matemáticas. En aquellos casos en que el método de
prueba está más allá del alcance del texto, una discusión sobre los métodos
detrás de la prueba se ofrece al menos. (Por ejemplo, se presenta un argumento
para mostrar cómo se puede obtener una fórmula similar a la fórmula de Stirling, y
la discusión del teorema de Cayley-Hamilton muestra que toda matriz
satisface al menos alguna ecuación polinomial.) Esta enciclopedia pretende ser
satisfaciendo a aquellos en todos los niveles de interés. Cada entrada contiene referencias
cruzadas a otros elementos, lo que brinda la oportunidad de explorar más el contexto.
e ideas relacionadas. Se anima al lector a navegar.

Como investigador, autor y educador en matemáticas, siempre he
Me esforcé por compartir con mis alumnos la sensación de alegría y entusiasmo que experimento
al pensar y hacer matemáticas. Cotejar, organizar,
y describir los conceptos que un estudiante de secundaria o estudiante principiante de nivel
universitario probablemente encontrará en el currículo de matemáticas típico,
aunque una búsqueda desalentadora, ha demostrado ser inmensamente satisfactoria. I
he disfrutado de la oportunidad de transmitir a través de la redacción de este texto,
esperemos que tenga éxito, una sensación continua de alegría y deleite en lo que las matemáticas
pueden ofrecer.

Tristemente, las matemáticas sufren de la percepción arraigada de que la primaria
y la educación secundaria de la materia debe consistir casi exclusivamente
de la adquisición de un conjunto de habilidades que resultarán útiles a los estudiantes en
sus carreras posteriores. Con el impulso de las pruebas estandarizadas en el público
sistema escolar, esta mentalidad solo se refuerza, y personalmente temo que
la alegría de la comprensión profunda del tema y el sentido del juego con el
ideas que contiene está disminuyendo. Por ejemplo, puede parecer emocionante que
puede producir estudiantes que pueden calcular 584 × 379 en un santiamén, pero me entristece la
idea de que tal estudiante no se anime a considerar por qué
estamos seguros de que 379 × 584 producirá la misma respuesta. Para aquellos estudiantes que
pueden estar naturalmente inclinados a hacer una pausa para considerar esto, también me preocupa
sobre la respuesta que daría un educador al recibir tal consulta. Es
todo maestro capaz de proporcionar a un alumno un ejemplo de un sistema de aritmética para el
cual ya no es posible suponer que a × b y b × a son
siempre lo mismo y conducir a un estudiante a través de un camino de descubrimiento creativo en
el estudio de tal sistema? (Como han descubierto físicos y matemáticos, tales sistemas existen).
Al explorar preguntas fundamentales que desafían las suposiciones básicas, uno descubre una
comprensión más profunda de los conceptos.
y encuentra un nivel de juego creativo que es mucho más satisfactorio que el rendimiento del
cálculo de memoria. Los estudiantes animados a pensar de esta manera tienen
aprendido a ser adaptable, no sólo a entender y aplicar los principios de
un concepto al tema en cuestión, sino también para aplicar esos fundamentos y
hábitos de la mente a las nuevas situaciones que puedan surgir. Después de todo, con la actual

Machine Translated by Google

avances de la tecnología en nuestra sociedad actual, no podemos estar seguros de que la conjuntos de habilidades de memoria que consideramos valiosos hoy serán relevantes para las situaciones y entornos que los estudiantes enfrentarán en sus futuras carreras. tenemos que enseñar nuestros estudiantes a ser reflexivos, a ser flexibles y a tener la confianza para adaptarse a nuevos contextos y nuevas situaciones. Espero que este texto, en algún formas pequeñas, ofrece un sentido del aspecto creativo del pensamiento matemático y, de hecho, alienta amablemente al lector a pensar profundamente sobre los conceptos, incluso los familiares.

Encyclopedia of Mathematics contiene más de 800 entradas ordenadas en orden alfabético. El objetivo de las notas históricas, los artículos específicos de la cultura y los retratos biográficos incluidos como entradas, además de proporcionar un contexto histórico, es brindar una sensación de la alegría que las matemáticas tienen. trajo gente en el pasado. La contraportada de este texto contiene una línea de tiempo enumerar los principales logros a lo largo del desarrollo histórico de matemáticas, una lista de organizaciones matemáticas actuales de interés para estudiantes y profesores, y una bibliografía.

Machine Translated by Google

A

AAA/AAS/ASA/SAS/SSS Muchos argumentos y pruebas presentados en el estudio de GEOMETRÍA se basan en la identificación de triángulos similares. El teorema de la SECANTE , por ejemplo, ilustra esto. Afortunadamente, hay una serie de pruebas geométricas útiles para determinar si dos triángulos diferentes son o no similares o congruentes.

Los nombres de estas reglas son acrónimos, con la letra A para la palabra ángulo y la letra S para la palabra lado. Enumeramos aquí las reglas con una indicación de sus pruebas haciendo uso de la LEY DE LOS SENOS y la LEY DE LOS COSENOS:

a. La regla AAA: si los tres ángulos interiores de un triángulo coinciden con los tres ángulos interiores de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

La ley de los senos asegura que los pares de lados correspondientes de los triángulos tengan longitudes en la misma proporción.
También tenga en cuenta que, dado que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°, solo es necesario comprobar que los dos pares correspondientes de ángulos interiores de los triángulos coincidan.

b. Las reglas AAS y ASA: si dos ángulos interiores y la longitud de un lado de un triángulo coinciden con los ángulos interiores y la longitud de los lados correspondientes de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Por la regla AAA los dos triángulos son semejantes. Dado que un par de longitudes de lados correspondientes coinciden, los dos triángulos son similares con un factor de escala uno y, por lo tanto, son congruentes. (Tenga en cuenta que dos triángulos rectángulos que comparten una hipotenusa común y que contienen un ángulo agudo común son congruentes: los tres ángulos interiores coinciden, y se aplican las normas AAS y ASA. Esto a veces se llama el "criterio de congruencia HA" para triángulos rectángulos).

C. La regla SAS: Si dos triángulos tienen dos lados de longitudes coincidentes con ángulo incluido coincidente, entonces los dos triángulos son congruentes.

La ley de los cosenos asegura que las longitudes del tercer lado de cada triángulo sean iguales y que todos los ángulos restantes en los triángulos coincidan. Por las reglas AAS y ASA, los triángulos son congruentes. Como aplicación de esta regla, demostramos el teorema del triángulo isósceles de EUCLID :

> Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
>
> Supongamos que ABC es un triángulo con lados AB y AC de igual longitud. Piense en este triángulo como si representara dos triángulos: uno que dice BAC y el otro CAB. Estos dos triángulos tienen dos longitudes de lado coincidentes con ángulos incluidos coincidentes y, por lo tanto, según la regla SAS, son congruentes. En particular, todos los ángulos correspondientes son iguales. Así, el ángulo en el vértice B del primer triángulo tiene la misma medida que el ángulo correspondiente del segundo triángulo, es decir, el ángulo en el vértice C.

Este resultado aparece como la Proposición 5 del Libro I de la famosa obra de Euclides LOS ELEMENTOS.

d. La regla SSS: si las longitudes de los tres lados de un triángulo coinciden con las longitudes de los tres lados de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Machine Translated by Google

La ley de los senos asegura que los tres ángulos interiores coincidan, por lo que se aplica la regla SAS.

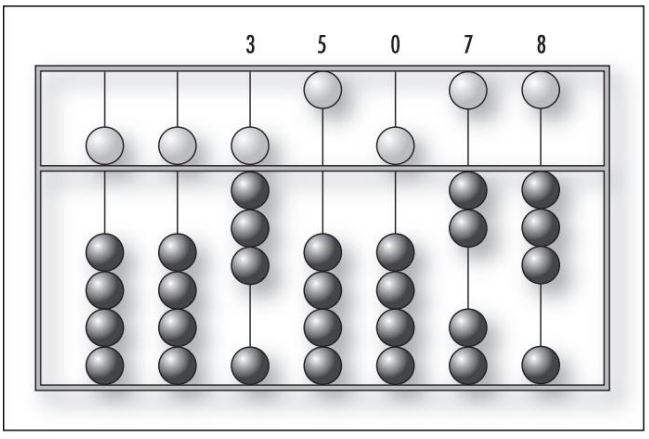
La GEOMETRÍA EUCLIDEA toma la regla SAS como un AXIOMA, es decir, un supuesto básico que no requiere demostración. Entonces es posible justificar la validez de las reglas restantes haciendo uso únicamente de esta regla, y también justificar la ley de los senos. (El hecho de que el seno de un ángulo sea el mismo para todos los triángulos rectángulos que contienen ese ángulo depende de que SAS sea verdadero).

Véase también FIGURAS CONGRUENTES; FIGURAS SIMILARES.

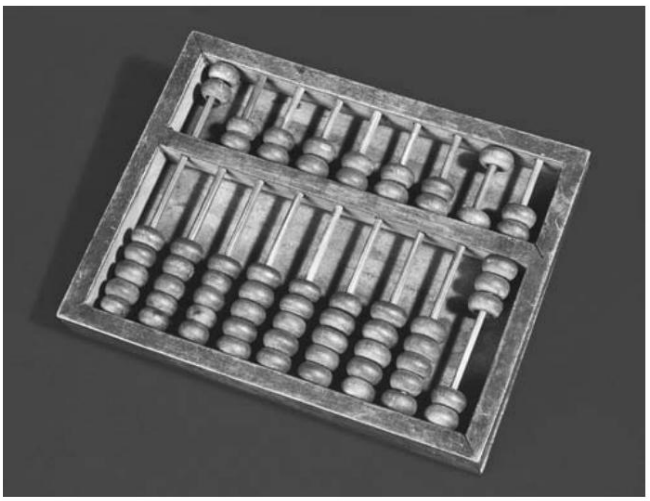
ábaco Cualquier tabla de contar con cuentas colocadas en ranuras paralelas o ensartadas en varillas paralelas. Por lo general, cada cuenta representa una unidad de conteo y cada surco un valor posicional. Tales dispositivos simples pueden ser ayudas poderosas para realizar cálculos aritméticos.

Los dedos de cada mano proporcionan el "juego de cuentas" más simple para el conteo manual, y la arena a los pies es un lugar obvio para escribir los resultados. No sorprende, entonces, que todas las culturas conocidas desde la antigüedad desarrollaron, de forma independiente, alguna forma de tablero de conteo para asistir en cálculos aritméticos complejos. Los primeros tableros eran simples tablillas de arcilla cocidas al sol, recubiertas con una fina capa de arena fina en la que se trazaban símbolos y marcas. Los griegos usaban bandejas de mármol y los romanos de bronce, y ambos registraban las unidades de conteo con guijarros o cuentas.

Los romanos fueron los primeros en proporcionar ranuras para representar valores posicionales fijos, una innovación que resultó ser extremadamente útil. Tableros de este tipo se mantuvo el stan Dard herramienta de los comerciantes y empresarios europeos hasta el Renacimiento.



Un ábaco simple



Un ábaco chino de antes de 1600. Observe que se colocan dos cuentas, cada una de las cuales representa cinco unidades, en cada columna sobre la barra. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

El origen de la palabra ábaco se remonta a la palabra árabe abq para "polvo" o "arena fina". Los griegos usaron la palabra abax para "bandeja de arena", y los romanos adoptaron la palabra abacus.

La forma del ábaco que conocemos hoy en día se desarrolló en el siglo XI en China y, más tarde, en el siglo XIV en Japón. (Allí, el dispositivo se llamaba soroban). Tiene cuentas ensartadas en alambres montados en un marco de madera, con cinco cuentas por alambre que se pueden empujar hacia arriba o hacia abajo. Se utilizan cuatro cuentas para contar las unidades del uno al cuatro, y la quinta cuenta, pintada de un color diferente o separada por una barra, representa un grupo de cinco. Esto proporciona los medios para representar todos los dígitos del cero al nueve. Cada cable en sí representa una potencia diferente de diez. El diagrama de la izquierda representa el número 35.078.

La suma se realiza deslizando cuentas hacia arriba ("llevar dígitos" según sea necesario cuando se producen valores superiores a 10 en un solo cable), y la resta deslizando cuentas hacia abajo. La multiplicación y la división se pueden calcular como sumas y restas repetidas. Los historiadores han descubierto que los eruditos chinos y japoneses también idearon técnicas efectivas para calcular raíces cuadradas y cúbicas con la ayuda del ábaco.

El ábaco sigue siendo la herramienta popular elegida en muchos países asiáticos, incluso preferida a la electrónica.

Machine Translated by Google

calculadoras Es un dispositivo de enseñanza útil para introducir a los niños pequeños a la noción de valor posicional ya las operaciones de aritmética básica.

Véase también BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO; DE NAPIER HUESOS.

Abel, Niels Henrik (1802–1829) Álgebra noruega Nacido el 5 de agosto de 1802, Niels Abel podría haber sido uno de los grandes matemáticos del siglo XIX si no hubiera muerto de tuberculosis a los 26 años. Es recordado y honrado en matemáticas por poner fin a la búsqueda de tres siglos de una SOLUCIÓN POR RADICALES de la ecuación quíntica. Su trabajo teórico en los temas de TEORÍA DE GRUPOS y ÁLGEBRA allanó el camino para la continuación de importantes investigaciones en estas áreas.

La corta vida de Abel estuvo dominada por la pobreza, principalmente debido a las graves dificultades económicas que sufrió su tierra natal de Noruega después de las guerras napoleónicas, exacerbadas por las difíciles circunstancias familiares. Un maestro de escuela, afortunadamente, reconoció el talento de Abel para las matemáticas cuando era un joven estudiante y le presentó las obras de LEONHARD EULER, JOSEPH-LOUIS LAGRANGE y otros grandes matemáticos. También ayudó a recaudar dinero para que Abel asistiera a la universidad y continuara sus estudios. Abel ingresó a la Universidad de Christiania en la ciudad de Christiania (actual Oslo), Noruega, en 1821.

Durante su último año de estudio, Abel comenzó a trabajar en la solución de ecuaciones quínticas (ecuaciones polinómicas de quinto grado) mediante radicales. Aunque durante mucho tiempo los académicos conocieron fórmulas generales para resolver ECUACIONES CUÁDRICAS, cúbicas y CUÁRTICAS usando nada más que operaciones aritméticas básicas en los COEFICIENTES que aparecen en la ecuación, nadie había encontrado una fórmula similar para resolver quínticas. En 1822 Abel creyó haber producido uno. Compartió los detalles de su método con el matemático danés Ferdinand Degen con la esperanza de que la Royal Society of Copenhagen publicara el trabajo. Degen tuvo problemas para seguir la lógica detrás del enfoque de Abel y pidió una ilustración numérica de su método. Al tratar de producir un ejemplo numérico, Abel encontró un error en su trabajo que eventualmente lo llevó a comprender la razón por la cual las soluciones generales para ecuaciones de quinto grado y grados superiores son imposibles. Abel publicó este descubrimiento fenomenal en 1825 en un folleto autoeditado “Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré” (Memorias sobre la imposibilidad de las soluciones algebraicas de las ecuaciones generales de quinto grado), que más tarde presentó como una serie de siete artículos en el recién creado Journal for Pure and Applied Mathematics (comúnmente conocido como Crelle's Journal por su fundador alemán August Leopold Crelle).

Al principio, la reacción a este trabajo fue lenta, pero a medida que crecía la reputación de la revista, más y más académicos tomaron nota del artículo, y las noticias del logro de Abel comenzaron a extenderse por toda Europa. Unos años más tarde, Abel fue honrado con una cátedra en la Universidad de Berlín. Desafortunadamente, Abel había contraído tuberculosis para ese momento y murió el 6 de abril de 1829, pocos días antes de recibir la carta de notificación.

En 1830 la Academia de París otorgó a Abel, a título póstumo, el Gran Premio por su destacada labor.

Aunque Abel no escribió en términos de los conceptos modernos de la teoría de grupos, los matemáticos llaman a los grupos que satisfacen la PROPIEDAD CONMUTATIVA “grupos abelianos” en su honor. En 2002, en el bicentenario de su nacimiento, la Academia Noruega de Ciencias y Letras creó un nuevo premio de matemáticas, el Premio Abel, similar al Premio Nobel, que se entregará anualmente.

La investigación en el campo del álgebra conmutativa continúa hoy utilizando el enfoque desarrollado por Abel durante su corta vida. Su influencia en el desarrollo del ÁLGEBRA ABSTRACTA es verdaderamente significativa.

convergencia absoluta SERIE A $\sum_{n=1}^{\infty} un$ que contiene

Se dice que los términos positivos y negativos convergen absolutamente si la serie correspondiente con todos los términos hecho positivo, $\sum_{norte=1}^{\infty} \left| \quad \right|$, converge. Por ejemplo, la serie an

$-+\frac{1}{2}+ -\pm\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{32}\frac{1}{dieciséis}$ converge absolutamente porque

la serie correspondiente $1+\frac{1}{2}+\pm\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{16}\frac{1}{32}$

converge (Ver SERIE CONVERGENTE.) La "prueba de convergencia absoluta" dice:

Si $\sum_{norte=1}^{\infty} |un|$ converge, entonces la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} un$

también converge.

Se puede demostrar de la siguiente manera:

Machine Translated by Google

Sea pn = |an| – un . Entonces cada valor pn es cero o igual a 2 |an| , dependiendo de si an es positivo o negativo. en especial tenemos que $0 \le pn \le 2|an|$.

En consecuencia, $0 \le \sum_{n=1}^{\infty} pag \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y así, por el

PRUEBA DE COMPARACIÓN, $\sum_{n=1}^{\infty} pn$ converge Consejero con frecuencia

también lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - pag) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Sin embargo, esta prueba no cubre todos los casos. Aún es posible que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} un$ que contiene positivo y los términos negativos pueden converger aunque $\sum_{n=1}^{\infty} |un|$ no es. Por ejemplo, la alternancia ARMÓNICA SERIE $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ converge, sin embargo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$ no es. una serie que converge “a condición de que los signos negativos permanecer presente”, es decir, uno para el cual $\sum_{n=1}^{\infty} un$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |un|$ no lo hace, se llama “condición aliado convergente.” Manipulación condicionalmente convergente serie puede dar lugar a todo tipo de paradojas. Por ejemplo, el siguiente argumento “prueba” que 1 = 2:

Comience con la observación de que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 \approx 0.69 .$$

(Esto se deduce del estudio de la armónica serie o de LA EXPANSIÓN DE MERCATOR .) En consecuencia:

$$2 \ln 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Recopilación de términos con un denominador común da:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right)$$

y entonces 2 = 1.

Paradojas como estas muestran que no es permisible reorganizar el orden de los términos de una serie condicionalmente convergente. Los matemáticos han demostrado, sin embargo, que reorganizar los términos de un absolutamente convergente La serie es válida.

Véase también VALOR ABSOLUTO.

valor absoluto (módulo) En términos generales, el El valor absoluto de un NÚMERO REAL es la “versión positiva de ese número”. Las barras verticales se utilizan para indicar el valor absoluto de un número. Por ejemplo, el valor absoluto de menos tres es |–3| = 3, y el absoluto el valor de cuatro es |4| = 4. El valor absoluto de un real el número a se visualiza típicamente de tres maneras:

1. |un| es igual a sí mismo si a es positivo o cero, y es igual a –a si es negativo. (Por ejemplo, |–3| = –(–3) = 3 y |3| = 3.)
2. |un| es igual a la raíz cuadrada positiva de un^2. (Por ejemplo, $|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}$.)
3. |un| es la distancia entre los puntos a y 0 en la recta numérica real. (Por ejemplo, |–3| = 3 = |3| ya que tanto -3 como 3 están a tres unidades del origen.) Más generalmente, si a y b son dos puntos en la recta numérica, luego la distancia entre ellos en la recta numérica está dada por |a – b|. (Por ejemplo, los puntos 4 y –7 son |4–(–7)| = |4 + 7| = 11 unidades de distancia).

Examinando cada uno de los casos con a y b positivos o negativos, se puede comprobar que el valor absoluto función cumple las siguientes propiedades:

i. $|a + b| \le |un| + |b|$
ii. $|a - b| \le |un| + |b|$
iii. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Saber el valor absoluto de una cantidad determina el valor de esa cantidad hasta el signo. Por ejemplo, la ecuación |x+2| = 5 nos dice que x + 2 = 5

Machine Translated by Google

o x + 2 = –5, por lo que x es igual a 3 o –7. Alternativamente, se puede leer la ecuación como |x – (–2)| = 5, interpretándolo en el sentido de que x es un punto a una distancia de cinco unidades de –2. Cinco unidades a la izquierda significa que x es el punto –7; cinco unidades a la derecha significa que x es 3.

La noción de valor absoluto no se hizo explícita hasta mediados del siglo XIX. KARL WEIERSTRASS, en 1841, fue el primero en sugerir una notación para ello: las dos barras verticales que usamos hoy. Actualmente, las cosas son un poco confusas, sin embargo, los matemáticos de hoy también usan esta notación para la longitud de un VECTOR y para el MODU LUS de un NÚMERO COMPLEJO.

álgebra abstracta La investigación en matemáticas puras está motivada por una pregunta fundamental: ¿qué hace que las matemáticas funcionen como lo hacen? Por ejemplo, para un matemático, la pregunta "¿Cuánto es 263 × 178 (o equivalente, 178 × 263)?" es de poco interés. Una pregunta mucho más importante sería: "¿Por qué las respuestas a 263 × 178 y 178 × 263 deberían ser las mismas?"

El tema del álgebra abstracta intenta identificar las características clave que hacen que ÁLGEBRA y ARITMÉTICA funcionen de la manera en que lo hacen. Por ejemplo, los matemáticos han demostrado que la operación de ADICIÓN satisface cinco principios básicos y que todos los demás resultados sobre la naturaleza de la adición se derivan de estos.

1. Cierre: La suma de dos números vuelve a ser un número.
2. Asociatividad: Para todos los números a, b y c, tenemos: (a + b) + c = a + (b + c).
3. Elemento cero: hay un número, denotado "0", de modo que: a + 0 = a = 0 + a para todos los números a.
4. Inversa: Para cada número a hay otro número, denotado “–a” , de modo que: a + (–a) = 0 = (–a) + a.
5. Conmutatividad: Para todos los números a y b tenemos: a + b = b + a.

Habiendo identificado estas cinco propiedades, los matemáticos buscan otros sistemas matemáticos que puedan satisfacer las mismas cinco relaciones. Cualquier hecho que se conozca acerca de la suma, en consecuencia, también será válido en el nuevo sistema. Este es un poderoso enfoque de las cosas. Evita tener que volver a probar TEOREMAS y hechos sobre un nuevo sistema si uno puede reconocerlo como familiar disfrazado. Por ejemplo, la MULTIPLICACIÓN satisface esencialmente los mismos cinco AXIOMAS anteriores, por lo que para cualquier hecho sobre la suma, hay un hecho correspondiente sobre la multiplicación. El conjunto de simetrías de una geometría. La figura también satisface estos cinco axiomas, y así también todos los resultados conocidos sobre la suma se transfieren inmediatamente a declaraciones interesantes sobre la geometría. Cualquier sistema que satisfaga estos cinco axiomas básicos se llama un "grupo abeliano", o simplemente un GRUPO si falla el quinto axioma. La TEORÍA DE GRUPOS es el estudio de todos los resultados que se derivan de estos cinco axiomas básicos sin referencia a un sistema matemático en particular.

El estudio de los ANILLOS y CAMPOS considera sistemas matemáticos que permiten dos operaciones fundamentales (típicamente llamadas suma y multiplicación). Permitir la operación adicional de multiplicación escalar conduce a un estudio de ESPACIOS VECTORIALES.

La teoría de las estructuras algebraicas está muy desarrollada. El estudio de espacios vectoriales, por ejemplo, es tan extenso que el tema se considera como un campo de las matemáticas por derecho propio y se llama ÁLGEBRA LINEAL.

aceleración Ver VELOCIDAD.

ciencia actuarial El estudio estadístico de la esperanza de vida, la enfermedad, la jubilación y los accidentes se denomina ciencia actuarial. Los expertos en la materia se denominan actuarios y son empleados por las compañías de seguros y los fondos de pensiones para calcular los riesgos y relacionarlos con las primas a cobrar. El matemático y astrónomo británico Edmund Halley (1656–1742) fue el primero en analizar adecuadamente las anualidades y hoy en día se le considera el fundador de este campo.

Ver también TABLAS DE VIDA.

ángulo agudo Un ÁNGULO entre cero y 90° se llama ángulo agudo. Un triángulo acutángulo es aquel cuyos ángulos son todos agudos. De acuerdo con la LEY DE LOS COSENOS, un triángulo con lados de longitud a, b y c y ángulos correspondientes A, B, C opuestos a esos lados, satisface:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

El ángulo C es agudo solo si cosC > 0, es decir, solo si $a^2 + b^2 > c^2$. Por lo tanto, un triángulo a, b, c es agudo si, y solo si, se cumplen las tres desigualdades siguientes:

Machine Translated by Google

$$un^2 + segundo^2 > c^2$$
$$segundo^2 + c^2 > un^2$$
$$2c_ + un^2 > segundo^2$$

Véase también ÁNGULO OBTUSIVO; PERIGÓN; DE PITÁGORAS TEOREMA; TRIÁNGULO.

suma El proceso de encontrar la suma de dos números se llama suma. En la ARITMÉTICA elemental de los números enteros, la suma se puede considerar como el proceso de acumular conjuntos de objetos. Por ejemplo, si un conjunto de tres manzanas se combina con un conjunto de cinco manzanas, entonces el resultado es un conjunto de ocho manzanas. Nosotros escribe: 3 + 5 = 8.

Dos números que se suman se llaman sumandos. Por ejemplo, en la ecuación 17 + 33 = 50, los números 17 y 33 son los sumandos, y el número 50 es su suma. La adición también se puede considerar como el proceso de aumentar un número (un sumando) por otro (llamado, en este contexto, augend). Así cuando 17 se aumenta en 33 unidades, el resultado es 50.

El SISTEMA DE VALOR DE LUGAR que usamos hoy para escribir números simplifica el proceso de sumar números enteros grandes. Por ejemplo, sumar 253 y 589 da 2 + 5 = 7 unidades de 100, 5 + 8 = 13 unidades de 10 y 3 + 9 = 12 unidades de 1. Entonces, en cierto sentido, es razonable escribir la respuesta a este problema de suma simplemente como 7 | 13 | 12 usando una barra vertical para separar unidades de potencias de 10. Como 13 unidades de 10 equivalen a una unidad de 100 y tres unidades de 10, esto equivale a 8 | 3 | 12 Observando, además, que 12 unidades de un 12 es equivalente a una unidad de 10 y dos unidades simples, esto se puede reescribir como 8 | 4 | 2. Así tenemos: 253 + 589 = 842.

El último proceso de modificar las cifras en potencias de 10 de un solo dígito (es decir, en nuestro ejemplo, el proceso de reescribir 7 | 13 | 12 como 8 | 4 | 2) se llama "llevar dígitos". Los estudiantes en las escuelas son generalmente enseñó un algoritmo que tiene un acarreo de dígitos al principio el proceso de completar un problema de suma en lugar que dejar este trabajo como paso final. cualquier método es válida. (El término "llevar un dígito" se remonta a la época del ABACUS, donde las cuentas en varillas representaban cuentas de potencias de 10 y la persona tuvo que moverse— "llevar": contadores de una varilla a otra, si las hay el conteo era mayor que un solo dígito).

El proceso de suma se puede extender a NÚMEROS NEGATIVOS (dando como resultado una operación llamada SUBTRACCIÓN), la adición de FRACCIONES (completado con el ayuda de calcular DENOMINADORES COMUNES), REAL NÚMEROS, NÚMEROS COMPLEJOS, VECTORES y MATRIZ suma. El número CERO es una IDENTIDAD aditiva ELEMENTO en la teoría de la aritmética. Tenemos que a + 0 = a = 0 + a para cualquier número a.

La suma de dos funciones de valores reales f y g es la función f + g cuyo valor en cualquier entrada x es la suma de las salidas de f y g en ese valor de entrada: (f + g)(x) = f(x) + g(x). Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 2x$ y g(x) = 5x + 7, entonces $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 5x + 7 = x^2 + 7x + 7$.

Una función con la propiedad de que f(x + y) = f(x) + f(y) para todas las entradas x e y se llama "aditivo". Para ejemplo, f(x) = 2x es aditivo.

Las fórmulas de suma en TRIGONOMETRÍA afirman:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Se cree que el símbolo + utilizado para denotar la adición han derivado de una abreviatura popular para el latín La palabra et significa "y" y fue ampliamente utilizada por los estudiosos de las matemáticas a finales del siglo XV. El símbolo apareció impreso por primera vez en 1489 de Johannes Widman libro Behennde unnd hüpsche Rechnung auf fallen Kauffmannschaften (Cálculos limpios y prácticos para todos los comerciantes).

Véase también ASOCIATIVO; EXPULSANDO NUEVES; PROPIEDAD CONMUTATIVA; PROPIEDAD DISTRIBUTIVA; MULTIPLICACIÓN; SUMA.

geometría afín El estudio de las propiedades de figuras geométricas que permanecen sin cambios por un AFFINE La TRANSFORMACIÓN se llama geometría afín. Por ejemplo, dado que una transformación afín conserva líneas y RATIOs de distancias entre PUNTOS, la nociones de líneas PARALELAS , PUNTOS MEDIOS de segmentos de LÍNEA , y la tangencia son conceptos válidos en geometría afín. El la noción de CÍRCULO, sin embargo, no lo es. (Un círculo puede ser transformado en una ELIPSE a través de una transformación afín. La equidistancia de los puntos del círculo desde el no es necesario conservar el centro del círculo.)

La geometría afín fue estudiada por primera vez por el matemático suizo LEONHARD EULER (1707-1783). Solo postulados

Machine Translated by Google

1, 2 y 5 de los POSTULADOS DE EUCLIDES siguen siendo válidos en geometría afín.

transformación afín Cualquier mapa del PLANO a mismo que transforma LÍNEAS rectas en líneas rectas y conserva RATIOs de distancias entre PUNTOS (por lo que que el punto medio de un segmento de línea, por ejemplo, sigue siendo el punto medio después de la transformación) se llama una transformación afín. Uno puede probar que cualquier afín la transformación debe ser una TRANSFORMACIÓN LINEAL seguida de una traducción. Así, una transformación afín T está completamente especificada por una MATRIZ A y una VECTOR b tal que T(x) = Ax + b para cualquier vector x que represente un punto en el plano.

Una transformación afín T satisface la relación:

$$T(sx + ty) = sT(x) + tT(y)$$

para cualesquiera dos vectores x e y y cualesquiera dos números reales s y t tales que s + t = 1. Esto a veces se toma como la definición de lo que significa para una transformación a ser afín

Las transformaciones afines generalmente no conservan las longitudes de los segmentos de línea ni la medida de ÁNGULOS entre segmentos. Es posible transformar un CÍRCULO en una ELIPSE, por ejemplo, a través de un afín transformación.

Véase también GEOMETRÍA AFFINE.

Agnesi, Maria Gaëtana (1718–1799) Italiana Calcu lus Nacida el 16 de mayo de 1718 en el seno de una rica familia de sederos comerciantes, Maria Agnesi es mejor recordada por su texto expositivo influyente que describe los métodos y técnicas del CÁLCULO recién inventado. Escrito con tanta claridad y precisión, Istituzioni analitiche (Instituciones analíticas) obtuvo su reconocimiento internacional fama. Agnesi es considerada la primera mujer matemática importante de los tiempos modernos, y tiene la distinción de ser la primera mujer en recibir un cátedra de matemáticas en una facultad universitaria.

Agnesi demostró notables talentos académicos como un niño pequeño. A los 13 años había dominado muchos idiomas y había publicado traducciones de textos académicos ensayos Aunque se prestó poca atención a la educación de la mujer a principios del siglo XVIII, El padre de Agnesi animó su desarrollo intelectual. ment, proporcionó tutores de la más alta calidad, y proporcionó foros para que ella mostrara sus talentos a los italianos. sociedad. En preparación para estos eventos, Agnesi había preparado discursos sobre una amplia variedad de temas científicos. y filosofía, que publicó como una colección de 190 ensayos a los 20 años.

Tras la muerte de su madre, Agnesi emprendió la tarea de instruir a sus hermanos menores en la materia de matemáticas. En 1738 comenzó a preparar un libro de texto para su uso, y encontró el tema tan convincente que dedicó toda su atención intelectual a las matemáticas. Diez años después, su famoso Se publicó el texto en dos volúmenes Istituzioni analitiche .

El trabajo fue la primera visión global de el tema del cálculo. Aunque está diseñado para jóvenes estudiantes que comienzan sus estudios de la materia, Agnesi trabajo fue reconocido como proporcionando hasta ahora desapercibido conexiones entre los diferentes enfoques de SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) y GOTTFRIED WIL HELM LEIBNIZ (1646–1716), coinventores independientes del sujeto. Su pieza también proporcionó, por primera tiempo, explicaciones claras de cuestiones previamente confusas en el tema Su texto cotejó y explicó el trabajo. de otros contribuyentes al tema de varios países diferentes, una tarea sin duda facilitada por sus habilidades en traducción. Su talento, no solo como expositora escritor, sino también como un gran estudioso de las matemáticas, fueron aparente. Los matemáticos de la época la reconocieron. texto como una contribución significativa al desarrollo posterior del tema del cálculo. En 1750 Agnesi fue nombró a la cátedra de matemáticas de la Universidad de Bolonia en reconocimiento a su gran logro. Curiosamente, ella nunca aceptó ni rechazó oficialmente la posición de la facultad. Se sabe que ella nunca visitó el ciudad de Bolonia, a pesar de que su nombre aparece en registros universitarios durante un lapso de 45 años.

Después de la muerte de su padre en 1752, Agnesi se apartó de las matemáticas y dedicó su vida a obras de caridad, ayudando a los enfermos y los pobres. En 1783 ella fue nombrada directora de una casa pobre para mujeres, donde permaneció el resto de su vida. Habiendo dado todo su dinero y posesiones lejos, Agnesi murió el 9 de enero de 1799, sin dinero propio y fue enterrada en un pobre tumba. La ciudad de Milán, donde había vivido toda su vida, hoy honra públicamente su tumba.

John Colson, profesor lucasiano de matemáticas en Cambridge, publicó una traducción al inglés de Isti tuzioni analitiche en 1801. Dijo que quería

Machine Translated by Google

dar a la juventud de Gran Bretaña la misma oportunidad de beneficiarse de este notable texto que los jóvenes académicos de Italia habían podido disfrutar.

Alembert, Jean Le Rond d' (1717–1783) Francés Ecuaciones diferenciales, Análisis, Filosofía Nacido el 17 de noviembre de 1717 en París, Francia, el erudito Jean le Rond d'Alembert es mejor recordado por su tratado de 1743 Traité de dynamique (Tratado de dinámica), en el que intentó desarrollar una base matemática firme para el estudio de la mecánica. D'Alembert fue pionero en el estudio de las ECUACIONES DIFERENCIALES parciales y su uso en física. También es conocido por su trabajo sobre cuerdas vibrantes.

Después de dedicarse brevemente a la teología y la medicina en el Jansenist Collège des Quatre Nations, d'Alembert se decidió por las matemáticas como su estudio académico de elección.



Jean Le Rond d'Alembert, un eminente matemático del siglo XVIII, fue pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales y su aplicación a la mecánica. (Foto cortesía de Topham/ The Image Works)

Se graduó en el Collège en 1735 para luego dedicarse a la mecánica de fluidos. En 1740 presentó una serie de conferencias sobre el tema a los miembros de la Academia de Ciencias de París, lo que le valió el reconocimiento como matemático capaz y la admisión como miembro de la academia. Permaneció en la institución durante toda su carrera.

D'Alembert llegó a creer que el tema de la mecánica debe basarse en principios lógicos, no necesariamente físicos, y que su base es fundamentalmente matemática. En su tratado Traité de dynamique de 1743, intentó refinar el trabajo de SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) y aclarar los fundamentos del tema. Al año siguiente, d'Alembert publicó un segundo trabajo, Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides (Tratado sobre el equilibrio y el movimiento de los fluidos), que aplicó sus resultados al estudio del movimiento de los fluidos e introdujo algunos resultados iniciales sobre el estudio. de ecuaciones diferenciales parciales. Desarrolló estos resultados aún más durante los años siguientes. En 1747, d'Alembert presentó un artículo "Réflex ions sur la cause générale des vents" (Reflexiones sobre la causa general del movimiento del aire) para ser considerado para el premio científico anual ofrecido por la Academia Prusiana.

De hecho ganó.

Al mismo tiempo, d'Alembert también comenzó a trabajar como escritor y editor científico de la famosa Ency clopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts, et des métiers (Enciclopedia y diccionario de los fundamentos de las ciencias, las artes y las profesiones) francesa. , asumiendo la responsabilidad de la redacción de la mayoría de las entradas matemáticas. El primer volumen de la obra de 28 volúmenes se publicó en 1751.

D'Alembert publicó varios nuevos resultados matemáticos e ideas en este trabajo épico. Por ejemplo, en el volumen 4, bajo la entrada diferencial, sugirió, por primera vez, que los principios del CÁLCULO deberían basarse en la noción de LÍMITE. Llegó a considerar definir la derivada de una función como el límite de una RAZÓN de incrementos. También describió la nueva prueba de razón cuando habló de SERIE CONVERGENTE.

Los intereses de D'Alembert se volvieron hacia la literatura y la filosofía, y el trabajo administrativo, en la última parte de su vida. Fue elegido secretario perpetuo de la Académie Française en 1772. Murió 11 años después, el 29 de octubre de 1783.

Su trabajo en matemáticas allanó el camino para el desarrollo adecuado de la noción de límite en cálculo, así como

Machine Translated by Google

como avance en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales. En mecánica, es honrado con un principio de movimiento que lleva su nombre, una generalización de la tercera ley de movimiento de Sir Isaac Newton.

Véase también CÁLCULO DIFERENCIAL.

álgebra La rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades generales de los números y de las generalizaciones que surgen de esas propiedades se denomina álgebra. A menudo se utilizan símbolos para representar números genéricos, lo que distingue el tema del estudio de la ARITMÉTICA. Por ejemplo, la ecuación 2 × (5 + 7) = 2 × 5 + 2 × 7 es un enunciado aritmético (verdadero) sobre un conjunto específico de números, mientras que la ecuación x × (y + z) = x × y + x × z es un enunciado general que describe una propiedad satisfecha por tres números cualesquiera . Es un enunciado en álgebra.

Gran parte del álgebra elemental consiste en métodos de manipulación de ecuaciones para ponerlas en una forma más conveniente o para determinar (es decir, resolver) los valores permisibles de las variables que aparecen. Para $x^2 + 6x + 9 = 25$ como $(x + 3)2 = 25$ una solución fácil para x: instancia, reescribir x permite ya sea x + 3 = 5, dando x = 2, o x + 3 = –5, dando x = –8.

La palabra álgebra proviene del término árabe al-jabr w'al-muqa¯bala (que significa “restauración y reducción”) utilizado por el gran MUHAMMAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– I (ca. 780–850) en sus escritos sobre el tema.

Historia de las Ecuaciones y Álgebra

Encontrar soluciones a las ecuaciones es una búsqueda que se remonta a los antiguos egipcios y babilonios y se puede rastrear a través de las matemáticas de los primeros griegos. El PAPIRO RHIND, que data de alrededor de 1650 a. C., por ejemplo, contiene una lectura problemática:

> Una cantidad; se le añade su cuarto. Se convierte en quince. ¿Cuál es la cantidad?

Se aconseja a los lectores que resuelvan problemas como estos mediante un método de "falsa posición", en el que uno adivina (plantea) una solución, que probablemente sea incorrecta, y ajusta la suposición de acuerdo con el resultado obtenido. En este ejemplo, para simplificar la división, uno podría suponer que la cantidad es cuatro. Sin embargo, si se toma 4 y se le suma su cuarto, se obtiene solo 4 + 1 = 5, un tercio de la respuesta deseada de 15. Multiplicando la suposición por un factor de tres se obtiene la solución al problema, es decir, 4 × 3, que es 12

Aunque el método de la posición falsa solo funciona para ECUACIONES LINEALES de la forma ax = b, puede ser una herramienta eficaz. De hecho, varios de los problemas presentados en el papiro de Rhind son bastante complicados y se resuelven con relativa rapidez mediante esta técnica.

Las tablillas de arcilla que datan de 1700 a. C. indican que los matemáticos babilónicos eran capaces de resolver ciertas ecuaciones CUADRÁTICAS mediante el método de COMPLETAR EL CUADRADO. Sin embargo, no tenían un método general de solución y trabajaban solo con un conjunto de ejemplos específicos completamente elaborados. Cualquier otro problema que surgió fue emparejado con un ejemplo previamente resuelto, y su solución se encontró ajustando los números apropiadamente.

Gran parte del conocimiento acumulado por las antiguas civilizaciones de Egipto y Babilonia pasó a los griegos. Tomaron las cosas en una dirección diferente y comenzaron a examinar todos los problemas geométricamente al interpretar los números como longitudes de segmentos de línea y los productos de dos números como áreas de regiones rectangulares. Los seguidores de PITÁGORAS del período 540 a 250 a. C., por ejemplo, dieron pruebas geométricas de la PROPIEDAD DISTRIBUTIVA y la fórmula de la DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS , por ejemplo, de la misma manera geométrica que usamos hoy para explicar el método de EXPANSIÓN DE SOPORTES. Sin embargo, los griegos tenían considerables problemas para resolver ECUACIONES CÚBICAS, ya que su práctica de tratar los problemas geométricamente los llevó a complicadas construcciones tridimensionales para hacer frente al producto de tre

En este punto, no se usaban símbolos en los problemas algebraicos, y todas las preguntas y soluciones estaban escritas en palabras (e ilustradas en diagramas). Sin embargo, en el siglo III, DIOFANTO DE ALEJANDRÍA introdujo la idea de abreviar el enunciado de una ecuación reemplazando las cantidades y operaciones de uso frecuente con símbolos como una especie de taquigrafía. Este nuevo enfoque en los símbolos tuvo el sutil efecto de alejar el pensamiento griego de la geometría. Desafortunadamente, la idea de usar los símbolos para resolver ecuaciones fue ignorada hasta el siglo XVI.

Las escuelas de pensamiento babilónica y griega también influyeron en el desarrollo de las matemáticas en la antigua India. El erudito BRAHMAGUPTA (ca. 598–665) dio soluciones a

(continúa)

Machine Translated by Google

Historia de las Ecuaciones y Álgebra (continuación)

ecuaciones cuadráticas y describió métodos generales para resolver sistemas de ecuaciones que contienen varias variables. (También tenía una comprensión clara de los números negativos y se sentía cómodo trabajando con el cero como una cantidad numérica válida). El erudito Bh–askara (ca. 1114–85) usó letras para representar cantidades desconocidas y, al trabajar con ecuaciones cuadráticas, sugirió que todos los números positivos tienen dos raíces cuadradas y que los números negativos no tienen raíces (significativas).

Un paso significativo hacia el desarrollo del álgebra moderna ocurrió en Bagdad, Irak, en el año 825 cuando el matemático árabe MUHAMMAD IBN M – US– A AL-KHW– ARIZM– I (ca. 780–850) publicó su famosa pieza Hisab al -jabr w'al muqa¯ bala (Cálculo por restauración y reducción). Este trabajo representa la primera exposición clara y completa sobre el arte de resolver ecuaciones lineales mediante una nueva práctica de realizar la misma operación en ambos lados de una ecuación. Por ejemplo, la expresión x – 3 = 7 se puede "restaurar" a x = 10 sumando tres a ambos lados de la expresión, y la ecuación 5x = 10 se puede "reducir" a x = 2 dividiendo ambos lados de la expresión. ecuación por cinco. Al-Khw– arizm– ı también mostró cómo resolver ecuaciones cuadráticas mediante técnicas similares. Sin embargo, sus descripciones no usaban símbolos y, como los antiguos griegos, al-Khw– arizm– ı escribía todo con palabras. No obstante, el tratado de al-Khw– arizm– ı fue enormemente influyente, y su nuevo enfoque para resolver ecuaciones allanó el camino para el pensamiento algebraico moderno. De hecho, es de la palabra al-jabr en el título de su libro que se deriva nuestra palabra álgebra.

El trabajo de Al-Khw– arizm– ı fue traducido al latín por el matemático italiano FIBONACCI (ca. 1175–1250), y sus métodos eficientes para resolver ecuaciones se extendieron rápidamente por Europa durante el siglo XIII. Fibonacci tradujo la palabra shai utilizada por al-Khw– arizm– ı para "la cosa desconocida" al término latino res. También usó la palabra italiana cosa para "cosa", y el arte del álgebra se conoció en Europa como "el arte cósico".

En 1545, GIROLAMO CARDANO (1501-1576) publicó Ars magna (El gran arte), que incluía soluciones a las ECUACIONES cúbicas y CUÁRTICAS, así como otros descubrimientos matemáticos. A fines del siglo XVII, los matemáticos se sentían cómodos realizando el mismo tipo de manipulaciones simbólicas que practicamos hoy y estaban dispuestos a aceptar números negativos y cantidades irracionales como soluciones de ecuaciones. El matemático francés FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) introdujo un sistema eficiente para denotar potencias de variables y fue el primero en usar letras como coeficientes antes de variables, como en "ax2 + bx + c", por ejemplo.
(Viète también introdujo los signos "+" y "–", aunque nunca usó un signo de igualdad.) RENÈ DESCARTES (1596–1650) introdujo la convención de denotar cantidades desconocidas por las últimas letras del alfabeto, x, y, z, y cantidades conocidas por las primeras, a, b, c. (Esta convención ahora está completamente arraigada; cuando vemos, por ejemplo, una ecuación de la forma ax + b = 0, asumimos, sin lugar a dudas, que es para "x" lo que debemos resolver).

El matemático alemán CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) demostró el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA en 1797, que establece que toda ecuación POLINOMIAL de grado n tiene al menos una y como máximo n (posiblemente complejas) raíces.
Su trabajo, sin embargo, no proporciona métodos reales para encontrar estas raíces.

Los eruditos del Renacimiento SCIPIONE DEL FERRO (1465–1526) y NICCOLÒ TARTAGLIA (ca. 1500–57) sabían cómo resolver ecuaciones cúbicas, y en su tratado Ars magna de 1545, Cardano publicó la solución a la ecuación de cuarto grado descubierta por su asistente. LUDOVICO FERRARI (1522-1565). Durante los siglos siguientes, los matemáticos intentaron encontrar un método aritmético general para resolver todas las ecuaciones de quinto grado. LEONHARD EULER (1707-1783) sospechó que la tarea podría ser imposible. Entre los años 1803 y 1813, el matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822) publicó una serie de resultados algebraicos que sugerían fuertemente lo mismo, y solo unos años después, el matemático noruego NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) demostró que , en efecto , no existe una fórmula general que resuelva todas las ecuaciones quínticas en un número finito de operaciones aritméticas. Por supuesto, algunas ecuaciones de grado cinco pueden resolverse algebraicamente. (Ecuación de la forma x soluciones x = 5√a. –) En 1831, el matemático francés ÉVARISTE GALOIS (1811–32) clasificó por completo aquellas ecuaciones que pueden resolverse de esa manera, desarrollando un trabajo que dio lugar a toda una nueva rama de las matemáticas que hoy se ^{5} – a = 0, por ejemplo, tener llama TEORIA DE GRUPOS.

En el siglo XIX, los matemáticos comenzaron a utilizar variables para representar cantidades distintas de los números reales. Por ejemplo, el matemático inglés GEORGE BOOLE (1815-1864) inventó una lógica simbólica de álgebra en la que las variables representaban conjuntos, y el erudito irlandés SIR WILLIAM ROWAN HAMIL TON (1805-1865) inventó sistemas algebraicos en los que las variables representaban VECTORES o CUATERNIOS.

Con estos nuevos sistemas, cambiaron características importantes del álgebra. Hamilton, por ejemplo, descubrió que la multiplicación ya no era conmutativa en sus sistemas: un producto a × b no necesariamente daría el mismo resultado que b × a. Esto motivó a los matemáticos a desarrollar AXIOMAS abstractos para explicar el funcionamiento de diferentes sistemas algebraicos. Así nació el tema del ÁLGEBRA ABSTRACTA . Un colaborador destacado en este campo fue el matemático alemán AMALIE NOETHER (1883-1935), quien hizo importantes descubrimientos sobre la naturaleza de las álgebras no conmutativas.

Véase también ASOCIATIVO; MATEMÁTICAS BABILÓNICAS; CANCELAR LACIÓN; PROPIEDAD CONMUTATIVA; MATEMÁTICAS EGIPCIA; CAMPO; MATEMÁTICAS GRIEGAS; MATEMÁTICAS INDIAS; ÁLGEBRA LINEAL; ANILLO.

Machine Translated by Google

En los tiempos modernos, el tema del álgebra se ha ampliado para incluir ÁLGEBRA ABSTRACTA, LA ORIA DE GRUPOS y el estudio de sistemas numéricos alternativos como la ARITMÉTICA MODULAR. ÁLGEBRA BOOLEANA examina el álgebra de las inferencias lógicas, el álgebra matricial la aritmética de las operaciones MATRICIALES y el álgebra vectorial la mecánica de las operaciones VECTORIALES y ESPACIOS VECTORIALES.

Una estructura algebraica es cualquier conjunto equipado con una o más operaciones (generalmente OPERACIONES BINARIAS) que satisfacen una lista de reglas específicas. Por ejemplo, cualquier grupo, ANILLO, CAMPO o espacio vectorial es una estructura algebraica. En matemáticas avanzadas, un espacio vectorial que también es un campo se denomina "álgebra".

Véase también SOPORTES; PROPIEDAD CONMUTATIVA; DIS PROPIEDAD TRIBUTIVA; SOPORTES DE EXPANSIÓN; FUNDA TEOREMA MENTAL DEL ÁLGEBRA; HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo); ORDEN DE OPERACIÓN.

número algebraico Un número se llama algebraico si es la raíz de un POLINOMIO con coeficientes enteros.
Por ejemplo, (1/2) (5 + √ —13) es algebraico ya que es una solución a la ecuación x – 5x + 3 = 0. Todos los NÚMEROS RACIONALES son algebraicos (ya que una fracción a/b es la solución a la ecuación bx – a = 0), y todo cuadrado, cubo, √ —a las raíces superiores de números enteros son es a y algebraicas (ya que a es solución de x

A primera vista parece que todos los números son algebraicos, pero no es así. En 1844, el matemático francés JOSEPH LIIOUVILLE hizo el sorprendente descubrimiento de que el siguiente número, hoy llamado "constante de Liouville", no puede ser una solución para ninguna ecuación polinomial entera:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.11000100000000000000000100 \ldots$$

Los números que no son algebraicos se llaman "trascendentales".

En 1873, el matemático francés Charles Hermite (1822–1901) demostró que el número e es trascendental y, nueve años más tarde, en 1882, el matemático alemán CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN estableció que π es trascendental. En 1935, el matemático ruso Aleksandr Gelfond (1906-1968) demostró que cualquier número b es trascendental si a y b son álgidos de la forma a

braico, con a diferente de 0 o 1, yb irracional .
(Así, por ejemplo, 2√ 3 es trascendental.)

El matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918) demostró que el conjunto de números algebraicos es CONTABLE. Como el conjunto de los números reales es incontable, esto significa que la mayoría de los números son trascendentale
La probabilidad de que un número real elegido al azar sea algebraico es cero. Aunque en 1929 se demostró que π es trascendental, hasta el día de hoy nadie sabe si π es algebraico. o no π

En analogía con los números algebraicos, una FUNCIÓN y = f(x) se llama "algebraica" si puede definirse mediante una relación de la forma

$$pn(x)yn + pn-1(x)y n-1 + \ldots + p1(x)y + p0(x) = 0$$

donde las funciones pi (x) son polinomios en x. Por ejemplo, la función y = √ —x es una función algebraica, ya que está definida por la ecuación y la función scendental es 2 – x = 0. A tran una función que no es algebraica.
Los matemáticos han demostrado que las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales son trascendentales.

Véase también CARDINALIDAD.

algoritmo Un algoritmo es un conjunto específico de instrucciones para llevar a cabo un procedimiento o resolver un problema matemático. Los sinónimos incluyen "método", "procedimiento" y "técnica". Un ejemplo de un algoritmo es el método común de DIVISIÓN LARGA.
Otro es el ALGORITMO EUCLIDEO para encontrar el MÁXIMO COMÚN DIVISOR de dos enteros positivos.
La palabra algoritmo es una distorsión de "al-Khw– arizm– ı", el nombre de un matemático persa (ca. 820) que escribió un influyente texto sobre métodos algebraicos.

Véase también BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO; MAHOMA IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı.

serie alterna UNA SERIE cuyos términos son alternativamente positivos y negativos se llama serie alterna. Para ejemplo, la SERIE GREGORY $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$ es una serie alterna, como lo es la serie (divergente): 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +… Las series alternas tienen la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

, con cada ai positivo número.

Machine Translated by Google

En 1705, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ notó que muchas series alternas convergentes, como la serie de Gregory, tienen términos ai que decrecen y se aproximan a cero:

i. a1 ≥ a2 ≥ a3 ≥…
ii. un → 0

Logró demostrar que cualquier serie alterna que satisfaga estas dos condiciones converge, y hoy en día este resultado se denomina "prueba de series alternas".
(Uno puede ver que la prueba es válida si uno realiza físicamente pasos cada vez más pequeños de un lado a otro: a1 pie hacia adelante, a2 pies hacia atrás, a3 pies hacia adelante, y así sucesivamente. Este movimiento comienza a "perfeccionarse" en una única ubicación límite). Vemos, por ejemplo, que la serie

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{25}-\cdots$$

converge Desafortunadamente, la prueba de series alternas no nos da ninguna indicación de cuál podría ser el valor de la suma. Generalmente, encontrar el valor límite es una cantidad considerable de trabajo, si es posible. Los valores de muchas series alternas "simples" no se conocen hoy en día. (Se puede mostrar, sin embargo, que la serie anterior converge a $\pi^2/12$. Ver SERIE CONVERGENTE.)

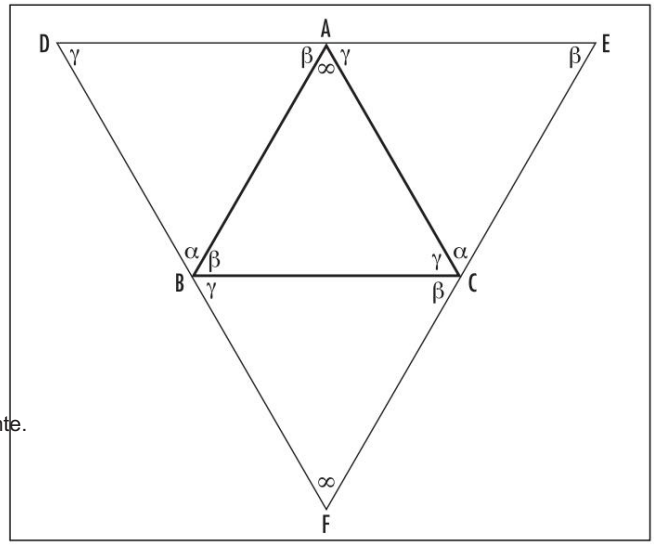
Ver también FUNCIÓN ZETA.

altitud Un segmento de línea que indica la altura de una figura geométrica de dos o tres dimensiones, como un POLÍGONO, POLIEDRO, CILINDRO o CONO , se denomina altura de la figura. Una altura se encuentra con la base de la figura en un ÁNGULO RECTO.

Cualquier TRIÁNGULO tiene tres altitudes distintas. Cada uno es un segmento de LÍNEA que emana de un vértice del triángulo que se encuentra con el borde opuesto en un ángulo de 90°. La LEY DE LOS SENOS muestra que las longitudes ha , hb y hc de las tres alturas de un triángulo ABC satisfacen:

$$h_a = c \sin \beta = b \sin \gamma$$
$$h_b = a \sin \gamma = c \sin \alpha$$
$$h_c = b \sin \alpha = a \sin \beta$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo, y α, β y γ son los ángulos en los vértices A, B y C, respectivamente. Aquí ha es la altura que se encuentra con el lado de longitud a en 90°. De manera similar, hb y hc son las alturas que se encuentran con los lados de longitud b y c, respectivamente. También se sigue de esta ley que se cumple la siguiente relación:



Demostrando que las altitudes son concurrentes

$$h_a h_b h_c = \frac{(a B C)^3}{3r^8}$$

donde r es el radio del círculo que contiene los puntos A, B y C.

Las tres alturas de un triángulo siempre se encuentran en un punto común llamado ortocentro del triángulo. Sorprendentemente, este hecho fundamental no fue advertido por el geómetra EUCLID (ca. 300 a. C.). La pretensión puede probarse de la siguiente manera:

Dado un triángulo ABC, dibuja tres líneas, una a través de cada vértice y paralela al lado opuesto a ese vértice. Esto crea un triángulo DEF más grande.

Por el POSTULADO PARALELO, los ángulos alternos a través de líneas paralelas son iguales. Esto nos permite establecer que todos los ángulos en el diagrama tienen los valores que se muestran. En consecuencia, el triángulo DAB es semejante al triángulo ABC y, de hecho, es congruente con él, ya que comparte el lado común AB. Tenemos que DA tiene la misma longitud que BC. De manera similar, podemos mostrar que AE también tiene la misma longitud que BC, por lo que A es el punto medio del lado DE del triángulo grande. De manera similar, B es el punto medio del lado DF y C el punto medio del lado EF. El estudio de los puntos EQUIDISTANTES establece que

Machine Translated by Google

las mediatrices de cualquier triángulo son CONCURRENTES, es decir, se encuentran en un punto. Pero las mediatrices del triángulo DEF son precisamente las alturas del triángulo ABC.

También se puede demostrar que las tres altitudes de un tri ángulo satisfacer:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{R}$$

donde R es el radio del círculo más grande que se encuentra dentro del triángulo.

Véase también LÍNEA DE EULER.

números amistosos (números amistosos) Se dice que dos números enteros a y b son amistosos si la suma de los FACTORES de a, excluyendo a sí mismo, es igual a b, y la suma de los factores de b, excluyendo a sí mismo b , es igual a a. Por ejemplo, los números 220 y 284 son amistosos:

284 tiene factores 1, 2, 4, 71 y 142, y su suma es 220

220 tiene factores 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, y su suma es 284

El par (220, 284) es el par amistoso más pequeño. Durante muchos siglos se creyó que este par era el único par de números amistosos. En 1636, sin embargo, PIERRE DE FERMAT descubrió un segundo par, (17296, 18416), y en 1638, RENÉ DESCARTES descubrió el par (9363584, 9437056). Ambos pares también eran conocidos por los matemáticos árabes, quizás en una fecha anterior.

Para 1750, LEONHARD EULER había recopilado 60 parejas amistosas más. En 1866, Nicolò Paganini, de 16 años, encontró el pequeño par (1184, 1210) perdido por todos los estudiosos de los siglos anteriores. Hoy en día se conocen más de 5.000 parejas amigas diferentes. El par más grande conocido tiene números de 4.829 dígitos cada uno.

Véase también NÚMERO PERFECTO.

análisis Cualquier tema de las matemáticas que hace uso de la noción de LÍMITE en su estudio se denomina análisis. CÁLCULO cae bajo este encabezamiento, al igual que la suma de SERIES infinitas y el estudio de NÚMEROS REALES.

Matemático griego PAPPUS DE ALEJANDRÍA (ca. 320 CE) llamado el proceso de descubrir una prueba o un solución a un problema “análisis”. Escribió acerca de “un método de análisis” algo vagamente en su colección de textos de geometría, lo que dejó a los matemáticos siglos más tarde preguntándose si había un método secreto escondido detrás de toda la geometría griega.

El gran RENÉ DESCARTES (1596-1650) desarrolló un poderoso método de usar el álgebra para resolver problemas geométricos. Su enfoque se conoció como geometría analítica.

Véase también TEORÍA ANALÍTICA DE LOS NÚMEROS; CARTESIANO COORDENADAS.

Teoría analítica de los números La rama de la TEORÍA DE LOS NÚMEROS que utiliza la noción de LÍMITE para estudiar las propiedades de los números se denomina teoría analítica de los números. Esta rama de las matemáticas normalmente se ocupa del comportamiento “promedio” de los números. Por ejemplo, para responder:

En promedio, ¿cuántos factores cuadrados tiene un número?

uno nota que todos los números tienen 1 como factor, una cuarta parte de todos los números tienen 4 como factor, un noveno tiene el factor 9, un dieciseisavo el factor 16, y así sucesivamente. Así, en promedio, un número posee

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

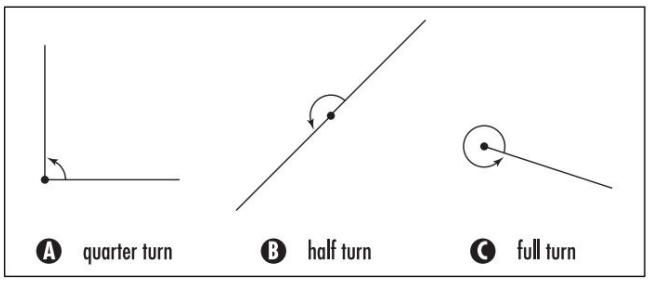
factores cuadrados. este par matemáticamente preciso.

Véase también ANÁLISIS; FUNCIÓN ZETA.

ángulo Dada la configuración de dos LÍNEAS, segmentos de línea o RAYOS que se intersecan, la cantidad de ROTACIÓN sobre el punto de intersección necesaria para que una línea coincida con la otra se denomina ángulo entre las líneas. En pocas palabras, un ángulo es una medida de "una cantidad de giro". En cualquier diagrama que represente un ángulo, las longitudes de las líneas dibujadas son irrelevantes.
Por ejemplo, un ángulo correspondiente a un octavo de una vuelta completa se puede representar mediante rayos de 2, 20 o 200 pulgadas de longitud.

La imagen de un faro con un haz de luz giratorio ayuda a aclarar el concepto de ángulo: cada rayo o segmento de línea en un diagrama representa la posición inicial o final del haz de luz después de un giro determinado. Por ejemplo, los ángulos correspondientes a un cuarto de vuelta, media vuelta y una vuelta completa aparecen de la siguiente manera:

Machine Translated by Google



Algunos ángulos simples

Los matemáticos a veces encuentran conveniente considerar un ángulo medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj como positivo y uno medido en el sentido de las manecillas del reloj como negativo.

Los eruditos babilónicos de la antigüedad sabían que el año se compone de 365 días, pero optaron por operar con un calendario conveniente compuesto por 12 meses de 30 días. Así, el número 360 llegó a asociarse con la noción de un ciclo completo. Hoy, remontándonos a los babilonios, los ángulos se miden en unidades de grados, en las que una rotación completa corresponde a 360 grados (escrito 360°). Así, media vuelta corresponde a 180° y un cuarto de vuelta a 90°. Un solo grado corresponde a 1/360 de vuelta.

Cada grado se divide en 60 unidades más pequeñas llamadas minutos, indicadas con un apóstrofe, y cada minuto se divide en 60 unidades más pequeñas llamadas segundos, indicadas con dos apóstrofes. Así, por ejemplo, 15°46′23″ representa un ángulo de 15 grados, 46 minutos y 23 segundos.

Los matemáticos prefieren utilizar una unidad de medida de ángulos independiente de la circunstancia en que vivimos en la Tierra, es decir, una que sea natural para las matemáticas.
La unidad de medida elegida se llama radián.
Trabajando con el CÍRCULO más simple posible, es decir, un círculo de radio uno, los matemáticos relacionan la medida de una vuelta completa con la distancia alrededor de ese círculo, es decir, 2π, la circunferencia del círculo. Por lo tanto, una rotación completa equivale a 2π radianes. Una media vuelta se mide como la mitad de esto, es decir, π radianes, y un cuarto de vuelta como 1

$\frac{}{4}\ 2 = \pi\ \frac{\pi}{}$ radián.

Para convertir entre medidas en grados y radianes, uno simplemente observa que 360 grados corresponden a 2π radián. (Así, un grado es igual a $\frac{2\ pi}{360} \approx 0.017$ radián, y un radian es igual $\frac{360}{2\ pi} \approx 57.3^{o}$.)

Una unidad de medida llamada "gradian" se usa algunas veces en topografía. En este sistema, una vuelta completa se considera 400 gradian (y, en consecuencia, un cuarto de vuelta se divide exactamente en 100 partes). Este sistema rara vez se usa en matemáticas, si es que se usa.

Los ángulos se clasifican según su medida:

• Un ángulo de cero grados se llama ángulo nulo. • Un ángulo entre 0° y 90° se llama agudo. • Un ángulo de 90° se llama ángulo recto. (Es el ángulo que se forma cuando uno hace un giro perfecto a la derecha.) • Un ángulo entre 90° y 180° se llama obtuso. • Un ángulo de 180° se llama ángulo llano. • Un ángulo entre 180° y 360° se llama reflejo

ángulo.
• Un ángulo de 360° se llama PERIGÓN o ángulo redondo.

Se dice que dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Si dos ángulos tienen medidas que suman un ángulo recto, entonces se dice que son complementarios, y dos ángulos son suplementarios si sus medidas suman un ángulo llano. También se dan nombres especiales a los ángulos que aparecen en un diagrama que involucra un TRANSVERSAL.

El ángulo de elevación de un punto P sobre el suelo en relación con un observador en la posición Q sobre el suelo se define como el ángulo entre la línea que conecta Q con P y la línea que conecta Q con el punto en el suelo directamente debajo de P. Si P se encuentra por debajo del nivel del suelo, entonces un ángulo de depresión se calcula de manera similar .

El ángulo entre dos VECTORES se calcula a través del PRODUCTO DOT. Usando TRIGONOMETRÍA se demuestra que el ángulo A entre dos rectas en el plano de pendientes m1 y m2 , respectivamente, viene dado por:

$$\text{bronceado} = \frac{\text{milímetro} - \text{milímetro}}{1 + \text{milímetro}\ \text{milímetro}}$$

(Esto sigue al notar que el ángulo que forma la primera línea con el eje x es tan–1(m1) y el ángulo de la segunda línea es tan–1(m2). Por lo tanto, el ángulo que buscamos es A = tan–1 (m1) – tan–1(m2) La identidad trigonométrica tan(α– β) =

$\text{bronceado}(\alpha - \beta)$ $\frac{\text{bronceado} - \text{bronceado}}{1 + \tan\ \tan}$ En β ahora establece el resultado.) α β

consecuencia, si m1m2 = –1, las rectas son PERPENDI CULARES.
El ángulo entre dos curvas que se intersecan en un plano se define como el ángulo entre las líneas TAN GENT a las curvas en el punto de intersección.

El vínculo entre la medida de un ángulo y la longitud de los arcos de un círculo unitario para definir la medida en radianes se puede extender para asociar una medida de "ángulo" con

Machine Translated by Google

regiones en una unidad ESFERA. UN ÁNGULO SÓLIDO de una región es simplemente la medida del ÁREA de la superficie de esa región proyectada sobre una esfera unitaria. Las unidades de ángulo sólido se llaman estereorradianes. El área total de la superficie de la esfera es 4π estereorradián.

Véase también MATEMÁTICAS BABILÓNICAS; DIEDRO; PENDIENTE; TRIÁNGULO; TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.

trisección de ángulo Ver TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.

anillo (plural, anillo) Un anillo es la región entre dos círculos CONCÉNTRICOS en un plano. El ÁREA del anillo es la diferencia de las áreas de los dos círculos.

Si un ciclista recorre un círculo perfecto, la región entre las huellas formadas por las ruedas delanteras y traseras es un anillo. Si la bicicleta mide r pies de largo (eje a eje), entonces, sorprendentemente, el área de este anillo es πr 2 pies cuadrados, independientemente del tamaño del círculo que trace el ciclista.

antidiferenciación (integración) El proceso de encontrar una función con una función dada como su DERIVADA se llama antidiferenciación. Por ejemplo, x es un

antiderivada de 2x, ya que $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. la MEDIA

El TEOREMA DEL VALOR muestra que dos antiderivadas de la misma función difieren solo en una constante. Así, todas las antiderivadas de 2x, por ejemplo, son funciones de la forma x 2 + C.

La antiderivada de una función f(x) se denota $\int f(x)dx$ y se llama integral indefinida de f. Está definida hasta una constante, por lo que escribimos, por ejemplo, $\int 2x\,dx = x^2 + C$. (La constante C se denomina "constante de integración"). La notación sugiere deliberadamente una integral definida de una función, $\int_a^b f(x)dx$, para el área bajo la curva y = f(x) sobre el INTERVALO [a,b]. El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO muestra que las dos nociones están íntimamente conectadas.

Véase también CÁLCULO INTEGRAL.

antilogaritmo Véase LOGARITMO.

puntos antípodas (antípodas) Dos puntos en un ESFERA en los extremos opuestos de un diámetro se dice que son antípoda. Por ejemplo, los polos norte y sur son puntos antípodas en la TIERRA, como lo son dos puntos cualesquiera EQUIDISTANTES del ecuador, con longitudes que difieren en 180°.

El famoso teorema de Borsuk-Ulam, primero conjeturado por Stanislaw Ulam y luego demostrado por Karol Borsuk en 1933, establece:

> Sea f una función continua que asigna dos valores numéricos a todos y cada uno de los puntos de la superficie de una esfera. Entonces deben existir dos puntos antípodas a los que se les asigna precisamente el mismo par de valores.

Una divertida interpretación dice:

> En cualquier instante existen dos puntos antípodas en la superficie de la Tierra de exactamente la misma temperatura y presión del aire.

Aunque la demostración de este teorema es difícil, se sigue una versión unidimensional del resultado como consecuencia fácil del TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO .

vértice (plural, vértices) El punto en la parte superior de un POLÍGONO o un POLIEDRO, como el vértice de un triángulo opuesto a su BASE o el vértice de una pirámide, se llama el vértice de la figura. La distancia desde la base de la figura hasta su vértice se llama altura de la figura.

Apolonio de Perge (ca. 262–190 a. C.) Geometría griega Nacido en Perga, en la Jonia griega, ahora Antalya, Turquía, Apolonio trabajó durante la Edad de Oro de las matemáticas griegas y se le conoce a lo largo de la historia como el Gran Geómetra. Su famosa obra, Las cónicas, escrita en ocho volúmenes, influyó mucho en el desarrollo de las matemáticas. (Se dice que los nombres ELIPSE, PARÁBOLA e HIPERBOLA para las tres SECCIONES CÓNICAS, por ejemplo, fueron acuñados por Apolonio.) Hoy se conservan copias de los primeros cuatro volúmenes de esta obra, escrita en el griego original. También existen traducciones al árabe de los primeros siete volúmenes.

Poco se sabe de la vida de Apolonio aparte de lo que se puede deducir de los comentarios incidentales hechos en los prefacios de sus libros. De joven se sabe que viajó a Alejandría para estudiar con los seguidores de EUCLID, quienes luego lo introdujeron en el tema de las cónicas.

Machine Translated by Google

El primer volumen de The Conics simplemente revisa material elemental sobre el tema y presenta principalmente resultados ya conocidos por Euclides. Volúmenes dos y tres presentan resultados originales con respecto a las ASINTOTAS a hipérbolas y la construcción de líneas TANGENTE a cónicas. Mientras que Euclides demostró un medio, por ejemplo, de construir un círculo que pase por cualquier tres puntos dados, Apolonio demostró técnicas para construir círculos tangentes a tres líneas cualquiera, o a tres círculos cualesquiera, o a tres objetos cualesquiera, ya sean una combinación de puntos, líneas o círculos. Volúmenes cuatro, cinco, seis y siete de su famoso trabajo son muy innovadores y contienen resultados originales que exploran cuestiones de curvatura, la construcción de líneas normales y la construcción de curvas acompañantes de cónicas. Apolonio también aplicó la teoría de las cónicas para resolver problemas prácticos problemas. Inventó, por ejemplo, un sistema de alta precisión reloj de sol, llamado hemicyclium, con líneas horarias dibujadas en la superficie de una sección cónica.

Apolonio también desempeñó un papel fundamental en la desarrollo de la astronomía matemática griega. Él propuso un análisis matemático completo del epicíclico movimiento (es decir, el movimiento compuesto de círculos rodando a lo largo de círculos) como un medio para ayudar a explicar el observado movimiento retrógrado de los planetas a través de los cielos que había confundido a los eruditos de su tiempo.

El trabajo de Apolonio fue extraordinariamente influyente, y su texto sobre las cónicas se consideró una pieza de referencia estándar para los estudiosos europeos de la Renacimiento. JOHANNES KEPLER, RENÉ DESCARTES, y SIR ISSAC NEWTON cada uno hizo referencia a The Cónicas en sus estudios.

Véase también CIRCUNCIRCULO; CICLOIDE.

Círculo de Apolonio Sean A y B dos puntos de la plano y sea k una constante. Entonces el conjunto de todos los puntos P cuya distancia a A es k veces su distancia a B es un CIRCULO. Cualquier círculo obtenido de esta manera se denomina como uno de los círculos de Apolonio. Tenga en cuenta que cuando k = 1 el círculo es "degenerado", es decir, el conjunto de todos los puntos EQUIDISTANTE de A y B es una línea recta. cuando k se vuelve grande, el círculo de Apolonio se aproxima a un círculo de radio 1.

Para ver que el lugar geométrico de los puntos descritos de esta manera es de hecho un círculo, establecer A para ser el origen (0,0), B para ser el punto (k + 1, 0) en el eje x, y P ser un punto general con coordenadas (x, y). La DISTANCIA PARA MULA luego da una ecuación de la forma $\sqrt{xy\ kxk\ y\ (\ +\ )} = -\sqrt{\ +\ }1$. Esto es equivalente a $x - \frac{k^2}{k-1}^2 + y^2 = \frac{k}{k-1}^2$, que es de hecho el equa ción de un círculo, uno de radio $\frac{k}{k-1}$. APOLONIO DE PERGA usó técnicas puramente geométricas, sin embargo, para establecer su pretensión.

Teorema de Apolonio Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y una mediana de longitud m divide el tercer lado en dos longitudes iguales c/2 y c/2, entonces se cumple la siguiente relacion:

$$a^2 + b^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Este resultado se conoce como el teorema de Apolonio. Puede ser demostrado usando dos aplicaciones de la LEY DE LOS COSENOS como sigue:

Sea B el ÁNGULO entre los lados de longitud a y c. Entonces $m^2 = a^2 + (c/2)^2 - ac\cos(B)$ y $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$. Resolviendo para ac cos(B) en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene el resultado.

Véase también MEDIANA DE UN TRIÁNGULO.

apotema (radio corto) Cualquier segmento de línea desde el centro de un POLÍGONO regular al punto medio de cualquiera de sus lados se llama apotema. Si el polígono regular tiene n lados, cada uno de una unidad de longitud, entonces un ejercicio en La TRIGONOMETRIA muestra que cada apotema de la figura tiene longitud $r = \frac{1}{2\tan\frac{180}{n}}$.

Un análogo de PI (π) para un polígono regular es el RAZÓN de su PERÍMETRO al doble de la longitud de su apotema. Para un polígono regular de n lados, esta relación tiene valor n tan(180/n). La REGLA DE SQUEEZE muestra que esto cantidad se aproxima al valor π a medida que n se vuelve grande.

Véase también RADIO LARGO.

Machine Translated by Google

matemáticas aplicadas El estudio y uso de las técnicas matemáticas para resolver problemas prácticos se denomina matemáticas aplicadas. El campo tiene varias ramas que incluyen ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD, mecánica, física matemática y los temas que se derivan de ellas, pero la distinción de MATEMÁTICAS PURA podría no ser clara. Por ejemplo, el estudio general de VECTORES y ESPACIO VECTORIAL puede verse como un estudio abstracto o práctico si más adelante se tiene en mente utilizar esta teoría para analizar diagramas de fuerza en mecánica.

Muchas universidades de investigación de hoy en día poseen dos departamentos de matemáticas, uno considerado puro y el otro aplicado. Los estudiantes pueden obtener títulos avanzados en cualquier campo.

aproximación Una respuesta numérica a un problema que no es exacta pero es suficiente para todos los propósitos prácticos se llama aproximación. Por ejemplo, notar que 210 es aproximadamente 1,000 nos permite estimar rápidamente el valor de 2100 = (210) 10 como 1030. A menudo se alienta a los estudiantes a usar la fracción 22/7 como un valor aproximado para π.

Los matemáticos usan la notación "≈" para denotar aproximadamente igual a. Así, por ejemplo, π ≈ 22/7.

Los físicos e ingenieros a menudo aproximan las funciones por su SERIE DE TAYLOR con el orden superior términos caídos. Por ejemplo, menos $\approx - + xx ! 3 5 \frac{pecado}{} \frac{3 5 xx}{}$, en para valores pequeños de x. La teoría del CÁLCULO INTEGRAL comienza aproximando áreas bajo curvas como sumas de áreas de rectángulos.

Véase también ERROR; FACTORIAL; DIFERENCIA NUMÉRICA TIACIÓN; INTEGRACION NUMERICA.

Matemáticas árabes Los historiadores matemáticos de hoy están agradecidos a los eruditos árabes del pasado por preservar, traducir y honrar las grandes obras matemáticas indias, griegas e islámicas de los eruditos anteriores a ellos, y por sus propias contribuciones significativas al desarrollo de las matemáticas. A finales del siglo VIII, con la gran Biblioteca de Alejandría destruida, el califa al-Ma'mun estableció una Casa de la Sabiduría en Bagdad, Irak, que se convirtió en el próximo centro destacado de aprendizaje e investigación, así como en el repositorio de importantes textos académicos. Muchos eruditos fueron empleados por el califa para traducir el matemático obras históricas del pasado y desarrollar más las ideas que contenían. A medida que el imperio islámico creció durante los siguientes siete siglos, también se extendió la cultura de la búsqueda intelectual. Muchos eruditos de la Europa del siglo XII y posteriores visitaron las bibliotecas islámicas de España para leer los textos de los académicos árabes y aprender de los avances que se habían producido en Oriente durante la edad oscura de Occidente. Una cantidad significativa de material matemático se transmitió a Europa a través de estos medios.

Uno de los primeros textos griegos que se tradujo en la Casa de la Sabiduría fue el famoso tratado de EUCLID , LOS ELEMENTOS. Este trabajo tuvo un tremendo impacto en los eruditos árabes de la época, y muchos de ellos, al realizar sus propias investigaciones, formularon teoremas y demostraron resultados precisamente al estilo de Euclides.

Los miembros de la Casa de la Sabiduría también tradujeron las obras de ARQUÍMEDES DE SIRACUSA, DIOFANTE DE ALEJANDRÍA, MENELAO DE ALEJANDRÍA y otros, por lo que ciertamente estaban familiarizados con todos los grandes avances griegos en los temas de GEOMETRÍA, TEORÍA DE NÚMEROS, mecánica y análisis. También tradujeron las obras de eruditos indios, ARYABHATA y BH _ _

ASKARA, por ejemplo, y estaban familiarizados con la teoría de la TRIGONOMETRÍA, los métodos de astronomía y otros temas de geometría y teoría de números. Cualquier erudito árabe que visitara la Casa de la Sabiduría tenía, esencialmente, la mayor parte del conocimiento matemático humano a su disposición en su propio idioma.

El matemático árabe MUHAMMAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı (ca. 800) escribió una serie de textos originales que tuvieron una enorme influencia. Su primera pieza simplemente describía el sistema de valor posicional decimal que había aprendido de fuentes indias. Trescientos años más tarde, cuando se tradujo al latín, este trabajo se convirtió en la fuente principal para los europeos que querían aprender el nuevo sistema de escritura y manipulación de números. Pero más importante fue la obra de al-Khw– arizm– ı Hisab al-jabr w'al-muq¯abala (Cálculo por restauración y reducción), de la que surgió el tema del "álgebra" ("al-jabr"). . Al-Khw– arizm– ı tuvo la suerte de tener a su disposición todas las fuentes de conocimiento matemático. Comenzó a ver que las nociones entonces dispares de "número" y "magnitud geométrica" podrían unificarse como un todo mediante el desarrollo del concepto de objetos algebraicos. Esto representó una desviación significativa del pensamiento griego, en el que las matemáticas son sinónimo de geometría.

La perspicacia de Al-Khw– arizm– ı proporcionó un medio para estudiar tanto la aritmética como la geometría bajo un solo marco, y

Machine Translated by Google

sus métodos de álgebra allanaron el camino para desarrollos significativos en matemáticas de un alcance mucho más amplio de lo que nunca antes se había imaginado.

El matemático al-Mahani (ca. 820) desarrolló enfoques refinados para reducir problemas geométricos a problemas algebraicos. Demostró, en particular, que el famoso problema de DUPLICAR EL CUBO es esencialmente una cuestión de álgebra. Otros eruditos aportaron rigor al tema al demostrar que ciertos métodos algebraicos populares, pero complicados, eran válidos. Estos eruditos se sentían cómodos manipulando POLINOMIOS y desarrollaron reglas para trabajar con EXPONENTES. Resolvieron ecuaciones lineales y CUADRÁTICAS , así como varios SISTEMAS DE ECUACIONES. Sorprendentemente, nadie en ese momento pensó en facilitar las cosas usando símbolos para representar cantidades: todas las ecuaciones y todas las manipulaciones se describieron completamente en palabras cada vez que se emplearon.

Con las ecuaciones cuadráticas bien entendidas, el erudito OMAR KHAYYAM (ca. 1048-1131) intentó desarrollar métodos para resolver ecuaciones de grado tres.
Aunque no pudo desarrollar métodos algebraicos generales para esta tarea, encontró técnicas geométricas ingeniosas para resolver ciertos tipos de cúbicas con la ayuda de SECCIONES CÓNICAS. Era consciente de que tales ecuaciones podían tener más de una solución.

En la teoría de números, Thabit ibn Qurra (ca. 836-901) encontró un hermoso método para generar NÚMEROS AMIGABLES. Esta técnica fue utilizada más tarde por al-Farisi (ca. 1260-1320) para producir el par 17.296 y 18.416, que hoy en día se suele atribuir a LEONHARD EULER (1707-1783). En su escrito, Omar Khayyam se refirió a textos árabes anteriores, ahora perdidos, que discuten el equivalente del TRIÁNGULO DE PASCAL y sus conexiones con el TEOREMA DEL BINOMIO. El matemático al-Haytham (ca. 965-1040) intentó clasificar todo incluso PERFECTO

Números.

Aprovechando la facilidad del sistema indio de representación de valor posicional decimal, los eruditos árabes también lograron grandes avances en los cálculos numéricos.
El gran erudito del siglo XIV JAMSHID AL-KASHI desarrolló métodos efectivos para extraer la raíz enésima de un número y evaluó π con un número significativo de lugares decimales. Los eruditos de la época también desarrollaron métodos eficaces para calcular tablas trigonométricas y técnicas para realizar cálculos muy precisos con fines astronómicos.

En una nota teórica, los académicos también avanzaron en la comprensión general de la trigonometría y exploraron Problemas de geometría esférica. También investigaron los fundamentos filosóficos de la geometría, centrándose, en particular, en el papel que juega el famoso POSTULADO PARALELO en la teoría. Omar Khayyam, por ejemplo, intentó probar el postulado de las paralelas, fallando, por supuesto, pero accidentalmente probó resultados sobre figuras en geometrías no euclidianas en el camino. El matemático Ibrahim ibn Sinan (908–946) también introdujo un método de "integración" para calcular volúmenes y áreas siguiendo un enfoque más general que el desarrollado por Arquímedes de Siracusa (ca. 287–212 a. C.) . También aplicó su enfoque al estudio de las SECCIONES CÓNICAS ya la óptica.

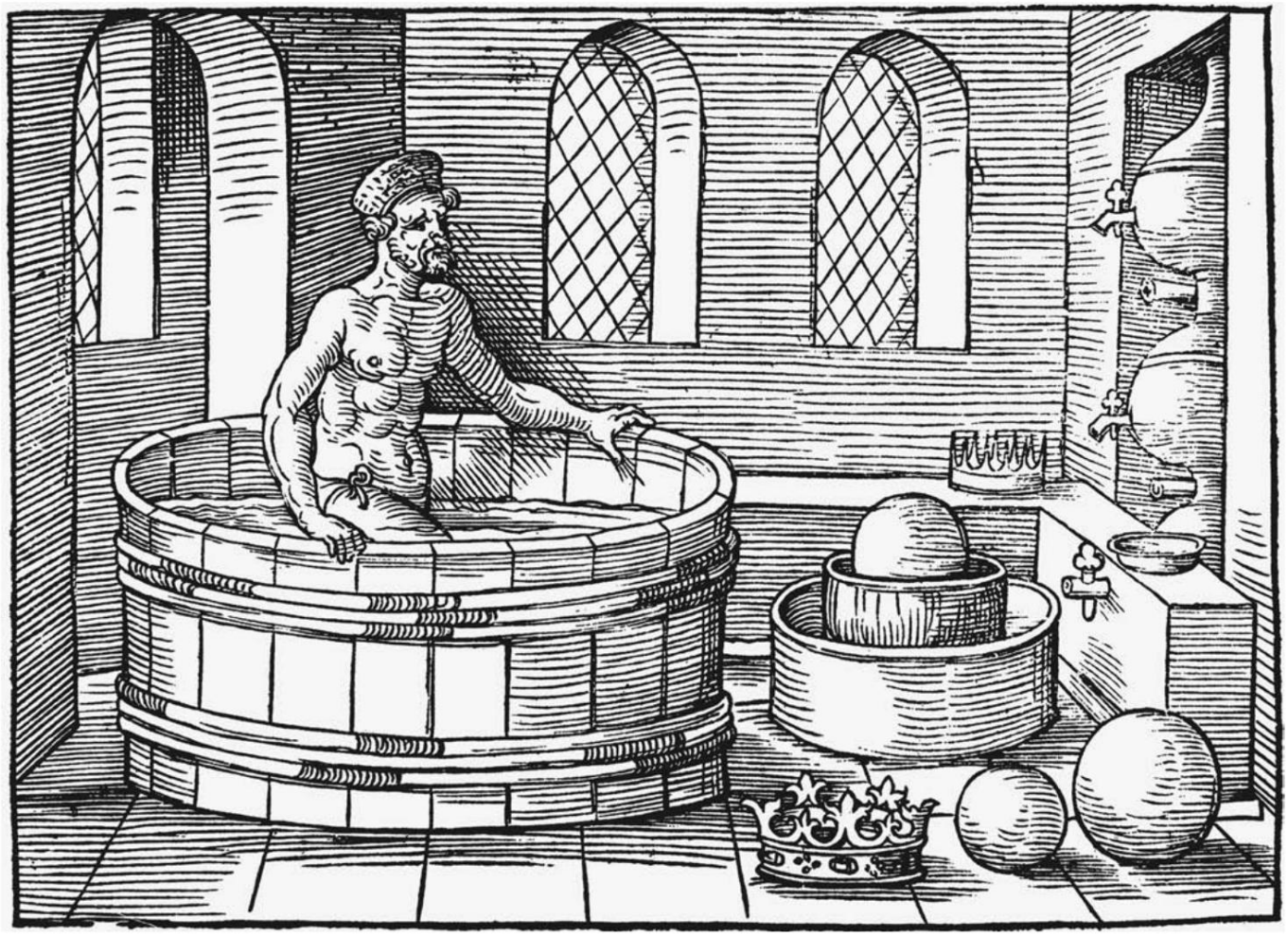
Véase también BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO; HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo); HISTORIA DE GEOME TRY (ensayo); HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (ensayo).

arco La parte de una curva continua entre dos puntos dados de la curva se denomina arco de la curva. En particular, dos puntos en un CÍRCULO determinan dos arcos. Si la circunferencia del círculo se divide por ellos en dos partes desiguales, entonces la parte más pequeña se suele llamar el arco menor del círculo y la mayor, el arco mayor.

Espiral de Arquímedes Véase ESPIRAL DE ARQUÍMEDES.

Arquímedes de Siracusa (287–212 a. C.) Geometría griega , mecánica Nacido en la colonia griega de Siracusa en Sicilia, Arquímedes es considerado uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Hizo contribuciones considerables a los campos de la GEOMETRÍA plana y sólida, la hidrostática y la mecánica. En sus obras Medición de un círculo y Cuadratura de la parábola, Arquímedes resolvió difíciles problemas de medición en geometría plana inventando una técnica temprana de CÁLCULO INTEGRAL, a la que llamó "método de agotamiento". Esto le permitió calcular áreas y longitudes de ciertas figuras curvas. Posteriormente, en sus obras Sobre la esfera y el cilindro y Sobre los conoides y los esferoides, aplicó esta técnica para calcular también el volumen y el área superficial de la esfera y otros objetos sólidos. En su muy original obra Sobre los cuerpos flotantes, Arquímedes desarrolló las matemáticas de la hidrostática y el equilibrio, junto con la LEY DE LA PALANCA, la noción de gravedad específica y técnicas para calcular el CENTRO DE GRAVEDAD de un

Machine Translated by Google



Un grabado en madera de 1547 que muestra la comprensión de Arquímedes de que se puede usar una tina de agua para calcular los volúmenes y densidades de figuras sólidas. (Foto cortesía de ARPL/Topham/The Image Works)

variedad de cuerpos. En matemáticas, Arquímedes también desarrolló métodos para resolver ecuaciones cúbicas, aproximar raíces cuadradas, sumar SERIES y, en The Sand Reckoning, desarrolló una notación para representar números extremadamente grandes.

Excepto por tomarse un tiempo para estudiar en la escuela de EUCLID en Alejandría, Arquímedes pasó toda su vida en el lugar de su nacimiento. Era un amigo de confianza del monarca de la región, Hierón, y de su hijo Gelon, y pronto desarrolló una reputación como un científico brillante que podía resolver los problemas más problemáticos del rey. Una historia famosa afirma que el rey una vez ordenó a un orfebre que le hiciera una corona y le suministró al herrero la cantidad exacta de metal para hacerla. Al recibir la corona recién forjada, Hiero sospechó que el herrero estaba haciendo algo malo, sustituyendo el oro por plata más barata, a pesar de que la corona tenía el peso correcto. Sin embargo, no pudo probar que sus sospechas fueran correctas, por lo que llevó el problema a Arquímedes. Se dice que mientras se bañaba y observaba el agua desplazada por su cuerpo, Arquímedes se dio cuenta y probó que el peso de un objeto suspendido en un líquido decrece en proporción al peso del líquido que desplaza. Este principio, hoy conocido como el principio de Arquímedes, proporcionó a Arquímedes los medios para demostrar que la corona no era de oro macizo. (También se dice que Arquímedes se emocionó tanto al hacer este descubrimiento que corrió desnudo por las calles gritando: "¡Eureka! ¡Eureka!").

También se supone que Arquímedes dijo: "Dame un lugar para pararme y moveré la Tierra". Asombrado

Machine Translated by Google

por la pretensión, el rey Hierón le pidió que lo probara. Arquímedes, en ese momento, había descubierto los principios de las palancas y poleas, y se dedicó a construir un dispositivo mecánico que le permitió, sin ayuda de nadie, lanzar un barco desde el puerto que era demasiado grande y pesado para un gran grupo de hombres. Desalojar.

Apodado un maestro de la invención, Arquímedes también ideó un dispositivo de bombeo de agua, ahora conocido como el tornillo de Arquímedes y todavía se usa en muchas partes del mundo hoy en día, junto con muchas máquinas de guerra innovadoras que se usaron en la defensa de Sicilia durante el no. infrecuentes invasiones romanas. (Estos dispositivos incluían espejos parabólicos para enfocar los rayos del sol para quemar los barcos que avanzaban desde la costa, dispositivos de catapulta y cañones accionados por resorte). Pero a pesar de la fama que recibió por sus inventos mecánicos, Arquímedes creía que las matemáticas puras eran la única búsqueda digna. . Sus logros en matemáticas fueron considerables.



Arquímedes de Siracusa, considerado como uno de los más grandes científicos de todos los tiempos, fue pionero en el trabajo en geometría plana y sólida, mecánica e hidrostática. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Al delimitar un círculo entre dos polígonos regulares y calcular la relación entre el perímetro y el diámetro de cada uno, Arquímedes encontró una de las primeras estimaciones del valor de π, limitándolo entre los valores 3 10/71 y 3 1/7. (Esta última estimación, generalmente escrita como 22/7, todavía se usa ampliamente en la actualidad). Arquímedes se dio cuenta de que al usar polígonos con un número cada vez mayor de lados se obtenían mejores y mejores aproximaciones, y que al "agotar" todas las posibilidades finitas, la verdadera se obtendría el valor de π. Arquímedes también usó este método de agotamiento para demostrar que la longitud de cualquier segmento de una parábola es 4/3 veces el área del triángulo con la misma base y la misma altura.

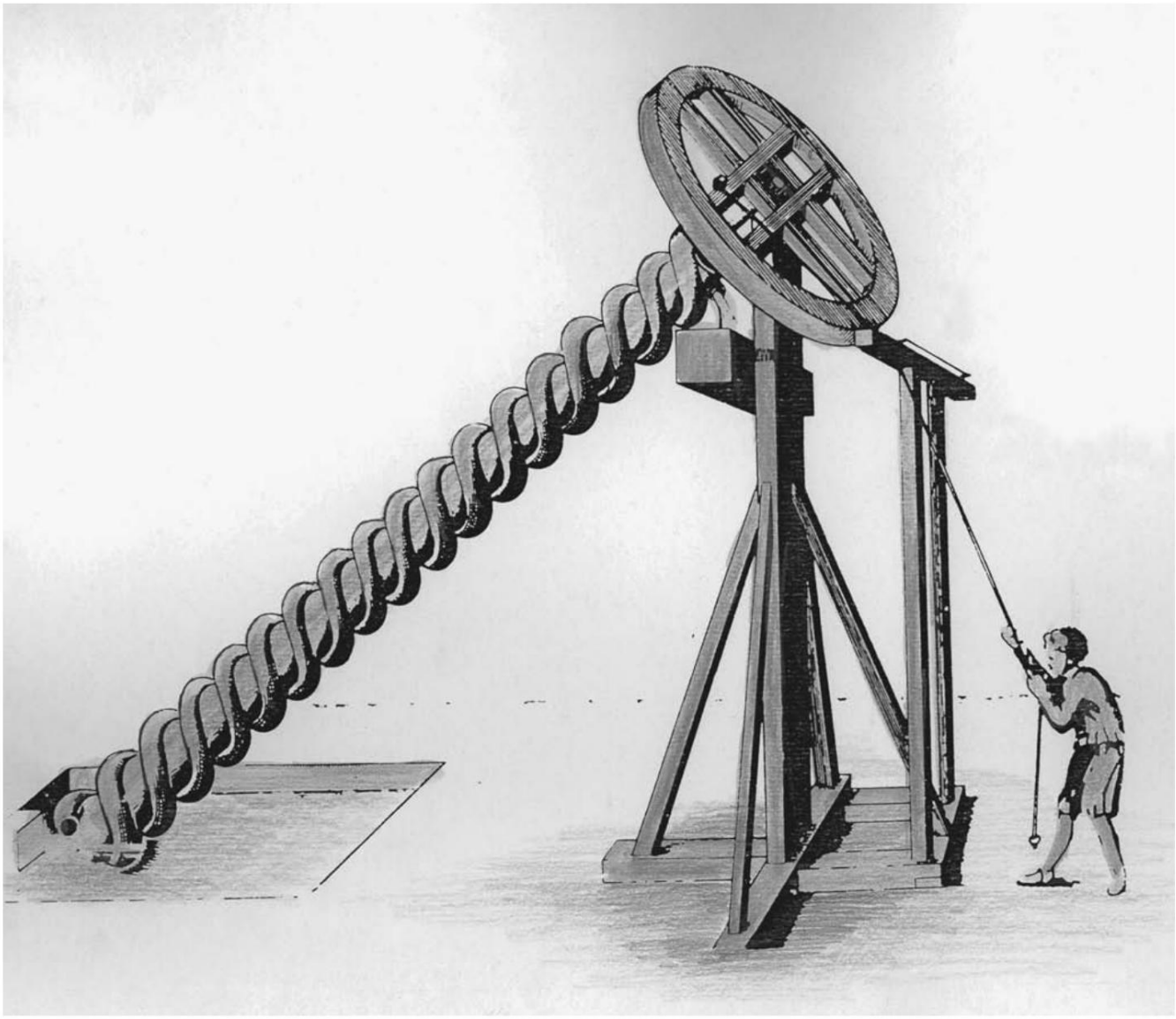
Al comparar las áreas transversales de los cortes paralelos de una esfera con los cortes de un cilindro que encierra la esfera, Arquímedes demostró que el volumen de una esfera es 2/3 del volumen del cilindro. El volumen de la esfera sigue: $V = (2/3)(2\pi r^2)$ $(4/3)\pi r^3 =$. (Aquí r es el radio de la esfera.) Arquímedes consideró este su mayor logro matemático, y en su honor, las figuras de un cilindro y una esfera inscrita fueron dibujadas en su lápida.

Arquímedes también calculó el área de la superficie de una esfera como cuatro veces el área de un círculo del mismo radio de la esfera. Hizo esto de nuevo a través de un método de agotamiento, imaginando la esfera también aproximada por una cubierta de pequeños triángulos planos. Al dibujar líneas que conectan cada vértice de un triángulo con el centro de la esfera, el volumen de la figura se divide así en una colección de pirámides triangulares. Cada pirámide tiene un volumen de un tercio de su base por su altura (esencialmente el radio de la esfera), y la suma de todas las áreas de la base representa el área de la superficie de la esfera. De la fórmula para el volumen de la esfera, se sigue la fórmula para su área superficial.

No se puede exagerar la influencia que Arquímedes ha tenido en el desarrollo de las matemáticas, la mecánica y la ciencia. Sus cálculos de las áreas de superficie y los volúmenes de figuras curvas proporcionaron información para el desarrollo del cálculo del siglo XVII. Su comprensión de la geometría euclidiana le permitió formular varios axiomas que refinaron aún más los fundamentos lógicos del tema, y su trabajo sobre fluidos y mecánica fundó el campo de la hidrostática. Los eruditos y nobles de su época reconocieron la importancia tanto teórica como práctica de su obra. Lamentablemente, Arquímedes murió innecesariamente en el año 212 a.

Durante la conquista de Siracusa por los romanos, es

Machine Translated by Google



Un grabado del siglo XIX del tornillo de agua de Arquímedes, un dispositivo para bombear agua (Fotografía cortesía de AAAC/Topham/The Image Works)

dijo que un soldado romano se cruz con Arqumedes con centrándose en figuras geométricas que había dibujado en la arena. Sin saber quién era el erudito o qué estaba haciendo, el soldado simplemente lo mató.

Arquitas de Tarento (ca. 428–350 a. C.) Geometría y filosofía griegas El erudito griego Arquitas de Tarento fue el primero en proporcionar una solución al problema clásico de la antigüedad. Al reducir el desafío a uno de construir ciertos razones y proporciones, Archytas desarrolló una construcción geométrica que implicaba rotar semicírculos a través de ciertos ángulos en un espacio tridimensional para producir una longitud esencialmente equivalente a la construcción de la raíz cúbica de dos. (Crear un segmento de esta longitud es el principal obstáculo para resolver el problema).
Aunque su solución innovadora es ciertamente correcta, utiliza herramientas más allá de lo que se permite con la regla y el compás solos. En el desarrollo de su solución, Archytas identificó una nueva media entre números, a la que llamó MEDIA ARMÓNICA.

Machine Translated by Google

Arquitas vivió en el sur de Italia durante la época de mando griego. La región, entonces llamada Magna Graecia, incluía la ciudad de Tarento, que fue el hogar de miembros de la secta pitagórica. Al igual que Pitágoras, Arquitas creía que las matemáticas proporcionaban la camino para comprender todas las cosas. Sin embargo, mucho a disgusto de los pitagóricos, Arquitas aplicó su habilidades matemáticas para resolver problemas prácticos. Él es a veces referido como el fundador de la mecánica y se dice que inventó varios dispositivos mecánicos innovadores, incluido un pájaro mecánico y un sonajero infantil innovador.

Solo sobreviven fragmentos de la obra original de Archytas. hoy, y aprendemos de sus matemáticas hoy principalmente a través de los escritos de estudiosos posteriores. muchos resultados establecidos por Archytas aparecen en el famoso texto de EUCLID LOS ELEMENTOS, por ejemplo.

longitud de arco Para medir la longitud de una trayectoria curva, uno podría simplemente colocar un trozo de cuerda a lo largo del camino, tire de él en línea recta y mida su longitud. Esto determina la longitud del arco de la trayectoria. En matemáticas, si la curva en la pregunta es continua y está dada por una fórmula y = f(x), para a < x < b digamos, entonces se puede usar CÁLCULO INTEGRAL para encontrar la longitud del arco de la curva. Para establecer esto, primero elegir un número de puntos (x1 , y1),…,(xn , yn) a lo largo de la curvar y sumar las longitudes de los segmentos de línea recta entre ellos. Usando la FÓRMULA DE LA DISTANCIA, esto da un valor aproximado para la longitud s de la curva:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Reescribiendo rendimientos:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

El TEOREMA DEL VALOR MEDIO muestra que para cada i hay un valor ci entre xi–1 y xi tal que $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$, y así la longitud de la curva se aproxima bien por la formula:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

Por supuesto, tomando más y más puntos a lo largo de la curva da mejores y mejores aproximaciones. en el límite, entonces, la verdadera longitud de la curva viene dada por la fórmula:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(y_i))^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

Esta es precisamente la fórmula de la integral de la función $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ sobre el dominio en cuestión. Así tenemos:

La longitud de arco de una curva continua y = f(x) sobre el intervalo [a,b] viene dado por $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

Alternativamente, si la curva continua viene dada por un conjunto de ECUACIONES PARAMÉTRICAS x = x(t) y y = y(t), para a < t < b decir, luego elegir una colección de puntos a lo largo de la curva, dada por t1 ,…,tn digamos, haciendo una aproximación a la longitud de la curva, y tomando un límite se obtiene la fórmula:

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \end{aligned}$$

De manera similar se puede demostrar que si la continua curva se da en COORDENADAS POLARES por fórmulas y x = r(θ)cos(θ) y y = r(θ)sin(θ), para a < θ < b, entonces el La longitud del arco de la curva está dada por:

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

La presencia de signos de raíz cuadrada en los integrandos. a menudo hace que estas integrales sean muy difíciles, si no imposibles, de resolver. En la práctica, uno debe usar técnicas numéricas para aproximar integrales como estas.

Véase también INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

área En términos generales, el área de una figura geométrica es la cantidad de espacio que ocupa. Tal definición

Machine Translated by Google

apela a la comprensión intuitiva. En general, sin embargo, es muy difícil explicar con precisión a qué nos referimos con “espacio” y la “cantidad” que ocupa. Este es un problema grave. (Véase la paradoja de Banach-Tarski en la página siguiente).

Como punto de partida, parece razonable decir, sin embargo, que un cuadrado de 1 × 1 debería tener un “área” uno. A esto lo llamamos una unidad básica de área. Como cuatro de estas unidades básicas encajan perfectamente en un cuadrado con lado de longitud dos, sin superposición, decimos entonces que un cuadrado de 2 × 2 tiene área cuatro. De manera similar, un cuadrado de 3 × 3 tiene un área de nueve, un cuadrado de 4 × 4 tiene un área de 16, y así sucesivamente.

Un rectángulo de 3 × 6 contiene 18 unidades básicas cuadradas y, por lo tanto, tiene un área de 18. En general, un rectángulo que tiene l unidades de largo y w unidades de ancho, con l y w números enteros, tiene un área de l × a:

area de un rectangulo = largo x ancho

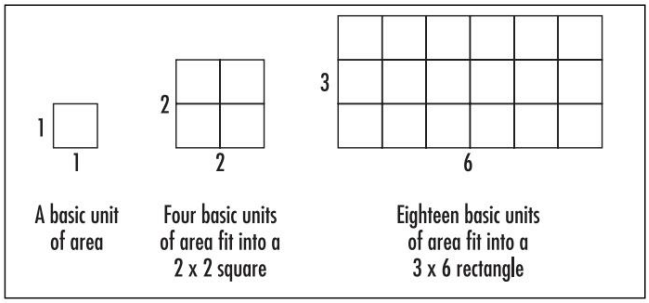
Esta es una fórmula fundamental. Para poner la noción de área sobre una base sólida, usamos esta fórmula como una ley definitoria: el área de cualquier rectángulo debe ser el producto de su largo por su ancho.

Aunque es imposible encajar un número entero de cuadrados unitarios en un rectángulo que tiene 5 3/4 unidades de largo y √ —7 unidades de ancho, por ejemplo, declaramos, sin embargo, que el área de tal rectángulo es el producto de estos dos números (Esto concuerda con nuestra idea intuitiva de que, con la ayuda de unas tijeras, en este rectángulo caben alrededor de 5 3/4 × √—7 ≈ 15,213 unidades cuadradas).

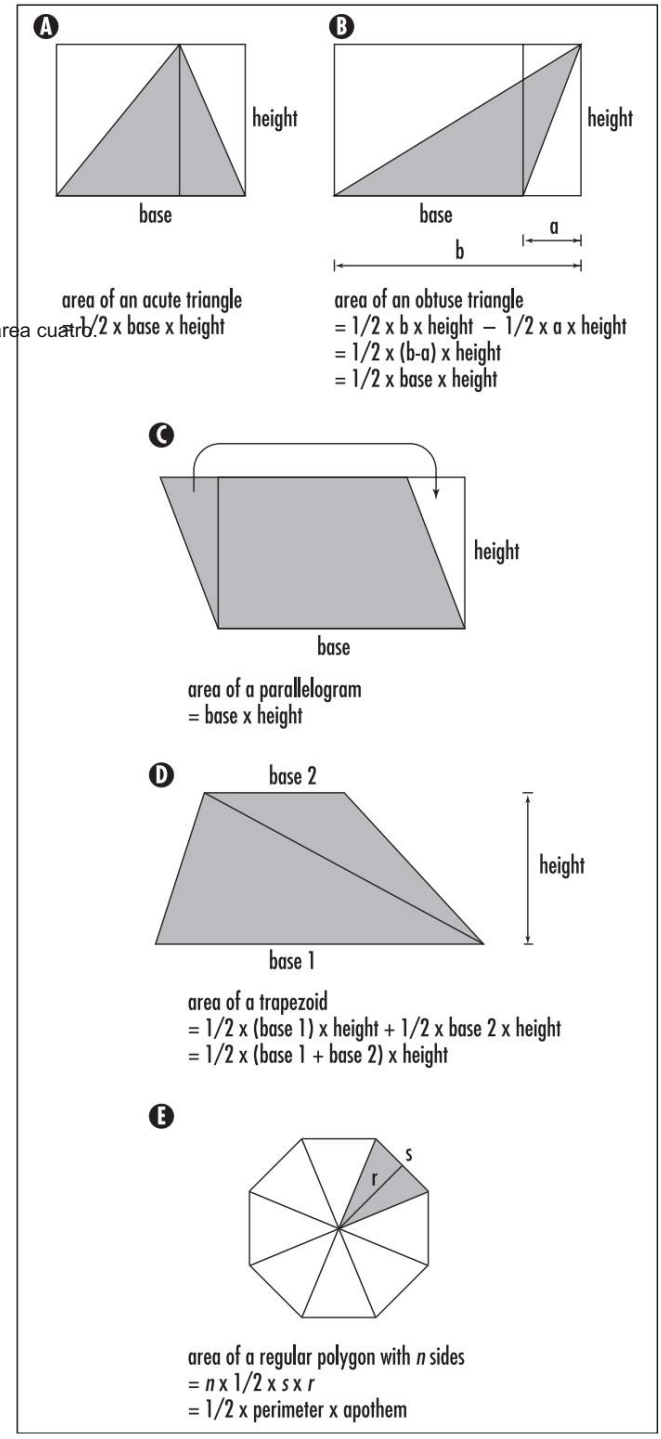
De esta ley se siguen las áreas de otras formas geométricas. Por ejemplo, el siguiente diagrama muestra que el área de un TRIÁNGULO agudo es la mitad del área del rectángulo que lo encierra. Esto lleva a la fórmula:

area de un triangulo = $^1/_2$ × base × altura

Esta fórmula también es válida para triángulos obtusos.



Área



Las áreas de formas básicas.

Reordenando piezas de un PARALELOGRAMO, vemos que su área viene dada por la fórmula:

área de un paralelogramo = base × altura

Machine Translated by Google

En general podemos calcular el área de cualquier POLÍGONO como la suma de las áreas de los triángulos que lo subdividen. Por ejemplo, el área de un TRAPEZOIDE es la suma de las áreas de dos triángulos, y el área de un POLÍGONO regular con n lados es la suma de las áreas de n triángulos.

Figuras curvas

También es posible calcular el área de figuras curvas. Por ejemplo, si cortamos un círculo en piezas en forma de cuña y reorganizamos estos cortes, vemos que el área de un círculo está cerca de ser el área de un rectángulo de longitud la mitad de la circunferencia y de ancho r, el radio del círculo .

Si trabajamos con piezas cada vez más finas en forma de cuña, la aproximación se acercará mejor a la de un verdadero rectángulo. Concluimos que el área de un círculo es de hecho la de este rectángulo ideal:

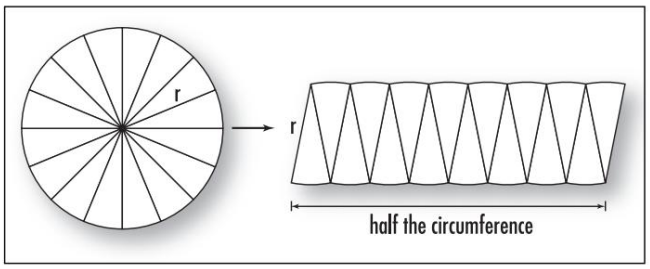
$$\text{area de un circulo} = {}^{1}/_{2} \times \text{circunferencia} \times r$$

(Compare esto con la fórmula para el área de un polígono regular). Como PI (π) se define como la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, la circunferencia

$\pi = \frac{\text{circunferencia}}{2r}$, el área de un círculo puede entonces ser escrito: área = ${}^{1}/_{2} \times 2\pi r \times r$. Esto lleva a la famosa fórmula:

$$\text{área de un círculo} = \pi r^{2}$$

Los métodos de CÁLCULO INTEGRAL nos permiten calcular áreas de otras formas curvas. El enfoque es análogo: aproxime la forma como una unión de rectángulos, sume las áreas de las piezas rectangulares y tome el LÍMITE de las respuestas obtenidas a medida que trabaja con aproximaciones cada vez más finas.



Estableciendo el área de un círculo.

Dificultades teóricas Partiendo del principio de que se afirma que una forma fundamental, en nuestro caso un rectángulo, tiene un "área" dada por una determinada fórmula, se sigue una teoría general del área para otras formas geométricas. Se puede aplicar este enfoque para desarrollar una teoría de la medida para medir el tamaño de otros conjuntos de objetos, como la noción del área superficial de los sólidos tridimensionales o una teoría del VOLUMEN .

También se pueden desarrollar una serie de aplicaciones exóticas.

Aunque nuestra definición del área de un rectángulo está motivada por la intuición, la fórmula que desarrollamos es, en cierto sentido, arbitraria. Definir el área de un rectángulo como dada por una fórmula diferente podría producir una teoría del área diferente, pero consistente.

En 1924, STEFAN BANACH y Alfred Tarski sorprendieron a la comunidad matemática al presentar una prueba matemáticamente sólida de la siguiente afirmación:

> En teoría, es posible cortar una bola sólida en nueve piezas y volver a ensamblarlas, sin estirarlas ni deformarlas, formar DOS bolas sólidas, cada una exactamente del mismo tamaño y forma que la original.

Este resultado se conoce como la paradoja de Banach-Tarski, y su declaración, demostrada como un hecho matemático, es aborrecible para nuestra comprensión de cómo deben comportarse el área y el volumen: el volumen de una cantidad finita de material no debe duplicarse después de reorganizar sus piezas. ! Que nuestra comprensión intuitiva del área eventualmente condujera a un resultado tan perturbador se consideró muy perturbador.

Lo que los matemáticos se han dado cuenta es que "área" no es un concepto bien definido: no se le puede asignar un área a cada forma en un plano (ni se le puede asignar un volumen a cada sólido en un espacio tridimensional). Existen ciertos conjuntos no medibles sobre los cuales hablar de su área carece de sentido. Las nueve piezas utilizadas en la paradoja de Banach-Tarski resultan ser conjuntos no mensurables, por lo que hablar de su volumen no es válido.

(Son formas extremadamente irregulares, de naturaleza FRACTAL e imposibles de cortar físicamente). En particular, no se permite interpretar la construcción final como "dos bolas de igual volumen" .

Nuestra sencilla comprensión intuitiva del área funciona bien en todas las aplicaciones prácticas. El material presentado en un currículo típico de escuela secundaria y universidad, por ejemplo, es sólido. Sin embargo, la paradoja de Banach-Tarski señala que se debe tener extremo cuidado

Machine Translated by Google

al explorar las sutilezas teóricas del área y el volumen con mayor detalle.

Véase también ESCALA.

Argand, Jean Robert (1768–1822) Teoría suiza de los números complejos Nacido el 8 de julio de 1768 en Ginebra, Suiza, el matemático aficionado Jean Argand es recordado hoy por su famosa interpretación geométrica de los NÚMEROS COMPLEJOS. Un DIAGRAMA DE ARGAND utiliza dos ejes perpendiculares, uno que representa una recta numérica real, el segundo una recta de números puramente complejos, para representar números complejos como puntos en un plano.

No es bien sabido que Argand, de hecho, no fue el primero en considerar y publicar este enfoque geométrico de los números complejos. El topógrafo Casper Wessel (1745–1818) presentó la misma idea a la Real Academia Danesa en 1797, pero su trabajo pasó desapercibido para la comunidad matemática. Con el cambio de siglo, Argand de forma independiente comenzó a interpretar el número complejo i geométricamente como una rotación de 90°. Expuso la conveniencia y fecundidad de esta idea en un pequeño libro, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques (Ensayo sobre un método para representar cantidades imaginarias a través de una construcción geométrica), que publicó de forma privada, en su por cuenta propia, en 1806. Nunca escribió su nombre en la pieza, por lo que fue imposible identificar al autor.

Por casualidad, el matemático francés Jacques Français se encontró con la pequeña publicación y escribió sobre los detalles del trabajo en un artículo de 1813, “Memorias sobre la representación geométrica de números imaginarios”, publicado en Annales de Mathématiques . Pidió que el creador desconocido de las ideas se presentara y recibiera crédito por el trabajo. Argand se dio a conocer enviando su propio artículo a la misma revista, presentando un enfoque ligeramente modificado y mejorado de sus métodos. Aunque desde entonces los historiadores han descubierto que los matemáticos JOHN WALLIS (1616–1703) y CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) consideraron cada uno sus propias interpretaciones geométricas de los números complejos, por lo general se acredita a Argand como el descubridor de este enfoque.

Argand fue el primero en desarrollar la noción de MÓDULO de un número complejo. También debe notarse que Argand también presentó una prueba esencialmente completa del TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA en su pieza de 1806, pero ha recibido poco crédito por este logro. Argand fue el primero en enunciar y demostrar el teorema con toda su generalidad, permitiendo que todos los números implicados, incluidos los coeficientes del polinomio, fueran números complejos.

Argand murió el 13 de agosto de 1822 en París, Francia. Aunque no es conocido como uno de los matemáticos más destacados de su tiempo, el trabajo de Argand sin duda dio forma a nuestra comprensión de la teoría de los números complejos. El diagrama de Argand es una construcción familiar para todos los estudiantes avanzados de matemáticas de secundaria.

Diagrama de Argand (plano complejo) Ver COMPLEJO NÚMEROS.

argumento En el siglo IV a. C., el filósofo griego ARISTÓTELES hizo un estudio cuidadoso de la estructura del razonamiento. Concluyó que todo argumento, es decir, una línea de pensamiento razonada, consta, esencialmente, de dos partes básicas: una serie de PREMISAS seguidas de una conclusión. Por ejemplo:

Si hoy es martes, entonces debo estar en Bélgica.
no estoy en belgica
Por lo tanto, hoy no es martes.

es un argumento que contiene dos premisas (las dos primeras líneas) y una conclusión. Un argumento es válido si la conclusión es verdadera cuando se supone que las premisas son verdaderas.

Cualquier argumento tiene la forma general:

Si [premisa 1 Y premisa 2 Y premisa 3 Y…], entonces [Conclusión]

Usando la lógica simbólica de la LÓGICA FORMAL y la VERDAD TABLEs, el ejemplo anterior tiene la forma general:

$$p \rightarrow q$$
$$\neg q$$
Por lo tanto $\neg p$

El argumento se puede resumir así: $((p \rightarrow q) (\neg q)) \rightarrow (\neg p)$.

Se puede comprobar con la ayuda de una tabla de verdad que este enunciado es una tautología, es decir, es un enunciado verdadero independientemente de los valores de verdad de los enunciados componentes p y q . (En particular, es verdadera cuando ambas premisas tienen un valor de verdad T.) Por lo tanto, el argumento presentado anteriormente es de hecho un argumento válido.

Machine Translated by Google

Un argumento que no conduce a una tautología en la lógica simbólica no es válida. Por ejemplo,

Si un pájaro es un cuervo, entonces es negro.
Este pájaro es negro.
Por lo tanto es un cuervo.

es un argumento inválido: ((p → q) q) → p no es una tautología. (Informalmente, podemos afirmar que un pájaro negro necesita no ser un cuervo.)

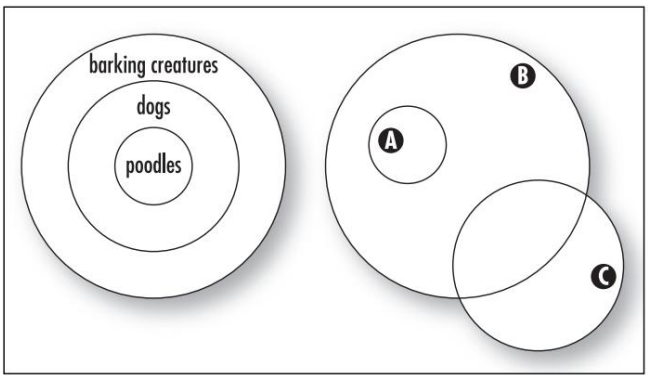
La siguiente tabla contiene las formas estándar de argumento de uso común, junto con algunos inválidos argumentos comúnmente utilizados en el error.

Argumentos válidos	Argumentos inválidos
Razonamiento directo (modus ponens)	Falacia del Inverso
pag → q	pag → q
p	q
por lo tanto q	por lo tanto p
Falacia del Razonamiento Contrapositivo de la Inversa (modo tollens)	
pag → q	pag → q
¬q	¬p
por lo tanto ¬p	por lo tanto ¬q
Razonamiento disyuntivo	Mal uso del razonamiento disyuntivo
pag q pag q	pag q pag q
¬p ¬qp q	
por lo tanto q por lo tanto p	por lo tanto ¬q por lo tanto ¬p
Razonamiento Transitivo	
pag → q	
q → r	
por lo tanto p → r	

A mediados del siglo XVIII, LEONHARD EULER inventó un manera elegante de determinar la validez de los silogismos, que es decir, argumentos cuyas premisas contienen las palabras todos, algunos, o no. Por ejemplo,

Todos los caniches son perros.
Todos los perros ladran.
Por lo tanto, todos los caniches ladran.

es un silogismo, y Euler describiría tal argumento como un diagrama de tres círculos, cada uno representando un conjunto mencionado en una de las premisas. la validez de el argumento es entonces fácilmente evidente:



diagramas de Euler

Un argumento de la siguiente estructura, por ejemplo, puede demostrarse como no válido mediante la disposición de círculos como se muestra:

Todos los As son Bs.
Algunas B son C.
Por lo tanto, algunos A son Cs.

Cualquier diagrama usado para analizar la validez de un argumento se llama diagrama de Euler.

Véase también RAZONAMIENTO DEDUCTIVO/INDUCTIVO ; CUANTIFICADOR.

Aristóteles (384–322 a. C.) Lógica griega , Filosofía, Física, Medicina Nacido en Stagirus, Macedonia, Aristóteles es recordado en matemáticas por su sistemática estudio de la lógica deductiva. Al sentar las bases de la LÓGICA FORMAL, Aristóteles identificó las LEYES fundamentales DEL PENSAMIENTO, las leyes del razonamiento, y los principios fundamentales que se encuentran en el corazón de cualquier ARGUMENTO matemático . Su trabajo en esta área tan afectó profundamente las actitudes y enfoques del pensamiento científico que la cultura intelectual occidental como el todo se denomina a menudo aristotélico.

A los 17 años, Aristóteles se unió a la Academia PLATO en Atenas y permaneció allí durante 20 años. Él trabajó estrechamente con Platón, y también EUDOXO, sobrino de Platón. El equivalente de una universidad de investigación moderna, la Academy reunió a académicos de todas las disciplinas y proporcionó un entorno culturalmente rico que alentó el aprendizaje y promovió el avance del conocimiento. Sin embargo, debido a la política interna, Aristóteles decidió abandonar la Academia después de la muerte de Platón en 347 a.

Machine Translated by Google

Tras ser tutor del heredero del rey Felipe II, el futuro Alejandro Magno, durante varios años, Aristóteles regresó a Atenas en 335 a. C. para fundar su propio escuela, el Liceo. Él pretendía que la escuela fuera como tan amplia como sea posible, explorando una amplia gama de temas pero dando prominencia al estudio del mundo natural. Mientras estaba en el Liceo, Aristóteles escribió 22 textos que cubren una asombrosa variedad de temas: lógica, física, astronomía, meteorología, teología, metafísica, ética, retórica, poética y más. El Encontro una teoría de la cinemática, un estudio del espacio, el tiempo y movimiento, y estableció los principios de la física que permaneció indiscutible durante dos milenios.

Con respecto a las matemáticas, Aristóteles es recordado por sus escritos sobre lógica, tema que identificó como la base de todo pensamiento científico. Inventó el silogismo, una forma de argumento que se presenta en tres partes: una premisa mayor, una premisa menor y una conclusión. Aunque es una noción sencilla para nosotros hoy, esta El trabajo representó un primer paso fundamental hacia la comprensión de la estructura del razonamiento. Presentó la siguiente línea de pensamiento como un ejemplo de silogismo:

Todo griego es una persona.
Toda persona es mortal.
Luego todo griego es mortal.

Aristóteles reconoció que cualquier línea de razonamiento que sigue esta forma es lógicamente válida en virtud de su estructura, no su contenido. Así el argumento:

Cada planeta está hecho de queso.
Cada automóvil es un planeta.
Por lo tanto, cada automóvil está hecho de queso.

por ejemplo, es un argumento válido, aunque se cuestione la validez de las premisas. Eliminar el contenido de la estructura fue un logro sofisticado.

Aristóteles llamó a su campo de la lógica "analítica" y describió su trabajo sobre el tema en su libro Prior y Analítica posterior. Quería demostrar la eficacia del razonamiento lógico para comprender la ciencia.

Aristóteles también discutió temas en la filosofía de matemáticas. Argumentó, por ejemplo, que algo incognoscible como el "infinito" existe solo como una potencialidad, y nunca como un formulario completo. Aunque, por ejemplo, de cualquier conjunto finito de números primos siempre se puede construir uno más, hablar del conjunto de números primos como un solo concepto, argumentó, no tiene sentido. (Hoy decimos que Aristóteles aceptó el “potencialmente infinito” pero rechazó el “infinito real”).

Está registrado que Aristóteles solía caminar por los jardines del Liceo mientras disertaba, obligando a sus alumnos a seguir. Sus alumnos se convirtieron conocidos como los peripatéticos, la palabra peripatéticos significa "dados a caminar". Copias de la conferencia de Aristóteles las notas tomadas por los peripatéticos se consideraban valiosos documentos académicos por derecho propio y han sido traducida, copiada y distribuida por todo el mundo a lo largo de los siglos.

Los disturbios políticos obligaron a Aristóteles a abandonar Atenas nuevamente en 322 a. EC . Murió poco después a la edad de 62 de una molestia estomacal no identificada.

El análisis de Aristóteles del pensamiento crítico literalmente moldeó y definió la naturaleza del pensamiento lógico que ejercer hoy en cualquier actividad académica. Uno no puede exagerar la profundidad de la influencia de Aristóteles. Por identificando modos válidos de pensamiento y clarificando las principios del razonamiento lógico, Aristóteles proporcionó los herramientas necesarias para el razonamiento sensato y el pensamiento sistémico astuto. Estas son habilidades que hoy se consideran fundamentales para los objetivos básicos de todos los niveles de educación.

Véase también CARDINALIDAD; RAZONAMIENTO DEDUCTIVO/INDUCTIVO ; PARADOJA.

aritmética La rama de las matemáticas que se ocupa de los cálculos usando números se llama aritmética. Este puede implicar una serie de temas específicos: el estudio de operaciones con números, como SUMA, MULTIPLICACIÓN, RESTA, DIVISIÓN y RAÍCES CUADRADAS, necesarios para resolver problemas numéricos; los métodos necesarios para cambiar números de una forma a otra (como la conversión de fracciones a decimales y viceversa); o el estudio abstracto de los SISTEMAS NUMÉRICOS, NÚMERO TEORÍA, y operaciones generales sobre conjuntos definidas por TEORÍA DE GRUPOS y ARITMÉTICA MODULAR, por ejemplo.

La palabra aritmética proviene de la palabra griega arithmetiké, construido a partir de arithmós que significa “número” y techné que significa “ciencia”. en el tiempo de Grecia antigua, el término aritmética se refería sólo a la trabajo teórico sobre números, con la palabra logística se utiliza para describir los cálculos prácticos cotidianos utilizado en los negocios. Hoy en día el término aritmética se usa en ambos contextos. (La palabra logística es hoy un término predominantemente militar.)

Véase también BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO; FUNDAMENTAL TEOREMA DE LA ARITMÉTICA; ORDEN DE OPERACIÓN.

Machine Translated by Google

Desigualdad de la media aritmética y geométrica Ver MEDIA.

media aritmética Ver MEDIA.

sucesión aritmética (progresión aritmética) UNA SUCESIÓN de números en la que cada término, excepto el primero, difiere del anterior en una cantidad constante se llama sucesión aritmética. La diferencia constante entre términos se llama diferencia común. Por ejemplo, la secuencia 4, 7, 10, 13,... es aritmética con diferencia común 3. Una secuencia aritmética se puede considerar como "lineal", siendo la diferencia común la PENDIENTE de la relación lineal .

Una secuencia aritmética con primer término a y diferencia común d tiene la forma:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

El enésimo término an de la secuencia está dado por an = a + (n – 1)d. (Así, el término 104 de la secuencia aritmética 4,7,10,13,…, por ejemplo, es a104 = 4 + [103 × 3] = 313).

La suma de los términos de una sucesión aritmética es llamada serie aritmética:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots$$

El valor de tal suma es siempre infinito a menos que la secuencia aritmética bajo consideración sea la secuencia cero constante: 0,0,0,0,…

La suma de una secuencia aritmética finita se puede calcular fácilmente escribiendo la suma tanto hacia adelante como hacia atrás y sumando por columnas. Considere, por ejemplo, la suma 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31. Llame a la respuesta a este problema S. Entonces:

$$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 = S$$
$$31 + 28 + 25 + 22 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4 = S$$

y sumando columnas se obtiene:

$$35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 = 2S$$

Es decir, 2S = 10 × 35 = 350, por lo que S = 175. En general, este método muestra que la suma de n números equidistantes en progresión aritmética, a + b + + y + z, es n veces el promedio de el primer y último término de la suma:

$$\text{Suma} = n \times \frac{a + z}{2}$$

Se dice que CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), cuando era un joven estudiante, asombró a su profesor de matemáticas al calcular la suma de los números del 1 al 100 en cuestión de segundos utilizando este método. (Tenemos 1 + 2 + … + 100 + 100 + 1 = $\frac{100 \times 2}{2}$ = 5,050.) Ver también SECUENCIA GEOMÉTRICA; SERIE.

serie aritmética Ver SECUENCIA ARITMÉTICA.

matriz Una disposición ordenada de números o símbolos se denomina matriz. Por ejemplo, un VECTOR es una matriz unidimensional: es una lista ordenada de números. Cada número en la lista se llama componente del vector. Una MATRIZ es una matriz bidimensional: es una colección de números dispuestos en una cuadrícula finita. (Los componentes de una matriz de este tipo se identifican por sus posiciones de fila y columna). Dos matrices se consideran iguales solo si tienen el mismo número de filas, el mismo número de columnas y todas las entradas correspondientes son iguales. También se pueden definir matrices tridimensionales y de mayor dimensión.

En informática, una matriz se denomina identificador, y la ubicación de una entrada viene dada por un subíndice. Por ejemplo, para una matriz bidimensional etiquetada como A, la entrada en la segunda fila, tercera columna, se denota A23.
Una matriz de n dimensiones utiliza n subíndices.

–
ryabhata (ca. 476–550 EC) Trigonometría india , teoría de números A , astronomía Nacido en Kusumapura, ahora Patna, India, A– ryabhata (a veces denominado
ryabhata I para distinguirlo del matemático A del mismo nombre que vivió 400 años después) fue el primer matemático indio destacado cuyo nombre conocemos y cuyos escritos podemos estudiar. En la sección Ganita (Cálculo) de su tratado astronómico
–
ryabhatiya, hizo avances fundamentales en la teoría de la TRIGONOMETRÍA al desarrollar técnicas sofisticadas para encontrar y tabular longitudes de medias cuerdas en círculos. Esto es equivalente a tabular los valores de la función seno. A– ryabhata también calculó el valor de π con cuatro decimales (π ≈ 62,832/20,000 = 3.1416) y desarrolló reglas para extraer cuadrados y

Machine Translated by Google

raíces cúbicas, para sumar SERIES ARITMÉTICAS y encontrar SUMAS DE POTENCIAS.

Como tratado astronómico, A ryabhatiya está escrito como una serie de 118 versos que resumen todas las matemáticas hindúes y las prácticas astronómicas conocidas en ese momento.
Varias secciones son puramente matemáticas en contexto y cubren los temas de ARITMÉTICA, TRIGONOMA Y GEOMETRÍA ESFÉRICA, así como las teorías de FRACCIONES CONTINUAS, ecuaciones CUADRÁTICAS y SUMA. A– ryabhata también describió métodos para encontrar soluciones enteras a ecuaciones lineales de la forma by = ax + c usando un algoritmo esencialmente equivalente al ALGORITMO EUCLIDEANO.

Los historiadores no saben cómo A– ryabhata obtuvo su estimación altamente precisa de π. Lo que sí saben, sin embargo, es que A–ryabhata era consciente de que se trata de un NÚMERO IRRACIONAL, un hecho que los matemáticos no pudieron probar hasta 1775, más de dos milenios después. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, A– ryabhata prefirió usar $\sqrt{}$ —10 ≈ 3.1622 como una aproximación para π.

Los eruditos de la época no pensaban en el seno como una proporción de las longitudes de los lados de un triángulo, sino más bien como la longitud física de la media cuerda de un círculo. Por supuesto, los círculos de diferentes radios dan diferentes longitudes para las medias cuerdas correspondientes, pero se pueden ajustar las cifras con el uso de la proporcionalidad. Trabajando con un círculo de radio 3.438, ryabhata construyó una tabla de senos para cada ángulo A de 1° a 90°. (Eligió el número 3.438 para que la circunferencia del círculo estuviera cerca de 21.600 = 360 × 60, haciendo que una unidad de longitud de la circunferencia coincidiera con un minuto de un ángulo). Así, en su tabla, el seno de 90° se registra como 3.438, y el seno de 30°, por ejemplo, como 1.719.

Con respecto a la astronomía, A ryabhatiya presenta un tratamiento sistemático de la posición y los movimientos de los planetas. A– ryabhata calculó la circunferencia de la Tierra en 24,835 millas (lo cual es sorprendentemente preciso) y describió las órbitas de los planetas como ELIPSES.
Los estudiosos europeos no llegaron a la misma conclusión hasta el Renacimiento.

asociativa UNA OPERACIÓN BINARIA se dice que es asociativa si es independiente de la agrupación de los términos a los que se aplica. Más precisamente, una operación * es asociativa si:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

para todos los valores de a, b y c. Por ejemplo, en la aritmética ordinaria, las operaciones de suma y multiplicación son asociativas, pero no la resta y la división. Por ejemplo, 6 + (3 + 2) y (6 + 3) + 2 tienen el mismo valor, pero 6 – (3 – 2) y (6 – 3) – 2 no lo son. (El primero es igual a 6 – 1 = 5, y el segundo es 3 – 2 = 1). En el análisis VECTORIAL , la suma de vectores es asociativa, pero la operación de obtener el PRODUCTO CRUZADO no lo es.

De la relación básica a * (b * c) = (a * b) * c, se sigue que todas las agrupaciones posibles de un número finito de términos fijos entre paréntesis son equivalentes. (Utilice un argumento INDUCCIÓN sobre el número de elementos presentes.) Por ejemplo, que (a * b) * (c * d) es igual a (a * (b * c)) * d se puede establecer con dos aplicaciones de la relación fundamental como sigue: (a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d = (a * (b * c)) * d. Como consecuencia, si la propiedad asociativa se cumple para un conjunto dado, se pueden omitir los paréntesis al escribir productos: uno puede simplemente escribir a * b * c * d, por ejemplo, sin preocuparse por la confusión.

Sin embargo, estas consideraciones fallan si la expresión bajo consideración contiene un número infinito de términos. Por ejemplo, tenemos:

$$0 = 0 + 0 + 0 + \cdots$$
$$= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

Si es permisible reagrupar términos, entonces podríamos escribir:

$$0 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + = 1 + 0 + \cdots$$
$$0 + 0 + \cdots$$
$$= 1$$

Este absurdo muestra que se debe tener sumo cuidado al aplicar la ley asociativa a sumas infinitas.

Véase también PROPIEDAD CONMUTATIVA; DISTRIBUTIVO PROPIEDAD; ANILLO.

asíntota Una línea recta hacia la cual la gráfica de una función se acerca, pero nunca llega, se llama asíntota para la gráfica. El nombre proviene de la palabra griega asymptotos para "no caer juntos" (a: "no;" sym: "juntos"; ptotos: "caer"). Por ejemplo, la función y = 1/x tiene las líneas x = 0 e y = 0 como asíntotas: y se vuelve infinitamente pequeña, pero nunca llega a cero, cuando x se hace grande, y viceversa. La función y = (x + 2)/(x – 3) tiene la línea vertical x = 3

Machine Translated by Google

como asíntota: los valores de la función se vuelven infinitamente grandes cuando x se acerca al valor 3 por la derecha, e infinitamente grandes y negativos cuando x se acerca al valor 3 por la izquierda.

Una función y = f(x) tiene una asíntota horizontal y = L si limx→∞ f(x) = L o limx→–∞ f(x) = L. Por ejemplo,

la función $y = \frac{3x^2}{2x + 1}$ tiene asimetría horizontal

tote y = 3, ya que $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{2x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{x}}$

$= \frac{3}{2 + 0} = 3$.

Una asíntota no necesita ser horizontal o vertical,

sin embargo. Por ejemplo, la función $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x + 1}$

$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x + 1}$ se aproxima a la línea y = x + 1 cuando x 2 1

se vuelve grande, por lo que y = x + 1 es una "asíntota oblicua" para la curva.

Si una HIPERBOLA viene dada por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

entonces manipulando se obtiene la ecuación $\frac{b^2}{a^2} x^2 - y^2 = b^2$.

El lado derecho tiende a cero cuando x se hace grande, mostrando que la curva tiene asíntotas oblicuas dadas por

$\frac{b^2}{a^2} x^2 - y^2 = 0$, es decir, por las líneas $y = \frac{b}{a} x$ y

$y = -\frac{b}{a} x$.

Ampliando la definición, podríamos decir que el

curva $y = \frac{x^3 + 1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$ tiene la parábola $y = x^2$ como

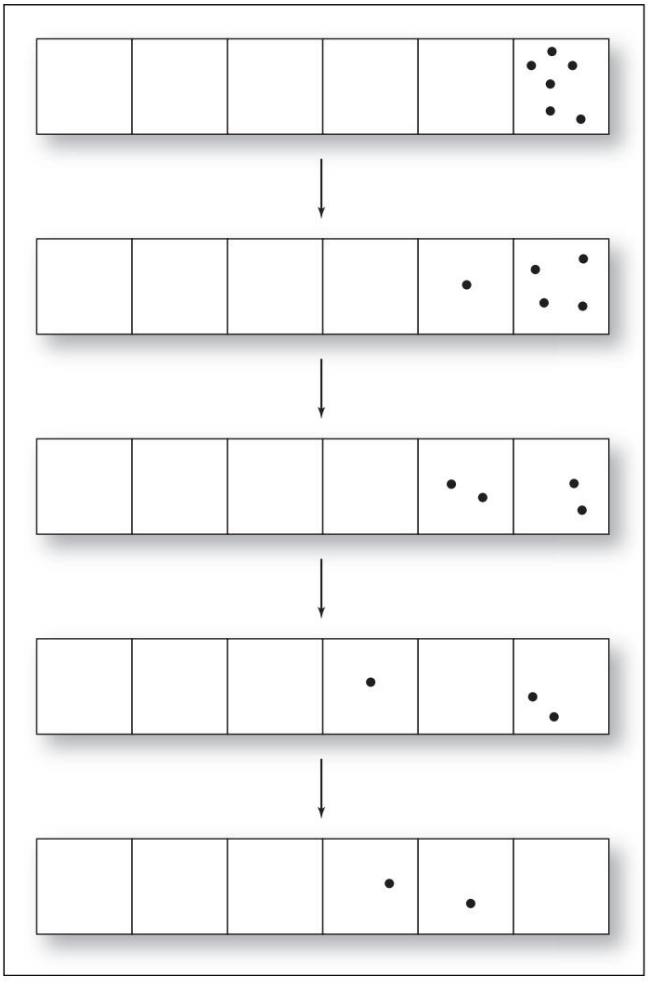
una asíntota.

autómata (plural, autómatas) Una máquina abstracta utilizada para analizar o modelar problemas matemáticos se llama autómata. Un ejemplo simple de un autómata es una "máquina de base numérica", que consiste en una fila de cajas que se extiende infinitamente hacia la izquierda. Uno coloca en esta máquina un número finito de centavos en la casilla más a la derecha. Luego, la máquina redistribuye los centavos de acuerdo con una regla preestablecida.

Una máquina “1 ← 2”, por ejemplo, reemplaza un par de centavos en una caja con un solo centavo en la caja un lugar a la izquierda. Así, por ejemplo, seis centavos colocados en la máquina 1 ← 2 “disparan” cuatro veces para producir una distribución final que se puede leer como “1 1 0”. Este resultado es el número seis escrito como NÚMERO BINARIO, y esta máquina convierte todos los números a sus representaciones de base dos.

Una máquina de 1 ← 3 produce representaciones en base tres, y una máquina de 1 ← 10 produce las representaciones ordinarias en base diez. El proceso de DIVISIÓN LARGA se puede explicar con la ayuda de esta máquina.

Las variaciones de esta idea pueden conducir a algunos estudios matemáticos interesantes. Considere, por ejemplo, una máquina 2 ← 3. Esta máquina reemplaza tres centavos en una caja con dos centavos en la caja un lugar a la izquierda. En cierto sentido, esta es una "máquina base uno y medio". Por ejemplo, colocar 10 centavos en esta máquina produce



Un autómata en acción

Machine Translated by Google

la representación “2 1 0 1”, y es cierto que

$$2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{3} + 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2} + 0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1} + 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 10 .$$

Véase también BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO.

axioma (postulado) Una declaración cuya verdad se considera evidente por sí misma o que debe aceptarse sin prueba se llama axioma. El nombre proviene de la palabra griega axioma para "valor" o "calidad". El nombre alternativo “postulado” proviene de postulatum, en latín, “algo exigido”.

Uno de los grandes logros del gran geómetra griego EUCLID y sus contemporáneos alrededor del año 300 a. C. fue reconocer que no todos los enunciados matemáticos pueden probarse: ciertos términos permanecen sin definir y las reglas básicas (postulados) sobre sus relaciones simplemente deben ser probadas. aceptado como verdadero. Uno debe desarrollar una teoría matemática con un "big bang", por así decirlo, simplemente enumerando un conjunto inicial de suposiciones.
A partir de ahí, utilizando las leyes básicas del razonamiento, se establecen y prueban declaraciones adicionales, o THEO REM, sobre el sistema.

Por ejemplo, en un estudio sistemático de GEOMETRÍA EUCLIDEA, los términos punto, línea y plano no están definidos, y uno comienza un estudio sistemático del tema estudiando una lista de axiomas básicos que nos dicen cómo se supone que se interrelacionan estas cantidades. (Un axioma de la geometría euclidiana, por ejemplo, afirma que entre dos puntos cualquiera se puede dibujar una línea.) Todos los resultados presentados en un texto típico de escuela secundaria sobre geometría, por ejemplo, son consecuencias lógicas de solo cinco suposiciones principales.

En TEORÍA DE CONJUNTOS, los términos conjunto y elemento de un conjunto no están definidos. Sin embargo, se dan reglas que definen la igualdad de dos conjuntos, que garantizan la existencia de ciertos conjuntos y establecen los medios para construir nuevos conjuntos a partir de los antiguos. En TEORÍA DE NÚMEROS, LOS POSTULADOS DE PEANO proporcionan un fundamento lógico a la teoría de números y la aritmética.

Una declaración en un sistema matemático que parece verdadera, pero que aún no ha sido probada, se llama conjetura.

Véase también RAZONAMIENTO DEDUCTIVO/INDUCTIVO ; ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO.

axioma de elección Formulado por primera vez por el matemático alemán ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871–1953), el axioma de elección es un principio básico de la TEORÍA DE CONJUNTOS que establece que a partir de cualquier colección C de conjuntos no vacíos, es posible construir un conjunto S que contiene un elemento de cada uno de los conjuntos en C. El conjunto S se llama un "conjunto de elección" para C. Por ejemplo, si C representa los tres conjuntos {1,2,3}, {2,4,6, 8,…} y {5}, entonces S = {1,6,5} es un conjunto de elección para C. También lo es el conjunto S = {2,5}.

El axioma de elección se ha considerado contrario a la intuición cuando se interpreta en un nivel práctico: aunque es posible seleccionar un elemento de cada uno de una colección finita de conjuntos en una cantidad finita de tiempo, es físicamente imposible lograr la misma hazaña cuando presentado con una colección infinita de juegos. La existencia de un conjunto de elección no es "constructiva", por así decirlo, y los matemáticos, incluso hoy en día, ven con recelo el uso del axioma. Sin embargo, en 1938, el matemático austriaco KURT GÖDEL demostró que nunca surgiría ninguna contradicción cuando el axioma de elección se usa junto con otros axiomas estándar de la teoría de conjuntos.

Zermelo formuló el axioma para demostrar que todo conjunto ordenado puede estar bien ordenado. El axioma de elección también prueba (y de hecho es equivalente a) la ley de la tricotomía, que establece que para cualquier par de NÚMEROS REALES a y b, se cumple precisamente uno de los siguientes:

i. a > b ii.
a < b iii.
un = segundo

Aunque esta declaración, en un nivel, parece obvia, su validez es fundamental para el funcionamiento de los números reales y, por lo tanto, debe entenderse correctamente.

Véase también CONJUNTO BIEN ORDENADO.

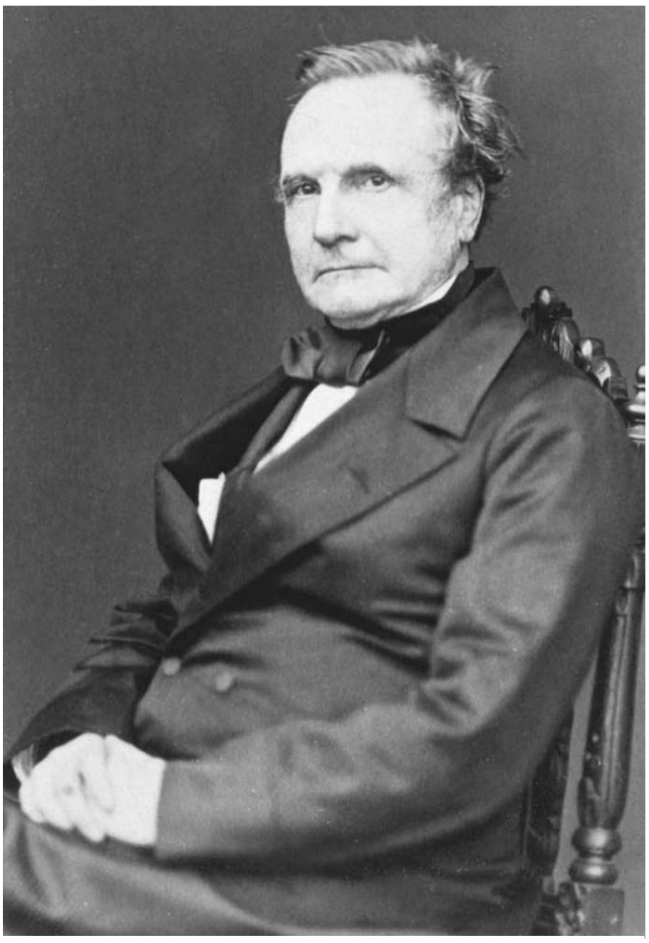
Machine Translated by Google

B

Babbage, Charles (1791–1871) Computación británica
Nacido el 26 de diciembre de 1791 en Londres, Inglaterra, Charles Babbage es mejor recordado por su trabajo en el diseño y fabricación de una calculadora mecánica, el precursor de una computadora. Después de construir primero un "máquina de diferencia", Babbage dedicó el resto de su vida a la construcción de un “análisis” superior motor” capaz de realizar todas las operaciones matemáticas. Su trabajo hacia este objetivo sentó las bases del diseño por computadora que se usa hoy en día. En parte debido a la falta de financiación, sin embargo, la máquina nunca se completó.

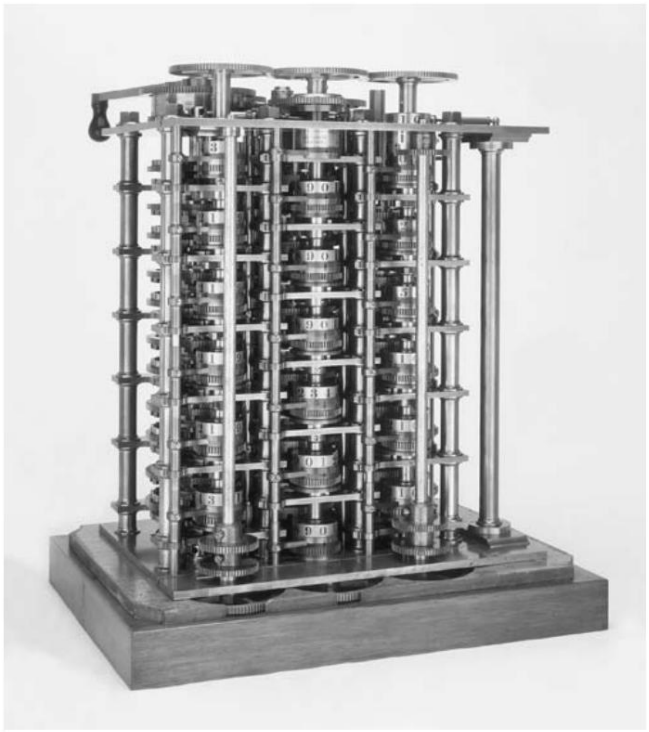
Babbage ingresó al Trinity College, Cambridge, en 1810. Mientras era estudiante, él y un compañero de pregrado es coautor de Differential and Integral Calculus, una memoria influyente sobre la historia del cálculo. Después de transferir el anillo a Peterhouse College, Babbage recibió su licenciatura en matemáticas en 1814 para luego comenzar una carrera en investigación matemática. Babbage publicó un número de artículos influyentes sobre el tema de funcional ecuaciones y fue honrado con la elección al ROYAL SOCIEDAD en 1816. En 1827 se convirtió en profesor Lucasiano de Matemáticas en Cambridge.

Gran parte del trabajo teórico de Babbage se basó en consultar tablas de logaritmos y trigonométricas funciones Consciente de la inexactitud del cálculo humano, Babbage se interesó en el problema de usar un dispositivo mecánico para realizar cálculos complejos. En 1819 comenzó a trabajar en una pequeña “máquina diferencial”, que completó tres años más tarde. Anunció su invento a la comunidad científica en un artículo de 1822, “Nota sobre la aplicación de



Charles Babbage, un eminente matemático del siglo XIX, es mejor conocido por su diseño y fabricación de una mecánica computadora. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/ Topham-HIP/La imagen funciona)

Machine Translated by Google



Charles Babbage completó el trabajo en su "máquina diferencial", la primera computadora mecánica sofisticada del mundo, en 1822. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham HIP/ The Image Works)

Maquinaria para el Cómputo de Datos Astronómicos y Tablas Matemáticas."

Aunque la máquina era capaz de realizar Cálculos relativamente simples, pero muy precisos. (usando el método de DIFERENCIAS FINITAS para calcular valores de funciones POLINOMALES), su invento fue bien recibido y se entendió como un primer paso hacia una nueva era en capacidades computacionales. Bab bage fue galardonado con una medalla de oro de la Astronomical Sociedad y recibió una subvención del Canciller de Hacienda para construir un motor de diferencias más grande y más complejo.

En 1801 Joseph-Marie Jacquard inventó un telar capaz de tejer patrones complejos haciendo uso de un conjunto de instrucciones establecidas en tarjetas perforadas con agujeros Dos décadas más tarde, Babbage decidió seguir la misma idea y diseñar un motor a vapor que aceptaría instrucciones y datos de perforados tarjetas Con la ayuda de la hija de Lord Byron, LADY AUGUSTA ADA LOVELACE, Babbage se puso a trabajar en la creación de un sofisticado dispositivo de cálculo. en 1832 publicó un libro, Sobre la economía de la maquinaria y Manufacturas, ofreciendo una discusión teórica sobre El tema. Esta podría considerarse la primera publicada trabajar en el campo de la INVESTIGACIÓN OPERATIVA.

Desafortunadamente, debido a problemas financieros y tecnológicos dificultades, la máquina nunca fue completada. (El La tecnología metalúrgica de mediados del siglo XIX no era capaz de alcanzar los niveles de precisión de la máquina de Babbage. exigió.) El dispositivo en su estado inacabado se conserva hoy en el Museo de Ciencias de Londres.

Aunque nunca realizó su sueño de construir un computadora mecánica operativa, sus conceptos de diseño desde entonces se ha demostrado que es correcto. No es una exageración decir que las computadoras modernas construidas sobre El diseño teórico de Babbage ha revolucionado casi todos los aspectos de la vida del siglo XX.

Babbage murió en Londres, Inglaterra, en octubre 18, 1871.

Matemáticas babilónicas Los babilonios del 2000 BCE vivió en Mesopotamia, la llanura fértil entre el ríos Éufrates y Tigris en lo que ahora es Irak. Somos afortunado que los pueblos de esta región mantuvieran extensas registros de su sociedad y sus matemáticas en tablillas de arcilla cocidas al sol resistentes. Un gran número de estos las tabletas sobreviven hoy. Los babilonios usaban un estilo simple para hacer marcas en la arcilla y desarrollaron una forma de escritura basada en símbolos cuneiformes (en forma de cuña).

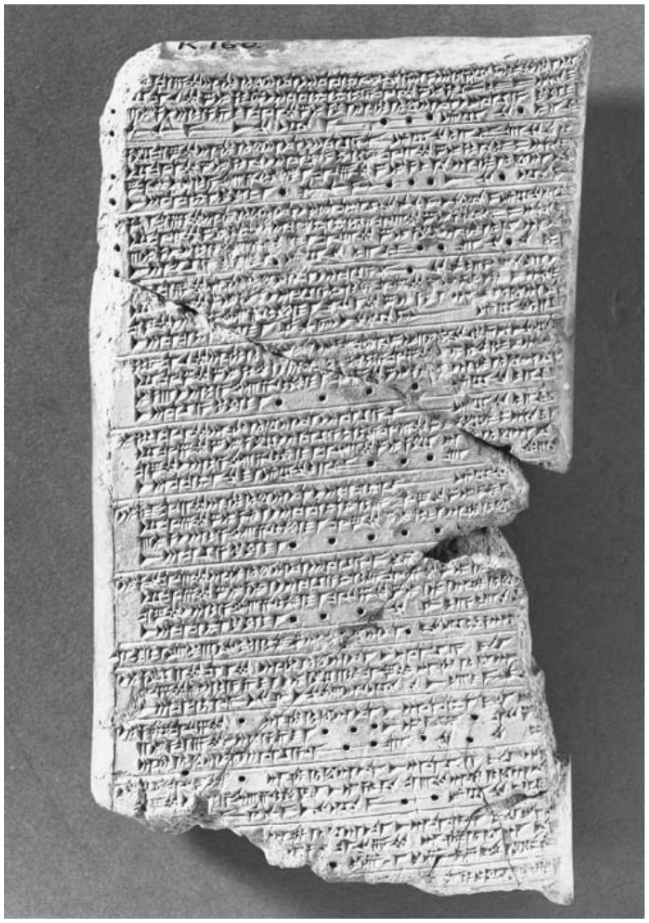
La actividad matemática de los babilonios parece haber sido motivado, al principio, por las necesidades prácticas cotidianas de dirigir su sociedad. Muchos problemas descritas en las primeras tablillas tienen que ver con el cálculo el número de trabajadores necesarios para la construcción de riego canales y el gasto total de salarios, por ejemplo. Pero muchos problemas descritos en textos posteriores no tienen aplicación práctica aparente e indican claramente un interés en la búsqueda de las matemáticas por su propio bien.

Los babilonios usaban sólo dos símbolos para representar números: el símbolo para representar una unidad y el símbolo para representar un grupo de diez. Se usó un sistema aditivo simple para representar los números del 1 al 59. Por ejemplo, el grupo representa "32". Luego se usó un SISTEMA DE VALOR DE LUGAR de base 60 para representan números mayores que 59. Por ejemplo, el número 40,992, que es igual a 11 × 602 + 23 × 60 + 12, . Se fue escrito: insertaron espacios entre grupos de símbolos.

Machine Translated by Google

Los historiadores no tienen claro por qué los babilonios optaron por trabajar con un sistema SEXAGESIMAL . Una teoría popular sugiere que este sistema numérico se basa en la observación de que hay 365 días en el año.
Cuando se redondea al valor más conveniente (altamente divisible) de 360, tenemos un múltiplo de 60. Los vestigios de este sistema numérico permanecen con nosotros hoy. Por ejemplo, usamos el número 360 para el número de grados en un círculo y contamos 60 segundos en un minuto y 60 minutos por hora.

Había dos puntos de posible confusión con el sistema numérico babilónico. Sin símbolo para el cero, no está claro si el número envía 61 (como una unidad de 60 más una sola unidad), representar 3601 (como una unidad de 602 más una sola unidad) o incluso 216 060, por ejemplo. Además, los babilonios se sentían cómodos con fracciones y usamos potencias negativas de 60 para representarlas (al igual que usamos potencias negativas de 10 para escribir fracciones en notación decimal). Pero sin notación para el equivalente de un punto decimal, el símbolo también podría interpretarse como 1 + (1/60), o (1/60) + (1/602) , o incluso 60 + (1/604) , por ejemplo. Como los babilonios nunca desarrollaron un método para resolver tal ambigüedad, asumimos entonces que nunca fue considerado un problema para los estudiosos de la época. (Los historiadores sugieren que el contexto del texto siempre hizo evidente la interpretación del número).



Una tablilla cuneiforme del siglo VII del norte de Irak registra observaciones del planeta Venus. (Foto cortesía del Museo Británico/Topham-HIP/The Image Works)

Los babilonios compilaron extensas tablas de potencias de números y sus recíprocos, que usaron de manera ingeniosa para realizar cálculos aritméticos.
(Por ejemplo, una tablilla fechada en 2000 a. C. enumera todos los cuadrados de los números del uno al 59 y todos los cubos de los números del uno al 32). Para calcular el producto de dos números a y b, los eruditos babilónicos primero puso su suma y su diferencia, leyó los cuadrados de esos números de una tabla y dividió su diferencia por cuatro. (En notación moderna, esto corresponde al cálculo: ab = (1/4) [(a + b) número a por b, los estudiosos calcularon el producto de a y el recíproco 1/b ^{2} – (a – b) ^{2}].) Para dividir un (registrado en una tabla): ab = a × (1/b).

La misma tabla de recíprocos también proporcionó los medios para resolver ECUACIONES LINEALES: bx = a. (Multiplica a por el recíproco de b.)

Los problemas de geometría y el cálculo del área a menudo conducen a la necesidad de resolver ecuaciones CUADRÁTICAS . Por ejemplo, un problema de una tableta pide el ancho de un rectángulo cuya área es 60 y cuya longitud es siete unidades más larga que el ancho. En notación moderna, esto equivale a resolver la ecuación x(x + 7) = x + 7x = 60. El escriba que escribió la tablilla ^{2} ofrece una solución equivalente a la famosa fórmula cuadrática: $x = \sqrt{(7/2)2 + 60} - (7/2) = 5$. (Las raíces cuadradas fueron com puesto examinando una tabla de cuadrados.)

Los problemas de volumen conducen a ecuaciones cúbicas, y los babilonios eran expertos en resolver ecuaciones especiales de la forma: ax3 + bx2 = c. (Resolvieron esto estableciendo n = (ax)/b, de donde la ecuación puede ser = ca2 /b 3 . Al examinar una tabla de 3 reescrito como ^{2} + norte ^{2}
n valores para $n^3 + n^2$, la solución se puede deducir.)

Está claro que los eruditos babilónicos conocían el TEOREMA DE PITÁGORAS , aunque no escribieron una prueba general del resultado. Por ejemplo, una tableta que ahora se encuentra en el museo británico proporciona el siguiente problema y solución:

Machine Translated by Google

Si el ancho de un rectángulo es de cuatro unidades y la longitud de su diagonal es de cinco unidades, ¿cuál es su ancho?

Cuatro por cuatro es 16 y cinco por cinco es 25.
Resta 16 de 25 y queda nueve.
¿Qué multiplicado por nueve es igual a nueve? Tres por tres es nueve. El ancho es tres.

Los babilonios utilizaron el teorema de Pitágoras para calcular la longitud diagonal de un cuadrado y encontraron una aproximación a la raíz cuadrada de dos con una precisión de cinco decimales. (Se cree que usaron un método análogo al MÉTODO DE HERON para hacer esto.) Los eruditos babilónicos también estaban interesados en aproximar las áreas y volúmenes de varias formas comunes usando técnicas que a menudo invocaban el teorema de Pitágoras.

Lo más notable es una tablilla que enumera 15 grandes TRIPLES DE PITÁGORAS. Como no hay una necesidad práctica aparente de enumerar estos triples, esto sugiere fuertemente que los babilonios realmente disfrutaban de las matemáticas por sí mismas.

Véase también VALOR BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO.

Banach, Stefan (1892–1945) Análisis polaco , topología Nacido el 30 de marzo de 1892 en Cracovia, ahora en Polonia, Stefan Banach se destaca por su trabajo fundacional en ANÁLISIS y por generalizar la noción de ESPACIO VECTORIAL a una teoría general de un espacio de funciones. Este trabajo fundamental permite a los matemáticos de hoy desarrollar una teoría de la SERIE DE FOURIER, en cierto sentido, en escenarios muy abstractos. Banach también es recordado por su trabajo que condujo a la famosa paradoja de Banach-Tarski que surge en el estudio del ÁREA y el volumen.

Banach comenzó su carrera académica con un título universitario en ingeniería de la Universidad Técnica de Lvov. Sin embargo, sus planes académicos se vieron interrumpidos con el advenimiento de la Primera Guerra Mundial. Durante este tiempo, Banach se vio obligado a trabajar en la construcción de carreteras, aunque logró encontrar tiempo para enseñar también en las escuelas locales de Cracovia durante este período. Poco después de la guerra, Banach se unió a un grupo de discusión de matemáticas en Lvov y pronto impresionó a los académicos matemáticos con sus habilidades para resolver problemas matemáticos. Una semana después de unirse al grupo, Banach había redactado un trabajo de investigación en coautoría sobre el tema de la teoría de la medida, una teoría que generaliza el concepto de área. Banach continuó producir resultados importantes en este campo a un ritmo extremadamente rápido a partir de entonces.

A Banach se le ofreció una cátedra en la Universidad Técnica de Lvov en 1920 y rápidamente se puso a trabajar en una tesis doctoral. A pesar de no tener títulos universitarios oficiales previos en matemáticas, Banach obtuvo un doctorado en 1922 por la Universidad Jan Kazimierz en Lvov.

Las contribuciones de Banach a las matemáticas fueron significativas. Su trabajo generalizado sobre las series de Fourier fundó una rama de las matemáticas que ahora se llama análisis funcional. Tiene conexiones con los campos de la teoría de la medida, la integración y la TEORÍA DE CONJUNTOS. Él y su colega Alfred Tarski presentaron su famoso resultado paradójico en 1926 en su artículo "Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectment congruent" (Sobre la descomposición de figuras en partes congruentes). Su artículo de 1932, "Théorie des opérations linéaires" (Teoría de los operadores lineales), que desarrolla la noción de un ESPACIO VECTORIAL normado (es decir, un espacio vectorial con una noción de longitud unida a sus vectores), se considera su obra más influyente. . Además de realizar investigaciones en matemáticas, Banach también escribió textos de aritmética, álgebra y geometría para estudiantes de secundaria.

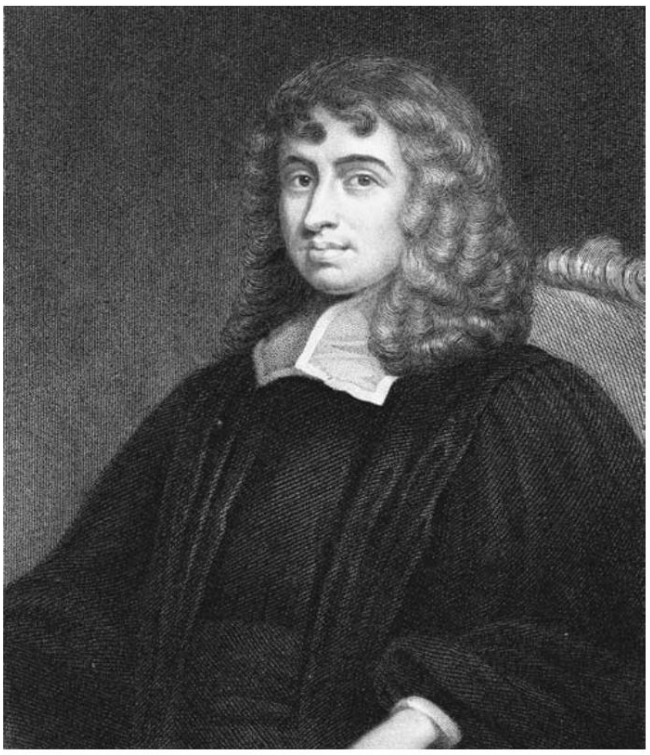
En 1939, Banach fue elegido presidente de la Sociedad Matemática Polaca. A Banach se le permitió mantener su posición en la universidad durante la ocupación soviética ese mismo año, pero las condiciones cambiaron con la invasión nazi de 1941. Muchos académicos polacos fueron asesinados, pero Banach sobrevivió, aunque se vio obligado a trabajar en un laboratorio alemán de enfermedades infecciosas, con la tarea de alimentar y mantener colonias de piojos. Permaneció allí hasta junio de 1944, pero enfermó gravemente cuando las tropas soviéticas recuperaron Lvov. Banach murió de cáncer de pulmón el 31 de agosto de 1945.

El nombre de Banach permanece ligado al tipo de espacio vectorial que inventó, y la investigación en este campo del análisis funcional continúa en la actualidad. La teoría tiene profundas aplicaciones a la física teórica, sobre todo a la mecánica cuántica.

gráfico de barras (bar chart) Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

Barrow, Isaac (1630–1677) Cálculo británico , teología Nacido en Londres, Inglaterra, su fecha exacta de nacimiento es

Machine Translated by Google



Isaac Barrow, un matemático del siglo XVII, se destaca principalmente por la inspiración que brindó a otros en el desarrollo de la teoría del cálculo. Es posible que haya sido el primer erudito en reconocer y comprender el significado del teorema fundamental del cálculo. (Foto cortesía de ARPL/ Topham/The Image Works)

desconocido) Isaac Barrow es recordado en matemáticas por su colección de notas de conferencias Lectiones geometri cae (Conferencias geométricas), publicadas en 1670, en las que describe un método para encontrar tangentes a curvas similar al que se usa hoy en CÁLCULO DIFERENCIAL. Barrow también puede haber sido el primero en darse cuenta de que el problema de encontrar tangentes a las curvas es el problema inverso de encontrar áreas bajo las curvas. (Este es EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.) Las conferencias en las que se basaron sus notas fueron extremadamente influyentes. Proporcionaron a SIR ISAAC NEWTON, quien asistió a las conferencias y tuvo muchas conversaciones privadas con Barrow, un punto de partida para su desarrollado CÁLCULO.

Barrow se graduó del Trinity College, Cambridge, con una maestría en 1652, pero no estaba satisfecho con el nivel de instrucción matemática que había recibido. Después de dejar la universidad, Barrow aprendió por sí mismo GEOMETRÍA y publicó una edición simplificada de LOS ELEMENTOS de EUCLID en 1655. Se convirtió en profesor de geometría en Gresham College, Londres, en 1662, y fue elegido como uno de los primeros 150 miembros de la recién establecida ROYAL SOCIETY en 1663. Regresó a Cambridge ese mismo año para ocupar el cargo. de la Cátedra Lucasiana de Matemáticas, en el Trinity College, y trabajó arduamente para mejorar los estándares de la educación matemática y el interés en la investigación matemática en Cambridge. Con este objetivo en mente, Barrow dio una serie de conferencias sobre temas de óptica, geometría, TEORÍA DE NÚMEROS y la naturaleza del tiempo y el espacio. Sus discusiones sobre geometría demostraron ser muy innovadoras y de fundamental importancia por la nueva perspectiva que ofrecían. Newton aconsejó a Barrow que publicara las notas.

En 1669, Barrow renunció a la cátedra Lucasiana para permitir que Newton se hiciera cargo, y no hizo más trabajos matemáticos. Murió en Londres, Inglaterra, el 4 de mayo de 1677, de una fiebre maligna. La influencia de Barrow en las matemáticas modernas es oblicua. Su efecto en el desarrollo del tema radica principalmente en la inspiración que brindó a otros.

base de un logaritmo Ver LOGARITMO.

base de un exponencial Ver EXPONENTE; EXPONEN FUNCIÓN TIAL.

base de un sistema numérico (base, escala de un sistema numérico) El número de símbolos diferentes usados, quizás en combinación, para representar todos los números se llama la base del sistema numérico que se está usando. Por ejemplo, hoy usamos los diez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 para denotar todos los números, haciendo uso de la posición de estos dígitos en una combinación dada para denotar valores grandes. Por lo tanto, usamos un sistema numérico de base 10 (también llamado sistema de representación decimal). También usamos un sistema de valor posicional para dar significado al uso repetido de símbolos. Cuando escribimos 8407, por ejemplo, nos referimos a ocho cantidades de 1000 (103), cuatro cantidades de 100 (102) y siete unid Barrow, Isaac Cita Cita ción de cada DÍGITO es importante: el número de lugares desde la derecha en los que se encuentra un dígito determina la potencia de 10 que se está considerando. Así, los números 8, 80, 800 y 8000, por ejemplo, representan cantidades diferentes. (El sistema de NÚMEROS ROMANOS, por ejemplo, no es un sistema de valor posicional).

Machine Translated by Google

Para cualquier número entero positivo b, uno puede crear un sistema de notación de valor posicional de esa base como sigue:

> Escribe un número dado n como una suma de potencias de b:
> $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$
> con cada número ai satisfaciendo $0 \le a_i < b$. Entonces
> la representación en base b de n es el dígito k
> cantidad $a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$. Tal representación
> utiliza únicamente los símbolos 0, 1, 2,…, b – 1.

Por ejemplo, para escribir el número 18 en base cuatro—utilizando los símbolos 0, 1, 2 y 3, observe que $18 = 1 \times 4^2 + 0 \times 4 + 2 \times 1$, dando la representación en base 4: 102. En la dirección inversa, si 5,142 es la representación en base 6 de un número n, entonces n es el número $5 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 4 \times 6 + 2 \times 1 = 1142$.

Uno también puede hacer uso de los poderes negativos de la cantidad base b. Por ejemplo, usando un punto decimal para potencias de diez positivas y negativas separadas, el número 312.407, por ejemplo, representa la fracción cantidad: $3 \times 10^2 + 1 \times 10 + 2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{10^2} + 7 \times \frac{1}{10^3}$. En base 4, el número 33.22 es la cantidad $3 \times 4 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4^2} = 15 + \frac{2}{4} + \frac{2}{16}$, cual es 15.625 en base 10.

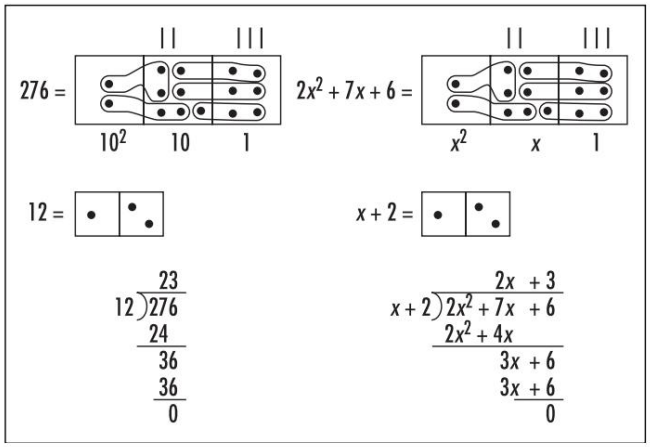
La siguiente tabla da los nombres de los sistemas numéricos de valor posicional que usan diferentes valores base b. Los babilonios de la antigüedad usaban un sexagesimal y los mayas del primer milenio usaban un sistema sistema cercano a ser puramente vigesimal.

base b	sistema de numeración
2	Binario
3	Ternario
4	Cuaternario
5	Quinario
6	Senario
7	septenario
8	octales
9	nonario
10	Decimal
11	Undenario
12	Duodecimal
16	hexadecimal
20	vigesimal
60	Sexagésimo

La representación de números se puede representar bien con la ayuda de un simple AUTÓMATO llamada máquina de base numérica. Comenzando con una fila de cajas que se extienden infinitamente a la izquierda, uno coloca en el cuadro más a la derecha un número finito de centavos. Luego, el autómata redistribuye los centavos de acuerdo con un valor preestablecido. regla. Una máquina "1 ← 2", por ejemplo, reemplaza un par de centavos en una caja con un solo centavo en la caja un lugar a la izquierda. Así, por ejemplo, seis centavos colocado en la máquina 1 ← 2 "disparar" cuatro veces para produce una distribución final que se puede leer como "1 1 0". Este resultado es el número seis escrito como NÚMERO BINARIO y esta máquina convierte todos los números a su representaciones en base dos. (El diagrama en la entrada para autómata ilustra esto.) Una máquina 1 ← 3 produce representaciones de base tres y una máquina de 1 ← 10 produce las representaciones ordinarias en base diez.

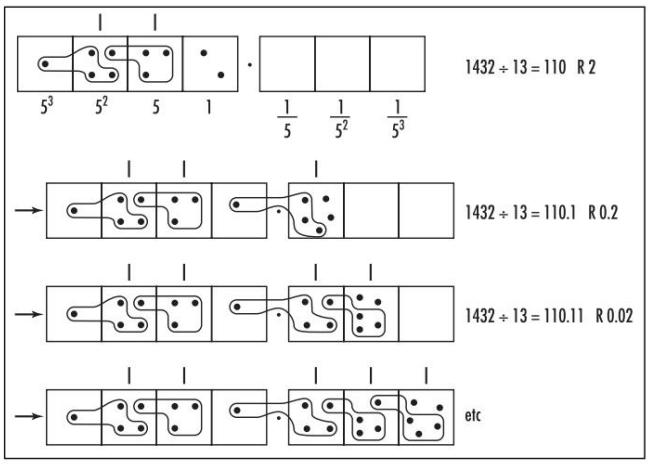
División larga

El proceso de división larga en ARITMÉTICA puede ser explicado con la ayuda de una máquina de base numérica. Como un ejemplo, usemos la máquina 1 ← 10 para dividir el número 276 por 12. Observando que 276 centavos colocados en la máquina 1 ← 10 produce un diagrama con dos centavos en la posición de 100, siete centavos en la posición de 10 y seis centavos en la posición de unidades, y que 12 centavos aparece como un centavo en una caja con dos centavos en la caja a su derecha, para dividir 276 por 12, uno simplemente debe buscar "grupos de 12" dentro del diagrama de 276 centavos y llevar la cuenta del número de grupos que uno encuentra.



División larga base diez

Machine Translated by Google



División larga base cinco

Observe que encontramos dos grupos de 12 en los 10 posición (es decir, dos grupos de 120), y tres grupos de 12 en la posición de las unidades. Así: 276 ÷ 12 = 23. El el algoritmo estándar que se enseña a los escolares no es nada más que un sistema de grabación para este proceso de encontrar grupos de doce. Note también que uno no necesita conocer el tipo de máquina, es decir, la base de la sistema numérico en el que se trabaja para calcular un problema de división larga. Si simplemente escribimos el número base como x, y trabajar con una máquina $1 \leftarrow x$, entonces el mismo cálculo proporciona un método para división de polinomios. En nuestro ejemplo, vemos que:

$$(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$$

Así, la división de polinomios puede considerarse como un cálculo de la división larga. Hay una dificultad técnica con esto: un polinomio puede tener coeficientes negativos, y cada coeficiente negativo correspondería a un número negativo de centavos en una celda. Si uno está dispuesto a aceptar tales cantidades, entonces la base numérica modelo de máquina sigue funcionando. (Nota, en este modelo extendido, que uno puede insertar en cualquier celda un igual número de centavos positivos y negativos sin cambiando el sistema. De hecho, podría ser necesario haga esto para encontrar los grupos deseados de centavos.)

El proceso de división larga podría producir no cero residuos. Por ejemplo, en base 5, dividiendo 1432 por 13 da la respuesta 110 con un resto de 2 unidades. (En base 10, esto dice: 242 ÷ 8 = 30 con un resto de 2.) Si uno está dispuesto a trabajar con negativos potencias de cinco, y "unfire" un grupo de cinco centavos, uno puede continuar el proceso de división larga para calcular, en base 5, que 1432 ÷ 13 = 110.1111…

Véase también MATEMÁTICAS BABILÓNICAS; NUMEROS BINARIOS; DÍGITO; MATEMÁTICAS MAYAS; MÚLTIPLES ANIDADOS CATIÓN; CERO.

base de un polígono/poliedro La base de un triángulo, o de cualquier POLÍGONO, es el lado inferior de la figura, generalmente se dibuja como un borde horizontal paralelo a la parte inferior de la página. Por supuesto, otros bordes pueden considerarse la base si se reorienta la figura. la base de un POLIEDRO, como un cubo o una pirámide, es la CARA más baja de la figura. Es el rostro en el que se encuentra la figura. permanecería de pie si se colocara sobre una mesa.

El punto más alto de una figura geométrica opuesta la base se llama vértice de la figura, y la distancia desde la base hasta el ápice se llama altura de la figura.

base Ver LINEALMENTE DEPENDIENTE E INDEPENDIENTE.

Bayes, Rev. Thomas (1702–1761) Inglés Probabilidad, Teología Nacido en Londres, Inglaterra, (el exacto se desconoce la fecha de su nacimiento), el teólogo y matemático Reverendo Thomas Bayes es mejor recordado por su influyente artículo “An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances”, publicado póstumamente en 1763, que esboza los principios fundamentales de teoría de la PROBABILIDAD . Bayes desarrolló técnicas y enfoques innovadores en la teoría de la inferencia estadística, muchos de los cuales se consideraron controvertidos en el tiempo. Su ensayo provocó mucha más investigación en el y fue profundamente influyente. el trabajo tambien contiene el famoso teorema que hoy lleva su nombre.

Un ministro ordenado que sirvió a la comunidad de Tunbridge Wells, Kent, Inglaterra, Bayes también persiguió las matemáticas como un interés externo. En cuanto a los historiadores puede determinar, publicó sólo dos obras durante su toda la vida. Uno fue un ensayo teológico en 1731 titulado “Benevolencia divina, o un intento de probar que el Finalidad Principal de la Divina Providencia y del Gobierno es la Felicidad de Sus Criaturas.” El otro era un pieza matemática que publicó de forma anónima en 1736, “Introducción a la Doctrina de Fluxiones, y una

Machine Translated by Google

Defensa de los matemáticos contra las objeciones del autor de El analista", defendiendo la lógica fundamentos de la recién inventada de SIR ISAAC NEWTON CÁLCULO. A pesar de la aparente falta de trabajos matemáticos publicados, Bayes fue elegido miembro de la prestigiosa Royal Society académica en 1742.

Bayes se retiró del ministerio en 1752 pero permaneció en Tunbridge Wells hasta su muerte en abril 17 de octubre de 1761. Su amigo, Richard Price, descubrió la ahora famoso artículo sobre la teoría de la probabilidad entre sus pertenencias y lo envió para su publicación. Un segundo artículo, "Una carta sobre series asintóticas de Bayes a John Canton", uno sobre series asintóticas, también se publicó después de la muerte de Bayes. El enfoque teórico de estadística inferencial propuesta por Bayes sigue siendo un activo campo de investigación en la actualidad.

Véase también TEOREMA DE BAYES ; ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

El teorema de Bayes En su artículo de 1763, publicado póstumamente, REV. THOMAS BAYES estableció un resultado fundamental, ahora llamado teorema de Bayes, que expresa la PROBABILIDAD CONDICIONAL P(A|B) de una evento A que ocurre dado que el evento B ya ha ocurrió en términos de la probabilidad condicional inversa P(B|A). Precisamente:

$$P(A|B) = P(B|A)\,P(A) \Big/ P(B)$$

Esta fórmula se prueba fácilmente observando que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Más generalmente, supongamos que B1 , B2 ,…, Bn es un conjunto exclusivo y exhaustivo de eventos, es decir, un conjunto de eventos no superpuestos que cubren toda la MUESTRA ESPACIO. Supongamos también que nos han dicho que ha ocurrido otro evento A. Entonces la probabilidad que el evento Bi también ocurrió está dado por:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Para ilustrar: suponga que la bolsa 1 contiene cinco bolas rojas y dos bolas blancas, y la bolsa 2 contiene siete bolas rojas y cuatro bolas blancas. Si se selecciona una bolsa al azar y una bola escogida de ella resulta ser roja, ¿cuál es el probabilidad de que provenga de la bolsa 1?

Aquí, sea A el evento "se elige una bola roja" y B1 y B2 los eventos "se selecciona una pelota de la bolsa 1 / bolsa 2", respectivamente. Entonces P(B1) = 1/2 = P(B2), P(A|B1) = 5/7, y P(A|B2) = 7/11. Por lo tanto, la probabilidad que buscamos, P(B1|A), viene dada por:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{7} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{11} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{55}{104}$$

rumbo El ÁNGULO entre el rumbo de un barco y la dirección del norte se llama rumbo del barco. El el ángulo se mide en grados en el sentido de las agujas del reloj desde el norte y generalmente se expresa como un número de tres dígitos número. Por ejemplo, un barco que se dirige directamente al este tiene una rumbo de 090 grados, y uno que se dirige al suroeste tiene un rumbo de 225 grados.

La palabra "llevar" también se usa para la medida de ángulo desde el norte en el que se ve un objeto. Para ejemplo, un tripulante a bordo de un barco que avista un faro directamente al oeste dirá que el faro tiene teniendo 270 grados.

Familia Bernoulli Ninguna familia en la historia de las matemáticas ha producido tantos matemáticos destacados como la familia Bernoulli de Basilea, Suiza. La familia disco comienza con dos hermanos, Jacob Bernoulli y Johann (Jean) Bernoulli, respectivamente, el quinto y décimo hijos de Nicolás Bernoulli (1623-1708).

Jacob (27 de diciembre de 1654 - 16 de agosto de 1705) es destacado por su trabajo sobre la teoría del CÁLCULO y la PROBABILIDAD , siendo uno de los primeros matemáticos en comprender la utilidad y el poder de la obra recién publicada del gran WILHELM GOTTFRIED LEIB NIZ (1646-1716). Jacob aplicó el cálculo a la estudio de las curvas, en particular de la espiral logarítmica y el BRACHISTOCHRONE, y fue el primero en utilizar COORDENADAS POLARES en 1691. También escribió el primer texto centrado en la teoría de la probabilidad Ars con jectandi (El arte de conjeturar), que fue publicado

Machine Translated by Google

póstumamente en 1713. Los NÚMEROS DE BERNOULLI también aparecen, por primera vez, en este texto. Jacob ocupó la cátedra de matemáticas en la Universidad de Basilea desde 1687 hasta su muerte.

Johann (17 de julio de 1667 - 1 de enero de 1748) también es conocido por su trabajo sobre cálculo. Al ser reconocido como un experto en el campo, el noble francés MARQUÉS DE GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE L'HÔPITAL (1661–1704) contrató a Johann para que le explicara la nueva teoría, primero a través de sesiones formales de tutoría en París y luego a través de correspondencia cuando Más tarde, Johann regresó a Basilea. L'Hôpital publicó el contenido de las cartas en un libro de texto de 1696 Analyse des infiniment petits (Análisis con cantidades infinitamente pequeñas), pero le dio poco reconocimiento a Johann. La famosa regla que ahora lleva su nombre, LA REGLA DE L'HÔPITAL , se debe a Johann. Johann sucedió a su hermano en la cátedra de la Universidad de Basilea.

Los dos hermanos, Jacob y Johann, trabajaron en problemas similares y cada uno mantuvo un intercambio de ideas casi constante con Leibniz. Sin embargo, la relación entre los dos hermanos no era amistosa y, a menudo, criticaban públicamente el trabajo del otro.

Nicolaus (I) Bernoulli (21 de octubre de 1687 - 29 de noviembre de 1759), sobrino de Jacob y Johann, también alcanzó cierta fama en matemáticas. Trabajó en problemas de GEOMETRÍA, ECUACIONES DIFERENCIALES, SERIES infinitas y probabilidad. Ocupó la cátedra de matemáticas en la Universidad de Padua, una vez ocupada por GALILEO GALILEI (1564-1642).

Johann Bernoulli tuvo tres hijos, todos los cuales ellos mismos se convirtieron en destacados matemáticos:

Nicolaus (II) Bernoulli (6 de febrero de 1695 - 31 de julio de 1726) escribió sobre curvas, ecuaciones diferenciales y teoría de la probabilidad. Murió —ahogándose mientras nadaba— solo ocho meses después de aceptar un puesto prestigioso en la Academia de St. Petersberg.

Daniel Bernoulli (8 de febrero de 1700 - 17 de marzo de 1782), el más famoso de los tres hijos, se destaca por su texto de 1738 Hydrodynamica (Hidrodinámica), que sentó las bases de la disciplina moderna de la hidrodinámica. (El padre de Daniel, Johann, celoso del éxito de su hijo, publicó su propio texto sobre hidrodinámica en 1739, pero colocó en él la fecha de publicación de 1732 y acusó a su hijo de plagio.) Daniel también trabajó en las matemáticas de las cuerdas vibrantes, la cinética teoría de los gases, teoría de la probabilidad y ecuaciones diferenciales parciales. Fue galardonado con el Gran Premio de la Academia de París no menos de 10 veces.

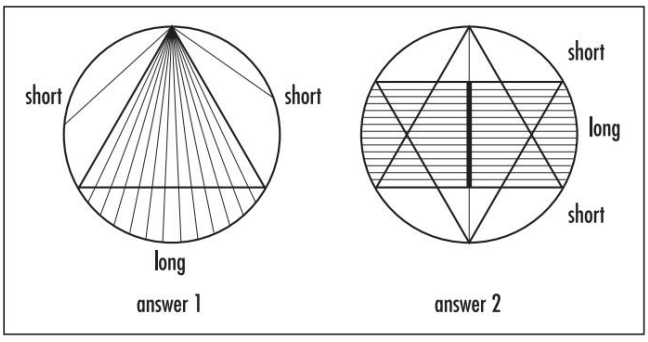
Johann (II) Bernoulli (28 de mayo de 1710 - 17 de julio de 1790) estudió las matemáticas del flujo de calor y la luz. Fue galardonado con el Gran Premio de la Academia de París en cuatro ocasiones y sucedió a su padre en la cátedra de la Universidad de Basilea en 1743.

Johann (II) Bernoulli tuvo tres hijos, dos de los cuales, Johann (III) Bernoulli (4 de noviembre de 1744 a 13 de julio de 1807) y Jacob (II) Bernoulli (17 de octubre de 1759 a 15 de agosto de 1789), trabajaron en matemáticas. . Johann (III) estudió astronomía y probabilidad, y escribió sobre decimales recurrentes y la teoría de ecuaciones. Fue profesor de matemáticas en la Universidad de Berlín a la temprana edad de 19 años. Jacob (II) Bernoulli escribió obras sobre las matemáticas de la elasticidad, la hidrostática y la balística. Era profesor de matemáticas en la Academia de San Petersburgo pero, al igual que su tío, se ahogó a los 29 años mientras nadaba en el río Neva.

Los miembros de la familia Bernoulli tuvieron un profundo efecto en el desarrollo inicial de la teoría de la probabilidad, el cálculo y el campo de la mecánica continua. Muchos conceptos (como los números de Bernoulli, una distribución de probabilidad, una ecuación diferencial particular) se nombran en su honor.

Números de Bernoulli Ver SUMAS DE POTENCIAS.

La paradoja de Bertrand matemático francés Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) planteó el siguiente desafío:



Respondiendo a la paradoja de Bertrand

Machine Translated by Google

Imagina un TRIÁNGULO equilátero dibujado dentro de un CÍRCULO. Encuentre la PROBABILIDAD de que una ACORDA elegida al azar sea más larga que la longitud del lado del triángulo.

Hay dos respuestas posibles:

1. Una vez que se dibuja una cuerda, siempre podemos rotar la imagen del círculo para que un extremo de la cuerda seleccionada se coloque en la parte superior del círculo. Está claro entonces que la longitud de la cuerda será mayor que la longitud del lado del triángulo si el otro extremo se encuentra en el tercio medio del perímetro del círculo.
   Las posibilidades de que esto suceda son 1/3, proporcionando la respuesta al problema.
2. Al rotar la imagen del círculo y la cuerda seleccionada, también podemos suponer que la cuerda elegida es horizontal. Si la cuerda cruza la línea continua que se muestra, será más larga que la longitud del lado del triángulo. Se observa que esta línea continua es la mitad de la longitud del diámetro. Por lo tanto, las posibilidades de que una cuerda sea más larga que la longitud del lado del triángulo son 1/2.

Sorprendentemente, ambas líneas de razonamiento son matemáticamente correctas. Ahí radica una PARADOJA: la respuesta no puede ser simultáneamente 1/3 y 1/2.

El problema aquí radica en definir qué entendemos por "seleccionar un acorde al azar". Hay muchas maneras diferentes de hacer esto: se podría hacer girar una botella en el centro del círculo para seleccionar puntos en el perímetro para conectar con una cuerda, o se podría hacer rodar una escoba a través de un círculo dibujado en el piso, o tal vez incluso deje caer un cable desde una altura por encima del círculo y vea dónde aterriza. Cada enfoque de la "aleatoriedad" podría (y de hecho lo hace) llevar a su propia respuesta por separado. Esta paradoja muestra que se debe tener sumo cuidado para plantear problemas significativos en la teoría de la probabilidad. Es muy difícil dar una definición precisa de "aleatoriedad".

Bh–askara II (Bhaskaracharya) (1114–1185) Álgebra india, aritmética Nacido en Vijayapura, India, Bh–as kara (a menudo denominado Bh–askara II para distinguirlo del matemático del siglo VII del mismo nombre) es considerado el matemático más eminente de la India del siglo XII. Revisó y continuó los estudios del gran BRAHMAGUPTA, haciendo correcciones y llenando vacíos en su trabajo, y alcanzó un nivel de dominio de ARITMÉTICA y ÁLGEBRA que no fue igualado por un erudito europeo durante varios siglos por venir. Bh–askara escribió dos tratados matemáticos influyentes: Lilavati (Lo hermoso), sobre el tema de la aritmética, y Bijaganita (Aritmética de semillas) sobre álgebra.

Bh–askara era director del observatorio astronómico de Ujjain, el centro de investigación matemática más importante del país en ese momento. Aunque gran parte de las matemáticas indias estuvo motivada por los problemas y desafíos de la astronomía, los escritos de Bh–askara muestran un gran interés en desarrollar las matemáticas por sí mismas. Por ejemplo, el texto Lilavati, que consta de 13 capítulos, comienza con discusiones cuidadosas sobre aritmética y geometría antes de pasar a los temas de SECUENCIAS y SERIES, fracciones, INTERÉS, geometría plana y sólida, relojes de sol, PERMUTACIONES y COMBINACIONES, y ECUACIONES DIOFANTINAS. (como se les llama hoy en día). Por ejemplo, Bh–askara muestra que la ecuación 195x = 221y + 65 (que expresó únicamente en palabras) tiene infinitas soluciones enteras positivas, comenzando con x = 6, y = 5 y x = 23, y = 20 y entonces x = 40 e y = 35. (Los valores de x aumentan en pasos de 17 y los valores de y en pasos de 15).

En su pieza Bijaganita, Bh–askara desarrolla la aritmética de los NÚMEROS NEGATIVOS, resuelve ecuaciones cuadráticas de una, o posiblemente más, incógnitas y desarrolla métodos para extraer RAÍCES CUADRADAS y CUBICAS de cantidades. Continúa las discusiones de Brahmagupta sobre la naturaleza y propiedades del número CERO y el uso de números negativos en aritmética. (Denotó el negativo de un número colocando un punto sobre el numeral). Bh–askara señala correctamente que una cantidad dividida por cero no produce cero (como afirmó Brahmagupta) y sugirió en cambio que a/0 debería considerarse infinito en valor. Bh–askara resuelve ecuaciones complicadas con varias incógnitas y desarrolla fórmulas que lo llevaron al borde del descubrimiento de la famosa fórmula CUADRÁTICA .

Bh–askara también escribió una serie de textos importantes en astronomía matemática e hizo avances significativos en el desarrollo de la TRIGONOMETRÍA, llevando el tema más allá del nivel de una simple herramienta de cálculo para los astrónomos. Bh–askara descubrió, por ejemplo, las famosas fórmulas de suma para seno:

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$$
$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$$

Machine Translated by Google

Sin embargo, como era la tradición en ese momento, Bh–askara no explicó cómo obtuvo sus resultados. Se conjetura que los astrónomos y matemáticos indios consideraron necesario ocultar sus métodos con respecto a las demostraciones y derivaciones como "secretos comerciales" del arte.

Los logros de Bh–askara fueron reverenciados durante muchos siglos. En 1817, HJ Colebrook proporcionó traducciones al inglés tanto de Lilavati como de Bijaganita en su texto Álgebra con aritmética y medición.

sesgo Un error sistemático en un estudio estadístico se denomina sesgo. Si la muestra del estudio es grande, los errores producidos por casualidad tienden a anularse entre sí, pero no así los de un sesgo. Por ejemplo, es probable que una encuesta sobre los hábitos de compra de la población en general realizada en un centro comercial esté sesgada hacia las personas que compran principalmente en los centros comerciales, omitiendo los resultados de las personas que compran desde casa a través de catálogos y servicios en línea. Esto es similar a un dado cargado, que está sesgado para producir un resultado particular con más de un sexto de probabilidad.

Sorprendentemente, los centavos estadounidenses están sesgados. Si equilibras con delicadeza 30 centavos de canto y golpeas la superficie sobre la que están parados, la mayoría se caerá boca arriba. Si, por otro lado, giras 30 centavos y dejas que todos se detengan naturalmente, entonces la mayoría caerá cruz.

Véase también POBLACIÓN Y MUESTRA.

bicondicional En LÓGICA FORMAL, un enunciado de la forma "p si, y sólo si, q" se denomina enunciado bicondicional. Por ejemplo, "Un triángulo es equilátero si, y sólo si, es equiángulo" es un enunciado bicondicional. Un enunciado bicondicional a menudo se abrevia como p si q y se escribe en símbolos como p ↔ q. Es equivalente al enunciado compuesto "p implica q, y q implica p" compuesto por dos enunciados CONDICIONALES .

Los valores de verdad de p y q deben coincidir para que el enunciado bicondicional como un todo sea verdadero. Tiene por tanto la siguiente TABLA DE VERDAD:

pag	qp ↔q
T	T
V	FF
FTF	
FFT	

Se dice que los dos enunciados p y q son lógicamente equivalentes si el enunciado bicondicional p ↔ q es verdadero.

Véase también ARGUMENTO.

biyección Ver FUNCIÓN.

bimodal Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

números binarios (números en base 2) Cualquier número entero puede escribirse como una suma de números distintos de la lista de potencias de 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … (simplemente reste la potencia más grande de 2 menos del número dado y repetir el proceso para el resto obtenido). Por ejemplo, tenemos:

$$89 = 64 + 25 = 64 + 16 + 9 = 64 + 16 + 8 + 1$$

Ninguna potencia de 2 aparecerá dos veces, ya que dos copias de la misma potencia de 2 suman la siguiente potencia de la lista. Además, la suma de potencias de 2 producidas para un número dado es única. Usando el símbolo 1 para denotar que se usa una potencia de 2 particular y 0 para denotar que no, uno puede codificar cualquier número dado como una secuencia de 0 y 1 de acuerdo con las potencias de 2 que aparecen en su presentación. Por ejemplo, para el número 89, se usa el número 64, pero no el 32. Aparece el número 16, el 8, pero no el 4 ni el 2. Finalmente, también se utiliza el número 1. Nosotros escribimos:

$$89 = 10110012$$

(Es habitual trabajar con la gran potencia de 2 a la izquierda). Como otros ejemplos, vemos que el código 100010112 corresponde al número 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + –4 + 2 + 1 = 139, y el código 101112 al número 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 23. Los números representados según este método se denominan números binarios. Estas representaciones corresponden precisamente a las representaciones hechas al elegir 2 como BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO.

Si uno introduce un punto decimal en el sistema e interpreta las posiciones a la derecha del punto como potencias negativas de 2, entonces las cantidades fraccionarias también se pueden representar en notación binaria. Por ejemplo, 0.1012 representa la cantidad $2^{-1} + 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, y

0.010101…2 la cantidad $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$, cual,

Machine Translated by Google

de acuerdo con la fórmula de la SERIE GEOMÉTRICA , es la fracción 1 3–

Cualquier fracción DYADIC tiene una expansión decimal binaria finita. Como muestra el estudio de esas fracciones, el código binario de una diádica puede interpretarse hábilmente como instrucciones para doblar una tira de papel para producir una marca de pliegue en la ubicación de esa fracción diádica. El proceso de la MULTIPLICACIÓN RUSA también usa números binarios de manera ingeniosa.

Los números binarios se utilizan en las computadoras porque los dos dígitos 0 y 1 se pueden representar mediante dos estados alternativos de un componente (por ejemplo, "encendido" o "apagado", o la presencia o ausencia de una región magnetizada).

Es oportuno mencionar que las potencias de 2 resuelven el famoso “problema de las cinco piedras”:

> Una mujer posee cinco piedras y una balanza simple de dos brazos. Ella afirma que, con una combinación de sus piedras, puede igualar el peso de cualquier piedra que le entregues y, por lo tanto, determinar su peso. Lo hace con la condición de que su roca pese un número entero de libras y no más de 31 libras.
>
> ¿Cuáles son los pesos de sus cinco piedras?

Como todo número del 1 al 31 se puede representar como una suma de los números 1, 2, 4, 8 y 16, la mujer tiene piedras de pesos correspondientes a estas primeras cinco potencias de 2.

operación binaria Una regla que asigna a cada par de elementos de un conjunto otro elemento de ese mismo conjunto se denomina operación binaria. Por ejemplo, la suma de dos números es una operación binaria sobre el conjunto de números reales, como lo es el producto de los dos números y la suma de los dos números al cuadrado. "Unión" es una operación binaria en conjuntos, al igual que "intersección", y PRODUCTO CRUZADO es una operación binaria en el conjunto de vectores en tres espacios. Sin embargo, la operación de PRODUCTO PUNTO no es una operación binaria en el conjunto de vectores; los resultados de esta operación son números, no otros vectores.

Si el conjunto bajo consideración se denota S, entonces una operación binaria en S se puede considerar como una FUNCIÓN f del conjunto de pares de elementos del conjunto, denotados S × S, al conjunto S: f : S × S → S.

Véase también OPERACIÓN; OPERACIÓN UNARIA.

binomial Cualquier expresión algebraica que consta de dos términos, como 2x + y o a + 1, se llama binomial.

Véase también MONOMIAL; POLINOMIO; TRINOMIO.

coeficiente binomial Ver TEOREMA BINOMIAL.

distribución binomial La distribución que surge al considerar la pregunta

> ¿ Cuál es la probabilidad de obtener precisamente k éxitos en n corridas de un experimento?

se llama distribución binomial. Aquí asumimos que el experimento tiene solo dos resultados posibles, "éxito o fracaso", o "cara o cruz", por ejemplo, y que la probabilidad de que ocurra no cambia a medida que se repite el experimento. La distribución binomial en sí misma es una tabla de valores que proporciona las respuestas a esta pregunta para varios valores de k, desde k = 0 (ningún éxito) hasta k = n (todos los éxitos).

Para ilustrar: la posibilidad de sacar una "cara" en una moneda justa es del 50 por ciento. Supongamos que elegimos lanzar la moneda 10 veces. Observe que la probabilidad de obtener cualquier secuencia específica de resultados (tres caras, seguidas de dos cruces, luego una cara y cuatro cruces, para ejemplo) es $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}$ (total de 10 veces) $= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ en . En particular, la probabilidad de no ver cara (todas cruces) también es 1/1024, al igual que la probabilidad de ver 10 caras seguidas.

Hay 10 lugares para que aparezca una sola cara entre 10 lanzamientos, por lo tanto, las posibilidades de ver con precisión una cara de cada 10 lanzamientos es $10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10}{1024}$, acerca de 1 por ciento Según la teoría de las COMBINACIONES, hay $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$ caminos para que dos cabezas aparecen entre 10 lugares, por lo que la probabilidad de ver precisamente dos caras entre los 10 lanzamientos es $\binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{45}{1024}$, alrededor del 4,4 por ciento.

Continuando así, obtenemos la distribución binomial para lanzar 10 veces una moneda justa:

Machine Translated by Google

Número de cabezas	Probabilidad	
0	$\binom{10}{0} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.1\%$	
1	$\binom{10}{1} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{10}{1024} = 1.0\%$	
2	$\binom{10}{2} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{45}{1024} = 4.4\%$	
3	$\binom{10}{3} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{120}{1024} = 11.7\%$	
4	$\binom{10}{4} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{210}{1024} = 20.5\%$	
5	$\binom{10}{5} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = 24.6\%$	
6	$\binom{10}{6} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{210}{1024} = 20.5\%$	
7	$\binom{10}{7} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{120}{1024} = 11.7\%$	
8	$\binom{10}{8} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{45}{1024} = 4.4\%$	
9	$\binom{10}{9} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{10}{1024} = 1.0\%$	
10	$\binom{10}{10} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.1\%$	

Si la moneda está sesgada, digamos que las posibilidades de que salga cara ahora son solo 1/3, entonces se obtendría una distribución binomial diferente. Por ejemplo, la probabilidad de obtener exactamente ocho caras entre 10 lanzamientos es $\binom{10}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0.003$, alrededor del 0,3 por ciento. En general, si p denota la probabilidad de ahora solo éxito y q = 1 – p es la probabilidad de fracaso, entonces la distribución binomial está dada por la fórmula $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, la probabilidad de alcanzar precisamente k éxitos en n corridas del experimento. Esta cantidad es el k-ésimo término de la fórmula de expansión binomial del

TEOREMA DEL BINOMIO:

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} p^n q^0$$

Esto explica el nombre de la distribución.

La distribución binomial tiene valor medio (ESPERADO VALOR) $\mu = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, que es igual a np. (Para ver esto, diferenciar la fórmula $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ con con respecto a p.) La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{npq}$. (Ver ESTADÍSTICAS: DESCRIPTIVAS.)

La distribución de Poisson

Es difícil calcular la distribución binomial si n es muy grande. Los matemáticos han demostrado que la distribución binomial puede aproximarse bien mediante la DISTRIBUCIÓN NORMAL para valores grandes de n, siempre que el valor de p no sea ni extremadamente pequeño ni cercano a uno. Para estos problemáticos valores de p, SIMÉON-DENIS POISSON demostró en 1837 que los valores $\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$ —con $\mu = np$, para k = 0, 1, 2, …— proporciona una secuencia de valores cercana a los valores que uno esperaría de la distribución binomial. La distribución proporcionada por estos valores aproximados se denomina distribución de Poisson.

La distribución geométrica

Alternativamente, uno puede preguntar: ¿cuál es la probabilidad de que el primer éxito en una serie de experimentos ocurra en el ensayo n-ésimo? Si p es la probabilidad de éxito y q = 1 – p es la probabilidad de fracaso, entonces se obtiene un primer éxito en el n-ésimo experimento obteniendo primero n – 1 fracasos y luego un éxito. La probabilidad de que esto ocurra es: $P(n) = pq^{n-1}$. La distribución dada por esta secuencia de valores de probabilidad (para n = 1, 2, 3, …) se denomina distribución geométrica. Tiene media $\mu = 1/p$ y desviación estándar $\sigma = \sqrt{q}/p$. La distribución geométrica es un ejemplo especial de la distribución de Pascal, que busca la probabilidad $P_k(n)$ de que el k-ésimo éxito ocurra en el n-ésimo intento.

Véase también HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

(ensayo).

teorema binomial (expansión binomial) Los identi 2 y $(x + a) + 3x\,2a +$ lazos $(x + a) + 2xa + a^2 = x^2$ $^3 = x^3$

Machine Translated by Google

$3xa2 + a^3$ se usan en ÁLGEBRA elemental. Ambos son casos especiales del teorema general del binomio que afirma, para cualquier entero positivo n, tenemos:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}a^2 + \cdots + na^{n-1}x + a^n$$

Aquí cada número $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ es un COMBINATORIAL COEFICIENTE, también llamado coeficiente binomial.

El teorema del binomio se demuestra examinando el proceso de EXPANSIÓN DE PARÁMETROS, pensando en la cantidad (x + a) n como un producto de n factores: (x + a)(x + a)… (x + a). Para expandir los corchetes, se debe seleccionar una entrada de cada conjunto de paréntesis ("x" o "a"), multiplicar todos los elementos seleccionados y sumar todos los resultados posibles. Por ejemplo, hay una manera de obtener el término x n : seleccione x de cada conjunto de paréntesis. Hay n formas de crear un término de la forma x n–1a: seleccione a de un solo conjunto de paréntesis y x de la

$\binom{n}{k}$ conjuntos restantes. En general hay formas de seleccionar

como y n – k xs. Así, en la expansión, habrá

$\binom{n}{k}$ términos de la forma x n–ka k .

Los coeficientes combinatorios son las entradas de TRIÁNGULO DE PASCAL . El teorema del binomio aplicado a (1 + 1)n explica por qué los elementos de cada fila del triángulo de Pascal suman una potencia de dos:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

La aplicación del teorema a (1 – 1)n explica por qué la suma alterna de las entradas es cero:

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \pm \cdots - \binom{n}{n}$$

La aplicación del teorema a (10 + 1)n explica por qué las primeras filas del triángulo de Pascal se parecen a las potencias de 11:

112 = (10 + 1)2 = 100 + 2 × 10 + 1 113
= (10 + 1)3 = 1000 + 3 × 100 + 3 × 10 + 1 114 = (10
+ 1)4 = 10 000 + 4 × 1000 + 6 × 100 + 4 × 10 + 1

(La correspondencia seguiría siendo válida si no tuviéramos dígitos al calcular potencias superiores a 11).

El teorema del binomio se puede utilizar para aproximar potencias altas de decimales. Por ejemplo, para estimar (2.01)10 observamos:

$$\begin{aligned} 2{,}0110 &= (2 + 0{,}01)10 \\ &= 210 + 10 \times 2\,9 \times 0{,}01 + 28 + 45 \times 2\,8 \times 0{,}012 + \cdots \\ &\approx 1024 + 10 \times 512 \times 0{,}01 + 45 \times 256 \times 0{,}00001 \\ &= 1024 + 51{,}2 + 1{,}152 \\ &\approx 1076 \end{aligned}$$

En 1665 SIR ISAAC NEWTON, co-inventor de CALCU LUS, descubrió que es posible desarrollar cantidades de la forma (x + a) r donde r no es igual a un número entero. Esto conduce al teorema del binomio generalizado:

Si r es un número real arbitrario y |x| < |a|, entonces:

$$(x+a)^r = x^r + rx^{r-1}a + \frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}a^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}a^3 + \cdots$$

La fórmula se establece calculando la SERIE DE TAYLOR de f(x) = (x + a) r en x = 0. En 1826, el matemático noruego NIELS ABEL demostró que la serie converge para el rango indicado. Observe que si r es un entero positivo, entonces el teorema se reduce al teorema del binomio ordinario. (En particular, desde el lugar n + 1 en adelante, todos los términos de la suma infinita son cero).

Los coeficientes combinatorios $\binom{n}{k}$ surgiendo en el teorema binomial a veces se denominan coeficientes binomiales. Los coeficientes combinatorios generalizados aparecen en expansiones de cantidades del tipo (x + y + z) n y (x + y + z + w) n , Por ejemplo.

Ver también COMBINACIÓN.

método de bisección (búsqueda de línea dicotómica, búsqueda de línea binaria) A menudo se requiere encontrar una solución a un

Machine Translated by Google

ecuación de la forma f(x) = 0 incluso si no hay medios algebraicos claros para hacerlo. (Por ejemplo, no hay $\sqrt{x}\sqrt{x+2}$ generales útiles para resolver – 5 = 0. El técnicas $+\sqrt{x+3}$ método de bisección proporciona los medios para encontrar, al menos, soluciones aproximadas para tales ecuaciones. El método se basa en el hecho de que si dos valores de función f(a) y f(b) de una FUNCIÓN CONTINUA tienen signos opuestos, entonces, de acuerdo con el TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO, una RAÍZ de la ecuación f(x) = 0 se encuentra entre a y b. procede de la siguiente manera:

1. Encuentra dos valores a y b (a < b) tales que f(a) y f(b) tengan signos opuestos.
2. Establezca m = (a + b)/2, el punto medio del intervalo, y calcule f(m).
3. Si f(m) = 0, hemos encontrado un cero. De lo contrario, si f(a) y f(m) tienen signos opuestos, entonces el cero de f se encuentra entre a y m; repita los pasos 1 y 2 usando estos nuevos valores. Si, por el contrario, f(m) y f(b) tienen signos opuestos, entonces el cero de f se encuentra entre m y b; repita los pasos 1 y 2 usando estos nuevos valores. En cualquier caso, se ha construido un nuevo intervalo que contiene el cero y que tiene la mitad de la longitud del intervalo original.
4. La aplicación repetida de este procedimiento conduce a un cero para la función.

resolver la ecuación f(x) = – 5 = 0, $\sqrt{x}\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}$ por ejemplo, observe que f(1) = –0.268 < 0 y f(2) = 0.650 > 0. Un cero pues la función se encuentra entre 1 y 2. Fijar m = 1,5. Como f(1.5) = 0.217 > 0 deducimos que, de hecho, el cero se encuentra entre 1 y 1.5. Ahora establece m = 1,25 para ver que el cero se encuentra entre 1,25 y 1,5.

Uno puede encontrar la ubicación de un cero con cualquier grado deseado de precisión utilizando este método. Por ejemplo, repetir este procedimiento para el ejemplo anterior seis veces más muestra que la ubicación del cero se encuentra en el intervalo [1,269, 1,273]. Esto muestra que con tres cifras significativas el valor del cero es 1,27.

El método de bisección no podrá ubicar una raíz si la gráfica de la función toca el eje x en esa ubicación sin cruzarlo. Se pueden emplear métodos alternativos, como el MÉTODO DE NEW TON , para localizar dichas raíces.

bisectriz Cualquier línea, plano o curva que divide un ángulo, un segmento de línea o un objeto geométrico en dos partes iguales se llama bisectriz. Por ejemplo, el ecuador es una curva que biseca la superficie de la TIERRA. Una línea recta que divide un ángulo por la mitad se llama bisectriz de ángulo, y cualquier línea que pasa por el PUNTO MEDIO de un segmento de línea es una bisectriz de segmento. Si la bisectriz de un segmento forma un ángulo recto con el segmento, entonces se llama bisectriz perpendicular.

Bolyai, János (1802–1860) Geometría húngara Nacido el 15 de diciembre de 1802 en Kolozsvár, Hungría, ahora Cluj, Rumania, János Bolyai es recordado por su descubrimiento en 1823 de la GEOMETRÍA NO EUCLIDEA, cuyo relato publicó en 1832. Su trabajo fue independiente del trabajo de NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856), quien publicó un relato de GEOMETRÍA HIPERBÓLICA en 1829.

Bolyai aprendió matemáticas de su padre Farkas Bolyai, él mismo un matemático consumado, y había dominado el CÁLCULO y la mecánica cuando tenía 13 años. A los 16 años ingresó al Royal Engineering College en Viena y se unió al cuerpo de ingeniería del ejército después de graduarse cuatro años más tarde. .

Como muchos eruditos a lo largo de los siglos, Farkas Bolyai había trabajado, sin éxito, en el desafío de establecer el POSTULADO PARALELO como una consecuencia lógica de los cuatro POSTULADOS DE EUCLIDES restantes. Le aconsejó a su hijo que evitara trabajar en este problema. Afortunadamente, János Bolyai no hizo caso y se dedicó a trabajar seriamente en el tema mientras se desempeñaba como oficial del ejército. Durante los años 1820 y 1823, Bolyai preparó un extenso tratado en el que esbozaba los detalles de una nueva y coherente teoría de la geometría para la que no se cumple el postulado de las paralelas, resolviendo así de una vez por todas el problema que había preocupado a los estudiosos desde la época de EUCLID : el postulado de las paralelas no puede probarse como consecuencia de los restantes postulados de Euclides.

En el sistema de geometría hiperbólica de Bolyai, siempre sucede que, para cualquier punto P en el plano, hay un número infinito de líneas distintas que pasan por ese punto, todas PARALELAS a cualquier línea dada que no pasa por P. (En geometría ordinaria, donde el paralelo postulado se cumple, sólo hay una, y sólo una, línea que pasa por un punto P dado , paralela a una dirección dada. Este es el AXIOMA DE PLAYFAIR .) En su nueva geometría, los ángulos de los triángulos suman menos de 180°, y la razón de los circunferencia de un círculo a su diámetro es mayor que π.

Machine Translated by Google

Justo antes de publicar su trabajo, Bolyai se enteró de que el gran CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) había ya anticipó gran parte de esta teoría, a pesar de que él no había publicado ningún material al respecto. Bolyai decidió retrasar el lanzamiento de su obra. En 1832 él imprimió los detalles de su nueva teoría solo como un documento de 24 páginas apéndice de un ensayo que su padre estaba preparando. Más tarde 1848, Bolyai descubrió que Lobachevsky había publicado un trabajo similar en 1829. Bolyai nunca publicó la versión completa de su tratado original. Su breve pieza de 24 páginas fue prácticamente olvidada hasta Richard Blatzer discutió el trabajo de Bolyai y Lobachevsky en su texto de 1867 Elemente der Mathematik (Elementos de las matemáticas). En ese momento, la pieza de Bolyai fue reconocido como el primer relato claro de las matemáticas de un nuevo tipo de geometría. Él es hoy considerado como haber fundado independientemente el tema.

Bolyai murió el 27 de enero de 1860 en Marosvásárhely, Hungría (ahora Tirgu-Mures, Rumania). En 1945 el La Universidad de Cluj honró a Bolyai al incluir su nombre en su título. Hoy en día se la conoce como la Universidad Babes-Bolyai de Cluj.

Bolzano, Bernard Placidus (1781–1848) Checo Análisis, Filosofía, Teología Nacido el 5 de octubre de 1781, en Praga, Bernard Bolzano es recordado como el primer matemático en ofrecer una descripción rigurosa de qué se entiende por FUNCIÓN CONTINUA. El relacionado el teorema, el TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO , se nombra a veces en su honor.

Bolzano estudió filosofía y matemáticas en la Universidad de Praga y obtuvo un doctorado en matemáticas en 1804. También completó tres años de estudios teológicos al mismo tiempo y fue ordenado un sacerdote católico romano dos días después de recibir su doctorado. Elegir seguir una carrera en la enseñanza, Bolzano aceptó un puesto como catedrático de filosofía y religión en la universidad ese mismo año.

En 1810 Bolzano comenzó a trabajar en la comprensión de la fundamentos de las matemáticas y, en particular, los fundamentos lógicos del recién descubierto CÁLCULO. Él encontró la noción de un INFINITESIMAL problemático y trató de proporcionar una nueva base para el sujeto libre de este concepto. En su artículo de 1817 “Rein Analytis cher Beweis” (Prueba analítica pura), Bolzano exploró el concepto de un LÍMITE, anticipando el fundamento enfoque de AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY ofreció cuatro años más tarde, y demostró el famoso valor intermedio teorema. Bolzano fue también el primero en ofrecer una ejemplo de una función que es continua en todos los puntos pero diferenciable en ningún punto.

Bolzano también anticipó mucho del trabajo de GEORG CAN TOR sobre el infinito. En su artículo de 1850 “Para doxien des Unendlichen” (Paradojas del infinito), publicado por un estudiante dos años después de su muerte, Bolzano examinó la naturaleza de los conjuntos infinitos y la paradojas que surgen de ellos. Esta pieza contiene la primer uso de la palabra "conjunto" en un contexto matemático.

Bolzano murió el 18 de diciembre de 1848 en Praga, Bohemia (ahora República Checa). Su obra pavimentó el camino para proporcionar fundamentos rigurosos a la materia de cálculo. En particular, Bolzano identificó para la primera vez en “Rein Analytischer Beweis” la “propiedad de completitud” de los números reales.

Bombelli, Rafael (1526–1572) Nacido en álgebra italiana en Bolonia, Italia, en 1526 (día y mes de su se desconoce la fecha de nacimiento), el estudioso Rafael Bombelli es recordado por su muy influyente libro de 1572 L'Alge bra (Álgebra). En este trabajo, Bombelli publicó reglas para la solución a los CUADRÁTICOS, CÚBICOS y CUÁRTICOS ECUACIONES, y fue uno de los primeros matemáticos en aceptar NÚMEROS COMPLEJOS como soluciones a ecuaciones.

Bombelli comenzó su carrera como ingeniero especializado en hidráulica y trabajó en una serie de proyectos convertir las marismas en tierra utilizable. Habiendo leído el gran Ars magna (El gran arte) de GIROLAMO CAR DANO (1501-1576), Bombelli decidió escribir un álgebra texto que haría que los métodos allí desarrollados accesible a una audiencia general y ser de interés y uso para topógrafos e ingenieros. Tenía la intención de escribir un pieza de cinco volúmenes, pero sólo logró publicar tres volúmenes antes de su muerte en 1572.

Bombelli notó que el método de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas a menudo conducen a soluciones que, al principio mirada, parecen poco esclarecedores. Por ejemplo, el examen de la ecuación $x^3 = 15x + 4$ lleva a la solución:

$$\sqrt[3]{2 + 121\sqrt{2 + 121}}\, x = \sqrt{+} + \sqrt{-}$$

Aunque los eruditos de la época rechazaron tales cantidades (debido a la aparición de la raíz cuadrada de una cantidad negativa) Bombelli argumentó que tales resultados

Machine Translated by Google

no deben pasarse por alto y, además, que sí conducen a soluciones reales. Después de desarrollar el álgebra de los números complejos, Bombelli pudo demostrar que la respuesta presentada anteriormente, por ejemplo, es solo el número x = 4 disfrazado. Bombelli continuó demostrando que, de hecho, toda ecuación de la forma $x = ax + b$, con a y b positivos, tiene una solución real, lo que justifica el método de los números complejos.

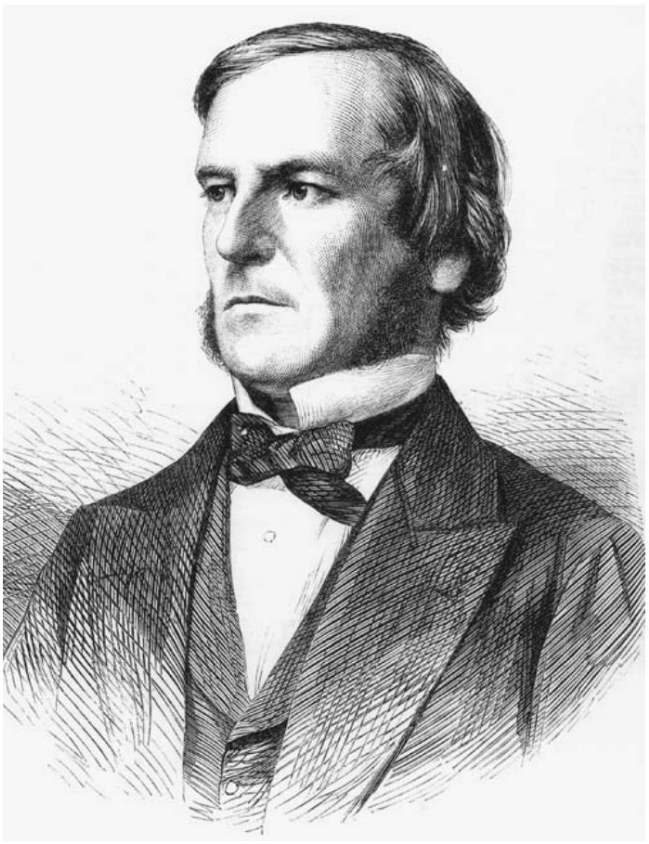
Además de desarrollar aritmética compleja, Bombelli desarrolló el álgebra básica de NÚMEROS NEGATIVOS. En particular, proporcionó un argumento geométrico para ayudar a explicar por qué un número negativo multiplicado por sí mismo debe ser positivo, una noción que todavía causa dificultades a muchas personas en la actualidad.

Bombelli murió en 1572. (Se desconoce la fecha exacta de su muerte). GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), co-descubridor del CÁLCULO, aprendió matemáticas por sí mismo con L'Algebra de Bombelli y describió al erudito como "un maestro destacado de la teoría analítica". arte."

Boole, George (1815–1864) Lógica británica Nacido el 2 de noviembre de 1815 en Lincolnshire, Inglaterra, el algebrista George Boole es recordado por su trabajo altamente innovador en el campo de la lógica. En su obra pionera, Una investigación de las leyes del pensamiento, sobre las cuales se fundan las teorías matemáticas de la lógica y la probabilidad, publicada en 1854, Boole estableció la eficacia de la manipulación simbólica como medio para representar y realizar operaciones de razonamiento. Boole es considerado el fundador del campo de la lógica simbólica.

Boole no recibió educación formal en matemáticas. De joven leyó las obras de JOSEPH-LOUIS LAGRANGE y PIERRE-SIMON LAPLACE, ya los 20 años comenzó a publicar resultados originales. Sus primeros trabajos en el campo de las ECUACIONES DIFERENCIALES atrajeron la atención nacional como un erudito capaz. En 1845 Boole fue honrado con una medalla de oro de la ROYAL SOCI ETY de Londres, la sociedad académica más prestigiosa de Inglaterra. Cuatro años más tarde, en 1849, fue nombrado director del departamento de matemáticas del Queens College, Cork, Irlanda, a pesar de no tener título universitario.
Boole se quedó en esta universidad por el resto de su vida, dedicándose a la enseñanza y la investigación.

Boole comenzó a trabajar en lógica matemática antes de mudarse a Irlanda. En ese momento, la lógica se consideraba un tema de interés solo para los filósofos, pero en 1847, en su folleto The Mathematical Analysis of



George Boole, un eminente matemático del siglo XIX, estableció el campo de la lógica matemática. (Foto cortesía de Topham/The Image Works)

Lógica, Boole argumentó con éxito que el tema tiene mérito en el arte del razonamiento matemático. Al usar símbolos para representar enunciados, Boole desarrolló un "álgebra de la lógica" cuyas reglas y manipulaciones válidas coincidían con los procesos de razonamiento. Así, los argumentos matemáticos y las líneas de pensamiento podrían reducirse a simples manipulaciones algebraicas. Por ejemplo, si el símbolo x se usa para representar "todas menos mariposas", entonces 1 – x representa todo lo que no es mariposa. Si y representa el color azul, entonces xy es el conjunto de todos los objetos que son tanto mariposas como azules, es decir, todas las mariposas azules. La expresión (1 – x)(1 – y) representa todas las mariposas que no son azules.

Algebraicamente, la cantidad (1 – x)(1 – y) es igual a 1 – x – y + xy. Se podría argumentar que el PRINCIPIO DE INCLUSIÓN EXCLUSIÓN está en juego aquí, diciendo que el conjunto de no mariposas no azules es el conjunto de todos los objetos que no son ni mariposas ni azules, con un ajuste

Machine Translated by Google

hecho para tener en cuenta el hecho de que el conjunto de moscas azules de la mantequilla se ha excluido dos veces. Estos ajustes, sin embargo, son incómodos. Boole inventó un nuevo sistema de "álgebra" que evita tales modificaciones. los axiomas obedece difieren de los de la aritmética ordinaria.

El álgebra inventada por Boole resultó ser de fundamental importancia. Dio a los ingenieros del siglo XX la medios para instruir a las máquinas para que sigan órdenes y desde entonces se ha utilizado ampliamente en todo el diseño de computadoras y teoría de redes eléctricas. En un sentido real, Boole fue el primer informático del mundo, a pesar de la hecho de que las computadoras no se inventaron hasta dentro de un siglo. Boole murió inesperadamente en 1864 en el 49 años por neumonía. (La fecha exacta de su no se sabe la muerte).

Álgebra booleana A mediados del siglo XIX GEORGE BOOLE

Desarrolló un sistema de manipulaciones algebraicas adecuado para el estudio de LÓGICA FORMAL y TEORÍA DE CONJUNTOS, ahora llamado álgebra booleana. Supuso que a uno se le da un conjunto de elementos, que denotaremos x, y, z, al cual se …, en le pueden realizar dos operaciones, hoy denominadas Suma booleana, x + y, y producto booleano, x · y. Estos operaciones deben cumplir las siguientes reglas:

1. Las operaciones son CONMUTATIVAS, es decir, para todos los elementos x e y tenemos x + y = y + x y x · y = y · x.
2. Existen dos elementos especiales, denotados "0" y "1", que, para todos los elementos x, satisfacen x + 0 = x y x · 1 = x.
3. Para cada elemento x existe un elemento inverso "–x" que satisface x + (–x) = 1 y x · (–x) = 0.
4. Las siguientes leyes DISTRIBUTIVAS se cumplen para todos los elementos del conjunto: x · (y + z) = (x · y) + (x · z) y x + (y · z) = (x + y) · (x + z).

Se puede ver que las operaciones booleanas "son + " y " · " muy diferentes de la suma y la multiplicación de la aritmética ordinaria y, por lo tanto, no puede interpretarse como semejante. Sin embargo, pensar en la suma booleana como la "unión de dos conjuntos" y producto booleano como "la intersección de dos conjuntos", siendo 0 el conjunto vacío y 1 el conjunto universal, vemos que los cuatro axiomas se cumplen, haciendo de la TEORÍA DE CONJUNTOS un álgebra booleana. Del mismo modo, el La LÓGICA FORMAL del cálculo proposicional es un booleano álgebra si uno interpreta la suma como la DISYUNCIÓN de dos afirmaciones ("o") y producto como su CONJUNCIÓN ("y").

Otras reglas para el álgebra booleana se derivan de la cuatro axiomas presentados anteriormente. Por ejemplo, uno puede demuestre que se cumplen dos leyes ASOCIATIVAS : x + (y + z) = (x + y) + z y x · (y · z) = (x · y) · z.

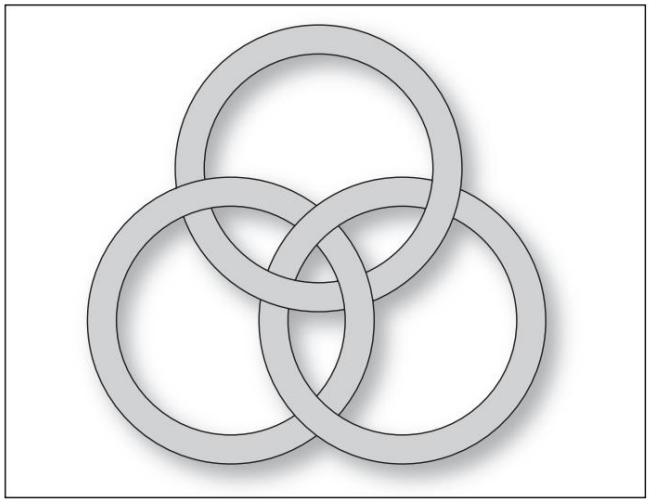
Véase también LEYES DE DE MORGAN .

Anillos borromeos El término se refiere a un conjunto de tres anillos unidos como un conjunto, pero con la propiedad que si se corta un solo anillo, los tres anillos se separan. El diseño de tres de esos anillos apareció en el abrigo. de armas de la noble familia italiana Borromeo-Arese. (El cardenal Carlo Borromeo fue canonizado en 1610, y el cardenal Federico Borromeo fundaron la Galería de Arte Ambrosiano en Milán, Italia.) El curioso propiedad del diseño atrajo la atención de matemáticos

Es un ejercicio divertido arreglar cuatro anillos tales que, como conjunto, están inextricablemente unidos entre sí, pero cortar cualquier anillo liberaría a los cuatro. Sorprendentemente, esta hazaña se puede lograr con cualquier número de anillos

Véase también TEORÍA DEL NUDO.

acotada Una función está acotada si toma valores no mayor que algún número M y no menor que algún segundo valor L. Por ejemplo, la función f(x) = sen x está acotado entre los valores –1 y 1. Llamamos a M an límite superior para la función y L un límite inferior.



anillos borromeos

Machine Translated by Google

Una función está acotada por arriba si posee un límite superior (pero no necesariamente un límite inferior) y por debajo si posee un límite inferior (pero no necesariamente un límite superior). Por ejemplo, f(x) = x está limitada por debajo por el valor L = 0, ya que todos los valores de salida para esta función son mayores o iguales a cero. El TEOREMA DEL VALOR EXTREMO asegura que toda FUNCIÓN CONTINUA definida en un INTERVALO cerrado está acotada.

Un conjunto de números está acotado por arriba si cada número en el conjunto es menor o igual a algún valor M, acotado por abajo si cada número en el conjunto es mayor o igual a algún valor L, y acotado si está acotado por arriba y por abajo. delimitado por debajo. Por ejemplo, el conjunto S = {0.6, 0.66, 0.666, ...} está acotado por abajo por 0.6 y por arriba por 1. El límite superior más pequeño posible para un conjunto se llama el límite superior mínimo, y el límite inferior más grande, el límite superior más grande. límite inferior.

El conjunto S tiene 2/3 como límite superior mínimo y 0,6 como límite inferior máximo.

Los NÚMEROS REALES tienen la propiedad de que cualquier subconjunto S de ellos que esté acotado por arriba posee una cota superior mínima, y, de manera similar, cualquier subconjunto que esté acotado por abajo posee una cota más baja.
Esta es una propiedad clave que muestra que no "faltan" números en la recta numérica real. (Ver CORTE DE DEDEKIND.) Esto no es cierto para el conjunto de números racionales, por ejemplo. El conjunto de todos los racionales cuyo cuadrado es menor que 2, por ejemplo, está acotado por arriba, por ejemplo, por 3/2, pero no posee un límite superior mínimo en el conjunto de racionales: la raíz cuadrada de dos "falta" en el conjunto de racionales.

Una secuencia está acotada si, como conjunto de números, está acotada. Una figura geométrica en el plano está acotada si puede encerrarse en un rectángulo de área finita. Por ejemplo, un CÍRCULO está acotado pero un MEDIO PLANO no.

Bourbaki, Nicolas Tomando el nombre de un oficial subalterno napoleónico, un grupo de matemáticos franceses de la década de 1930 adoptó el seudónimo de Nicolas Bourbaki para publicar una serie de libros, todos bajo el título Éléments de mathématiques (Elementos de las matemáticas), que intentan presentar una descripción completa, definitiva y absolutamente rigurosa de todo el conocimiento matemático moderno.

Este proyecto continúa hoy. Los colaboradores del trabajo permanecen anónimos y cambian a lo largo de los años. Hasta la fecha, se han producido más de 40 volúmenes de trabajo.

El material presentado a través de Bourbaki es austero y abstracto. El objetivo del trabajo fundacional fue desarrollar todas las matemáticas sobre los axiomas de SET THE ORY y mantener el enfoque axiomático a medida que se introducen nuevos conceptos.

La obra, desprovista de contexto narrativo y motivacional, es difícil de leer y no es adecuada para su uso como libro de texto. Sin embargo, durante las décadas de 1950 y 1960, a menudo no había textos de nivel de posgrado en los nuevos campos en desarrollo, y los volúmenes de Bourbaki eran las únicas fuentes de referencia. Es poco probable que hoy un estudiante de posgrado en matemáticas consulte el trabajo de Bourbaki.

braquistocrona Ver CYCLOID.

corchetes Cualquier par de símbolos, como paréntesis ( ) o llaves { }, que se utilizan en una expresión aritmética o algebraica para indicar que la cantidad entre ellos debe evaluarse primero, o tratarse como una sola unidad en la evaluación de el todo, se llaman paréntesis. Por ejemplo, en la expresión (2 + 3) × 4, los paréntesis indican que primero debemos calcular 2 + 3 = 5 y luego multiplicar este resultado por 4. En expresiones complicadas, se puede usar más de un tipo de paréntesis. en la misma ecuación. Por ejemplo, la expresión 3{2 + 8[2(x + 3) – 5(x – 2)]} es un poco más fácil de leer que 3(2 + 8(2(x + 3) – 5(x – 2))).

Antes de la llegada de la imprenta en el siglo XV, el VINCULUM se usaba para indicar el orden de las operaciones. El algebrista italiano RAFAEL BOMBELLI (1526–1572) fue uno de los primeros eruditos en utilizar paréntesis en una ecuación algebraica impresa, pero no fue hasta principios del siglo XVIII, gracias principalmente a la influencia de LEONHARD EULER, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ y miembros de la FAMILIA BERNOULLI, que su uso en matemáticas se convirtió en estándar.

Los corchetes angulares <> normalmente solo se usan para enumerar los componentes de un VECTOR o una SECUENCIA finita. Las cosas son un poco confusas, ya que en la teoría de la mecánica cuántica, los paréntesis angulares se utilizan para indicar el PRODUCTO DOT de dos vectores (y no los vectores en sí mismos). El paréntesis angular izquierdo "<" se denomina "sujetador" y el paréntesis angular derecho ">" un "ket".

En TEORÍA DE CONJUNTOS, las llaves { } se usan para listar los elementos de un conjunto. A veces, los elementos de una secuencia se enumeran dentro de un conjunto de llaves.

Machine Translated by Google

Si x es un número real, entonces los símbolos de paréntesis x ,
x , y {x} se utilizan para denotar el piso, techo y
valores de la parte fraccionaria, respectivamente, de x.

Los corchetes [ ] y los paréntesis ( ) se colocan en los puntos finales de un INTERVALO en la recta numérica real para indicar si se deben incluir o no los puntos finales de ese intervalo.

Ver también SOPORTES DE EXPANSIÓN; SUELO/TECHO/ FUNCIONES DE PARTES FRACCIONARIAS; ORDEN DE OPERACIÓN.

Brahmagupta (ca. 598–665) Aritmética, geometría y astronomía de la India Nacido en Ujjain, India, el erudito Brah magupta es reconocido como uno de los matemáticos del siglo VII. Su famoso 628 texto Brahmasphutasiddhanta (La apertura del universo) sobre el tema de la astronomía incluye tales notables resultados matemáticos como su famosa fórmula para la ÁREA de un CUADRILÁTERO cíclico , la solución entera de ciertas ecuaciones algebraicas y métodos de solución de ecuaciones simultáneas. Este trabajo también es históricamente significativo como el primer uso sistemático documentado de CERO y cantidades negativas como números válidos en ARITMÉTICA.

Brahmagupta era el director del observatorio astronómico de Ujjain, el principal centro matemático de India antigua, y se interesó ávidamente en el desarrollo de la observación y el cálculo astronómicos. El primeros 10 de los 25 capítulos de Brahmasphutasiddhanta pertenecen únicamente a la astronomía, discutiendo la longitud de los planetas, los eclipses lunares y solares, y el momento de alineaciones de planetas. Aunque rico en cálculo matemático y técnica, es el resto del trabajo que ofrece una idea del alcance de Brahmagupta comprensión de las matemáticas en un nivel abstracto.

Brahmagupta continúa describiendo el SISTEMA DE VALOR DE LUGAR decimal utilizado en la India en su época para representar números y los métodos para hacer aritmética en este sistema. (Por ejemplo, describe un método de "largo multiplicación" esencialmente equivalente al enfoque que uso hoy.) Brahmagupta permite cero como un número válido en todos sus cálculos, y de hecho le da la explícita estado de un número definiéndolo como el resultado de restar una cantidad de sí mismo. (Hasta entonces, el cero actuó como nada más que un marcador de posición para distinguir 203 de 23, por ejemplo.) También explica las propiedades aritméticas del cero: que al sumar cero a un número, queda que número sin cambios y multiplicando cualquier número por cero produce cero, por ejemplo. Brahmagupta también detalló la aritmética de los números negativos (que él llamó "deuda") y sugirió, por primera vez, que podrían de hecho ser soluciones válidas a ciertos problemas.

Brahmagupta luego explora problemas en ÁLGEBRA. Desarrolla algunas notaciones algebraicas básicas y luego presenta una serie de métodos para resolver una variedad de ecuaciones lineales y cuadráticas. Por ejemplo, ideó una técnica ingeniosa para encontrar soluciones enteras a ecuaciones de la forma ax2 + c = y 2. (Por ejemplo, brah magupta afirmó correctamente que x = 226,153,980 y y = 1,766,319,049 son las soluciones enteras positivas más pequeñas 2 ciones a 61x + 1 = y 2.) Brahmagupta también presenta el fórmulas famosas de SUMAS DE POTENCIAS :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

así como algoritmos para calcular raíces cuadradas.

Desafortunadamente, como era la práctica de escribir en el En ese momento, Brahmagupta nunca dio una palabra de explicación sobre cómo se encontraron sus soluciones o fórmulas. Nunca se ofrecieron pruebas.

En las secciones finales de Brahmasphutasiddhanta, Brahmagupta presenta su famosa fórmula para el área de un cuadrilátero cíclico únicamente en términos de las longitudes de sus lados. Curiosamente, Brahmagupta no afirma que la fórmula es verdadera solo para cuadriláteros inscrito en un CIRCULO.

En una segunda obra, Khandakhadyaka, escrita en 665, Brahmagupta analiza otros temas de astronomía. De particular interés para los matemáticos, Brah magupta presenta aquí un método ingenioso para cálculo de valores de senos.

Los métodos y descubrimientos de Brahmagupta fueron extremadamente influyente. Prácticamente todos los textos que tratan sobre la astronomía india describen o utilizan algún aspecto de su obra

Véase también FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA .

Fórmula de Brahmagupta El matemático y astrónomo indio del siglo VII BRAHMAGUPTA derivó una fórmula para el ÁREA de un CUADRILÁTERO inscrito en un

Machine Translated by Google

CÍRCULO únicamente en términos de las longitudes de sus cuatro lados. Su fórmula dice:

$$\text{área} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

donde a, b, c y d son las cuatro longitudes de los lados y $s = \frac{abcd+}{2}$ es el semiperímetro de la figura.

Si p y q son las longitudes de las dos diagonales de la figura, entonces el TEOREMA DE PTOLOMEO afirma que pq = ac + bd. La fórmula de Brahmagupta se deriva de la FÓRMULA DE BRETSCHNEIDER para el área de un cuadrilátero:

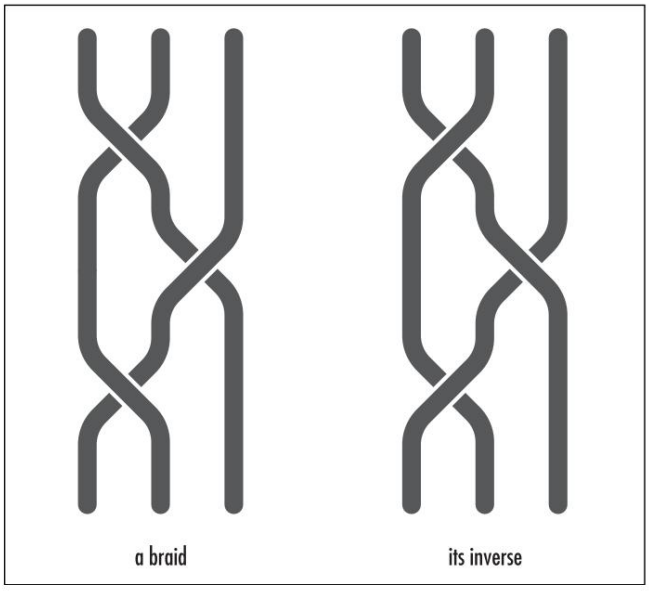
$$\text{área} = \frac{1}{4}\sqrt{4\,2()\quad 2\,2-+\quad 2\,22\quad)}$$

sustituyendo en este valor por pq.

Si uno de los lados del cuadrilátero tiene longitud cero, es decir, la figura es un TRIÁNGULO, entonces la fórmula de Brah magupta se reduce a la FÓRMULA DE HERON .

Véase también POLÍGONO CÍCLICO.

trenza Un número de cuerdas trenzadas juntas se llama trenza. La teoría de las trenzas examina el número de formas (esencialmente distintas) en que se puede trenzar un número fijo de cuerdas, mantenidas inicialmente en paralelo. Uno puede combinar dos trenzas en un número fijo de cuerdas por repetición



Una trenza y su inversa

siguiendo el patrón de la segunda trenza al final de la primera trenza. Si, después de completar esta maniobra, el acto de sacudir físicamente el sistema de cuerdas hace que las hebras queden sin trenzar, entonces decimos que las dos trenzas son "trenzas inversas". Por ejemplo, las dos trenzas que se muestran en el diagrama son trenzas inversas.

Si una trenza consta de n cuerdas, entonces el símbolo σi se usa para registrar el acto de cambiar la i-ésima cuerda sobre –1 la (i + 1)-ésima cuerda (para 1 ≤ i ≤ n – 1) y σi de para el acto de conmutación de las mismas dos cuerdas pero en el sentido opuesto. Luego, una trenza general se describe como una cadena de estos símbolos (llamada "palabra"). Por ejemplo, las dos trenzas que se muestran en el siguiente diagrama, a la izquierda, están representadas por las palabras σ1σ2 –1σ1 y σ1 –1σ2σ1 –1, respectivamente. Una trenza sin cruces (es decir, en la que no se cruzan hilos) se denota como “1”, y el proceso de combinar trenzas corresponde precisamente al proceso de concatenar palabras. Dos trenzas son trenzas inversas si, después de realizar las manipulaciones simbólicas sugeridas, su palabra concatenada resultante es 1. Por ejemplo, en nuestro ejemplo, tenemos: σ1σ2 –1σ1σ1 –1σ2σ1 –1 = σ1σ2 –1σ2σ1 –1 –1 = 1. Es posible que = dos palabras diferentes puedan σ1σ1 representar la misma trenza física. (Por ejemplo, en tres cuerdas, las trenzas σ1σ2σ1 y σ2σ1σ2 son físicamente equivalentes).

Cada juego de trenzas en un número fijo de cuerdas forma un GRUPO llamado grupo de trenzas. El matemático austriaco Emil Artin (1898-1962) fue el primero en estudiar estos grupos y resolver el problema de determinar con precisión cuándo dos palabras diferentes representan la misma trenza.

La fórmula de Bretschneider El matemático alemán Carl Anton Bretschneider (1808-1878) escribió una fórmula para el ÁREA de un CUADRILÁTERO únicamente en términos de las longitudes de sus cuatro lados y el valor de sus cuatro ángulos internos. Si, leyendo la figura en el sentido de las agujas del reloj, las longitudes de los lados del cuadrilátero son a, b, c y d, y los ángulos entre los bordes son A, B, C y D (siendo el ángulo entre los bordes d y a A), luego Bretschneider estableció que el área K del cuadrilátero está dada por:

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2(\theta)}$$

Aquí $s = \frac{abcd+++}{2}$ es el semiperímetro de la figura y θ es el promedio de dos ángulos opuestos cualesquiera en la

Machine Translated by Google

cifra: $\theta = \frac{B D+}{\quad}$ o $\frac{Una}{2}C+$. (Dado que el interior θ = 2 ángulos de un cuadrilátero suman 360 grados, cada cantidad da el mismo valor para el coseno).

Muchos textos de matemáticas exponen el resultado de Bretschneider sin demostración. Aunque detallada algebraicamente, la derivación del resultado es relativamente sencilla.
Se comienza notando que el área K es la suma de las áreas de los triángulos ABC y ADC. Tenemos:

$$K = \frac{1}{2}ab\,B + \frac{1}{2}cd\,D \operatorname{sen} 2 + \frac{1}{2}\ \text{pecado}$$

Multiplicando por cuatro y elevando al cuadrado se obtiene:

$$16K2 = 4a\,2b\,2\,\operatorname{sen}2B + 4c\,2d\,2\,\operatorname{sen}2D + 8abcd \operatorname{sen} B \operatorname{sen} D$$

Llame a esta ecuación (i). Aplicando la LEY DE LOS COSENOS a cada uno de los dos triángulos se obtiene la relación:

$$\text{un}^2 + b\,2 - 2ab \cos B = c^{\ 2} + d\,2 - 2cd \cos D$$

que se puede reescribir:

$$\text{un}^2 + \text{segundo}\,2 - c^{\ 2} - d\,2 = 2ab \cos B - 2cd \cos D$$

Llame a esta ecuación (ii). También tenga en cuenta que, con la ayuda de esta segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 4(s - c)(s - d) &= (a + b - c + d)(a + b + c - d) = b\,2 + \\ &\quad 2 = \text{un}\ 2ab + 2cd - d\,2 \\ &= 2ab \cos B - 2cd \cos D + 2ab + 2cd = 2ab(1 \\ &\quad + \cos B) + 2cd(1 - \cos D) \end{aligned}$$

Similarmente:

$$4(s - a)(s - b) = (-a + b + c + d)(a - b + c + d) = 2ab(1 - \cos B) + 2cd(1 + \cos D)$$

Multiplicando estas dos ecuaciones juntas se obtiene:

$$\begin{aligned} 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) &= 4a \\ &\quad 2b\,2\,(1 - \cos 2\,B) + 4c\,2d\,2\,(1 - \cos 2\,D) + \\ &\quad 4abcd((1 + \cos B)(1 + \cos D) + (1 - \\ &\quad \cos B)(1 - \cos D)) = 4a\,2b\,2 \\ &\quad \operatorname{sen}2\,B + 4c\,2d\,2\,\operatorname{sen}2\,D + 8abcd(1 \\ &\quad + \cos B \cos D) \end{aligned}$$

y volviendo a sustituir en la ecuación (i) se obtiene:

$$16K2 = 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - 8abcd (\cos B \cos D - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} D + 1)$$

Las siguientes identidades de la trigonometría:

$$\cos B \cos D - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} D = \cos (B + D)$$

y

$$2\ \text{porque}\left(\frac{X}{2}\right)\text{porque}\left(\frac{X}{2}\right)$$

ahora da:

$$2\,16k = \text{sasbscsd}\ 16\,(\ )(\ )(\ )(\ ) \qquad 16\,abcd\ \text{porque}^2\ \frac{BD}{2}$$

lo que da directamente el famoso resultado.

Si, además, los ángulos opuestos del cuadrilátero suman 180 grados (en cuyo caso el cuadrilátero es un POLÍGONO CÍCLICO), entonces la fórmula de Bretschneider se reduce a la FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA para el área de un cuadrilátero cíclico:

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Si uno de los lados tiene longitud cero, digamos d = 0, entonces el cuadrilátero es un triángulo y tenemos HERON'S FÓRMULA para el área de un triángulo:

$$K = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Esto es válido, ya que todo triángulo se puede inscribir en un círculo y, por lo tanto, es un polígono cíclico.

Briggs, Henry (1561–1630) Logaritmos británicos Nacido en febrero de 1561 (se desconoce la fecha exacta de nacimiento) en Yorkshire, Inglaterra, el erudito Henry Briggs es recordado por el desarrollo de los logaritmos en base 10, revisando el enfoque adoptado por primera vez por el inventor de los logaritmos, JOHN NAPIER (1550–1617). Hoy en día, estos logaritmos comunes a veces se llaman aritmos logarítmicos de Briggs. En 1617, tras consultar con Napier, Briggs publicó los valores logarítmicos de los primeros 1.000 números y, en 1624, en su famoso texto The Arithmetic of Log arithms, los valores logarítmicos de otros 30.000 números, todos correctos hasta 14 decimales.

Machine Translated by Google

Briggs se graduó del St. John's College de la Universidad de Cambridge en 1581 con una maestría y fue nombrado profesor de la misma institución 11 años después, en 1592, para practicar tanto la medicina como las matemáticas. Cuatro años más tarde, Briggs se convirtió en el primer profesor de geometría en el Gresham College de Londres, cuando también desarrolló un ávido interés por la astronomía.

Alrededor de este tiempo, Napier acababa de desarrollar su teoría de los logaritmos como un dispositivo matemático específicamente destinado a ayudar a los astrónomos con cálculos aritméticos difíciles. Briggs leyó el texto de Napier sobre el tema en 1614 y, muy entusiasmado, hizo arreglos para visitar al erudito escocés en el verano de 1615. Los dos hombres acordaron que la teoría de los logaritmos se simplificaría enormemente con un sistema de base 10, y dos años más tarde Briggs publicó sus primeras tablas de valores logarítmicos en Logarithmorum chilias prima (Logaritmos de los números 1 a 1.000). Más tarde, en su famosa obra de 1624, Briggs publicó valores logarítmicos para los números del 1 al 20 000 y del 90 000 al 100 000. (La brecha de 70.000 números fue llenada tres años más tarde por dos eruditos holandeses, Adriaan Vlacq y Ezechiel de Decker).

Briggs fue nombrado catedrático de geometría en la Universidad de Oxford en 1619. Permaneció en Oxford persiguiendo intereses en astronomía y geometría clásica hasta su muerte el 26 de enero de 1630. En su conferencia inaugural en Gresham College, ISAAC BARROW (1630-1677) expresó su gratitud por nombre de todos los matemáticos por el destacado trabajo que Briggs había realizado a través del estudio de los logaritmos.

Brouncker, Lord William (ca. 1620–1684) Cálculo británico William Brouncker es mejor recordado por su trabajo en el desarrollo temprano de CÁLCULO y también como uno de los primeros matemáticos en Gran Bretaña en utilizar FRACCIONES CONTINUADAS.

Se sabe muy poco sobre los primeros años de vida de Brouncker, incluido el año exacto de su nacimiento, por ejemplo, y su nacionalidad. Sin embargo, los registros muestran que ingresó a la Universidad de Oxford a la edad de 16 años para estudiar matemáticas, idiomas y medicina. Recibió un doctorado en medicina en 1647 y se dedicó a las matemáticas y sus aplicaciones a la música, la mecánica y la física experimental como un interés externo a lo largo de su vida.

Brouncker mantuvo puntos de vista realistas y participó activamente en la agitación política de la época en Inglaterra. Con la restauración de la monarquía en 1660 y la elección del rey Carlos II al trono, Brouncker fue nombrado canciller de la reina Ana y guardián del Gran Sello. Brouncker también fue nombrado presidente de la recién creada SOCIEDAD REAL de Londres en 1662.

En matemáticas, Brouncker estudió SERIES infinitas e hizo varios descubrimientos notables. Ideó un método en serie para calcular LOGARITMOS y una sorprendente expresión de fracción continua para π:

$$\frac{4}{\pi} 1 = + \cfrac{2^2 1}{2 + \cfrac{2^2 3}{2 + \cfrac{2^2 5}{2 + L}}}$$

Brouncker usó esta fórmula para calcular correctamente el valor de π al décimo lugar decimal. El gran matemático inglés JOHN WALLIS publicó más tarde estos resultados en nombre de Brouncker.

Brouncker también estudió las ECUACIONES DIOFANTINAS y encontró un método general para resolver ecuaciones de la forma nx2 + 1 = y Más tarde, LEONHARD EULER llamó a esta ecuación "ecuación de Pell", en honor al matemático inglés John Pell (1611-1684), sin darse cuenta de que era Brouncker. , no Pell, que lo había estudiado tan intensamente.
El nombre de Pell, lamentablemente, permanece unido a esta ecuación hasta el día de hoy.

Brouncker murió el 5 de abril de 1684 en Londres, Inglaterra. Nunca alcanzó la fama de gran matemático porque tendía a centrarse en resolver problemas planteados por otros en lugar de forjar caminos originales en la investigación matemática.

fuerza bruta El método de establecer la validez de un reclamo mediante la verificación individual de todos y cada uno de los casos del reclamo se denomina fuerza bruta. Los matemáticos prefieren idear argumentos y principios generales para demostrar la validez de una afirmación, en lugar de recurrir a este método. Algunas afirmaciones, sin embargo, parecen susceptibles solo a la técnica de la fuerza bruta. Por ejemplo, el siguiente rompecabezas de nombres de números solo se puede resolver mediante la fuerza bruta:

Piensa en un número entre uno y 100.
Cuenta el número de letras de su nombre para obtener un segundo número. Cuente el número de letras en el nombre del segundo número para

Machine Translated by Google

obtener un tercer número. Continúe de esta manera hasta la cadena de números obtenidos de esta manera termina en un número que se repite. Este número repetido, en todos los casos, es el número cuatro.

Como todo número entre uno y 100 se puede escribir en 12 o menos letras, el segundo número obtenido será miente entre tres y 12. Uno comprueba, por la fuerza bruta, que cada uno de estos números eventualmente conduce al número cuatro.

En la actualidad, el método de fuerza bruta es el único técnica conocida garantizada para dar una solución óptima al famoso PROBLEMA DEL VIAJERO-VENDEDOR .

Este problema tiene una importancia práctica significativa. Desafortunadamente, incluso con las computadoras más rápidas de hoy, el enfoque de fuerza bruta no se puede llevar a cabo en cualquier cantidad de tiempo factible.

El famoso TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES fue resuelto en la década de 1970 al reducir el problema a un finito, pero número extraordinariamente grande de casos individuales que fueron revisados en una computadora por fuerza bruta.

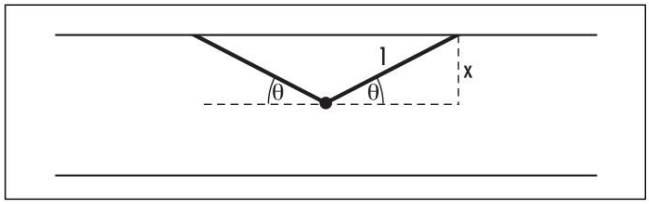
Véase también CONJECTURA DE GOLDBACH .

Problema de la aguja de Buffon (problema de Buffon-Laplace)
En 1733, el naturalista francés Georges Buffon propuso el siguiente problema, ahora conocido como el problema de la aguja de Buffon:

> Una aguja de una pulgada de largo se lanza al azar sobre un piso hecho de tablas de una pulgada de ancho.
>
> ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja caiga cruzando una de las grietas?

Uno puede responder el rompecabezas de la siguiente manera:

Suponga que la aguja aterriza con el extremo más bajo a distancia x de una fisura. Tenga en cuenta que $0 \le x \le 1$.



Resolviendo el problema de la aguja de Buffon

En el diagrama vemos que si la aguja cae dentro un ángulo como lo indica cualquiera de los sectores etiquetados como θ, entonces no caerá a través de la grieta superior, pero lo hará si en cambio, aterriza en el sector del ángulo $\pi - 2\theta$. Por lo tanto, la probabilidad de que la aguja caiga a través de la grieta, dado que aterriza a una distancia x unidades por debajo de una grieta, es $P_x = \frac{\pi - \theta - 2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}\text{pecado}^{-1}x$. Sumando, es decir, integrando, sobre todos los valores posibles de x nos da la probabilidad total P que buscamos:

$$P = \int_0^1 P_x\,dx = \int_0^1 1 - \frac{2}{\pi}\text{pecado}^{-1}x\,dx = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \text{pecado}^{-1}x\,dx$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\left[x\,\text{pecado}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

En principio, este problema proporciona una solución experimental. método para calcular PI: simplemente arroje una aguja en el suelo un gran número de veces, digamos 10.000, y cuente las proporción que aterrizan a través de una grieta. Esta proporción debe estar muy cerca del valor. $\frac{2}{\pi}$ En la práctica, sin embargo, esto resulta ser un enfoque muy tedioso.

Véase también MÉTODO MONTE CARLO.

Machine Translated by Google

C

cálculo (cálculo infinitesimal) La rama de las matemáticas que se ocupa de la noción de el crecimiento y el cambio se llama cálculo. Se basa en el concepto de INFINITESIMALES, cantidades extremadamente pequeñas, y en el concepto de LÍMITE, cantidades que pueden ser abordado cada vez más de cerca, pero nunca alcanzó. Al tratar los cambios continuos como si consistieran en incrementos infinitamente pequeños, se puede usar CÁLCULO DIFERENCIAL , por ejemplo, para encontrar la VELOCIDAD de un objeto en movimiento en cualquier instante particular. INTEGRAL CÁLCULO representa el proceso inverso, encontrar el resultado final agregado si el cambio continuo ya está conocido. Por ejemplo, integrando la instantánea velocidad de un objeto durante un período de tiempo dado, uno encuentra la distancia total que el objeto se movió durante este tiempo.

La palabra cálculo proviene de la palabra latina calx para "guijarro", que a su vez se deriva del griego palabra chalis para "piedra caliza". pequeñas cuentas o piedras dispuestos en un tablero de conteo o en un ABACUS fueron a menudo se utiliza para ayudar a los cálculos matemáticos, y el la palabra cálculo pasó a referirse a toda actividad matemática. Hoy, sin embargo, la palabra se usa casi exclusivamente para denotar el estudio del cambio continuo.

Véase también HISTORIA DEL CÁLCULO (ensayo).

cancelación En ARITMÉTICA, el proceso de dividir el numerador y el denominador de una FRACCIÓN por un factor común para producir una fracción más simple se llama cancelación. Por ejemplo, la fracción 18/12, que es (6 × 3)/(6 × 2), se puede simplificar a 3/2 cancelando "6" de la fracción.

Una divertida actividad en matemáticas busca fracciones que permanecen sin cambios por la acción de "cancelación anómala." Por ejemplo, eliminar el dígito 6 de cada uno de los numerador y denominador de la fracción 65/26 produce el número 5/2. Curiosamente, 65/26 es igual a cinco mitades. Otras fracciones con este propiedad incluyen: $\frac{64}{16} = \frac{4}{1}$, $\frac{98}{49} = \frac{8}{4}$, y $\frac{95}{19} = \frac{5}{1}$. De supuesto, eliminar dígitos de esta manera es una operación matemática inválida, y las igualdades obtenidas aquí son pura coincidencia.

En ÁLGEBRA la palabra cancelación se usa en dos ajustes. Similar al proceso de cancelación de fracciones, uno puede simplificar una expresión racional de la formar xy/xz cancelando el factor x de ambos numerador y denominador. Esto da xy/xz como iguales a y/z. Así, por ejemplo, la expresión $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x}$ $= \frac{(x + 1)(x + 2)}{x(x + 1)}$ se simplifica a $\frac{x + 2}{x + 1}$.

El proceso de sacar dos cantidades iguales de una ecuación a través de la resta también se llama cancelación. Por ejemplo, en la ecuación x + 2y = 5 + 2y, el término 2y se puede cancelar para dejar x = 5.

Ambas acciones se enmarcan bajo el paraguas de un general ley de cancelación. En un contexto abstracto, se dice que un OPERACIÓN BINARIA "*" satisface tal ley si siempre que a*x = b*x se cumple, sigue a = b . Para la operación de adición, se lee:

a + x = b + x implica a = b

Machine Translated by Google

Historia del Cálculo

El estudio del cálculo comienza con el estudio del movimiento, un tema que ha fascinado y confundido a los estudiosos desde la época de antigüedad. El primer trabajo notable registrado en esta dirección se remonta a los eruditos griegos PITÁGORAS (ca. 569-475 a. C.) y ZENO DE ELEA (ca. 500 a. C.), y sus seguidores, quienes propusieron la noción de un INFINITESIMAL como una posibilidad. ble medios para explicar la naturaleza del cambio físico. Por lo tanto, el movimiento podría entenderse como el efecto agregado de una colección de cambios infinitamente pequeños. Sin embargo, Zenón era muy consciente de las dificultades fundamentales de este enfoque y de su suposición de que el espacio y el tiempo son, en consecuencia, continuos y, por lo tanto, infinitamente divisibles. A través de una serie de ingeniosos argumentos lógicos, Zeno razonó que esto no puede ser así. Al mismo tiempo, Zeno presentó un razonamiento convincente para mostrar que la posición inversa, que el espacio está compuesto de unidades fundamentales indivisibles, tampoco puede sostenerse. Los temas contradictorios propuestos por Zeno no se resolvieron adecuadamente durante más de dos milenios.

El concepto de lo infinitesimal también surgió en el antiguo estudio griego de área y volumen. Los eruditos de las escuelas de PLATÓN (428-348 a. C.) y de EUDOXO DE CNIDO (ca. 370 a. C.) desarrollaron un "método de agotamiento", que intentaba calcular el área o el volumen de una figura curva confinándola entre dos cantidades conocidas. , los cuales se pueden hacer para parecerse al objeto deseado con cualquier grado prescrito de precisión. Por ejemplo, se puede intercalar un círculo entre dos n-gonos, uno inscrito y otro circunscrito. Como uno puede calcular fácilmente el área de un n-ágono regular, la fórmula para el área de un círculo sigue tomando valores cada vez mayores de n. (Véase ÁREA.) La figura de un n-ágono regular a medida que n crece difiere de la de un círculo verdadero solo en una cantidad infinitesimal. ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287–212 a. C.) aplicó este método para calcular el área de una sección de una PARÁBOLA, y 600 años después, PAPO DE ALEJANDRÍA (ca. 300–350 d. C.) calculó el volumen de un SÓLIDO DE REVOLUCIÓN mediante esta técnica . Aunque tuvo éxito en el cálculo de áreas y volúmenes de una colección selecta de objetos geométricos, los estudiosos no tenían técnicas generales que permitieran el desarrollo de una teoría general de área y volumen. Cada cálculo individual para un solo ejemplo específico fue aclamado como un gran logro por derecho propio.

El resurgimiento de la investigación científica a mediados del siglo XVII llevó a los estudiosos europeos a llevar el método del agotamiento más allá del punto en que lo habían dejado Arquímedes y Pappus. JOHANNES KEPLER (1571–1630) extendió el uso de infinitesimales para resolver problemas de OPTIMIZACIÓN . (También desarrolló nuevos métodos matemáticos para calcular el volumen de los barriles de vino). Otros trabajaron en el problema de encontrar tangentes a las curvas, un problema práctico importante. en el pulido de lentes, y el problema de encontrar áreas de figuras irregulares. En 1635, el matemático italiano BONAVEN TURA CAVALIERI escribió el primer libro de texto sobre lo que sería métodos de integración de llamadas. Describió un "método general de indivisibles" útil para calcular volúmenes. El principio de hoy se llama PRINCIPIO DE CAVALIERI .

El matemático francés Gilles Personne de Roberval (1602-1675) fue el primero en vincular el estudio del movimiento con la geometría. Se dio cuenta de que la línea tangente a una curva geométrica podía interpretarse como la dirección instantánea del movimiento de un punto que viajaba a lo largo de esa curva. El filósofo y matemático RENÉ DESCARTES (1596–1650) desarrolló técnicas generales para encontrar la fórmula de la recta tangente a una curva en un punto dado. Esta técnica fue retomada más tarde por PIERRE DE FERMAT (1601-1665), quien utilizó el estudio de las tangentes para resolver problemas de máximos y mínimos de la misma manera que resolvemos estos problemas hoy en día. Como un área de estudio separada, Fermat también desarrolló técnicas de cálculo integral para encontrar áreas entre curvas y longitudes de arcos de curvas, que luego fueron desarrolladas por BLAISE PASCAL (1623–62) y los matemáticos ingleses JOHN WALLIS (1616–1703). e ISAAC BARROW (1630-1677).

Al mismo tiempo, los académicos, incluido Wallis, comenzaron a estudiar SERIES y PRODUCTOS INFINITOS. El matemático escocés JAMES GREGORY (1638–75) desarrolló técnicas para expresar funciones trigonométricas como sumas infinitas, descubriendo así la SERIE DE TAYLOR 40 años antes de que BROOK TAYLOR (1685–1731) desarrollara de forma independiente los mismos resultados.

A mediados del siglo XVII, sin duda, todas las piezas de cálculo estaban en su lugar. Sin embargo, los estudiosos de la época no se dieron cuenta de que todos los diversos problemas que se estudiaban pertenecían a un todo unificado, es decir, que las técnicas utilizadas para resolver problemas de tangente podían utilizarse para resolver problemas de área y viceversa. Un avance fundamental se produjo en la década de 1670 cuando, de forma independiente, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) de Alemania y SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) de Inglaterra descubrieron una relación inversa entre el “problema de la tangente” y el “problema del área”. El descubrimiento del TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO reunió los diferentes temas que se estaban estudiando, brindó una perspectiva hermosa y natural del tema en su conjunto y permitió a los académicos lograr avances significativos en la resolución de problemas geométricos y físicos con un éxito espectacular. A pesar del contenido del conocimiento que se había establecido hasta ese momento, es el descubrimiento del teorema fundamental del cálculo lo que representa el descubrimiento del cálculo.

Newton se acercó al cálculo a través de un concepto de "entidades que fluyen". Llamó a cualquier cantidad estudiada un "fluido" y su tasa de cambio un FLUXION. Los registros muestran que

(continúa)

Machine Translated by Google

Historia del Cálculo (continuación)

había desarrollado estas ideas ya en 1665, pero no publicó una descripción de su teoría hasta 1704. Desafortunadamente, su estilo de escritura y la elección de la notación también hicieron que su versión del cálculo fuera accesible solo para una audiencia selecta. Leibniz, por otro lado, hizo un uso explícito de un infinitesimal en su desarrollo de la teoría. Llamó al cambio infinitesimal de una cantidad xa DIFERENCIAL, denotado dx. Leibniz inventó un hermoso sistema de notación para el tema que hizo que la lectura y el trabajo con su explicación de la teoría fueran inmediatamente accesibles para una amplia audiencia. (Muchos de los símbolos que usamos hoy en cálculo diferencial e integral se deben a Leibniz). Leibniz formuló su enfoque a mediados de la década de 1670 y publicó su descripción del tema en 1684.

Aunque ahora se sabe que Newton y Leibniz habían hecho sus descubrimientos de forma independiente, las cosas en ese momento no estaban claras y surgió una amarga disputa sobre la prioridad para el descubrimiento del cálculo. En 1712, la SOCIEDAD REAL de Inglaterra formó un comité especial para adjudicar el asunto.

La aplicación de las técnicas a los problemas del mundo real se convirtió en el tema principal de las matemáticas del siglo XVIII. El famoso texto de 1687 de Newton, Principia, allanó el camino con su análisis de las leyes del movimiento y la mecánica del sistema solar. Los hermanos suizos Jakob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748) de la famosa FAMILIA BERNOULLI, campeones de Leibniz en la famosa disputa, estudiaron el cálculo recién inventado y fueron los primeros en dar conferencias públicas sobre el tema. Johann Bernoulli fue contratado para enseñar cálculo diferencial al noble francés GUILLAUME FRANÇOIS DE L' HOPITAL (1661–1704) por correspondencia escrita. En 1696, L'Hopital publicó el contenido de las cartas de Johann con su propio nombre como autor. La matemática italiana MARIE GAETANA AGNESI (1718-1799) escribió el primer libro de texto completo sobre cálculo diferencial e integral en 1755.

El matemático suizo LEONHARD EULER (1707–83) y los matemáticos franceses JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) y PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827) se destacaron en el desarrollo de la teoría de las ECUACIONES DIFERENCIALES. Euler también escribió extensamente sobre el tema del cálculo, mostrando cómo la teoría se puede aplicar a una amplia gama de problemas matemáticos puros y aplicados. Sin embargo, a pesar del evidente éxito del cálculo, algunos estudiosos del siglo XVIII cuestionaron la validez y solidez del tema.

El crítico más agudo de la obra de Newton y Leibniz fue el obispo anglicano de Coyne, George Berkeley (1685-1753).

En su ensayo mordaz, "El analista", Berkeley demostró, de manera convincente, que tanto la noción de Newton de una fluxión y el concepto de Leibniz de un infinitesimal están mal definidos, y que los fundamentos del sujeto son, en consecuencia, inseguros. (Algunos historiadores sugieren que las vehementes críticas de Berkeley estaban motivadas por un desdén personal por el aparente ateísmo del tipo de matemático que argumenta que la ciencia es cierta y que la teología se basa en la especulación). base sólida. No se lograron avances significativos hasta el siglo XIX, cuando el matemático francés AUGUSTINE LOUIS CAUCHY (1789–1857) sugirió que la noción de infinitesimal debería ser reemplazada por la de LÍMITE. El matemático alemán KARL WEIERSTRASS (1815-1897) desarrolló aún más esta idea y fue el primero en dar definiciones absolutamente claras y precisas de todos los conceptos utilizados en el cálculo, sin ningún misterio ni confianza en la intuición geométrica. El trabajo del matemático alemán RICHARD

DEDEKIND (1831-1916) destacó el papel que juegan las propiedades del sistema de números reales para garantizar la validez de la INTER TEOREMA DEL VALOR MEDIO y TEOREMA DEL VALOR EXTREMO y todos los resultados esenciales que se derivan de ellos.

Inicialmente, el cálculo se consideró una teoría relacionada solo con el cambio continuo y las FUNCIONES CONTINUAS. El matemático alemán BERNHARD RIEMANN (1826-1866) fue el primero en considerar y analizar detalladamente la integración de funciones discontinuas. Su definición de integral es la que normalmente se presenta en los libros de texto de hoy. A fines del siglo XIX, el matemático francés HENRI LÉON LEBESGUE (1875–1941) literalmente cambió el enfoque de Riemann y desarrolló un concepto de integración que se puede aplicar a una clase mucho más amplia de funciones y clases de configuraciones. Al construir una integral de Riemann, uno comienza subdividiendo el rango de entradas, el eje x, en pequeños intervalos y agregando áreas de rectángulos por encima de estos intervalos de alturas dadas por la función. Esto es similar a contar el valor de un bolsillo lleno de monedas sacando una moneda a la vez y sumando los resultados a medida que avanza. Lebesgue sugirió, por otro lado, subdividir el rango de salidas, el eje y, en pequeños intervalos y medir el tamaño de los conjuntos en el eje x para los cuales la función da la salida deseada en el eje y. Esto es similar a contar monedas reuniendo primero todas las monedas de un centavo y determinando su número, todas las monedas de cinco centavos y determinando el tamaño de esa colección, y así sucesivamente. Para hacer esto, Lebesgue tuvo que desarrollar una “teoría de la medida” general para determinar el tamaño de conjuntos complicados.

Su nueva teoría demostró ser fundamentalmente importante y ahora tiene profundas aplicaciones a una amplia gama de temas matemáticos. Resultó ser especialmente importante para el buen desarrollo de la teoría de la PROBABILIDAD .

Véase también CÁLCULO; CALCULO DIFERENCIAL; GRÁFICO DE A FUNCIÓN; CÁLCULO INTEGRAL; VOLUMEN.

Machine Translated by Google

y para la multiplicación, suponiendo que x no es cero:

a × x = b × x implica a = b

La ley de cancelación es válida para cualquier sistema matemático que satisfaga la definición de GRUPO .
Con la existencia garantizada de elementos inversos, tenemos que a*x = b*x produce a*x*x – 1 = b*x*x – 1, que es el enunciado a = b. Se cumple en ARITMÉTICA MODULAR en el siguiente contexto:

ax ≡ bx (mod N) implica a ≡ b (mod N), solo si x y N son COPRIME

Esto se deduce ya que el enunciado ax ≡ bx (mod N) se cumple solo si x(a – b) es un múltiplo de N. Si x y N no comparten factores primos, entonces debe darse el caso de que el término a – b contiene todos los factores primos de N , por lo que es un múltiplo de N. En consecuencia, a ≡ b(mod N). El hecho de que 4 × 2 sea congruente con 9 × 2 módulo 10, sin que 4 y 9 sean congruentes módulo 10, muestra que la ley de cancelación no tiene por qué cumplirse si x y N comparten un factor común.

Véase también ASOCIATIVO; PROPIEDAD CONMUTATIVA; PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

Cantor, Georg (1845–1918) Alemán Teoría de conjuntos Nacido el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, pero criado en Wies baden y en Frankfurt, Alemania, el matemático Georg Cantor es recordado por su profundo trabajo sobre la teoría de conjuntos y la CARDINALIDAD . Desde los años 1874 a 1895, Cantor desarrolló una descripción clara y completa de la naturaleza de los conjuntos infinitos. Con su famoso ARGUMENTO DIAGONAL, por ejemplo, demostró que el conjunto de los números racionales es DENUMERABLE y que el conjunto de los números reales no lo es, estableciendo así por primera vez que hay más de un tipo de conjunto infinito. El trabajo de Cantor fue controvertido y visto con recelo. Su importancia no fue bien entendida en su época.

Cantor completó una disertación sobre NUMBER THE ORY en 1867 en la Universidad de Berlín. Después de trabajar como maestro de escuela por un corto tiempo, Cantor completó un título de habilitación en 1869 para luego aceptar un puesto en la Universidad de Halle en 1869. Trabajó en la teoría de SERIES trigonométricas, pero sus estudios pronto requirieron una comprensión clara de la Numeros irracionales. Esta necesidad llevó a Cantor al estudio de conjuntos y números generales.

En 1873, Cantor demostró que el conjunto de todos los números racionales y el conjunto de los NÚMEROS ALGEBRAICOS son CONTABLES, pero que el conjunto de los números reales no lo es. Veinte años antes, el matemático francés JOSEPH LIIOUVILLE (1809-1882) estableció la existencia de los NÚMEROS TRASCENDENTALES (exhibiendo ejemplos específicos de tales números), pero Cantor logró demostrar, de un solo golpe, que, de hecho, casi todos los números son trascendentales.

Habiéndose embarcado en un estudio del infinito, Cantor siguió adelante y comenzó a estudiar la naturaleza del espacio y la dimensión. En 1874 preguntó si los puntos de un cuadrado unitario podían ponerse en una correspondencia biunívoca con los puntos del intervalo unitario [0,1]. Tres años más tarde, Cantor se sorprendió al descubrir por sí mismo que esto era posible. Su artículo de 1877 que detalla el resultado fue recibido con sospecha e inicialmente se le negó la publicación. El amigo y colega de Cantor, el notable JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916), intervino e instó a que se imprimiera la obra. Cantor continuó trabajando en conjuntos transfinitos durante 18 años más. Formuló la famosa HIPÓTESIS DEL CONTINUO y se sintió frustrado por no poder probarla.

Cantor sufrió episodios de depresión y enfermedades mentales a lo largo de su vida. Durante los períodos de incomodidad, se alejó de las matemáticas y escribió piezas sobre filosofía y literatura. (Se destaca por escribir ensayos que argumentan que Francis Bacon fue el verdadero autor de las obras de Shakespeare).

Cantor murió de un ataque al corazón el 6 de enero de 1918, mientras estaba en una institución mental en Halle, Alemania. Aunque el trabajo de Cantor sacudió los cimientos de las matemáticas establecidas de su tiempo, sus ideas ahora han sido aceptadas en el pensamiento dominante. Los aspectos iniciales de su trabajo en la TEORÍA DE CONJUNTOS se enseñan en las escuelas primarias.

capital Véase INTERÉS.

Cardano, Girolamo (Jerome Cardan) (1501-1576)
Álgebra italiana Nacido el 24 de septiembre de 1501 en Pavía, Italia, el erudito Girolamo Cardano es recordado como el primero en publicar soluciones tanto para la ECUACIÓN CÚBICA general como para la ECUACIÓN CUÁRTICA en su tratado de 1545 Ars magna (El gran arte). Aunque estos resultados se debieron a SCIPIONE DEL FERRO

Machine Translated by Google

(1465–1526), NICCOLÒ TARTAGLIA (1499–1557), y a su ayudante LUDOVICO FERRARI (1522–65), Cardano unificó los métodos generales. Fue un destacado matemático de la época en los campos del ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA y PROBABILIDAD.

A la edad de 19 años, Cardano ingresó a la Universidad de Pavía para estudiar medicina, pero rápidamente se transfirió a la Universidad de Padua para completar su título. Se destacó en sus estudios y se ganó la reputación de ser uno de los principales debatientes. Se graduó con un doctorado en medicina en 1526.

Cardano instaló un pequeño consultorio médico en el pueblo de Sacco, pero no tuvo ningún éxito. Obtuvo un puesto como profesor de matemáticas en la Fundación Piatti de Milán, donde se interesó por las matemáticas mientras continuaba tratando a un pequeño número de pacientes.

En 1537, Cardano publicó dos textos de matemáticas sobre temas de aritmética y medición, lo que marcó el inicio de una prolífica carrera literaria. Escribió sobre temas tan diversos como teología, filosofía y medicina, además de matemáticas.

En 1539 Cardano se enteró de que un matemático italiano llamado Tartaglia sabía cómo resolver ecuaciones cúbicas, un tema de interés para Cardano ya que él y Ferrari, su asistente, habían descubierto métodos para resolver cuárticas, si el método para cúbicas estaba claro.
Tartaglia reveló sus métodos a Cardano bajo la estricta promesa de que los detalles se mantendrían en secreto. (En ese momento, los eruditos del Renacimiento, como Tartaglia, a menudo contaban con el apoyo de mecenas ricos y tenían que demostrar su valía en desafíos y debates públicos. Por lo tanto, mantener los métodos en secreto era de importancia clave). Cuando Cardano supo más tarde que otro erudito del del Ferro había descubierto métodos idénticos a los de Tartaglia décadas antes, Cardano ya no se sintió obligado a mantener en secreto la solución y publicó todos los detalles en su famosa obra de 1545 Ars magna (El gran arte). Tartaglia se indignó por este acto y se produjo una amarga disputa entre los dos hombres.

Aunque Cardano acredita correctamente a Ferrari y Tartaglia como los primeros eruditos en resolver la ecuación cúbica, debe señalarse que Cardano identificó correctamente los enfoques generales que unificaron los métodos anteriores.
Cardano también reconoció que las soluciones a menudo involucrarían NÚMEROS COMPLEJOS y fue el primer erudito en dar pasos hacia la comprensión de estas cantidades. Murió el 21 de septiembre de 1576 en Roma.

Véase también RAFAEL BOMBELLI.

Fórmula de Cardano (fórmula de Cardano-Tartaglia) Ver ECUACIÓN CÚBICA.

cardinalidad En el uso común, los números cardinales son los números de conteo 1, 2, 3, … Estos números representan los tamaños de conjuntos FINITOS de objetos. (Sin embargo, a diferencia de los NÚMEROS ORDINALES, los números cardinales no tienen en cuenta el orden en que aparecen los elementos en un conjunto dado).

A fines del siglo XIX, el matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918) amplió la noción de cardinalidad para incluir un examen significativo del tamaño de conjuntos infinitos. Definió que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad si sus miembros pueden coincidir con precisión en una correspondencia uno a uno. Es decir, cada elemento del primer conjunto puede coincidir con un elemento del segundo conjunto y viceversa. Por ejemplo, el conjunto de personas {Jane, Lashana, Kabeer} es de la misma cardinalidad que el conjunto de perros {Rover, Fido, Spot}, ya que se pueden poner correas entre dueños y perros para que a cada dueño se le asigne solo una. perro, y cada perro está atado a un dueño. Se dice que cada uno de estos conjuntos tiene cardinalidad 3. (Ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad que el conjunto {1, 2, 3}). Se dice que dos conjuntos de la misma cardinalidad son equipotentes (equipolentes, equinumerables o, simplemente, equivalente).

El conjunto de todos los números de conteo {1, 2, 3, ...} es equipotente con el conjunto de todos los números enteros {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}. Esto se puede ver organizando cada conjunto de números en una lista y haciendo coincidir los elementos según sus posiciones en la lista:

123456…
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
0 –1 1 –2 2 –3 …

Este procedimiento muestra que dos conjuntos cualesquiera cuyos elementos se pueden enumerar son equipotentes. Se dice que tal conjunto es DENUMERABLE, y Cantor denotaba la cardinalidad de cualquier conjunto numerable $\aleph_0$, pronunciado “aleph nulo”. El primer ARGUMENTO DIAGONAL de Cantor muestra que el conjunto de todos los números de conteo, el conjunto de los enteros y el conjunto de todos los números racionales son conjuntos numerables y, por lo tanto, cada uno tiene una cardinalidad $\aleph_0$. Los matemáticos han demostrado que el conjunto de todos los NÚMEROS ALGEBRAICOS también es numerable.

Sin embargo, no todos los conjuntos infinitos son numerables, como muestra el argumento de la segunda diagonal de Cantor. Para

Machine Translated by Google

Por ejemplo, no es posible colocar el conjunto de todos los números reales en una lista, por lo que, en un sentido bien definido, el conjunto de los números reales es "más infinito" que el conjunto de los números contables o los racionales. Cantor denotó la cardinalidad del conjunto de números reales c, por "continuum". Tenemos:

$$0 < do$$

En general, se dice que la cardinalidad de un conjunto A es menor que la cardinalidad de otro conjunto B si es posible unir cada elemento de A con un único elemento de B, pero no al revés. (Así, A es equipotente con un subconjunto propio de B pero no con B mismo). Por ejemplo, la cardinalidad de {Jane, Lashana, Kabeer}, que denotamos como 3, es menor que la cardinalidad del conjunto {Rover , Fido, Spot, Tess, Rue, Tucker, Jet}, que denotamos como 7. Aunque podemos emparejar a los dueños con perros distintos, no podemos emparejar a los perros con dueños distintos.

Un conjunto infinito tiene la propiedad de ser equipotente con un subconjunto propio de sí mismo. (Esto generalmente se toma como la definición de lo que significa que un conjunto sea infinito). Por ejemplo, dado que el conjunto de números enteros es equipotente con el subconjunto de números de conteo, el conjunto de números enteros es de hecho un conjunto infinito. La gráfica de la función tangente $y = \tan x$ $\pi x = -\frac{}{2}$ y $\pi x = \frac{}{2}$ demuestra que cada entre puntos en el eje y se corresponde con un único punto en el eje x en el intervalo $-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}$, y viceversa.

Por lo tanto, el conjunto de todos los puntos en toda la recta numérica (el eje y) tiene la misma cardinalidad que el conjunto de todos los puntos en un intervalo finito. De hecho, el conjunto de todos los números reales es un conjunto infinito.

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A se llama el "conjunto potencia" de A, denotado P(A). Por ejemplo, el conjunto potencia de {a,b,c,} es el conjunto de ocho elementos: {Ø,{a}, {b},{c},{a,b},{a,c},{ b,c},A}. (En general, el conjunto potencia de un conjunto con n elementos tiene 2n elementos). En cierto sentido, el conjunto potencia del conjunto de todos los números contables A = {1,2,3,...} coincide precisamente con el conjunto de todos números reales entre cero y uno. Esto se puede ver de la siguiente manera:

> Dado un subconjunto B de números de conteo, sea x el número real escrito como decimal en base dos cuyo k-ésimo dígito es 1 si k pertenece a B, y 0 en caso contrario. (Así, por ejemplo, el subconjunto de números impares da como resultado el número real x = .1010101… .) Y a la inversa, dado un número real x entre cero y uno, cree un subconjunto B de números de conteo dictado por la colocación de 1s en su expansión binaria. (Así, por ejemplo, el número real x = .010000... corresponde al subconjunto {2}.)

(Hay una dificultad técnica con esta correspondencia. Los números 0.01000... y 0.001111..., por ejemplo, representan el mismo número real, pero corresponden a diferentes subconjuntos de los números de conteo.
Los matemáticos han demostrado que esta dificultad se puede obviar.) Tenemos:

$$P(N) = R$$

donde N denota el conjunto de números naturales y R el conjunto de números reales.

La cardinalidad de los números de conteo es $\aleph_0$, y el argumento anterior muestra que la cardinalidad de su conjunto potencia es c. Esto sugiere, como en el caso de los conjuntos finitos, que el conjunto potencia de un conjunto siempre tiene una cardinalidad "mayor" que el conjunto original. Cantor usó el siguiente argumento para demostrar que este es realmente el caso:

> Sea A un conjunto y considere su conjunto potencia P(A). Dado que cada elemento a de A da lugar al elemento {a} de P(A), ciertamente podemos emparejar los elementos A con distintos elementos de P(A). Ahora mostramos, sin embargo, que no es posible invertir el proceso y emparejar los elementos de P(A) con distintos elementos de A.
>
> Supongamos, por el contrario, que hemos especificado una forma de asociar con cada subconjunto de A un elemento distinto de A. Por ejemplo, el subconjunto {a,b,c} podría coincidir con el elemento a, y el subconjunto { a,c,e,g,…} con b. Observe que el primer subconjunto contiene el elemento a con el que se empareja, pero el segundo subconjunto no contiene el elemento b con el que se empareja.
>
> Sea U el conjunto de todos los elementos de A que se utilizan en la correspondencia anterior, pero que no son elementos de los subconjuntos a los que están asignados. (Por ejemplo, b arriba es un elemento de U, pero a no lo es). Al subconjunto U se le debe asignar algún elemento de A, llámelo u. Ahora pregunta: ¿Eres miembro de U? El conjunto U no puede contener u por la definición misma de U.
>
> Pero en ese caso u satisface la definición de estar en U. Así que al no estar en U, debes

Machine Translated by Google

estar en U, y estando en U, no puedes estar en U. Este absurdo muestra que no puede haber una correspondencia significativa que asigne elementos distintos de A a subconjuntos de A después de todo.

Dado un conjunto infinito A, Cantor había demostrado que los conjuntos P(A), P(P(A)), P(P(P(A))), ... forman una cadena interminable de conjuntos infinitos cada vez más grandes. Así, en un sentido muy definido, hay infinitamente muchos tipos diferentes de infinito. En el otro extremo del espectro, el estudio de los conjuntos numerables muestra que todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable. Así, de todos los conjuntos infinitos, los conjuntos numerables son el tipo "más pequeño" de conjuntos infinitos. La HIPÓTESIS DEL CONTINUO pregunta si existe o no un conjunto infinito con cardinalidad que se encuentra en algún lugar entre la de N y P(N) = R.

Se podría suponer que P(R), el conjunto potencia del conjunto conjunto de todos los puntos en la recta numérica real, , es R2 de todos los puntos en el plano, o, de manera equivalente, que el conjunto potencia del conjunto de todos los puntos en el intervalo unitario [0,1] es el conjunto de todos los puntos dentro del unidad cuadrada [0,1] × [0,1]. Sorprendentemente, este no es el caso: hay tantos puntos en el cuadrado unitario como en un intervalo unitario. Esto se ve de la siguiente manera:

Asocia a cada punto (x,y) con 0 ≤ x ≤ 1 y 0 ≤ y ≤ 1, cada uno escrito como una expansión decimal infinita, x = 0.x1x2x3… y y = 0.y1y2y3…, el número real r = 0 .x1y1x2y2x3y3… en el intervalo [0,1], y por el contrario, emparejar cada número real r = 0.r1 r2 r3 r4 r5 r6… con el punto (0.r1 r3 r5…, 0.r2 r4 r6…) en el cuadrado de la unidad.

(Nuevamente, existe una dificultad técnica causada por esos números reales que tienen dos representaciones decimales diferentes. Por ejemplo, un medio se puede escribir como 0.5000... y 0.4999... Los matemáticos han demostrado que esta dificultad se puede obviar). Resulta que que P(R) corresponde al conjunto de todas las posibles funciones de valores reales y = f(x).

Véase también INFINITO; LA CURVA DE PEANO .

cardioide La curva en forma de corazón trazada por un punto en la circunferencia de un círculo mientras gira alrededor de otro círculo de igual tamaño se llama cardioide. En COORDENADAS POLARES, la cardioide viene dada por una ecuación de la forma r = a(1– cosθ) donde a es el radio común de las circunferencias, y en COORDENADAS CARTESIANAS por

$2(x^2 + y^2) + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$. El EQUACIONES de la curva). El PARAMÉTRICO son x = acosθ(1 + cosθ) y y = asinθ(1 + cosθ). La curva tiene un área de una vez y media el área de cualquiera de los círculos generadores y un perímetro ocho veces el radio.

El cardioide fue estudiado extensamente por primera vez por el matemático italiano Johann Castillon, quien también acuñó su nombre en 1741.

Véase también CICLOIDE.

Coordenadas cartesianas (coordenadas ortogonales, coordenadas angulares rectas) Uno de los mayores avances en el desarrollo de las matemáticas se produjo cuando la geometría y el álgebra se unieron mediante la invención del sistema de coordenadas cartesianas. Atribuidas al matemático y filósofo francés del siglo XVII RENÉ DESCARTES (cuyo nombre latinizado dice Carte sius), las coordenadas cartesianas proporcionan un medio para representar cada punto en el plano a través de un par de números.

Se comienza seleccionando un punto fijo O en el plano, llamado origen, y trazando a través de él dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas ejes, una horizontal y otra vertical, y ambas con el punto O en la posición cero de la recta . Se ha convertido en una convención poner el lado positivo de la recta numérica horizontal a la derecha de O, y el lado positivo de la recta numérica vertical encima de O, y llamar al eje horizontal eje x y al vertical el eje y. Las coordenadas cartesianas de un punto P en el plano son un par de números (x, y) que luego describen la ubicación de ese punto de la siguiente manera:

La coordenada x, o “abscisa”, es la distancia horizontal del punto desde O a lo largo del eje horizontal. (Una distancia positiva representa un punto a la derecha del eje vertical; una distancia negativa, uno a la izquierda). La coordenada y, u "ordenada", es la distancia vertical del punto desde O a lo largo del eje vertical. (Una distancia positiva representa un punto ubicado sobre el eje horizontal y una distancia negativa uno ubicado debajo).

Por ejemplo, si la esquina inferior izquierda de esta página es el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, con los ejes x e y marcados en unidades de pulgadas, entonces el punto con las coordenadas (4, 1) se encuentra cuatro pulgadas a la derecha del borde izquierdo de la página y una pulgada por encima de la parte inferior de la página.

Machine Translated by Google

Extendiendo esta idea a las tres dimensiones, los puntos en el espacio se pueden especificar mediante un triple de números (x, y, z) que representan las distancias a lo largo de tres rectas numéricas mutuamente perpendiculares. Los ejes de coordenadas generalmente se denominan ejes x, y y z. Se intersecan en un punto O, llamado origen, que es cero en las tres rectas numéricas. Los ejes podrían estar orientados para formar un sistema para zurdos o para diestros.

Geometría de coordenadas

El advenimiento de un sistema de coordenadas permitió a los matemáticos, por primera vez, llevar el poder del álgebra al estudio de la geometría. Por ejemplo, las líneas rectas se representan como conjuntos de puntos (x,y) que satisfacen ecuaciones de la forma y = mx + b. Multiplicando la PENDIENTE m de una recta por la pendiente de otra se determina rápidamente si esas dos rectas son o no perpendiculares, por ejemplo. (El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es –1).

La matemática francesa NICOLE ORESME (1323-1382) fue la primera en describir una forma de graficar la relación entre una variable independiente y una dependiente y, por lo tanto, la primera en dar pasos hacia la unión de la geometría y el álgebra. La construcción explícita de lo que llamaríamos un sistema de coordenadas apareció por primera vez con el trabajo del abogado francés y matemático aficionado PIERRE DE FERMAT (1601-1665). Comenzando con una línea de referencia horizontal para representar una variable independiente x, Fermat representaría gráficamente la relación de una segunda variable y con ella como un segmento de línea, sostenido en un ángulo fijo con respecto a la línea de referencia, cuya longitud variaría de acuerdo con la variable y a medida que se desliza a lo largo del eje x. Sin embargo, Fermat no pensó en términos de identificar un segundo eje, ni requirió que el segmento de línea que representa y fuera perpendicular al eje x.

En su famoso texto de 1637 La géométrie (Geometría), René Descartes describió de forma independiente métodos similares para representar gráficamente las relaciones algebraicas.
Debido a que el trabajo de Fermat no se publicó hasta después de su muerte, el descubrimiento de la geometría de coordenadas se atribuyó a Descartes.

Debido a que Fermat y Descartes interpretaron la variable desconocida y en una relación algebraica como una longitud física, ambos académicos solo consideraron las coordenadas positivas. El matemático inglés JOHN WALLIS (1616–1703) fue el primero en introducir la posibilidad de las coordenadas negativas. La idea de fijar un segundo fijo eje, el eje y, perpendicular al eje x no fue popular hasta mediados de 1700. Era una idea que parecía evolucionar gradualmente. SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) es considerado el creador de las COORDENADAS POLARES.

Ver también COORDENADAS; GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Producto cartesiano (producto cruzado, producto directo externo, conjunto de productos, producto directo de conjunto) Dados dos conjuntos A y B, su producto cartesiano, denotado A × B, es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b), donde a A y b B. Por ejemplo, si A = {1,2,3} y B = {α,β}, entonces:

$$A \times B = \{ (1,\alpha), (2,\alpha), (3,\alpha), (1,\beta), (2,\beta), (3,\beta) \}$$

Esto es diferente del conjunto B × A.

Si los conjuntos A y B son ambos finitos, con n y m elementos, respectivamente, entonces A × B es un conjunto finito con nm elementos. El matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918) demostró que si A y B son conjuntos CONTABLES infinitos , entonces su producto cartesiano A × B es nuevamente contable.

El producto cartesiano de tres conjuntos A, B y C, denotado A × B × C, se define como el conjunto de todos los triples ordenados (a, b, c), con a A, b B y c C El producto cartesiano de cualquier colección finita de conjuntos se define de manera similar . Cualquier SECUENCIA puede considerarse como un elemento del producto cartesiano de un número contable de conjuntos.

Si dos conjuntos A y B tienen una estructura particular (ambos pueden ser GRUPOS o ESPACIOS VECTORIALES, por ejemplo), entonces normalmente es posible dar al producto cartesiano A × B la misma estructura. Por ejemplo, si A y B son grupos con operaciones de grupo * y •, respectivamente, entonces A × B tiene la estructura de un grupo con operación de grupo dada por:

$$(a1 , b1) \cdot (a2 , b2) = (a1 * a2 , b1 \bullet b2)$$

El grupo de cuatro de Klein es el producto cartesiano del grupo de dos elementos Z2 = {0,1} consigo mismo. (La operación de grupo para Z2 es una suma en MODULAR ARITMÉTICA 2).

Véase también TEORÍA DE CONJUNTOS.

sacando nueves Las REGLAS DE DIVISIBILIDAD muestran que el resto de cualquier número, cuando se divide por 9, es la suma de sus dígitos. Por ejemplo, 59,432,641 deja un

Machine Translated by Google

resto de 5 + 9 + 4 + 3 + 2 + 6 + 4 + 1 = 34 cuando se divide por 9, lo que corresponde a un resto de 3 + 4 = 7. Cualquier conjunto de dígitos que suman 9, como el 5 y los 4 en la primera y tercera posición del número anterior pueden ignorarse al realizar este cálculo, ya que no contribuirán al resto.

El método de "expulsar nueves" es el proceso de eliminar grupos de dígitos que suman 9. La suma de los dígitos que sobreviven es el resto que da el número al dividir por 9. Por ejemplo, 59,432,641 → 932,641 → 934 → 34 muestra, de nuevo, que este número deja un resto de 3 + 4 = 7 cuando se divide por 9.

Este método se usa a menudo para verificar el trabajo aritmético. Por ejemplo, podemos determinar rápidamente que 563 × 128 no puede ser igual a 72 364. Al dividir por 9, 563 deja un resto de 5, 128 un resto de 2, por lo que su producto deja un resto de 5 × 2 = 10, que es 1. Sin embargo, 72 364 tiene un resto de 4.

Largas listas de sumas, restas y multiplicaciones pueden revisarse rápidamente de esta manera. Por supuesto, los errores aún pueden estar presentes si, por casualidad, los restos coinciden. Por ejemplo, sacar nueves no detectará que 632 × 723 = 459,636 es incorrecto.

Catalan, Eugène Charles (1814–1894) belga Teoría de números Nacido el 30 de mayo de 1814, el matemático Eugène Catalan es mejor recordado por su trabajo en TEORÍA DE NÚMEROS y por la famosa serie de números que lleva su nombre. En 1844, Catalan conjeturó que 8 y 9 son los dos únicos números enteros consecutivos que son potencias no triviales (8 = 23 y 9 = 32). Establecer esta afirmación, hoy conocida como la CONJECTURA CATALANA, bloqueó a los matemáticos durante más de un siglo. Se resolvió recientemente.

La carrera del catalán en el mundo académico fue turbulenta. Después de ingresar en la École Polytechnique en 1833, fue expulsado al año siguiente por participar en actividades políticas radicales. Más tarde se le dio permiso para regresar a completar su carrera y en 1838 se le ofreció un puesto como profesor en la institución, que aceptó.
Sin embargo, su conducta política obstaculizó su capacidad para avanzar más allá de este puesto de nivel inicial.

Catalan trabajó en el campo de las FRACCIONES CONTINUAS y alcanzó cierta fama por publicar una solución simplificada al "problema de división de polígonos" de LEONHARD EULER . Este desafío pregunta por la cantidad de formas de dividir un polígono regular en triángulos. usando diagonales que no se cortan. Si bien no fue el primero en resolver el problema (de hecho, el matemático húngaro del siglo XVIII JA Segner planteó y resolvió el problema y luego lo estudió Euler), Catalan utilizó un enfoque particularmente elegante. Su artículo de 1838 sobre el tema, "Note sur une équation aux difference finie" (Nota sobre una ecuación en diferencias finitas), fue muy influyente debido al método que detalla. La sucesión de números que surgen en el estudio del problema se denominan hoy NÚMEROS CATALÁNES. Siguen siendo su legado permanente.

Catalán murió el 14 de febrero de 1894 en Lieja, Bélgica.

Conjetura catalana En su carta de 1844 al Crelle's Journal, EUGÈNE CHARLES CATALAN conjeturó que los enteros 8 y 9 son los únicos dos enteros consecutivos que son potencias (8 = 23 y 9 = 32). No pudo probar su afirmación y establecer la verdad o falsedad de la conjetura se convirtió en un problema abierto de larga data. En abril de 2002, el matemático aficionado Preda Mihailescu anunció a la comunidad matemática que había completado una prueba que demostraba que la afirmación de Catalan era cierta. De antemano, Mihailescu había probado una serie de resultados relacionados, todo mientras trabajaba en una empresa suiza de huellas dactilares y exploraba las matemáticas como un interés externo. Los matemáticos están actualmente revisando su paso final del trabajo.

Números catalanes En 1838 EUGÈNE CHARLES CATA LAN estudió el problema de encontrar el número de formas diferentes de ordenar n pares de paréntesis. Por ejemplo, hay una forma de organizar un conjunto: ( ), dos formas de organizar dos pares: ( ) ( ) y (( )), y cinco formas de organizar tres pares: ((( ))), (( ) ( )), (( )) ( ), ( ) (( )), y ( ) ( ) ( ). ¿Existe una fórmula general para el número de formas de ordenar n pares de paréntesis? Este rompecabezas se conoce hoy como "el problema del catalán". Como mostró Catalan, la solución viene dada por la fórmula:

$$C_n = \frac{2\,6\,10 \quad L\,(1)!\,4\,2)\,\text{norte}}{(\text{norte} +}$$

produciendo la secuencia de números C1 = 1, C2 = 2, C3 = 5, C4 = 14, C5 = 42, …, es ahora llamados números catalanes. Si conveniente hacer C0 = 1. Algunas manipulaciones algebraicas

Machine Translated by Google

muestra que los números catalanes también se pueden expresar en términos de COEFICIENTES BINOMALES:

$$C_n = \frac{2 \cdot 135 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{246 \cdot 2 \cdot 135 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n)}{n!} \cdot \frac{(n)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Así, los números catalanes se pueden encontrar en el TRIÁNGULO DE PASCAL como la entrada central de cada fila alterna dividida por uno más que el número de la fila, considerando el vértice del triángulo como la fila cero.

Se puede demostrar que los números catalanes satisfacen la relación:

$$C_0 = 1$$
$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0$$

Los números catalanes aparecen como la solución a un número sorprendente de problemas matemáticos diferentes. Enumeramos aquí sólo algunos ejemplos.

1. Problema de división de polígonos de Euler: ¿Cuántas maneras hay de dividir un polígono de (n + 2) lados en n triángulos usando diagonales del polígono que no se intersecan?

Un polígono de tres lados, es decir, un triángulo, ya está subdividido apropiadamente. Hay una solución al problema, a saber, no hacer nada. Un cuadrado se puede subdividir en dos triángulos de dos maneras diferentes. Se puede comprobar que un pentágono se puede subdividir de cinco maneras diferentes. En general, la solución a este rompecabezas es el enésimo número catalán.

2. Exponentes en escalera: ¿De cuántas maneras se puede interpretar un exponente en escalera?

Por ejemplo, 32 tiene una sola interpretación: significa 3 × 3 = 9. La expresión 2^{3^4} tiene dos formas: $(2^3)^4$, sin embargo, puede ser inter $= 4096$ o $2^{(3^4)} =$ 24178516392292583494123 52. En general, un exponente en escalera con (n + 1) términos se puede interpretar Cn diferentes formas. (Este problema es equivalente al rompecabezas de paréntesis original del catalán).

3. Apretones de manos en una mesa: ¿ De cuántas maneras diferentes pueden darse la mano simultáneamente n pares de personas sentadas en una mesa circular? Ningún par de apretones de manos pueden cruzarse.

Dos personas sentadas en una mesa pueden darse la mano de una sola manera. Cuatro personas pueden lograr la hazaña de solo dos maneras. (Los apretones de manos en diagonal se cruzan). En general, n pares de personas pueden darse la mano de diferentes maneras, ya que uno puede interpretar dos apretones de manos como un par de paréntesis.

4. Subir escaleras: Comenzando en la base de un tramo de escaleras, ¿de cuántas maneras se pueden subir y bajar n escalones, en cualquier orden? (Necesariamente regresará a la base de los escalones al finalizar la caminata).

Hay una forma de dar dos pasos: un paso hacia arriba seguido de un paso hacia abajo, y dos formas de dar cuatro pasos: dos hacia arriba, dos hacia abajo, o uno hacia arriba, uno hacia abajo, repetido dos veces. En general, existen Cn formas de realizar esta tarea.
(Pensando en un paréntesis izquierdo como un "paso hacia arriba" y un paréntesis derecho como un "paso hacia abajo", podemos ver que este rompecabezas también es equivalente al problema original del catalán).

5. Problema de suma: Seleccionar n números del conjunto {1,2,3,…,2n} para que su suma sea un múltiplo de n + 1. ¿Se puede hacer esto? Si es así, ¿de cuántas maneras diferentes?

Considere el caso n = 3, por ejemplo. Hay cinco formas de seleccionar tres números del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} con suma divisible por cuatro: 1 + 2 + 5 = 8; 1 + 3 + 4 = 8; 1 + 5 + 6 = 12; 2 + 4 + 6 = 12; 3 + 4 + 5 = 12. En general, estos acertijos siempre se pueden resolver y hay Cn formas de hacerlo.

Véase también CONJECTURA CATALANA.

catenaria La forma de la curva formada por un cable flexible uniforme que cuelga libremente entre dos puntos, como un cable eléctrico entre dos postes de telégrafo, se denomina catenaria. GALILEO GALILEI (1564–1642) pensó que esta curva era una PARÁBOLA, pero el erudito alemán Joachim Jungius (1587–1657) demostró más tarde que no podía ser así. Jacques Bernoulli (1654-1705) del famoso

Machine Translated by Google

La FAMILIA BERNOULLI fue la primera en escribir la fórmula de la catenaria. Hasta constantes, viene dada por:

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Esta es la función coseno hiperbólico del conjunto de FUNCIONES HIPERBÓLICAS. Ingenieros, en el diseño de puentes de pensiones como el Puente Golden Gate en San Francisco, hacen un amplio uso de esta función en sus trabajar. El nombre catenaria proviene de la palabra latina catena para "cadena".

Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857) Francés Análisis, Cálculo, Teoría de números Nacido el 21 de agosto de 1789, el erudito francés Augustin-Louis Cauchy es recordado como uno de los matemáticos más importantes de su tiempo. Con 789 artículos matemáticos y siete libros de texto influyentes en su haber, Cauchy hizo contribuciones significativas al estudio de la TEORÍA DE NÚMEROS, ANÁLISIS, TEORÍA DE GRUPOS, ECUACIONES DIFERENCIALES, y PROBABILIDAD. En su famoso texto de 1821 Cours d'ana lyse (Un curso de análisis), Cauchy fue el primero en proporcionar un significado exacto y riguroso de los términos derivada e integral como se usa en CÁLCULO a través del desarrollo de la noción de LÍMITE. Cauchy también correctamente Definió los términos continuidad y convergencia. Su insistencia en la necesidad absoluta de rigor y claridad en todos los las matemáticas tuvieron un efecto duradero y establecieron los estándares del rigor exigido hoy a toda investigación matemática.



Augustin-Louis Cauchy, eminente matemático del siglo XIX siglo, fue el primero en utilizar la noción de un "límite", como ahora se conocido, para desarrollar un modelo sólido de continuidad y convergencia en la teoría del cálculo. (Foto cortesía de la Ciencia Museo, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Después de graduarse de L'École Polytechnique en 1807, con una licenciatura en matemáticas, Cauchy siguió la carrera de ingeniería. Destacado como un prometedor practicante en el campo, Cauchy fue asignado a la proyecto del Canal de Ourcq y a los 21 años logró recibir una comisión de alto rango en Cherburgo como ingeniero militar.

A pesar de su ajetreada vida laboral, Cauchy continuó perseguir intereses en las matemáticas. En 1811 demostró ser un resultado sobre la geometría de los poliedros, que envió para su publicación. Recibió considerables elogios por este logro y decidió cambiar de carrera y dedicarse a la investigación en matemáticas a tiempo completo. Un año después regresó a París y comenzó a buscar una facultad puesto en una institución académica. Cauchy fue finalmente obtuvo una cátedra asistente en la técnica L'École Poly en 1815.

Mientras tanto, Cauchy siguió produciendo y publicando resultados matemáticos. El mismo año de su nombramiento, Cauchy ganó el Gran Premio de L'Académie Royale des Sciences por sus destacados descubrimientos matemáticos sobre la teoría de las ondas. Este reconocimiento le atrajo cierta atención en la comunidad científica, pero la verdadera fama llegó a Cauchy cuando, un año más tarde, resolvió un problema pendiente planteado por PIERRE DE FER MAT (1601-1665) sobre las propiedades de los NÚMEROS FIGURADOS. Cauchy ahora había demostrado ser un experto en un número sorprendentemente grande de campos dispares.

Cauchy publicó una cantidad increíble de artículos durante este primer período de su vida, a un ritmo de tantos como dos a la semana. Fue tan prolífico que los editores de la revista francesa Comptes Rendu impuso una cuota a a él. En respuesta, Cauchy persuadió a un miembro de la familia, que trabajaba en el campo editorial, para crear una nueva diario que no contenía más que papeles suyos!

Machine Translated by Google

El objetivo principal de gran parte del trabajo de Cauchy fue hacer que las matemáticas fueran rigurosas y precisas. Insistió en aportar claridad, precisión y rigor en todos los cursos que impartió y en su obra publicada. Su famoso texto de 1821 fue, de hecho, un libro de texto para estudiantes desarrollado con la intención de "hacer cálculo de la manera correcta". Es justo decir que Cauchy influyó en todo el curso de la investigación matemática al señalar y exigir la necesidad de absoluta claridad y cuidado en el desarrollo de ideas nuevas (e incluso establecidas previamente). Se dice que el gran matemático PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827), después de asistir a una conferencia de Cauchy sobre la importancia de la convergencia de una serie infinita, corrió rápidamente a su casa para comprobar la convergencia de todas las series infinitas que había utilizado. en su ya publicado texto popular Mécanique céleste sobre la mecánica celeste.

En 1826 Cauchy publicó trabajos seminales en el campo de la teoría de números, y en 1829 definió, por primera vez, la noción de función compleja de una variable compleja.

Cauchy dejó París y la política en gestación del régimen real en 1830. A su regreso, un año después, se negó a prestar juramento de lealtad al nuevo régimen y, en consecuencia, perdió su puesto académico. No fue hasta el derrocamiento de Louis Philippe en 1848 que Cauchy recuperó su posición universitaria. Aunque el ritmo de publicación de Cauchy se desaceleró considerablemente durante este período difícil, realizó un trabajo importante sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales y las aplicaciones a la física matemática durante este período.

Cauchy dejó una huella en el desarrollo del cálculo con su trabajo de perfeccionamiento de la base lógica del tema e influyó mucho en el estudio de las funciones complejas. En su honor se nombran una serie de conceptos fundamentales en el campo del análisis, incluido un par de ecuaciones conocidas como ecuaciones de Cauchy-Riemann que determinan si una función compleja es derivable o no. Cauchy murió en Sceaux, cerca de París, Francia, el 22 de mayo de 1857. Sus obras completas, Oeuvres completes d'Augustin Cauchy (Las obras completas de Augustin Cauchy), recopiladas bajo los auspicios de la Académie des Sciences, se publicaron a lo largo de los años. 1882 a 1970 en un total de 27 volúmenes.

Cavalieri, Bonaventura Francesco (1598–1647) Geometría italiana Nacido en Milán, Italia, en 1598 (se desconoce su fecha exacta de nacimiento), matemático y discípulo de GALILEO, Bonaventura Cavalieri es mejor recordado por su obra de 1635 Geometria indivisibilibus continuorum (Una nueva geometría de indivisibles continuos) en la que introdujo su famoso "método de indivisibles" para determinar las áreas y volúmenes de figuras curvas.
Este trabajo se considera un precursor de toda la teoría del CÁLCULO INTEGRAL.

Cuando aún era un niño, Cavalieri se unió a la orden religiosa Jesuati en Milán. En 1616, se trasladó al monasterio de Pisa, donde conoció a Galileo y desarrolló un interés por las matemáticas. Aunque Cavalieri enseñó teología durante muchos años y se convirtió en diácono en la orden, buscó activamente un empleo como matemático. En 1629 recibió un puesto como catedrático de matemáticas en Bolonia.

Para entonces, Cavalieri había desarrollado su método de indivisibles. Basada en el método de agotamiento de ARQUÍMEDES y en la teoría de lo infinitamente pequeño de JOHANNES KEPLER , la técnica de Cavalieri proporcionó un medio para calcular rápidamente el área y los volúmenes de ciertas figuras geométricas que antes se consideraban demasiado difíciles de analizar. Sin embargo, la famosa obra de Cavalieri de 1635 que describe estos métodos no fue bien recibida y fue ampliamente atacada por su falta de rigor.
En respuesta, Cavalieri publicó una pieza revisada, Exercitationes geometricae sex, que resolvió con éxito todas las preocupaciones. Esta segunda pieza fue reconocida como una obra maestra y se consideró un texto de estudio necesario para todos los estudiosos del siglo XVII.

Cavalieri también estudió y escribió extensamente sobre los temas de LOGARITMOS, SECCIONES CÓNICAS, TRIGONOME TRY, óptica y astronomía. Desarrolló una regla general para calcular la distancia focal de las lentes y describió los principios y el diseño de un telescopio reflector.

Cavalieri murió el 30 de noviembre de 1647 en Bolonia, Italia. Su nombre aparece en todos los libros de texto de geometría de la escuela secundaria de hoy en día por el principio que ideó.

Véase también PRINCIPIO DE CAVALIERI .

Principio de Cavalieri matemático italiano BONAVEN TURA CAVALIERI (1598–1647) identificó un principio general conocido hoy como el principio de Cavalieri:

> Los sólidos de igual altura tienen volúmenes iguales si las secciones transversales hechas por planos paralelos a las bases a las mismas distancias de estas bases tienen áreas iguales.

Machine Translated by Google

Se basa en la idea de que el volumen de una baraja de cartas, por ejemplo, no cambia aunque la baraja esté sesgada. Un examen detallado de VOLUMEN explica por qué el principio de Cavalieri es cierto.

Cayley, Arthur (1821–1895) Teoría matricial británica , Geometría, Álgebra abstracta, Análisis Nacido el 16 de agosto de 1821 en Richmond, Inglaterra, Arthur Cayley es recordado como un escritor prolífico, habiendo escrito 967 artículos en total, cubriendo casi todos los aspectos de las matemáticas modernas. Su obra más importante, Memorias sobre la teoría de las matrices (1858), estableció el nuevo campo de las matrices y el álgebra MATRIZ . Cayley estudió grupos abstractos y fue el primero en estudiar geometría en un espacio n-dimensional con n mayor que tres.

Cayley demostró una gran aptitud para las matemáticas cuando era niña. Un maestro de escuela reconoció su talento y animó al padre de Cayley a que le permitiera continuar sus estudios de matemáticas en lugar de dejar la escuela y entrar en el negocio minorista familiar. Cayley asistió al Trinity College, Cambridge, y se graduó en 1842. Al no poder encontrar un puesto académico en matemáticas, Cayley obtuvo una licenciatura en derecho y ejerció la abogacía durante 14 años. Durante este tiempo, sin embargo, Cayley estudió matemáticas activamente y publicó más de 250 trabajos de investigación. En 1863 finalmente fue nombrado profesor de matemáticas en Cambridge.

En 1854, mientras trabajaba como abogado, Cayley escribió “Sobre la Teoría de los Grupos Dependientes del que la Simbólico = 1” y otros artículos significativos Ecuación θ n definía, por primera vez, la noción de un GRUPO abstracto. En ese momento, los únicos grupos conocidos eran los grupos de PER MUTACIÓN , pero Cayley se dio cuenta de que los principios matemáticos detrás de estas estructuras también se aplicaban a las matrices, los sistemas numéricos y las transformaciones geométricas. Este trabajo permitió a Cayley comenzar a analizar la geometría del espacio de dimensiones superiores. Esto, a su vez, junto con su álgebra matricial recientemente desarrollada, proporcionó la base para la teoría de la mecánica cuántica, tal como la desarrolló Werner Heisenberg en 1925.

Cayley fue elegido presidente de la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia en 1883. Desde los años 1889 hasta 1895, toda la producción matemática de Cayley se recopiló en un trabajo de 13 volúmenes, The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley . Este proyecto fue supervisado por el propio Cayley hasta su muerte el 26 de enero de 1895, momento en el que sólo siete vol. Se habían producido umes. Los seis volúmenes restantes fueron editados por AR Forsyth.

Véase también TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON .

Teorema de Cayley-Hamilton El matemático inglés ARTHUR CAYLEY (1821–95) y el matemático irlandés SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–65) observaron que cualquier MATRIZ cuadrada satisface alguna ecuación polinomial. Para ver esto, primero observe que el conjunto de todas las matrices cuadradas n × n con entradas reales forma un ESPACIO VECTORIAL sobre los números reales. Por ejemplo, el conjunto de matrices cuadradas de 2 × 2 es un espacio vectorial de cuatro dimensiones con elementos básicos:

$$\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}, \begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}, \begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix}, \text{ y } \begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}$$

y cualquier matriz de 2 × 2 $A = \begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}$ es de hecho un lineal combinación de estas cuatro matrices linealmente independientes:

$$A = \begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix} = a\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix} + b\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix} + c\begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix} + d\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}$$

En general, el conjunto de todas las matrices cuadradas n × n es un espacio vectorial bidimensional . En particular entonces, cualquier matriz A de n × n , la n^2 para matrices + 1 I, A, A^2 , A^3 , …, A^{n^2} debe ser linealmente dependiente, es decir, hay una combinación lineal de estos elementos que da como resultado la matriz cero:

$$c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$$

para algunos números c_0 , …, c_{n^2} . Esta espectáculos:

> Cualquier matriz cuadrada de n × n satisface una ecuación polinomial de grado como máximo n^2 .

Cayley y Hamilton fueron más allá y demostraron que cualquier matriz cuadrada satisface su propio "polinomio característico":

> Sea A una matriz cuadrada de n × n y haga que x sea una variable. Reste x de cada entrada diagonal de A y calcule el DETERMINANTE de la matriz resultante. Esto produce un polinomio en x

Machine Translated by Google

de grado n. Entonces la matriz A satisface esta ecuación polinomial particular.

Por ejemplo, considere la matriz 2 × 2 $A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix}$.

Entonces el "polinomio característico" de esta matriz es:

$$\det \begin{matrix} 2-x & 1 \\ 3 & 4-x \end{matrix} = (2-x)(4-x) - 3 = x^2 - 6x + 5$$

Uno ahora comprueba que

$$A^2 - 6A + 5 = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix}^2 - 6 \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} + 5 \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{matrix} - \begin{matrix} 12 & 6 \\ 18 & 24 \end{matrix} + \begin{matrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

es de hecho la matriz cero.

Ver también MATRIZ DE IDENTIDAD; DEPENDIENTE LINEAL E INDEPENDIENTE.

función techo Ver SUELO/TECHO/ PARTE FRACCIONAL FUNCIONES.

centro de gravedad (punto de equilibrio) La ubicación en la que se puede considerar que actúa el peso del objeto sostenido en el espacio se denomina centro de gravedad del objeto. Por ejemplo, una barra uniforme se equilibra en su punto medio, y este se considera su centro de gravedad. Una placa angular recta plana hecha de material uniforme sostenida paralelamente al suelo se equilibra en su centro. Este punto es el centro de gravedad de la figura.

LA LEY DE LA PALANCA DE Arquímedes encuentra el punto de equilibrio P de un sistema de dos masas m1 y m2 mantenidas en el espacio. Entonces, el sistema de dos masas se puede considerar como una sola masa m1 + m2 ubicada en P.

El centro de gravedad de un sistema de tres masas en el espacio se puede encontrar encontrando el punto de equilibrio de solo dos masas, usando la ley de la palanca de ARQUÍMEDES , y luego aplicando la ley por segunda vez para encontrar el centro de gravedad de este punto de equilibrio y la tercera masa. Este procedimiento puede, por supuesto, extenderse para encontrar el centro de gravedad de cualquier colección finita de masas. (Una ubicación calculada de esta manera es técnicamente el centro de masa del sistema. Si se supone que la fuerza de gravedad es uniforme, entonces el centro de masa coincide con el centro de gravedad del sistema).

Este principio se puede extender para ubicar el centro de gravedad de figuras arbitrarias en el plano (vistas como objetos planos, uniformemente densos, sostenidos paralelos al suelo). Si la figura está compuesta por una colección finita de rectángulos pegados entre sí, uno localiza el centro de cada rectángulo, la masa de cada rectángulo, y luego considera el sistema como una colección de masas individuales en diferentes lugares. Aplicando la ley de la palanca de Arquímedes como se indicó anteriormente, se ubica el centro de gravedad de la figura. Si una figura solo se puede aproximar como una unión de rectángulos, uno puede encontrar la ubicación aproximada del centro de gravedad a través de este principio y luego mejorar la aproximación tomando el resultado LÍMITE de usar rectángulos cada vez más finos en las aproximaciones . Este enfoque producirá una fórmula INTEGRAL para la ubicación del cent

Ver también TEOREMA DE CEVA ; SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

teorema del límite central A principios del siglo XVIII, científicos de una amplia gama de campos comenzaron a notar la aparición recurrente de la DISTRIBUCIÓN NORMAL en sus estudios y experimentos. Cualquier medida que represente un valor promedio de una muestra, o un valor agregado de una serie de resultados, tiende a seguir esta clásica distribución en forma de campana. El trabajo de MARQUIS DE PIERRE-SIMON LAPLACE en 1818 y Aleksandr Mikhailovich Lyapunov en 1901, y otros, llevaron al establecimiento del teorema del límite central:

> Si un experimento involucra el cálculo repetido del valor promedio de N mediciones (un conjunto diferente de N mediciones cada vez), entonces el conjunto de valores promedio obtenidos sigue muy de cerca una distribución normal, incluso si los experimentos originales no lo hacen. Cuanto mayor sea el valor de N, mejor será la aproximación a una curva normal.

Se puede ir más allá y decir que si los experimentos originales tienen media μ y desviación estándar σ, entonces la colección de valores promedio también tiene media μ, pero

Machine Translated by Google

Desviación Estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Por ejemplo, una fábrica puede producir bombillas empacadas en grandes cajas de envío, 100 por caja. A pesar de que la vida útil del individuo las bombillas pueden variar mucho siguiendo un patrón no reconocible distribución de valores, el teorema del límite central afirma que se da la vida media de las bombillas por caja por una distribución normal. Dado que la altura de un individuo es el efecto agregado de la tasa de crecimiento de un gran número de celdas individuales, la distribución de alturas de hombres y mujeres es esencialmente normal, al igual que la distribución de alturas de casi todo lo que crece: gatos, árboles de arce árboles, o zanahorias, por ejemplo.

Otra versión del teorema del límite central es útil cuando se trata de determinar qué proporción p por ciento de toda la población posee cierta propiedad (como "Tiene sangre tipo AB" o "Votará republicano el próximo noviembre"). Como es imposible examinar cada individuo en el mundo, o encuestar a cada individuo en la nación, uno puede examinar una muestra de individuos y calcule el porcentaje en esta muestra con la propiedad deseada. El teorema del límite central también afirma:

> Si se toman muchas muestras diferentes de N individuos examinado, entonces la distribución de los porcentajes de las edades de aquellas muestras que poseen una particular La propiedad sigue muy de cerca una distribución normal (y cuanto mayor sea el valor de N, mejor será la aproximación a una curva normal).
> Esta distribución tiene media p, el verdadero porcentaje de la población con esta propiedad, y
> Desviación Estándar $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$.

Ambas versiones del teorema del límite central permiten a los estadísticos hacer inferencias y predicciones basadas en datos estadísticos.

Véase también GEORGE PÓLYA; ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

Teorema de Ceva Sean P, Q y R , respectivamente, puntos de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC. (Se permite extender uno o más lados de la triángulo.) Entonces las líneas que conectan P con A, Q con B y R a C son CONCURRENTES si, y solo si:

$$\frac{PA}{\text{ordenador personal}} \cdot \frac{CQ}{\text{control de calidad}} = 1 \cdot \frac{\text{Arkansas}}{RB}$$

Aquí BP, por ejemplo, representa la distancia entre puntos B y P, y la relación se considera positiva $\frac{PA}{\text{ordenador personal}}$ si la dirección de B a P es la misma que la dirección de P a C, y negativa si están en direcciones opuestas direcciones.

Este resultado se debe al matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734). Es equivalente a la afirmación de que la operación de encontrar el CENTRO DE GRAVEDAD del punto masas es ASOCIATIVA. Por ejemplo, dadas tres masas en las ubicaciones A, B y C en un plano, uno podría ubicar el centro de masa de todo el sistema calculando primero el centro de masa de solo dos puntos y luego calcular el centro de masa de ese resultado con el tercer punto. Ceva probó que el mismo resultado final no se produce importa qué dos puntos se eligen inicialmente.

El teorema de Ceva se puede demostrar matemáticamente por haciendo uso repetido del TEOREMA DE MENELAO .

regla de la cadena (función de una regla de función) Si y = f(u) es una función de una cantidad u, que a su vez es una función de otra cantidad x, u = g(x) digamos, entonces la misma y puede ser pensado como una función de x como una COMPOSICIÓN de funciones: y = f(g(x)). La regla de la cadena establece que la tasa de cambio de y con respecto a la cantidad x viene dada por la formula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

Esto también se puede escribir: $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$. Para ejemplo, derivar $y = (x^2 + 2)^{100}$, podemos escribir $y = u^{100}$, donde $u = x^2 + 2$ y así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(u^{100}) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+2) = 100u^{99} \cdot 2x$$

$$= 200x(x^2+1)^{99}$$

La regla de la cadena se puede probar haciendo uso de la definición formal de derivada como LÍMITE :

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x))\,g'(x)$$

Machine Translated by Google

Intuitivamente, el concepto es fácil de comprender si pensamos en las derivadas como tasas de cambio. Por ejemplo, si y cambia a veces tan rápido como u, y u cambia b veces más rápido que x, entonces esperamos que y cambie ab veces más rápido que x.

La regla de la cadena se extiende a funciones de más de una variable. Por ejemplo, si z = f(x, y) es una función de dos variables con cada una de x y y una función de t, entonces se puede demostrar que la derivada total de z con respecto a t está dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Véase también DERIVADA PARCIAL.

cambio de variable Ver INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN.

caos Una situación en la que un SISTEMA DINÁMICO puede parecer aleatorio e impredecible se llama caos.
Más precisamente, los matemáticos definen un sistema dinámico como caótico si el conjunto de todos los puntos de equilibrio del sistema forman un FRACTAL.

El término caos fue introducido por el matemático estadounidense James Yorke y el matemático chino Tien-Yien Li en su artículo seminal de 1975 sobre iteraciones de funciones en la recta numérica real.

polinomio característico Ver CAYLEY-HAMILTON TEOREMA.

Chebyshev, Pafnuty Lvovich (Tchebyshev) (1821– 1894) Ruso Teoría de números, Análisis, Estadística Nacido el 16 de mayo de 1821 en Okatova, Rusia, Pafnuty Chebyshev es recordado por sus importantes contribuciones a la TEORÍA DE NÚMEROS, EL ANÁLISIS, LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD , y el desarrollo de estadísticas inferenciales. En 1850 probó una conjetura planteada por el matemático francés Joseph-Louis François Bertrand (1822–1900) que afirmaba que para cualquier valor n > 3, hay al menos un PRIMO entre n y 2n – 2. Chebyshev también se destaca por fundar un influyente escuela de matemáticas en San Petersburgo.

Chebyshev ingresó a la Universidad de Moscú en 1837 y se graduó cuatro años después con una licenciatura en matemáticas. Impulsado por un descarado deseo de lograr el reconocimiento internacional, Cheby Shev se sumergió en el trabajo matemático. Obtuvo una maestría en 1846 en la misma institución, mientras publicaba resultados sobre la teoría y los métodos de integración, la convergencia de las SERIES DE TAYLOR y el desarrollo del análisis. Chebyshev también examinó los principios de la teoría de la probabilidad y desarrolló nuevos conocimientos que prueban los principales resultados de la teoría de una manera elemental pero rigurosa. En particular, Chebyshev pudo ofrecer una prueba elegante de la LEY débil de SIMÉON-DENIS POISSON DE GRANDES NÚMEROS.

En 1849 Chebyshev escribió una tesis sobre la teoría de la ARITMÉTICA MODULAR, lo que le valió un doctorado en matemáticas de la Universidad de Moscú, así como un premio de la Academia Rusa de Ciencias en reconocimiento a su originalidad y su importancia. En su estudio de los números primos, Chebyshev no solo estableció la conjetura de Bertrand, sino que también dio pasos significativos para probar el famoso NÚMERO PRIMO.

TEOREMA.

Chebyshev fue elegido profesor titular de matemáticas en la Universidad de San Petersburgo en 1850 y, para entonces, ya había alcanzado fama internacional. Viajó extensamente por toda Europa y colaboró con muchos académicos en proyectos de investigación sobre temas tan diversos como la mecánica, la física, los inventos mecánicos y la construcción de máquinas calculadoras, así como su trabajo continuo en matemáticas.

Recibió muchos honores a lo largo de su vida, incluida la membresía en la Academia de Ciencias de Berlín en 1871, la Academia de Bolonia en 1873, la SOCIEDAD REAL de Londres en 1877, la Real Academia Italiana en 1880 y la Academia Sueca de Ciencias en 1880. 1893. Todas las universidades rusas lo eligieron para un puesto de profesor honorario, y Chebyshev incluso fue galardonado como miembro honorario de la Academia de Artillería de San Petersburgo, así como de la Légion d'Honneur francesa. Murió el 8 de diciembre de 1894 en St. Petersburgo, Rusia.

Una serie de resultados y conceptos se nombran hoy en honor a Chebyshev. Por ejemplo, en el análisis, los “polinomios de Chebyshev” proporcionan una base para el ESPACIO VECTORIAL de las FUNCIONES CONTINUAS y tienen aplicaciones importantes en la teoría de la aproximación. En estadística y teoría de la probabilidad, el TEOREMA DE CHEBYSHEV proporciona una “ley débil de los grandes números”.

Ver también ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

Machine Translated by Google

Teorema de Chebyshev (desigualdad de Chebyshev) Este resultado, debido al matemático ruso PAFNUTY LVOVICH CHEBYSHEV (1821–94), puede considerarse como una extensión de la regla 68-95-99.7 para la DISTRIBUCIÓN NORMAL a una aplicable a todas las distribuciones. Establece que si una DISTRIBUCIÓN arbitraria tiene media μ y desviación estándar σ, entonces la probabilidad de que una medida tomada al azar tenga un valor que difiera de μ en más de k desviaciones estándar es como máximo 1/k2 . Esto muestra que si el valor σ es pequeño, es probable que todos los valores de DATOS tomados en un experimento estén agrupados estrechamente alrededor del valor μ.

Los fabricantes hacen uso de este resultado. Por ejemplo, suponga que una empresa produce tuberías con un diámetro medio de 9,57 mm, con una desviación estándar de 0,02 mm. Si los estándares del fabricante no toleran una tubería a más de cuatro desviaciones estándar de la media (0,08 mm), entonces el teorema de Chebyshev implica que, en promedio, alrededor de 1/16, es decir, el 6,25 por ciento, de las tuberías producidas por día serán inutilizables.

La LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS sigue como una consecuencia consecuencia del teorema de Chebyshev.

Ver también ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

pollo Ver EL DILEMA DEL PRISIONERO .

Ch'in Chiu-shao (Qin Jiushao) (1202–1261) China Álgebra Nacido en Szechwan (ahora Sichuan), China, el matemático y calendario Ch'in Chiu-shao es recordado por su texto de 1243 Shushu jiuzhang (Tratado matemático en nueve secciones), que contiene, entre muchos métodos, una técnica efectiva de multiplicación iterada para evaluar ecuaciones polinómicas de grado arbitrario. (En notación moderna, esta técnica es equivalente a reemplazar un polinomio como 4x 3 – 50x + 9, por ejemplo, con su forma equivalente como una serie de paréntesis anidados: ((4x + 7)x – 50)x + 9. En este ejemplo, solo se necesitan tres multiplicaciones para evaluar la forma anidada del polinomio en comparación con las seis implícitas en la primera forma de la expresión. En la práctica, esta técnica ahorra una cantidad considerable de tiempo). 500 años más tarde en Occidente de forma independiente por el matemático italiano Paolo Ruffini (1765–1822) y el erudito inglés William George Horner (1786–1837).

2 + 7x

Ch'in Chiu-shao también amplió este método para encontrar soluciones a ecuaciones polinómicas.

Su texto también se destaca por su desarrollo de la ARITMÉTICA MODU LAR. En particular, Ch'in Chiu-shao demostró el siguiente resultado famoso, hoy conocido como el teorema del resto chino:

> Si un conjunto de enteros mi son COPRIME por pares , entonces cualquier conjunto de ecuaciones de la forma x ≡ ai (mod mi) tiene una solución única módulo el producto de todos los mi .

Por ejemplo, este resultado establece que esencialmente solo hay un entero x que deja residuos de 1, 11 y 6, respectivamente, cuando se divide por 5, 13 y 16 (es decir, 726, más o menos cualquier múltiplo de 5 × 13 × 16 = 1040).

Después de servir en el ejército durante 14 años, Ch'in Chiu shao ingresó al servicio del gobierno en 1233 para convertirse finalmente en gobernador provincial de Qiongzhou. Su pieza de 1243 Shushu jiuzhang fue su único trabajo matemático.

Matemáticas chinas Desafortunadamente, se sabe muy poco sobre las primeras matemáticas chinas. Antes de la invención del papel alrededor del año 1000 EC, los chinos escribían sobre corteza o bambú, materiales que eran mucho más perecederos que las tablillas de arcilla o el papiro. Para empeorar las cosas, justo después de la unificación imperial de China alrededor del año 215 a. C., el emperador Shi Huang-ti de la dinastía Ch'ih ordenó que se quemaran todos los libros de períodos anteriores, junto con el entierro vivo de cualquier erudito que protestara. Solo estaban exentos los documentos considerados “útiles”, como registros oficiales y textos sobre medicina, adivinación y agricultura. En consecuencia, muy poco sobrevivió más allá de este período, aunque algunos estudiosos intentaron reconstruir materiales perdidos de memoria.

El arte de las matemáticas fue definido por los antiguos eruditos chinos como suan chu, el arte del cálculo.
A menudo, las matemáticas estudiadas eran de naturaleza extremadamente práctica y cubrían una amplia gama de aplicaciones, incluida la ingeniería, el control de inundaciones y la arquitectura, así como la astronomía y la adivinación. Los practicantes del arte eran científicos capaces. Los registros muestran, por ejemplo, que los chinos habían inventado los sismógrafos para medir los terremotos en el año 1000 d. C., y usaron brújulas hechas con agujas magnéticas un siglo después.

La evidencia de actividad matemática en China se remonta al siglo XIV a. C. Los caparazones de tortuga y los huesos de ganado inscritos con marcas de conteo indican que el

Machine Translated by Google

La gente de la antigua dinastía Shang había desarrollado una Sistema de notación de base 10 que utiliza valor posicional. Este establece que los chinos fueron una de las primeras civilizaciones en inventar un sistema de REPRESENTACIÓN DECIMAL esencialmente equivalente a la que usamos hoy. Como otro civilizaciones de la época, sin embargo, los chinos no habían desarrolló una notación para el cero y escribió, por ejemplo, los números 43 y 403 de la misma manera, es decir, como "|||| |||," confiando en el contexto para distinguir los dos.

Las primeras matemáticas chinas más importantes el texto es Jiuzhang suanshu (Nueve capítulos sobre el arte matemático) que data del período de la dinastía Han (206 a. C. a 220 d. C.). El autor de la obra es desconocido, pero se cree que es un resumen de todos conocimientos matemáticos poseídos en China hasta el siglo III EC, y bien puede haber sido el resultado de varios autores contribuyendo al mismo trabajo. El El texto es una presentación de 246 problemas repletos de soluciones y recetas generales para resolver problemas de tipo parecido. El trabajo es generalmente muy práctico en naturaleza, con tres capítulos dedicados a temas de tierra agrimensura e ingeniería, y tres a problemas en fiscalidad y administración burocrática. pero el texto describe técnicas matemáticas sofisticadas de una naturaleza abstracta, y ofrece muchos problemas de una sabor recreativo. El documento también claramente demuestra que los eruditos de la época también estaban interesados en el estudio de las matemáticas por sí mismas.

Jiuzhang suanshu claramente no está escrito para principiantes en el arte de las matemáticas: muchos conceptos básicos de aritmética Los procesos se suponen conocidos. Otro texto de la mismo período, Chou pei suan ching (Aritmética clásica de el gnomon y los caminos circulares del cielo), describe principios matemáticos básicos como trabajar con fracciones (y establecer denominadores comunes), métodos para extraer raíces cuadradas, junto con principios básicos y elementos de la geometría, y sorprendentemente, lo que parece ser una prueba de lo que hoy llamamos TEOREMA DE PITÁGORAS . Por lo menos, los chinos de este período conocía el teorema de los triángulos rectángulos con lados de longitud 3, 4 y 5 como el diagrama de hsuan thu: cuatro copias de un triángulo rectángulo 3–4–5 dispuestas en un cuadrado—aparece en el texto. Aunque este diagrama en en sí misma no constituye una "prueba" del orema de Pitágoras, la idea contenida en el diagrama puede, no obstante, ser ampliada fácilmente para establecer una idea general. prueba del resultado. Por esta razón, se cree que los chinos habían establecido independientemente el mismo famoso resultado. Esto ciertamente se verifica en el texto de Jiuzhang suanshu, como muchos problemas planteados en la pieza confíe en que el lector haga uso del teorema.

Muchos eruditos del siglo II al XV escribieron comentarios sobre la obra Jiuzhang suan shu y ampliaron muchos de los resultados presentados allí.

Quizá los más famosos de ellos fueron los comentarios de Liu Hui quien, en 263 d.C., ofreció por escrito pruebas de las fórmulas para los volúmenes de un cuadrado pirámide y un tetraedro presentados en Jiuzhang suan shu, así como también desarrolló un valor más preciso para π que la presentada en el texto. Liu Hui más tarde pasó a escribió Haidao suanjing (Manual matemático de la isla del mar), en el que resolvió problemas relacionados con la topografía y el mapeo de objetos inaccesibles utilizando un refinado método de las "dobles diferencias" que surgen de pares de triángulos semejantes. Esto amplió el trabajo de proporciones presentado en Jiuzhang suanshu. Liu Hui también afirmó que el material de Jiuzhang suanshu data hasta 1100 a. C., pero añadió que el texto real era no se escribió hasta el año 100 a. C. Los historiadores actuales difieren acerca de cuán en serio tomar su reclamo.

El texto Jiuzhang suanshu también contiene recetas para extracción de raíces cuadradas y cúbicas, y métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales usando técnicas muy similar a los métodos de ÁLGEBRA LINEAL que usamos hoy. El comentario de Liu Hui justifica muchas de las reglas presentadas. Aunque no son pruebas formales basadas en axiomas, es justo describir las justificaciones de Liu Hui como pruebas informales válidas. Parece que los matemáticos para los siglos que siguieron quedaron satisfechos con simples argumentos y justificaciones informales, y sin argumentos formales. se consideró necesario el rigor.

Los eruditos chinos también hicieron contribuciones significativas al estudio de COMBINATÓRICA, TEORÍA DE NÚMEROS, y ÁLGEBRA. El matemático CH'IN CHIU-SHAO (ca. 1200 CE) desarrolló métodos inventivos para evaluar expresiones polinómicas y resolución de ecuaciones polinómicas. También estableció el famoso "teorema chino del resto" de la teoría de números. El trabajo de LI YE de el mismo período también establece un álgebra de polinomios. Aunque los matemáticos chinos de la época estaban familiarizados con los números negativos, ignoraron las soluciones negativas de las ecuaciones, considerándolas absurdas.

El famoso texto Su-yuan yu-chien (El precioso espejo de los cuatro elementos) escrito por el erudito CHU SHIH-CHIEH (ca. 1300 CE) contiene un diagrama de lo que ha llegado a ser conocido en Occidente como el TRIÁNGULO DE PASCAL .

Machine Translated by Google

Este texto fue escrito 300 años antes del nacimiento del matemático francés BLAISE PASCAL . (Algunos historiadores creen que este trabajo de hecho data de 200 años antes de la escritos del matemático Jia Xian.) Los eruditos de este tiempo usó rutinariamente el triángulo para aproximar las raíces enésimas de números usando el equivalente del TEOREMA DEL BINOMIO de hoy. Preferían sus métodos procesales de extraer raíces cuadradas para resolver ecuaciones CUADRÁTICAS , en lugar de hacer uso de la fórmula cuadrática general.

Poco después de JOHN NAPIER (1550–1617) de Occidente publicó una cuenta de su nueva ayuda de cálculo, la NAPIER'S BONES, los chinos desarrollaron un análogo sistema de varillas de bambú graduadas que podría usarse para calcular rápidamente multiplicaciones y divisiones largas. Él no se sabe si los chinos inventaron este sistema de forma independiente, o si la idea fue tal vez llevada a ellos por misioneros jesuitas del siglo XVII. Junto con el ABACUS desarrollado en China 500 años antes, el las varillas de cálculo permitieron cálculos aritméticos mejorados, especialmente útiles para los cálculos precisos necesarios en astronomía.

El erudito temprano ZU CHONGZHI (ca. 500 EC) calculó el volumen de una esfera por un principio idéntico al la de BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647).

Ver también CUADRADO MÁGICO.

prueba de chi-cuadrado La prueba de chi-cuadrado es un prueba (ver ESTADÍSTICAS: INFERENCIAL) utilizada para determinar si dos características de una población son o no independientes o asociados de alguna manera. Por ejemplo, imagine un estudio social que busca una posible correlación entre el tipo de leche que la gente prefiere en su cereal y la cantidad de piercings en el cuerpo que poseen. Se encuestó a quinientas personas y los resultados obtenidos se muestran en una TABLA DE CONTINGENCIA.

	No piercings	Uno o dos piercings	Más de dos piercings	
Leche sin grasa	47	33	22	102
2% Leche	40	80	44	164
Leche entera	113	37	84	234
	200	150	150	500

Obsérvese, en este estudio, que 102/500 = 0,204 de la los participantes son consumidores de leche descremada. Si elección de leche no guarda ninguna relación con los piercings en el cuerpo, espere entonces que aproximadamente 0.204 de las 200 personas sin perforaciones usen leche descremada. Observamos un valor de 47 (el frecuencia observada) pero espera un valor de 0.204 × 200 = 40.8 (la frecuencia esperada). Del mismo modo, lo esperado el valor para usuarios de leche descremada con más de dos perforaciones es 0,204 × 150 = 30,6 y para usuarios de leche entera con uno o dos piercings: (234/500) × 150 = 70,2. En de esta manera calculamos todas las frecuencias esperadas, aquí se muestra entre paréntesis:

	No piercings	Uno o dos piercings	Más de dos piercings	
Leche sin grasa	47 (40,8)	33 (30,6)	22 (30,6)	102
2% Leche	40 (65,6)	80 (49,2)	44 (49,2)	164
Leche Entera	113 (52.9)	37 (70,2)	84 (70,2)	234
	200	150	150	500

Denotando las frecuencias observadas con la letra o y las frecuencias esperadas por e, calculamos el estadístico chi cuadrado, χ^2, como:

$$x^2 = \sum \frac{(o-e)^2}{e}$$

donde la suma es sobre todas las entradas en la tabla. (En el 1800 era costumbre convertir todas las diferencias a un valor positivo mediante el uso de la función de elevar al cuadrado en lugar que la función VALOR ABSOLUTO . De esta manera, las técnicas del cálculo podría aplicarse fácilmente; es sencillo diferenciar la función cuadrada, por ejemplo).

Un valor grande para χ^2 indica que hay una considerable discrepancia entre los valores observados y esperados, lo que sugiere que las dos características de la población no son independientes, es decir, que existe una CORRELACIÓN. un pequeño x^2 valor sugiere que no hay correlación.

Nuestro ejemplo particular arroja el valor:

$$x^2 = \frac{(47-40.8)^2}{40.8} + \frac{(33-30.6)}{30.6} + \frac{(22-30.6)}{30.6}$$
$$+ \frac{(40-65.6)^2}{65.6} + \frac{(80-49.2)}{49.2} + \frac{(44-49.2)}{49.2}$$
$$+ \frac{(113-52.9)^2}{52.9} + \frac{(37-70.2)}{70.2} + \frac{(84-70.2)}{70.2}$$
$$= 120.1$$

Machine Translated by Google

La distribución chi-cuadrado es una DISTRIBUCIÓN que representa los valores que uno esperaría χ^2 adoptar dado la suposición de que las dos características que se estudian son independiente. Hay una distribución para cada tabla de dimensiones dadas. Los textos estadísticos suelen presentar listas de valores de esta estadística. Resulta que la χ^2 valor en este ejemplo es extraordinariamente alto, lo que sugiere que este estudio indica una fuerte correlación entre la leche elección y piercings en el cuerpo. La prueba de chi-cuadrado hace no da ninguna información sobre la naturaleza de la correlación detectada, sólo que parece existir. Más el examen de los datos por métodos alternativos puede proporcionar detalles de la asociación.

Véase también KARL PEARSON.

Cuerda Si A y B son dos puntos en un continuo curva, entonces un segmento de línea recta que conecta A con B es llama cuerda a la curva. Esto no debe confundirse con el ARCO de la curva que une A con B.

Los TEOREMAS DEL CÍRCULO muestran que cualquier cuerda de un círculo es bisecado por un radio que es perpendicular a él. LA PARADOJA DE BERTRAND muestra que el acto de seleccionar cuerdas de un círculo al azar puede conducir a dificultades filosóficas.

Véase también CÍRCULO.

Chu Shih-Chieh (Zhu Shijie) (ca. 1270–1330) Álgebra china A menudo considerado como uno de los mejores matemáticos de China, Chu Shih-Chieh es recordado por su influyente texto de 1303 Su-yuan yu-chien (Preciosa espejo de los cuatro elementos). Contiene un diagrama de EL TRIÁNGULO DE PASCAL , como se le conoce en el Oeste, representando una de las primeras apariciones de la figura en la historia de las matemáticas. En el trabajo, Chu Shih-Chieh usa el triángulo para describir un general método para extraer raíces a ecuaciones. También presenta un sistema de notación para polinomios en cuatro incógnitas, a las que llama los cuatro elementos, a saber, lo celestial, lo terrenal, lo material y lo humano— y proporciona técnicas efectivas para manipular ellos para resolver problemas.

Su sección sobre DIFERENCIAS FINITAS da fórmulas para las sumas de los primeros n términos de cada diagonal de Triángulo de Pascal (por ejemplo, que $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, y que $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$ es igual $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$), y también proporciona información general Técnicas para sumar series arbitrarias. También proporciona métodos para resolver ecuaciones a través de un proceso de aproximaciones sucesivas.

Muchos historiadores afirman que el impresionante trabajo de Chu Shih-Chieh representa la cúspide de las antiguas matemáticas chinas, señalando que se hizo relativamente poco progreso para mucho tiempo después de la publicación de este artículo. Cuatro años antes del lanzamiento de Su-yuan yu-chien, Chu Shih-Chieh escribió un texto matemático destinado a ayudar a los principiantes en el tema. Se sabe muy poco de su vida personal.

círculo El conjunto de todos los puntos en un plano a una distancia fija r desde un punto dado O forma una curva cerrada en el plano llamado círculo. La longitud r se llama radio de el círculo, y el punto O su centro. Si el punto central tiene COORDENADAS CARTESIANAS 0 = (a,b), entonces la FÓRMULA DE LA DISTANCIA muestra que cualquier punto (x,y) en el círculo satisface la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Si el punto (x,y) en este círculo forma un ángulo θ con una línea horizontal a través del centro del círculo, entonces tenemos:

$$x = a + r\cos\theta$$

$$y = b + r\sin\theta$$

Estas son las ECUACIONES PARAMÉTRICAS de un círculo de radio r y centro (a,b).

El DIÁMETRO de un círculo es la distancia máxima entre dos puntos de la circunferencia. es igual al doble radio del círculo. Un círculo es una figura de CONSTANTE ANCHO.

La longitud de la curva cerrada para formar un círculo es llama la circunferencia del círculo. Académicos desde la época de la antigüedad han observado que la proporción de la circunferencia de un circulo a su diametro es lo mismo para todos los círculos. Este valor constante se llama PI, denotado π. Tenemos:

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

Que todos los círculos den el mismo valor para π no es inmediatamente obvio. Esta es una propiedad de EUCLIDEAN GEOMETRÍA del plano, y un cuidadoso estudio de ESCALA explica por qué debe ser cierto. (El valor de π varía

Machine Translated by Google

de 2 a 3.141592… para diferentes círculos dibujados en la superficie de una ESFERA, por ejemplo, ya que el diámetro de un círculo debe medirse como la longitud de una línea curva en la superficie.)

Si C es la circunferencia de un círculo plano y D = 2r es su diámetro, entonces, por definición, π = C/D.
Esto produce una fórmula para la circunferencia de un círculo:

$$C = 2\pi r$$

Un estudio de AREA también muestra que el área A de un círculo está dada por:

$$A = \pi r^2$$

No es inmediato que el valor π también deba aparecer en esta fórmula.

Un estudio de EQUIDISTANCIA muestra que siempre es posible dibujar un círculo a través de tres puntos dados cualesquiera en un plano (siempre y cuando los puntos no estén en línea recta), o, de manera equivalente, siempre es posible dibujar un CIRCUNCIRCULO para cualquier TRIÁNGULO dado. APOLONIO DE PERGA (ca. 262–190 a. C.) desarrolló métodos generales para construir un círculo TANGENTE a tres objetos cualquiera en el plano, ya sean puntos, líneas u otros círculos.

Cualquier línea que conecta dos puntos en un círculo se llama ACORDE del círculo. Divide el círculo en dos regiones, cada una llamada segmento. Una cuerda de longitud máxima pasa por el centro de un círculo y también se llama diámetro del círculo. (Por lo tanto, la palabra diámetro se usa indistintamente para dicho segmento de línea y para el valor numérico de la longitud de este segmento de línea).

Un radio de un círculo es cualquier segmento de línea que conecta el centro del círculo con un punto en el círculo. Dos radios diferentes determinan una región en forma de cuña dentro del círculo llamada sector. Si el ángulo entre los dos radios es θ, dado en MEDIDA EN RADIANES, entonces el área de este el segmento es $\frac{\theta}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta$. La longitud del arco de el círculo entre estos dos radios es $\frac{\theta}{2\pi} = 2\pi r \theta$.

Dos puntos cualesquiera P = (a1 ,b1) y Q = (a2 ,b2) en el plano determinan un círculo con el segmento de línea que conecta P con Q como diámetro. La ecuación de este círculo está dada por:

$$(x - a1)(x - a2) + (y - b1)(y - b2) = 0$$

El TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN establece que un círculo divide al plano en dos regiones: una interior y una afuera. (Esta afirmación aparentemente obvia no es cierta para los círculos dibujados en un TORUS, por ejemplo.) Dos círculos que se cruzan dividen el plano en cuatro regiones; se pueden disponer tres círculos que se intersectan para dividir el plano en ocho regiones; y cuatro círculos que se cortan entre sí pueden dividir el plano en 14 regiones. En general, el número máximo de regiones en las que n círculos que se cortan dividen el plano viene dado por la fórmula: $n^2 - n + 2$.

La región formada en la intersección de dos inter círculos que se secan del mismo radio se llama lente.

Hay una serie de TEOREMAS CIRCULARES que describen las propiedades geométricas de los círculos. Un círculo es una SECCIÓN CÓNICA. Puede considerarse como una ELIPSE en la que coinciden los dos focos.

Si se permite el uso de NÚMEROS COMPLEJOS, se puede decir que dos círculos cualesquiera del plano se intersecan. Por ejemplo, los dos círculos cada uno de radio uno con centro en los puntos (0,0) y (4,0), respectivamente, dados por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ se cortan en los puntos $(2, i\sqrt{3})$ y $(2, -i\sqrt{3})$.

El análogo tridimensional de un círculo es una ESFERA: el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de un punto fijo O en un espacio tridimensional. En una dimensión, el análogo de un círculo es cualquier par de puntos en una recta numérica. (Dos puntos en una recta numérica son equidistantes de su PUNTO MEDIO.)

El teorema del punto medio afirma que todos los puntos medios de los segmentos de línea que conectan un punto fijo P en el plano con puntos en un círculo C forman un círculo de la mitad del radio de C.

Véase también CÍRCULO DE APOLONIO ; FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA ; POLÍGONO CÍCLICO; SECUENCIA DE FAREY; CÍRCULO DE NUEVE PUNTOS; CIRCULO UNITARIO; DIAGRAMA DE VENN.

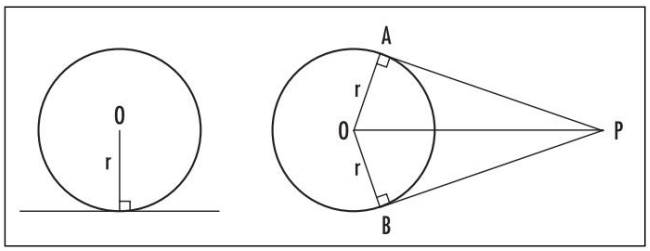
teoremas del círculo UN CÍRCULO se define como el conjunto de puntos en un plano que se encuentran a una distancia fija r, llamada radio, de algún punto fijo O, llamado centro. Esta simple definición tiene una serie de importantes características geométricas. consecuencias:

1. Teoremas de la tangente

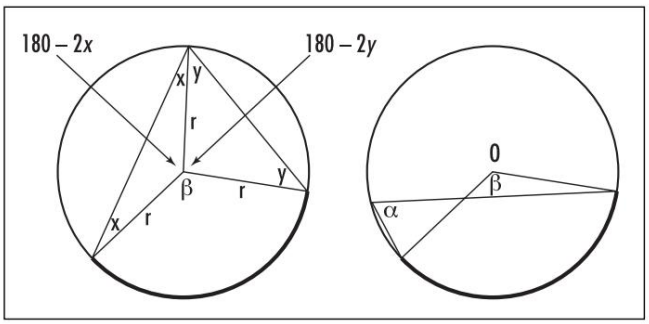
   El punto de contacto de una recta TANGENTE con una circunferencia es el punto de esa recta más cercano al centro O. Como consecuencia del TEOREMA DE PITÁGORAS , la recta que une el punto de contacto con O forma un ángulo de 90° a la recta tangente. Esto demuestra:

   La tangente a un círculo es PERPENDICULAR al radio en el punto de contacto.

Machine Translated by Google



Teoremas de la tangente



Demostración del teorema del ángulo central/ángulo periférico

Esto se ilustra en el diagrama de arriba, a la izquierda.

El diagrama de arriba a la derecha muestra que dos tangentes a través de un punto común P fuera del círculo producen segmentos de línea PA y PB de igual longitud. Esto se sigue del hecho de que los dos triángulos producidos son ambos triángulos rectángulos de la misma altura con una hipotenusa compartida y, por lo tanto, son congruentes. De este modo:

> Si PA y PB son tangentes a un círculo en los puntos A y B, respectivamente, entonces PA y PB tienen la misma longitud.

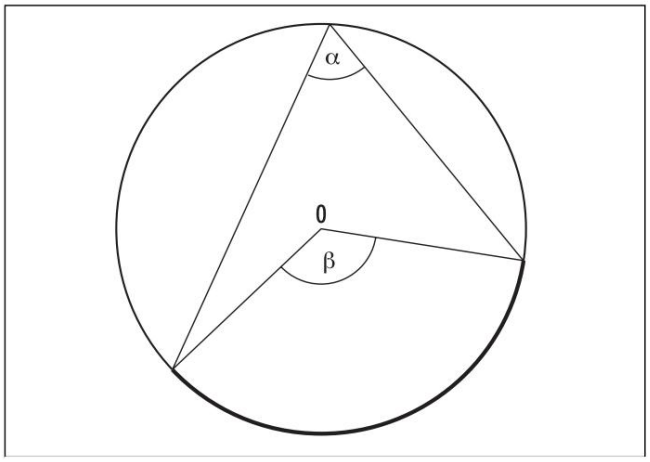
2. Teoremas de ángulos inscritos En el siguiente diagrama, a la izquierda, los ángulos α (el ángulo periférico) y β (el ángulo central) están subtendidos por el mismo ARC. Así tenemos:

> Para ángulos subtendidos por el mismo arco, el ángulo central es siempre el doble del ángulo periférico.

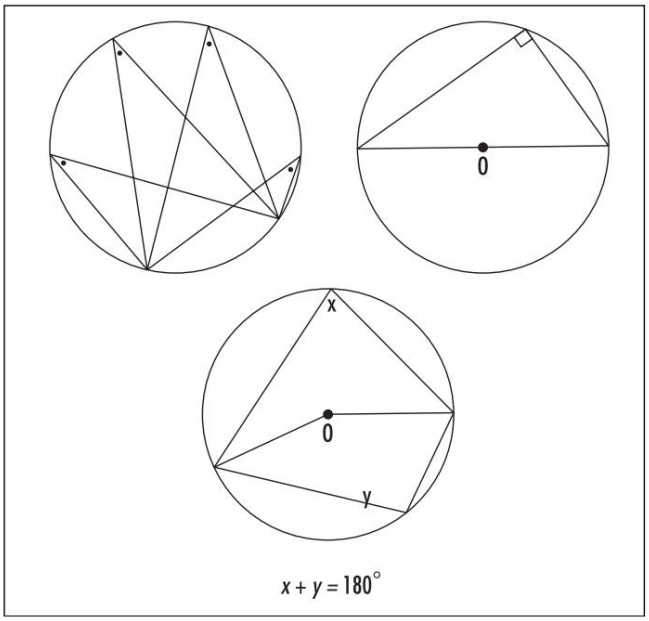
Esto se demuestra trazando un radio desde el centro O hasta el punto en el que se encuentra el ángulo α para crear dos triángulos isósceles. Siguiendo el lado izquierdo del siguiente diagrama, y observando que los ángulos interiores de un triángulo suman 180°, tenemos x + y = α y (180 – 2x) + (180 – 2y) + β = 360, de donde se sigue que β = 2α. Una modificación de este argumento muestra que el resultado sigue siendo cierto incluso si el ángulo periférico está ubicado como se muestra en el lado derecho del diagrama, o si el arco en consideración es más de la mitad del PERÍMETRO del círculo .

Los siguientes tres resultados siguen (ver diagrama abajo, a la derecha):

i. Todos los ángulos inscritos en un círculo subtendido por el mismo arco son iguales,
ii. Todos los ángulos inscritos en un diámetro son rectos. anglos. (Esto se conoce como el teorema de Tales).

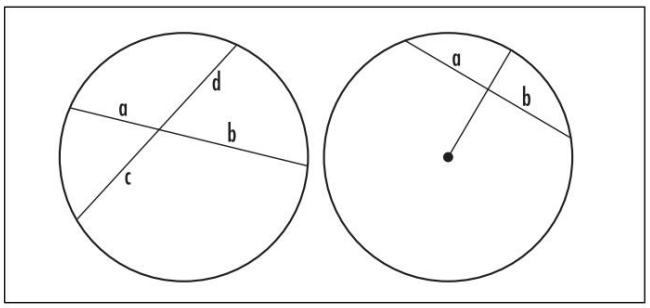


Ángulos centrales y periféricos



Consecuencias del teorema del ángulo central/ángulo periférico

Machine Translated by Google



Teoremas de cuerdas

iii. Ángulos opuestos en un CUADRILÁTERO cíclico suma a 180°.

3. Teorema de las dos cuerdas

En el diagrama de arriba, tenemos: ab = cd.

Esto se demuestra conectando los extremos de las cuerdas para crear dos triángulos. Los teoremas de los ángulos inscritos muestran que estos dos triángulos son similar por la regla AAA. En consecuencia, a/c = d/b.

4. Teorema de la cuerda y el radio

En el lado derecho del diagrama, vemos que:

El radio de un círculo biseca una cuerda (que es decir, tenemos a = b) si, y sólo si, el radio es perpendicular a la cuerda.

Esto se demuestra dibujando dos radios a los puntos finales de la cuerda para producir un gran triángulo isósceles. Si el radio central está a 90° de la cuerda, esto produce dos triángulos rectángulos congruentes, entonces a = b. Por el contrario, si se nos dice a = b, entonces la LEY DE LOS COSENOS, aplicado a cada ángulo base del triángulo isósceles, muestra que el radio central intercepta la cuerda en un ángulo de 90°.

Véase también AAA/AAS/ASA/SAS/SSS; FIGURAS CONGRUENTES; POLÍGONO CÍCLICO; TEOREMA DE PTOLOMEO ; SECANTE; SIMI FIGURAS LARGOS.

circuncírculo Un círculo que pasa por los tres vértices del triángulo se llama circuncírculo para el triángulo. Que tres puntos distintos en el plano determinan un círculo único fue demostrado por primera vez por EUCLID en su tratado, LOS ELEMENTOS, Libro III. Euclides también presentó un método general para construir realmente el circuncírculo de un triángulo. (Este resultado fue luego generalizado por APOLLONIUS OF PERGA, quien mostró cómo construir un círculo tangente a cualquiera de los tres puntos, rectas o círculos del plano).

El centro de la circuncircunferencia de un triangulo se llama su circuncentro. Claramente, es un punto EQUIDISTANTE de los tres vértices, y así debe estar en cada línea de puntos equidistantes de dos vértices cualesquiera. El centro circun de un triángulo se puede hallar dibujando el bisectrices perpendiculares de los lados del triángulo y localizando donde estas tres líneas se encuentran.

Por la LEY DE LOS SENOS, el radio de la circunferencia circunscrita de un triángulo está dada por A $r = \frac{a}{2\text{sen}(\ )}$, donde esta un la longitud de un lado del triángulo y A es el ángulo opuesto ese lado elegido. Si los dos lados restantes del triángulo tienen longitudes b y c, entonces el área del triángulo 1 puede ser escrito: . por HERON'S $\frac{}{2}$ bc Un pecado( ) FÓRMULA, esta área también se puede calcular a través de abc área $= \sqrt{\ (\ ss\ asbsc\ )(\ )(\ )}$ donde $s = \frac{+\ +}{2}$. equiparar estas dos ecuaciones, resolver para sen(A) y sustituir en la fórmula anterior produce una fórmula para el radio de la circunferencia circunscrita de un triángulo únicamente en términos de las longitudes de sus lados:

$$r = \frac{a\,B\,C}{4\sqrt{\ (\ )(\ )(\ )}}$$

La circuncircunferencia de un POLÍGONO regular es aquella circunferencia que pasa por todos los vértices del polígono. El radio de la circunferencia circunscrita de un cuadrado, por ejemplo, de la longitud del lado x es $r = x/\sqrt{2}$.

Véase también CONCURRENTE; RADIO LARGO; TRIÁNGULO.

circunscribir/inscribir Si A y B son dos formas geométricas figuras, con A dentro de B, dibujadas de manera que las dos figuras tienen puntos en común pero no tienen aristas que cruz, entonces decimos que la figura A está inscrita en B, o bien, alternativamente, esa figura B está circunscrita a A. Por ejemplo, un polígono dentro de un círculo con todas sus vértices en ese círculo se dice que está inscrito en el círculo, y un círculo dentro de un polígono que toca cada lado de el polígono está inscrito en el polígono. un circulo que pasa por los tres vértices de un triángulo circunscribe ese triángulo, y el cuadrado más pequeño que rodea un círculo circunscribe ese círculo.

Véase también CIRCUNCIRCULO; INCLUYE.

Reloj matemático Ver ARITMÉTICA MODULAR.

Machine Translated by Google

propiedad de clausura Se dice que UNA OPERACIÓN BINARIA en un conjunto S es cerrada si la combinación de dos elementos en ese conjunto produce otro miembro de ese conjunto. Por ejemplo, el conjunto de números enteros positivos se cierra bajo la suma, ya que la suma de dos enteros positivos cualesquiera es en sí misma un entero positivo. Este conjunto también se cierra con la multiplicación (el producto de dos números enteros positivos es un entero positivo), pero no con la resta: si n y m son números enteros positivos, entonces n – m podría ser cero o negativo y, por lo tanto, ya no estaría en el conjunto de números enteros positivos. (Por ejemplo, 3 – 7 = –4.)

Para un ejemplo más inusual, considere el conjunto S de todos los números enteros que se pueden expresar como la suma de dos NÚMEROS CUADRADOS. Tenemos S = {0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 20, 25,…}. (Por ejemplo, $0 = 0^2 + 0^2$, $5 = 1^2 + 2^2$, $20 = 2^2 + 4^2$, y $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$.) Sorprendentemente, este conjunto se cierra bajo la multiplicación. Por ejemplo, tanto 5 como 8 pertenecen a S, y también 5 × 8 = 40. (Tenemos $40 = 2^2 + 6^2$). Además, 10 y 13 pertenecen a S, y también 130. (Tenemos $130 = 3^2 + 11^2$.) Esta observación general se sigue de la identidad algebraica de que si $N = a^2 + b^2$ y $M = c^2 + d^2$; entonces $N \times M = (ac + bd)^2 + (ad – bc)^2$.

Este conjunto S también es cerrado bajo exponenciación: si N y M son cada uno una suma de dos cuadrados, entonces también lo es NM. Por ejemplo, $513 = (12\,625)^2 + (31\,250)^2$.

Véase también CUADRADO.

coeficiente Un multiplicador numérico o constante de las variables en un término de una expresión algebraica se denomina coeficiente de ese término. Por ejemplo, considere la ecuación $5x – 2x + 7 = 0$, donde x es el 3 es 5, el coeficiente de x variable, el coeficiente es cero. En la ecuación $3\cos y – \frac{3}{x}$ de x es –2 y el coeficiente de x $4xy^2 = 7$, los coeficientes de cos y y xy^2 son 3 y –4, respectivamente.

A veces no se conoce el valor de un coeficiente y se usa un símbolo en su lugar. Por ejemplo, en la expresión $ax^2 + bx + c$ con x como variable, los números a y b son coeficientes (y c es un término constante).
Aunque no se especifican los valores de a, b y c , se entiende que sus valores no cambian aunque varíe el valor de x .

En un contexto más general, el término coeficiente se utiliza para cualquier número que sirva como medida de alguna propiedad o característica de un conjunto de datos o una propiedad física. Por ejemplo, un COEFICIENTE DE CORRELACIÓN en LAS ESTADÍSTICAS dan una medida de la medida en que dos conjuntos de datos son interdependientes, mientras que el coeficiente de calor en física da una medida de qué tan bien un material conduce el calor.

Véase también COEFICIENTE BINOMIAL; COMBINADO COEFICIENTE RIAL; CONSTANTE; COEFICIENTE DE LIDERAZGO; POLINOMIO.

Conjetura de Collatz (problema de mapeo "3n + 1")
Considere el siguiente proceso:

> Seleccione un número entero positivo. Si es impar, triplíquelo y súmele uno; de lo contrario, divida el número por dos. Ahora realice la misma operación nuevamente en el resultado. Repita este proceso indefinidamente para producir una secuencia de números.

El número 7, por ejemplo, produce la secuencia:

> 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1,…

Observe que esta secuencia finalmente cae en un ciclo 4-2-1.
En 1937, el matemático alemán Lothar Collatz conjeturó que, independientemente del entero inicial seleccionado, todas las secuencias conducen al mismo ciclo 4-2-1. Collatz no pudo probar esta afirmación, pero tampoco pudo encontrar un ejemplo de un número inicial que no se comporte de esta manera. Hasta el día de hoy, nadie sabe si la conjetura de Collatz es cierta o no. Se han comprobado todos los enteros hasta $2{,}702 \times 10^{16}$.

Como primer paso para comprender este problema, los matemáticos han demostrado que 4-2-1 es el único ciclo de tamaño razonable que podría aparecer; se ha establecido que cualquier otro ciclo que pudiera aparecer tendría al menos 275.000 números.

colineal Se dice que cualquier número de puntos es colineal si todos se encuentran en la misma línea recta. Dos puntos son siempre colineales. Tres puntos en un plano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ son colineales solo si las líneas que conectan los puntos A y B y los puntos que conectan A y C tienen la misma PENDIENTE. Esto significa que debe cumplirse la siguiente relación:

$$\frac{\text{licenciado en Letras}}{2\,ba\,1\,1} = \frac{\text{aproximadamente}\ 2\ 2}{\text{aproximadamente}}$$

Machine Translated by Google

Tres puntos A, B y C en un espacio tridimensional son colineales si el triángulo que forman tiene área cero. De manera equivalente, los tres puntos son colineales si →AB y →AC son cero, y el ángulo entre los VECTORES →AB × →AC es igual, en consecuencia, el PRODUCTO CRUZADO del vector cero.

La colinealidad de puntos en un plano es un tema de interés para los geómetras. A mediados de 1700, LEONHARD EULER descubrió que varios puntos interesantes construidos a partir de triángulos son colineales, dando lugar a su famosa LÍNEA DE EULER. En 1893, el matemático británico James Sylvester (1814-1897) planteó la cuestión de si es posible disponer tres o más puntos en un plano, no todos en una línea, de modo que cualquier línea que conecte dos de los puntos del conjunto pase por un tercer punto también. Cuarenta años después, Tibor Gallai (1912-1992) demostró que no existe tal disposición.

Se dice que dos o más PLANOS distintos son colineales si se cortan en una línea recta común. En este caso, los vectores normales a cada plano se encuentran todos en un plano perpendicular a la línea común. Por lo tanto, se puede determinar si una colección de planos es o no colineal observando si los productos cruzados de pares de vectores normales son todos paralelos o no.

Véase también GRADIENTE; NORMAL A UN PLANO.

combinación (selección, arreglo desordenado) Cualquier conjunto de elementos seleccionados de un conjunto dado de elementos sin tener en cuenta su orden se denomina combinación. No se permite la repetición de elecciones. Por ejemplo, hay seis combinaciones distintas de dos letras seleccionadas de la secuencia A,B,C,D, a saber: AB, AC, AD, BC, BD y CD. (La selección BA, por ejemplo, se considera igual que AB, y la selección AA no está permitida).

El número de combinaciones de k elementos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos se denota $\binom{n}{k}$. El número $\binom{4}{2}$, por ejemplo, es igual a seis. La cantidad $\binom{n}{k}$ se llama coeficiente combinatorio y se lee como "n elige k." Dada su aparición en el TEOREMA DEL BINOMIO, estos números también se denominan coeficientes binomiales.

Uno desarrolla una fórmula para $\binom{n}{k}$ contando el número de maneras de organizar n objetos distintos en una fila. Hay, por supuesto, n! diferentes maneras de hacer esto. (Véase FACTORIAL.) Alternativamente, podemos imaginarnos seleccionando qué objetos k se van a disponer en el primeras k posiciones a lo largo de la fila (hay $\binom{n}{k}$ maneras hacer esto), ordenar esos k elementos (¡hay k! diferentes formas de hacer esto) y luego ordenar los n – k objetos restantes para la última parte de la fila (hay (n – k)! diferentes formas para lograr esto). Este rendimientos $\binom{n}{k}k!(n-k)!$ diferentes formas de organizar n objetos en una fila. Como esta cantidad debe ser igual a n!, tenemos la formula $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ para la combinatoria coeficiente.

Es apropiado definir 0! como igual a uno. De esta forma, la fórmula recién establecida se cumple incluso para k = n. (Solo hay una forma de seleccionar n objetos de una colección de n elementos, y así $\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!0!}$ debe ser igual uno.) Entonces se sigue que $\frac{n!}{0!n!}=1$. (Solo hay una forma de seleccionar ningún objeto.) Conjunto de matemáticos $\binom{n}{k}$ ser cero si k es negativo o mayor que n.

Los coeficientes combinatorios aparecen como las entradas del TRIÁNGULO DE PASCAL . También satisfacen una serie de identidades. Enumeramos solo cuatro, que expresaremos en términos del proceso de selección de k estudiantes para formar parte de un comité de una clase de n estudiantes.

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

(Seleccionar k estudiantes para estar en un comité es lo mismo que seleccionar n – k estudiantes para no estar en el comité).

2. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

(Cualquier comité formado incluye o excluye a un estudiante en particular, John, digamos. Si John va a estar en el comité, entonces uno debe seleccionar k – 1 estudiantes más

Machine Translated by Google

de los n – 1 alumnos restantes. Si John no va a estar en el comité, entonces se deben seleccionar k estudiantes del grupo de n – 1 estudiantes que excluye a John).

3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

(Hay $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$ posibles comités de cualquier tamaño. Pero este número también se puede calcular decidiendo, estudiante por estudiante, si incluir o no a ese estudiante en el comité. Como hay dos posibilidades para cada estudiante, dentro o fuera, hay 2n comités posibles. Estos conteos deben ser los mismos.)

4. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

(Suponga que, en el comité, un estudiante debe ser seleccionado como presidente. En un comité de tamaño k hay k opciones posibles para la silla. De este modo $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ cuenta el número total de comités posibles, de cualquier tamaño, con un estudiante seleccionado como presidente. Pero esta cantidad también se puede calcular seleccionando algún estudiante para que presida primero (hay n opciones para esto) y luego decidiendo, estudiante por estudiante, entre los n – 1 estudiantes restantes si ese estudiante debe estar en el comité. Esto produce n2 n–1 posibilidades.)

La propiedad 1 explica por qué el triángulo de Pascal es simétrico. La propiedad 2 muestra que cada entrada en el triángulo de Pascal es la suma de las dos entradas por encima, y la propiedad 3 muestra que la suma de todas las entradas en cualquier fila del triángulo de Pascal es una potencia de dos.

En 1778 LEONHARD EULER usó la notación $\overline{k}^{n}$ para los coeficientes combinatorios, que, tres años más tarde, modificó a $\binom{n}{k}$. En el siglo XIX, las matemáticas maticians comenzó a seguir la notación original de Euler, eliminando el VINCULUM con el fin de facilitar la composición tipográfica. Muchos libros de texto hoy en día usan la notación $C(n,k)$ o C_n^k, incluso C(n,k), para la combinatoria nCk, coeficiente $\binom{n}{k}$.

Coeficientes Generalizados

El coeficiente combinatorio generalizado $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$, donde k1 ,k2 ,…,kr son enteros no negativos que suman n, se define como el número de formas en que uno puede seleccionar, de n elementos, k1 objetos para ir a un contenedor, k2 objetos para ir en un segundo contenedor, y así sucesivamente, hasta kr objetos para ir a un contenedor r-ésimo. (Observe que $\binom{n}{k, n-k}$ es el coeficiente combinatorio ordinario.)

Imitando el argumento presentado anteriormente, observe que uno puede organizar n elementos en una fila seleccionando primero qué elementos k1 van a ir en la primera parte de la fila y ordenándolos, qué elementos k2 van a ir en la primera parte de la fila. siguiente porción de la fila y ordenarlos, y así sucesivamente. Esto muestra que $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r}$, dando la formula:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!}$$

Los coeficientes combinatorios generalizados muestran, por ejemplo, que hay $\binom{7}{1,1,3,2} = \frac{7!}{1!\,1!\,3!\,2!} = 420$ formas de reorganizar las letras QUESOS: De los siete espacios para letras, se debe elegir qué espacio se asigna a la letra C, cuál a la letra H, cuáles tres a la letra E, y cuales dos para la letra s.

Los coeficientes combinatorios generalizados también aparecen en generalizaciones al TEOREMA DEL BINOMIO. Por ejemplo, tenemos el teorema del trinomio:

$$(x + y + z)^n = \sum_{k_1, k_2, k_3} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$$

donde la suma se toma sobre todos los triples k1 ,k2 ,k3 que suman n. La demostración es análoga a la del teorema del binomio ordinario.

Selección múltiple

La cantidad $\binom{4}{2}$, se lee como “n k de selección múltiple ”, cuenta el número de formas de seleccionar k objetos de una colección

Machine Translated by Google

de n elementos, donde el orden no es importante, pero se permite la repetición. Por ejemplo, hay 10 formas de elegir dos objetos del conjunto A, B, C y D, a saber: AB, AC, AD, BC, BD, CD y AA, BB, CC,

y DD. De este modo $\binom{4}{2}$. Se puede demostrar que un multi 10 =

elegir coeficiente es igual a un co combinatorio ordinario

eficiente:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

coeficiente combinatorio Véase COMBINACIÓN.

combinatoria (análisis combinatorio) La rama de las matemáticas relacionada con la teoría y la práctica de contar elementos de conjuntos y la construcción de arreglos específicos de objetos, junto con el estudio de COMBINACIONES y PERMUTACIONES, se llama combinatoria. La TEORÍA DE GRAFOS también se considera un aspecto de la combinatoria.

La técnica de "doble conteo", es decir, contar el mismo conjunto de objetos de dos maneras diferentes, es una práctica común en combinatoria que se usa para producir resultados interesantes. Por ejemplo, contar los puntos en una matriz cuadrada n × n a lo largo de las diagonales en lugar de a lo largo de las filas da la fórmula sorprendente:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n + (n - 1) + \cdots 2 + 3 + 2 + 1 = n$$

Contar el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos, ya sea sumando el número de subconjuntos que contienen, a su vez, 0, 1, 2, hasta n elementos, o observando que cada subconjunto se decide haciendo n elecciones entre dos opciones, ya sea que cada elemento a su vez esté o no en el subconjunto, produce la fórmula:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

EL TEOREMA DE EULER puede considerarse un resultado en geometría combinatoria.

Véase también DISCRETO; NÚMEROS FIGURADOS.

conmensurable Dos cantidades que tienen una medida común, lo que significa que pueden medirse en términos de

Se dice que los números enteros de una unidad común son conmensurables. Por ejemplo, las cantidades de un mes y una semana son conmensurables porque ambas se pueden medir en términos de un número entero de días. En GEOM ETRY, se dice que dos segmentos de línea son conmensurables si hay otro segmento cuya medida es uniforme, sin resto, en las medidas de cada segmento.

Por ejemplo, los segmentos de longitudes de 20 y 12 pulgadas son conmensurables porque cada uno de ellos se puede dividir uniformemente en longitudes de 1 (o 2 o 4) pulgadas. En general, dos segmentos de longitudes a y b unidades son conmensurables si la razón a /b es un NÚMERO $\sqrt{2}$ es irracional, segmentos de RACIONAL. Como $\sqrt{}$ longitud 1 y $\sqrt{2}$ (respectivamente, la longitud del lado y la diagonal de un cuadrado unitario) son inconmensurables.

Un estudio del ALGORITMO DE EUCLIDES muestra que si se dan dos segmentos de línea conmensurables de longitudes a y b, por ejemplo, al restar repetidamente la longitud más corta de la más larga para producir un nuevo par de longitudes, finalmente se obtienen dos segmentos de línea de igual longitud.

Esta medida final compartida es la mayor longitud que se divide uniformemente en los dos segmentos originales. (Si a y b son medidas de números enteros, entonces la longitud de la medida final es el MÁXIMO DIVISOR COMÚN de a y b). Si, por otro lado, se puede demostrar que el proceso de borrar repetidamente el segmento de línea más corto de el más largo continuará indefinidamente sin producir nunca dos segmentos de línea de igual longitud, entonces los dos segmentos originales no pueden ser conmensurables. Alrededor del año 425 a . C., el matemático griego TEODORO DE CIRENE usó precisamente esta observación para probar la irracionalidad de $\sqrt{2}$. En la TEORÍA DE LOS NÚMEROS, se dice que dos números reales a y b son conmensurables si su razón es racional. Para ejemplo, los números $\sqrt{48}$ y $\sqrt{3/2}$ son conmensurables. Nadie hasta el día de hoy sabe si π y e son o no conmensurables. Los números $\log_5(3)$ y $\log_5(7)$ son inconmensurables. (Si $\log_5 3 = \frac{p}{q}$ por un todo números p y q, entonces $7^q = 3^p$ cada , lo cual es absurdo ya que potencia de 7 es 1 más que un múltiplo de 3.)

denominador común Se dice que dos o más fracciones tienen un denominador común si el denominador de cada fracción es el mismo. por ejemplo, el fracciones $\frac{5}{12}$ y $\frac{3}{12}$ tienen un denominador común de 12. Es una cuestión sencilla de sumar y restar

Machine Translated by Google

fracciones con un denominador común. Por ejemplo, 5 8 3 y 12 12
12
+ = 5 12 − = 2 12

Es posible reescribir los términos de una colección arbitraria de fracciones para que todas compartan un denominador común 1 5 . reescritura y como 3 15 Por ejemplo, la 2 4 6 y , respectivamente, muestra que las dos fracciones tienen 15 un denominador común 15. De hecho, cualquier MÚLTIPLO COMÚN de 3 y 5 sirve como denominador común 10 30 de y Por ejemplo, tenemos = y = 30 , 45 5 El MÍNIMO COMÚN . MÚLTIPLE de los

denominadores de una colección de fracciones se denomina mínimo común denominador de las fracciones. Por ejemplo, el mínimo común denominador de y es 15, y el mínimo 3 3 denominador común de 8 , 5 y es 24. Uno suma 6 y resta fracciones arbitrarias reescribiendo esas fracciones en términos de un denominador común.

factor común (divisor común) Un número que divide exactamente dos o más enteros se llama factor común de esos enteros. Por ejemplo, los números 20, 30 y 50 tienen 2 como factor común, así como 1, 5 y 10 como factores comunes. Siempre ocurre que el factor común más grande que posee un conjunto de números enteros es un múltiplo de cualquier otro factor común. En nuestro ejemplo, 10 es un múltiplo de cada uno de 1, 2 y 5. El valor 1 es siempre un factor común de cualquier conjunto de números enteros.

El TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA muestra que cualquier número puede expresarse de manera única como un producto de factores PRIMOS . Cualquier factor común de dos o más números enteros es un producto de primos comunes a todos esos números enteros, y el factor común más grande es el producto de todos los números primos en común, con repetición permitida. (Esto explica por qué el factor común más grande es un múltiplo de cualquier otro factor común). Si los números enteros no tienen primos en común, entonces su factor común más grande es uno.

Véase también MÁXIMO COMÚN DIVISOR; RELATIVAMENTE PRINCIPAL.

múltiplo común Un número que es múltiplo de dos o más números se llama múltiplo común de esos numeros Por ejemplo, 60 es un múltiplo común de 5, 6 y 10. El número más bajo que es un múltiplo común de un conjunto dado de números se llama MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLE. En nuestro ejemplo, 30 es el mínimo común múltiplo de 5, 6 y 10. Cada múltiplo común es un múltiplo del mínimo común múltiplo.

El TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA muestra que cualquier número puede expresarse de manera única como un producto de factores PRIMOS . Cualquier múltiplo común de dos o más números enteros es el producto de, como mínimo, todos los primos que aparecen en las factorizaciones de los números enteros dados, con las repeticiones necesarias, con quizás factores adicionales. Sin factores adicionales presentes, se obtiene el mínimo común múltiplo.

propiedad conmutativa Se dice que UNA OPERACIÓN BINARIA es conmutativa si es independiente del orden de los términos a los que se aplica. Más precisamente, una operación * es conmutativa si:

a*b = b*a

para todos los valores de a y b. Por ejemplo, en la aritmética ordinaria, las operaciones de suma y multiplicación son conmutativas, pero no la resta y la división. Por ejemplo, 2 + 3 y 3 + 2 tienen el mismo valor, pero 2 - 3 y 3 - 2 no lo son.

Si una operación es tanto conmutativa como ASOCIATIVA, entonces todos los productos del mismo conjunto de elementos son iguales. Por ejemplo, la cantidad a*(b*c) es igual a (a*c)*b y b*(c*a). En este caso, se permite simplemente escribir a*b*c, con términos en cualquier orden, sin preocuparse por la confusión.

En TEORÍA DE CONJUNTOS, la unión y la intersección de dos conjuntos son operaciones conmutativas. En el análisis VECTORIAL , la suma y el PRODUCTO DOT de dos vectores son operaciones conmutativas, pero la operación del PRODUCTO CRUZADO no lo es. La multiplicación de una MATRIZ por otra no es, en general, conmutativa.

Las operaciones geométricas generalmente no son conmutativas. Por ejemplo, un reflejo seguido de una rotación no suele producir el mismo resultado que realizar primero la rotación y luego aplicar el reflejo. También se podría decir que las operaciones de ponerse los zapatos y los calcetines no son conmutativas.

Un GRUPO se llama conmutativo, o abeliano, si la operación del grupo es conmutativa.

Véase también NIELS HENRIK ABEL; PROPIEDAD DISTRIBUTIVA ERTE; ANILLO.

Machine Translated by Google

prueba de comparación Ver SERIE CONVERGENTE.

completar el cuadrado UNA cantidad CUADRÁTICA de la forma $x^2 + 2bx$ puede considerarse, geométricamente, como la fórmula para el área de un cuadrado incompleto.

Agregar el término b^2 completa la imagen de un cuadrado $(x + b) \times (x + b)$. Tenemos:

$$x^2 + 2bx + b^2 = (x + b)^2$$

Este proceso de completar el cuadrado proporciona una técnica útil para resolver ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, considere la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 21$. Completar el cuadrado de la porción $x^2 + 6x$ requiere la suma del término constante 9. Podemos lograr esto sumando 4 a ambos lados de la ecuación. Obtenemos:

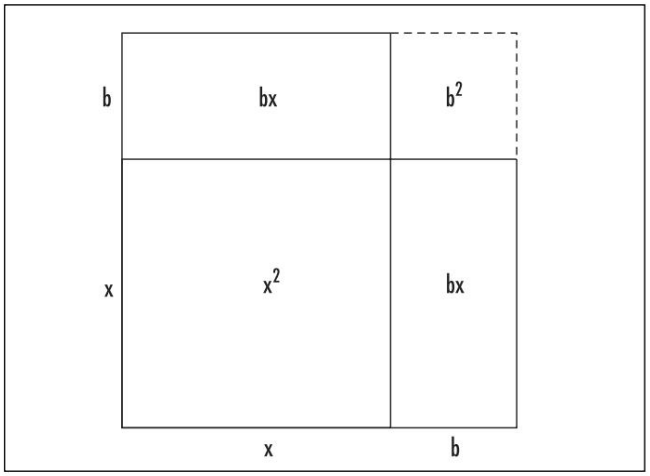
$$x^2 + 6x + 5 + 4 = 21 + 4x$$
$$x^2 + 6x + 9 = 25x$$
$$(x + 3)^2 = 25$$

de donde se sigue que $x + 3$ es igual a 5 o –5, es decir, que x es igual a 2 o –8.

El proceso de completar el cuadrado genera una fórmula general para resolver todas las ecuaciones cuadráticas. Tenemos:

Las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, vienen dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Completando el cuadrado

Esta fórmula se conoce como fórmula cuadrática. Para ver por qué es correcto, divida la ecuación dada entre a y agregue un término para completar el cuadrado de la resultante $x^2 + \frac{b}{a}x$ parte $\frac{b}{2a}$. Tenemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, para resolver $x^2 + 6x + 5 = 21$, resta 21 de ambos lados de la ecuación para obtener $x^2 + 6x - 16 = 0$. Por fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -16)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = 2 \text{ o } -8$$

La fórmula cuadrática muestra que las dos raíces r_1 y r_2 de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (o la raíz doble única si el DISCRIMINANTE $b^2 - 4ac$ es igual a cero) satisface muestra que cada ecuación cuadrática se $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ y $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$. También puede resolver si una es dispuesto a permitir NÚMEROS COMPLEJOS como soluciones. (Es posible que se requiera sacar la raíz cuadrada de una cantidad negativa).

Existen fórmulas análogas para resolver las ECUACIONES CÚBICAS $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ y las ECUACIONES CUÁRTICAS $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ en términos de los coeficientes que aparecen en las ecuaciones. El algebrista NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) demostró que no puede haber fórmulas análogas para resolver ecuaciones de quinto y grado superior.

Ver también FACTORIZACIÓN; TEOREMA FUNDAMENTAL DE ARITMÉTICA; HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo); SOLUCIÓN POR RADICALES.

Machine Translated by Google

Números complejos No existe ningún número real x con la propiedad de que $x = -1^2$. Al introducir un número "imaginario" i como solución a esta ecuación, obtenemos una gran cantidad de nuevos números de la forma a + ib con a y b números reales. Estos nuevos números forman el sistema de los números complejos. Es costumbre usar la variable z para denotar un número complejo arbitrario: z = a + ib. Si b = 0, entonces z es un número real. Así, el conjunto de los números complejos incluye al conjunto de los números reales. Si a = 0 de modo que z tiene la forma z = ib, entonces se dice que z es puramente imaginario. En general, si z = a + ib, entonces a se llama parte real de z y b parte imaginaria de z.
Escribimos: Re(z) = a e Im(z) = b.

El número i se suele considerar como la raíz cuadrada de uno negativo: $i = \sqrt{-1}$. (Hay que tener cuidado ya que, de hecho, hay dos raíces cuadradas de esta cantidad, a saber, i y –i). Las raíces de otras cantidades negativas los empates siguen: $\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = \pm 3i$ y $\sqrt{-30} = \pm i\sqrt{30}$, $= \sqrt{}$ por ejemplo.

El conjunto de todos los números complejos se denota C. La aritmética se puede realizar en los números complejos. siguiendo las reglas usuales del álgebra y reemplazando i por -1^2 siempre que aparezca. Por ejemplo, tenemos:

$$(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$$
$$(2 + 3i) - (4 - i) = -2 + 4i$$
$$(2 + 3i)(4 - i) = 8 + 12i - 2i - 3i = 8 + 10i + 3 = 11 + 10i$$

El COCIENTE de dos números complejos se puede calcular mediante el proceso de RACIONALIZAR EL DENOMINADOR:

$$\frac{2 + 3i}{4 - i} = \frac{2 + 3i}{4 - i} \cdot \frac{4 + i}{4 + i} = \frac{(2 + 3i)(4 + i)}{16 + 1} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

Se puede demostrar que con estas propiedades aritméticas, el conjunto de los números complejos constituye un CAMPO matemático.

A principios del siglo XVIII, el matemático francés ABRAHAM DE MOIVRE notó una sorprendente similitud entre la multiplicación compleja y las fórmulas de ADICIÓN de las funciones seno y coseno de TRIGONOM ETRY. Dado que:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

y:

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$
$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

obtenemos la fórmula compacta:

$$(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)) = \cos(x + y) + i\operatorname{sen}(x + y)$$

Esta observación formó la base para el famoso mula que ahora lleva su nombre:

$$(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))^n = \cos(nx) + i\operatorname{sen}(nx)$$

Unos años más tarde, LEONHARD EULER (1707-1783) llevó las cosas un paso más allá y utilizó las técnicas del cálculo para establecer su extraordinaria fórmula:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$$

de donde se sigue fácilmente LA FÓRMULA DE DE MOIVRE . (Use $(e^{ix})^n = e^{(nx)i}$). Además, este resultado muestra que la fórmula de De Moivre también se cumple para valores no enteros de n.

Que las funciones coseno y seno aparezcan como las partes real e imaginaria de una FUNCIÓN EXPONENCIAL simple muestra que toda la trigonometría se puede simplificar enormemente reformulando las cosas en términos de números complejos. Aunque algunos podrían argumentar que los números complejos no existen en el mundo real, las matemáticas del sistema de números complejos han demostrado ser muy poderosas y han ofrecido conocimientos profundos sobre el funcionamiento del mundo físico. Los ingenieros y los físicos expresan gran parte de su trabajo en términos de teoría de números complejos. (Los ingenieros prefieren usar el símbolo j en lugar de i).

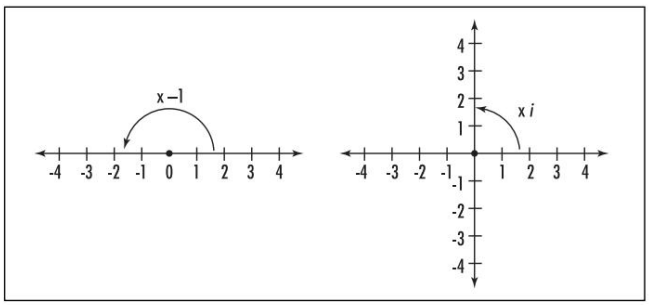
Es una sorpresa saber que la introducción de un un solo número nuevo i como solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$ proporciona todo lo que se necesita para resolver completamente cualquier ecuación POLINOMIAL $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.

El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA afirma que una ecuación polinomial de grado n tiene precisamente n raíces (contadas con multiplicidad) en el sistema de números complejos.

Es posible elevar un número real a una potencia compleja para obtener un resultado real. Por ejemplo, por la FÓRMULA DE EULER , tenemos:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$$

Machine Translated by Google



Multiplicando por –1 y multiplicando por i

Asimismo, señalar que $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$, vemos eso también es posible elevar un número complejo a una potencia compleja para obtener un resultado real:

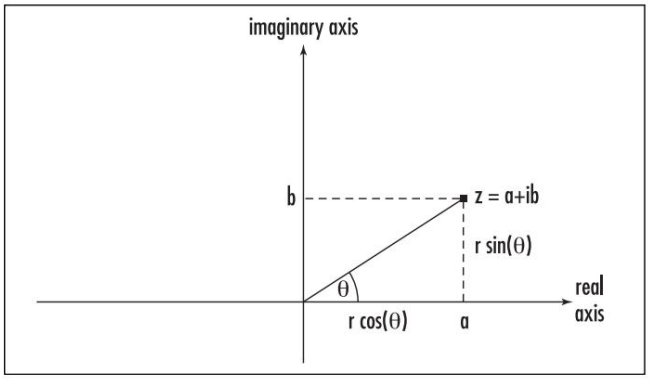
$$e^{i} = e^{i\pi/2} = i^{-\pi/2}$$

(Técnicamente, dado que i también puede expresarse como $e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}$ cualquier número entero k, existen valores (reales) infinitamente diferentes para la cantidad i^{i})

La geometría de los números complejos

Multiplicar las entradas de la LÍNEA DE NÚMEROS reales por -1 tiene el efecto de rotar la línea alrededor del punto 0 en un ángulo de 180°. Es natural preguntar: ¿la multiplicación por qué número crea una rotación de 90° alrededor del punto cero?

Llame al número deseado x. La multiplicación por x tendría dos veces, es decir, la multiplicación por $x \times x = x^2$, el efecto de realizar dos rotaciones de 90°, a saber, una rotación de 180°. Por lo tanto, la multiplicación por x^2 tiene la tiene el mismo efecto que la multiplicación por –1, y el número deseado x debe por lo tanto satisfacer la ecuación $x^2 = –1$. Esto muestra que x = i y que es natural interpretar números puramente imaginarios de la forma ib como miembros de una recta numérica vertical.



Coordenadas polares de un número complejo

Este modelo proporciona una correspondencia natural entre números complejos y puntos en el plano. El eje horizontal se llama eje real, el eje vertical eje imaginario y un número complejo arbitrario z = a + ib aparece como el punto con coordenadas (a,b) en el plano.

Esta representación de números complejos como puntos en un plano se llama diagrama de Argand en honor a JEAN ROBERT ARGAND (1768–1822) quien, junto con el topógrafo Casper Wessel (1745–1818), concibió por primera vez la representación de números complejos de esta manera. El plano de todos los números complejos también se llama plano complejo.

El ángulo θ que forma un número complejo z = a + ib con el eje real positivo se llama argumento del número complejo, y la distancia r del número complejo desde el origen se llama su módulo (o, simplemente, valor absoluto), denotado |z|. EL TEOREMA DE PITÁGORAS y la FÓRMULA DE LA DISTANCIA muestran que:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Usando trigonometría vemos que los valores a y b se pueden expresar en términos de r y θ de una manera similar a las COORDENADAS POLARES. Tenemos:

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

Con la ayuda de la fórmula de Euler, esto demuestra que cualquier número complejo z puede expresarse en forma polar:

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

De esto se sigue, por ejemplo, que el producto de $i\theta_1$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ tiene dos módulo $r_1 r_2$ y argumento $\theta_1 + \theta_2$: números complejos $z_1 = r_1 e$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Es conveniente definir el conjugado de un número complejo z = a + ib como el número $\bar{z} = a - ib$. Tenemos:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Machine Translated by Google

y, en forma polar, si $z = re^{i\theta}$, entonces $\bar{z} = re^{-i\theta}$. Tomando el conjugado de un número complejo tiene la forma geométrica efecto de reflejar ese número a través del eje real.

Historia de los números complejos

El primer europeo en hacer un uso serio de la plaza. la raíz de las cantidades negativas fue GIROLAMO CARDANO (1501-1576) de Italia en el desarrollo de sus soluciones a ECUACIONES CUBICAS. Señaló que las cantidades que surgía en su obra, como expresión de la forma $\sqrt[3]{121 \pm \sqrt{121 \pm}} + \sqrt[3]{\pm \sqrt{\ }}$ por ejemplo, podría ser 2 manipulada algebraicamente para producir una solución real a las ecuaciones. (Tenemos = 4.) $\sqrt[3]{2\ 121 \pm \sqrt{2\ 121 \pm}} \mp \sqrt[3]{\mp \sqrt{\ }}$ No obstante, consideró tal manipulación sólo como una artificio conveniente sin significado práctico significativo. Filósofo francés RENÉ DESCARTES (1596–1650) acordaron y acuñaron el término imaginario para raíces de cantidades negativas.

Durante el siglo XVIII, los matemáticos continuaron trabajar con raíces imaginarias, a pesar del escepticismo general sobre su significado. Euler introdujo el símbolo i para $\sqrt{-1}$, y Argand y Wessel introdujeron su modelo geométrico para números complejos, que más tarde fue popularizado por CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). Su demostración del teorema fundamental del álgebra convenció a los matemáticos de la importancia y validez del sistema de números complejos.

Al matemático irlandés SIR WILLIAM ROWAN HAMIL TON (1805-1865) se le atribuye haber dado el paso final para desmitificar el significado del sistema de números complejos. Extendió la noción de los números complejos como que surgen de rotaciones de 90° al mostrar que cualquier rotación en el espacio tridimensional puede naturalmente y fácilmente representarse en términos de números complejos. Él también señaló que los números complejos no son más que pares ordenados de números junto con un medio para sumándolos y multiplicándolos. (Tenemos (a,b) + (c,d) = (a + c,b + d) y (a,b)·(c,d) = (ac – bd,ad + bc).) En El trabajo de Hamilton, el número en el que me convertí en nada más. que el punto (0,1).

Ver también NÚMEROS NEGATIVOS; ESTEREOGRÁFICO PROYECCIÓN.

compuesto Usado en cualquier contexto donde es posible hablar de la multiplicación de dos cantidades, el término compuesto significa “tener factores propios”. Para examen Por ejemplo, el número 12, que es igual a 3 × 4, es un COMPUESTO NÚMERO, y $y = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x + 3)$ es un polinomio compuesto (que no debe confundirse con la COMPOSICIÓN de dos polinomios).

Una cantidad que no es compuesta se llama irre ducible, o, en el contexto de la teoría de números, PRIME.

número compuesto Un número entero con más de dos factores positivos se llama número compuesto. Para ejemplo, el número 12 tiene seis factores positivos, y así es compuesto, pero 7, con solo dos factores positivos, es no compuesto. El número 1, con un solo positivo factor, tampoco es compuesto. Números mayores que uno que no son compuestos se llaman PRIMOS.

La secuencia 8, 9, 10 es el conjunto más pequeño de tres números compuestos consecutivos, y 24, 25, 26, 27, 28 es el conjunto más pequeño de cinco compuestos consecutivos. Es siempre es posible encontrar cadenas arbitrariamente largas de números compuestos. Por ejemplo, haciendo uso de la función FACTORIAL vemos que la cadena

$$(n + 1)! + 2,\ (n + 1)! + 3,\ldots,(n +1)! + (n + 1)$$

representa n enteros consecutivos, todos los cuales son compuestos. (Esto muestra, por ejemplo, que hay huecos arbitrariamente grandes en la lista de números primos.)

Véase también FACTOR.

composición (función de una función) Si las salidas de una función f son entradas válidas para una segunda función g, entonces la composición de g con f, denotada como g° f, es la función que toma una entrada x para f y devuelve el resultado de alimentar f(x) en g:

$$(g^\circ f)(x) = g(f(x))$$

Por ejemplo, si introduciendo 3 en f devuelve 5, y introduciendo 5 en g devuelve 2, entonces (g° f)(3) = 2. Si, alternativamente, 1 $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$, entonces

$$\begin{aligned}(g^\circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 1) \\ &= 2 + \frac{1}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Típicamente, g° f no es lo mismo que f°g. En nuestro último ejemplo, por ejemplo,

Machine Translated by Google

$$(x^2 + 1)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$$

que es una función diferente. Como otro ejemplo, si M es la función que asigna a cada persona del mundo su madre biológica, y F es la función análoga del padre biológico, entonces (M°F)(Juan) representa a la abuela paterna de Juan, mientras que (F° M)(John) es el abuelo materno de John.

La notación g° f es un poco confusa, ya que debe leerse al revés. La función f se denomina "función central" y debe aplicarse primero, con la "función externa" g aplicada en segundo lugar. La composición de tres funciones f, g y h se escribe h° f°g (aquí h es la función externa), y la composición repetida de una función f consigo misma se escribe f (n). Así, por ejemplo, f (4) denota la composición f° f° f° f. Un conjunto de composiciones repetidas se denomina SISTEMA DINÁMICO.

Los matemáticos han demostrado que la composición de dos FUNCIONES CONTINUAS es en sí misma continua. Precisamente, si f es continua en x = a, y g es continua en x = f(a), entonces g° f es continua en x = a.

La composición de dos funciones diferenciables es diferenciable. La REGLA DE LA CADENA muestra que la DERIVADA de g° f está dada por (g° f)′ (x) = g′(f(x))·f′(x).

interés compuesto Ver INTERÉS.

enunciado compuesto Ver TABLA DE VERDAD.

computadora Un dispositivo electrónico para realizar automáticamente operaciones aritméticas en DATOS o secuencias de manipulaciones en conjuntos de símbolos (como se requiere para ÁLGEBRA y TEORÍA DE CONJUNTOS, por ejemplo), todo de acuerdo con un conjunto preciso de instrucciones predeterminadas, se llama computadora. La computadora más utilizada y versátil que se usa hoy en día es la computadora digital en la que los datos se representan como secuencias de pulsos electrónicos discretos. Como cada pulso puede estar "encendido" o "apagado", es natural pensar en secuencias de 0s y 1s en el trabajo en teoría computacional y, en consecuencia, trabajar con el sistema de NÚMEROS BINARIOS para representar datos.

Una computadora digital tiene varias partes separadas:

1. Un dispositivo de entrada, como un teclado, para ingresar un conjunto de instrucciones (programa) y datos.
2. Una unidad central de procesamiento (CPU) que codifica la información en forma binaria y ejecuta las instrucciones. (Esta unidad consta de una serie de placas de circuito electrónico en las que están incrustadas una gran cantidad de "compuertas lógicas", similares a las configuraciones de CONJUNCIÓN y DISYUNCIÓN).
3. Unidades de memoria, como discos y cintas magnéticas.
4. Un dispositivo de salida para mostrar los resultados, como un monitor o una impresora.

El estudio de la informática generalmente se presta a las capacidades teóricas de las máquinas informáticas definidas en términos de sus programas, no a las propiedades físicas de las computadoras reales. El PROBLEMA DE LA DETENCIÓN y la cuestión de ser NP COMPLETO, por ejemplo, son temas que preocupan a los científicos en este campo.

Véase también ÁBACO; CARLOS BABBAGE; DÍGITO.

cóncava/convexa Una curva o superficie que se curva hacia adentro, como la circunferencia de un círculo vista desde el interior, o el hueco de un tazón, por ejemplo, se llama cóncava. Una curva o superficie que se curva hacia afuera, como el límite de un círculo visto desde fuera del círculo, o la superficie de una esfera, se llama convexa.

Una forma geométrica en el plano o un sólido tridimensional se llama convexa si el límite de la forma es una curva o superficie convexa. Por ejemplo, los triángulos, los cuadrados y cualquier POLÍGONO regular son figuras convexas. Los cubos y las esferas son sólidos convexos. Cualquier forma que no sea convexa se llama cóncava. Un CUADRILÁTERO deltoides, por ejemplo, es un polígono cóncavo.

Un polígono es convexo si cada uno de sus ángulos interiores tiene un valor inferior a 180°. De manera equivalente, un polígono es convexo si la figura se encuentra completamente en un lado de cualquier línea que contenga un lado del polígono. UN POLIEDRO es convexo si se encuentra enteramente en un lado de cualquier plano que contiene una de sus caras.

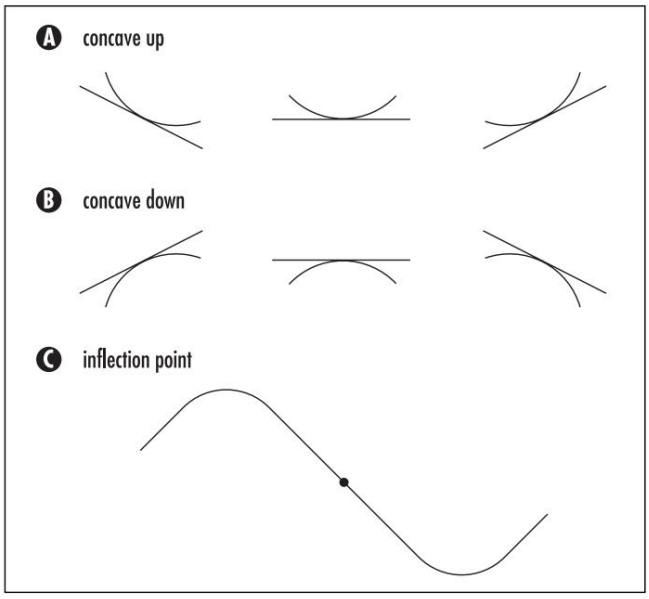
Una figura convexa también se puede caracterizar por la propiedad de que, para dos puntos dentro de la figura, el segmento de línea que los conecta también se encuentra completamente dentro de la figura.

Machine Translated by Google

cóncava hacia arriba/cóncava hacia abajo La gráfica de una función y = f(x) puede describirse como cóncava hacia arriba en un intervalo si, en ese intervalo, la pendiente de la recta tangente a la curva aumenta a medida que uno se mueve de izquierda a derecha. Asumiendo que la función es dos veces diferenciable, esto significa que la DERIVADA f′(x) es una función estrictamente creciente y, en consecuencia, la doble derivada satisface f″(x)>0. (Consulte CRECIMIENTO/DECRECIMIENTO). Por ejemplo, la doble derivada de f(x) = x f″(x) = 2>0, y la ^{2} siempre es positivo, parábola y = x es cóncava hacia arriba. Un gráfico cóncavo hacia arriba también tiene la propiedad de que cualquier ACORDE que une dos puntos del gráfico se encuentra completamente por encima del gráfico.

La gráfica de una función y = f(x) es cóncava hacia abajo en un intervalo si, en ese intervalo, la pendiente de la recta tangente a la curva disminuye a medida que uno se mueve de izquierda a derecha. Suponiendo que la función es dos veces diferenciable, esto significa que f′(x) es una función estrictamente decreciente y, en consecuencia, f″(x)<0 para todos los puntos del intervalo. Como ejemplo, dado que la doble derivada de 3 es negativa solo para para valores negativos de x (f″(x) f(x) = x 3 es = 6x<0 solo a la izquierda del eje y. Un gráfico descendente cóncavo x<0), tenemos que la curva cúbica y = x cóncava hacia abajo tiene la propiedad de que cualquier cuerda que une dos puntos del gráfico se encuentra completamente debajo del gráfico.

Un punto en el que cambia la concavidad de la gráfica se llama punto de inflexión o punto de inflexión.



Concavidad

ción (Ortografía alternativa: inflexión.) Si x = a es un punto de inflexión para una curva dos veces diferenciable f(x), entonces la doble derivada f″(x) es positiva a un lado de x = a y negativa a la otro lado. Debe ser el caso, entonces, que f″(a) = 0. No es necesario que se cumpla lo contrario, cómo, por ejemplo, función f(x) = x f″(0) = 0, pero la ^{4}, satisface siempre. La concavidad de la curva no cambia en x = 0.

Un estudio de la concavidad de un gráfico puede ayudar a ubicar y clasificar máximos y mínimos locales para la curva.

Véase también GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN; MÁXIMO/MÍNIMO.

concéntrico/excéntrico Dos círculos o dos esferas se llaman concéntricos si tienen el mismo centro. Dos figuras que no son concéntricas se llaman excéntricas. La región entre dos círculos concéntricos se llama ANULACIÓN.

concurrente Se dice que cualquier número de líneas es concurrente si todas pasan por un punto común. Muchas líneas interesantes construidas a partir de triángulos son concurrentes. Dos rectas a1x + b1y = c1 y a2x + b2y = c2 en el plano cartesiano son concurrentes si a1b2 – a2b1 ≠ 0.

Véase también TRIÁNGULO.

condicional (hipotético) En LÓGICA FORMAL un enunciado de la forma “Si … entonces…” se conoce como condicional o implicación. Por ejemplo, "Si un polígono tiene tres lados, entonces es un triángulo" es un condicional declaración.

Una declaración condicional tiene dos componentes: si p, entonces q. El enunciado p se denomina antecedente (hipótesis o premisa) y el enunciado q , consecuente (o conclusión). Una declaración condicional se puede escribir de varias maneras diferentes, pero equivalentes:

Si p, entonces
q. p implica
q. q si
p. p sólo si
q. p es suficiente para
q. q es necesario para p.

Se denota en símbolos por: p→q.

Machine Translated by Google

La TABLA DE VERDAD del condicional está motivada por intuición Considere, por ejemplo, la declaración:

Si Peter ve una película de terror, entonces come Palomitas.

La afirmación es ciertamente verdadera si observamos a Pedro viendo una película de terror y comiendo palomitas de maíz en el mismo tiempo (es decir, si el antecedente y el consecuente son ambos verdaderos), pero falso si el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso (es decir, Peter está viendo una película de terror pero no comer palomitas de maíz). Esto justifica los dos primeros líneas de la siguiente tabla de verdad.

Las dos últimas líneas son una cuestión de convención. Si Peter no está viendo una película de terror, es decir, si el antecedente es falso, entonces el enunciado condicional como todo es discutible. La LÓGICA FORMAL, sin embargo, nos obliga a asignar un valor de verdad a cada afirmación. como viendo un película romántica y comer (o no comer) palomitas de maíz no no implica que la declaración condicional sea una mentira, vamos adelante y asigne un valor de verdad "verdadero" a los dos últimos lineas de la tabla:

pqp→q
T T T
V FF
F TT
FFT

Sin embargo, esta convención conduce a dificultades. Considere, por ejemplo, la siguiente declaración:

Si toda esta oración es verdadera, entonces la luna es hecho de queso

Aquí el antecedente p es el enunciado: “toda la oración anterior es verdadera”. El consecuente es: “la luna es hecho de queso.” Note que p es verdadera o falsa dependiendo de si la proposición completa p→q es verdadera o FALSO. Sólo hay una línea en la tabla de verdad para la cual p y p→q tienen el mismo valor de verdad, es decir, el primero uno. Debe ser el caso, entonces, que p, q, y p→q son cada uno verdadero. En particular, q es verdadera. Lógicamente, entonces, la la luna ciertamente debe estar hecha de queso.

Véase también ARGUMENTO; BICONDICIONAL; CONDICIÓN-NECESARIO Y SUFICIENTE; AUTOREFERENCIA.

convergencia condicional Ver CONVERSIÓN ABSOLUTA GENCIA.

probabilidad condicional La probabilidad de un EVENTO ocurriendo dado el conocimiento de que otro evento ha ya ocurrido se llama probabilidad condicional.

Por ejemplo, supongamos que se extraen dos cartas de una baraja y deseamos determinar la probabilidad de que la segunda carta extraída es roja. Conocimiento de la primera el color de la carta afectará nuestros cálculos de probabilidad. Precisamente:

i. Si la primera carta es negra, entonces la probabilidad de que la segundo es rojo es 26/51 (hay 26 tarjetas rojas entre las 51 cartas restantes),
ii. Si la primera carta es roja, entonces la probabilidad de que la segundo es también este color es ahora sólo 25/51.

(Si no tenemos conocimiento del color de la primera carta, entonces las probabilidades de que la segunda carta sea roja son $1/2$.)

Si A y B son dos eventos, entonces la notación A|B es para denotar el evento: “A ocurre dado que el evento B ya ha ocurrido.” La notación P(A|B) denota la probabilidad de que A ocurra entre aquellos experimentos en los que B ya ha ocurrido. Por ejemplo, en el ejemplo anterior:

$$P(\text{la segunda carta es roja} \mid \text{la primera carta es negra}) = \frac{26}{51}$$

$$P(\text{la segunda carta es roja} \mid \text{la primera carta es negra}) = \frac{25}{51}$$

Si, en muchas corridas de un experimento, ocurre el evento B b veces, y los eventos A y B ocurren simultáneamente a veces, entonces la proporción de veces que ocurrió el evento A cuando sucedió B es a/b. Esto motiva la fórmula matemática para la probabilidad condicional:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Como ejemplo, supongamos que se nos dice que una carta extraída de un mazo es rojo. Para determinar la probabilidad de que esa carta también es un as observamos:

$$P(\text{as} \mid \text{rojo}) = \frac{P(\text{as y rojo})}{P(\text{rojo})} = \frac{P(\text{as rojo})}{P(\text{rojo})} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{13}$$

Machine Translated by Google

Es decir, la probabilidad de que una tarjeta roja sea un as es 1/13. Por supuesto, contar el número de veces que aparece “as” entre las cartas rojas también da como resultado P(as | rojo) = 2/26 = 1/13.

La probabilidad condicional es útil para analizar problemas más complejos como el famoso DOS ROMPECABEZAS DE CARTAS.

Si dos eventos A y B son EVENTOS INDEPENDIENTES, entonces las probabilidades satisfacen la relación P(A∩B) = P(A) × P(B). Esto muestra que P(A | B) = P(A), es decir, la probabilidad de que ocurra A no se ve alterada por la información de si B ha ocurrido o no.

Véase también TEOREMA DE BAYES .

condición—necesaria y suficiente En lógica, una condición es una proposición o afirmación p que se requiere que sea verdadera para que otra proposición q sea verdadera. Si q no puede ser verdadera sin p, llamamos a p una condición necesaria. Si la validez de p asegura que q es verdadera, entonces llamamos a p una condición suficiente. Por ejemplo, para que un cuadrilátero sea un rectángulo es necesario que tenga dos lados paralelos, pero esta condición no es suficiente. (Un trapezoide, por ejemplo, tiene dos lados paralelos pero no es un rectángulo.) Para que un número sea par es suficiente que el número termine en cuatro, pero esta condición no es necesaria.

Si p es una condición suficiente para q, entonces se cumple el CONDICIONAL (implicación) p→q . Los matemáticos suelen escribir: q es verdadera si p es verdadera. Si p es una condición necesaria para q, entonces se cumple la implicación q→p . Los matemáticos suelen escribir: q es verdadera solo si p es verdadera.

Si el BICONDICIONAL cumple: p↔q, entonces p es necesario y suficiente para q. Por ejemplo, para que un número sea divisible por 10 es necesario y suficiente que el número termine en cero. Tal declaración generalmente se escribe: p si, y solo si, q o, de manera compacta, como "p iff q".

Véase también LÓGICA FORMAL; MESA DE LA VERDAD.

cono En el espacio tridimensional, un cono es la superficie formada por un conjunto infinito de rectas trazadas de la siguiente manera: cada recta pasa por un punto de una curva cerrada fija inscrita en un plano, llamada directriz del cono, y por un punto dado fijo sobre el plano, llamado vértice del cono. Las líneas dibujadas se llaman generadores del cono.

En el trabajo elemental, la directriz suele tomarse como un círculo para que los conos producidos sean circulares. conos Un cono circular es "recto" si su vértice se encuentra directamente sobre el centro del círculo, y "oblicuo" en caso contrario. Los puntos en la superficie de un cono circular recto satisfacen una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = a^2 z^2$ para algunos constante A.

Técnicamente, se supone que los generadores de un cono se extienden indefinidamente en ambas direcciones. Así, un cono arbitrario consta de dos superficies idénticas que se encuentran en el vértice. Cada superficie se llama nappe (hoja en francés) o medio cono. Sin embargo, si el contexto es claro, la palabra cono a menudo se refiere a una sola nuca, o simplemente a la parte de una nuca entre el vértice y el plano de la directriz. El objeto en este último caso a veces se llama cono finito. Está acotado y encierra un volumen finito.

Para un cono finito, la región plana delimitada por la directriz se denomina base del cono y el vértice se denomina vértice del cono. La distancia vertical del vértice a la base se llama altura del cono, y el volumen V de un cono finito viene dado por $V = \frac{1}{3}Ah$, donde h es la altura del cono y A el área de su base. (Véase VOLUMEN.) Así:

> El volumen de cualquier cono es un tercio del volumen del CILINDRO que lo contiene.

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287–212 a. C.) estableció que el volumen de una ESFERA es dos tercios del volumen del cilindro que la contiene. (Al dibujar un cono en este cilindro, Arquímedes estableció que el área de cada rebanada horizontal de una esfera es igual al área del ANULO entre el cono y el cilindro a la misma altura correspondiente). La fórmula para el volumen de una esfera sigue fácilmente .

Ver también SECCIONES CÓNICAS.

mapeo conforme (transformación equiangular, transformación isogonal) Cualquier transformación geométrica que no cambie los ángulos de intersección entre dos líneas o curvas se denomina mapeo conforme. Por ejemplo, en GEOMETRÍA, las reflexiones, las traslaciones, las rotaciones, las dilataciones y las inversiones conservan los ángulos entre líneas y curvas y, por lo tanto, son mapeos conformes. LA PROYECCIÓN DE MERCATOR de la Tierra sobre un cilindro conserva todos los ángulos del globo y, por lo tanto, es una proyección conforme.

Véase también TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA.

Machine Translated by Google

congruencia Se dice que dos números a y b son congruentes módulo N, para algún entero positivo N, si a y b dejan el mismo resto al dividirlos por N. Escribimos: a ≡ b (mod N). Por ejemplo, dado que 16 y 21 son ambos 1 más que un múltiplo de 5, tenemos 16 ≡ 21(mod5). También 14 ≡ 8(mod3) y 28 ≡ 0(mod7).

Uno puede interpretar de manera equivalente la declaración a ≡ b (modN) en el sentido de: "la diferencia a - b es divisible por N". Dado que –2 y 16, por ejemplo, difieren en un múltiplo de 9, tenemos –2 ≡ 16(mod9). Dos números que no son congruentes módulo N se llaman incongruentes módulo N.

Se pueden sumar, restar y multiplicar dos congruencias del mismo módulo N de la misma manera que se suman, restan y multiplican cantidades ordinarias.
Por ejemplo, observando que 14 ≡ 4(mod10) y 23 ≡ 3(mod10), de hecho tenemos:

$$14 + 23 \equiv 4 + 3 (\text{mod}10)\ 14$$
$$-\ 23 \equiv 4 - 3 (\text{mod}10)\ 14 \times$$
$$23 \equiv 4 \times 3 (\text{mod}10)$$

Desafortunadamente, el proceso de división no se conserva bajo la congruencia. Por ejemplo, 14 ÷ 2 no es congruente con 4 ÷ 2 módulo 10. Un estudio cuidadoso de ARITMÉTICA MODULAR explica bajo qué circunstancias se permite la división.

La aritmética de la congruencia ocurre naturalmente en cualquier fenómeno cíclico. Por ejemplo, encontrar el día de la semana para una fecha determinada requiere trabajar con congruencias módulo 7, y la aritmética para contar las horas a medida que pasan funciona con congruencias módulo 24 o módulo 12. (Esto lleva al estudio de CLOCK MATH .)

Ciertas REGLAS DE DIVISIBILIDAD pueden explicarse mediante congruencias. Por ejemplo, dado que 10 ≡ 1 (mod9), cualquier potencia de 10 también es congruente con 1 módulo 9: 10n ≡ 1 n = 1 (mod9). En consecuencia, cualquier número es congruente módulo 9 con la suma de sus dígitos. Por ejemplo,

$$486 = 4 \times 102 + 8 \times 10 + 6 \times 1$$
$$\equiv 4 \times 1 + 8 \times 1 + 6 \times 1 (\text{mod}9) = 4$$
$$+ 8 + 6 (\text{mod}9)$$

Como 4 + 8 + 6 es un múltiplo de 9, se deduce que 486 es divisible por 9.

Véase también EXPULSIÓN DE NUEVE; DÍAS DE LA SEMANA FÓRMULA.

figuras congruentes Dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y tamaño. Más precisamente, dos POLÍGONOS son congruentes si, bajo alguna correspondencia entre lados y vértices, las longitudes de los lados correspondientes son iguales y los ángulos interiores correspondientes son iguales. Dos cuadrados diferentes con la misma longitud de lado, por ejemplo, son figuras congruentes.

Tenga en cuenta que dos figuras planas pueden ser congruentes sin ser idénticas: una figura puede ser la imagen especular de la otra. Dos figuras se llaman directamente congruentes si una puede coincidir con la otra rotando y trasladando la figura en el plano y opuestamente congruentes si también se debe aplicar una reflexión. Dos cuadrados idénticos, por ejemplo, son directamente congruentes sin importar en qué parte del plano se coloquen. Dos triángulos escalenos con lados iguales pueden o no ser directamente congruentes. Hay una serie de pruebas geométricas para determinar si dos triángulos son o no congruentes según las reglas AAA/AAS/ASA/SAS/SSS .

En el espacio tridimensional, dos sólidos son directamente congruentes si son idénticos. Si cada uno es la imagen especular del otro, son opuestamente congruentes.

El término congruente a veces se aplica a otras construcciones geométricas para significar "lo mismo". Por ejemplo, dos segmentos de línea son congruentes si tienen la misma longitud, o dos ÁNGULOS son congruentes si tienen la misma longitud. medida.

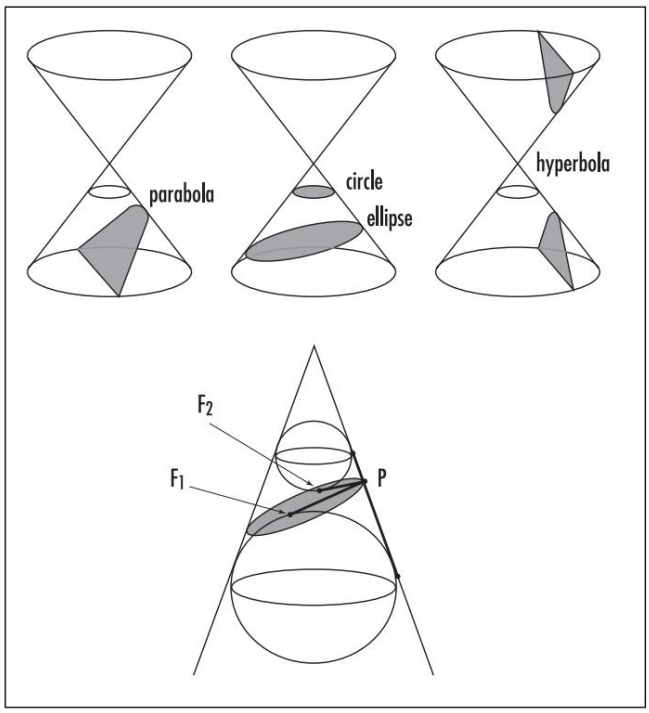
Ver también FIGURAS SIMILARES.

secciones cónicas Cortar un CONO circular recto con un plano que no pasa por el vértice del cono produce curvas llamadas secciones cónicas, o simplemente cónicas. Si el plano de corte es paralelo a una línea recta que genera el cono, entonces la cónica resultante es una PARÁBOLA. De lo contrario, si el plano de corte pasa por una sola siesta del cono, la curva que se produce es un CÍRCULO o una ELIPSE, o una HIPÉRBOLA si el plano de corte corta ambas siestas.

Si pensamos en el cono como rayos de luz que emanan de una fuente de luz sostenida en el vértice, entonces la sombra proyectada por un anillo circular sobre una hoja de cartón será una sección cónica; la cónica particular producida depende del ángulo en el que se sostiene la tarjeta. El anillo abierto en la parte superior de una pantalla, por ejemplo, proyecta una sombra hiperbólica en la pared. De la misma manera, las sombras proyectadas por bolas sólidas son secciones cónicas.

Machine Translated by Google

Los eruditos griegos de la antigüedad fueron los primeros en estudiar las secciones cónicas. Sin aplicaciones prácticas en mente, los matemáticos siguieron el tema únicamente por su belleza y sus recompensas intelectuales. Alrededor del 225 a.
APOLONIO DE PERGA escribió una serie de ocho libros, titulada Las cónicas, en los que investigó a fondo estas curvas. Introdujo los nombres parábola, elipse e hipérbola. ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca.
287-212 a. C.) también escribió sobre estas curvas. Casi 2000 años después, los científicos comenzaron a encontrar aplicaciones de secciones cónicas a problemas del mundo real. En 1604 GALILEO GALILEI descubrió que los objetos lanzados al aire siguen trayectorias parabólicas (si se puede despreciar la resistencia del aire), y en 1609 el astrónomo JOHANNES KEPLER descubrió que la órbita de Marte es una elipse. Conjeturó que todos los cuerpos planetarios tienen órbitas elípticas, lo cual, 60 años más tarde, ISAAC NEWTON pudo demostrar usando su ley de gravitación recién desarrollada. Este siglo, los científicos han descubierto que la trayectoria de una partícula alfa en el campo eléctrico de un núcleo atómico es una hipérbola.



Las secciones cónicas

Las secciones cónicas pueden describirse únicamente por las propiedades que poseen como curvas en un plano. Vemos esto dibujando esferas internamente tangentes al cono y tangentes al plano de corte que define la curva. Por ejemplo, dada una elipse, si dos esferas internas son tangentes al plano en los puntos F1 y F2 , entonces para cualquier punto P en la elipse, su distancia a F1 es la misma que su distancia al círculo de tangencia de la elipse. esfera inferior, y su distancia a F2 es la misma que su distancia al círculo de tangencia de la esfera superior. En consecuencia, la suma de sus distancias desde F1 y F2 es igual a la distancia fija entre las dos esferas medida a lo largo del lado del cono. Esta propiedad se puede utilizar para definir una elipse:

> Una elipse es el conjunto de todos los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos dados, F1 y F2 , tienen una suma constante.

Dibujando esferas, una en cada nuca del cono y tangentes al plano de corte de una hipérbola, se puede mostrar de manera análoga:

> Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos dados, F1 y F2 , tienen una diferencia constante.

Para una parábola, se dibuja una sola esfera tangente al plano de corte de la parábola y se considera el punto F en el que la esfera toca el plano, y la línea L de intersección del plano de corte con el plano del círculo a lo largo del cual la esfera es tangente al cono. Tenemos:

> Una parábola es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto F del plano y de una recta dada L.

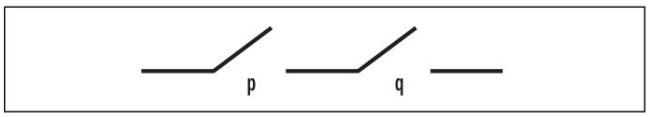
Las secciones cónicas tienen notables propiedades de reflexión.

Véase también PROYECCIÓN.

conjunción (enunciado “y”) En LÓGICA FORMAL , un enunciado compuesto de la forma “p y q” se conoce como conjunción. Por ejemplo, “Un triángulo tiene tres lados y un cuadrado tiene cuatro lados” es una conjunción. Una conjunción se denota en símbolos por p q.

Para que una conjunción como un todo se considere verdadera, cada componente (o conjunto) p y q deben ser verdaderos. Así una conjunción tiene la siguiente TABLA DE VERDAD:

Machine Translated by Google



Circuito de conjunción

pqp	q	
T T T		
V FF		
FTF		
FFF		

Una conjunción se puede modelar a través de un circuito en serie. Si T denota el flujo de corriente, entonces la corriente se mueve a través del circuito como un todo si, y solo si, ambos interruptores p y q permiten el flujo de corriente (es decir, están cerrados).

Véase también DISYUNCIÓN.

conectado Informalmente, un objeto geométrico está “conectado” si viene en una sola pieza. Por ejemplo, una región en el plano está conectada si, para dos puntos cualesquiera de esa región, uno puede dibujar una línea continua que conecta los dos puntos y permanece dentro de la región. Por ejemplo, se conecta un MEDIO PLANO . El conjunto de todos los números reales de la recta numérica distintos de cero no es conexo.

Una superficie situada en un espacio tridimensional, como una ESFERA o un TORO, está conectada si dos puntos cualesquiera de la superficie pueden conectarse mediante un camino continuo que permanece en la superficie. Un GRÁFICO es conexo si, para dos vértices cualesquiera, hay un camino contiguo de aristas que los conecta.

La conectividad de un objeto geométrico es el número de cortes necesarios para romper la forma en dos partes.
Por ejemplo, un círculo (interior y circunferencia) y una esfera sólida tienen cada uno una conectividad. Un ANULUS y un toro tienen cada uno conectividad dos.

consistente Se dice que un conjunto de ecuaciones es consistente si hay un conjunto de valores que satisface todas las ecuaciones. Por ejemplo, las ecuaciones x + y = 7 y x + 2y = 11 son consistentes, ya que se satisfacen con x = 3 y y = 4. Por otro lado, las ecuaciones x + y = 1 y x + y = 2 son inconsistentes.

En LÓGICA FORMAL, se dice que un sistema matemático es consistente si es imposible probar que un enunciado es verdadero y no verdadero al mismo tiempo. Es decir, un sistema es consistente si está libre de CONTRADICCIONES.
Los matemáticos han probado, por ejemplo, que la aritmética es un sistema lógico consistente.

Véase también ARGUMENTO; LA INCOMPLETITUD DE GÖDEL TEOREMAS; LEYES DEL PENSAMIENTO; LINEAL SIMULTÁNEO ECUACIONES.

constante La palabra constante se usa en varios contextos matemáticos. En una expresión algebraica, cualquier valor numérico que aparece en ella se llama constante. Por ejemplo, en la ecuación y = 2x + 5 con variables x e y, los números 2 y 5 son constantes. Estos números pueden denominarse constantes absolutas porque sus valores nunca cambian. En aplicaciones generales, sin embargo, se puede considerar que las constantes toman cualquiera de varios valores. Por ejemplo, en la ecuación general de una recta y = mx + b las magnitudes m y b se consideran constantes aunque puedan adoptar valores diferentes para distintas aplicaciones específicas.

Una cantidad invariante específica cuyo valor se determina a priori, como π o e, también se denomina constante.
En física, cualquier cantidad física cuyo valor esté fijado por las leyes de la naturaleza, como la velocidad de la luz c o la constante gravitatoria universal G, se denomina constante.

El término constante en un POLINOMIO es el término que no involucra ninguna potencia de la variable. Por ejemplo, los polinomios $x^3 - 5x^5 + 7$ y $2z^2 - 3z + z^0$ tienen términos constantes 7 y 0, respectivamente.

Una función constante es cualquier función f que produce el mismo valor de salida, por ejemplo, sin importar qué valor de entrada se suministre: f(x) = a para todos los valores de x. La gráfica de una función constante es una línea horizontal. Es sorprendente, por ejemplo, descubrir que la función dada por $f(x) = \log_{10}\left(\sqrt{10^x}\right)^{-1}$ definida para todos los números positivos x, es una función constante. La fórmula siempre devuelve el valor 10 sin importar qué valor se elija para la entrada x .

constante de integración El VALOR MEDIO TEO
REM muestra que dos antiderivadas cualesquiera de un

Machine Translated by Google

función difieren sólo por una constante. Por ejemplo, cualquier antiderivada de la función f(x) = 2x debe ser de la forma $x^2 + C$ para alguna constante C, llamada constante de integración. Una antiderivada generalmente se expresa como un INTEGRAL INDEFINIDO. En nuestro ejemplo tenemos $\int 2x\,dx = x^2 + C$. Se debe tener cuidado al trabajar con una constante arbitraria de integración. Por ejemplo, considere calcular la integral $\int \frac{1}{x}\,dx$ mediante el método de INTEGRACIÓN POR PARTES. Haga $u = \frac{1}{x}$ y $v' = 1$ (de modo que $u' = -\frac{1}{x^2}$ y $v = x$) para obtener:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{x}\cdot x - \int -\frac{1}{x^2}\cdot x\,dx$$

$$1 = +\int \frac{1}{x}\,dx$$

Restar la integral bajo consideración sugiere el absurdo: 0 = 1. Por supuesto, este argumento no tuvo en cuenta las constantes de integración que deberían aparecer.

Ver también ANTIDIFERENCIACIÓN; CÁLCULO INTEGRAL.

ancho constante Una rueda circular tiene la propiedad de tener una altura constante cuando rueda por el suelo. Alternativamente, se podría decir que el ancho de la curva es el mismo sin importar en qué dirección se oriente la figura para medirla. Cualquier forma con esta propiedad se llama curva de ancho constante. El llamado triángulo de Reuleaux, construido dibujando arcos de círculos a lo largo de cada lado de un triángulo equilátero (con el vértice opuesto como centro de cada arco circular) es otro ejemplo de tal curva. Las ruedas de esta forma también ruedan por el suelo con una altura constante.

Se pueden construir ruedas de altura constante con la ayuda de una computadora. Se comienza con las ECUACIONES PARAMÉTRICAS de una circunferencia de radio 1 y centro (0,0) dadas por $x(t) = 0 + \cos(t)$ y $y(t) = 0 + \sin(t)$, para $0 \le t < 360°$. Ciertamente, la distancia entre dos puntos cualesquiera de este círculo que están separados por un ángulo de 180° es siempre 2. Al cambiar ligeramente la ubicación del centro del círculo, podemos conservar esta propiedad de distancia, siempre que nos aseguremos de que el centro regresa al mismo lugar cada 180°. Así, por ejemplo, las ecuaciones:

$$x(t) = \frac{1}{10}\sin(2t) + \cos(t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos(2t) + \sin(t)$$

son las ecuaciones paramétricas de otra curva con la misma propiedad de ancho constante. (Los coeficientes fraccionarios se eligieron para garantizar que la figura resultante sea CONVEXA).

El matemático francés Joseph Barbier (1839-1889) demostró que todas las curvas de ancho constante d tienen el mismo perímetro, π d. También se sabe que, para un ancho dado, el triángulo de Reuleaux es la curva de ancho constante de menor área.

construible Se dice que una figura geométrica es construible si se puede dibujar utilizando únicamente las herramientas de una regla (es decir, una regla sin marcas) y un compás. La regla permite dibujar segmentos de línea entre puntos (pero no medir la longitud de esos segmentos), y el compás proporciona los medios para dibujar círculos con un punto dado como centro y un segmento de línea dado desde ese punto como radio.

Los eruditos griegos de la antigüedad fueron los primeros en explorar la cuestión de qué construcciones geométricas podían producirse únicamente con la ayuda de estas herramientas primitivas. El geómetra EUCLID (ca. 300 a. C.) declaró explícitamente estas limitaciones en su famoso texto LOS ELEMENTOS.

A pesar de que su ejercicio no tiene una aplicación práctica real (es mucho más fácil dibujar figuras con regla para medir longitudes y transportadores para medir ángulos), el problema de la constructibilidad capturó la fascinación de los estudiosos durante los dos milenios siguientes. Esto ilustra el poder de la curiosidad intelectual por sí sola para la motivación de la investigación matemática. Los estudiantes de las escuelas secundarias de hoy todavía deben estudiar cuestiones de constructibilidad.

La brújula que usaban los griegos era diferente a la que usamos hoy; no permanecería abierto en un ángulo fijo cuando se levantara de la página y colapsaría.

Por lo tanto, no era posible dibujar directamente varios círculos del mismo radio, por ejemplo, simplemente llevando la brújula a diferentes posiciones en la página. Sin embargo, en su obra Los Elementos, Euclides demostró cómo lograr esta hazaña con la brújula plegable griega.

Esto demuestra que cualquier construcción que se pueda lograr con una brújula moderna también se puede lograr con una brújula plegable. Por esta razón, hoy en día se supone que la brújula utilizada es moderna.

Se puede lograr un sorprendente número de construcciones con la ayuda de una regla y un compás. Enumeramos aquí solo algunas demostraciones.

Machine Translated by Google

1. Copie un segmento de línea AB dado en una línea L dada

   Coloque la brújula con la punta en un extremo del segmento de línea y la punta del lápiz en el otro, ajustando así la brújula a la longitud del segmento de línea. Etiqueta un punto A′ en la línea L, coloca la punta de la brújula en A′ y utilízalo para marcar un punto B′ en la línea. El segmento A′B′ es congruente con el segmento AB.

2. Dibujar una línea perpendicular a una línea dada L a través de un punto P dado en L.

   Coloque la brújula en un radio arbitrario y, con la punta de la brújula colocada en el punto P, marque dos puntos A y B en la línea L equidistantes de P.
   Ahora dibuja dos círculos del mismo radio, uno con centro en A y el otro con centro en B. Estos círculos se intersecan en dos posiciones X e Y. Estos puntos X e Y están a la misma distancia de cada uno de X e Y, y así , como prueba el estudio de EQUIDISTANCIA , la recta que pasa por X e Y (y P) es la bisectriz perpendicular del segmento de recta AB. En particular, es una línea a través de P perpendicular a L.

3. Construye la mediatriz de una recta dada segmento AB.

   La construcción descrita en 2 anterior logra esta hazaña.

4. Dibujar una línea perpendicular a una línea dada L a través de un punto P dado que no está en L.

   Coloque la brújula con su punto en P y dibuje un círculo grande que interseque la línea L en dos puntos A y B. Ahora siga el procedimiento para 2.

5. Dibuja un triángulo equilátero.

   Los puntos A, B y X descritos en 2 son los vértices de un triángulo equilátero.

6. Copie un triángulo arbitrario en una posición diferente en la página.

   Suponga que el triángulo dado tiene vértices etiquetados como A, B y C. Coloque el compás con el punto en A y la punta en B. Elija arbitrariamente un punto A′ en otra parte de la página y use el compás para dibujar un círculo con el centro A′ y radio igual a la longitud del segmento AB. Etiqueta un punto arbitrario en este círculo B′. Usa el compás para dibujar un segundo círculo con centro A′, pero esta vez con radio igual a la longitud de AC. Ahora debemos seleccionar un punto apropiado C′ en este segundo círculo. Dibuja un tercer círculo con centro B′ de radio igual a la longitud de BC. Etiqueta un punto de intersección entre los dos últimos círculos C′. Entonces A′B′C′ es una copia congruente del triángulo original.

7. Copia un ángulo dado a una ubicación diferente en la página.

   Simplemente considere el ángulo como parte de un triángulo y siga las instrucciones de la parte 6.

8. Construya una línea paralela a una línea dada L a través de un punto P no en L.

   Dibuje una línea arbitraria a través de P que interseque la línea L. Copie el ángulo que forman estas dos líneas en la posición P y dibuje una tercera línea a través de P en este ángulo. Esto produce un diagrama de un TRANSVERSAL que cruza un par de líneas que poseen ángulos correspondientes iguales. Por el contrario del POSTULADO PARALELO, las dos líneas son paralelas.

9. Construya una línea que divida un ángulo dado con precisión a la mitad.

   Dibuja un círculo de radio arbitrario con centro en el vértice del ángulo. Supongamos que este círculo interseca los rayos de los ángulos en las posiciones A y B. Ahora dibuja dos círculos del mismo radio centrados en cada uno de estos dos puntos. Sea P un punto de intersección de las dos circunferencias. Entonces la recta que une el vértice del ángulo con P es la bisectriz de un ángulo.
   (El principio de similitud SSS muestra que los dos triángulos producidos en la construcción son congruentes, lo que demuestra que el ángulo original está realmente dividido en dos medidas iguales).

10. Dibuja un cuadrado perfecto.

    Dibuja un segmento de línea arbitrario. Este será el primer lado del cuadrado. Etiquete sus extremos A y B. Usando la parte 2, construya una línea a través de B perpendicular al segmento de línea. Use un círculo con centro en B de radio igual en longitud a AB para encontrar un punto C en esta línea perpendicular de modo que BC tenga la misma longitud que AC. Esto proporciona el segundo lado del cuadrado. Repita este procedimiento para construir los dos lados restantes del cuadrado.

No todas las hazañas geométricas se pueden lograr solo con regla y compás. Por ejemplo, aunque también es posible construir un pentágono regular y un

Machine Translated by Google

hexágono regular con estas herramientas primitivas, la construcción de un heptágono regular (un polígono de siete lados) es imposible. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) demostró que un n-ágono regular es construible si, y solo si, n es un número de la forma 2k p1p2…pn , con cada pi + 1 (como 3, 5, un PRIMO distinto de la forma 22 s 17, 257 , y 65,537.) Aunque se puede bisecar un ángulo con regla y compás, el problema de la TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO no tiene solución. Los dos problemas clásicos de LA CUADRATURA DEL CÍRCULO y LA DUPLICACIÓN DEL CUBO tampoco se pueden resolver.

Números construibles Se

dice que un número real r es construible si, dado un segmento de línea en una página que se considera de longitud unitaria, es posible construir a partir de él un segmento de línea de longitud r usando solo las herramientas de una regla y un compás. . Por ejemplo, el número 2 es construible.
(Dado un segmento de línea AB de longitud uno, use la regla para extender la longitud de la línea. Dibuje un círculo de radio igual a la longitud de AB, centrado alrededor de B, para intersectar la línea en un nuevo punto C. Entonces la longitud de AC es 2.) Cualquier número entero positivo es construible.

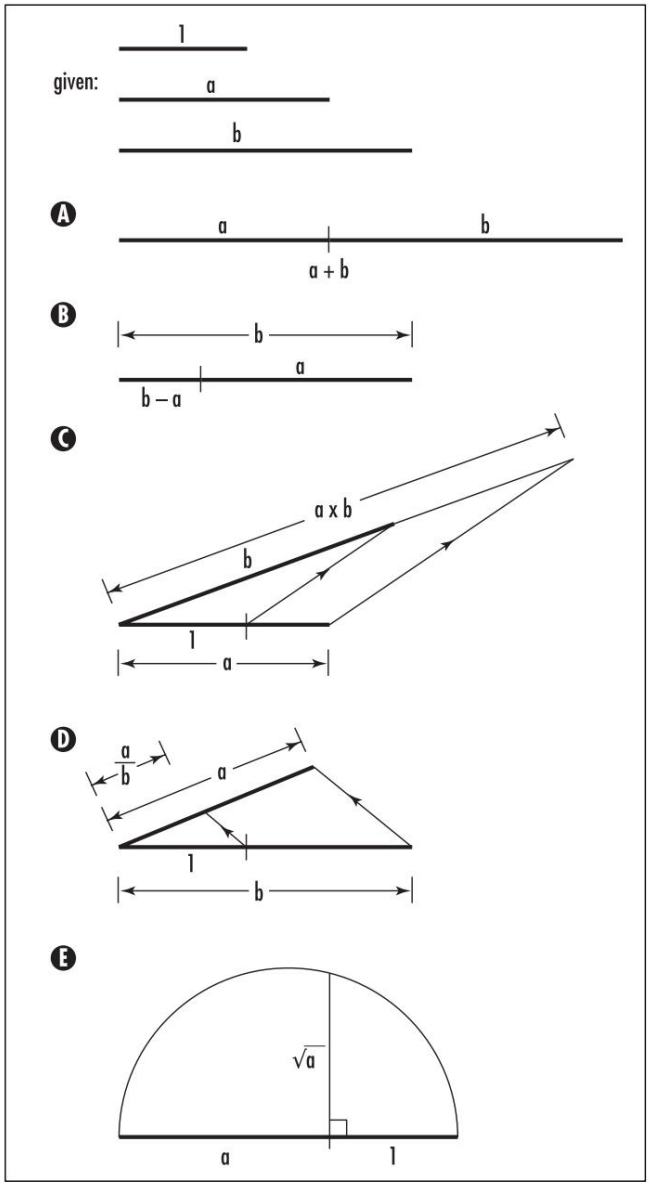
Supongamos que a y b son dos números construibles con b > a. (Es decir, dado un segmento de línea de longitud 1, también podemos producir segmentos de línea de longitud a y b). Entonces lo siguiente es cierto:

Los números a + b, b – a, a × b, $\frac{a}{b}$, y $\sqrt{\ }$ un son construibles.

El diagrama de la derecha indica cómo construir estas cantidades.

(En los diagramas tercero y cuarto, dibuje líneas paralelas a las líneas que conectan los extremos de los dos segmentos de longitudes a y b. El examen de triángulos semejantes muestra que los segmentos indicados tienen longitudes a × b y a/b, respectivamente. Para el quinto diagrama, agregue líneas para producir un gran triángulo rectángulo dentro del círculo con un diámetro de longitud a + 1 como hipotenusa. La aplicación del TEOREMA DE PITÁGORAS muestra que el segmento indicado es de hecho de longitud $\sqrt{a}$.)

Se sigue ahora que cualquier número racional es construible como lo es cualquier número que pueda obtenerse de los racionales mediante la aplicación de un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y cuadrados.



Construir la suma, la diferencia, el producto, el cociente y las raíces de a y b

raíces. (Por ejemplo, el número $\frac{7}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}}}$ es construible.) Los matemáticos han demostrado que estos son los únicos tipos de números reales que son construibles.
Los matemáticos también han demostrado que cualquier número que se pueda construir es un NÚMERO ALGEBRAICO. Como π, por ejemplo, no es algebraico, no es construible.

Consulte también AAA/AAS/ASA/SAS/SSS.

Machine Translated by Google

tabla de contingencia Una tabla que muestra el número de unidades de una muestra que tienen ciertas combinaciones de atributos se llama tabla de contingencia. por ejemplo, un proyecto de investigación de mercados registra el color del cabello de hombres y mujeres participantes y presenta los resultados en una tabla de contingencia:

Color de pelo

	Negro	Castaño Rubio		Rojo
Masculino	25	23	8	2
Femenino	18	[illegible]	14	5

La PRUEBA DE CHI-CUADRADO se puede utilizar para buscar correlaciones entre los atributos que se muestran en dichas tablas.

fracción continua Un número que es un entero más una fracción con denominador que es en sí mismo un número entero más una fracción, y continuando de esta manera, se llama una fracción continua. Por ejemplo,

$$\frac{1402}{457} = 3 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{3}{2 + \frac{3}{5}}}}$$

y

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

son representaciones de fracciones continuas de las cantidades 1.402/457 y $\sqrt{2}$ (como estableceremos a continuación). El primera fracción continua se detiene después de un número finito de pasos, y el segundo continúa para siempre. una continuación Se dice que la fracción está en forma estándar si, como en el segundo ejemplo, todos los numeradores son iguales a uno, y todos los enteros involucrados son positivos.

Todo número real positivo x se puede escribir como fracción continua en forma estándar. Si $\lfloor x \rfloor$ denota el entero más grande menor o igual que x, y {x} la fracción parte racional de x dada por la PARTE FRACCIONAL FUNCIÓN, entonces:

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{\frac{1}{\{x\}}}$$

Como la cantidad 1/{x} en sí misma es un número real positivo mayor que uno, podemos, de la misma manera, escribirlo como un número entero más otra fracción con numerador unitario. La aplicación repetida de este procedimiento produce una fracción continua en forma estándar.

Por ejemplo, si $x = \frac{1,402}{457}$, entonces podemos escribir

$$x = 3 + \frac{31}{457} = 3 + \frac{1}{\frac{457}{31}}, \text{ y } \frac{457}{31} = 14 + \frac{23}{31} = 14 + \frac{1}{\frac{31}{23}},$$

etcétera. Esto produce la forma estándar continuación fracción:

$$\frac{1,402}{457} = 3 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}} = [3; 14, 1, 2, 1, 7]$$

No es difícil demostrar que si x = a/b es una fracción, entonces 1/{x} es una nueva fracción con denominador más pequeño que b. Aplicación repetida de este procedimiento eventualmente debe producir una fracción continua con denominador igual a uno, por lo que el procedimiento termina. Esto demuestra que todos los números que son racionales (es decir, igual a una fracción) tienen fracción continua representaciones que se detienen después de un número finito de pasos. (Y, a la inversa, cualquier fracción continua se "desenreda" para producir una cantidad que es racional.) Como consecuencia:

> Todas las cantidades con representaciones de fracciones continuas infinitamente largas son irracionales.

Por ejemplo, se puede comprobar que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ y sustituyendo esta fórmula en sí misma da la continuación representación de fracciones presentada anteriormente:

Machine Translated by Google

$$\sqrt{2}\,1\,1 = + = + 1\,2 + \qquad \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}} \quad 1 = + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1\,2 + \sqrt{}}}}$$

$$1 = = + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + }}}}$$

Que este proceso no termine prueba que $\sqrt{2}$ no es una fracción. De manera similar, se establece:

$$\sqrt{3}\,1 + = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + }}}} = [,,]\overline{112}$$

$$\sqrt{5}\,2 = + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + }}}} = [,]\overline{24}$$

y $\sqrt{6} = [2,—2,4]$, mostrando que estas cantidades también son irracional. El número e también tiene un infinito continuo representación de fracciones: e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1, 1,10,…], al igual que la media áurea $= \frac{1\,5\sqrt{+}}{2} = [,,]\,111\,\cdot$

Los matemáticos han probado que finito continuo fracciones en forma estándar tienen una propiedad curiosa:

> Invertir el orden de los enteros que aparecen en una fracción continua finita produce una nueva fracción con el mismo numerador que la cantidad original.

Por ejemplo, como hemos visto, [3,14,1,2,1,7] = 1,402/457, y se calcula que:

$$[,14,3]\,7 = 1\,2\,1 \qquad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1\,14 + 3}}}}$$

es igual a la fracción 1.402/181.

Las fracciones continuas fueron estudiadas sistemáticamente por LEONHARD EULER (1707-1783), y fue el primero en introducirlas formalmente en un texto escrito. JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813) amplió gran parte de la obra de Euler. Las fracciones continuas han demostrado ser muy útiles para resolver una gran selección de ECUACIONES DIOFANTINAS. También proporcionan excelentes aproximaciones racionales a los números irracionales. Por ejemplo, terminando la representación de $\sqrt{2}$ después de un número finito de pasos produce una buena aproximación fracción continua para $\sqrt{2}$ mates a la raíz cuadrada de 2:

$$1\,1 + 2\,2 = \quad 1\,3\,1 \quad 1 \quad \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \quad \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

$$= \frac{17}{12} \quad \frac{41}{29} \quad \frac{99}{70} \quad \frac{239}{169}$$

Esta particular secuencia de fracciones, generada por la fórmula $\frac{a}{bab} \to \frac{ab + 2}{a +}$, fue utilizado por Teón de Esmirna como principios del siglo I EC Posee algunas propiedades misteriosas. Por ejemplo, cada segundo término de la secuencia corresponde a un TRIPLE PITAGÓRICO:

$$\frac{7}{5} = \frac{3\,4 +}{5\,345} \qquad 222 + =$$

$$\frac{41}{29} = \frac{20\,21 +}{22\,2}\ y\ 20\ 21\ 29 + =$$

$$\frac{239}{169} = \frac{119\,120 +}{222}\ y\ 119\ 120\ 169 + \qquad =$$

y cualquier otro término, redondeando el numerador y el denominador cada uno a la mitad, produce FIGURAR NÚMEROS que son a la vez cuadrados y triangulares:

$$\frac{3}{2\,1} \to \ y \qquad TS = 1 \qquad 1$$

$$\frac{17}{12\,6} \to \ y \qquad TS = 6 \qquad 36$$

$$\frac{99}{70\,35} \to \ y \qquad TS = \qquad 1,225$$

Machine Translated by Google

Desentrañar las expansiones en fracciones continuas de otros los números irracionales pueden producir descubrimientos análogos.

función continua Informalmente, se dice que una función ser continua si uno puede dibujar su gráfica sin nunca levantando el lápiz de la página. Esto significa que el la gráfica de la función consiste en una sola línea curva sin huecos, saltos ni agujeros.

Más precisamente, una función es continua en un punto x = a, si la función está definida en el punto a, y el LÍMITE de f(x) cuando x tiende a a es igual al valor de función en un:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(Si, por ejemplo, una función tiene valores f(0.9) = 1.9, f(0.99) = 1.99, f(0.999) = 1.999, y así sucesivamente, luego uno estaría muy sorprendido de saber que f(1) es igual a 18. La función no se consideraría continua en x =

1.) Una función que no es continua en un punto se dice ser discontinuo, o tener una discontinuidad, en ese punto. Una función que es continua en todos los puntos de su dominio se llama continuo.

Los matemáticos han demostrado que:

i. La suma de dos funciones continuas es continua.
ii. El producto de dos funciones continuas es continuo.

iii. El cociente de dos funciones continuas es continuo en cada punto donde el denominador es no cero
IV. La COMPOSICIÓN de dos funciones continuas es continuo.

Dado que el gráfico de línea recta f(x) = x es continuo, se sigue de las propiedades iy ii que cualquier función POLINOMIAL p(x) = anx n+…+a1x + a0 es continua. Por propiedad iii, cualquier FUNCIÓN RACIONAL es continua en todos los puntos donde el denominador no es cero. Las funciones sen x y cos x de TRIGONOMETRÍA son continuos.

La función tangente, tan x = $\frac{\text{pecado } x}{\text{porque } x}$, es continuo en todos los puntos que no sean $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$, el lugares donde el coseno es cero.

Es posible eliminar la discontinuidad de una función en x = a si existe el límite limx→a f(x) . por ejemplo, el función f(x) = $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no está definido en x = 1, ya que la cantidad $\frac{0}{0}$ no tiene sentido. Sin embargo, el álgebra muestra que el límite de esta función cuando x tiende a el valor 1 existe:

$$\text{límite}_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \text{límite}_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \text{límite}_{x \to 1} x + 1 = 2$$

(Dividir por la cantidad x – 1 es válido en este cálculo ya que, para valores de x cercanos, pero no iguales a, 1, la cantidad x – 1 no es cero.) En consecuencia, si declaramos que el valor de la función es 2 en x = 1:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si x es diferente de 1} \\ 2 & \text{si x es igual a 1} \end{cases}$$

ahora tenemos una función continua. una discontinuidad en x = a para una función f se llama removible si limx→a f(x) existe.

El tema de la continuidad es fundamental para la fundación del CÁLCULO. Un estudio del TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO y sus consecuencias ilustra esto.

hipótesis del continuo Un estudio de DENUMERABLE sets muestra que todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable. Así, en un sentido bien definido, numerable Los conjuntos son los tipos "más pequeños" de conjuntos infinitos. El ARGUMENTO DIAGONAL del segundo tipo muestra que el conjunto de los números reales no es numerable, es decir, en un sentido significativo, la CARDINALIDAD de los números reales, denotado c, es “más grande” que la cardinalidad de los conjuntos numerables, que se denota $\aleph_0$. Tenemos:

$$\aleph_0 < c$$

matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918), padre de la aritmética cardinal, conjeturó que no hay ningún tipo de conjunto infinito “más grande” que un infinito conjunto de objetos numerables, pero “más pequeños” que el continuo de los números reales. (Es decir, no hay un número cardinal estrictamente entre $\aleph_0$ y c.) Esta conjetura se conoció como la hipótesis del continuo. Puede ser expresado de manera equivalente como sigue:

Cualquier subconjunto infinito de números reales puede ponerse en correspondencia biunívoca con el

Machine Translated by Google

conjunto de números naturales, o se puede poner en correspondencia biunívoca con todo el conjunto de números reales.

A pesar de sus esfuerzos, Cantor no pudo establecer si su hipótesis del continuo era cierta o no. En 1940, el matemático austriaco KURT GÖDEL demostró que no se puede demostrar que la hipótesis del continuo es falsa.
Desafortunadamente, como muestran los TEOREMAS DE LA INCOMPLETITUD DE GÖDEL , esto no significa que la hipótesis del continuo sea verdadera: existen proposiciones en matemáticas que son indecidibles, es decir, que no pueden probarse como verdaderas y que no pueden probarse como falsas. Se sospechaba que la hipótesis del continuo podría ser una afirmación tan indecidible. Veintitrés años después, en 1963, el lógico estadounidense Paul Cohen logró demostrar que esto es así. En consecuencia, uno puede considerar la hipótesis del continuo como verdadera o como falsa, una elección arbitraria, y estar seguro de que nunca se encontrará con una contradicción matemática como resultado.

integral de contorno (integral curvilínea, integral de línea)
Si C es una curva en el plano xy y z = f(x,y) es una función de dos variables, entonces se puede intentar calcular el ÁREA de la superficie (un lado) de una "pared" que sigue la curva C y tiene "altura" la altura de la función sobre la curva. La integral que calcula esto, llamada integral de contorno y denotada como $\int_C f\,ds$, se construye seleccionando un gran número de puntos p0 , p1 ,…,pn a lo largo de la curva C y aproximando la superficie bajo consideración por una colección de secciones rectangulares . Se puede considerar que el i-ésimo rectángulo tiene base-longitud la distancia entre los puntos pi y pi+1, que denotamos di , y altura f(pi). La superficie es por tanto

aproximado por la suma a $\sum_{i=0}^{n-1} f(p_i)\,d_i$. Tomando el límite medida que tomamos aproximaciones más y más finas define la integral de contorno deseada.

Si la curva C está definida por ecuaciones paramétricas: x = x(t) y y = y(t) para algún parámetro t, a ≤ t ≤ b, entonces este procedimiento da la integral de contorno como:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

En física y en cálculo VECTORIAL avanzado , también se considera integrar, por ejemplo, el trabajo realizado en mover una partícula a lo largo de una curva C a través de un CAMPO VECTORIAL (campo de fuerza). Tales consideraciones conducen a otros tipos de integrales, también llamadas integrales de línea.

línea de contorno Una línea en un mapa que une puntos de igual altura se llama línea de contorno. Las curvas de nivel generalmente se dibujan para intervalos iguales de altura. Esto brinda a los lectores de mapas experimentados una imagen mental clara de la topografía tridimensional del terreno: las curvas de nivel muy juntas, por ejemplo, indican que la pendiente del terreno es empinada.

En matemáticas, las líneas de contorno se utilizan para representar las formas de las superficies que se encuentran en un espacio tridimensional. Por ejemplo, todos los puntos de la misma altura z = c en la superficie $z = x^2 + y^2$ se encuentran en un círculo de radio $\sqrt{c}$. Esto conduce a un mapa de contorno para la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ que consta de conjuntos de círculos concéntricos alrededor del origen.
La superficie descrita es un PARABOLOIDE con vértice en el origen.

contradicción En LÓGICA FORMAL, cualquier afirmación que produzca una TABLA DE VERDAD con entradas finales todas falsas se denomina contradicción. Por ejemplo, el enunciado (¬p) p es una contradicción. A partir de cualquier contradicción, es posible probar que cualquier enunciado matemático es verdadero. Por ejemplo, se puede comprobar que el enunciado compuesto (¬p) p → q es una tautología. En consecuencia, en matemáticas, si uno puede probar que un enunciado p y su negación ¬p son ambos verdaderos, entonces dado que tanto (¬p) p como (¬p) p → q son válidos, no importa qué enunciado represente q , q también es cierto por inferencia. Cualquier contradicción que aparezca en matemáticas probaría, por ejemplo, que 1 = 2, y que todo número irracional es una fracción. Los matemáticos esperan sinceramente que las matemáticas estén libres de contradicciones.

Véase también CONSISTENTE.

contrapositiva La contrapositiva de un enunciado CONDICIONAL "p implica q" es el enunciado: "no q implica no p". Es el enunciado que se obtiene cambiando el antecedente por el consecuente, y negando cada uno. Por ejemplo, la contraposición de la afirmación "Si es un caniche, entonces es un perro" es "Si no es un perro, entonces no es un caniche". La contrapositiva de un enunciado es una

Machine Translated by Google

forma lógicamente equivalente del enunciado, por lo que puede usarse en cualquier momento en su lugar. (Uno muestra que p → q y (¬q) → (¬p) tienen TABLAS DE VERDAD idénticas.)

En matemáticas, a veces es conveniente probar la forma contrapositiva de un teorema en lugar de probar la afirmación directamente. Este enfoque se llama razonamiento contrapositivo (o modus tollens), y la prueba presentada es una prueba por contraposición. Por ejemplo, el teorema: si n2 es impar, entonces n es impar, se prueba mejor suponiendo que n es par (es decir, n = 2k para algún entero k) y luego demostrando que n también es par.

La contrapositiva de un condicional "p implica q" no debe confundirse con la inversa del enunciado: "no p implica no q". Esta variación no es una forma lógicamente equivalente del condicional original.

Véase también ARGUMENTO; CONVERSAR; PRUEBA.

integral impropia convergente Ver IMPROPIO INTEGRAL.

sucesión convergente Se dice que UNA SUCESIÓN de números a1 ,a2 ,a3 ,… converge si los términos de la La secuencia se vuelve arbitrariamente cercana a un valor finito particular L. Por ejemplo, los números en la secuencia 0.9, 0.99, 0.999,… se aproximan al valor 1. Llamamos 1 el LÍMITE de esta secuencia.

Cualquier sucesión que converge se llama sucesión convergente. Si una secuencia {an } converge para limitar L, escribimos limn→∞an = L o, alternativamente, an → L cuando n → ∞, que se lee como "an se aproxima a L cuando n se vuelve grande". 1 3 Por ejemplo, la secuencia , 2 4 7 15 8 tiene limite uno (limn →∞ 2 1 − 2 − = 1), y la secuencia 1,– , ,– , 1 2 1 3 1 4 15 tiene límite cero (lim norte →∞ (− 1) norte 1 norte 0 → como n → ∞). El las nociones de límite y convergencia pueden hacerse matemáticamente precisas con una "definición ε –N " de un límite. (Ver LÍMITE.)

Una sucesión que no converge se dice que diverge. Una sucesión divergente podría tener términos que crecen en tamaño sin límite (1,4,9,16,25,…, por ejemplo), términos que oscilan sin converger a un límite 1 2 4 6 2 3 5 7 (,– , ,– 5 ,– ,…, 3 4 6 por ejemplo), o términos que oscilar sin límite (1,2,1,3,1,4,1,5,1,6,1,7,1,…, por ejemplo).

Véase también DIVERGENTE; PRODUCTO INFINITO; SERIE.

serie convergente Una SERIE infinita $\sum_{n=1}^{\infty} 2_n = + + aaa\ 1$ a3+… se dice que converge a un valor L si la secuencia de SUMAS PARCIALES, Sn = a1 + a2+…+an , se aproxima al valor L en el LÍMITE como n→∞. Para ilustrar, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \frac{1}{16} \cdots$ tiene sumas parciales:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S = + = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{4}$$

$$S = + + = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{7}{8}$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

que se aproximan al valor 1 a medida que n crece. En este sentido nosotros decir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge a 1, y escribimos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = A\ 1$$

Si el límite de las sumas parciales no existe, se dice que la serie diverge. Por ejemplo, la serie… diverge porque las sumas ser 1 y 0 y nunca se parciales 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – oscilan entre establecen en un valor particular. La serie 1 + 2 + 3 + 4 +... diverge porque las sumas parciales crecen arbitrariamente. El

serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge por la misma razón, que puede verse de la siguiente manera:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdots \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Machine Translated by Google

$$= \frac{n}{\sqrt{n}}$$

$$= \sqrt{n}$$

y así Sn → ∞ a medida que n crece.

Hay una serie de pruebas para determinar si converge o no una serie dada.

La prueba del enésimo término

si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces debe ser el caso que limn→∞ an = 0. En consecuencia, si el los términos an de la serie no se aproximan a cero, entonces la serie debe divergir.

Para ver por qué esto es cierto, observe que Sn = a1 + a2+…+an–1 + an = Sn–1 + an . Si las sumas parciales convergen a L, entonces debe tener que limn→∞ an = limn→∞(Sn – Sn–1) = L – L = 0. Esta prueba muestra, por ejemplo, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$ diverge porque los términos de la serie no se hacen pequeños.

La prueba de comparación

Esta prueba se aplica solo a series con términos positivos.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ con términos positivos converge si cada término an de la serie es menor o igual a los términos de otra serie con positivo términos que ya se sabe que convergen.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ con términos positivos diverge si cada término an de la serie es mayor que o igual a los términos de otra serie con términos positivos que ya se sabe que divergen.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge porque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$, una serie que ya conocemos converge Las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n+7}}{\sqrt{n}}$ diverge, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n+7}}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que sabemos diverge.

La prueba de la razón

Esta prueba se aplica solo a series con términos positivos.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ con todos los términos positivos:

i. converge si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es igual un valor menor que 1

ii. diverge si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es igual un valor mayor que 1

Si el límite en cuestión en realidad es igual a 1, entonces nada se puede concluir de esta prueba.

Esta prueba fue desarrollada por primera vez por el matemático francés AGUSTÍN-LOUIS CAUCHY (1789–1857). se prueba en CÁLCULO de textos haciendo una ingeniosa comparación con una SERIE GEOMÉTRICA. (Brevemente, si para todos los $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le < r \ 1$, términos entonces a2 ≤ ra1 , a3 ≤ ra2 ≤ r 2a1 , a4 ≤ ra3 ≤ r 3a1 , etc., y a1 + a2 + a3 + a4 +… ≤ a1 (1 + r + r ^{2} + r 3+…), por lo que converge.) Considere, por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n}$.

Aquí el término n está dado por $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{3^n}$, y tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3} = < \frac{1}{3} \ 1$$

. Por la prueba de la razón, esta serie converge.

La prueba de la raíz

Esta prueba se aplica solo a series con términos positivos.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ con todos los términos positivos:

i. converge si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe y es igual un valor menor que 1

ii. diverge si un $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe y es igual valor mayor que 1

Si el límite en cuestión en realidad es igual a 1, entonces nada se puede concluir de esta prueba.

Machine Translated by Google

La prueba de esta prueba se basa en hacer una comparación inteligente con una serie geométrica. (Si, para todos los términos, an ≤ r para algún valor r, entonces an ≤ r n y una comparación puede ser hecho.) Esta prueba se utiliza a menudo si la serie contiene términos que involucran exponentes. Por ejemplo, considere el serie $\sum_{n=(}^{\infty} \frac{1}{2\ 1\ nn)+}$. Aquí el enésimo término de la serie es dada por $a = \frac{1}{(nn^{2})+}$, y tenemos: $\sqrt{un} =$ $\frac{1}{nn^{2}+} < 0\ 1 =$. Por la prueba de la raíz, la serie debe converger.

La prueba integral

Esta prueba se aplica solo a series con términos positivos.

Supongamos que los términos de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} un$ son dados por una fórmula an = f(n), donde la función f(x) es continua, positiva y decreciente para x ≥ 1:

i. Si la INTEGRAL IMPROPIA $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ estafa bordes, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} un$ converge

ii. Si la integral impropia $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} un$ diverge

Esto se puede probar geométricamente dibujando rectángulos de ancho 1 justo arriba y justo debajo de la gráfica de y = f(x) para x ≥ 1, y luego comparando el área total de todos los rectángulos con el área bajo la curva.

Para ilustrar la prueba, considere la serie $\sum_{n=1\ norte}^{\infty} \frac{1}{2}$. Desde $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{X^{2}} dx = -\frac{1}{X}\Big|_{1}^{\infty} = 0\ 11\ (\ )$ converge, tenemos que las series $\sum_{n=1\ norte}^{\infty} \frac{1}{2}$ converge En general, se puede establecer de esta manera la prueba de la serie p.

La prueba de la serie p

Una serie de la forma $\sum_{n=\ 1\ norte^{pag}}^{\infty} \frac{1}{}$ con pa real número converge si p > 1 y diverge si p ≤ 1.

Una serie de la forma $\sum_{n=\ 1\ norte^{pag}}^{\infty} \frac{1}{}$ se llama serie p.

Prueba de convergencia absoluta

Suponer $\sum_{n=1}^{\infty} un$ es una serie con ambos positivos y términos negativos. Si la serie correspondiente $\sum_{n=1}^{\infty} |\ |\ un$ con todos los términos hechos positivos converge, entonces la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} un$ también converge.

Uno puede usar cualquiera de las primeras seis pruebas descritas anteriormente. para determinar si o no $\sum_{n=1}^{\infty} |\ |\ un$ converge El se establece la validez de la prueba de convergencia absoluta en la discusión sobre CONVERGENCIA ABSOLUTA.

Ya que hemos establecido, por ejemplo, que $\sum_{n=1\ norte}^{\infty} =\frac{1}{+}\ \frac{1}{2}\ +\ +L\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{dieciséis}$ converge, lo absoluto prueba de convergencia ahora nos asegura que la serie variante $1 -\frac{1}{+}+\ -\frac{1}{+}+\ -\frac{1}{+}+L\ \frac{1}{25}\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{49}\ \frac{1}{64}\ \frac{1}{81}\ \frac{1}{100}$ también converge (al igual que cualquier otra variación que involucre el inserción de signos negativos).

La prueba de convergencia absoluta no cubre todos casos. Todavía es posible que una serie con negativo términos, $\sum_{n=1}^{\infty} un$, podría converger aunque $\sum_{n=1}^{\infty} |\ un\ |$ diverge Este fenómeno se llama CONDICIONAL CONVERGENCIA.

Prueba de series alternas

Si los términos de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} un$ suplente en signo y satisfacer

i. a1 ≥ a2 ≥ a3 ≥ ⋯

ii. un → 0

entonces la serie converge.

(Ver SERIE ALTERNA). Esta prueba muestra, por ejemplo, que la SERIE ARMÓNICA alterna $1 -\frac{1}{+}+\frac{1}{2}-L\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ converge a pesar de que

Machine Translated by Google

la serie correspondiente con todos los términos positivos no lo hace.

Es posible multiplicar series convergentes por constantes y sumar y restar dos series convergentes.

Precisamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ambos convergen, y k es un número, entonces:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} ka_n\right) = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Estas propiedades se pueden utilizar para evaluar nuevas sumas infinitas. Por ejemplo, en 1740 LEONHARD EULER mostró que un valor particular de la FUNCIÓN ZETA está dado por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \cdots = \frac{2\pi}{6}$. entonces sigue que la forma alterna de esta serie tiene valor:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \cdots - 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \cdots - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

Véase también SERIE ARITMÉTICA; SERIES GEOMÉTRICAS; SERIE DE POTENCIA.

recíproco (implicación inversa) El recíproco de un enunciado CONDICIONAL “p implica q” es el enunciado: “q implica p”. Es el enunciado obtenido al invertir los roles del antecedente y el consecuente. El reverso de una declaración condicional puede o no ser cierto. Por ejemplo, el recíproco del enunciado verdadero, “Si un triángulo tiene tres lados iguales, entonces tiene tres ángulos iguales”, es válido—un triángulo con tres ángulos iguales sí tiene tres lados iguales—mientras que el recíproco del enunciado, “Si n es divisible por 6, entonces n es divisible por 2,” es falso—un número par necesita no ser divisible por 6.

Véase también ARGUMENTO; CONTRAPOSITIVO.

convexo Véase CÓNCAVO/CONVEXO.

coordenadas Un conjunto de números que se utilizan para ubicar un punto en una recta numérica, en un plano o en el espacio se denominan coordenadas de ese punto. Por ejemplo, las coordenadas de los puntos en una recta numérica podrían estar dadas por sus distancias desde un punto fijo O (llamado origen), con los puntos en un lado específico de O considerándose una distancia positiva de O, y los puntos en el lado opuesto de O a una distancia negativa de O.

Una forma de asignar coordenadas a puntos en el plano es establecer un punto fijo O en el plano (nuevamente llamado origen) y dos líneas de referencia (llamadas ejes) que pasan por O. Cada eje se divide en un lado positivo y un lado negativo por O. Dado un punto P en el plano, uno dibuja líneas a través de P paralelas a cada uno de los ejes. Las distancias a lo largo de las cuales estas nuevas líneas se cruzan con los ejes especifican la ubicación del punto P.

Cuando los ejes se dibujan en ángulos rectos, el sistema se denomina sistema de coordenadas cartesianas o sistema de coordenadas angulares rectas. Los ejes generalmente se denominan ejes x e y, y el par de números (x, y) que especifican la ubicación de un punto P (como unidades x a lo largo de un eje y unidades y a lo largo del segundo) se denominan CARTESIANOS . COORDENADAS de P. En el espacio tridimensional, la ubicación de los puntos se puede especificar a través de tres ejes mutuamente perpendiculares (u oblicuos) que pasan por un punto común O.

La idea de asignar conjuntos de números a puntos para especificar ubicaciones es antigua. Hacia el siglo III a. C., los eruditos griegos APOLONIO DE PERGA y ARQUÍMEDES DE SIRACUSA habían utilizado la longitud, la latitud y la altitud para definir la posición de un punto en la superficie de la Tierra. Los agrimensores romanos y griegos etiquetaron los mapas con líneas de cuadrícula, para especificar ubicaciones a través de números de fila y columna.

Ver también COORDENADAS CILÍNDRICAS; DIMENSIÓN; TIERRA; COORDENADAS POLARES; DERECHO/IZQUIERDO SISTEMA DE MANO; COORDENADAS ESFÉRICAS.

Machine Translated by Google

coplanar Véase PLANO.

coprime Otro nombre para RELATIVAMENTE PRIMA.

correlación Ver COEFICIENTE DE CORRELACIÓN; DISPERSIÓN DIAGRAMA.

coeficiente de correlación Cualquier valor numérico utilizado para indicar el grado en que dos variables en un estudio son asociado se llama coeficiente de correlación. Por ejemplo, un estudio médico podría registrar la altura y el calzado tamaño de los participantes adultos que sospechan que podría haber una relación entre estas dos características. Si dos variables son tales que cuando una cambia, entonces la otra lo hace de una manera relacionada (por lo general, cuanto más alto es un individuo, mayor es la talla de calzado en promedio, digamos) entonces se dice que las dos variables están correlacionadas. UNA DISPERSIÓN DIAGRAM se utiliza para detectar posibles correlaciones. Si el puntos del diagrama de dispersión tienden a seguir una línea recta línea, entonces las dos variables están linealmente correlacionadas.

KARL PEARSON (1857–1936) desarrolló una medida para detectar específicamente relaciones lineales. Si los DATOS los valores en un estudio se representan como pares de valores, $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$, primero defina:

$$S_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$S_{yy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{n} - \bar{y}^2$$

y

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}$$

Aquí $\bar{x}$ es la MEDIA de los valores de x y $\bar{y}$ la media de los valores de y. Las cantidades Sxx y Syy se llaman VARIANZAS y Sxy la COVARIANZA de las dos variables. Entonces el coeficiente de correlación de Pearson, denotado R^2, es dado por:

$$R^2 = \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}S_{yy}}$$

Esta cantidad sólo adopta valores entre 0 y 1. A el valor de R2 = 1 indica una relación lineal perfecta entre las dos variables, con los puntos en el diagrama de dispersión asociado precisamente sobre una línea recta. Un valor R2 = 0 indica que no hay relación entre las dos variables. (En particular, la covarianza de las dos variables es cero.) Todas estas afirmaciones pueden ser probado a través de un estudio de los MÍNIMOS CUADRADOS MÉTODO. Un valor de R2 cercano a 1, digamos 0.9 o superior, indica que una correlación lineal es muy probable.

Véase también CORRELACIÓN DE RANGO; REGRESIÓN; ESTADÍSTICA TICS: DESCRIPTIVAS.

contable Cualquier conjunto, finito o infinito, cuyos elementos se puede colocar en una lista se dice que es contable. Más precisamente, un conjunto S es contable si hay un uno a uno correspondencia entre los elementos de S y un subconjunto de los NÚMEROS NATURALES (es decir, es posible unir cada elemento de S con un número natural único). Por ejemplo, el conjunto {cuchillo, tenedor, cuchara} es contable porque sus elementos se pueden emparejar con el elementos del subconjunto {1, 2, 3} de números naturales: lista cuchillo como primero, tenedor como segundo y cuchara como tercero, por instancia. El conjunto de todos los enteros es contable, porque sus elementos se pueden colocar en la lista:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

El conjunto de todas las palabras en inglés que existen hoy y podrían ser útil en el futuro es contable: enumere todas las letras del alfabeto (posibles palabras de una letra), luego, en orden alfabético, todas las combinaciones de un par de letras (las palabras de dos letras), seguido de todas las combinaciones posibles de tres letras, y así sucesivamente, para producir una lista bien definida de todas las cadenas de letras posibles.

El ARGUMENTO DIAGONAL del primer tipo muestra que el conjunto de todos los NÚMEROS RACIONALES es contable. El El argumento diagonal del segundo tipo, sin embargo, establece que el conjunto de NÚMEROS REALES no lo es. en definitiva sentido entonces, el conjunto de los reales es un conjunto infinito “mayor” que el conjunto de racionales.

Un conjunto se llama DENUMERABLE si es infinito y contable. Las cosas son un poco confusas, sin embargo, para algunos autores usarán indistintamente los términos contable y numerable para conjuntos finitos e infinitos.

La CARDINALIDAD de un conjunto contable infinito es denotado $\aleph_0$. Un conjunto numerable que no es infinito se dice ser FINITO.

Machine Translated by Google

contraejemplo Un ejemplo que demuestra que una afirmación hecha no es verdadera o, al menos, no siempre es verdadera se llama contraejemplo. Por ejemplo, aunque $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ es verdadera para $a = 1$ yb = 0, esta identidad es falsa en general, como lo demuestra el contraejemplo a = 9 yb = 16. Podemos así decir que la afirmación

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

no es válido declaración.

A mediados del siglo XIX, el matemático francés Alphonse de Polignac (1817-1890) hizo la afirmación:

> Todo número impar se puede escribir como la suma de una potencia de dos y un número PRIMO .

Por ejemplo, el número 17 se puede escribir como 17 = 22 + 13, 37 como 37 = 23 + 29 y 1065 como 1065 = 210 + 41.
De Polignac afirmó haber verificado su afirmación para todos los números impares hasta 3 millones y, en consecuencia, estaba convencido de que su afirmación era cierta. Desafortunadamente no lo es, ya que el número 127 proporciona un contraejemplo a esta afirmación, ya que ninguna de las siguientes diferencias es prima:

$$127 - 2 = 125 = 5 \times 25$$
$$127 - 4 = 123 = 3 \times 41$$
$$127 - 8 = 119 = 7 \times 17$$
$$127 - 16 = 111 = 3 \times 37$$
$$127 - 32 = 95 = 5 \times 19$$
$$127 - 64 = 63 = 3 \times 21$$

(No necesitamos ir más lejos, ya que la siguiente potencia de dos, 128, es mayor que 127). De Polignac pasó por alto este simple contraejemplo.

Aún no se han encontrado contraejemplos a las famosas CONJECTURA DE GOLDBACH y COLLATZ. CONJETURA.

covarianza Si un estudio científico registra información numérica sobre dos características de los individuos o eventos que se examinan (como la altura y el número de zapatos de los adultos participantes, o la lluvia estacional y el rendimiento de los cultivos de un año a otro), entonces los DATOS obtenidos del estudio son registrados apropiadamente como pares de valores. Si un estudio tiene N participantes, con pares de datos (x1 , y1),…,(xN, yN), entonces la covarianza de la muestra es la cantidad:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

donde –x es el valor medio de x y –y el valor medio de y.
Un ejercicio de álgebra muestra que esta fórmula también se puede escribir:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}$$

La covarianza se utiliza para calcular los COEFICIENTES DE CORRELACIÓN y las líneas de REGRESIÓN , como por ejemplo , para el MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS . El coeficiente de correlación de Pearson muestra que dos variables con covarianza cero son independientes, es decir, el valor de una variable no tiene efecto sobre el valor de la otra.

Ver también ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

Cramer, Gabriel (1704–1752) Álgebra suiza , Geometría, Teoría de la probabilidad Nacido el 31 de julio de 1704 en Ginebra, Suiza, el erudito Gabriel Cramer es recordado por su texto de 1750 Introducción al análisis de las líneas algébricas (Introducción a el análisis de curvas algebraicas), en el que clasifica ciertos tipos de curvas algebraicas y presenta un método eficiente, hoy llamado REGLA DE CRAMER , para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Cramer nunca afirmó haber descubierto la regla. De hecho, fue establecido décadas antes por el matemático escocés COLIN MACLAURIN (1698-1746).

Cramer obtuvo un doctorado a la temprana edad de 18 años después de completar una tesis sobre la teoría del sonido, y dos años más tarde se le otorgó un puesto conjunto como catedrático de matemáticas en la Académie de Clavin en Ginebra. Después de compartir el puesto durante 10 años con el joven matemático Giovanni Ludovico Calandrini (solo un año mayor que él), Cramer finalmente recibió la presidencia completa.

El puesto completo le dio a Cramer muchas oportunidades de viajar y colaborar con otros matemáticos de toda Europa, como LEONHARD EULER, Johann Bernoulli y Daniel Bernoulli de la famosa FAMILIA BERNOULLI, y ABRAHAM DE MOIVRE.

Cramer escribió muchos artículos sobre matemáticas que cubren temas tan diversos como la geometría y el álgebra, la historia de las matemáticas y un análisis matemático de las fechas en que cae la Pascua.

Su texto de 1750 Introducción a l'analyse des lignes courbes algébriques fue la obra más famosa de Cramer.
Comenzando el capítulo uno con una discusión sobre los tipos de

Machine Translated by Google

las curvas que considera, Cramer presenta técnicas efectivas para dibujar sus gráficos. En el segundo capítulo, analiza el papel de las transformaciones geométricas como un medio para simplificar las ecuaciones a curvas (similar al enfoque actual que usa la noción de EJES PRINCIPALES). Esto lleva a su famosa clasificación de curvas en el tercer capítulo. Aquí Cramer también analiza el problema de encontrar la ecuación de una curva de grado dos ax2 + bxy + cy2 + dx + ey = 0 que pasa por cinco puntos previamente especificados en el plano. Reemplazar los valores de esos puntos conduce a cinco ecuaciones lineales en las cinco incógnitas a, b, c, d y e. Para resolver el problema, Cramer remite al lector a un apéndice del texto, y es aquí donde aparece su famosa regla para resolver sistemas de ecuaciones. Cramer no reclamó la originalidad del resultado y es posible que supiera que Colin Maclaurin fue el primero en establecer el famoso teorema. (Cramer citó el trabajo de Colin Maclaurin en muchas notas a pie de página a lo largo de su texto, lo que sugiere que estaba trabajando en estrecha colaboración con los escritos de Maclaurin).

Cramer también se desempeñó en el gobierno local durante muchos años, ofreciendo opiniones de expertos en asuntos de artillería y defensa, excavaciones y en la reconstrucción y conservación de edificios. Murió el 4 de enero de 1752 en Bagnols-sur-Cèze, Francia. Aunque Cramer no inventó la regla que lleva su nombre, merece reconocimiento por desarrollar una notación superior para la regla que aclaró su uso.

Regla de Cramer Descubierta por el matemático escocés COLIN MACLAURIN (1698–1746), pero publicada por primera vez por el matemático suizo GABRIEL CRAMER (1704–52), la regla de Cramer utiliza la función DETERMINANTE para encontrar una solución a un conjunto de ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS. Un ejemplo ilustra mejor el proceso.

Considere el conjunto de ecuaciones:

$$2x + 3y + z =$$
$$3x – 2y + 2z =$$
$$11\ 3x + y – 2z = –6$$

Haga que A sea la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{matrix}$$

El determinante de esta matriz no es cero: det(A) = 35.

Una propiedad estándar de los determinantes afirma que si los elementos de la primera columna se multiplican por el valor x, entonces el determinante cambia por la fac AND EX

$$\det \begin{matrix} 2x & 3 & 1 \\ x & -2 & 2 \\ 3x & 1 & -2 \end{matrix} = x\,A\,\det( )$$

Agregar un múltiplo de otra columna a la primera no cambia el valor del determinante. Sumamos y veces la segunda columna, y z veces la tercera a esta primera columna:

$$\det \begin{matrix} 2 + 3y + z & 3 & 1 \\ 2 + 2y - 2z & -2 & 2 \\ 3 + y - 2z & 1 & -2 \end{matrix} = x\,A\,\det( )$$

Pero por supuesto esta primera columna es igual a la columna de valores de las ecuaciones simultáneas:

$$\det(x)A = \det \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 11 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$= \det \begin{matrix} 3 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} = 35$$

Esto nos dice que el valor de x que buscamos es:

$$x = \frac{35}{\text{Un detalle( )}} = \frac{35}{35} = 1$$

De la misma manera, el valor y se encuentra como la razón del determinante de la matriz A reemplazando la segunda columna por la columna de valores de las ecuaciones simultáneas y el determinante de A:

$$y = \frac{\det \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 11 & 1 & -2 \end{matrix}}{\det( )} = \frac{-362}{35} = -10$$

Machine Translated by Google

y z es una razón similar de determinantes:

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{-35}{35} = -1$$

En una situación general, la regla de Cramer establece:

Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, entonces el valor de la i-ésima variable xi en ese sistema de ecuaciones es:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

siempre que el determinante de A no sea cero. Aquí Ai es la matriz A con la i-ésima columna reemplazada por la columna de valores del conjunto de ecuaciones.

Observe que la regla de Cramer muestra que solo puede haber una solución para un sistema de ecuaciones para el cual el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

En el estudio de los determinantes, la regla de Cramer se usa para demostrar que una matriz A es invertible si, y solo si, su determinante no es cero.

ruta crítica Suponga que se nos da una secuencia de tareas que deben realizarse para completar un proyecto grande, como construir una casa o publicar una enciclopedia, y suponga que estas tareas tienen las siguientes propiedades:

1. Hay un orden de precedencia para ciertas tareas.
2. Algunas tareas se pueden realizar simultáneamente.
3. Se conoce la duración de cada tarea.

Entonces, la ruta crítica para el proyecto es la cadena de tareas más larga (en el tiempo) que debe completarse en el orden especificado. Por lo tanto, la ruta crítica pone un límite a la cantidad mínima de tiempo que lleva completar todo el proyecto.

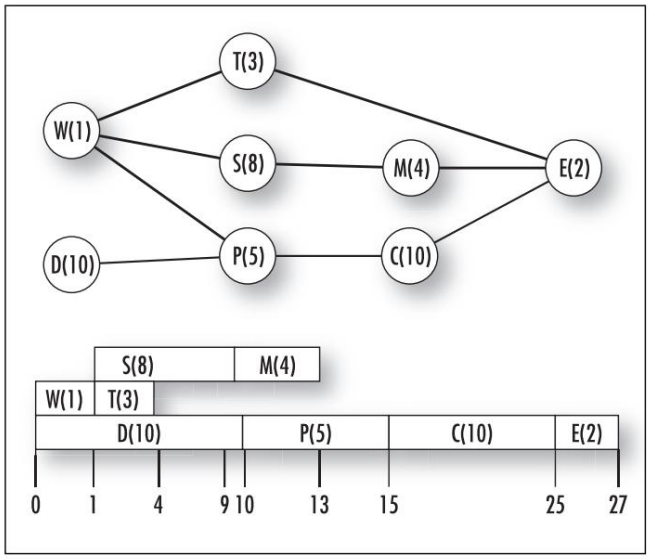
Por ejemplo, considere el proyecto de preparar hamburguesas y ensalada para la cena. La siguiente tabla describe las tareas que deben completarse, sus tareas previas y su duración.

TAREA	Tiempo para completar el requisito previo (en minutos)	Tareas
W: lavarse las manos	1	Ninguno
D: descongelar hamburguesa	10	Ninguno
P: dar forma a la carne en empanadas	5	ancho, profundidad
C: cocinar hamburguesas	10	PAG
S: lavar y rebanar las ensaladas	8	W
M: ensalada mixta	4	S
T: poner la mesa	3	W
E: servir la comida	2	C, M, T

El diagrama superior a continuación proporciona un esquema útil del orden de las tareas. (Sus tiempos están escritos entre paréntesis). Vemos que la cadena más larga, es decir, la ruta crítica del proyecto, es la secuencia DPCE que requiere 27 minutos para completarse. En el segundo diagrama se demuestra que todas las tareas de este ejemplo se pueden realizar en exactamente 27 minutos. En general, no hay garantía de que el tiempo dictado por la ruta crítica sea realmente alcanzable.

Las computadoras se utilizan para buscar rutas críticas en proyectos complejos.

Véase también INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.



Diagramas de tareas

Machine Translated by Google

producto vectorial (producto vectorial) Muchos problemas de geometría tridimensional requieren que los físicos y matemáticos encuentren un VECTOR que sea perpendicular a cada uno de los dos vectores dados a y b. El producto cruzado, denotado a × b, está diseñado para ser un vector de este tipo.

Se comienza colocando los dos vectores a y b en el mismo punto del espacio. Estos vectores definen un plano en el espacio, y se ve que hay dos direcciones posibles para que un tercer vector apunte de manera que sea perpendicular a este plano. Los matemáticos se han decidido por la convención de seguir la "regla de la mano derecha" para determinar qué dirección elegir:

> Tome su mano derecha y apunte sus dedos en la dirección indicada por el primer vector a. Ahora oriente su mano, con sus dedos aún apuntando en esta dirección, de tal manera que su palma mire hacia el lado del plano que contiene el vector b. (Si doblas los dedos, en consecuencia girarán en el ángulo más pequeño que lleva de a a b.) La dirección en la que apunta tu pulgar ahora es la dirección que tomará el vector a × b.

Así, a × b será un vector que apunta en una dirección mientras que b × a apuntará en la dirección opuesta. (De hecho: b × a = –a × b.)

Los matemáticos se han decidido por una segunda convocatoria. ción para definir la magnitud de a × b:

> La magnitud de a × b es el área del ALELOGRAMA PAR definida por los vectores a y b.

Si θ es el ángulo más pequeño entre a y b, entonces el paralelogramo definido por los dos vectores tiene lados de longitud |a| y |b|. Tomando |a| como base, la altura del paralelogramo viene dada por |b|·sinθ y, en consecuencia, el ÁREA del paralelogramo es |a|·|b|·sinθ. De este modo:

> a × b se define como el vector de magnitud |a|·|b| ·sinθ con dirección dada por la regla de la mano derecha.

Por ejemplo, si i = <1,0,0> es el vector unitario que apunta en la dirección del eje x, y j = <0,1,0> el vector unitario en la dirección del eje y, entonces i × j es un vector que apunta en la dirección del eje z, con una longitud igual al área del cuadrado unitario definido por i y j, es decir, 1. Así:

yo × j = <0,0,1> = k

Si dos vectores a y b son paralelos, entonces el ángulo entre ellos es cero y a × b = 0.

Existe un método alternativo para calcular los productos cruzados. Si a está dada por a = <a1 ,a2 ,a3> = a1 i + a2 j + a3k y b está dada por b = <b1 ,b2 ,b3> = b1 i + b2 j + b3k, entonces se puede comprobar que el PRODUCTO PUNTO del vector:

(a2b3 – a3b2)i + (a3b1 – a1b3)j + (a1b2 – a2b1)k

con cada uno de a y b es cero. Por tanto, este nuevo vector es perpendicular tanto a a como a b. Los matemáticos han demostrado que también tiene dirección dada por la regla de la mano derecha y magnitud igual al paralelogramo definido por a y b. Por lo tanto, este nuevo vector es de hecho el producto cruzado de a y b:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

donde, para la igualdad final, hemos escrito la fórmula en términos del DETERMINANTE de una matriz de 3 × 3.

(Para demostrar que este nuevo vector sí coincide con la cantidad a × b, gire el sistema de vectores a, b y a × b para que a apunte en la dirección del eje x y b quede en el plano xy . Entonces , para el sistema rotado tenemos: a1 = |a|, a2 = 0, a3 = 0, b1 = |b|cosθ, b2 = |b| sinθ, b3 = 0. Ahora se puede verificar fácilmente que la fórmula anterior produce un vector de la longitud requerida |a|·|b|·sinθ apuntando en la dirección correcta. Luego se argumenta que la fórmula sigue siendo válida cuando el sistema de tres vectores se gira de nuevo a su posición original.) Así, por ejemplo, si a = <1,4,2> y b = <3,0,1>, entonces a × b = <4·1 – 2·0, 2,3 – 1·1, 1·0 – 4·3> = <4,5, – Según la FÓRMULA DE LA DISTANCIA, este vector tiene + (–12)2 = √ longitud + 52 , que debe ser el área del paralelogramo formado por a y b.

En dos dimensiones, el determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$ = da un vector de la misma longitud que a = <a1 ,a2> y perpendicular a él. En el espacio de cuatro dimensiones siempre se puede encontrar un cuarto vector perpendicular a cada uno de los tres vectores dados.

Véase también ORTOGONAL; PRODUCTO TRIPLE VECTORIAL; ECUACIÓN VECTORIAL DE UN PLANO.

Machine Translated by Google

criptografía La práctica de alterar la forma de un mensaje mediante códigos y cifras para ocultar su significado a quienes lo interceptan, pero no a quienes lo reciben, se denomina criptografía. Si las letras del alfabeto y los signos de puntuación se reemplazan por números, las matemáticas se pueden usar para crear códigos efectivos.

En 1977, tres matemáticos, Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, desarrollaron un método de criptografía de clave pública en el que el método de codificación de un mensaje puede ser público para todos sin comprometer la seguridad del mensaje. El método de encriptación RSA, como se lo conoce hoy, se basa en las matemáticas de la ARITMÉTICA MODULAR y se basa en el hecho de que es extraordinariamente difícil encontrar los dos factores que producen un producto grande determinado. Es el principal método de encriptación utilizado hoy en día por las instituciones financieras para transmitir información confidencial en todo el mundo.

El método de cifrado RSA se basa en el siguiente resultado de la aritmética modular:

> Supongamos que p y q son números PRIMOS distintos . Si n es un número sin p ni q como factor, $(p–1)(q–1)$ entonces $n \equiv 1 \pmod{pq}$. Además, tenemos $m(p–1)(q–1)+1 \equiv n \pmod{pq}$ para dos números naturales n y m, incluso si n es un múltiplo de p o q.

(Probamos este resultado al final de esta entrada.) Se procede como sigue:

1. Codifique su mensaje como una cadena M de números.
2. Elija dos números primos grandes p y q para que su producto N = pq sea mayor que M. Sea k = (p – 1)(q – 1) y elija un número e sin factor común con k.

   Los números N y e pueden hacerse públicos.
3. Eleva el número M a la potencia eth, módulo N.

   Esto da el mensaje codificado M′:

$$M' \equiv Yo \pmod{N}$$

4. Dado que el MÁXIMO COMÚN DIVISOR de k y e es primero, el ALGORITMO EUCLIDEO muestra que podemos encontrar los números d y m de modo que 1 = de – mk. En particular, existe un número d tal que $ed \equiv 1 \pmod{k}$.

   Mantenga el número d en secreto.
5. Para decodificar el mensaje, eleva M′ a la potencia d-ésima.

   Por el resultado indicado anteriormente, esto devuelve el mensaje original M:

$$M'^{d} = Med = Mkm+1 = Mm(p–1)(q–1)+1 \equiv M \pmod{N}$$

Si uno trabaja con números primos muy grandes, digamos, primos de 10 000 dígitos, es virtualmente imposible factorizar el número público N y encontrar k y d. Por lo tanto, el sistema RSA es extremadamente seguro. (Este uso de números primos grandes también explica el entusiasmo actual por el descubrimiento de números primos cada vez más grandes). Por otro lado, multiplicar y elevar números grandes a potencias es fácil de hacer para las computadoras, por lo que el método RSA también es muy fácil. para implementar.

Prueba de resultado

Suponga primero que n no es un múltiplo de p y considere los números 1,2,…,p – 1. Multiplique cada uno por n. Si, para dos números x e y en la lista, tenemos $nx \equiv ny \pmod{p}$, entonces n(x – y) es un múltiplo de p. Esto solo puede suceder si x e y son el mismo número. Así, hasta múltiplos de p, los productos $n\cdot1, n\cdot2, \ldots, n\cdot(p – 1)$ son distintos y por tanto deben representar un reordenamiento de la lista original, módulo p. En consecuencia, $n\cdot1\cdot n\cdot2\cdot\ldots\cdot n(p – 1) \equiv p–1$ a la izquierda $1\cdot2\cdot\ldots\cdot(p – 1) \pmod{p}$, y el factor n debe ser congruente con 1 módulo p: $np–1 \equiv 1$(módulo p). De manera similar, tenemos $n \equiv 1 \pmod{q}$ si n no es un múltiplo de q. De estos dos resultados se deduce que si n no es un múltiplo de p o q, entonces:

$$1^{(p–1)(q–1)} = (n^{p–1})^{q–1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(q–1) = (n^{q–1})^{p–1} \equiv 1 \pmod{q}$$

muestra que n y q, y por lo tanto, por pq. Esto prueba la primera afirmación $m(p–1)(q–1)+1$ hecha. El segundo sigue observando que $n\cdot n^{m(q–1)} \equiv n \pmod{p}$ es un enunciado verdadero incluso si n es un múltiplo de p, y n también es $m(p–1)(q–1)+1 – n$ es cierto para todos los valores de n. Cualquier cantidad n siempre es divisible tanto por p como por q.

cubo (hexaedro) El tercer SÓLIDO PLATÓNICO, el cubo, es la figura sólida delimitada por seis caras cuadradas idénticas que se encuentran en ángulo recto. Tiene ocho vértices y 12 aristas. Porque el VOLUMEN de un cubo de lado, cualquier número elevado a la tercera potencia a está dado por a^3 a veces se le llama cubo. Los “números cúbicos” son los cubos de los números de contar: 0, 1, 8, 27, 64, 125,…

Es posible subdividir un cubo grande en 27 cubos más pequeños con seis cortes planos. Este número de cortes no se puede mejorar incluso si se le permite a uno

Machine Translated by Google

"apilar" piezas del cubo durante el proceso de corte para que como para cortar varias piezas a la vez. (Para ver esto, considere el cubo más interno entre los 27 cubos pequeños. Tiene seis caras planas, cada una de las cuales necesita ser cortada. Como ningún corte plano individual cortará dos de esas caras, de hecho se requiere un mínimo de seis cortes para formar los 27 pequeños cubos.) Es posible, sin embargo, cortar un cubo grande en dados $4 \times 4 \times 4 = 64$ cubos más pequeños en menos de nueve rebanadas si se permite el "apilamiento" (seis serán suficientes). nueve rebanadas basta con cortar un cubo en $5 \times 5 \times 5 = 125$ más pequeño cubitos. En general, el número mínimo de rebanadas necesario para subdividir un cubo grande en $n \times n \times n = n^3$ cubos más pequeños viene dada por la fórmula:

$$3 \log_2 n$$

haciendo uso de la FUNCIÓN DE TECHO.

El análogo tetradimensional de un cubo es un HIPERCUBO.

Véase también FUNCIÓN DE SUELO/TECHO/ PARTE FRACCIONAL CIONES; DUPLICACIÓN DEL CUBO; PARALELEPÍPEDO; PRISMA.

raíz cúbica/ raíz enésima La raíz cúbica de un número a es un valor x tal que $x^3 = a$. Nosotros escribimos $\sqrt[3]{a}$ para la raíz cúbica de un

Todo número real a tiene exactamente una raíz cúbica real. Por ejemplo, la raíz cúbica de 27 es 3 (ya que $3 \times 3 \times 3$ es igual a 27), y la raíz cúbica de –8 es –2 (ya que $-2 \times -2 \times -2$ es igual a –8). Si uno trabaja dentro del campo de los números complejos, entonces el TEOREMA FUNDAMENTAL DE ÁLGEBRA muestra que todo número tiene exactamente tres raíces cúbicas complejas. Por ejemplo, las tres raíces cúbicas de 27 son $y_o = 3$, $-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, y 3. Un estudio de las raíces n-ésimas de la unidad muestran que los tres complejos las raíces cúbicas de un número se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero en el plano complejo.

En general, la raíz enésima de un número a es un valor x tal que $x^n = a$. De nuevo, el teorema fundamental de el álgebra muestra que todo número tiene exactamente n raíces enésimas complejas . Si a es un número real, entonces a tiene un número real raíz enésima si a es positivo. (Por ejemplo, una raíz cuarta de 16 es 2.) Si a es un número real negativo, entonces un n-ésimo real raíz existe sólo si n es impar. (Por ejemplo, –243 tiene un raíz quinta, a saber –3, pero no raíz cuarta real.) La raíz real La raíz enésima de un número a, si existe, se denota $\sqrt[n]{a}$.

Ver también ECUACIÓN CÚBICA; RAÍZ; RAÍZ CUADRADA.

ecuación cúbica Cualquier ecuación POLINOMIAL de grado tres de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ con $a \neq 0$ es llamada ecuación cúbica.

Durante el Renacimiento, los eruditos buscaron una fórmula aritmética general en términos de los coeficientes a, b, c, y d que resolverían todas las ecuaciones cúbicas (una similar a la famosa fórmula CUADRÁTICA para resolver ecuaciones de grado dos). En ese momento, sin embargo, los eruditos no estaban cómodo trabajando con NÚMEROS NEGATIVOS, o con CERO como un número, y escribió ecuaciones en una forma que evitaba su aparición. (Por ejemplo, la x cúbica $2x + 5 = 0$ fue emitido como $x^3 + 5 = 2x$.) Matemáticos en consecuencia pensó que había ocho diferentes Tipos de ecuaciones cúbicas a resolver.

Erudito italiano SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526) fue el primero en avanzar en la resolución de ciertas cúbicas, pero nunca publicó sus resultados. Más tarde, el erudito NIC COLÒ TARTAGLIA (ca. 1499-1557) consiguió resolver algunas clases adicionales de cúbicos. GIROLAMO CAR DANO (1501-1576) publicó la obra de Tartaglia (sin consentimiento de Tartaglia) en su obra épica Ars magna de 1545 (El gran arte) y desarrolló un enfoque general que Resuelve todas las ecuaciones cúbicas. La fórmula que ideó es hoy llamada "fórmula de Cardano" o "fórmula de Cardano Tartaglia". Lo describimos aquí usando moderno notación:

Al dividir la ecuación cúbica entre el coeficiente principal a, podemos suponer que estamos trabajando con un cubico de la forma:

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

para numeros $B = \frac{b}{a}$, $C = \frac{c}{a}$, y $D = \frac{d}{a}$. Sustituyendo $x = y - \frac{B}{3}$ simplifica la ecuación aún más a uno sin un término cuadrado:

$$y^3 + py + q = 0$$

(Aquí $p = C - \frac{B^2}{3}$ y $q = \frac{2B^3}{27} - \frac{aC}{3} + D$.) Esta forma de la cúbica se llama cúbica reducida, y cualquier solución y de esta ecuación corresponde a una solución $x = y - \frac{b}{3a}$ de la ecuación original.

Suponga que la ecuación tiene una solución que puede escribirse como la suma de dos cantidades: $y = u + v$. Sustituyendo estas variables se obtiene:

Machine Translated by Google

$$(tu^3 + v^3) + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Esta ecuación se cumplirá si podemos elegir u y v 3 para que u
= –q y 3uv + p = 0. Esto produce un par
ecuaciones para u 3 y v de 3 :

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Resolviendo 3 en la primera ecuación y sustituyendo el
segundo, se muestra que debe satisfacer el
para el resultado de v 3 en el
ecuación cuadrática:

$$(u^3)^2 + q(u^3) - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

y usando la fórmula cuadrática, esto da u 3 , y contra
sucesivamente $v^3 = -u^3 - q$, ser los dos números:

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} \qquad -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Ahora debemos sacar la raíz cúbica de estas cantidades.
Note primero que cualquier número M tiene tres raíces cúbicas:
una $\sqrt[3]{M}$ real, denotada por M, y dos imaginarios, $w \times \sqrt[3]{M}$

donde $w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Colocar:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

y

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v_3 = -\frac{p}{3u_3} = -w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ahora se puede comprobar que las tres cantidades u1 + v1 , u2
y u3 + v3 representan las tres soluciones de + v2 , y
cúbica reducida + py + q = 0. Constituyen la fórmula de
Cardano.

La cantidad bajo el signo de la raíz cuadrada:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

se llama discriminante de la cúbica, y determina la naturaleza
de las soluciones:

- Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene una raíz real y dos raíces complejas.
- Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene tres raíces reales, al menos dos de los cuales son iguales.
- Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación tiene tres raíces reales distintas.

En el tercer caso, se requiere tomar combinaciones de raíces
cúbicas de números complejos para producir,
sorprendentemente, respuestas puramente reales. Por ejemplo,
el método de Cardano aplicado a la ecuación $x^3 = 15x + 4$ da
como solución la cantidad:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

No es inmediato que este número sea x = 4.

Este confuso fenómeno de usar cantidades complejas para producir resultados reales fue explorado por primera vez por el matemático italiano RAFAEL BOMBELLI (1526-1572).
El matemático francés FRANÇOISE VIÈTE (1540–1603) usó fórmulas trigonométricas como un enfoque alternativo para identificar las tres raíces reales distintas que aparecen en este desconcertante escenario.

Otro método El
matemático francés Viète también desarrolló el siguiente método más simple para resolver ecuaciones cúbicas. Este método fue publicado póstumamente en 1615.

Machine Translated by Google

Toma la forma reducida de la y cúbica y $^3 + py + q = 0$ reescríbela como:

$$^3 + 3ry = 2t$$

dónde $r = \frac{pq}{y}$. Sustituir $t = \frac{-3 - r}{-2}$ obtener la $y = \frac{r}{-} - zz$ a ecuación más simple:

$$(z^3)^2 + 2t(z^3) - r^3 = 0$$

que es una cuadrática en z^3. Todo lo que uno necesita hacer ahora es resolver La y extrae sus tres raíces cúbicas. para z solución de la ecuación cúbica se necesita en la solución de la ECUACIÓN CUÁRTICA.

Ver también TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA; HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y DEL ÁLGEBRA (ensayo).

rizo Ver DIV.

curva Un conjunto de puntos que forman una línea, ya sea recta o de flexión continua, se denomina curva. La GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN trazada en COORDENADAS CARTESIANAS, por ejemplo, es una curva. Una curva también se puede considerar como la trayectoria de una partícula en movimiento (y, en consecuencia, se pueden usar ECUACIONES PARAMÉTRICAS para describirla).

Como gráfica de una función, una curva se llama algebraica si está dada por una fórmula y = f(x) con f una función algebraica, y trascendental si f es trascendental. (Ver NÚMERO ALGEBRAICO.) Por ejemplo, la PARÁBOLA y es $^2 = x$ algebraica, como lo es cualquier SECCIÓN CÓNICA, pero el seno la curva y = sen x es trascendental.

Una curva que se encuentra en un plano se llama curva plana. Una curva en el espacio tridimensional que no permanece en un plano, como una HÉLICE, se llama sesgada o torcida. Cualquier curva que se encuentra en un espacio tridimensional se llama curva espacial (esté o no torcida).

Una curva se dice cerrada si se puede atravesar la curva y vuelve al mismo punto un número indefinido de veces. Por ejemplo, un CÍRCULO está cerrado. En algunos entornos, es apropiado permitir un punto en el infinito, en cuyo caso una línea recta también se consideraría una curva cerrada. (Uno puede dirigirse al infinito en una dirección y regresar desde el infinito desde la otra dirección y repetir este viaje un número indefinido de veces). Una curva con PUNTOS FINALES se llama abierta.

Véase también ARCO; LUGAR.

cúspide Véase TANGENTE.

polígono cíclico Un POLÍGONO se llama cíclico si todos sus vértices (esquinas) se encuentran en un círculo. Como todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia, todos los triángulos son cíclicos. También lo son todos los cuadrados, rectángulos y todos los polígonos regulares. Sin embargo, no todos los cuadriláteros o polígonos de lados superiores son

cíclicos BRAHMAGUPTA (598–665) dio una fórmula para el área de un cuadrilátero cíclico. Los TEOREMAS DEL CÍRCULO muestran que los ángulos opuestos de cualquier cuadrilátero cíclico son suplementarios. Lo contrario también es cierto: cualquier cuadrilátero con ángulos opuestos que suman 180° es cíclico.

Ver también FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA ; CÍRCULO; TEOREMA DE PTOLOMEO .

cicloide La forma trazada por un punto en la circunferencia de un círculo que rueda a lo largo de una línea recta se llama cicloide. (En concreto, es la curva que traza un chicle pegado a la llanta de una rueda de bicicleta.)

Esta curva tiene muchas propiedades geométricas notables y fue estudiada extensamente por matemáticos de los siglos XVI y XVII, y más tarde.

GALILEO GALILEI (1564–1642) fue el primero en estudiar la curva y le dio su nombre. En 1644, el discípulo de Galileo, Evangelista Torricelli (quien inventó el barómetro), demostró que el área bajo un arco de la cicloide es igual a tres veces el área del círculo rodante.

En 1658, el arquitecto inglés Christopher Wren demostró que la longitud de un arco de la cicloide es cuatro veces el diámetro del círculo. En 1696, Johann Bernoulli de la famosa FAMILIA BERNOULLI planteó y resolvió el ahora famoso problema de la braquistocrona:

> Imagina una pequeña pelota que comienza en un punto A y rueda hacia abajo a lo largo de una curva hasta un punto B más bajo a la derecha de A. La pelota es impulsada únicamente por la fuerza de la gravedad. ¿Qué curva de forma que conecta A con B permite que la pelota viaje entre ellos más rápido?

Sorprendentemente, una línea recta no da el tiempo más corto, pero sí una cicloide invertida.

En 1658, el científico holandés Christiaan Huygens consideró la cicloide en su trabajo sobre los péndulos. Descubrió que un péndulo simple en el que la lenteja está

Machine Translated by Google

obligado a seguir una trayectoria en forma de cicloide siempre tiene el mismo período independientemente de la longitud del péndulo. Esto se llama la propiedad tautocrona de la cicloide. (También ocurre que si una bola parte del reposo en cualquier punto de una cicloide invertida y viaja a lo largo de la curva bajo la fuerza de la gravedad, entonces el tiempo que tarda en llegar al punto más bajo de la curva es independiente de la ubicación inicial. de la pelota.)

Se pueden considerar curvas relacionadas siguiendo la trayectoria trazada por un punto en la circunferencia de un círculo a medida que ese círculo rueda a lo largo de otro círculo. Si el círculo rueda en el interior de un círculo fijo, entonces la curva trazada se llama hipocicloide. Si un círculo rueda en el exterior de un círculo fijo, entonces la curva trazada se llama cloide epicy. En ambos casos, el círculo fijo se llama deferente y el círculo móvil es el epiciclo.

Se dan algunos nombres especiales a las curvas creadas en situaciones particulares. Por ejemplo, cuando los dos círculos tienen el mismo radio, el epicicloide producido tiene forma de corazón y se llama CARDIOIDE. Cuando el círculo exterior rodante tiene un diámetro de un cuarto del círculo fijo, la curva de cuatro puntas que se produce se llama astroide. Un epicicloide con cinco cúspides se llama ranunculoide.

El epicicloide fue conocido por APOLONIO DE PERGA del siglo III a. C., quien lo utilizó en sus descripciones del movimiento planetario.

cilindro En el espacio tridimensional, un cilindro es la superficie formada por una colección infinita de líneas rectas paralelas, cada una de las cuales pasa por un punto de una curva cerrada fija dibujada en un plano. La curva cerrada se llama directriz del cilindro, y las líneas trazadas se llaman generadores del cilindro. A menudo, el término cilindro se usa para la figura sólida de volumen finito confinada entre dos planos paralelos. En este escenario, el cilindro tiene tres caras: las dos regiones planas paralelas, cada una llamada base de la figura, y la superficie lateral dada por las líneas rectas que generan el cilindro. La base de un cilindro no necesita ser un círculo. Por ejemplo, un CUBO satisface la definición de ser un cilindro.

Si la superficie lateral está en ángulo recto con la base, entonces el cilindro se llama cilindro recto. Todos los demás cilindros se llaman oblicuos. La altura de un cilindro es la distancia perpendicular entre las dos bases.

Todas las secciones transversales horizontales de un cilindro tienen el mismo tamaño y forma que la base del cilindro. EL PRINCIPIO DE CAVA LIERI muestra entonces que el volumen V de un cilindro está dado por V = Ah, donde h es la altura del cilindro y A es el área de su base.

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287–212 a. C.) demostró que el volumen de una ESFERA es dos tercios del volumen del cilindro que la contiene. La fórmula para el volumen de una esfera se sigue fácilmente.

Véase también CONO.

coordenadas cilíndricas (coordenadas polares cilíndricas) En el espacio tridimensional, la ubicación de un punto P se puede describir mediante tres coordenadas (r, θ y z) llamadas coordenadas cilíndricas de P, donde (r, θ) son las COORDENADAS POLARES de la proyección de P sobre el plano xy , y z es la altura de P sobre el plano xy. Las coordenadas cilíndricas son útiles para describir superficies con simetría circular alrededor del eje z. Por ejemplo, la ecuación de un cilindro de radio 5 con un eje central, el eje z puede describirse mediante la ecuación simple r = 5. (Como el ángulo θ varía entre cero y 360°, y la altura z varía en todos los valores, se describen puntos en un cilindro infinitamente largo.) La superficie definida por la ecuación θ = c, para alguna constante c (permitiendo que r y z varíen), es un semiplano vertical con un lado a lo largo del eje z , y la superficie z = c es un plano horizontal.

Un punto P con coordenadas cilíndricas (r, θ, z) tiene COORDENADAS CARTESIANAS correspondientes (x, y, z) dadas por:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

Estas fórmulas siguen las fórmulas de conversión estándar para coordenadas polares.

Es habitual presentar el ángulo θ en MEDIDA EN RADIANES. En este caso, una integral triple de la forma $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ sobre un volumen V descrito en Carte Las coordenadas sianas se convierten en la integral correspondiente $\iiint_V f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$ en coordenadas cilíndricas. La aparición del término r en el integrando sigue por la misma razón que r aparece en la conversión de una DOBLE INTEGRAL de coordenadas planas cartesianas a coordenadas polares.

Véase también ÁNGULO; COORDENADAS ESFÉRICAS.

Machine Translated by Google

D

data (singular, datum) Información de un número la naturaleza se llama datos. Por ejemplo, los registros del diario el número de visitantes a una atracción turística, o la medición de las tasas de crecimiento de un cultivo de levadura bajo diferentes condiciones de temperatura, serían ejemplos de datos. Los conteos directos de estudios observacionales o mediciones de experimentos como estos se llaman primarios o datos sin procesar. Información numérica que describe los datos sin procesar (como el valor promedio, el valor más grande, el rango de valores, y así sucesivamente) a veces se denominan datos secundarios. La ciencia del desarrollo de métodos para recolectar, organizar, y resumir datos se llama estadística descriptiva.

Véase también ESTADÍSTICAS; ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

fórmula de los días de la semana Es un ejercicio desafiante para derivar una fórmula matemática que determina el día de la semana en la que cae una determinada fecha del calendario.

Como primer paso, conocer el día en que enero 1 de un año cae, es razonablemente sencillo determinar en qué día cualquier otra fecha de ese año caídas. Por ejemplo, el día de Año Nuevo en el año 2000 fue un sábado. Como los días de la semana se alternan en períodos de siete, se deduce que el 8 de enero, el 15 de enero y El 22 de enero de ese año también fueron sábados. Desde hay 31 días en enero, y como 31 son tres más que un múltiplo de 7, se sigue que el 1 de febrero, 2000, cayó en el día de la semana tres días después del día sábado, es decir, el martes. Como en febrero de ese año hubo 29 días, y 29 es uno más que un múltiplo de 7, El 1 de marzo cayó en el día de la semana que sigue directamente al martes. día, a saber, miércoles; y el 1 de abril, 30 días después, cayó en un día laborable dos días después del miércoles, es decir, el viernes. De esta forma podemos determinar el día de la semana de cualquier primer día del mes, y de allí, el día laborable de cualquier día en particular de ese mes.

Es conveniente etiquetar el domingo como “día 0”, el lunes como “día 1”, hasta el sábado como “día 6”. como los dias de semana ciclo en unidades de 7, también es apropiado ignorar todos los múltiplos de 7 y trabajar solo con los restos de números al dividir por 7. (Es decir, trabajaremos en un sistema base-7 de ARITMÉTICA MODULAR.) Por ejemplo, fechas 16 y 30 días en un año caen en el mismo día de la semana que el día 2 días en el año: todos los números involucrados aquí hay 2 más que un múltiplo de 7. Llamaremos al números 16, 30 y 2 “equivalentes” y escribe 16 ≡ 2 y 30 ≡ 2, por ejemplo.

El 1 de enero de 2000 cayó en el día 6. Como hemos señalado, El 1 de febrero cae 31 ≡ 3 días después y por lo tanto cae el día 6+3 ≡ 2, martes. El 1 de marzo cae otro 29 ≡ 1 día más tarde, y así aterriza en el día 6 +3+1 ≡ 3, miércoles. En En general, la siguiente tabla muestra la cantidad por cual se debe ajustar una fecha en particular dependiendo de el mes en que se encuentra:

Mes	Ene.	Feb.	marzo	abril	mayo	junio
Agregar	0	3	3 (4)	6 (0)	1 (2)	4 (5)

Mes	julio	agosto	5 de	Oct.	noviembre	diciembre
Suma	6 (0)	2 (3)	septiembre (6)	0 (1)	3 (4)	5 (6)

Machine Translated by Google

Los números entre paréntesis corresponden a años bisiestos. Así, por ejemplo, el 1 de julio de 2000, cayó el día 6 + 0 = 6, sábado; y el 1 de diciembre de 2000, cayó en el día 6 + 6 ≡ 5, viernes.

Ahora se trata de determinar en qué día de la semana cayó el primer día de un año dado. Supongamos, por el bien del argumento matemático, que el calendario gregoriano ha estado en uso durante dos milenios, y que el 1 de enero del año 0 fue el día d. Considere el día el día de la semana del día de Año Nuevo N años después.

Como cada año ordinario contiene 365 (≡1) días, el día en que cae el 1 de enero se adelanta un día laborable cada año. Por cada año bisiesto, se avanza un día adicional. Necesitamos determinar el número de años bisiestos durante un período de N años.

En general, un año bisiesto ocurre cada 4 años, produciendo $\frac{N}{4}$ posibles ocurrencias de un año bisiesto, incluyendo el año cero. (Aquí estamos haciendo uso de la FUNCIÓN DE TECHO.) Sin embargo, ningún año bisiesto ocurre en un valor de año N que es un múltiplo de 100—y esto ocurre 100 veces—excepto si N es un múltiplo de 1,000, que ocurre veces. (El año 1900, por ejemplo, no fue un año bisiesto 1000, pero el año 2000 sí lo fue). El número total de años bisiestos L que ocurren en un período de N años desde el año cero está dado por:

$$L = \frac{NN\,N}{4} - \frac{}{100\ 1000} +$$

Por ejemplo, el 29 de febrero apareció, en teoría, $\frac{2000}{4} - \frac{2000}{100} + \frac{2000}{1000} = 500 - 20 + 2 = 482$ veces antes de la fecha del 1 de enero del año N, viene dado por:

$$re + norte + l$$

(El 1 de enero del año cero, era el día d. Hay un adelanto por cada uno de los N años, y un adelanto de un día adicional por cada uno de los L años bisiestos.)

Sabiendo que el día de Año Nuevo, 2000, fue el día 6, deducimos entonces que el valor apropiado de d está dado por:

$$d + 2000 + 482 = 6$$

Es decir, trabajando con residuos de la división por 7, d + 5 + 6 = 6, resultando d = 2. Así, en nuestra teoría, el 1 de enero del año cero fue martes.

Ahora tenemos el siguiente ALGORITMO para calcular el día de la semana de cualquier fecha dada. Supongamos que deseamos calcular el día de la semana del día D, del mes M, en el año N.

1. Considere el número de año N y calcule el resto de la división por 7.
2. Calcular $L = \frac{NN\,N}{4} - \frac{}{100\ 1000} +$ y su resto de la división por 7.
3. Suma las respuestas de los dos pasos anteriores y suma 2. Calcula el resto de este número, si es necesario, al dividirlo por 7.
   Este es el número del día de la semana del 1 de enero del año N.
4. A este número de día de la semana agregue el día D, reste 1 y agregue el número de mes apropiado de la tabla anterior. Mire el resto al dividir por 7, si es necesario.
   Este resultado final es el número de día de la semana del día deseado.

Por ejemplo, para la fecha del 15 de marzo de 2091, N = 2091 ≡ 5, L = 523 – 21 + 3 = 505 ≡ 1, dando como resultado que el 1 de enero de ese año sea el día 2 +5+1 ≡ 1, un lunes. A esto le sumamos 14 días (el número de días después es 1 menos que la fecha D) con un ajuste de mes de valor 3 (este no es un año bisiesto). Así, el 15 de marzo de 2091 caerá en el día 1 + 14 + 3 ≡ 4, un jueves. (Advertencia: como el calendario gregoriano no se utilizó antes del 15 de octubre de 1582, este algoritmo no se puede aplicar a fechas anteriores).

Simplificación del procedimiento

Este método se puede simplificar hasta cierto punto. Escriba el número de año como mcyy, con m para milenios, c para siglo e yy como el número de año de dos dígitos. Más precisamente, queremos decir:

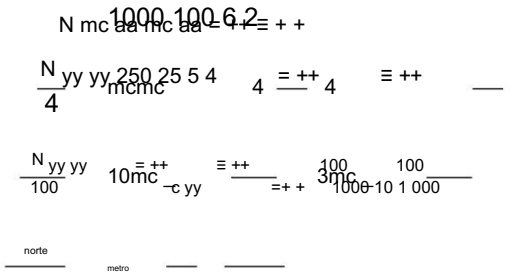
$$N = 1000m + 100c + año$$

con 0 ≤ c ≤ 9 y 0 ≤ yy ≤ 99. Por ejemplo, el año 3261 se escribirá:

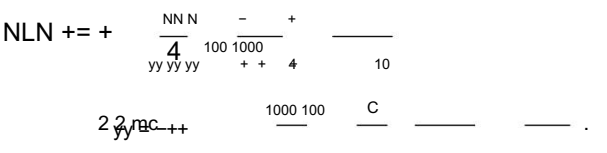
$$norte = 1000 \times 3 + 100 \times 2 + 61$$

Darse cuenta de

Machine Translated by Google



flexible:



comprobar que la cantidad + − es igual a 1 si y cero en cualquier otro caso. Reescribiendo los pasos 1 y 2 del algoritmo anterior, tenemos:

1 de enero del año mcyy cae en el día número



donde ε es 1 si el año es un cambio de siglo, pero no el cambio de milenio, y cero en caso contrario.

Así, por ejemplo, considere el día de Año Nuevo del año 3261. El número del milenio aquí es m = 3, el número del siglo es c = 2 y tenemos yy = 61. Además, siglo , ε = 0. Por tanto, , y, dado que este no es un turno de la el día de Año Nuevo de este año caerá en el día 2 + (2 × 3) – (2 × 2) + 61 + 16 + 0 ≡ 4, un jueves. Ahora podemos calcular el día de la semana de cualquier otro día de ese año si lo deseamos.

Un método alternativo El matemático Chris McManus ha observado que cualquier día de la semana que caiga “0 de marzo” (el último día de febrero), también caerá 4/4 (4 de abril), 6/6 (6 de junio), 8/8 (8 de agosto), 10/10 (10 de octubre) y 12/12 (12 de diciembre). El lo mismo ocurre con el 5/9 (5 de septiembre) y el 11/7 (11 de julio), y sus inversos 9/5 y 7/11. (Uno puede recordar esto con la regla mnemotécnica: “Trabajo de 9 a 5 en la tienda de 7 a 11”). Entonces, por ejemplo, si sabe que el 20 de diciembre de 2002 fue viernes y desea determinar el día en que cayó el 10 de abril de ese año, calcule rápidamente que el 12 de diciembre fue un jueves, dando como resultado que el 4 de abril también fuera jueves, y que el 10 de abril fuera miércoles.

decibelio Denotado dB, un decibelio es una medida de la intensidad del sonido, con cero decibelios que representan la intensidad más baja a la que se puede escuchar un sonido.

Los decibelios siguen una ESCALA LOGARÍTMICA de base 10 . Esto significa que cada aumento de 1 dB representa un aumento de 10 veces en la intensidad del sonido. Por ejemplo, una nota tocada a 1 dB es 10 veces más fuerte que el sonido más suave, y una tocada a 2 dB es 100 veces más fuerte que el sonido más suave. El habla humana normal está en un nivel de alrededor de 60 dB, y un susurro está alrededor de 20 dB.

El umbral de dolor para el oído humano es de unos 90 dB. Se sabe que los conciertos de rock alcanzan niveles de 120 dB a una distancia de 50 m del sistema de sonido.

El nivel de decibelios de un sonido se calcula mediante la fórmula:



donde P es la intensidad de la nota que se toca y P0 es la intensidad más baja a la que se puede escuchar esa nota.

Un intervalo de 10 dB se llama belio. La intensidad del sonido se medía originalmente en términos de bel, y se eligió el nombre en honor al inventor estadounidense del teléfono, Alexander Graham Bell. Hoy, sin embargo, la unidad de un decibelio se considera más útil y es la más utilizada.

representación decimal Ver BASE DE UN NÚMERO SISTEMA.

descomposición (factorización) El resultado de expresar un objeto o cantidad dada en términos de componentes más simples se llama descomposición. Por ejemplo, el TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA muestra que cualquier número natural se descompone como producto de números primos

Machine Translated by Google

números. Además, cualquier función racional se descompone en una suma de FRACCIONES PARCIALES. El proceso de ELIMINACIÓN GAUSSIANA muestra que cualquier MATRIZ A cuadrada se descompone en el producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U. Un ejemplo de tal factorización LU es:

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{matrix}$$

Cualquier VECTOR se descompone en una suma de vectores base. Por ejemplo:

$$\langle 3, 2, 1 \rangle = 3\langle 1, 0, 0 \rangle + 2\langle 0, 1, 0 \rangle + \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Y en GEOMETRÍA, como todo polígono se puede dividir en triángulos, se podría decir que todos los polígonos se “descomponen” en una unión de triángulos.

Estudiar las piezas más simples en la descomposición de un objeto puede conducir a resultados generales sobre el objeto. Por ejemplo, saber que los ángulos interiores de un triángulo suman 180° nos permite deducir inmediatamente que los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero (la unión de dos triángulos) suman 360°, y que los ángulos interiores de cualquier pentágono (el unión de tres triángulos) suman 540°.

Véase también FACTORIZACIÓN.

Dedekind, Julius Wilhem Richard (1831-1916)
Análisis alemán Nacido el 6 de octubre de 1831 en Braunschweig, ahora parte de Alemania, Richard Dedekind es recordado por su elegante construcción del sistema de NÚMEROS REALES , que se basa en una idea que hoy se conoce como DEDEKIND CUT. Este trabajo representó un paso importante en la formalización de las matemáticas.
En particular, ofreció los medios para finalmente poner CALCU LUS sobre una base matemática sólida.

Dedekind estudió TEORÍA DE NÚMEROS y cálculo en la Universidad de Göttingen. Obtuvo un doctorado en 1852 bajo la supervisión de CARL FRIEDRICH GAUSS (fue el último alumno de Gauss), y dos años más tarde obtuvo un título de habilitación que le otorgaba el derecho a ser miembro de la facultad universitaria.

En 1858, Dedekind aceptó un puesto en el Poly technikum de Zürich. Dedekind se dio cuenta de que los fundamentos del cálculo, en particular, las propiedades del sistema de números reales sobre el que descansa el cálculo, no eran correctamente entendido. Cuando se enfrentó al desafío de enseñar cálculo a los estudiantes del Polytechnikum por primera vez, Dedekind decidió no eludir el tema, sino desarrollar un enfoque que justificase adecuadamente los principios de la materia ante él y sus estudiantes. Fue entonces cuando se le ocurrió la idea de un corte Dedekind.

Dedekind publicó los detalles de esta construcción varios años después en su famoso artículo de 1872 “Continuity and Irrational Numbers”. Este documento fue muy bien recibido y fue admirado no solo por las ideas brillantes que contenía, sino también por la forma en que se detallaron esas ideas. Dedekind exhibió un talento para explicar conceptos matemáticos con una claridad excepcional.

En 1862, Dedekind regresó a su ciudad natal para aceptar un puesto en el Brunswick Polytechnikum. Permaneció allí por el resto de su vida. Nunca se casó y vivió su vida con una de sus hermanas, quien también permaneció soltera.

Dedekind recibió muchos honores por su destacado trabajo, incluida la elección a la Academia de Berlín en 1880, la Academia de Roma y la Académie des Sciences de París en 1900, así como doctorados honorarios de las Universidades de Zurich, Brunswick y Oslo. Dedekind murió en Brunswick, Alemania, el 12 de febrero de 1916.

Dedekind tuvo un impacto duradero en la comprensión moderna del sistema de números reales. La mayoría de los cursos de nivel universitario sobre el tema de los números reales discutirán en detalle los temas explorados por Dedekind.

Corte de Dedekind Durante la década de 1800, quedó claro para los matemáticos que para demostrar que CÁLCULO es matemáticamente sólido, es necesario definir correctamente lo que significa un número real y, además, demostrar que el sistema de números reales es "completo", en el sentido que no le “falten” puntos. Esto es particularmente importante para establecer el TEOREMA DEL VALOR EXTREMO, el TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO y el TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Todos los teoremas clave del cálculo se basan en estos tres resultados.

Aunque los NÚMEROS RACIONALES Q son relativamente fáciles de definir, el sistema de racionales ciertamente no está completo: la raíz cuadrada de 2, por ejemplo, no es una fracción y, por lo tanto, "falta" del conjunto de racionales.
La tarea de definir exactamente lo que significa un número irracional dejó perplejos a los estudiosos durante mucho tiempo.

Machine Translated by Google

y la definición de un NÚMERO REAL estaba sujeta a mucho debate

En 1872 JULIUS DEDEKIND tuvo el muy simple y idea elegante para simplemente definir los irracionales para ser el huecos en la recta numérica racional. Señaló que cada "brecha", como la raíz cuadrada de 2 por ejemplo, divide el línea de racionales en dos partes: una izquierda y una derecha pedazo. Uno puede centrar su atención sólo en la izquierda. pieza (porque aquellos puntos que no están en ella constituyen la pieza derecha) y esta pieza izquierda L satisface lo siguiente tres propiedades:

1. No está vacío, ni es todo el conjunto de puntos.
2. Si a es un número en L, y b<a, entonces b también pertenece a l
3. Si a es un número en L, es posible encontrar otro el número c también en L pero un poco más grande que a.

Dedekind simplemente definió un número real como cualquier subconjunto L de los números racionales que satisfacen estas tres propiedades. Tal conjunto se conoce hoy como corte Dedekind.

Todo número racional r define un corte. Uno puede comprobar que el conjunto r* = {a Q : a < r} satisface los tres propiedades. Así el conjunto de cortes de Dedekind "contiene" todos los números racionales como conjuntos de este tipo. También contiene otros tipos de números. Por ejemplo, el cuadrado raíz de 2 viene dada por el conjunto:

L = {a Q : a es negativo, o a es positivo y a 2<2}

Se puede comprobar que toda unión de cortes, en el contexto de TEORIA DE CONJUNTOS, es de nuevo un corte. Con esto sorprendentemente definición simple de un número real, Dedekind fue capaz de probar todas las propiedades del número real sistema necesario para establecer la solidez del cálculo. En particular, pudo demostrar que cualquier colección de números reales con un límite superior necesariamente posee una cota superior mínima. (Esto menos límite superior es la unión de todos los cortes enumerados en el recopilación.)

razonamiento deductivo/inductivo En el método científico, hay dos procesos generales para establecer resultados. El primero, llamado razonamiento inductivo, llega a conclusiones generales mediante la observación de ejemplos específicos, identificar tendencias y generalizar. "El sol tiene siempre resucitado en el pasado, por lo tanto, resucitará mañana", por ejemplo, ilustra este modo de razonamiento.

El proceso inductivo se basa en discernir patrones. pero no intenta probar que los patrones observadas se aplican a todos los casos. (Tal vez el sol no levantará mañana.) Por esta razón, una conclusión extraída por el proceso inductivo se denomina conjetura o conjetura fundamentada. Si hay un solo caso para el cual la conclusión no se cumple, entonces la conjetura es falsa. Semejante un caso se llama CONTRAEJEMPLO.

Para ilustrar, a mediados de 1700 LEONHARD EULER observó que el producto de dos enteros consecutivos más 41 parece dar siempre un número PRIMO . Por ejemplo, 2 × 3 + 41 = 47 es primo, al igual que 23 × 24 + 41 = 593 y 37 × 38 + 41 = 1447. Por razonamiento inductivo, tenemos concluiría que n × (n + 1) + 41 es siempre primo. Sin embargo, esta es una conclusión falsa. El caso n=40 proporciona un contraejemplo: 40 × 41 + 41 = 41 × 41 = 1681 no es primo. (Curiosamente n × (n + 1) + 41 es primo para todos valores n entre –40 y 39.)

Muchas pruebas de inteligencia piden a los participantes que identifiquen "el siguiente número en la secuencia". Estas preguntas confían en el razonamiento inductivo, pero no son matemáticamente sonido. Por ejemplo, dado el desafío:

¿Qué número sigue en la secuencia:
2 4 6?

cualquier respuesta es realmente aceptable (aunque la prueba los diseñadores claramente esperan la respuesta "8"). Uno puede compruebe que el POLINOMIO

$$\frac{1}{(3}\quad 2)3\,42\,1)(+)(+)(3)(=nn-nnn\quad -4)$$

$$-(nnn-4)(n)(norte\quad \frac{a}{}\quad (123)\quad -)$$

$$=\frac{a_-8}{6}\;-^{3}_{norte}+(8\quad un^{2}\quad \frac{11a76}{6}\;_{norte}+(8\quad a$$

por ejemplo, tiene valores 2, 4 y 6 cuando n es igual a 1, 2, y 3, respectivamente, y el valor a cuando n es igual a 4. Configuración a ser un valor arbitrario de su elección justifica cualquier respuesta a este problema. (Este particular polinomio se ideó utilizando la FÓRMULA DE LAGRANGE .)

Por otro lado, el razonamiento deductivo funciona para probar una conclusión específica a partir de una o más afirmaciones usando razonamiento lógico (tal como lo da FORMAL LÓGICA) y ARGUMENTOS válidos . Por ejemplo, dada la afirmaciones, "Todas las vacas comen pasto" y "Daisy es una vaca",

Machine Translated by Google

podemos concluir, por razonamiento deductivo, que Daisy come hierba

El razonamiento deductivo no se basa en que las premisas que se hacen sean necesariamente verdaderas. Por ejemplo, "Sídney y Boston son planetas, por lo tanto, Boston es un planeta" es un argumento válido, mientras que "O Boston o Venus son un planeta, por lo tanto, Venus es un planeta" no es válido.

Los matemáticos no están satisfechos con las conclusiones extraídas únicamente mediante el razonamiento inductivo. Siempre buscan pruebas lógicas a las conjeturas realizadas. Pero esto ciertamente no impide que los matemáticos hagan conjeturas.
Por ejemplo, LA CONJECTURA DE GOLDBACH es un ejemplo de una conjetura sobresaliente que todavía está esperando prueba (o refutación) matemática.

deformación En TOPOLOGÍA, cualquier transformación geométrica que estire, encoja o tuerza una forma, pero que no desgarre ni rompa las líneas o superficies que forman la forma, se denomina deformación (continua).

Por ejemplo, es posible moldear una bola esférica sólida hecha de arcilla en forma de cubo sin rasgar ninguna porción de la arcilla. En este sentido, un cubo puede considerarse una deformación de una esfera. Sin embargo, no es posible moldear una esfera en forma de TORUS (rosquilla) sin crear un desgarro. Los topólogos, en consecuencia, consideran una esfera y un toro como formas distintas (pero un cubo y una esfera como la "misma" superficie).

La noción de deformación puede hacerse matemáticamente precisa. Si, para un conjunto fijo S, un objeto A es la imagen de un mapa f, y un segundo objeto B es la imagen de un segundo mapa g:

$$f : S \to A$$
$$\text{gramo} : S \to B$$

entonces B es una deformación de A si existe una función continua H(s,t) donde s S y $0 \le t \le 1$, de modo que H(s,0) es la función f, y H(s,1) es el mapa g. También se dice que el mapa H “deforma A en B”.

Por ejemplo, la función $H(x,t) = t \cos x + (1 – t) \sin x$ transforma continuamente una curva seno en una curva coseno.

medida en grados Ver ÁNGULO.

grado de un polinomio La potencia más alta de la variable que aparece (con COEFICIENTE distinto de cero) en un

Se llama POLINOMIO al grado de ese polinomio. Por ejemplo, el polinomio $4x^3 – 2x + 7$ tiene grado tres, y el polinomio $7w^{57} – 154w^{18} + w^5 – 73w^4 + \pi w^2$ tiene grado 57. Cualquier constante distinta de cero puede considerarse como un polinomio de grado cero. En algunos problemas matemáticos es conveniente considerar la constante 0 como un polinomio de grado “infinito negativo”. UNA SERIE DE POTENCIAS, en cierto sentido, es un polinomio de grado infinito positivo.

grado de un vértice (valencia) En cualquier GRÁFICO, el número de aristas que se encuentran en un vértice en particular se denomina grado de ese vértice. La suma de todos los grados de los vértices en un gráfico cuenta dos veces el número total de aristas. El famoso HANDSHAKE LEMMA de GRAPH THEORY es una divertida consecuencia de este resultado.

grados de libertad El número de variables independientes necesarias para especificar completamente el conjunto solución de un SISTEMA DE ECUACIONES se denomina número de grados de libertad del sistema. Por ejemplo, el sistema matemático descrito por las ecuaciones:

$$3x + 2y – z = 7\ x +$$
$$4y – 3z = 6$$

tiene un solo grado de libertad: si se especifica el valor de z , entonces x e y vienen dados por $x = (8–z)/5$ y $y = (11+8z)/10$.

En física, el número de grados de libertad de un sistema mecánico es el número mínimo de coordenadas requeridas para describir el estado del sistema en cualquier instante relativo a un marco de referencia fijo. Por ejemplo, una partícula que se mueve en un círculo tiene un grado de libertad: su posición está completamente especificada por el ángulo entre una línea de referencia fija y la línea que conecta el centro del círculo con la partícula. Una partícula que se mueve en un PLANO, o en la superficie de una ESFERA, tiene dos grados de libertad.

Véase también ECUACIÓN INDETERMINADA.

De Moivre, Abraham (1667–1754) Geometría francesa , estadística Nacido el 26 de mayo de 1667, el erudito francés Abraham De Moivre es recordado por su trabajo pionero en el desarrollo de la geometría analítica y la teoría de la probabilidad. Fue el primero en presentar

Machine Translated by Google

NÚMEROS COMPLEJOS en el estudio de la TRIGONOMETRÍA, dando lugar a la famosa fórmula que ahora lleva su nombre. También fue el primero en describir y utilizar la curva de frecuencia normal en estadística.

Al emigrar a Inglaterra en 1685, De Moivre trabajó como tutor privado de matemáticas. Tenía la esperanza de recibir un puesto en la facultad de matemáticas, pero, como extranjero, nunca se le ofreció tal nombramiento.

Siguió siendo tutor privado toda su vida, a pesar de la reputación que se había ganado como erudito capaz e influyente. Fue elegido miembro de la ROYAL SOCIETY en 1697 y, en 1710, fue designado miembro de una comisión establecida por la sociedad para fallar sobre las afirmaciones rivales de SIR ISAAC NEWTON y GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ como los descubridores del CÁLCULO.

De Moivre publicó dos textos notables. El primero, Doctrine of Chance (1718), examinó cuidadosamente los principios subyacentes de la teoría de la PROBABILIDAD y desarrolló sólidamente nociones fundamentales como la "independencia estadística" y la "ley del producto de probabilidad", así como también estableció los fundamentos para las aplicaciones a la teoría de las anualidades. . El segundo, Miscellanea analytica (1730), identificó con éxito los principios que más tarde le permitieron escribir una fórmula para la DISTRIBUCIÓN NORMAL, una tarea que había bloqueado a los estudiosos antes de ese momento. Este segundo trabajo también contenía las matemáticas necesarias para establecer la FÓRMULA DE STIRLING .

Se dice con toda seriedad que De Moivre predijo correctamente el día de su propia muerte. Al notar que dormía 15 minutos más cada día, De Moivre supuso que moriría el día que durmiera 24 horas. Un simple cálculo matemático arrojó rápidamente la fecha, 27 de noviembre de 1754. De hecho, falleció ese día.

Véase también LA FÓRMULA DE DE MOIVRE .

Fórmula de De Moivre (Identidad de De Moivre)

En 1707 El matemático francés ABRAHAM DE MOIVRE descubrió la siguiente fórmula, ahora llamada De Fórmula de Moivre:

$$(\cos \theta + i\sin\theta)\, n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Para números enteros positivos n la fórmula se puede demostrar por INDUCCIÓN, haciendo uso de las fórmulas de suma para las funciones seno y coseno de la TRIGONOMETRÍA. Un enfoque mucho más simple sigue haciendo uso de

FÓRMULA DE EULER $\cos\theta+i\sin\theta = e^{i\theta}$ y dándonos cuenta de que De El resultado de Moivre no es más que una reformulación de la regla del exponente:

$$(mi^{yo})^{\text{cosas}} = mi^{in\theta}$$

Esto muestra que la fórmula de De Moivre se cumple para cualquier valor real de n.

De Morgan, Augustus (1806–1871) Álgebra británica, Lógica

Nacido el 27 de junio de 1806 en Madura, India, el ciudadano inglés Augustus De Morgan es recordado en matemáticas por su considerable contribución ciones a la LÓGICA FORMAL y ALGEBRA. En 1847 él desarrolló un sistema formal de manipulaciones simbólicas que encapsulaba los principios de la lógica aristotélica e incluía las famosas leyes que ahora llevan su nombre. También se le recuerda por definir correctamente el proceso de INDUCCIÓN matemática y por situar este método de prueba en un contexto riguroso.

De Morgan ingresó al Trinity College, Cambridge, a la edad de 16 años y, al completar su licenciatura, solicitó la cátedra de matemáticas en el recién fundado University College, Londres, a la temprana edad de 21 años. A pesar de no tener conocimientos matemáticos, publicaciones en ese momento, se le otorgó el puesto en 1827.

De Morgan se convirtió en un prolífico escritor de matemáticas. Su primer texto, Elementos de aritmética, publicado en 1830, fue extremadamente popular y vio muchas ediciones mejoradas. Más tarde escribió artículos sobre los temas de CALCU LUS y álgebra, y su texto de 1849 Trigonometry and Double Algebra también fue extremadamente influyente. Esta última pieza contenía una útil interpretación geométrica de los NÚMEROS COMPLEJOS. De Morgan también escribió literalmente cientos de artículos para Penny Cyclopedia, una publicación de la Society for the Diffusion of Use ful Knowledge. Presentó muchas piezas originales como entradas en este trabajo. Su definición precisa de inducción, por ejemplo, aparece en un artículo de la edición de 1838.

Con un interés activo en la difusión general del conocimiento matemático, De Morgan cofundó en 1866 una sociedad académica, la London Mathematical Society, y se convirtió en su primer presidente. La sociedad todavía existe hoy y trabaja para facilitar y promover la investigación matemática.

Como coleccionista de hechos numéricos impares, De Morgan señaló que tener 43 años en el año 1849 era un dato curioso.

Machine Translated by Google

dado que el número 1.849 es 43 al cuadrado. También observó que todos los nacidos en el año 1892 disfrutarían de una coincidencia similar en el año 1936, y los nacidos en 1980 una en el año 2025. (El número 2025 es 45 al cuadrado).

De Morgan murió en Londres, Inglaterra, el 18 de marzo de 1871.

Véase también LEYES DE DE MORGAN .

Leyes de De Morgan Si A y B son dos subconjuntos de un conjunto universal, y A′ y B′ denotan sus complementos, entonces se cumplen las siguientes dos identidades, conocidas como leyes de De Morgan:

$$(A \cap B)' = A' \quad B'$$
$$(A \quad B)' = A' \cap B'$$

Estas identidades se pueden usar para convertir cualquier intersección de conjuntos en una unión de conjuntos, o viceversa.

Se puede ver que estas leyes se cumplen con la ayuda de un DIAGRAMA DE VENN (sombreando la región fuera de la intersección o la unión de los dos conjuntos), o mediante un argumento formal de TEORÍA DE CONJUNTOS . Por ejemplo, para probar la primera ley, se debe establecer que cualquier elemento que pertenece a (A∩B)′ también pertenece a A′ B′, y viceversa. Esto puede hacerse de la siguiente manera:

Si x (A∩B)′, entonces x A∩B, lo que significa que x no pertenece tanto a A como a B. Por lo tanto, x pertenece al menos a un complemento A′ o B′, por lo que x A ′ B′.

Por el contrario, si y A′ B′, entonces y no pertenece a uno (o a ambos) de A y B. En consecuencia, y no es un elemento de A∩B, por lo que y (A∩B)′ .

La segunda ley se puede probar de manera similar.

Las leyes de De Morgan se pueden extender a la intersección ción o unión de más de dos conjuntos. Tenemos:

$$(A \cap B \cap C \cap \ldots \cap Z)' = A \quad B' \quad C' \quad \ldots \quad Z' \; (A \quad B \quad C \quad \ldots$$
$$Z)' = A' \cap B' \cap C' \cap \ldots \quad Z'$$

Cuando un conjunto A se interpreta como "el conjunto de todos los casos en los que una afirmación p es verdadera" y B "el conjunto de todos los casos en los que una afirmación q es verdadera", entonces las leyes de De Morgan en la teoría de conjuntos se traducen de la siguiente manera dos identidades en LÓGICA FORMAL:

$$\neg(pq) = (\neg p) \quad (\neg q) \; \neg(p \quad q)$$
$$= (\neg p) \; (\neg q)$$

UNA TABLA DE VERDAD establece que estos pares correspondientes de declaraciones compuestas son lógicamente equivalentes. Estas equivalencias también se denominan leyes de De Morgan.

Las fórmulas presentadas anteriormente fueron propuestas en 1847 por el matemático y lógico británico nacido en la India AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871).

numerable (enumerable, numerable) Se dice que un conjunto infinito CONTABLE es numerable. Así, un conjunto numerable es cualquier conjunto infinito cuyos elementos pueden colocarse en una lista similar a la lista de los números naturales 1, 2, 3,... El primer ARGUMENTO DIAGONAL muestra que el conjunto de los NÚMEROS RACIONALES es numerable. El argumento diagonal del segundo tipo establece que el conjunto de NÚMEROS REALES no lo es. Entonces, en algún sentido definido, el conjunto de números reales es un conjunto infinito "más grande" que el conjunto infinito de números racionales. Se dice que un conjunto numerable tiene CARDINALIDAD $\aleph_0$. Todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable. Esto se puede establecer de la siguiente manera:

Supongamos que X es un conjunto infinito. Sea x1 cualquier elemento de X. Como X es infinito, este no es el único elemento de X. Sea x2 otro elemento de X. Como X es infinito, estos no son los dos únicos elementos de X. Sea x3 otro elemento de X. elemento de X. Por lo tanto, continuar de esta manera produce una lista de elementos de X: x1 , x2 , x3 , … Esta lista representa un subconjunto numerable de X.

Uno puede decir legítimamente, entonces, que un conjunto numerable es el tipo "más pequeño" de conjunto infinito. Es decir, $\aleph_0$ es el número cardinal transfinito "más pequeño".

Véase también HIPÓTESIS DEL CONTINUO.

derivada Véase CÁLCULO DIFERENCIAL.

Desargues, Girard (1591–1661) Geometría francesa, ingeniería Nacido el 21 de febrero de 1591 en Lyon, Francia, el matemático Girard Desargues es considerado el fundador de GEOMETRÍA PROYECTIVA, un enfoque innovador, no griego, de la geometría. Su muy original y famoso texto de 1639 Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des recontres du cone avec un plan

Machine Translated by Google

(Borrador para un ensayo sobre los resultados de tomar secciones planas de un cono) describió los principios de la nueva teoría, contenía muchos resultados nuevos y ofreció, por primera vez, una teoría unificada de las SECCIONES CÓNICAS . Sin embargo, su trabajo fue ignorado en gran medida en el momento de su publicación, y el importante impacto de sus ideas no se reconoció adecuadamente hasta el siglo XIX.

Se sabe muy poco de la vida personal de Desargues. Nacido en una familia adinerada, Desargues ciertamente tuvo acceso a una excelente educación formal y la libertad de explorar intereses académicos. Sus primeros trabajos en matemáticas, aunque relacionados con temas prácticos —la construcción de relojes de sol, técnicas de corte de piedra y el uso de la perspectiva en el arte— fueron muy teóricos, densamente escritos y difíciles de leer, por lo que fueron de poca utilidad. a los profesionales en los respectivos campos. Esto puede explicar por qué se ignoró en gran medida la publicación de su famosa pieza de 1639, escrita en un lenguaje igualmente oscuro. Solo se imprimieron unas pocas copias del texto, de las cuales solo una sobrevive hoy.

El famoso teorema de Desargues, la "perspectiva del orema" que lleva su nombre, fue publicado en 1648 por el grabador y pintor francés Abraham Bosse (1602-1676) en su tratado Manière universelle de Mr. Desargues (Métodos generales de Desargues) sobre el papel de perspectiva en el art. Este único resultado proporcionó una puerta de entrada a un enfoque completamente nuevo del pensamiento geométrico. Desargues murió en Lyon, Francia, en septiembre de 1661. (Se desconoce la fecha exacta de su muerte).

Teorema de Desargues Llamado así por su descubridor, matemático e ingeniero francés GIRARD DESAR GUES (1591-1661), este teorema establece:

> Supongamos que dos triángulos ABC y A′B′C′ se colocan en un espacio de dos o tres dimensiones de modo que las líneas que unen los vértices correspondientes A y A′, B y B′, y C y C′ pasan por un punto común (es decir, para que los dos triángulos estén en “perspectiva desde un punto”). Entonces, si ninguno de los pares de lados AB y A′B′, AC y A′C′, o BC y B′C′ es paralelo, entonces los tres puntos de intersección de estos pares de lados están sobre una línea recta. (Es decir, los dos triángulos están en “perspectiva desde una línea”).

El caso de las tres dimensiones es el más fácil de probar. Al notar que los dos triángulos no pueden estar en planos paralelos, uno puede demostrar que cada punto de intersección de un par de lados se encuentra en la línea de intersección de los dos planos. La demostración de la versión bidimensional del teorema es delicada. El inverso del teorema de Desargues también es cierto:

> Si los lados correspondientes de dos triángulos tienen intersecciones a lo largo de la misma línea recta, entonces las líneas que unen los vértices correspondientes pasan por un punto común.

El teorema de Desargues jugó un papel clave en el desarrollo de la GEOMETRÍA PROYECTIVA. Como se señaló, el teorema no se cumple si algún par de líneas bajo consideración resultan ser paralelas. Pero Desargues observó que esta dificultad puede obviarse si se unieran al espacio puntos adicionales, "puntos en el infinito", donde las líneas paralelas se encuentran. Esto inspiró a Desargues a desarrollar una noción de geometría en la que cada par de puntos determina una línea única y, además, cada par de líneas determina (intersecta en) un punto único. En este sistema, las nociones de “punto” y “línea” juegan un papel dual, dando lugar a un principio general de dualidad en esta nueva geometría proyectiva:

> Intercambiar los roles de "punto" y "línea" en cualquier teorema de geometría proyectiva conduce a otra afirmación que también es cierta en geometría proyectiva.

El dual del teorema de Desargues es su inverso.

Véase también PERSPECTIVA.

Descartes, René (1596–1650) Francés Geometría, Álgebra, Filosofía Nacido el 31 de marzo de 1596 en La Haye (ahora Descartes), Francia, el filósofo René Descartes es recordado en matemáticas por su influyente obra de 1637 La géométrie (Geometría), en el que introdujo principios fundamentales para incorporar el ÁLGEBRA al estudio de la GEOMETRÍA, y viceversa. Este trabajo abrió el camino para desarrollar la noción de un sistema de coordenadas y, aunque no aparece en su obra, las COORDENADAS DE CARTE SIAN se nombran hoy en su honor.

Descartes también se destaca por su “regla de los signos” para contar el número de soluciones a las ecuaciones POLINOMALES y por promover el uso de símbolos en el trabajo algebraico. Abogó por el uso de letras para representar variables, sugiriendo la convención de que las letras primero en el

Machine Translated by Google

el alfabeto debe referirse a cantidades conocidas y letras en la última parte del alfabeto cantidades desconocidas. (Por ejemplo, hoy en día, sin lugar a dudas, interpretamos la ecuación ax+b=0 como una que contiene una variable x, suponiendo que a y b son cantidades conocidas). Descartes también desarrolló la notación de índice para ^{2}, ^{3x}, EXPONENTES: x y similares. Como filósofo, Descartes estaba interesado en explorar los principios subyacentes más profundos de todo el conocimiento científico. Sintió que las matemáticas estaban en la base de todo entendimiento.

Después de recibir una licenciatura en derecho de la Universidad de Poitiers en París en 1616, Descartes viajó a Holanda para alistarse en la escuela militar de Breda para estudiar matemáticas y mecánica. El servicio en el ejército lo llevó por toda Europa durante varios años, pero en 1628 Descartes regresó a Holanda y comenzó un tratado completo sobre física, óptica y mecánica celeste.
Sin embargo, decidió no publicar este trabajo después de enterarse de que GALILEO GALILEI (1564-1642) fue condenado a arresto domiciliario por abrazar el pensamiento científico moderno. Posteriormente Descartes modificó la pieza y publicó un tratado de ciencia en 1637 en el que aparecía como apéndice La géométrie .

En 1644, Descartes publicó Principia philo sophiae, un tomo completo que explora todos los aspectos de la investigación y el conocimiento científicos. Dividida en cuatro partes —Los principios del conocimiento humano, Los principios de las cosas materiales, Del mundo visible y La Tierra—, la obra de Descartes argumentaba que las matemáticas son la base de todo pensamiento y que todos los estudios de la naturaleza y del universo pueden reducirse a los principios matemáticos de la mecánica.
Este trabajo fue extremadamente influyente, pero los detalles específicos de algunas de las teorías que Descartes esbozó en él fueron problemáticos. Por ejemplo, Descartes creía que las fuerzas, como las fuerzas gravitatorias, no podían transmitirse sin algún tipo de medio ambiente.
Por lo tanto, se vio obligado a concluir que los vacíos no existen y que todo el universo está lleno de materia.
Desarrolló una “teoría de vórtices” en la que argumentaba que los planetas y el Sol son transportados por el espacio por un sistema de vórtices en el medio ambiente. Esta teoría de los vórtices fue aceptada durante casi 100 años en Francia hasta que SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) demostró matemáticamente que tal sistema dinámico es imposible.

En 1649, Descartes se mudó a Estocolmo para aceptar un puesto de tutor de la reina Cristina de Suecia en matemáticas.



René Descartes, un eminente erudito del siglo XVII, fue el primero en aplicar métodos del álgebra para resolver problemas de geometría. Nació el campo de la geometría analítica. (Foto cortesía de Topham/The Image Works)

matices El clima frío no le sentó bien a Descartes, y murió unos meses después, el 11 de febrero de 1650, de neumonía.

Descartes instigó un cambio filosófico sobre cómo se utilizan las matemáticas y el pensamiento analítico en el papel de la investigación científica. En lugar de dar forma a teorías científicas en torno a lo que se observa experimentalmente, Descartes abogó por identificar primero los principios fundamentales "evidentes" y usar el razonamiento lógico para comprender las causas detrás de los fenómenos experimentales. Su deseo de llevar el tema de la geometría a la física como parte de este proceso todavía se siente hoy: casi todas las ramas de la física moderna se describen en términos geométricos.

La regla de los signos de Descartes Descubierta por el filósofo y matemático RENÉ DESCARTES (1596–1650), la “regla de los signos” da un límite al número máximo

Machine Translated by Google

de raíces positivas que puede poseer una ecuación POLINOMIAL . Este límite viene dado por el número de cambios de signo que ocurren cuando los términos del polinomio se escriben en orden descendente de grado. Por ejemplo, en la lectura de izquierda a derecha, la ecuación del polinomio:

$$x^{6} - 2x^{5} - 6x^{3} + 7x^{2} + 8x - 2 = 0$$

tiene tres cambios de signo (de positivo a negativo, de negativo a positivo y viceversa), por lo que la ecuación tiene como máximo tres soluciones positivas.

La regla se puede extender para contar las raíces negativas como bien reemplazando "x" con "-x" (que, en efecto, refleja el eje x negativo hacia el lado positivo) y aplicando la misma regla al polinomio que resulta. En el ejemplo anterior, el polinomio resultante es:

$$(-x)^{6} + 7(-x)^{5} - 2(-x)^{4} - 6(-x)^{3} - 7(-x)^{2} + 8(-x) - 2 = 0$$

eso es,

$$x^{6} - 2x^{5} + 6x^{3} + 7x^{2} - 8x - 2 = 0$$

Que haya cuatro cambios de signo indica que hay como máximo cuatro soluciones negativas a la ecuación original.

Como otro ejemplo, se puede comprobar rápidamente que la ecuacion $x^{6} - 64 = 0$ tiene como máximo una solución positiva ción (que debe ser x = 2), y sin soluciones negativas.

Prueba de la regla

Muy pocos textos de matemáticas presentan una prueba de El famoso resultado de Descartes. El argumento, por desgracia, no es elemental y se basa en técnicas de CÁLCULO. Presentamos aquí una prueba que también hace uso de la principio de INDUCCIÓN matemática.

La regla de los signos de Descartes ciertamente funciona para ecuaciones polinómicas de grado uno: una ecuación de la forma ax + b = 0, con a y b cada uno diferente de cero, tiene una solución positiva si a y b son de diferente signo, y ninguna solución positiva si son del mismo signo.

Suponga que la regla de los signos de Descartes es válida para cualquier ecuación polinomial de grado n, y considere un polinomio $p(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \text{ansiedad}^{n} + \cdots + a_1x + a_0$ de grado n + 1. Su derivada $p'(x) = (n + 1)a_{n+1}x^{n} + a_1 \text{ es un } 1 + nax^{n-} + \cdots$ polinomio de grado n y por tanto, por suposición, tiene como máximo k raíces positivas, donde k es el número de firmar los cambios que se produzcan. Cada raíz de p′(x) representa un máximo local (colina) o mínimo local (valle) de la polinomio original, y una raíz del polinomio original solo puede ocurrir directamente después de una de esas ubicaciones. Por lo tanto, el polinomio original tiene como máximo k positivo raíces después de la ubicación de la primera raíz positiva de p'(x). Si la gráfica de p(x) cruza el eje x positivo justo antes de este primer máximo o mínimo local depende de los signos de p(0) = a0 y p′(0) = a1 . Si ambos son positivos, entonces la gráfica es creciente a un máximo local justo a la derecha de x = 0, y hay ninguna raíz adicional. Del mismo modo, no hay más raíz si ambos son negativos. Solo si a0 y a1 tienen signos opuestos, la ecuación original podría tener k + 1 en lugar de que solo k raíces positivas.

A medida que cambia el signo de la derivada p′(x) coincide los de p(x), y con la consideración adicional de un posible cambio de signo entre a0 y a1 , tenemos que el número de cambios de signo de p(x) sí coincide el número de posibles raíces positivas que podría poseer. Esto prueba la regla de los signos.

Podemos notar además que si un máximo local a un gráfico se produce por debajo del eje x, o si un mínimo local ocurre por encima del eje, entonces el polinomio falla cruza el eje x dos veces. Así, el número de positivos raíces que posee un polinomio podrían pasar por alto el número indicado por el conteo de cambios de signo por un múltiplo de 2. Esto conduce a una versión más refinada de Descartes regla de los signos:

> Escribe los términos de un polinomio de mayor a las potencias más bajas, y sea k el número de cambios de signo que ocurren al leer los coeficientes de izquierda a derecha. Entonces ese polinomio tiene como máximo k raíces positivas. Además, el número de raíces positivas que posee será incluso si k es par e impar si k es impar.
>
> Un límite en el número de raíces negativas puede se encuentra sustituyendo –x por x y aplicando el misma regla al polinomio modificado.

determinante En el estudio de LINEALES SIMULTÁNEOS ECUACIONES, conviene asignar a cada cuadrado MATRIZ (una que representa los coeficientes de los términos de las ecuaciones simultáneas) un número llamado determinante de esa matriz cuadrada. Para explicar, considere el ejemplo simple de un par de ecuaciones lineales:

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

Machine Translated by Google

Resolviendo para x en la primera ecuación y sustituyendo el resultado en la segunda ecuación se obtiene la solución:

$$x = \frac{de - bf}{bc - ad}$$

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Esto, por supuesto, es válido solo si la cantidad ad – bc no es cero. Llamamos ad – bc al "determinante" de la matriz de coeficientes 2 × 2:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Nótese que este determinante se obtiene de la matriz seleccionando dos elementos de la matriz a la vez, uno ubicado en cada fila y columna de la matriz, y asignando un signo + o – según el orden en que se elijan las columnas es una PERMUTACIÓN par o impar:

$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$	columna 1, columna 2	anuncio → +
$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$	columna 2, columna 1	→ – ad – bc

De la misma manera, un sistema de tres ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= p \\ dx + ey + fz &= q \\ gx + hy + iz &= r \end{aligned}$$

tiene solución siempre que la cantidad aei – afh + bfg – bdi + cdh – ceg no sea cero. Llamamos a esta cantidad el determinante de la matriz cuadrada de 3 × 3:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

Se obtiene de la matriz seleccionando tres elementos de la matriz a la vez, uno ubicado en cada fila y columna de la matriz, y asignando un signo + o – según si el orden en que se eligen las columnas es una permutación par o impar:

$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$	Columna 1, Columna 2, Columna 3	→ + aei
$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$	Columna 1, Columna 3, Columna 2	→ – af
$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$	Columna 2, Columna 3, Columna 1	→ + bfg

Observe que los signos de los productos pueden evaluarse de manera equivalente en términos del signo de las permutaciones de fila.

En general, el determinante de una matriz n × n se forma seleccionando n elementos de la matriz, dispuestos uno por fila y uno por columna, formando el producto de esas entradas, asignando el signo apropiado y sumando todos los resultados posibles. El determinante de una matriz cuadrada A se denota det(A) o, a veces, |A|.

La función determinante satisface una serie de propiedades clave:

1. Si una columna o una fila de una matriz A es completamente cero, entonces det(A) = 0.

(Cada producto formado al calcular el determinante contendrá un término que es cero).

2. Si se intercambian dos columnas o dos filas de la matriz, entonces cambia el signo de det(A).

(Si dos columnas experimentan un intercambio más, entonces el signo de cada permutación se altera. Dado que el proceso de formación del determinante se puede ver de manera equivalente en términos de permutaciones de filas, lo mismo ocurre si se intercambian dos filas).

3. Si una matriz A tiene dos columnas idénticas o dos filas idénticas, entonces det(A) = 0.

(Intercambie esas dos columnas o dos filas. La matriz permanece sin cambios, pero el determinante tiene signo opuesto. Entonces debe ser el caso que det(A) = 0.)

Machine Translated by Google

A veces es conveniente pensar en el determinante de una matriz A como una función de sus columnas escritas como vectores v1 , v2 ,…, vn . Escribimos det(A) = det(v1 , v2 ,…, vn). Entonces, por las observaciones anteriores, tenemos:

$$\det(v1 ,\ldots, 0,\ldots, vn) = 0$$

$$\det(v1 ,\ldots, vi ,\ldots, vj ,\ldots, vn) = -\det(v1 ,\ldots, vj ,\ldots, vi ,\ldots, vn)$$

$$\det(v1 ,\ldots, v,\ldots, v,\ldots, vn) = 0$$

También tenemos:

4. $\det(v1 ,\ldots, v + w,\ldots, vn) = \det (v1 ,\ldots, v,\ldots, vn) + \det(v1 ,\ldots, w,\ldots, vn)$

y

5. $\det(v1 ,\ldots, kv,\ldots, vn) = k \det(v1 ,\ldots, v,\ldots, vn)$

y consecuentemente

6. El valor de det(A) no se altera si se agrega un múltiplo de una columna a otra columna: $\det(v1 ,\ldots, vi + kvj ,\ldots, vn) = \det(v1 ,\ldots, vi ,\ldots , vn)$

Estos resultados se derivan de la definición del determinante. Los resultados correspondientes sobre filas también son válidos.

La REGLA DE CRAMER muestra que la noción de determinante es precisamente el concepto necesario para resolver simultáneamente ecuaciones lineales. Tenemos:

Un sistema de ecuaciones lineales simultáneas tiene solución (única) si el determinante de la matriz de coeficientes correspondiente no es cero.

La regla de Cramer va más allá y proporciona una fórmula para la solución de un sistema en términos de determinantes.

El determinante tiene otra propiedad importante. Después de un poco de trabajo algebraico es posible mostrar:

El determinante del producto de dos matrices n × n A y B es el producto de sus determinantes:

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

El determinante de la MATRIZ DE IDENTIDAD I es uno. Si una matriz cuadrada A es invertible, entonces la ecuación:

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

muestra que det(A) no es cero y que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Tenemos:

Si una matriz es invertible, entonces su determinante es no cero

Lo contrario también es cierto:

Si el determinante de una matriz no es cero, entonces la matriz es invertible.

Para ver por qué esto se cumple, suponga que A es una matriz con determinante distinto de cero. Sea ei la i-ésima columna de la matriz identidad. Por la regla de Cramer, dado que el determinante no es cero, el sistema de ecuaciones Ax = ei tiene una solución x = si , digamos. Haga que B sea la matriz con i-ésima columna si . Entonces AB = I. Esto muestra al menos que A tiene una “inversa derecha” B. Para completar la prueba, denote con AT la transpuesta de A, es decir, la matriz obtenida de A intercambiando sus filas y columnas. Dado que el determinante puede verse de manera equivalente como una función de las filas de la matriz como de sus columnas, tenemos que det(AT) = det(A). Dado que el determinante de AT también es distinto de cero, existe una matriz C tal que ATC = I. Se puede comprobar que la transpuesta del producto de dos matrices es el producto inverso de sus transpuestas. Así tenemos: CTA = (ATC)T = I = I. Esto demuestra que la matriz A también tiene CT inversa por la izquierda. Las inversas izquierda y derecha deben ser iguales, ya que CT = CTI = CT AB = IB = B. Por lo tanto, la matriz B es de hecho la matriz inversa completa de A: AB = BA = I.

Véase también MATRIZ INVERSA.

diagonal Cualquier línea que une dos vértices no adyacentes de un POLÍGONO se llama diagonal del polígono. Por ejemplo, un cuadrado tiene dos diagonales, cada una de las cuales corta la figura en dos triángulos rectángulos congruentes, y un pentágono tiene cinco diagonales diferentes. No hay diagonales en un triángulo. En general, un ngon regular tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales distintas.

Una diagonal para un POLIEDRO es cualquier línea que une dos vértices que no están en la misma cara. un cubo, por

Machine Translated by Google

ejemplo, tiene cuatro diagonales distintas. Un plano diagonal de un poliedro es cualquier plano que pasa por dos aristas que no son adyacentes.

argumento diagonal El diagrama en la parte inferior derecha muestra que es posible hacer coincidir los elementos de una línea infinitamente larga de objetos con los elementos de una matriz bidimensional de objetos en una correspondencia perfecta de uno a uno (lo que significa que todos y cada uno de los elementos del primer conjunto se empareja exactamente con un elemento del segundo conjunto, y viceversa). En cierto sentido, esto muestra que una matriz bidimensional infinita no es "más grande" que una matriz unidimensional infinita. Se pueden usar construcciones similares para emparejar elementos de arreglos de mayor dimensión con los elementos de una sola línea infinita de objetos.

La correspondencia descrita se llama argumento diagonal del primer tipo. Fue introducido por primera vez por el matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918) en 1891. Este argumento muestra que el conjunto de NÚMEROS RACIONALES positivos tiene la misma CARDINALIDAD (es decir, exactamente del mismo "tamaño") que el conjunto de NÚMEROS NATURALES .

NÚMEROS:

Primero enumere una cadena infinita que incluya todos 1– racionales con numerador $1: 1, \frac{1-}{2}, \ldots$. Bajo los 1 a 3 debajo de esta cadena, enumere todos los racionales con el numerador 2 que no se reducen a una con numerador 1: $\frac{2-}{3}, \frac{2-}{5}, \ldots$. Y debajo fracción 2– 1 debajo de esto, escriba la cadena de todos los racionales con el numerador 3 que no se reducen a 3– con numerador 1 o 2: 1 $\frac{3-}{2}$, una fracción 3– 3– , ,…; y así 4 5 en adelante. El argumento de la diagonal muestra ahora que el conjunto de todos los racionales positivos se puede presentar como una única lista numerada:

$$1 \; \frac{1-}{1} \; \frac{2-}{1} \; \frac{1-}{2} \; \frac{3-}{1} \; \frac{2-}{3} \; \frac{1-}{3} \; \frac{4-}{1} \ldots$$

Esto demuestra que el conjunto de racionales es CONTABLE.

También se puede usar este argumento para mostrar que la unión de un número contable de conjuntos contables es numerable en sí misma: simplemente enumere los elementos de cada conjunto en una cadena infinita, uno por línea de una matriz bidimensional, y use el argumento diagonal para proporcionar un método para enumerar todos los elementos de la matriz.

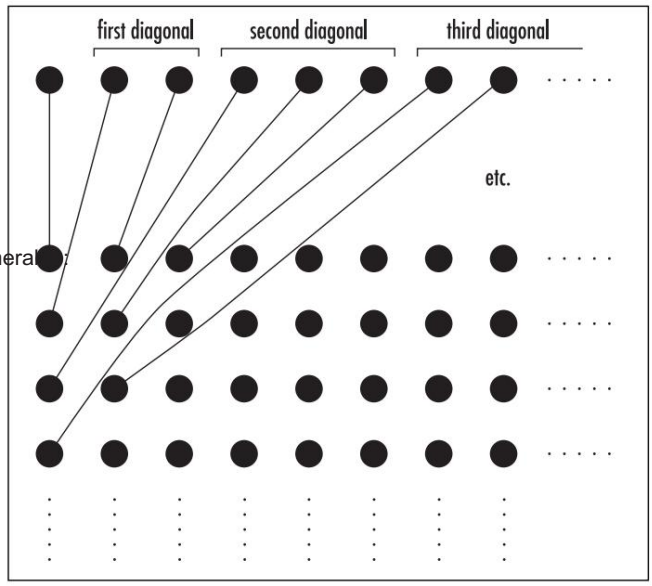
Cantor proporcionó un "argumento diagonal de segundo tipo" para mostrar que el conjunto de números reales es un conjunto infinito que, en algún sentido definido, es "más grande" que el conjunto de números contables o el conjunto de racionales. Por conveniencia, trabaje con el conjunto de números reales en el INTERVALO [0,1]. Cada uno de esos números reales se puede escribir como un decimal infinito, usando una cadena infinita de nueves si es necesario. Por ejemplo, 1/3 = 0,3333... y 1/2 = 0,5 = 0,49999... El argumento de la segunda diagonal de Cantor procede de la siguiente manera:

Suponga que es posible producir una lista completa de todos los números reales del intervalo [0,1], cada uno escrito como una expansión decimal infinita:

0.a1 a2 a3 a4 a5 a6…
0.b1 b2 b3 b4 b5 b6…
0.c1 c2 c3 c4 c5 c6…
0.d1 d2 d3 d4 d5 d6 …
0.e1 e2 e3 e4 e5 e6…

Construya otro número real x = 0.α1 α2α3 … como sigue:

Establecer α1 igual a 1 si a1 es igual a un 8 o un 9, e igual a 8 si a1 es cualquier otro número; establecer α2 igual a 1 si b2 es



La correspondencia diagonal

Machine Translated by Google

igual a un 8 oa un 9, e igual a 8 si b2 es cualquier otro número; igualar α3 a 1 si c3 es igual a 8 oa 9, e igual a 8 si c3 es cualquier otro número; Etcétera.

Entonces el número x no aparece en la lista. No es el primer número de la lista, ya que x y 0.a1 a2 a3 a4 … difieren en el primer decimal; tampoco es el segundo número de la lista, ya que x y 0. b1 b2 b3 … difieren en el segundo decimal; ni es el tercer, cuarto o número 107 de la lista. Así, a partir de cualquier lista de números reales, es posible construir otro número real que no esté en la lista.

Incluso si uno incluyera el número x construido arriba en una nueva lista de números reales, uno puede repetir el argumento diagonal nuevamente para producir un nuevo número real y que no esté en la lista. De esta forma, se puede argumentar que siempre hay "más" números reales de los que se pueden enumerar. El conjunto de los números reales es, pues, de mayor cardinalidad que el conjunto de los números racionales. (Vale la pena comentar que, al principio, parece más fácil simplemente construir el número real x = 0.α1α2α3 … seleccionando α1 para que sea cualquier dígito diferente de α1 , α2 cualquier dígito diferente de b2 , α3 cualquier dígito diferente de c3 , Etcétera.
Sin embargo, las elecciones arbitrarias podrían generar ambigüedad y dañar el argumento. Por ejemplo, el número x producido podría ser 0,50000... que ya aparece en la lista como 0,49999... El enfoque adoptado anteriormente elimina cuidadosamente esta preocupación).

Cantor también demostró que existe una infinidad de conjuntos infinitos, todos más grandes que el conjunto infinito de los números naturales.

diámetro La distancia más lejana entre dos puntos en el límite de una figura geométrica se llama diámetro de la figura. Por ejemplo, el diámetro de un cuadrado de lado 1 es la distancia entre dos esquinas opuestas del cuadrado. Esta distancia es $\sqrt{2}$. un triángulo equilátero de longitud de lado 1 tiene un diámetro igual a 1. En este contexto, el diámetro de un objeto es siempre un número.

A veces, el término diámetro también se refiere al segmento de línea que conecta dos puntos fronterizos con una distancia máxima entre sí. Por ejemplo, el diámetro de un círculo es cualquier segmento de línea que pasa por el centro del círculo. conectando dos puntos fronterizos. Un diámetro de una ESFERA también pasa por su centro.

Los círculos y las esferas son figuras de ANCHO CONSTANTE.
Véase también DIAGONAL.

El problema de Dido Según la leyenda, en el año 800 a. C., la princesa Dido de Tiro huyó de su tierra natal fenicia para liberarse de la tiranía de su hermano rey asesino. Cruzó el Mediterráneo y buscó comprar terrenos para una nueva ciudad en las costas del norte de África. Enfrentada sólo con el prejuicio y la desconfianza de los habitantes locales, se le dio permiso para comprar sólo la tierra que pudiera estar rodeada por una piel de toro. El desafío de aceptar estos términos y aún cercar suficiente tierra para fundar una ciudad se conoció como el problema de Dido.

El poeta romano Virgilio (70-19 a. C.), en su obra épica Eneida, se refiere a la leyenda de Dido y su ingeniosa solución al problema. Afirma que Dido cortó la piel en tiras muy finas y las unió para formar una hebra muy larga, que luego usó para encerrar una proporción de tierra de área máxima, dada por la forma de un círculo. (Más precisamente, con la costa como parte del límite, Dido formó un semicírculo con tiras de piel de toro.) La porción de tierra que compró por un precio mínimo era de hecho lo suficientemente grande como para construir una ciudad. Según Virgilio, esta historia representa la fundación de la ciudad de Cartago, que ahora es un suburbio residencial de la ciudad de Túnez.

En esta historia, la princesa Dido resolvió el famoso PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO:

De todas las figuras en el plano con un perímetro dado, ¿cuál encierra el área más grande?

El análisis matemático de este problema es difícil. No fue sino hasta finales del siglo XIX que los matemáticos finalmente pudieron demostrar que la solución presentada en este cuento antiguo, es decir, el círculo, es la forma correcta.
Ver también PROBLEMA ISOPERIMETRICO.

diferencia En ARITMÉTICA, el resultado de restar una cantidad de otra se llama diferencia de las dos cantidades. Por ejemplo, la diferencia de 105 y 83 es 22. El signo menos se usa para indicar diferencias.
Por ejemplo, escribimos: 105 – 83 = 22. La diferencia

Machine Translated by Google

de dos cantidades podría ser negativa. tenemos, por ejemplo, 5 – 7 = –2. El signo menos se utilizó por primera vez en un texto impreso en 1489 por matemático alemán Johannes Widman (1462-1498).

La diferencia absoluta de dos cantidades a y b es el VALOR ABSOLUTO de la diferencia de las dos cantidades: |a – b|. La diferencia absoluta de 13 y 8, por ejemplo, es 5, como lo es la diferencia absoluta de 8 y 13. Algunos autores usan el símbolo ~ para indicar la diferencia absoluta: 8 ~ 13 = 5.

En TEORÍA DE CONJUNTOS, la diferencia de dos conjuntos A y B (también llamado complemento relativo de B en A) es el conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B. Esta diferencia se denota A\B o A – B. Por ejemplo, A = {1,2,3,6,8,} y B = {2,4,5,6}, A\B = {1,3,8}. También, B \ A = {4,5}.

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B, denotado AB, A+B o AΘB, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a uno, pero no a ambos, de los dos conjuntos A y B. Es la unión de las diferencias A\B y B\A. Es también la diferencia de la unión de A y B y su intersección:

$$AB = (A\backslash B) \quad (B\backslash A)$$
$$= (A \quad B) - (A \cap B)$$

Para el ejemplo anterior, tenemos: AB = {1,3,4,5,8}.

Ver también DIFERENCIAS FINITAS.

diferencia de dos cubos La ecuación $x^3 - un^3 = (x - a)(x^{22} + hacha + un)$ se llama la diferencia de dos cubos fórmula. Se puede comprobar que es válido EXPANDIENDO SOPORTES. Como la suma de dos cubos también se puede escribir como una diferencia, $x^{33} + un^3 = x^3 - (-a)^3$, tenemos un com ecuación de panión $x^3 + un^3 = (x + a)(x^{22} - hacha + un)$.

Las fórmulas de DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS y de diferencia de dos cubos se generalizan para exponentes mayor que 3. Tenemos:

$$x^n - un^n = (x - a)(x^{n-1} + axn-2 + a\,2x\,n-3 + \ldots + un\,n-2x + un\,n-1)$$

para n ≥ 2. Esto muestra que la cantidad x – a es siempre una factor de $x^{nn} - un$. Esta observación es útil para el factor ing números. Por ejemplo, vemos que 651 – 1 es divisible por 6 – 1 = 5. Como también podemos escribir 651 – 1 = $(63)^{17} - 117$, tenemos que 63 – 1 = 215 también es factor de 651 – 1.

Si n es impar, entonces hay una fórmula complementaria:

$$n\,x^{n+un} = (x + a)(x^{n-1} - axn-2 + a\,2x\,n-3 - \ldots - un\,n-2x + un\,n-1)$$

Esto muestra, por ejemplo, que 212 + 1 (que es igual a $(24)^3 + 13$) es divisible por 17.

Véase también MERSENNE PRIME.

diferencia de dos cuadrados La ecuación $x^2 - un^2 =$ (x – a)(x + a) se llama la diferencia de dos cuadrados fórmula. Se puede comprobar que es válido EXPANDIENDO SOPORTES. También se puede verificar geométricamente: coloque un pequeño cuadrado de longitud de lado a en una esquina de una más grande cuadrado de lado x. El área entre los dos cuadrados es $x^2 - un^2$. Pero esta región en forma de L puede ser dividido en dos rectángulos: uno de largo x y ancho (x – a) y un segundo de largo a y ancho (x – a). Estos se apilan para formar un único (x – a) × (x + a) rectángulo. Por lo tanto, debe ser el caso de que $x^{22} - un$ es igual (x – a)(x + a).

El conjugado de una suma x + a es el correspondiente diferencia x – a, y el conjugado de una diferencia x – a es la suma correspondiente x + a. Multiplicar una cantidad algebraica o numérica por su conjugada e invocar la fórmula de la diferencia de dos cuadrados a menudo puede simplificar una expresión. Por ejemplo, si multiplicamos el 1 cantidad $\overline{2\,3-\sqrt{}}$ por “uno”, obtenemos:

$$\frac{1}{2\,3-\sqrt{}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}\,\frac{2\,3+\sqrt{}}{2\,3+\sqrt{}} = \frac{2\,3+\sqrt{}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{1}\,2 = +\sqrt{3}$$

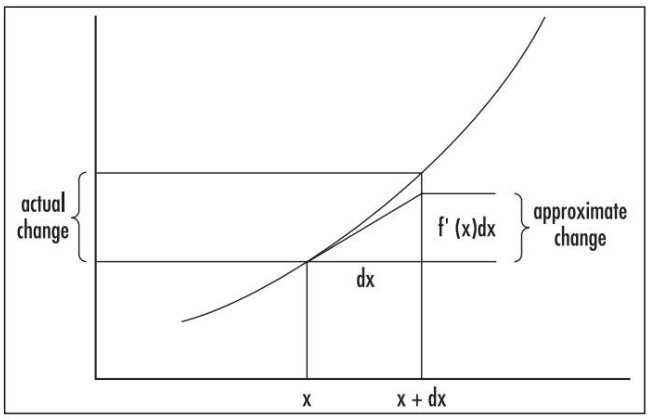
(Hemos "racionalizado" el denominador.)

Una suma de dos cuadrados, $x^{22} + un$, puede ser considerado como un diferencia si uno está dispuesto a trabajar con NÚMEROS COMPLEJOS. tenemos: $x^{22} + un\ 2 = x - (ia)^2 = (x - ia)(x + ia)$.

Ver también DIFERENCIA DE DOS CUBOS; RACIONALIZAR ING EL DENOMINADOR.

diferencial Cerca de cualquier punto x, la gráfica de una función diferenciable y = f(x) se aproxima bien mediante una

Machine Translated by Google



el diferencial

pequeño segmento de línea recta tangente a la gráfica en x. La pendiente de esta recta tangente es la DERIVADA f′(x). Usando el símbolo dx para representar un pequeño cambio en la variable x, vemos que el cambio correspondiente en la variable y es aproximadamente dy = f′(x)dx. Las cantidades dx y dy se llaman diferenciales.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) basó su desarrollo de la teoría del CÁLCULO en la idea dy de un diferencial. Hoy usamos la notación para la derivada $\frac{dy}{dx}$ f′(x), que sugiere deliberadamente las ideas de Leibniz.

Véase también HISTORIA DEL CÁLCULO (ensayo); NUMÉRICO DIFERENCIACIÓN.

cálculo diferencial Esta rama del CÁLCULO se ocupa de las nociones de PENDIENTE, tasas de cambio y proporciones de cambio. Por ejemplo, el estudio de la VELOCIDAD, que se puede describir como la tasa de cambio de posición, se incluye en el estudio del cálculo diferencial, al igual que otros conceptos que surgen en el estudio del movimiento.

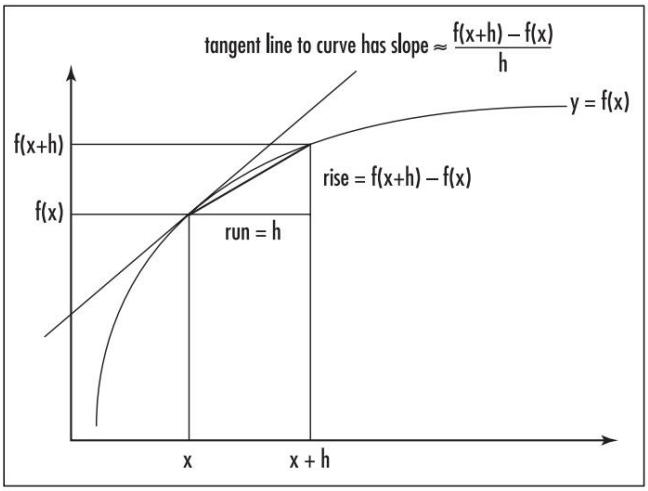
Si una cantidad y es una FUNCIÓN de otra cantidad x, digamos y = f(x) , entonces cada cambio en la variable x, x → x + h, produce un cambio correspondiente en la variable y: f(x) → f(x + h). La razón de los cambios de f(x + h) – f(x) las dos variables es: $\frac{\quad}{h}$. Gráficamente, esta representa la pendiente (la “elevación” sobre el “recorrido”) del segmento de línea que conecta los dos puntos (x,f(x)) y (x+h,f(x+h)) en el gráfico de la curva y = f(x).

La pendiente de este segmento de línea, para un cambio fijo h en la variable x, depende de la forma de la curva y normalmente cambiará de un punto a otro. un muy una curva empinada dará un gran aumento para un recorrido fijo, por ejemplo, mientras que una curva que sube lentamente dará un valor bajo para la pendiente. En todos los casos, si el valor h es muy pequeño, entonces la pendiente del segmento de línea descrito anteriormente se aproxima a la pendiente de la línea TANGENTE a la curva en la posición x. Cuanto menor sea el valor de h, mejor será la aproximación.

En otro escenario, si y = f(t) representa la posición de un automóvil a lo largo de una carretera en el tiempo t, entonces, durante h segundos de viaje, el automóvil cambia de posición en una cantidad f(t + h) – f(t), y la relación representa $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, la tasa promedio de cambio de posición, o la velocidad promedio, del automóvil sobre h segundos de viaje. Si el valor h es pequeño, entonces esta cantidad se aproxima a la velocidad real del automóvil en el tiempo t , tal como la lee el velocímetro. Cuanto menor sea el valor de h, mejor será la aproximación. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ — cociente” se llama "Newton para honrar el trabajo de SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) en el descubrimiento y desarrollo del cálculo y el LÍMITE,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

si existe, se llama la derivada de la función f(x). Representa la pendiente de la (línea tangente al) gráfico y = f(x) en la posición x, o, alternativamente, la tasa de cambio instantánea de la variable y = f(x) en la posición/tiempo x.



Cálculo de la derivada

Machine Translated by Google

La derivada de una función y = f(x) en la posición x es df
denotado ya sea $\frac{df}{dx}$ o $\frac{dy}{dx}$ (o, para hacer el punto en que la derivada se está calculando explícitamente, $\left.\frac{df}{dx}\right|_x$ o $\left.\frac{dy}{dx}\right|_x$). La derivada también se escribe f′(x), que es se lee como "f prima de x".

Por ejemplo, la derivada de la función $y = f(x) = x^2$ en la posición x = 7 viene dada por:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=7} = \lim_{h\to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(7+h)^2 - 7^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{49 + 14h + h^2 - 49}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{14h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 14 + h$$

$$= 14$$

Es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva. $y = x^2$ en x=7 es 14. En general, la derivada de en un punto $f(x) = x^2$ arbitrario x viene dada por: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$. una consideración normalmente se necesita una cantidad considerable de álgebra para calcular estos límites. El objetivo es cancelar h en el denominador para evitar la división por cero.

El proceso de encontrar la derivada de una función. se llama diferenciación. Una función y = f(x) se llama diferenciable en un punto x si la derivada de la función f′(x) existe en esa posición. Una función es derivable si su derivada se puede calcular en cada punto bajo consideración. No todas las funciones son diferenciables.

Por ejemplo, la función VALOR ABSOLUTO y = |x| no tiene una línea tangente bien definida en su vértice en la posición x = 0, y el límite no $\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ hace existe. (Considere los casos h positivo y negativo por separado). Puede demostrarse que toda función derivable es continua, pero, como función de valor absoluto muestra, una función continua no necesita ser diferenciable.

La idea central del cálculo diferencial es, por lo tanto, el cálculo de las derivadas de funciones. La siguiente

La tabla muestra las derivadas de algunas funciones estándar. La REGLA DEL PRODUCTO, LA REGLA DEL COCIENTE y la CADENA RULE también ayuda en el cálculo de derivados.

f(x)	f′(x)
k (constante)	0
mx+b (recta de pendiente m)	metro
x	1
x^r	rx^{r-1}
pecado x	porque x
porque x	–sin x
bronceado x	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
segundo x	segundo x bronceado x
cosec x	–cosec x cuna x
cuna x	$-\text{coseg } x^2$
m^x	m^x
e^{kx}	kekx
a^x	a x en un
sinh x	duro x
cosh x	pecado x
en x	$\frac{1}{x}$

Aparte de tratar cuestiones de tasas de cambio, también se utiliza el cálculo diferencial para resolver OPTIMIZACIÓN problemas, es decir, problemas de encontrar el máximo o valores mínimos para una función dada (que se denominan problemas MÁXIMOS/MÍNIMOS).

La ANTIDIFERENCIACIÓN está íntimamente relacionada con CÁLCULO INTEGRAL, el problema general de la computación áreas bajo curvas y volúmenes bajo superficies. El El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO explica esto conexión.

La derivada de una función y = f(x) en el punto x = x1 se puede definir alternativamente como el límite:

$$f'(x_1) = \lim_{x_2\to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Algunos autores de libros de texto de matemáticas prefieren esta definición. Por supuesto, haciendo x1 = x y x2 = x + h, es equivalente a la definición presentada anteriormente.

Véase también CÓNCAVO ARRIBA/CÓNCAVO ABAJO; DIFERENTE TIAL; ECUACIÓN DIFERENCIAL; DERIVA DIRECCIONAL TIVO; DERIVADA SUPERIOR; HISTORIA DEL CÁLCULO (ensayo); DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA; CRECIENTE/

Machine Translated by Google

DECRECIENTE; MÁXIMO MÍNIMO; VALOR MEDIO TEO
MOVIMIENTO RÁPIDO DEL OJO; DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA; DERIVADA
PARCIAL; TEOREMA DE ROLLE .

ecuación diferencial Cualquier ecuación que contenga una o más derivadas se llama ecuación diferencial. Si tal ecuación involucra solo un solo independiente variable x y una sola variable dependiente y y su derivados, entonces se describe como "ordinario". Por ejemplo, la ecuación ecuación $\frac{dy}{dx} - 4x + 3 = 0$ es un ordinario diferencial.

Una solución de una ecuación diferencial es cualquier función y = f(x) que satisfaga la ecuación. Por ejemplo, $y = 2x^2 - 3x$ es una solución a la ecuación anterior. Así también por es $y = 2x^2 - 3x + 5$. Estas soluciones fueron encontradas escribiendo $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$ e integrando: $y = \int 4x - 3dx$ $= 2x^2 - 3x + C$. Si los valores particulares de x e y son conocido, digamos y = 0 cuando x = 1, entonces un valor para C es determinado, en este caso C = 1, dando el particular solución: $y = 2x^2 - 3x + 1$.

El "orden" de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación, y el "grado" de la ecuación es la potencia a la que se eleva la derivada de mayor orden. Así, por ejemplo, $\frac{d^3y}{dx^3} + xy^2 = 0$ $\frac{dy}{dx} + xy^6 = 2$ es un diferencial de tercer orden ecuación de primer grado, y $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + y^3 =$ es una ecuación de tercer orden de grado 2.

Una ecuación que involucra más de una independiente variables y DERIVADAS PARCIALES con respecto a aquellas variables se llama ecuación diferencial parcial. para ejemplo, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy^3 = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + xyz^2$ es de segundo orden ecuación diferencial parcial de grado 3.

Las ecuaciones diferenciales surgen virtualmente en cada rama de la ciencia, la economía y la ingeniería. Cualquier teoría que intenta describir las relaciones entre las tasas de cambio de cantidades que varían continuamente conduce a una ecuación diferencial. por ejemplo, uno El modelo de crecimiento de la población describe la tasa de cambio del tamaño de la población P como proporcional al tamaño $\frac{dP}{dt}$ de la población. Esto lleva a la ecuación $= kP$, donde k es una constante. (Ver MODELOS DE POBLACIÓN.)

Encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales es una parte esencial de la investigación científica.

Hay una serie de técnicas estándar para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. Todo implica reordenar términos o transformar la ecuación en una forma que se pueda integrar fácilmente. Delineamos un selección de algunas técnicas básicas.

Ecuaciones directamente integrables: una ecuación de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es directamente integrable y tiene solución dada por $y = \int f(x)dx$. De manera similar, una ecuación de segundo orden de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

puede resolverse integrando dos veces.

Separación de Variables: Una ecuación de primer orden de la forma:

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

donde f es una función de y solamente y g es una función de x solamente, se puede resolver integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x. Esto produce:

$$\int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx$$

El método de INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN muestra que la integral de la izquierda se puede interpretar simplemente como una integral con respecto a la variable y, por lo que estamos permitido escribir:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Ahora podemos evaluar estas integrales y resolver para y.

Por ejemplo, para resolver $\frac{dy}{dx} = y^2$ escribir, con un abuso de notación, $\frac{1}{y^2}dy = dx$ La integración da $\int \frac{1}{y^2}dy = \int 1dx$, dando, $= x - \frac{1}{y} = C$, o $y = \frac{1}{C - x}$.

Machine Translated by Google

Ecuaciones Homogéneas: Una ecuación de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

se puede resolver sustituyendo y = vx. Esto reduce la ecuación a uno en v y x solo. Ahora funcionará la separación de variables.

Por ejemplo, para resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + 2}{x^2}$, que puede ser escrito $\frac{dv}{dx} 1 = + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, establecer y = vx para obtener:

$\frac{dv}{dx} xv\ v +=+1\ 2$. Ahora se aplica la separación de variables.

Ecuaciones lineales: una ecuación de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

se puede resolver multiplicando por la integrante factorizar $e^{\int f(x)dx}$. Esto produce la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} e^{\int f(x)dx} + f(x) e^{\int f(x)dx} y = g(x) e^{\int f(x)dx}$$

que se puede reescribir:

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int f(x)dx} \right) = g(x) e^{\int f(x)dx}$$

Esto es directamente integrable.

Por ejemplo, la ecuación $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ tiene interés factor de rejilla $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$, y así la ecuación se puede reescribir $\frac{d}{dx}(xy) = x^3$ 4 , dando $xy = \frac{1}{4}x^4 + C$, o $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}$.

Ecuaciones básicas de segundo orden: Una ecuación de segundo orden de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

se puede resolver multiplicando por $2\frac{dy}{dx}$ a obtener:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 2f(y)\frac{dy}{dx}$$

Integrando da:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)\,dy + C$$

Después de sacar raíces cuadradas, ahora se puede separar variables

Suele ocurrir que ninguna técnica conocida resolver una ecuación diferencial particular que surge en un estudio científico particular. En este caso, los matemáticos a menudo supondrá que la función solución y = f(x) puede escribirse como una SERIE DE TAYLOR: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ Sustituyendo la serie en la diferencia ecuación inicial, normalmente es posible calcular los valores de al menos los primeros coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Este El enfoque se denomina "método de coeficientes indeterminados". En este contexto, la serie de Taylor utilizada a veces se denomina función de perturbación.

dígito Un símbolo que forma parte de un número se llama un dígito Por ejemplo, el número 42.768 tiene cinco dígitos. En la notación decimal se utilizan diez dígitos, a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. En notación hexadecimal (base 16), los dígitos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F. En el sistema de números binarios solamente se usan dos dígitos: 0 y 1. En general, un sistema de conteo en base b usa b dígitos diferentes para representar el números del 0 al b – 1.

En la lengua vernácula, la palabra dígito significa un dedo o un dedo del pie. Como uno aprende a contar con sus dígitos no es sorprende que la palabra haya llegado a usarse para números específicos que representan los dedos. la medida de un dígito, definido como el ancho de un dedo, alrededor de 3/4 de un pulgada, era una unidad estándar del inglés antiguo de LONGITUD.

Un reloj digital muestra símbolos específicos (números) a medida que pasan unidades discretas de tiempo (segundos), y un La computadora digital procesa la información que se le proporciona. en forma de números. Un reloj analógico, sin embargo, utiliza la entidad de barrido de una mano en movimiento como un análogo al paso del tiempo, y una computadora analógica, ahora generalmente considerado obsoleto, utiliza un voltaje variable para

Machine Translated by Google

imitar la información de entrada que cambia continuamente, como la tasa de flujo de petróleo a través de una tubería, por ejemplo.

Véase también BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO; ERROR.

diedro Cualquier construcción geométrica formada por la intersección de dos planos se llama diedro. Por ejemplo, la línea de intersección de dos planos no paralelos se llama línea diedra, y el ángulo entre los dos planos se llama ángulo diedro (o, a veces, diedro). Se puede calcular un ángulo diedro tomando el PRODUCTO DOT de los dos vectores normales a los planos.

El ángulo diedro de un poliedro es el ángulo entre dos caras adyacentes del sólido.

La palabra diedro proviene del prefijo griego di-, que significa "dos", y la palabra hedra, que significa "base", "asiento" o "superficie".

Ver también NORMAL A UN PLANO.

dilatación Ver TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA; LINEAL TRANSFORMACIÓN.

dimensión El número de coordenadas necesarias para especificar la posición de un punto particular en el espacio se llama la dimensión de ese espacio. Las líneas y curvas se consideran unidimensionales, ya que la ubicación de cualquier punto en una curva puede especificarse mediante un solo parámetro, a saber, la distancia a lo largo de la curva en la que se encuentra.

Los puntos en el espacio bidimensional forman una superficie y los puntos en el espacio tridimensional se encuentran dentro de un volumen.

Se dice que una teoría física es multidimensional si describe el universo con una gran cantidad de parámetros.

Dado que los eventos en el mundo ocurren en lugares y momentos específicos, se necesitan cuatro parámetros para describirlos: tres parámetros espaciales x, y y z y un cuarto parámetro t para el tiempo. Debido a esto, el "tiempo" a menudo se cita como la cuarta dimensión. Sin embargo, una teoría que también considere la carga eléctrica q de los objetos, digamos, se describiría como "de cinco dimensiones", y una que también considere la fuerza magnética como "de seis dimensiones".

Los físicos han afirmado que vivimos en un universo que tiene hasta 18 dimensiones. Hay poco significado aquí aparte de que los científicos afirman que todos los eventos en el universo se pueden describir completamente a través de 18 variables diferentes. No existe una razón específica para que la cuarta variable se interprete siempre como "tiempo".

Para un matemático, un objeto n-dimensional es aquel que está completamente descrito por n parámetros. Por ejemplo, un círculo situado en un espacio bidimensional se describe mediante una ecuación con dos variables: x 2+y 2=1. Una ESFERA en el espacio tridimensional se describe mediante una ecuación con tres variables: x 2+y 2+z 2=1. Agregar más variables a la ecuación da esferas de mayor dimensión: las ecuaciones x 2+y 2+z 2+w2=1 y x 2+y 2+z 2+w2+u 2 = 1, por ejemplo, podría decirse describir "hiperesferas" en espacios de cuatro y cinco dimensiones. Aunque uno no puede imaginar qué son estos objetos, la matemática de estos objetos es un poco diferente de la matemática de círculos y esferas ordinarios.

En un contexto geométrico, la "dimensión" se puede describir a través de la noción de escala. Si ESCALAMOS un objeto geométrico por un factor k, entonces su tamaño cambia en consecuencia: cualquier línea de longitud a se convierte en una línea de longitud ka, cualquier región plana de área A se convierte en una región plana de área k 2A, y cualquier sólido de volumen V se reemplaza por un sólido de volumen k 3V. Por lo tanto, un objeto puede describirse como d-dimensional si su "tamaño" escala de acuerdo con la regla:

nuevo tamaño = k d × tamaño anterior

En este contexto, es posible que un objeto geométrico tenga dimensión fraccionaria. Tal objeto se llama FRACTAL.

Véase también HIPERCUBO.

Diocles (ca. 240–180 a. C.) Geometría griega Nacido en Évvoia (Eubea), una isla griega (se desconoce la fecha exacta de nacimiento), Diocles es recordado por su trabajo sobre SECCIONES CÓNICAS y su innovadora solución al problema de DUPLICAR EL CUBO a través de la invención de una nueva curva llamada curva cisoide.

Casi nada se sabe de la vida de Diocles, y el conocimiento de su obra (hasta hace poco) nos llegó principalmente a través de referencias hechas por eruditos posteriores a su época. Se sabe que Diocles fue contemporáneo de APOLONIO DE PERGA (ca. 260-190 a. C.) y pudo haber pasado un tiempo considerable en Arcadia, el centro intelectual de la cultura griega.

Diocles escribió un texto significativo, Sobre los espejos en llamas, que, aunque ignorado principalmente por los eruditos griegos, tuvo una influencia considerable en los matemáticos árabes. Una traducción de este trabajo fue sólo

Machine Translated by Google

descubierto recientemente en la Biblioteca del Santuario en Mashhad, Irán, y una edición en inglés del texto se publicó por primera vez en 1976.

La pieza está organizada como una colección de 16 discusiones sobre resultados originales en geometría, principalmente relacionados con el tema de las SECCIONES CÓNICAS. Uno ve que Diocles fue el primero en demostrar la propiedad de reflexión de una PARÁBOLA, resolviendo así un viejo problema presentado por ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) de encontrar una superficie de espejo que produzca calor cuando se coloca frente al sol. (Se dice que Arquímedes propuso usar espejos curvos para reflejar los rayos del sol y quemar las velas de los barcos enemigos.) Diocles también describe su curva "cisoide" en este texto y un método para construir, geométricamente, la raíz cúbica de cualquier longitud dada con su ayuda. Como la construcción de la raíz cúbica de 2 es el principal escollo en la solución del problema de la duplicación del cubo, la cisoide proporciona una solución a este desafío clásico. Hoy describimos la cisoide como la curva plana con ecuación $y^2(2a - x) = x^3$, y donde a es una constante. La aparición de la potencia cúbica hace posible la construcción de raíces cúbicas.

Algunos historiadores sugieren que Diocles pudo haber usado los términos parábola, hipérbola y elipse para las secciones cónicas antes de Apolonio, el erudito al que generalmente se atribuye la invención de estos nombres. El trabajo de Diocles sobre las cónicas influyó mucho en el desarrollo del tema. Se desconoce la fecha exacta de la muerte de Diocles.

Ecuación diofántica Cualquier ecuación, por lo general con varias incógnitas, que se estudia y requiere que solo tenga soluciones con valores enteros se denomina ecuación diofántica. Por ejemplo, el PROBLEMA DE LLENAR LA JARRA requiere que encontremos soluciones enteras para $3x + 5y = 1$, y la clasificación de TRIPLES PITAGÓRICAS busca soluciones enteras para $x^2 + y^2 = z^2$. Estos son problemas diofánticos. EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT aborda la inexistencia de soluciones enteras a la ecuación $x^n + y^n = z^n$ generalizada para exponentes de mayor valor. Los problemas de este tipo llevan el nombre de DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA, autor del primer libro conocido dedicado exclusivamente a la TEORÍA DE LOS NÚMEROS.

En 1900, DAVID HILBERT desafió a la comunidad matemática a idear un ALGORITMO que determinara si una ecuación diofántica dada tiene o no solución. Setenta años después, Yuri Matyasevic demostró que tal algoritmo no puede existir.

Diofanto de Alejandría (ca. 200–284 EC) Griego Teoría de números Diofanto es recordado como el autor Arithmetica, el primer texto conocido dedicado exclusivamente al estudio de la TEORÍA DE NÚMEROS. Diez de los 13 volúmenes originales sobreviven hoy. Al considerar unos 130 problemas, Diofanto desarrolló métodos generales para encontrar soluciones a algunos problemas de números enteros sorprendentemente difíciles, inspirando un campo de estudio que desde entonces se conoce como ECUACIONES DIOFANTINAS.

Esencialmente no se sabe nada sobre la vida de Diofanto, ni siquiera su lugar de nacimiento ni la fecha en que vivió. El autor Metrodorus (ca. 500 EC), en la Antología griega, describió brevemente la vida de Diofanto a través de un rompecabezas:

> Su niñez duró una sexta parte de su vida; su barba creció después de una doceava parte más; se casó después de un séptimo más; y su hijo nació cinco años después. El hijo vivió hasta la mitad de la edad de su padre, y el padre murió cuatro años después que el hijo.

Fijando L como la duración de la vida de Diofanto, deducimos entonces que la cantidad:

$$\frac{L}{6} + \frac{L}{12} + \frac{L}{7} + 5 + \frac{L}{2} + 4$$

es igual a la duración total de su vida. Al igualar esto a L y resolverlo, se obtiene L = 84. Por supuesto, la información provista aquí (que Diofanto se casó a los 26 años, vivió hasta los 84 y tuvo un hijo que sobrevivió hasta los 42) probablemente sea ficticia. El rompecabezas, sin embargo, encaja con el tipo de problema que a Diofanto le gustaba resolver.

En su famoso texto Arithmetica (Aritmética) Dio phantus presenta una serie de problemas numéricos específicos, con soluciones proporcionadas, que hábilmente conducen al lector a la comprensión de métodos generales y soluciones generales. Diofanto ignoró cualquier solución a un problema que fuera negativa o involucrara una raíz cuadrada irracional. Por lo general, solo permitía soluciones racionales positivas. Hoy, yendo más allá, los matemáticos llaman a cualquier problema que requiera solo soluciones enteras una ecuación de Diofantina.

Algunos de los problemas que consideró Diofanto son sorprendentemente difíciles. Por ejemplo, en el Libro IV de Arith metica , Diofanto pide a los lectores que escriban el número 10 como una suma de tres cuadrados cada uno mayor que tres. Él proporciona la respuesta:

Machine Translated by Google

$$10 = \frac{1321}{711} \quad \frac{22\ 2\ 1285\ 1288}{711} \quad \frac{}{711}$$

Aunque Diofanto no usó una notación algebraica sofisticada, fue el primero en usar un símbolo para una cantidad desconocida y en introducir una notación para las potencias de esa incógnita. También usó una abreviatura para la palabra igual. Esto representa el primer paso en la historia para pasar del álgebra verbal al álgebra simbólica.

El texto de Diofanto fue profundamente influyente y, siglos más tarde, se consideró una lectura esencial para los estudiosos europeos del Renacimiento. Inspirándose en un ejercicio del texto, el erudito PIERRE DE FERMAT (1601-1665) garabateó el famoso comentario en el margen de su copia personal de Arithmetica que estimuló tres siglos de intensa investigación matemática en teoría de números. Este comentario se conoció como EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT .

cosenos directores Cada punto P en la superficie de una esfera unitaria determina una dirección única en el espacio tridimensional: si O es el centro de la esfera, entonces el rayo que conecta O con P especifica una dirección. A la inversa, la dirección de cualquier línea dada en el espacio corresponde a un punto P en la esfera unitaria.

Al establecer O como el origen de un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS , los “cosenos directores” de cualquier línea dirigida en el espacio tridimensional son simplemente las coordenadas del punto P en la esfera unitaria que corresponde a la dirección de esa línea. Por ejemplo, el coseno director del eje x positivo es (1,0,0) y el del eje z negativo es (0,0,–1).

El uso de la palabra coseno en el nombre de este concepto proviene de la observación de que la dirección de una línea que pasa por O está completamente especificada por los tres ángulos α, β y γ que forma con cada uno de los positivos x- , y- , y ejes z, respectivamente. (Se supone que estos ángulos están entre cero y 180°. Se llaman ángulos de dirección). Un ejercicio de geometría muestra que el punto P correspondiente en la esfera unitaria tiene coordenadas (cosα, cos β, cos γ).

Los tres cosenos directores no son independientes. Dos aplicaciones del TEOREMA DE PITÁGORAS muestran que estos números satisfacen la relación: cos2 α + cos2 β + cos2 γ = 1. Así, cualesquiera dos cosenos directores determinan el tercero.

Los cosenos directores de una línea arbitraria a menudo se denotan (l, m, n). Las "relaciones de dirección" o "números de dirección" de una línea se definen como cualquier conjunto de tres números en la relación l : m : n. El ángulo θ entre dos rectas con cosenos directores (l1 ,m1 ,n1) y (l2 ,m2 ,n2) viene dado por:

$$\cos\theta = l1\ l2 + m1m2 + n1n2$$

Este es simplemente el PRODUCTO PUNTO de los dos VECTORES que describen las direcciones de las líneas.

derivada direccional La gráfica de una función z = f(x,y) es una superficie situada en un espacio tridimensional.
La derivada direccional de f en un punto P = (x,y) y en la dirección dada por un VECTOR v = < v1 , v2 >, denotado Dv f, es simplemente la PENDIENTE de la superficie sobre el punto P en la dirección de v. Se supone que v es un vector de longitud 1.

Específicamente, si t es una variable, mejor pensada como “tiempo”, entonces la expresión P + tv representa una trayectoria en línea recta que comienza en P y apunta en la dirección de v, y f(P + tv) es la “rebanada” de la superficie por encima de esta línea. La derivada direccional es entonces la DERIVADA de esta cantidad con respecto a t:

$$Df_v = \frac{d}{dt}\left(f(P + tv) \right)\Big|_{t=0} \quad \lim_{h \to} \frac{(+) \text{ fx alto y alto } (2,) + }{h}$$

(Requerimos que v sea un vector de unidad de longitud para que la "velocidad" a la que recorremos el camino P + tv sea 1 unidad de longitud por unidad de tiempo).

Si tomamos v como el vector unitario en la dirección del eje x positivo, v = (1,0), entonces) + fx hy (,) $D f v =$ $\lim_{h \to 0} \frac{(}{} = \frac{\partial f}{\partial X}$, la DERIVADA PARCIAL de la función h con respecto a x. De manera similar, la derivada direccional en la dirección del eje y positivo es la derivada parcial con respecto a y. En general, la REGLA DE LA CADENA muestra:

$$Df_v \quad \frac{re\ \partial F}{} = += y\ re\ \partial \quad \frac{}{X} \quad \frac{dx\ tv\partial f\ ()}{tv\ dt\ \partial\ qt\ t} + \frac{}{} \quad \frac{dy}{} \quad + \quad {}_2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial X} \quad 1 + v \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad v_2$$

Machine Translated by Google

que se puede reescribir como el PRODUCTO DOT de dos vectores:

$$Dv\, f = f \cdot v$$

dónde $f = \left\langle \frac{\partial f}{X}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle$ es el GRADIENTE de f. este profesional ∂ proporciona el método más sencillo para calcular la derivada direccional de una función.

Tenga en cuenta que $f \cdot v = |f| \cdot |v| \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Dado que la función coseno tiene un valor máximo para θ = 0°, esto muestra que la dirección v de la pendiente más pronunciada para un gráfico en un punto P ocurre en la dirección v = f. Esto demuestra:

> El vector f apunta en la dirección en la que f aumenta más rápidamente.

De manera similar, la función coseno tiene un valor mínimo para θ = 180°, lo que muestra que la caída más pronunciada ocurre precisamente en la dirección opuesta:

> El vector –f apunta en la dirección en la que f disminuye más rápidamente.

Estas ideas se extienden a funciones de más de dos variables.

prueba directa La mayoría de las afirmaciones hechas en matemáticas son enunciados de la forma:

> Si la premisa A es verdadera, entonces la conclusión B es verdadera.

Una prueba directa de tal afirmación intenta establecer la validez de la afirmación suponiendo que la premisa A es verdadera y mostrando que la conclusión B se deriva de una serie de inferencias lógicas basadas en A y otros hechos conocidos previamente establecidos. Por lo general, una prueba directa tiene la forma:

1. Suponga que A es verdadera.
2. Muestre que A implica B.
3. Concluya que B es verdadero.

La parte principal de la prueba es la demostración de que A implica B.

Como ejemplo simple, demostramos: si un número natural n es par, entonces n^2 es múltiplo de 4. Basaremos su prueba del hecho conocido de que cualquier número par es un múltiplo de dos (así como las manipulaciones algebraicas estándar).

> Prueba: Suponga que n es par.
> Entonces n se puede escribir en la forma n = 2k, para algún número k. =
> En consecuencia, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, y también lo es un múltiplo de cuatro.
> Esto completa la prueba.

Una PRUEBA INDIRECTA o una PRUEBA POR CONTRADICCIÓN intenta establecer que la conclusión B debe ser verdadera mostrando que no puede ser falsa.

Véase también RAZONAMIENTO DEDUCTIVO/INDUCTIVO ; ESTAFA TRAPOSITIVO; LEYES DEL PENSAMIENTO; PRUEBA; QED; TEOREMA.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805–1859) Alemán Análisis, teoría de números Nacido el 13 de febrero de 1805, cerca de Lieja, ahora en Bélgica (aunque se consideraba alemán), el erudito Lejeune Dirichlet es recordado por sus importantes contribuciones al campo de TEORÍA ANALÍTICA DE NÚMEROS y al estudio de SERIES DE FOURIER. En particular, se destaca por demostrar que cualquier SUCESIÓN ARITMÉTICA a, a+d, a+2d, a+3d, … debe contener un número infinito de primos, siempre que el número inicial a y la diferencia d sean RELATIVAMENTE PRIMOS. (Esto muestra, por ejemplo, que hay una cantidad infinita de números primos que son 7 mayores que un múltiplo de 13). Dirichlet fue el primero en proporcionar la definición moderna de FUNCIÓN que usamos hoy y, en el estudio de series trigonométricas, fue el primero en proporcionar condiciones que aseguren que una serie de Fourier dada convergerá. Por esta razón, a pesar del trabajo de JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830), a menudo se hace referencia a Dirichlet como el fundador de la teoría de las series de Fourier.

Dirichlet se graduó del gymnasium (escuela secundaria) en Bonn a la edad de 16 años y se fue a París para estudiar matemáticas. Nunca completó formalmente un programa académico allí y, en consecuencia, nunca obtuvo un título universitario. En 1825, a la edad de 20 años, Dirichlet obtuvo fama instantánea como un matemático digno al publicar una prueba de que no puede haber soluciones enteras positivas para la ecuación de quinto grado $x^5 = y^5 + z^5$. Este es un caso especial del ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT , y Dirich vamos a trabajar en él representó el primer paso significativo

Machine Translated by Google

hacia la solución del problema general desde la época de PIERRE DE FERMAT (1601-1665), quien había establecido que no hay soluciones para la ecuación de cuarto grado, y LEONHARD EULER (1707-1783), quien había probado que no hay soluciones para la ecuación de tercer grado.
Más tarde, Dirichlet pudo extender su trabajo a la ecuación de grado 14, pero a ningún otro caso.

En honor a su logro, Dirichlet fue recibió un doctorado honorario de la Universidad de Colonia, y con un título avanzado en la mano, Dirich siguió una carrera académica. fue designado profesor de la Universidad de Berlín en 1828, donde permaneció durante 27 años. En 1855 Dirichlet logró CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) como catedrático de matemáticas en la Universidad de Göttingen.

Dirichlet desarrolló técnicas innovadoras usando la noción de LÍMITE en el estudio de la TEORÍA DE NÚMEROS que le permitió hacer avances significativos en el campo. Presentó su famoso resultado sobre ARITMÉTICA SECUENCIAS a la Academia de Ciencias el 27 de julio de 1837, y publicó el trabajo en el artículo de dos partes "Recherches sur diversas aplicaciones de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres" (Encuesta sobre varias aplicaciones del análisis infinitesimal al número teoría) durante los 2 años que siguieron. Dirichlet también encontró aplicaciones de este trabajo a la mecánica, a la solución de ECUACIONES DIFERENCIALES, y al estudio de la serie de Fourier. Publicó sistemáticamente artículos sobre Tanto la teoría de números como la física matemática. a lo largo de su carrera. Entre sus obras más destacadas se encuentran el libro de 1863 Vorlesungen über Zahlentheorie (Conferencias sobre teoría de números), el artículo de 1846 "Über die Stabilität des Gleichgewichts" (Sobre la estabilidad de la sistema solar), y el artículo de 1857 "Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik" (Investigación sobre un problema de hidrodinámica).

Dirichlet murió el 5 de mayo de 1859 en Göttingen, Alemania. Dada la importancia de su trabajo matemático, muchos matemáticos de hoy consideran a Dirichlet como el fundador de la teoría analítica de números.

discontinuidad Ver FUNCIÓN CONTINUA.

discreto Un conjunto de valores numéricos en el que hay ningún valor intermedio se dice que es discreto. Por ejemplo, el conjunto de ENTEROS es discreto, pero el conjunto de todos NÚMEROS REALES no es: entre dos números reales cualesquiera, no importa cuán cerca, hay otro número real. Cualquier conjunto finito de valores se considera discreto.

Dado que un conjunto de valores CONTABLE se puede poner en correspondencia uno a uno con los números enteros, un el conjunto suele considerarse discreto. Sin embargo, esto puede ser confuso, ya que el conjunto contable de RATIONAL NÚMEROS, por ejemplo, es discreto en este segundo sentido, pero no en el primero: entre dos números racionales cualesquiera p p y q se encuentra otro racional (debe $\frac{p+q}{2}$, por ejemplo). Uno basarse en el contexto del problema en estudio para determinar si el conjunto de números racionales debe ser considerado como discreto.

En la teoría de ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD , un conjunto de DATOS o conjunto de EVENTOS se llama discreto si la población subyacente es finita o contablemente infinita. Los resultados de lanzar un dado, por ejemplo, forman un conjunto discreto de eventos, ya que el dado debe caer en una de las seis caras. A diferencia de, por ejemplo, el rango de alturas de las mujeres australianas 36 años no es discreto sino continuo.

En GEOMETRÍA, una ISOMETRÍA con la propiedad de que cada punto se mueve más que una cierta distancia positiva fija más lejos se llama transformación discreta.
Por ejemplo, una traslación es discreta, pero una rotación o la reflexión no lo es.

La geometría discreta es el estudio de un conjunto finito de puntos, líneas, círculos u otras figuras simples.

discriminante Una ecuación CUADRÁTICA de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones dadas por la cuadrática fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La cantidad bajo el signo de la raíz cuadrada, $b^2 - 4ac$, es llamado el discriminante de la ecuación. Si el discriminante de una cuadrática es positivo, entonces la ecuación tiene dos raíces reales distintas. Por ejemplo, la ecuación $2x^2 - 5x + 2 = 0$ tiene discriminante 3 y las dos soluciones reales $x = 2$ y $x = 1/2$. Si el discriminante de una cuadrática es cero, entonces la ecuación tiene una sola raíz real. Por ejemplo, $x^2 - 6x + 9 = 0$, con discriminante cero, tiene solo $x = 3$ como una raíz. (Es una RAÍZ DOBLE.) Si el discriminante es negativo, entonces la cuadrática no tiene soluciones reales. Lo hace, sin embargo, tienen soluciones complejas (distintas). Por ejemplo,

Machine Translated by Google

$2x_{-}$ + x + 1 = 0, con discriminante –3, tiene soluciones

$x = \frac{yo - +1\sqrt{3}}{2}$ y $x = \frac{yo - -1\sqrt{3}}{2}$.

Más generalmente, el discriminante de cualquier ecuación POLINOMIAL se define como el producto de las diferencias al cuadrado de todos los posibles pares de raíces de la ecuación. Por ejemplo, si una ECUACIÓN CÚBICA tiene tres y r3 r2 , criminante (posiblemente repetidas), entonces las raíces r1 , de cúbica son el producto:

$$(r1 - r2)^2(r2 - r3)^2(r3 - r1)^2$$

Es posible encontrar una fórmula para el discriminante en términos de los coeficientes que aparecen en la ecuación. Para el caso de una cuadrática, resulta ser precisamente la cantidad b 2 – 4ac descrita anteriormente.

disyunción (enunciado “o”) Un enunciado compuesto de la forma “p o q” se conoce como disyunción. Por ejemplo, “Visité Sydney o Melbourne” es un ejemplo de disyunción.

Las disyunciones se pueden interpretar de dos maneras. Si una disyunción "p o q" se lee como

p o q, pero no ambos

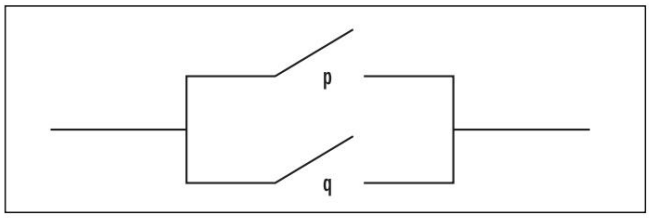
(“Visité solo una de las dos ciudades”), entonces se dice que es “exclusivo”, y la disyunción se llama “o exclusivo” (a veces denotado XOR). Interpretado como

p o q, o posiblemente ambos

(“Visité al menos una de las ciudades”), entonces se dice que la disyunción es “inclusiva” y se llama “inclusiva”.

o." En LÓGICA FORMAL (y en la mayor parte de las matemáticas), las disyunciones siempre se usan en el sentido inclusivo. Se denota en símbolos por p q y tiene la siguiente MESA DE LA VERDAD:

pqp	q
T T T	
TFT	
F TT	
FFF	



Circuito de disyunción

Una disyunción se puede modelar a través de un circuito paralelo. Si T denota el flujo de corriente, entonces la corriente se mueve a través del circuito como un todo precisamente cuando uno o ambos interruptores p y q admiten flujo de corriente.

Véase también CONJUNCIÓN.

desplazamiento La distancia recorrida por un objeto en movimiento a veces se denomina desplazamiento. Los físicos a menudo usan el símbolo s para indicar el desplazamiento. La tasa de cambio de desplazamiento se llama VELOCIDAD.

Véase también CÁLCULO DIFERENCIAL.

fórmula de distancia La distancia d entre dos puntos dados P1 = (x1 ,y1) y P2 = (x2 ,y2) en el plano es la longitud del segmento de línea que conecta P1 con P2 . Si uno considera este segmento de línea como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con un cateto horizontal, es decir, paralelo al eje x, y un cateto vertical, paralelo al eje y, entonces se puede emplear el TEOREMA DE PITÁGORAS para encontrar una fórmula para D. La longitud del lado horizontal es la diferencia de las coordenadas x x2 – x1 o x1 – x2 , cualquiera que sea positiva, y la longitud del lado vertical es la diferencia de las coordenadas y, y2 – y1 o y1 – y2 .

Así, por el resultado de Pitágoras, tenemos:

$$re = \sqrt{xx_{-} + yy_{-}} \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

Esto se llama la fórmula de la distancia bidimensional.

Por ejemplo, la distancia entre los puntos (–3,5) $\sqrt{(2 - (-3))2 + (1}$ como cabría – 5)2 $\sqrt{5}$ 2+ (–4)2 y (2,1) es Noteque, $= \sqrt{41}$. esperar, la fórmula de la distancia es simétrica en el sentido de que la distancia entre P1 y P2 es la misma que la distancia entre P2 y P1 .

El conjunto de todos los puntos (x,y) en el plano a una distancia fija r de un punto dado C = (a,b) forman un CÍRCULO con radio

Machine Translated by Google

r y centro C. La fórmula de la distancia da la ecuación $\sqrt{(x$ un círculo tal como r = $- a)$ de $^2 + (y - b)^2$, o $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$.

En el espacio tridimensional, la distancia d entre dos puntos P1 = (x1 ,y1 ,z1) y P2=(x2 ,y2 ,z2) se encuentra mediante dos aplicaciones del teorema de Pitágoras. Por ejemplo, la distancia entre los puntos O = (0,0,0) y A = (a,b,c) se encuentra primero observando que P = (a,b,0) es el punto directamente debajo de A que se encuentra en el plano xy, y que el triángulo OPA es un triángulo rectángulo. Por la fórmula de la distancia bidimensional, la distancia $\sqrt{(a - 0)2 + (b - 0)2}$ = entre O y P $\sqrt{a 2 + b 2}$. La longitud de la línea vertical que conecta P con A es c, y la longitud de la hipotenusa OA es la distancia d que de Pitágoras = ( )2 + bus teorema Por el $^2 2 =$ un $+$ segundo $2 2 + c$. $\sqrt{a 2 + b 2}$ tenemos: $2 + c$.

d 2 √a 2 Así: d = + b 2 Una ligera modificación de este argumento muestra que la fórmula general de la distancia tridimensional para la distancia entre dos puntos P1 = (x1 ,y1 ,z1) y P2 = (x2 ,y2 ,z2) es:

$$re = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2}$$

El conjunto de todos los puntos (x,y,z) en el espacio a una distancia fija r de un punto dado C = (a,b,c) forman una ESFERA con radio r y centro C. La fórmula de la distancia da la ecuación de tal esfera como $^2 + (y - a)^2 + (z - c)^2 2 = r$.

La fórmula de la distancia se generaliza a los puntos en el espacio n dimensional como la raíz cuadrada de la suma de las diferencias de las n coordenadas al cuadrado. Esto funciona incluso para espacios unidimensionales: la distancia entre dos puntos x1 y x2 en la recta numérica es d = Este $\sqrt{(x2 - x1)^2}$. es precisamente el VALOR ABSOLUTO |x2 – x1 |.

La LONGITUD de un VECTOR v = < a,b,c > viene dada por la fórmula de la distancia: Si colocamos el vector en la ubicación O = (0,0,0) de modo que su punta quede en A = (a,b, c), entonces su longitud $\sqrt{a 2}$ es |v| = + segundo $2 + c 2$.

Distancia de un punto a un plano en el espacio tridimensional

La distancia de un punto P a un plano se define como la distancia entre P y el punto N en el plano más cercano a P. Supongamos que el punto P tiene coordenadas P = (x0 ,y0 ,z0) y la ECUACIÓN VECTORIAL DE UN PLANO es ax + by + cz + d = 0 donde $\vec{n}$ = < a,b,c > es la normal al plano. Entonces N es el punto (x1 ,y1 ,z1) en el plano con el vector $\overrightarrow{NP}$ 90° al plano. Esto significa que el vector $\overrightarrow{NP}$ es es paralelo a n, por lo que $\overrightarrow{NP}$ = kn para alguna constante k. Esta da la ecuación <x0 – x1 ,y0 – y1 ,z0 – z1> = k <a,b,c>, por lo que x1 = x0 – ka,y1 = y0 – kb y z1 = z0 – kc. Como N = (x1 ,y1 ,z1) está en el plano, este punto también satisface la ecuación del plano. Manipulación algebraica luego hacha por cz d . por la muestra que $k = \frac{\text{distancia}}{\text{la distancia}}$ fórmula,

P y N es:

$$\sqrt{(z - z)^2 + (y - y)^2 + (x - x)^2} = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2 + (kc)^2}$$

$$= |ka| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{|\text{hacha por cz}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Esto establece:

> La distancia de un punto P = (x0 ,y0 ,z0) desde el plano ax + by + cz + d = 0 viene dada por la fórmula:

$$\frac{|\text{hacha por cz d}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distancia de un punto a una línea en un espacio bidimensional

La distancia de un punto P a una línea se define como la distancia entre P y el punto N en la línea más cercana a P. La ECUACIÓN DE UNA LÍNEA es una fórmula de la forma ax + by + c = 0. Un argumento análogo al presentado anteriormente establece:

> La distancia de un punto P = (x0 ,y0) a la línea ax + by + c = 0 viene dada por la fórmula:

$$\frac{|\text{hacha por c}|}{\sqrt{\text{abdominales}^2}}$$

Véase también NÚMEROS COMPLEJOS.

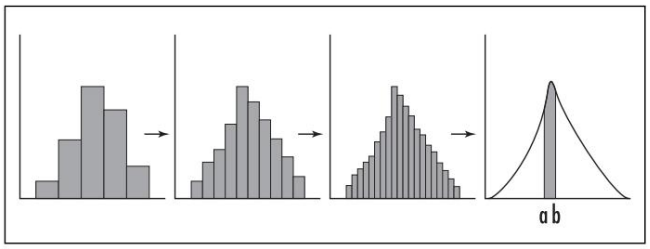
distribución Cualquier tabla o diagrama que ilustre la frecuencia (número) de mediciones o conteos de un experimento o estudio que se encuentran dentro de ciertas categorías preestablecidas se denomina distribución. (Ver ESTADÍSTICAS: DESCRIPTIVAS). Por ejemplo, las estaturas de 1,000 niños de 8 años que participan en un estudio médico pue

Machine Translated by Google

registrada a través de un histograma. Las categorías consideradas son intervalos de rangos de altura elegidos convenientemente, como 36,1–40,0 pulgadas, 40,1–44,0 pulgadas, etc., por ejemplo.

Si los DATOS recopilados son numéricos y pueden adoptar una matriz continua de valores, incluidos valores fraccionarios (por ejemplo, la altura puede adoptar valores fraccionarios: 48 3/4 pulgadas o 52,837 pulgadas son medidas posibles), entonces se puede elegir una medida más estrecha y rangos de intervalos más estrechos para las categorías. En el LIMIT, el histograma se convierte entonces en el gráfico de una curva suave que representa la distribución de medidas sobre un espectro continuo de valores. En cierto sentido, el área total bajo la curva representa el número total de mediciones observadas, y el área sobre un intervalo [a,b] representa el número de mediciones que tienen un valor mayor que a y menor que b. Para hacer esto más preciso, es apropiado escalar la distribución de modo que el área total bajo la curva sea uno (es decir, se dibujan histogramas con barras verticales de alturas que representan el porcentaje de mediciones registradas dentro de esa categoría, "frecuencias relativas") . "— donde el área total bajo dicho histograma representa el 100 por ciento). La curva ideal obtenida en el límite se denomina "función de densidad de probabilidad". El área bajo la curva sobre un intervalo [a,b] aquí representa la PROBABILIDAD de que una medida tomada al azar caiga dentro del rango [a,b].

Una cantidad numérica que puede adoptar una matriz continua de valores (como la altura, el peso o la temperatura) generalmente se denomina variable aleatoria continua. Se determina la distribución (función de densidad de probabilidad) de una variable aleatoria realizando experimentos o estudios, por ejemplo, registrando las estaturas de 1.000 niños de 8 años, o por razonamiento matemático, haciendo uso del TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL , la DISTRIBUCIÓN NORMAL, o quizás la DISTRIBUCIÓN BINOMIAL, por ejemplo. A menudo, la distribución de una variable aleatoria es desconocida y la "prueba de hipótesis" se utiliza para verificar la validez de la suposición de que una MUESTRA sigue una distribución particular. Esto es parte de la estadística inferencial.



Una distribución como límite

Si una variable aleatoria tiene una función de densidad de probabilidad dada por una fórmula f(x), entonces el área bajo la curva a la izquierda de un valor x da una nueva función F(x) llamada función de distribución acumulativa. La cantidad F(x) representa la probabilidad de que una medida tomada al azar tenga un valor menor o igual que x.

Ver también ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

propiedad distributiva Dado un sistema matemático con dos operaciones, como suma y multiplicación, o unión e intersección, decimos que una operación se distribuye sobre la segunda si al aplicar la primera operación a un conjunto de elementos combinados a través de la segunda se obtiene el mismo resultado como aplicar la primera operación a los miembros individuales de la combinación, y luego combinarlos a través de la segunda. Por ejemplo, en la aritmética ordinaria, la multiplicación se distribuye sobre la suma. Tenemos, por ejemplo:

$$3 \times (2 + 5 + 4) = 3 \times 2 + 3 \times 5 + 3 \times 4$$

es decir, triplicar una suma de números produce el mismo resultado que triplicar cada número individual y luego sumar. (En aritmética, la propiedad distributiva corresponde a la operación de EXPANSIÓN DE SOPORTES.)

Sin embargo, observe que la suma no es distributiva sobre la multiplicación. Por ejemplo: $4 + (6 \times 7) \neq (4 + 6) \times (4 + 7)$. (La primera cantidad es igual a $4 + 42 = 46$, mientras que la segunda es $10 \times 11 = 110$).

En aritmética, la propiedad distributiva generalmente se expresa como una multiplicación aplicada a la suma de solo dos términos:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Que se aplica a una suma de tres o más términos se sigue de aplicar esta ley básica más de una vez. Por ejemplo:

$$a \times (b + c + d) = a \times ((b + c) + d) = a \times (b + c) + a \times d = a \times b + a \times c + a \times d$$

La multiplicación también distribuye sobre la suma "desde la derecha". Tenemos:

Machine Translated by Google

$$(a + b) \times c = c \times (a + b) = c \times a + c \times b = a \times c + b \times c$$

En TEORÍA DE CONJUNTOS, “intersección” se distribuye sobre “unión” tanto desde la izquierda como desde la derecha:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Como recurso mnemotécnico, es útil pensar en la frase “distribuye sobre” como sinónimo de “espolvorea sobre”. Tenemos: multiplicación “sprinkles over” sumas e intersección “sprinkles over” unión. En cualquier ANILLO, la propiedad distributiva es el único axioma que combina las dos operaciones definitorias.

Véase también ASOCIATIVO; PROPIEDAD CONMUTATIVA.

div UN CAMPO VECTORIAL asigna a cada punto (x,y,z) en el espacio un vector F = <f1 (x,y,z),f2 (x,y,z),f3 (x,y,z)>. La divergencia de F, denotada div F, es la cantidad:

$$\text{división } F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

dado como una suma de DERIVADAS PARCIALES. Los físicos han demostrado que esta cantidad representa la cantidad de flujo que deja un elemento de volumen en el espacio. Por ejemplo, si F representa el campo de velocidad de un fluido turbulento y ρ es la densidad del fluido, entonces ρdivF, calculado en un punto P, es la velocidad a la que se pierde masa de un cuadro (infinitamente pequeño) dibujado alrededor de P (En cualquier instante, el fluido entra y sale de esta caja).

El operador de divergencia a menudo se escribe como si fuera un PRODUCTO DOT de dos vectores:

$$\text{divF} = \nabla \cdot F$$

dónde $\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$ es el operador del. La CRUZ El PRODUCTO de con F se llama rotacional de F:

$$\text{rizo } F \quad \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) k$$

Si F es el campo de velocidad de un líquido turbulento, los físicos han demostrado que 1/2 rotacional F, calculado a una punto P, es la velocidad angular de un elemento de fluido ubicado en P, es decir, es una medida de la cantidad de giros que sufre.

Véase también GRADIENTE.

divergente Este término simplemente significa “no converge”. Por ejemplo, se dice que una SECUENCIA infinita diverge si no tiene LÍMITE, y una SERIE infinita diverge si la sucesión de sumas parciales diverge.

Se dice que una sucesión divergente es “propiamente divergente” si tiende a infinito. Por ejemplo, la sucesión 1,2,3,... es propiamente divergente (pero las sucesiones 1, -1,1, -1,1,... y 1, -2,3, -4,5,... no lo son). También se describe una serie como propiamente divergente si la secuencia correspondiente de sumas parciales tiene esta propiedad.

Por ejemplo, la serie 1 + 2 + 4 + 8 + 16 +… es propiamente divergente.

Un PRODUCTO INFINITO es divergente si tiene valor cero o no converge. Una INTEGRAL IMPROPIA diverge si el límite que la define no existe.

Véase también SECUENCIA CONVERGENTE.

reglas de divisibilidad Se dice que un número es divisible por n si, trabajando únicamente dentro de los enteros, el número deja un resto de cero cuando se divide por n. Por ejemplo, 37 deja un resto de 1 cuando se divide por 3, por lo que no es divisible por 3. Por otro lado, 39, dejando un resto de cero, es divisible por 3.

Hay una serie de reglas para probar rápidamente la divisibilidad de números entre enteros pequeños. Presentamos reglas de divisibilidad para los primeros 12 enteros.

Divisibilidad por 1
Todos los números son divisibles por 1.

Divisibilidad por 2
Como todos los múltiplos de 10 son divisibles por 2, basta comprobar si la última cifra de un número es o no divisible por 2. Por ejemplo, 576 = 57 × 10 + 6. Que 6 es un múltiplo de 2 asegura que 576 también lo es. Tenemos la regla:

> Un número es divisible por 2 solo si su dígito final es 0, 2, 4, 6 u 8.

Divisibilidad por 3
Que 10, 100, 1000,… todos dejen resto 1 al dividirlos por 3 nos permite determinar rápidamente el resto

Machine Translated by Google

der de cualquier número dividido por 3. Por ejemplo, 3212 es igual a 3 × 1000 + 2 × 100 + 1 × 10 + 2 × 1, por lo que deja un resto de 3 × 1 + 2 × 1 + 1 × 1 + 2 × 1 = 8 cuando se divide por 3. Esta es la suma de sus dígitos. Por supuesto, un resto de 8 es equivalente a un resto de 2. Tenemos:

> El resto de cualquier número dividido por 3 es la suma de sus dígitos. Por lo tanto, un número es divisible por 3 solo si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

Se puede hacer uso repetido de esta regla para verificar la divisibilidad. Por ejemplo, 55 837 deja un resto de 5 + 5 + 8 + 3 + 7 = 28 cuando se divide por 3. Esto corresponde a un resto de 2 + 8 = 10, que, a su vez, es un resto de 1 + 0 = 1.

Esta regla muestra que codificar los dígitos de cualquier múltiplo de 3 produce un nuevo número que sigue siendo un múltiplo de 3.

Divisibilidad por 4

Como cualquier múltiplo de 100 es divisible por 4, basta con comprobar si los dos dígitos finales de un número representan o no un múltiplo de 4 de dos dígitos. Por ejemplo, 18,736 es igual a 187 × 100 + 36. Como 36 es un múltiplo de 4 (se puede dividir por 2 dos veces), estamos seguros entonces que 18.736 es un múltiplo de 4. Tenemos:

> Un número es divisible por 4 si sus dos dígitos finales representan un número de dos dígitos que se puede dividir por 2 dos veces.

Divisibilidad por 5

Cualquier número N se puede escribir en la forma N = 10a + b donde b es el dígito final de N. (Por ejemplo, 739 = 73 × 10 + 9). Como 10 es divisible por 5, solo necesitamos verificar si el último dígito b es o no divisible por 5. Esto da:

> Un número es divisible por 5 solo si su dígito final es 0 o 5.

Divisibilidad por 6

Para que un número sea divisible por 6, debe ser par y múltiplo de 3. Esto da:

> Un número es divisible por 6 solo si es un número par cuyos dígitos suman un múltiplo de 3.

Divisibilidad por 7

Todo número N es de la forma N = 10a + b, es decir, un múltiplo de 10 más un solo dígito. Como 7a y 7b son claramente divisibles por 7, tenemos que 10a + b deja el mismo resto que 10a + b – 7a – 7b = 3(a – 2b) cuando se divide por 7. Por lo tanto, basta con comprobar si la cantidad 3 (a – 2b) es un múltiplo de 7. Esto solo puede ocurrir si a – 2b es un múltiplo de 7. Observando que a es el número original N con su último dígito eliminado y b es el último dígito de N, tenemos el regla:

> Para probar si un número es divisible por 7 o no, quita el último dígito y resta el doble de ese dígito del número restante. Entonces el número original es divisible por 7 solo si el resultado de esta operación es divisible por 7.

Por ejemplo, para comprobar si 68.978 es o no divisible por 7, quita el 8 y resta el doble de este, 16, de 6.897, el número restante. Esto da 6897 – 16 = 6881. Podemos probar si 6881 es o no múltiplo de 7 de la misma manera: 6881 → 688 – 2 = 686, y una vez más: 686 → 68 – 12 = 56. Que el resultado final, 56, sea divisible por 7 nos asegura que 68,978 es múltiplo de 7.

Divisibilidad por 8

Como cualquier múltiplo de 1000 es divisible por 8, basta con comprobar si los últimos tres dígitos de un número representan o no un múltiplo de tres dígitos de 8. Por ejemplo, 648 728 es igual a 648 × 1000 + 728. Como 728 puede se divide por 2 tres veces, y por lo tanto es múltiplo de 8, tenemos que 648.728 es divisible por 8.

> Un número es divisible por 8 si sus tres dígitos finales representan un número de tres dígitos que se puede dividir por 2 tres veces.

Divisibilidad por 9

Dado que 10, 100, 1000,… todos dejan un resto de uno cuando se dividen por 9, la regla de divisibilidad para 9 es idéntica a la de 3.

> El resto de cualquier número dividido por 9 es la suma de sus dígitos. Por lo tanto, un número es divisible por 9 solo si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.

Nuevamente, uno puede hacer uso repetido de esta regla. Por ejemplo, 76 937 deja un resto de 7 + 6 + 9 + 3 + 7 = 32 cuando se divide por 9, que, a su vez, corresponde a un resto de 3 + 2 = 5. Esta regla se usa a menudo para

Machine Translated by Google

verificar el trabajo aritmético a través del método de CASTING FUERA NUEVE.

Divisibilidad por 10
Cualquier número N se puede escribir en la forma N = 10a + b, donde b es el último dígito de N. Por lo tanto, un número es divisible por 10 solo si su último dígito es un múltiplo de 10. Tenemos:

> Un número es divisible por 10 solo si su último dígito es cero.

Divisibilidad por 11
Los números 100, 1000,… alternativamente dejan residuos de 1 y –1 cuando se dividen por 11. (Por ejemplo, 100 es 1 más que un múltiplo de 11, pero 1000 es 1 menos). Así, el resto de un número cuando se divide por 11 se obtiene como la suma alterna de sus dígitos. Por ejemplo, 69 782, que es igual a 6 × 10 000 + 9 × 1000 + 7 × 100 + 8 × 10 + 2 × 1, deja un resto 6 × 1 + 9 × (–1) + 7 × 1 + 8 × (–1) + 2 × 1 = 6 – 9 + 7 – 8 + 2 = –2 cuando se divide por 11. (Esto es equivalente a un resto de 9).

Tenemos:

> El resto de cualquier número cuando se divide por 11 es la suma alterna de sus dígitos. Por lo tanto, un número es divisible por 11 solo si la suma alterna de sus dígitos es un múltiplo de 11.

Divisibilidad por 12
Un número es divisible por 12 solo si es divisible por 3 y 4. Así tenemos:

> Un número es divisible por 12 solo si sus dos dígitos finales representan un múltiplo de 4 de dos dígitos, y la suma de todos los dígitos del número es un múltiplo de 3.

La regla de divisibilidad para 7 también se puede extender a otros números. Por ejemplo, N = 10a + b es divisible por 17 solo si 10a + b – 51b = 10(a – 5b) lo es. Esto, a su vez, muestra que N es divisible por 17 precisamente cuando la cantidad a – 5b, obtenida al suprimir y restar 5 veces el dígito final, es divisible por 17. Note aquí que 51 es el primer múltiplo de 17 que es 1 más que un múltiplo de 10.

De la misma manera podemos usar el hecho de que 111 es el primer múltiplo de 37 que es 1 más que un múltiplo de 10 para obtener una regla de divisibilidad similar para 37, por ejemplo

por favor Las reglas de divisibilidad para todos los números PRIMOS , excepto el 2 y el 5, se pueden crear de esta manera.

división El proceso de encontrar el COCIENTE de dos números se llama división. En aritmética elemental, el proceso de división puede verse como una SUBTRACCIÓN repetida. Por ejemplo, 60 dividido por 12 es igual a 5 porque 12 se puede restar de este número cinco veces antes de llegar a cero: 60 – 12 – 12 – 12 – 12 – 12 = 0. Escribimos: 60 ÷ 12 = 5. La división también se puede descrito como el proceso de encontrar cuántos subconjuntos o magnitudes están contenidos dentro de un conjunto o cantidad dada. Por ejemplo, 5 ÷ 1/2 = 10 porque 10 longitudes de un medio están contenidas en una longitud de 5 unidades.

Si un número a se divide por un número b para producir un cociente q, a ÷ b = q, entonces a se llama dividendo y b divisor. El cociente también se puede expresar como una FRACCIÓN, a/b, o una RAZÓN, a:b. En general, el cociente q de dos números a y b satisface la ecuación q × b = a. Por lo tanto, la división también puede considerarse como la operación inversa de la MULTIPLICACIÓN. Así, dado que 5 × 12 = 60, por ejemplo, 5 es de hecho el cociente de 60 y 12. Este razonamiento también muestra que, dado que 0 × b = 0 para cualquier número b distinto de cero, tenemos 0 ÷ b = 0. Desafortunadamente , no se puede dar sentido a la cantidad 0 ÷ 0.
(Dado que 53 × 0 = 0, podemos vernos obligados a concluir que 0 ÷ 0 = 53. Al mismo tiempo, dado que 117 × 0 = 0, también tenemos que 0 ÷ 0 = 117. Tenemos inconsistencia).
Tampoco es posible dar significado al término a ÷ 0 para cualquier valor a distinto de cero. (Si a ÷ 0 = q, entonces q × 0 = a, resultando una CONTRADICCIÓN.)

El algoritmo LONG DIVISION proporciona un medio para dividir números enteros grandes. El proceso de división se puede extender a NÚMEROS NEGATIVOS, FRACCIONES, NÚMEROS REALES y NÚMEROS COMPLEJOS. En todos los escenarios, el número 1 actúa como un elemento de identidad, siempre que opere como un divisor: a ÷ 1 = a para todos los números a.

El símbolo ÷ se llama “obelus” y apareció impreso por primera vez en el texto Teutsche algebra de Johann Heinrich Rahn de 1659.

Ver también REGLAS DE DIVISIBILIDAD; DIVISOR; DIVISOR DE CERO; ALGORITMO EUCLIDEO; FACTOR; FACTORIZA CIÓN; TEOREMA DEL FACTOR; FUNCIÓN RACIONAL; PERMANECER DER TEOREMA.

divisor Otro nombre para FACTOR.

Machine Translated by Google

divisor de cero Dos cantidades, ninguna de las cuales es cero, pero se multiplican para dar cero como su producto se llaman divisores de cero. En la aritmética ordinaria, los divisores de cero nunca surgen: si a × b = 0, entonces al menos uno de a o b debe ser cero. En ARITMÉTICA MODULAR, sin embargo, Pueden existir divisores de cero. Por ejemplo, 3 × 2 es igual a cero en módulo aritmético 6. Dos matrices distintas de cero pueden multiplicarse para dar la MATRIZ cero, y el producto de dos funciones distintas de cero podría ser la función cero.

La presencia de divisores de cero en una matemática El sistema a menudo complica la aritmética que uno puede realizar dentro de ese sistema. Por ejemplo, para la aritmética módulo 10, 2 × 4 es igual a 2 × 9, pero dividiendo por 2, a divisor de cero en este sistema, conduce a la errónea conclusión de que 4 y 9 son iguales en este sistema. En En general, uno nunca puede realizar una división cuando un divisor de cero está involucrado.

producto escalar (producto interno, producto escalar) Denotado a·b, el producto escalar de dos VECTORES a y b es la suma de los productos de los respectivos componentes de los vectores. Precisamente, si a = <a1 ,a2 ,…,an> y b = <b1 ,b2 ,…,bn>, entonces a ·b es el número:

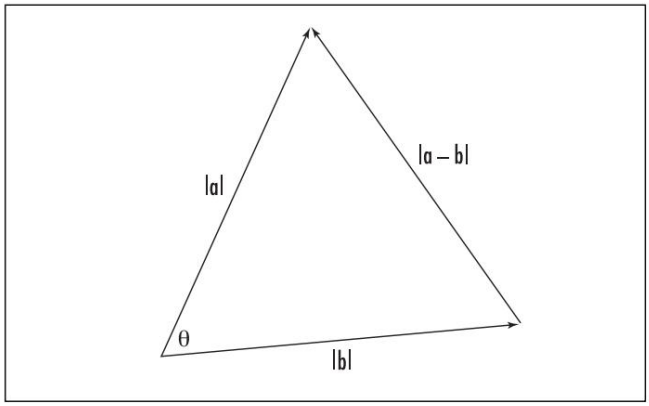
$$a \cdot b = a1b1 + a2b2 + \ldots + anbn$$

El resultado de la operación del producto escalar es siempre un verdadero número (escalar). Por ejemplo, el producto punto de la dos vectores a = < 1,4> y b = < 2,3> es a ·b = 1 · 2 + 4 · 3 = 14.

El producto punto surge en muchas situaciones. Para ejemplo, una charcutería local recibe lo siguiente formulario de pedido de almuerzo:

¿Cuántos?		Costo
2	Jamón @$2.80 ———	
	Pavo @$3.15 ———	
1	Ensalada De Huevo $1.95 ———	
3	Atún @$2.50 ———	
	Roast Beef @$3.60 ———	
	Coste total: ---	

Uno podría interpretar el orden como un vector de cinco dimensiones <2,0,1,3,0> para ser emparejado con un vector de cinco dimensiones "vector de costo" <2.80,3.15,1.95,2.50,3.60>. El total



Triángulo de vectores

el costo del pedido es entonces el producto escalar de estos dos vectores:

$$2 \times 2{,}80 + 0 \times 3{,}15 + 1 \times 1{,}95 + 3 \times 2{,}50 + 0 \times 3{,}60 = \$15.05$$

Geométricamente, el producto punto da un medio de calcular el ángulo entre dos vectores. Por ejemplo, dos vectores bidimensionales a = < a1 ,a2 > y b = < b1 ,b2 >, con ángulo θ entre ellos, forman un triángulo en el plano con longitudes laterales dadas por la DISTANCIA 2 FÓRMULA: $|a| = \sqrt{a1^2 + a2^2}$, $|b| = \sqrt{b1^2 + b2^2}$, $= \sqrt{(a1 - b1)^2 + (a2 - b2)^2}$.

Por la LEY DE LOS COSENOS tenemos:

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\theta)$$

de donde se sigue que:

$$a \cdot b = a1b1 + a2b2 = |a||b|\cos(\theta)$$

Por lo tanto, el ángulo entre dos vectores a y b puede ser calculado a través de la fórmula:

$$\cos(\theta) = \frac{ab}{|\text{abdominales}|}$$

Esta fórmula también es válida para vectores de tres y más dimensiones. Por ejemplo, considere el vector unitario i = <1,0,0> en el espacio tridimensional apuntando en la dirección del eje x, y j = <0,1,0> el vector correspondiente apuntando en la dirección del eje y. como el ángulo

Machine Translated by Google

entre estos dos vectores es 90°, su producto escalar i · j será cero (i · j = 1.0 + 0.1 + 0.0 = 0). En general:

> Dos vectores a y b forman ángulos rectos si, y sólo si, su producto escalar a · b es cero.

El producto escalar tiene el siguiente conmutativo y propiedades distributivas:

$$\text{un} \cdot \text{segundo} = \text{segundo} \cdot \text{un}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Véase también PRODUCTO CRUZADO; NORMAL A UN PLANO; ORTOGONAL; PRODUCTO TRIPLE VECTORIAL; VECTOR ECUACION DE UN PLANO.

integral doble El volumen bajo un gráfico z = f(x,y) de dos variables (que se dibuja como una superficie sentada en espacio tridimensional) sobre una región R en el plano xy se calcula a través de una integral doble, denotada:

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

Uno aproxima este volumen subdividiendo el región R en pequeños pedazos rectangulares, dibujando un paralelepípedo angular recto encima de cada rectángulo con una altura que alcance la superficie, y sumando los volúmenes de cada uno de ellos estos cuboides. A medida que se toman aproximaciones cada vez más finas, este proceso produce aproximaciones cada vez mejores al volumen real debajo de la gráfica. El límite de este proceso es la integral doble:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

donde dAk denota el área del k-ésimo rectangular región utilizada para aproximar R.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) mostró que si la región R es en sí misma un rectángulo, digamos, dada por a ≤ x ≤ b y c ≤ y ≤ d, entonces la integral doble puede ser calculada como cualquiera de las dos integrales iteradas:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

(En una integral iterada, uno integra una variable en un tiempo, considerando la segunda variable como una constante). El resultado también es válido para otras regiones con forma R , como siempre y cuando no sean demasiado complicados.

Por ejemplo, el volumen debajo del gráfico z = xy encima del rectángulo R = [1,2] × [2,3] es:

$$\iint_R xy\,dA = \int_1^2 \int_2^3 xy\,dy\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_{y=2}^{y=3} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{9}{2} x\,dx - 2 \qquad \int_1^2 \frac{5}{4} x\,dx = \frac{15}{8}$$

Observe que la integración se realiza a partir de la De adentro hacia afuera.

Una integral triple $\iiint_V f(x,y,z)\,dv$ de una función de tres variables f(x,y,z), calculadas sobre un volumen V en espacio, a menudo se puede calcular como una integral iterada triple, integrando cada variable a su vez. De nuevo, el orden de la integración, por lo general, no importa.

Véase también GEORGE VERDE.

punto doble Una ubicación en una curva donde la curva se cruza a sí mismo o es tangencial a sí mismo, se llama doble punto En el primer caso, el punto de intersección se llama nodo, y la curva tiene dos tangentes distintas en ese punto. En el segundo caso, el punto de contacto es llamado tacnodo u osculación. Las dos tangentes a la curva coincide en este punto.

Ver también PUNTO AISLADO; PUNTO SINGULAR; TANGENTE.

raíz doble Ver RAÍZ.

variable ficticia Una variable que aparece en una expresión matemática es una variable ficticia si se le asigna sin significado específico y si la letra que se utiliza para ello igualmente podría ser reemplazada por otra letra. Un índice de SUMMATION, por ejemplo, es una variable ficticia: la suma $\sum_{k=1}^{4} k^3$ de denotar 13 + 23 + 33 + 43 , para examen ple, podría igualmente bien ser representado como $\sum_{r=1}^{4} r^3$ o $\sum_{n=1}^{4} n^3$, decir. La variable utilizada para el integrando de un INTEGRAL DEFINIDA es una variable ficticia. Los dos expresiones $\int_0^1 x^2\,dx$ y $\int_0^1 t^2\,dt$, por ejemplo, representan

Machine Translated by Google

la misma integral definida, un número, por lo que x y t son variables ficticias. (La variable x, sin embargo, no es una variable ficticia en la INTEGRAL INDEFINIDA ∫x 2 dx.
Esta expresión es una función de la variable específica x.)

duplicar el cubo (problema del altar de Delos, duplicar el cubo) Uno de los problemas de la antigüedad (como la CUADRATURA DEL CÍRCULO y la TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO) de considerable interés para los eruditos griegos clásicos es la tarea de construir un cubo cuyo volumen sea el doble del de un cubo dado. Cuenta la leyenda que este problema, conocido como duplicar el cubo, surgió durante la plaga griega del 428 a. C. Se dice que el oráculo de Delos instruyó al pueblo de Atenas a duplicar el tamaño del altar cúbico a Apolo como un intento de apaciguar a los dios.

No pudieron lograr esta hazaña.

APOLONIO DE PERGA (ca. 260-190 a. C.) resolvió el problema con el uso de SECCIONES CÓNICAS, pero los eruditos decidieron añadir la restricción de que solo las herramientas primitivas de una regla (es decir, una regla sin marcas) y un se utilice la brújula en su solución. La dificultad del problema aumentó significativamente.

Si asumimos que la longitud de los lados del cubo original es de unidades, entonces se requiere construir a $\sqrt[3]{-2a}$, nueva longitud b para que $b^3 = 2a^3$. En consecuencia, b = y, por lo tanto, el problema se reduce esencialmente al desafío de construir una regla de longitud $\sqrt[3]{-2}$ unidades de largo usando solo un y un compás.

La teoría de los números CONSTRUCTIBLES muestra que, en este escenario, se puede construir cualquier cantidad de longitud racional, y que si se pueden producir dos longitudes l1 y l2 , entonces también se pueden producir su suma, diferencia, producto y cociente, junto con la raíz cuadrada de cada $\sqrt[3]{-2}$, cantidad. Parece poco probable que se pueda producir siendo una longitud que no sea racional ni la raíz cuadrada de un número racional. De hecho, en 1837, el matemático francés Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) demostró que $\sqrt[3]{-2}$ no es construible y, en duplicar el consecuencia, el número que el problema de cubo no tiene solución.
(Para ver eso $\sqrt[3]{-2}$ no es racional, se supone lo contrario que se puede escribir como una razón de dos números enteros: $\sqrt[3]{-2} = \frac{p}{q}$. Entonces $2q^3$ Si el número p tiene m factores de 2, entonces = p la cantidad p^3 tiene3m factores de 2. En consecuencia, también debe hacerlo $2q^3$. Pero esto es imposible, ya que el número de factores de 2 en 2q debe ser 1 más que un múltiplo de 3.
Este absurdo demuestra que $\sqrt[3]{-2}$ no puede ser una razón de dos números enteros Un argumento similar muestra $\sqrt[3]{2}$ no que igual a la raíz cuadrada de una cantidad racional tampoco.)

Dürer, Albrecht (1471–1528) Geometría alemana Nacido el 21 de mayo de 1471 en Nürnberg, Alemania, el artista Albrecht Dürer es recordado en matemáticas por sus importantes logros en el desarrollo de la GEOMETRÍA descriptiva y sus aplicaciones a la teoría del arte. En cuatro textos famosos, Durero explicó la teoría de las proporciones y describió las técnicas de regla y compás para la construcción de polígonos regulares. Exploró el arte de colocar figuras de una manera agradable a la vista, comenzando así a desarrollar la teoría de la PERSPECTIVA, y comenzó un estudio de las sombras proyectadas por objetos tridimensionales. Durero se destaca como el primer erudito en publicar un libro de matemáticas en alemán, y también como el primer erudito occidental en dar un ejemplo de un CUADRADO MÁGICO.

Durero estudió pintura y diseño de grabados en madera cuando era joven. Fue aprendiz del principal productor de retablos de su época, Michael Wolgemut, hasta los 20 años y aprendió a apreciar el papel que podían jugar las matemáticas en el diseño de obras artísticas. Después de leer las obras de EUCLID (ca. 300-260 a. C.), así como una serie de textos famosos sobre la teoría de la arquitectura, Durero viajó a Italia, el sitio del renacimiento de las matemáticas en el Renacimiento, para estudiar las matemáticas de la forma. , movimiento y perspectiva. Alrededor de 1508, Durero comenzó a recopilar y procesar todo el material que había estudiado con el objetivo de producir un texto definitivo sobre las matemáticas de las artes visuales. Este trabajo nunca se completó, pero más tarde publicó sus cuatro volúmenes sobre la teoría de las proporciones Underweysung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen, und gantzen Corporen (Tratado sobre la medición con el compás y la regla en líneas, planos y enteros). cuerpos) en 1525.

Durero se destaca por su inclusión de la siguiente serie de números en el fondo de su grabado Melancholia de 1514:

décadas	3	2	13
5	10	11	8
9 6712			
4	15	14	1

Machine Translated by Google

Cada fila y columna, así como las dos diagonales principales, suman 34, por lo que esta matriz representa un cuadrado mágico de cuarto orden. Es el primer ejemplo de un cuadrado mágico jamás registrado en Europa Occidental. (Tiene la característica adicional de incluir el año en que se completó el grabado en las dos celdas centrales de la fila inferior).

Durero murió en Núremberg, Alemania, el 6 de abril de 1528. Su teoría de las proporciones permitió a los artistas que lo sucedieron realizar fácilmente las transformaciones necesarias en las figuras para traducirlas en un lienzo y mantener el sentido de perspectiva correcto. (Antes de Durero, los artistas lograron esta hazaña puramente por intuición o por prueba y error). Al hacerlo, Durero proporcionó una teoría bien pensada de la perspectiva geométrica que también fue valorada por los matemáticos.

diádica Cualquier cantidad relacionada con el concepto de base 2 a veces se denomina diádica. Por ejemplo, los racionales diádicos son aquellas fracciones cuyos denominadores son 2^n potencias de 2. Así $\frac{173}{1024} = \frac{173}{2^{10}}$, para ejemplo, son racionales diádicos, pero no lo es.

Doblar una tira de papel de 1 pie de largo por la mitad produce un pliegue en la posición del 1/2 diádico racional. Si uno continúa doblando el extremo izquierdo o derecho de la tira hasta las marcas de pliegues construidas previamente, entonces las marcas de pliegues aparecen en todos los racionales diádicos (y solo en los racionales diádicos).

Esta actividad de doblar papel está íntimamente relacionada con la construcción de NÚMEROS BINARIOS. Por ejemplo, para crear una marca de doblez a lo largo de una tira de papel en la posición del racional diádico 13/16, escriba el numerador 13 en binario:

$$13 = 1101_2$$

(Esto es equivalente a escribir la fracción 13/16 como un "decimal" binario: 13/16 = .1101 en base 2). Ahora lea la expansión binaria hacia atrás, interpretando el dígito 1 como la instrucción "levantar a la derecha y doblar" y el dígito 0 como "levantar a la izquierda y doblar". En este ejemplo tenemos:

1 : Levante el extremo derecho de la tira y dóblelo para producir un pliegue en la posición 1/2.
0 : Levante el extremo izquierdo y doble hasta el pliegue anterior. Esto produce un nuevo pliegue en la posición 1/4.
1 : Levante el extremo derecho y doble hasta el pliegue anterior. Esto produce un nuevo pliegue en la posición 5/8.
1 : Levante el extremo derecho y doble hasta el pliegue anterior. Esto produce un nuevo pliegue en la posición 13/16, según se desee.

En general:

> La representación binaria del numerador de cualquier racional diádico representa instrucciones para la construcción de ese racional diádico a lo largo de una tira de papel.

En cierto sentido limitante, este procedimiento también funciona para fracciones que no son diádicas. Por ejemplo, el número 1/3 escrito como decimal en base 2 es .010101... Si uno fuera a leer esto como un conjunto de instrucciones para "doblar a la derecha y doblar a la izquierda indefinidamente", entonces la secuencia de pliegues producidos de hecho converge al posición 1/3.

sistema dinámico Cualquier proceso en el que cada estado sucesivo es una función del estado anterior se denomina sistema dinámico. Por ejemplo, la retroalimentación de un micrófono como parte de un sistema de anuncios públicos es un sistema dinámico: el amplificador transmite pequeños sonidos erróneos, que el micrófono escucha y amplifica, que luego escucha y amplifica, y así sucesivamente.

En matemáticas, si f es un mapeo de un espacio X a sí mismo, entonces la ITERACIÓN de f define un sistema dinámico: los estados sucesivos del sistema son las iteraciones de f que surgen de un punto de partida dado x:

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

Por ejemplo, la aplicación f(x) = x del número real $\frac{1}{2}$ línea a sí misma, comenzando con x = 1, da las iteraciones $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ Si X es un círculo en el plano y f es la función que gira ese círculo 10° en el sentido de las agujas del reloj, entonces las iteraciones de cualquier punto en el círculo constituyen 36 puntos espaciados uniformemente en ese círculo.

La “órbita” de un punto x es la secuencia de iteraciones que produce. Si el sistema alcanza un equilibrio, es decir, tiende hacia un estado estable, o si cambia entre varios estados, entonces el punto de equilibrio (o conjuntos de puntos de equilibrio) se denominan "atractores" del sistema.

Machine Translated by Google

artículo Por ejemplo, el número cero es un atractor para 1, el sistema dado por f(x) = x: sin importar el valor inicial de 2 , todas las iteraciones convergen al valor cero.

Las iteraciones de funciones f muy simples pueden exhibir un comportamiento extremadamente sorprendente. Tomemos, por ejemplo, las iteraciones de la función f(x) = 1 – cx2 con valor inicial x = 0. (Aquí c es una constante. Cada valor de c determina su propio sistema dinámico).

Establecer c = 0,1. Las primeras cinco iteraciones del sistema $x_{n+1} = 1 – 0.1x_n^2$ son:

0, 1.000, 0.900, 0.919, 0.916, 0.916

El sistema parece estabilizarse al valor 0.916. Se comprueba que se produce el mismo tipo de comportamiento si repetimos este ejercicio para c puesto a cualquier valor entre 0 y 0,75. Sin embargo , hay un cambio marcado en el comportamiento para c = 0,75: el sistema ya no converge a un solo valor, sino que oscila entre dos valores: 0,60 y 0,72. Decimos que el valor c = 0,75 es un punto de bifurcación y que el sistema ha sufrido una “duplicación del período”.

En el valor c = 1.25, el sistema se bifurca nuevamente para producir sistemas que oscilan entre cuatro valores. Para valores más altos de c, el sistema continúa bifurcándose, hasta que finalmente se llega al llamado CAOS , donde los resultados saltan de una manera aparentemente aleatoria. Este fenómeno es típico de muchos sistemas dinámicos: el comportamiento que exhiben depende en gran medida del valor de algún parámetro c. (Se dice que tales sistemas dinámicos son "sensibles" al conjunto de parámetros).

Los investigadores han demostrado que muchos procesos naturales que parecen caóticos, como el flujo turbulento de gases y los rápidos movimientos oculares de los humanos, pueden modelarse con éxito como sistemas dinámicos, normalmente con funciones subyacentes muy simples que los definen.

Los meteorólogos modelan el clima como un sistema dinámico, lo que les ayuda a hacer pronósticos. Sin embargo, la sensibilidad extrema a los parámetros puede conducir fácilmente a predicciones erróneas: un pequeño cambio en el valor de un solo parámetro puede producir resultados muy diferentes. El llamado efecto mariposa, por ejemplo, afirma que los pequeños cambios en la presión del aire causados por el aleteo de una mariposa podrían ser todo lo que se necesita para llevar un sistema dinámico meteorológico al caos.

Iteración de funciones con NÚMEROS COMPLEJOS conduce a un estudio de FRACTALs.

Machine Translated by Google

mi

e (número de Euler) matemático suizo LEONHARD EULER (1707-1783) introdujo un número, hoy denominado e, que juega un papel fundamental en los estudios de compuestos INTERÉS, TRIGONOMETRÍA, LOGARITMOS y CÁLCULO, y que une estos campos dispares. (FÓRMULA DE EULER , ejemplo, ilustra esto.) El número e tiene un valor aproximado de 2.718281828459045... y se puede definir en cualquiera de las siguientes formas diferentes:

1. El número e es el valor límite de la expresión $1 + \frac{1}{n}$ elevado a la n-ésima potencia, a medida que n aumenta indefinidamente:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

2. Si L(a) denota el área bajo la curva y = 1/x por encima del intervalo [1,a], entonces e es la ubicación en el eje x para el cual L(e) = 1.
3. Si f(x) es una función que es igual a su propia DERIVADA, d es decir, $\frac{f(x)}{dx} = f(x)$, entonces f(x) es una EXPONENCIAL FUNCIÓN con valor base e: $f(x) = e^{x}$.
4. e es el valor de la suma infinita $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$.

La definición 1 está relacionada con el problema de la computación. interés compuesto. Como mostramos a continuación, la definición 2 define el logaritmo natural, y surge la definición 3 a partir de estudios de crecimiento y decaimiento natural, y en consecuencia la consideración de FUNCIONES EXPONENCIALES.

La cuarta definición surge del estudio de TAYLOR SERIE. Uno prueba que las cuatro definiciones son equivalentes como sigue:

Primero considere la curva y = 1/x. tiene el notable propiedad de que los rectángulos tocan la curva y justo debajo tiene la misma área si los extremos de los rectángulos son en la misma proporción r. Por ejemplo, en el primer diagrama de En la página opuesta, los rectángulos sobre los intervalos [a,ra] r [b,rb] tienen cada uno área . Tomando más estrecho y $\frac{-1}{r}$ y rectángulos más angostos, todos en la misma razón r, se sigue que el área bajo la curva sobre dos intervalos cualesquiera de la forma [a,ra] y [b,rb] son iguales.

Siguiendo la definición 2, sea L(x) el área debajo de esto de la posición 1 a la posición x. (Si x es menor que 1, considere el área negativa.) Note que L(1) = 0. Además, establezca e como la ubicación en el eje x donde el el área bajo la curva es 1: L(e) = 1.

Observe que el área bajo la curva de 1 a posición ab, L(ab), es la suma de las áreas bajo la curva por encima de los intervalos [1,a] y [a,ab]. la primera zona es L(a) y el segundo, por la propiedad anterior, es igual a L(b). Así tenemos:

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

Esto muestra que L es una función que convierte la multiplicación en suma, lo cual es suficiente para probar que es la base de la FUNCIÓN LOGARÍTMICA e. Tenemos L(x) = logio (x). Esta función se llama logaritmo natural. función y generalmente se escribe ln(x).

Machine Translated by Google

Por el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, el derivada de una función de área es la función original y así tenemos:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Ahora considere la función exponencial correspondiente. ción $y = e^x$ Tomando logaritmos, obtenemos $\ln(y) = x$. Diferenciando rendimientos $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$, y así $\frac{dy}{dx} = y = e^x$. Este establece la definición 3 indicando que $f(x) = e^x$ es la función que es igual a su propia derivada.

Ahora que sabemos la derivada de $y = e^x$, podemos calcule su serie de Taylor. Obtenemos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Establecer x = 1 establece la definición 4.

Resta ahora establecer la definición 1. De la gráfica de la curva y = 1/x, es claro que la región 1– entre x = 1 y x = 1 + está intercalado entre un rectángulo de área $\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$ y un rectángulo de área $= 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. De este modo:

$$\frac{1}{n+1} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$$

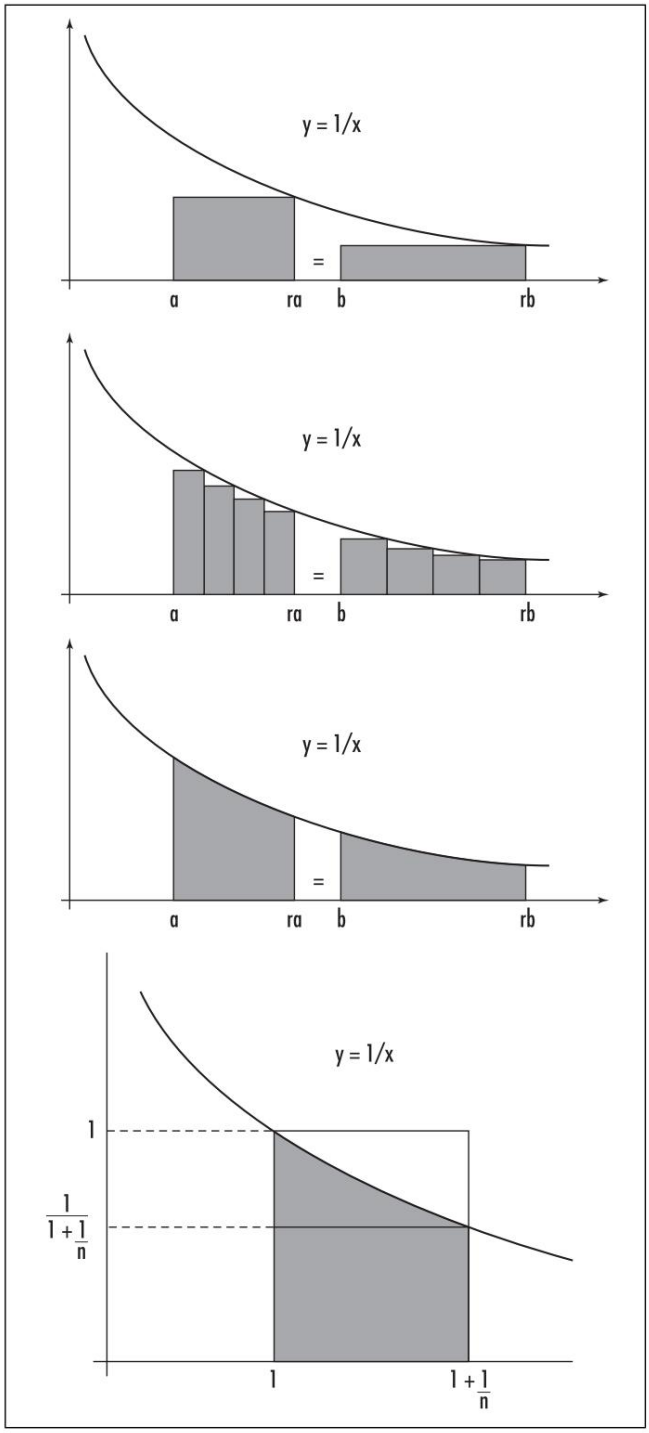
Multiplicando por n se obtiene:

$$\frac{n}{n+1} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1$$

A medida que n se hace grande, la cantidad $\frac{n}{n+1}$ enfoques el valor 1. Debe ser así, entonces, que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima a un valor para el cual su logaritmo es 1.

En consecuencia, $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es igual a 1. Esto da:

$$\lim_{\text{manuscrito iluminado}\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$



La curva y = 1/x

Con respecto al tema del interés compuesto, se es necesario calcular el límite $\lim_{\text{manuscrito iluminado}\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$.

Machine Translated by Google

Tenemos:

$$\text{límite}_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nr}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n/r)}\right)^{(n/r)r}=e^{r}$$

Esto representa el valor de una inversión de $1 después de 1 año acumulando interés continuamente compuesto a una tasa de interés de r por ciento anual.

Uno puede usar la cuarta definición para probar que e es un NÚMERO IRRACIONAL. Se empieza por suponer, para

al contrario, que e es una fracción de la forma $\frac{p}{q}$ y multiplica la fórmula presentada en la definición 4 por q!.
Las partes fraccionarias que quedan no pueden sumar un número entero.

En 1873, el matemático francés Charles Hermite (1822–1901) demostró que e es un TRANSCENDENTAL
NÚMERO.

Tierra Nuestro planeta, el tercero desde el Sol, a menudo se supone que tiene la forma de una ESFERA perfecta, pero las mediciones detalladas muestran que tiene la forma de un esferoide achatado con un radio ecuatorial de 3963 millas (6378 km) y un radio polar de 3950 millas (6.357 kilómetros).

Su distancia orbital media desde el Sol es de 9,296 × 107 millas (1,496 × 108 km), una "unidad astronómica", y su masa es de 1,317 × 1025 lb (5,976 × 1024 kg).

La Tierra tarda 23 horas, 56 minutos y 4,1 segundos en completar un día sideral, es decir, una rotación completa sobre su eje medida en relación con las estrellas fijas. El día solar, el tiempo que tarda un punto P de la superficie de la Tierra inicialmente de cara al Sol en volver a esa posición es, por definición, precisamente 24 horas. La diferencia en las mediciones de tiempo se explica por el hecho de que la Tierra avanza en su órbita a medida que gira: la Tierra debe girar un poco más de 360 ° para que P vuelva a mirar al Sol a medida que el planeta avanza.

El primer intento conocido de calcular la circunferencia de la Tierra fue realizado por el erudito griego ERATOSTENES DE CIRENE (ca. 275-195 a. C.).
Eratóstenes observó que en el solsticio de verano, el mediodía del 21 de junio de cada año, el Sol brillaba directamente en el fondo de un pozo en la ciudad de Syene (actual Asuán). Esto significaba que el Sol estaba directamente sobrecarga en este momento. También notó que al mismo tiempo en Alejandría, una ciudad aproximadamente a 500 millas al norte de Syene, los objetos proyectaban sombras, lo que significa que el Sol no estaba directamente sobre su cabeza en este lugar. Estas observaciones proporcionaron a Eratóstenes los medios para calcular el radio de la Tierra. Asumió que el Sol estaba lo suficientemente lejos de nuestro planeta como para que los rayos de luz que nos llegan desde él puedan considerarse esencialmente paralelos. Eratóstenes midió el ángulo proyectado por las sombras en Alejandría (utilizando un objeto de altura conocida y midiendo la longitud de las sombras proyectadas) y encontró que el ángulo era 1/50 de una vuelta completa, aproximadamente 7,2°. La circunferencia de la Tierra es la siguiente: si 1/50 de una vuelta completa corresponde a una distancia de 500 millas, entonces una vuelta completa debe corresponder a una distancia de 50 × 500 = 25 000 millas.

Coordenadas Geográficas Las líneas
de latitud y longitud forman un sistema de COORDENADAS en la Tierra. Los "paralelos de latitud" son círculos paralelos al ecuador, etiquetados según una medida de ángulo. Expresado con precisión, si O es el centro de la Tierra, P es un punto en un círculo de latitud, P′ es el punto en el ecuador directamente al sur de P y α es el ángulo POP′, entonces el círculo de latitud que contiene P está etiquetado como α. La latitud de cualquier punto puede ser así de 0° (en el ecuador) hasta 90° norte (el Polo Norte) o 90° sur (el Polo Sur). La ciudad de Nueva York, por ejemplo, tiene una latitud de 40°45′06″ N.

Convenientemente, la Estrella Polar se encuentra directamente sobre el Polo Norte. Al medir el ángulo de elevación de la Estrella Polar (90° en el Polo Norte, 0° en el ecuador), uno puede determinar rápidamente la latitud de cualquier lugar en el Hemisferio Norte. Usando sextantes para medir la elevación, los marineros del pasado confiaban en la Estrella Polar para ayudar a determinar sus ubicaciones. Los meridianos, o líneas de longitud, van del Polo Norte al Polo Sur, perpendiculares a los círculos de latitud. Cada meridiano es un semicírculo. El ecuador se divide en 360°, con el meridiano que pasa por Greenwich, Inglaterra (llamado meridiano principal), considerado ángulo cero, y el ángulo de cualquier otro meridiano varía de 180° este a 180° oeste. Expresado con precisión, la longitud de un punto P en la esfera está dada por el ángulo P′OG′, donde P′ es el punto en el ecuador directamente al sur o

Machine Translated by Google

al norte de P, y G′ es el punto en el ecuador al sur de Greenwich. La ciudad de Nueva York, por ejemplo, tiene una longitud 73°59′39″ O.

La longitud de un punto P en la superficie de la Tierra se puede medir identificando la diferencia horaria entre el mediodía en P y el mediodía en Greenwich. Como el día se divide en 24 períodos de 1 hora, cada uno el retraso de 1 hora corresponde a 1/24 de vuelta completa sobre la circunferencia de la Tierra. Así, en 360/24 = 15° longitud oeste, por ejemplo, el Sol alcanza su punto más alto punto en el cielo 1 hora más tarde que en Greenwich; a 30° de longitud oeste, ocurre 2 horas más tarde, y así adelante. Después de aproximadamente 1735, los marineros pudieron llevar cronómetros precisos para realizar un seguimiento de Greenwich tiempo. Al medir la hora del mediodía en cualquier momento dado ubicación, los marineros podían determinar con precisión la longitud de esa ubicación.

Véase también OBLATO/PROLADO.

excentricidad Para cualquier SECCIÓN CÓNICA, la relación de la distancia de un punto de la curva a un punto fijo, la foco, a su distancia de una línea fija, la directriz, es constante. El valor de esta relación, denotado e, se llama la excentricidad de la curva, y da una medida de la forma de la curva. Para una PARÁBOLA, e es igual a uno. Si mi se encuentra entre cero y uno, entonces la curva es una ELIPSE. Si e es mayor que uno, entonces la curva es una HIPERBOLA. La excentricidad de un CÍRCULO se define como cero. (En este contexto, la excentricidad e no debe confundirse con el número de LEONHARD EULER e.)

Fracciones egipcias Cualquier fracción con numerador unitario, como 2 $\frac{1}{45}$, y $\frac{1}{598}$, se llama fracción egipcia.

Los egipcios de hace 4.000 años expresaban todas las cantidades fraccionarias como sumas de distintas fracciones egipcias. Por ejemplo, se escribía $\frac{2}{3}$ + y como $\frac{1}{6}$ + 9$\frac{1}{18}$, $\frac{3}{10}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{15}$ + $\frac{1}{30}$.

En 1202, FIBONACCI inició su propia investigación de fracciones egipcias y fue el primero en demostrar que cada de hecho, la fracción puede expresarse como una suma finita de distintas fracciones egipcias. (No está claro si el los antiguos egipcios alguna vez cuestionaron esto.) Mostró que restando una cantidad de la forma 1/n, con n como lo más pequeño posible, de una fracción dada siempre pro duce una nueva fracción con un numerador más pequeño. De este modo la aplicación repetida de este procedimiento debe eventualmente producir una fracción con numerador unitario en sí mismo.

Como ejemplo, para la fracción 5/17 tenemos:

$\frac{5}{17} - \frac{1}{4} = \frac{3}{68}$ ($\frac{1}{3}$ es una cantidad demasiado grande para restar).

y

$\frac{3}{68} - \frac{1}{23} = \frac{1}{1564}$ ($\frac{1}{22}$ es una cantidad demasiado grande para restar).

donación:

$$\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}$$

Tales representaciones no necesitan ser únicas. Por ejemplo, $\frac{3}{5}$ es igual a + + y + 10$\frac{1}{15}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{20}$.

Véase también MATEMÁTICAS EGIPCIA.

Matemáticas egipcias Nuestro conocimiento de la antigüedad Las matemáticas egipcias de alrededor de 2000 a. C. vienen principalmente del PAPIRO DE RHIND. Allí aprendemos, por ejemplo, que los egipcios siguieron un sistema muy natural para denotar números: 1 era un trazo vertical |, 2 eran dos de ellos ||, 3 era |||, y 4 era ||||, y separados se usaron símbolos para 5, 6, 7, 8 y 9, y para 10, 20,…, 100, 200,…, 1000, etc. Todos los demás números fueron representados como grupos de estos símbolos, por lo general ordenadas de mayor a menor. Como el sistema de NUMERACIÓN ROMANA , el sistema egipcio no use un SISTEMA DE VALOR DE LUGAR (el símbolo para 5, por ejemplo, denotado “5” sin importar dónde apareció en el número). Es muy difícil hacer cálculos con lápiz y papel sin la notación de valor posicional, pero los egipcios siempre usaban una tabla de cálculo, muy parecida a una ABACUS, para realizar cálculos aritméticos, y necesitaba solo para registrar los resultados. Por lo tanto, no se vieron obstaculizados por su engorroso sistema numérico. El Los antiguos egipcios eran expertos en la multiplicación, utilizando un método de duplicación sucesiva para calcular productos. Este método se llama hoy MULTIPLICACIÓN EGIPCIA.

Los problemas de división conducen a FRACCIONES. No lo hizo A los antiguos egipcios se les ocurría expresar fracciones con numeradores y denominadores. En el papiro Rhind, el matemático Ahmes simplemente colocó un punto sobre un número para indicar su recíproco, excepto en el caso de $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, y $\frac{1}{4}$, las fracciones cada una de las cuales tenía sus 2

Machine Translated by Google

símbolo propio. Así, los egipcios sólo trataban con fracciones de la forma $\frac{1}{n}$ (con la excepción de dos tercios).

Las fracciones con numeradores unitarios se conocen hoy como FRACCIONES EGIPCIAS. Todas las demás cantidades fraccionarias se expresaron como sumas de distintas fracciones egipcias. Por ejemplo, $\frac{2}{5}$ que es igual a $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, fue escrito $\frac{1}{3} \frac{1}{15}$, y como $\frac{4}{13}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{18}$ $\frac{1}{468}$.

La capacidad del egipcio para calcular tales expresiones. es impresivo. El papiro Rhind proporciona referencia listas de tales expresiones, y los primeros 23 problemas en el documento son ejercicios para trabajar con tales representaciones fraccionarias.

Los antiguos egipcios eran expertos en resolver ECUACIONES LIN EAR. Usaron un método llamado posición falsa para obtener soluciones. Esto implica adivinar un respuesta, observando el resultado de la conjetura, y ajustando la conjetura en consecuencia. Como ejemplo, el problema 24 del papiro Rhind pregunta:

> Encuentre la cantidad tal que cuando 1/7 de sí mismo es sumado a esto, el total es 19.

Para demostrar la solución, el autor sugiere una conjetura de 7. Eso más su séptima parte es 8, demasiado pequeño, pero multiplicando el resultado por 19/8 produce la respuesta de 19 que necesitamos. Así 7 × (19/8) debe ser la cantidad que deseamos.

La mayoría de los problemas en el papiro Rhind son de naturaleza práctica, que trata cuestiones de área (de ángulos rectos, trapecios, triángulos, círculos), volumen (de cilindros, por ejemplo), pendientes y altitudes de pirámides (que se construyeron 1.000 años antes de que se escribiera el texto), y problemas teóricos de números sobre cómo compartir mercancías bajo ciertas restricciones. Algunos problemas, sin embargo, indican un deleite en el pensamiento matemático por su bien propio. Por ejemplo, el problema 79 pregunta:

> Si hay siete casas, cada casa con siete gatos, siete ratones por cada gato, siete orejas de grano por cada ratón, y cada espiga de grano produciría siete medidas de grano si plantados, ¿cuántos artículos hay en total?

Este problema aparece en el Liber abaci de FIBONACCI , escrito diez 600 años antes de que se descubriera el papiro Rhind. Una versión de este problema también aparece como un familiar canción infantil y acertijo, "Como iba a St. Ives".

Multiplicación egipcia El PAPIRO DE RHIND indica que los antiguos egipcios de alrededor del año 2000 a. usó un proceso de "duplicación sucesiva" para multiplicar números. Calcularon 19 × 35, por ejemplo, por duplicando repetidamente 35:

1	35
2	70
4	140
	280
8 16	560

Como 19 = 16 + 2 + 1, sumando 560 + 70 + 35 = 665 da el producto. Este método demuestra que el conocimiento de la tabla del doble es todo lo que se necesita para calcular multiplicaciones La MULTIPLICACIÓN RUSA sigue un enfoque similar a este método.

Véase también MATEMÁTICAS EGIPCIA; ISABELINO MULTIPLICACIÓN; MULTIPLICACIÓN DE DEDOS; MULTIPLICACIÓN; HUESOS DE NAPIER ; MULTIPLICACION RUSA.

valor propio (e-valor, raíz latente) Ver EIGENVECTOR.

vector propio (e-vector, vector latente, vector característico, vector propio) Para una MATRIZ A cuadrada n × n , digamos que un VECTOR x distinto de cero es un vector propio para A si hay es un número λ tal que Ax = λx. El número λ es llamado valor propio asociado con ese vector propio. Si x es un vector propio de A, entonces tenemos que (A – λI)x = 0, donde I es la MATRIZ DE IDENTIDAD. Esto muestra que el la matriz A – λI no es invertible, por lo que debe tener cero determinante: det(A – λI) = 0. Esta es una ecuación polinomial en λ de grado n, llamada “polinomio característico” de A. Como solo puede haber como máximo n soluciones para tal ecuación, tenemos que una matriz A de n × n tiene en la mayoría de los n valores propios distintos. Los matemáticos tienen demostró que asociado con cada valor propio posible hay al menos un vector propio correspondiente. Además, se ha establecido que los vectores propios asociados con valores propios distintos son linealmente independientes.

El estudio de los vectores propios y los valores propios simplifica las manipulaciones de matrices. Supongamos, por ejemplo, una matriz A cuadrada de 3 × 3 tiene tres valores propios distintos λ1 , λ2 y λ3 . Haga que D sea la matriz diagonal

Machine Translated by Google

$$re = \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{matrix}$$

y establezca B como la matriz cuyas columnas son los vectores propios correspondientes de A. Entonces es posible demostrar que:

$$A = BDB–1$$

Esta observación permite calcular altas potencias de A con muy poco trabajo. Por ejemplo, la cantidad A100, por ejemplo, es solo un producto de tres matrices:

$$A100 = (BDB–1)\ 100$$
$$= BD100B –1$$

observando que D100 es simplemente:

$$D100 = \begin{matrix} \lambda_1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{100} \end{matrix}$$

Este trabajo también permite a los matemáticos definir la raíz cuadrada de una matriz:

$$\sqrt{AB} = \begin{matrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{matrix} B^{-1}$$

(siempre que se definan las raíces cuadradas de los valores propios), o para definir nuevas cantidades, como el logaritmo de una matriz:

$$\ln(AB) = B \begin{matrix} \ln(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_3) \end{matrix} B^{-1}$$

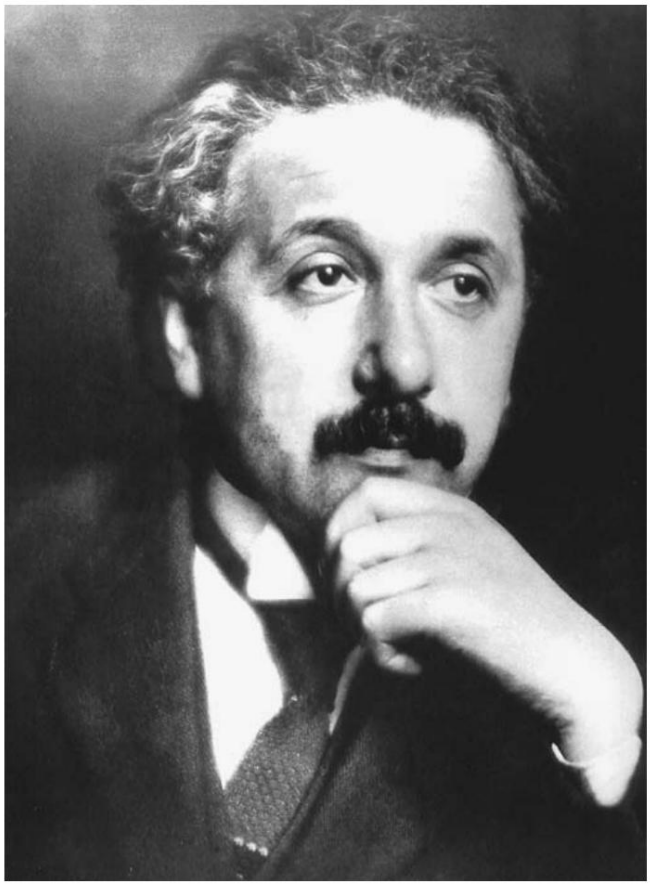
Tales acciones han resultado útiles en el estudio de la física teórica y la ingeniería.

El prefijo eigen es alemán para "característica" o "propio". Los valores propios y los vectores propios de una matriz caracterizan completamente la matriz.

Véase también TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON ; INVERSO MATRIZ; LINEALMENTE DEPENDIENTE E INDEPENDIENTE.

Einstein, Albert (1879–1955) Relatividad alemana , mecánica cuántica Nacido el 14 de marzo de 1879 en Ulm, Alemania, Albert Einstein es reconocido como un destacado físico matemático cuyo trabajo sobre las teorías especial y general de la relatividad revolucionó por completo la forma de pensar de los científicos sobre el espacio, la materia y el tiempo. Aunque se consideraba a sí mismo físico, el trabajo de Einstein inspiró muchos desarrollos significativos en las matemáticas modernas, incluido el desarrollo del análisis TENSOR como el medio apropiado para describir la curvatura del espacio.

El ambiente escolar clásico no se adaptaba bien a Einstein. En 1895 reprobó el examen de ingreso a una escuela técnica suiza, donde esperaba estudiar ingeniería eléctrica. Después de asistir a una segunda escuela en Aarau, finalmente logró ingresar a la Zurich



Albert Einstein, un eminente físico matemático del siglo XX, revolucionó nuestra comprensión del espacio, la materia y el tiempo a través de sus teorías de la relatividad especial y general. (Foto cortesía de Topham/The Image Works)

Machine Translated by Google

escuela para graduarse allí en 1900 con un título en enseñanza. Al no poder encontrar un puesto universitario, Einstein aceptó un trabajo en la Oficina de Patentes de Suiza en Berna en 1902 y permaneció allí durante 7 años.

Durante su tiempo en la oficina de patentes, Einstein estudió física teórica por las tardes, sin el beneficio de un contacto cercano con la literatura científica o colegas, y logró producir y publicar, todo en el año 1905, cinco artículos verdaderamente sobresalientes: • “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt” (Sobre una heurística relativa a la producción y transformación de la luz), publicado en Annalen der Physik, marzo de 1905.
• “Die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefurdete Bewegung von in ruhenden Flüs sigkeiten suspendierten Teilchen” (Sobre el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario exigido por la teoría cinética molecular del calor), publicado en Annalen der Physik, mayo de 1905 . • “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” (Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento), publicado en Annalen der Physik, junio de 1905. • “Ist die Trägheit eines Körpes von seinem Energiein halt abhängig?” (¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido energético?), publicado en Annalen der Physik, septiembre de 1905. • “Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen” (Una nueva determinación de la dimensión molecular), escrito en abril de 1905, publicado en Annalen der Physik, abril de 1906.

El primer artículo se refería al desconcertante efecto fotoeléctrico observado por los científicos de la época. Heinrich Hertz (1857-1894) notó que la cantidad de electrones liberados de una sección de metal bombardeada con un haz de luz no estaba determinada por la intensidad del haz, sino por su longitud de onda. Max Planck (1858-1947) también observó que los objetos radiantes emitían energía electromagnética en cantidades discretas, de nuevo en proporción directa a la longitud de onda de la radiación. Einstein propuso que la luz y la propia radiación viajaban en haces discretos, a los que llamó cuantos, y describió las matemáticas que, en consecuencia, explicarían estos fenómenos.

En su segundo artículo, Einstein desarrolló ecuaciones matemáticas que describían correctamente el movimiento de átomos y moléculas bajo el “movimiento browniano”. En su tercer artículo, Einstein propuso su teoría de la relatividad especial. Señaló que debido a que la luz es capaz de viajar a través de un vacío, no hay un marco de referencia natural para medir su velocidad. (La velocidad del sonido, por ejemplo, se mide con respecto al medio de aire a través del cual pasa). Además, dado que es imposible determinar si uno está estacionario en el espacio o moviéndose a través del espacio a una velocidad uniforme, se sigue entonces que todos los observadores deben observar la luz viajando a la misma velocidad. A partir de esto, Einstein desarrolló una serie de "experimentos mentales" que establecen claramente que los observadores que viajan a diferentes velocidades deben registrar valores diferentes al medir cantidades como la longitud y el tiempo. (Por ejemplo, imagine un haz de luz que rebota de un lado a otro entre dos espejos fijos colocados a una distancia tal que el tiempo que tarda en rebotar entre los dos espejos es de 1 seg. Suponga que un segundo observador se mueve más allá del "reloj" con velocidad uniforme. Según este observador, el reloj pasa junto a ella a una velocidad uniforme. Un cálculo sencillo muestra que, dado que la velocidad de la luz no cambia para este observador, vería que el rayo de luz tarda más de 1 segundo en completar un ciclo entre los dos espejos). El cuarto artículo desarrolló aún más la teoría especial de la relatividad, culminando con su famosa ecuación $E = mc^2$, espectáculo indicando que la energía y la masa son equivalentes (con un factor de la velocidad de la luz al cuadrado incorporado).

Einstein envió su trabajo final como tesis doctoral a la Universidad de Zúrich para recibir un doctorado. Hacia 1909, Einstein había sido reconocido como un destacado pensador científico. Renunció a la oficina de patentes y fue nombrado profesor titular en la Universidad Karl-Ferdinand de Praga en 1911. Ese mismo año, basándose en su teoría de la relatividad, Einstein hizo una predicción sobre cómo los rayos de luz de estrellas distantes se curvarían alrededor del Sol. , con la esperanza de que algún día los astrónomos puedan observar este efecto y verificar que su teoría de la relatividad es correcta. También comenzó a trabajar en la incorporación del papel de la aceleración (movimiento no uniforme) en su teoría especial para desarrollar una teoría general de la relatividad. Después de varios comienzos en falso, Einstein finalmente publicó una teoría general coherente en 1915. Cuatro años más tarde, durante un eclipse solar, los científicos británicos pudieron observar la curvatura de los rayos de luz tal como había predicho Einstein. La prensa popular cubrió la historia, y Einstein inmediatamente recibió la atención mundial por su logro.

En 1921, Einstein recibió el Premio Nobel no por su teoría de la relatividad, sino, sorprendentemente, por su trabajo sobre el efecto fotoeléctrico. También recibió el Copley

Machine Translated by Google

Medalla de la ROYAL SOCIETY de Londres en 1925, y Medalla de Oro de la Royal Astronomical Society en 1926.

Con el auge del antisemitismo en Europa, Einstein aceptó un puesto en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey, en 1933. Permaneció allí hasta su muerte el 18 de abril de 1955.

No se puede exagerar el efecto que el trabajo de Einstein ha tenido en la física moderna. Uno de sus objetivos principales fue unir la descripción discreta de partículas y materia con la descripción continua de radiación electromagnética y desarrollar una única teoría unificada de las dos. El resultado es la mecánica cuántica. El intenso trabajo continúa hoy para incorporar otras fuerzas físicas, como la gravedad, en una gran teoría unificada.

matriz elemental Ver ELIMINACIÓN DE GAUSSIAN.

Los Elementos Sin duda, el texto matemático más influyente de todos los tiempos, Los Elementos, escrito por EUCLID (ca. 300-260 a. C.), proporcionó el modelo para todo el pensamiento matemático durante los dos milenios que le siguieron.
Los matemáticos están de acuerdo en que este trabajo define de qué se trata la búsqueda de las MATEMÁTICAS PURAS . Se han impreso más de 2000 ediciones de Los elementos desde la producción de su primera versión tipográfica en 1482.

Escrito en 13 volúmenes (llamados “libros”), Los Elementos representa una compilación de todas las matemáticas que se conocían en ese momento. Organizado en una estructura lógica estricta, Euclides comienza el trabajo con un conjunto de definiciones básicas, "nociones comunes" y axiomas (POSTULADOS DE EUCLIDES), y deduce de ellos, mediante el proceso de razonamiento lógico puro, unas 465 proposiciones (THEO REMs).) sobre los temas de geometría plana, teoría de números (normalmente presentada en términos de geometría) y geometría sólida. El trabajo es venerado por su claridad, precisión y rigor.

La obra es extremadamente concisa en su presentación.
No hay discusión ni motivación, y los resultados simplemente se declaran y prueban, a menudo haciendo referencia a una figura que acompaña a la declaración. Cada prueba termina con una reafirmación de la proposición estudiada junto con las palabras “que iba a ser probada”. La traducción latina de esta frase es quod erat demostrandum, y a muchos matemáticos de hoy todavía les gusta terminar una prueba formal con la abreviatura QED.

Aunque en general se cree que ningún resultado presentado en Los Elementos fue probado por primera vez por Euclides, la organización del material y el desarrollo lógico presentado es original. La elección de Euclides de los postulados iniciales muestra una perspicacia notable y una profunda sabiduría sobre el tema. Su reconocimiento de la necesidad de formular el controvertido POSTULADO PARALELO, por ejemplo, muestra un nivel de genialidad superior a todos los que intentaron demostrar que su elección era irrelevante durante los dos milenios que siguieron. (No fue sino hasta el siglo XIX, con el desarrollo de la GEOMETRÍA NO EUCLIDEA, que los matemáticos se dieron cuenta de que el postulado de las paralelas era una suposición esencial en el desarrollo de la geometría plana estándar).

Los primeros seis libros de Los Elementos tratan el tema de la geometría plana. En particular, los Libros I y II establecen las propiedades básicas de los triángulos, líneas paralelas, paralelogramos, rectángulos y cuadrados, y los Libros III y IV examinan las propiedades de los círculos. En el Libro V, Euclides examina las propiedades de las magnitudes y las proporciones, y aplica estos resultados a la geometría plana en el Libro VI. Euclides presenta una demostración del TEOREMA DE PITÁGORAS en el Libro I.

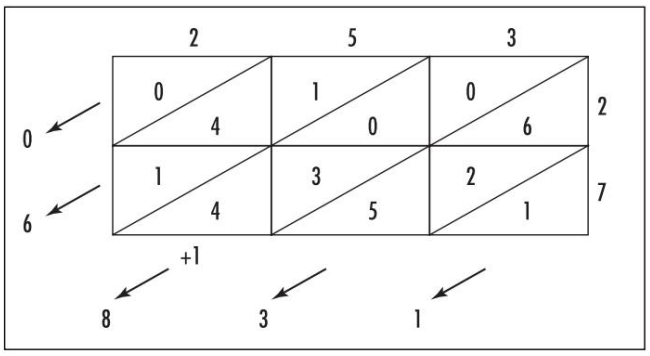
Los libros VII a X tratan de la TEORÍA DE LOS NÚMEROS. El famoso ALGORITMO DE EUCLIDES aparece en el libro VII, y LA PRUEBA DE EUCLIDES DE LA INFINITUD DE LOS PRIMOS en el libro IX. El Libro X trata de la teoría de los números irracionales, y Euclides demuestra la existencia de estos números en este trabajo.

Los últimos tres volúmenes de Los Elementos exploran la geometría tridimensional. El trabajo culmina con una discusión de las propiedades de cada SÓLIDO PLATÓNICO y la prueba de que existen precisamente cinco de estos poliedros.

método de eliminación para ecuaciones lineales simultáneas Otro nombre para ELIMINACIÓN GAUSSIANA.

La multiplicación isabelina También conocida como el método de galera y el método de celosía, esta técnica de multiplicación se enseñó a los estudiantes de matemáticas en la Inglaterra isabelina. Para multiplicar 253 y 27, por ejemplo, dibuja una cuadrícula de cuadrados de 2 × 3. Escriba el primer número en la parte superior y el segundo número en el lado derecho. Divide cada celda de la cuadrícula en diagonal.
Multiplique los dígitos de la fila superior, a su vez, con cada uno de los dígitos de la columna de la derecha, escribiendo los productos en

Machine Translated by Google



multiplicación isabelina

las celdas cuadradas apropiadas de la cuadrícula como entradas de dos dígitos. (Así, calcule 3 × 2 como 06, por ejemplo).

Agregue las entradas en cada diagonal comenzando con la diagonal inferior derecha. Anota la cifra de las unidades y lleva las cifras de las decenas que aparezcan a la siguiente diagonal.
La respuesta, 6831, aparece ahora en la columna izquierda y en la fila inferior.

Este procedimiento funciona para multiplicaciones de varios dígitos de cualquier tamaño. Su éxito se basa en la PROPIEDAD DISTRIBUTIVA de la aritmética y el proceso de EXPANSIÓN DE CORTES. En nuestro ejemplo,

$$253 \times 27 = (2 \times 102 + 5 \times 10 + 3) \times (2 \times 10 + 7)$$
$$= (2 \times 2) \times 103 + (2 \times 7) \times 102 + (3 \times 2) \times 10 + (5 \times 2) \times 102 + (5 \times 7) \times 10 + 3 \times 7$$

Cada diagonal corresponde a un lugar de potencias de 10, con entradas colocadas en la parte superior de una celda cuadrada correspondiente a cifras llevadas a la siguiente posición de potencias de 10. Intente calcular un problema de multiplicación tanto de la manera isabelina como de la manera habitual, una al lado de la otra, para ver que los dos métodos no difieren.

Véase también MULTIPLICACIÓN EGIPCIA; DEDO MULTI PLEGAMIENTO; MULTIPLICACIÓN; HUESOS DE NAPIER ; RUSO MULTIPLICACIÓN.

elipse Como una de las SECCIONES CÓNICAS, una elipse es la curva plana que consta de todos los puntos P cuyas distancias desde dos puntos dados F1 y F2 en el plano tienen una suma constante. Los dos puntos fijos F1 y F2 se llaman focos de la elipse. Una elipse también surge como la curva producida por la intersección de un plano con una sola siesta de un CONO circular recto.

Utilizando la notación |PF1 | y |PF2 | para las longitudes de los segmentos de línea que conectan P a F1 y F2 , respectivamente, la condición definitoria de una elipse se puede escribir:

$$|PF1| + |PF2| = re$$

donde d denota la suma constante.

La ecuación de una elipse se puede encontrar introduciendo un sistema de coordenadas en el que los focos están ubicados en las posiciones F1 = (–c,0) y F2 = (c, 0), para algún número positivo c. Es conveniente escribir d = 2a, para algunos a > 0. Si P = (x,y) es un punto arbitrario en la elipse, entonces la condición de definición establece:

$$\sqrt{(x + c)^{2} + y^{2}} + \sqrt{(x - c)^{2} + y^{2}} = 2a$$

Mover el segundo radical al lado derecho, elevar al cuadrado y simplificar produce la ecuación:

$$\sqrt{(x + c)^{2} + y^{2}} = 2a - \sqrt{(x - c)^{2} + y^{2}}$$

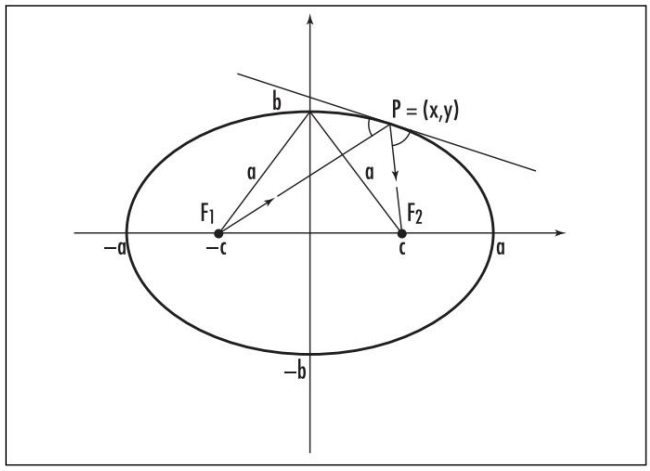
$$\frac{c}{a}$$

Elevando al cuadrado y simplificando de nuevo se obtiene:

$$\frac{x^{2}}{a^{2}} + \frac{y^{2}}{a^{2} - c^{2}} = 1$$

Al notar que a es mayor que c, podemos establecer el positivo como cantidad $a^{2} - c^{2}$ igual a b^{2} , para algún número positivo ber b. Por tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^{2}}{a^{2}} + \frac{y^{2}}{b^{2}} = 1$$



Elipse

Machine Translated by Google

A la inversa, se puede demostrar que cualquier ecuación de esta forma, con a > b, de hecho produce una elipse con focos , 0), y cuyos – b 2 distancias desde los puntos P tienen en las posiciones (± √a 2 focos una suma constante 2a Si, por otro lado, b > a, la ecuación es nuevamente una elipse, pero √b 2 esta vez con focos a lo largo del eje y (0, ±). en 2 - c
La suma común de distancias es 2b. (Si a es igual a b, la curva es un CÍRCULO).

La ecuación muestra que una elipse cruza el eje x en x = ±a y el eje y en y = ±b. Los números a y b se denominan semieje mayor y semieje menor, respectivamente.

Las elipses tienen la siguiente propiedad de reflexión: cualquier rayo de luz que emana de un foco se refleja desde el lado de la elipse directamente hacia el otro foco. Esto se puede probar resolviendo un problema de OPTIMIZACIÓN .
Cualquier habitación con paredes curvadas en forma de elipse tiene la propiedad de que cualquier susurro emitido en un foco puede ser escuchado por cualquier persona ubicada en el segundo foco: no solo las ondas sonoras rebotan en la pared curva dirigidas de un foco al otro, pero también recorren la misma distancia y así llegan sincronizados al segundo foco.
El Tabernáculo Mormón en Salt Lake City, Utah, y la Galería de los Susurros en el edificio del Capitolio de los EE. UU. en Washington, DC, se construyeron para tener esta propiedad.

Los espejos elípticos se utilizan para el tratamiento de cálculos renales. Al colocar un espejo de modo que el cálculo renal quede en un foco, los médicos pueden colocar un generador de ondas sonoras de alta intensidad en el segundo foco. Las ondas del generador pasan inofensivamente a través del cuerpo del paciente para luego concentrarse en la piedra y destruirla.

Se puede dibujar una elipse usando un lápiz, una cuerda y dos tachuelas. Al clavar cada uno de los dos extremos de la cuerda en ubicaciones fijas (los focos), uno tira de la cuerda tensa con la punta del lápiz y luego mueve lentamente el lápiz alrededor, mientras mantiene la cuerda tensa.
La curva trazada es una elipse, siendo la suma constante de las distancias desde los focos la longitud de la cuerda.

En el proceso de derivar la ecuación de una elipse, presentamos la ecuación

$$\sqrt{2\,(\,)\,xc\,ya\,-\,+\,=\,-\,x}\qquad \frac{c}{a}$$

Colocar $mi = \frac{c}{a}$ $\frac{\sqrt{22-2}}{a}$ abdominales $= -\sqrt{1\quad \frac{b}{un^2}}$. Esto se llama el EXCENTRICIDAD de la elipse y tiene valor entre cero y 1. La ecuación anterior se puede reescribir:

$$\frac{\sqrt{(\,)\,xc\,y^{\,22\,-\,+}}}{X\quad \frac{a}{mi}} = {}_{mi}$$

El numerador de la cantidad del lado izquierdo es la distancia de un punto P dado a un foco, y el denominador es la distancia del punto P a la línea vertical x = –a/e, llamada directriz de la elipse. . Esta formulación proporciona una caracterización alternativa de la elipse:

> Una elipse es el conjunto de todos los puntos P tales que la razón de su distancia desde un punto fijo (el foco) a su distancia desde una línea fija (la directriz) es igual a una constante e con valor 0 < e < 1.

La EXCENTRICIDAD de un círculo se define como e = 0.
Si e = 1, esta caracterización da una PARÁBOLA. Para e > 1, tenemos una HIPERBOLA.

Véase también CÍRCULO DE APOLONIO ; PROYECCIÓN.

elipsoide Cualquier superficie geométrica o sólido ubicado en un espacio tridimensional que posea la propiedad de que cualquier plano que lo corte produzca una sección transversal que sea una ELIPSE o un círculo se denomina elipsoide. Tal figura tiene tres ejes de simetría.

Un elipsoide, centrado en el origen (0,0,0) tiene la ecuación:

$$\frac{2x}{un^2} + +\frac{^{2}}{\text{años}}{}_{\text{segundo}\,2} \qquad \frac{2z}{2c} = 1$$

Los puntos (±a,0,0), (0,±b,0) y (0,0,+c) son las ubicaciones donde el elipsoide cruza los ejes x, y y z, respectivamente.

Se puede crear un elipsoide girando una elipse sobre uno de sus ejes. Esto produce una figura con dos de las tres cantidades a, b, c de igual valor. Un elipsoide producido de esta manera se llama esferoide, pero no todo elipsoide es un esferoide. Si las tres cantidades a, b y c tienen el mismo valor r, el elipsoide es una ESFERA de radio r.

Los matemáticos han demostrado que el volumen de un elipsoide está dado por (4/3)πabc. (Compare esto con la ecuación del volumen de una esfera). Desde la época de LEONHARD EULER (1707–83), los matemáticos han intentado encontrar una fórmula simple para el área de la superficie

Machine Translated by Google

de un elipsoide general. Esto ha demostrado ser un problema muy difícil y no existe una fórmula de forma cerrada. (El área de la superficie de una elipse solo se puede expresar en términos de una "integral elíptica" difícil).

conjunto vacío (conjunto nulo) Cualquier conjunto que no contiene elementos se denomina conjunto vacío. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales mayores que tres y menores que dos está vacío, al igual que el conjunto de todas las personas con branquias.

Se dice que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, escrito A B, si todos los elementos de A pertenecen a B. En consecuencia, cualquier conjunto vacío es un subconjunto de cualquier otro conjunto. En particular, si A y B están vacíos, entonces AB y BA, y los dos conjuntos vacíos, son iguales. Esto muestra que solo hay un conjunto vacío. Por lo general, se denota como Ø, pero también se puede escribir como { }.

El conjunto con el conjunto vacío como único miembro se escribe {Ø}, y el conjunto con el conjunto que contiene el conjunto vacío como único miembro se escribe {{Ø}}. De esta manera construimos una cadena de conjuntos:

$$Ø, \{Ø\}, \{\{Ø\}\}, \{\{\{Ø\}\}\},\ldots$$

que naturalmente corresponde a la secuencia de números de conteo 0, 1, 2, 3, … En este contexto, se podría argumentar que todas las matemáticas surgen del conjunto vacío. Es un ejercicio interesante dar una interpretación numérica a un conjunto de dos elementos de la forma {Ø,{Ø}}, por ejemplo.

Un conjunto que no está vacío se llama no vacío.

Véase también TEORÍA DE CONJUNTOS.

punto final Ver INTERVALO.

epiciclo Véase CICLOIDE.

definición epsilon-delta Ver LIMIT.

igualdad Se dice que dos cantidades son iguales si, en algún sentido significativo, son equivalentes. Por ejemplo, las cantidades 2 + 3 y 5 tienen el mismo valor y por lo tanto son iguales. Los dos conjuntos {a,b,c} y {c,a,b} son iguales ya que contienen los mismos elementos. El símbolo = es se utiliza para denotar la equivalencia de dos cantidades, por lo que escribimos 2+3 = 5 y {a,b,c} = {c,a,b}.

Se dice que dos expresiones algebraicas son iguales si una puede transformarse en la otra mediante las reglas estándar del álgebra. Por ejemplo, $(x + 1)^2 + 3 = x + 2x + 4$. Se dice que dos funciones son iguales si tienen los mismos dominios y producen el mismo valor de salida para cada entrada. Por ejemplo, las funciones $f(x) = 9x$ y $g(x) = \frac{\log_{x^3}(x^2)}{\log_{x^3}(x^3)}$, definidos en valores positivos de x, son iguales.

El símbolo = (un par de segmentos de línea paralelos para denotar igualdad) fue introducido en 1557 por el matemático galés ROBERT RECORDE (ca. 1510-1558) “porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales”.

Véase también ECUACIÓN.

coeficientes de equiparación Dos polinomios $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ son idénticos como funciones, es decir, dan los mismos valores de salida para cada valor de entrada de x, solo si los coeficientes de los polinomios coinciden: $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_0 = b_0$. (El estudio general de los POLINOMIOS establece esto). El proceso de hacer coincidir los coeficientes si se sabe que dos polinomios son iguales se llama "coeficientes de equiparación".

Por ejemplo, si x es igual a un polinomio de la forma $A + B(x – 1) + C(x – 1)(x – 2)$, entonces, después de EXPANSIÓN DE SOPORTES, tenemos $x^2 = Cx^2 + (B – 3C)x + (A – B + 2C)$. La equiparación de coeficientes produce: C = 1, B – 3C = 0 (y por tanto B = 3), y A – B + 2C = 0 (y por tanto A = 1). Así $x^2 = 1 + 3(x – 1) + (x – 1)(x – 2)$. (Esta técnica se usa a menudo en el método de FRACCIONES PARCIALES).

Como otro ejemplo, si α y β son las raíces de una ecuación cuadrática de la forma $x^2 – mx + n$, entonces: $x^2 – mx + n = (x – α)(x – β) = x^2 – (α + β)x + αβ$. Nosotros estafamos entonces m es la suma de las raíces y n su producto .

Igualar partes reales e imaginarias Dos NÚMEROS COMPLEJOS a + ib y c + id son iguales sólo si a = c y b = d. El uso de este hecho se llama “igualar partes reales e imaginarias”. Por ejemplo, si (x + iy)(2 + 3i) = 4 + 5i, entonces debemos tener 2x – 3y = 4 y 3x + 2y = 5.

LEONHARD EULER (1707-1783) hizo un uso inteligente de esta técnica para encontrar fórmulas para PYTHAGOREA

Machine Translated by Google

TRIPLES. Además, usando su famosa fórmula $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, hoy llamada FÓRMULA DE EULER , se pueden establecer rápidamente muchas identidades trigonométricas al igualar partes reales e imaginarias. Como otra aplicación, considerar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta)$. Como cos(nθ) es el real parte de $e^{in\theta}$, la serie en cuestión es la parte real de la SERIE GEOMÉTRICA $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\theta})^n$. Evaluando, da

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\theta n}\right) = \frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{(1 - \cos(\theta)) - i\sin(\theta)}$$

$$\frac{1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2 - 2\cos(\theta)}$$

Así tenemos $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) = \frac{1}{2}$.

ecuación Un enunciado matemático que afirma que una expresión o cantidad es igual a otra se llama ecuación. Las dos expresiones o cantidades involucradas están conectadas por un signo igual, "=". Por ejemplo, el enunciado $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ es una ecuación, al igual que los enunciados $2x + 3 = 11$ y $10 = 2 \times 5$.

Una ecuación que es verdadera para todos los valores posibles de las variables involucradas se llama IDENTIDAD . Para ejemplo, $y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$ es una identidad: esta ecuación ción es verdadera sin importar qué valor se elija para y. Una ecuación que es verdadera sólo para ciertos valores de las variables se llama ecuación condicional. Por ejemplo, la ecuación $2x + 3 = 11$ es condicional, ya que es verdadera solo si x es cuatro. La ecuación $2c + d = 6$ también es condicional, ya que sólo se cumple para ciertos valores de c y d.

Los números que hacen que una ecuación condicional sea verdadera se llaman soluciones o raíces de la ecuación. Por ejemplo, la solución de $2x + 3 = 11$ es $x = 4$. Una ecuación puede tener más de una solución, y el conjunto de todas las soluciones posibles de una ecuación condicional se denomina conjunto de soluciones. Por ejemplo, la ecuación $y^2 = 9$ tiene el conjunto solución $\{3, -3\}$, y el conjunto solución de la ecuación $2c + d = 6$ es el conjunto de todos los pares de números de la forma $(c, 6 - 2c)$.

El principio básico para resolver una ecuación es sumar, restar, multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por el mismo número hasta que la variable deseada quede aislada en un lado de la ecuación. Por ejemplo, la ecuación $2x + 7 = 5x + 1$ se puede resolver restando sacando 1 de ambos lados para dar $2x + 6 = 5x$, luego restando $2x$ de ambos lados para obtener $6 = 3x$ y, finalmente, dividiendo ambos lados entre 3 para obtener la solución $x = 2$. Este enfoque funciona bien para ECUACIONES LINEALES de una variable. Para las ecuaciones CUADRÁTICAS y las ecuaciones POLINOMIALES de alto grado, es posible que también se requiera sacar raíces cuadradas y más altas en el proceso de resolución de la ecuación. Sin embargo, no todas las ecuaciones se pueden resolver algebraicamente, en cuyo caso solo se puede buscar una SOLUCIÓN GRÁFICA.

Cabe señalar que realizar la misma operación arbitraria en ambos lados de una ecuación no necesariamente conserva la validez de la ecuación. Por ejemplo, aunque la declaración $9 = 9$ es ciertamente válida, se podría decir que sacar una raíz cuadrada en ambos lados de esta ecuación trivial arroja el resultado no válido $-3 = 3$.

Aunque $2(x - 1) = 3(x - 1)$ es cierto para el valor $x = 1$, dividiendo por la cantidad $x - 1$ se obtiene el $3 = 4$ conclusión inválida $2 = 3$. Y finalmente, dado que $12 = 16$, seleccionando el numerador de cada lado de la ecuación se obtiene el absurdo $12 = 3$. Se debe tener cuidado para asegurar que las operaciones que se usan para resolver una ecuación realmente mantengan la igualdad.

Incluso si la aplicación de la misma operación en ambos lados de una ecuación se considera válida, tal acto puede, sin embargo, producir una nueva ecuación que no necesariamente es exactamente equivalente a la primera. Por ejemplo, comenzando con $a = b$, elevando al cuadrado ambos lados se obtiene la ecuación $a^2 = b^2$, que ahora significa $a = b$ o $a = -b$. Los matemáticos usan el símbolo " " para indicar que una ecuación conduce a una segunda, pero que la segunda no necesariamente implica la primera. Por ejemplo, es apropiado escribir: $a = b \Rightarrow a = b^2$. (Pero $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.) El símbolo " " se usa para indicar que dos ecuaciones son equivalentes, es decir, que la primera implica la segunda y que la segunda implica la primera.

Por ejemplo, tenemos: $4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$.

Ver también ECUACIÓN CÚBICA; HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo).

ecuación de una línea Una LÍNEA recta en un espacio bidimensional tiene la propiedad de que la relación entre la diferencia en las coordenadas y de dos puntos cualesquiera en la línea (ascendente) y la diferencia de sus coordenadas x (desplazamiento) siempre es lo mismo. Es decir, la PENDIENTE de una línea recta es constante y se puede calcular a partir de dos puntos cualesquiera de la línea. Precisamente, si (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son

Machine Translated by Google

dos puntos sobre la recta, y (x,y) son las coordenadas de un punto arbitrario sobre la recta, entonces tenemos:

$$\frac{y - b1}{x - a1} = \frac{b2 - b1}{a2 - a1}$$

Esto proporciona la ecuación de "forma de dos puntos" de la línea. Por ejemplo, la ecuación de la recta que pasa por $5 - 3$ $1 - 2$ los puntos (2,3) y (–1,5) es $\frac{y - 3}{x - 2} = \frac{}{} = \frac{2}{3}$.

La cantidad $\frac{b2 - b1}{a2 - a1}$ es la pendiente m de la recta.

Por lo tanto, uno puede reescribir la forma de dos puntos de la ecuación como $\frac{y - b1}{x - a1}$. Reordenando se obtiene: –

$$y - b1 = m(x - a1)$$

Esto se conoce como la ecuación de la línea en “forma punto-pendiente”. Por ejemplo, la ecuación de una recta de pendiente 4 que pasa por el punto (5,7) es simplemente $y - 7 = 4(x - 5)$.
Trabajar con esta forma de ecuación es útil si la pendiente de la línea ya está especificada.

Al reorganizar la ecuación punto-pendiente se obtiene $y = mx + (ma1 + b1)$. Denotando la constante $ma1 + b1$ simplemente como b se obtiene la ecuación:

$$y = mx + b$$

Observando que si $x = 0$, entonces tenemos $y = b$. Esto muestra que la constante b es la intersección con el eje y de la recta. Por esta razón, la ecuación anterior se denomina ecuación de la línea en "forma de intersección de la pendiente". Así, por ejemplo, la ecuación de una recta con pendiente $–1$ que cruza el eje y en la posición 3 es $y = –x + 3$.

Una desventaja de la forma pendiente-intersección es que no permite escribir la ecuación de una línea vertical, es decir, una que no intercepta el eje y en absoluto. Volviendo a la forma de dos puntos y multiplicando en cruz se obtiene la ecuación $(a2 – a1)(y – b1) = (x – a1)(b2 – b1)$. LA EXPANSIÓN DE CORCHETES y la reorganización de los términos da como resultado la ecuación general:

$$cx + dy = r$$

para algunas constantes c, d y r. Esto se llama la forma general de la ecuación de una recta. Por ejemplo, la ecuación de la línea vertical tres unidades a la derecha del eje y se obtiene seleccionando $c = 1$, $d = 0$ y $r = 3$, para obtener la ecuación $x = 3$.

Algunos autores prefieren dividir la forma general de la ecuación de una recta por la constante r y cambiar los nombres de las etiquetas restantes para que la ecuación diga:

$$x\text{-}a + x\text{-}b = 1$$

Esto se llama la forma de intersección de la ecuación de una línea.

En el espacio tridimensional, una línea se especifica mediante un punto (a,b,c) en la línea y un VECTOR mediante $v = \langle v1, v2, v3 \rangle$, que representa la dirección de la línea. Así, las coordenadas (x,y,z) de cualquier otro punto de la recta están dadas por:

$$x = a + tv1 \text{ y}$$
$$= b + tv2 \; z =$$
$$c + tv3$$

para algún valor del número real t. Estas son las ECUACIONES PARAMÉTRICAS de la recta. (Las ecuaciones paramétricas de una línea en un espacio bidimensional son análogas.)

Si el vector v se calcula mediante la diferencia de coordenadas del punto (a,b,c) y un segundo punto (a1 ,b1 ,c1) en la línea, es decir, $v1 = a1 – a$, $v2 = b1 – b$, y $v3 = c1 – c$—entonces, despejando t en las ecuaciones paramétricas se obtiene:

$$\frac{x - un}{a1 - un} = \frac{y - b -}{b1 - b} = \frac{z - c}{c1 - c}$$

Estas son las ecuaciones de "forma de dos puntos" de una línea en un espacio tridimensional.

Véase también COSENOS DIRECCIONALES; ECUACIÓN LINEAL; ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS; LÍNEAS OSCILADAS; VECTOR ECUACION DE UN PLANO.

ecuación de un plano Ver ECUACIÓN VECTORIAL DE A AVIÓN.

equiángulo Se dice que un POLÍGONO es equiángulo si todos sus ángulos interiores son iguales. Por ejemplo, un ángulo recto es equiángulo (cada ángulo interior equivale a 90°), al igual que un triángulo EQUILÁTERO (cada ángulo interior equivale a 60°). Un polígono se llama regular si es a la vez equiángulo y equilátero.

Se dice que un punto (x,y) en el plano cartesiano es un punto de celosía si tanto x como y son números enteros, y un polígono dibujado en el plano se dice que es un polígono de celosía si su

Machine Translated by Google

los vértices se encuentran en los puntos de la red. Los matemáticos tienen demostró que es imposible dibujar un polígono reticular equiángulo con n lados si n es un número diferente de 4 u 8. (Cualquier polígono de celosía equiángulo de cuatro lados es un rectángulo, y cualquier polígono de celosía equiángulo de ocho lados tiene ocho ángulos interiores, cada uno igual a 135°.) El cuadrado y el octógono son los dos únicos polígonos reticulares regulares.

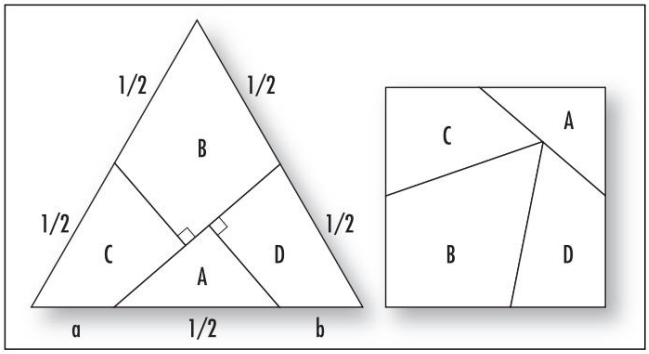
Ver también COORDENADAS CARTESIANAS.

equidescomponibles Dos figuras geométricas se dicen ser equidescomponible si es posible diseccionar uno figura en un número finito de piezas que se pueden volver a colocar, sin superposición, para formar la segunda figura. Para ejemplo, un triángulo equilátero de lado 1 es equidescomponible con un cuadrado de la misma área.

En la imagen, a tiene una longitud $\frac{3-\sqrt[4]{3}}{4}$ y b es de triángulo $\frac{\sqrt[4]{3}+1}{4}$. (El desafío de convertir un equilátero de longitud en un cuadrado por disección fue un rompecabezas primero planteado por el acertijo inglés Henry Ernest Dudeney en 1907. El desafío también se conoce como el rompecabezas de Haberdasher.)

matemático escocés William Wallace (1768–1843) demostró que dos polígonos cualesquiera del misma área son equidescomponibles. matemáticos desde entonces han demostrado que el resultado sigue siendo válido incluso para figuras con límites curvos. En particular, El matemático húngaro Miklov Laczovich demostró en 1988 que se necesitan casi 1050 piezas para convertir un círculo en un cuadrado.

Sorprendentemente, el resultado correspondiente en tres las dimensiones no se mantienen, incluso para poliedros simples. Matemático alemán Max Dehn (1878-1952) demostró, por ejemplo, que un cubo y un tetraedro regular del mismo volumen no son equidescomponibles.



Figuras equidescomponibles

equidistantes Se dice que dos puntos P y Q son equidistantes de un tercer punto O si son iguales distancia de O. Escribimos: |PO| = |QO|.

Dado un solo punto O en un plano, el conjunto de todos puntos equidistantes de O es un CÍRCULO con O como su centro. Dados dos puntos A y B en un plano, el conjunto de todos los puntos equidistantes de A y B es la bisectriz perpendicular del segmento AB, es decir, una recta recta perpendicular a AB y que pasa por el punto medio de AB. (Para ver esto, sea M el punto medio de la segmento de recta AB, y sea P cualquier punto de la bisectriz perpendicular a AB. Supongamos que |PM| = x y |AM| = y = |MB|. Entonces, por el TEOREMA DE PITÁGORAS , tenemos tener |PA| = = |PB| = $\sqrt{x^2+y^2}$, por lo que P es equidistante de A y B. También se puede usar el teorema de Pitágoras para verificar que cualquier punto que no esté en esta línea no es equidistante de esos dos puntos).

Dados tres puntos A, B y C en un plano, no en un recta, sólo hay un punto P equidistante de los tres. (Para ver esto, dibuja las bisectrices perpendiculares de AB y BC, y sea P el único punto en el que se cruzan. Entonces P es equidistante de A y B, y P también es equidistante de B y C. En consecuencia, P es la misma distancia de los tres puntos). Observando que los puntos A, B y C pueden verse como los vértices de un TRIÁNGULO, esto prueba:

> Las tres mediatrices de los lados de cualquier triángulo se encuentran en un punto común P.

(Esta observación se usa para probar que las tres ALTI TUDES de cualquier triángulo también son CONCURRENTES).

Yendo más lejos, suponga que la distancia común de P desde cada uno de los tres puntos A, B y C es R. Entonces se sigue que un círculo de radio r con centro alrededor de P pasa por cada uno de estos puntos. Esto demuestra:

> Para cualquier triángulo ABC existe un solo círculo que pasa por cada uno de sus vértices A, B, y c

Este círculo se llama el CÍRCULO del triángulo, y el punto P, el punto común de intersección de las tres mediatrices del triángulo, es llamado circuncentro del triángulo.

Machine Translated by Google

En el espacio tridimensional, el conjunto de todos los puntos equidistantes de un solo punto O es una esfera con O como su centro. Dados dos puntos A y B, el conjunto de todos los puntos equidistantes de ellos es un plano que pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a él. Dados tres puntos A, B y C, no todos en línea recta, el conjunto de todos los puntos P equidistantes de los tres es una línea recta perpendicular al plano formado por los tres puntos y que pasa por el circuncentro del triángulo ABC. No es necesario que haya un punto equidistante de cuatro puntos dados en un espacio tridimensional.

La distancia de un punto a una línea es la longitud de un segmento de línea desde el punto que cruza esa línea en ángulo recto. Nuevamente, usando el teorema de Pitágoras y triángulos similares, se puede demostrar que el conjunto de todos los puntos equidistantes de dos líneas que se intersecan en un plano es un par de líneas perpendiculares que pasan cada una por el punto de intersección de las dos líneas, y cada una biseca un ángulo formado por las líneas. Además, argumentando como arriba, se puede probar:

En cualquier triángulo, las tres líneas que bisecan los ángulos interiores del triángulo se encuentran en un punto común.

(Considere primero el punto de intersección de solo dos bisectrices de ángulo. Este punto debe, de hecho, ser equidistante de los tres lados del triángulo, por lo que se encuentra en la bisectriz del tercer ángulo).

Véase también LÍNEA DE EULER; INCLUYE.

equilátero Se dice que un POLÍGONO es equilátero si todos sus lados tienen la misma longitud. Por ejemplo, un cuadrado es equilátero, como lo es un triángulo con cada ángulo interior igual a 60°. Un polígono se llama “regular” si es tanto equilátero como EQUIANGULAR.

Se dice que un punto (x,y) en el plano cartesiano es un "punto de celosía" si tanto x como y son números enteros, y un polígono dibujado en el plano se dice que es un "polígono de celosía" si sus vértices se encuentran en puntos de celosía. Los matemáticos han demostrado que es imposible dibujar un polígono reticular equilátero con un número impar de lados, aunque existen polígonos reticulares equiláteros con cualquier número par de lados. El cuadrado y el octágono son los dos únicos polígonos reticulares regulares.

Ver también COORDENADAS CARTESIANAS.

relación de equivalencia Véase DESCONEXIÓN POR PARES.

Eratóstenes de Cirene (ca. 275–195 a. C.) Geometría griega , teoría de números, astronomía, geógrafo Nacido en Cirene, en el norte de África (se desconoce la fecha exacta de nacimiento), Eratóstenes es recordado como la primera persona en calcular la circunferencia de la tierra. (Véase TIERRA). Usando la distancia conocida entre dos ciudades particulares, la longitud de las sombras proyectadas por el sol del mediodía en esas ciudades y un razonamiento geométrico simple, Eratóstenes determinó que la circunferencia de la Tierra era de 250.000 “estadios”. Desafortunadamente, hoy en día no se conoce la longitud exacta de un “estadio”, por lo que no es posible estar seguro de la precisión de este resultado. Si tomamos, como sugieren muchos historiadores, que la longitud probable de esta unidad es de 515,6 pies (157,2 m), entonces el cálculo de Eratóstenes es extraordinariamente exacto.

Eratóstenes viajó a Atenas en su juventud y pasó muchos años estudiando allí. Alrededor del 240 a. C. fue nombrado bibliotecario de la mayor biblioteca del mundo antiguo, la Biblioteca de Alejandría. Al principio de su carrera académica, Eratóstenes escribió la pieza expositiva Platonicus como un intento de explicar las matemáticas en las que PLATÓN basó su filosofía. Aunque este trabajo está perdido en la actualidad, los eruditos de épocas posteriores se refirieron a él con frecuencia y lo describieron como una fuente invaluable que detalla las matemáticas de la geometría y la aritmética, así como las matemáticas de la música. En esta obra, Eratóstenes también describió el problema de DUPLICAR EL CUBO y le dio solución haciendo uso de un dispositivo mecánico que inventó.

Eratóstenes también trabajó en la teoría de los números PRIMOS y descubrió una famosa técnica de "tamiz" para encontrar números primos. Este método todavía se usa hoy y lleva su nombre en su honor.

Además de medir la circunferencia de la Tierra, Eratóstenes también ideó técnicas ingeniosas para determinar la distancia de la Tierra al Sol (que midió como 804 millones de estadios), la distancia entre la Tierra y la Luna (780 000 estadios) y la inclinación del eje de la Tierra con respecto al plano en que la Tierra gira alrededor del Sol (que midió como 11/83 de 180°, es decir, 23° 51′ 15″). Eratóstenes también cartografió con precisión una porción significativa del río Nilo e identificó correctamente la ocurrencia de fuertes lluvias cerca de su fuente como la razón de su inundación errática cerca de su desembocadura. Compiló una cata astronómica

Machine Translated by Google

registró una lista de más de 675 estrellas específicas e ideó un sistema de calendario efectivo que incluía años bisiestos.

Como un erudito extraordinariamente completo, Eratóstenes escribió obras literarias sobre temas de teatro y ética, y también escribió poesía. Su famoso poema “Hermes” se inspiró en sus estudios de
astronomía.

Se cree que Eratóstenes permaneció en Alejandría durante toda la última parte de su vida. Se desconoce la fecha exacta de su muerte.

Erdös, Paul (1913–1996) Húngaro Matemáticas discretas, teoría de números Nacido el 25 de marzo de 1913 en Budapest, Hungría, el prolífico matemático Paul Erdös (pronunciado “plato de aire”) es recordado como uno de los más grandes solucionadores de problemas y planteadores de problemas de todos los tiempos. Con una extraña habilidad para crear problemas que condujeron a nuevas y productivas áreas de investigación matemática, a Erdös se le atribuye el mérito de ser el fundador del campo de las "matemáticas discretas", las matemáticas de la informática.
Sin un hogar permanente, Erdös viajó por el mundo varias veces a lo largo de su vida, colaborando y escribiendo artículos con académicos de todos los países. Sus colegas inventaron el término número de Erdös para describir sus conexiones cercanas con él, asignando un número de Erdös de 1 a todos aquellos que habían sido coautores de un artículo con Erdös, el número 2 a aquellos que habían trabajado con alguien que había trabajado con Erdös, y así en.
Según su obituario en el New York Times, 458 matemáticos pueden reclamar un número de Erdös de 1, y más de 4500 académicos un número de Erdös de 2.

Erdös ingresó a la Universidad de Budapest en 1930 a la edad de 17 años y, en pocos años, comenzó a hacer contribuciones significativas al campo de la TEORÍA DE NÚMEROS. A los 20 años descubrió una nueva y elemental demostración de la conjetura de Joseph Bertrand (1822-1900), que afirmaba que al menos un PRIMO se encuentra entre cualquier número n y su doble 2n. (El matemático ruso PAFNUTY LIVOVICH CHEBYSHEV estableció la validez de esta afirmación, por medios complicados, en 1850). Más adelante en su vida, Erdös también encontró una prueba elemental de la famosa
TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO.

En 1934, a la temprana edad de 21 años, Erdös obtuvo un doctorado. en matemáticas de la Universidad de Budapest. Debido a su herencia judía, Erdös se vio obligado a abandonar Hungría y aceptó la oferta de una beca posdoctoral en Manchester, Inglaterra. como el
Empeoró la situación en Europa, Erdös decidió mudarse a los Estados Unidos en 1938.

Erdös nunca aceptó un puesto académico permanente. Prefería dedicar todas sus horas de vigilia a la búsqueda de las matemáticas y viajaba de una conferencia o seminario de matemáticas a otro, construyendo un círculo creciente de colaboradores. En la última parte de su vida, Erdös no poseía nada más que una maleta de ropa y viajaba de universidad en universidad y de la casa de un matemático a otro.

Desarrolló una reputación como un matemático brillante y un invitado espantoso. Durmiendo solo de 3 a 5 horas al día, Erdös a menudo despertaba a sus anfitriones matemáticos a todas horas de la noche, ansioso por comenzar con más investigaciones matemáticas. Al final de su vida, Erdös había trabajado en más de 1500 artículos matemáticos.
Murió en Varsovia, Polonia, el 20 de septiembre de 1996.

Erdös ganó muchos premios durante su vida, incluido el Premio Cole de 1951 de la Sociedad Matemática Estadounidense por su artículo de 1949 "Sobre un nuevo método en la teoría elemental de números que conduce a una prueba elemental del teorema de los números primos", y el Premio Wolf de 1983. Premio de $50,000 de la Fundación Wolf.
También recibió un salario de la Academia Húngara de Ciencias. Sin necesidad de dinero, Erdös a menudo lo regalaba, ya sea a estudiantes necesitados o como premios por resolver los problemas que había planteado, de los cuales había muchos. Los matemáticos de hoy siguen publicando artículos inspirados en esos desafíos.

error La diferencia entre el valor aproximado de una cantidad y el verdadero valor numérico de esa cantidad se llama error de aproximación. Sin embargo, existe cierta confusión en la literatura sobre cómo interpretar esta definición. Si x es una aproximación del valor X, entonces algunos textos trabajan con la diferencia X – x cuando hablan del error, mientras que otros textos usan la diferencia x – X. (Así, el error al usar 3.6 como una aproximación para 3.59, decir, podría considerarse como 0.01 o –0.01.) Por esta razón, muchos autores prefieren trabajar con el “error absoluto”, |X – x|, y evitar la cuestión del signo por completo.

El término error también se usa para la incertidumbre en una medición. Por ejemplo, normalmente se puede leer la temperatura solo al grado Fahrenheit más cercano. Por lo tanto, un registro de temperatura de 75 °F debe escribirse, o al menos interpretarse como, (75 ± 0,5) °F para indicar que hay

Machine Translated by Google

es un posible error de hasta medio grado. Cuando una medida se escribe en notación decimal, generalmente se entiende que el error absoluto no excede la media unidad en el último dígito. Así, por ejemplo, un registro de 2,3 indica que el error no supera el ±0,05, mientras que el registro 2,30 indica que el error no supera el ±0,005. En este contexto, generalmente se entiende que el dígito final registrado es confiable.

Si un número que representa una medida no tiene una parte decimal, a veces se usa un punto para indicar hasta qué punto los dígitos son confiables. Por ejemplo, al registrar una medida como 23 00, se nos dice que el 3 es el último dígito confiable y que el error en esta medida podría ser de hasta ±50 (la mitad del lugar de las centenas). Una medida registrada de 230 0, por otra parte, indica que el primer cero es fiable y que el error en esta medida es como máximo ±5 (la mitad del lugar de las decenas).

Los dígitos hasta el dígito confiable inclusive se denominan cifras significativas de la medición. Así, la medida 23 00 tiene dos cifras significativas, por ejemplo, mientras que la medida registrada 230 0 tiene tres cifras significativas. Si un resultado se expresa en NOTACIÓN CIENTÍFICA, $p \times 10^n$, generalmente se entiende que todos los dígitos de p son significativos. Por ejemplo, al escribir un valor de 0,0170 como $1,70 \times 10^{-2}$, estamos indicando que el 0 final es el resultado de una medición, por lo que este dígito es fiable. La cantidad 0,0170 tiene así tres dígitos significativos (y el error de esta medida es como máximo ±0,00005). De manera similar, una medida registrada de 0.00030300, por ejemplo, tiene cinco cifras significativas. (Los tres ceros iniciales de la expansión decimal solo sirven para colocar correctamente el punto decimal. Los cinco dígitos restantes representan el resultado de registrar una medición).

Al calcular con valores aproximados, es importante asegurarse de que el resultado no implique un nivel de precisión poco realista. Por ejemplo, si las dimensiones de la habitación se miden como 14,3 pies por 10,5 pies, al multiplicar el largo por el ancho, el área de la habitación es de 150,15 pies2 . La respuesta presentada de esta manera sugiere un nivel de precisión hasta el 1/100 más cercano, lo cual no es razonable dado que las mediciones iniciales se realizan al 1/10 más cercano. Generalmente, el resultado de un cálculo debe presentarse como no más preciso que la medición inicial menos precisa. Por ejemplo, al sumar las medidas 230 0 y 1068, el resultado debe registrarse como 337 0 (el número 3368 se redondea al 10 más cercano). Al multiplicar 14,3 y 10,5, cada uno con tres cifras significativas, el resultado debe escribirse 15 0 ft2 (nuevamente tres cifras significativas).

Véase también ERROR DE PORCENTAJE; PRECISIÓN; RELATIVO ERROR; ERROR DE REDONDEO .

Euclides (ca.300–260 a. C.) Geometría griega El geómetra Euclides es recordado como el autor del texto más famoso de toda la matemática, LOS ELEMENTOS. En 13 libros, la obra cubre todo lo que se sabía en matemáticas en su época, desde geometría elemental y teoría de números, hasta teorías sofisticadas de proporción, irracionales y geometría sólida. Pero Euclid es venerado hoy principalmente por su enfoque único en la organización del material que presentó. Comenzando con un pequeño conjunto de definiciones, "nociones comunes" y AXIOMAS (enunciados básicos cuya verdad parece ser evidente), Euclides derivó por razonamiento lógico puro unas 465 proposiciones (TEOREMAS) en matemáticas. Esto estableció estándares de rigor y poderes de deducción que se convirtieron en el modelo de todo el trabajo posterior en matemáticas durante los dos milenios que siguieron. Se puede decir que Los Elementos define de qué se trata la MATEMÁTICA PURA .

Casi nada se sabe de la vida de Euclides. Se cree que vivió y enseñó en Alejandría, una ciudad griega cerca de la desembocadura del Nilo en lo que ahora es Egipto, y pudo haber sido bibliotecario jefe de la gran biblioteca de la Academia de Alejandría. Muchos textos históricos antiguos que describen la obra de Euclides confunden al matemático Euclides de Alejandría con el filósofo Euclides de Megara, que vivió unos 100 años antes. Además, Euclid era un nombre muy común en ese momento, y hubo muchos eruditos prominentes de una variedad de campos a lo largo de este período. Debido a la confusión subsiguiente y a la falta de información específica sobre el matemático Euclides, algunos historiadores han propuesto la teoría de que Euclides no fue, de hecho, una figura histórica, sino el nombre adoptado por un equipo de matemáticos en la biblioteca. de Alejandría que publicó una obra completa bajo el único nombre de Euclides. (Compare esto con el ficticio NICOLAS BOURBAKI del siglo XX). Esta no es la opinión popular, sin embargo.

Los Elementos se consideró un texto de estudio estándar para los eruditos griegos y romanos durante 1000 años. Fue traducido al árabe alrededor del año 800 EC y estudiado extensamente por eruditos árabes. Con el resurgimiento del interés científico durante el Renacimiento, la obra de Euclides

Machine Translated by Google

se convirtió en el modelo de pensamiento lógico en Europa. Han aparecido más de 2.000 ediciones diferentes del texto desde la primera versión tipográfica producida en el año 1482, y muchos grandes científicos de Occidente, incluido SIR ISAAC NEWTON (1642–1627), por ejemplo, describieron su dominio de la obra de Euclides como un parte importante de su desarrollo del pensamiento científico. El estudio de los elementos fue una parte integral del plan de estudios estándar de matemáticas de la escuela secundaria de EE. UU. hasta la década de 1950.

Otras obras atribuidas a Euclides de Alejandría que han llegado hasta nuestros días son Data, sobre las propiedades de las figuras; En Divisiones, estudiando la teoría geométrica de dividir las áreas de figuras en ciertas proporciones; y Óptica, la primera obra griega sobre la teoría de la PERSPECTIVA. También se sabe que Euclides produjo al menos otros cinco textos de geometría, incluido un tratado de cuatro libros sobre CONICS, así como un trabajo sobre música y otro sobre principios científicos generales.

Ver también POSTULADOS DE EUCLIDES .

Algoritmo euclidiano En su tercer libro de LOS ELEMENTOS, EUCLID describe un procedimiento sistemático para encontrar el MAYOR DIVISOR COMÚN de dos enteros positivos cualesquiera. El método es como sigue:

1. Escribe el par de números.
2. Resta el número más pequeño del más grande.
3. Vuelva a escribir el par de números pero reemplace el número mayor con la respuesta del paso dos.
4. Repita los pasos dos y tres hasta que tenga dos números idénticos. Este valor repetido es el máximo común divisor de los dos números originales.

Como ejemplo, calculamos el máximo común divisor de 42 y 60:

$$42:60 \rightarrow 42:18 \rightarrow 24:18 \rightarrow 6:18 \rightarrow 6:12 \rightarrow 6:6$$

Su máximo común divisor es 6. Cada paso del procedimiento produce un par de números con una diferencia menor. Eventualmente, resultará un par con diferencia cero. Por lo tanto, es seguro que el algoritmo euclidiano se detendrá después de un número finito de cálculos.

Por qué funciona el algoritmo

Supongamos que dos números a y b eventualmente producen el valor z a través de este procedimiento:

$$un : segundo \rightarrow c : re \rightarrow \ldots \rightarrow tu : v \rightarrow z : z$$

Entonces no es demasiado difícil demostrar que z es de hecho el máximo común divisor de a y b.

En primer lugar, si a y b son ambos múltiplos de cualquier número n, entonces también lo es su diferencia. Esto significa que todos los pares de números producidos por este procedimiento siguen siendo múltiplos de n. En particular, z es un múltiplo de n. (En el ejemplo anterior, tanto 42 como 60 son múltiplos de 3, por ejemplo. Todos los números producidos a través del procedimiento siguen siendo múltiplos de 3. También son múltiplos de 2 y de 6). Esto establece que z es al menos tan grande como cualquier factor común de a y b.

En segundo lugar, trabajando hacia atrás a través del procedimiento, vemos que el penúltimo par u : v se obtiene de z : z mediante la suma. (Mira el ejemplo anterior).
Por tanto, tanto u como v son múltiplos de z. Trabajando todo el camino hacia atrás, tenemos de hecho que todos los números que aparecen en la lista deben ser múltiplos de z, incluidos tanto a como b. Por lo tanto, z es un factor común.

Estas dos conclusiones muestran que z es de hecho el máximo común divisor que buscamos. Como beneficio adicional, los dos párrafos anteriores también muestran que el máximo común divisor de dos números es un múltiplo de cualquier otro factor común.

Combinaciones lineales

Una consecuencia sorprendente del algoritmo euclidiano es que también brinda un método constructivo para escribir el máximo común divisor de dos enteros positivos ayb como una combinación lineal de los números originales.

Haciendo un seguimiento de las restas realizadas en el ejemplo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
42 : 60 \rightarrow 42 : 18 &= (42) : (60–42) \rightarrow 24 : 18 \\
&= (42) – (60 – 42) : (60 – 42) = (2 \times 42 – 60) : (60 \\
&\quad – 42)) \rightarrow 6 : 18 = (2 \times 42 – 60) \\
&\quad – (60 – 42) : (60 – 42) \\
&= (3 \times 42 – 2 \times 60) : (60 – 42) \rightarrow 6 : \\
12 &= (3 \times 42 – 2 \times 60) : (60 – 42) – (3 \times 42 – 2 \times 60) \\
&= (3 \times 42 – 2 \times 60) : \\
&\quad (3 \times 60 – 4 \times 42) \rightarrow 6: 6 = (3 \times 42 – 2 \times 60) : \\
&\quad (3 \times 60 – 4 \times 42) – (3 \times 42 – 2 \times 60) \\
&= (3 \times 42 – 2 \times 60) : (5 \times 60 – 7 \times 42)
\end{aligned}$$

Así podemos escribir 6 = 3 × 42 – 2 × 60 (y también 6 = 5 × 60 – 7 × 42). En general, esto muestra que siempre es

Machine Translated by Google

posible escribir el máximo común divisor de dos números a y b en la forma:

$$xa + yb$$

para algunos enteros x e y. Este hecho es útil para resolver el famoso PROBLEMA DEL LLENADO DE JARRAS, por ejemplo.

Véase también TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA.

Geometría euclidiana La GEOMETRÍA basada en las definiciones y AXIOMAS establecidos en la famosa obra de Euclides LOS ELEMENTOS se denomina geometría euclidiana. La característica sobresaliente de esta geometría es que se cumple el quinto postulado, el POSTULADO PARALELO . De esto se sigue que a través de cualquier punto en el plano hay precisamente una línea que pasa por ese punto paralela a cualquier dirección dada, que todos los ángulos en un triángulo suman exactamente 180°, y que la razón de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es siempre el mismo valor π.

La geometría euclidiana bidimensional se denomina geometría plana y la geometría euclidiana tridimensional se denomina geometría sólida. En 1899, el matemático alemán DAVID HILBERT (1862–1943) demostró que la teoría de la geometría euclidiana está libre de CONTRADICCIÓN.

Véase también EUCLID; LOS POSTULADOS DE EUCLIDES ; HISTORIA DE GEOMETRÍA (ensayo); GEOMETRÍA NO EUCLIDEA.

Espacio euclidiano (espacio cartesiano, n-espacio) El ESPACIO VECTORIAL de todas las n-TUPLAS $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con las operaciones de suma y multiplicación escalar dadas por:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

y dotado de la noción de distancia entre los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dada por la FÓRMULA DE LA DISTANCIA:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

se llama espacio euclidiano.

Los elementos de un espacio euclidiano bidimensional se pueden identificar con puntos en un plano relativo a un conjunto de ejes de COORDENADAS CARTESIANAS . El espacio vectorial de todos n-tuplas de NÚMEROS COMPLEJOS bajo un conjunto análogo de operaciones se denomina espacio euclidiano complejo.

Los postulados de Euclides EUCLID de Alejandría (ca. 300-260 a. C.) comenzó su famosa pieza de 13 volúmenes LOS ELEMENTOS con 23 definiciones (del tipo, "un punto es lo que no tiene partes" y "una línea es lo que no tiene ancho") seguido de 10 AXIOMAS divididos en dos tipos: cinco nociones comunes y cinco postulados. Sus nociones comunes eran:

1. Las cosas que son iguales a la misma cosa son iguales a unos y otros.
2. Si se suman cosas iguales a iguales, entonces los todos son iguales.
3. Si se restan cosas iguales de iguales, entonces los restos son iguales.
4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales a unos y otros.
5. El todo es mayor que la parte.

Los postulados de Euclides fueron:

1. Se puede dibujar una línea recta para unir dos puntos cualesquiera.
2. Cualquier segmento de línea recta se puede extender a una línea recta de cualquier longitud.
3. Dado cualquier segmento de línea recta, es posible dibujar un círculo con centro en un punto final y con el segmento de línea recta como radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si dos líneas rectas que parten de los extremos de un segmento de línea dado tienen ángulos interiores en un lado dado del segmento de línea que suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos líneas, si se extienden, se encuentran para formar un triángulo en ese lado. del segmento de línea.

(Su cuarto postulado es una declaración sobre la homogeneidad del espacio, que es posible trasladar figuras a diferentes lugares sin cambiar su estructura básica).

Vale la pena señalar que Euclides evitó deliberadamente cualquier mención directa de la noción de infinito. Su redacción del segundo postulado, por ejemplo, evita la necesidad de afirmar que las líneas rectas pueden extenderse indefinidamente, y su quinto postulado, también conocido como el POSTULADO PARALELO, evita la mención directa de líneas paralelas, es decir, líneas que nunca se encuentran cuando se extienden indefinidamente.

De estos supuestos básicos Euclides dedujo, por puro razonamiento lógico, 465 afirmaciones de verdad (TEO-

Machine Translated by Google

REMs) sobre figuras geométricas. El enfoque sistemático que siguió y el rigor del razonamiento que introdujo fue aclamado como un gran logro intelectual. Su modelo de exploración matemática se convirtió en el estándar para toda la investigación matemática durante los siguientes 2000 años.

El quinto postulado de Euclides siempre fue visto con recelo. Nunca se consideró tan simple y evidente como sus cuatro postulados restantes, y el propio Euclides hizo todo lo posible para evitar utilizarlo en su obra. (Euclides no invocó el quinto postulado hasta su proposición 29).

A lo largo de los siglos, los eruditos llegaron a creer que el quinto postulado podía deducirse lógicamente de los cuatro postulados restantes y, por lo tanto, no era necesario enumerarlo como un axioma. Mucha gente propuso pruebas para ello, incluido el filósofo griego del siglo V Proclo, que se destaca por su relato histórico de la geometría griega.

Desafortunadamente, su prueba fue defectuosa, al igual que las pruebas propuestas por los eruditos árabes de los siglos VIII y IX, y por los eruditos occidentales del Renacimiento.

En 1733, el maestro y erudito italiano GIROLAMO SAC CHERI (1667–1733) creía que debido a que los axiomas de Euclides modelan el mundo real, que él pensaba que era consistente, no pueden conducir a una CONTRADICCIÓN. Si los primeros cuatro postulados implican que el quinto postulado también es verdadero, entonces asumir los cuatro postulados junto con la negación del quinto postulado debería conducir a una inconsistencia lógica. Desafortunadamente, al seguir este tacto, Saccheri nunca se encontró con una contradicción.

En 1795, el matemático y físico escocés John Playfair (1748–1819) propuso una formulación alternativa del famoso quinto postulado (hoy conocido como AXIOMA DEL JUEGO JUSTO). Esta versión del axioma es considerablemente más fácil de manejar y su negación es más fácil de imaginar. En un intento de seguir el enfoque de Saccheri, el matemático ruso NICOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) y el matemático húngaro JÁNOS BOLYAI (1802–1860), llegaron de forma independiente a la misma conclusión sorprendente: los primeros cuatro postulados de Euclides junto con la negación de Playfair versión del quinto postulado no conducirá a una contradicción. Esto estableció, de una vez por todas, que el quinto postulado es un AXIOMA INDEPENDIENTE y no puede deducirse de los cuatro postulados restantes. Más importante aún, al explorar las geometrías que resultan de asumir que el quinto postulado no se cumple, los estudiosos fueron llevados al descubrimiento de la GEOMETRÍA NO EUCLIDEA.

A fines del siglo XIX, el matemático alemán DAVID HILBERT (1862–1943) señaló que, a pesar de su rigor, El trabajo de Euclides contenía muchas suposiciones ocultas. También se dio cuenta, a pesar de los intentos de Euclides de describirlos, que las nociones de "punto", "línea" y "plano" no pueden definirse adecuadamente y deben permanecer como términos indefinidos en cualquier teoría de la geometría. En su obra de 1899 Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la geometría) Hilbert refinó y amplió los postulados de Euclides en una lista de 28 suposiciones básicas que definen todo lo que se necesita en una descripción completa de la geometría de Euclides. Sus axiomas se conocen hoy como los axiomas de Hilbert.

Véase también GEOMETRÍA EUCLIDEA; HIPERBÓLICO GEOMETRÍA; GEOMETRÍA ESFÉRICA.

La demostración de Euclides de la infinitud de los números primos

Alrededor del siglo III a. C., EUCLID demostró que no existe un número PRIMO mayor , lo que significa que la lista de números primos continúa para siempre. Presentó su prueba como la Proposición IX.20 en su libro LOS ELEMENTOS, y fue el primero en reconocer y probar este hecho sobre los números primos.

La prueba de Euclides se basa en la observación de que cualquier número N es primo o se factoriza en números primos. Su argumento procede de la siguiente manera:

> Supongamos por el contrario que hay un número primo más grande p. Entonces la lista finita 2, 3, 5, 7, …, p contiene todos los números primos. Pero considere la cantidad:
>
> $$norte = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p + 1$$
>
> No es divisible por ninguno de los números primos de nuestra lista (deja un residuo de uno cada vez), por lo que no tiene factor primo. Debe ser el caso entonces que N es primo. Así hemos creado un nuevo número primo mayor que el mayor primo p. Este absurdo muestra que nuestra suposición de que solo hay un número finito de números primos debe ser falsa.

El argumento de Euclides es un ejemplo clásico de PRUEBA POR CONTRADICCIÓN. Su argumento también proporciona un ALGORITMO para generar nuevos números primos a partir de cualquier lista finita de números primos. Por ejemplo, de la lista de números primos 2, 3, 7, el argumento de Euclides da $N = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$ como un nuevo número primo, y de la lista 2, 3, 7, 43 tenemos $N = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807 = 13 \times 139$, dando 13 como un nuevo número primo.

Machine Translated by Google

El argumento de Euclides se puede desarrollar más para obtener otros datos interesantes sobre los números primos. Por ejemplo, podemos probar:

> Hay un número infinito de números primos que dejan un resto de 3 cuando se divide por 4. (Es decir, hay un número infinito de números primos de la forma 4n + 3).

De nuevo, supongamos por el contrario, que la lista de tales números primos es finita: 3, 7, 11,…,p, y esta vez consideremos la cantidad. N = 4 × (3 × 7 × 11 ×…× p) –1. Si este número es primo, entonces hemos encontrado un nuevo primo de la forma requerida. Si no lo es, entonces se factoriza en números primos: N = p1 × p2 ×…× pk . Nótese que dado que N no es divisible por 3, ninguno de sus factores primos es igual a 3. Tampoco puede ser el caso que todos los factores primos pi dejen un resto de 1 cuando se dividen por 4 (porque entonces N también sería deja un resto de 1). Por lo tanto, al menos uno de estos factores primos es un primo de la forma 4n + 3 que aún no está en nuestra lista de tales primos. Debe ser el caso, entonces, que la lista de tales números primos continúa para siempre.

De manera similar (aunque es un poco más compli cated) también se puede probar:

> Hay infinitos números primos de la forma 6n+5.

(Use N = 2 × 3 × 5 ×…× p – 1.) PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–59) generalizó estos resultados para probar que si a y b son dos números enteros RELATIVAMENTE PRIMOS , entonces hay infinitos números primos de la forma an + b.

Véase también TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA.

Eudoxo de Cnido (ca. 408–355 a. C.) Geometría griega , teoría de números, astronomía Nacido en Cnido, en Asia Menor (ahora Turquía), Eudoxo es recordado como uno de los más grandes matemáticos de la antigüedad. Todo su trabajo original se ha perdido, pero se sabe por escritores posteriores que él fue el responsable del material presentado en el Libro V del famoso tratado de EUCLID LOS ELEMENTOS. En su teoría de las proporciones, Eudoxo desarrolló una teoría coherente de los NÚMEROS REALES con absoluto rigor y precisión. La importancia total de este sofisticado trabajo salió a la luz unos dos milenios después, cuando los eruditos del siglo XIX intentaron resolver algunas dificultades fundamentales con la teoría del CÁLCULO. Descubrieron que Eudoxo ya había anticipado estos problemas fundamentales y había dado pasos significativos para resolverlos. También se recuerda a Eudoxo como el primero en desarrollar un "método de agotamiento" para calcular el ÁREA de figuras curvas.

Cuando era joven, Eudoxo viajó a Tarento, ahora en Italia, para estudiar teoría de números, geometría y astronomía con ARQUITAS DE TARENTO, seguidor de PITÁGORAS. Ambos hombres trabajaron para resolver el famoso problema de DUPLICAR EL CUBO y, de hecho, Eudoxo ideó su propia solución geométrica para el desafío usando líneas curvas especiales como ayuda.

(Aunque el problema requiere el uso de nada más que un compás y una regla, esta solución parcial fue, sin embargo, un logro significativo).

Eudoxo estudió la teoría de las proporciones. Esta combinación de GEOMETRÍA y TEORÍA DE NÚMEROS llama a dos longitudes a y b CONMENSURABLES si cada una de ellas es un múltiplo de un número entero de alguna longitud t más pequeña: a = mt y b = nt. En este enfoque, se dice que dos razones a : b y c : d son iguales si son los mismos múltiplos de algunas longitudes fundamentales t y s: a = mt, b = nt y c = ms, d = ns.

Durante mucho tiempo se creyó que todas las longitudes eran conmensurables y, por lo tanto, todas las proporciones podían compararse. En consecuencia, el descubrimiento pitagórico de dos longitudes inconmensurables, a saber, 1 y $\sqrt{2}$, la longitud del lado y la diagonal de un cuadrado unitario, provocó una crisis en la comunidad matemática. Como descubrió HIPASO DE METAPONTO (ca. 470 a. C.) , no existe un valor pequeño de t tal que 1 = mt y $\sqrt{2}$ = nt. (Esto es equivalente a la afirmación de que el número $\sqrt{2}$ se escribe no puede como una fracción n/m.)

Eudoxo vino a resolver la crisis de comparar razones, incluso si no son conmensurables, evitando todo uso de una longitud común t. Definió las razones a : b y c : d como iguales si, para cada posible par de enteros n y m:

i. ma < nb si mc < nd ii. ma = nb si mc = nd iii. ma > nb si mc > nd

Con esta formulación, Eudoxo pudo comparar líneas de cualquier longitud, ya sea racional o irracional, y obviar todas las dificultades filosóficas asociadas con cantidades inconmensurables. El matemático JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916) basó su

Machine Translated by Google

teoría de DEDEKIND CUTs sobre este enfoque desarrollado por Eudoxus.

En geometría, Eudoxo fue el primero en establecer que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro que lo rodea, y también que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma de la misma base y altura. . ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) hizo uso de estos resultados en su famoso tratado Sobre la esfera y el cilindro, citando a Eudoxo como la persona que los probó por primera vez.

Eudoxo mantuvo un interés activo por la astronomía durante toda su vida. Construyó un observatorio en la ciudad de Cnidus y tomó nota cuidadosa del movimiento de los planetas y las estrellas en los cielos nocturnos. Fuera de las matemáticas, Eudoxus es mejor conocido por su ingeniosa teoría del movimiento planetario basada en un sistema de 27 esferas anidadas. Usando técnicas avanzadas en geometría tridimensional, Eudoxus pudo usar este modelo para explicar el desconcertante movimiento retrógrado de los cuerpos celestes.



Leonhard Euler, el más prolífico de los matemáticos famosos, hizo contribuciones significativas a casi todos los campos de las matemáticas puras y aplicadas estudiadas en su época, al tiempo que estableció nuevos cursos de investigación. Gran parte de la notación matemática utilizada hoy en día fue introducida o estándar por Euler. (Foto cortesía de Topham/The Image Works)

Euler, Leonhard (1707–1783) Suiza Análisis, Geometría, Teoría de números, Teoría de grafos, Mecánica, Física

Nacido el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, el genio Leonhard Euler fue, sin comparación, el matemático más prolífico de todos tiempo. Con más de 850 libros y artículos a su nombre, Euler hizo contribuciones fundamentales a prácticamente todas las ramas de las matemáticas de su época. Formalizó la noción de FUNCIÓN (e introdujo la notación f(x) para ella) y, por lo tanto, cambió el enfoque de las matemáticas de un estudio de curvas y líneas fijas a un estudio más poderoso de transformación y cambio. (Él fue el primero, por ejemplo, en considerar las funciones especiales de TRIGONOMETRÍA como funciones.) Euler publicó trabajos sobre ANÁLISIS, DIFERENCIA CÁLCULO ENTIAL, CÁLCULO INTEGRAL, DIFERENCIAL ECUACIONES, TEORÍA DE NÚMEROS, GEOMETRÍA, LÓGICA, COM BINATÓRICA, aproximaciones para π, movimiento planetario y astronomía, navegación, cartografía, mecánica y más. Introdujo y popularizó muchos de los símbolos estándar que usamos hoy en día (como i para $\sqrt{-1}$, π para PI, E para su famoso número y Σ para SUMA).

Sencillamente, no es posible en un artículo breve dar la debida justicia a la fenomenal cantidad de contribuciones que Euler hizo al estudio de las matemáticas.

Euler obtuvo una maestría en filosofía de la Universidad de Basilea en 1723, luego de la camino que su padre le indicó para estudiar teología. Los intereses de Euler, sin embargo, estaban en las matemáticas, y Euler permaneció en la universidad otros tres años para seguir un curso de estudio en la materia. En 1727 presentó una candidatura al Gran Premio de la Academia de Ciencias de París sobre la mejor disposición de los mástiles de un barco. Euler ganó el segundo premio, lo que atrajo la atención de la comunidad científica como un joven egresado sobresaliente. Euler aceptó un puesto en la Academia de Ciencias de San Petersburgo ese año y fue ascendido a profesor titular de la academia solo tres años después.

En 1736, Euler publicó Mechanica (Mecánica), una pieza histórica que introdujo técnicas matemáticas rigurosas como un medio para estudiar el tema. Ganó el Gran Premio de la Academia de París en 1738, y nuevamente en 1740, y en ese momento era un erudito muy respetado. Por invitación de Federico el Grande, Euler

Machine Translated by Google

se unió a la Academia de Ciencias de Berlín en 1741. Él Permaneció allí durante 25 años, asumiendo la dirección de la academia en 1759.

Durante su estancia en Berlín, Euler escribió más de 350 artículos y varios libros influyentes sobre una amplia variedad de temas tanto en matemáticas puras como aplicadas. En En 1753 inventó la rueda de paletas y la hélice de tornillo como medios para propulsar barcos sin viento. En 1761 desarrolló un método de utilizar observaciones datos sobre el planeta Venus para determinar la distancia de la Tierra desde el Sol, y también para hacer mediciones de longitud en la superficie de la Tierra.

En 1766 Euler regresó a San Petersburgo, pero pronto después enfermó y perdió la vista. A pesar de ser ciego, Euler continuó produciendo piezas significativas de trabajar. (Publicó aproximadamente 500 libros y papeles mientras estaba ciego.) Euler tambin trabaj para popularizar el método científico y escribió, entre los años 1768 y 1772, su famosa pieza en tres volúmenes Cartas a un Princesa alemana sobre el tema de la divulgación científica. Euler permaneció en San Petersburgo hasta su muerte en 1783.

El nombre de Euler se adjunta al menos a un concepto fundamental en casi todas las ramas de las matemáticas. Para ejemplo, el TEOREMA DE EULER es un resultado clave en GRAPH TEORÍA, relacionando el número de vértices y aristas de un gráfico al número de regiones que produce. El número e juega un papel fundamental en la teoría del cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales, teoría de la PROBABILIDAD , ESTADÍSTICA, la teoría de los SUBFACTORIALES y los desarreglos, el estudio del INTERÉS COMPUESTO y el estudio de NÚMEROS COMPLEJOS a través de EULER FÓRMULA, por ejemplo. En teoría de números, EULER'S CONSTANT juega un papel clave en el estudio de la SERIE HAR MONIC, por ejemplo. Euler encontró una fórmula para la “función totient de Euler” que proporciona, para un número n, el conteo de números menores que n que son RELATIVAMENTE PRIMOS a n y mostró su importancia en el teoría de la ARITMÉTICA MODULAR. El nombre de Euler está íntimamente asociado con el estudio de la ZETA. FUNCIÓN, con la función gamma en el examen de la función FACTORIAL , con el estudio de CUADRADOS LATINOS, y con la construcción de NÚMEROS PERFECTOS pares. (Nadie hasta el día de hoy sabe si o no existen ejemplos de números perfectos impares).

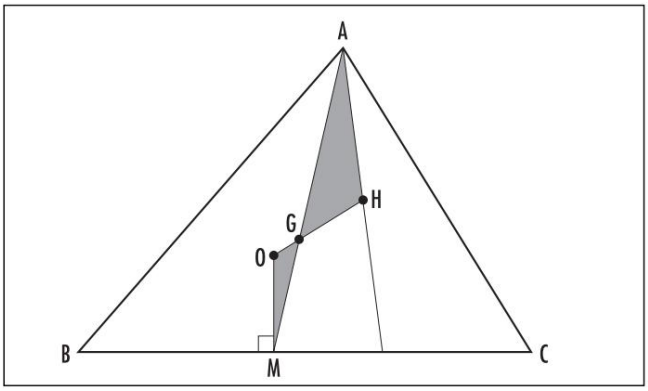
Menos conocido es el polinomio de Euler, $n^2 - n + 41$, que produce una salida PRIME para cada entrada entera desde –39 hasta 40. El bloque rectangular de 40 × 117 × 240, llamado “ladrillo de Euler”, tiene la propiedad de que cualquier diagonal dibujada en la cara de este sólido también tiene longitud entera. Euler demostró que hay infinitamente muchos de estos bloques con longitudes laterales enteras y enteros cara diagonales. (Nadie hasta el día de hoy sabe si o no existe un ladrillo de Euler con diagonales de espacio interno también de longitud entera.)

Euler murió en San Petersburgo, Rusia, en septiembre 18, 1783. No es una exageración decir que Euler ofreció conocimientos profundos sobre prácticamente todas las ramas de matemáticas y física matemática que estudió en su tiempo y, además, allanó el camino para muchos nuevos ramas de la investigación matemática. En 1915 Euler Comité de la Academia Suiza de Ciencias comenzó a cotejar y publicar sus obras completas. Dividido en cuatro series: matemáticas, mecánica y astronomía, óptica y sonido, y cartas y cuadernos: hasta ahora se han publicado 76 volúmenes de trabajo (que abarcan aproximadamente 25.000 páginas de material escrito), y el comité proyecta otros ocho volúmenes de material aún por publicar.

Camino/circuito euleriano Ver TEORÍA DE GRAFOS.

Recta de Euler Para cualquier triángulo se cumple lo siguiente:

1. Las tres MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO se encuentran en un punto G, el baricentro del triángulo.
2. Las tres ALTITUDES de un triángulo se encuentran en un punto H, el ortocentro del triángulo.
3. Las mediatrices de cada lado de un triángulo concurren en un punto O, el circuncentro del triángulo.



La línea de Euler

Machine Translated by Google

Estas afirmaciones se prueban a través de un estudio de los la mediana de un triángulo, la altura de un triángulo y la consideración de puntos EQUIDISTANTES , respectivamente.

A mediados del siglo XVIII LEONHARD EULER (1707–83) hizo el asombroso descubrimiento de que además, por cualquier triángulo, los tres puntos G, H y O son COLLINEAR, es decir, yacen en línea recta. esta línea es llamada línea de Euler del triángulo.

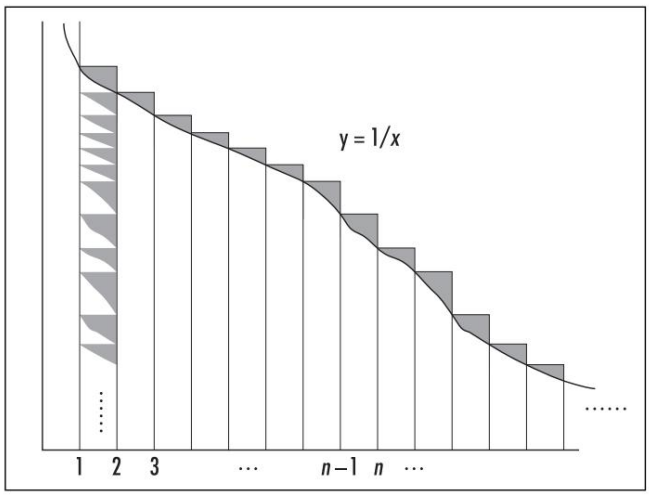
Euler probó esta observación de la siguiente manera: Si, por casualidad, los puntos O y G coinciden, entonces cada mediana del triángulo es también una altitud. Esto significa que el triángulo es simétrico con respecto a cada mediana, por lo que debe ser equilátero. En consecuencia, el punto H ocurre en el misma ubicación que O y G, y los tres puntos, trivialmente, se encuentran en una línea recta. Si, como es más probable, O y G no coinciden, luego traza una línea a través ellos y considerar un punto J en esta línea que está situado de modo que la longitud del segmento GJ es el doble de la de OG. Sea M el punto medio de la base del triángulo.

A partir del estudio de las medianas de un triángulo, sabemos que la longitud del segmento AG a la de GM en el diagrama anterior está en una proporción de 2 a 1. En consecuencia, los dos los triángulos sombreados son semejantes y, en particular, los ángulos Partido AJG y GOM . Por el contrario del PARALELO POSTULADO, las líneas OM y AJ son paralelas. Desde OM forma un ángulo de 90° con la base del triángulo, así también debe línea AJ, haciendo de esta línea una altura para el triángulo.

Nada en este argumento hasta ahora se ha basado en siendo el vértice A el objeto de foco. el mismo razonamiento muestra que la altura desde el vértice B también pasa a través del punto J, al igual que la altura desde el vértice C. Esto muestra que el punto J es de hecho el ortocentro H del triangulo En consecuencia, O, G y H ciertamente todos se encuentran en la misma línea recta.

Constante de Euler Al dibujar rectángulos de ancho 1 que solo cubren la curva y = 1/x, uno ve que el El "área en exceso" sobre la curva se ajusta dentro del primer ángulo recto de altura 1, por lo que suma un valor finito no mayor que 1. La cantidad de exceso de área, indicada como γ, es llamada constante de Euler. Con ocho decimales, tiene valor 0.57721566. Nadie sabe si γ es un número racional o irracional.

Como el área bajo la curva de x = 1 a x = n es $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n$, tenemos que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$ es aproximadamente igual a ln(n). Más precisamente, la suma de las áreas de los primeros n rectángulos viene dada por:



Entendiendo la constante de Euler

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \text{error}$$

donde el “error” es el término menos todo el “exceso áreas” por encima de la curva desde la posición n en adelante. Aviso que todas estas áreas en exceso caben dentro del rectángulo de altura $\frac{1}{n}$, por lo que este error no es mayor que $\frac{1}{n}$. En particular, es despreciablemente pequeño si n es grande.

Véase también SERIE ARMÓNICA.

La fórmula de Euler En 1748 LEONHARD EULER anotó que la SERIE TAYLOR para las funciones e^x, sen x, y cos x están íntimamente conectados. Desde

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\text{pecado } x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\text{porque } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

estableciendo x = iθ, donde i es la raíz cuadrada de –1 y θ es un número real (generalmente considerado como un ángulo), produce:

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

Machine Translated by Google

$$1 \quad ii\,yo = + \frac{\theta\theta\,\theta^{2}\theta^{3}\theta^{4}\theta^{5}}{1\,2\,3!\,4\,5} + \frac{}{} + \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{}$$

$$= - \quad 1 \quad \frac{+\theta^{2}\theta^{4}\theta}{2\,4\,13\,5\,!\,!\,!!\,!} \quad i\,\frac{}{} + \frac{\theta\theta\,\theta}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{}^{35}$$

$$= (\quad)^{\text{porque}}\theta + (\quad)\,i^{\text{pecado}}\theta$$

la fórmula $e^{yo} = \cos\theta + i\sin\theta$ se conoce hoy como fórmula de Euler. Tiene algunas consecuencias interesantes:

Haciendo $\theta = \pi$, obtenemos: $e^{yo} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + yo \cdot 0 = -1$. Los matemáticos a menudo consideran esto como uno de los hechos más bellos de las matemáticas: es una ecuación notablemente simple que conecta los misteriosos y omnipresentes números e, π, i y –1.

Ajuste $\theta = \frac{\pi}{2}$ rendimientos $mi^{i\frac{\pi}{2}} = i$, lo que demuestra que $i^{i} = \left(mi^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{i} = mi^{-\frac{\pi}{2}}$ es decir, $e^{2\,22} = \frac{\pi\pi}{2}$. Levantando así un complejo número a una potencia compleja puede producir un real responder como resultado.

La fórmula de Euler proporciona un medio muy simple para derivar (y memorizar) ciertas identidades de TRIGONOMETRÍA. Por ejemplo, desde

$$mi^{iA} \cdot mi^{iB} = mi^{i(A+B)}$$

tenemos:

$$(\cos A + i\sin A) \cdot (\cos B + i\sin B) = \cos(A + B) + i\sin(A + B)$$

Expandiendo los paréntesis de la izquierda y recopilando términos que contienen i y los que no producen rápidamente:

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B$$
$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cdot \cos B + \cos A \cdot \operatorname{sen} B$$

De manera similar, las ecuaciones $(e^{iA})^{2} = mi^{yo(2A)}$, $(e^{iA})^{3} = mi^{yo(3A)}$, y así sucesivamente producen fórmulas de ángulo doble y ángulo triple, Por ejemplo.

La fórmula de Euler también se usa para representar complejos números. Por ejemplo, si z es un punto en el complejo plano a una distancia r del origen, formando un ángulo θ con el eje x, entonces sus coordenadas x e y pueden ser escrito:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta$$

y el número complejo es así:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = re^{i\theta}$$

Esto se llama la forma polar del número complejo. Si uno multiplica dos números complejos, $z = re^{i\theta}$ y $w = se^{i\tau}$, vemos que $z \cdot w = rse^{i(\theta+\tau)}$, eso es:

> El producto de dos números complejos es un nuevo número complejo cuya distancia al origen es el producto de las distancias al origen de los dos números originales, y cuya ángulo con el eje x es la suma de los dos ángulos formados por los dos números originales.

La fórmula de Euler hace que la derivación de este hecho sea rápida. y fácil.

Ver también NÚMEROS COMPLEJOS; DE MOIVRE PARA MULA; E FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

Teorema de Euler (fórmula de Euler, fórmula de Euler-Descartes) Un GRÁFICO es una colección de puntos, llamados vértices, conectados en pares por segmentos de línea, llamados bordes, subsecuentemente dividiendo el plano en un número finito de regiones. En 1752 LEONHARD EULER demostró que si un La gráfica dibujada en el plano tiene v vértices, e aristas y divide el plano en un total de r regiones (esto incluye la gran “región exterior”), entonces:

$$v - e + r = 1 + c$$

donde c es el número de "componentes conectados" de el gráfico, es decir, el número de piezas distintas de la que está compuesta. Por ejemplo, el gráfico que se muestra se compone de dos “piezas distintas” (c = 2) y tiene nueve vértices, 13 aristas, y divide el plano en siete regiones distintas, y de hecho v – e + r es igual a 3, uno más que c.

La fórmula se demuestra fácilmente a través de una INDUCCIÓN argumento sobre el número de aristas: si un gráfico no tiene aristas, entonces consta únicamente de v puntos desconectados. Por tanto, tiene c = v componentes y divide el plano en solo una región. La fórmula v – e + r = 1 + c se cumple verdadero. Se comprueba que sumando una arista se divide una región en dos (aumentando así el valor de r por uno), crea una región adicional si ese borde es un bucle (nuevamente aumentando el valor de r en 1), o conecta dos componentes desconectados del gráfico (por lo tanto

Machine Translated by Google

disminuyendo el valor de c en 1). En todos los casos la fórmula v – e + r = 1 + c permanece balanceada.

La fórmula generalmente se aplica a un gráfico que es conexo, es decir, tiene solo un componente (c = 1). En este caso la fórmula dice:

$$v - e + r = 2$$

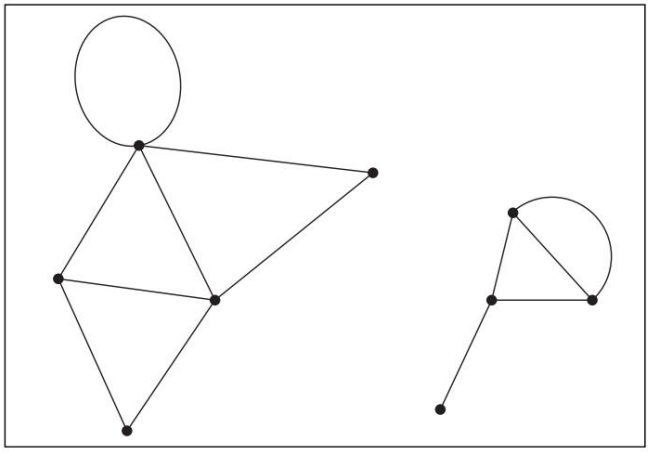
y esta versión de la ecuación suele llamarse teorema de Euler.

Los vértices, aristas y caras de un POLIEDRO se pueden considerar como un gráfico conexo. Por ejemplo, un cubo al que se le quita la cara superior y se coloca plano sobre un plano produce un gráfico con ocho vértices y 12 aristas que dividen el plano en seis regiones. (La gran región "exterior" corresponde a la cara superior del cubo que se eliminó). Todavía tenemos: v – e + r = 2. En general, para cualquier poliedro con vértices v , aristas e y caras f tenemos:

$$v - e + f = 2$$

Esto fue observado por primera vez por RENÉ DESCARTES en 1635. Euler no tenía conocimiento del trabajo de Descartes cuando desarrolló la fórmula en el marco más general de la teoría de grafos. Por ello, a esta famosa fórmula también se la denomina fórmula de Euler-Descartes.

Este resultado es válido solo para gráficos que se encuentran en el plano (o poliedros que se pueden empujar planos sobre un plano). Se puede demostrar que para gráficos conectados dibujados en un TORUS, por ejemplo, la fórmula debe ajustarse para leer: v – e + r = 0. Por ejemplo, si un poliedro contiene un agujero (digamos, un cubo con un agujero cuadrado perforado a través de él), uno tiene: v – e + f = 0. (Aquí hay una dificultad técnica: uno necesita estar seguro de que cada región o cara bajo consideración es no en sí mismo un ANULUS. Es posible que sea necesario dibujar bordes adicionales para dividir las regiones en una forma adecuada).



Un gráfico con dos componentes.

funciones pares e impares Se dice que una función y = f(x) es par si, para cada x, la función toma el mismo valor tanto en x como en –x, es decir, f(–x) = f(x) para todos los valores de x. Por consiguiente, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje vertical. Las funciones x^2, cos(x), y $\frac{x^2 - 3x - 5}{4 - 1}$, por ejemplo, son funciones pares.

Se dice que una función y = f(x) es impar si, para cada x, la función toma valores opuestos en x y –x, es decir, f(–x) = –f(x) para todo valores de x. En consecuencia, la gráfica de una función impar es simétrica con respecto a una rotación de 180° alrededor del origen. Las funciones x, x^3, sen(x), y $\frac{x^3 + x^5 - 17}{4 - x^2}$, por ejemplo, son raros funciones

Cualquier función g(x) se puede expresar como la suma de una función par y una impar. Dejar:

$$f_{\text{incluso}}(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2}$$

$$f_{\text{extraño}}(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2}$$

Entonces feven(x) es par, fodd(x) es impar y g(x) = feven(x) + fodd(x).

La SERIE DE FOURIER de cualquier función par contiene solo términos de coseno, y la serie de Fourier de cualquier función impar solo contiene términos de seno. El valor absoluto de cualquier función impar f(x) es una función par, es decir, si y = |f(x)|, entonces y es par.

Números pares e impares Trabajando únicamente en el ámbito de los números enteros, se dice que un número es par si es divisible por 2, e impar si deja un resto de 1 cuando se divide por 2. Por ejemplo, 18 es divisible por 2 y por lo que es par, y 23 deja un resto de 1 y por lo tanto es impar.

Hay una interpretación física de la paridad o imparidad de un número: digamos, un número par de guijarros representa una pila que se puede dividir en dos iguales.

Machine Translated by Google

partes: 18 guijarros divididos en dos montones de 9, por ejemplo. Un montón extraño de guijarros deja un guijarro extra cuando uno intenta lograr esta hazaña: 23 guijarros se dividen en dos montones de 11, y uno sobra. Esta interpretación muestra que el número cero es par: un montón vacío de guijarros se puede dividir en dos montones iguales de nada.

La combinación de varios montones de guijarros, cada uno de los cuales se puede dividir uniformemente, produce un montón grande que aún se puede separar. Esto demuestra que la suma de cualquier colección de números pares es par. La combinación de dos montones impares de guijarros produce un resultado parejo: los dos guijarros "errantes" se combinan para producir un resultado que se puede dividir en partes iguales. Sin embargo, la suma de tres números impares deja un solo guijarro errante, por lo que es impar. En resumen tenemos:

La suma de cualquier número de números pares incluso.
La suma de un número par de números impares incluso.
La suma de un número impar de números impares es impar.

Estas ideas simples son bastante poderosas. Por ejemplo, podemos determinar rápidamente que:

La suma de los números del 1 al 100 será par.

(Esta suma contiene 50 números pares y 50 números impares).

Es imposible dar cambio por un dólar usando una combinación de 13 centavos, cinco centavos y cuartos.

(Trece monedas de denominación impar sumarán una cantidad impar. Entonces es imposible llegar a una suma de 100).

Si se arrancan 15 hojas arbitrarias de un libro de texto, entonces la suma de los números de página que faltan es necesariamente impar.

(Cada hoja contiene un número de página impar en un lado y un número de página par en el otro. La suma de 15 números impares y 15 números pares es necesariamente impar).

Se colocan diecisiete tazas boca abajo sobre una mesa. Dando la vuelta a cuatro tazas a la vez, es imposible llegar a un estado en el que todas las tazas estén en posición vertical.

(Para quedar en posición vertical, cada vaso debe girarse un número impar de veces en el proceso del juego. Por lo tanto, debe ocurrir un número impar de inversiones en total, siendo una suma de 17 números impares. Pero nunca ocurrirá un total impar. al voltear un número par de tazas a la vez.)

Véase también PARIDAD.

evento Cualquier subconjunto del ESPACIO DE MUESTRA de todos los resultados posibles de un experimento se denomina evento. Por ejemplo, el acto de lanzar un dado tiene un espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6} (los seis puntajes posibles) y el evento "el puntaje es par" es el subconjunto {2, 4, 6 }. Un evento podría ser un único resultado ("sacar un dos", por ejemplo, es el subconjunto {2}), el espacio muestral completo ("sacar un número menor que 10") o el conjunto vacío ("sacar un múltiplo de Siete").

La probabilidad de que ocurra un evento E es la relación entre el número de resultados de ese evento y el número total de resultados posibles. Esta relación se denota 1– P(E). Por ejemplo, al lanzar un dado, P(par) = = 2 $\frac{3}{6}$, P({5,6}) = 6 $\frac{2}{}$ = $\frac{1}{3}$, 0– y P(múltiplo de 7) = = 0. 6 LA

TEORÍA DE CONJUNTOS es útil para analizar las posibilidades de que ocurran combinaciones de eventos. Si A y B representan dos eventos para un experimento, entonces:

La intersección A ∩ B representa el evento "tanto A como B ocurren".
La unión A B representa el evento "ya sea Ocurre A o B ".
El complemento A′ representa el evento "A no ocurre".

Para ilustrar: si, al lanzar un dado, A es el evento {2, 4, 6} y B el evento {5,6}, entonces A ∩ B = {6}, A B = {2, 4, 5 , 6} y A′ = {1, 3, 5}.

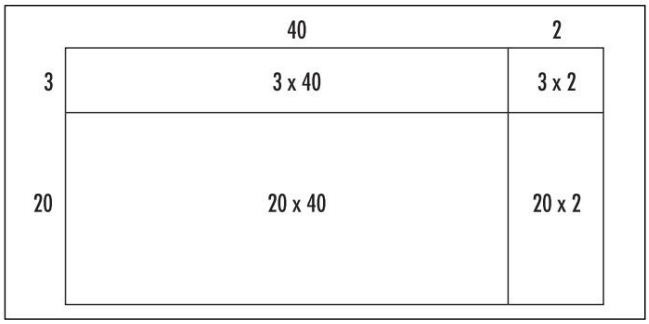
Las siguientes leyes de probabilidad se cumplen para dos eventos A y B:

i. P(A ∩ B) = P(A) + P(B) – P(A B). ii. Cuando A y B son eventos disjuntos, es decir, no tienen resultados en común, entonces P(A B) = P(A) + P(B). iii. P(A′) = 1 – P(A). IV. Cuando A y B son EVENTOS INDEPENDIENTES, P(A ∩ B) = P(A) × P(B).

El estudio de la PROBABILIDAD explica estas reglas.

Véase también CONDICIONAL; MUTUAMENTE EXCLUYENTES EVENTOS; IMPARES.

Machine Translated by Google



Calcular el producto de 23 y 42

paréntesis expansivos La figura geométrica de un rectángulo explica el proceso de expansión de los paréntesis. Tomemos, por ejemplo, un rectángulo de 23 por 42. Su ÁREA está dada por el producto 23 × 42. Este producto se puede calcular fácilmente pensando en 23 como 20 + 3 y 42 como 40 + 2. Esto corresponde a subdividir el rectángulo en cuatro partes:

Así tenemos (20 + 3) × (40 + 2) = 20 × 40 + 20 × 2 + 3 × 40 + 3 × 2, que es igual a 800 + 40 + 120 + 6, o 966, que es de hecho 23 × 42.

Tenga en cuenta que cada uno de los cuatro términos de la suma es el producto de un número en el primer conjunto de paréntesis (20 o 3) y un número en el segundo conjunto (40 y 2), con todos los posibles pares de números que aparecen. Este principio se cumple en general. Por ejemplo, la cantidad (x + y)(a + b + c) es igual a la suma de seis productos: xa + xb + xc + ya + yb + yc (esto corresponde a dividir un rectángulo en seis partes), y (r + s + t + u + v)(k + l + m + n + o + p + q) es la suma de 35 productos individuales.

Este principio se extiende a cualquier número de conjuntos de paréntesis. Por ejemplo:

$$(2 + 3) \times (4 + 5) \times (6 + 7) = 2 \times 4 \times 6 + 2 \times 4 \times 7 + 2 \times 5 \times 6 + 2 \times 5 \times 7 + 3 \times 4 \times 6 + 3 \times 4 \times 7 + 3 \times 5 \times 6 + 3 \times 5 \times 7$$

(Nuevamente, seleccione un término de cada conjunto de paréntesis, asegurándose de incluir todas las combinaciones posibles). Esto corresponde a subdividir un cubo en ocho partes.

También se aplica a los productos que contienen términos únicos junto con conjuntos de paréntesis. Por ejemplo, tenemos: (a + b) × x × (c + d) = a × x × c + a × x × d + b × x × c + b × x × d.

Muchas escuelas enseñan recursos mnemotécnicos para expandir correctamente los paréntesis. Estos pueden ser más complicado que simplemente entender el proceso simple a la mano.

Véase también PROPIEDAD DISTRIBUTIVA; ANIDADO MULTIPLICACIÓN.

valor esperado (expectativa, media) El valor esperado de un juego de azar que involucra apuestas monetarias es la ganancia (o pérdida) promedio o MEDIA por juego que esperaría si el juego se jugara una gran cantidad de veces. El valor esperado ilustra hasta qué punto un juego está a su favor o en su contra. Para demostrarlo: imagina que tienes la oportunidad de jugar el siguiente juego de dados:

> Lanzas un solo dado y miras el puntaje emitido.
> Si sale un 1 ganas $10 y si sale un 2 ganas $5. Si se lanza cualquier otro número, paga una tarifa de $ 3 por jugar el juego.

¿Vale la pena jugar este juego?

Con 600 jugadas de este juego, uno esperaría que cerca de una sexta parte de esas tiradas (alrededor de 100) arrojaran un 1 y, por lo tanto, una ganancia de $10, otra sexta parte de las tiradas (es decir, unas 100 tiradas) para producir un 2 y una ganancia de $5, y dos tercios de los rollos (alrededor de 400 de ellos) para dar como resultado una pérdida de $3 (es decir, una ganancia de -$3). El beneficio medio sobre 600 rollos sería así:

$$\frac{100\ 10\ 100\ 5\ 400\ 3) \times + \times + \times}{600} \quad \frac{1}{6} \quad = \times + \times + \times \quad 6.6 \quad (\quad 1\ 4\ 10\ 3)$$

$$= 0.50$$

es decir, una ganancia de 50 centavos por juego. Este valor esperado positivo muestra que realmente vale la pena jugar el juego. Tenga en cuenta, sin embargo, que aún podría perder dinero mientras juega. Lo que se ha demostrado aquí es que, a la larga, el juego está a tu favor.

Note la aparición de las fracciones 1/6, 1/6 y 4/6 en nuestro cálculo del valor esperado. Estas son las probabilidades de que cada resultado identificado ocurra realmente. Tales probabilidades siempre aparecen cuando se calcula el valor esperado. En general, si un experimento arroja valores numéricos x1 , x2 ,…,xn , siendo pi la probabilidad de que ocurra el resultado xi , entonces el valor esperado del experimento está dado por:

$$x1p1 + x2p2 + \ldots + xn\ pn$$

Machine Translated by Google

Por ejemplo, al lanzar un par de dados, la suma esperada es:

$$2\,\frac{1}{36} + 3\,\frac{2}{36} + 4\,\frac{3}{36} + 5\,\frac{4}{36} + 6\,\frac{5}{36} + 7\,\frac{6}{36} + 8\,\frac{5}{36} + 9\,\frac{4}{36} + 10\,\frac{3}{36} + 11\,\frac{2}{36} + 12\,\frac{1}{36}$$

(Las sumas posibles son los números del 2 al 12, con la probabilidad de sacar 2 siendo 1/36, 3 siendo 2/36, y así sucesivamente).

El valor esperado generalmente se indica con la letra μ del ALFABETO GRIEGO. Si un experimento tiene un número infinito de resultados posibles, entonces el valor esperado viene dado por una suma infinita (SERIE). La DISTRIBUCIÓN BINOMIAL es un ejemplo de esto. Si el fenómeno aleatorio puede producir una matriz continua de valores (por ejemplo, la altura de un individuo puede ser cualquier valor, incluidos los fraccionarios), entonces el valor esperado viene dado por un INTEGRAL :

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx$$

Aquí p(x) es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria bajo consideración para el DISTRIBUCIÓN.

La noción de valor esperado fue desarrollada por primera vez por el científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695) en su tratado Sobre el razonamiento en un juego de dados.

Ver también HISTORIAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo).

exponente (índice) Para un número real b y un número entero positivo m, la abreviatura b m se usa para la multiplicación repetida de b consigo mismo m veces: b m = b × b ×…× b (m veces). Así, por ejemplo, 25 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32, (–1)3 = (–1) × (–1) × (–1) = –1, $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, y 101 = 10. En la expresión b m, m se llama el exponente, o el índice, y b se llama la base del exponente. También llamamos b m de b. un poder

El producto de dos expresiones b m y b n con la misma base b es en sí mismo una multiplicación repetida del número b. Precisamente:

$$b^m \times b^n = \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{m \text{ veces}} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{\text{millones de veces}} = b^{m+n}$$

Esto establece la regla de multiplicación para exponentes:

> Para multiplicar dos expresiones con la misma base, conserva la base común y suma los exponentes: $b^m \times b^n = b^{m+n}$.

La regla de la potencia para exponentes, (b m) n = b mn, es la siguiente. (Hay que sumar m consigo mismo n veces.) La regla de la multiplicación se considera fundamental y nos permite definir cantidades exponenciales b m para valores de m que no sean números enteros. Seguimos el principio de que la regla de la multiplicación debe cumplirse siempre.

Considere, por ejemplo, la expresión 20 . Esta cantidad no tiene significado cuando se interpreta como “la multiplicación de dos por cero”. Sin embargo, se puede asignar un valor significativo a esta expresión multiplicándola por otra potencia de dos. Por ejemplo, según la regla de la multiplicación, debe darse el caso de que 20 × 2 5 = 20+5 = 25 . Esto dice que 20 × 32 = 32, lo que nos dice que 20 debe ser igual a uno. La regla de la multiplicación conduce así a la regla:

> El exponente cero para cualquier base distinta de cero es igual a 1: b 0 = 1.

Para dar sentido a la cantidad 2–1, vuelve a invocar la regla de la multiplicación. Tenemos, por ejemplo, 2–1 × 2 3 2 – 1+3 = 22 . Esto dice: 2–1 × 8 = 4. Entonces debe ser el caso que 2–1 = 1/2. Cálculos similares muestran que 2–2 debe ser igual a 1/4 y que 2–3 debe ser igual a 1/8. En general, . Esto $2^{-m} = \frac{1}{2^m}$ funciona para cualquier base distinta de cero b.

> Un exponente negativo indica que a recíproco 1– b debe tomarse: $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$.

Podemos hacer uso de esta observación para calcular , $\frac{6^5}{4^5}$

Por ejemplo. Reescribiendo, tenemos $\frac{6^5}{4^5} = \frac{6\times6\times6\times6\times6}{4\times4\times4\times4\times4} = \left(\frac{6}{4}\right)^5$

$= 5.0625 = 64$.

> Para dividir dos expresiones con la misma base, conserva la base común y resta los exponentes:
>
> $\frac{b^{\text{metro}}}{b^{\text{segundo}}} = b^{\text{Nuevo Méjico}}$

Machine Translated by Google

La regla de la multiplicación también nos permite dar sentido a exponentes fraccionarios. Considere la cantidad $2^{\frac{1}{2}}$. Debería en el caso de que $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1} = 2$. Por lo tanto, $2^{\frac{1}{2}}$ es un valor que, cuando se multiplica por sí mismo, es igual a 2. En consecuencia $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. De manera similar, $2^{\frac{1}{3}}$ es un valor que, cuando se multiplica por sí mismo tres veces, es igual a 2, por lo que $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$, el cubo raíz de 2. En general, $2^{\frac{1}{n}}$ es igual a la raíz enésima de 2. Esto funciona para cualquier base distinta de cero.

Un exponente fraccionario indica que se va a sacar una raíz: $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

Usamos la regla de la potencia para dar sentido a otros tipos de exponentes fraccionarios. Por ejemplo, la cantidad $27^{\frac{2}{3}}$ se puede calcular como $27^{\frac{1}{3} \times 2} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$. En general, tenemos:

$$b^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{1}{q} \times p} = \left(\sqrt[q]{b}\right)^p$$

Finalmente, para calcular una cantidad elevada a un irracional potencia, uno aproxima el exponente por una fracción, calcula la expresión exponencial correspondiente, y toma el LÍMITE como uno usa cada vez mejor aproximaciones. Por ejemplo, escribir $\sqrt{2} = 1.414\ldots$, vemos que cualquiera de las fracciones $\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \ldots$ poder usarse para aproximar $\sqrt{2}$ con mejores y mejores grados de precisión Definimos $2^{\sqrt{2}}$ siendo el límite de los valores: $2^1 = 2, 2^{\frac{14}{10}} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^{14} \approx 2.639$, $2^{\frac{141}{100}} = \left(\sqrt[100]{2}\right)^{141} \approx 2.657$, $2^{\frac{1414}{1000}} \approx 2.665$, ….

Las reglas de multiplicación y potencia son válidas incluso para exponentes irracionales. Por ejemplo, tenemos:

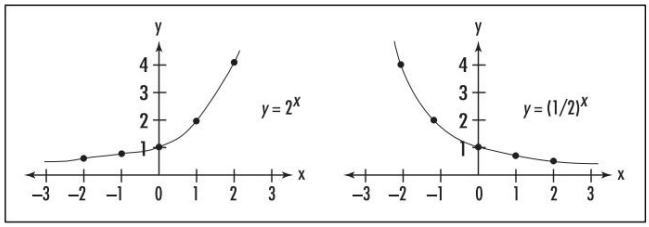
$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}} = \sqrt{2^2} =$$

El matemático griego ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287-212 a. C.) fue uno de los primeros eruditos en usa una palabra especial para la potencia de un número. Él llamó a la cantidad 10,000, 10^4, una miríada, y usó la frase "miríada de miríadas" para 10,000 al cuadrado, $10^4 \times 10^4 = 10^8$. Los antiguos griegos, para quienes las matemáticas eran sinónimo de geometría, llamaron cuadrado de una cantidad no especificada un número de tetrágono, que significa un "número de cuatro esquinas". Diofanto de ALEJANDRÍA (ca. 200–284 EC) usó la palabra griega dynamis, que significa "poder", para el cuadrado de un desconocido, y llamó a un tercer poder un "cubo", un cuarto poder un "poder-poder", y quinto y sexto poderes "power-cube" y "cubo-cubo", respectivamente.

Se necesitaron muchos siglos para que los eruditos comenzaran a usar símbolos para indicar cantidades desconocidas. Alemán el matemático Michael Stifel (ca. 1487-1567) fue el primero en desarrollar un sistema notacional para potencias de una cantidad no especificada x. Denotó el cuarto potencia de x simplemente como xxxx. Otros estudiosos desarrollaron sistemas de notación alternativos. Los eruditos eventualmente se asentó en el sistema de notación matemático y filósofo francés RENÉ DESCARTES (1596–1650) introducido en 1637, el que usamos hoy. A pesar de Descartes consideró solo exponentes integrales positivos, más tarde ese siglo el matemático inglés SIR ISAAC NEWTON (1642–1727), inspirado en el trabajo de JOHN WALLIS (1616-1703), mostró que el mismo sistema de notación se puede extender para incluir exponentes negativos, fraccionarios e irracionales. LEON HARD EULER (1707-1783) permitió más tarde la posibilidad de exponentes complejos.

Ver también NÚMEROS COMPLEJOS; FUNCIÓN EXPONENCIAL CIÓN; LOGARITMO.

función exponencial Cualquier función o cantidad que varía según la potencia de otra cantidad se llama exponencial. Precisamente, si b es un número positivo diferente de uno, entonces la función $f(x) = b^x$ se llama función exponencial con base b. La función se define para todos los números reales x. (Este no sería el caso si b fueran negativos: el valor b por ejemplo, $b^{\frac{1}{2}}$, sería no tiene sentido.) Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Funciones exponenciales

Machine Translated by Google

ilustrar las diferencias esenciales entre los casos b > 1 y 0 < b < 1.

Muchos tipos de crecimiento y decaimiento ocurren a un ritmo que implica una variación exponencial. Por ejemplo, una colonia de bacterias podría reproducirse a un ritmo que duplique el tamaño de la colonia cada 24 horas. Si inicialmente hay presentes 500 organismos, luego de 1 día el cultivo crece hasta un tamaño de 1000 organismos, después de 2 días hasta un tamaño de 2000 organismos y al final del tercer día hay 4000 organismos. En general, el tamaño de la población al final del día N viene dado por 500 × 2 N. Se dice que cualquier fórmula de la forma ABx con b > 1 y A constante representa un crecimiento exponencial. Esta fórmula es un ejemplo simple de un MODELO DE POBLACIÓN.

La fórmula análoga con 0 < b < 1 representa el decaimiento exponencial. La desintegración del material radiactivo es un ejemplo típico de esto. Por ejemplo, si el 50 por ciento de la radiactividad producida por una explosión nuclear desaparece después de 5 días, luego de 10 días solo queda el 25 por ciento de la radiactividad y el 12,5 por ciento permanece después de 15 días. El porcentaje de radiactividad presente después de N días viene dada por la $\frac{1}{2}^{5_{norte}}$. El nivel de fórmula la radiactividad disminuye pero nunca llega a cero.

La DERIVADA de una función exponencial f(x) = b x se puede calcular mediante DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA después de tomar primero un LOGARITMO. Precisamente, si y = b x entonces ln y = x · lnb. La diferenciación da como resultado $\frac{dy}{dx}$ = lnb, y así dy = y · lnb = b x · lnb. Es decir:

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

Esta fórmula de la derivada se simplifica mucho si se trabaja con base b = e, donde e se define como el número tal que ln e = 1. Tenemos:

La derivada de e x es e x. En consecuencia, la gráfica de la función exponencial f(x) = e x tiene la propiedad de que la pendiente de la gráfica en cualquier punto es igual al valor de la función en ese punto.

La función f(x) = e x a veces se denomina función exponencial. Debido a que la derivada de esta función es particularmente simple, no sorprende que el número e sea omnipresente en todos los estudios de CÁLCULO.

serie exponencial La SERIE DE TAYLOR de la función f(x) = e x, dada por $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, se llama serie exponencial. La PRUEBA DE LA RAZÓN del estudio de la SERIE CONVERGENTE muestra que esta serie converge para todos los valores de x. LEONHARD EULER (1707-1783) hizo uso de esta serie para probar su famosa fórmula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, hoy llamada FÓRMULA DE EULER .

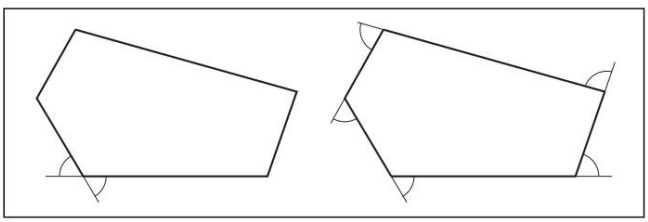
expresión Cualquier combinación significativa de símbolos que representan números, operaciones con números u otras entidades matemáticas se denomina expresión. Por ejemplo, 2 + x y a son expresiones. Se podría argumentar que $b \pm c$ x + y = 2 es una expresión, aunque los matemáticos prefieran llamarla ecuación. Similarmente, $\sqrt[3]{8}$ podría llamarse una expresión aunque sea equivalente a un solo número. En la LÓGICA FORMAL, los enunciados compuestos a veces se denominan expresiones. Por ejemplo, ¬(p (q r)) es una expresión.

La palabra express se usa a menudo en el sentido de "transformar". Por ejemplo, el producto (x – y)(x + y) se puede expresar de manera equivalente como la DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS $x^2 - y^2$.

ángulo exterior Un ÁNGULO contenido entre un lado de un POLÍGONO y la extensión de un lado adyacente se llama ángulo exterior del polígono. Dado que dos bordes de un polígono se encuentran en un vértice, hay dos ángulos exteriores en cada vértice. Sin embargo, uno puede ver fácilmente que estos dos ángulos tienen el mismo valor.

La suma de los ángulos exteriores en un polígono convexo es 360°, ya que estos ángulos corresponden a una vuelta completa. Este resultado también es cierto para los polígonos cóncavos si uno considera los ángulos que giran hacia la izquierda como positivos y los que giran hacia la derecha como negativos.

El TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERIOR , demostrado por primera vez por el geómetra EUCLID (ca. 300–260 a. C.), establece que



ángulos exteriores

Machine Translated by Google

el ángulo exterior en un vértice de un triángulo es mayor en valor que el ángulo interior en cualquiera de los dos vértices restantes.

Véase también CÓNCAVO/CONVEXO.

teorema del ángulo exterior En su famosa obra LOS ELEMENTOS, el geómetra EUCLIDES (ca. 300-260 a. C.) estableció el siguiente resultado, al que llamó teorema del ángulo exterior:

> Para un triángulo ABC dado con ángulos interiores x e y y ángulo exterior z como se muestra, tenemos z > x y z > y.

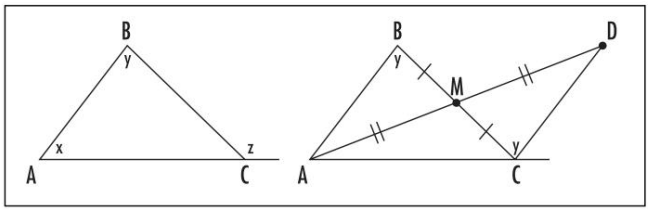
El resultado se prueba de la siguiente manera:

> Sea M el punto medio del lado BC, y extienda una línea desde el punto A a través de M hasta un nuevo punto D de modo que AM y DM tengan la misma longitud. Considere los triángulos AMB y DMC. Comparten dos lados de las mismas longitudes y un ángulo común en M. Según el principio de similitud de SAS, los dos triángulos son figuras congruentes. En consecuencia, el ángulo MCD coincide con el ángulo MBA, que es y. Como z es claramente mayor que el ángulo MCD, tenemos que z > y.
>
> Un argumento análogo basado en una línea que pasa por el punto medio del lado AC establece que z también es mayor que x.

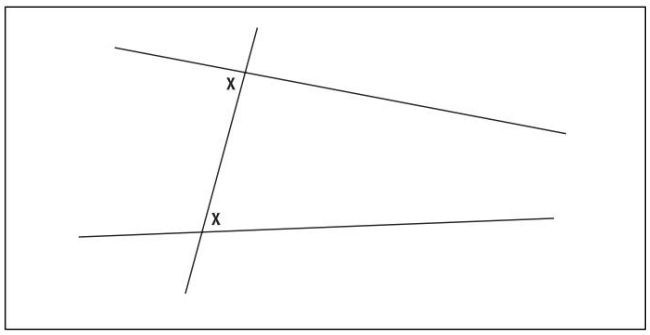
Este teorema tiene una consecuencia muy importante.

> Si dos rectas cortadas por una transversal producen ángulos interiores alternos iguales, entonces las dos rectas son paralelas.

En el diagrama de arriba, si los dos ángulos marcados con x son iguales, entonces las líneas no pueden unirse a la derecha para formar un triángulo: el ángulo exterior x no puede ser mayor



Entender el teorema del ángulo exterior



Ángulos interiores alternos iguales

que el ángulo interior x. De manera similar, las líneas no pueden unirse a la izquierda para formar un triángulo por la misma razón. (Trabaja con el ángulo 180 – x.) Debe darse entonces que las rectas sean paralelas.

Este resultado es el CONVERSO del famoso y controvertido POSTULADO PARALELO de Euclides.

Es importante señalar que Euclides demostró el teorema del ángulo exterior y su consecuencia sin asumir que se cumple el postulado de las paralelas. Si uno está dispuesto a suponer que los tres ángulos de un triángulo siempre suman 180° (un enunciado equivalente al postulado de las paralelas), entonces la prueba del teorema del ángulo exterior es TRIVIAL .

extracción El proceso de encontrar la RAÍZ de un número o la solución de una ecuación algebraica a veces se llama extracción. Por ejemplo, extraer la raíz cuadrada de 3 es el proceso de encontrar su raíz cuadrada. (Se podría usar el MÉTODO DE HERON , por ejemplo, para calcular $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$)

El término extracción de dígitos se usa a menudo para describir cualquier método que permita calcular un dígito específico de un número sin calcular los dígitos anteriores. Por ejemplo, en 1995, el matemático Simon Plouffe descubrió las siguientes fórmulas notables para π:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \cdot \frac{1}{16^n}$$

Ha llevado a los matemáticos a una técnica que calcula el N-ésimo dígito de π en base 16 sin tener que calcular los N – 1 dígitos anteriores. (En base 16, el número π aparece como 3.243F6A8885A308D… donde

Machine Translated by Google

A representa 10, B representa 11, y así sucesivamente, con F que representa 15. Cada lugar decimal es una potencia de un decimosexto.) Desafortunadamente no existe una tcnica anloga Actualmente se sabe que calcula la base 10 ordinaria de π con facilidad.

extrapolación El proceso de estimar el valor de una función fuera de un rango conocido de valores se llama extrapolación. Por ejemplo, si la temperatura de un taza de té estaba inicialmente a 200°F y luego se midió ser 100°F y 50°F 10 y 20 minutos más tarde, respectivamente, entonces uno podría suponer que su temperatura después de 30 minutos serían 25°F. Métodos de extrapolación son normalmente mucho menos fiables que la INTERPOLACIÓN, la proceso de estimación de valores de función entre conocidos valores. Los científicos generalmente prefieren evitar hacer predicciones basadas en la extrapolación. Los meteorólogos, sin embargo, deben usar técnicas de extrapolación para hacer predicciones meteorológicas Los pronósticos a largo plazo generalmente se consideran poco confiables.

Ver también MODELOS DE POBLACIÓN.

teorema del valor extremo Este teorema afirma que un FUNCIÓN CONTINUA f(x), definida en un circuito cerrado INTERVALO [a,b], alcanza un valor máximo y un valor mínimo en algún lugar dentro de ese intervalo. Eso es, hay un punto c en el intervalo [a,b] tal que f(x), ≤ f(c), para todo x en [a,b], y hay otro punto d en [a,b] tal que f(x) ≥ f(d) para todo x en [a,b]. Por ejemplo, el teorema del valor extremo nos dice que, en el intervalo [1,5] digamos, la función f(x) = 3x · cos(x 2 + senx) de hecho adopta un valor mayor. no nos dice, sin embargo, donde se produce ese valor máximo. un punto en que una función tiene un valor máximo o mínimo es llamado extremo.

El teorema es intuitivamente claro si pensamos en un función continua en un intervalo cerrado como aquella cuya gráfico consta de una sola pieza continua sin espacios, saltos o agujeros: al mover un lápiz desde la izquierda punto final (a,f(a)) al punto final derecho (b,f(b)), uno no dudaría que debe haber un punto alto en la curva donde f(x) alcanza su valor máximo, y un punto bajo donde alcanza su valor mínimo. Una prueba rigurosa del teorema, sin embargo, se basa en la noción de la completitud de los números reales (lo que significa que no faltan puntos en la línea real). Este es una propiedad sutil, que no se comprendió correctamente hasta finales de 1800 con la invención de un CORTE DE DEKIND. Por ejemplo, la función f(x) = 2x – 2x – = x(2 – x) no tiene valor máximo en el intervalo [0, 2] si el valor 1 se excluye de nuestras consideraciones. Aunque esto parece un ejemplo artificial, uno todavía necesita estar seguro de que este tipo de problema puede nunca ocurra.

Es vital que la función bajo consideración sea continuo y que el intervalo en estudio sea cerrado para que el teorema sea verdadero. Por ejemplo, la función (discontinua)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

no alcanza un valor máximo en el intervalo cerrado 1– [0,2]; tampoco la función (continua) f(x) = x , definida en el intervalo abierto (0,2), ya que la función es arbitrariamente grande para valores x cercanos a cero.

El TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO es un resultado complementario del teorema del valor extremo. Afirma que una función continua en un intervalo cerrado no solo alcanza valores máximos y mínimos, sino que también toma todos los valores entre esos dos extremos valores. EL TEOREMA DE ROLLE y el TEOREMA DEL VALOR MEDIO se derivan del teorema del valor extremo si además suponemos que la función bajo consideración es diferenciable

Véase también CÁLCULO DIFERENCIAL; MÁXIMO/ MÍNIMO.

Machine Translated by Google

F

cara Una superficie plana en el exterior de una figura sólida, generalmente un POLIEDRO, se denomina cara de la figura.
Por ejemplo, un cubo tiene seis caras idénticas y un cilindro tiene dos caras. (La superficie lateral de un cilindro no es plana.) A mediados del siglo XVIII, el matemático suizo LEON HARD EULER estableció que si todas las superficies exteriores de un sólido convexo son planas, entonces el número de caras que posee la figura está dado por el fórmula:

$$f = 2 - v + mi$$

Aquí v es el número de vértices y e es el número de aristas que tiene la figura.

El ángulo entre dos aristas de un poliedro que se encuentran en un vértice común a veces se denomina ángulo de cara.

En TEORÍA DE GRAFOS, cualquier región del plano delimitada por los bordes de un gráfico plano a veces se denomina cara del gráfico. LA FÓRMULA DE EULER v – e + f = 2 también es válida para gráficos planos conectados si uno está dispuesto a considerar la gran región ilimitada fuera del gráfico como una cara.

Véase también DIEDRO.

factor El término factor se usa en dos contextos matemáticos: TEORÍA DE NÚMEROS y ÁLGEBRA. En teoría de números, si a, b y n son números enteros y si a por b es igual a n, entonces a y b se llaman factores de n. Por ejemplo, 3 y 4 son factores de 12 (ya que 12 = 3 × 4), al igual que los números 1, 2, 6 y 12 (2 × 6 = 12 y 1 × 12 = 12). Cualquier número que divide el número dado por igual es un factor. Por esta razón, los factores a veces se llaman divisores.

Los factores de un número dado tienen una interpretación geométrica. Por ejemplo, uno puede colocar 12 guijarros en seis arreglos rectangulares diferentes: un rectángulo de 1 por 12, un rectángulo de 2 por 6, un rectángulo de 3 por 4, un rectángulo de 4 por 3, un rectángulo de 6 por 2 y finalmente un rectángulo de 12 por 2. 1 rectángulo. Las dimensiones de estos rectángulos son precisamente los factores de 12. Esta interpretación muestra que los factores de un número vienen en pares, a menos que uno de los rectángulos formados sea un cuadrado perfecto (en cuyo caso, un factor está "emparejado consigo mismo"). Esta espectáculos:

> Los números cuadrados tienen un número impar de factores. Todos los demás números tienen un número par de factores.

Por ejemplo, 36, que es igual a 6 × 6, tiene un número impar de factores: 1 y 36, 2 y 18, 3 y 12, 4 y 9 y 6. Esta simple observación resuelve el famoso rompecabezas del director de la prisión:

> El director de una prisión y 100 reclusos, que residen en celdas numeradas del 1 al 100, acuerdan realizar el siguiente experimento durante 100 días.
> En el proceso del experimento, algunas puertas de las celdas se dejarán abiertas y los prisioneros se comprometen a no escapar.
>
> El primer día, el director de la prisión girará la llave de cada puerta de la celda y dejará todas las puertas abiertas.
>
> El segundo día, el alcaide girará la llave de cada dos puertas. Esto bloqueará las puertas numeradas 2, 4, …, 100 y dejará abiertas las puertas impares.

Machine Translated by Google

Al tercer día, comenzando por la puerta número 3, girará la llave de cada tercera puerta. Esto dejará una mezcla de puertas bloqueadas y desbloqueadas.

El cuarto día girará la llave de cada cuarta puerta, el quinto día girará la llave de cada quinta puerta, y así sucesivamente, hasta el día 100, cuando girará la llave de cada 100 puertas, es decir, sólo la última puerta. En este momento, cualquier preso que encuentre su puerta abierta podrá salir libre.

¿Qué puertas quedarán abiertas como resultado de este experimento?

Observe que el alcaide girará la llave de la puerta número n cada día d que sea factor de n. Por ejemplo, la llave de la puerta número 39 se girará los días 1, 3, 13 y 39 únicamente, y la llave de la puerta número 25 los días 1, 5 y 25. Para dejar una puerta abierta en el final del experimento, su llave debe girarse un número impar de veces. Como solo los números cuadrados tienen un número impar de factores, tenemos que los presos 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100 quedan libres.

Cualquier número n siempre tiene al 1 ya sí mismo como factores. Estos se denominan “factores impropios”. Cualquier otro factor de n, si lo hay, se llama “factor propio”. Por ejemplo, 1 y 12 son factores impropios de 12 y 2, 3, 4 y 6 son factores propios. Un número, diferente de 1, que posee factores propios se llama “compuesto”, o NÚMERO COMPUESTO, y uno que no los tiene se llama PRIMO. Por ejemplo, el número 25 tiene un factor propio, a saber, 5, por lo que es compuesto; mientras que 7 tiene solo dos factores, ambos impropios, por lo que es primo.

Cualquier factor propio de un número compuesto, si no es primo, puede escribirse como un producto de dos factores más pequeños. La aplicación repetida de este proceso muestra que cualquier número diferente de 1, si aún no es primo, puede escribirse como un producto de números primos. Por ejemplo:

$$180 = 30 \times 6 = (6 \times 5) \times (2 \times 3) = 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3.$$

El TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA afirma que todo número entero mayor que 1 se factoriza en primos de una sola manera (hasta el orden de los primos). Un árbol de factores es un diagrama que describe gráficamente este proceso de factorización. Dos estudiantes que dibujen diferentes árboles de factores para el mismo número llegarán a la misma lista de números primos en las bases de sus árboles.

En álgebra, un factor es un POLINOMIO que divide exactamente a otro polinomio dado. Por ejemplo, $2x + 1$ y $x – 1$ son factores de $2x^2 – x – 1 = (2x + 1)(x – 1)$. En general, se acepta que los factores de un polinomio deben ser polinomios no constantes con coeficientes que sean números reales.

Un polinomio que no se puede factorizar se llama irreducible Por ejemplo, $x^2 + 1$ no se puede factorizar números reales y por lo tanto es irreducible. Si se permiten NÚMEROS COMPLEJOS como coeficientes, entonces la situación cambia: podemos escribir: $x^2 + 1 = (x + i)(x – i)$. La DIVERSIÓN TEOREMA DAMENTAL DEL ÁLGEBRA afirma que todo polinomio se factoriza en el reino de los números complejos.

Véase también FACTOR COMÚN; REGLAS DE DIVISIBILIDAD; TEOREMA DEL FACTOR; MÁXIMO COMÚN DIVISOR; LARGO DIVISIÓN; NÚMERO PERFECTO; PRINCIPAL.

factorial Si n es un número natural, entonces el símbolo n! (leído como “n factorial”) denota el producto de todos los números enteros positivos de 1 a n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Por ejemplo, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. El orden en que se multiplican los términos del producto es irrelevante. (¡Tenemos que 6! también es igual a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.)

Los factoriales surgen de forma natural al contar el número de formas en que se puede organizar una colección de objetos. Dados n objetos, hay n opciones para qué objeto deseamos considerar como "primero". Una vez realizada esta selección, quedan $n – 1$ opciones para qué objeto seleccionar como segundo, y después de elegir el primero y el segundo, quedan $n – 2$ opciones para el tercero. Este proceso continúa hasta que quedan dos objetos, lo que genera dos opciones para considerar penúltimo y solo un objeto para seleccionar como último. Por el PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN, hay así $n \cdot (n – 1) \cdot (n – 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ PERMUTA n diferente CIONES (o disposiciones, u órdenes) de n objetos.

Si uno desea organizar solo r objetos elegidos de una colección de n cosas diferentes, hay n opciones para qué objeto considerar como primero, $n – 1$ opciones para considerar como segundo, y así sucesivamente, hasta $n – r + 1$ opciones para qué objeto considerar rth, dando un total de $n \cdot (n – 1) \cdot \ldots \cdot (n – r + 1)$ arreglos diferentes de r objetos seleccionados de n. Esta fórmula se puede escribir de manera más compacta como:

$$\frac{n!}{(n – r)!}$$

Machine Translated by Google

Cuando r es igual a n (organizar todos los n objetos) esta fórmula lee $\frac{n!}{0!}$. Para coincidir con nuestro previamente calculado respuesta de n!, es natural definir 0! como igual a 1.

La notación de signos de exclamación para factorial fue utilizado por primera vez por Christian Kramp en 1808, en su artículo "Élémens d'arithmétique universelle", aunque otros notaciones para n! popular en ese momento, y más tarde, incluido n_|, n′, Π(n) y Γ(n+1).

LEONHARD EULER (1707-1783) intentó generalizar la función factorial a valores no enteros. En el edad de 22 años descubrió la siguiente cantidad LÍMITE que ayuda a lograr esto:

$$\Gamma(x) \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

(Llamó a esta expresión la función gamma para honrar el uso de ADRIEN-MARIE LEGENDRE del símbolo Γ para factorial.) Esta expresión tiene la propiedad, como puede comprobar que Γ(x + 1) = x · Γ(x) para todo $\Gamma(n) \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ valores reales positivos x. También En consecuencia, Γ(m) = (m – 1)! para todos los enteros positivos m. Así, por ejemplo, Γ(7) = 6! = 720. Ahora es posible también defina cantidades tales como $\frac{1}{2}!$ y $(\sqrt{2})!$ usando este expresión.

LA INTEGRACIÓN POR PARTES muestra que el IMPROPIO INTEGRALES $\int_0^\infty e^{-t} t^{m-1}\,dt$ también tiene valor (m – 1)!. matemáticas máticos han demostrado que la función gamma de Euler y la integral impropia correspondiente concuerda para todos los valores reales positivos x:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Esta integral tiene el valor inesperado $\sqrt{\pi}$ cuando $x = \frac{1}{2}$.

Así podemos concluir, por ejemplo, que $-\frac{1}{2}! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, y $\frac{1}{2}! \Gamma \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Véase también TEOREMA DEL BINOMIO; PERMUTACIÓN; FÓRMULA DE STIRLING .

factorización El proceso o el resultado de escribir un número o un POLINOMIO como producto de términos es llamado factorización. Por ejemplo, el FUNDAMENTAL El TEOREMA DE LA ARITMÉTICA afirma que todo número entero puede escribirse como un producto de números PRIMOS y, hasta el orden de los términos, esta factorización es única. (Por ejemplo, 132 = 2 × 2 × 3 × 11). Así, todo número tiene una "factorización prima" única. El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA afirma que, en el ámbito de los NÚMEROS COMPLEJOS, todos los factores polinómicos completamente en términos lineales. (Por ejemplo, $2x^3 - 13x - 6 = (x - 3)(x + 2)(2x + 1)$ y $x^2 - 4x + 5 = (x - 2 + i)(x - 2 - i)$.) Si uno desea permanecer en el reino de los NÚMEROS REALES, entonces todo polinomio con coeficientes reales está garantizado para factorizar en un producto de términos lineales y términos CUADRÁTICOS irreducibles . (Para instancia, $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$.)

Véase también DESCOMPOSICIÓN; TEOREMA DEL FACTOR.

teorema del factor El TEOREMA DEL RESTO muestra que si un POLINOMIO p(x) se divide por un término de la forma x – a para alguna constante a, entonces el resto término es la constante p(a):

$$p(x) = (x - a)Q(x) + p(a)$$

Así, si el valor del polinomio es cero en x = a, es decir, p(a) = 0, entonces el polinomio se factoriza como p(x) = (x – a)Q(x). Esto conduce al siguiente teorema del factor:

> Un término lineal x – a es un factor de un polinomio p(x) si, y sólo si, p(a) = 0.

Por ejemplo, para $p(x) = 2x^3 - 10x^2 + 4x + 12$, tenemos p(1) = 0, p(–2) = 0 y p(3) = 0. En consecuencia, x – 1, x + 2 yx – 3 son factores del polinomio. (En este ejemplo tenemos p(x) = 2(x – 1)(x + 2)(x – 3).) Como 2 y –2 son claramente ceros de $x^6 - 64$, esto el polinomio debe ser divisible por $(x – 2)(x + 2) = x^2 - 4$.

Véase también TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.

división justa (corte de torta) Un rompecabezas clásico pide una manera justa de dividir un pedazo de pastel entre dos codiciosos hermanos El esquema “tú cortas, yo elijo” pide uno hermano para cortar el pastel en lo que él cree que es dos partes iguales y hace que el segundo hermano elija una de las dos piezas. Entonces se garantiza que el primero recibir, en su medida, precisamente el 50 por ciento de la torta y el segundo hermano, si tuviere otra estimación

Machine Translated by Google

de la mitad, tiene la ventaja de recibir más de 50 por ciento de la rebanada según su propia medida. Uno puede evitar esta ventaja percibida con un diferente régimen de reparto. En el siguiente "cuchillo de sujeción" esquema, cada hermano tiene la garantía de sentir que tiene la ventaja:

> Cada hermano sostiene un cuchillo verticalmente a través del pastel en el lugar que él cree que corta el pastel precisamente a la mitad. (Si los hermanos tienen diferentes estimación de lo que constituye "la mitad", entonces el los cuchillos estarán en diferentes lugares.) Cortar el pastel en cualquier lugar entre estas dos posiciones garantiza a cada hermano una parte, a su juicio, superior al 50 por ciento.

Este esquema se generaliza para compartir entre cualquier número de jugadores. Por ejemplo, es posible compartir un pastel entre tres jugadores de tal manera que cada uno El jugador cree honestamente que está recibiendo más de un tercio del pastel.

> Cada jugador sostiene un cuchillo verticalmente a través del pastel en el lugar que él cree que se corta exactamente un tercio del pastel desde la izquierda. El pastel se corta luego entre los dos más a la izquierda. posiciones, dando esa pieza al jugador que sostiene el cuchillo más a la izquierda. este jugador tiene recibido, en su estimación, más de un tercio de la torta, y cada uno de los restantes dos jugadores cree que quedan más de dos tercios del pastel. Los segundos dos hermanos luego realizan el esquema de división del pastel. descrito anteriormente para dos jugadores.

Cualquier esquema de reparto de tortas entre n jugadores que garantice a cada jugador, en su estimación, al menos 1/n de la torta se llama un esquema de división justa.

El esquema descrito anteriormente entre tres jugadores, sin embargo, no está "libre de envidia". Aunque cada jugador cree que recibió más de lo que le correspondía en justicia pastel, no se asegura que él también crea que él recibió la pieza más grande jamás cortada. (Cada división justa esquema entre dos jugadores está libre de envidia.) Complicado existen esquemas de división justa sin envidia para compartir pastel entre cualquier número de jugadores. También hay métodos de división justa para dividir colecciones de indivisibles objetos (como los muebles de una finca) entre dos o más personas que usan pagos en efectivo para igualar el última división.

Secuencia de Farey (serie de Farey) Para un positivo dado número entero n, la secuencia de todas las fracciones propias, escrito en forma reducida, con denominadores no mayores que n y ordenado en orden de magnitud se llama enésima secuencia de Farey. Por ejemplo, el quinto Farey secuencia es:

$$0-\ 1-\ 1-\ 1-\ 2-\ 1-\ 3-\ 2-\ 3-\ 4-\ 1-$$
$$1\ ,\ 5\ ,\ 4\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 1$$

Estas secuencias tienen una serie de propiedades aritméticas. Por ejemplo, si $\frac{a}{b}$ y son $\frac{c}{d}$ términos consecutivos de una secuencia de Farey, luego los números ad y bc, surgiendo de tomar su producto cruzado, son siempre consecutivos números enteros (Por ejemplo, el par consecutivo y $2-$ $3-$ producir enteros consecutivos 9 y 10.) Además, si $\frac{3}{5}$ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ son tres términos sucesivos de una sucesión de Farey, entonces el termino medio $\frac{c}{d}$ es la fracción mediante $\frac{a+e}{b+f}$. (Para ejemplo, el término entre y es $3-$ $3-$ $\frac{3+3}{5+4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.)

Esta observación permite construir rápidamente a partir de una secuencia de Farey a la siguiente: simplemente calcule la mediantes entre todos los términos presentes y retener aquellos cuyos denominadores no son demasiado grandes.

La secuencia de Farey fue estudiada por primera vez por C. Haros en 1802, pero el interés en el tema no despertó hasta El geólogo británico John Farey (1766–1826) publicó su Pieza de 1816, “Sobre una propiedad curiosa de las fracciones vulgares” en Philosophical Magazine. (Farey no sabía del trabajo de Haros.) En 1938, el matemático estadounidense Lester R. Ford presentó una notable interpretación geométrica de la sucesión de Farey:

> Encima de cada fracción reducida en $\frac{a}{b}$ el número línea, dibujar un círculo de radio tocando el $1-$ recta numérica en ese punto. A pesar de la expectativa, estos círculos nunca se superponen, aunque sí tocar a menudo. Además, dos círculos en posiciones $\frac{a}{b}$ y toque $\frac{c}{d}$ con precisión cuando ad y bc están enteros consecutivos, y además el círculo más grande que cabe en el espacio entre encima de la recta numérica está el círculo en el mediante $\frac{a+c}{b+d}$.

Machine Translated by Google

(Estas afirmaciones pueden probarse haciendo uso de la FÓRMULA DE LA DISTANCIA para establecer que la distancia entre los centros de dos círculos que se tocan es igual a la suma de los radios de los dos círculos).

Fermat, Pierre de (1601–1665) Francés Teoría de los números, Cálculo, Teoría de la probabilidad Nacido el 17 de agosto de 1601, en Beaumont-de-Lomagne, Francia, Pierre de Fermat es recordado como un destacado matemático en el primera mitad del siglo XVII, reconocido por su fundación trabajar en la teoría de los números. Fermat también es responsable de algunos trabajos pioneros en CÁLCULO y la teoría de las tangentes a las curvas, la teoría de la PROBABILIDAD y GEOMETRÍA analítica . Su pieza de 1679 Isagoge ad locos planos et solidos (Sobre el plano y el lugar sólido), publicado póstumamente, presagia la obra de RENÉ DESCARTES (1596-1650) sobre la aplicación del álgebra a geometría, permitiéndole definir algebraicamente importantes curvas como la HIPERBOLA y la PARÁBOLA. En óptica, se le reconoce como el primer erudito en formular la "propiedad fundamental del tiempo mínimo", declarando que la luz siempre sigue los caminos más cortos. Tal vez más notablemente, Fermat es recordado por el enigmático comentario que escribió en el margen de una de sus lecturas libros que afirman haber resuelto un problema novedoso en teoría de números. Busque una solución a este problema (si no el que Fermat tenía en mente) estimuló tres siglos de investigación importante y enérgica en matemáticas. EL ÚLTIMO TEOREMA DE FER MAT fue finalmente resuelto en 1994.

Fermat recibió una licenciatura en derecho civil de la Universidad de Orleans en 1631 y comenzó trabajar como abogado para el parlamento local de Toulouse ese mismo año. Siguió esta trayectoria profesional durante toda su vida, aceptando un puesto como criminal. juez de la corte en 1638 y, finalmente, el alto cargo de consejero del rey en 1648. El trabajo de Fermat en matemáticas fue un interés externo.

Fermat primero desarrolló una pasión por la lectura y "restaurar" textos griegos clásicos. Esto significaba completar las matemáticas de los pasajes que faltaban de los registros que sobrevivieron desde la antigüedad. Su trabajo sobre el texto Plane loci de APOLLONIUS OF PERGA (ca. 262-190 a. C.) atrajo la atención de los comunidad matemática de la época, no sólo para la trabajo de restauración en sí, sino también para el nuevo geométrico métodos que Fermat había ideado para calcular tangentes a curvas y resolución de problemas de máximos/mínimos. Fermat desarrolló una correspondencia con el monje francés MARIN MERSENNE (1588-1648), quien desempeñó el papel de difundir información matemática entre los eruditos notables de la época. A pesar de la atención que recibió Fermat, no buscó la fama publicando ninguna de sus obras. (Él publicó una pequeña pieza en su vida, que hizo anónimamente). Fermat compartió sus descubrimientos y resultados con Mersenne y otros estudiosos, pero no su métodos para obtenerlos. Esto inspiró y matemáticos frustrados de la época.

En 1654, el destacado erudito BLAISE PASCAL (1623-1662) escribió a Fermat con algunas preguntas matemáticas sobre apuestas y juegos de azar. La correspondencia que siguió condujo al desarrollo conjunto de un nueva teoría matemática de la probabilidad. Fermat es hoy considerado uno de los fundadores del campo. Sin embargo, Fermat había desarrollado un gran interés en la teoría de los números, en particular, las propiedades de los números enteros. números. Este tema era de escaso interés para los matemáticos de la época —quizás por su aparente falta de aplicación inmediata—, pero Fermat intentó despertar el interés en el tema planteando preguntas desafiantes a sus contemporáneos. Pidió a los eruditos que probar, por ejemplo, que la ecuación $x^2 + 2 = y^3$ tiene única solución entera positiva. Sus colegas, sin embargo, consideraban preguntas como éstas demasiado específicas para ser motivo de grave preocupación y, a menudo, descartado en ese momento. Fermat, por otro lado, se dio cuenta de que la comprensión de la soluciones a preguntas tan específicas proporciona una puerta de entrada a una gran intuición sobre el muy general y misterioso Propiedades de los números enteros. No fue hasta Fermat hijo Samuel publicó la copia anotada de Fermat del Arithmetica del erudito clásico DIOPHANTUS OF ALEJANDRÍA (ca. 200–284 CE): el texto que contiene la famosa nota marginal—que se revivió el interés por la teoría de los números y el brillante trabajo de Fermat sobre la el tema fue plenamente reconocido.

Fermat murió en Castres, Francia, el 12 de enero de 1665. La afirmación planteada en la nota garabateada en el margen de Arithmetica se llama el último teorema de Fermat. Él inspirado durante tres siglos de intensa matemática investigación en el campo de la TEORÍA DE NÚMEROS.

Véase también MÁXIMO/MÍNIMO.

El último teorema de Fermat Desde la antigüedad, los eruditos han sido conscientes de muchas, de hecho infinitas, diferentes soluciones enteras para la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

Machine Translated by Google

(Las soluciones de esta ecuación se denominan TRIPLES DE PITÁGORAS). Alrededor de 1637, PIERRE DE FERMAT conjeturó que no existen soluciones enteras positivas , sin embargo, para las ecuaciones

$$n x = z^{nn + y}$$

con n mayor que dos. En su copia de las obras traducidas de DIOFANTO DE ALEJANDRÍA, junto a un problema sobre las ternas pitagóricas, Fermat escribió su ya famosa nota:

> Por otro lado, es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias, o generalmente cualquier potencia excepto un cuadrado en dos potencias con el mismo exponente. He descubierto una prueba verdaderamente admirable de esto, pero el margen es demasiado estrecho para contenerla.

Durante más de 350 años, los matemáticos intentaron reproducir la supuesta prueba de Fermat. La afirmación en sí se conoció como el último teorema de Fermat, y fue uno de los mayores problemas sin resolver de todos los tiempos. Aunque el problema no se presta a aplicaciones prácticas obvias, los intentos de resolverlo ayudaron a motivar el desarrollo de una gran cantidad de matemáticas importantes.

Generalmente se cree que Fermat no tenía una demostración del teorema. En su correspondencia con colegas, menciona sólo los casos n es igual a 3 y 4 y no proporciona detalles de prueba ni siquiera para esos casos especiales. Fermat, nuevamente como nota marginal en su copia del trabajo de Diofanto, proporciona una prueba detallada de otro desafío planteado por Diofanto, uno sobre triángulos de longitud de lado racional. Aunque no se menciona explícitamente, la prueba del caso n es igual a 4 se sigue fácilmente del argumento matemático que proporciona. Se cree que Fermat estaba al tanto de esto.

Con el caso n = 4 resuelto, no es difícil ver que uno solo necesita estudiar los casos donde n es un primo impar. Por ejemplo, si se sabe que x no tiene soluciones enteras positivas, entonces x tampoco $^{7\,7+y}$ ^{42} $^{7=}$ puede tener soluciones enteras positivas. (Reescriba la ^{42} y $^{+}$ $^{42=z}z$ última ecuación como (x

$$^{6})^{7} + (y)^{6})^{7} = (z^{6})^{7}.)$$

A mediados del siglo XVIII, LEONHARD EULER demostró que la ecuación con n = 3 no tiene soluciones enteras positivas. El extenso trabajo de MARIE-SOPHIE GERMAIN (1776–1831) durante el cambio de siglo permitió a los matemáticos demostrar posteriormente que se cumple el teorema para todos los valores de n menos de 100. Durante los siglos XIX y XX, los matemáticos desarrollaron los campos de la geometría algebraica y la aritmética de curvas. En 1983, Gerd Faltings demostró la llamada conjetura de Mordell, un resultado importante con la siguiente consecuencia inmediata: cualquier ecuación de la forma x > 3 tiene, como máximo, un número finito de soluciones enteras positivas. Esto $^{n + y}$ $^{= z\ n}$ con n llevó a los matemáticos un paso significativo más cerca de probar el último teorema de Fermat para todos los valores de n: ¿es posible demostrar que ese número finito es cero en todos los casos? Finalmente, en 1995, casi 360 años después de la afirmación de Fermat, el matemático inglés ANDREW WILES, con la ayuda de Richard Taylor, presentó una prueba completa del último teorema de Fermat. Es, como era de esperar, muy largo y muy avanzado, y se basa en gran medida en las nuevas matemáticas del siglo. No hace falta decir que la prueba ciertamente está más allá de las habilidades de Fermat.

Aunque la prueba de Wiles se considera merecidamente como un punto culminante de las matemáticas del siglo XX, los matemáticos aún buscan un argumento simplificado.

Ferrari, Ludovico (1522–1565) Álgebra italiana Nacido el 2 de febrero de 1522 en Bolonia, el erudito italiano Ludovico Ferrari es recordado como la primera persona en resolver la ECUACIÓN CUÁRTICA. Trabajó como ayudante de GIROLAMO CARDANO (1501-1576), quien publicó la solución de Ferrari en su famosa obra de 1545 Ars magna (El gran arte).

Asignado para ser sirviente en la casa Cardano a los 14 años, Ferrari pronto impresionó a su amo con su mente ágil y su habilidad para leer y escribir. Car dano decidió entrenar a Ferrari en el arte de las matemáticas.

A cambio, Ferrari ayudó a Cardano a preparar sus manuscritos. Cuatro años después de su llegada, y con la bendición de Cardano, Ferrari aceptó un puesto en la Fundación Piatti de Milán como conferenciante público de geometría. Fer rari, sin embargo, continuó trabajando en estrecha colaboración con Cardano.

Ferrari descubrió su solución a la ecuación de cuarto grado en 1540, pero se basó en los métodos para resolver la ECUACIÓN CÚBICA que había desarrollado NICCOLÒ TARTAGLIA (ca. 1499–1557) y revelado a Cardano en secreto. (Los matemáticos de la época contaban con el apoyo de mecenas y protegían sus métodos como secretos comerciales: a menudo se les pedía que demostraran su valía resolviendo desafíos que ningún otro erudito podía resolver). Incapaces de publicar el resultado sin romper una promesa, Ferrari y Cardano se sintieron bloqueado Sin embargo, unos años más tarde, Fer

Machine Translated by Google

rari supo que otro erudito SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526) también había desarrollado métodos para resolver ciertos tipos de ecuaciones cúbicas. Aunque esencialmente idéntico al trabajo de Tartaglia, Ferrari y Cardano decidieron publicar la solución a la cuartica, atribuyendo el trabajo sobre la cúbica necesaria a del Ferro, con quien no se había hecho ninguna promesa de secreto.

Tartaglia se indignó y se produjo una amarga disputa que duró muchos años entre Tartaglia y Fer rari. El 10 de agosto de 1548, como era común en ese momento, Tartaglia desafió a Ferrari a un concurso abierto y debate público como un intento de demostrar que él era, de hecho, el experto en ecuaciones cúbicas. Pero quedó claro en el concurso que Ferrari tenía una comprensión más completa de las ecuaciones cúbicas y cuárticas. Tartaglia se fue antes de que terminara el concurso y la victoria fue para Ferrari. Inmediatamente obtuvo fama nacional y recibió muchas ofertas de empleo, incluida una solicitud del propio emperador para actuar como tutor real.

Ferrari, sin embargo, no aceptó ningún puesto que se le ofreciera en ese momento, dejó las matemáticas y aceptó un puesto lucrativo como asesor fiscal del gobernador de Milán.

Ferrari murió en Bolgna, Italia, en octubre de 1565 (se desconoce la fecha exacta) y es recordado en matemáticas únicamente por su trabajo sobre la ecuación cuartica.

Ferro, Scipione del (Ferreo, dal Ferro) (1465-1526)
Álgebra italiana Nacido el 6 de febrero de 1465 en Bolonia, Italia, Scipione del Ferro es recordado como el primer matemático en resolver la ECUACIÓN CÚBICA. Desafortunadamente, ninguno de sus escritos sobrevive en la actualidad, y sabemos de su trabajo principalmente a través de los manuscritos de GIRO LAMO CARDANO (1501-1576) y LUDOVICO FERRARI (1522-1565).

Del Ferro fue nombrado profesor de aritmética y geometría en la Universidad de Bolonia en 1496, cargo que ocupó durante toda su vida. Poco se sabe de su labor académica. Las cartas a otros académicos de la época sugieren que del Ferro estudió métodos para racionalizar expresiones racionales, construcciones de regla y compás en geometría y métodos para resolver ecuaciones cúbicas.

Los matemáticos de la época de del Ferro estaban familiarizados con la solución general de una ecuación CUADRÁTICA de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. (Debe mencionarse, sin embargo, que los eruditos del siglo XVI no usaban el cero como número en una expresión, ni permitía el uso de números negativos. Así, la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, por ejemplo, se escribió $x^2 + 2 = 3x$.) Matemáticos también sabía que, con el uso apropiado de la sustitución, cualquier ecuación cúbica podía reducirse a una de dos formas: $x^3 + hacha = b$ o $x^3 = ax + b$. (Aquí, nuevamente, a y b son positivos.) Del Ferro fue el primer matemático en resolver ecuaciones del primer tipo. Algunos historiadores sugieren que también pudo resolver ecuaciones del segundo tipo.

Del Ferro anotó todos sus resultados en un cuaderno personal, que legó a su yerno Han nibal Nave, también matemático. Nave luego compartió el contenido del cuaderno con Cardano y Fer.
raro Después de ver completamente explicado el método para resolver la cúbica, Cardano y Ferrari se dieron cuenta de que del Ferro había resuelto la famosa ecuación cúbica unos 30 años antes de que NICCOLÒ TARTAGLIA (ca. 1499-1557), su contemporáneo, afirmara haber hecho lo mismo. En 1545 Cardano publicó Ars magna (El gran arte), esbozando la solución de Ferrari a la ECUACIÓN CUÁRTICA haciendo uso de los métodos de Del Ferro para la cúbica.

Del Ferro murió en Bolonia, Italia, en algún momento entre el 29 de octubre y el 16 de noviembre de 1526. Se le recuerda en matemáticas únicamente por su trabajo sobre ecuaciones cúbicas.

Fibonacci (Leonardo Fibonacci, Leonardo de Pisa) (ca. 1170–1250) Aritmética italiana, teoría de números Nacido en Pisa, Italia (se desconoce la fecha exacta de nacimiento), el matemático Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, es el mejor recordado por su ayuda en la introducción del sistema NUMÉRICO HINDÚ-ÁRABE a los comerciantes y eruditos de Europa. Abogó firmemente por el sistema en su famoso texto de 1202 Liber abaci (El libro de contar), un tratado sobre las técnicas y prácticas de la aritmética y el álgebra, que demostró ser extremadamente influyente. Esta obra también contenía una gran colección de problemas aritméticos, incluido uno que conduce a la famosa secuencia de números que lleva su nombre. Considerado el más

Importante matemático de la Edad Media, Fibonacci también escribió extensamente sobre los temas de GEOMETRÍA EUCLIDEA y ECUACIONES DIOFANTINAS.
Es reconocido como el primer erudito en Occidente en hacer avances en el campo de la TEORÍA DE NÚMEROS desde la época de DIOFANTO DE ALEJANDRÍA.

Aunque nació en el norte de Italia, Fibonacci se crió y educó en el norte de África, donde su padre, comerciante y representante del gobierno,

Machine Translated by Google

ocupó un cargo diplomático. A medida que crecía, Fibonacci también viajó a Grecia, Egipto, Siria, Francia y Sicilia, y tomó especial nota de los sistemas aritméticos utilizados por los comerciantes locales de esas áreas. Se convenció de que el sistema numérico usado por los árabes con sus raíces en la India —la forma real en que escribían los números y la forma en que los manipulaban para realizar cálculos— era muy superior a cualquier otro sistema aritmético que había encontrado, incluido el torpe sistema de NÚMEROS ROMANOS en uso en ese momento en Europa. A su regreso a Pisa alrededor del año 1200, Fibonacci comenzó a escribir su famosa obra. Su objetivo era simplemente explicar los números arábigos hindúes, el papel de un SISTEMA DE VALOR DE LUGAR , e ilustrar su enfoque superior. El texto comienza simplemente:

> Estas son las nueve cifras de los indios: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Con estas nueve cifras, y con este signo 0, ... cualquier número se puede escribir diez, como se verá .

Dividido en cuatro secciones, el trabajo describe los métodos de suma, multiplicación, resta y división. También analiza fracciones (incluida una discusión sobre FRACCIONES EGIPCIA), así como algo de geometría y álgebra. (Algunas partes del texto están escritas de derecha a izquierda, indicando, tal vez, hasta qué punto Fibonacci fue influenciado por los eruditos árabes).

Aunque la aceptación completa del sistema hindú-árabe en Occidente no se produjo hasta unos 300 años después, el trabajo de Fibonacci en esta área se reconoce como el primer paso significativo en esta dirección.

Fibonacci también escribió extensamente en los campos de teoría de números, trigonometría y geometría. Se dice que los avances que presentó Fibonacci en su obra de 1225 Liber quadratorum (El libro de los números cuadrados) fueron de tal interés y valor que despertaron un renovado interés por las matemáticas teóricas y revivieron las matemáticas occidentales de su letargo durante la Edad Media.

Durante su vida, Fibonacci fue reconocido como un gran erudito. La noticia de sus habilidades llegó al emperador Federico II, sentado en Palermo, quien lo invitó a competir contra otros matemáticos de la época en un torneo matemático. Fibonacci resolvió correctamente los tres desafíos que se le presentaron, lo que le valió más atención y fama. En 1240 Fibonacci fue recibió un salario de la ciudad de Pisa en reconocimiento a sus servicios a la comunidad.

Todos los textos de Fibonacci y sus reproducciones fueron escritos a mano. Copias de Liber abaci todavía sobreviven hoy.

El nombre de Fibonacci se deriva de la abreviatura del latín filius Bonacci, que significa hijo de Bonaccio, el apellido de su padre. Durante su vida, Fibonacci también fue conocido como Leonardo de Pisa o, en latín, Leonardo Pisano. A veces, Fibonacci también se identificó como Leonardo Bigollo, siguiendo la palabra toscana bigollo para "un viajero".

Al introducir el número arábigo hindú en Europa, su influencia en las matemáticas occidentales fue profunda. Murió en la ciudad de Pisa, Italia, probablemente en el año 1250. (Se desconoce la fecha exacta de su muerte).

Véase también NÚMEROS DE FIBONACCI.

Números de Fibonacci Cualquiera de los números que aparecen en la secuencia 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, donde cada los dos número, después del segundo, es la suma 89, …, de números precedentes, se llama número de Fibonacci. Si Fn denota el n-ésimo número de Fibonacci, entonces tenemos

$$Fn = Fn–1 + Fn–2$$

con F1 = F2 = 1.

Estos números surgen de un famoso problema de cría de conejos descrito en el texto Liber abaci de FIBONACCI :

> ¿Cuántos conejos se producirían en el mes n si, partiendo de un solo par, cualquier par de conejos de un mes produce un par de conejos para cada mes después del siguiente?

(El par inicial de conejos, por ejemplo, no produce otro par de conejos hasta el mes 3. Este mismo par produce un nuevo par cada mes a partir de entonces).

En cualquier mes, la totalidad de los conejos presentes se compone de todas las parejas del mes anterior junto con toda la nueva descendencia. El número de descendientes es igual al tamaño de la población de dos meses antes. Así, la solución al problema es la secuencia descrita anteriormente.

Cualquier problema cuya solución del caso n-ésimo sea la suma de las dos soluciones del caso anterior produce el Fibonacci

Machine Translated by Google

secuencia. Por ejemplo, hay formas Fn de subir n – 1 escalones, uno o dos escalones a la vez (considere comenzar el ascenso con un solo escalón o con un escalón doble). También hay formas Fn de teselar una fila de cuadrados de 1 × (n – 1) con fichas de 1 × 1 y fichas de dominó de 1 × 2, y hay secuencias Fn de 0 y 1 de n dígitos de largo que comienzan y terminan en 1 y contienen no hay dos 0 consecutivos.

Considerando un 1 como “cruz” y un 0 y “cara”, e ignorando los 1 iniciales y finales, este último ejemplo se puede usar para mostrar que la PROBABILIDAD de no obtener dos caras seguidas al lanzar una moneda n veces es $\frac{F_{n+2}}{2^n}$. También se puede usar para mostrar que hay subconjuntos Fn+2 de {1,2,…,n} que carecen de dos números consecutivos como miembros.

Quizás las apariciones más sorprendentes de los números de Fibonacci ocurren en la naturaleza. Las semillas en la cabeza de una flor de girasol, por ejemplo, parecen formar dos sistemas de espirales, a menudo con 55 espirales que se arquean en una inclinación en el sentido de las agujas del reloj y 34 espirales con una inclinación en el sentido contrario a las agujas del reloj. (Las especies grandes de girasoles tienen 89 y 144 espirales, de nuevo números de Fibonacci consecutivos.) Esto parece ser típico de todos los objetos naturales que contienen patrones de flores, pétalos o semillas en espiral: piñas, piñas e incluso el espaciado de las ramas alrededor del tronco de un árbol. El nombre botánico para el arreglo de hojas es filotaxis.

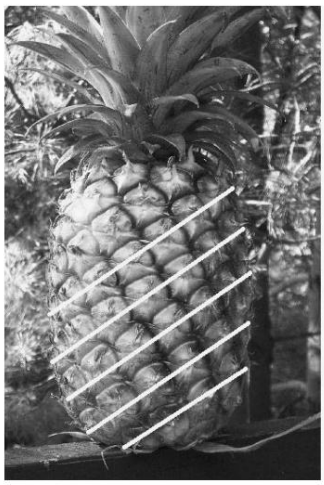
Es útil preguntarse si es posible encontrar un valor x tal que la sucesión 1,x,x2 ,x3 satisfaga la misma relación recursiva que los números de Fibonacci, es decir, que cada término después del segundo sea igual a la suma de los dos términos precedentes. . Por lo tanto, esta condición requiere que x sea un número que satisfaga la ecuación. Por la fórmula CUADRÁTICA hay dos soluciones:

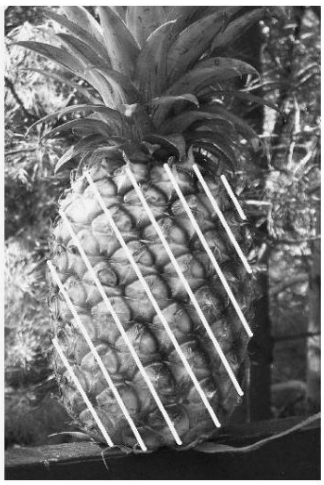
$$x^2 = 1 + x$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\tau = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

De ello se deduce que cualquier combinación de la forma $a^n + b^n$ satisface la misma relación recursiva que la sucesión de Fibonacci. La elección apropiada de las constantes a y b , de modo que los dos primeros términos de la sucesión producida sean ambos 1, produce la siguiente fórmula, llamada fórmula de Binet, para el n-ésimo número de Fibonacci:





Esta piña tiene cinco filas diagonales de escamas hexagonales en una dirección y ocho filas en la otra dirección. (Tenga en cuenta que la sexta fila de escamas sin marcar en la imagen de la izquierda no es una fila nueva; es una continuación de la fila de escamas inferior).

$$f_n = \frac{\varphi^n - \tau^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

(Es sorprendente que esta fórmula produzca un número entero para cada valor de n). Se puede usar este resultado para mostrar que el radio de $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ los números de Fibonacci se aproxima al valor de a medida que n se vuelve grande. Esto pasa a ser el PROPORCIÓN DE ORO.

Las propiedades de los números de Fibonacci son tan numerosas que existe una publicación matemática, The Fibonacci Quarterly, dedicada enteramente a su estudio continuo.

Véase también TRIÁNGULO DE PASCAL ; POLIOMINO.

campo Ver ANILLO.

Medallas Fields Estos son premios otorgados a jóvenes investigadores por logros sobresalientes en matemáticas. Los premios se consideran equivalentes en estatura a los premios Nobel (que no existen para las matemáticas).

Las “medallas internacionales por descubrimientos destacados en matemáticas” se propusieron por primera vez en la reunión del Congreso Internacional de Matemáticos de 1924 en Toronto.

Machine Translated by Google

El matemático canadiense John Charles Fields (1863–1932) posteriormente donó fondos para apoyar esta idea, y los premios se crearon y nombraron en su honor. Se acordó que se otorgarían dos medallas de oro cada cuatro años, en cada reunión cuatrienal del Congreso Internacional de Matemáticos. Los primeros premios se otorgaron en 1936 y, luego de una pausa durante la guerra, se reanudaron en 1950. En 1966, debido a la importante expansión de la investigación matemática, se acordó que se podrían otorgar hasta cuatro medallas en cualquier reunión.

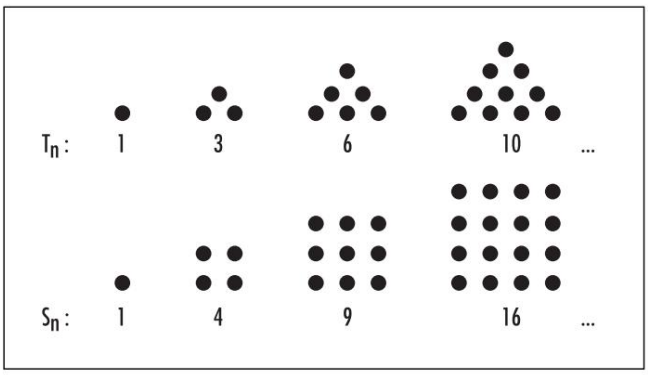
El premio en sí consiste en un premio en efectivo y una medalla de oro. En un lado de la medalla aparece una imagen de ARQUÍMEDES DE SIRACUSA, junto con la cita "Transire suum pectus mundoque potiri" (Elévate por encima de ti mismo y apodérate del mundo).
En el reverso está la inscripción, "Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere" (los matemáticos del mundo reunidos aquí rinden tributo por su destacado trabajo).

Siguiendo el deseo de Fields, los premios se entregan en reconocimiento del trabajo existente realizado por un matemático, así como el potencial de logros futuros.
Por este motivo, los premios suelen otorgarse a matemáticos menores de 40 años.

Un consejo de administración establecido por la Universidad de Toronto administra los premios, y un comité de matemáticos designado por el Congreso Internacional de Matemáticos entrega las medallas a los destinatarios.

Laurent Lafforgue del Institut des Hautes Études Scientifiques, Buressre-Yvette, Francia, y Vladimir Voevodsky del Instituto de Estudios Avanzados, Princeton, Nueva Jersey, fueron los ganadores del premio en 2002. Lafforgue hizo contribuciones significativas al llamado programa Langlands, una serie de conjeturas de gran alcance propuestas por Robert Langlands en 1967 que, de ser ciertas, unirían ramas dispares de las matemáticas. Voevodsky recibió el premio por su trabajo en geometría algebraica, un campo que une la teoría de números y la geometría.

números figurados La disposición de puntos para crear figuras geométricas conduce a una clase de números llamados números figurados. Por ejemplo, los números triangulares son aquellos números que surgen de arreglos triangulares de puntos, y los números cuadrados los de arreglos cuadrados.



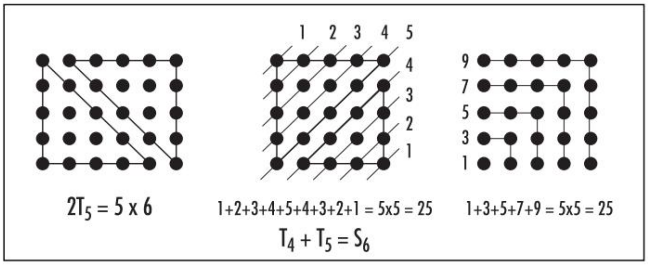
números triangulares y cuadrados

Son posibles otras formas geométricas, lo que lleva a otras secuencias de números figurados.

Los números figurados fueron de especial importancia para los pitagóricos del siglo VI a. C. Creyendo que todo en el universo podía explicarse por la "armonía del número", impartieron una importancia especial, incluso personalidad, a los números figurados. Por ejemplo, 10, siendo la suma de los primeros cuatro números de conteo 1 + 2 + 3 + 4, en su creencia unía los cuatro elementos—tierra, agua, fuego y aire—y por lo tanto debía ser tenido en la mayor de las reverencias. .
(Llamaron a este número tetraktys, "los santos cuatro").

Muchas propiedades aritméticas de las sumas pueden explicarse fácilmente mediante los números figurados. Por ejemplo, el n-ésimo número triangular, Tn , viene dado por la suma: 1 + 2 + + n. Como dos configuraciones triangulares colocadas juntos producen una matriz de puntos n × (n + 1), 2Tn , n × (n = + 1), tenemos:

$$T_{_} + 4\ 2\ \text{norte} = + + \frac{+ (nn\ 1\ )}{2}$$



Propiedades de los números figurados

Machine Translated by Google

El enésimo número cuadrado viene dado por la fórmula: Sn = n . Mirar
× norte = norte^2 las diagonales del cuadrado revela la suma:

$$1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1 = n^2$$

También oculta en un cuadrado está la suma de los primeros n números impares. Así tenemos:

La suma de los n primeros números impares es n ^{2}.

Sumar uno a cada uno de estos sumandos da la suma de los primeros n números pares. Así tenemos:

La suma de los primeros n números pares es n ^{2} + n.

Hay una buena interacción entre los números triangulares y cuadrados. Por ejemplo, la suma de dos números triangulares consecutivos siempre es un número cuadrado: 1 + 3 es igual a 4, 3 + 6 es igual a 9 y 6 + 10 es igual a 16, por ejemplo. En general:

$$T_{n-1} + T_n = S_n$$

El diagrama central en la figura al final de la página 194 explica por qué este es el caso.

De manera similar, uno puede ordenar ocho copias del triángulo uno para formar un cuadrado sin su centro para probar que 8Tn es siempre uno menos que un número cuadrado.
Del mismo modo, también se puede establecer que la siguiente combinación de tres números triangulares consecutivos es siempre cuadrada: Tn–1 + 6Tn + Tn+1.

Los números 1 = T1 = S1 , 36 = T8 = S6 y 1225 = T49 = S35 son tanto cuadrados como triangulares, al igual que 41.616 y 1.413.721. Los matemáticos han probado, usando FRACCIONES CONTINUAS, que hay infinitos números con esta propiedad.

Los números triangulares alternos 1, 6, 15, 28,... a veces se denominan números de Bohlen. El n-ésimo número de Bohlen x es divisible por n y es el único múltiplo de n que satisface: 1 + 2 +…+ = x.
x-
n

En 1796 KARL FRIEDRICH GAUSS demostró que todo número natural es la suma de como máximo tres números triangulares, y JOSEPH-LOUIS LAGRANGE en 1770 demostró que todo número natural es la suma de no más de cuatro números cuadrados.

Uno puede extender el alcance de los números figurativos a tres dimensiones para producir los números cúbicos, tetrahe números drales, y similares. El número de cubo n viene dado por la fórmula n cal arreglo de ^{3}. Es un cubo tridimensional. puntos, siendo cada capa un arreglo cuadrado de puntos. (Por lo tanto, n capas de n 2 puntos dan un total de n × n elementos). El número ^{2} = norte^3 tetraédrico enésimo se produce apilando los primeros números triangulares n : T1 + T2 +…+ Tn . Esto da la secuencia:

1, 4 = 1 + 3, 10 = 1 + 3 + 6, 20 = 1 + 3 + 6 + 10,…

Se puede demostrar que el n-ésimo número tetraédrico está dado por 1– por la fórmula n(n + 1)(n +2). 6 Tanto

los números triangulares como los números tetraédricos aparecen como diagonales en el TRIÁNGULO DE PASCAL . El apilamiento sucesivo de números tetraédricos produce números hipertetraédricos: 1, 5, 15, 35,... Estos corresponden a arreglos geométricos de puntos en cuatro dimensiones. También aparecen como una diagonal en el triángulo de Pascal.

Véase también MULTIPLICACIÓN ANIDADA; NÚMERO PERFECTO; CUADRADO; TRIÁNGULO.

multiplicación con los dedos Habiendo memorizado las tablas de multiplicar del 2, 3, 4 y 5, existe un método de dedo popular para calcular todos los valores de las tablas de multiplicar del 6 al 10. Se basa en la siguiente regla para codificar números:

Un puño cerrado representa 5 y cualquier dedo levantado en esa mano suma 1 a ese valor.

Así, una mano con un dedo levantado, por ejemplo, representa 6. Una mano con tres dedos levantados representa 8.
Para multiplicar dos números entre 5 y 10, se siguen estos pasos:

1. Codifique los dos números, uno en cada mano.
2. Cuente 10 por cada dedo levantado.
3. Cuente el número de dedos no levantados en cada mano y multiplique los dos conteos.
4. Sume los resultados de los pasos dos y tres. Este es el producto deseado.

Por ejemplo, “6 por 8” se representa como un dedo levantado en la mano izquierda, tres en la mano derecha. Hay cuatro dedos levantados en total, dando el número 40 para el paso 2. La mano izquierda tiene cuatro dedos bajados y la derecha tiene dos dedos bajados. Calculamos 4 × 2 = 8.
Por lo tanto, el producto deseado es 40 + 8 = 48. De manera similar, "8

Machine Translated by Google

por 8” se calcula como 60 + 2 × 2 = 64, “9 por 7” como 60 + 1 × 3 = 63, y “6 por 7” como 30 + 3 × 4 = 42. Tenga en cuenta que nunca se requiere que uno multiplique dos números mayores que cinco. Que el método funcione se explica por la identidad algebraica:

$$(5 + a)(5 + b) = 10(a + b) + (5 – a)(5 – b)$$

La identidad (N + a)(N + b) = 2N(a + b) + (N – a)(N – b) muestra que podemos extender este método para usar un número diferente de dígitos en cada mano. Por ejemplo, con N = 10, utilizando los dedos de las manos y los pies, uno puede calcular fácilmente 17 × 18 como "siete dedos levantados" y "ocho dedos levantados". Contando cada dígito elevado como 20 (2N) tenemos: 17 × 18 = 20 × 15 + 3 × 2 = 306.

Véase también MULTIPLICACIÓN EGIPCIA; MULTIPLICACIÓN ISABELINA; MULTIPLICACIÓN; HUESOS DE NAPIER ; MULTIPLICACION RUSA.

finito Intuitivamente, se dice que un conjunto es finito si se pueden recitar todos los elementos del conjunto en un tiempo acotado. Por ejemplo, el conjunto {cuchillo, tenedor, cuchara} es finito, ya que solo lleva uno o dos segundos recitar los elementos de este conjunto. Por otra parte, el conjunto de los números naturales {1, 2, 3, …} no es finito, ya que nunca se pueden recitar todos y cada uno de los elementos de este conjunto.

A pesar de nuestra comprensión intuitiva del concepto, es difícil dar una definición matemática precisa y directa de un conjunto finito. El enfoque más fácil es simplemente definir un conjunto finito como uno que no es INFINITO, ya que la noción de un conjunto infinito puede aclararse. Alternativamente, dado que existe un procedimiento bien definido para escribir mecánicamente la cadena de números naturales 1, 2, 3, …, se puede definir un conjunto finito como cualquier conjunto S cuyos elementos se pueden poner en correlacion uno a uno . respuesta con un segmento inicial acotado de la cadena de números naturales. Por ejemplo, emparejando “cuchillo” con 1, “tenedor” con 2 y “cuchara” con 3, el conjunto {cuchillo, tenedor, cuchara} es finito porque sus elementos pueden emparejarse precisamente con la cadena de números naturales { 1, 2, 3}.

diferencias finitas Analizar los términos de un SECUENCIA, puede ser útil crear una tabla de diferencias sucesivas (en el sentido de “derecha menos izquierda”) entre los términos de la sucesión y las diferencias subsiguientes de las diferencias. Por ejemplo, para la sucesión 1,2,4,8,15,26,42,64,… obtenemos la tabla de diferencias:

1 2 4 8 15 26 42 64 ...

1 2 4 7 11 16 22 ...

12345 6 ...

11 11 1 ...

0000 ...

000 ...

Del patrón que ahora es evidente, está claro que el próximo número en la secuencia original será 64 + 29 = 93.

Se dice que las entradas en la primera fila debajo de la secuencia original son las "primeras diferencias finitas"; la segunda fila debajo de la secuencia representa las "segunda diferencia finita", y así sucesivamente. Todos los términos que aparecen en una tabla de diferencias finitas están completamente determinados por los valores que aparecen en la diagonal principal. Por ejemplo, si se conocen los valores a, b, c, … que se muestran a continuación, el resto de la tabla debe aparecer de la siguiente manera:

aa ba a b ca bc da bcd e 2 3 3 4 6 4 ...

bb cb c db cd e 3 3 ...

cc dc de 2 ...

dd e + ...

mi ...

Los coeficientes que aparecen en la fila superior coinciden con las entradas en cada fila del TRIÁNGULO DE PASCAL , que están dados por los COEFICIENTES BINOMALES. Esto sugiere que sería esclarecedor examinar la diferencia finita tablas de secuencias $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$. Obtenemos:

11 1 1 1 ...

00 0 0 ...

00 0 ...

0 0 ...

Machine Translated by Google

$$\overset{n}{1}: \quad 01\ 2\ 3\ 4 \quad \ldots$$

$$11\ 1\ 1 \quad \ldots$$

$$00\ 0 \quad \ldots$$

$$0\ 0 \quad \ldots$$

$$\overset{n}{2}: \quad 00136 \quad \ldots$$

$$01\ 23 \quad \ldots$$

$$111 \quad \ldots$$

$$0\ 0 \quad \ldots$$

Cada una de estas secuencias produce una tabla con una diagonal principal directa: una que es cero en todos los lugares excepto por la aparición de un solo 1. Usando esto para nuestro beneficio, recuerde que la diagonal principal de la secuencia 1, 2, 4, 8 , 15, 26, 42, 64, … es 1,1,1,1,0,0,0,…, que es la suma de las diagonales principales para los cuatro término secuencias dadas por $n, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$. Así el enésimo

secuencia original debe ser igual a la suma de los n-ésimos términos de cada una de las cuatro sucesiones, a saber:

$$n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

Así que ahora tenemos una fórmula para la secuencia 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64,…

En general, se puede usar esta técnica para encontrar una fórmula para cualquier secuencia cuya tabla de diferencias finalmente contenga una fila de diferencias finitas constantes. Sin embargo, no todas las secuencias tienen esta propiedad. Por ejemplo, la tabla de diferencias para la secuencia de NÚMEROS DE FIBONACCI cicla indefinidamente:

$$1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ 21\ 34 \quad \ldots$$

$$0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13 \quad \ldots$$

$$001\ 1\ 2\ 3\ 5 \quad \ldots$$

Uno debe emplear técnicas alternativas para calcular fórmulas para tales secuencias.

Pruebas de primera y segunda derivada Ver MÁXIMO/ MÍNIMO.

Fisher, Sir Ronald Aylmer (1890–1962) Estadística británica, genética Nacido el 17 de febrero de 1890 en Londres, Inglaterra, Sir Ronald Fisher es considerado el estadístico más importante de principios del siglo XX. Su texto histórico de 1925 Métodos estadísticos para trabajadores de investigación estableció métodos para diseñar experimentos y analizar resultados que los científicos han utilizado ampliamente desde entonces. Fisher también fue un genetista capaz e hizo contribuciones significativas a los campos de la selección y el dominio genético.

Después de obtener un título en astronomía de Cambridge en 1912, Fisher desarrolló un interés en la teoría de los errores en la observación astronómica. Este trabajo lo condujo a un interés general por los problemas estadísticos y el análisis de ERROR en todas las disciplinas, incluidas las que surgen en biología. En 1919, Fisher aceptó un puesto en la Estación Experimental Agrícola de Rothamsted como biólogo. Allí desarrolló sus ideas clave en la teoría de la genética al mismo tiempo que fundaba la teoría del diseño experimental descrita en su artículo de 1925.

Fisher fue profesor de genética en el University College de Londres de 1933 a 1943, y luego profesor de genética en la Universidad de Cambridge hasta 1957. Al jubilarse, Fisher se mudó a Australia para convertirse en investigador en la División de Matemáticas y Estadística. , CSIRO, Adelaida.

Su método de análisis multivariado permitió a los científicos, por primera vez, analizar adecuadamente problemas que involucraban más de una variable, y su noción de "probabilidad" proporcionó los medios para sacar conclusiones generales sobre la base de probabilidades relativas de diferentes eventos. Fisher también contribuyó a la ciencia de la PRUEBA DE HIPÓTESIS mediante la identificación y el análisis de nuevas DISTRIBUCIONES clave . Su trabajo, sin duda, transformó la estadística de una ciencia general en una herramienta científica práctica y poderosa. Se le considera el fundador de la estadística moderna.

Fisher fue elegido miembro de la ROYAL SOCIETY en 1929 y recibió la Medalla Real de la Sociedad en 1938, la Medalla Darwin de la Sociedad en 1948 y la Medalla Copley de la Sociedad en 1955.
Fue nombrado caballero en 1952 en reconocimiento a su influyente trabajo en estadística y por su desarrollo de un

Machine Translated by Google

teoría estadística de la selección natural. Fisher murió en Adelaida, Australia, el 29 de julio de 1962.

Ver también HISTORIAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo); CARL PEARSON.

punto fijo Cualquier punto que se asigna a sí mismo por una TRANSFORMACIÓN dada se llama punto fijo. Por ejemplo, los puntos x = 0 y x = 1 son puntos fijos para la función $f(x) = x^2$. cualquier punto de la línea de REFLEJO para una reflexión en un plano es un punto fijo para esa reflexión.

Cualquier mapa continuo f que mapee puntos en el intervalo unitario [0,1] a puntos en el mismo intervalo debe poseer un punto fijo. (Según el TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO , las gráficas de y = f(x) e y = x para $0 \le x \le 1$ deben intersecarse). Este es un caso especial de un resultado más general demostrado por Luitzen Egbertus Jan Brouwer en 1915 indicando que, para todo valor de n, cualquier aplicación continua $f:[0, 1]^n \to [0,1]^n$ debe poseer al menos un punto fijo. (Para n = 2, $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ es el cuadrado unitario en el plano, y para n = 3, $[0,1]^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ es un cubo unitario en un espacio tridimensional.) Este teorema tiene las siguientes divertidas consecuencias:

> Considere dos hojas de papel cuadradas, una directamente encima de la otra. Inicialmente, cada punto de la hoja superior se encuentra directamente encima de su punto correspondiente en la hoja inferior. Ahora arrugue la sábana superior y coloque la bola arrugada en cualquier lugar de la sábana inferior. Según el teorema del punto fijo de Brouwer, todavía hay al menos un punto de la hoja arrugada que se encuentra directamente sobre su punto correspondiente en la hoja inferior.
>
> Como experimento mental, imagine las moléculas del líquido en una taza de café como los puntos en un cubo tridimensional. Después de remover el café, el teorema del punto fijo de Brouwer asegura que al menos una molécula volverá a su ubicación original.

Véase también ITERACIÓN.

funciones suelo/techo/parte fraccionaria La función suelo, también conocida como la función del entero mayor, toma un número real x y devuelve el entero mayor que no exceda x. Esta cantidad se denota: $\lfloor x \rfloor$. Por ejemplo, $\lfloor 7.2 \rfloor = 7$, $\lfloor 7.9998 \rfloor = 7$ y $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Además, $\lfloor -6.34 \rfloor = -7$.

La función techo, también conocida como función de mínimo entero, toma un número real x y devuelve el mínimo entero no menor que x. Esta cantidad se denota: $\lceil x \rceil$. Por ejemplo, $\lceil 7,2 \rceil = 8$, $\lceil 7,998 \rceil = 8$ y $\lceil 7 \rceil = 7$. Además, $\lceil -6,34 \rceil = -6$. La parte fraccionaria de un número real x, denotada {x}, está dada por: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Por ejemplo, {7,2} = 0,2, {7,998} = 0,998 y {7} = 0. Además, {–6,34} = 0,66.

Los nombres "piso" y "techo", así como la notación de estas funciones, fueron introducidos por Kenneth Iverson en su texto de informática de 1962 Un lenguaje de programación. Estas funciones a menudo surgen en aplicaciones de contar. Por ejemplo, hay $\lfloor N/4 \rfloor$ múltiplos de 4 menores o iguales que N y, para cualesquiera dos números reales x e y con x < y, el intervalo cerrado [x, y] contiene $\lfloor y \rfloor - \lceil x \rceil + 1$ enteros.

Véase también FÓRMULA DE LOS DÍAS DE LA SEMANA .

función suelo Ver SUELO/TECHO/ PARTE FRACCIONAL FUNCIONES.

fluxión En su versión de CÁLCULO, SIR ISAAC NEW TON pensó en la variable x como una cantidad que fluye, y llamó a la tasa de cambio de x la “fluxión” de x. Usó la notación $\dot{x}$ por la fluxión de x, $\ddot{x}$ por la fluxión de la fluxión de x, y así sucesivamente. Entonces, si x = f(t), donde x es la distancia y t el tiempo para un objeto en movimiento, entonces $\dot{x}$ es la VELOCIDAD instantánea del objeto, y $\ddot{x}$ su ACELERACIÓN instantánea.

Hoy en día, el término fluxión se considera obsoleto y usamos la palabra DERIVADA en su lugar. Sin embargo, los físicos todavía utilizan la notación de punto en relieve para la derivada para denotar las derivadas con respecto al tiempo.

Véase también CÁLCULO; HISTORIA DEL CÁLCULO (ensayo).

Cuerda focal Cualquier ACORDE de una curva cónica (una PARÁBOLA, una ELIPSE o una HIPÉRBOLA) que pasa por un FOCO de la cónica se llama cuerda focal.

Ver también SECCIONES CÓNICAS; RADIO FOCAL.

radio focal Cualquier línea desde el FOCO de una cónica curva —una PARÁBOLA, una ELIPSE o una HIPÉRBOLA— hasta un punto de la cónica se llama radio focal.

Ver también SECCIONES CÓNICAS; ACORDE FOCAL.

Machine Translated by Google

foco (plural, focos) Cada SECCIÓN CÓNICA tiene asociado uno o dos puntos especiales, cada uno llamado foco de la cónica.

Véase también ELIPSE; HIPÉRBOLA; PARÁBOLA.

lógica formal (lógica simbólica) En matemáticas, la El estudio sistemático del razonamiento se llama lógica formal. Él analiza la estructura de los ARGUMENTOS, así como la métodos y validez de la deducción matemática y prueba.

Los principios de la lógica se pueden atribuir a ARISTO TLE (384-322 a. C.), quien escribió la primera tratado sobre el tema. Trató de identificar modos de inferencia que son válidas en virtud de su estructura, no su contenido Por ejemplo, “Verde y azul son colores; por lo tanto, el verde es un color” y “Las vacas y los cerdos son mosaicos de reptiles; luego las vacas son reptiles” tienen la misma estructura ("A y B, por lo tanto A"), y cualquier argumento hecho a través de esta estructura es lógicamente válida. (En particular, el segundo ejemplo es lógicamente sólido.) Este modo de pensamiento permitió que EUCLID (ca. 300-260 a. C.) formalizara la geom etría, usando pruebas deductivas para inferir verdades geométricas de una pequeña colección de AXIOMAS (verdades evidentes).

No se avanzó significativamente en el estudio de lógica para el milenio que siguió. Este período fue sobre todo un tiempo de consolidación y transmisión de la material de la antigüedad. El Renacimiento, sin embargo, trajo renovado interés en el tema. Matemático eruditos de la época, Pierre Hérigone y Johann Rahn en particular, medios desarrollados para representar lógica argumentos con abreviaturas y símbolos, en lugar de palabras y oraciones. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) llegó a considerar la lógica como "matemáticas universales". Abogó por el desarrollo de un “universal lenguaje” o un “cálculo universal” para cuantificar la todo el proceso de razonamiento matemático. El esperaba idear un nuevo simbolismo mecánico que reduciría errores de pensamiento al equivalente de la aritmética errores (Más tarde abandonó el trabajo en este proyecto, evaluando que es una tarea demasiado desalentadora para un solo hombre.)

A mediados del siglo XIX, GEORGE BOOLE logró crear un enfoque puramente simbólico de la proposición. la lógica, la parte que se ocupa de las inferencias que involucran oraciones declarativas simples (enunciados) unidas por el conectores:

no, y, o, si... entonces..., si y si

(Estos se llaman NEGACIÓN, CONJUNCIÓN, DISYUNCIÓN, CONDICIONAL y BICONDICIONAL, respectivamente.) Lo aplicó con éxito a las matemáticas, por lo que dando un paso significativo para lograr el objetivo de Leibniz.

En 1879, el matemático y filósofo alemán Gottlob Frege construyó un sistema simbólico para lógica de predicados. Esto generaliza la lógica proposicional por incluyendo CUANTIFICADORES: afirmaciones que usan palabras como algunos, todos, y, no. (Por ejemplo, “Todos los hombres son mortales” en oposición a "Este hombre es mortal".) A la vuelta de la siglo DAVID HILBERT trató de idear un completo, formulación consistente de todas las matemáticas usando un pequeña colección de símbolos con significados bien definidos. matemático y filósofo inglés BERTRAND RUSSELL, en colaboración con su colega ALFRED NORTH WHITEHEAD, aceptó el desafío de Hilbert. En 1925 publicaron una obra monumental. Comienzo con un conjunto impresionantemente mínimo de premisas (principios lógicos "evidentes"), intentaron establecer los fundamentos lógicos de todas las matemáticas. Esto era un logro impresionante. (Después de cientos de páginas de manipulaciones simbólicas, establecieron el validez de "1 + 1 = 2", por ejemplo.) Aunque no alcanzaron completamente su objetivo, el trabajo de Russell y Whitehead ha sido importante para el desarrollo de lógica y matemáticas.

Sin embargo, seis años después de la publicación de sus esfuerzos, KURT GÖDEL sorprendió a la comunidad matemática al demostrar que la meta de Hilbert (y Leibniz) era fútil. Demostró de una vez por todas que cualquier sistema formal de lógica suficientemente sofisticado para incorporar los principios básicos de la aritmética no puede alcanzar todos los las afirmaciones que espera probar. Sus resultados son hoy denominado TEOREMA DE LA INCOMPLETITUD DE GÖDEL . La visión la reducción de todas las verdades de la razón a una aritmética indiscutible se hizo añicos.

Comprender los fundamentos filosóficos de las matemáticas siguen siendo un área de intensa investigación académica.

Véase también ARGUMENTO; REA DEDUCTIVA/INDUCTIVA SONIDO; LEYES DEL PENSAMIENTO.

fórmula Cualquier identidad, regla general o expresión general en matemáticas que se puede aplicar a diferentes valores de una o más cantidades se llama fórmula. Por ejemplo, la fórmula para el área A de un círculo es:

$$A = \pi r^2$$

Machine Translated by Google

donde r representa el radio del círculo. El
La fórmula CUADRÁTICA para las raíces de una ecuación cuadrática de la forma ax2 + bx + c = 0 es:

$$x = \frac{bb - \sqrt{-2\ 4\quad C.A}}{2a}$$

fundamentos de las matemáticas La rama de las matemáticas que se ocupa de la justificación de las
reglas, AXIOMAS y modos de inferencia se llama fundamentos de las matemáticas. El paradigma para el análisis matemático crítico provino del trabajo del gran
geómetra EUCLID (ca. 300-260 a. C.) quien, en su trabajo LOS ELEMENTOS, demostró que toda la geometría conocida en su tiempo puede deducirse lógicamente de un pequeño conjunto de verdades evidentes (axiomas). LEONHARD EULER (1707-1783) produjo resultados fundamentales en dispares ramas de las matemáticas y a menudo veía conexiones entre esas ramas. Él también buscó pequeñas colecciones de conceptos que fueran fundamentales y, con suerte, comunes a todos los campos. A finales de 1800 y en el cambio de siglo con el descubrimiento de RUSSELL'S PARADOJA en la TEORÍA DE CONJUNTOS, los matemáticos fueron llevados a aparentes paradojas e inconsistencias dentro de la nociones aparentemente muy básicas de "conjunto" y "número". Esto condujo al ferviente estudio de los principios fundamentales de las matemáticas elementales e incluso al estudio de el proceso del pensamiento matemático mismo (FORMAL LÓGICA). En la década de 1930, el matemático austriaco KURT GÖDEL (1906-1978) sorprendió a la comunidad matemática al probar, esencialmente, que cualquier sistema formal de Las matemáticas que incorporan los principios de la aritmética contendrán afirmaciones que no pueden probarse ni refutado, y, además, tal sistema será necesariamente incapaz de establecer que está libre de CONTRADICCIONES. A pesar de estas inquietantes conclusiones, el estudio de los principios fundamentales de las matemáticas es sigue siendo un área activa de investigación en la actualidad.

Véase también GEORG CANTOR; TEOREMAS DE LA INCOMPLETITUD DE GÖDEL ; BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL; ALFRED NORTE WHITEHEAD; ERNST FRIEDRICH FERDI NAND ZERMELO.

teorema de los cuatro colores Durante siglos, los cartógrafos han conocido que cuatro colores bastan para colorear cualquier geografa mapa (es decir, cualquier división del plano en regiones). Es requería que las regiones que compartían una longitud común de límite se pinte de diferentes colores (pero dos regiones reuniéndose en un punto, como los estados de Arizona y Colorado en un mapa de los Estados Unidos, se puede pintar el mismo tinte). Los cartógrafos también habían observado que el Lo mismo es cierto para cualquier mapa dibujado en una ESFERA (el globo).

La cuestión de si esta observación podría ser resultó cierto matemáticamente fue planteado por primera vez por el inglés erudito Francis Guthrie en 1852. Matemáticos AUGUSTUS DE MORGAN (1806–71) y ARTHUR CAY LEY (1821–95) trabajaron para resolver el problema y, en 1872, alumno de Cayley, Alfred Bray Kempe (1849-1922) produjo el primer intento de una prueba de los cuatro colores conjetura. Desafortunadamente, 11 años después, el académico inglés Percy Heawood (1861-1955) descubrió que Kempe había cometió un error en su trabajo. En 1890 Headwood más tarde demostró que cinco colores siempre serán suficientes para colorear un mapa plano, pero la prueba de que solo cuatro serán realmente suficientes se le escapó. Heawood también miró más allá mapas planos y esféricos e hizo una conjetura general de que si una superficie contiene agujeros g (como TORUS con g = 1 agujero, o una esfera con g = 0 agujeros), entonces cualquier mapa dibujado en esa superficie se puede colorear con

$$\frac{7\ 48+1\sqrt{\quad}}{2}$$

colores, y que existen ejemplos de mapas en estas superficies que requieren precisamente esta cantidad de colores. (Los corchetes indican redondear hacia abajo al entero más cercano).

En 1968 dos matemáticos, Gerhard Ringel y JWT Youngs, probó que Heawood era correcto para todos superficies con dos o más agujeros y para el toro. Desafortunadamente, su trabajo no se aplicó al caso de un esfera y de una BOTELLA DE KLEIN. No fue hasta el siguiente década cuando, en 1976, los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken finalmente estableció que cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa en una esfera (y de ahí el plano, ya que, al hacer un pequeño agujero en el centro de una de las regiones a pintar, un pinchado la esfera se puede estirar y aplanar sobre el plano, y viceversa, una región plana se puede estirar y moldeado en una esfera perforada).

La prueba de Appel y Haken se consideró controvertida en ese momento, ya que utilizó unas 1.200 horas de tiempo de computadora para verificar casi 2,000 spa complicados

Machine Translated by Google

arreglos ciales. (Se argumentó que dado que ningún ser humano podría verificar que la computadora haya completado este trabajo correctamente, entonces el resultado producido no es una prueba válida). La mayoría de los matemáticos de hoy aceptan la validez del trabajo de Appel y Haken y consideran el famoso cuatro Problema de color resuelto.
(Sin embargo, continúa la búsqueda de una prueba simple y elegante que sea fácilmente comprobable por la mano humana).

Es interesante notar que la conjetura de Heawood en realidad falla para el único caso que queda: se sabe que seis colores son suficientes para colorear cualquier mapa dibujado en una botella de Klein (g = 1) , no siete, como predice la fórmula.

Ver también SUELO/TECHO/ PARTE FRACCIONAL FUNCIONES.

Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768–1830) Francés Análisis, ingeniería Nacido el 21 de marzo de 1768, el erudito francés Joseph Fourier es recordado en matemáticas por sus contribuciones fundamentales a la teoría de la conducción del calor y su estudio de las series trigonométricas. Sus avances revolucionarios en estos temas aparecen en su famoso tratado de 1822 Théorie analytique de la chaleur (Teoría analítica del calor). Hoy en día, las SERIES DE FOURIER juegan un papel fundamental en el estudio de la física y la ingeniería, así como en el desarrollo de las matemáticas teóricas.

Colocado en una escuela militar como huérfano a los 10 años, Fourier mostró un gran interés por las matemáticas a esta temprana edad. Enseñó en la misma escuela militar durante cuatro años antes de ingresar a la recién establecida escuela de formación de profesores L'École Normale (más tarde rebautizada como L'École Polytechnique) en 1794. Allí Fourier recibió instrucción en matemáticas de JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) y sobresalió en todos sus estudios.
En 1797, cuando Lagrange renunció como catedrático de análisis y mecánica, Fourier fue nombrado nuevo director del departamento.

Sin embargo, esta posición duró poco, ya que al año siguiente Fourier fue asignado al ejército de Napoleón en la invasión de Egipto. Se le encargó supervisar una variedad de investigaciones arqueológicas y científicas, y fue durante este período de su vida, mientras estaba estacionado en el desierto egipcio, que Fourier desarrolló una fascinación por las matemáticas de la transferencia de calor.

Adoptando un enfoque muy original, Fourier analizó la conducción representando oscilaciones complicadas. ing cantidades como sumas de componentes más simples. Esto lo llevó a su teoría de las series trigonométricas. En 1807, Fourier detalló los resultados de su trabajo en el artículo "Sobre la propagación del calor en cuerpos sólidos", pero los matemáticos de la época, incluido Lagrange, no estaban convencidos de la validez de su enfoque. Fourier reescribió el artículo en 1811 e incluso recibió un premio por su contenido, pero aun así recibió críticas de la comunidad matemática por su falta de rigor y falta de generalidad. Durante otros 10 años, Fourier trabajó para establecer los fundamentos matemáticos de su trabajo y detallar el razonamiento detrás de sus métodos. Finalmente, en 1822, tras la publicación de su famoso tratado, se zanjaron todas las críticas a sus matemáticas y se aceptó el enfoque de Fourier como válido y de fundamental importancia.

Fourier fue elegido para el poderoso cargo de secretario de la Académie of Sciences ese mismo año, y en 1827 fue honrado con la membresía de la ROYAL SOCIETY de Londres.

Se ha conjeturado que Fourier, irónicamente, pudo haber contraído la exótica enfermedad mixedema mientras estuvo en Egipto, que, entre varios síntomas, induce una extrema sensibilidad al frío. Se dice que Fourier mantuvo su vivienda casi insoportablemente caliente y siempre se abrigaba con muchas capas de ropa. Fourier murió de un infarto el 16 de mayo de 1830.

Las series de Fourier han encontrado numerosas aplicaciones en física e ingeniería. Prácticamente todas las ramas de la ciencia que se ocupan de la transferencia de energía a través de ondas (como la acústica, los estudios sísmicos, las comunicaciones inalámbricas, la espectroscopia) utilizan los métodos de Fourier. En un entorno más abstracto, las series de Fourier ahora se ven solo como uno de los infinitos enfoques posibles para descomponer elementos de un ESPACIO VECTORIAL de funciones en términos de elementos básicos. Este cambio de perspectiva ha dado lugar a nuevos conocimientos sobre el estudio de la mecánica cuántica.

Serie de Fourier Cuando un músico toca dos cuerdas en un violín simultáneamente, solo una onda de sonido llega a nuestros oídos: el efecto combinado de las dos notas.

No obstante, el cerebro humano es capaz de decodificar la información que recibe para “escuchar” dos notas distintas tocadas.

Es decir, el cerebro humano es capaz de reconocer ondas sonoras complicadas como sumas de ondas sonoras básicas más sencillas.

Machine Translated by Google

En el siglo XVIII, el matemático y físico francés JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–83) y el matemático suizo LEONHARD EULER (1707–83) trabajaron para describir vibraciones complicadas de cuerdas como sumas de funciones más simples. El matemático suizo Daniel Bernoulli (1700–82) de la famosa FAMILIA BERNOULLI introdujo el uso de funciones trigonométricas en este estudio, un enfoque que más tarde fue completamente desarrollado por el matemático y físico francés JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830), aunque su trabajo estuvo motivado por el estudio de la conducción del calor. Fourier demostró que muchas funciones se pueden representar como sumas infinitas de funciones seno y coseno.

El resultado de escribir una función como suma de funciones trigonométricas se llama hoy serie de Fourier. Como las funciones trigonométricas tienen un ciclo de valor cada 2π en MEDIDA EN RADIANES, se asume en estos estudios que las funciones bajo consideración son en sí mismas periódicas con un período de 2π.

Suponga que f(x) es una función de este tipo. Entonces una serie de Fourier para f es una expresión de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \cdots + b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + \cdots$$

Uno encuentra los valores de las constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $b_1, b_2, \ldots$ integrando. Por ejemplo, dado que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx$, tenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \frac{a_0}{2}(2\pi) = \pi a_0$$

resultando: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$. Multiplicando por sin(x) e integrando se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx + a_1\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)\,dx + a_2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\sin(x)\,dx + \cdots + b_1\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\sin(x)\,dx + b_2\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\sin(x)\,dx + \cdots$$

$$= 0 + 0 + 0 + \cdots + b_1\pi + 0 + \cdots$$

mostrando que $b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx$.

Se puede demostrar que las funciones {1,cos(x),cos(2x), …,sin(x),sin(2x),…} son ORTOGONALES en el sentido de que la integral del producto de dos funciones diferentes cualesquiera de este conjunto es cero. Esta observación nos permite calcular todos los valores $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ mediante este método de multiplicación por una función trigonométrica e integración. Tenemos, en general:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

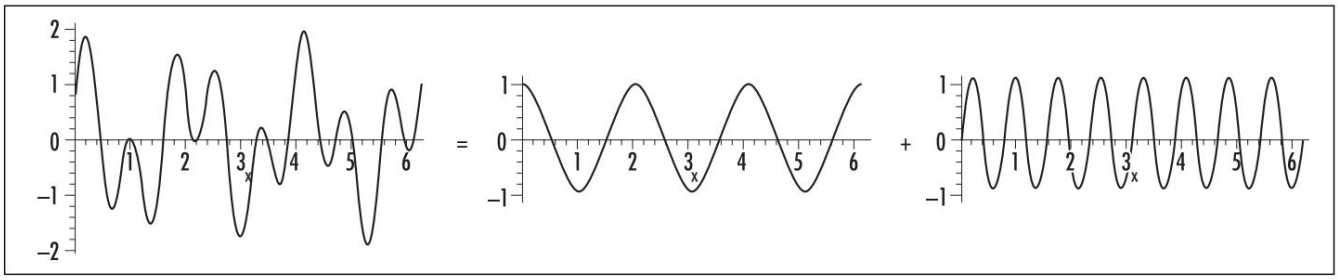
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Los matemáticos han demostrado que si f(x) y su DERIVADA f′(x) son ambas FUNCIONES CONTINUAS, entonces la expansión

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \cdots + b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + \cdots$$

es válida. También han demostrado que, si se interpreta adecuadamente, la expansión sigue siendo válida incluso si para



Una onda como suma de una curva coseno y una curva seno

Machine Translated by Google

f′ no son continuas para un número finito de ubicaciones en el intervalo [–π,π]. Esto muestra, por ejemplo, que las funciones que zigzaguean como un diente de sierra, o saltan hacia arriba y hacia abajo. en valor como una escalera, por ejemplo, todavía puede ser bien aproximado por una suma de funciones trigonométricas. Por ejemplo, tome f(x) como la función en forma de V f(x) = | x| en el intervalo [–π,π], con esta sección de gráfico repetido en toda la recta numérica para producir la imagen de un diente de sierra. Uno comprueba:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx \qquad \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ para n par} \\ -\frac{4}{\pi n^2} \text{ para n impar} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

donación:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \frac{\cos(7x)}{7^2} + \cdots\right)$$

al menos en el intervalo [–π,π]. Nótese, como curiosidad, que si colocamos x = 0 en esta fórmula obtenemos el notable identidad:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Ver también FUNCIÓN ZETA.

fractal Si ESCALAMOS la imagen de un objeto geométrico por un factor k, entonces su tamaño cambia en consecuencia: cualquier línea de longitud a se convierte en una línea de longitud ka, cualquier planar región de área A se convierte en una región plana de área k 2A, y cualquier sólido de volumen V se reemplaza por un sólido de volumen k 3V. Por lo tanto, un objeto puede describirse como de dimensión d si su "tamaño" escala de acuerdo con la regla:

nuevo tamaño = k^d × tamaño antiguo

A principios del siglo XX, los matemáticos descubrieron objetos geométricos de dimensión fraccionaria.
Estos objetos se llaman fractales. Uno de esos objetos es el triángulo de Sier pinski, ideado por el matemático polaco Vaclav Sierpinsky (1882-1969). Comenzando con un equilátero triángulo, uno lo construye quitando sucesivamente cen Triángulos centrales hasta el infinito. El resultado final es un objeto. que posee "autosimilitud", lo que significa que toda la figura está compuesta por tres copias de sí misma, en este caso cada una a media escala. Si la dimensión del objeto es d y el tamaño de todo el objeto es S, entonces de acuerdo con el regla de escala anterior, el tamaño de cada pieza escalada es $\left(\frac{1}{2}\right)^d \times S$. Como toda la figura se compone de tres de estas cifras más pequeñas, tenemos $S = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^d \times S$. esto nos dice que $2^d = 3$, dando $d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58$. Así el

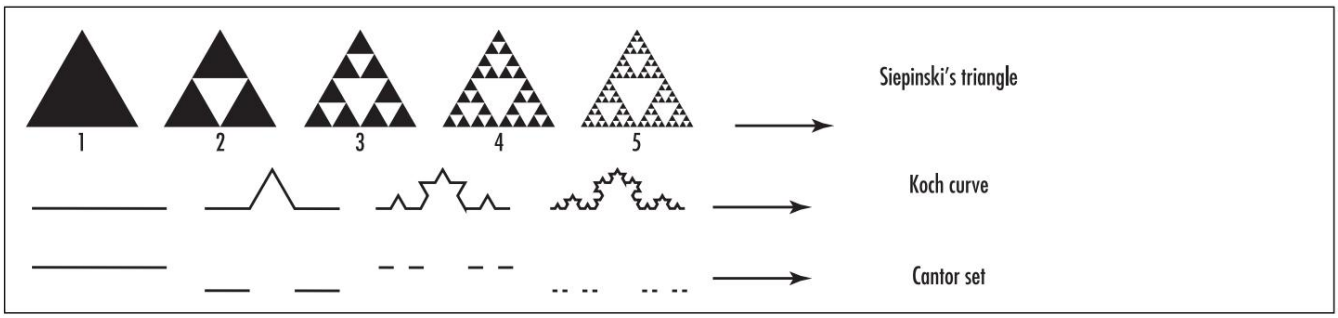
El triángulo de Sierpinski es una construcción geométrica que se encuentra en algún lugar entre ser una longitud y un área.

En 1904 el matemático sueco Nils Fabian Helge von Koch (1870-1924) describió una curva fractal construida de manera similar. Comenzando con un segmento de línea, uno dibuja en su tercio medio dos lados de un triángulo equilátero del mismo tamaño y repite esto construcción ad infinitum en toda línea los segmentos que aparecer. El resultado se llama curva de Koch. también lo es autosimilar: toda la figura se compone de cuatro copias de sí mismo, cada uno a escala de un tercio. El objeto tiene fractal dimensión $d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.26$.

El conjunto de Cantor, inventado por el matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918), se construye a partir de un solo segmento de línea, eliminando su tercio medio y los tercios medios de todos los segmentos de línea que aparecen posteriormente. El resultado es una construcción geométrica, parecerse a nada más que un conjunto de puntos, pero de nuevo con la misma propiedad de autosemejanza: todo el constructo está compuesto por dos copias de sí mismo, cada una a una tercera escala. El conjunto de Cantor es un fractal de dimensión $d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$. No es lo suficientemente grande para ser considerado unidimensional, pero ciertamente es “más” que un conjunto desconectado de puntos aislados.

Los fractales también surgen en la teoría del CAOS y la estudio de los SISTEMAS DINÁMICOS. matemático francés Gaston Maurice Julia (1892–1978) consideró el iteraciones de funciones f que toman NÚMEROS COMPLEJOS como entradas y dan números complejos como salidas. Si z es un número complejo y el conjunto de puntos f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), … están todos trazados en un gráfico, entonces pueden ocurrir dos posibilidades: la secuencia es ilimitada, o los puntos saltan en una región delimitada. El conjunto

Machine Translated by Google



Fractales

de todos los valores z que conducen a una sucesión acotada es llamado el "conjunto de Julia" para f. Es una región en el plano complejo que casi siempre es un fractal. Incluso simple funciones como $f(z) = z^2 + c$, con diferentes valores de la constante c, puede producir estructuras sorprendentemente variadas y hermosas.

Benoit Mandel, matemático francés nacido en Polonia. brot consideró, alternativamente, todos los valores complejos c para el cual la aplicación repetida de la función $f(z) = z^2 + c$, comenzando con el punto z = 0, produce un secuencia acotada. Trazar todos esos puntos c describe un subconjunto del plano complejo hoy llamado el conjunto brot de Mandel. Tiene una estructura extremadamente complicada. En en particular, su límite es un fractal.

El triángulo de Sierpinski también surge de una iteración procedimiento conocido como el "juego del caos":

> Elija un punto al azar dentro de un triángulo equilátero (diagrama (1) arriba) y luego dibuje el punto a medio camino entre éste y uno de los vértices del triángulo elegido al azar. (Este el punto estará en algún lugar de la región sombreada del diagrama (2) arriba.) Ahora dibuje el punto a medio camino entre este nuevo punto y otro vértice elegido al azar. (Este punto mentirá en algún lugar de la región sombreada del diagrama (3) arriba.) Imagine que continuamos este proceso indefinidamente. El triángulo de Sierpinski representa todos los posibles destinos "finales" de este punto como este El juego se juega un número infinito de veces.

Muchos objetos en la naturaleza parecen poseer las propiedades de autosimilitud de los fractales. por ejemplo, el forma límite de una nube se ve igual de irregular bajo aumento como lo hace cuando se mira directamente. Los científicos han descubierto que es posible asignar dimensiones fractales a varios objetos en la naturaleza. El estudio de los fractales ha desde entonces encontró aplicaciones para el estudio de la formación de cristales, la mecánica de fluidos, el crecimiento urbano, la lingüística, la economía y muchas otras áreas diversas.

Gran parte del trabajo en geometría fractal fue iniciado por Benoit Mandelbrot, quien también acuñó el término fractal.

dimensión fractal Ver FRACTAL.

fracción Cualquier número escrito como un COCIENTE, es decir, como un número a dividido por otro b, es una fracción. Nosotros escribe a/b y llama al dividendo a el numerador de la fracción y el divisor b el denominador de la fracción ción Se supone que b no es cero.

Es apropiado considerar las fracciones simplemente como Respuestas a problemas de división. Por ejemplo, si seis pasteles se comparten por igual entre tres niños, entonces cada niño recibe dos pasteles. Escribimos: 6/3 = 2. Similarmente, si uno pastel se comparte entre dos niños, entonces la cantidad de pastel cada niño recibe se escribe 1/2. Nosotros, apropiadamente, llamamos esta cantidad "la mitad". Claramente, si un pastel se comparte con solo un niño, entonces ese niño recibe todos los pasteles. Este da la observación:

Regla del denominador de la unidad: $\frac{a}{1} = a$

Toda propiedad fraccionaria se puede explicar con esto modelo simple de reparto de tartas. Por ejemplo, tenemos:

Ley de Cancelación: Para cualquier valor x distinto de cero y fracción que tenemos $\frac{a}{b}$ $\frac{xa}{xb} = \frac{a}{b}$.

Por ejemplo, si a los pasteles se comparten entre b niños, entonces duplicar el número de pasteles y duplicar el número

Machine Translated by Google

de niños no altera la cantidad de pastel de cada niño recibe: $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$. En efecto, hemos "cancelado" un factor común del numerador y el denominador de la fracción. Este principio también muestra que es posible expresar la misma fracción en un número infinito de formas equivalentes. Por ejemplo, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{30}{50}$, y $\frac{120}{200}$ todos representan la misma fracción.

Al continuar con el modelo de compartir pasteles, vemos que si se comparten a1 tartas entre b chicos, entonces otras a2 tartas se comparten entre los mismos niños, entonces en efecto a1 + a2 los pasteles se repartieron entre esos muchachos. Esto produce la regla:

Suma de fracciones iguales: $\frac{a1}{b} + \frac{a2}{b} = \frac{a1 + a2}{b}$

proporcionando así un método para sumar fracciones que comparten el mismo denominador. Para sumar fracciones con diferentes denominadores, convierta cada fracción a formas que comparte un DENOMINADOR COMÚN y luego suma. Para ejemplo, sumar y escribir $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ $= \frac{8 \times 2}{8 \times 5} + \frac{5 \times 3}{5 \times 8} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40}$ para obtener la respuesta. Esto da $\frac{31}{40}$ la regla:

Suma de fracciones diferentes: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{da + ac}{bd}$

La resta se realiza de manera similar.

Si, al compartir pasteles, uno quisiera duplicar el cantidad de pastel que recibe cada niño, simplemente se podría duplicar el número de pasteles disponibles. Esto sugiere la regla:

Regla del producto: $x \times \frac{a}{b} = \frac{xa}{b}$

Esto muestra, junto con la ley de cancelación, que multiplicar una fracción por su denominador produce como resultado su numerador:

Regla del producto del denominador: $b \times \frac{a}{b} = \frac{ba}{b} = a$ un $\frac{a}{1}$

La regla del producto también muestra cómo multiplicar por fracciones Por ejemplo, para calcular $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$ observar $\frac{2}{3} \times 4$ eso $\frac{\frac{2}{3} \times 4}{7}$ por la regla del producto. multiplicando el numerador y el denominador cada uno por tres da $\frac{3 \times \frac{2}{3} \times 4}{3 \times 7}$, cual es $\frac{2 \times 4}{3 \times 7}$. Este proceso se resume:

Multiplicación de Fracciones: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

La siguiente regla de división de fracciones se demuestra en un manera similar:

División de fracciones: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

(Multiplique el numerador y el denominador cada uno por b para obtener $\frac{a}{b \times \frac{c}{d}}$. Ahora multiplica el numerador y d denominador cada uno por d para producir $\frac{ad}{bc}$.)

tipos de fracciones

Al escribir una fracción genérica a/b, a menudo se supone que a y b son cada uno un NÚMERO ENTERO. Si esto es de hecho el caso, entonces la fracción se llama "común" fracción (o, a veces, una fracción "simple" o "vulgar"). Cada fracción común representa un RACIONAL NÚMERO. Aunque hay un número infinito de racionales números, sorprendentemente, no ocupan absolutamente ningún espacio en la LÍNEA DE NÚMEROS.

Una fracción común con numerador positivo y denominador se llama "propio" si su numerador es menor que su denominador, e “impropio” en caso contrario. (De este modo una fracción propia representa una cantidad menor que uno, y una fracción impropia una cantidad mayor que o igual a uno.) Un “número mixto” es un número que consta de un entero y una fracción propia. Por ejemplo, $3\frac{1}{2}$ es un número mixto.

Una fracción cero es una fracción con numerador igual a cero. Si no se comparten pasteles entre los niños b , entonces cada uno niño recibe pastel cero. Así toda fracción cero es igual a cero: 0/b = 0.

Una fracción “indefinida” es una fracción con denominador igual a cero. Tal fracción es inválida, porque no puede tener ningún valor significativo. (Si, por ejemplo, 2/0 tenía valor x, luego multiplicar por el denominador produce el absurdo 2 = 0 × x = 0. Además, dividir

Machine Translated by Google

cero por cero podría, supuestamente, tener cualquier valor deseado. Por ejemplo, se podría argumentar que 0/0 = 17 observando que 0 × 17 = 0 es un enunciado verdadero. no hay un solo valor apropiado para esta cantidad.)

Una fracción "unitaria", también conocida como EGIPCIA FRACCIÓN, es una fracción propia con numerador igual a uno. Una fracción “compleja” es aquella en la que el numerador o el denominador, o ambos, es una fracción. Por ejemplo, 3/5

$\overline{4/7}$ es una fracción compleja. La división de fracciones regla proporciona los medios para simplificar fracciones complejas.

Ver también CANCELACIÓN; FRACCIÓN CONTINUA; REPRESENTACIÓN DECIMAL; FRACCIONES PARCIALES; POR PORCENTAJE; RELACIÓN; RACIONALIZANDO EL DENOMINADOR; FORMA REDUCIDA.

función de parte fraccionaria Ver SUELO/TECHO/ FUNCIONES DE LA PARTE FRACCIONARIA.

frecuencia En ESTADÍSTICA, la frecuencia absoluta de un valor observado es el número de veces que ese valor aparece en un conjunto de datos. Por ejemplo, en la muestra 4, 6, 3, 4, 4, 1, 7, 3, 7, 9, 8, 4, 4, 5, 2, la frecuencia absoluta de la observación 4 es cinco, y la de 8 es uno.

La frecuencia relativa de un valor observado es la proporción de veces que aparece. Esto se calcula dividiendo la frecuencia absoluta de la observación por la número total de entradas en el conjunto de datos. Por ejemplo, la frecuencia relativa de 4 en el conjunto de datos anterior es 5/15 = 1/3, y el de 8 es 1/15.

Se puede calcular la frecuencia relativa de entradas en un conjunto de datos infinito haciendo uso de un LÍMITE. Para Por ejemplo, los matemáticos han demostrado que el 5,8% de comienzan las potencias de dos 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,… con un 7. (La primera potencia para hacerlo es 246.) Por esto ellos significa que si uno fuera a examinar las primeras N potencias de dos, aproximadamente el 5,8 por ciento de ellos comienzan con un 7. Esta aproximación se hace más exacta tomando valores cada vez mayores de N.

En física, el término frecuencia se define como la número de ciclos que ocurren por unidad de tiempo en un sistema que oscila (como un péndulo, una onda, una vibración cadena, o una corriente alterna). El símbolo utilizado para frecuencia suele ser f, aunque la letra griega v es a menudo se emplea para la frecuencia de la luz u otra radiación electromagnética. Una unidad de frecuencia se llama hercios (Hz).

distribución de frecuencia Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

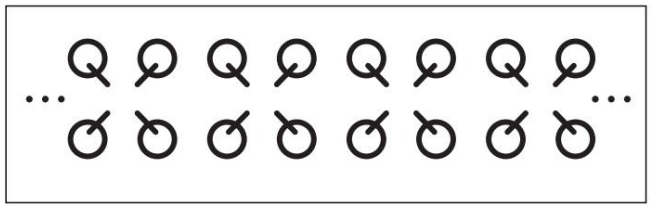
polígono de frecuencia Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

patrón de friso (adorno de banda) Un diseño en una tira infinita que consta de copias repetidas de un solo motivo se llama patrón de friso. (En la arquitectura clásica, un friso es una estructura horizontal, generalmente impresa con decoración, descansando a lo largo de la parte superior de algunas columnas. El moderno equivalente es una tira horizontal de papel tapiz que se usa para decorar la parte superior de una pared justo debajo del techo).

Los matemáticos están interesados en la SIMETRÍA Propiedades de los patrones de friso. Cada patrón de friso, por definición, es simétrico bajo una T DE TRASLACIÓN en el dirección de la tira. Un patrón de friso también podría ser simétrica respecto a una REFLEXIÓN horizontal (H), una reflexión ver tical (V), una ROTACIÓN de 180° respecto a un punto en el diseño (R), un REFLEJO DESLIZANTE (G), o alguna colección de estas cinco transformaciones básicas. El primer friso El patrón que se muestra a continuación posee las cinco simetrías.

No todas las combinaciones de T, H, V, R y G representan las simetrías de un patrón de friso. Por ejemplo, un friso el patrón no puede poseer las simetrías T y H solas, pues la composición de estas dos simetrías produce una reflexión deslizante, por lo que el patrón debe poseer también la simetría G. Del mismo modo, cualquier patrón de friso que posea las simetrías H y V también deben poseer la simetría R, ya que el efecto combinado de una vertical y una horizontal la reflexión es una rotación. Razonando de esta manera, uno puede Demuestre que solo hay siete combinaciones de tipos simétricos que podría tener un patrón de friso. Estos son:

yo solo	T, H y G
T y V	T, V, R y G
T y R	T, H, V, R y G
T y G	



Un patrón de friso

Machine Translated by Google

Por esta razón, los matemáticos dicen que solo hay siete patrones de frisos posibles.

Un patrón de papel tapiz es el análogo bidimensional de un patrón de friso. Los matemáticos han demostrado que hay exactamente 17 patrones de papel tapiz diferentes.

tronco de cono Si un sólido geométrico es cortado por dos planos paralelos, entonces la parte del sólido entre los dos planos se llama tronco de cono. Un tronco también se produce cortando el sólido por un plano paralelo a la BASE del sólido. Por ejemplo, un tronco de cono es la forma que se produce cortando la parte superior de un cono (con el corte paralelo a la base). Un tronco piramidal se hace cortando la parte superior de una pirámide, nuevamente con el corte paralelo a la base.

La altura h de un tronco es la distancia entre los dos planos paralelos. El volumen de un tronco cónico o piramidal viene dado por la fórmula:

$$\frac{1}{3}h\left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}\right)$$

donde A1 y A2 son las áreas de las caras superior e inferior.

Véase también CONO; SÓLIDO DE REVOLUCIÓN; VOLUMEN.

Prueba F Ver ESTADÍSTICAS: INFERENCIAL.

función (mapeo) Cualquier procedimiento o regla que asigna a cada miembro de un conjunto X uno, y sólo uno, elemento de otro conjunto Y se denomina función. Por ejemplo, la relación "es la madre de" es una función del conjunto X de todas las personas del mundo al conjunto Y de todas las mujeres: a cada persona se le "asigna" una, y sólo una, madre biológica. La regla de que los números elevan al cuadrado toma miembros del conjunto X = {1,2,3,4} a los elementos correspondientes del conjunto Y = {1,4,9,16}.

Si f es un símbolo usado para denotar una función de un conjunto X a un conjunto Y, entonces escribimos f: X → Y y llamamos a X el dominio de f e Y el codominio de f. También decimos que f "asigna" elementos de X a elementos de Y. Si un elemento específico x del conjunto X se asigna al elemento y en Y, entonces escribimos y = f(x). (Los matemáticos a veces llaman a x una "entrada" y al valor y la correspondiente "salida"). Por ejemplo, si f es la función cuadrática descrita arriba, entonces tenemos f(2) = 4 y f(3) = 9. Si "M" denota la función "es la madre de", y la madre de Lawrence es Trenyce, entonces podemos escribir M(Lawrence) = Trenyce. A veces, los matemáticos usan flechas con tabuladores para enfatizar la noción de mapeo y escriben, por ejemplo, M: Lawrence |→ Trenyce.

Note que no todos los elementos de Y necesitan ser el resultado de un mapeo. (No todas las mujeres son madres, por ejemplo). Además, es posible que dos o más elementos de X se asignen al mismo elemento de Y. (Dos personas podrían tener la misma madre, por ejemplo). El conjunto de todas las salidas posibles f(x) para una función dada f se llama el rango (o la IMAGEN) de la función. Por ejemplo, el rango de la función "es madre de" M, es el conjunto de todas las mujeres que han dado a luz.

En matemáticas, normalmente se estudian funciones entre conjuntos de números, generalmente descritas por fórmulas. Por ejemplo, la función de elevar al cuadrado se describe mediante la ecuación $f(x) = x^2$. La función $y = 3x + 2$, por ejemplo, describe la regla "asignar a cualquier número x el número y dos más que tres veces x".

En este contexto, x se denomina variable independiente e y variable dependiente. (Su valor depende del valor de x). UNA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN es una representación pictórica de una función que opera con números.

Se dice que las ecuaciones, como $y = x^2$ y $y = 3x + 2$, en las que la variable dependiente se expresa en términos de la variable independiente, están en "forma explícita".

Por el contrario, se dice que las expresiones en las que tanto la variable independiente como la dependiente aparecen en un lado del signo de igualdad están en "forma implícita". Por ejemplo, las ecuaciones $2x – y = 5$ y $x = 9$ están en forma implícita. Las ecuaciones implícitas pueden, o no, definir y como una función de x. Por ejemplo, la primera ecuación presentada arriba se puede reescribir $y = 2x – 5$, dando la forma explícita de una función. La segunda relación, sin embargo, no representa una función: no hay un valor único de y asociado a cada valor de x. (Por ejemplo, con x = 0, y podría ser 3 o –3).

Cualquier conjunto de pares ordenados (x,y) que satisfagan alguna restricción dada se denomina relación. Por ejemplo, el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) que satisfacen la ecuación $x^2 = 9$ es una relación. Gráficamente, esta relación representa + y envía un círculo de radio tres. Una relación es una función si nunca se da el caso de que dos pares ordenados distintos tengan el mismo valor de coordenada x (es decir, ningún valor de x único tiene dos valores de y diferentes asociados). Esta condición a veces se denomina "prueba de la línea vertical".

Machine Translated by Google

Historia de las funciones

Desde la época de la antigüedad, los estudiosos se interesaron por identificar reglas o relaciones entre cantidades. Por ejemplo, los antiguos egipcios sabían que la circunferencia de un círculo está relacionada con su diámetro a través de una razón fija que ahora llamamos PI, y los eruditos chinos, y más tarde los pitagóricos, sabían que los tres lados de un triángulo rectángulo satisfacen la relación simple dada por el TEOREMA DE PITÁGORAS . Aunque estos resultados no se expresaron en términos de fórmulas y símbolos (la evolución del simbolismo algebraico tomó muchos siglos), los estudiosos sabían que el valor de una cantidad podía depender del valor de otras cantidades bajo consideración. Aunque no explícito, la noción de una "función" estaba en mente.

A mediados de la década de 1300, la matemática francesa NICOLE ORESME descubrió que una cantidad uniformemente variable (como la posición de un objeto que se mueve con velocidad uniforme, por ejemplo) podía representarse gráficamente como un "gráfico", y que el área debajo del gráfico representa el cambio total de la cantidad. Oresme fue el primero en describir una forma de graficar la relación entre una variable independiente y una dependiente y, además, demostrar la utilidad de la tarea.

En 1694, el matemático alemán GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, co-descubridor del CÁLCULO, acuñó el término función (en latín: functio) para referirse a la PENDIENTE de la curva, una definición que tiene muy poco en común con el uso actual de la palabra. El gran matemático suizo LEONHARD EULER (1707-1783) reconoció la necesidad de hacer explícita la noción de una relación entre cantidades y definió el término función como una cantidad variable que depende de otra cantidad. Euler introdujo la notación f (x) para "una función de x" y promovió la idea de una función como fórmula. Basó todo su trabajo de cálculo y ANÁLISIS en esta idea, lo que allanó el camino para que los matemáticos vieran las cantidades trigonométricas y los logaritmos como funciones. Esta noción de función unificó posteriormente muchas ramas de las matemáticas y la física.

En 1822, el físico y matemático francés JEAN BAP TISTE JOSEPH FOURIER presentó un trabajo sobre el flujo de calor. el representa sentó funciones como sumas de funciones seno y coseno, pero comentó que tales representaciones pueden ser válidas solo para un cierto rango de valores. Esto llevó más tarde al matemático alemán PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859) a proponer una definición más precisa:

> Una función es una correspondencia que asigna un valor único de una variable dependiente a cada valor permitido de una variable independiente.

Esta, en un nivel elemental, es la definición generalmente aceptada hoy.

A fines del siglo XIX, el matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918) intentó basar todas las matemáticas en el concepto fundamental de un CONJUNTO. Debido a que los términos variable y relación son difíciles de especificar, Cantor propuso una definición alternativa de función:

> Una función es un conjunto de pares ordenados en los que cada primer elemento es diferente.

Esta idea se basa en el hecho de que la gráfica de una función no es más que una colección de puntos (x, y) sin dos valores de y asignados al mismo valor de x. La definición de Cantor es muy general y se puede aplicar no sólo a números sino también a conjuntos de otras cosas. En consecuencia, los matemáticos llegaron a pensar en las funciones como "asignaciones" que asignan a elementos de un conjunto X, denominado dominio de la función, elementos de otro conjunto Y, denominado codominio. (A cada elemento x de X se le asigna un solo elemento de Y.) Por lo tanto, se puede representar una función como un diagrama de flechas en el que se dibuja una flecha desde cada miembro de Y.

el dominio a su correspondiente miembro del codominio.
La función es entonces la colección completa de todas estas correspondencias.

Los textos avanzados de matemáticas actuales suelen presentar las tres definiciones de una función (como una fórmula, como un conjunto de pares ordenados y como un mapeo) y los matemáticos suelen trabajar con los tres enfoques.

Véase también GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Por ejemplo, los puntos (0,–3) y (0,3) en el círculo de radio tres tienen el mismo valor de primera coordenada, y la línea vertical en x = 0 intercepta la gráfica del círculo en dos ubicaciones. El círculo es una relación, pero no es una función.

Se dice que una función f:X → Y es "sobre" (o "sobreyectiva") si cada elemento del codominio Y es el imagen de algún elemento de X. (Es decir, cada elemento y en Y es de la forma y = f(x) para algún x en X.) Por ejemplo, la función de elevar al cuadrado pensada como un mapa del conjunto {1 ,2,3,4} al conjunto {1,4,9,16} está sobre. Sin embargo, no es sobre cuando se piensa en él como un mapa del conjunto de todos los números reales al conjunto de todos los números reales: ningún número negativo resulta de la operación de elevar al cuadrado.

Machine Translated by Google

Se dice que una función f:X → Y es "uno a uno" (o "inyectiva") si no hay dos elementos diferentes de X que produzcan el mismo resultado. Por ejemplo, la función “es la madre de” no es uno a uno: dos personas diferentes pueden tener la misma madre. La función de elevar al cuadrado, pensada como un mapa del conjunto {1,2,3,4} al conjunto {1,4,9,16}, es uno a uno. Sin embargo, no es uno a uno cuando se considera como un número del conjunto de todos los números reales al conjunto de todos los números reales: los números 2 y –2, por ejemplo, dan el mismo resultado.

Una función que es uno a uno y sobre se llama una "biyección" (oa veces una PERMUTACIÓN). Una biyección f:X → Y tiene la propiedad de que cada elemento de Y “viene de” uno, y sólo uno, elemento de X. Así es posible definir la función inversa, denotada f –1: Y → X, que asocia a cada elemento y de Y el elemento de X de donde procede. Algebraicamente, si la variable dependiente y se da como una fórmula explícita en términos de x, entonces la función inversa determina la variable independiente x como una fórmula en términos de y. Por ejemplo, el inverso de la función y = 3x + 2 viene dado por x = (y – 2)/3. (Es decir, la operación inversa de “triplicar un número y sumar dos” es “restar dos y luego dividir por tres”). Los roles de las variables x e y han cambiado y, por lo tanto, la gráfica del inverso de un La función se puede encontrar cambiando los ejes x e y en el gráfico de la función original.

En la teoría de la CARDINALIDAD, las biyecciones juegan un papel clave para determinar si dos conjuntos X e Y tienen o no el mismo "tamaño".

Véase también NÚMERO ALGEBRAICO; HISTORIA DE LAS FUNCIONES (ensayo).

teorema fundamental del álgebra (el orema de d'Alembert) El siguiente teorema importante en matemáticas se considera fundamental para la teoría del álgebra:

> Todo polinomio p(z) = anz n–1 + an–1z + a1z + a0 con +…+ coeficientes ai números reales o complejos, an ≠ 0, tiene al menos una raíz.
> Es decir, existe al menos un número complejo α tal que p(α) = 0.

Por el TEOREMA DEL FACTOR debemos tener p(z) = (z – α)q(z) para algún polinomio q(z) de grado n – 1.
Aplicando el teorema fundamental del álgebra al polinomio q(z), y nuevamente a cada polinomio de grado mayor que uno que aparece, se muestra que el polinomio p(z) se factoriza completamente en n (no necesariamente distintos) factores lineales. Tenemos como consecuencia:

> Todo polinomio p(z) = anz n–1 + an–1z + a1z + a0 con +…+ coeficientes ai números reales o complejos, an ≠ 0, se factoriza completamente como p(z) = an (z – α1)(z – α2)…(z – αn) para algunos números complejos α1 , α2 , …, αn .

En consecuencia, en el CAMPO de los números complejos, todo polinomio de grado n tiene precisamente n raíces (cuando se cuenta con multiplicidad). Por ejemplo, el polinomio z – 2z + 1 se factoriza como (z – 1)(z – 1) (z2z i)(z + i)2con la raíz 1 apareciendo dos veces. Los matemáticos llaman a un campo algebraicamente cerrado si cada polinomio de grado n con coeficientes de ese campo tiene precisamente n raíces en ese campo. El conjunto de los números complejos es así algebraicamente cerrado. (El campo de los números reales, sin embargo, no lo es. El polinomio p(x) = x , por ejemplo, no se factoriza dentro de los reales). 2 + 1,

El teorema fundamental del álgebra fue conjeturado por primera vez por el matemático holandés Albert Girard en 1629 en su investigación de las raíces imaginarias. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) fue el primero en demostrar el resultado en su tesis doctoral de 1799. Más tarde volvió a demostrar el resultado varias veces a lo largo de su vida utilizando una variedad de enfoques matemáticos diferentes, y le dio el nombre de "teorema fundamental del álgebra". En Francia, el resultado se conoce como el teorema de d'Alembert en honor al trabajo de JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) y sus muchos (infructuosos) intentos de demostrarlo.

Para probar el teorema, basta considerar un polinomio complejo con coeficiente principal igual a uno: n– 1 +…+ a1z + a0 . (Dividir entre si a0 = 0, entonces el p(z) = z + an –1z an si es necesario). Observe que polinomio tiene una raíz, concretamente z = 0, y no hay nada más que establecer. Supongamos entonces que a0 es un número complejo diferente de cero.

Utilizando la FÓRMULA DE EULER , considere la variable z como un número complejo de la forma z = Rei = R(cosθ + isinθ), donde R es un número real distinto de cero y θ es un ángulo.
Observe que como θ varía de cero a 360°, z = R(cosθ + isinθ) traza un círculo de radio R y z Rn (cos(nθ) + isin(nθ)) gira = Rn e enθ = alrededor de un círculo de radio Rn n veces. Observe también que si R es grande, entonces p(z) = z + an–1z n–1 +…+ a1z + a0 = z un 1 + + + z un0 / z − 1 / z se aproxima bien como z n (1 + 0 +…+ 0 + 0) = z . De este modo

Machine Translated by Google

como θ varía de cero a 360°, nuevamente para R grande, p(z) traza de cerca un círculo de gran radio Rn (nuevamente dando vueltas n veces). Si R es lo suficientemente grande, este círculo seguramente encierra el punto (0,0) en el plano complejo. Si R se reduce al valor cero, entonces la traza de p(z) cuando θ varía es un círculo de radio 0 alrededor del punto p(0) = a0 .
Es decir, la traza de p(z) es el punto a0 en el plano complejo. Entre estos dos extremos debe haber algún valor intermedio de R para el cual la traza de p(z) pase por el origen (0,0). Es decir, hay un valor de α en el círculo de este radio R para el cual p(α) = 0. Esto prueba el teorema.

teorema fundamental de la aritmética (teorema de factorización única) Este resultado fundamental de la aritmética afirma:

> Todo entero mayor que uno puede expresarse como producto de factores primos de una y sólo una manera, hasta el orden de los factores. (Si el número ya es primo, entonces es un producto con un término).

Por ejemplo, el número 100 se puede escribir como 2 × 2 × 5 × 5. El teorema fundamental de la aritmética afirma que el número 100 no se puede escribir como producto de un conjunto diferente de números primos.

Muchos niños de primaria están familiarizados con el proceso de factorización con la ayuda de un árbol de factores. A menudo se considera evidente que los números primos que uno obtiene como factores siempre serán los mismos, sin importar las elecciones que haga en el camino para construir el árbol. Sin embargo, se requiere una prueba de esto.

Es sencillo ver que cualquier número n tiene, como mínimo, alguna descomposición en factores primos: si n es primo, entonces n es un producto de primos con un término en él. Si n no es primo, la n se puede escribir como un producto de dos factores: n = a × b. Si tanto a como b son primos, no hay nada más que hacer. De lo contrario, a y b pueden factorizarse. Continúe de esta manera. Este proceso se detiene cuando todos los factores considerados son números primos.

Que la descomposición en factores primos es única se sigue de la siguiente propiedad de los números primos:

> Si un producto a × b es igual a un múltiplo de un número primo p, entonces uno de a o b debe ser en sí mismo un múltiplo de p.

(Para ver por qué esto es cierto, suponga que a no es ya un múltiplo de p. Dado que p es primo, esto significa que el único factor que p y a pueden tener en común es 1. Por el ALGORITMO EUCLIDEO podemos encontrar números x e y de modo que 1 = px + by. Multiplicando a través de b da: b = pbx + aby. El primer término en esta suma es un múltiplo de p, y también lo es el segundo ya que ab lo es. Esto muestra que b debe ser un múltiplo de p, si a no lo es).

Supongamos, por ejemplo, que encontramos las siguientes dos factorizaciones en primos del mismo número:

$$7 \times 13 \times 13 \times 29 \times 29 \times 29 \times 41 = 19 \times 19 \times 23 \times 23 \times 37 \times 61$$

La cantidad de la izquierda es sin duda un múltiplo de 7, lo que significa que la cantidad de la derecha también lo es. Por la propiedad descrita anteriormente, esto significa que uno de los factores: 19, 23, 37 o 61 es un múltiplo de siete. Dado que cada uno de estos factores es primo, esto es imposible. En general, esta línea de razonamiento muestra que los primos que aparecen en dos factorizaciones de un número deben ser iguales. (También muestra, por ejemplo, que ninguna potencia de 7 podría ser igual a una potencia de 13, y que ninguna potencia de 6 es divisible por 14).

EUCLID, alrededor del año 300 a. C., sabía que las factorizaciones de números primos son únicas.

Tenga en cuenta que, en estas consideraciones, es vital que 1 no se considere primo; de lo contrario, cada número tendría infinitas representaciones diferentes como producto de factores primos. (Por ejemplo, podríamos escribir: 6 = 2 × 3 = 1 × 2 × 3 = 1 × 1 × 2 × 3, y así sucesivamente).

Escribir números en términos de sus factores primos ayuda a identificar rápidamente los factores comunes y los múltiplos comunes. Por ejemplo, si a = p1 y b = p1 posiblemente$^{\beta 1}$p2 n2…pk cero (esto ^{m1}p2 m2…pk mk , nk con los números ni y mi asegura que cada número se exprese a través de la misma lista de números primos), entonces el MAYOR DIVISOR COMÚN MÁS GRANDE de a y b es el número:

$$\text{mcd}(a,b) = p1^{\alpha 1} p2\ \alpha 2 \ldots pk\ \alpha k$$

siendo cada αi el menor de ni y mi , y el MENOS MÚLTIPLO COMÚN de a y b es:

$$\beta 1\ \text{mcm}(a,b) = p1 p2\ \beta 2 \ldots pk\ \beta k$$

siendo cada βi el mayor de ni y mi . Esto prueba la relación:

Machine Translated by Google

$$\text{mcm}(a,b) = \frac{ab}{\text{mcd}(a,b)}$$

El teorema fundamental de la aritmética se utiliza para demostrar la irracionalidad de las raíces de los números enteros. Precisamente, se puede demostrar que la raíz cuadrada de un entero positivo a es un número racional si, y sólo si, a es un cuadrado perfecto (es decir, a = b 2 para algún número entero b). Esto se establece de la siguiente manera:

> Supongamos que $\sqrt{a}$ es una fracción. Entonces $\sqrt{a} = n/m$ para algunos números enteros n y m:
>
> Al elevar al cuadrado y simplificar se obtiene $am^2 = n^2$. El factorización prima de n se obtiene una factorización prima de n 2 con la propiedad de que cada número primo que aparece lo hace un número par de veces. Como esta es la factorización en primos de am2 y los primos que aparecen en m2 ya lo hacen un número par de veces, se deduce que los primos que aparecen en la factorización de a lo hacen también un número par de veces. Seleccionar un primo de cada par de primos que aparece produce un número entero b con la propiedad $b^2 = a$. Así, la suposición de que $\sqrt{a}$ es racional nos lleva a concluir que a es un cuadrado perfecto.

En consecuencia, dado que el número 2, por ejemplo, no es un cuadrado perfecto, no puede darse el caso de que $\sqrt{2}$ sea racional. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ debe ser un número irracional. (Un argumento similar establece esa $\sqrt{a}$ es racional si, y solo si, a es un enésima potencia perfecta.)

Véase también FACTOR COMÚN; MÚLTIPLO COMÚN; FACTOR.

teorema fundamental del cálculo La teoría del CÁLCULO desarrolla métodos para calcular dos cantidades importantes asociadas con las curvas, a saber, las pendientes de las rectas tangentes a las curvas y las áreas de las regiones limitadas por las curvas. Aunque los problemas aislados relacionados con estos temas se han estudiado desde la antigüedad (ver el ensayo HISTORIA DEL CÁLCULO), durante mucho tiempo no se desarrolló ningún enfoque o técnica unificada para resolverlos. En la década de 1670 se produjo un gran avance cuando GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ en Alemania y SIR ISAAC NEWTON en Inglaterra descubrieron de forma independiente una relación inversa fundamental entre el problema de la tangente (diferenciación) y el problema del área (integración). Su resultado, hoy conocido como teorema fundamental del cálculo, une las dos partes del tema y es sin duda el hecho más importante de todas las matemáticas.

Leibniz y Newton reconocieron la importancia del resultado, desarrollaron las ideas que se derivan de él y aplicaron los resultados consiguientes para resolver problemas de ciencia y geometría con lo que solo puede describirse como un éxito espectacular. Su descubrimiento del teorema fundamental es, en esencia, el descubrimiento del cálculo.

El teorema tiene dos partes. Sea y = f(x) una curva continua. Si A(x) representa el área bajo la curva desde la posición a hasta la posición x, entonces la TASA DE CAMBIO de área, $\frac{dA}{dx}$, es dado por:

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Observando que el área bajo la curva entre las posiciones x y x + h se puede aproximar como un rectángulo de ancho h y alto f(x), tenemos $A(x + h) – A(x) \approx dA\ dx$ $f(x)\cdot h$. Por lo tanto, $\frac{dA}{dx} \approx \lim_{h \to 0} \frac{f(x)h}{h} = f(x)$. Los detalles de tanto, el argumento se puede hacer riguroso para probar:

> La tasa de cambio del área bajo una curva y = f(x) con respecto ax es f(x).

En términos generales, "tomar la DERIVADA de un INTE GRAL devuelve la función original". En particular, la función A(x) es una de las antiderivadas de f(x). El TEOREMA DEL VALOR MEDIO, sin embargo, muestra que si F(x) es cualquier otra antiderivada de f(x), entonces debe diferir de A(x) solo por una constante: A(x) = F(x) + c . Observando que A(a) = 0, obtenemos: A(x) = F(x) – F(a). En particular, el área bajo la curva y = f(x) desde x = a hasta x = b es A(b) = F(b) – F(a) . Como esta área generalmente se denota $\int_a^b f(x)dx$, esto establece la segunda parte del teorema fundamental del cálculo:

> Si f(x) es una función continua y F(x) es cualquier antiderivada de f(x), entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) – F(a)$.

Esta segunda observación es el resultado clave: transforma el muy difícil problema de evaluar áreas (a través de los límites de las sumas) en el problema mucho más fácil de encontrar antiderivadas. Por ejemplo, para calcular el área bajo la parábola y = x 2 de x = 3 a x = 12, simplemente

Machine Translated by Google

tenga en cuenta que $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es una antiderivada de la función en cuestión, $F'(x) = x^2$. El área deseada es de este modo $\frac{1}{3}(12) - \frac{1}{3}(3)^3 = 33$ unidades al cuadrado. La totalidad El empuje del CÁLCULO INTEGRAL se transforma en consecuencia en el estudio del CÁLCULO DIFERENCIAL empleado a la inversa.

Véase también ANTIDIFERENCIACIÓN.

teorema fundamental de las isometrías Sea ABC un triángulo en el plano. Entonces, la ubicación de cualquier punto P en el plano está completamente determinada por los tres números que representan sus distancias desde los vértices del triángulo. Toda TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA que conserva distancias se denomina isometría. Si una isometría lleva los puntos A, B y C a las ubicaciones A′, B′ y C′, respectivamente, entonces también lleva el punto P al único punto P′ con distancias coincidentes desde A′, B′ y C ′.

Así, una isometría está completamente determinada por su efecto sobre los vértices de cualquier triángulo en el plano.

Se necesitan tres REFLECCIONES, como máximo, para mapear tres vértices A, B y C de un triángulo a tres vértices A′, B′ y C′ de otro triángulo congruente. (Primero reflexione a lo largo de la bisectriz perpendicular de AA′ para llevar el punto A a la ubicación A′. Luego, reflexione a lo largo de una línea que pasa por A′ para llevar la imagen de B a B′. Es posible que se necesite una reflexión más para luego enviar la imagen de C a C′.) Esta observación prueba el teorema fundamental de las isometrías:

> Cada isometría del plano es la composición de a lo sumo tres reflexiones.

Lógica difusa En 1965, el ingeniero eléctrico iraní Lofti Zadeh propuso un sistema de lógica en el que se pueden asignar grados de verdad a las declaraciones. Por ejemplo, si Betty es alta o no, no es simplemente verdadero o falso, sino más bien una cuestión de grado.

La teoría de conjuntos borrosos asigna grados de pertenencia a elementos de conjuntos borrosos. Estos grados van desde 1, cuando el elemento está en el conjunto, hasta cero cuando está fuera del conjunto. La pertenencia de Betty al grupo de personas altas es una cuestión de grado.

Ver también LEYES DEL PENSAMIENTO.

Machine Translated by Google

GRAMO

Galilei, Galileo (1564–1642) Mecánica italiana, astronomía Nacido el 15 de febrero de 1564 en Pisa (ahora en Italia), Galileo Galilei es recordado por su Dis corsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze (Diálogos sobre dos nuevas ciencias) presentando un nuevo enfoque para el estudio de la cinemática a través de una combinación de experimento y teoría matemática.

Formuló y verificó la ley de aceleración de

los cuerpos que $\text{cuadrado} = \frac{1}{2}t^2$, estableció que los proyectiles

caen siguen trayectorias parabólicas, y fue el primero en notar que el período de un péndulo es independiente del peso de la lenteja. Aunque no fue el inventor del telescopio, fue el primero en desarrollar un diseño viable del dispositivo que le permitió realizar observaciones astronómicas (sobresalientes). En particular, acumuló evidencia empírica significativa que apoyaba la teoría copernicana de que los planetas giran alrededor del Sol. Su creencia en esta teoría lo puso en conflicto con la Iglesia Católica Romana y lo llevó a su consiguiente juicio y arresto domiciliario.

Galileo fue enviado por sus padres a la Universidad de Pisa para estudiar medicina a la edad de 17 años, pero este curso de estudio nunca le atrajo. Dejó la Universidad sin obtener un título y comenzó a enseñar matemáticas y mecánica en Sienna. En 1586 escribió La balancitta (La pequeña balanza), en la que describió los métodos de ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287-212 a. C.) para encontrar las densidades relativas de las sustancias con una balanza. Esta pieza le atrajo una atención significativa en la comunidad científica, y en 1589 fue nombrado catedrático de matemáticas en la Universidad de Pisa. Permaneció en este puesto durante 3 años antes de aceptar el prestigioso cargo de profesor de matemáticas en la Universidad de Padua.

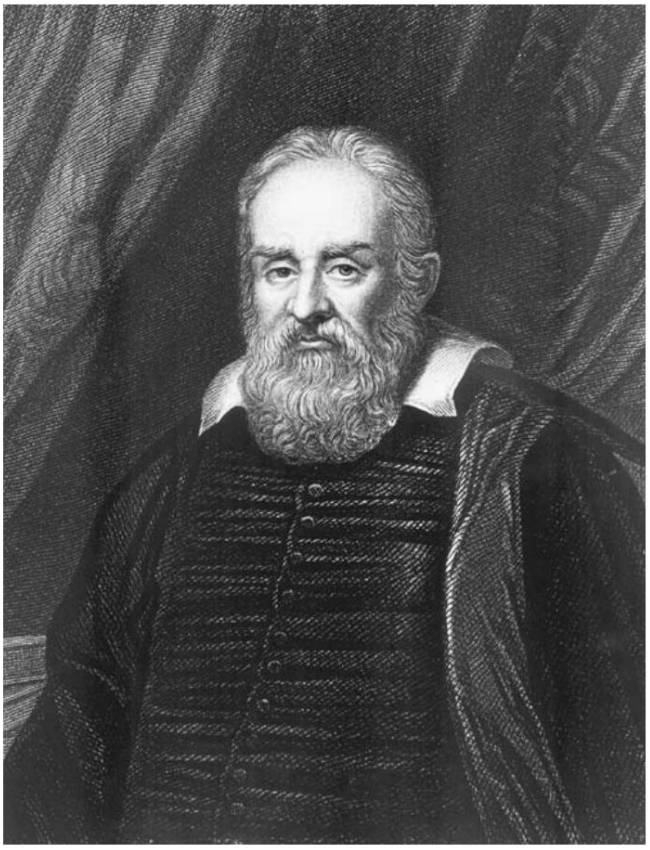
Durante sus 18 años en Padua, Galileo desarrolló sus teorías del movimiento. Utilizando planos inclinados para reducir la velocidad de descenso, Galileo observó que todos los objetos caen con la misma velocidad de aceleración. De esto, usando matemáticas verificadas por experimentos, dedujo su famosa ley de que la distancia recorrida por un objeto que cae es proporcional al cuadrado del tiempo de su caída. De esto se sigue que los objetos lanzados al aire se mueven en arcos parabólicos.

En 1609, Galileo recibió la noticia de que los eruditos holandeses habían inventado un catalejo capaz de ampliar imágenes de objetos distantes. Intrigado, Galileo se dedicó a construir su propia versión del catalejo y finalmente produjo una pieza (a la que llamó “perspicillum”) con un poder de aumento de ocho o nueve, muy superior a las capacidades del telescopio flamenco. Galileo dirigió su pieza a los cielos y comenzó una serie de notables descubrimientos astronómicos.

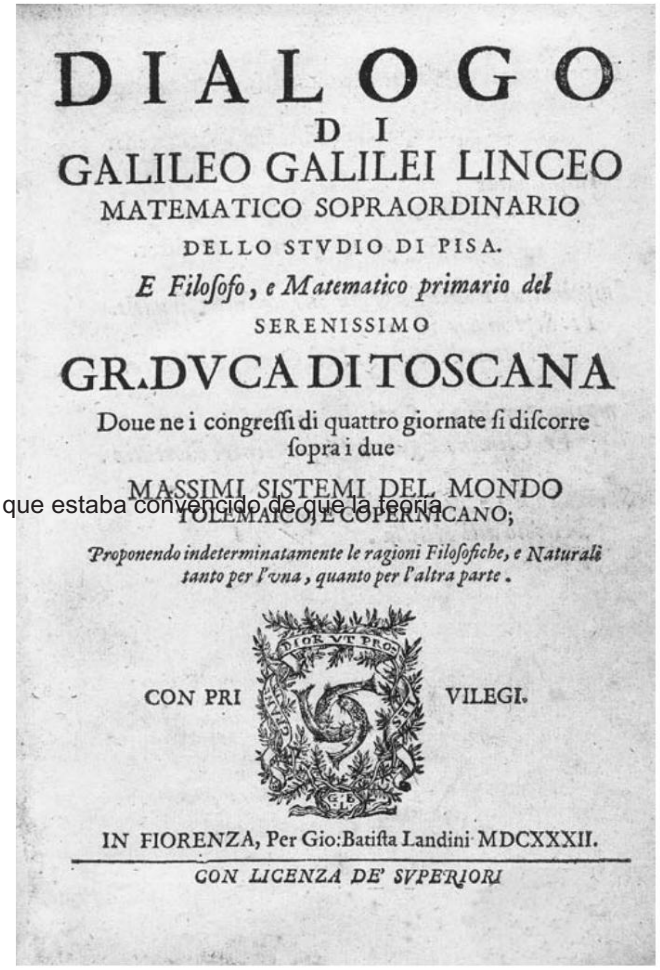
En su libro de 1610 Sidereus nuncius (Starry messenger), Galileo describió la topografía de la Luna, estableció que la Vía Láctea está compuesta de estrellas y anunció su descubrimiento de cuatro lunas que orbitan alrededor de Júpiter. Por razones políticas astutas, llamó a estas lunas las "estrellas de Medicea", en honor a Cosme de Medici, el gran duque de Toscana. Este trabajo le dio a Galileo una fama considerable y, solo un mes después de la publicación del libro, Galileo fue nombrado matemático principal en Pisa y “matemático y filósofo” del gran duque de Toscana.

Machine Translated by Google

Más tarde ese año, Galileo dirigió su telescopio hacia Saturno, observó sus anillos y luego se volvió hacia Venus. Descubrió que Venus muestra fases como las de la Luna, que solo podrían ser posibles si este planeta orbitara alrededor del Sol, no de la Tierra. Galileo había reunido pruebas convincentes para apoyar la teoría copernicana del sistema solar. Aunque la autoridad religiosa en ese momento vio este modelo como la antítesis de las Sagradas Escrituras (en las que se percibe que la Tierra se encuentra en el centro del universo), los líderes de la iglesia fueron tolerantes con los eruditos que usaron teorías alternativas bajo la apariencia de herramientas matemáticas para Cálculo de las órbitas de los planetas. Galileo, lamentablemente, fue más allá y luego proclamó en una comunicación privada que estaba convencido de que la teoría



Galileo Galilei, un eminente científico del siglo XVII, fue el primero en combinar la teoría con la experimentación para comprender la dinámica. Estableció que la aceleración de la gravedad es independiente de la masa y que los proyectiles siguen arcos parabólicos. Galileo también desarrolló el telescopio e hizo importantes y controvertidas observaciones astronómicas. (Foto cortesía de Topham/The Image Works)



DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STVDIO DI PISA.
E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR. DVCA DI TOSCANA
Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;
Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali
tanto per l'vna, quanto per l'altra parte.
CON PRI VILEGI.
IN FIORENZA, Per Gio: Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SVPERIORI

Galileo logró sacar de contrabando su controvertido manuscrito Diálogo fuera de Italia, donde estaba prohibida su venta, para su publicación en Holanda. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

era una declaración de la realidad física. Desafortunadamente, la carta fue interceptada por la iglesia, y durante los 15 años que siguieron, la Iglesia Católica revisó cuidadosamente el trabajo de Galileo y le exigió que siguiera las enseñanzas de la iglesia en todo momento. En 1632, Galileo intentó publicar el texto Dialogo (Diálogo) sobre la teoría del movimiento planetario, hábilmente escrito para no afirmar nunca que el sistema copernicano es la realidad física), pero la iglesia, sintiendo que el límite había sido cruzó, prohibió inmediatamente su venta y juzgó a Galileo por herejía. Fue declarado culpable y puesto bajo arresto domiciliario por el resto de su vida. Sin embargo, Galileo logró

Machine Translated by Google

publicar su famosa pieza de 1638 sacándola de contrabando de Italia e imprimiéndola en Holanda.

Galileo murió el 8 de enero de 1642. Se le recuerda por tener un profundo impacto en la naturaleza misma de la investigación científica, vinculando las matemáticas, la filosofía especulativa y la experimentación física en el estudio del mundo natural. El 31 de octubre de 1992, en el 350 aniversario de la muerte de Galileo, el Papa Juan Pablo II reconoció públicamente que la Iglesia Católica se había equivocado al condenar a Galileo por herejía por su teoría sobre el movimiento de los planetas.

Galois, Évariste (1811–1832) Francés Álgebra abstracta Nacido el 25 de octubre de 1811 en Bourg La Reine, Francia, el erudito Évariste Galois es recordado por sus famosos resultados que llevaron no solo a la conclusión de que no puede haber una fórmula general que resuelve todas las ecuaciones POLINOMALES de quinto grado (aunque existen tales fórmulas para resolver ECUACIONES CUÁDRICAS, CÚBICAS y CUÁRTICAS), pero lo más importante es la clasificación de las ecuaciones específicas que se pueden resolver de esta manera. Su trabajo seminal de 1829 sobre la solución de ecuaciones fundó el campo de la TEORÍA DE GRUPOS.

Galois se matriculó en su primer curso de matemáticas en la escuela secundaria a la edad de 17 años y solo un año después publicó un artículo original, "Démonstration d'un théorème sur les fractions continue périodiques". (Demostración de un teorema sobre fracciones periódicas continuas), sobre el estudio de las FRACCIONES CONTINUAS. Desafortunadamente, sus maestros en ese momento no entendieron su trabajo y no lo consideraron un estudiante dotado. (Es cierto que Galois tuvo dificultades para articular sus ideas sofisticadas). Galois esperaba asistir a la prestigiosa École Polytechnique, la principal universidad de París en ese momento, pero reprobó el examen de ingreso dos veces. Se matriculó, en cambio, en la École Normale, pero luego fue expulsado por oponerse a la política universitaria que prohibía a los estudiantes unirse a la rebelión de París contra el rey Carlos X. Se unió a la Artillería de la Guardia Nacional, un ala radical de las fuerzas armadas. En 1831, Galois fue encarcelado por llevar su uniforme cuando se declaró ilegal el apoyo a la guardia.

Previamente, Galois había leído el trabajo de NIELS HEN RIK ABEL (1802-1829) sobre el estudio de soluciones algebraicas de ecuaciones. El problema de SOLUCIÓN POR RADICALES estaba en su mente y, mientras estaba encarcelado, Galois escribió un manuscrito detallando sus pensamientos sobre el problema. Dur En esta ocasión, Galois se enamoró de la hija del médico residente de la prisión, Stephanie-Felice du Motel, pero, como muestran las cartas, los sentimientos no fueron correspondidos. Por razones que no están claras hoy, Galois se batió en duelo en su honor poco después de su liberación. Fue herido en ese duelo y murió al día siguiente, 31 de mayo de 1832.

El hermano de Galois luego copió el manuscrito de la prisión y lo envió a destacados matemáticos de la época. Si no fuera por la iniciativa de su hermano, la mayor parte del trabajo de Galois se habría perdido hoy para nosotros. El matemático francés JOSEPH LIIOUVILLE (1809-1882) publicó el artículo seminal de Galois en 1846.

Galton, Sir Francis (1822–1911) Estadística británica Nacido el 16 de febrero de 1822 en Sparkbrook, Inglaterra, Francis Galton es recordado en matemáticas por su trabajo pionero en la aplicación de técnicas estadísticas al análisis de problemas biológicos. Las ideas y contribuciones de Galton a la naturaleza del análisis estadístico allanaron el camino para el desarrollo y el consiguiente uso generalizado de las estadísticas en las ciencias biológicas y sociales en el siglo XX.

Galton completó una licenciatura básica en Cambridge, tomando solo suficientes cursos de matemáticas para cumplir con los requisitos de distribución. (Nunca recibió una formación seria en matemáticas.) Después de heredar una cantidad considerable de dinero de su padre, Galton viajó por el sudoeste de África y obtuvo una fama considerable como explorador intrépido. Desarrolló un interés en el estudio de la herencia humana y comenzó a considerar el tema de la cría selectiva como un medio para mejorar la raza humana. (Tales actividades se consideraban aceptables en su época.) Galton también desarrolló un modelo matemático simple de herencia ancestral basado en la idea de que cada padre aporta 1/4 de un rasgo genético a un hijo, cada abuelo de 1/16 del rasgo al hijo. hijo, etc., de modo que la suma de las contribuciones de todos los antepasados sea la unidad:

$$1 2 \frac{1}{} + 4 + \frac{1}{} + = 8 + \frac{1}{64} + + = 4\ 16\ 4 \frac{1}{2} \quad - \quad \frac{1}{8} \quad L\ 1$$

Galton recibió el título de caballero por este trabajo en 1909.

La Universidad de Londres estableció el Laboratorio Francis Galton de Eugenesia Nacional en su honor a fines del siglo XIX. El eminente estadístico KARL PEARSON

Machine Translated by Google

(1857-1936), gran parte de cuyo trabajo estuvo muy influenciado por los estudios de Galton, fue una vez director de la laboratorio.

Galton murió en Surrey, Inglaterra, el 17 de enero de 1911.

Ver también HISTORIAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo).

la ruina del jugador Una clase de problemas en PROBABILIDAD La teoría, todos conocidos como problemas de la ruina del jugador, contiene preguntas del tipo siguiente:

> Un jugador con $5 apuesta repetidamente $1 en un lanzamiento de la moneda. Cada vez que juega, tiene un 50 por ciento de posibilidades de ganar un dólar y un 50 por ciento de posibilidades de perder un dólar. El jugador se juegue hasta que tenga $10 o se arruine.
> ¿Cuál es la probabilidad de que tenga éxito en duplicando su dinero?

Problemas como estos normalmente se resuelven de la siguiente manera: P(k) sea la probabilidad de alcanzar la meta de $10 cuando el jugador actualmente tiene k dólares en la mano. deseamos calcular P(5). Tenga en cuenta tres cosas:

1. P(0) = 0. (Con cero dólares, el jugador ha perdido y no ganará.)
2. P(10) = 1. (Con $10 en la mano, el jugador ha ganado).
3. $P(k) = \frac{1}{2}P(k-1) + \frac{1}{2}P(k+1)$.

   (Con k dólares en la mano, hay una probabilidad del 50 por ciento el jugador perderá un dólar y tendrá que intentar ganar con k–1 dólares en la mano y un 50 por ciento posibilidad de que gane un dolar y siga jugar con k + 1 dólares en la mano.)

Así tenemos once valores, P(0),P(1),…,P(10), con el primer valor igual a cero, el último igual a 1, y todos valores intermedios iguales a la media de los dos valores a su alrededor. Se puede comprobar que sólo hay uno secuencia de números que satisfacen estas condiciones, a saber: $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{10}{10} = 1$. Esto muestra que $P(1) = \frac{1}{10}$, $P(2) = \frac{2}{5}$ y, en particular, que $P(5) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Observe que con un dólar en la mano sólo hay un 1/10 de probabilidad de que el jugador gane $10 antes de ir en bancarrota. De manera similar, se puede mostrar que solo hay uno en 100 posibilidades de que un jugador gane $100, y uno en 1,000 posibilidades de que gane $1000. Los casinos son muy consciente de que los jugadores son reacios a dejar de jugar con pequeñas ganancias, especialmente si un jugador ha tenido una serie de pérdidas y le queda hasta su último dólar.

La ruina del jugador muestra que, con toda probabilidad, los jugadores terminarán arruinados antes de recibir las ganancias que están esperando. contenido con.

Ver también FUNCIÓN ARMÓNICA; CAMINATA ALEATORIA.

teoría de juegos La teoría de juegos es la rama de las matemáticas que trata de analizar situaciones que involucran partes con intereses en conflicto para los cuales el resultado de la situación depende de las elecciones hechas por aquellos fiestas. Las situaciones de conflicto surgen en casi todos los problemas del mundo real que involucran la toma de decisiones, y En consecuencia, la teoría de los juegos ha encontrado profundas aplicaciones al estudio de la competencia empresarial, la economía, la política, operaciones militares, división de bienes y incluso el estudio de las relaciones personales. Aunque es difícil proporcionar un análisis completo de todos los tipos de juegos que surgen, existen soluciones completas para simples "juegos de matriz" (que describimos a continuación) que involucran un pequeño número de jugadores. Estos juegos simples pueden ser se utiliza para modelar situaciones multijugador más complicadas.

La teoría de juegos fue estudiada por primera vez en 1921 por franceses matemático Félix Edouard Émile Borel (1871-1956), pero la importancia del tema no fue propiamente reconocido hasta el lanzamiento de 1944 del monumental trabajo Teoría de Juegos y Comportamiento Económico por JOHN VON NEUMANN (1903–57) y Oskar Morgen Stern (1902–77). Estos dos estudiosos analizaron completamente las situaciones de conflicto satisfaciendo los siguientes requisitos básicos condiciones:

i. Hay un número finito de jugadores.
ii. Cada jugador puede seleccionar uno de un número finito de acciones posibles. La elección de las acciones disponibles para cada jugador no necesita ser el mismo.
iii. Todos los jugadores son conscientes de las acciones y las consecuencias que otros pueden elegir tomar.
IV. Cada jugador es un pensador racional y seleccionará el acción que mejor se adapte a sus intereses.
v. Al jugar el juego, ningún participante sabe qué las acciones serán tomadas por los otros jugadores.
vi. El resultado del juego se puede modelar como un conjunto de pagos (positivo, cero o negativo) a cada uno de los jugadores.

Machine Translated by Google

Si la suma de los pagos a todos los jugadores es cero, entonces el juego se llama juego de suma cero. Esto significa que la ganancia de cualquier jugador debe compensarse con la pérdida de otros jugadores.

El tipo de juego más simple es un juego de suma cero para dos jugadores. La elección de acciones y los posibles resultados del juego se pueden resumir en una "matriz de pagos" A, en la que las filas representan las posibles acciones que puede realizar un jugador, el jugador R ; las columnas las posibles acciones del segundo jugador, el jugador C; y la entrada (i,j)-ésima de la matriz Aij representa la cantidad que el jugador C debe pagar al jugador R si R selecciona la fila i y C selecciona la columna j en el juego. (Si Aij es negativo, entonces el jugador R le paga a C una cierta cantidad). Por ejemplo, la siguiente tabla representa un juego de suma cero de dos personas en el que cada jugador puede realizar una de tres acciones posibles:

	1	2	3
1	–1	1	
2	5	1	0
3	4	–2	2

Como primer intento de analizar este juego, considere las acciones que puede realizar el jugador R. Ella espera que el juego resulte en el mayor número positivo posible (en este caso 5), porque esta es la cantidad que el jugador C debe pagar a R si este es el resultado del juego. Por lo tanto, el jugador R está tentado a seleccionar la acción 1 (especialmente porque R sabe que el resultado óptimo de –3 del jugador C se encuentra en la columna 1). Por supuesto, el jugador C es consciente de que es probable que el jugador R piense de esta manera, y se resistiría a seleccionar la columna 1 como su acción por temor a que el 5 sea el resultado del juego. El jugador R es consciente de que el jugador C pensará de esta manera y entonces sospechará que el jugador C elegirá la columna 2, sabiendo que probablemente seleccionará la fila 1, por lo que R, para frustrar este plan, se ve tentado a elegir una acción diferente de 1 después de todo. Etcétera. Como se ve, uno puede entrar rápidamente en un ciclo interminable de adivinanzas.

En lugar de apuntar a maximizar sus ganancias del juego, otro enfoque que podría adoptar el jugador R es minimizar sus pérdidas. Por ejemplo, si el jugador R realiza la acción 1, podría perder potencialmente 1 punto (si sucede que C elige la columna 2). Si R elige la fila 2, el peor resultado sería no ganar ni perder, y si elige la fila 3, podría perder tres puntos. Por lo tanto, el resultado mínimo máximo para el jugador R ocurre con la elección de la fila 2. Esta línea de razonamiento se denomina "estrategia maximin". De manera similar, la elección de la columna 2 da como resultado el resultado mínimo máximo a favor del jugador C. Por lo tanto, siguiendo una "estrategia mini max", el jugador C elegiría la columna 2 y, en consecuencia, el resultado del juego es 0.

La entrada 0 en la matriz de pagos anterior se llama punto silla. Es un mínimo en su fila y un máximo en su columna. Si una matriz de pagos contiene un punto de silla, entonces la estrategia óptima para cada jugador es tomar acciones correspondientes al punto de silla. El valor del punto de silla, para un juego que posee dicho punto, se denomina valor del juego.

No todas las matrices de pagos para un juego de dos personas poseen un punto de silla. Por ejemplo, el siguiente juego que corresponde a dos acciones posibles para cada jugador no tiene punto de silla, y seguir las estrategias minimax o maximin no es óptimo para ninguno de los jugadores.

	1	2
1	1	–2
2	–3	4

(La estrategia maximin para el jugador R sugiere que seleccione la fila 1, y la estrategia minimax para el jugador C que tome la columna 1 dando como resultado 1 para el juego. El jugador C, sin embargo, puede anticipar esto y se siente tentado a cambiar su elección a columna 2 para obtener el resultado preferible de – 2. El jugador R, por supuesto, es consciente de que el jugador C probablemente hará esto, por lo que cambiará su elección a la fila 2 para obtener el resultado 4, y así sucesivamente.
Los dos jugadores nuevamente están atrapados en un ciclo interminable de dudas).

La estrategia adecuada en un juego de este tipo que carece de un punto de silla es una estrategia mixta, en la que cada jugador decide seleccionar una acción al azar, ponderada adecuadamente para maximizar su beneficio esperado del juego. Por ejemplo, suponga que el jugador R decide seleccionar la fila 1 con PROBABILIDAD p y la fila 2 con probabilidad 1 – p. Bajo esta estrategia, si el jugador C elige la columna 1, entonces el valor esperado de la ganancia del jugador R es E1 = 1 × p + (–3) × (1 – p) = 4p – 3. Si, por otro lado, el jugador C Si seleccionamos la columna 2, entonces la ganancia esperada para el jugador R es E2 = (–1) × p + 4 × (1 – p) = 4p – 5p. Estos resultados esperados son iguales si elegimos p = 7/9. Por lo tanto, seleccionando la fila 1 con este

Machine Translated by Google

probabilidad, al jugador R se le puede garantizar un esperado ganancia de $4\frac{7}{9}$ $3\frac{4}{5}$ $\frac{7}{9}$ $1\frac{}{}$, sin importar qué 9

que hace el jugador C. De manera similar, siguiendo una estrategia mixta, el jugador C debe seleccionar la columna 1 con una probabilidad de 5/9 para minimizar su pérdida esperada.

En 1928 von Neumann demostró el famoso “teorema mini max”:

> Si cada jugador adopta su mejor estrategia mixta en un juego de dos personas de suma cero, entonces la ganancia esperada de un jugador será igual a la pérdida esperada del otro.

El resultado esperado compartido de tal juego se llama el "valor" del juego.

Los juegos que no son juegos de suma cero se llaman juegos de suma variable. El DILEMA DEL PRISIONERO y CHIC KEN son ejemplos de tales juegos de conflicto parcial. En ellos se buscan estrategias dominantes, esperando encontrar un equilibrio para el juego.

En las últimas décadas, la teoría de los juegos se ha extendido con éxito a los juegos de suma variable de n personas ya los juegos con un rango continuo de acciones y estrategias posibles. La teoría de juegos es ahora un curso estándar que se ofrece en los departamentos universitarios de economía.

Véase también DIVISIÓN FERIA.

Gardner, Martin (1914–) Americano Matemáticas recreativas Nacido el 21 de octubre de 1914 en Tulsa, Oklahoma, el escritor independiente Martin Gardner es considerado hoy como el único responsable de cultivar y fomentar el interés por las matemáticas recreativas del siglo XX. Con numerosos artículos y más de 65 libros en su haber, Gardner ha logrado fama mundial como un escritor que puede hacer que los temas complejos de la ciencia y las matemáticas sean accesibles y significativos para el público en general.

Aunque no es un matemático, a menudo se le atribuye a Gardner el haber hecho más para promover e impulsar la búsqueda general de las matemáticas que cualquier erudito en el campo.

Gardner se graduó de la Universidad de Chicago con una licenciatura en filosofía en 1936. Después de servir en la Marina de los EE. UU. durante cuatro años, Gardner regresó a Chicago y comenzó una carrera como escritor independiente, al principio editando y escribiendo obras cortas de ficción.
En 1958 Gardner aceptó el cargo de matemático columnista de juegos de Scientific American, a pesar de nunca haber tomado un curso de matemáticas en la universidad. Su primera pieza explicando las matemáticas de un cubo Soma, un rompecabezas de disección de cubos que lleva el nombre de una droga adictiva ficticia, ilustró su habilidad natural para discutir y aclarar problemas complejos con facilidad. Este artículo inicial atrajo la atención nacional y Gardner siguió siendo columnista de la publicación durante 25 años. Sus artículos fueron extremadamente influyentes y desde entonces se han recopilado y vuelto a publicar (varias veces) como libros.

Bien versado en las prácticas de la ilusión y la magia, Gardner también ha publicado trabajos sobre magia, las matemáticas de la magia, así como textos que discuten y desacreditan las afirmaciones y prácticas de la pseudociencia. Ha escrito dos novelas, El vuelo de Peter Fromm (1994) y Visitantes de Oz (1998), y algunas obras sobre temas de filosofía y literatura. Su obra más vendida es Alicia comentada: Las aventuras de Alicia en el país de las maravillas ya través del espejo (1965).

Gardner actualmente vive en Hendersonville, Carolina del Norte, y continúa su trabajo como escritor independiente.
A pesar de la falta de formación formal en matemáticas, Gardner ha realizado algunos descubrimientos matemáticos originales, de carácter recreativo, que se han publicado en publicaciones académicas.

Gauss, Carl Friedrich (1777–1855) Alemán Teoría de números, Geometría, Álgebra, Análisis, Estadística, Física, Astronomía Nacido el 30 de abril de 1777 en Brunswick, Ducado de Brunswick (ahora Alemania), Carl Friedrich Gauss es reconocido hoy como el más grande matemático puro y físico de su tiempo. Sus contribuciones a ambos campos fueron enormes. A la edad de 18 años, inventó el MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS e hizo el nuevo descubrimiento de que un polígono regular de 17 lados se puede construir solo con regla y compás, lo que indica que había logrado grandes avances en la teoría de los números CONSTRUCTIBLES .
En 1801 publicó su obra maestra Disquisitiones arithmeticae (Investigaciones aritméticas) en la que demostró el TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA, el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA e introdujo la teoría de la ARITMÉTICA MODULAR. En trabajos posteriores, propuso soluciones generales al problema de determinar el movimiento planetario, desarrolló teorías estadísticas que llevaron al descubrimiento de la DISTRIBUCIÓN gaussiana y estudió la teoría del potencial y la electricidad y el magnetismo.

Machine Translated by Google

en física. También elaboró, pero no publicó, los principios de la GEOMETRÍA HIPERBÓLICA independientemente de JÁNOS BOLYAI (1802–60) y NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856), y desarrolló la teoría de los NÚMEROS COMPLEJOS y las funciones complejas.

Gauss demostró talento para las matemáticas a una edad temprana. (Se dice que asombró a sus maestros de la escuela primaria al sumar los números enteros del 1 al 100 en un instante al observar que la suma asciende a 50 pares de números, cada uno de los cuales suma 101). Antes de dejar la escuela secundaria, Gauss había descubierto de forma independiente el PRIME . TEOREMA DEL NÚMERO, TEOREMA DEL BINOMIO, resultados importantes en aritmética modular, y la desigualdad general aritmética-geométrica-media. Ingresó a la Universidad de Göttingen en 1795 pero, por razones que no están claras para los historiadores, la abandonó antes de completar una carrera para regresar a su ciudad natal de Brunswick. Presentó una tesis doctoral en la Universidad de Helmstedt sobre el tema del teorema fundamental del álgebra, que fue aceptada en ausencia. Gauss publicó su obra maestra Disquisitiones arithmeticae poco después.

En 1801, Gauss causó sensación en la comunidad de astrónomos cuando predijo correctamente las posiciones orbitales del asteroide Ceres, descubierto el 1 de enero de 1801 por el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi.
Piazzi tuvo la oportunidad de observar una porción extremadamente pequeña de su órbita antes de que desapareciera detrás del sol. Otros astrónomos publicaron predicciones sobre dónde reaparecería varios meses después, al igual que Gauss, ofreciendo una predicción que difería mucho de la opinión común. Cuando el cometa se observó de nuevo el 7 de diciembre de 1801, estaba casi exactamente donde había predicho Gauss. Aunque Gauss no reveló su método de predicción en ese momento, se sabe que usó su método de mínimos cuadrados para hacer el cálculo. En 1807 Gauss dejó Brunswick para dirigir el observatorio de Göttingen y en 1809 publicó su texto general sobre las matemáticas de la astronomía, Theoria motus corporum coelestium (Teoría del movimiento de los cuerpos celestes).

Mientras estuvo en el observatorio, Gauss continuó trabajando en matemáticas. Comenzó a desarrollar una teoría de curvatura de superficie y GEODESICAS, y estudió la convergencia de SERIES, técnicas de integración, ESTADÍSTICAS, teoría potencial y más. En 1818 se le pidió que realizara un estudio geodésico del estado de Hannover y, 14 años después, ayudó en un proyecto para cartografiar el campo magnético. de la tierra. Su trabajo matemático sobre la teoría de la geometría diferencial permitió a Gauss probar una serie de propiedades que debe poseer el campo terrestre, lo que le permitió predecir correctamente el valor del campo en diferentes lugares, así como la ubicación del Polo Sur magnético. . (Además, probó matemáticamente que solo puede haber dos polos magnéticos).

Gauss permaneció en Göttingen durante la última parte de su carrera. Recibió muchos honores a lo largo de su vida, incluida la elección como miembro extranjero de la prestigiosa ROYAL SOCIETY de Londres en 1804 y la recepción de la Medalla Copley de la sociedad en 1838.
También ganó el Premio de la Universidad de Copenhague en 1822. Gauss publicó más de 300 trabajos significativos, la mayoría escritos en latín, y mantuvo una gran cantidad de cuadernos y correspondencias inéditos que demostraron ser matemáticamente tan ricos como gran parte de su trabajo publicado.

Gauss murió en Göttingen el 23 de febrero de 1855. Es imposible exagerar la influencia que Gauss ha tenido en casi todas las ramas de las matemáticas y la física matemática. Era un maestro en la resolución de problemas difíciles que se encuentran en el corazón de ideas matemáticas complejas, y la misma integridad y minuciosidad de su trabajo allanó el camino para avances significativos en matemáticas.
Varios conceptos fundamentales en teoría de números, geometría diferencial y estadística (como la reciprocidad gaussiana, la curvatura gaussiana y la distribución gaussiana) se nombran hoy en su honor.

Eliminación gaussiana (pivote) Nombrado en honor a CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), el proceso de eliminación gaussiana proporciona los medios para encontrar la solución (si existe) para un sistema de n ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS en n incógnitas multiplicando ecuaciones seleccionadas con constantes cuidadosamente elegidas y restando ecuaciones para eliminar variables. El método se explica mejor con un ejemplo. Considere el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$y + 3z = 0$$
$$2x + 4y - 2z = 18\ x +$$
$$5y + 3z = 14$$

Intercambia las dos primeras ecuaciones para que la variable x aparezca en la primera fila:

Machine Translated by Google

$$2x + 4y - 2z = 18 \text{ y}$$
$$+ 3z = 0 \text{ x}$$
$$+ 5y + 3z = 14$$

Divida la primera ecuación entre 2 para que el coeficiente de la variable principal x sea 1.

$$x + 2y - z = 9 \text{ y}$$
$$+ 3z = 0 \text{ x}$$
$$+ 5y + 3z = 14$$

Elimina la aparición de la variable x de la tercera ecuación restándole la primera ecuación.
Es decir, reemplaza la tercera ecuación con el enunciado equivalente: $(x + 5y + 3z) - (x + 2y - z) = 14 - 9$, es decir, $3y + 4z = 5$. Tenemos:

$$x + 2y - z = 9 \text{ y}$$
$$+ 3z = 0 \text{ 3y}$$
$$+ 4z = 5$$

La segunda ecuación contiene y como variable principal con un coeficiente de 1. Elimine y de la tercera ecuación restándole tres copias de la segunda ecuación, es decir, reemplace la tercera ecuación con el enunciado equivalente $(3y + 4z) - 3(y + 3z) = 5 - 3 \cdot 0$, es decir, $-5z = 5$. Ahora tenemos:

$$x + 2y - z = 9 \text{ y}$$
$$+ 3z = 0 -$$
$$5z = 5$$

Dividir la tercera ecuación por -5 para que la variable principal sea z con un coeficiente de 1:

$$x + 2y - z = 9 \text{ y}$$
$$+ 3z = 0 \text{ z}$$
$$= -1$$

La solución al sistema de ecuaciones ahora es fácil de calcular. Mediante un proceso de sustitución hacia atrás, vemos que $z = -1$, de lo cual se sigue de la segunda ecuación que $y = -3z = 3$, y de la primera ecuación que $x = 9 - 2y + z = 9 - 6 - 1 = 2$. Se comprueba que esta es efectivamente la solución al conjunto original de ecuaciones.

Algo de terminología
Una operación de fila elemental es cualquier maniobra en un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas que:

1. Intercambia dos ecuaciones 2.
Multiplica (o divide) una ecuación por una cantidad distinta de cero
3. Suma o resta un múltiplo de una ecuación de otro

El proceso de eliminación gaussiana utiliza operaciones elementales por renglones para transformar un sistema de ecuaciones lineales en un sistema equivalente en "forma escalonada", es decir, uno en el que cada ecuación conduce, a su vez, con una de las variables con coeficiente 1. Vía el proceso de sustitución hacia atrás, entonces es sencillo determinar la solución al sistema de ecuaciones. El proceso ilustrado arriba funciona para cualquier número de ecuaciones con el mismo número de incógnitas. Es posible que durante el proceso de eliminación gaussiana, un sistema de ecuaciones produzca un enunciado absurdo (como 0 = 9, por ejemplo), en cuyo caso se concluiría que el sistema no tiene soluciones, o posiblemente un enunciado vacío. enunciado (como, 0 = 0), en cuyo caso se concluiría que el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

Tenga en cuenta que es posible llevar el proceso de eliminación gaussiana más allá y reducir un sistema de ecuaciones a un sistema en el que cada variable aparece solo una vez en cada línea. Por ejemplo, en nuestro ejemplo, obtuvimos:

$$x + 2y - z = 9 \text{ y}$$
$$+ 3z = 0 \text{ z}$$
$$= -1$$

Restando dos copias de la segunda ecuación de la primera se obtiene:

$$x + - 7z = 9 \text{ y} +$$
$$3z = 0 \text{ z} = -$$
$$1$$

y ahora sumando siete copias de la tercera ecuación a la primera, y restando tres copias de la tercera ecuación de la segunda, se obtiene:

$$x = 2$$
$$y = 3 \text{ z} =$$
$$-1$$

La solución al sistema es ahora evidente.

Machine Translated by Google

Consecuencias para la teoría de matrices

Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede representar mediante una MATRIZ de coeficientes y una columna de valores constantes.

Por ejemplo, para nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned} y + 3z &= 0 \\ 2x + 4y - 2z &= 18 \\ x + 5y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

la matriz de coeficientes, llámese A, viene dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

la columna de valores constantes, llámese b, es:

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Cualquier operación de fila elemental realizada en el conjunto original de ecuaciones corresponde a una operación en las filas de la matriz de coeficientes A y la matriz de columna b. Por ejemplo, en el ejemplo anterior, nuestra primera operación fue intercambiar la primera y la segunda fila. Esto se puede lograr multiplicando A y b cada uno por la matriz de PERMUTACIÓN

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

De manera similar, la operación de fila elemental de dividir la primera fila por 2 se logra mediante la multiplicación con la matriz

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y el acto de restar la primera ecuación de la primera se logra mediante la multiplicación con la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera se puede ver que toda operación elemental de fila corresponde a la multiplicación por una matriz elemental. Esta observación tiene una consecuencia importante.

> La inversa de una matriz cuadrada A es simplemente el producto de las matrices elementales que reducen A a la matriz identidad.

Nuestro ejemplo lo explica. Usamos operaciones de fila elementales para reducir el sistema de ecuaciones al sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Es decir, encontramos una colección de ocho matrices elementales E1 , E2 ,…, E8 tales que la aplicación de estas ocho matrices reducía la matriz de coeficientes A a la MATRIZ DE IDENTIDAD I.

$$E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = I$$

Si hacemos que B sea la matriz $E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$, entonces tenemos $BA = I$, lo que significa que $B = A^{-1}$, la MATRIZ INVERSA de A. (Como el DETERMINANTE de la matriz identidad I es 1, la ecuación $E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = I$ muestra que el determinante de A no puede ser cero. Por lo tanto, como muestra el estudio de los determinantes, la matriz A sí tiene una inversa.) Observe que la matriz B son las mismas operaciones elementales de fila aplicadas a la matriz I. Este resultado proporciona un método constructivo para calcular la inversa de una matriz A.

> Para calcular la inversa de una matriz A, escriba la matriz A y la matriz I una al lado de la otra. Llevar a cabo

Machine Translated by Google

operaciones elementales de fila en las dos matrices simultáneamente. Reducir A a una matriz identidad. La segunda matriz producida es la matriz inversa de A.

Como ejemplo, calculamos la matriz inversa a la matriz de coeficientes anterior:

$$\begin{array}{lll|l} 01 & 3 & & 100 \\ 24 & 2 & - & 010 \\ 15 & 3 & & 001 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll|l} 24 & 2 & - & 010 \\ 01 & 3 & & 100 \\ 15 & 3 & & 001 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll|l} 12 & 1 & - & 0\ 05\ 0 \\ 01 & 3 & & 100 \\ 15 & 3 & & 001 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll|l} 100 & & & 22.12\ 14 & - \\ 010 & & & 08.03\ 06 & \\ 001 & & & 06.01\ 02 & - \end{array}$$

De este modo

$$A^{-1} = \begin{array}{lll} 22.12 & 14 & - \\ - & \ldots & 08\ 03\ 06 \\ 06.01 & 02 & - \end{array}$$

Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante Matrices Inversas

En nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned} y + 3z &= \\ 0\ 2x + 4y - 2z &= \\ 18\ x + 5y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

si x denota el vector columna de las variables:

$$x = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

entonces el sistema se puede escribir de forma compacta:

$$hacha = b$$

Multiplicando por la matriz inversa A–1 se obtiene:

$$x\ ab^{-1} = \begin{array}{lll} 22.12 & 14 & - \\ - & 08.03 & 06 \\ 06.01 & 02 & - \end{array} \begin{matrix} 0 & 18 \\ & \\ & 3 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ = \\ 1 \end{matrix}$$

nuevamente haciendo aparente la solución al sistema. Por supuesto, el trabajo de calcular la matriz inversa es equivalente al proceso original de eliminación gaussiana. Este enfoque, sin embargo, tiene la ventaja de que puede aplicarse fácilmente a un conjunto diferente de valores constantes b sin repetir el proceso de eliminación.

forma general de una ecuación Una fórmula que describe la relación general entre variables sin especificar las constantes involucradas se llama forma general de la ecuación. Por ejemplo, la forma general de una ecuación CUADRÁTICA en la variable x es $ax^2 + c = 0$. (La ecuación $2x^2 + bx - 3x + 4 = 0$, por ejemplo, es una ecuación cuadrática específica.) La fórmula para el ÁREA A de un CÍRCULO, $A = \pi r^2$, donde r es el radio del círculo, también es una ecuación en forma general.

grupo lineal general (grupo lineal completo) El conjunto de todas las matrices cuadradas invertibles n × n con entradas reales o complejas forma un GRUPO bajo la operación de multiplicación de MATRICES . Este grupo se denomina grupo lineal general de n-ésimo orden y se denota como GLn . Es sencillo ver que los cuatro axiomas de grupo sí se cumplen:

Cierre. Si A y B tienen inversas, también las tienen = producto AB: $(AB)^{-1} B^{-1}A^{-1}$.

Identidad. La matriz identidad I es invertible y por tanto pertenece a este conjunto.

Machine Translated by Google

Asociatividad. Esta regla es válida para todas las matrices y, por tanto, para las matrices invertibles en particular.
Inversos. La inversa de una matriz A es en sí misma invertible, por lo que pertenece al conjunto: (A–1) –1 = A.

Un estudio de DETERMINANTES y REGLA DE CRAMER muestra que una matriz es invertible si, y solo si, su determinante no es cero. Así, el grupo lineal general de orden n puede definirse como el conjunto de todas las matrices cuadradas n × n con determinantes distintos de cero. El subconjunto de todas las matrices cuadradas con determinante igual a 1 forma un subgrupo de GLn llamado grupo lineal especial, denotado SLn .

geodésica La curva más corta que conecta dos puntos en una superficie y que descansa completamente sobre esa superficie se llama geodésica. Por ejemplo, el TEOREMA DE PITÁGORAS muestra que una línea recta da el camino más corto entre dos puntos en un plano y, por lo tanto, las líneas rectas son las geodésicas de un plano. En una ESFERA, las geodésicas son secciones de grandes círculos. (Los aviones vuelan a lo largo de arcos geodésicos a través de la superficie de la Tierra). Uno imagina una geodésica como el camino que adoptaría una banda elástica estirada si se mantuviera en los dos puntos en cuestión y se la obligara a permanecer en la superficie bajo estudio.

En un plano siempre hay una sola geodésica entre dos puntos dados. En una esfera hay infinitas geodésicas que conectan los dos polos de la esfera, por ejemplo. (Sin embargo, si los dos puntos elegidos no son antípodas, entonces la geodésica que los conecta es única).

Un domo geodésico es una estructura similar a un domo hecha de elementos estructurales en línea recta sostenidos en tensión. Los segmentos de línea recta se aproximan a las geodésicas de la cúpula.

distribución geométrica Ver DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

media geométrica Ver MEDIA.

sucesión geométrica (progresión geométrica) UNA SUCESIÓN de números en la que cada término, excepto el primero, es un múltiplo fijo del anterior se llama sucesión geométrica. La razón constante de términos es llamada razón común. Por ejemplo, la secuencia 1,3,9,27,… es geométrica, con razón común 3. La secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ también es geométrico, con común proporción. $\frac{1}{2}$ Una sucesión geométrica con primer término a y razón común r tiene la forma: a, ar, ar2, ar3, … El n-ésimo término an de la sucesión viene dado por an = arn–1. (Es común, sin embargo, comenzar el conteo llamando al primer término de la sucesión el "término cero-ésimo", de modo que a0 = ar0 = a y el término n-ésimo de la sucesión viene dado por la fórmula: an = arn .) Una secuencia geométrica también se puede describir como exponencial. La razón común r es la base de la FUNCIÓN EXPONENCIAL f(n) = arn .

Si el valor r se encuentra entre –1 y 1, entonces los términos arn de la secuencia geométrica se aproximan al valor 0 cuando n se vuelve grande. Si r = 1, entonces la sucesión geométrica es la sucesión constante a,a,a,… Para todos los demás valores de r, la sucesión diverge.

La suma de los términos de una sucesión geométrica se llama serie geométrica:

$$a + ar + ar2 + ar3 + \ldots$$

En el estudio de SERIES CONVERGENTES, la prueba de la razón muestra que esta serie suma un valor finito si –1 < r < 1. El valor S de la suma se puede calcular de la siguiente manera:

Si $S = a + ar + ar2 + ar3 + \ldots$, entonces $rS = ar + ar2 + ar3 + ar4 + \ldots$ Restando se obtiene: $S - rS = a$, entonces $S = \frac{a}{1 - r}$

En particular tenemos $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1 - r}$.

Si r es una fracción de la forma $\frac{1}{N}$ (con N ≥ 2), entonces esto fórmula se puede reescribir:

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{N}{N - 1}$$

Esta expresión particular también se puede justificar con una demostración física, que ilustramos aquí para el caso N = 3:

John toma un pedazo de papel y lo rompe en tres partes. Le entrega una pieza a Andrea, otra

Machine Translated by Google

a Beatrice, y rompe el tercer pedazo en tercios de nuevo. Le entrega una pieza a Andrea, una segunda a Beatrice, y rompe la tercera pieza restante en tercios de nuevo. Repite este proceso indefinidamente. Eventualmente, John dará todo el papel de distancia, la mitad para Andrea y la otra mitad para Beatrice. Pero la cantidad de papel que recibe Andrea y el La cantidad que Beatrice recibe también se puede calcular como un tercio, más un tercio de un tercio, más un tercio de un tercio de un tercio, y así sucesivamente. Así es debe darse el caso de que $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ es igual $\frac{1}{2}$

Un decimal periódico se puede considerar como la suma de un secuencia geométrica. Por ejemplo, el decimal 0.111… es igual a la serie $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$, cual, de acuerdo con la fórmula anterior, es $\frac{1}{9}$. (En consecuencia, el decimal repetitivo 0.999… es igual a 9 veces esto, $9 \times \frac{1}{9}$, que es 1: 0.999… = 1.)

La suma S de solo los primeros n términos de una geometría serie, a + ar + ar2 +…+ arn–1 se puede calcular a partir de la fórmula S – rS = a – arn . Siempre que r ≠ 1, esto da:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

(Si –1 < r < 1, entonces $r^n \to 0$ a medida que n crece. Esto nuevamente muestra que $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = a \cdot \frac{1}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$.) Para ejemplo, la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{512}$ igual a $\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}$. Un cálculo similar resuelve un famoso “rompecabezas de tablero de ajedrez”:

> Cuenta la leyenda que el juego de ajedrez era inventado para un maharajá indio que se convirtió tan encantado con el juego que quería recompensar al inventor con lo que desee.
>
> El inventor no pidió nada más que una grano de arroz en la primera casilla del tablero de ajedrez, dos granos en la segunda casilla, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, conteniendo cada cuadrado el doble de granos que el cuadrado anterior. Dado que hay 64 cuadrados en un tablero de ajedrez, ¿cuántos granos de arroz inventor de hecho solicitud?

Según la fórmula, el inventor pidió 1 + 2 + 4 + 8 +…+ 263 granos de arroz. esto es igual $\frac{1 - 2^{64}}{1 - 2}$ = 264 – 1 = 18.446.744.073.709.551.615 granos, que es el equivalente a unos 25 mil millones de millas cúbicas de arroz, una cantidad inconcebible. El inventor engañó al maharajá en hacer una promesa que posiblemente no podría honor.

Véase también SECUENCIA ARITMÉTICA; SE CONVERGENTE SECUENCIA; SERIE.

serie geométrica Ver SECUENCIA GEOMÉTRICA.

transformación geométrica Un procedimiento especificado que cambia puntos en el plano a diferentes posiciones (y por lo tanto cambiando la ubicación, y posiblemente el formas, de figuras geométricas) se denomina transformación geométrica. Más precisamente, una transformación geométrica. es una FUNCIÓN que se asocia con cada punto de la plano algún otro punto en el plano. (Uno puede requerir la función sea uno a uno y sobre.)

Por ejemplo, la función que desplaza cada punto de el plano una unidad a la derecha es una transformación geométrica (llamada traslación). Esta transformación conserva las formas de todas las figuras geométricas.

Cualquier transformación geométrica que preserva distancias entre puntos en el plano (y por lo tanto el la forma y el tamaño de las figuras geométricas) se denomina isoma o movimiento rígido. Uno que multiplica todas las distancias entre puntos por un factor constante (llamado la dilatación factor) se llama semejanza, y una transformación que lleva líneas rectas a líneas rectas se llama LINEAL TRANSFORMACIÓN. Todas las isometrías son transformaciones lineales, por ejemplo. Estas ideas también se extienden a las transformaciones en el espacio tridimensional.

Si bien nunca hizo un uso explícito del concepto en sus escritos, la idea de una transformación geométrica proviene del trabajo del geómetra griego EUCLID (ca. 300–260 a. C.).

Listamos aquí algunos ejemplos clásicos de formas geométricas. transformaciones.

Reflexión en una línea
Dada una recta l en el plano, una reflexión en esta recta toma un punto P en un lado de l al punto correspondiente P′

Machine Translated by Google

en el lado opuesto de l tal que el segmento que conecta P a P′ es PERPENDICULAR a ly bisecado por él.
Los puntos sobre l mismo no se mueven. Cualquier reflejo es una isometría que transforma las figuras geométricas en sus imágenes especulares. La línea utilizada para realizar la reflexión se llama línea de reflexión.

En un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS , una reflexión sobre el eje x lleva un punto con coordenadas (x,y) al punto (x,–y), y una reflexión sobre el eje y cambia el signo de la coordenada x: (x,y) se convierte en (–x,y). El análogo de un reflejo en una línea en un espacio tridimensional es un reflejo en un plano.

Traslación
Una transformación geométrica que mueve todos los puntos en el plano una distancia fija en una dirección fija se llama traslación. No se dejan puntos sin mover por una traslación. Una traslación es una isometría, y todas las figuras geométricas se transforman en nuevas figuras con el mismo tamaño, forma y orientación que las originales.

Si l1 y l2 son dos líneas PARALELAS en el plano, separadas d unidades, una reflexión en la primera línea, seguida de una reflexión en la segunda, tiene el mismo efecto que trasladar todos los puntos en el plano una distancia de 2d unidades en un dirección fija perpendicular a las dos líneas. Así toda traslación equivale a la COMPOSICIÓN de dos reflejos.

En un sistema de coordenadas cartesianas, una traslación lleva un punto con coordenadas (x,y) al punto (x + a, y + b) para algunos valores fijos a y b.

Rotación
Una rotación alrededor de un punto O a través de un ángulo θ es la transformación geométrica que mapea un punto P en el plano al punto P′ tal que P y P′ están a la misma distancia de O, y el ángulo POP′ tiene la medida θ. (Se aplica un giro en el sentido contrario a las agujas del reloj si θ es positivo; un giro en el sentido de las agujas del reloj de θ es negativo). fijado.

Una rotación es equivalente a dos reflexiones sobre rectas que se cortan en O formando un ángulo de entre ellas. Toda $\frac{\theta}{2}$ rotación es una isometría. El análogo de una rotación alrededor de un punto en el espacio tridimensional es una rotación alrededor de una línea.

Reflexión de deslizamiento
Una reflexión en una línea seguida de una traslación en una dirección paralela a esa línea se denomina reflexión de deslizamiento.

Reflexión en un punto
Una reflexión en un punto O en el plano es la isometría que lleva un punto P en el plano al punto correspondiente P′ tal que O se encuentra en el PUNTO MEDIO del segmento de línea que conecta P y P′. Una reflexión en un punto equivale a una rotación de 180° alrededor de ese punto.

Dilatación
Una dilatación con centro O y factor de dilatación k > 1 es la transformación geométrica que deja O fijo y aleja cualquier punto P de O, por un factor k, a lo largo del rayo de O a P. Así, una dilatación alarga las figuras uniformemente hacia fuera de O. Es posible, por ejemplo, convertir un cuadrado en un rectángulo a través de una dilatación. (Una dilatación con un factor de dilatación k entre O y 1 “encoge” todos los puntos más cerca de O). Una dilatación no es una isometría.

Inversión circular
También llamada “inversión en un círculo” o “reflexión en un círculo”, una inversión circular en un círculo, con centro O y radio r, toma un punto P en el plano a una distancia d 2 /d de O, y lo asigna al punto a una distancia r de O a lo largo del mismo rayo de O a P. Así, los P' puntos dentro del círculo se toman fuera, y viceversa. Los puntos en el círculo mismo no se mueven por la transformación. La imagen del centro O bajo la inversión de un círculo no está definida.

Una inversión circular no es una isometría pero demuestra ser un mapeo útil en el estudio de la GEOMETRÍA. Tiene la propiedad de que los círculos y las rectas del plano se convierten en nuevos círculos y nuevas rectas.

Véase también PATRÓN DE FRISO; TEÓ FUNDAMENTAL REM DE ISOMETRIAS; SIMETRÍA; TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

geometría La rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio y de las figuras, líneas, curvas y puntos dibujados en el espacio se llama geometría. La geometría plana trata de examinar objetos dibujados en un plano (líneas, círculos, polígonos y similares), la geometría sólida se ocupa de figuras en el espacio tridimensional (poliedros, líneas, planos y superficies) y los estudios de GEOMETRÍA ESFÉRICA .

Machine Translated by Google

Historia de la Geometría

El estudio de la GEOMETRÍA es antiguo. Los registros muestran que los eruditos egipcios y babilónicos de alrededor de 1900 a. C. habían desarrollado sólidos principios de medición y razonamiento espacial en su arquitectura y en su topografía de la tierra. Ambas culturas conocían el TEOREMA DE PITÁGORAS y tenían Desarrolló tablas de TRIPLES PITAGÓRICAS. (Los egipcios usaban cuerdas anudadas para construir "triángulos 3-4-5" para crear ÁNGULOS RECTOS). Los antiguos textos indios sobre la construcción de altares y templos demuestran un conocimiento sofisticado de la geometría, y el famoso volumen JIUZHANG SUANSHU (Nueve capítulos sobre las matemáticas art) de la antigua China también incluye trabajos sobre el teorema de Pitágoras.

En la antigua Grecia, los estudiosos de las matemáticas se dieron cuenta de que muchas propiedades de las formas y figuras podían deducirse lógicamente de otras propiedades. En su obra épica LOS ELEMENTOS, el geómetra griego EUCLIDES (ca. 300-260 a. C.) recopiló un gran volumen de conocimientos sobre el tema y demostró que todos y cada uno de los resultados podían deducirse lógicamente a partir de un conjunto muy pequeño de suposiciones básicas (verdades evidentes por sí mismas).) sobre cómo debería funcionar la geometría. El trabajo de Euclides fue riguroso y sistemático, y así nació la noción de PRUEBA lógica . LOS POSTULADOS DE EUCLIDES y el proceso de razonamiento lógico se convirtieron en el modelo de toda investigación geométrica posterior durante los dos milenios siguientes. Su método de recopilar y organizar todo el conocimiento matemático conocido en su época fue un logro intelectual significativo. El enfoque riguroso de Euclides fue, y sigue siendo, modelado en otras ramas de las matemáticas. Becarios en SET La TEORIA, los FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS y el CÁLCULO, por ejemplo, buscan seguir el mismo proceso de teoría formal. sonando como el enfoque correcto para lograr una adecuada comprensión de estos temas.

El siguiente gran avance en el avance de la geometría ocurrió en el siglo XVII con el descubrimiento de las COORDENADAS CARTESIANAS como un medio para representar puntos como pares de números reales y líneas y curvas como ecuaciones algebraicas. Este enfoque, descrito por el matemático y filósofo francés RENÉ DESCARTES (1596–1650) en su famosa obra de 1637 La géométrie (Geometría), unió los campos entonces dispares del álgebra y la geometría. Desafortunadamente, los intereses de Descartes radican únicamente en el avance de los métodos de construcción geométrica, no en el desarrollo de un modelo algebraico completo de la geometría. Esta última tarea fue realizada por el matemático francés PIERRE DE FERMAT (1601-1665), quien también había esbozado los principios de la geometría de coordenadas en un manuscrito inédito que había circulado entre los matemáticos antes de la publicación de La géométrie. Fermat publicó más tarde la obra en 1679 bajo el título Isagoge ad locus planos et solidos (Sobre el plano y el lugar sólido). La aplicación del álgebra a la disciplina brindó a los académicos una nueva y poderosa herramienta para resolver problemas geométricos y también les proporcionó una gran cantidad de diferentes tipos de curvas para estudiar.

El trabajo de Fermat en geometría inspiró el trabajo sobre la teoría del CÁLCULO DIFERENCIAL y, más tarde, condujo al estudio de la "geometría diferencial" (la aplicación del cálculo al estudio de formas y superficies). Este fue desarrollado por el matemático y físico alemán CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855).

Ni Descartes ni Fermat permitieron valores negativos para las distancias. En consecuencia, ninguno de los eruditos trabajó con un conjunto completo de ejes de coordenadas como los usamos hoy. El

las propiedades de las líneas y formas dibujadas en la superficie de una ESFERA. La palabra geometría proviene de las palabras griegas ge que significa "tierra" y metria que significa "medida". Como sugiere el origen de la palabra, el estudio de la geometría evolucionó a partir de preocupaciones muy prácticas con respecto a la medición precisa de extensiones de tierra, navegación y arquitectura.

El matemático griego EUCLID (ca. 300-260 a. C.) formalizó el estudio de la geometría en uno de puro razonamiento lógico y deducción. En su famosa obra, LOS ELEMENTOS, Euclides recopiló un volumen considerable del conocimiento griego sobre el tema y mostró que todos los resultados conocidos en ese momento podían deducirse de una colección muy pequeña de verdades evidentes o AXIOMAS, que declaró explícitamente. Cualquier resultado que pueda ser deducida de estos axiomas se describe hoy como euclidiana. El enfoque riguroso de Euclides para la investigación geométrica siguió siendo el modelo estándar de estudio durante dos milenios.

Véase también GEOMETRÍA EUCLIDEA; ESPACIO EUCLIDEO; LOS POSTULADOS DE EUCLIDES ; HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (ensayo); GEOMETRÍA NO EUCLIDEA; POSTULADO PARALELO; GEOMETRÍA PROYECTIVA.

Germain, Marie-Sophie (1776–1831) Francés Teoría de números, física matemática Nacida el 1 de abril de 1776 en París, Francia, la erudita Marie-Sophie Germain es recordada en matemáticas por sus importantes contribuciones al tema de la TEORÍA DE NÚMEROS. Más destacado,

Machine Translated by Google

SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) y GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716), los coinventores del CÁLCULO, propusieron por primera vez las nociones de distancia negativa y área negativa .

El siglo XIX vio otros avances importantes en la geometría. Durante mucho tiempo se ha observado que el quinto postulado de Euclides, el llamado POSTULADO PARALELO, no es necesario para una gran parte de la geometría. Muchos eruditos árabes del primer milenio intentaron, sin éxito, demostrar que el quinto postulado podía deducirse lógicamente de los cuatro restantes (haciéndolo innecesario), al igual que los eruditos europeos del Renacimiento. En 1795, el matemático escocés John Playfair demostró que el quinto postulado es equivalente a la afirmación de que, a través de cualquier punto, se puede trazar una, y sólo una, línea a través de ese punto paralela a una línea dada.
(Esto se llama hoy AXIOMA DE PLAYFAIR .) Aunque no eliminó la necesidad del quinto postulado, Playfair demostró que podía entenderse de una forma más manejable.

En 1829, el matemático ruso NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) dio un paso audaz y consideró un mundo geométrico en el que el quinto postulado es falso. Supuso que a través de un punto dado se podía trazar más de una línea paralela a una línea dada. Al hacer esto, Lobachevsky descubrió un sistema matemático nuevo, consistente y libre de contradicciones, uno tan lógicamente válido como la geometría de Euclides. (Esta geometría se llama hoy GEOMETRÍA HIPERBÓLICA.) El impacto filosófico del trabajo de Lobachevsky fue enorme: había demostrado que las matemáticas no necesitan basarse en un único conjunto de verdades físicas, y que existen otros sistemas matemáticos igualmente válidos basados en alternativas, axiomas cuidadosamente elegidos. Lobachevsky también había demostrado que el quinto postulado de Euclides no puede establecerse como consecuencia de los cuatro axiomas restantes: tenía pre

presentó un ejemplo válido de un sistema en el que se cumplen los cuatro primeros postulados de Euclides, pero no el quinto.

Sorprendentemente, algunas de las ideas de Lobachevsky se anticiparon mucho antes del siglo XIX. El gran matemático y poeta persa OMAR KHAYYÁM (ca. 1048-1122) estableció una serie de resultados que hoy reconocemos como no euclidianos. Estos resultados fueron posteriormente traducidos al latín y ampliados por el sacerdote italiano GIROLAMO SAC CHERI (1667–1733). Desafortunadamente, ninguno de los estudiosos descubrió la validez de la GEOMETRÍA NO EUCLIDEA, ya que cada uno se centró en tratar de establecer el quinto postulado de Euclides como consecuencia de los cuatro restantes.

El matemático alemán BERNHARD RIEMANN (1826-1866) descubrió una forma alternativa de geometría no euclidiana en la que el quinto postulado de Euclides falla de forma diferente. En un sistema de GEOMETRÍA ESFÉRICA nunca es posible trazar una línea por un punto dado paralela a una línea dada.

Las contribuciones de Riemann al avance de la geometría fueron significativas. En su famosa conferencia de 1854 "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Sobre las hipótesis que se encuentran en la base de la geometría), Riemann planteó la opinión de que la geometría puede ser el estudio de cualquier tipo de espacio de cualquier número de dimensiones, y más tarde desarrolló las matemáticas necesarias para describir correctamente la forma del espacio. ALBERT EINSTEIN (1879–1955) más tarde usó este trabajo para desarrollar su teoría de la relatividad.

Véase también GEOMETRÍA AFINAL; MATEMÁTICAS ÁRABES; MATEMÁTICAS DE BABILONIA; JÁNOS BOLYAI; DIMENSIÓN; MATEMÁTICAS EGIPCIA; LOS ELEMENTOS; GEOMÉTRICO; TRANSFORMACIÓN; MATEMÁTICAS GRIEGAS; HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo); MATEMÁTICAS INDIAS; PERSPECTIVA; POSTULADO; DESCRIPTIVO GEOMETRÍA; TEOREMA; TOPOLOGÍA.

su trabajo allanó el camino para que otros académicos en el campo establecieran la validez del ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT para todos los valores n < 100, el único paso sustancial dado hacia la solución del problema durante el siglo XIX. Germain también trabajó para desarrollar una teoría matemática de la elasticidad. Se la considera una de las pocas mujeres académicas en matemáticas antes del siglo XX.

A la edad de 13 años, después de leer un relato de la vida y muerte de ARQUÍMEDES DE SIRACUSA, Germain dijo que se sintió impulsada a convertirse en matemática. Continuó sus estudios primero aprendiendo latín y griego y luego leyendo las obras de SIR ISAAC NEW TON, LEONHARD EULER y EUCLID. Como mujer, a Germain no se le permitió ingresar a la universidad, pero logró continuar sus estudios de matemáticas leyendo las notas del curso prestadas por estudiantes que asistieron a la École Polytechnique en París. El matemático JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) presentó un curso sobre ANÁLISIS en la universidad y Germain le presentó una tesis sobre el tema bajo el seudónimo de Louis LeBlanc, un nombre masculino. Lagrange quedó muy impresionado por el contenido del artículo y buscó a su autor. No se inquietó en absoluto al descubrir que “M. LeBlanc” era una mujer. De hecho, quedó tan impresionado con su trabajo que le ofreció su consejo personal en el estudio de matemáticas avanzadas.

Nuevamente bajo su seudónimo masculino, Germain estableció posteriormente una correspondencia con el matemático alemán CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), con quien desarrolló y compartió gran parte de su trabajo en

Machine Translated by Google

teoría de los números. Gauss también descubrió finalmente su verdadera identidad, pero esto no disminuyó su respeto por ella como una excelente erudita. En 1808, el Institut de France convocó un concurso para encontrar una teoría matemática para la teoría de la elasticidad. Aunque las matemáticas necesarias para resolver el desafío no estaban disponibles para los académicos en ese momento, Germain dedicó una década de trabajo a resolver el problema y logró dar pasos significativos en el desarrollo de una teoría inicial sobre el tema. Desafortunadamente, gran parte de su trabajo fue ignorado por el Institut.

Germain nunca se casó ni obtuvo un puesto profesional; su padre la apoyó económicamente durante toda su vida. Germain murió de cáncer de mama en París, Francia, el 27 de junio de 1831. Su certificado de defunción mencionaba su ocupación simplemente como "titular de la propiedad".

Reflexión de deslizamiento Una reflexión en una línea seguida de una traslación en una dirección paralela a esa línea se denomina reflexión de deslizamiento.

Véase también TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA.

gnomon La figura en forma de L que queda cuando se quita un PARALELOGRAMO (generalmente un cuadrado) de la esquina de un paralelogramo similar más grande se llama gnomon. Por ejemplo, en una matriz de puntos cuadrada de 2 × 2, los tres puntos que rodean cualquier punto de esquina forman la forma de un gnomon. (Observe, por cierto, que 4 = 1 + 3). Agregar un gnomon de cinco puntos a la matriz de 2 × 2 produce una matriz cuadrada de 3 × 3 (y tenemos que 9 = 1 + 3 + 5), y sumando a esto un gnomon de siete puntos produce una matriz de 4 × 4 (que da 16 = 1 + 3 + 5 + 7).

Este proceso muestra que, en general, el n-ésimo número cuadrado es igual a la suma de los primeros n números impares.

El puntero en un reloj de sol también se llama gnomon.
Él, y la sombra que proyecta, juntos forman la forma de una L.

Véase también NÚMEROS FIGURADOS.

Gödel, Kurt (1906–1978) Lógica austríaco-estadounidense Nacido el 28 de abril de 1906 en Brünn, Austria-Hungría (ahora Brno, República Checa), Kurt Gödel es considerado hoy en día el lógico más importante del siglo XX. Su famoso par de teoremas de incompletitud asombraron a la comunidad matemática, acabando con las esperanzas de todos aquellos que habían estado buscando fervientemente un conjunto de axiomas fundamentales a partir de los cuales se pueden deducir lógicamente todas las matemáticas.

Gödel mostró talento para el trabajo académico a una edad temprana y había completado el equivalente a un plan de estudios universitario antes de terminar la escuela secundaria. En 1923 ingresó a la Universidad de Viena para obtener una licenciatura en física, pero cambió a matemáticas en 1926 cuando se introdujo en el campo de la LÓGICA FORMAL.

Pronto quedó claro para la facultad del departamento que Gödel haría contribuciones considerables al campo. En el verano de 1929, Gödel completó una tesis doctoral sobre el tema y obtuvo un Ph.D. el año siguiente. Su tesis describió los detalles de su primer descubrimiento famoso, pero la comunidad matemática en general no entendió completamente el impacto revolucionario de su trabajo hasta que publicó el resultado un año después.

Gödel había demostrado que cualquier sistema matemático lo suficientemente sofisticado como para incorporar los principios de la aritmética siempre contendrá afirmaciones que no se pueden probar ni refutar. Más tarde también demostró que no se puede demostrar que ningún sistema matemático sea consistente, es decir, libre de CONTRADICCIONES, haciendo uso de los axiomas del sistema. Había sido un sueño de 200 años, desde la época de GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ , de hecho, colocar todas las matemáticas sobre una base axiomática firme. Gödel había demostrado, en esencia, que tal sueño nunca se puede realiza

Después de incorporarse a la facultad de la Universidad de Viena durante tres años, Gödel aceptó, en 1933, un puesto en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jer sey. Después de sufrir una crisis nerviosa, regresó a Viena después de solo un año, pero luego regresó al Instituto en 1942 para escapar de la Europa devastada por la guerra. Gödel se convirtió en ciudadano estadounidense ese mismo año.

Muchos premios le fueron otorgados a lo largo de su vida. En 1950 fue uno de los dos ganadores del primer Premio Einstein, y en los dos años siguientes recibió doctorados honorarios de la Universidad de Yale en New Haven, Connecticut, y de la Universidad de Harvard en Cambridge, Massachusetts. Fue elegido miembro de la Academia Nacional de Ciencias en 1955.

Se dice que Gödel tenía opiniones fijas sobre muchos asuntos de la vida y sentía que siempre tenía razón, especialmente en las disciplinas de las matemáticas y la medicina. Gödel tenía una disposición nerviosa y, después de sufrir una hemorragia grave por una úlcera duodenal, decidió mantener una dieta extremadamente estricta.

Machine Translated by Google

ideando Desarrolló una desconfianza general hacia los médicos y, hacia el final de su vida, se convenció de que lo estaban envenenando. Gödel finalmente dejó de comer por completo y murió de hambre el 14 de enero de 1978.

El trabajo de Gödel en lógica matemática ataca el núcleo mismo del tema. Su nombre y sus resultados son familiares para cualquier estudiante universitario que haya tomado un primer curso de lógica formal.

Ver también TEOREMAS DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL .

Los teoremas de incompletud de Gödel En 1900, DAVID HILBERT planteó 23 problemas a los futuros matemáticos.
El segundo de sus 23 problemas desafió a la comunidad matemática a encontrar una base lógica para la disciplina de las matemáticas, es decir, a desarrollar un sistema formal de símbolos, con un significado bien definido y reglas de manipulación bien definidas, sobre las cuales todos de las matemáticas podría basarse. Matemáticos como BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSEL y su colega ALFRED NORTH WHITEHEAD aceptaron el desafío y lograron algunos avances en esta dirección. Pero en 1931, KURT GÖDEL sorprendió a la comunidad matemática al demostrar de una vez por todas que tal objetivo nunca podría lograrse.

El primer teorema de incompletitud de Gödel establece que cualquier sistema matemático lo suficientemente sofisticado como para incorporar los principios de la aritmética necesariamente contendrá enunciados (teoremas) que no se pueden probar ni refutar. Informalmente, esto significa que nunca será posible programar una computadora para responder a todas las preguntas matemáticas.

Su segundo teorema de incompletitud (que en realidad es una consecuencia del primero) afirma que ningún sistema de lógica matemática que incorpore los principios de la aritmética será capaz de establecer su propia consistencia. Es decir, la prueba de que un sistema matemático está libre de CONTRADICCIONES requerirá axiomas y principios no contenidos en el sistema.

Gödel probó sus teoremas asignando números a los símbolos usados en un sistema matemático (comas, dígitos, paréntesis izquierdo y derecho, etc.), y luego ideó un ingenioso método para asignar números a todos los enunciados matemáticos (combinaciones de símbolos) en el sistema. Entonces fue posible mostrar que el sistema matemático contiene un enunciado de la forma: “Esta oración no se puede probar”. Por supuesto, es imposible probar o refutar tal afirmación.

El trabajo de Gödel acabó con siglos de esperanza de encontrar un pequeño conjunto de axiomas básicos en los que basar todas las matemáticas.

Véase también CONSISTENTE; LÓGICA FORMAL; MESA DE LA VERDAD.

Goldbach, Christian (1690–1764) Teoría de números prusiana
Nacido el 18 de marzo de 1690 en Königsberg, Prusia (ahora Kaliningrado, Rusia), Christian Goldbach es mejor recordado en matemáticas por la famosa conjetura no resuelta que lleva su nombre.

Goldbach estudió en San Petersburgo y se convirtió en profesor de matemáticas e historiador en la universidad en 1725. Viajó mucho por Europa y estableció contacto personal con varios matemáticos destacados de la época. Aunque Goldbach estudió sumas infinitas, la teoría de ecuaciones y la teoría de curvas, su trabajo más importante fue en el campo de la TEORÍA DE NÚMEROS, gran parte del cual se llevó a cabo a través de correspondencia con el matemático suizo LEONHARD EULER (1707-1783).

Una carta en particular atrajo más tarde la atención internacional. En él, Goldbach menciona que todo número par parece ser la suma de dos números PRIMOS . Por ejemplo, observó que 4 es igual a 2 + 2, 6 es igual a 3 + 3, 10 es igual a 3 + 7 y 1000 es igual a 113 + 887. Incapaz de encontrar un caso en el que no fuera así, Goldbach preguntó a Euler si esto era de hecho una propiedad de todos los números pares. Euler intentó resolver el problema, pero descubrió que no podía establecer la afirmación ni encontrar un CONTRAEJEMPLO . Más tarde, el matemático inglés Edward Waring publicó el problema en su popular texto de 1770 Meditationes alge braicae (Meditaciones sobre álgebra), atribuyendo correctamente el problema a Goldbach. El desafío cobró considerable notoriedad. Hoy llamado CONJECTURA DE GOLDBACH , el problema sigue siendo uno de los desafíos sin resolver más famosos de las matemáticas.

Goldbach murió en Moscú, Rusia, el 20 de noviembre de 1764. Además de la conjetura que lleva su nombre, Goldbach también es recordado por su correspondencia con PIERRE DE FERMAT (1601–1655) y por ser uno de los pocos matemáticos de la época en comprender las implicaciones del enfoque de Fermat a la teoría de números.

La conjetura de Goldbach En su carta de 1742 a LEON
HARD EULER, matemático prusiano CHRISTIAN

Machine Translated by Google

GOLDBACH (1690-1764) conjeturó que todo número par mayor que 2 es la suma de dos números PRIMOS . Por ejemplo, 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3,…, 20 = 3 + 17,…, 50 = 13 + 37,…, 100 = 3 + 97, etc. Nadie hasta el día de hoy ha podido establecer si esta afirmación es cierta para todos y cada uno de los números pares. Desde entonces, el problema se conoce como la conjetura de Goldbach y sigue siendo uno de los problemas matemáticos sin resolver más famosos de la actualidad. Entre el 20 de marzo de 2000 y el 20 de marzo de 2002, se ofreció un premio de $ 1 millón a cualquiera que pudiera resolver la conjetura de Goldbach. El premio no fue reclamado.

La conjetura de Goldbach es equivalente al desafío de demostrar que todo número entero mayor que 5 es la suma de tres números primos. (Si el número es impar, resta 3 y escribe el número resultante como una suma de dos números primos.
Si es par, resta 2.)

La fuente de la dificultad con este problema es que los números primos se definen en términos de multiplicación, mientras que el problema involucra la suma. A menudo es muy difícil establecer conexiones entre estas dos operaciones separadas en los números enteros.

En 1931, el matemático ruso L. Schnirelmann (1905-1938) demostró que todo número entero positivo es la suma de 300 000 números primos como máximo. Aunque este resultado parece ridículo en comparación con el problema original, es un primer paso significativo para resolver la conjetura: al menos muestra que es posible poner un límite al número de números primos que representan los números enteros.

En 1937, otro matemático ruso, Ivan Vinogradoff (1891–1983), demostró que todo número suficientemente grande se puede escribir como una suma de cuatro números primos. No se sabe qué constituye "suficientemente grande" (el trabajo de Vinogradoff solo muestra que no puede haber un número infinito de números enteros que requieran más de cuatro sumandos primos), pero al menos se ha colocado un pequeño límite en "la mayoría" de los números enteros. En 1973, Jing-Run Chen demostró que todo número par suficientemente grande es la suma de un primo y un número que es primo o tiene dos factores primos.

Continúa el trabajo para resolver la conjetura de Goldbach. A partir del año 2003, se ha confirmado por computadora que la conjetura se cumple para todos los números hasta 6 × 1016

.

Véase también FUERZA BRUTA.

proporción áurea (proporción divina, proporción media y extrema, proporción áurea, sección áurea) Un segmento de línea que une dos puntos A y B se dice que está dividido por un tercer punto P en la proporción áurea si la razón entre la longitud total AB y la longitud AP es la misma que la
RELACIÓN de la longitud AP a la longitud PB:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{\text{punto de acceso}}{PB}$$

El valor de esta relación se denota (la letra griega phi) y se puede calcular de la siguiente manera:

Establezca la longitud PB en una unidad. Entonces, desde $\frac{AP}{PB} =$, la longitud AP es unidades, y la longitud de todo el segmento AB es + 1. Tenemos:

$$\frac{+1}{} = \frac{}{-1}$$

dando la ecuación CUADRÁTICA = + 1. ^{2}
Esto tiene dos soluciones. Seleccionando la solución que es mayor que 1 se obtiene:

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\ldots$$

(La segunda solución a esta ecuación cuadrática es $1 + \sqrt{5} = 1 - = -0.618033988\ldots.$)

La proporción áurea fue estudiada y hecha famosa por los pitagóricos, los seguidores del matemático griego PITÁGORAS (ca. 500 a. C.). Lo descubrieron en su estudio del PENTAGRAMA, la figura que aparece cuando se dibujan las diagonales de un pentágono regular. Los lados de un pentagrama se dividen entre sí en proporción áurea.

El siguiente método muestra cómo construir un punto P que divide un segmento de línea dado AB en la proporción áurea:

Dado un segmento de línea AB, traza una línea perpendicular a través de A. Encuentra el PUNTO MEDIO M de AB y localiza en la línea perpendicular un punto C cuya distancia desde A es la misma que la longitud AM. (Use un círculo con centro A y radio AM como ayuda). Ahora dibuje un círculo con centro C y radio BC para ubicar un segundo punto D en la línea perpendicular tal que la longitud BD sea igual a la longitud BC. Sea P el punto sobre el segmento AB tal que la longitud AP es igual a la longitud AD. (Utilice un círculo con centro A

Machine Translated by Google

y el radio AD para encontrar este punto). Luego, el punto P divide el segmento AB en la proporción áurea.

(Para ver por qué esto funciona, suponga que el segmento de línea AB tiene una unidad de longitud y la longitud de AP es x. Entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa 1 + x. EL TEOREMA DE PITÁGORAS ahora muestra que x = —2 – 1 = $\frac{1}{}$ AB , dando —AP .)

Teniendo en cuenta que la construcción de puntos medios, círculos y líneas perpendiculares se puede lograr solo con una regla (es decir, una regla sin marcas) y un compás, el procedimiento anterior muestra que la proporción áurea es un número CONSTRUCTIBLE .

Dividiendo la relación ^{2} = + 1 por produce = 1 + $\frac{1}{}$. Sustituyendo esta fórmula en sí misma múltiples veces establece:

$$= + = + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}}$$

La repetición de este proceso indefinidamente muestra que la proporción áurea tiene la siguiente CONTINUACIÓN simple FRACCIÓN expansión:

$$1 = + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Si uno termina esta expansión después de un número finito de pasos, aparecen las proporciones de los NÚMEROS DE FIBONACCI : 3 = 1 $\frac{1}{1}$ = = $\frac{F_2}{F_1}$ = , , $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{F}{F_2}$ 1 + $\frac{1}{}$ 4 = = + $\frac{F}{F}$ 1 21 $\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1 +}}$

= = $\frac{5}{3}$ $\frac{F_5}{F_4}$, Etcétera. (Que este patrón persista puede demostrarse por INDUCCIÓN.) Tenemos:

$$\lim_{\text{manuscrito iluminado} \to \infty} \frac{F_{\text{norte}\ 1}}{F_{\text{norte}}} =$$

Un argumento de inducción también prueba que:

$$= F_n + F_{n-1}$$

Al sustituir la fórmula = √ 1+ en sí misma varias veces, se obtiene una expresión para como una secuencia de radicales anidados similar a la FÓRMULA DE VIÈTE para π. Tenemos:

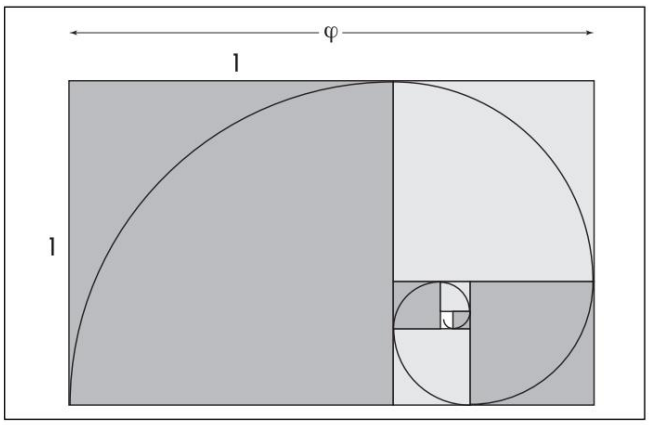
$$+ + + \sqrt{1 + 1\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

La proporción áurea también ocurre en TRIGONOMETRÍA como porque $\frac{\pi}{5}$ 2 = π cos 5 $\frac{2}{}$ = 2 $\frac{1}{}$, y el pecado $\frac{\pi}{10}$ = $\frac{1}{2}$, para instancia.

El número también aparece en una serie de lugares inesperados en la naturaleza y en las actividades artísticas de la humanidad. Dado que la proporción áurea se aproxima bien a la fracción 16/10, algunos eruditos sugieren que los antiguos egipcios del 3000 a. C. usaron la proporción áurea repetidamente en la construcción de sus tumbas. La “cámara de oro” de la tumba de Ramsés IV mide 16 codos por 16 codos por 10 codos, es decir, aproximadamente la relación : : 1; otras tumbas se encuentran en relación de pareja ^{2} : : 1; y los muebles egipcios encontrados en esas tumbas a menudo tenían una forma general basada en la relación : 1 : 1. El artista alemán ALBRECHT DÜRER (1471–1528) escribió un texto en cuatro volúmenes, Tratado sobre proporciones humanas, que detalla las ocurrencias de la relación en el cuerpo humano. (Afirmó, por ejemplo, que la relación entre la longitud del rostro humano y su ancho es aproximadamente , y también que el codo divide el brazo humano, desde el hombro hasta la punta de los dedos, en la proporción áurea). Los artistas de esa época llegaron a ver la proporción áurea como una “ PROPORCIÓN divina” y la utilizó en todas las formas de trabajo artístico. El REC ANGLE se consideró la forma rectangular más agradable a la vista.

rectángulo áureo Cualquier rectángulo cuyos lados estén en la razón 1 a , donde = $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ es el DORADO RAZÓN, se llama rectángulo áureo. Tal rectángulo tiene la propiedad de que al extirpar el cuadrado más grande posible de un extremo de la figura, queda otro rectángulo en la misma proporción. (El rectángulo restante tiene proporciones – 1 a 1. Dado que la proporción áurea ecuación ^{2} 1 = + 1, tenemos: __ = satisface el $\frac{\text{satisface el}}{1}$ – 1 .) Por esto método, se pueden construir nuevos rectángulos dorados a partir de

Machine Translated by Google



el rectángulo dorado

un rectángulo áureo dado ad infinitum. Dibujar arcos entre las esquinas no adyacentes de los cuadrados produce una espiral con la notable propiedad de que corta cualquier radio desde el centro de la espiral en el mismo ÁNGULO (aproximadamente 73°).

A lo largo de la historia se ha considerado que el rectángulo dorado tiene una forma particularmente agradable. Los pilares del Partenón griego del siglo V a. C. están espaciados para producir rectángulos dorados en su fachada (aunque nadie puede estar seguro de que los diseñadores pretendieran que así fuera). Muchos eruditos europeos del siglo XVI basaron gran parte de su trabajo en el rectángulo áureo, y el grabador alemán ALBRECHT DÜRER (1471–1528) utilizó la proporción áurea en su análisis de las PROPORCIONES que se encuentran en el cuerpo humano. Muchos rectángulos que se utilizan hoy en día en los anuncios de las revistas, por ejemplo, se parecen sorprendentemente a los rectángulos áureos.

El rectángulo áureo también aparece en el quinto SÓLIDO PLA TÓNICO, el icosaedro. Si se supone que todas las aristas de la figura tienen una unidad de largo, entonces la distancia entre cualquier arista dada y la arista (paralela) opuesta a ella en el otro lado de la figura es . Así, cualesquiera dos aristas opuestas de un icosaedro forman dos lados de un rectángulo áureo.

Un “triángulo dorado” es un triángulo isósceles cuyos lados a su base están en la razón a 1. Dicho triángulo tiene ángulos internos de 72°, 36° y 72°. Si uno de los ángulos de la base se divide en dos, la figura se divide en dos triángulos más pequeños, uno de los cuales es un nuevo triángulo dorado.

Véase también ESPIRAL DE ARQUÍMEDES.

googol/googolplex En 1938, Milton Sirotta, sobrino de nueve años del matemático estadounidense Edward Kasner, acuñó el término googol para el número 1 seguido de 100 ceros (10100). Al mismo tiempo acuñó el término googolplex para el número 1 seguido de un googol ceros (10googol = 10(10100)). Los físicos creen que solo hay alrededor de 1080 partículas en todo el universo, considerablemente menos que un googol.

Gosset, William Sealy (1876–1937) Estadística británica Nacido el 13 de junio de 1876 en Canterbury, Inglaterra, William Gosset es recordado por su importante trabajo en estadística, sobre todo por su invención de la prueba t, cuyos detalles se publicaron en 1908 bajo el título STUDENT'S T-TEST.

Gosset estudió química y matemáticas en New College, Oxford, antes de aceptar un puesto como químico en la fábrica de cerveza Guinness en Dublín en 1899.
Su interés en las estadísticas estaba motivado por los problemas prácticos de medir y mantener la calidad de la producción. En lugar de probar todas y cada una de las muestras de producto de la cervecería, Gosset buscó técnicas matemáticas que le permitieran deducir información confiable basada en solo una pequeña cantidad de muestras. Su famosa prueba t es el resultado de sus esfuerzos. En un esfuerzo por proteger los secretos comerciales, la cervecería prohibió a sus empleados publicar, pero Gosset imprimió su método bajo el seudónimo de "Estudiante".

El trabajo de Gosset se consideró de gran valor para la cervecería. En 1922 se le asignó un asistente de estadística y se le permitió crear un pequeño departamento de estadística dentro de la empresa. La prueba t de Student se considera hoy en día una técnica fundamental en el repertorio de herramientas utilizadas por la industria y la ciencia cuando se trata de cuestiones de control de calidad e inferencia estadística general.

En 1935, Gosset dejó Irlanda para administrar una nueva fábrica de cerveza Guinness en Londres. Murió dos años después, el 16 de octubre de 1937. Su análisis estadístico de la varianza tuvo un profundo efecto en las prácticas de la industria del siglo XX.

Véase también HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo).

grad Véase GRADIENTE.

Machine Translated by Google

gradiente La PENDIENTE de una línea a veces se llama gradiente o grado. Por ejemplo, la pendiente de la línea que conecta los dos puntos A = (a1 ,a2) y B = (b1 ,b2), denotada como mAB, está dada por:

$$m_{AB} = \frac{\text{"elevar"}}{\text{"correr"}} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Tres puntos A, B y C en el plano son COLINEALES si los gradientes mAB y mAC son iguales.

En el marco del cálculo multivariable, el estudio del CÁLCULO aplicado a FUNCIONES de más de una variable, el gradiente de una función f(x,y,z) de tres VARIABLES, también llamado “grado de f”, se define como el VECTOR de sus DERIVADAS PARCIALES. Se denota grad(f) o f y viene dado por:

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle$$

Tal cantidad resulta útil para calcular la DERIVADA DIRECCIONAL de una función. En física, f también se usa para describir la variación espacial en la magnitud de una fuerza, como una fuerza gravitatoria o una fuerza magnética. El estudio de las derivadas direccionales muestra que la cantidad f calculada en un punto representa la dirección a partir de ese punto en la que la tasa de cambio de la fuerza f es máxima.

Véase también DIV.

gráfico (red) Cualquier diagrama de puntos y segmentos de línea que conectan pares de puntos se llama gráfico. Los puntos se suelen llamar vértices o nodos, y los segmentos de línea se llaman aristas. Se permite que más de un borde conecte el mismo par de vértices para producir un conjunto de múltiples bordes. También se puede permitir que una arista conecte un vértice consigo mismo a través de un bucle. Los bordes pueden intersecarse, pero los lugares donde se cruzan no se consideran vértices.
Por ejemplo, la siguiente imagen es un gráfico. Tiene solo seis vértices y viene en dos piezas desconectadas.

Un gráfico que viene en una sola pieza se llama conectado. Esto significa que siempre es posible viajar de cualquier vértice a cualquier otro atravesando una secuencia de aristas.

Los gráficos se pueden utilizar para codificar información. Por ejemplo, un gráfico podría representar la red de posibles rutas de vuelo entre ciudades, el flujo de información entre departamentos en una gran organización, o incluso el conjunto de conocidos entre las personas que asisten a una fiesta. (Cada vértice representa a una persona en la habitación, y se dibuja un borde entre dos vértices si las dos personas correspondientes se conocen). similares.

El grado (o valencia) de un vértice es el número de aristas que se encuentran en ese vértice. Los bucles se cuentan dos veces.

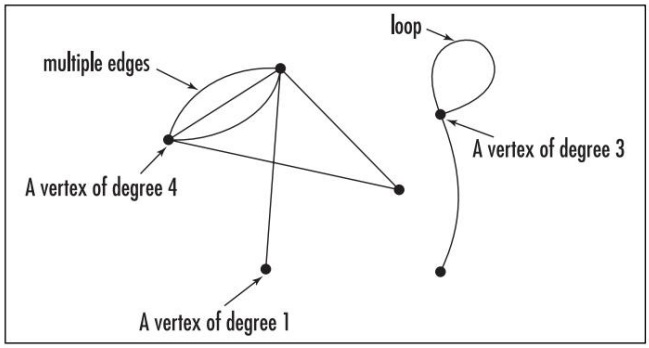
Un grafo se dice completo si cada vértice está conectado a todos y cada uno de los demás vértices por una sola arista. Por ejemplo, el gráfico completo en cuatro vértices parece un cuadrado con las dos diagonales dibujadas. Cada vértice tiene grado tres.

Un gráfico se llama plano si se puede dibujar en un plano sin que se crucen dos aristas. El gráfico completo en cuatro vértices es plano si uno dibuja una de las diagonales "fuera del cuadrado". El PROBLEMA DE LAS TRES UTILIDADES es un ejemplo de un gráfico que no es plano.

Un ciclo en un gráfico es una secuencia de aristas que comienza y termina en el mismo vértice y no viaja dos veces por la misma arista. Encontrar un "circuito de Euler", es decir, un ciclo que atraviese todos y cada uno de los bordes de un gráfico precisamente una vez, es un viejo problema. (Ver TEORÍA DE GRAFOS.)

Un gráfico conexo que no contiene bucles ni ciclos se llama árbol. Estos gráficos parecen una serie de ramas que se bifurcan, y de ahí el nombre de árbol. Cualquier diagrama de árbol, como un árbol de PROBABILIDAD, es un ejemplo de un gráfico que es un árbol. Del TEOREMA DE EULER se deduce que todo grafo conexo con n vértices y n–1 aristas debe ser un árbol.

Véase también RUTA CRÍTICA; RUTA/CIRCUITO EULERIANO ; RUTA/CIRCUITO HAMILTONIANO ; TORNEO.



Un gráfico típico

Machine Translated by Google

solución gráfica Cualquier solución a un par de ecuaciones simultáneas encontradas trazando la gráfica de cada ecuación e inspeccionar visualmente la ubicación de un punto de intersección se llama solución gráfica. Por ejemplo, al trazar las gráficas de y = 2x + 3 y y = 9 – 4x, se ve que las rectas se cortan en el punto (1,5) y así x = 1, y = 5 es una solución al par de ecuaciones. A enfoque gráfico es a menudo el único método factible de resolver un par complicado de ecuaciones. Las calculadoras gráficas están equipadas con un botón de "traza" que permite uno para encontrar rápidamente las coordenadas de los puntos de intersección hasta cierto grado de precisión.

Una sola ecuación f(x) = 0 se puede resolver gráficamente ubicando las intersecciones x de la función. Por ejemplo, para encontrar la raíz cuadrada de 2, uno puede trazar un gráfico de la función f(x) = x 2 –2 e intente identificar el ubicación de la intersección x positiva.

Este método gráfico deja en claro que un par de ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS:

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

tiene una solución (las rectas se intersecan en un punto único) punto), ninguna solución (las líneas son paralelas), o infinitamente muchas soluciones (las rectas coinciden).

UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ se puede resolver gráficamente. Buscamos una curva y = g(x) en el plano cuya pendiente en cualquier punto (x, y) está dada por f(x,y). Así si, para una gran selección de puntos (x,y) a través del plano, dibujamos segmentos de línea cortos de pendiente f(x,y), las formas de las curvas que siguen estas pendientes pueden ser visualmente evidente. Si también se nos dice el valor de la función y = g(x) en un punto particular (x, y), luego siguiendo la pendiente de los segmentos de línea desde ese punto en adelante describe una solución particular a la ecuación.

Véase también MÉTODO DE BISECCIÓN; MÉTODO DE NEWTON .

gráfica de una función Dibujo o representación visual que muestra la relación entre dos o más variables se llama gráfico. Es habitual dibujar el gráfico de una FUNCIÓN de una sola variable y = f(x) en un sistema de COORDENADAS CARTE SIAN con un eje x y un eje y en angulos correctos. La gráfica de la función es entonces el conjunto de todos los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación y = f(x) dibujada como una curva en el plano. Por ejemplo, el conjunto de todos puntos (x, y) que satisfacen y = x 2 forma una PARÁBOLA, mientras que la gráfica de la función y = 3x es una línea recta por el origen con pendiente 3.

Un enfoque general para graficar una función es hacer una tabla de (x, y) pares que satisfagan la ecuación bajo consideración y luego ubicar estos puntos en un sistema de coordenadas Si hay suficientes puntos dibujada, entonces se dibuja una curva suave que conecta los puntos. probable que sea una buena representación de la función. Las calculadoras gráficas emplean esta técnica cuando muestran la gráfica de una función.

A medida que uno se familiariza con las ecuaciones básicas, graficar fórmulas simples se convierte en una cuestión de rutina. Por ejemplo, se puede establecer que una ECUACIÓN LINEAL de la forma y = mx + b produce un gráfico de línea recta de pendiente m que cruza el eje y en la posición b, y que un ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ representa un CÍRCULO de radio r. Para determinar las gráficas de los más complicados funciones, los académicos, durante muchas décadas, solo podían recurrir a la tediosa tarea de hacer tablas y trazar puntos individuales hasta que surgió una imagen general. El advenimiento del CÁLCULO, sin embargo, a finales del siglo XVIII siglo trajo consigo el poder de identificar rápidamente y examinar la forma y estructura básica de gráficos complicados. Examinando la primera DERIVADA de una función, por ejemplo, uno puede determinar dónde está el gráfico aumenta y disminuye, así como la ubicación de cualquier máximo y mínimo local. la segunda derivada proporciona información sobre la forma de la curva— si es cóncavo hacia arriba o cóncavo hacia abajo. Esta informacin, junto con el conocimiento de x- y Intersecciones con el eje y de la curva y cualquier ASINTOTA que pueda poseer, es suficiente para dibujar una imagen razonablemente precisa del gráfico sin tener que trazar puntos. La aplicación de estas técnicas recién descubiertas del cálculo fue literalmente una experiencia reveladora para los estudiosos de la época.

Matemática francesa NICOLE ORESME (ca. 1323–82) fue el primero en dibujar la gráfica de una función y encontrar una interpretación interesante para el área de la región debajo de ella. El abogado francés y matemático aficionado PIERRE DE FERMAT (1601-1665) desarrolló el idea más adelante, definiendo un procedimiento general para asociar curvas a fórmulas. Dada una relación entre dos variables A y B, digamos, Fermat dibujó una horizontal línea de referencia para la variable independiente A e imaginó una segunda línea deslizándose a lo largo de esta línea de referencia en un ángulo fijo cuya longitud B variaba según la

Machine Translated by Google

relación definida. No requirió que la línea que representa a B fuera en ángulo recto con la línea de referencia.
El matemático y filósofo francés RENÉ DESCARTES (1596–1650) desarrolló de forma independiente la misma técnica, pero tuvo la perspicacia adicional de introducir el simbolismo algebraico para describir las relaciones a través de fórmulas y etiquetar los gráficos de manera adecuada. Sin embargo, Descartes también imaginó funciones como longitudes deslizantes a lo largo de una sola línea de referencia. No fue hasta décadas después que los matemáticos comenzaron a dibujar un segundo eje de coordenadas explícito, el eje y, en un ángulo fijo de 90° con respecto al eje x de referencia horizontal.

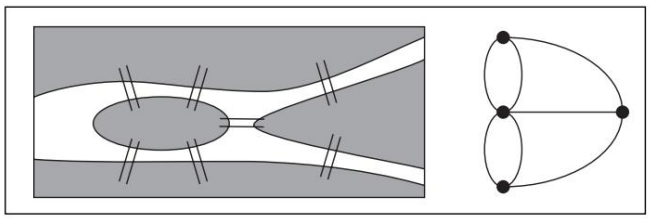
También se pueden graficar cantidades que no sean funciones. Por ejemplo, una desigualdad de la forma y < x + 3 define el MEDIO PLANO debajo de la línea y = x + 3.
La gráfica de una función de dos variables z = f(x, y) es una superficie situada en un espacio tridimensional. Por ejemplo, la gráfica de la función $z = x^2 + y^2$ es un PARABOLOIDE. Una gráfica logarítmica es aquella en la que ambos ejes del sistema de coordenadas están marcados en ESCALA LOGARÍTMICA. Estas gráficas son particularmente útiles para examinar ecuaciones de la forma $y = ax^n$. Un gráfico de coordenadas polares es un gráfico de una ecuación de la forma r = f(θ) dada en COORDENADAS POLARES. El papel cuadriculado de coordenadas polares ayuda a trazar dichos gráficos.

Los gráficos de otros tipos de relaciones numéricas se estudian en estadística descriptiva.

Véase también CÓNCAVO ARRIBA/CÓNCAVO ABAJO; COORDINADORES NATOS; SOLUCIÓN GRÁFICA; HISTORIA DE LAS FUNCIONES (ensayo); AUMENTANDO/DISMINUYENDO; MÁXIMO MÍNIMO; ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

teoría de grafos El estudio matemático de los gráficos se llama teoría de grafos. El campo fue fundado en 1736 por el matemático suizo LEONHARD EULER (1707–83) con su solución al famoso problema de los siete puentes de Königsberg:

> La antigua ciudad alemana de Königsberg (ahora la ciudad rusa de Kaliningrado) se construyó en las dos orillas del río Pregel y en dos islas del río. Las diferentes partes de la ciudad estaban conectadas por siete puentes. Se produjo un debate entre los residentes sobre si era posible caminar un recorrido completo por la ciudad cruzando todos y cada uno de los puentes exactamente una vez. (No se consideró necesario volver a la ubicación de partida de uno). La mayoría de las personas sintieron que esto era imposible, pero ¿podría demostrarse que así era?



El problema de los siete puentes de Königsberg

La idea de Euler para resolver el problema se produjo al reducir el plano de la ciudad a un GRÁFICO, es decir, un diagrama de puntos (vértices) y bordes, en el que cada punto representa una masa de tierra y cada borde un puente. Cualquier paseo por la ciudad corresponde así a un recorrido por los bordes del gráfico. El problema del puente de Königsberg es, por lo tanto, equivalente a preguntar:

> ¿Es posible dibujar el gráfico anterior sin levantar el lápiz de la página y sin trazar el mismo borde dos veces?

Euler fue capaz de resolver el problema más general de clasificar todos aquellos gráficos que pueden trazarse de esa manera. Observó que, al trazar ese camino, cualquier arista dibujada que entre en un vértice debe coincidir con una arista que salga de ese vértice. Por lo tanto, todos los bordes que se encuentran en cada vértice se emparejan en pares, a menos que uno comience o termine un viaje en un vértice en particular, en cuyo caso un borde permanece sin emparejar. Por lo tanto, un gráfico que se pueda trazar debe contener solo dos vértices de grado impar: estos serán el comienzo y el final del viaje; o sin vértices de grado impar: el camino comienza y termina en el mismo lugar. Cualquier gráfico que contenga más de dos vértices de grado impar no se puede dibujar sin levantar el lápiz de la página. En particular, el problema de los siete puentes de Königsberg no se puede resolver (los cuatro vértices tienen un grado impar).

Cualquier camino que se traza a través de un gráfico siguiendo cada borde exactamente una vez se conoce hoy como un camino Euleriano. Si el camino comienza y termina en el mismo vértice se denomina circuito euleriano. Euler fue más allá al demostrar que todos los grafos conexos que poseen precisamente dos vértices de grado impar sí tienen caminos eulerianos, y que los grafos con todos los vértices de grado par poseen

Machine Translated by Google

circuitos eulerianos. Si un gráfico representa rutas de transporte en una ciudad oa través de una nación, por ejemplo, buscar circuitos eulerianos para el gráfico puede tener un uso práctico importante.

En 1857, WILLIAM ROWAN HAMILTON exploró el problema de encontrar caminos a través de gráficos que no necesariamente sigan cada borde, sino que visiten cada vértice en el gráfico una vez, y solo una vez. Hoy en día, tal camino se llama camino hamiltoniano, o circuito hamiltoniano si es un camino que regresa al vértice inicial. Aunque los matemáticos han desarrollado algunos teoremas que dan las condiciones bajo las cuales existirán los caminos hamiltonianos, nadie hasta el día de hoy conoce un algoritmo simple que nos permita encontrarlos. Cada gráfico aún debe examinarse individualmente, y encontrar un camino hamiltoniano, si existe, generalmente es una cuestión de adivinanzas inspiradas.

El simple conteo puede conducir a resultados importantes en la teoría de grafos. Por ejemplo, al sumar los grados de todos los vértices de un gráfico se cuenta el número total de extremos de las aristas. Como toda arista tiene dos extremos, tenemos:

> En cualquier gráfico, la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas del gráfico.

En particular, la suma de todos los grados de los vértices debe ser un número par. En consecuencia, no puede haber un número impar de números impares en esta suma.

> En cualquier gráfico, el número de vértices de grado impar es par.

Este resultado tiene una interpretación divertida. Pensando en los bordes de un gráfico como apretones de manos entre personas, hemos establecido el llamado LEMA DEL APRETÓN DE MANOS:

> En cualquier instante, el número de personas en este planeta, vivas o fallecidas, que han participado en un número impar de apretones de manos es par.

Se puede pensar en un POLIEDRO como un gráfico dibujado en una ESFERA: cada esquina del poliedro es un vértice y cada borde de la figura es un borde del gráfico. Si un poliedro consta de solo t caras triangulares, entonces 3t cuenta dos veces el número de aristas de la figura (cada triángulo tiene tres aristas y cada arista limita con dos triángulos). Así 3t = 2e, donde e es el número de aristas. Esto muestra que t debe ser un número par. Tenemos:

> Es imposible cubrir una esfera con un número impar de triángulos.

Euler también continuó demostrando que para cualquier gráfico dibujado en un plano o una esfera (sin que los bordes del gráfico se intersecten):

$$v - e + r = 2$$

donde v es el número de vértices que posee el gráfico, e su número de aristas y r el número de regiones definidas por el gráfico, incluida la gran región "exterior" si el gráfico se dibuja en un plano. Esto se llama FÓRMULA DE EULER . Si el gráfico se dibuja en cambio en un TORUS, esta fórmula se modifica para leer: v – e + r = 0.

La teoría de grafos es una disciplina bajo intenso estudio continuo. Sus múltiples aplicaciones varían desde las puramente teóricas hasta las muy concretas y prácticas. Los problemas de enrutamiento, los problemas de flujo de información y el diseño de circuitos electrónicos, por ejemplo, pueden analizarse y refinarse de manera efectiva a través del estudio de este campo.

Véase también RUTA/CIRCUITO EULERIANO ; HAMILTONIANO RUTA/CIRCUITO; PROBLEMA DE LAS TRES UTILIDADES; TOPOLOGÍA; TORNEO; PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO .

máximo común divisor (máximo común divisor, máximo común divisor) El mayor FACTOR común a un conjunto dado de números enteros se denomina máximo común divisor de esos números enteros. Por ejemplo, los números 72, 120 y 180 tienen en común los factores 1, 2, 3, 4, 6 y 12, siendo 12 el máximo común divisor. Escribimos mcd(72, 120, 180) = 12.

Uno puede encontrar el máximo común divisor de dos o más números enteros simplemente haciendo una lista de los factores de cada número entero e identificando el factor más grande que tienen en común. Alternativamente, si se conocen las descomposiciones de números primos de los números enteros, entonces su máximo común divisor se puede determinar como el producto de los números primos que tienen en común. Por ejemplo, señalar que:

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$
$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

vemos que estos tres números comparten, como factores primos, dos 2 y un 3. Su máximo común divisor es mcd (72,120,180) = 2 × 2 × 3 = 12. (Este segundo

Machine Translated by Google

enfoque muestra que cualquier factor común de un conjunto dado de números enteros es un divisor del máximo común divisor.)

El ALGORITMO DE EUCLIDES se puede utilizar para encontrar el máximo común divisor de dos números enteros si cualquiera de estos métodos es inviable. Uso repetido de la El algoritmo euclidiano encontrará el máximo común divisor de más de dos enteros.

El algoritmo de Euclides también muestra que es siempre es posible escribir el máximo común divisor de dos enteros a y b como combinación lineal de a y b, es decir, siempre es posible encontrar números enteros x y así que:

$$\text{mcd}(a,b) = \text{hacha} + \text{por}$$

De manera similar, el máximo común divisor de cualquier conjunto finito de enteros a1 ,a2 ,…,an se puede expresar como una combinación lineal de la forma mcd(a1 ,a2 ,…,an) = a1x1 + a2x2+ …+anxn . En nuestro ejemplo:

$$12 = \text{mcd}(72, 120, 180)$$
$$= 72 \times (1) + 120 \times (1) + 180 \times (-1)$$

Véase también TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA; PROBLEMA DE LLENADO DE JARRAS; RELATIVAMENTE PRIMERO.

Alfabeto griego Para honrar a los eruditos matemáticos. de la antigüedad griega, los matemáticos de hoy a menudo usan letras del alfabeto griego para representar variables y símbolos en ecuaciones. Por lo general, las letras minúsculas son utilizado para representar variables (como ángulos, COMPLEJO NÚMEROS y cantidades estudiadas en ESTADÍSTICA), y Las letras mayúsculas se utilizan para la aritmética estándar y operaciones estadísticas. Los usos pueden variar de autor a autor, sin embargo.

La siguiente tabla enumera las letras del griego alfabeto junto con los usos comunes de algunos caracteres.

Véase también MATEMÁTICAS GRIEGAS.

Superior	inferior	Pronunciación del nombre del caso		Usar
A	α	alfa	AL-fuh	α: a menudo denota un ángulo
B	β	beta	BAY-tuh	β: a menudo denota un ángulo
Γ	γ	gamma	GAM-eh	γ: a menudo denota un ángulo Γ: la GAMMA FUNCIÓN
Δ	d	delta	DEL-tuh	δ: una pequeña cantidad (EPSILON-DELTA DEFINICIÓN) Δ: denota cambio
mi	ε	épsilon	EP-sil-on	ε: una pequeña cantidad (EPSILON-DELTA DEFINICIÓN)
Z	ζ	zeta	ZAY-tuh	ζ: la ZETA FUNCIÓN
H	η	eta	AY-tuh	
Θ		θ theta	THAY-tuh	θ: a menudo denota un ángulo (POLAR COORDENADAS)
yo	yo	iota	eye-OH-tuh	ι: una pequeña cantidad
K	κ	kappa	KAP-uh	
Λ	λ	lambda	LAM-duh	λ: longitud de onda (en física)
M	μ	mu	MYOO	μ: denota "micras"; Función de Möbius
N	ν	nu	NYOO	ν: frecuencia (física)
Ξ	ξ	xi	kuh-SEYE	
O	o	omicron	OM-ee-KRON	
Π	π	Pi	TARTA	π: la razón de un círculo a su diámetro Π: (infinito) producto
P	ρ	ro	ROH	ρ: radio de una esfera (ESFÉRICO COORDENADAS)
Σ	σ	sigma	SIG-ma	σ: ESTÁNDAR DESVIACIÓN Σ: SUMA
t	τ	tau	TAU	
Y	υ	upsilon	OOP-si-LON	
Φ		fi	TARIFA	: a menudo denota un ángulo (ESFÉRICO COORDENADAS)
X	χ	chí	K-OJO	χ: PRUEBA CHI-CUADRADO
Ψ	ψ	psi	SUSPIRO	ψ: función de onda (física)
Ω	ω	omega	oh-MAY-guh	ω: un número complejo; la primera transfinito NÚMERO ORDINAL.

Matemáticas griegas Los antiguos griegos de ca. 600 a. C. hasta ca. 480 CE estableció los estándares actuales de lógica rigor en las matemáticas. Aunque muchas culturas antiguas practicaron y desarrollaron las matemáticas, fueron los griegos quien desarrolló el arte explícito de la “prueba” y exploró el poder del razonamiento deductivo puro al máximo.

Machine Translated by Google

Debemos mencionar que cuando se habla de “matemáticas griegas”, los historiadores incluyen a cualquier matemático que escribiera en el idioma griego y siguiera la tradición griega del pensamiento matemático. El griego era el idioma común del mundo mediterráneo durante la antigüedad, y muchos intelectuales de diferentes partes de esa región son considerados eruditos griegos en la actualidad. Por ejemplo, el gran Arquímedes era de Siracusa, ahora parte de Italia, y se cree que EUCLID (ca. 300-260 a. C.) vivió en Alejandría, Egipto.

Hay muy pocos registros originales de obras griegas. Inicialmente, el conocimiento se transmitía sólo de forma oral de profesor a alumno. Alrededor del 450 a. C., los griegos adoptaron la antigua práctica egipcia de escribir en rollos de papiro. Desafortunadamente, el papiro, una planta similar a la hierba que crece en la región del delta del Nilo, se descompone rápidamente debido al clima excepcionalmente seco de Egipto. Los griegos combatieron este problema haciendo repetidas copias de sus obras pero, debido al esfuerzo que suponía, copiaban sólo aquellas piezas que consideraban de suma importancia. El primer trabajo matemático preservado y honrado de esta manera fue la obra maestra de Euclides LOS ELEMENTOS de ca. 300 a. C. Los historiadores han tenido que confiar en los comentarios realizados por eruditos posteriores para deducir lo que se logró matemáticamente antes de la época de Euclides.

Los eruditos griegos abordaron todas las matemáticas a través del estudio de la GEOMETRÍA. Incluso su trabajo sobre las propiedades de los números enteros, razones y proporciones, así como sobre mecánica y astronomía, se realizó en un estilo geométrico. Un “número”, por ejemplo, era literalmente un segmento de línea, y una “razón” se entendía en términos de segmentos CONMENSURABLES . Es interesante notar que los eruditos griegos tomaron medidas cuidadosas para evitar hablar directamente del infinito. (Las paradojas del siglo V a. C. sobre la naturaleza del movimiento y lo infinitamente pequeño desarrolladas por ZENO DE ELEA afectaron profundamente el pensamiento griego.) Por ejemplo, Euclides afirmó que cualquier segmento de línea podría extenderse a cualquier longitud arbitraria, pero nunca habló de líneas. que eran infinitamente largos. En LA PRUEBA DE LA INFINITUD DE LOS PRIMOS DE EUCLIDES , Euclides afirmó que de cualquier lista finita de números PRIMOS siempre se puede construir uno más, pero nunca habló del conjunto de primos como infinito.

Muchos historiadores consideran a TALES DE MILETO (ca. 625–547 a. C.) como el primer matemático griego destacado. Los comentarios sugieren que Tales identificó y probó siete proposiciones geométricas clave, que incluyen que los ángulos de la base de un TRIÁNGULO ISOSCELES son siempre iguales y que el ángulo inscrito en el diámetro de un CÍRCULO es siempre un ángulo recto, por ejemplo. El gran erudito y místico PITÁGORAS vivió un siglo después, y a él y sus seguidores se les atribuye el descubrimiento del famoso resultado sobre los triángulos rectángulos (hoy llamado TEOREMA DE PITÁGORAS) y el descubrimiento de los NÚMEROS IRRACIONALES. Un gran misterio rodea la vida y la leyenda de Pitágoras.

Fundó una secta semirreligiosa llamada la Hermandad Pitagórica (las mujeres eran miembros iguales) basada en ciertos significados místicos atribuidos a los números enteros y sus proporciones.

El gran filósofo PLATÓN (428–348 a. C.) escribió mucho sobre matemáticas en sus famosos diálogos, demostrando un profundo respeto personal por el tema. Los cinco poliedros regulares, los SÓLIDOS PLATÓNICOS , se nombran en su honor. En sus tratados filosóficos, Platón usó el ejemplo de las matemáticas como algo que no puede ser descubierto por los sentidos, pero que sin embargo puede ser descubierto por el poder del razonamiento lógico. También creía que las matemáticas eran una parte esencial de la educación de una persona culta. El filósofo ARISTÓTELES (384–322 a. C.) adoptó el mismo punto de vista y usó las matemáticas como ejemplos en su desarrollo de la LÓGICA FORMAL y su análisis de ARGUMENTOS.

Hoy en día, el erudito griego Euclides es considerado el erudito matemático más influyente de todos los tiempos. En su famosa obra Los Elementos, Euclides recopiló todo el conocimiento matemático conocido en su época en un solo tomo. Aunque fue una hazaña impresionante, fue la organización del texto lo que tuvo el mayor impacto.
Comenzando con una pequeña colección de “verdades evidentes”, Euclides demostró que todo el conocimiento matemático de su época podía deducirse únicamente mediante el razonamiento lógico puro. Este trabajo demostró el poder de la mente y estableció el modelo para toda la investigación matemática en el futuro. Los matemáticos de hoy todavía trabajan con los estándares de rigor establecidos por Euclides. Después de la Biblia, Los elementos de Euclides es el libro más publicado de todos los tiempos.

Después de producir Los Elementos, Euclid continuó trabajando en las SECCIONES CÓNICAS, en óptica y en problemas generales de geometría. Continuó interesándose por los números CONSTRUCTIBLES y sin duda contempló el clásico problema griego de LA CUADRATURA DEL CÍRCULO. (En Los Elementos , Euclides había demostrado procedimientos generales para elevar al cuadrado figuras poligonales arbitrarias).

Machine Translated by Google

desafío, así como los problemas de TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO y DUPLICAR EL CUBO, provocó una gran gran parte de la investigación adicional significativa en matemáticas para siglos por venir.

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) resuelto el problema de la cuadratura de la parábola, así como hecho avances significativos en el cálculo de las áreas y volúmenes de figuras curvas y sólidos. (Él también "resuelto" el problema de la cuadratura del círculo haciendo uso de su ESPIRAL DE ARQUIMEDIO. Desafortunadamente, su método fue más allá del uso de una regla y brújula sola, por lo que no es una solución permisible para el problema original.)

APOLONIO DE PERGA (ca. 262–190 a. C.) continuó trabajando en secciones cónicas y se le atribuye la definición adecuada de una ELIPSE, una HIPERBOLA y una PARÁBOLA. Casi al mismo tiempo, el astrónomo griego Hipparchus escribió una tabla de "valores de acordes" (el equivalente a una tabla moderna de valores de senos), que él utilizado para resolver problemas astronómicos. Esto representó el desarrollo inicial de la TRIGONOMETRÍA en matemáticas griegas, sino que también marcó el fin de la ferviente desarrollo matemático en la tradición griega. Para los cinco siglos que siguieron, nuevos desarrollos se limitaban a avances directos en astronomía, trigonometría y álgebra, con sólo unos pocos excepciones notables.

En el siglo II EC, el astrónomo griego CLAUDIUS PTOLEMY corrigió y amplió la tabla de Hipparchus y aclaró las matemáticas que son utilizado para producir una tabla de este tipo. También es conocido como uno de los primeros eruditos que hicieron un intento serio de probar el POSTULADO PARALELO de Euclides. En el siglo III, DIOFANTO DE ALEJANDRÍA produjo su famoso texto Arithmetica (Aritmética), del que procede el estudio de ECUACIONES DIOFANTINAS nació. A mediados del siglo IV, el entusiasta PAPPUS DE ALEX ANDRIA intentó revivir el interés por los ardientes investigación matemática del estilo griego. Produjo su tratado Synagoge (Colecciones) para actuar como un comentario y guía de todas las obras geométricas de su tiempo e incluyó en él un número significativo de resultados originales, extensiones de ideas e innovadores cambios de perspectiva. Desafortunadamente, no tuvo éxito en su objetivo general. Después de Pappus, cabe destacar HIPATIA DE ALEJANDRÍA (370–415), la primera mujer ser nombrado en la historia de las matemáticas, acreditado por escribir comentarios perspicaces sobre las obras de Apolonio y Diofanto, y PROCLUS (ca. 410–485), quien se destaca por su comentario detallado en el trabajo de Euclides y su propio intento de probar el postulado de las paralelas.

El comienzo del siglo V marca un claro Fin de la tradición de las matemáticas griegas.

Véase también ARQUITAS DE TARENTO; DEDUCTIVO/ RAZONAMIENTO INDUCTIVO; ERATOSTENES DE CIRENE; LOS POSTULADOS DE EUCLIDES ; ALGORITMO EUCLIDEO EUCLI GEOMETRÍA DEAN; EUDOXO DE CNIDO; GARZA DE ALEJANDRÍA; HIPASO DEL METAPONTO; CAJAS DE HIPOPÓTAMO DE QUIOS; HISTORIA DE ECUATON Y ALGE BRA; MENELAO DE ALEJANDRÍA; TEOREMAS DE PAPPUS ; TEOREMA DE PTOLOMEO ; TRIPLES PITAGÓRICAS; TEÓDORO DE CIRENE; LAS PARADOJAS DE ZENO .

Green, George (1793–1841) Nacido en el cálculo británico en julio de 1793 (se desconoce su fecha exacta de nacimiento) en Nottingham, Inglaterra, se recuerda a George Green hoy por su influyente artículo de 1828 "Ensayo sobre el Aplicación del Análisis Matemático a la Teoría de Electricidad y Magnetismo", en el que desarrolló el noción de "potencial" y probó un resultado matemático fundamental hoy conocido como el teorema de Green.

Green dejó la escuela a la edad de nueve años y trabajó en la panadería de su padre durante los siguientes 30 años. Los historiadores hacen No sé cómo Green desarrolló una comprensión de matemáticas, ni cómo tuvo acceso al trabajo actual en el campo, pero en 1828 publicó uno de los más importantes artículos científicos de la época. Aparte de avanzando en la comprensión matemática del electromagnetismo, importante para los físicos, Green también estableció una técnica matemática fundamental para Cálculo de INTEGRALES DE CONTORNO y INTEGRALES DOBLES. El famoso teorema que lleva su nombre establece que si una región R en el plano xy está limitada por una curva C, y si las funciones P(x,y) y Q(x,y) tienen DERIVADAS PARCIALES, entonces:

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dA$$

Este resultado aparece en todos los libros de texto de cálculo multivariable de hoy.

Después de leer la famosa pieza de 1828, el matemático Sir Edward Bromhead invitó a Green a continuar

Machine Translated by Google

trabajo en el campo de la física matemática, y durante el
los seis años siguientes produjeron juntos tres artículos sobre
los temas de electricidad e hidrodinámica. En el
consejo de Bromhead, Green ingresó a la Universidad de Cambridge
en 1833, a la edad de 40 años, para iniciar una carrera universitaria.
licenciatura en matemáticas. Green publicó seis más
documentos después de completar el programa. Murió el mayo
31 de enero de 1841, en Nottingham.

Gregory, David (1659–1708) Cálculo, geom etría británico Nacido el 3
de junio de 1659 en Aberdeen, Escocia,
David Gregory es recordado por sus escritos expositivos. En 1684
publicó Exercitatio geometrica
(Ejercicios de geometría), esbozando muchos de los resultados de
JAMES GREGORY, su tío, en SERIES infinitas. Él también
publicó algunos de los resultados de SIR ISAAC NEWTON el
matemáticas y astronomía, y fue el primero en
enseñar las teorías newtonianas “modernas” en Cambridge.
En 1703 publicó la primera colección completa de
todos los trabajos de EUCLID .

Gregory estudió en Marischal College, parte de la
Universidad de Aberdeen, y aceptó una cátedra
de matemáticas en la Universidad de Edimburgo en 1683.
Dio conferencias sobre temas de matemáticas, mecánica,
e hidrostática. En 1691 fue elegido profesor Savilian en Oxford, el
mismo año en que se le otorgó la membresía de la ROYAL SOCIETY
de Londres.

En 1702 Gregory publicó Astronomiae physicae
et geometricae elementa (Fsica astronmica y elementos de geometra),
que fue un relato popular de
la obra de Newton, y un año más tarde, su edición de las obras
completas de Euclides. Gregorio apoyó firmemente
Newton en el debate sobre si fue él o el matemático alemán
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ,
quien había descubierto por primera vez el CÁLCULO.

Gregory también completó su propio trabajo en el estudio
de series y trabajos publicados sobre el tema de la óptica. Él
Murió el 10 de octubre de 1708 en Berkshire, Inglaterra.

Aunque no se le conoce como un matemático destacado, a
Gregorio se le recuerda principalmente por el papel que desempeñó en
conservar los papeles y registrar las comunicaciones verbales que le
pasó su tío James Gregory
y por Sir Isaac Newton.

Gregory, James (1638–1675) Nacido en el cálculo británico
en noviembre de 1638 (la fecha exacta no se conoce), el matemático
escocés James Gregory descubrió de forma independiente
eró y explicó conceptos importantes en CÁLCULO
antes de que el tema fuera desarrollado completamente por los fundadores
SIR ISAAC NEWTON y GOTTFREID WILHELM LEIBNIZ.
Gregory era consciente del TEOREMA FUNDAMENTAL DE
CALCULUS, fue el primero en distinguir entre SERIES
convergentes y divergentes , y conocía las SERIES DE TAYLOR
40 años antes de que BROOK TAYLOR publicara sus resultados. En
matemáticas es recordado, en particular, por la
serie que lleva su nombre. Fuera de las matemáticas, Gregorio es
mejor recordado por su descripción teórica de
un revolucionario tipo de telescopio reflector.

Gregory fue educado en matemáticas en casa antes
cursando estudios en Marischal College en Aberdeen.
Estudió las matemáticas de la óptica y en 1661 publicó un texto sobre
el tema, Optica promota (La
avance de la óptica), escrito en un estilo puramente matemático.
Comenzando con cinco postulados y 37 definiciones, Gregory
desarrolló la teoría de la reflexión y
refracción de la luz de manera sistemática y rigurosa,
culminando con la descripción de un nuevo principio para
la construcción de un telescopio.

En 1664, Gregorio viajó a Italia para permanecer en el
Universidad de Padua para dedicarse a las matemáticas.
Durante este tiempo, Gregory desarrolló los cimientos de
“geometría infinitesimal”, cuyos detalles publicó como Geometriae
pars universalis (La geometría universal).
parte de la geometría). Hoy describiríamos este libro
como un tratamiento sistemático de temas en cálculo.

Gregory fue el primero en discutir la convergencia
y divergencia de series, obra que le llevó en 1671
al descubrimiento de desarrollos en serie de funciones. Él
se abstuvo de publicar sus descubrimientos, sin embargo,
Habiendo escuchado un rumor de que Newton ya podría haber
desarrollado resultados similares. (En realidad, Newton no era
consciente del teorema clave necesario para poner esta teoría en
una base sólida y, por lo tanto, no pudo desarrollar la teoría.) Brook
Taylor descubrió más tarde la misma clave
resultado y publicó su descripción del tema en
1715.

A lo largo de su corta vida, Gregory mantuvo una
interés por la astronomía. Murió a la edad de 36 años a fines
octubre de 1675, poco después de sufrir un derrame cerebral,
incurrido al observar las lunas de Júpiter con
algunos estudiantes. Gregory no alcanzó la fama como
matemático durante su vida. Es solo en retrospectiva
que los historiadores de hoy se den cuenta de la importante influencia que
tenido para ayudar a Newton a desarrollar sus ideas.

Véase también SERIE GREGORIO.

Machine Translated by Google

Serie Gregory (serie de Leibniz) Llamada así por el
El astrónomo y algebrista escocés JAMES GREGORY
(1638-75), la SERIE DE MACLAURIN para arctan(x) es
a veces llamado la serie Gregory:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Esta expresión es válida para –1 ≤ x ≤ 1. Colocando x = 1
en la fórmula se obtiene la siguiente fórmula notable para PI:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

A menudo, el nombre "serie Gregory" se usa para referirse a esto
expresión especial.

Ver también FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS;
MADHAVA DE SANGAMAGRAMMA; SERIE TAYLOR.

grupo La investigación en matemáticas puras está motivada
por una pregunta: ¿qué hace que las matemáticas funcionen
forma en que lo hace? Al identificar los principios clave que
apuntalan un tipo de sistema matemático, ya sea
geometría y simetría, o números y aritmética—
los matemáticos establecen conexiones entre campos
dispares: hechos conocidos sobre cualquier sistema
satisfacer un conjunto de principios básicos se traducen
inmediatamente en hechos análogos sobre un segundo
sistema que satisface principios análogos. Por ejemplo, un estudio de
La aritmética muestra que la operación de suma satisface los
mismos cuatro principios básicos que la multiplicación.
Por lo tanto, cualquier hecho conocido sobre la suma va acompañado
por un hecho conocido sobre la multiplicación (y este resultado
correspondiente sobre la multiplicación en consecuencia
no requiere nueva prueba.)

Motivados por el funcionamiento de la aritmética, los
matemáticos definen un grupo como cualquier conjunto, a menudo denotado
G, cuyos elementos se pueden combinar de alguna manera que
imita la suma o la multiplicación de los enteros. Específicamente,
si denotamos el resultado de combinar
los elementos a y b de G por el símbolo a*b, entonces G es
un grupo si se cumplen los siguientes cuatro axiomas:

1. Clausura: Para todo a y b en G, el elemento a*b es
también miembro de G.
2. Asociatividad: Para todo a,b,c en G tenemos: a*(b*c) =
(a B C.
3. Existencia de una identidad: Hay un elemento e en G
de modo que a*e = a = e*a para todo a en G.
4. Existencia de inversas: Para cualquier a en G existe un
elemento b en G tal que a*b = e y b*a = e.

Para honrar el trabajo del erudito noruego NIELS
HENRIK ABEL (1802-1829), los matemáticos llaman G
"Abeliano" si también se cumple un quinto axioma:

5. Conmutatividad: Para todo a y b en G tenemos: a*b
= b*a.

De hecho, estos axiomas capturan los principios de
trabajo detrás de la suma y la multiplicación. Para
ejemplo, interpretar "*" como suma con "e" como el
número cero, el conjunto de todos los números enteros satisface los axiomas
de un grupo abeliano. (En este ajuste, el inverso de un
el entero a generalmente se denota –a). El conjunto de todos los
números reales a los que se les quita el cero forma un grupo abeliano bajo
multiplicación. En este contexto, * se interpreta como el
operación producto, "e" es el número 1, y la inversa
de un elemento a es el número 1/a.

Un grupo podría ser abstracto. Por ejemplo, el conjunto de
cuatro elementos G = {e,a,b,c} es un grupo abeliano bajo
una operación * dada de la siguiente manera:

*	mi	a B C
mi	mi	a B C
a	a	cb
b	b	c ea
C	C	b ae

El conjunto de elementos G = {1, –1, i, – i, j, – j, k, –k} con
La operación de grupo *, dada por la multiplicación como
QUATER NIONs, es un ejemplo de un grupo no abeliano. El conjunto
de todas las matrices invertibles 2 × 2 con entradas reales también es
un grupo no abeliano bajo la operación de MATRIX
multiplicación.

TEORIA DE GRUPOS es el estudio de la estructura general
de grupos y todos los resultados que se derivan de los cuatro
(o cinco) axiomas básicos. El tema es increíblemente rico, y
muchos matemáticos hoy en día dedican toda su investigación
carreras al mayor desarrollo de este tema.

La teoría de grupos tiene profundas aplicaciones a la
física y la ciencia. Cualquier sistema físico que posea

Machine Translated by Google

la simetría de algún tipo, por ejemplo, se puede analizar a través de las herramientas y técnicas de este tema. Por ejemplo, las seis simetrías de un triángulo equilátero forman un grupo (no abeliano): hay dos rotaciones, una en el sentido de las agujas del reloj y otra en el sentido contrario a las agujas del reloj de 60°; tres reflexiones, una sobre cada altura del triángulo; y una operación de identidad correspondiente a no realizar ninguna acción. Al declarar que la operación "*" es el efecto de realizar una acción seguida de la otra, se puede verificar que los cuatro axiomas de grupo se cumplen para este sistema. (El quinto axioma, sin embargo, no se cumple, ya que la ejecución de la rotación seguida de un reflejo, por ejemplo, da un resultado diferente del desempeño de la misma reflexión seguida de la rotación). El análisis de la simetría juega un papel importante en cristalografía y mecánica cuántica. Los investigadores en estos campos consideran que la teoría de grupos es una herramienta esencial en su trabajo.

El conjunto de simetrías de cualquier POLY GON regular de n lados forma un grupo denominado n-ésimo diedro. Tiene 2n miembros que consisten en n rotaciones (incluido el elemento de identidad) y n reflexiones. El conjunto de rotaciones en sí mismo forma un grupo de solo n elementos.
Observe que n es un factor de 2n. En general, cualquier subconjunto H de un grupo G que satisfaga los cuatro axiomas de un grupo se denomina subgrupo de G. El matemático francés JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) demostró que si H es un subgrupo de un grupo G, entonces el número de elementos en H divide equitativamente el conteo de elementos en G. Este resultado tiene interesantes consecuencias cuando se aplica a sistemas de simetría, oa grupos que surgen del estudio de la TEORÍA DE NÚMEROS y la ARITMÉTICA MODULAR.

Véase también ÁLGEBRA ABSTRACTA; CAMPO; LÍNEA GENERAL GRUPO DE OREJAS; HOMOMORFISMO; ISOMORFISMO; ANILLO.

teoría de grupos El estudio general de los GRUPOS y los resultados que se derivan de los axiomas básicos que los definen se denomina teoría de grupos.

Muchos de los principios clave de la teoría de grupos fueron identificados por primera vez por el matemático alemán CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) en sus estudios de TEORÍA DE NÚMEROS y ARITMÉTICA MODULAR.

Sin embargo, el desarrollo de una teoría de grupos como tema por derecho propio se suele atribuir al joven matemático francés ÉVARISTE GALOIS (1811-1832); quien ideó las herramientas innovadoras necesarias para estudiar las soluciones de ecuaciones algebraicas en profundidad y desde una perspectiva abstracta.

Al identificar los principios abstractos que hacen que el álgebra y la aritmética funcionen como lo hacen, la teoría de grupos proporciona una poderosa herramienta para analizar cualquier sistema matemático que satisfaga los mismos axiomas básicos. La aplicación de la teoría de grupos a las simetrías de un sistema físico, por ejemplo, a menudo puede tener consecuencias importantes en la física.

Véase también ÁLGEBRA ABSTRACTA; CAMPO; GRUPO; ANILLO.

Machine Translated by Google

H

Hadamard, Jacques (1865–1963) Número francés
teoría, Análisis, Física matemática Nacido el 8 de diciembre de
1865 en Versalles, Francia, Jacques Hadamard
es recordado como uno de los dos matemáticos que
demostró de forma independiente el famoso NÚMERO PRIMO
THEO REM conjeturado por primera vez por el matemático alemán
CARL FRIEDRICH GAUSS. Erudito belga CHARLES-JEAN
DE LA VALLÉE-POUSSIN fue el segundo matemático en
probar el resultado.

Hadamard recibió un doctorado en 1892 de
la École Normale Supérieure después de completar una disertación
sobre funciones complejas y TAYLOR SERIES. El
mismo año también completó el trabajo en Riemann ZETA
FUNCIÓN y la hipótesis de Riemann, lo que le valió la
Grand Prix des Sciences Mathématique de la institución. Hadamard
pronto se dio cuenta también de que, con la
desarrollos recientes en el campo de las funciones complejas,
todas las piezas necesarias estaban ahora en su lugar para desarrollar un
prueba de la famosa y sobresaliente conjetura de los números
primos formulada por Gauss. (Vallée-Poussin independientemente
hizo la misma realización.) Hadamard presentó su
prueba del famoso resultado en 1896. Más tarde ese mismo año
Hadamard fue nombrado profesor de astronomía
y mecánica racional en la Universidad de Burdeos.

A lo largo de su carrera, Hadamard también hizo contribuciones
significativas al campo de la teoría de matrices al identificar una
clase de matrices que se pueden usar en
COMBINATORICS para crear "diseños de bloques" y tener
Aplicaciones a la teoría de la PROBABILIDAD . También estudió la
teoría VEC TOR SPACE (definiendo el término funcional para una
función lineal en un espacio vectorial) y contribuyó a la
estudio de la educación matemática. Hadamard escribió sobre
300 artículos científicos. En 1906 fue elegido presidente de
la Sociedad Matemática Francesa, y 3 años más tarde fue
nombrado presidente del Collège de France. se quedó en
ese puesto durante solo 3 años, antes de aceptar el puesto de
profesor de análisis en la École Polytechnique.
Fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de París en 1912.

Hadamard murió en París, Francia, el 17 de octubre de
1963. Su demostración del teorema de los números primos se
considera su logro más destacado.

semiplano El plano que se encuentra a un lado de un
línea se llama semiplano. Si los puntos en la línea misma
son considerados parte de la región, entonces decimos que los
semiplano es "cerrado". Un semiplano "abierto" excluye
los puntos de la recta.

Si la ecuación de la recta dada es $ax + by = c$, entonces
el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen $ax + by > c$ forman un
semiplano abierto en un lado de la línea, y aquellos
los puntos (x,y) que satisfacen $ax + por < c$ forman un semiplano
abierto en el otro lado. Si c es positivo, entonces este segundo
desigualdad representa el semiplano que contiene el
origen (tenemos $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 < c$), y si c es negativa, entonces
la primera desigualdad contiene el origen. Si c
es igual a cero, se debe sustituir en diferentes valores por
x e y para determinar qué desigualdad representa qué
semiplano. Las desigualdades $ax + by \geq c$ y $ax + by \leq c$
representan semiplanos cerrados.

En el espacio tridimensional, un medio espacio es el
región del espacio que se encuentra en un lado de un plano. El

Machine Translated by Google

el semiespacio puede ser cerrado o abierto según se consideren o no puntos del plano como parte de esta región.

Teorema de emparejamiento de Hall (teorema del matrimonio de Hall) En 1935, el matemático inglés Philip Hall estableció el siguiente resultado, ahora conocido como el teorema de correspondencia de Hall:

> Dados n conjuntos A1 , A2 ,…, An con la propiedad de que la unión de cualquier k de ellos (1 ≤ k ≤ n) contiene al menos k elementos distintos, siempre es posible seleccionar n objetos distintos, uno de cada conjunto.

La condición impuesta a estos conjuntos no es trivial: algunos conjuntos pueden estar vacíos o el mismo elemento puede aparecer en más de un conjunto, por ejemplo.

El teorema es ciertamente verdadero para el caso n = 1: un solo conjunto que satisface la condición del teorema contiene al menos un elemento. Dos conjuntos que satisfacen las condiciones del teorema juntos contienen al menos dos elementos distintos. Como ninguno de los conjuntos puede estar vacío, un conjunto contiene un elemento y el otro otro elemento distinto. Por tanto, el teorema también se cumple para el caso n = 2. Se puede construir una prueba general del teorema usando una prueba por INDUCCIÓN.

La validez del teorema se puede demostrar con un divertido juego de solitario: divide una baraja de cartas barajadas en 13 montones de cuatro cartas. El desafío consiste en seleccionar un as de un montón, un dos de otro, un tres de un tercero, hasta el rey de un montón 13.
El teorema de coincidencia de Hall asegura que este juego siempre se puede ganar, sin importar cómo se mezclen las cartas.
(Piense en cada pila como un conjunto que contiene uno, dos, tres o cuatro elementos: las denominaciones distintas que aparecen en esa pila. Entre cualquier pila k debe darse el caso de que aparezcan al menos k denominaciones distintas).

Hall dio otra interpretación a su teorema.
(explicando el nombre alternativo al resultado):

> Supongamos que n mujeres enumeran los nombres de los hombres con los que les gustaría casarse. Siempre que k mujeres mencionen al menos k nombres distintos entre ellas, 1 ≤ k ≤ n, entonces es posible hacer coincidencias satisfactorias para todas.

Véase también CUADRADO SEMI-MÁGICO.

problema de detención En 1936, el teórico de la computación Alan Turing consideró si alguna vez sería posible escribir un programa de computadora que pudiera leer cualquier otro programa y determinar si ese programa se detendría o se ejecutaría para siempre (al caer en un infi bucle finito, por ejemplo). Desde entonces, esta pregunta se conoce como el problema de la detención. Turing concluyó que tal programa no podría existir. Razonó a través de un ingenioso ARGUMENTO de AUTOREFERENCIA:

> Suponga que existe un programa HALT(P) que puede leer un programa de computadora P e imprimir sí o no según si P se detendrá o no. Considere entonces otro programa, al que llamaremos PROBLEMA, que toma un programa P y hace lo siguiente:

PROBLEMA (P):
Si HALT (P) = "sí", entonces realice un infinito bucle.
Si HALT(P) = “no”, entonces deténgase.

> Es decir, PROBLEMA toma un programa P y entra en un ciclo infinito si P es un programa que se detiene, y se detiene si P es un programa que no lo hace. Ahora pregunta: ¿qué hace PROBLEMA (PROBLEMA)?
> ¡Tenemos que PROBLEMA se detiene si PROBLEMA no se detiene, y no se detiene si lo hace! Este absurdo muestra que tal programa HALT(P) no podría existir.

Hay dificultades técnicas con este argumento (uno debe tener cuidado de distinguir correctamente entre los roles de un programa y la entrada de un programa, por ejemplo), pero Turing pudo superar estas preocupaciones y demostrar que este argumento es fundamentalmente sólido.

Hamilton, Sir William Rowan (1805–1865) Álgebra irlandesa , teoría de grafos, teoría de números, física matemática Nacido el 4 de agosto de 1805 en Dublín, Irlanda, William Rowan es generalmente considerado el mejor matemático irlandés de todos los tiempos. Se le recuerda por su desarrollo de un sistema algebraico completamente nuevo, los CUATERNIOS, que, siete décadas más tarde, demostraron ser cruciales para el desarrollo de la mecánica cuántica y la física matemática de la estructura interna de un átomo.

Hamilton era un niño prodigio que dominaba 12 idiomas diferentes a la edad de 13 años. Durante la adolescencia,

Machine Translated by Google

leyó las obras de EUCLID en el griego original, las obras de SIR ISAAC NEWTON en latín y las obras de PIERRE-SIMON DE LAPLACE en francés. Encontró un sutil error en el texto clásico Mécanique céleste de Laplace y escribió una carta al astrónomo real de Irlanda, John Brinkley, explicando el error y cómo debería corregirse. Brinkley reconoció de inmediato el genio de Hamilton como un matemático en ascenso y lo apodó públicamente como el "primer matemático de su época".

Hamilton ingresó al Trinity College a la edad de 18 años para estudiar óptica y matemáticas. Su trabajo original en estos campos como estudiante universitario, que incluía dos artículos, "Sistemas de líneas rectas en un plano" y "Teoría de los sistemas de rayos", se consideró tan significativo e innovador que justificó su nombramiento inmediato como profesor. de astronomía en la universidad antes de completar su título básico.

Junto con su trabajo en óptica, Hamilton hizo contribuciones significativas al campo de la TEORÍA DE GRAFOS y al álgebra de NÚMEROS COMPLEJOS, publicando resultados sobre este último tema en su artículo de 1837 “Ensayo preliminar y elemental sobre el álgebra como la ciencia del tiempo puro”. .” En 1842 asumió el difícil desafío de intentar crear un sistema algebraico para el espacio tridimensional que tuviera las mismas propiedades algebraicas que los números complejos en el espacio bidimensional. [Un punto (x,y) en el plano puede coincidir con el número complejo x + iy. Esto proporciona así un medio para “multiplicar” a dos puntos en el espacio: (x1 , y1) · (x2 , y2) = (x1x2 – y1y2 , x1y2 + x2y1).] Aunque nunca pudo encontrar una solución a este problema de la “multiplicación de triples”, sus esfuerzos lo llevaron al notable descubrimiento de un tipo diferente de sistema numérico adecuado para el espacio de cuatro dimensiones. Llamó a este sistema los cuarterones y encontró algunas conexiones sorprendentes con la física matemática. En particular, observó que cada cuaternión corresponde naturalmente a una transformación física en el espacio tridimensional y que la multiplicación de dos cuaterniones coincide perfectamente con la composición de las dos transformaciones físicas que representan. Así, la geometría del espacio físico tridimensional puede reducirse al estudio algebraico del álgebra de cuaterniones. Hamilton estaba convencido de que su trabajo revolucionaría la física matemática. Aunque hoy en día tiene aplicaciones en el campo, lamentablemente su trabajo no tuvo el impacto que esperaba.

Hamilton recibió muchos premios a lo largo de su vida, sobre todo el título de caballero en 1835 y la elección a la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos como su primer miembro extranjero. Escribió poesía como consuelo a lo largo de su vida y argumentó públicamente que el lenguaje de las matemáticas es tan artístico como el lenguaje expresado a través de la poesía. Su amigo íntimo, el poeta William Wordsworth (1772–1834), no estuvo de acuerdo. Hamilton murió cerca de Dublín el 2 de septiembre de 1865.

Trayectoria/circuito hamiltoniano Ver TEORÍA DE GRAFOS.

teorema del sándwich de jamón Como una generalización del TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO y el teorema de los dos panqueques que se deriva de él, los matemáticos han demostrado el siguiente resultado, llamado teorema del sándwich de jamón:

> Dados tres objetos cualesquiera sentados en un espacio tridimensional, existe un solo plano que simultáneamente corta el volumen de cada objeto exactamente por la mitad.

Por ejemplo, hay un solo plano que corta simultáneamente la torre Eiffel, el planeta Neptuno y este libro, cada uno exactamente a la mitad por volumen. El teorema obtiene su nombre de la siguiente interpretación:

> Es posible, en un solo corte plano, dividir cada una de dos piezas de pan y una losa de jamón en dos piezas de igual volumen. Esto es posible sin importar la forma de las piezas de comida y sin importar en qué parte del espacio se coloquen los tres elementos.

El resultado se generaliza a dimensiones superiores:

> Dado cualquier N objeto ubicado en un espacio N-dimensional, siempre es posible encontrar un “plano” (N – 1)-dimensional que simultáneamente corte el “volumen” de cada objeto por la mitad.

(Con N = 2, este es el teorema de los dos panqueques).

lema del apretón de manos Este divertido resultado establece que, en cualquier instante, el número de personas en este planeta, vivas o fallecidas, que han tomado parte en un número impar de apretones de manos es necesariamente par. Este lema se puede probar con la ayuda de la TEORÍA DE GRAFOS.

Machine Translated by Google

Hardy, Godfrey Harold (1877–1947) Análisis británico, teoría de números Nacido el 7 de febrero de 1877 en Cranleigh, Inglaterra, eminente matemático Godfrey Hardy es recordado por sus importantes contribuciones. a los campos de TEORÍA DE NÚMEROS, desigualdades, y a el estudio de la FUNCIÓN ZETA de Riemann y la hipótesis de Riemann. Hardy también animó a los indios matemático SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN a vino a Inglaterra, y colaboró con él durante cinco años para producir una serie de resultados significativos, la mayoría en particular sobre la teoría de las PARTICIONES. En 1940 Hardy publicó A Mathematician's Apology, que sigue siendo, hasta el día de hoy, una de las descripciones más vívidas y elocuentes de cómo piensa un matemático.

Hardy ingresó al Trinity College de Cambridge en 1896. para obtener un título avanzado en matemáticas. Después de publicar una serie de artículos sobre los temas de INTEGRAL, SERIE, y temas generales de ANÁLISIS, Hardy publicó, en 1908, el libro de texto universitario A Course of Pure Matemáticas, que explicaba, de manera rigurosa, la conceptos de función, LÍMITE y los elementos de análisis. Este trabajo fue muy influyente y se dice que transformó toda la naturaleza de la enseñanza universitaria.

En 1911, Hardy inició una colaboración de 35 años con el matemático inglés John Littlewood. (1885-1977), lo que llevó a un cambio de enfoque en el campo de la teoría de los números. Juntos produjeron más de 100 publicaciones conjuntas. Este trabajo también se vinculó muy bien con la investigación que Hardy estaba realizando en 1914 con Ramanujan, también sobre temas de teoría de números.

Hardy fue reconocido como una figura importante en matemáticas. En 1910 fue elegido miembro de la ROYAL SOCIETY de Londres, recibió la Medalla Real de la Sociedad en 1920, la Medalla De Morgan de la Society en 1929, y la Medalla Sylvester de la Sociedad en 1940 por su trabajo en matemáticas puras. Siete años más tarde fue galardonado con la Medalla Copley de la Sociedad por sus aportes al campo del análisis.

Hardy murió en Cambridge, Inglaterra, el 1 de diciembre de 1947. Es generalmente reconocido como el líder inglés matemático puro de su época. Su libro de 1932 La teoría de los números, coescrito con EM Wright, se considera un texto clásico y todavía lo utilizan los estudiantes de posgrado. e investigadores en el campo de la teoría de números en la actualidad.

función armónica Una función definida en un nivel discreto número de ubicaciones se dice que es armónico si el valor de la función en cualquier lugar es igual al promedio de los valores de la función en sus ubicaciones vecinas. Para ejemplo, si 10 estudiantes se sientan en un círculo, entonces su "edad función" sería armónico si la edad de cualquier estudiante es igual a la edad promedio de sus dos vecinos. (Un poco de reflexión muestra que esto sólo es posible si la edad de cada estudiante es la misma. Una función armónica para puntos dispuestos en un círculo debe ser constante.)

Las funciones armónicas juegan un papel importante en la estudio de PASEOS ALEATORIOS y cálculo de probabilidades en juegos de azar. Imagine, por ejemplo, un jugador jugando un simple juego de lanzar una moneda para ganar un dolar o perder un dólar. Preguntamos: con $3 en la mano, ¿cuáles son sus posibilidades de llegar a la marca de $ 10 antes de ir a la quiebra? Computar esto, sea P(N) la PROBABILIDAD de lograr el objetivo a partir de N dólares en la mano. Claramente P(0) = 0 y P(10) = 1. Deseamos calcular P(3).

La clave es notar que P(N) es una función armónica en sus 11 valores de cero a 10. Esto se deduce porque hay las mismas posibilidades de que el jugador pierda o gane un dólar y, por lo tanto, al siguiente juego con N - 1 o N + 1 dólares en la mano. Como consecuencia:

$$P(N) = \frac{P(N-1) + P(N+1)}{2}$$

y así cada cantidad P(N) es de hecho el promedio de la valores que lo preceden y lo suceden. Algún pensamiento muestra que los valores P(0) = 0 hasta P(10) = 1 deben ser estrictamente creciente en intervalos iguales de una décima. el los valores P(N) son por lo tanto $P(N) = \frac{N}{10}$. En particular, $P(3) = \frac{3}{10}$, mostrando que sólo hay un 30 por ciento de posibilidades de que el el jugador logrará su objetivo antes de perder todo su dinero.

media armónica Ver MEDIA.

secuencia armónica (progresión armónica) A SE 1– QUENCE de números de la forma $a2 \quad \frac{1}{a1}, \quad , \frac{1}{a3}$. con enteros a1 ,a2 ,a3 ,… formando una SECUENCIA ARITMÉTICA se llama secuencia armónica. Los números a1 , a2 , a3 ,… tienen una diferencia constante entre ellos. Por ejemplo, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ es una secuencia armónica, como lo es $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \ldots$ y $25, \frac{1}{50}, \frac{1}{75}, \frac{1}{100}$ La palabra armónico es

Machine Translated by Google

se usa porque el armónico n-ésimo producido por una cuerda de violín es el tono producido por la cuerda que es 1/n veces más larga.

La SERIE correspondiente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pues cualquier secuencia armónica necesariamente diverge. En el estudio de SERIES CONVERGENTES, la prueba de comparación muestra que esta debe ser la caso. (Compare una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{}{1 \text{ año}}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que sabemos que diverge.)

Véase también SERIE ARMÓNICA.

serie armónica La particular suma infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ … se llama la SERIE armónica. El

El armónico de 5 palabras se usa porque el armónico enésimo producido por una cuerda de violín es el tono producido por la cuerda que es 1/n veces más larga.

Aunque los términos de esta serie se acercan a cero, la serie no suma un valor finito. Esto se puede ver agrupando los términos de la serie en secciones de longitud dos, cuatro, ocho, 16, etc., y haciendo una comparación simple:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{dieciséis} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \cdots$$

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots$$

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

$$= \infty$$

Que la serie diverja significa que la suma de suficientes términos iniciales de la serie producirá respuestas arbitrariamente grandes (aunque puede ser necesario un gran número de términos para hacerlo). Por ejemplo, la suma de los primeros cuatro términos produce una respuesta mayor que 2, los primeros 11 términos una respuesta mayor que 3, los primeros 13 671 términos una respuesta mayor que 10 y el primero 1,53 × 1043 términos una respuesta mayor que 100. Claramente, la serie diverge hasta el infinito muy lentamente.

En 1734, LEONHARD EULER demostró que, para valores grandes de n, la n -ésima SUMA PARCIAL de la serie armónica se puede aproximar bien mediante un LOGARITMO:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{norte} \approx \ln(n) + \gamma$$

donde γ ≈ 0.577 es una constante (llamada CONSTANTE DE EULER) y el error en esta aproximación no es mayor a 1/n. (Observe que ln(n) + γ→∞ a medida que n crece. Esto nuevamente muestra que la serie diverge).

Las sumas parciales de la serie armónica se denominan números armónicos y se denotan Hn . Los primeros 10 números armónicos son:

$$H_1 = 1;$$

$$H_2 = \frac{3}{2}; \quad H_3 = \frac{11}{6}; \quad \frac{11}{2\,3}$$

$$H_4 = \frac{25}{12}; \quad \frac{137}{60}; \quad \frac{49}{4\,3\,4\,15\,4\,5\,4\,35} = \frac{363}{140}$$

$$H_5 = \frac{761}{360}; \quad \frac{7129}{8\,9\,10\,8\,35\,8\,3\,15} = \frac{7381}{2520}$$

Se puede usar un argumento de inducción para mostrar que si $2^k \le n < 2^{k+1}$, entonces el denominador de Hn (escrito en forma reducida) es un múltiplo de 2^k . En consecuencia, ningún denominador (excepto el primero) puede ser 1. Esto prueba:

> Ningún número armónico, excepto el primero, es un número entero.

La divergencia de la serie armónica resuelve el divertido problema de la banda elástica:

> Una hormiga infinitamente diminuta comienza en un extremo de una banda elástica de 1 pie de largo y se arrastra una distancia de 1 pulgada hacia el otro extremo. Luego hace una pausa, y la banda se estira 1 pie más (hasta una longitud total de 2 pies), llevando a la hormiga junto con ella hasta la distancia de 2 pulgadas. posición. La hormiga luego se arrastra por otra pulgada, hasta las 3 pulgadas. posición, y hace una pausa mientras la banda se estira otro pie más. Este proceso de caminar una pulgada y hacer una pausa mientras la banda estira un pie continúa indefinidamente. (Suponemos que la banda es infinitamente elástica.) ¿Llegará la hormiga al final de la banda elástica?

Machine Translated by Google

Tenga en cuenta que en el primer tramo del viaje, la hormiga cubre 1/12 de la longitud de la banda, y que esta proporción permanece igual a medida que se estira la banda.
Durante la segunda etapa del viaje, la hormiga cubre ahora solo 1/24 de la longitud de la banda (1 pulgada de 24 pulgadas), 1/36 de la longitud durante la tercera longitud, y así sucesivamente. Así, después de n etapas del viaje, la hormiga cubre el

fracción $\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{H_n}{12}$ de la banda. El

hormiga llega a la meta sólo si Hn alguna vez supera el valor 12. Como la serie armónica diverge, este debe ser el caso.

Aunque la serie armónica diverge, la prueba de la SERIE ALTERNATIVA del estudio de la SERIE CONVERGENTE muestra que la serie armónica alterna, dada por

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots=\ln(2)$$

converge Podemos usar la fórmula de aproximación de Euler para encontrar su valor. Primera nota:

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\ln(n)+\gamma+\text{error}-\ln(2n)-\gamma-\text{error}$$

$$=\ln(n)-\ln(2n)+2\cdot\text{error}$$

donde el error no es mayor que 2/n y, por lo tanto, converge a cero a medida que n crece. En consecuencia, las sumas parciales pares de la serie se aproximan al valor ln(2). La suma de un número impar de términos es igual $S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{n+1}=$

$S_{2n}+\frac{1}{2n+1}=\ln 2+\text{error}+\frac{1}{2n+1}$ y así también se aproxima a ln 2 cuando n se vuelve grande.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots=\ln(2)$$

Este ejemplo se usa a menudo para ilustrar la diferencia entre CONVERGENCIA ABSOLUTA y condicional de una serie. En ese contexto, también se puede utilizar para proporcionar una "prueba" divertida de que 1 es igual a 2.

Véase también LA EXPANSIÓN DE MERCATOR .

hélice Una curva en forma de espiral asentada en un espacio tridimensional se llama hélice. El nombre es la palabra griega para "espiral" o "giro".

Una hélice cilíndrica descansa sobre un cilindro y corta líneas rectas trazadas a lo largo del cilindro con un ángulo constante α. Una escalera de caracol y la rosca de un tornillo recto son ejemplos de hélices cilíndricas. Una hélice cónica es una curva en espiral sobre un CONO, y una hélice esférica es una espiral sobre una ESFERA que corta líneas de longitud en un ángulo constante.

Una hélice cilíndrica tiene ECUACIONES PARAMÉTRICAS: x = a cost, y = a sint y z = bt, donde a y b son constantes y t es el parámetro. Una hélice cónica viene dada por: x = aet cost, y = aet sint y z = e^t.

Garza de Alejandría (ca.10–75 EC) Griego Geometría, teoría de números, física, ingeniería A veces llamado héroe, Garza de Alejandría es recordado en matemáticas por su texto de tres volúmenes Métrica, redescubierto en 1896. El trabajo discute y desarrolla en gran detalle los principios de geometría, número y aproximación numérica. También contiene la prueba más antigua conocida de la famosa fórmula que lleva el nombre de Heron. Fuera de las matemáticas, Heron es mejor conocido por sus contribuciones a la mecánica y la mecánica de fluidos.

Demostrando una amplia gama de intereses científicos, Heron escribió estudios sobre óptica, neumática (el estudio y uso de las presiones de gases y fluidos), astronomía, técnicas topográficas y geometría plana y sólida, pero es el trabajo presentado en Métrica el que prueba su genio como intelecto matemático. El Libro I de esta famosa obra calcula las áreas de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares, así como las áreas de superficie de conos, prismas, esferas y otras formas tridimensionales.
En esta sección se presenta su famosa fórmula para el área de un triángulo únicamente en términos de las longitudes de sus lados, junto con un método general para calcular la raíz cuadrada de un número con cualquier grado prescrito de precisión. (Este procedimiento se llama hoy MÉTODO DE HERON .

El Libro II de Métrica deriva fórmulas para el volumen de cada SÓLIDO PLATÓNICO, así como los volúmenes de conos y segmentos esféricos, y el Libro III amplía el estudio de división geométrica de EUCLID . Heron también presenta un método para determinar la raíz cúbica de un número en este tercer volumen.

Heron también escribió una serie de importantes tratados sobre mecánica, muchos de los cuales sobreviven hoy. Su texto Pneumatica representa un cuidadoso (pero, en algunos lugares, inexacto)

Machine Translated by Google

tasa) estudio de la presión en los fluidos, junto con una descripción de una colección de artilugios y juguetes que ilustran principios científicos específicos. También describe diseños para más de 100 máquinas prácticas, incluidas poleas y elevadores neumáticos, órganos de viento, máquinas que funcionan con monedas, camiones de bomberos y motores a vapor que funcionan de manera similar a los motores a reacción actuales.

Algunos de los textos de Heron tienen la apariencia de borradores de notas de conferencias, lo que lleva a algunos historiadores a sospechar que pudo haber enseñado en el famoso Museo de Alejandría. Poco se sabe realmente de la vida de Heron.

Fórmula de Heron (Fórmula del héroe) En su obra Met rica, HERON OF ALEXANDRIA (ca. 100 EC) presentó una fórmula para el ÁREA de un TRIÁNGULO únicamente en términos de las longitudes de los lados del triángulo. Hoy conocida como la fórmula de Heron, dice:

$$\text{área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo, y s = (a + b + c) es su "semiperímetro". La fórmula es un caso especial de la FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA , descubierta 500 años después.

La fórmula de Heron se puede probar de la siguiente manera: si θ es el ángulo entre los lados de longitud a y b, entonces el área del triángulo viene dada por area = ab sin(θ). La LEY DE COSENOS afirma que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$. Resolviendo para sin(θ) y cos(θ), y sustituyendo en la identidad estándar de TRIGONOMETRÍA, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, se obtiene, después de un poco de trabajo algebraico, el resultado de Heron.

Véase también FÓRMULA DE BRETSCHNEIDER ; MEDIANA DE A TRIÁNGULO; CUADRILÁTERO; TRIÁNGULO.

Método de Heron (Método de Hero) En el Libro I de su volumen Métrica, HERON OF ALEXANDRIA da un método para aproximar la RAÍZ CUADRADA de un número. Funciona de la siguiente manera:

> Estima el valor de la raíz cuadrada. Divida esta suposición entre el número bajo consideración y tome el promedio del resultado y la estimación inicial. Esto producirá una mejor aproximación a la raíz cuadrada.
>
> La aplicación repetida de este método produce una estimación de cualquier grado deseado de exactitud.

En símbolos, Heron afirma que si x se aproxima la raíz cuadrada de un número N, entonces $\frac{x + \frac{N}{x}}{2}$ es mejor aproximación. Por ejemplo, tomando 3 como una aproximación a la raíz cuadrada de 10, obtenemos $\frac{3 + \frac{10}{3}}{2} \approx 3.1667$ como una estimación mejorada. Repitiendo el procedimiento se obtienen $\frac{3.1667 + \frac{10}{3.1667}}{2} \approx 3.1623$ como una mejor aproximación (De hecho, $\sqrt{10} \approx 3.16227766$.)

Para mostrar por qué funciona este método, dejemos $y = \frac{x + \frac{N}{x}}{2}$. Entonces $y - \sqrt{N} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{N}{x}\right) - \sqrt{N} = \frac{1}{2x}\left(x - \sqrt{N}\right)^2$, lo que demuestra que si el error $x - \sqrt{N}$ es pequeño, entonces el error $y - \sqrt{N}$ será aún más pequeño. (Suponemos aquí que x es un valor mayor que 1).

Este método era conocido por los babilonios del año 2000 a. C. También es equivalente al MÉTODO DE NEWTON cuando se aplica a la función $f(x) = x^2 - N$.

Véase también MATEMÁTICAS BABILÓNICAS.

derivada mayor Si se permite tomar la DERIVADA de la misma función más de una vez, se obtienen las derivadas mayores de esa función. Las derivadas primera, segunda y tercera de una función f(x) se denotan, respectivamente, f′(x), f″(x) y f‴(x), y para n ≥ 4, la n-ésima derivada como $f^{(n)}(x)$. Por ejemplo, la tercera derivada de f(x) = x + sen x es $f'''(x) = 24x - \cos x$. Esta notación para la derivada repetida se debe a JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813). GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), coinventor del CÁLCULO, usó la notación $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ para las derivadas superiores y el francés matemático de Louis Arbogast (1759–1803) escribió Dn f(x). Los tres sistemas de notación se utilizan hoy en día.

Hilbert, David (1862–1943) Alemán Lógica formal, Geometría, Física matemática, Teoría algebraica de números Nacido el 23 de enero de 1862 en Königsberg, Prusia (ahora Kaliningrado, Rusia), el matemático David Hilbert es recordado como uno de los padres fundadores de Matemáticas del siglo XX. En 1899 Hilbert

Machine Translated by Google

publicó su famoso Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de geometría), en el que proporcionó una fundamentación axiomática completamente rigurosa del tema aclarando los supuestos ocultos que EUCLID había hecho en su desarrollo del tema dos milenios antes. Además, Hilbert avanzó el tema de LÓGICA FORMAL y usó sus resultados para probar que su enfoque de la geometría es CONSISTENTE dado que el la aritmética de los números reales está libre de contradicciones.

En 1900, Hilbert planteó 23 problemas a los matemáticos del siglo XX que, en su opinión, estaban en el corazón de la investigación matemática vital. Dos de sus problemas se resolvieron casi de inmediato, pero los 21 desafíos restantes de hecho estimularon importantes pensamiento matemático. Muchos de sus desafíos son todavía sin resolver hoy. Hilbert también influyó mucho el desarrollo de la teoría cuántica en teoría física: su noción de un "espacio de Hilbert" proporcionó la marco conceptual adecuado para el tema. Hilbert También hizo importantes contribuciones a los campos de la relatividad especial y la relatividad general.

Hilbert recibió un doctorado en matemáticas de la Universidad de Königsberg en 1885 después de escribir un tesis en ÁLGEBRA ABSTRACTA. Fue designado para un puesto de profesor en la universidad, donde permaneció durante 10 años antes de aceptar el cargo de presidente de matemáticas en la Universidad de Göttingen en 1895. Hilbert enseñó y trabajó en Göttingen para la resto de su carrera.

Su texto de 1897 Zahlbericht (Teoría de números) fue aclamada como una brillante síntesis del pensamiento actual en la teoría algebraica de números, y los resultados originales que contenía fueron reconocidos como sobresalientes. de hilbert Habilidades para captar las sutilezas de una teoría matemática sofisticada, desarrollar ideas penetrantes y proporcionar nuevas perspectivas innovadoras y estimulantes en un tema eran evidentes. A lo largo de su carrera Hilbert trabajado en una amplia variedad de temas dispares, haciendo contribuciones innovadoras a cada uno antes de mudarse a la siguiente. Publicó su famosa obra sobre GEOMETRÍA EUCLIDEA en 1899.

En 1900, Hilbert fue invitado a hablar en París. reunión del Congreso Internacional de Matemáticos. Durante su discurso detalló 10 matemáticas problemas que consideraba de gran importancia. (Él amplió la lista a 23 problemas cuando publicó su dirección.) Estos problemas incluyen el CONTINUO HIPÓTESIS, CONJECTURA DE GOLDBACH , una búsqueda de la axiomatización de la física, y la búsqueda de un algoritmo general para la resolución de ECUACIONES DIOFANTINAS. Unos avances importantes, y en muchos casos, completos solución, se ha hecho sobre todos los retos planteados excepto por una, la llamada hipótesis de Riemann, que pregunta por la ubicación de las raíces de la ZETA FUNCIÓN. Este sigue siendo, quizás, el más famoso problema no resuelto de hoy.

Más adelante en su vida, Hilbert trabajó en lógica formal y en los fundamentos de la física teórica. Entre 1934 y 1939 publicó dos volúmenes de Grundlagen der Mathematik (Fundamentos de las matemáticas), coescrito con Paul Bernays (1888–1977), que pretendían para desarrollar una prueba de la consistencia de las matemáticas. (Los TEOREMA DE LA INCOMPLETITUD DE GÖDEL demostraron, sin embargo, que tal meta es inalcanzable). Su desarrollo del análisis funcional proporcionó el marco matemático correcto para la teoría de la mecánica cuántica.

Hilbert recibió muchos honores a lo largo de su carrera, incluyendo una mención especial del húngaro Academia de Ciencias en 1905. Al jubilarse en 1929, la ciudad de Göttingen nombró una calle en su honor, y la ciudad de Königsberg, su lugar de nacimiento, lo declaró un ciudadano de honor. Murió en Göttingen en febrero 14, 1943. Se le recuerda por dar forma a la naturaleza misma de la investigación del siglo XX en las matemáticas puras.

El hotel infinito de Hilbert (la paradoja de Hilbert)

Alemán el matemático DAVID HILBERT (1862–1943) observó que los estudios del infinito a menudo pueden conducir a conclusiones no intuitivas y sorprendentes. Su famosa paradoja del hotel infinito ilustra algunas de sus ideas:

> Imagina un hotel con un número infinito de habitaciones. Supongamos que todas las habitaciones están ocupadas. Lo es posible que el hotel acomode a uno más invitado?

Si las habitaciones están numeradas 1, 2, 3, etc., Hilbert señaló que, a pesar de las molestias, cada huésped existente puede ser trasladado de la habitación n a la habitación n + 1, dejando así la habitación 1 libre para un recién llegado. Hay de hecho, espacio para otro huésped individual. Se puede ir más allá: supongamos un autobús turístico, con una infinidad de turistas a bordo, llega al hotel. Moviendo cada uno huésped del hotel de la habitación n a la habitación 2n, en cambio, deja todo las habitaciones impares vacantes para el número infinito de recién llegados.

Machine Translated by Google

Si un número infinito de autobuses turísticos, cada uno con un número infinito de turistas, llega al mismo tiempo, todavía se puede encontrar espacio para acomodar la multitud de nuevos huéspedes:

Mueva a todos los huéspedes existentes del hotel a las habitaciones pares.

Coloca a los turistas del primer autobús en las habitaciones dadas por los poderes de 3: 3, 9, 27,...

Coloque a los turistas del segundo autobús en las habitaciones dadas por los poderes de 5: 5, 25, 125,...

A continuación, use todas las habitaciones numeradas con las potencias de 7, de 11, de 13, y así sucesivamente, hacia abajo a lo largo de la lista de todos los números PRIMOS . Como, según la PRUEBA DE LA INFINITUD DE LOS PRIMOS DE EUCLID , hay un número infinito de números primos y no hay dos potencias de números primos iguales, este esquema de asignación funciona.

Véase también CARDINALIDAD; TEOREMA FUNDAMENTAL DE ARITMÉTICA; INFINIDAD; PARADOJA; TRISTRAM SHANDY PARADOJA.

Números arábigos hindúes El sistema de numeración que usamos hoy en día se llama sistema numérico arábigo hindú. Utilizando un SISTEMA DE VALOR POSICIONAL de base 10 , los números se expresan mediante combinaciones de los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, organizados para representar agrupaciones de potencias de 10. Por ejemplo, el número 574 representa los cinco grupos de 100, siete grupos de 10 y cuatro unidades individuales.

Este sistema numérico se originó en la India alrededor del año 600 EC, casi exactamente en la misma forma en que lo usamos hoy. El sistema se transmitió a los árabes dos siglos después, mientras trabajaban para traducir las obras de astronomía en sánscrito al árabe. El matemático árabe MUHAMMAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı (ca. 800) escribió un influyente tratado que describía el sistema numérico hindú y lo usó en su famoso libro Hisab al-jabr w'al-muq¯abala (Cálculo por restauración y reducción), de cuyo título se deriva la palabra moderna álgebra . A medida que los eruditos occidentales comenzaron a traducir los textos árabes al latín, la noticia del eficiente sistema de numeración se extendió por toda Europa occidental. El erudito italiano FIBONACCI (ca. 1170-1250) promovió ávidamente su uso. A fines del siglo XVII, el sistema de numeración hindú-árabe reemplazó por completo al engorroso sistema de NÚMEROS ROMANOS que fueron el estándar en Europa durante más de 1.500 años.

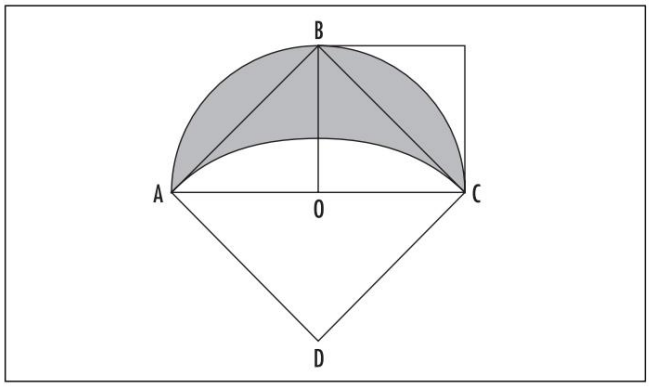
Véase también BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO; REPETIDOR DECIMAL RESENTACIÓN; NÚMERO; CERO.

Hippaso de Metaponto Ver PITÁGORAS.

Hipócrates de Quíos (ca. 470–410 a. C.) Geometría griega Nacido en Khíos (Quíos), Grecia, Hippo crates es recordado como el primer matemático que encontró el área de una figura curva, es decir, la de una LUNE. También dio los primeros pasos para analizar correctamente el problema de la CUADRATURA DEL CÍRCULO.

Se sabe muy poco de la vida de Hipócrates. Se cree que Hipócrates pudo haber trabajado primero como comerciante antes de desarrollar interés y talento para la geometría más adelante en su vida. Aunque escribió solo un texto sobre el tema (desafortunadamente perdido para nosotros hoy), muchos estudiosos a lo largo de la historia se refirieron a su trabajo en sus propios estudios.

Hipócrates estaba interesado en el famoso problema de la cuadratura del círculo, es decir, encontrar un método para construir un cuadrado de la misma área que un círculo dado. Aunque no pudo resolver este problema, logró demostrar que, en muchos casos, es posible "cuadrar una luna". Por ejemplo, en el siguiente diagrama, la figura ABCD es un cuadrado, y la región sombreada es la luna formada por un arco circular con centro en D y un segundo arco circular con centro en O, el centro del cuadrado. Hipócrates, utilizando un razonamiento geométrico, demostró que el área de la luna coincide con el área del cuadrado más pequeño que se muestra.



Luna de Hipócrates

Machine Translated by Google

(Se puede verificar esto algebraicamente etiquetando el radio del arco circular más grande r y calculando la longitud del lado del cuadrado grande, el área del sector DAC, el área del semicírculo ABC y, en consecuencia, el área de la luna).

Al aplicar este tipo de análisis a varios lunes diferentes, Hipócrates consiguió demostrar que la razón de las áreas de dos círculos diferentes es igual a la razón de sus radios al cuadrado. Este nuevo resultado fue un logro significativo. Algunos historiadores creen que EUCLID puede haberse inspirado en el trabajo de Hipócrates cuando describió y probó este resultado en su famoso texto LOS ELEMENTOS.

histograma Ver DISTRIBUCIÓN; ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

homogéneo UN POLINOMIO de varias variables p(x,y,z,…) se llama homogéneo si todos los términos del polinomio tienen el mismo grado total. Por ejemplo, cada término del polinomio x tiene un grado total de tres, por lo que representa un polinomio homogéneo.

Más generalmente, una función de varias variables f(x,y,z,…) es homogénea si existe un número natural n tal que la siguiente relación se cumple para cualquier constante k distinta de cero:

$$f(kx,ky,kz,\ldots) = k^n f(x,y,z,\ldots)$$

Por ejemplo, la función homogénea: es

Identificar funciones homogéneas puede ser útil para resolver ECUACIONES DIFERENCIALES. Cualquier fórmula que represente la MEDIA de un conjunto de números debe ser homogénea.

En física, el término homogéneo describe una sustancia o un objeto cuyas propiedades no varían con la posición. Por ejemplo, un objeto de densidad uniforme a veces se describe como homogéneo. En la cocina, al batir mantequilla y azúcar, por ejemplo, uno aspira a producir una mezcla homogénea.

homomorfismo Una función f entre dos conjuntos S y T, cada uno equipado con algún tipo de estructura algebraica, se denomina homomorfismo (del griego, homos, "mismo"; morphé, "forma" o "figura") si conserva las relaciones algebraicas dentro de los conjuntos. Por ejemplo, si la operación algebraica es "multiplicación" en el conjunto S y "suma" en el conjunto T, y si z es el producto de dos elementos en S, z = x × y, entonces f(z) debería corresponden a la suma de los dos elementos correspondientes en T:

$$f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

La función LOGARITMO , por ejemplo, es un homomorfismo del conjunto de números reales positivos en la multiplicación al conjunto de todos los números reales en la suma.

Si f es la función de duplicación, f(x) = 2x, en números reales, entonces f es un homomorfismo bajo suma, pero no bajo multiplicación:

$$f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)\ f(x \times y) = 2 \times x \times y \neq f(x) \times f(y)$$

La función de elevar al cuadrado ^{2} conserva la multiplicación pero f(x) = x no suma.

Un mapa entre dos GRUPOS se llama homomorfismo si conserva las operaciones algebraicas de los grupos. Un mapa f : S → T entre dos ANILLOS se llama homomorfismo si conserva tanto las sumas como las multiplicaciones del sistema:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)\ f(x \times y) = f(x) \times f(y)$$

para todos los elementos x e y del anillo S.

Véase también ISOMORFISMO.

Hipatia de Alejandría (ca. 370–415 EC) Filosofía griega , comentario

Nacida alrededor del año 370 en Alejandría, Egipto, Hipatia es recordada como la primera mujer en la historia de las matemáticas que hizo contribuciones significativas al campo, tanto como académica y como profesor.

Era hija del matemático y astrónomo Teón de Alejandría. Hipatia escribió comentarios influyentes sobre la obra de su padre y también sobre la obra de APOLONIO DE PERGA (ca. 263–190 a. C.) y DIO FANTASO DE ALEJANDRÍA (ca. 200–284 d. C.).

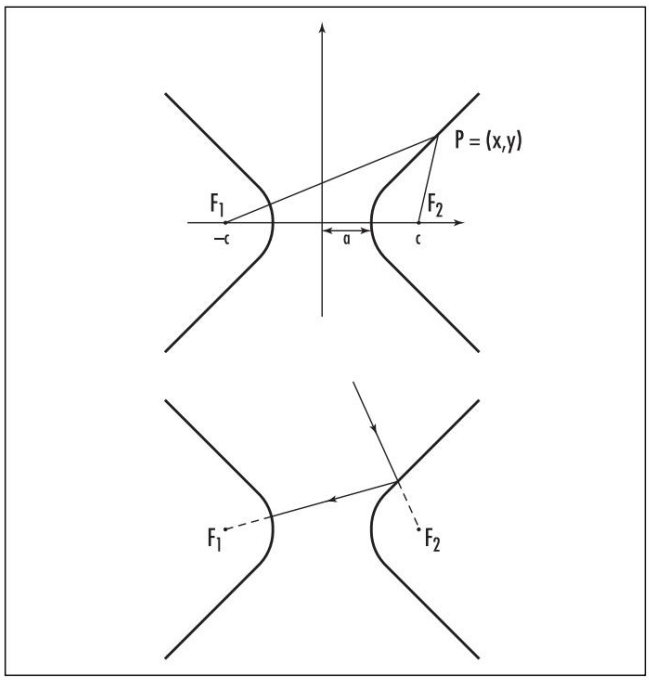
Poco se sabe de la vida de Hipatia. Probablemente recibió instrucción en matemáticas de su padre y ciertamente mantuvo una estrecha relación de trabajo con él a lo largo de su vida. Se sabe que ella ayudó

Machine Translated by Google

él al escribir su comentario de 11 partes sobre el trabajo matemático de CLAUDIO PTOLOMEO (85-165 EC) y sobre su producción de una versión revisada de Los Elementos de EUCLID . Hypatia produjo sus propios comentarios sobre piezas clásicas, incluida la famosa Arith metica de Diofanto, las cónicas de Apolonio y las obras astronómicas de Ptolomeo. Todo su trabajo, sin embargo, se ha perdido hoy, y solo sabemos de ellos a través de referencias hechas por estudiosos posteriores.

Alrededor del año 400 d. C. , Hipatia dirigió la escuela platónica en Alejandría, donde consultó sobre asuntos científicos y dio conferencias sobre filosofía y matemáticas.
Durante este tiempo, el cristianismo surgió como la religión dominante de la región y los fanáticos se sintieron amenazados por su intelecto y erudición. Alrededor del año 415 EC Hipatia fue brutalmente asesinada por un grupo de seguidores religiosos que consideraban paganas sus opiniones filosóficas. Muchos historiadores sugieren que la muerte de Hipatia marca el comienzo del declive de Alejandría como el gran centro de erudición y aprendizaje de la antigüedad.

Vale la pena mencionar que se sabe que al menos otra mujer jugó un papel activo en las matemáticas durante la época griega. En su colección de obras, PAPPUS OF ALEXANDRIA (300–350 EC) reconoce a una erudita con el nombre de Pandrosion. Esencialmente no se sabe nada sobre ella.



Hipérbola

hipérbola Como una de las SECCIONES CÓNICAS, la hipérbola es la curva plana que consta de todos los puntos P cuyas distancias desde dos puntos dados F1 y F2 en el plano tienen una diferencia constante. Los dos puntos fijos F1 y F2 se denominan focos de la hipérbola. La hipérbola surge también como la curva que produce la intersección de un plano con las dos siestas de una recta circular.
CONO.

Utilizando la notación |PF1 | y |PF2 | para las longitudes de los segmentos de línea que conectan P con F1 y F2 , respectivamente, la condición definitoria de una hipérbola se puede escribir como una de dos ecuaciones:

$$|PF1| - |PF2| = d \text{ o } |PF2| - |PF1| = re$$

donde d denota la diferencia constante. Cada ecuación define su propia curva, o rama, de la misma hipérbola.

La ecuación de una hipérbola se puede encontrar introduciendo un sistema de coordenadas en el que los focos están ubicados en las posiciones F1 = (–c, 0) y F2 = (c,0), para algunos número positivo c. Es conveniente escribir d = 2a, para alguna a > 0. Si P = (x,y) es un punto arbitrario de la hipérbola, entonces, de acuerdo con la FÓRMULA DE LA DISTANCIA, las condiciones de definición son:

$$\sqrt{\quad + + \quad 22 \quad 22 \quad 2} - \sqrt{() \quad () \quad xc \; y \quad xc \; y} \qquad a$$

Mover el segundo radical al lado derecho, elevar al cuadrado y simplificar produce la ecuación:

$$\sqrt{c \; (\quad) \quad xc \quad y \quad xaa} \qquad 2 \; 2 \qquad —$$

Cuadrando y simplificando de nuevo se obtiene $\frac{2x}{un^2} - \frac{}{ca} = 1$.

Al notar que c es mayor que a, podemos establecer el positivo para ecuación $^{2\,2\,-\,un}$ como igual a b 2, algún b > 0. Por lo tanto, la de cantidad c de la hipérbola es:

$$\frac{2x}{un^2} \; 2 \; y \; = 1 \; 2$$
$$b$$

Por el contrario, se puede demostrar que cualquier ecuación de esta forma produce una hipérbola con focos en las posiciones

Machine Translated by Google

con (±√a2 + b 2, 0) de cuyos puntos P tienen distancias con (± + b 2 diferencia los focos. Esta ecuación también revela que la hipérbola tiene ASINTOTAS inclinadas

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Las hipérbolas tienen la siguiente propiedad de reflexión: cualquier rayo de luz que se acerque al lado convexo de una rama a lo largo de una línea que apunta hacia un foco se refleja directamente hacia el otro foco. (Esta propiedad se puede demostrar de manera similar a como se demuestra la propiedad de reflexión de una PARÁBOLA .)

Las hipérbolas aparecen en el plegado de una fina hoja de papel. Dibuja un círculo y un punto fuera del círculo en una hoja de papel. Dobla el punto sobre el círculo y pliega el papel. Abre el pliegue y hazlo de nuevo, esta vez doblando el punto a un punto diferente del círculo. Al hacer esto muchas veces, una rama de una hipérbola emergerá a lo largo de todos los pliegues. El punto marcado es un foco de la hipérbola y el centro del círculo es el otro. El radio del círculo es la diferencia constante de distancias de un punto de la hipérbola a los dos focos.

En el proceso de derivar la ecuación de una hipérbola, presentamos la ecuación:

$$\sqrt{c(\ )-x a y - + = } \qquad \frac{}{a}$$

válido para una rama de la figura al menos. Colocar $mi = = \frac{C}{a}$

$\frac{\sqrt{22\,2}}{a}$ abdominales $1 = \sqrt{+}\ \frac{b}{un^2}$. Esto se llama la EXCENTRICIDAD de la hipérbola y tiene un valor mayor que 1. La ecuación anterior se puede reescribir:

$$\frac{\sqrt{(\ )\,xc\,y - +}}{X - \frac{a}{mi}} = {}_{mi}$$

El numerador de la cantidad del lado izquierdo es la distancia de un punto P dado a un foco, y el denominador es la distancia del punto P a la línea vertical x = llamada directriz de la hipérbola.

$\frac{a}{mi}$,

Esta formulación proporciona una caracterización alternativa de la hipérbola:

> Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos P tales que la razón de su distancia a un punto fijo (el foco) a su distancia de una línea fija (la directriz) es igual a una constante e > 1.

Véase también CÍRCULO DE APOLONIO ; ELIPSE.

funciones hiperbólicas En analogía con el hecho de que las funciones seno y coseno de TRIGONOMETRÍA representan las coordenadas de un punto en el círculo unitario, x = 1, las funciones hiperbólicas 2 + y representan las coordenadas de un punto en la rama derecha de una HIPERBOLA, x Específicamente, la coordenada x de un $2\,2 = 1. - y$ punto en la curva, en un "ángulo" t, se denomina función coseno hiperbólica y se denota cosh(t), y la coordenada y se denomina función seno hiperbólica, se denota sinh(t) .

Tenemos:

$$\cosh 2\,(t) - \operatorname{senh} 2\,(t) = 1$$

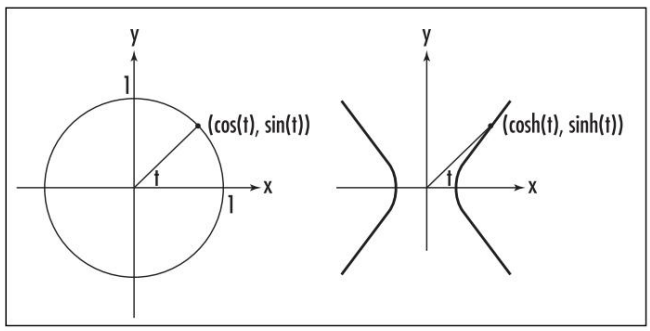
También se puede ver que cosh(–t) = cosh(t) y sinh(–t) = –sinh(t).

Los matemáticos a veces definen las funciones hiperbólicas de seno y coseno a través de las fórmulas:

$$\text{cojo}(\ )\,t = \frac{ee + \ ^{-}t}{2}$$

$$\text{pecado}(\ ) = \frac{\text{camiseta}\ _{-}^{t}}{2}$$

Se puede comprobar que estas fórmulas efectivamente satisfacen la ecuación de una hipérbola x = 1 con $-x^2 \geq 0$, y así deben ser las coordenadas de sus puntos. (Estas ecuaciones recuerdan la fórmula cos( )t = $\frac{eeeso + \ ^{-}él}{2}$ y $\text{pecado}(\ )t = \frac{+\text{eso} \ ^{-}él}{2}$, que siguen de ¡ FÓRMULA DE EULER para funciones trigonométricas ordinarias.)



Las funciones trigonométricas e hiperbólicas

Machine Translated by Google

Tomando la DERIVADA vemos:

$$\frac{d}{dt}\cosh(t) = \frac{d}{dt}\frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = \operatorname{sen}(t)$$

y

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sinh}(t) = \cosh(t)$$

En analogía con las funciones trigonométricas ordinarias, los matemáticos definen cuatro funciones hiperbólicas adicionales:

$$\tanh(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cosh(t)}, \quad \coth(t) = \frac{1}{\tanh(t)},$$

$$\operatorname{sec}(t) = \frac{1}{\cosh(t)}, \quad \csc(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}$$

La curva del coseno hiperbólico surge en la naturaleza como la forma de la curva formada por una cadena que cuelga libremente entre dos puntos. Esta curva se llama CATENARIA.

Véase también REGLA DE OSBORNE .

geometría hiperbólica (geometría lobachevskiana) Descubierta de forma independiente en 1823 por el matemático húngaro JÁNOS BOLYAI (1802-1860) y en 1829 por el ruso matemático NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856), la geometría hiperbólica es una NO EUCLIDEA GEOMETRÍA en la que falla el famoso POSTULADO DE LAS PARALELAS en la siguiente manera:

> A través de un punto dado que no está en una línea dada, hay más de una línea paralela a esa línea dada.

matemático francés JULES HENRI POINCARÉ (1854-1912) más tarde proporcionó un modelo simple para este geometría y los medios para visualizar fácilmente resultados de esta teoría. El “disco de Poincaré” consta de todos los puntos en el interior del CIRCULO UNIDAD. A "punto" en geometría es cualquier punto dentro de este círculo, y una "línea" debe interpretarse como un arco circular dentro el círculo con extremos perpendiculares al límite del círculo. Cualquier diámetro del círculo límite también se considera una línea. Las distancias no se miden con una regla tradicional: puntos en el círculo límite se consideran infinitamente lejos del centro de el círculo.

Bolyai y Lobachevsky demostraron que todos menos el la quinta parte de los POSTULADOS DE EUCLIDES se mantienen en la forma hiperbólica geometría y, además, que este modelo de geometría es consistente (es decir, libre de CONTRADICCIONES). Este establece que el postulado de las paralelas no puede deducirse lógicamente como consecuencia del resto axiomas propuestos por Euclides.

En geometría hiperbólica, todos los ángulos en triángulos suman a menos de 180°, y la relación de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es menor que π. (Además, el valor de esta razón no es el mismo para todos los círculos.) Además, es posible que dos rectas perpendiculares sean paralelas a la misma línea.

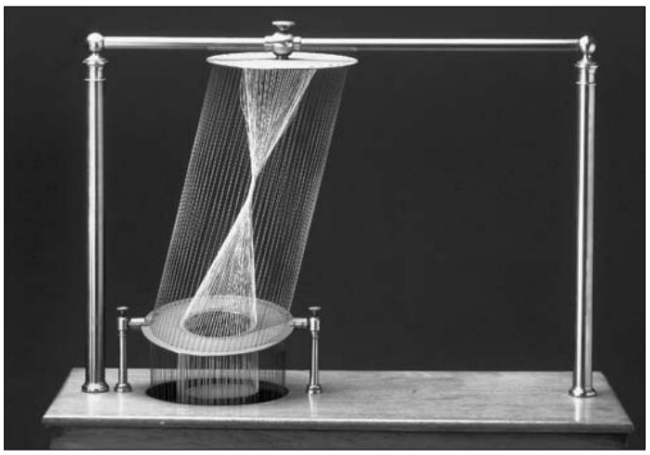
Los físicos, siguiendo el trabajo de ALBERT EINSTEIN, sugieren que la geometría de nuestro universo es hiperbólica: que nos aparezca como euclidiana es el resultado del hecho que ocupamos una porción tan pequeña de ella. (Esto es análogo al hecho de que es difícil reconocer el La Tierra es redonda cuando se vive en ella.)

Véase también GEOMETRÍA EUCLIDEA; EL AXIOMA DE PLAYFAIR ; GEOMETRÍA ESFÉRICA.

hiperboloide El SÓLIDO DE REVOLUCIÓN obtenido por rotar una HIPERBOLA alrededor de uno de sus ejes se llama hiperboloide. Si la rotación se realiza sobre el eje que se encuentra entre las dos ramas de la curva, entonces la superficie resultante se denomina hiperboloide de uno hoja. Se asemeja a un cilindro "pellizcado" en el centro para que como para curvarse hacia adentro. Los puntos en esta superficie satisfacen una ecuación de las constantes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\text{segundo}^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1$ para algunos de forma a, b y c. Si, en cambio, la rotación se realiza alrededor del eje que conecta los dos focos de la hipérbola, entonces la superficie resultante tiene dos partes, cada una parecida a un cuenco. Esta superficie se llama hiperboloide de dos hojas. Los puntos en esta superficie satisfacen la ecuacion $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\text{segundo}^2} = -\frac{z^2}{c^2} - 1$.

Se puede construir un modelo de un hiperboloide de una hoja sosteniendo dos anillos de metal, uno directamente encima del otro, y atando cuerdas verticales desde puntos en el anillo inferior a sus puntos correspondientes en el anillo superior. Si uno gira el anillo superior de modo que el las cuerdas verticales comienzan a inclinarse, el modelo comienza a "contraerse". La superficie resultante es un hiperboloide de uno hoja. También se puede ver esta superficie atando una cuerda alrededor de un puñado de hilos de espagueti crudos.

Machine Translated by Google



Al girar el disco superior de este modelo de cuerdas de 1872, se puede transformar un cilindro de cuerdas en la forma de un hiperboloide. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/ The Image Works)

Cuando los hilos se inclinan, aparece la superficie de un hiperboloide de una hoja.

Véase también ELIPSOIDE; PARABOLOIDE.

hipercubo El análogo de dimensión superior de CUADRADO en dos dimensiones y un CUBO en tres dimensiones se llama hipercubo.

Un cuadrado unitario en el plano tiene cuatro vértices en las ubicaciones (0,0), (1,0), (0,1) y (1,1). Un cubo unitario en un espacio tridimensional tiene ocho vértices en las ubicaciones (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1), (0,1,1) y (1,1,1). Por analogía, un hipercubo de lado 1 sentado en un espacio de cuatro dimensiones tiene 16 vértices dados por: (0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0),…,(1,1,1,1).

Algunas personas encuentran útil interpretar la cuarta coordenada como tiempo. En este contexto, cada valor particular de la cuarta coordenada representa un instante dado en el tiempo, y las tres coordenadas restantes describen un objeto ordinario en el espacio tridimensional.
Por lo tanto, un hipercubo de cuatro dimensiones puede considerarse como un cubo ordinario que se mueve a través del tiempo. (También se puede aplicar esta interpretación a cuadrados y cubos ordinarios de menor dimensión. Por ejemplo, un segmento de línea es el resultado de un punto que se desliza horizontalmente en el tiempo, un cuadrado es el resultado de un segmento de línea horizontal que se desliza en la dirección del eje y positivo a lo largo del tiempo, y un cubo es el resultado de un cuadrado bidimensional que se desliza en la dirección del eje z positivo a lo largo del tiempo). hipercubo dimensional también se llama teseracto.

Un cuadrado en un espacio bidimensional tiene cuatro vértices y cuatro aristas. Un cubo en el espacio tridimensional tiene ocho vértices y seis caras cuadradas. Se puede demostrar que un teseracto tiene ocho vértices y seis “caras” cúbicas y que, en general, un hipercubo de n dimensiones tiene 2 n vértices y 2n caras, cada uno de ellos un hipercubo de una dimensión menos.

Cuatro segmentos de línea con bisagras de extremo a extremo se pliegan para formar un cuadrado. Seis cuadrados dispuestos en forma de “cruz” para formar un cubo. Ocho cubos dispuestos de forma análoga (cuatro en fila con los cuatro cubos restantes unidos a las cuatro caras expuestas del segundo cubo) se pliegan en un espacio de cuatro dimensiones para formar un hipercubo. En total, hay 261 formas diferentes de organizar ocho cubos ordinarios que se pliegan en un espacio de cuatro dimensiones para formar un hipercubo. Cada arreglo se llama una RED.

hipotenusa El lado más largo de un triángulo que contiene un ángulo de 90°, es decir, un triángulo rectángulo, se llama hipotenusa del triángulo. EL TEOREMA DE PITÁGORAS muestra que este lado mayor se encuentra frente al ángulo recto. (Si las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo son a, b y c, con c opuesto al ángulo recto, entonces cb 2 . Esto establece que c es más grande que a y b). Los dos lados $^{2\,2 = un}$ + restantes de a triángulo rectángulo se llaman los catetos del triángulo.

La palabra hipotenusa se deriva del término griego hypoteinousa que significa “bajo tensión” (el prefijo hipo-significa “debajo” y teinein significa “estirar”).

Los matemáticos han demostrado que un entero c puede ser la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con lados de longitudes enteras si, y sólo si, en la FAC TORIZACIÓN prima de c, ningún PRIMO que aparece un número impar de veces es 3 más que un múltiplo de 4.

Véase también TRIPLES DE PITÁGORAS.

prueba de hipótesis Ver ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

Machine Translated by Google



identidad Una ecuación que establece que dos expresiones matemáticas son iguales para todos los valores posibles de cualquier variable que ocurra en ellas se llama identidad. Por ejemplo, la fórmula DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS = (x – y) y^{2} $2x$ – (x + y) y la ecuación trigonométrica sen2θ + cos2θ = 1 son identidades. A veces se usa el símbolo ≡ en lugar de = para indicar que el enunciado es una identidad. Se lee como "idénticamente igual a".

Un enunciado numérico, uno que no involucre variables en absoluto, aún podría llamarse identidad si ilumina algo interesante sobre los números involucrados. Por ejemplo, la siguiente relación podría llamarse identidad debido a la aparición inesperada del número π:

$$3 \text{ arcán } \frac{1}{4}_{+} \text{ arcán } \frac{1}{20}_{+} \text{ arcán } \frac{1}{1985\,4}_{=} \frac{\pi}{}$$

Véase también ECUACIÓN; ELEMENTO DE IDENTIDAD.

elemento de identidad (identidad, elemento neutral) Un elemento de un conjunto que, combinado con cualquier otro elemento del conjunto, deja ese elemento sin cambios se denomina elemento de identidad. Más precisamente, dada una OPERACIÓN BINARIA "*" sobre un conjunto S, decimos que e en S es un elemento identidad si:

$$a*e = un$$
$$e*a = un$$

para todos los elementos a del conjunto.

Por ejemplo, el número cero es un elemento de identidad para el conjunto de números reales bajo la operación de suma: tenemos que a + 0 = a = 0 + a para todos los números a. Con respecto a la multiplicación, 1 es un elemento de identidad, ya que a × 1 = a = 1 × a para todos los números a. (El número cero a veces se llama una "identidad aditiva" y el número 1 una "identidad multiplicativa").

En la teoría de matrices, la MATRIZ DE IDENTIDAD es un elemento de identidad bajo multiplicación para el conjunto de todas las matrices cuadradas de un tamaño particular. En TEORÍA DE CONJUNTOS, el CONJUNTO VACÍO es una identidad bajo la operación de toma de u Cualquier GRUPO debe tener un elemento de identidad.

Es imposible que un sistema matemático posea dos elementos de identidad diferentes con respecto a la misma operación binaria. Si, por ejemplo, e y f son ambos elementos de identidad para un conjunto S, entonces e*f es igual a e (ya que f es un elemento de identidad), y también es igual a f (ya que e es un elemento de identidad). Por lo tanto , e y f son iguales.

En algunas teorías matemáticas es deseable distinguir entre una “identidad izquierda”, que es un elemento eL tal que eL*a = a para todos los elementos a, y una “identidad derecha” eR que satisface a*eR = a para todo un Por supuesto, si la teoría satisface la PROPIEDAD CONMUTATIVA, entonces eL y eR son iguales y representan una identidad para el sistema.

Véase también ELEMENTO INVERSO.

matriz identidad (matriz unitaria) Una MATRIZ cuadrada con cada elemento diagonal principal igual a 1 y todas las demás entradas iguales a cero se llama matriz identidad. Tal matriz se suele denotar I o Id, o incluso Idn si el

Machine Translated by Google

ORDEN DE UNA MATRIZ es n. Por ejemplo, la matriz de identidad de 3 × 3 es:

$$I_3 = \begin{matrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{matrix}$$

Si A es una matriz con m filas y n columnas, entonces la multiplicación de matrices muestra que tenemos:

$$AI_n = A$$
$$I_m A = A$$

es decir, la multiplicación con la matriz identidad adecuada deja sin cambios cualquier otra matriz. Si todas las matrices bajo consideración tienen el mismo número de filas que de columnas, digamos n de cada una, entonces In actúa como un ELEMENTO DE IDENTIDAD para ese conjunto bajo la multiplicación de matrices.

Cualquier matriz A de 2 × 2 de la forma:

$$\begin{matrix} d & \frac{1 - d^2}{c} \\ c & -d \end{matrix}$$

o

$$\begin{matrix} re & c \\ \frac{1 - 2re}{c} & -d \end{matrix}$$

satisface A2 = I2 . Por lo tanto, cualquier matriz de este tipo puede considerarse como una RAÍZ CUADRADA de la matriz identidad de 2 × 2. Si uno está dispuesto a permitir el uso de NÚMEROS COMPLEJOS, entonces la siguiente matriz es un ejemplo de una raíz cúbica de la matriz identidad 3 × 3:

$$A = \begin{matrix} 00 & -i \\ yo & 00 \\ 01 & 0 \end{matrix}$$

Esta matriz satisface la relación A3 = I3 .

imagen (rango) El conjunto de todos los valores que podría adoptar una FUNCIÓN se denomina imagen de la función. Por ejemplo, la imagen de la función y = x 2 definida para todos los NÚMEROS REALES es el conjunto de todos los números mayores o iguales a cero. El término también se usa para la salida de una entrada específica para la función. Por ejemplo, en el ejemplo anterior, la imagen del número 3 es 9.

Al tratar con funciones de números reales, se prefiere el término rango sobre imagen. A menudo, los matemáticos usan la palabra imagen solo cuando piensan en un problema geométricamente. Por ejemplo, si la función es una TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA como un reflejo en una línea, entonces se hablaría de la imagen de figuras geométricas bajo esta transformación. En este ejemplo, la imagen de cualquier círculo es otro círculo y la imagen de una línea recta es otra línea recta.

implicación Ver CONDICIONAL.

diferenciación implícita Cuando dos variables x e y satisfacen una sola ecuación F(x,y) = 0, es posible, no obstante, considerar que la ecuación define y como una función de x, aun cuando no sea aparente una fórmula explícita de este tipo . (Ver FUNCIÓN IMPLÍCITA.) En tal caso, uno puede ir más allá y diferenciar la ecuación como un todo, considerando y como una función de x y usando la REGLA DE LA CADENA en el proceso para encontrar una fórmula

por la derivada $\frac{dy}{dx}$. Este proceso se conoce como diferenciación implícita —dx . Por ejemplo, si xy3 + 7x 2y = 1, entonces la diferenciación produce:

$$32\ 2\ 3.147\frac{dy}{dx} + ++ = y\ xy\ xy\ x\ \frac{dy}{dx}$$

y entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^{3.14}\ y +}{2\ 3\ 7 + xy}$$

(asumiendo que el denominador no es cero).

La diferenciación implícita es útil para encontrar las derivadas de funciones inversas, por ejemplo. Por ejemplo, si y = sen–1(x), entonces sen(y) = x. Derivando dy dy se obtiene cos(y) = 1, y así,

$$\frac{dx}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

A veces, una función se diferencia más fácilmente si primero se aplica un logaritmo y luego se deriva

Machine Translated by Google

implícitamente. Este proceso se llama diferenciación logarítmica. Por ejemplo, para derivar $y = x^x$, escribe $\ln(y) = \ln(x)\, x = x\ln(x)$. Entonces $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}$, y entonces, $\frac{dy}{dx} = y(\ln(x) + 1) = x^x(\ln(x) + 1)$.

función implícita Una fórmula de la forma F(x,y) = 0 es se dice que define la variable y implícitamente como una función de X. Por ejemplo, la ecuación xy = 1 define implícitamente la variable dependiente y como $y = \frac{1}{x}$. Sin embargo, las cosas pueden ser confusas, ya que una sola ecuación puede definir y como varias funciones posibles de x (por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ sugiere que y = ción x o $y = \sqrt{1 - x^2}$ o $y = -\sqrt{1 - x^2}$) y, en algunos casos, es posible que ni siquiera sea posible resolver una fórmula explícita para y (para ejemplo, no está nada claro que $x\,2y\,2 + y\cos(xy) = 1$ de hecho da una fórmula para y).

Los matemáticos han demostrado que mientras el la función F(x,y) tiene DERIVADAS PARCIALES continuas, y que hay algún punto (a,b) para el cual F(a,b) = 0 y $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ en (a,b), entonces la ecuación F(x,y) = 0 hace de hecho define y como una función de x, al menos para valores de x dentro de un pequeño vecindario de x = a. Además, el proceso de DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA es válido para estos valores de x. Este resultado se conoce como el teorema de la función implícita.

integral impropia (integral infinita, integral sin restricciones) En la teoría del CÁLCULO INTEGRAL es permisible extender la noción de una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ para incluir funciones f(x) que se vuelven infinitas en el rango bajo consideración, [a,b], o, alternativamente, para considerar la integración en un rango infinito: [a,∞), (–∞,b], o incluso (–∞,∞). Tales integrales se llaman integrales impropias. Uno trata con tales integrales por restringiendo el rango de integración y tomando el límite a medida que el intervalo se expande al tamaño requerido.

Considere, por ejemplo, la integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. El integrando se $\frac{1}{\sqrt{x}}$ vuelve ilimitado a medida que x se acerca al valor cero, por lo que, en la forma normal, la integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ no está bien definido. Sin embargo, la función es acotado en el intervalo [L,1] para cualquier 0 < L < 1, y la integral $\int_L^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ es válida. Tenemos: $\int_L^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_L^1 = 2 - 2\sqrt{L}$. La integral impropia bajo consideración se define entonces como el LÍMITE cuando L → 0, de arriba, de estos valores: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \text{límite}_{L\to 0+}\int_L^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{L\to 0+}(2 - 2\sqrt{L}) = 2$.

En general, si un integrando f(x) es infinito en un extremo punto a, entonces la integral impropia $\int_a^b$ se define f (x)dx como el límite:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{L\to a+}\int_L^b f(x)dx$$

o, si es infinito en el punto final b, entonces la integral impropia se define como el límite:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{L\to b-}\int_a^L f(x)dx$$

Si el límite existe, entonces se dice que la integral impropia converger. (Así, por ejemplo, integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ es un convergente impropia.) Si el límite no existe, entonces el Se dice que la integral impropia diverge. (Se puede comprobar, por ejemplo, que diverge $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$.)

Para ilustrar el segundo tipo de integral impropia, Consideremos, por ejemplo, que la $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx$. Esto es para cantidad se interprete como el límite:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = \text{límite}_{L\to\infty}\int_1^L \frac{1}{2x}dx$$

que se puede calcular fácilmente: $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = \text{límite}_{L\to\infty}\int_1^L \frac{1}{x^2}dx = \text{límite}_{L\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^L = \text{límite}_{L\to\infty}\left(1 - \frac{1}{L}\right) = 1$. (Nosotros interprete esto como diciendo que el área total bajo el $\frac{1}{x^2}$ curva y = a la derecha de x = 1 es 1.)

En general, las integrales impropias de este tipo se calculan como sigue:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{L\to\infty}\int_a^L f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{L\to-\infty}\int_L^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^L f(x)dx$$

Machine Translated by Google

Si los límites existen, entonces se dice que las integrales impropias converger. (Así, por ejemplo, integral $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx$ es un convergente impropia.) Si el límite no existe, entonces el Se dice que la integral impropia diverge. (Se puede comprobar, por ejemplo, que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge.) La prueba integral utilizada en el estudio de SERIES CONVERGENTES hace uso de integrales impropias de este tipo.

Es posible definir impropia aún más general integrales considerando integrandos que toman el valor infinito en varios lugares dentro del rango de integración, posiblemente sobre un rango infinito de integración. Uno interpreta tales integrales impropias como la suma de varios límites.

Matemáticas incas El Imperio Inca gobernó la región del Perú y sus alrededores antes de la conquista española del continente en 1532. Fue un extraordinario civilización sofisticada. El pueblo inca tenía mucho desarrollaron sistemas de agricultura, transporte, carreteras construcción, producción textil y administración, sin embargo, Sorprendentemente, no tenía forma de escritura. En consecuencia, con absolutamente ningún registro o documento cultural disponible, se sabe muy poco de las matemáticas de esta gente.

Se sabe que el Inca registraba información numérica con un dispositivo conocido como quipu, el cual consistía de una colección de cuerdas todas atadas a un centro común objeto, generalmente otra cuerda. Administradores simplemente atados nudos en las cuerdas para registrar números, con cada cuerda representando un conteo diferente. Los nudos se agruparon en grupos para representar cantidades de potencias de 10. Por lo tanto, por ejemplo, el número 283 estaba representado (hacia atrás) por un grupo de tres nudos colocados cerca del extremo libre de una cuerda (tres unidades), un espacio, un grupo de ocho nudos en el centro de la cuerda (ocho decenas), otro espacio, y finalmente dos nudos en la parte superior de la cuerda (dos 100). El Los incas, en efecto, estaban siguiendo el sistema de REPRESENTACIÓN DECIMAL que usamos hoy. Un gran espacio indicaba un dígito de cero (para distinguir 208 de 28, por ejemplo).

Se usaron hilos de diferentes colores para significar lo que contaban los nudos de esa cuerda. Para ejemplo, las cuerdas blancas pueden haber representado el recuentos de ganado, mientras que las cuerdas verdes pueden haber representado los niveles de castigo a ser ejecutado por cometer un determinado delito.

Cada pueblo del Imperio Inca tenía su propio quipca mayoc, un "guardián de los nudos", que registraba el censo información sobre la población, los productos y armas del pueblo. Los quipues que registraban esta información eran enviados todos los años, por relevos, a la capital del imperio, Cuzco.

La medida en que el pueblo inca manipuló números y cálculos realizados no está claro. A sacerdote español de nombre José de Acosta, quien vivió entre los incas desde 1571 hasta 1586, describe en su libro, Historia natural y moral de las Indias, los residentes revuelven granos de maíz en el suelo como si manipular las cuentas de un ABACUS. Obviamente algunos se estaba realizando un tipo de cálculo numérico, pero Acosta no entendió el método y fue incapaz de explicar qué se estaba haciendo exactamente.

El Inca pensó en los números en términos muy concretos. El concepto de "dobledad", por ejemplo, no existía para el Inca, y la cuenta de 2 aplicada a muy específicos cosas. Esto se evidencia por el hecho de que el Inca había varias palabras diferentes para dos, que se usaban para distinguir diferentes contextos: los dos objetos que hacen un par, los 2 que provenían de un objeto dividido por la mitad, y el único objeto y su compañero específico que forman un par, por ejemplo. No había una sola palabra que lo abarcara todo. por el estado de tener dos partes.

Es probable que el pueblo inca mantuviera astronómicos registros, un tema de interés para la mayoría de las culturas antiguas, pero no hay evidencia directa de esto.

incírculo Un círculo que se encuentra dentro de un triángulo y toca los tres lados se llama incircunferencia de ese triángulo. El centro de ese círculo se llama el incentro del triángulo, y su radio se llama el interior del radio del triángulo.

Es relativamente sencillo ver que para cualquier triángulo hay precisamente un círculo en el triángulo que toca los tres lados. (Borrar un lado del triángulo y tenga en cuenta que hay infinitos círculos que encajan en la cuña formada por los dos lados restantes. En redibujando el tercer lado, observe que precisamente uno de esos círculos son tangentes a ese borde adicional).

El incentro de un triángulo es un punto que se encuentra misma distancia de cada uno de los tres lados del triángulo. Tenga en cuenta que cualquier punto que es EQUIDISTANTE de sólo dos rectas que se cortan se encuentra en la bisectriz del ángulo de esas líneas (es decir, en una línea que corta el ángulo entre el dos líneas dadas por la mitad). En consecuencia, tenemos que el El incentro de cualquier triángulo se encuentra en cada una de las bisectrices de los ángulos de los vértices del triángulo. Esto establece:

Machine Translated by Google

Las tres mediatrices de los ángulos de un triángulo son CON ACTUAL.

Un excírculo para un triángulo es un círculo que se encuentra fuera del triángulo y es tangente a un lado del triángulo y tangente a las extensiones de los dos lados restantes. Un triángulo tiene tres círculos distintos.

En un contexto más general, si es posible dibujar un círculo dentro de un POLÍGONO tangente a cada lado del polígono, entonces ese círculo se llama incircunferencia del polígono.
Todo polígono regular tiene un incírculo. No hay incírculo para un rectángulo no cuadrado.

Véase también CIRCUNCIRCULO.

inclinación/declinación El ángulo θ entre un rayo que emana del origen de un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS y el eje x positivo medido en sentido antihorario se denomina inclinación del rayo. Un ángulo medido en el sentido de las agujas del reloj se llama su declinación. Estos términos rara vez se usan en las matemáticas de hoy.

Un PLANO que no es horizontal se llama plano inclinado, y el ángulo que forma la línea de mayor pendiente dentro del plano con la horizontal se llama ángulo de inclinación del plano.

principio de inclusión-exclusión Si n(A) denota el número de elementos en un conjunto finito A, entonces el número de elementos en la unión A B de dos conjuntos viene dado por:

$$n(A \quad B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(Contar el número de elementos en cada uno de A y B cuenta dos veces los elementos que pertenecen a ambos. Uno debe compensar esta doble cuenta). De manera similar, el número de elementos en la unión de tres conjuntos viene dado por:

$$n(A \quad B \quad C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C + n(A \cap B \cap C)$$

(Uno puede establecer esto razonando a través de qué elementos se cuentan varias veces, o no diciendo que A B C = (A B) C y aplicando la observación anterior:

$$n((A \quad B) \quad C) = n(A \quad B) + n(C) - n((A \quad B) \cap C) = n(A \quad B) + n(C) - n((A \cap C) \quad (B \cap C))$$

Dos aplicaciones más de la fórmula para la unión de dos dan el resultado.)

En general, un argumento de INDUCCIÓN muestra que el número de elementos en la unión de n conjuntos viene dado por:

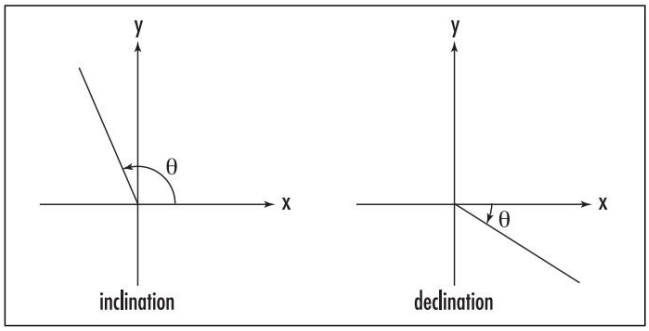
$$n(A1 \quad A2 \quad \dots \quad Ak) = n(A1) + n(A2 + \dots + n(Ak) - n(A1 \cap A2) - n(A1 \cap A3) - \dots - n(Ak-1 \cap Ak) + n(A1 \cap A2 \cap A3) + \dots + n(Ak-2 \cap Ak-1 \cap Ak) + (-1)^k n(A1 \cap A2 \cap \dots \cap Ak)$$

Esta fórmula se denomina principio general de inclusión-exclusión. Se puede interpretar de la siguiente manera:

> El número de elementos de un conjunto finito que poseen al menos una de las k propiedades posibles es igual al número que posee exactamente una propiedad, menos el número que posee exactamente dos propiedades, más el número que posee exactamente tres propiedades, y así sucesivamente, hasta a la cuenta de aquellos elementos que poseen todas las k propiedades.

Este poderoso principio de conteo tiene importantes aplicaciones en la teoría de la PROBABILIDAD .

creciente/decreciente Se dice que UNA SECUENCIA de números {an } es creciente si a1 ≤ a2 ≤ a3 ≤ es decir, cada término de la secuencia es mayor o igual que el que le precede. Se llama estrictamente creciente si a1 < a2 … La sucesión constante 1,1,1,…, por ejemplo, < a3 < se considera creciente.



Ángulos de inclinación y declinación

Machine Translated by Google

Las sucesiones crecientes tienen la agradable propiedad de que su convergencia (o divergencia) es fácil de identificar:

Una secuencia creciente converge si, y solo si, está acotada por arriba.

(Ver SECUENCIA LIGADA y CONVERGENTE.) Esto parece claro geométricamente. Si en la recta numérica real la secuencia de números {an } se mueve constantemente hacia la derecha pero no penetra una barrera en la posición B, entonces los números deben "apilarse" en algún valor límite L ≤ B.
Por el contrario, si una sucesión creciente converge a un valor L, entonces todos los términos de la sucesión se encuentran a la izquierda de L en la recta numérica y, por lo tanto, están acotados arriba por L. (Estas afirmaciones se pueden probar rigurosamente haciendo uso de " integridad" de la recta numérica real a través de la noción de un CORTE DEDEKIND.)

Se dice que una sucesión {an } es decreciente si a1 ≥ a2 ≥ es al …, decir, cada término de la sucesión es menor o a3 ≥ igual que le precede. Se llama estrictamente decreciente si a1 > a2 > a3 >…. De manera similar, se puede mostrar que una secuencia decreciente converge si, y solo si, está acotada por debajo. Una secuencia que es creciente o decreciente se llama monótona.

Se dice que una función de valor real f es creciente en un intervalo si, en ese intervalo, los valores de entrada mayores producen valores de salida mayores (o posiblemente iguales), es decir, si a y b son dos valores en el intervalo con a < b, entonces f(a) ≤ f(b). Si siempre se da el caso de que f(a) < f(b), se dice que la función es estrictamente creciente en el intervalo. El TEOREMA DEL VALOR MEDIO muestra que una función diferenciable f es creciente precisamente en aquellos intervalos donde la DERIVADA es no negativa, f′(x) ≥ 0, y estrictamente creciente si f′(x) > 0.

Se dice que una función f de valor real es decreciente en un intervalo si valores de entrada mayores producen valores de salida de la función más pequeños (o posiblemente iguales), es decir, si a < b, entonces f(a) ≥ f(b). Si siempre ocurre que f(a) > f(b), entonces se dice que la función es estrictamente decreciente en el intervalo. El TEOREMA DEL VALOR MEDIO muestra que una función derivable f es decreciente precisamente en aquellos intervalos para los cuales f′(x) ≤ 0, y estrictamente decreciente si f′(x) < 0.

Una función que es creciente o decreciente en un intervalo se llama monótona en ese intervalo.

Véase también CÁLCULO DIFERENCIAL; GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN; MÁXIMO MÍNIMO.

incremento Un pequeño cambio finito en el valor de una variable o en el valor de una función se llama incremento.

Si la variable es x, entonces un incremento de x generalmente se denota como Δx o δx. Si f es una función de x, entonces el incremento correspondiente de f, denotado Δf, es igual a $\Delta f = f(x + \Delta x) – f(x)$. El LÍMITE del cociente $\Delta f/\Delta x$, a medida que el incremento Δx decrece hasta cero, se denomina DERIVADA de f.
Un incremento negativo a veces se denomina decremento.

Véase también DIFERENCIAL.

integral indefinida Ver ANTIDIFFERENTIATION; INTE CÁLCULO GRAL.

axioma independiente Se dice que un AXIOMA de una teoría matemática es independiente si no puede derivarse de los axiomas restantes de una teoría como una consecuencia lógica. Por ejemplo, la existencia de GEOMETRÍAS NO EUCLIDEAS establece que el famoso POSTULADO PARALELO de Euclides es independiente de sus cuatro postulados restantes. En general, este es el enfoque que toman los matemáticos para mostrar que un axioma A en un sistema matemático es independiente de los axiomas restantes: presente un ejemplo de otra teoría matemática consistente que se haya demostrado que está libre de contradicciones en la que todos los axiomas excepto A se cumplen y para que A es falsa. (En consecuencia, no puede ser el caso de que estos axiomas impliquen que A es verdadero, porque entonces uno tiene un sistema en el que tanto A como no A valen).

Ver también POSTULADOS DE EUCLIDES .

eventos independientes Dos experimentos ejecutados en sucesión se consideran independientes si los resultados obtenidos en un experimento no afectan los resultados obtenidos en el segundo. Por ejemplo, los resultados de lanzar un dado no influyen en los resultados obtenidos al lanzar una moneda más tarde. Estas dos acciones son independientes.

En la teoría de la PROBABILIDAD decimos que dos EVENTOS A y B son independientes si el conocimiento de que A ha ocurrido no influye en la probabilidad de que B ocurra a continuación. Por ejemplo, en dos lanzamientos de dados, un número par en el primer lanzamiento y un 6 en el segundo son eventos independientes: las posibilidades de sacar un seis son 1/6, sin importar el resultado del primer lanzamiento.

Dos eventos que no son independientes se llaman dependientes. Por ejemplo, el evento “Sally está usando un

Machine Translated by Google

impermeable" es probable que dependa del evento "está lloviendo". La PROBABILIDAD CONDICIONAL se utiliza para analizar eventos dependientes.

Los experimentos que implican sacar objetos de una fuente finita, como bolas de una bolsa o cartas de una baraja, sin reemplazar los objetos extraídos, a menudo producen eventos dependientes. Por ejemplo, los eventos "la primera carta extraída de una baraja es roja" y "la segunda carta extraída es roja" son dependientes: la probabilidad de que la segunda carta seleccionada sea del color deseado podría ser 26/51 o 25 /51 , dependiendo de si la primera carta extraída es negra o roja.

Un estudio cuidadoso de la PROBABILIDAD muestra que dos eventos independientes A y B satisfacen la relación de probabilidad:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$$

Los matemáticos toman esta relación como la definición de dos eventos A y B siendo independientes.

ecuación indeterminada Una ecuación, o un SISTEMA DE ECUACIONES, con un número infinito de soluciones se llama indeterminada. Por ejemplo, la ecuación:

$$x + 2y = 5$$

es indeterminado (para cada número real t existe la solución x = 5 – 2t y y = t), como lo es el sistema de dos ecuaciones:

$$a + b + c = 1$$
$$2a + 3b – c = 0$$

en las variables a, b y c. (Todas las ternas de la forma (a,b,c) = $2 – \frac{1 – 4t}{3}$, $t, \frac{1 – 4t}{3}, t)$ son soluciones.)

La ecuación única $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ no es indeterminada: tiene la única solución (real) x = y = z = w = 0.

Ver también GRADOS DE LIBERTAD.

índice (plural, índices) Un número que indica un lugar o describe la característica o la naturaleza de una función se llama índice. Por ejemplo, una SECUENCIA de números se puede denotar {an }, con el índice n denotando el lugar en la secuencia. (Así , a7 , por ejemplo, representaría el séptimo número en la lista). Un EXPONENTE a veces se llama índice. Para tiene un ejemplo, se podría decir que la función f(x) = $\sqrt[5]{x}$ índice 5 5 para indicar que las cantidades se elevan a la quinta potencia. La función radical g(x) = $\sqrt[3]{x}$, por ejemplo, tiene índice 3, y la función logarítmica h(x) = log10 x tiene índice 10.

En estadística y negocios, un índice es una cifra utilizada para mostrar la variación de alguna cantidad durante un período de tiempo, generalmente estandarizada en relación con algún valor base. Por ejemplo, se utiliza un índice de precios minoristas para medir los cambios en el costo de los artículos para el hogar. Para el año base, el índice generalmente se establece en 100. Si, por ejemplo, el costo del detergente para platos en el año base es de $1,60 y el precio aumenta a $1,76 y a $2,00 en los dos años siguientes, entonces el índice de precios de esta partida sería 100, 110 y 125 en cada uno de esos años, respectivamente.

Es posible diseñar un índice que proporcione una medida general del valor de más de un producto simultáneamente. Por ejemplo, el índice Dow Jones de la Bolsa de Valores de Nueva York es un indicador del valor de una selección representativa de acciones industriales, de transporte y de servicios públicos.

Matemáticas indias Todo el curso de las matemáticas occidentales se vio profundamente afectado por un solo invento indio, el del sistema decimal de valor posicional. Que cada número posible pueda expresarse a través de un conjunto de solo 10 símbolos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, haciendo un uso cuidadoso del lugar de cada símbolo, parece tal cosa. simple noción hoy en día que es difícil apreciar su profunda importancia. Este elegante sistema de notación proporcionó los medios para que los académicos indios realizaran cálculos aritméticos complicados con relativa facilidad, lo que a su vez condujo a avances significativos en las técnicas numéricas, los métodos de aproximación y la teoría de la aritmética. Solo cuando otras culturas adoptaron el sistema decimal de valor posicional de la India pudieron lograr las mismas hazañas matemáticas que esta cultura ya había desarrollado.

La evidencia fechada más antigua de actividad matemática idad en el subcontinente indio se remonta a la civilización del Indo de 2500 a. C. Las pesas de bronce y las varillas graduadas (reglas) de la época muestran que estas personas ya trabajaban con un sistema decimal. La gente del Indo trabajaba con una unidad básica de 1,32 pulgadas de largo (hoy llamada "pulgada del Indo"), 10 de las cuales hacen su versión de un "pie". Las excavaciones muestran que los pesos y las varillas graduadas se utilizaron ampliamente en la construcción.

Machine Translated by Google

Los registros escritos más antiguos de la cultura india son los textos religiosos de los Vedas, que datan entre 1500 a. C. y 800 a. C. Aunque no tienen contenido matemático, los apéndices de los textos dan reglas específicas para construir altares, mostrando una comprensión profunda de los principios básicos de la geometría. Las primeras versiones de los dígitos del 0 al 9 se utilizaron en este momento.

Para el año 600 EC, la religión védica había entrado en declive y el jainismo pasó a primer plano. Durante este período, las matemáticas se vieron impulsadas por las necesidades de la religión y sus demandas de cuidadosas observaciones astronómicas para determinar con precisión los tiempos exactos de las celebraciones religiosas y el desarrollo de un calendario preciso. El sistema de representación decimal ya estaba completamente desarrollado y los académicos podían hacer cálculos precisos y sorprendentemente exactos. El matemático A– RYABHATA (ca. 500 EC), por ejemplo, había desarrollado una teoría de TRIGONOMETRÍA para ayudar en los cálculos astronómicos, había desarrollado métodos para extraer raíces cuadradas, evaluó π con un alto grado de precisión y fue capaz de encontrar soluciones enteras a una gran clase de ecuaciones que surgieron de las teorías astronómicas.

Un texto escrito de este período fue descubierto en 1881 en la ciudad de Bakhshali, ahora en Pakistán.
Escrito en corteza de abedul, el manuscrito de Bakhshali muestra que los matemáticos también se sentían cómodos con las fracciones, las manipulaciones algebraicas básicas (utilizaban un punto para representar una cantidad desconocida) y fórmulas de aproximación sofisticadas. Por ejemplo, el manuscrito describe, en palabras, la siguiente aproximación para la raíz cuadrada de un número N:

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \cdots}}$$

Aquí a^2 es el cuadrado perfecto más grande menor que N y $b = N - a^2$. Por ejemplo, tenemos:

$$\sqrt{250} = \sqrt{49 + 1} \approx 7 + \frac{1}{14 + \frac{1}{14 + \cdots}} = 7.071067821$$

que es correcto con siete decimales.

Se formaron dos centros de investigación matemática en la India durante la era del jainismo, ambos observatorios astronómicos. A– ryabhata dirigió el primer centro en Kusumapura en el noreste del subcontinente indio, y el matemático Varahamihira, quien también hizo contribuciones a la astronomía y la trigonometría, dirigió el segundo centro en Ujjain, también en el norte.

Varahamihira fue sucedido por el matemático del siglo VII BRAHMAGUPTA, quien, en su famoso trabajo Brahmasphutasiddhanta (La apertura del universo), introdujo y explicó la aritmética de los números no positivos. Fue el primer matemático de la historia en dar al cero el estatus de número, definiéndolo como el resultado de restar una cantidad de sí mismo.
El trabajo de Brahmagupta también incluye una fórmula para el área de un cuadrilátero cíclico en términos de sus lados (hoy denominada FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA) y presenta métodos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, así como sistemas de ecuaciones. Brahmagupta también desarrolló sofisticadas técnicas de interpolación para calcular valores de seno en trigonometría.

Durante los siguientes 200 años, los eruditos indios trabajaron para refinar más métodos de trigonometría y técnicas de cálculo astronómico. El matemático BH – ASKARA II del siglo XII hizo avances en teoría de números, álgebra, combinatoria y astronomía, y escribió un texto completo que resume el estado de las matemáticas y la astronomía en la India en su época. Poco después, otros eruditos indios desarrollaron aún más estas ideas. Los matemáticos jaina también aclararon las reglas estándar de EXPONENTES y manipularon los exponentes de una manera que sugiere hoy que también estaban familiarizados con los principios básicos de los LOGARITMOS.

El erudito del siglo XIV MADHAVA OF SANGAMA GRAMMA hizo avances significativos en el ANÁLISIS. Produjo las expansiones en series infinitas de funciones trigonométricas y trigonométricas inversas (hoy llamadas SERIE DE TAY LOR), descubrió el TEOREMA DEL BINOMIO e incluso produjo la SERIE DE GREGORY para π, que usó para aproximar su valor en un grado considerablemente preciso.

Durante el primer milenio, India tuvo muy poco contacto con las culturas de Occidente. Sin embargo, las noticias sobre el sistema de representación decimal lograron extenderse a otros países con relativa rapidez. Un manuscrito escrito en Siria en el año 662 analiza el nuevo método de cálculo, y hay pruebas de que el sistema decimal se estaba utilizando en Camboya y otros países asiáticos poco después. Hacia el siglo IX,

Machine Translated by Google

el sistema decimal era de uso común en el mundo islámico, y desde allí se transmitió rápidamente a Europa. Los eruditos árabes mantuvieron un gran interés en el trabajo de los matemáticos indios durante los siglos siguientes y desempeñaron un papel activo en la conservación y traducción de muchos textos indios.

Véase también MATEMÁTICAS ÁRABES; BASE DE UN NÚMERO SISTEMA.

prueba indirecta (prueba por contradicción, reductio ad absurdum) La mayoría de las afirmaciones hechas en matemáticas son declaraciones de la forma:

> Si la premisa A es verdadera, entonces la conclusión B es verdadera.

Una prueba indirecta de tal afirmación intenta establecer la validez de la afirmación suponiendo que la premisa A es verdadera y mostrando, en consecuencia, que la conclusión B no puede ser falsa. Uno hace esto explorando las consecuencias lógicas de asumir A y "no B" hasta que, en algún punto, se llega a una contradicción (como, por ejemplo, 1 + 1 = 3). Basados en la creencia de que las matemáticas deben estar libres de absurdos, los matemáticos generalmente aceptan este enfoque como suficiente para establecer la validez de B.

Como ejemplo demostramos: para un número natural n, es par, si n^2 entonces n es par. Basamos la prueba en hechos conocidos sobre números pares e impares, y las manipulaciones algebraicas estándar.

> Demostración: suponer que n^2 es par, y suponer, a n al contrario, que n no lo es.
>
> Entonces debe darse el caso de que n sea impar. En consecuencia, n es uno más que un múltiplo de 2 y se puede escribir en la forma 2k + 1, para algún número k.
>
> Esto significa que $(2k + 1)^2$ viene dado por $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ y también lo es uno más que un múltiplo de 2.
>
> Concluimos que n es tanto par como impar, claramente una contradicción.
>
> No puede ser el caso, entonces, que n sea impar. Por lo tanto, debe ser uniforme.

Observe en esta prueba que asumimos que la premisa A es verdadera y llegamos a la contradicción de que "no A" también se cumple. Una prueba indirecta que llega a una contradicción de este tipo suele llamarse "demostración usando el contrapositivo": establecimos la validez de "A implica B" demostrando que se cumple el CONTRAPOSITIVO "no B implica no A". LA PRUEBA DE LA INFINITUD DE LOS PRIMOS DE EUCLIDES es un ejemplo de una prueba indirecta que no se basa en la contrapositiva. EUCLID (300-260 a. C.) fue el primer matemático que empleó ampliamente la técnica de la prueba indirecta.

UNA PRUEBA DIRECTA intenta establecer la validez de una proposición "si A, entonces B" suponiendo que la premisa A es verdadera y siguiendo sus consecuencias lógicas hasta que se establezca la afirmación B. No todas las proposiciones, sin embargo, son susceptibles de un enfoque directo. Por ejemplo, dado que un número n al cuadrado n^2 es par (es decir, $n^2 = 2m$, digamos) no es inmediato cómo se debe proceder para establecer directamente que n es consecuentemente par.

Cualquier prueba indirecta se basa en la suposición de que una declaración que no puede ser falsa debe ser verdadera. Algunos filósofos y matemáticos que estudian las LEYES DEL PENSAMIENTO cuestionan seriamente esta suposición.

Véase también CONTRADICCIÓN; INDUCTIVO-DEDUCTIVO RAZONAMIENTO; PRUEBA; QED; TEOREMA.

inducción (inducción completa, inducción finita, inducción matemática) El método de prueba conocido como inducción matemática ha sido utilizado por los estudiosos desde los primeros tiempos, pero no fue hasta 1838, gracias al trabajo del lógico y matemático inglés AUGUSTUS DE MORGAN , que el principio fue debidamente identificado y descrito. En un contexto formal, el principio de inducción matemática afirma:

> Si un conjunto S de números satisface las siguientes dos propiedades:
>
> i. El número 1 pertenece al S. ii. Si un número k pertenece a S, también lo hace su sucesor k + 1.
>
> entonces debe darse el caso de que S contenga todos los números naturales 1, 2, 3,…

(Este principio aparece como un AXIOMA en el conjunto de postulados de GIUSEPPE PEANO para la construcción de los números naturales). A menudo, el conjunto S se toma como un conjunto de números naturales n para los cuales alguna propiedad o fórmula P(n) es verdadera: S = {n: P(n) se cumple}.

Para ilustrar el principio de inducción, probaremos que, para todo número natural n, tenemos que $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ es igual a $n(n + 1)$. Sea P(n) el

Machine Translated by Google

esta afirmación y el conjunto S como el conjunto de todos los números naturales para los cuales esta afirmación es verdadera:

$$P(n): 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)\,2^{1-}\quad S = \{n: \text{la fórmula } P(n) \text{ es verdadera}\}$$

Nuestro objetivo es mostrar que todos los números naturales pertenecen a S (es decir, que P(n) es cierto para todos los números naturales n). Debemos establecer dos cosas:

1. El número 1 pertenece a S.

Ingresar n = 1 en la fórmula produce el enunciado evidentemente verdadero $1 = \times 1 \times (1 + 1)$. Entonces $P(1)$ es verdadero y $1 \quad S$.

2. Suponga que el número k pertenece a S. Es decir, supongamos que la fórmula

$$1 + 2 + \ldots + k = k(k + 1)\,2^{1-}$$

es verdad. ¿Se sigue necesariamente que la fórmula correspondiente para k + 1 es válida? Es decir, ¿podemos entonces deducir, bajo este supuesto, que

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = (k + 1)((k + 1)\,2^{1-} + 1)$$

¿sostendrá?

Para lograr esto, comience con la ecuación P(k), que se supone válida, y agregue la cantidad k + 1 a ambos lados.
Esto da:

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = k(k + 1)\,2^{1-} + (k + 1)$$

Después de reorganizar y reagrupar los términos de la derecha, se lee:

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)\,2^{1-}$$

que es el enunciado P(k + 1). Por el principio de inducción matemática, ahora se sigue que el conjunto S contiene todos los números naturales, es decir, P(n) es una fórmula válida para todos los valores de n.

El principio de inducción matemática es una técnica poderosa que puede establecer la validez de un número infinito de afirmaciones de una sola vez. Como se ilustra arriba, es particularmente útil para establecer ing fórmulas y ecuaciones que involucran los números naturales. Sin embargo, una desventaja es que este método de prueba no da ninguna indicación de cuál debería ser la fórmula apropiada a probar: el método inductivo de prueba no ofrece ninguna idea, por ejemplo, de por qué la fórmula para la suma de los primeros n contar números es $1-\ n(n + 1)$. Uno debe llegar a los candidatos para las fórmulas 2^{1-} por otros medios.

El proceso inductivo a menudo se compara con derribar una cadena de fichas de dominó. Para derribar con éxito una fila de fichas de dominó en pie, uno debe:

1. Derriba la primera ficha de dominó 2.
Asegúrate de que las fichas de dominó estén debidamente espaciadas de modo que cuando caiga una de ellas, seguramente derribará la siguiente

Si uno puede establecer que estas dos propiedades se mantienen, entonces todas las fichas de dominó en una cadena (incluso una infinitamente larga) caerán.

A pesar de la elegancia y la simplicidad del principio, aún se debe tener cuidado al utilizar el principio de inducción matemática. El siguiente argumento divertido, por ejemplo, ilustra lo que puede salir mal:

Reclamo: todos los caballos son del mismo color.

Lo "probamos" de la siguiente manera: Sea S el conjunto de todos los números naturales para los cuales el siguiente enunciado es verdadero.

P(n): si hay n caballos en un campo, entonces todos los caballos en ese campo son del mismo color.

Claramente, P(1) es cierto: si solo un caballo está parado en un campo, entonces todos los caballos en ese campo son del mismo color.
Ahora suponga, a pesar de su absurdo, que P(k) es verdadero, es decir, cualquier k caballos en un campo debe ser del mismo color. Ahora considere k+1 caballos en un campo. Quita un caballo, Chester, por ejemplo. Esto deja k caballos en el campo, los cuales, según nuestra suposición, deben ser todos del mismo color.
Devuelve a Chester al campo y elimina un caballo diferente. Esto nuevamente deja k caballos en el campo, los cuales, por suposición, deben ser todos del mismo color. Esto muestra que Chester es del mismo color que los primeros k caballos y, de hecho, todos los k+1 caballos son del mismo color. Hemos establecido , a partir de P(k), que sigue P(k+1). Por el principio de inducción matemática, ahora se sigue que P(n) es verdadero, sin importar el valor de n. En particular, todos los caballos del mundo son del mismo color.

Machine Translated by Google

Para examinar este argumento, tenga en cuenta que, de hecho, P(1) es válido, y es cierto que P(k) implica P(k+1), para casi todos los valores de k. La falla en el argumento anterior es que aunque P(2) establece P(3), y P(3) establece P(4), y así sucesivamente, no es el caso que P(1) establezca P(2): sacar un caballo de un campo que contiene solo dos caballos no establece, lamentablemente, que ambos caballos sean del mismo color. En nuestra cadena de fichas de dominó, todas menos las dos primeras fichas de dominó están debidamente espaciadas: la primera ficha de dominó no derriba a la segunda durante su caída y la cadena permanece en pie.
Esto aclara que siempre se debe tener cuidado de que cualquier argumento presentado en una prueba por inducción sea válido para todos los valores de k.

Véase también PRUEBA; SUMAS DE POTENCIAS.

razonamiento inductivo Ver DEDUCTIVO/INDUCTIVO RAZONAMIENTO.

desigualdad Una afirmación matemática de que una cantidad o expresión es mayor o menor que otra se llama desigualdad. Se utilizan los siguientes símbolos:

a > b, a es mayor que ba <
b, a es menor que ba ≥
b, a es mayor o igual que ba ≤ b, a es
menor o igual que b

Las desigualdades satisfacen una serie de PROPIEDADES DE ORDEN.

Una desigualdad se llama cerrada o incondicional si se cumple para todos los valores de las variables, si las hay, que aparecen en la ecuación. Por ejemplo, las desigualdades $3 \le 5$, $x^2 + 1 > x$, y $5 + y^2 \ge 4y$ son desigualdades cerradas porque siempre son verdaderas. Las desigualdades que no son cerradas se llaman abiertas o condicionales. El conjunto de valores de las variables que aparecen en la desigualdad que hacen que el enunciado sea verdadero se llama conjunto solución de la desigualdad. Por ejemplo, la desigualdad abierta $2x + 1 > 7$ tiene como conjunto de solución el conjunto de todos los números reales mayores que 3. El conjunto solución de la desigualdad abierta $a^2 + b^2 < 0$ es el CONJUNTO VACIO.

Las desigualdades abiertas se pueden resolver de la misma manera que las ecuaciones. Como muestran las propiedades del orden, se puede sumar o restar la misma cantidad a ambos lados de la desigualdad y conservar la desigualdad, o se puede multiplicar la desigualdad por una cantidad positiva. Multiplicar por una cantidad negativa cambia el sentido de la desigualdad (Por ejemplo, si a < b, al restar la cantidad a + b de ambos lados se obtiene –b < –a. Esto muestra que el efecto de multiplicar por –1 es invertir el sentido de la desigualdad). Por ejemplo, uno puede resolver la desigualdad $2x + 1 > 7$, como sigue:

$$2x + 1 > 7$$
$$2x > 6$$
$$\frac{1}{2}(2x) > \frac{1}{2}(6)$$
$$x > 3$$

de hecho, dando el conjunto solución {x:x > 3}.

Vale la pena señalar que si a · b > 0, podemos estar seguros de que a y b son positivos o negativos. Si, por el contrario, a · b < 0, entonces podemos estar seguros de que a y b tienen signos opuestos. Estas observaciones son esenciales para resolver desigualdades que involucran una sola variable elevada a la segunda potencia. Por ejemplo, para resolver la desigualdad abierta $x^2 + x – 2 > 0$, factorice el CUADRÁTICO para obtener $(x + 1)(x – 2) > 0$ y examine los dos escenarios posibles. Tanto x + 1 como x – 2 son mayores que cero (lo que significa que x debe ser mayor que 2), o x + 1 y x – 2 son menores que cero (lo que significa que x debe ser menor que –1). Así, el conjunto solución de la desigualdad es el conjunto de todos los números reales x con x > 2 o x < –1.

Una sola desigualdad en dos variables define una región en el plano. Por ejemplo, la desigualdad $2x + y \ge 3$ se satisface con los puntos (0,3), (5,0) y (2,2), por ejemplo. En este ejemplo, el conjunto de soluciones completo es el MEDIO PLANO cerrado que se encuentra sobre la línea y = –2x + 3 en el plano.

Hay una serie de desigualdades estándar en matemáticas:

Desigualdad triangular: para cualquier triángulo con lados de longitud a, b y c tenemos: a + b > c.
Desigualdad media aritmético-geométrica: Para números no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tenemos:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Desigualdad de Bernoulli: Para cualquier número real x mayor que 1 y entero positivo n:

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

Machine Translated by Google

(Esto se puede probar truncando el MACLAURIN SERIE:

$$1 - (1 + x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2 - 1 + n(n-1)(n-2)x^3 + \ldots,$$

También se puede demostrar que la desigualdad también se cumple para $-1 < x < 0$).

Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Para dos VECTORES a y b cualesquiera , su PRODUCTO DOT satisface:

$$|a \cdot b| \le |a| \times |b|$$

Así, para cualesquiera dos listas de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Desigualdad del producto de Weierstrass: Para cualquier lista de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con $0 \le a_k \le 1$ para todo k, tenemos:

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \ge 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

(Esto se puede probar por INDUCCIÓN sobre el número de elementos en la lista).

Desigualdad de Napier: Para cualesquiera dos números reales positivos a y b tenemos:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

Desigualdades exponenciales: Para un número real positivo x y un número real c, tenemos:

$$c^x < 1 + c(x-1) \text{ si } 0 < c < 1$$
$$c^x > 1 + c(x-1) \text{ si } c > 1$$

(Esta es una generalización de la desigualdad de Bernoulli).

Desigualdad isoperimétrica: Para cualquier figura geométrica cerrada en el plano con perímetro P, su área A es menor que el área de un círculo del mismo perímetro:

$$A \le \frac{P^2}{4\pi}$$

La igualdad se cumple si, y solo si, esa figura es un círculo.

Una afirmación matemática de que dos cantidades o expresiones nunca son iguales se llama inecuación. Por ejemplo, el enunciado $3 \neq 5$ es una inecuación.

Los matemáticos y los físicos a menudo escriben $a >> b$ si a es significativamente mayor que b y $a << b$ es a es significativamente menor. Por ejemplo, $n \approx n$ si $n >> 0$. $\sqrt{n} + 100n^2$ Hay un chiste entre los matemáticos que usan el símbolo ≤≥ para significar “menor que, mayor que o posiblemente igual a” cuando uno no está seguro de la respuesta numérica a un problema.

Véase también MEDIA ARITMÉTICA-GEOMÉTRICA DESIGUALIDAD; PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO; DESIGUALDAD TRIANGULAR.

inferencia En lógica, el proceso general de desarrollar un ARGUMENTO para sacar una conclusión de un conjunto de premisas se llama inferencia. El proceso puede ser deductivo o inductivo.

En estadística, la inferencia es el proceso de llegar a una conclusión sobre una población basada en el estudio de una muestra. A veces, la conclusión misma se llama inferencia. La estadística inferencial es la ciencia de hacer inferencias y predicciones sobre una población con base en información numérica recopilada de una muestra.

Véase también RAZONAMIENTO DEDUCTIVO/INDUCTIVO ; POBLACIÓN Y MUESTRA; ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

producto infinito El producto de un número infinito de factores, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots$, se llama producto infinito.

El n-ésimo número en el producto se denomina n -ésimo término del producto, y el producto de los primeros n términos, $P_n = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$ se denomina n- ésimo producto parcial. En 1812 CARL FRIEDRICH GAUSS introdujo la notación

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i$$ para un producto infinito (y $$\prod_{i=1}^{n} a_i$$ por el enésimo producto parcial).

Un producto infinito puede tener un valor de cero ($1 \times 1 - 1 - 1 \times 1 \times \ldots$, por ejemplo), podría ser infinito en valor 2 4 ($1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots$, por ejemplo), o podría oscilar en valor ($1 \times (-1) \times 1 \times (-1) \times \ldots$, por ejemplo). Solo si los productos parciales P_n se acercan a un valor L finito distinto de cero cuando $n \to \infty$ se dice que el producto infinito converge (al valor L). De lo contrario, el producto infinito diverge. ∏ Por ejemplo, el producto infinito

$$\prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$$ tiene n producto parcial:

Machine Translated by Google

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\,\frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

1– que se aproxima al valor como n → ∞. Así podemos 2

escribir $\prod_{i=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{2}$.

Tomando el LOGARITMO, vemos que un infinito

producto con términos positivos $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si, y

solo si, la SERIE $\sum_{i=1}^{\infty} \ln a_i$ converge (Esta es la razón por

los matemáticos no consideran la convergencia a cero como una forma válida de convergencia para un producto infinito: el

valor de la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \ln a_i$ sería entonces –∞) Mathe

Los maticistas han demostrado que una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge

absolutamente exactamente si $\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1 + |a_i|)\right)$ converge

En 1656, el matemático inglés JOHN WALLIS descubrió la siguiente representación notable para $\frac{\pi}{2}$ como un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\cdots$$

Esta expresión se llama hoy PRODUCTO DE WALLIS .

Véase también CONVERGENCIA ABSOLUTA; FUNCIÓN ZETA.

infinitesimal Una cantidad positiva, supuestamente infinitamente pequeña pero que no es cero, se llama infinitesimal.
La existencia abstracta de tales cantidades desempeñó un papel importante, aunque problemático, en el desarrollo inicial del CÁLCULO. Las dificultades teóricas a las que se enfrentaron se volvieron más tarde discutibles cuando AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) introdujo la noción de LÍMITE.

El trabajo de Cauchy puso el cálculo en un marco teórico sólido y eliminó la necesidad de hablar en términos de infinitesimales. La noción ahora se considera obsoleta.

(Aunque los matemáticos han desarrollado recientemente una teoría de análisis no estándar que, en cierto sentido, incluye un concepto válido de infinitesimal, después de todo).

Véase también FLUJO; HISTORIA DEL CÁLCULO (ensayo).

infinito En el uso común, la palabra infinito se usa para denotar algo que es ilimitado, ilimitado y sin fin. Por ejemplo, el conjunto de números de conteo 1, 2, 3,... es ilimitado (después de cualquier número de conteo siempre hay otro), y se dice que el conjunto de estos números es infinito. En geometría, una línea recta generalmente se percibe como sin fin, por lo que tiene una extensión infinita. En el mundo físico, sin embargo, no hay un ejemplo claro de cantidad infinita (o, si lo hubiera, nosotros, como humanos, nunca seríamos capaces de percibirlo por completo). Los físicos han llegado a creer, por ejemplo, que solo hay un número finito de átomos en el universo (del orden de 1087 átomos) y que el universo tiene una forma cerrada y no una extensión infinita. Si este es realmente el caso, entonces nunca sería posible dibujar una línea infinita (no hay suficientes átomos para la tinta), y si el universo está realmente acotado, la línea eventualmente puede volver sobre sí misma. No obstante, el infinito es un concepto abstracto que sentimos que podemos, en algún nivel, comprender. Sin embargo, trae consigo muchas dificultades paradójicas, como lo demuestran las PARADOJAS DE ZENO , EL HOTEL INFINITO DE HILBERT y la PARADOJA DE TRISTRAM SHANDY, por ejemplo.

La noción de algo que es ilimitado surge en matemáticas en una serie de escenarios variados. Por ejemplo:

1. Límites: en 1655, el matemático inglés John Wallis introdujo el símbolo ∞ como abreviatura de la frase "volviéndose grande y más positivo". Esta notación se usa hoy, en particular, en el estudio de los LÍMITES.

Por ejemplo, el enunciado $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 10n - 2}{n^2 + 2} = 5$ es

debe leerse: “la cantidad $\frac{2n^3 + 10n - 2}{n^2 + 2}$ se acerca a la

2 valor 5 cuando n se vuelve grande y positivo.” La ecuación $\frac{2x^3 - 3}{x} = -x$ dice: “la función se convierte en

$\lim_{n\to\infty}$ grande y negativo cuando x se vuelve grande y positivo.” Esto significa que para cualquier número negativo –M a uno le importa

Machine Translated by Google

para elegir, uno siempre puede encontrar un valor mayor de x cual $\frac{\text{para}x2\ 3}{x}$ es, y permanece, menor que –M para siempre valores mayores de x.

2. Geometría: en el TEOREMA DE DESARGUES , el matemático francés GIRARD DESARGUES (1591–1661) encontró conveniente considerar que las líneas paralelas se cortan en algún punto del infinito. Así, en la teoría de la GEOMETRÍA PROYECTIVA, se da significado y contexto a la noción de puntos “infinitamente lejanos”.

3. Teoría de conjuntos: el astrónomo y físico italiano GALILEO GALILEI (1564–1642) observó que cada número de conteo se puede relacionar con su cuadrado, lo que muestra en cierto sentido que el conjunto infinito de números de conteo no es más infinito que el subconjunto de números cuadrados:

12345 6 ...

bb bbbb

1 4 9 16 25 36 ...

En el siglo XIX, el algebrista británico AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871) y matemáticos alemanes JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916) y GEORG CANTOR (1845-1918) se dio cuenta de que esta es una propiedad común de los conjuntos infinitos y que es apropiado usar esta propiedad como la definición de lo que significa que un conjunto sea infinito:

> Un conjunto es infinito si sus elementos pueden emparejarse, sin repetición, con los elementos de un subconjunto propio de sí mismo.

Esta definición tiene la ventaja de que aclara lo que significa que un conjunto sea finito.

> Un conjunto es finito si no es infinito.

(Se debe hacer un comentario sobre este punto. Aunque todos tenemos una clara comprensión intuitiva de lo que significa que un conjunto sea FINITO, no es nada fácil proporcionar una descripción matemática directa de este concepto. Sin embargo, es posible para mostrar que ningún conjunto de la forma {1,2,3,…,n} es infinito, es decir, no hay forma de emparejar los elementos de este conjunto con los elementos de un subconjunto propio de sí mismo sin producir repetición. Esto se hace con un argumento de INDUCCIÓN en n. Uno puede usar esto como un vínculo entre este enfoque indirecto y nuestro intuitivo bajo de pie.) Cantor fue más allá al desarrollar una asombrosa teoría de la CARDINALIDAD que muestra, entre otras cosas, que hay muchos tipos diferentes de conjuntos infinitos, algunos merecedores de ser llamados "más infinitos" que otros.

La noción de infinito ha sido estudiada y utilizada desde la antigüedad. ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) utilizó la noción de una cantidad infinitamente pequeña para desarrollar fórmulas para las áreas y volúmenes de figuras curvas y sólidos. (En un sentido vago, uno puede ver un círculo, por ejemplo, como un polígono regular con infinitos lados, todos infinitamente cortos en longitud. Sin embargo, es mejor ver el círculo como la figura LÍMITE de una secuencia de polígonos regulares .) El geómetra EUCLID (ca. 300–260 a. C.) demostró que el conjunto de números PRIMOS es infinito, y ZENO DE ELEA (ca. 490–425 a. C.) contempló el infinito en sus estudios del tiempo, el espacio y el movimiento.

Aunque los eruditos de la antigüedad griega utilizaron el infinito, desconfiaban de él. Euclides, por ejemplo, hizo grandes esfuerzos para expresar las cosas de una manera que nunca mencionara una cantidad que en realidad era infinita. Por ejemplo, demostró que a partir de cualquier colección finita de números primos, siempre se puede construir uno más (en lugar de afirmar que el conjunto de números primos es infinito), y en su famoso trabajo LOS ELEMENTOS, nunca mencionó líneas que continuar indefinidamente; solo habló de extender más los segmentos de línea si fuera n (Este sutil giro de la frase demostró ser importante para GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN con su invención de la GEOMETRÍA ESFÉRICA en el siglo XIX) . términos de potencialidad: dada una parte finita, siempre se puede dar más. Este punto de vista se mantuvo firme durante casi dos milenios. El trabajo de Cantor sobre el infinito real, inspirado en las ideas iniciales de Dedekind y De Morgan, se consideró revolucionario en su época.

inflexión (inflexión) Véase CÓNCAVO ARRIBA/CÓNCAVO ABAJO.

punto de inflexión (punto de inflexión) Un punto en una curva en el que la línea tangente a la curva cambia de girar en un sentido (sentido horario o antihorario) a girar en el sentido opuesto. La concavidad de la curva cambia en tal punto.

Véase también CÓNCAVO ARRIBA/CÓNCAVO ABAJO.

Machine Translated by Google

teoría de la información La rama de la teoría de la PROBABILIDAD que se ocupa de la transmisión, procesamiento y la verificación de los mensajes enviados electrónicamente se denomina teoría de la información. El campo fue establecido en 1948 por matemático estadounidense CLAUDE EDWARD SHANNON, quien demostró por primera vez que es posible codificar todo tipo de información (palabras, sonidos, imágenes) en simples secuencias de 0 y 1 bits que luego se pueden transmitir a lo largo de un alambre como pulsos. (Hasta entonces, los científicos pensaban que sería necesario transmitir ondas electromagnéticas a lo largo de los cables.) Para ajustar el ruido erróneo que a menudo se transmitido junto con el mensaje, los matemáticos Desde entonces, han desarrollado técnicas de probabilidad que determinan la probabilidad de que el mensaje recibido sea gratuito. de errores A lo largo de las décadas, los matemáticos también han Desarrolló controles de redundancia eficientes para ayudar a detectar y corrige los errores. Estas técnicas son mucho más eficientes. que simplemente repetir el mensaje para comparar.

La teoría de la información también se utiliza para medir la cantidad de información que una señal de cualquier tipo podría contener. Transmitir y recibir correctamente un solo letra del alfabeto, es decir, una de las 26 letras, contiene más información, por ejemplo, que el recibo de un solo dígito binario, 0 o 1. Los matemáticos usan logaritmos para medir el contenido de la información y decir que el recibo de una letra del alfabeto contiene $\log_2 26 \approx 4.7$ tanta información como la recepción de un dígito binario. (Tenemos $\frac{\text{registro}_2 2}{\text{registro}_2 2} = 1$.) Esto supone que cada letra del alfabeto tiene la misma probabilidad de ocurrir. En En general, si la probabilidad de que se envíe la letra a es p_1, la letra b es p_2, y así sucesivamente, entonces la medida de el contenido informativo viene dado por:

$$-p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - \ldots - p_{26} \log_2 p_{26}$$

(Esto concuerda con el valor anterior de 4.7 calculado cuando cada probabilidad pi tiene un valor de 1/26.) Esta cantidad es una medida de la entropía del conjunto de datos inicial.

El campo de la teoría de la información tiene aplicaciones obvias para trabajar en telegrafía, transmisión de radio y la como, pero también se ha utilizado recientemente para analizar humanos habla, en el estudio de los idiomas y en la cibernética.

valor instantáneo El valor de una cantidad variable, como la VELOCIDAD, en un instante particular en el tiempo es llamado su valor instantáneo. Un valor instantáneo es un DERIVADO.

entero (número dirigido, número con signo) Cualquiera de los NÚMEROS ENTEROS positivos o negativos , o CERO, se llama un número entero: …–3,–2,–1,0,1,2,3,… Más precisamente, una vez los NÚMEROS NATURALES han sido definidos a través de PEANO'S POSTULADOS, digamos, uno puede definir un número entero como cualquier cantidad que puede expresarse como suma o diferencia de dos números naturales. (Por ejemplo, el número -5 puede considerarse, formalmente, como el par de números naturales 3 y 8 escritos en la forma 3–8. se puede definir igualmente bien por el par 1-6 o el par 12-17, por ejemplo.) La diferencia de dos enteros cualesquiera es siempre otro entero, que constituye un ANILLO matemático. El conjunto de números enteros se denota Z (de la palabra alemana Zahlen para "números"). matemático alemán GEORG CANTOR (1845-1918) demostró que el conjunto de números enteros es CONTABLE y también la CARDINALIDAD $\aleph_0$.

La SERIE TAYLOR de $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ tiene el números enteros que aparecen como coeficientes:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$$

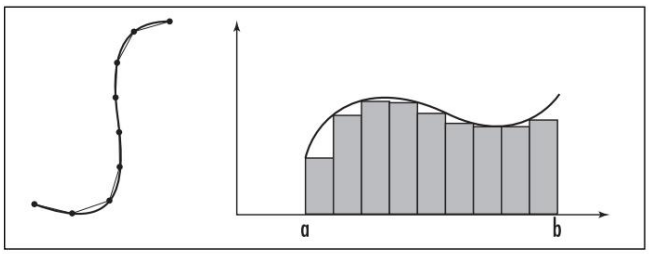
(Esta serie es válida para $-1 < x < 1$.) Esto muestra, para ejemplo, que al establecer $x = \frac{1}{100}$, la fraccion tiene el números enteros que aparecen a su vez en cada lugar decimal: $10^{-1} + 81 \cdot 10^{-2} + 234 \cdot 10^{-3} + \ldots = 0{,}12345\ldots$ (Lamentablemente, nuestra práctica de "llevar ing dígitos "disfraza el hecho de que el patrón que vemos continúa.)

Véase también FUNCIÓN DE SUELO/TECHO/ PARTE FRACCIONAL CIONES.

integral Ver ANTIDIFERENCIACIÓN; CALIBRACION INTEGRAL CULO.

cálculo integral El cálculo de sumas de cantidades infinitamente pequeñas, INFINITESIMALES, se denomina cálculo integral. Por ejemplo, considere el problema de encontrar la longitud de un camino curvo usando solo una recta criterio. Se podría aproximar la distancia a lo largo la curva marcando una serie de puntos a lo largo de la curva, midiendo los segmentos de línea recta entre ellos, y sumando las longitudes de estos segmentos.

Machine Translated by Google



Aproximación de longitud y área

Se podría hacer una aproximación aún mejor utilizando más puntos y, en consecuencia, segmentos de línea más cortos. La longitud real de la curva sería el valor LÍMITE de estas aproximaciones mejoradas, ya que usamos segmentos de línea cada vez más cortos que conectan más y más puntos en la curva (la suma de segmentos de línea infinitamente cortos). De manera similar, el área bajo una curva dibujada en el plano se puede aproximar como la suma de las áreas de un número finito de rectángulos dibujados bajo la curva.
El uso de rectángulos cada vez más angostos dará mejores y mejores aproximaciones. El área real bajo la curva es el valor límite de estas aproximaciones (la suma de rectángulos infinitamente estrechos).

Cualquier proceso que involucre segmentar una cantidad en partes manejables, sumar y tomar el límite de estas sumas a medida que se refina el proceso cae dentro de la categoría de cálculo integral. Tradicionalmente, el cálculo integral se enseña primero como el proceso de encontrar el área bajo una curva y = f(x) en un intervalo [a,b]. El área denotada

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se llama integral definida y se define como el límite, cuando h tiende a cero, de las sumas de las áreas de los rectángulos de ancho máximo h, que se usa para aproximar el área de la curva como se describió anteriormente. Tal aproximación con rectángulos se llama suma de Riemann, en honor al matemático alemán BERNHARD RIE MANN (1826-1866), cuyo trabajo llevó a los matemáticos a demostrar que este enfoque es matemáticamente sólido, en particular que, en condiciones razonables, todos formas de aproximar el área bajo la curva conducen al mismo valor límite.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), uno de los inventores del CÁLCULO, introdujo el símbolo ∫ para representar una integral. Lo consideró como un alargado S que denota suma, y llamó a la teoría de la integración calculus summatorius. El matemático suizo Johann Bernoulli (1667–1748) de la famosa FAMILIA BERNOULLI trabajó con Leibniz en el desarrollo de la teoría, pero él prefirió el nombre calculus integralis y el uso de una letra I mayúscula como signo de integración. (En latín, la palabra integralis significa “hacer un todo”). Los dos caballeros llegaron a un feliz compromiso de usar el nombre de Bernoulli para la teoría y el símbolo de Leibniz para la integral.

La idea de utilizar un límite para calcular las áreas de figuras curvas, o la longitud de trayectorias curvas, ha sido utilizada por eruditos desde la época de ARQUÍMEDES DE SIRACUSA en el siglo III a. C. hasta la época de PIERRE DE FERMAT a mediados del s. siglo 17. En la práctica, sin embargo, las técnicas empleadas para realizar estos cálculos siempre han sido extremadamente difíciles y complicadas. El gran logro de Leibniz e ISAAC NEWTON (1642-1727), descubridores independientes del cálculo, fue reconocer que la integración es simplemente un proceso de diferenciación inversa, hoy llamado ANTIDIF FERENCIACIÓN. Este resultado, conocido como TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, esencialmente establece que para encontrar el área bajo una curva y = f(x) en un intervalo [a,b], busque una función F(x) cuya DERIVADA sea f(x). Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La función F(x) se llama antiderivada de f. El lado derecho de esta ecuación a menudo se abrevia como $F(x)\Big|_a^b$. Así, por ejemplo, el área bajo el arco de la parábola y = x 2 de x = 0 a x = 2, está dada por $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = \frac{8}{3}$. Este notable resultado evita la necesidad de trabajar con límites complicados.

Para resaltar la interacción entre integración y diferenciación inversa, la antiderivada de una función f(x) generalmente se denota como ∫f(x)dx y se llama integral indefinida de f. Se define hasta una CONSTANTE DE INTEGRACIÓN. Así ∫f(x)dx es una función cuya derivada es f(x) (mientras que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es una es igual al área bajo la curva y = f(x) en el intervalo [a,b)]). El objetivo del cálculo integral es el desarrollo de métodos para encontrar las antiderivadas de funciones.

Como la derivada de la suma de dos funciones es la suma de las derivadas, y la derivada de una

Machine Translated by Google

función multiplicada por un número k es simplemente k veces su derivada, tenemos:

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

Los resultados correspondientes para integrales definidas también son válidos. Esto se deduce del teorema fundamental del cálculo (ya que estos resultados son ciertos para las antiderivadas), pero también pueden verse como válidos mediante argumentos geométricos. (Por ejemplo, si los valores de un gráfico se multiplican por un número k, es decir, si la función y = f(x) se reemplaza por y = k · f(x), entonces el área bajo el gráfico aumenta por un factor de k.)

La siguiente tabla muestra algunas integrales comunes:

f(x)	∫f(x)dx
r x	$\frac{x^{r+1}}{1\ r+}$ + C proporcionado r $1 \neq -$
$\frac{1}{X}$	en |x| + C
mi^{x}	mi^{x} + C
hacha _	$\frac{1}{a}$ hacha _ + C
xa _	$\frac{a^{x}}{\text{—ln}a}$ + C
en x	x lnx – x + C
pecado x	–cos x + C
porque x	senx + C
bronceado x	–ln |cos x| + C
csc x	ln |csc x – cuna x| + C
segundo x	ln |seg x + tan x| + C
cuna x	ln |sen x| + C
pecado2 x	$\frac{1}{2}$ x – $\frac{1}{2}$ sen 2x + C 4
cos2 x	$\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{4}$ sen 2x + C
pecado x	cosh x + c
duro x	sinh x + C
f ′(x) —f (x)	en |f (x)| + C

Hay una serie de técnicas para encontrar las integrales indefinidas de funciones más complicadas como como INTEGRACIÓN POR PARTES e INTEGRACIÓN POR SUBSTITUCIÓN.

Ver también ANTIDIFERENCIACIÓN; CÁLCULO; DIFERENCIAL CÁLCULO; DOBLE INTEGRAL; HISTORIA DE CÁLCULO (ensayo); INTEGRAL IMPROPIO; NUMÉRICO INTEGRACIÓN.

ensayo integral Ver SERIE CONVERGENTE.

integrando La función que se va a integrar se llama integrando. Por ejemplo, la expresión f(x) en cualquiera de las integrales ∫f (x)dx o ∫ ba f (x)dx es el integrando.

Ver también ANTIDIFERENCIACIÓN; CÁLCULO INTEGRAL.

integración por partes Esta técnica de integración es útil para encontrar la integral del producto de dos funciones. Hace uso de la REGLA DEL PRODUCTO para la diferenciación a la inversa. Específicamente, la regla del producto dice:

$$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = u'(x)v(x) – u(x)v'(x)$$

Integrando ambos lados y reorganizando se obtiene:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) – \int u'(x)v(x)dx$$

(Aparecerá UNA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN cuando finalmente se calculen todas las integrales.) Por lo tanto, se puede hacer un uso efectivo de esta fórmula si la integral ∫u′(x)v(x)dx resulta ser mucho más fácil de calcular. Por ejemplo, para evaluar ∫x cos x dx, escribe: u(x) = x y v′(x) = cos(x), resultando u′(x) = 1 y v(x) = sin(x) (nuevamente ignorando una constante de integración por el momento) de modo que:

$$\int x\cos(x)dx = x\text{sen}(x) – \int 1 \cdot \text{sen}(x)dx = x\text{sen}(x) + \cos(x) + C$$

Por lo general, uno elige el factor que es fácil de diferenciar para que sea u(x) y el factor que es fácil de integrar para v′(x).

La fórmula de integración por partes se puede usar incluso si el integrando está compuesto por un solo factor. Uno puede “insertar un 1” en el integrando para imaginar que hay un segundo factor igual a la función constante 1. Para ilustrar, para calcular ∫ln(x)dx escriba: ∫ln(x)dx = ∫ln(x) · 1dx y conjunto:

Machine Translated by Google

$$u(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = x$$

Entonces:

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - x + C$$

La fórmula de integración por partes se puede aplicar más de una vez para completar un problema de integración. Para ejemplo, para evaluar ∫e x cos(x)dx, una aplicación de la técnica produce:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

Aplicando la técnica de integración por partes a la segunda integral se obtiene:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x)\,dx &= e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= e^x \operatorname{sen}(x) - [-e^x \cos(x) - \int e^x (-\cos(x))\,dx] \\ &= e^x (\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) - \int e^x \cos(x)\,dx\end{aligned}$$

El álgebra ahora muestra que la integral que buscamos está dada por:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) + C$$

El método de integración por partes fue descubierto por Matemático inglés BROOK TAYLOR (1685–1731).

Ver también ANTIDIFERENCIACIÓN; CÁLCULO INTEGRAL; INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN; REAPARICIÓN RELACIÓN.

Integración por sustitución (cambio de variable, regla de sustitución por integración) Esta técnica de integración se utiliza para encontrar fácilmente la integral de una función. reconocida como una COMPOSICIÓN de dos funciones más simples. Es esencialmente la REGLA DE LA CADENA para la diferenciación empleado al revés. Específicamente, la regla de la cadena establece:

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = f'(u(x))\,u'(x) \qquad \frac{du}{dx}$$

Integrando ambos lados se obtiene:

$$\int f'(u(x))\,u'(x)\,dx = f(u(x)) + C$$

Teniendo en cuenta que, dado que f es la antiderivada de f′, el lado derecho de esta fórmula se puede considerar como el Integral indefinida de f′ evaluada con u como variable. Por lo tanto, es válido escribir:

$$\int f'(u(x))\,\frac{du}{dx}\,dx = \int f'(u)\,du$$

Esta ecuación es la ecuación de cambio de variables para integración. Por ejemplo, podemos usarlo para evaluar ∫2x(1 + x ^{2})4 días Haciendo u(x) = 1 + x ^{2}, dando $\frac{du}{dx} = 2x$ la integral dice:

$$\begin{aligned}\int 2x(1+x^2)^4\,dx &= \int u^4 \frac{du}{dx}\,dx \\ &= \int u^4\,du \\ &= \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= \frac{1}{5}(1+x^2)^4 + C\end{aligned}$$

Observe que la notación que usamos aquí imita las propiedades de las fracciones: se nos permite reemplazar un término $\frac{du}{dx}$ dx bajo un signo integral por el término dx.

Cuando se utiliza esta técnica, normalmente se elige u(x) sea una función que simplifica una parte complicada del INTEGRAND, y luego ajusta las cosas para que el factor $\frac{du}{dx}$ aparece explícitamente. Por ejemplo, para evaluar ∫x 2 $\sqrt{x^3 - 1}$ dx, es natural establecer u(x) = x ^{3} – 1. Entonces $\frac{du}{dx} = 3x^2$, y tenemos:

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^3-1}\,dx &= \int 2\sqrt{u}\,dx \\ &= \int \frac{1}{3}\cdot 3x^2\sqrt{u}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,\frac{du}{dx}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9}(x^3-1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Machine Translated by Google

Al calcular una integral definida mediante esta técnica, se recomienda calcular primero la integral indefinida y luego, al final del proceso, trabajar con los límites de integración. Por ejemplo, la integral definida

$\int_1^5 1x\sqrt{x\,3-1}\,1-\,dx$ no es igual a $\int_3^{5}\sqrt{1}\,u\,du$, desde el los valores x = 1 a x = 5 se refieren a la variable x y no a la nueva variable u. Calculamos:

$$\int_1^5 1\,3xx\sqrt{dx^2}\,-=-\left(\frac{2}{9}\,3x_{-}\,1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^5\,2=124\,\frac{3}{2}$$

Ver también ANTIDIFERENCIACIÓN; CÁLCULO INTEGRAL LU; INTEGRACIÓN POR PARTES.

intersección Un punto en el que dos figuras se intersecan se llama intersección. El término generalmente se reserva para las ubicaciones en las que la GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN cruza el eje x y el eje y en un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS, para formar lo que se denomina intersecciones x e y. Si una línea recta tiene una intersección en x (a, 0) y una intersección en y (0, b), entonces la ecuación de la línea está dada por $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Esto se llama la "forma de intersección " de su ecuación.

La intersección en y de una función arbitraria y = f(x) es el punto (0, f(0)).

interés Una tarifa pagada por el uso del dinero se llama interés. Por ejemplo, las compañías hipotecarias cobran a los compradores de viviendas una tarifa por pedir dinero prestado, y las compañías de tarjetas de crédito cobran a los clientes una tarifa por el privilegio de utilizar el dinero de la empresa para realizar compras. A la inversa, los bancos pagan dinero a los clientes por mantener un saldo en una cuenta de ahorros. (Los clientes, en efecto, han prestado dinero a la institución.) En cualquier arreglo de este tipo, la cantidad prestada o invertida se denomina principal o capital, y la tarifa, expresada como una tasa porcentual, es decir, como una cantidad de dólares. por cien a pagar cada año del préstamo, se denomina tasa de interés.

Hay dos tipos de interés. El primero, el interés simple, se computa únicamente sobre el principal. Por ejemplo, si un cliente pide prestados $3000 durante 3 años con un interés simple calculado al 15 por ciento anual, entonces el cliente ha acordado pagar 0,15 × 3000 = $450 por cada año del préstamo, más devolver los $3000 originales al final del período de 3 años. Por lo tanto, el cliente paga un total de $4350 al final de los 3 años.

En general, el interés total que pagué sobre un monto principal P a una tasa de interés anual R (expresada como decimal) durante T años viene dado por la fórmula:

$$yo = P \times R \times T$$

(En nuestro ejemplo, I = 3000 × 0,15 × 3 = 1350). Al final del préstamo, la cantidad que A debe es:

$$UNA = PAG + YO = PAG + PAG \times R \times T = PAG\,(1 + RT)$$

Sin embargo, hoy en día es raro que una institución crediticia otorgue préstamos con tarifas calculadas por interés simple. Por lo general, también se espera que uno pague intereses sobre cualquier interés incurrido a medida que avanza el préstamo.

El interés compuesto se calcula sumando el interés al principal y recalculando el interés al final de los "períodos de conversión" acordados. Por ejemplo, una compañía de tarjetas de crédito puede cobrar un interés del 18 por ciento anual, pero capitalizará el interés mensualmente (a una tasa de 18/12 = 1,5 % mensual).

Por lo tanto, después de pedir prestados $1000, por ejemplo, se espera que un cliente devuelva el principal más 0,015 × 1000 = $15 de interés, es decir, un total de $1015, al final del primer mes. De no hacerlo, se esperará que el cliente devuelva esta cantidad, más un 1,5% adicional sobre esta cantidad, es decir, un total de 1.015 × (1 + 0,015) = $1.030,23 al final del segundo mes. Al final de cada mes pasado,

el monto adeudado aumenta en un factor de $1+\frac{0.18}{12}$

$= + (.) 1 0 015$. Después de 1 año, es decir 12 meses, el saldo en la tarjeta de crédito será así $1{,}000\,1+\times\left(\frac{0.18}{12}\right)^{12}=$ $1,195.62.

En general, si se pide prestado un monto principal de P dólares a una tasa de interés de R por ciento anual (expresado como un decimal) y el interés se capitaliza n veces al año durante T años, entonces el monto A adeudado al final de ese período de tiempo está dada por la fórmula:

$$\text{punto de acceso}=1+\frac{R}{\text{norte}}$$

Machine Translated by Google

Considere ahora un banco que ofrece sus ahorros cuenta a los clientes una tasa de interés anual del 10 por ciento capitalizado semanalmente. Una inversión de $1,000 después de 1 año daría así $1 000 1 , × + 0.10 52 52 = $1 105 . Si, en cambio, el interés se calcula diariamente, los clientes recibir un retorno ligeramente mejor: 1,000 1 × + 0.10 365 365 = = $1,105.16, y un rendimiento aún mejor si el interés es compuesto cada hora, o incluso cada minuto. El rendimiento máximo posible se logra cuando el interés se calcula cada instante.

A mediados de la década de 1700, el matemático suizo LEON HARD EULER abordó el problema de calcular el interés compuesto continuo y demostró que cuando n se hace grande, la cantidad A = P(1 +)nT R– norte se aproxima al valor PeRT. (Un estudio del número e establece esta afirmación.) La fórmula:

$$A = PeRT$$

por lo tanto representa el saldo de una inversión, o un préstamo, después de T años, bajo el estado ideal de interés compuesto continuamente. Por lo tanto, nuestra inversión de $ 1,000, después de 1 año, compuesto continuamente a una tasa de 10 por ciento anual, produce un rendimiento de 1,000 × e 0.10×1 = $1,105.17. En la actualidad, los bancos utilizan esta fórmula para calcular intereses de las cuentas de ahorro.

La práctica de cobrar una tarifa por el uso del dinero. es una antigua. Los registros muestran que muchas civilizaciones, los hebreos, los griegos, los romanos e incluso los babilonios de 2000 a. C., por ejemplo, acusaron interés simple de los préstamos. Los romanos llamaban a esta práctica usura y, a menudo, las tarifas llegaban al 60 por ciento. Algunas órdenes religiosas, incluyendo el cristianismo, el judaísmo, e Islam, cuestionó la ética de la práctica, argumentando que a uno solo se le debe cobrar una tarifa por el uso de algo que podría desgastarse o perder valor debido a úsese y tírese. (En ese momento, no se veía que el dinero perdiera cualquier valor durante el curso de un préstamo). Durante muchos siglos, la práctica de cobrar una tarifa por el uso de el dinero estaba prohibido por estas órdenes.

Durante el crecimiento de la industria y el comercio durante el Edad Media y el Renacimiento, las actitudes cambiaron. Cada vez más personas solicitan préstamos en efectivo para tomar parte en nuevas oportunidades, y los prestamistas sintieron que era apropiado comía ser compensado por no tomar parte en esos oportunidades mismas. Los prestamistas nuevamente comenzaron a cobrar tarifas. La iglesia relajó su actitud hacia la usura, y se formaron nuevos establecimientos, llamados bancos, para manejar, almacenar y prestar dinero. El término interés de la frase latina id quod interest que significa “aquello que está entre” pronto reemplazó el término usura. Hoy el la palabra usura se usa solo en un contexto negativo de cobrar tasas de interés ilegalmente altas.

Véase también E.

ángulo interior El ÁNGULO formado por dos lados de un El POLÍGONO que se encuentra dentro del polígono se llama interior. ángulo. Por ejemplo, los cuatro ángulos interiores de un ÁNGULO RECTÁNGULO suman 90°.

Si un ángulo interior es mayor de 180°, entonces ese ángulo se llama "ángulo de reentrada" y el polígono es cóncavo. Todo ángulo interior menor de 180° se llama "saliente."

Cada ángulo interior de un polígono regular de n lados es igual n -2 — norte × 180°.

Véase también CÓNCAVO/CONVEXO; TRANSVERSAL.

teorema del valor intermedio (teorema de Bolzano) Nombrado en honor al matemático checo BERNHARD PLACIDUS BOLZANO (1781–1848), el teorema del valor intermedio afirma que si f(x) es una función CONTINUA definida en un INTERVALO cerrado, entonces esta función asume todos los valores entre f(a) y f(b); es decir, si N es cualquier número entre f(a) y f(b), entonces hay en menos un punto c entre a y b tal que f(c) = N. Por ejemplo, la función f(x) = x 2 es continua en el intervalo [3,4] y tiene f(3) = 9 y f(4) = 16. Como 11 está entre 9 y 16, el teorema del valor intermedio nos asegura de la existencia de un número c, entre 3 y 4, tal que f(c) = c 2 = 11, es decir, prueba que el existe la raíz cuadrada de 11.

El teorema es intuitivamente claro si pensamos en una función continua en un intervalo cerrado como aquella cuya gráfico consta de una sola pieza continua sin espacios, saltos o agujeros: al mover un lápiz desde la izquierda punto final (a, f(a)) al punto final derecho (b, f(b)), parece obvio que la punta del lápiz adopta todas las “alturas” entre altura inicial f(a) y altura final f(b). En escalar el la cara de una montaña, digamos, uno debe ciertamente pasar a través

Machine Translated by Google

cada altura intermedia desde la base hasta el vértice. Una prueba rigurosa del teorema, sin embargo, se basa en la noción de "completitud" de los números reales (lo que significa que no falta ningún punto, como la raíz cuadrada de 11, en la línea real). Esta es una propiedad sutil, que no se comprendió correctamente hasta finales de 1800 con la construcción de un CORTE DEDEKIND.

El teorema del valor intermedio es útil para localizar raíces de ecuaciones. Por ejemplo, considere la función $f(x) = x^3 + 2x - 5$. Es continua en el intervalo [1,2] y satisface $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Se sigue entonces que la ecuación $x^3 + 2x - 5 = 0$ tiene una raíz en algún lugar entre 1 y 2. Al trabajar con intervalos cada vez más pequeños, a menudo se puede usar este método para determinar la ubicación de una raíz con un buen grado de precisión. El MÉTODO DE BISECCIÓN, por ejemplo, emplea esta técnica.

El teorema del valor intermedio tiene varias consecuencias divertidas:

> En teoría, siempre es posible cortar un panqueque, sin importar cuán irregular sea su forma, exactamente por la mitad con un solo corte en línea recta.

Sostenga un cuchillo a la izquierda del panqueque para que el 100 por ciento del pastel quede a su derecha. Ahora deslice el cuchillo, en paralelo, a través del panqueque hasta que quede en el otro lado del pastel. En este lugar, el cero por ciento del panqueque se encuentra a la derecha del cuchillo. Por el teorema del valor intermedio, debe haber alguna ubicación intermedia para el cuchillo que dé el valor del 50 por ciento a su derecha. Es decir, hay, en teoría, una posición de cuchillo que corta el panqueque exactamente por la mitad.

Tenga en cuenta que este resultado no depende del ángulo en el que sostengamos inicialmente el cuchillo: vertical, horizontal o diagonal. De hecho, hemos demostrado que siempre es posible cortar un panqueque por la mitad con un cuchillo sostenido en cualquier ángulo previamente establecido.

> En teoría, siempre es posible cortar simultáneamente dos panqueques exactamente por la mitad con un solo corte en línea recta, sin importar la forma de los panqueques ni su ubicación en la mesa.

Este resultado se conoce como el teorema de los dos panqueques. El resultado anterior nos asegura que siempre podremos cortar la primera tortita exactamente por la mitad, apuntando con el cuchillo en cualquier ángulo que queramos elegir. La preocupación es que el cuchillo pueda o no cortar el segundo panqueque. Sorber planteamos que encontramos una dirección, consideramos este ángulo de cero grados, que corta el primer panqueque por la mitad, pero pierde el segundo panqueque por completo, con el 100 por ciento del segundo panqueque a la derecha del cuchillo, digamos. Gire el cuchillo 180°. Ahora tenemos un corte de cuchillo (misma línea, dirección opuesta) que corta el primer panqueque exactamente por la mitad, con el segundo panqueque completamente a su izquierda, es decir, cero por ciento a la derecha. Por el teorema del valor intermedio, debe haber un ángulo intermedio entre cero grados y 180° que corte el primer panqueque exactamente por la mitad y tenga el 50 por ciento del segundo panqueque a su derecha, es decir, uno que simultáneamente corte el primer panqueque. segundo panqueque por la mitad también.

> En cualquier instante, hay dos puntos en el ecuador de la Tierra directamente opuestos entre sí con exactamente la misma temperatura del aire.

Para cada posición de θ grados de longitud en el ecuador, sea $f(\theta)$ la temperatura del aire en esta posición menos la temperatura del aire en el punto opuesto del ecuador, en $\theta + 180°$:

$$f(\theta) = \text{temperatura}(\theta) - \text{temperatura}(\theta + 180°)$$

Observe que $f(\theta + 180°)$ es igual al mismo valor, pero de signo opuesto, a $f(\theta)$:

$$f(\theta + 180°) = \text{temperatura}(\theta + 180°) - \text{temperatura}(\theta) = -f(\theta)$$

Así, la función $f(\theta)$ se mueve de valores positivos a negativos. Por el teorema del valor intermedio, debe haber una ubicación intermedia donde la función sea cero.

Esta es la posición deseada en el ecuador de la Tierra.

Véase también TEOREMA DEL VALOR EXTREMO ; PUNTO FIJO; TEOREMA DEL BOCADILLO DE JAMÓN; ESFERA.

interpolación El proceso de estimar el valor de una función entre dos valores ya conocidos se llama interpolación. Por ejemplo, si la temperatura de una taza de té era inicialmente de 200 °F y dos minutos más tarde era de 180 °F, uno podría suponer que su temperatura en la marca de un minuto era de 190 °F, con base en la suposición de que la temperatura disminuye constantemente con el tiempo. Esto representa el método más simple de interpolación, llamado interpolación lineal: presuponemos que la variación de la función puede describirse como una línea recta que pasa por los valores conocidos.

Machine Translated by Google

Si una función f tiene valores f(a) y f(b) en las posiciones a y b, la interpolación lineal estima el valor de la función en x, entre a y b, como:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

Si la gráfica de f es suave y el intervalo [a,b] es pequeña, entonces la interpolación lineal generalmente da una buena aproximación del valor real. Sin embargo, si el intervalo es grande, es menos probable que siga siendo el mismo. caso. Por ejemplo, dado que 32 = 9 y 34 = 81, lineal la interpolación sugiere que 33 (que es igual a 27) es aproximadamente $9 + \frac{3-2}{4-2}(81-9) = 45$.

+ Los métodos mejorados de interpolación toman en cuenta otros valores de datos. Por ejemplo, JOSEPH-LOUIS El método de interpolación de LAGRANGE , llamado LAGRANGE'S FÓRMULA, estima valores de función ajustando un POLI NOMIAL a todos los valores de datos conocidos. Alternativamente, si se sospecha, por ejemplo, que la función es exponencial, es decir, de la forma $y = b^x$, entonces interpolación lineal funciona bien para el logaritmo de la función: la relación log y = b log x es lineal.

La EXTRAPOLACIÓN es el proceso de estimación de func valores de ción fuera del rango de valores observados.

Véase también REGRESIÓN.

intervalo Cualquier segmento individual de la recta numérica es llamado intervalo. Más precisamente, un intervalo es un conjunto de números que contienen todos los números reales entre dos números dados. Los números dados se denominan puntos extremos, y pueden o no ser considerados como parte del intervalo. Por ejemplo, el conjunto de todos los bienes los números entre 2 y 5 inclusive son un intervalo; como es el conjunto de todos los números reales estrictamente mayores que 9 pero menor o igual a 23.

Un intervalo se dice cerrado si ambos extremos son incluido. Se utilizan corchetes para indicar que este es el caso. Por ejemplo,

$$[a,b]$$

denota el conjunto de todos los números reales x que satisfacen $a \le x \le b$. En una recta numérica, los extremos están marcados con círculos negros para indicar que están incluidos.

Un intervalo está abierto si no se incluye ningún punto final. Los paréntesis se utilizan para indicar que esta es la intención. Por ejemplo:

$$(a,b)$$

denota el conjunto de todos los números reales x que satisfacen $a < x < b$. En una recta numérica, los puntos finales están marcados por abierto círculos para indicar que no están incluidos.

Si una variable x satisface $a \le x < b$ o $a < x \le b$ entonces se dice que está ubicado en un intervalo semiabierto denotados, respectivamente:

$$[a,b) \text{ o } (a,b]$$

En una recta numérica, un círculo ennegrecido marca el punto final que está incluido en el intervalo y un círculo abierto el extremo que se excluye.

Con este sistema de notación, los dos intervalos descritos en el párrafo inicial se denotan así [2,5] y (9,23).Algunos textos usan corchetes inversos en lugar de paréntesis para denotar la exclusión de los puntos finales; por lo tanto, un intervalo abierto se denota como]a,b[, y a intervalo semiabierto como [a,b[, por ejemplo.

La longitud de un intervalo es la distancia entre sus puntos finales Por ejemplo, el intervalo (9, 23] tiene una longitud 14, al igual que los intervalos [9, 23], [9, 23) y (9, 23).

La incorporación del símbolo ∞ para el infinito permite a uno para denotar intervalos ilimitados. Por ejemplo, [a, ∞) denota el conjunto de todos los números reales x mayores que o igual a un; (–∞,a) denota el conjunto de todos los números reales x estrictamente menor que a; etcétera. A veces, los matemáticos escriben (–∞,∞) para el conjunto de todos los números reales. (Uno típicamente no coloca un corchete al lado del símbolo de infinito, aunque es posible definir un sistema numérico que permita la inclusión de ∞ como un símbolo válido número para su consideración.)

Un intervalo puede consistir en un solo punto (el intervalo [1,1] por ejemplo) o puede ser el conjunto vacío (el intervalo [4,1] por ejemplo). La intersección de dos cualesquiera intervalos es un intervalo, pero la unión de dos intervalos podría o no ser un intervalo.

Véase también CARDINALIDAD; VALOR INTERMEDIO TEOREMA.

invariante Una propiedad, cantidad o relación que es no cambia por la colección de operaciones específicas o transformaciones, o por cómo se observa esa propiedad, se llama invariante. Por ejemplo, la distancia entre dos puntos en un plano no cambia bajo una ROTACIÓN. Por lo tanto, la distancia es invariante de las rotaciones. (Es no, sin embargo, invariante de dilataciones, por ejemplo.) Un

Machine Translated by Google

La aplicación del TEOREMA DE EULER muestra que cualquier diseño de pelota de fútbol que use hexágonos y pentágonos, sin importar cuán irregulares puedan ser esas formas, con tres bordes que se unen en cada vértice, debe incluir precisamente 12 pentágonos. (El número de hexágonos puede variar). El número de pentágonos es, por lo tanto, invariable en el diseño de balones de fútbol.

Algunas invariantes pueden ser bastante sorprendentes. Para examen
Por ejemplo, considere el siguiente ejercicio teórico:

> Supongamos que se agregan 10 pies de largo a una cuerda que era lo suficientemente larga como para enrollarse cómodamente alrededor del ecuador de la Tierra. Imagina que la cuerda se enrolla nuevamente alrededor del ecuador, pero esta vez, debido a su mayor longitud, flota justo por encima del suelo. ¿Qué altura tiene el espacio entre el suelo y la cuerda suspendida?

Para responder a esta pregunta, sea R el radio del

Tierra. La longitud de la cuerda extendida es de 2 $\pi R + 10 = 2\pi R + \frac{5}{\pi}$ pies, que corresponde a la circunferencia

5 de un círculo de radio R + pies. Esto muestra que el
π

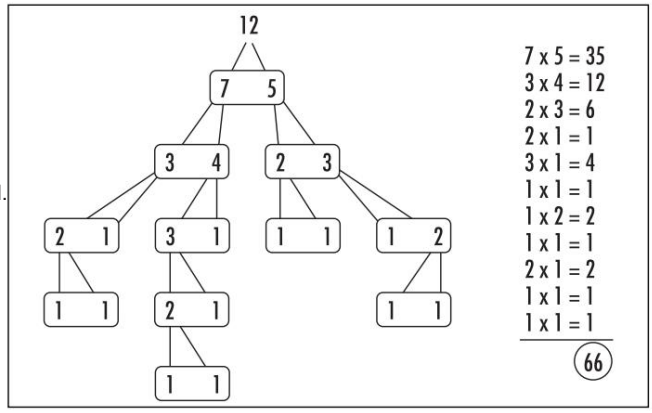
5 cuerdas suspendidas a ≈ 1,6 pies del suelo. Note que el
π

La respuesta, además de tener un valor sorprendentemente grande, no depende del valor de R. Esto significa que el tamaño del planeta es irrelevante. Por lo tanto, si se agregan 10 pies de largo a una cuerda que se ajusta cómodamente alrededor del ecuador de cualquier planeta (Marte, Júpiter o un planeta del tamaño de un guisante), la cuerda extendida siempre flotará a un pie $\frac{5}{\pi}$ del ecuador.

suelo. Este valor es un invariante del problema.

Como otro ejemplo, considere el siguiente famoso "juego de división":

> Escribe el número 12 en la parte superior de una página y debajo escribe un par de números enteros positivos que sumen 12, digamos, 7 y 5. En el costado del papel anota el producto 7 × 5 = 35. Ahora escribe debajo 7 un par de números que suman 7, digamos, 3 y 4, y anota el producto 3 × 4 = 12. Continúa de esta manera, "dividiendo" cada número que aparece en el diagrama en dos y anotando el producto del par de números elegidos. Haz esto hasta que el número 1 aparezca 12 veces. Lo siguiente representa un posible diagrama de división:



el juego de dividir

> Ahora suma todos los productos registrados. ¿Qué valor se obtiene?

Sorprendentemente, no importa qué diagrama de división se construya, la suma de los productos es una invariante del juego y siempre tendrá el valor 66. (El número 66 resulta ser el 11° NÚMERO TRIANGULAR . En general, si uno comienza este juego con un número N, entonces el invariante que surge en el juego es el (N –1) número triangular.)

elemento inverso Un elemento de un conjunto que, cuando se combina con otro elemento, produce el ELEMENTO DE IDENTIDAD del conjunto, se denomina elemento inverso. Más precisamente, si un conjunto S viene equipado con un BINARIO "*" y un elemento OPERACIÓN de identidad e, entonces un inverso para un elemento a del conjunto es otro elemento b tal que a*b = b*a = e.

Por ejemplo, para el conjunto de números bajo la operación de suma, el inverso de cualquier número a es su negativo –a. En este contexto, el elemento de identidad es cero y de hecho tenemos:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Bajo la operación de multiplicación, el elemento de identidad es 1, y el inverso de cualquier número a (distinto de cero) es 1 , su recíproco: a

$$\times = \times \frac{1}{un} = 1 \quad \frac{1}{un} \quad aa$$

Se requiere que todos y cada uno de los elementos de un GRUPO tengan un inverso. El inverso del elemento identidad es él mismo.

Machine Translated by Google

No es posible que un solo elemento a tenga dos inversos diferentes b1 y b2 . Esto se establece notando que e = a*b2 de modo que b1 = b1*e = b1*(a*b2) = (b1*a)*b2 = e*b2 = b2 .

De la simetría de la definición, tenemos que si b es el inverso de a, entonces a es también el inverso de b. En consecuencia, el inverso de un inverso es el elemento original. Expresado en términos de suma, se lee –(–a) = a y en términos de multiplicación como:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

El inverso de un elemento a a menudo se denota como –1, especialmente si la operación binaria bajo consideración puede interpretarse como un tipo de multiplicación. Por ejemplo, la inversa de un cuadrado MATRIZ A, si existe, se denota A^{-1}.

función inversa (mapeo inverso, función inversa)

Se dice que una FUNCIÓN f con dominio D y rango R, f : D → R, es invertible o tiene una función inversa si, para cada salida posible y de la función, y R, hay una, y sólo una, entrada x D, que produce esa salida. Escribimos x = f –1(y) para la entrada x que produce la salida dada y. (Así, x = f –1(y) si, y sólo si, f(x) = y.) Esto define una función f –1: R → D, llamada función inversa de f. En cierto sentido, la función inversa "deshace" la función original.

Por ejemplo, considere la función de números reales que duplica una entrada y suma 3: f(x) = 2x + 3. La salida 11 se produce a partir de la entrada de 4, por lo que tenemos f –1(11) = 4 En general, se produce una salida de y y – 3 , 3 de una entrada x $= \frac{y-3}{2}$, lo que f –1(y) = . (Este por 2 La fórmula se obtiene resolviendo para x en la ecuación: y y = 2x + 3 para obtener $x = \frac{y-3}{2}$.)

Dado que f –1(y) es la entrada que produce la salida y, yx es la entrada que produce la salida f (x), se cumplen las siguientes relaciones:

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ para todos los valores y en el rango de f}$$

y

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para todo x en el dominio de f}$$

Esto explica la notación incómoda de la función inversa: En el estudio de la COMPOSICIÓN de funciones, f m denota el compuesto f0 f0…0 f (m veces), y tenemos f m 0 f n = f m+n . Para dar significado a la cantidad f esta ^{0}, regla establece que f 0 f = f = f 0, sugiriendo que debemos establecer f en $^0(x) = x$ para todos los valores de x. Conse consecuencia, el $^{-1}0\ f^1 = f^0$ sugiere que f –1(f(x)) enunciado f = x para todo x, $^{-1}$ es la apropiada indicando que f notación para la función inversa. El superíndice de –1 no debe confundirse con la operación de 1 inversión (Escribimos (f(x))–1 para denotar $\frac{1}{f(x)}$, y vete f –1(x) para significar la función inversa de f.)

Es costumbre denotar la entrada de una función real como la variable x y la salida como la variable y. Esto puede llevar a cierta confusión. Por ejemplo, para calcular la función inversa de y = f(x) = x + 3 + 2, resolvemos la entrada x en la ecuación en términos de la salida y para producir, pero $x = \sqrt[3]{y-2}$, intercambiamos las variables x e y para que x denote la nueva entrada y y la nueva salida: y = para la $\sqrt[3]{x-2}$. Esto produce la fórmula f –1(x) = $\sqrt[3]{x-2}$ función inversa.

Como las fórmulas y = f(x) y x = f –1(y) representan exactamente la misma ecuación, las dos fórmulas producen exactamente las mismas curvas cuando se trazan contra un par de ejes de coordenadas x -y. Seguir la convención de intercambiar las variables x e y en la segunda ecuación para escribir y = f –1(x) equivale a intercambiar los ejes x e y en el gráfico de la curva. Voltear el gráfico sobre la línea diagonal y = x devuelve el eje y a la posición vertical y el eje x a la posición horizontal, pero también voltea la curva dibujada sobre la línea diagonal. Por lo tanto, las gráficas de y = f(x) y y = f –1(x) son imágenes especulares entre sí a lo largo de una línea diagonal.

No todas las funciones poseen una función inversa. Por ejemplo, no existe una función inversa a la función de elevar al cuadrado ^{2}: algunas salidas surgen de más de y = x una entrada posible. (La salida de 4, por ejemplo, surge de las dos entradas 2 y –2.) Sin embargo, a menudo es posible restringir una función a una cierta parte de su dominio y definir una función inversa para ese dominio restringido. Por ejemplo, para la función de elevar al cuadrado, si requerimos que solo se consideren entradas no negativas, entonces existe una función inversa: tenemos y = $\sqrt{x}$ (la raíz cuadrada positiva) como función inversa. Uno define las FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS, por ejemplo, restringiendo a una porción adecuada del dominio.

Si la función y = f(x), entonces la derivada de la función inversa y = f –1(x) viene dada por:

Machine Translated by Google

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que la cantidad en el denominador no sea cero. Esta fórmula se puede establecer haciendo uso de la REGLA DE LA CADENA en el enunciado f(y) = x. (La diferenciación da: fórmula f′ (y) · y′ = 1 y, por lo tanto, $y' = \frac{1}{f'(y)}$, cual es el de arriba

Una versión simple de un teorema general de la función inversa establece que si la derivada de una función y = f(x) es distinta de cero en un punto x = a, entonces existe una función inversa, al menos cuando el dominio está restringido a un pequeño intervalo sobre un (Dado que la derivada de f(x) = x 0, no ^{2} es cero en x = es posible definir una función inversa a la función de elevar al cuadrado sobre el punto x = 0.)

funciones hiperbólicas inversas (funciones hiperbólicas de área) Definidas de forma análoga a las FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS, las funciones hiperbólicas inversas son las funciones inversas de las FUNCIONES HIPERBÓLICAS. Por ejemplo, el seno hiperbólico inverso de un número x, escrito arc sinh x o sinh–1x, es un valor a cuyo seno hiperbólico es x: sinh a = x. De manera similar, el coseno hiperbólico inverso de x es un valor a con cosh a = x, y la tangente hiperbólica inversa de x es un valor a tal que tanh a = x. (Técnicamente, para un valor x dado, hay dos valores diferentes a para los cuales cosh a = x, uno positivo y otro negativo. Por convención, siempre se elige el valor positivo.)

Dado que la función de seno hiperbólico se define en todos los valores reales y produce todos los valores reales como salidas posibles, la función senh–1 x se define para todos los valores reales de x. Por otro lado, la función coseno hiperbólico solo arroja valores de salida mayores o iguales a 1 y, en consecuencia, la función coseno hiperbólico inversa cosh–1 x se define solo para valores de x ≥ 1. De manera similar, la función tangente hiperbólica inversa tanh–1 x se define solo para –1 < x < 1.

Las funciones hiperbólicas inversas tienen las siguientes DERIVADAS:

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$$

Estos se pueden establecer haciendo uso de la relación cosh2 y – senh2 y = 1. Por ejemplo, para calcular la derivada de y = senh–1 x, escriba senh y = x y luego diferencie esta ecuación usando la REGLA DE LA CADENA . Esto produce cosh y · $\frac{dy}{dx}$ = 1, estableciendo así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+(\sinh y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

como se afirma.

Es posible dar formulaciones alternativas de las funciones hiperbólicas inversas. Notando que cosh y = $\frac{e^y + e^{-y}}{2}$ y senh y = $\frac{e^y - e^{-y}}{2}$, tenemos cosh y + sinh y = e y o y = ln(cosh y + sinh y). Haga y = senh–1 x. Entonces, senh y = x y cosh y = $\sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}$ dando:

$$\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

que es válido para todos los valores de x. Similarmente,

$$\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

válido para x ≥ 1, y

$$\text{bronceado}^{-1}x = \text{en}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

válido para – 1 < x < 1.

matriz inversa (matriz inversa) Se dice que una MATRIZ A cuadrada es invertible (o no singular) si existe una matriz B tal que AB = BA = I, donde I es la MATRIZ DE IDENTIDAD. La matriz B se denomina matriz inversa de A. Existe como máximo una matriz inversa para la matriz A dada . (Si B1 y B2 son ambas matrices inversas, entonces B1 = IB1 = B2AB1 = B2 I = B2). Si una matriz inversa si existe una matriz A , entonces se denota A–1. Un estudio de DETERMINANTES muestra que una matriz es invertible si, y solo si, su determinante no es cero.

La matriz inversa de una matriz de 2 × 2

$$A = \begin{matrix} \text{abdominales} \\ cd \end{matrix}$$

Machine Translated by Google

con determinante det(A) = ad – bc es la matriz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{anuncio a.c.} - \text{California}} \begin{matrix} \text{base de datos} \\ \end{matrix}$$

El proceso de ELIMINACIÓN GAUSSIANA proporciona un método relativamente sencillo para calcular la matriz inversa de cualquier matriz cuadrada de mayor tamaño.

Si en un sistema de n ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS Ax = b, la matriz A de coeficientes es invertible, entonces el sistema tiene solución dada por x = A–1b. En particular, si ej denota el vector columna cuya única entrada distinta de cero es un 1 en la posición j, entonces xj = A–1ej es la columna j de A–1. Es decir, la j-ésima columna de esta matriz inversa es una solución al sistema de ecuaciones Axj = ej . Por la REGLA DE CRAMER , la i-ésima entrada de esta columna, que es la (i,j)-ésima entrada de la matriz inversa, es la razón de determinantes:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\det(A_{ij})}{\det(A)}$$

donde A| es la matriz A con la i-ésima columna reemplazada ij por ej . Calcular det(A| ij) es equivalente, salvo un signo más o menos, a calcular el determinante de la matriz obtenida de A eliminando su i-ésima columna y su j-ésima fila.
Este valor a veces se denomina cofactor (i,j)ésimo de A.

Si A es invertible, entonces es imposible encontrar un vector columna x distinto de cero tal que Ax = 0. (De lo contrario, x = A–1 0 = 0). Esta observación es importante para el estudio de los VECTORES PROPIOS y los VALORES PROPIOS.

Ver también GRUPO LINEAL GENERAL.

inverso de una declaración Ver CONTRAPOSITIVO.

ley del cuadrado inverso Cualquier relación entre dos variables físicas para las cuales una es proporcional al RECÍPROCO del cuadrado de la otra se denomina ley del cuadrado inverso. Por ejemplo, la ley de la gravitación desarrollada por SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) afirma que la magnitud F de la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos de masas m y M viene dada por:

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

Aquí G es la constante gravitacional (igual a 6,67 × 10–11 m3kg–1sec–2) y r es la distancia entre las dos masas. Esta es una ley del cuadrado inverso. La iluminación provista por una fuente de luz disminuye por el inverso del cuadrado de la distancia desde la fuente y también es una relación inversa al cuadrado.

funciones trigonométricas inversas Una FUNCIÓN INVERSA de cualquier función trigonométrica se llama función trigonométrica inversa. Por ejemplo, el seno inverso de un número x, escrito arcsenx o sen–1x, es un ÁNGULO a cuyo seno es x: sina = x. Dado que la curva seno adopta valores solo entre –1 y 1, la función seno inversa se define solo para valores –1 ≤ x ≤ 1. También se debe tener en cuenta que para cualquier valor x hay infinitos ángulos a con sen a = x . Por lo general, se supone entonces que el ángulo π– π– a se elige de modo que – ≤ a ≤ . (Esto se denomina rango 2 2 de valores principales para el seno). De manera similar, el coseno inverso de un número x con –1 ≤ x ≤ 1, escrito arccos x o cos–1 x, es un ángulo a, generalmente elegido en el principal rango para coseno, 0 ≤ a ≤ π, con cos a = x. Dado que la función tangente adopta todos los valores reales, la función tangente inversa se define para cualquier número real x, y arctan x, o tan–1 x, se define como el ángulo a en el rango principal π– π– para la tangente, – ≤ a ≤ 2 2 Las funciones trigonométricas inversas tienen las siguientes DERIVADAS:

, tal que tan a = x.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ para } |x| \neq$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ para } |x| \neq$$

$$\frac{d}{\text{bronceado } dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{2\,1+x}$$

Estos se pueden establecer haciendo uso de la relación sen2 y + cos2 y = 1. Por ejemplo, para calcular la derivada de y = sen–1 x, escriba sen y = x y luego derive esta ecuación usando la REGLA DE LA CADENA . Este dy da como resultado cos y = 1, estableciéndose así: —dx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\text{pecado } y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

como se afirma. La SERIE DE TAYLOR de la función arctan da la SERIE DE GREGORY .

Machine Translated by Google

Se puede establecer una serie de identidades directas e inversas para las funciones trigonométricas. Como ejemplos tenemos:

$$\text{pecado (porque}^{-1}x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{pecado (bronceado}^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{2\,1 + x}}$$

$$\text{porque (pecado}^{-1}x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{porque (bronceado}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{2\,1 + x}}$$

$$\text{bronceado (pecado}^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{bronceado (porque}^{-1}x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Por ejemplo, si a = cos ángulo $^{-1}$ x– x, entonces porque a = x = . Así 1 a aparece en un triángulo rectángulo con hipotenusa 1 y cateto adyacente de longitud x. Por THEO DE PITÁGORAS √1 – x REM, la longitud del opuesto es y por lo tanto √1 – x cateto ^{2} pecado a = $\sqrt{1 - x^2}$ = $\sqrt{1 - x^2}$, estableciendo la primera relación ción Las identidades restantes se prueban de manera similar.

Ver también FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS.

número irracional Cualquier número que no se puede expresar como una RAZÓN de dos enteros se llama número irracional. Como muestra el estudio de los NÚMEROS RACIONALES , los números irracionales son precisamente aquellos números cuyas expansiones decimales no terminan ni caen en un ciclo repetitivo de valores. Por ejemplo, el número con la expansión decimal 0.1131331333133333133333133… es irracional. El estudio de los números racionales también muestra que, en un sentido muy real, "la mayoría" de los números son irracionales.

Una prueba famosa, a menudo atribuida a Hipaso de Metapontum (ca. 470 a. C.), muestra que √ cional. TEODORO $\sqrt{2}$ es irra DE CIRENE (ca. 465–398 a. C.) estableció geométricamente el mismo resultado y también demostró que los números √ ing √ TAL TEOREMA DE LA ARITMÉTICA se pueden usar $\sqrt{3}$ hasta √ 17 (excluyendo para $\sqrt{4}$, √ 9 y √ 16) son irracionales. El FUNDAMENTO demostrar que la raíz m-ésima de un entero positivo n es racional si, y solo si, n ya es la m-ésima potencia de un entero.

(Si $\sqrt[m]{n} = \frac{a}{b}$ para algunos enteros a y b, entonces a ^{m} = n.m. Escribiendo cada uno de a, b y n como un producto de primos, y observando que los primos que en consecuencia aparecen en el lado izquierdo de esta ecuación deben coincidir con los que aparecen en el lado derecho, concluimos que cada factor primo de n aparece en n un múltiplo de m veces. Esto establece que n = cm para algún entero c.) El mismo razonamiento muestra que un número como log25 es irracional. (Si entonces 2a = 5b , contradiciendo la fundamental log25 = $\frac{a}{b}$, teorema de la aritmética.)

Truncar la expansión decimal de un número irracional produce un racional arbitrariamente cercano a ese número irracional. Por ejemplo, 1.4, 1.41, 1.414, … es una secuencia de números racionales que convergen en √ $\sqrt{2}$ = 1.41421356…

En 1737 LEONHARD EULER estableció que el número e es irracional y en 1761 JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777) demostró la irracionalidad de π. Nadie hasta el día de hoy sabe si los números 2e o no e^{π}, $\sqrt{\pi}$ y π^{2} son irracionales. (Se sabe que e π y e · π son irracionales.) Sorprendentemente, la racionalidad o irracionalidad de la CONSTANTE γ DE EULER todavía no se conoce.

Es posible que un número irracional elevado a una potencia irracional sea racional. Por ejemplo, si x = – 2)√ (√ ejemplo de tal $\sqrt{2}$ resulta ser racional, entonces tenemos un examen fenómeno. Si x, por otro lado, es √ no racional, entonces es irracional y x 2 (√ 2)√ =-(√ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ = 2)2 = 2 es un ejemplo de lo que buscamos. (Desafortunadamente, esta línea indirecta de razonamiento no indica cuál de las dos posibilidades ocurre realmente).

Véase también NÚMERO ALGEBRAICO; FRAC CONTINUA CIÓN; MI; NÚMERO; NUMEROS REALES; SORDO; TRANSCEN NÚMERO DENTAL.

punto aislado (acnodo) Un punto que satisface la ecuación de una curva pero no está en el arco principal de la curva se llama punto aislado. Por ejemplo, la curva tiene y 2 tiene x = 0, y = 0 como solución, sin otra solución cerca de esta posición. El punto (0,0) es un punto aislado de la ecuación. $y^2 = x^3 - x^2$

Véase también PUNTO DOBLE.

isometría (transformación de congruencia) UNA TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA, como una traslación, rotación o reflexión, que preserva las distancias entre puntos en el espacio se llama isometría. Las isometrías tienen así la propiedad de preservar la forma y el tamaño de las formas geométricas.

Machine Translated by Google

cifras. (Si, por ejemplo, tres puntos A, B y C representan los vértices de un triángulo equilátero de lado 1, entonces las imágenes A′, B′ y C′ de los tres puntos bajo una isometría nuevamente forman un triángulo equilátero de lado 1.)

El TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS ISOMETRÍAS muestra que cualquier isometría en el plano es el resultado de a lo sumo tres reflexiones. Cualquier isometría que conserve la ubicación de tres puntos planos deja todos los puntos en el plano sin cambios. Ninguna isometría puede preservar la ubicación de solo dos puntos. Si una isometría conserva la ubicación de un solo punto, entonces esa isometría debe ser una rotación alrededor de ese punto.

isomorfismo Una correspondencia biunívoca y sobre entre los elementos de dos conjuntos equipados con OPERACIONES BINARIAS que conservan las operaciones en esos conjuntos se denomina isomorfismo. Por ejemplo, el mapa f:n → 2n empareja cada número natural con un número par (y, a la inversa, cada número par se empareja con un único número natural) y, además, conserva la operación de suma entre los dos conjuntos: tener f (n + m) = f(n) + f(m) para todos los números naturales n y m.
Así, con respecto a la suma, f es un isomorfismo entre los dos conjuntos. (Observe, sin embargo, que f no conserva los productos y, por lo tanto, no es un isomorfismo con respecto a la multiplicación).

La función LOGARITMO ln x proporciona un mapa entre el conjunto de todos los números reales positivos y el conjunto de todos los números reales. El logaritmo convierte las multiplicaciones del primer conjunto en sumas del segundo conjunto: ln(xy) = ln x + ln y. El conjunto de reales positivos bajo la multiplicación es isomorfo al conjunto de todos los reales bajo la suma.

La palabra isomorfismo se deriva de las palabras griegas isos que significa "mismo" o "igual" y morphos que significa "forma" o "estructura".

Véase también HOMOMORFISMO.

problema isoperimétrico Un problema clásico en matemáticas, llamado problema isoperimétrico, pregunta:

> De todas las figuras dibujadas en el plano con un perímetro dado, ¿cuál encierra el área más grande?

El origen de este problema se remonta a la antigüedad con la famosa leyenda de la Princesa Dido y DIDO'S PROBLEMA.

El tema de la isoperimetría (prefijo iso: lo mismo) fue estudiado sistemáticamente por la familia de matemáticos suizos de los siglos XVII y XVIII, la FAMILIA BERNOULLI. Descubrieron y clasificaron muchas curvas que satisfacían ciertas propiedades máximas y mínimas, pero no resolvieron el problema isoperimétrico. LEON HARD EULER (1707–83) también contribuyó a este campo, utilizando las técnicas del CÁLCULO.

JAKOB STEINER (1796–1863) usó métodos puramente geométricos para establecer la siguiente respuesta parcial: si hubiera una forma que ofreciera un área máxima para un perímetro dado, entonces esa forma debería ser un círculo. Steiner pensó que había resuelto por completo el problema isoperimétrico, que la respuesta debía ser un círculo, pero varios años después, el matemático alemán KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897) señaló que la suposición de que los problemas siempre tienen solución puede llevar a absurdos. El siguiente ejemplo divertido ilustra su preocupación:

> Considere la pregunta: de todos los números enteros positivos, ¿cuál es el mayor? Si hay una respuesta a este problema, entonces no puede ser un número n diferente de 1, porque entonces n^2 es un número entero mayor que n. Esto deja solo el número entero 1 como respuesta a la pregunta.

Weierstrass se dio cuenta de que muy bien podría darse el caso de que el problema isoperimétrico no tuviera solución, a pesar del trabajo de Steiner, por lo que tal vez incluso el círculo pueda ser reemplazado por una forma de mayor área para el mismo perímetro. Para resolver completamente el problema isoperimétrico, Weierstrass se dio cuenta de que también se debe probar que existe una solución al problema. Finalmente, en 1870, Weier Strass pudo hacer esto al desarrollar una nueva teoría matemática que hoy se llama "cálculo de variaciones". La solución al problema, conocida por los eruditos antiguos, fue, por fin, establecida como matemáticamente correcto.

Las variaciones simples del problema isoperimétrico son más fáciles de manejar. Considere, por ejemplo, la pregunta: de todos los rectángulos de perímetro 40 pies, ¿cuál tiene el área más grande? Esto se puede responder a través de un ejercicio de álgebra: cualquier rectángulo tiene dos lados largos y dos lados cortos. Si el perímetro es de 40 pies, entonces dos lados miden más de 10 pies y dos son más cortos que 10 pies (a menos que la figura sea un cuadrado). Escribiendo las dimensiones del rectángulo como 10 + x pies de largo y 10 – x pies de ancho, para algún número x, su área viene dada por la fórmula

Machine Translated by Google

$(10 – x)(10 + x) = 100 – x^2$ es máxima. Vemos ahora que el área precisamente cuando x es cero, es decir, la figura es un cuadrado.

Un ejercicio de geometría muestra que de todos los triángulos de un perímetro dado, el triángulo equilátero tiene el área más grande.

Véase también BURBUJAS DE JABÓN; PUNTO STEINER.

trapezoide isósceles (trapecio isósceles) Un trapecio con los dos lados no paralelos de igual longitud se llama trapezoide isósceles. La figura tiene un eje de simetría perpendicular a los lados paralelos. Cualquier trapezoide isósceles puede considerarse un TRIÁNGULO ISOSCELES truncado.

Véase también TRAPEZOIDE/TRAPECIO.

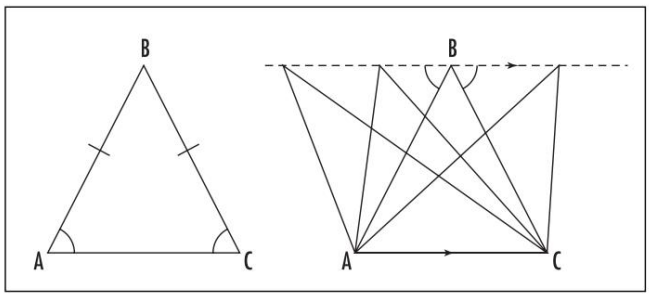
Triángulo isósceles Un triángulo que posee dos lados de igual longitud se llama isósceles. El nombre se deriva de los términos griegos iso que significa "mismo" y skelos que significa "pierna". Algunos eruditos insisten en que un triángulo se llame isósceles solo si dos de sus lados, pero no los tres, tienen la misma longitud, pero en realidad esto es solo una cuestión de gusto. (Un triángulo con los tres lados de igual longitud se llama equilátero). Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. Esto se puede establecer de la siguiente manera:

> Supongamos que el triángulo ABC es isósceles con lados AB y BC de igual longitud. Considere un diagrama de este triángulo como la imagen de dos triángulos, ABC y CBA, superpuestos uno encima del otro. Estos dos triángulos comparten pares de lados que coinciden en longitud y comparten un ángulo común (en B) entre esos dos lados. Así, por el principio SAS del estudio de la semejanza, los dos triángulos son congruentes. En consecuencia, todos los ángulos correspondientes entre los triángulos coinciden. En particular, el ángulo en el vértice A debe coincidir con el ángulo en el vértice C.

Si uno desliza el vértice B en una dirección paralela a la base AC, entonces el perímetro del triángulo cambia (aunque el ÁREA de la figura, $A = \frac{1}{2} \times$ base × altura no). El estudio de OPTIMIZACIÓN muestra que la suma de distancias |AB| + |BC| es mínimo cuando el

el triangulo es isosceles. Tenemos:

> De todos los triángulos con una base dada y una altura fija, el triángulo isósceles tiene el menor perímetro.



Triángulo isósceles

Para minimizar todo el perímetro de un triángulo sin cambiar su área, uno puede ajustar cada vértice del triángulo (deslizando el vértice a lo largo de una línea paralela al lado opuesto) para que sea un vértice de un triángulo isósceles. Esto produce un triángulo equilátero y por lo tanto establece:

> De todos los triángulos de un área fija, el triángulo equilátero tiene el menor perímetro.

Es posible disponer cinco puntos en un plano de modo que tres puntos cualesquiera elegidos al azar entre ellos formen los vértices de un triángulo isósceles. (Los puntos se encuentran en los vértices de un pentágono regular.) Es imposible lograr la misma hazaña con seis o más puntos.

Véase también AAA/AAS/ASA/SAS/SSS; FIGURAS CONGRUENTES; TRIÁNGULO.

iteración La aplicación repetida de un procedimiento matemático en el que cada paso se aplica a la salida del paso anterior se denomina iteración. Por ejemplo, el MÉTODO DE HERON para calcular las raíces cuadradas de los números es un procedimiento iterativo.

Las iteraciones de una función f, comenzando con el valor x0 , están definidas por la secuencia de valores:

$x1 = f(x0), x2 = f(x1) = f(f(x0)), x3 = f(x2) = f(f(f(x0))),\ldots$

Si esta secuencia converge a un valor a, digamos, entonces:

$$a = \lim_{n\to\infty} xn = \lim_{n\to\infty} f(xn - 1) = f(a)$$

(Suponemos aquí que f es una FUNCIÓN CONTINUA.) Por lo tanto, la iteración proporciona un medio para resolver

Machine Translated by Google

ecuaciones de la forma x = f(x). Por ejemplo, repetidamente presionar el botón "coseno" en una calculadora producirá valores que se acercan a una solución a la ecuación x = cos x. (Como la calculadora solo puede mostrar ocho o 10 decimales, esto significa que los valores mostrados en la pantalla eventualmente se estabilizará.) NEWTON'S El MÉTODO se cita a menudo como el procedimiento iterativo más utilizado.

Véase también SECUENCIA CONVERGENTE; SISTEMA DINÁMICO TEM; DEFINICIÓN RECURSIVA.

Machine Translated by Google

j

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851) Alemán

Análisis Nacido el 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia (ahora Alemania), Carl Jacobi es recordado por su importante trabajo sobre la teoría de las funciones elípticas y por aplicar su trabajo de maneras asombrosas a la teoría de los números. Demostró una famosa conjetura de PIERRE DE FERMAT (1601-1665) afirmando que todo número puede escribirse como la suma de cuatro cuadrados perfectos. (Anteriormente, CARL FRIEDRICH GAUSS había probado que cada número es la suma de los tres NÚMEROS DE TASA DE FIGURA triangulares.) También hizo contribuciones importantes a la teoría de la dinámica en la física y realizó un estudio cuidadoso de la teoría de los DETERMINANTES. La fórmula generalizada de CAMBIO DE VARIABLE para DOBLE INTEGRALES (e integrales múltiplos superiores) contiene un determinante que hoy se nombra en su honor.

Jacobi completó toda su educación secundaria dentro de 1 año, pero se vio obligado a esperar varios años antes de cumplir la edad mínima de 16 años para entrar en el Universidad de Berlín. Durante este tiempo, Jacobi leyó trabajos avanzados en matemáticas e investigaciones realizadas trabajar en ecuaciones polinómicas. Jacobi se doctoró en Berlín en 1825 y ocupó un puesto de profesor en la Universidad de Königsberg un año después. Por esto tiempo, Jacobi ya había hecho algunos descubrimientos fundamentales en el campo de la TEORÍA DE NÚMEROS. Comenzó su trabajo sobre las funciones elípticas poco después.

La fórmula de cambio de variables en INTEGRAL CAL CULUS establece que si f es una función de una variable u, que a su vez es una variable de x, entonces la integral de f con respecto a u se puede calcular como:

$$\int_a^b f(u)\,du = \int_c^d f(u(x))\,\frac{du}{dx}\,dx$$

Aquí los límites de integración cambian para reflejar la cambio de variable. En su estudio de los determinantes, Jacobi demostró, en dos dimensiones, que si f(u,v) es un función de dos variables, con u y v cada función de x e y, entonces el cambio de variable apropiado fórmula se convierte en:

$$\iint_R f(u,v)\,du\,dv = \iint_S f(u(x,y),v(x,y))\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right| dx\,dy$$

donde R es una región en el plano ultravioleta, S es el correspondiente región de formación en el plano xy, y $\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right|$ representa el determinante de la MATRIZ 2 × 2 de DERIVADAS PARCIALES. Un resultado análogo se aplica para triple y integrales múltiplos superiores. Tales determinantes son hoy llamados jacobianos. Aunque el matemático francés AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) había descubierto antes estas fórmulas de transformación, era Jacobi, quien desarrolló por primera vez la teoría de las funciones determinantes en su completa publicación de 1841 De determinatibus funcionalibus (Functional determinantes).

Machine Translated by Google

Jacobi era un apasionado de la investigación teórica y una vez pronunció la siguiente defensa de dedicarse a la ciencia por sí misma: “El único objetivo de la ciencia es el honor de la mente humana, y desde este punto de vista una pregunta sobre números es tan importante como una pregunta”. pregunta sobre el sistema del mundo.”

Jacobi murió de viruela el 18 de febrero de 1851.

Jiuzhang suanshu (Chiu-chang Suan-shu) Ver CHI MATEMÁTICAS NESAS.

Jordán, Marie Ennemond Camille (1838-1922)
Francés Topología, Álgebra abstracta, Ingeniería Nacido el 5 de enero de 1838 en Lyon, Francia, Camille Jordan es recordado por su trabajo sobre los grupos de PERMUTACIÓN y la teoría de ecuaciones. Reavivó el interés por la importante obra de ÉVARISTE GALOIS y amplió muchas de sus ideas y ofreció importantes contribuciones nuevas. El trabajo posterior de Jordan sobre ANÁLISIS incluye el famoso teorema que ahora lleva su nombre.

Jordan se formó y trabajó durante toda su vida como ingeniero. Su interés por la TEORÍA DE GRUPOS estuvo motivado por el estudio matemático de las estructuras cristalinas. En muchos aspectos, definió este campo de estudio con la publicación de su texto de 1870 Traité des substitutions et des functions algebraique (Tratado sobre permutaciones y ecuaciones algebraicas), el primer libro publicado sobre el tema. Este trabajo estimuló una importante investigación matemática adicional sobre el tema durante todo el siglo que siguió. Jordan recibió el premio Poncelet de la Académie des Science por la pieza.

Después del lanzamiento de su famoso trabajo, Jordan continuó trabajando en álgebra, estableciendo resultados importantes en los campos de ÁLGEBRA LINEAL, TEORÍA DE NÚMEROS, ECUACIONES DIFERENCIALES, mecánica y SERIE DE FOURIER. El trabajo en estos últimos campos lo llevó a los temas de TOPOLOGÍA y análisis, y al estudio de los grupos continuos, que ocuparon la parte final de su carrera.

Jordan murió en París, Francia, el 22 de enero de 1922. De 1961 a 1964, René Garnier y Jean Dieudonné recopilaron todo el trabajo de Jordan y publicaron la serie de cuatro volúmenes Oeuvres de Camille Jordan (La obra de Camille Jordan).

Un punto de confusión debe ser resuelto. Aunque Jordan trabajó en el campo del álgebra matricial, el método de ELIMINACIÓN DE GAUSS, a menudo llamado Gauss La eliminación de Jordan no lleva el nombre de Camille Jordan, sino del topógrafo Wilhelm Jordan (1842-1899). W. Jor dan usó este método de eliminación para analizar adecuadamente los errores de medición. (Sin embargo, la "forma canónica de Jordan" de una matriz se debe a Camille Jordan).

Véase también TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN.

Teorema de la curva de Jordan En 1893, la matemática francesa MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN estableció un resultado fundamental:

> Cualquier lazo dibujado en el plano que no se corta a sí mismo divide el plano en dos partes distintas: una interior y una exterior.

Este teorema absolutamente obvio, ahora llamado teorema de la curva de Jordan, es sorprendentemente difícil de probar. Su validez dice algo significativo sobre la geometría y la estructura de la superficie sobre la que se dibuja la curva. Por ejemplo, los círculos dibujados en un plano o una esfera ciertamente dividen esas superficies en dos partes, pero este no tiene por qué ser el caso de un círculo dibujado en un TORUS, por ejemplo: un "bucle" que circunnavega la rosquilla no separa la superficie en dos piezas distintas. Primero se debe desarrollar una comprensión clara de la geometría del espacio antes de que se puedan demostrar resultados como el teorema de la curva de Jordan. Este es un tema sutil y difícil. El matemático estadounidense Oswald Veblen (1880–1960) fue el primero en demostrar la validez del teorema.

El problema de Josefo Este famoso acertijo matemático se basa en la difícil historia de Josefo Flavio, un líder militar judío que luchó contra los romanos en el pueblo de Jotapata durante el siglo I d.C. Se dice que la batalla, que tuvo lugar en la primavera del 67, se perdió. En lugar de someter su destino a los ritmos de los romanos, los hombres de Josefo se refugiaron brevemente en una cueva, donde votaron por suicidarse en grupo.
Aunque Josefo no estuvo de acuerdo con este plan, no se opuso abiertamente a él. En cambio, sugirió que procedieran de la manera más ordenada posible.
Propuso que se sentaran en un círculo y mataran humanamente a cada tercer hombre hasta que solo quedara una persona. Esa persona entonces se suicidaría. Josefo, se dice, hábilmente se posicionó para ser el último sobreviviente. En lugar de suicidarse, se entregó a los romanos.

Machine Translated by Google

Esta historia conduce al siguiente problema matemático general:

> Suponga que N participantes, numerados 1, 2, …, N, se sientan en un círculo y comienzan a contar cada enésima persona. Cada persona así seleccionada es llamada "fuera" y abandona el juego. El conteo continúa hasta que el último participante es declarado ganador del juego. Dado el tamaño del grupo, ¿es posible predecir de antemano quién será el ganador? Suponga que el conteo comienza con el jugador 1.

La siguiente tabla muestra la posición del ganador, contando cada tercera persona, para juegos que involucran N = 1 a N = 15 personas:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
W(N)	1	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13	2	5

Los números que surgen se pueden analizar de la siguiente manera: un juego con N jugadores se convierte en un juego con N–1 jugadores tan pronto como se llama a la primera persona, excepto que el inicio del juego N–1 se mueve tres lugares.
Por lo tanto, si W(N) denota al ganador de un juego de N jugadores, tenemos W(N) = W(N–1) + 3. Sin embargo, es posible que sea necesario ajustar esta fórmula para tener en cuenta posibles "conteos". alrededor del círculo completo.” Por ejemplo:

> Claramente W(1) = 1.
>
> Sumar 3 da W(2) = 4. Pero, contando alrededor del círculo, vemos que la posición cuatro en un juego de dos jugadores es en realidad el jugador 2. Por lo tanto, W(2) = 2.
>
> Sumar tres da W(3) = 5. Pero, contando alrededor del círculo, vemos que la posición cinco en un juego de tres jugadores es en realidad el jugador 2. Por lo tanto, W(3) = 2,
>
> etcétera.

De esta forma podemos computar todas las entradas de la tabla sin tener que realizar el juego. Otras versiones del juego se pueden analizar de manera similar.

La paradoja de Jourdain En 1913, el matemático francés Philip Jourdain propuso una variación de la famosa PARADOJA DEL MENTIROSO , ahora llamada a veces la paradoja de las cartas. En un lado de una tarjeta está impreso: "La declaración en el otro lado de esta tarjeta es verdadera", y en el reverso: "La declaración en el otro lado de esta tarjeta es falsa". Ninguna oración puede ser verdadera o falsa, porque la declaración del reverso implica lo contrario.

Vale la pena señalar que si, en cambio, ambas oraciones dicen: “La declaración del otro lado de esta tarjeta es falsa”, entonces no ocurre ninguna paradoja; es simplemente el caso de que solo una de las oraciones es realmente falsa y la otra es verdadera. Si, por otro lado, ambas oraciones dicen: "La declaración en el otro lado de esta tarjeta es verdadera", entonces ambas declaraciones podrían ser verdaderas, o ambas podrían ser falsas.

Véase también AUTOREFERENCIA.

problema de llenado de jarras Una categoría famosa de problemas de decantación contiene rompecabezas del siguiente tipo:

> Dada una jarra de 3 galones y una jarra de 5 galones (sin ninguna marca), ¿es posible sacar exactamente 1 galón de agua de un pozo?

Como a uno no se le dan los medios para medir el contenido exacto de una jarra parcialmente llena, nos quedan solo tres maniobras permitidas:

1. Llene completamente una jarra vacía del pozo 2.
Vacíe completamente una jarra llena en el pozo 3.
Vierta agua de una jarra a otra, llenando o vaciando completamente una jarra en el proceso

Este problema en particular tiene fácil solución: llene completamente la jarra de 3 galones y vierta su contenido en la jarra de 5 galones. Vuelva a llenar la jarra de 3 galones y vierta parte de su contenido para llenar la jarra de 5 galones. Esto deja (y de esto estamos seguros) precisamente 1 galón de agua en la jarra de 3 galones y 5 galones de agua en la segunda. Ahora vacíe la jarra de 5 galones.

En esta solución, la jarra de 3 galones se llenó dos veces y la jarra de 5 galones se vació una vez. Si contamos +1 cada vez que se llena una jarra y –1 cada vez que se vacía, la solución descrita anteriormente se puede representar por la ecuación:

$$2 \times 3 + (-1) \times 5 = 1$$

Sorprendentemente, cualquier solución a la ECUACIÓN DIOFANTINA $x \times 3 + y \times 5 = 1$ corresponde a una solución al problema de llenar la jarra. (Por ejemplo, $(-3)\times 3 + 2\times 5 = 1$ representa una solución en la que la jarra de 5 galones está

Machine Translated by Google

completamente dos veces y la jarra de 3 galones completamente vacía tres veces). Como 1 es el MÁXIMO COMÚN FACTOR de 3 y 5, el ALGORITMO EUCLIDEO proporciona soluciones a la ecuación x × 3 + y × 5 = 1, y por lo tanto a la problema de llenado de jarras.

Como variante preguntamos: ¿es posible obtener exactamente 1 galón de agua usando un cántaro de 9 galones y un cántaro de 15 galones? Esto requeriría encontrar una solución a la ecuación x × 9 + y × 15 = 1. Si hubiera una solución a este problema, entonces 1 sería una combinación de dos múltiplos de 3, y por lo tanto él mismo un múltiplo de 3. Esto, por supuesto, es absurdo y no hay solución para este problema. Este tipo de argumento se puede usar para demostrar que se pueden obtener d galones de agua de una jarra de un galón y una jarra de un galón b si, y solo si, d es un múltiplo del máximo común divisor de a y b.

Véase también BICONDICIONAL.

Conjunto Julia Ver FRACTAL.

Machine Translated by Google

k

al-Kashi, Jamshid Mas'ud (ca. 1380-1429) iraní
Aritmética, Astronomía Nacido en Kashan, Irán, al Kashi es mejor recordado en matemáticas por sus primeros uso de decimales para representar fracciones y aproximar números reales, dos siglos antes que los europeos los eruditos desarrollaron la misma técnica. su famoso texto, La clave de la aritmética, terminado el 2 de marzo de 1427, describe todas las matemáticas necesarias para aquellos que estudian astronomía, agrimensura, arquitectura y contabilidad. Al-Kashi desarrolló técnicas iterativas para extraer raíces n-ésimas y para resolver ECUACIONES CÚBICAS y CUÁRTICAS, y dio una estimación del valor de π correcta a 16 decimales. (Esto supera con creces el logro de los antiguos eruditos griegos y chinos que aproximado π como una fracción correcta, en notación decimal, con seis decimales.)

Que al-Kashi y sus contemporáneos optaron por representar cantidades como decimales indica un importante y sofisticado cambio en la comprensión histórica de "número". Por ejemplo, escribir π explícitamente como decimal, así como cualquier número puede escribirse así, cambió el estado de π de una construcción geométrica física (la relación de la circunferencia de un círculo a su diámetro) a un miembro ordinario de la clase de REAL NÚMEROS. Al-Kashi adoptó una perspectiva en la que todos las matemáticas se unificaron así mediante el estudio del sistema de números reales.

Al-Kashi estaba muy interesado en la astronomía y visto gran parte de su trabajo matemático como una herramienta para ayudar a los cálculos astronómicos. Técnicas de La trigonometría jugó un papel destacado. en su texto El Tratado sobre la cuerda y el seno, al-Kashi presentó tablas de valores de seno y enumeró un valor de sen(1°) con una precisión de 16 lugares decimales. Esto permitió extremadamente Cálculos astronómicos precisos. En una nota puramente matemática, al-Kashi también trabajó en la TRISECCIÓN UN problema de ÁNGULO, notando que el obstáculo detrás de él se reduce a uno de resolver una ecuación cúbica. Aplicar técnicas iterativas, al-Kashi fue capaz de proporcionar una enfoque innovador del problema, uno que encontrar soluciones aproximadas a cualquier grado prescrito de exactitud. Académicos europeos que trabajan en el mismo problema a lo largo de la Edad Media y el Renais sance desconocían el trabajo de al-Kashi.

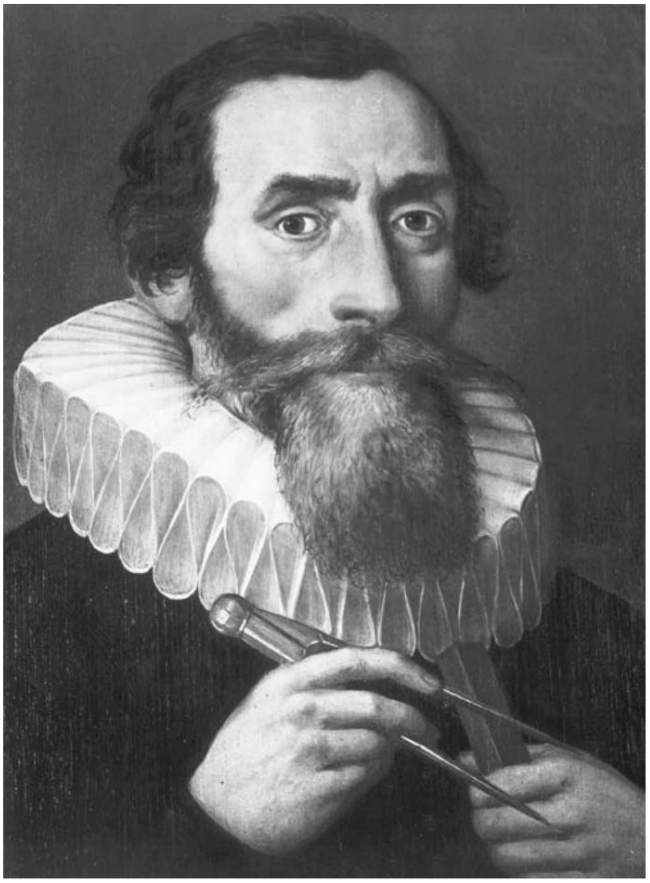
Método de Kendall Ver CORRELACIÓN DE RANGO.

Kepler, Johannes (1571-1630) Astronomía alemana , Cálculo Nacido el 27 de diciembre de 1571 en Württemberg, Alemania, Johannes Kepler es mejor recordado por sus tres leyes del movimiento planetario: que los planetas viajar en órbitas elípticas con el Sol en un foco; que lo hagan a un ritmo tal que la línea que une la planeta al Sol barre áreas iguales en unidades iguales de tiempo; y que el cuadrado del periodo de una órbita planetaria es proporcional al cubo del ancho de la ELIPSE que atraviesa. Todas estas leyes se basaron en observación detallada de la órbita de Marte. Como matemático, Kepler se destaca por dar la primera clara prueba de cómo funcionan los LOGARITMOS , por su estudio de la

Machine Translated by Google

geometría de los SÓLIDOS PLATÓNICOS, por su descubrimiento de dos poliedros regulares no convexos y por su tratamiento matemático de las propiedades de empaquetamiento compacto de las ESFERAS. (También explicó por qué la forma de panal es el diseño más eficiente para dividir una región plana en celdas separadas). Más importante aún, Kepler ideó un método para calcular los volúmenes de muchos SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN con la ayuda de INFINITESIMALES. Hoy esto se ve como una contribución significativa al desarrollo del CÁLCULO.

Kepler estudió astronomía y teología en la Universidad de Tübingen, Alemania. En ese momento, los astrónomos solo conocían seis planetas, y se suponía que todos estaban en órbita circular alrededor del Sol. En 1596 Kepler publicó Mysterium cosmographicum (Mys



Johannes Kepler, un eminente astrónomo del siglo XVII, se destaca por su introducción de las tres leyes del movimiento planetario. Estas leyes proporcionaron a Sir Isaac Newton la inspiración para desarrollar su ley de gravitación del inverso del cuadrado. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

del cosmos), en el que presentaba una teoría matemática que explicaba los tamaños relativos de las órbitas de los planetas. Convencido de que Dios había creado el universo según un plan matemático, Kepler planteó que si se dibujara una esfera sobre la trayectoria de Saturno y se inscribiera un CUBO en esta esfera, entonces la órbita de Júpiter estaría sobre una esfera inscrita en este cubo. Además, inscribir un TETRAEDRO en esta segunda esfera y una esfera dentro del tetraedro captura la trayectoria orbital de Marte. Continuando de esta manera, con un dodecaedro entre Marte y la Tierra, un icosaedro entre la Tierra y Venus y un octaedro entre Venus y Mercurio, Kepler produjo un modelo para los tamaños de las órbitas que tiene una precisión del 10 por ciento de los valores observados, muy dentro de los límites experimentales. error. Como solo hay cinco sólidos platónicos, este modelo también explicaba por qué, supuestamente, solo había seis planetas. Por supuesto, el modelo platónico del sistema solar de Kepler no es correcto: más tarde se descubrieron tres planetas más y, como el propio Kepler estableció más tarde, ninguna órbita de un planeta es circular.

Kepler se mudó a Praga cerca del cambio de siglo para trabajar con uno de los astrónomos más destacados de la época, Tycho Brahe (1546-1601). Cuando Brahe murió, Kepler lo sucedió como matemático imperial.

Brahe había mantenido extensos registros sobre la órbita de Marte y, a partir de ellos, Kepler se vio obligado a concluir que su órbita era una elipse. También notó, a partir de los datos, que la velocidad del planeta se alteró de tal manera que la línea que conecta al Sol con el planeta barrió áreas iguales en tiempos iguales. Estas dos leyes, cuando se extendieron a todos los planetas, se llaman hoy las dos primeras leyes de Kepler. Los publicó en su pieza de 1609 Astrono mia nova (Nueva astronomía). Diez años más tarde añadió una tercera ley: los cuadrados de los tiempos que tardan los planetas en completar una órbita son proporcionales a los cubos de las longitudes de los ejes mayores de sus órbitas elípticas.

Kepler no tenía ninguna explicación de por qué estas leyes eran ciertas más que la evidencia convincente de los datos. No fue hasta que SIR ISAAC NEWTON (1642-1727) formuló su famosa ley de la gravitación que las leyes de Kepler pudieron deducirse matemáticamente.

Durante su ceremonia de matrimonio en 1613 con su segunda esposa, Susanna (su primera esposa, Bárbara, murió en 1611), Kepler notó que los sirvientes medían el volumen de un barril de vino deslizando una varilla en diagonal a través de la boca del barril y midiendo la longitud que encajaba. . Comenzó a preguntarse por qué funcionaba este método. Esto lo llevó a su estudio de los sólidos de las revoluciones y la

Machine Translated by Google

publicación de su famosa pieza de 1615 Nova stereome tria doliorum (Nueva estereometría de las barricas de vino). Este trabajo fue desarrollado posteriormente por BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647).

En 1614, JOHN NAPIER publicó su descripción de las aritmias logarítmicas, un dispositivo matemático que inventó con el objetivo de ayudar a los astrónomos con sus grandes cálculos numéricos. Kepler estuvo encantado de conocer el trabajo de Napier y ayudó a proporcionar una explicación matemática del método de Napier. Kepler también publicó tablas de valores aritméticos logarítmicos con una precisión de ocho decimales.

Kepler murió el 15 de noviembre de 1630 en Ratisbona, Alemania. Su segunda ley del movimiento planetario desempeñó un papel crucial en la configuración del pensamiento de Sir Isaac Newton en el desarrollo de su teoría de la mecánica. Aunque Newton no mencionó directamente el trabajo de Kepler en sus primeros escritos, reconoció a Kepler como la fuente de inspiración de sus ideas en una conferencia que dio a los miembros de la ROYAL SOCIETY antes del lanzamiento de su famoso trabajo de 1687 Principia.

al-Khw–arizm–ı, Muhammad ibn M–us–a (ca. 780–850) Álgebra árabe Nacido en Khw– arizm, (ahora Khiva), uzbekistán, el erudito árabe Muhammad ibn M– us– a al-Khw– arizm– ı es recordado por escribir dos textos extraordinariamente influyentes. El primero, Al-jam' w'al-tafriq ib hisab al-hind (Suma y resta en la aritmética india), introdujo el sistema indio de numeración en Occidente, y un segundo trabajo provocó el desarrollo del álgebra. El título de su segundo trabajo, Hisab al-jabr w'al-muq-abala (Cálculo por restauración y compensación), cuando se tradujo al latín, produjo la misma palabra álgebra que usamos hoy.

Al-Khw– arizm– ı era un erudito en la Casa de la Sabiduría en Bagdad, una academia de aprendizaje y biblioteca fundada por el califa al-Mamun en 813. (Esta institución fue la primera biblioteca construida en cualquier parte del mundo desde la destrucción de la famosa Biblioteca de Alejandría.) Con una gran colección de textos filosóficos y científicos griegos, la biblioteca contrató a eruditos árabes para traducir manuscritos al árabe y realizar más investigaciones sobre los temas tratados.

Al-Khw– arizm– ı fue uno de esos eruditos que se interesó especialmente en los trabajos sobre matemáticas y astronomía.

En sus primeras obras famosas, Al-jam' w'al-tafriq ib hisab al-hind, al-Khw– arizm– ı, describía y explicaba las ventajas del sistema de lugares decimales que se usa en la India para escribir números y hacer aritmética. Este

El trabajo se tradujo al latín unos 300 años después y se convirtió en la fuente principal para los europeos que querían aprender el nuevo sistema de numeración. Es interesante notar que aunque este trabajo usa un símbolo para el cero (en árabe llamado sifr) al-Khw– arizm– no lo consideré como un número y lo usé solo como marcador de posición (para distinguir 203 de 23, por instancia).

Al-Khw– arizm– ı pretendía que su segunda obra famosa, Hisab al-jabr w'al-muq– abala, también se utilizara como guía didáctica. Su objetivo era ofrecer una serie de técnicas y métodos para resolver problemas muy prácticos en materia de comercio, herencia, derecho, agrimensura y arquitectura. Comenzando en un nivel extraordinariamente elemental, al-Khw– arizm– ı primero definió los números naturales y el acto de contar para luego pasar al tema principal de la primera sección de la pieza, a saber, resolver ecuaciones elementales lineales y cuadráticas. Es importante tener en cuenta que todas las matemáticas de al-Khw– arizm– ı se realizaron completamente en palabras y nunca se usaron símbolos. Llamó a un número una "unidad", una incógnita una "raíz" y una cantidad al cuadrado un "cuadrado".

Para resolver las ecuaciones al-Khw– arizm– utilicé dos operaciones a las que llamó al-jabr y al-muq–abala. El primero, "completar", es el proceso de eliminar cualquier término negativo de una ecuación. En notación moderna, esto convierte $x^2 = 3 + 5x$, por ejemplo. El segundo, $x^2 - 5x = 3$ "equilibrar", es el proceso de restar términos positivos de la misma potencia cuando se encuentran en cada lado de una ecuación. En notación moderna, esto significa reescribiendo $2 + 7 = 3x$ como $2x^2 + 7 = 3x + x$, por ejemplo, 5x x. Con estas dos maniobras, al-Khw– arizm– ı reduce todas las ecuaciones lineales y cuadráticas en seis tipos básicos, que enumera. El resto de esta parte del texto está dedicado a resolver estas ecuaciones. La práctica estándar actual de COMPLETAR EL CUADRADO se describe en esta sección.

La siguiente parte del texto de al-Khw– arizm– ı consiste en aplicaciones y ejemplos resueltos. Debido a que muchos de los problemas eran de naturaleza geométrica, al-Khw– arizm– ı descartaría las soluciones negativas a los problemas y permitiría solo respuestas positivas. Reconoció que las ecuaciones cuadráticas pueden dar dos soluciones a un problema. Al-Khw– arizm– ı también calculó áreas de figuras geométricas simples, así como el volumen de una esfera, el cono y la pirámide, en esta sección. La sección final del texto se enfoca en las complicadas reglas islámicas para la herencia y no desarrolla ningún contenido matemático nuevo.

Machine Translated by Google

En el siglo X, España estaba bajo control islámico, y los eruditos europeos interesados en la cultura intelectual del mundo islámico viajaron a España para estudiar los textos árabes. Fue allí donde se descubrieron y tradujeron al latín las obras de Al-Khw– arizm– ı.

Al-Khw– arizm– ı también escribí textos sobre astronomía, el reloj de sol, el calendario judío y sobre geografía. Computó las latitudes y longitudes de más de 2400 localidades específicas en preparación para la construcción de un mapa mundial preciso.

Se cree que la palabra algoritmo se deriva del nombre de al-Khw– arizm– ı. Los eruditos europeos medievales, que intentaban traducir el nombre del erudito árabe al latín, llamaron a la práctica de usar números arábigos hindúes “algorismo”, del cual, a su vez, cualquier práctica o procedimiento general se conoció como “algoritmo”. El hecho de que una versión de su nombre se haya convertido en parte de nuestro vocabulario occidental ilustra hasta qué punto el trabajo de al-Khw– arizm– ı influyó en el desarrollo de la aritmética y el álgebra en Europa.

Klein, Felix Christian (1849–1925) Alemán Álgebra abstracta, Geometría, Topología Nacido el 25 de abril de 1849, el erudito Felix Klein es recordado por unir los campos dispares de GEOMETRÍA y ÁLGEBRA a través del estudio de las TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. Mostró que el análisis abstracto del álgebra de transformaciones a través de la TEORÍA DE GRUPOS conduce a una comprensión clara tanto de la GEOMETRÍA EUCLIDEA como de la GEOMETRÍA NO EUCLIDEA. En particular, demostró que la geometría euclidiana ordinaria puede demostrarse CONSISTENTE, es decir, libre de contradicciones, si, y sólo si, la geometría no euclidiana es coherente. Esto demostró, por primera vez, que las controvertidas teorías no euclidianas de la geometría tenían la misma importancia que la teoría de la geometría euclidiana ordinaria. En topología, la BOTELLA DE KLEIN lleva su nombre en su honor.

Klein recibió un doctorado en matemáticas de la Universidad de Bonn en 1868 después de completar una tesis explorando las aplicaciones de la geometría a la mecánica. Después de un breve período de servicio militar, Klein aceptó un puesto como profesor de matemáticas en Erlangen, Baviera, en 1872. Fue aquí donde comenzó su trabajo sobre el análisis de las transformaciones geométricas y la unificación de las geometrías euclidianas y no euclidianas. . Su enfoque del tema con un enfoque en "invariantes de grupo" fue extremadamente influyente, y el trabajo en este campo continúa hoy. (Se llama el "programa Erlangen" de Klein).

En 1886, Klein aceptó el cargo de director de departamento en la Universidad de Göttingen, donde permaneció hasta su jubilación en 1913. Fue tutor de estudiantes desde su casa en los años siguientes.

Además de realizar investigaciones de alto nivel en matemáticas, Klein también escribió artículos matemáticos destinados al público en general y fundó una enciclopedia matemática que supervisó hasta su muerte. Klein fue honrado con la elección a la ROYAL SOCIETY en 1885 y recibió la Medalla Copley de la Sociedad en 1912. Murió el 22 de junio de 1925 en Göttingen, Alemania.

Véase también GRUPO KLEIN-FOUR .

Botella de Klein La BANDA DE MÖBIUS es un objeto tridimensional que posee una sola superficie y un solo borde. UNA ESFERA y un TORUS (forma de rosquilla), por otro lado, son objetos con dos superficies, una superficie exterior y una superficie interior, que no poseen bordes. La botella de Klein es un objeto tridimensional alternativo con una sola superficie, similar a la de una banda de Möbius, pero sin bordes.

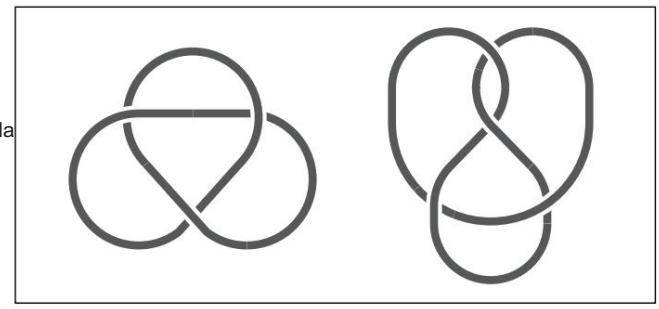
Uno puede modelar fácilmente estas superficies mencionadas con un par de pantalones. Por ejemplo, coser las dos aberturas para las piernas produce un tubo circular con un agujero para la cintura. Este agujero se puede reparar con una pieza de material para producir un modelo completo de un toro. Una botella de Klein se produce subiendo una pernera del pantalón, sobre ya través de la cintura de los pantalones y empujándola hacia abajo a través del tubo de la segunda pernera antes de coser las dos aberturas de las perneras. Nuevamente, el agujero para la pretina representa un agujero en la superficie, pero el objeto producido es, sin embargo, una botella de Klein (perforada). Desafortunadamente ya no es físicamente posible tapar el agujero con una pieza de material. Esto demuestra que la botella de Klein no existe propiamente en un universo tridimensional. (Uno puede imaginar, sin embargo, que el material que haría un parche para el agujero de la cintura ha sido “arrancado” a la cuarta dimensión. En este sentido, la botella de Klein es un objeto matemático válido en el espacio de cuatro dimensiones. .)

Con este modelo se puede comprobar que la superficie ideal de una botella de Klein sería, en efecto, unilateral: una hormiga que se arrastra por un lado de la tela del pantalón podría alcanzar cualquier otra parte del pantalón, a ambos lados de la misma.

Machine Translated by Google

el material, sin engañar nunca cruzando el
borde del agujero dado por la banda de la cintura.

Si uno corta un par de pantalones cosidos para hacer una botella de Klein (perforada) por la mitad a lo largo de la línea que sigue a la costuras interiores y exteriores de los pantalones, luego el modelo cae en dos pedazos, cada uno de los cuales se ve fcilmente que tiene surgido de una banda de Möbius. Esto muestra que una botella de Klein también puede ser pensada como la unión de dos botellas de Möbius. bandas unidas a lo largo de sus bordes. (Si uno físicamente intentos de unir dos bandas de Möbius, una pronto encuentra que es necesario perforar una banda para producir un agujero similar al agujero para la cintura de un par de pantalones.)



Los dos nudos con menos de cinco cruces

Grupo Klein-cuatro (viergruppe) Hay esencialmente solo dos GRUPOS con solo cuatro elementos. El primero es el "grupo cíclico" C4 dado por las simetrías rotacionales de un cuadrado, C4 = {1, R, R2 , R3 }, donde R representa una rotación de 90° de un cuadrado en el sentido de las agujas del reloj y 1 es el ELEMENTO DE IDENTIDAD, una rotación de cero grados Como una rotación de 360° equivale a no acción, tenemos que R4 = 1. La multiplicación en este grupo viene dado por la regla del producto de exponentes. Nosotros tener, por ejemplo, que R2 × R3 = R5 = R.

El segundo grupo con solo cuatro elementos se llama el grupo Klein-cuatro. Denotando sus elementos como 1, a, b, y c, siendo 1 el elemento identidad, tiene una tabla de multiplicar dada por:

×	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Este grupo también puede ser representado por un conjunto de simetrías de un cuadrado. Establecer a para significar una reflexión sobre un eje vertical, b una reflexión sobre un eje horizontal, yc una rotación de 180°. Tenemos, por ejemplo, que un reflexión vertical seguida de una rotación de 180° es la equivalente a una reflexión horizontal (c × a = b), y que dos reflexiones sobre el mismo eje conducen a la identidad (a × a = b × b = 1).

teoría de nudos La rama de la TOPOLOGÍA que estudia las propiedades de los bucles cerrados incrustados en tres espacio dimensional se llama teoría de nudos. cada bucle estudiado, llamado nudo, representa el camino trazado por un trozo de cuerda entrelazada en el espacio (sin auto-intersección) cuyos extremos libres se han unido. Si uno el trozo de cuerda enredado se puede transformar físicamente en una copia exacta de una segunda cuerda enredada (o al menos menos una imagen especular de ese segundo enredo), entonces decimos que los dos nudos que representan las cuerdas son equivalentes. En la actualidad, nadie conoce un procedimiento general garantizado para determinar con relativa facilidad si dos los nudos dados son equivalentes.

Los nudos se pueden representar en una página bidimensional. como una imagen de un bucle que se cruza por encima y por debajo de sí mismo. Es convencional dibujar la imagen de un nudo dado con el menor número de cruces posible. Una foto con solo uno o dos cruces equivalen a un lazo desenredado (el "desnudo"). Solo hay un nudo (hasta la equivalencia) con tres cruces y solo uno con cuatro cruces Cada uno se muestra arriba. Hay dos nudos distintos que requieren un mínimo de cinco cruces, tres que requieren un mínimo de seis cruces, y siete que requieren un mínimo de siete cruces. Después de esto, el número de nudos distintos con un número mínimo dado de cruces cuando se dibujan en una página crece rápidamente.

Los nudos fueron estudiados por primera vez por CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) y su alumno Johann Listing (1808–82). En 1877, el físico escocés Peter Tait clasificó todos los nudos con hasta siete cruces. También conjeturó que no "nudo alterno" (es decir, uno cuyo camino alternativamente cruza por encima y por debajo de sí mismo) es equivalente a la desanudar Un siglo después, el matemático neozelandés Vaughn Jones demostró que tenía razón.

En 1928, el matemático estadounidense James Waddell Alexander descubrió un medio teórico para asociar a cada nudo un POLINOMIO de tal manera que si dos

Machine Translated by Google

los nudos son equivalentes, entonces los polinomios asociados a ellos resultan ser los mismos. Esto proporcionó así un medio algebraico para distinguir nudos: si dos nudos tienen diferentes polinomios de Alexander, entonces no son equivalentes. En la década de 1960, el matemático británico John Horton Conway descubrió un método explícito para implementar los polinomios de Alexander, y en 1984 Vaughn Jones desarrolló una elección alternativa (más simple) de polinomio para asociar con cada nudo. (Fue con el "polinomio de Jones" que Jones pudo establecer la afirmación de Tait.) El mismo año, ocho matemáticos descubrieron de forma independiente otro polinomio que generaliza el enfoque de Jones. (Este polinomio se llama polinomio HOMFLYPT, un acrónimo de sus nombres).

Desafortunadamente, aún no se sabe si la técnica de Jones proporciona una correspondencia perfecta entre nudos distintos y polinomios distintos; es factible que dos nudos no equivalentes puedan producir el mismo polinomio de Jones. (Nadie ha visto todavía un ejemplo de esto).

La teoría de nudos es un área activa de investigación actual. Se utiliza en el estudio práctico de moléculas complicadas como el ADN, en el análisis de circuitos eléctricos y en la planificación de redes de calles y carreteras.

Aunque la imagen especular de un nudo se considera equivalente al nudo original, los matemáticos han demostrado que ningún nudo (excepto el desanudado) puede deformarse físicamente en su imagen especular. También es interesante notar que no existen nudos en el espacio bidimensional o tetradimensional (lo que significa que cualquier nudo en estos espacios puede deformarse y convertirse en un nudo).

Véase también TRENZA.

Curva de Koch Ver FRACTAL.

Kolmogorov, Andrey Nikolaevich (1903–1987) Ruso Teoría de la probabilidad, Análisis, Sistemas dinámicos Nacido el 25 de abril de 1903 en Tambov, Rusia, el erudito Andrey Kolmogorov es recordado por sus importantes contribuciones al campo de la teoría de la PROBABILIDAD y su innovador trabajo en el estudio de los SISTEMAS DINÁMICOS. También contribuyó al estudio de SERIE DE FOURIER, ANÁLISIS y TOPOLOGÍA. Aplicando su trabajo a los estudios planetarios, Kolmogorov también pudo establecer la estabilidad matemática de nuestro sistema solar.

Kolmogorov comenzó su carrera laboral como conductor ferroviario. En su tiempo libre, sin embargo, estudia matemáticas. matemáticas y física, y consiguió escribir un tratado sobre las leyes de la mecánica de SIR ISAAC NEWTON . En 1920 ingresó en la Universidad Estatal de Moscú. Cuando completó su licenciatura, había publicado ocho artículos influyentes sobre los temas de la TEORÍA DE CONJUNTOS y el análisis. Kolmogorov publicó otros 10 artículos antes de recibir su doctorado en 1929.

Dos años después, Kolmogorov fue nombrado profesor de matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú. En ese momento, comenzó a escribir Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Fundamentos de la teoría de la probabilidad), en el que intentó, con éxito, construir toda la teoría de la probabilidad a partir de un conjunto finito de axiomas utilizando únicamente el rigor lógico. Kol mogorov recibió fama nacional cuando se publicó la obra en 1933. La pieza fue traducida al inglés por Nathan Morrison en 1950.

En 1938, Kolmogorov fue nombrado jefe de departamento de probabilidad y estadística en el recién creado Instituto Matemático Steklov en Rusia. Poco después, la atención de Kolmogorov se centró en el estudio de la turbulencia y en 1941 escribió dos artículos importantes sobre la naturaleza del flujo de aire turbulento de los motores a reacción, estableciendo los principios fundamentales de la teoría de los sistemas dinámicos. Más tarde aplicó este trabajo al estudio del movimiento planetario.

Kolmogorov recibió muchos premios por su destacado trabajo. En 1939 fue elegido miembro de la URSS. Academy of Science, y en los años siguientes recibió ocho premios del estado y de la academia. También fue elegido miembro de varias academias extranjeras, incluida la Royal Statistical Society de Londres en 1956, la Academia Estadounidense de las Artes y las Ciencias en 1959, la Academia de Ciencias de los Países Bajos en 1963, la ROYAL SOCIETY de Londres en 1964 y la Academia francesa . Academia de Ciencias en 1968. Kolmogorov también recibió el Premio Internacional Balzan en 1962.

Kolmogorov murió en Moscú, Rusia, el 20 de octubre de 1987. Su trabajo allanó el camino para continuar la investigación en los campos del análisis de Fourier, las "cadenas de Markov" en la teoría de la probabilidad y el análisis topológico.

Kronecker, Leopold (1823–1891) Alemán Teoría de números Nacido el 7 de diciembre de 1823 en Liegitz, Prusia (ahora Legnica, Polonia), el matemático y filósofo Leopold Kronecker se destaca como erudito por sus considerables contribuciones al campo de la TEORÍA DE NÚMEROS . Como

Machine Translated by Google

filósofo, también se le recuerda como el primero en poner en duda la existencia de los NÚMEROS TRASCENDENTALES y de las jerarquías de los conjuntos infinitos, nociones planteadas por primera vez por KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897) y GEORG CANTOR (1845-1918). En un momento, Kronecker incluso llegó a negar la existencia de los NÚMEROS IRRACIONALES.

Kronecker ingresó a la Universidad de Berlín en 1841 y recibió un doctorado en matemáticas después de completar una tesis sobre el tema de la teoría algebraica de números 4 años después. En lugar de seguir una carrera académica, Kro Necker decidió regresar a Liegitz para ayudar con el negocio bancario familiar. Durante los 10 años que siguieron, se hizo bastante rico y luego tuvo el lujo de dedicarse a las matemáticas por su cuenta sin la necesidad de aceptar un puesto universitario. En 1855 regresó a Berlín y publicó una serie de artículos influyentes en rápida sucesión, que atrajeron la atención nacional. En 1861, Kronecker fue elegido miembro de la prestigiosa Academia de Berlín, lo que le valió el derecho a enseñar en la Universidad de Berlín, aunque no era miembro de la facultad. (En 1883, unos 20 años después, Kronecker obtuvo un puesto oficial en la universidad). Kro Necker también fue elegido para la Academia de París en 1868 y para la ROYAL SOCIETY de Londres en 1884.

Durante la década de 1870, Kronecker se interesó mucho por los nuevos enfoques indirectos que utilizaban los matemáticos para demostrar la existencia de ciertos tipos de números. Pero pronto llegó a sentir que tales prácticas no constructivas eran filosóficamente defectuosas. Por ejemplo, Cantor había demostrado que el conjunto de los números reales es “más infinito” que el conjunto de los NÚMEROS ALGEBRAICOS y, por lo tanto, los números que no son algebraicos (los llamados números trascendentales) deben existir.

En opinión de Kronecker, las matemáticas solo podrían basarse en cantidades finitas con un número finito de operaciones aplicadas a ellas. Un argumento como el de Cantor, por lo tanto, en el pensamiento de Kronecker no tenía sentido. Incluso cuando CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN (1852-1939) demostró en 1882 que el número específico π es trascendental, Kronecker felicitó a Lindemann por su hermosa prueba pero agregó que, de hecho, no había logrado nada, ya que los números trascendentales no existen.

Kronecker fue inflexible en sus puntos de vista y, en su pieza de 1887 Über den Zahlbergriff (Sobre la teoría de los números), intentó persuadir a la comunidad matemática de la necesidad absoluta de usar solo números directos y finitos.

tecnicas Es famoso por haber comentado una vez que “Dios creó los números enteros. Todo lo demás es obra del hombre” como un intento de devolver el pensamiento matemático a principios concretos. Tanto Weierstrass como Cantor se sintieron atacados personalmente por Knonecker y pensaron que estaba socavando deliberadamente sus propios programas de investigación.

Aunque muchos matemáticos de hoy no estarían de acuerdo con las opiniones de Kronecker, en ese momento se las tomó en serio, y las ideas que Kronecker presentó se ampliaron más tarde en el siglo siguiente. La práctica de usar solo enfoques directos y finitos para probar resultados en matemáticas se llama hoy constructivismo.

Kronecker murió el 29 de diciembre de 1891 en Berlín, Alemania.

La cuenta de Kruskal A principios de la década de 1980, el físico de Princeton, Martin Kruskal, descubrió una notable propiedad matemática que todos los pasajes de un texto escrito parecen poseer. Este fenómeno ahora se conoce como conteo de Kruskal.

Para ilustrar el principio, revise, por ejemplo, la conocida canción infantil:

Twinkle twinkle pequeña estrella,
Cómo me pregunto qué eres, Por
encima del mundo tan alto, Como
un diamante en el cielo.
Brilla, brilla, pequeña estrella,
cómo me pregunto qué eres.

Realice los siguientes pasos:

1. Seleccione cualquier palabra de la primera o segunda línea y cuente el número de letras que contiene.
2. Cuente tantas palabras hacia adelante a través del pasaje para llegar a una nueva palabra. (Por ejemplo, elegir la palabra estrella, con cuatro letras, te transportará a la palabra qué).
3. Cuente el número de letras en la nueva palabra y avance esa misma cantidad de lugares.
4. Repita este procedimiento hasta que no pueda continuar (es decir, contar hacia adelante lo sacará de la canción de cuna).
5. Observa la palabra final en la que has aterrizado.

Sorprendentemente, no importa con qué palabra comience esta tarea de contar, el procedimiento siempre lo lleva a la misma palabra en la línea final, es decir, la palabra usted.

Machine Translated by Google

Kruskal observó que este mismo fenómeno parece ocurrir con cualquier fragmento de texto lo suficientemente grande: contar hacia adelante de esta manera desde cualquier elección de palabra inicial lo lleva al mismo lugar al final de la página.
Esto proporciona una actividad divertida para que varias personas la realicen simultáneamente, todas trabajando con el mismo texto, pero comenzando con diferentes opciones de palabra inicial.

El fenómeno se puede explicar de la siguiente manera: imagine que en una primera lectura del texto, todas las palabras encontradas están encerradas en un círculo. Al aterrizar en cualquiera de estas palabras encerradas en un círculo en una ejecución posterior del experimento, ment llevará al jugador a la misma palabra final. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que una segunda ejecución del experimento no "acierte" en ninguna de las palabras previamente encerradas en un círculo? Si el pasaje es lo suficientemente largo, digamos que involucra 20 pasos, las probabilidades de “perder” una palabra dentro de un círculo cada vez son muy pequeñas, especialmente porque el pasaje típico en inglés contiene palabras razonablemente cortas.
Las estimaciones que calculan esta PROBABILIDAD muestran que es probable que tenga un valor inferior al 0,1 por ciento. Por lo tanto, con un 99,9 por ciento de certeza, dos caminos a través de un pasaje de texto coincidirán en algún punto.

Machine Translated by Google

L

Lagrange, Joseph-Louis (1736–1813) Italiano-francés Análisis, Mecánica, Álgebra abstracta, Teoría de números Nacido el 25 de enero de 1736 en Turín, Italia, Joseph-Louis Lagrange es recordado, entre otras cosas, por su texto definitivo de 1788 Mécanique analytique (Mecánica analítica), en la que plantea una exposición puramente formal y completamente rigurosa de cómo y por qué se mueven las cosas. En efecto, la obra resume todo el estado de la mecánica posnewtoniana del siglo XVIII. La publicación también es famosa por no presentar figuras ni diagramas. (Lagrange aparentemente sintió que las fórmulas que desarrolló capturaban la realidad física lo suficientemente bien como para que las imágenes no fueran necesarias). También publicó dos memorias importantes en 1769 y 1770, que combinó en un solo tratado de 1798, Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés (Tratado sobre la resolución de ecuaciones numéricas de todos los grados), sobre teoría de ecuaciones, en el que desarrolla principios generales para la resolución de ecuaciones POLINOMALES hasta el grado cuatro a través de principios que hoy denominaríamos TEORÍA DE GRUPOS. En esta obra aparece el famoso “teorema de Lagrange” procedente del estudio de los grupos, así como la famosa fórmula de INTERPOLACIÓN que lleva su nombre. También hizo contribuciones significativas en el campo de la TEORÍA DE NÚMEROS, demostrando en 1770, por ejemplo, que todo número entero positivo es la suma de cuatro números cuadrados. Además, en 1771, fue el primero en probar lo que hoy se llama “teorema de Wilson”, que un número n es PRIMO si, y solo si, (n – 1)! + 1 es divisible por n.

Aunque Lagrange nació en Turín y pasó la primera parte de su vida allí, finalmente se estableció en París y se identificó como francés. el fue la introduccion ducido a los temas de física y matemáticas en el Colegio de Turín. Primero estudió los principios de la TAUTOCRONA y, en 1754, había publicado algunos descubrimientos importantes sobre el tema. Compartió los resultados con LEONHARD EULER (1707-1783), quien quedó muy impresionado. A la temprana edad de 19 años, Lagrange fue nombrado profesor de matemáticas en la Real Escuela de Artillería de Turín. Allí hizo un progreso significativo en el estudio general de la mecánica y escribió una serie de artículos influyentes. En 1756 fue elegido miembro de la Academia de Berlín por recomendación de Euler.

Durante los 20 años que Lagrange permaneció en la Academia de Berlín, trabajó en una amplia variedad de temas. Sentó las bases de un tema que se conocería como “dinámica” e hizo contribuciones significativas a los estudios de mecánica de fluidos, a la integración de ecuaciones diferenciales y a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, así como a la estudio de cuerdas vibrantes y la propagación del sonido. En 1766 sucedió a Euler como director de matemáticas en la Academia de Berlín, y en 1772 compartió uno de los premios bienales de la Académie des Sciences de París con Euler por su trabajo sobre el "problema de los tres cuerpos" de la física. Volvió a ganar un premio de la Paris Académie en 1774 por su trabajo sobre el movimiento de la luna, y nuevamente en 1780 por su estudio matemático del movimiento planetario.

En 1787, Lagrange dejó Berlín para ocupar un puesto en la Académie des Sciences de París. Publicó su obra Mécanique analytique al año siguiente. Él también

Machine Translated by Google

trabajó con la Paris Académie para estandarizar la pesos y medidas del día. El comité formuló el sistema métrico y abogó por el general uso de una base decimal.

Los logros significativos de Lagrange fueron reconocidos por el emperador Napoleón en 1808, cuando fue nombrado miembro de la Legión de Honor y conde de la imperio. Cinco años más tarde también fue nombrado Gran Cruz de la Ordre Impérial de la Réunion. El murió dentro París, Francia, el 10 de abril de 1813.

El impacto de Lagrange en las matemáticas, especialmente en física matemática, todavía se siente hoy. Muchos conceptos fundamentales en mecánica y cálculo multivariable, como el lagrangiano (la diferencia entre energía cinética y energía potencial de un conjunto de partículas), la descripción lagrangiana (una medida de la deformación de un cuerpo físico) y los multiplicadores de Lagrange en cálculo—desempeñan un papel vital en el estudio actual de estas asignaturas.

Véase también FÓRMULA DE LAGRANGE .

Fórmula de Lagrange (fórmula de interpolación de Lagrange)
Dada una colección de puntos en el plano, a veces es deseaba encontrar la fórmula para una función que pasa por cada uno de esos puntos. Por ejemplo, un científico puede buscar una fórmula para una función que se ajuste a todos los datos valores obtenidos de un experimento. A finales de 1700, matemático ítalo-francés JOSEPH-LOUIS LAGRANGE sugirió la siguiente fórmula de INTERPOLACIÓN :

> Si (a1 ,b1), (a2 ,b2), …, (an ,bn) son una colección de puntos en el plano, con los valores ai distintos, entonces
>
> $$f(x) = b_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)} + b_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)} + \cdots + b_n \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}$$
>
> es un POLINOMIO, de grado n – 1, que pasa por cada uno de los puntos.

Esta fórmula se conoce hoy como la fórmula de Lagrange. Se puede comprobar que funciona sustituyendo x = a1 en ver que f(a1) = b1 , y así sucesivamente.

Como ejemplo, considere los puntos (1,2), (2,5) y (3,1) en el plano. La fórmula de Lagrange muestra que la cuadrático

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 5\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 1\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$
$$= \frac{7}{2}x^2 - \frac{27}{2}x + 8$$

pasa por cada uno de ellos.

Muchas pruebas de inteligencia piden a los participantes que identifiquen "el siguiente número en la secuencia". La fórmula de Lagrange proporciona un medio para justificar absolutamente cualquier respuesta a tal pregunta. Por ejemplo, el próximo número en la secuencia 2,4,6,... bien podría ser 103. Podemos argumentar que la secuencia sigue la fórmula: $u_n = \frac{95}{6}n^3 - 32n^2 + \frac{1057}{6}n - 95$ (Aplicar el 95 de Lagrange fórmula a los puntos (1,2), (2,4), (3,6) y (4,103).)

Lambert, Johann Heinrich (1728–1777) Suizo alemán Geometría, análisis, teoría de números, física

Nacido el 26 de agosto de 1728, el erudito Johann Lambert es mejor recordado como el primero en probar, en 1761, que π es un NÚMERO IRRACIONAL. También trabajó en Euclides. POSTULADO PARALELO y estuvo cerca del descubrimiento de GEOMETRÍA NO EUCLIDEA. Lambert también desarrolló la notación y la teoría de las FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

En 1766 Lambert escribió Theorie der Parellellinien (Sobre la teoría de las líneas paralelas), en el que postuló la existencia de superficies en las que los triángulos tienen sumas angulares de menos de 180°, dando así un ejemplo de una geometría en la que el postulado de las paralelas sería FALSO. (Dicha superficie fue descubierta más tarde. Se llama pseudoesfera.) Lambert probó que en esta geometría, la suma de los ángulos de un triángulo no sería constante, y de hecho aumentaría (pero nunca hasta igualar 180°) a medida que su área disminuye.

En 1737 LEONHARD EULER había demostrado que e y e^2 ambos son irracionales. En el documento “Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités tran scendantes circulaires et logarithmiques” (Memorias sobre algunas propiedades notables de las cantidades trascendentales circulares y logarítmicas) presentado a la Berlín Academia de Ciencias en 1761, Lambert proporcionó una prueba de que si x es un número racional diferente de cero, entonces tampoco e^x ni tan x puede ser racional. Así Lambert

Machine Translated by Google

había logrado extender el resultado de Euler al establecer que e elevado a una potencia fraccionaria, $e^{\frac{\pi i}{4}}$, nunca es racional, y, además, notando que $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, eso $\frac{\pi}{4}$ tampoco puede ser racional. Lambert también conjeturó que tanto e como π son NÚMEROS TRASCENDENTALES. (No era para otro 100 años que, en 1873, el matemático francés Charles Hermite probó la trascendencia de e, y el alemán matemático CARL LOUIS FERDINAND VON LINDE MANN, en 1883, la trascendencia de π.)

Lambert también trabajó en la teoría de la PROBABILIDAD y, en física, hizo importantes contribuciones a la estudio del calor y la luz. Murió en Berlín, Alemania, el 25 de septiembre de 1777. Gran parte del trabajo de Lambert, aunque significativo en su época, puede verse hoy como haber pavimentado el camino para que otros logren mayores avances.

Laplace, Pierre-Simon, marqués de (1749–1827)
Francés Mecánica, Análisis, Ecuaciones diferenciales, Teoría de la probabilidad Nacido el 23 de marzo de 1749 en Normandía, Francia, el erudito Pierre-Simon Laplace es el mejor recordado por su influyente tratado de cinco volúmenes Traité de mécanique céleste (Mecánica celeste), publicado entre los años 1799 y 1825. En esta obra Laplace trató de desarrollar un método matemático riguroso comprensión del movimiento de los cuerpos celestes, incluyendo las diversas anomalías y desigualdades que fueron observados en sus órbitas. Al hacerlo, Laplace hizo avances significativos en el desarrollo de ECUACIONES DIFERENCIALES, ecuaciones DIFERENCIALES , PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA. Fue el primero en extender SIR la teoría de la gravitación de ISAAC NEWTON al estudio de todo el sistema solar. En 1812 Laplace también publicó su Théorie analytique des probabilités (Teoría analítica de probabilidad), que avanzó considerablemente en los temas de probabilidad y estadística.

A la edad de 16 años, Laplace ingresó en la Universidad de Caen. y pronto descubrió su amor por las matemáticas. Tres años más tarde, sin terminar su carrera, Laplace se mudó a París para trabajar con el matemático JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783), manteniéndose a sí mismo como profesor de matemáticas en la École Militaire. Por cuando tenía 24 años, Laplace había producido 13 artículos de alta calidad sobre los temas de CÁLCULO INTEGRAL, mecánica y astronomía física, lo que le valió atención nacional. Continuó produciendo resultados fundamentalmente importantes, y pronto fue considerado como uno de los de los científicos más influyentes de su época.

En 1773, Laplace fue elegido miembro de la Academia de París. des Sciences y se le otorgó un puesto de alto nivel allí 12 años después Fue asignado a un comité especial. de la Académie de París en 1790 con el encargo de estandarizar todos los pesos y medidas europeos.

El trabajo de Laplace sobre la mecánica celeste fue revolucionario. En 1786 había probado que las pequeñas perturbaciones observadas en el movimiento orbital de los planetas siempre permanecerá pequeño, constante y autocorrector, y en 1796 fue el primero en proponer la idea que el sistema solar se originó a partir de la contracción y enfriamiento de una gran nebulosa de gas incandescente en rotación y, en consecuencia, aplanada. En 1799 publicó los dos primeros volúmenes de su famosa Mécanique . céleste, en el que describió las leyes generales de movimiento de sólidos y fluidos, aplicó la ley universal de la gravedad a los estudios del sistema solar, y desarrolló métodos para analizar la diferencia y el diferencial



Pierre-Simon Laplace, un eminente físico matemático de la del siglo XIX, realizó aportes fundamentales al estudio de movimiento planetario aplicando la teoría de la gravitación de Sir Issac Newton a todo el sistema solar. También fue pionero en el trabajo en el teoría de la probabilidad y estadística. (Foto cortesía de Topham/La imagen funciona)

Machine Translated by Google

ecuaciones que surgen en estos estudios. Volúmenes posteriores estudió las fuerzas locales que actúan entre las moléculas y el efecto a gran escala de estas interacciones locales. Él aplicó este trabajo al estudio de la presión y la densidad, la naturaleza de la gravedad, la acción capilar, el sonido, la refracción y la teoría del calor.

En 1812 Laplace publicó su famoso artículo sobre el tema de probabilidad. Motivado por el análisis de errores en la observación, Laplace desarrolló la teoría de la probabilidad a partir de principios iniciales y aclaró la fundamentos matemáticos de muchos aspectos de la tema. Proporcionó su propia definición de probabilidad. y lo usó para justificar las manipulaciones matemáticas básicas. La obra habla de sus famosos MÍNIMOS CUADRADOS MÉTODO, el PROBLEMA DE LA AGUJA DE BUFFON y el MÉTODO DE BAYES TEOREMA. Al analizar la distribución de errores en las observaciones científicas, Laplace también aplicó este trabajo a la determinación precisa de las masas de Júpiter, Saturno y Urano, así como para mejorar la triangulación métodos de agrimensura y determinación correcta de longitud y latitud en geodesia.

Bajo Napoleón, Laplace se convirtió en conde de los imperio en 1806 y se le otorgó el título de marqués en 1817. Laplace escribió que creía que la naturaleza de el universo es completamente determinista, lo que significa que los movimientos de todos los objetos del sistema solar están predeterminados por las condiciones iniciales al comienzo del universo. Cuando Napoleón le preguntó dónde encajaba Dios en esta opinión, se dice que Laplace respondió: "No tengo necesidad de esa hipótesis."

Laplace murió en París, Francia, el 5 de marzo de 1827. Se No es posible exagerar la influencia que tuvo Laplace sobre el desarrollo de la teoría matemática de mecánica. una serie de conceptos fundamentales, como el operador de Laplace en la teoría del potencial y el La transformada de Laplace en el estudio de las ecuaciones diferenciales se nombran en su honor.

Cuadrado latino Un **cuadrado latino** n × n es una disposición de las primeras n letras latinas A, B, C, en un D, ... disposición cuadrada de tal manera que ninguna fila o columna de esa matriz contiene dos letras idénticas. Por ejemplo, el siguiente arreglo es un cuadrado latino de 3 × 3:

A B C
TAXI
BCA

Un cuadrado latino se llama diagonal si, además, no se repite ninguna letra en ninguna de las diagonales del cuadrado. El siguiente, por ejemplo, es un cuadrado latino diagonal de 4 × 4:

A B C D
C DA B
D CB A
B AD C

Ningún cuadrado latino de 3 × 3 es diagonal.

Solo hay un cuadrado latino de 1 × 1, dos de 2 × 2 Cuadrados latinos (ninguno de los cuales es diagonal), 12 3 × 3 cuadrados latinos y 576 cuadrados latinos de 4 × 4. El número de cuadrados latinos de un orden dado crece extremadamente rápidamente, como muestra la siguiente tabla:

nota	Número de cuadrados latinos n × n
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161,280
6	812.851.200
7	61.479.419.904.000
8	108.776.032.459.082.956.800
9	5.524.751.496.156.892.842.531.225.600
10	9.982.437.658.213.039.871.725.064.756.920.320.000

Hay más cuadrados latinos de 15 × 15 que átomos en el universo (que los físicos calculan que son alrededor de 1081).

Dos cuadrados latinos del mismo orden se llaman mutuamente ortogonales si todos los pares de letras que aparecen cuando los dos cuadrados se superponen son diferentes. Por ejemplo, los dos cuadrados que se muestran a continuación son mutuamente ortogonales. Aquí hemos utilizado letras del Alfabeto griego para el segundo cuadrado. El resultante conjunto de pares de elementos que aparece se denomina Plaza greco-latina.

A B C D		αβγ δ	=	Aα Bβ Cγ Dδ
BADC	+	γδαβ		Bγ Aδ Dα Cβ
CDAB		δγβα		Cδ Dγ Aβ Bα
DCBA		βαδγ		Dβ Cα Bδ Aγ

Esta plaza resuelve primero el famoso "problema del oficial" planteado por LEONHARD EULER (1707-1783):

Machine Translated by Google

Disponga 16 oficiales, cada uno de uno de los cuatro regimientos posibles y de uno de los cuatro rangos posibles, en una disposición de 4 × 4 de modo que no haya dos oficiales en una fila o columna determinada que provengan del mismo regimiento, ni tengan el mismo rango.

Los cuadrados greco-latinos también se denominan a veces cuadrados de Euler. Los matemáticos han demostrado que no hay solución al problema de los oficiales para el caso de 36 oficiales de seis rangos diferentes de seis regimientos diferentes (ni para el caso de cuatro oficiales de dos regimientos de dos rangos), pero que todas las demás versiones del problema oficial tiene soluciones. En otras palabras, existen n × n cuadrados greco-latinos para todos los valores de n excepto n = 2 y n = 6.

Los cuadrados greco-latinos son importantes en el diseño de experimentos en estudios científicos. Por ejemplo, si se van a probar cuatro especies de tomate A, B, C y D con cuatro fertilizantes diferentes α, β, γ y δ, las parcelas se pueden distribuir de acuerdo con un cuadrado greco-latino para asegurarse de que cada especie de tomate y cada fertilizante aparece en cada fila y columna.

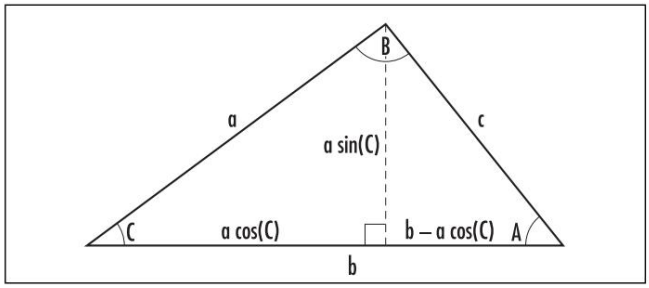
ley de los promedios Esta "ley" se refiere a la creencia incorrecta de que los resultados anteriores de ejecuciones independientes de un ensayo aleatorio influyen en los resultados de las ejecuciones que aún no han ocurrido. Por ejemplo, después de lanzar siete "cara" seguidas, la supuesta ley de los promedios dictaría que "cruz" es ahora un resultado más probable. Esto, por supuesto, no es el caso. La posibilidad de sacar cruz en el octavo lanzamiento sigue siendo del 50 por ciento. La ley de los promedios es una mala interpretación común de la matemáticamente correcta LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS. Los jugadores a menudo sienten que después de una larga serie de pérdidas, las posibilidades de ganar la próxima mano deben ser considerablemente mayores.

ley de los cosenos/ley de los senos (regla del coseno, regla del seno) Sean a, b y c las tres longitudes de los lados de un triángulo con ángulos interiores como se muestra.

La ley de los cosenos afirma:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

(con declaraciones análogas para los ángulos A y B). Cuando C es un ángulo recto, este resultado se reduce a un enunciado del TEOREMA DE PITÁGORAS . Por tanto, la ley de los cosenos puede considerarse como una generalización de este famoso resultado.



Estableciendo la ley de los cosenos

La ley se puede probar dibujando una altura desde el vértice del triángulo y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que contiene la altura y el lado c en la imagen de arriba.

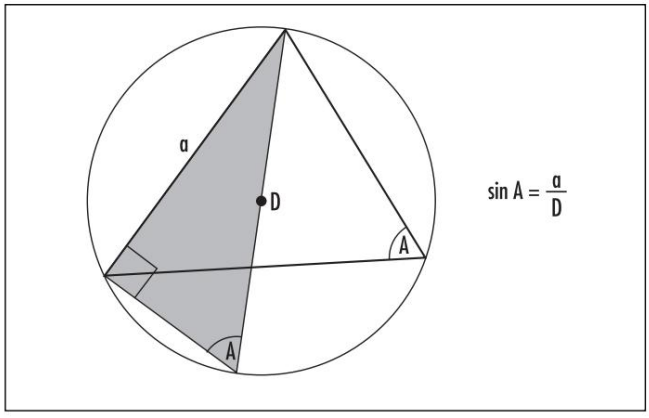
La ley de los senos afirma:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Esto se puede demostrar dibujando las alturas del triángulo. Por ejemplo, la altura arriba es simultáneamente de longitud asen(C) y csen(A), estableciendo así parte de la ley de los senos.

Dibujar el CIRCUNCIRCULO al triángulo y calcular el seno del ángulo A en el triángulo sombreado que se muestra (con el mismo ángulo periférico A) establece:

$$\frac{a}{\operatorname{pecado}(A)} = D$$



Estableciendo la ley de los senos

Machine Translated by Google

donde D es el diámetro del circuncírculo. (Aquí hacemos uso del hecho de que cualquier ángulo subtendido desde un diámetro es de 90°). Así, las tres cantidades expresadas en la ley de los senos son iguales al diámetro de la circuncircunferencia del triángulo, ofreciendo así una prueba alternativa de la ley .

Véase también TEOREMAS DEL CÍRCULO.

ley de los grandes números Si uno lanza una moneda justa 10 veces, uno esperaría, en promedio, que cinco de esos lanzamientos fueran "cara". Por supuesto, en cualquier serie de 10 lanzamientos, cualquier número de caras es posible, incluso una serie de 10 caras seguidas, pero esto es extremadamente improbable. Es probable que el número de cabezas realmente observado en un experimento sea cuatro, cinco o seis, cerca del 50 por ciento. (La probabilidad de que aparezca cualquier recuento particular de caras se describe mediante la DISTRIBUCIÓN BINOMIAL).

En una racha de 100 lanzamientos, esperaríamos que los efectos de rachas excesivas de caras o cruces se "promediaran" y que la proporción de caras obtenida fuera aún más cercana, en promedio, al "valor real" del 50 por ciento, y más cerca aún si realizamos un experimento de 1.000 o 10.000 lanzamientos, o más. Esta es la ley de los grandes números en acción. Precisamente, esta ley establece lo siguiente:

> Cuantas más veces se realiza un fenómeno aleatorio, más se aproxima la proporción de ensayos en los que se produce un resultado particular a la verdadera probabilidad de que se produzca ese resultado.

Si, por ejemplo, nunca apareció un 1 al lanzar un dado 10 veces, podemos estar seguros, sin embargo, de que la proporción de 1 que aparece en otros 100, 1,000, 10,000, … lanzamientos se acercará al valor de un sexto.

Muchos jugadores interpretan incorrectamente la ley de los grandes números como un método para predecir resultados de eventos aleatorios. (Ver LEY DE LOS PROMEDIOS).

La ley de los grandes números es una consecuencia matemática del TEOREMA DE CHEBYSHEV . Puede interpretarse como que si un fenómeno aleatorio produce resultados numéricos con un valor medio μ, entonces la media de N valores observados del fenómeno se aproxima al valor μ a medida que N aumenta. El teorema de Chebyshev está relacionado, ya que da medidas de cómo se distribuyen los valores sobre la media.

Véase también MÉTODO DE MONTE CARLO; ESTADÍSTICAS: DESCRIPTIVO.

ley de los senos (regla de los senos) Ver LEY DE LOS COSENOS/LEY DE SENOS.

ley de la palanca ARQUIMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) reconoció que dos pesos w1 y w2 colocados a distancias x1 y x2 , respectivamente, del punto de apoyo (punto de pivote) de una palanca simple se equilibrarán cuando x1w1 = x2w2 . Este principio se llama la ley de la palanca. Por ejemplo, un adulto que pesa el doble que un niño se equilibrará en un balancín si se sienta a la mitad de la distancia del punto de pivote que el niño.

Véase también CENTRO DE GRAVEDAD.

leyes del pensamiento El filósofo griego ARISTÓTELES (384–322 a. C.) identificó tres leyes de la lógica, todas tautologías (lo que significa que cada una tiene una TABLA DE VERDAD con valor constante T) que desde entonces se han considerado descripciones fundamentales de la forma en que pensamos. Sus tres leyes del pensamiento son:

1. Ley de no contradicción: No se da el caso de que algo pueda ser verdadero y no verdadero.
   Simbólicamente: $\neg[p \ (\neg p)]$
2. Ley del medio excluido: cada uno debe ser verdadero o no es cierto.
   Simbólicamente: $p \quad (\neg p)$
3. Ley de Identidad: Si algo es verdadero, entonces es verdadero.
   Simbólicamente: $p \rightarrow p$

Los matemáticos a menudo confían en la ley del medio excluido para establecer la validez de los resultados matemáticos: una PRUEBA INDIRECTA o una PRUEBA POR CONTRADICCIÓN demuestra que un enunciado p es verdadero mostrando que no puede ser falso. Sin embargo, no todos los filósofos (y matemáticos) están de acuerdo con este enfoque y cuestionan la validez de esta segunda ley. Por ejemplo, como demostró el matemático austriaco del siglo XX KURT GÖDEL , hay algunas afirmaciones en matemáticas que no se pueden probar ni refutar y, por lo tanto, no son ni verdaderas ni falsas. El movimiento constructivista acepta resultados establecidos por PRUEBA DIRECTA solamente.

Para ir más allá de la ley del tercero excluido, los lógicos han intentado generalizar la LÓGICA FORMAL para incluir tres posibles valores de veracidad: verdadero,

Machine Translated by Google

falso e indeciso. Otra generalización, llamada
FUZZY LOGIC, trata la verdad como una cantidad continua
con valores que van de 0 (totalmente falso) a 1 (totalmente
verdadero). Como ejemplo, en esta teoría la oración:

Esta oración es falsa.

se le asigna un valor de verdad de 1 / y se considera la mitad
2 , verdadero y medio falso. (Se llega a este valor de la siguiente
manera: primero observe que si a un enunciado p se le asigna un valor
de verdad v, que es 0 o 1, entonces el enunciado ¬p
tiene valor opuesto 1 – v, 1 o 0. Suponemos que esto
sigue siendo cierto incluso si v es de valor fraccionario. Si p representa
la oración: "Esta oración es falsa", entonces su
la verdad establece su falsedad, p → ¬p, y su falsedad su verdad, ¬p →
p. El valor de verdad v del enunciado oscila entre los valores v y 1 – v .

solo se produce un valor estable para v cuando v = 1 – v, lo que produce
el valor de verdad apropiado v = 1/2.)
Véase también ARGUMENTO; AUTOREFERENCIA.

coeficiente principal Para un POLINOMIO p(x) = anx + un-1x n– 1 + ... + a1x + a0, el coeficiente del mayor
potencia de la variable se llama coeficiente principal de
el polinomio Por ejemplo, el coeficiente principal de
el polinomio 2x 3 – 3x + 6 es 2, y el de x + 3 es 1. A
polinomio se llama mónico si su coeficiente principal es 1.

Al resolver una ecuación polinomial anx + un–1x n-1
++ a1x + a0 = 0, a menudo es conveniente suponer que
el polinomio en cuestión es mónico. Uno logra esto
dividiendo la ecuación por un . Resolviendo el
ecuación 2x 4 – 8x 3 + 2x – 6 = 0, por ejemplo, es equivalente
prestado para resolver x 4 – 4x 3 + x – 3 = 0.

Si todos los coeficientes de un polinomio mónico son
enteros, entonces cualquier RAÍZ racional del polinomio
debe ser un entero. Por ejemplo, si la fracción (escrita en forma reducida)
x = p/q fuera una solución a la
ecuación polinomial x 4 – 4x 3 + x – 3 = 0, entonces, sustituye
ajustando este valor para x y multiplicando por
4q _ rendimientos:

$$p^4 - 4p^3q + pq^3 - 3q^4 = 0$$

Esto demuestra que p 4 es múltiplo de q. Dado que p y q
no comparten factores comunes, esto solo es posible si q
es igual a 1. Por lo tanto, la raíz x = p/q es un número entero.

Un argumento similar muestra que si la CONSTANTE
el término a0 de un polinomio es 1, entonces cualquier raíz racional de
el polinomio (si lo tiene) debe ser una fracción del
forma x = 1/q. En consecuencia, cualquier polinomio mónico con
un término constante de 1 puede poseer como máximo un racional
raíz (o entera), es decir, x = 1. Esto prueba, por ejemplo, que x = 1 es la
única raíz racional de la ecuación:

$$x^7 - 2x^5 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

(Se comprueba que x = 1 es de hecho una solución a este
ecuación.)

mínimo común múltiplo Un número que es un múltiplo
de dos o más otros números se llama COMÚN
MÚLTIPLE de esos números. El múltiplo común más pequeño se llama
su múltiplo común mínimo, escrito como
"mcm". Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 10,
12, y 15 es 60. No hay número más pequeño que sea
uniformemente divisible por cada uno de estos números. Tenemos
mcm(10, 12, 15) = 60.

El mínimo común múltiplo de un conjunto de enteros puede
se encuentra dividiendo cada número en factores primos.
Por ejemplo, para hallar el mcm de 180 y 378, escribe:

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$378 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$$

Luego, el mcm se encuentra multiplicando los factores primos
juntos, tomando cada uno el máximo número de veces que
aparece en cualquiera de los números. En nuestro caso: mcm(180,
378) = 2 × 2 × 3 × 3 × 3 × 5 × 7 = 3780. Este método
muestra que cualquier múltiplo común de una colección de
enteros es un múltiplo del mínimo común múltiplo. Él
también muestra que, para dos enteros positivos a y b:

$$\text{mcm}(a,b) = \frac{ab}{\text{mcd}(a,b)}$$

donde “mcd” denota el MAYOR FACTOR COMÚN
(divisor) de los dos números. Sin embargo, la relación análoga para tres
o más enteros no se cumple.
en general.
Véase también TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA.

método de mínimos cuadrados Si un DIAGRAMA DE DISPERSIÓN
indica una correlación lineal entre las dos variables de

Machine Translated by Google

interés en un estudio científico (por ejemplo, el promedio el tamaño del zapato de los adultos podría estar linealmente correlacionado con altura), entonces se puede buscar la ecuación de una recta que mejor se ajusta a los datos. Tal línea se llama línea de regresión. Específicamente, si un estudio produce N pares de valores de datos, (x1 ,y1),…,(xN,yN), entonces se busca una ecuación lineal y = ax + b que minimiza la desviación total de los datos puntos de esa línea. Esta desviación total podría ser medido como una suma de valores absolutos:

$$|y1 – (ax1 + b)| + |y2 – (ax2 + b)| +…+ |yN – (axN + b)|$$

(produciendo lo que se llama la aproximación de Chebyshev criterio), pero esta cantidad es difícil de analizar utilizando las técnicas del CÁLCULO. (El VALOR ABSOLUTO la función no es diferenciable.)

Otra medida de desviación total es la suma de todos las desviaciones individuales al cuadrado, que, de nuevo, es una suma de cantidades positivas:

$$D = (y1 – (ax1 + b))2 + (y2 – (ax2 + b))2 +…+ (yN – (axN + b))2$$

La tarea es elegir valores para a y b que minimicen esta suma Esto se llama el criterio de los mínimos cuadrados.

Una condición necesaria para que D adopte un mínimo el valor es que las dos derivadas parciales y b $\frac{\partial D}{\partial a}$ $\frac{\partial D}{\partial b}$ igual a cero, dando las dos ecuaciones normales:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} y_i - (ax_i + b)\,x_i = 0 \quad \text{hacha} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} y_i - (ax_i + b) = 0 \quad \text{hacha} \sum_{i=1}^{n} x_i + Nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Dividiendo entre N y resolviendo para a (la pendiente) y b (el intercepto), obtenemos:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}$$

y

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

donde $\bar{x}$ es el valor medio de x, y $\bar{y}$ es el valor medio de y.

Configuración:

$$S_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

(esta es la VARIANZA de los valores de x) y

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

(la COVARIANZA de las dos variables), estas fórmulas puede escribirse de forma más compacta: $a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ y b = $\bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{x}$. Así, el método de los mínimos cuadrados da la ecuación para la línea de mejor ajuste como:

$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}(x - \bar{x})$$

Medición del grado de ajuste
La cantidad D que se minimizó (arriba) se llama la “suma de cuadrados del error”:

$$D = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

Refleja la cantidad de variación de los puntos de datos. sobre la línea de regresión. La suma total corregida de cuadrados (SST) de y:

$$\text{acero inoxidable} = \sum_{i=1}^{n} \text{si}(y_i - \bar{y})^2$$

da una medida de la dispersión de los valores de y en general. Necesariamente, D ≤ SST. La diferencia, SST – D, llamada suma de regresión de cuadrados, refleja la cantidad de variación en los valores de y explicada por el línea de regresión lineal y = ax + b cuando se compara con su distribución general. Que la cantidad SST – D es positivo solicita la definición de la CORRELACIÓN COEFICIENTE, R2 , dada por $R^2 = \frac{\text{acero inoxidable} - D}{\text{acero inoxidable}}$. Un ejercicio en álgebra muestra:

Machine Translated by Google

$$R^2 = \frac{(s_{xy})^2}{SS_{xx}\,aa}$$

Este valor numérico representa la proporción en la variación total de la variable y que puede ser explicada por la línea de mejor ajuste. Esta proporción tiene valores entre 0 y 1, con un valor de 1 que indica que toda la variación se debe a un ajuste lineal, es decir, los valores de los datos se encuentran perfectamente en la línea de regresión, y un valor de R2 de cero indica que ninguna de las variaciones en los valores de y se debe a una correlación lineal. Si R2 = 0,84, por ejemplo, podemos decir que el 84 por ciento de la variación en los valores de y se explica por una relación lineal con los valores de x.

Véase también REGRESIÓN.

Lebesgue, Henri-Léon (1875–1941) Análisis francés Nacido el 28 de junio de 1875, el matemático francés Henri Lebesgue es recordado por sus ideas revolucionarias en CÁLCULO y en la teoría de la integración. Al generalizar la noción de ÁREA a una de "teoría de la medida" abstracta, Lebesgue transformó el objeto de una integral en una herramienta aplicable a una clase extraordinariamente grande de escenarios. Publicó trabajos sobre este tema a la temprana edad de 27 años.

Lebesgue estudió en la École Normale Supérieure, Francia, y enseñó en la Universidad de Nancy durante 3 años. Presentó su famoso trabajo a sus colegas universitarios durante su último año allí en 1902. La idea detrás de su enfoque es relativamente simple. Normalmente se calcula una integral subdividiendo el rango de entradas, el eje x, en pequeños intervalos y luego sumando las áreas de los rectángulos por encima de estos intervalos de alturas dadas por la función. Esto es similar a contar el valor de un bolsillo lleno de monedas sacando una moneda a la vez y sumando los resultados a medida que avanza. El enfoque de Lebesgue, sin embargo, es subdividir el rango de salidas, el eje y, en pequeños intervalos y medir el tamaño de los conjuntos en el eje x para los cuales la función da la salida deseada en el eje y . Esto es similar a contar monedas reuniendo primero todas las monedas de un centavo y determinando su número, luego todas las monedas de cinco centavos y determinando el tamaño de esa colección, y así sucesivamente. Por supuesto, la forma de los conjuntos que uno encuentra a lo largo del eje x puede ser complicada y difícil de medir en tamaño. El trabajo de las matemáticas francesas Los matemáticos Émile Borel (1871-1956) y MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838-1922), al desarrollar la llamada teoría de la medida, proporcionaron a Lebesgue los medios para hacerlo.

Lebesgue escribió más de 50 artículos y dos libros, incluido su artículo de 1902 "Intégrale, longeur, aire". (Integrales, longitudes, área), su artículo de 1910 “Sur l'intégra tion des functions discontinues” (Sobre la integración de funciones discontinuas), y su monografía de 1906 Leçons sur les séries trigonométriques (Conferencias sobre series trigonométricas). También hizo importantes contribuciones a los campos de la TOPOLOGÍA y la SERIE DE FOURIER, y fue nombrado profesor de la Sorbona, Universidad de París, en 1910.

En un momento de su vida, Lebesgue expresó una seria inquietud acerca de continuar el trabajo en la teoría de la integración que él mismo había fundado. Temía que al hacer que las matemáticas fueran abstractas, los temas de la materia comenzarían a perder un contexto significativo. Murió en París, Francia, el 26 de julio de 1941.

El enfoque revolucionario de Lebesgue a la teoría de la integración se enseña hoy a todos los estudiantes universitarios de nivel superior y estudiantes graduados en matemáticas. Se considera un componente central de cualquier estudio serio de análisis.

derivada izquierda/derivada derecha La DERIVADA de una función f(x) en la posición x se define como el LÍMITE $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. El valor del límite, si existe, h representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en la posición x. Si la cantidad h está restringida para pasar solo por valores negativos a medida que se acerca al valor cero, es decir, si el límite anterior se reemplaza por un límite por la izquierda, obtenemos la derivada por la izquierda de la función en x :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Restringir h para que se extienda solo a través de valores positivos produce la derivada derecha de la función en x:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(Consulte LÍMITE). La derivada general f′(x) existe si, y solo si, las derivadas izquierda y derecha existen y concuerdan en valor. Esto no tiene por qué ser siempre el caso. Considera el

Machine Translated by Google

función f(x) = x + |x|, por ejemplo, en la posición
La izquierda h negativa derivada (con
es lim $\lim_{h\to 0^-} \frac{(\text{S.S}\| \quad) - \quad (\quad \| \quad)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h + - \ h)}{(\ h} = 0$ dónde
como la derivada por la derecha (con h positiva) es) + − + (hh
$\lim_{\text{hora } 0 \to +} \frac{(\text{S.S}\| \quad 0\ 0\ \| \quad)}{h} = \lim_{\text{hora} \to +} \frac{+}{h} = 2$. el bronceado
línea gentil a la curva tiene pendiente cero justo a la izquierda de x = 0 y pendiente 2 justo a su derecha. Esta inconsistencia muestra que no hay una recta tangente bien definida a la gráfica f(x) = x + |x| en x = 0.

Legendre, Adrien-Marie (1752–1833) Francés Geom etría, teoría de números Nacido el 18 de septiembre de 1752, en París, Francia, Adrien-Marie Legendre es recordado como un matemático francés capaz que dedicó su vida a el tema pero tuve la desafortunada suerte de ver el bulto de su obra obsoleta por los descubrimientos y habilidades de matemáticos más jóvenes y brillantes.

Legendre publicó en los campos de TEORÍA DE NÚMEROS, funciones elípticas, GEOMETRÍA EUCLIDEA y celeste mecánica. Su nombre está asociado con una serie de conceptos matemáticos, incluidos los polinomios de Legendre, una clase importante de funciones útiles para resolver ciertas tipos de ECUACIONES DIFERENCIALES; los MÍNIMOS CUADRADOS MÉTODO; y el símbolo de Legendre en teoría de números. Publicó un texto de geometría elemental, Eléments de géométrie (Elementos de la geometría), que dominó la enseñanza de la geometría en América y Europa a lo largo el siglo 19. En 1791 la Académie des Sciences emprendió la tarea de estandarizar pesos y medidas y ordenó a Legendre que hiciera las observaciones astronómicas necesarias para calcular la longitud de un metro.

Poco se sabe de la vida temprana de Legendre. Nacido en un familia rica, Legendre tuvo acceso a una excelente la educación formal y los medios para ejercer la erudición intereses. En 1770, Legendre defendió una tesis en matemáticas y física en el Collège Mazarin. Su 1782 investigación matemática sobre la trayectoria de los proyectiles obtenidos él un premio de la Academia de Berlín y obtuvo él alguna atención como un erudito de las matemáticas. Un año más tarde, Legendre fue designado para un puesto adjunto en la Académie des Sciences de París, más tarde rebautizada como Institut National des Sciences et des Arts. El permaneció allí hasta 1824, ascendiendo apropiadamente en rango y posición a lo largo de las décadas. Sin embargo, debido a un desacuerdo político con el funcionamiento del Institut,

A Legendre se le negó una pensión en su jubilación y murió en la pobreza 9 años después, el 9 de enero de 1833.

A pesar de que su trabajo se considera obsoleto, Legendre planteó una serie de cuestiones fundamentales en el campos de la teoría de números y la teoría de funciones elípticas que estimuló una gran cantidad de investigación matemática durante el siglo que le siguió.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716) Alemán
Cálculo, Lógica Nacido el 1 de julio de 1646 en Leipzig, Sajonia (ahora Alemania), el erudito Gottfried Wilhelm Leibniz es recordado por descubrir, y ser el primero en publicar en 1684, la teoría del CÁLCULO DIFERENCIAL. En años posteriores también desarrolló la teoría del CÁLCULO INTEGRAL y formuló el OREM FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO que une los dos campos. Este trabajo se logró independientemente del progreso realizado por



Gottfried Wilhelm Leibniz, eminente matemático del siglo XVIII siglo, fue el primero en fundar y publicar una descripción del cálculo diferencial. Más tarde desarrolló la teoría del cálculo integral. y el teorema fundamental del cálculo que conecta los dos asignaturas. (Foto cortesía de Feltz/Topham/The Image Works)

Machine Translated by Google

SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) sobre los mismos temas.
Leibniz también dedicó un esfuerzo considerable a desarrollar una charactera generalis, un lenguaje universal, como un intento de generalizar el formalismo lógico creado por ARISTÓTELES (384-322 a. C.). (El lógico GEORGE BOOLE más tarde siguió este objetivo en el siglo XIX).

Leibniz ingresó a la Universidad de Leipzig a los 14 años, como era costumbre en ese momento, para comenzar un curso de grado general de 2 años. Habiendo leído las obras de Aristóteles, Leibniz ya estaba comenzando el trabajo inicial de formalizar y sistematizar el proceso de razonamiento. Se licenció en derecho y en filosofía durante los siguientes 6 años, y luego comenzó el ambicioso proyecto de cotejar todo el conocimiento humano. Comenzó con el estudio del movimiento y la cinemática, y publicó, en 1671, su libro Hypothesis physica nova (Nueva hipótesis física).

Leibniz viajó a París en 1672 y comenzó un estudio de física y matemáticas con los principales científicos de la ciudad en ese momento. Dos años más tarde, había desarrollado su teoría del cálculo diferencial, pero estaba luchando por encontrar un buen sistema de notación matemática para la teoría. En un manuscrito inédito de 1675, Leibniz había descrito la REGLA DEL PRODUCTO para diferenciación y establecido las reglas para diferenciar POLINOMIOS.

A Newton le llegó la noticia de los resultados que había desarrollado Leibniz, y Newton le escribió de inmediato explicándole que ya había descubierto la teoría una década antes. Newton, sin embargo, no proporcionó detalles de su trabajo. Leibniz respondió cortésmente a Newton pero, sin darse cuenta de que las correspondencias se retrasaron durante meses, Newton sospechó que Leibniz se detenía en su carta, reconstruía los detalles que faltaban y robaba sus ideas. Aunque hoy en día se entiende que Leibniz había realizado su trabajo con total independencia de Newton, se produjo una amarga disputa entre los dos caballeros, que duró décadas.

En 1684, Leibniz publicó sus detalles del cálculo diferencial en Nova methodus pro maximis et min imis (Un nuevo método para determinar máximos y mínimos) después de establecer finalmente un sistema efectivo de notación para su trabajo: la notación d que usamos hoy.
Para entonces, Leibniz también había desarrollado su teoría del cálculo integral (junto con la conocida notación $\int dx$) y comenzó a publicar los detalles del trabajo en 1686. (Newton escribió sobre su método de "fluxiones" en 1671, pero no logró comprenderlo. publicado.)

A lo largo de su vida, Leibniz también hizo contribuciones significativas al estudio de las ECUACIONES DIFERENCIALES, la teoría de ecuaciones y el uso de un DETERMINANTE para resolver sistemas de ecuaciones, y generalizó el TEOREMA DEL BINOMIO a más de dos variables. Además, en su afán por recopilar todo el conocimiento humano, Leibniz escribió importantes tratados sobre metafísica y filosofía. También desarrolló una "ley de continuidad" general para el universo, sugiriendo que todo lo que ocurre en la naturaleza lo hace en términos de grado, y argumentó que "masa por velocidad al cuadrado" es una cantidad fundamental que se conserva en los sistemas físicos. (Esto se llama hoy la “ley de conservación de la energía”).

Leibniz murió en Hannover, Alemania, el 14 de noviembre de 1716. No es posible exagerar el efecto que tuvo Leibniz en el desarrollo de la teoría analítica en los siglos que le siguieron. Su elección del sistema de notación para el cálculo, por ejemplo, facilitó una comprensión clara del tema y un fácil uso de sus técnicas.

Los matemáticos de hoy suelen utilizar la notación desarrollada por Leibniz en lugar de la desarrollada por Newton.

Teorema de Leibniz Ver REGLA DEL PRODUCTO.

lema Ver TEOREMA.

longitud La distancia a lo largo de una línea, o la distancia en la que una figura o sólido se extiende en cierta dirección, se denomina longitud. Se pueden medir dos longitudes de un rectángulo para dar una indicación de su tamaño. (La mayor de las dos dimensiones generalmente se denomina longitud y la menor anchura).

Las primeras unidades de longitud estaban dadas por partes del cuerpo. Por ejemplo, un “codo” se definió como la longitud del antebrazo, medida desde el codo hasta la punta del dedo medio (alrededor de 19 pulgadas); un "ell", que todavía se usa a veces para medir telas, es la longitud desde la punta de la nariz hasta el final de un brazo extendido (alrededor de 35 pulgadas); una “mano”, que se usa para medir la altura de los caballos, es del ancho de la mano de un hombre (alrededor de 4 pulgadas); y un “pie” se definió como la distancia recorrida por un paso.
Los antiguos romanos consideraban que un pie era el equivalente a 12 dedos de pulgar, lo que produjo la palabra pulgada de la palabra latina unicia que significa un doceavo. Los romanos también identificaron 1.000 pasos como una milia passuum, que lleva

Machine Translated by Google

a nuestro concepto de una "milla". Una milésima parte de un pie se llama "gry". Las longitudes definidas por las medidas corporales están sujetas a una gran variación, y se descubrió que diferentes comunidades en todo el mundo usaban diferentes estándares de longitud, aunque las unidades utilizadas recibieron el mismo nombre. Durante los siglos XIX y XX se desarrolló un estándar internacional de unidades y se definieron unidades de longitud inequívocas.

En matemáticas, la noción de longitud aparece en varios contextos y puede recibir definiciones precisas. Por ejemplo, en la recta numérica, la longitud de un segmento de recta que conecta un número a con un número b viene dada por el VALOR ABSOLUTO |b – a|; la longitud de un segmento de recta que conecta los puntos A = (a1 ,a2) y B = (b1 ,b2) viene dada por la DE LA DISTANCIA $\sqrt{(b1 - a1)^2 + (b2 - a2)^2}$ FÓRMULA ; y la longitud de un VECTOR a = <a1 ,a2> viene dada por un = $\sqrt{a1^2 + a2^2}$. (Estas últimas fórmulas se generalizan a tres y más dimensiones.)

El CÁLCULO se puede usar para encontrar la LONGITUD DEL ARCO de líneas curvas en espacios bidimensionales y tridimensionales.

Véase también UNIDADES SI.

L'Hôpital, Guillaume François Antoine, marquis de (1661–1704) French Calculus Nacido en París, Francia, en 1661 (se desconoce su fecha exacta de nacimiento), Guillaume l'Hôpital es recordado como el famoso autor del primer libro de texto sobre el tema del CÁLCULO DIFERENCIAL, Analyse des infiniment petits (Análisis con cantidades infinitamente pequeñas), escrito en 1696. Además de explicar los métodos y detalles de la teoría recién descubierta, este trabajo también contiene la primera formulación de la regla que ahora lleva su nombre.

El talento de L'Hôpital para las matemáticas fue reconocido cuando era niño. A la edad de 15 años resolvió un problema sobre la CICLOIDE planteado por BLAISE PASCAL (1623-1662) y más tarde contribuyó a la solución del famoso problema de la BRACHISTOCRONA . Antes de dedicarse seriamente a las matemáticas, l'Hôpital sirvió como oficial de caballería, pero pronto tuvo que dimitir debido a su miopía.

En 1691, l'Hôpital contrató al matemático suizo Johann Bernoulli de la FAMILIA BERNOULLI para que le enseñara la recién descubierta teoría del cálculo. Esto se llevó a cabo principalmente por correspondencia, y se hizo el acuerdo de que todo el contenido de las cartas enviadas entre ellos pertenecería al marqués. Este material formó la base de su texto de 1696.

El capítulo uno de Analyse des infiniment petits define la noción de DIFERENCIAL (o diferencia, como la llamó l'Hôpital) y proporciona reglas sobre cómo deben manipularse. También describe los principios básicos del cálculo diferencial. El segundo capítulo da el método para determinar la línea tangente a una curva, y el capítulo tres trata de problemas MÁXIMOS/MÍNIMOS usando problemas de mecánica y geografía como ejemplos. Los capítulos posteriores se ocupan de las cúspides, los puntos de inflexión, las derivadas de orden superior, las evolutas y las cáusticas. LA REGLA DE L'HÔPITAL aparece en el capítulo nueve.

Después de la muerte de l'Hôpital, Johann Bernoulli se quejó públicamente de que no se le daba suficiente crédito por el trabajo contenido en el texto. (L'Hôpital escribió una nota de agradecimiento en el libro a Bernoulli ya GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ por contribuir con sus ideas). Hoy se sabe, por ejemplo, que Bernoulli, no l'Hôpital, descubrió la regla de l'Hôpital.

L'Hôpital escribió un manuscrito completo para un segundo libro Traité analytique des secciones coniques (Tratado analítico sobre secciones cónicas), que se publicó póstumamente en 1720. También había planeado escribir un tercer texto, uno sobre el tema del cálculo integral. lus, pero interrumpió el trabajo en el proyecto cuando escuchó que Leibniz estaba trabajando en su propio libro sobre el tema.

L'Hôpital murió en París, Francia, el 2 de febrero de 1704.

Regla de L'Hôpital (regla de L'Hospital) Nombrada en honor a GUIL LAUME FRANÇOIS ANTOINE L'HÔPITAL (1661–1704), estudiante del matemático Johann Bernoulli de la FAMILIA BERNOULLI, la regla de l'Hôpital es un método para encontrar el LÍMITE de un razón de dos funciones, cada una de las cuales por separado tiende a cero. Precisamente:

> Supongamos que f(x) y g(x) son dos funciones diferenciables con f(a) = 0 y g(a) = 0 en algún punto a. Entonces el límite de la razón f(x)/g(x) cuando x → a es igual al límite de la razón de las derivadas f′(x)/g′(x) cuando x → a (siempre que la derivada de g(x) nunca es cero, excepto posiblemente en x = a).

Por ejemplo, para calcular el límite $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (que parece ser de la forma 0/0), uno simplemente toma la derivada del numerador y el denominador por separado:

Machine Translated by Google

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

Como otro ejemplo tenemos: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{1} = 1$ porque $\cos(0) = 1$.

Si asumimos que la derivada g(x) no es cero en x = a, entonces la prueba de la regla de l'Hôpital es relativamente sencillo:

escribe el limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ como $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)}$.

Como f(a) = g(a) = 0, tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

El resultado sigue siendo válido si g′(a) = 0, pero hay que hacer inteligente uso del TEOREMA DEL VALOR MEDIO para establecerlo.

Johann Bernoulli es quien descubrió y probó Regla de l'Hôpital.

Es permisible aplicar la regla de l'Hôpital a la mismo límite más de una vez, es decir, para diferenciar el numerador y denominador cada uno un número de veces. Para ilustrar, tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

El teorema también se cumple para límites cuando x → ∞.

La regla también funciona para una razón de funciones. f(x)/g(x) si cada función por separado tiende a infinito como x → a, (es decir, tenemos una razón indeterminada ∞/∞). Se nota que las funciones 1/f(x) y 1/g(x) cada una tienden a cero cuando x → a, y así:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(1/g(x))'}{(1/f(x))'}$$

por la regla de l'Hôpital. Como consecuencia:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(1/g(x))'}{(1/f(x))'}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{(g(x))^2} \cdot \frac{(f(x))^2}{f'(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}^2 \cdot \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}^{-1}$$

de donde se sigue que ejemplos, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{\lim g'(x)}$. Como tenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 + 2}{x^2 - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{14x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{14}{2} = 7$$

y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(1)}{1} = 0$$

la paradoja del mentiroso El cretense del siglo VI a. C. Se supone que el profeta Epiménides dijo: "Todos los cretenses son mentirosos", una declaración que ahora se conoce como el mentiroso. paradoja. Es difícil determinar si Epiménides, él mismo un cretense, está diciendo la verdad aquí. El declaración, sin embargo, no es una verdadera PARADOJA. Puede ser el caso de que Epiménides es consciente de al menos un honesto compatriota y está haciendo aquí una declaración falsa a través de la uso de la palabra todos. Una versión más nítida de lo previsto. la paradoja radica en la declaración: "Esta oración es falsa".

También se pueden considerar las consecuencias lógicas de variaciones de esta declaración. Por ejemplo, ¿y si Epiménides había declarado en cambio: ¿"Todos los cretenses dicen la verdad"?

Véase también AUTOREFERENCIA.

tablas de vida (tablas de mortalidad) Basado en resultados del censo y resultados de estudios médicos y sociales, tablas de vida son tablas de valores que indican la proporción de personas de cierta edad que se espera que viva sucesivamente más siglos. Se proporcionan diferentes tablas para diferentes poblaciones y edades (por ejemplo, machos australianos 40 años, mujeres canadienses 25 años) y las compañías de seguros las utilizan ampliamente para analizar el riesgo en la emisión de pólizas de seguros, así como en estudios científicos. Para ejemplo, dichas tablas se pueden utilizar para comparar la mortalidad

Machine Translated by Google

tasas de enfermedades en diferentes grupos de edad, o poblaciones con diferentes hábitos. Las tablas de vida se actualizan periódicamente para tener en cuenta los nuevos factores que pueden alterar la esperanza de vida.

En su folleto de 1662, Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality, el comerciante inglés John Graunt fue el primero en cotejar y publicar tablas de mortalidad para una población específica. Al resumir los registros gubernamentales de entierros de los años 1604-1661, Graunt pudo estimar el número de muertes, década por década, que cabría esperar entre un grupo típico de 100 londinenses nacidos al mismo tiempo. Dio el nombre de "tabla de vida" a su pantalla de resultados. Graunt también pudo hacer observaciones generales sobre la población —que las mujeres viven más que los hombres, que la tasa de mortalidad suele ser constante, etc.— y fue el primero en comentar sobre la regularidad de los fenómenos sociales de esta manera.

En 1693, basándose en los registros recopilados por Casper Heumann de Breslau, el astrónomo inglés Edmund Halley perfeccionó las técnicas matemáticas utilizadas por Graunt para compilar un conjunto revisado y más detallado de tablas de mortalidad, adecuadas para analizar adecuadamente las anualidades.

CIENCIA ACTUARIAL es el estudio matemático de la esperanza de vida y otras tendencias demográficas. Se dice que el trabajo de Halley es el trabajo fundacional en este campo.

Ver también HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo); ESTADÍSTICAS.

límite Intuitivamente, un límite es una cantidad a la que se puede acercar cada vez más, pero que no necesariamente se alcanza nunca. Por ejemplo, los números de la SECUENCIA 0.9, 0.99, 0.999,… se acercan, pero nunca alcanzan, al valor 1. Decimos que el límite de esta sucesión 1 es uno. La función f(x) =

$\frac{1}{x}$ toma valores

más y más cerca de cero a medida que x se hace grande. Decimos que el límite de esta función cuando x se vuelve grande es cero.

La noción de límite fue identificada adecuadamente por primera vez por el matemático francés AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857), y surgió como una herramienta necesaria para colocar la teoría del cálculo sobre una base teórica sólida. Más tarde, el matemático alemán KARL THEODOR WILHELM WEIER STRASS (1815-1897) desarrolló más la idea y le dio al concepto de límite las definiciones precisas y rigurosas que seguimos hoy.

El límite de una secuencia

> Una secuencia de números a1 ,a2 ,a3 ,… tiene límite L si se puede demostrar que para cualquier número positivo ε (sin importar cuán pequeño), eventualmente todos los números en la secuencia estarán así de cerca del valor L. Es decir, se puede encontrar un valor N tal que an se encuentre entre L – ε y L + ε si n > N.

Esto dice que no importa qué nivel de precisión elija (ε), eventualmente todos los números en la lista (desde aN en adelante) estarán dentro de una distancia ε de L. Por ejemplo, en la secuencia 0.9, 0.99, 0.999, …, todos los números de la lista a partir del tercer lugar están a una distancia de 1/1000 del valor 1, y todos los números a partir del sexto lugar están a una millonésima del valor 1. De hecho, para cualquier valor pequeño ε , podemos ubicar una posición en la secuencia para que a partir de esa posición, todos los valores en la lista estén dentro de una distancia ε de uno.

Si una secuencia {an } tiene un valor límite L, escribimos: 1 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Por ejemplo, se puede demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{}{n}$ = 0 y $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1$ · Un estudio cuidadoso de CONVER GENT SEQUENCEs muestra que no todas las secuencias, sin embargo, tienen un límite.

Cualquier suma infinita (SERIE) puede considerarse como el límite de una secuencia de SUMAS PARCIALES, y cualquier PRODUCTO INFINITO como el límite de una secuencia de productos parciales.

El límite de una función

> Una función f(x) tiene un límite L cuando x se vuelve grande si se puede demostrar que para cualquier número positivo ε (sin importar cuán pequeño sea), todas las salidas de la función eventualmente estarán así de cerca del valor L. Es decir, uno puede encontrar un número N tal que el valor f(x) esté entre L – ε y L + ε si x > N.

Esto dice que no importa qué nivel de precisión elija (ε), eventualmente todas las salidas de la función f(x) (desde x = N en adelante) estarán dentro de una distancia ε de L. Por ejemplo, todas las salidas de la función f(x) = en adelante. Del mismo modo, todas las salidas son menores que 0.000001

$\frac{1}{x}$ son menores que 0.001 desde el punto x = 1,000

Machine Translated by Google

desde x = 1.000.000 en adelante. De hecho, para cualquier valor pequeño de ε es posible ubicar un valor x = N de modo que todas las salidas de la función desde esa posición en adelante estén dentro de distancia ε de cero. (Por ejemplo, N = $\frac{1}{\varepsilon}$ servirá.)

Si una función f(x) tiene un valor límite L cuando x se vuelve grande, escribimos: limx→ ∞ f(x) = L. De manera similar, se puede definir la noción de límite cuando x se vuelve grande y negativa: limx→– ∞ f(x) = L.

También se puede considerar la posibilidad de que las salidas de una función f(x) se acerquen a un valor L cuando x se acerque a un valor finito a. En términos generales, decimos que el "límite de f(x) cuando x tiende a a es L" si, a medida que x se acerca más y más a a, las salidas f(x) se acercan cada vez más a L. Si este es realmente el caso, escribimos: limx→a f(x) = L.

Para precisar esta noción, debemos suponer que se le da un grado deseado de precisión ε y mostrar que, de hecho, es posible especificar un "grado de proximidad a a" que asegure que todas las salidas f(x) estén dentro de un distancia ε de L. Esto lleva a la famosa definición de límite épsilon-delta de Weierstrass:

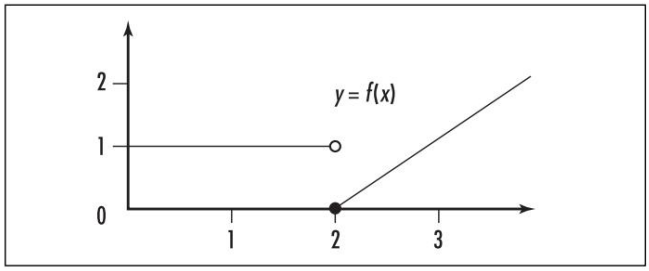
> Una función f(x) tiene un "límite L cuando x tiende a a" si se puede demostrar que para cualquier número positivo ε (no importa cuán pequeño sea), las salidas de la función se pueden acercar tanto a L restringiendo x a valores muy cercano, pero no igual, a a. Es decir, se puede producir un número δ tal que si x, diferente de a, se encuentra entre a – δ y a + δ, entonces podemos estar seguros de que f(x) se encuentra entre L – ε y L + ε.

Esto dice que no importa qué nivel de precisión elija (ε), todas las salidas de la función f(x) para valores x cercanos a a (es decir, dentro de una distancia δ de a) estarán dentro de una distancia ε de L Considere , por ejemplo, la función f(x) = 5x para valores cercanos a x = 2.

Observe que todas las salidas de la función están a una distancia de 0,1 de 10 si x está a una distancia de 0,02 de 2.

Todas las salidas de la función están a una distancia de 0,001 de 10 si x está a una distancia de 0,0002 de 2. De hecho, para cualquier valor pequeño de ε, es posible describir un número δ tal que si x está a una distancia δ de 2, entonces f(x) = 5x está dentro de una distancia ε de 10. (De hecho, servirá). Esto muestra lím Si $d = \frac{\varepsilon}{5}$ una función f(x) es continua $_{\to 2}$ 5x = 10.x

en x = a, entonces el límite límx→a f(x) existe y es igual a f(a). Esto, sin embargo, no tiene por qué ser siempre el caso (en cuyo caso decimos que f es discontinua en a).



Límites izquierdo y derecho que no coinciden

A veces es conveniente describir el límite "solo desde la izquierda" o "solo desde la derecha". Escrito como limx→a – f(x), un límite por la izquierda se define como un valor L para que las salidas de la función f(x) se puedan hacer tan cerca de L como queramos restringiendo x a valores cercanos a y a la izquierda de a (es decir, para valores de x entre a – δ y a, para algún número δ). Un límite por la derecha, escrito limx→a + f(x), es un valor L , de modo que las salidas de la función f(x) pueden hacerse tan cercanas a L como queramos restringiendo x a valores cercanos a y a la a la derecha de a (es decir, para valores de x entre a y a + δ, para algún número δ). Por ejemplo, en el gráfico anterior tenemos limx→2 – f(x) = 1 y limx→2 + f(x) = 0. Que los límites izquierdo y derecho no coincidan muestra que la función es discontinua en x = 2.

El límite de palabras también se usa en CÁLCULO INTEGRAL en términos de un límite de integración. Dada una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, el número a se llama límite inferior de integración, y b el límite superior de integración.

Véase también ASINTOTA; FUNCIÓN CONTINUA; DERIVADO; DIVERGENTE; HISTORIA DEL CÁLCULO (ensayo); DERIVADA IZQUIERDA/ DERIVADA DERECHA; DESCONTINUIDAD REMOVIBLE; LAS PARADOJAS DE ZENO .

límite desde la izquierda/derecha Ver LÍMITE.

Lindemann, Carl Louis Ferdinand von (1852-1939)

Teoría de números alemana Nacido el 12 de abril de 1852, el erudito Ferdinand von Lindemann es mejor recordado por su prueba de 1882 de que π es un NÚMERO TRASCENDENTAL. Este logro finalmente resolvió el viejo problema de la CUADRATURA DEL CÍRCULO: al probar que π no es una solución a una ecuación polinomial con número entero

Machine Translated by Google

coeficientes, Lindemann había demostrado la imposibilidad de construir un cuadrado de la misma área de un círculo dado utilizando únicamente las herramientas clásicas de una regla y un compás.

Lindemann escribió una tesis sobre el tema de la GEOMETRÍA NO EUCLIDEA bajo la dirección de CHRIS TIAN FELIX KLEIN (1849–1925), y obtuvo un doctorado en Erlangen en 1873. Completó un título de habilitación avanzada en 1877 en la Universidad de Würzburg y fue nombrado profesor en la Universidad de Friburgo ese mismo año. Más tarde se transfirió a la Universidad de Königsberg y finalmente aceptó una cátedra en la Universidad de Munich en 1893, donde permaneció el resto de su carrera.

En 1873, el año en que Lindemann obtuvo su doctorado, el matemático francés Charles Hermite publicó su prueba de que el número e es trascendental.
Lindemann viajó a París para encontrarse con Hermite y discutir los métodos de su demostración. Usando la famosa fórmula $e^{\pi} = -1$ de LEONHARD EULER (1707–83), Lindemann se dio cuenta de que los métodos de Hermite podían extenderse para establecer también la trascendencia de π. Lin demann publicó su prueba en su artículo de 1882 Über die Zahl (Sobre los números).

Lindemann también se interesó por la física y contribuyó a los estudios de los electrones. También trabajó para traducir y revisar la obra del matemático JULES HENRI POINCARÉ (1854–1912).

En 1894, Lindemann fue elegido para el Parlamento bávaro. Academia de Ciencias. También fue elogiado con un título honorario de la Universidad de St. Andrews en 1912. Murió en Munich, Alemania, el 6 de marzo de 1939, y siempre será recordado en la historia por cerrar el clásico problema de la cuadratura de la círculo.

línea UNA CURVA a veces se llama línea. En GEOME TRY, se suele entender que una línea es recta, pero es difícil definir correctamente qué se entiende por esto.
El geómetra EUCLID (ca. 300-260 a. C.) proporcionó la definición intuitiva de una línea como una "longitud sin anchura", pero nunca intentó definir qué se entiende por longitud o qué significa decir que una construcción tiene sin amplitud Euclides, sin embargo, afirmó que entre dos puntos cualesquiera A y B en el plano, existe una línea recta que los conecta.

Hoy los matemáticos toman esto como el punto de partida de la geometría, dejando los términos línea y punto (y plano) como términos indefinidos, pero tomando las propiedades que esperamos que posean (como “entre cada dos puntos hay una línea que los conecta”) como AXIOMAS para la teoría de la geometría.

Si se trabaja con una teoría de la geometría (o de la forma y el espacio) en la que existe una noción clara de distancia entre dos puntos, entonces se podría definir una línea recta entre dos puntos como el camino más corto entre esos puntos. Por ejemplo, el TEOREMA DE PYTHAGO RAS , en cierto sentido, establece que los caminos rectos, como pensamos intuitivamente en ellos, son de hecho las rutas más cortas entre dos puntos. En la superficie de una ESFERA, los caminos más cortos entre puntos son arcos de grandes círculos y, por lo tanto, es apropiado considerarlos como los caminos "rectos" en

GEOMETRÍA ESFÉRICA.

Véase también COLLINEAR; CONCURRENTE; ECUACION DE A LÍNEA; ECUACIÓN LINEAL; PENDIENTE.

álgebra lineal El estudio de las matrices y sus aplicaciones se llama álgebra lineal. Como las matrices se utilizan para analizar y resolver sistemas de ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS y para describir TRANSFORMACIONES LINEALES entre ESPACIOS VECTORIALES, este tema de estudio une el pensamiento geométrico con el análisis numérico. Como el conjunto de todas las matrices invertibles de un tamaño dado forman un grupo, denominado GRUPO LINEAL GENERAL, también se pueden incorporar técnicas de ÁLGEBRA ABSTRACTA a este trabajo.

Véase también MATRIZ.

ecuación lineal Una ecuación se llama lineal si ninguna de las variables que aparecen en la ecuación se eleva a una potencia diferente de 1 y no se multiplican dos (o más) variables que aparecen en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación $2x – 3y + z = 6$ es lineal, pero las ecuaciones $2x^{-1} 3 = 0$ y $4xy + – 5y + z 5xz = 7$ no lo son.

Se dice que una función de una variable es lineal si tiene la forma $f(x) = ax + b$, para algunas constantes a y b. Más generalmente, una función de varias variables de la forma

$$f(x1 ,x2 ,\ldots,xn) = a0 + a1x1 + a2x2 +\ldots+ anxn$$

para algunas constantes a0 , a1 , a2 , …, an se llama lineal.

Machine Translated by Google

Cualquier ecuación de la forma ax + by = c representa una LÍNEA en un espacio bidimensional. (Resolviendo para y, asumiendo que b no es cero, produce la función lineal $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.) Una ecuación de la forma ax + by + cz = d representa un PLANO en el espacio tridimensional.

Una combinación lineal de variables x1 , x2 , x3 , … es una suma de la forma

$$a1x1 + a2 x2 + a3x3 +\ldots$$

para algunas constantes a1 , a2 , a3 , … En la teoría del ESPACIO VECTORIAL , se dice que un conjunto de vectores es linealmente dependiente si alguna combinación lineal de esos vectores es cero.

En ÁLGEBRA LINEAL, una ecuación MATRIZ de la forma Ax = b se llama ecuación lineal. Representa un sistema de ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS.

Una ecuación diferencial lineal es una ECUACIÓN DIFERENCIAL de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

para algunas constantes a0 , a1 , a2 , …, an y alguna función fija f(x).

En algunos entornos, es apropiado aplicar el término lineal a variables específicas que aparecen en una expresión complicada. Por ejemplo, el término 5x 2yz es lineal con respecto a y con respecto a z.

Ver también ECUACIÓN DE UNA LÍNEA; ECUACION DE A AVIÓN; TRANSFORMACIÓN LINEAL; DEPENDENCIA LINEAL DENTRO E INDEPENDIENTE.

linealmente dependiente e independiente Se dice que una colección de funciones es linealmente dependiente si una de ellas se puede expresar como una suma de múltiplos constantes de la otra; si esto no es posible, se dice que la colección es linealmente independiente. Por ejemplo, las funciones f1 (x) = x, f2 (x) = x – 2x, f3 (x) = x son linealmente dependientes, ya que f3 (x) = 2f1 (x) + f2 (x). Las funciones {x, 7x} también son linealmente dependientes, ya que la segunda función es un múltiplo constante de la primera. Por otro lado, las funciones {x, x2 } son linealmente independientes, al igual que las funciones {sen x, cos x}, e^{3x}.

Se dice que un conjunto de VECTORES es linealmente dependiente si es posible escribir un vector como una combinación de los vectores restantes. De manera equivalente, los vectores v1 , v2 ,…,vn son linealmente dependientes si es posible elegir escalares c1 ,c2 ,…,cn , no todo cero, por lo que

$$c1v1 + c2v2 +\ldots+ cnvn = 0$$

(Si ci , digamos, no es cero, entonces dividir por este escalar muestra que vi es una suma de múltiplos de los vectores restantes). Si esto no es posible, entonces se dice que los vectores son linealmente independientes. Por ejemplo, en el espacio tridimensional, los vectores i = <1,0,0>, j = <0,1,0> y k = <0,0,1> son linealmente independientes; no es posible escribir cualquiera como suma de múltiplos de los otros dos.

Una base para un ESPACIO VECTORIAL es una colección de vectores independientes lineales con la propiedad de que cualquier otro vector en el espacio vectorial puede escribirse como una suma de múltiplos de estos vectores. Por ejemplo, los vectores i, j y k forman una base para el espacio vectorial de vectores tridimensionales para cualquier otro vector a = < a1 , a2 , a3> que se puede expresar como la combinación a = a1 i + a2 j + a3k. Es imposible expresar un vector como una combinación de vectores base de dos formas diferentes. (Para explicar: suponga que v1 , v2 , v3 es una base para un espacio vectorial, y que algún vector a puede expresarse como una combinación de estos vectores de dos maneras diferentes: a = a1v1 + a2v2 + a3v3 = b1v1 + b2v2 + b3v3 Al restar se obtiene la ecuación (a1 – b1)v1 + (a2 – b2)v2 + (a3 – b3)v3 = 0. Dado que los vectores v1 ,v2 ,v3 son linealmente independientes, debe darse el caso de que a1 = b1 , a2 = b2 y a3 = b3 .)

Los matemáticos han demostrado que todo espacio vectorial debe tener una base y que el número de vectores en cualquier base para un espacio vectorial particular es siempre el mismo. Este número se llama la dimensión del espacio vectorial. En particular, el conjunto de todas las funciones es un espacio vectorial y por tanto debe tener una base. Un candidato para tal base es la colección infinita de funciones {1,x,x2 ,xdent , y el trabajo de construcción de la SERIE DE TAYLOR muestra que todas las funciones "apropiadamente agradables" pueden expresarse como sumas infinitas de estas funciones básicas.

$$3\ 4\ x,\ldots$$

Funciones como sin(x), cos(x) y sin(7x) repiten valores cada 2π y se llaman periódicas. Los matemáticos han demostrado que la colección {1,sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x), sin(3x), cos(3x),...} forma una base para el espacio vectorial de todas las funciones periódicas. Esto lleva al estudio de la SERIE DE FOURIER.

Véase también ORTOGONAL.

Machine Translated by Google

programación lineal La rama de las matemáticas que se ocupa de encontrar los valores máximos o mínimos de funciones lineales, es decir, funciones que involucran variables elevadas solo a la primera potencia, sujetas a una serie de desigualdades que deben permanecer verdaderas, se llama programación lineal. Este campo tiene profundas aplicaciones en la economía y la industria y es un área de investigación activa. Mientras que, en principio, los problemas de OPTIMIZACIÓN de este tipo son sencillos de resolver, los problemas prácticos pueden involucrar más de 100 variables y ser difíciles de analizar. El desafío es encontrar técnicas eficientes para encontrar soluciones.

El principio de la programación lineal se ilustra mejor con un ejemplo. Supongamos, por ejemplo, que deseamos encontrar el valor máximo de la función U = 4x – 3y sujeto a las restricciones x ≥ 0, y ≥ 0, x ≤ 1 e y ≤ 1.
En este ejemplo, las restricciones definen un cuadrado unitario en el plano, y deseamos encontrar el punto (x, y) en esta "región factible" que proporciona el mayor valor para la "función objetivo" U = 4x – 3y.

Razonando hacia atrás, tenga en cuenta que cada posible valor c de la función objetivo define una línea 4x – 3y = c de pendiente 4/3. A medida que varía el valor de c , esta línea barre el plano. Comenzando con un valor grande de c y disminuyendo su valor, buscamos el primer valor, de c , que produce una línea que toca la región de factibilidad.
Claramente, esto ocurrirá en uno de los vértices del cuadrado. Revisando los cuatro vértices, (0,0), (1,0), (0,1) y (1,1), vemos que x = 1, y = 0 da el mayor valor posible 4 para U.

En general, las condiciones de restricción definen una región poligonal en el espacio, y los valores máximo y mínimo de U solo pueden ocurrir en los vértices de la región.
Luego, la programación lineal busca encontrar métodos eficientes para verificar qué vértices producen los valores más grandes y más pequeños para U.

Véase también INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

transformación lineal Un mapa T : V → W entre dos ESPACIOS VECTORIALES V y W se denomina transformación lineal si se cumplen las dos condiciones siguientes:

i. T(a + b) = T(a) + T(b) para dos vectores cualesquiera a y b ii. T(ka) = kT(a) para cualquier número k y cualquier vector a

Si los espacios vectoriales V y W representan el conjunto de todos los puntos en el plano o en el espacio tridimensional, entonces una transformación lineal es un ejemplo de una TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA que lleva líneas rectas a líneas rectas. Por ejemplo, las rotaciones y las reflexiones son transformaciones lineales. Sin embargo, no toda transformación geométrica es una transformación lineal. Aunque una traslación, por ejemplo, conserva líneas rectas en el plano, no satisface la primera condición descrita anteriormente y, por lo tanto, no es una transformación lineal.

Si e1e2 ,…,en es una base para el espacio vectorial V, entonces cualquier vector a en V puede escribirse como una combinación lineal de estos vectores base:

$$a = c1e1 + c2e2 + \ldots + cnen$$

para algunos números c1 , c2 ,…, cn . Por lo tanto, el valor de la transformación lineal T está completamente determinado por sus valores en los vectores base:

$$T(a) = T(c1e1 + c2e2 + \ldots + cnen)$$
$$= c1T(e1) + c2T(e2) + \ldots + cnT(en)$$

Si f1 ,f2 ,…,fm es una base para el segundo espacio vectorial W, entonces cada vector T(ej) es una combinación lineal de estos vectores base:

$$T(ej) = a1j\,f1 + a2j\,f2 + \ldots + amjfm$$

Por lo tanto, los números aij especifican completamente cómo funciona la transformación lineal. Sea A la MATRIZ con

(i,j)-ésima entrada igual a aij. Esto muestra que cada transformación lineal está representada por una matriz. Además, si representamos los vectores base e1 ,e2 ,…,en como la columna
umn vectores:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

entonces la matriz A, cuya columna j-ésima es la secuencia de valores que resultan de aplicar T a la base j-ésima vec satisface a Aej = T(ej), y, en general, para cualquier vector tor ej , tor tenemos:

$$T(a) = Aa$$

Es decir, tenemos:

Machine Translated by Google

Cualquier transformación lineal T de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W viene dada por la multiplicación con una matriz A cuya j-ésima columna es el efecto de T sobre el j-ésimo vector base de V.

Por ejemplo, considere una rotación R en el plano alrededor del origen a través de un ángulo θ. Tal rotación toma un vector unitario en la dirección del eje x, $e_1 = \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$, al vector $\begin{matrix}\cos\theta\\ \text{sen}\,\theta\end{matrix}$, y el vector unitario en la dirección del eje y, $e_2 = \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$, al vector $\begin{matrix}-\text{sen}\,\theta\\ \cos\theta\end{matrix}$. Así, la matriz que representa una rotación a través de un ángulo θ está dada por:

$$R = \begin{matrix}\cos\theta & -\text{sen}\,\theta\\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta\end{matrix}$$

De la misma manera, una reflexión sobre el eje x, por ejemplo, está dada por la matriz:

$$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix}$$

y una dilatación por un factor k como:

$$\begin{matrix}k & 0\\ 0 & k\end{matrix}$$

Por supuesto, si se trabajara con un conjunto diferente de vectores base, la matriz que representa la transformación lineal sería diferente.

Se puede demostrar que si la matriz A representa una transformación lineal T:V → W y la matriz B representa una transformación lineal S:W → R, entonces el producto matricial BA representa la transformación lineal compuesta: SoT:V → R. Si la matriz A es invertible, entonces la MATRIZ INVERSA A–1 representa la transformación lineal inversa T –1:W → V. (Este mapa inverso existe si A es realmente invertible).

Véase también TRANSFORMACIÓN AFÍNA; OPERACIÓN DE MATRIZ ACIONES.

Liouville, Joseph (1809–1882) Francés Teoría de números, análisis Nacido el 24 de marzo de 1809 en Saint Omer, Francia, el erudito Joseph Liouville es mejor recordado por su prueba de 1844 de la existencia de los NÚMEROS TRANSCENDENTALES. Liouville también logró proporcionar, por primera vez, ejemplos específicos de números que no pueden ser algebraicos. (Estos números se llaman hoy números de Liouville.) También es conocido por sus contribuciones a las ECUACIONES DIFERENCIALES, geometría diferencial (el estudio del CÁLCULO en formas y superficies tridimensionales), análisis complejo (cálculo aplicado a números complejos) y NÚMERO TEORÍA. En 1864 también editó y publicó manuscritos dejados por ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) sobre ecuaciones POLINOMALES . Liouville escribió más de 400 artículos matemáticos durante su carrera, alrededor de 200 de los cuales trataban sobre el tema de la teoría de números.

Liouville se graduó de la École Polytechnique en 1827 con un título básico en matemáticas y mecánica. Después de asumir varios puestos docentes diferentes, Liouville finalmente fue nombrado profesor de análisis y mecánica en esa misma institución en 1838. Mientras tanto, Liouville ya había obtenido una reputación internacional por su trabajo sobre electrodinámica, ecuaciones diferenciales parciales y el estudio de calor, así como por la creación de una nueva revista de matemáticas, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués (Revista de matemáticas puras y aplicadas), hoy comúnmente conocida como Liouville's Journal.

La correspondencia con los matemáticos CHRISTIAN GOLDBACH y Daniel Bernoulli de la FAMILIA BERNOULLI despertó el interés de Liouville por los números trascendentales. Intentó probar que el número e era trascendental, pero no tuvo éxito. (Esta hazaña fue realizada más tarde por el matemático francés Charles Hermite en 1873). Sin embargo, utilizando la teoría de las fracciones continuas, Liouville logró construir una clase de números reales x con la propiedad de que para cada número natural número n hay una fracción que satisface la desigualdad:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Esto, mostró Liouville, era suficiente para establecer que x es trascendental. En particular, Liouville mostró que el número específico (a veces llamado número de Liouville):

Machine Translated by Google

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 0.110001000000000000000010000$$

es trascendental.

Liouville murió en París, Francia, el 8 de septiembre de 1882. Estableció su lugar en la historia de las matemáticas por su trabajo pionero en el estudio de REAL NÚMEROS.

Liu Hui Ver MATEMÁTICAS CHINAS.

Li Ye (Li Chi, Li Zhi) (1192–1279) Álgebra china Li Ye es recordado por su texto de 1248 Ceyuan Haijing (Espejo marino de medidas circulares), en el que introdujo el "método del elemento celestial", un sistema de notación para polinomios en una variable (el elemento celeste) y un conjunto de técnicas para resolver dichas ecuaciones polinómicas. Usando el diagrama único de una muralla circular de la ciudad inscrita dentro de un gran triángulo rectángulo, Ceyuan Haijing guía al lector a través de 170 problemas geométricos, ingeniosamente diseñados para ilustrar las técnicas de traducir la geometría al álgebra y luego resolver las ecuaciones algebraicas consiguientes. En este texto se presentan más de 650 fórmulas diferentes para áreas triangulares y longitudes de segmentos.

Se sabe muy poco de la vida de Li Ye, excepto que su trabajo aparentemente le valió cierta consideración. En 1266, el emperador Kublai Khan, nieto del gran Genghis Khan, nombró a Li Ye para un puesto en la élite de la Academia Hanlin. Permaneció allí solo unos años para luego retirarse y vivir el resto de su vida como un ermitaño.

Lobachevsky, Nikolai Ivanovich (1792–1856) Geometría rusa Nacido el 1 de diciembre de 1792 en Nov gorod, Rusia, Nikolai Lobachevsky es recordado por su descubrimiento de la GEOMETRÍA HIPERBÓLICA en 1826 y por detallar muchas de sus propiedades. (Este trabajo se realizó independientemente de los descubrimientos realizados por JÁNOS BOLYAI (1802-1860) 3 años antes.) Fue el primero en publicar una descripción de una GEOMETRÍA NO EUCLIDEA en su artículo de 1826 "A Concise Outline of the Foundations de Geometría."

Lobachevsky ingresó a la Universidad Estatal de Kazan en 1807 con la intención de estudiar medicina, pero pronto cambió de interés para seguir cursos de matemáticas y física. Se graduó con una maestría en 1811 y, tres años más tarde, fue nombrado profesor en la universidad. En 1822 fue nombrado profesor titular y en 1827 rector de la universidad. Permaneció en la Universidad Estatal de Kazan hasta su jubilación en 1846.

Lobachevsky conoció el tema de la geometría como estudiante. Desde la época de EUCLID (ca. 300-260 a. C.), los eruditos cuestionaron la elección de axiomas de Euclides como base para toda la geometría. Su quinto postulado, el famoso POSTULADO PARALELO, se consideró de naturaleza diferente a los cuatro restantes, y los eruditos sospecharon que podía deducirse de ellos como una consecuencia lógica. Esto se convirtió en un desafío sobresaliente en matemáticas. Durante dos milenios, los eruditos intentaron establecer el quinto postulado como un TEOREMA, pero fracasaron.

Al enterarse de este problema, Lobachevsky comenzó a analizar la situación por sí mismo. En lugar de intentar probar el quinto postulado, consideró la posibilidad de que no se dedujera necesariamente de los cuatro axiomas restantes y, además, admitió la posibilidad de una geometría en la que los primeros cuatro axiomas se cumplen pero en la que el quinto postulado es descaradamente falso. Con este pensamiento ampliado, Lobachevsky descubrió una teoría coherente de la geometría, la geometría hiperbólica, diferente de la geometría euclidiana, pero no obstante válida por derecho propio. Que tal geometría exista mostró, de una vez por todas, que el quinto postulado es de hecho independiente de los cuatro axiomas restantes. Este fue un logro notable.

Lobachevsky presentó los resultados de su descubrimiento a sus colegas de la Universidad Estatal de Kazan en 1826 y publicó su artículo "Un esquema conciso de los fundamentos de la geometría" en el Kazan Messenger. Desafortunadamente, la Academia de Ciencias de San Petersburgo decidió no publicar su artículo como un artículo revisado por pares, y el trabajo de Lobachevsky no recibió un reconocimiento generalizado.

Aunque Lobachevsky logró publicar artículos sobre el tema en fechas posteriores, incluido su artículo alemán de 1840 "Geometrische Untersuchnungen zur Theorie der Parallellinien" (Investigación geométrica sobre la teoría de las líneas paralelas), no fue hasta después de su muerte el 24 de febrero de 1856. que la importancia de su trabajo fue comprendida y publicada en un foro de corriente principal. Hoy en día, la geometría lobachevskiana juega un papel central en la descripción moderna del espacio y el movimiento en la mecánica cuántica relativista y la teoría general de la relatividad.

Machine Translated by Google

máximo local/mínimo local Ver MÁXIMO/
MÍNIMO.

lugar geométrico (plural, lugares geométricos) Un conjunto de puntos que satisfacen alguna condición específica se denomina lugar geométrico de los puntos. Por ejemplo, el lugar geométrico de todos los puntos en el plano a la misma distancia de un punto dado es un círculo, y el lugar geométrico de todos los puntos EQUIDISTANTES de dos puntos dados A y B en el plano es una línea recta perpendicular al segmento de línea que conecta A y B a través de su PUNTO MEDIO. Además, si el punto A se reemplaza por un círculo, entonces el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de A y B es una HÍPER BOLA si B está fuera del círculo A, y una ELIPSE si B está dentro de A. El lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de una recta A y un punto B es una PARÁBOLA.

Si, en un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS, un lugar geométrico de puntos se puede expresar de la forma

$$\{(x,y) : f(x,y) = 0\}$$

entonces la ecuación f(x,y) = 0 se llama la ecuación del lugar geométrico. Por ejemplo, $x^2 - 25 = 0$ es la ecuación de un círculo de radio 5 centrado en el origen.

logaritmo La potencia (EXPONENTE) a la que debe elevarse un número b para obtener un número dado N se denomina logaritmo en base b de N. Es decir, si b x = N, entonces escribimos logbN = x, que leemos como “la potencia de b que da N es x”. Se supone que el número b es positivo. Por ejemplo, hay que elevar el número 10 a una potencia de 2 para obtener el número 100, por lo que el logaritmo en base 10 de 100 es 2:

$$\log_{10} 100 = 2$$

También tenemos:

$\log_{10} 1000 = 3$ (la potencia de 10 que da 1000 es 3)

$\log_{1/2} \frac{1}{8} = 3$ (la potencia de eso da 3) $2^{-1} = \frac{1}{8}$

$\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -2$ (la potencia de 3 que da es $\frac{1}{9}$) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\log_4 1 = 0$ (la potencia de 43 que da 1 es cero)

y

$\log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2}$ (la potencia de 6 que da $\sqrt{6}$ es 1/2)

Debido a que una cantidad b x nunca es negativa o cero, no hay logaritmo de un número negativo o de cero.

Como los logaritmos son exponentes, obedecen las mismas reglas que los exponentes. Por ejemplo, la regla de multiplicación para exponentes dice b xb y = b x+y , lo que indica que, al multiplicar, los exponentes se suman. Esto lleva a la regla de los logaritmos:

1. logb (N × M) = logb N + logb M

(Precisamente, si x = logb N y y = logb M, entonces tenemos: b x = N y b y = M. En consecuencia, N × M = b x × b y b x+y N × M. Es =
, que establece que x + y es la potencia de b que da
decir, logb N × M = x + y = logb N + logb M.)

De manera similar, la regla de los exponentes (b x) y = b xy conduce a la regla:

2. logb (Ny) = ylogb N

También tenemos las reglas:

3. logb (b x) = x (La potencia de b que da b x es de hecho x.)
4. b $\log_b x$ = x (De hecho, logbx es la potencia de b que da x.) 5. logb 1 = 0 (La potencia de b que da 1 es cero.)

Los logaritmos fueron inventados por el matemático escocés JOHN NAPIER (1550–1617) como un medio para simplificar los cálculos aritméticos. Por ejemplo, la regla 1 muestra que cualquier problema de multiplicación se puede convertir a la operación mucho más simple de suma usando logaritmos. Este descubrimiento fue de gran interés para los estudiosos del Renacimiento, en particular para los astrónomos, que se enfrentaban a problemas que requerían la manipulación de números muy grandes. Tales cálculos eran extremadamente tediosos y propensos a muchos errores. Inspirado por los problemas relacionados con el tamaño de la Tierra, Napier sintió que trabajar con el número 107 = 10 000 000 sería de gran ayuda —1 para los científicos, y eligió el número b = 1 – 107

como la base de sus logaritmos. Napier multiplicó todas las cantidades con las que trabajó por 107 para ayudar a evitar la aparición de decimales. Hoy su logaritmo de a
el numero n se escribiria $10^7 \log_{1-\frac{1}{10^7}} \frac{n}{10^7}$.

Machine Translated by Google

Aunque los logaritmos ahora se entienden como exponentes, el mismo Napier no los pensó de esta manera.
Desarrolló su teoría de los logaritmos geométricamente, pensando en ellos como una relación de distancias recorridas por dos objetos en movimiento, uno moviéndose a lo largo de una línea recta a una velocidad de 1 unidad por segundo, y el otro moviéndose a lo largo de un segmento de línea de 1 unidad de largo y con la velocidad cambia de acuerdo con su distancia desde el punto final al que se aproxima. Napier eligió el nombre logaritmo de las palabras griegas logos para "razón" y arithmos para "número". No fue hasta finales del siglo XVII que los matemáticos reconocieron que los logaritmos eran, de hecho, exponentes.

Después de que Napier publicara su trabajo en 1614, el matemático inglés HENRY BRIGGS (1561–1630) le sugirió a Napier que, al igual que nuestro sistema numérico, los logaritmos deberían basarse en el número 10. Napier estuvo de acuerdo en que esto simplificaría las cosas, y b = 10 era luego se considera la base preferida para los logaritmos. Los logaritmos en base 10 se denominan hoy logaritmos comunes o logaritmos de Briggs. El logaritmo común de N se denota simplemente log N o lg N.

En 1624, Briggs publicó tablas que enumeraban los valores de los logaritmos comunes para los números del 1 al 20 000 y del 90 000 al 100 000, inclusive. Los valores de los números 20.000–90.000 fueron completados después de la muerte de Briggs por el matemático holandés Adriaan Vlacq.

El relojero suizo Jobst Bürgi, fabricante de instrumentos astronómicos, también concibió los logaritmos para facilitar la multiplicación de números grandes. Sin embargo, dado que Napier publicó su trabajo primero, el crédito por su descubrimiento no se le dio a Bürgi.

Un número con un valor dado para su logaritmo se llama antilogaritmo o antilogaritmo de ese valor. El antilogaritmo en base 10 de un valor x es 10x .

Los logaritmos comunes de los números 3,7, 370, 370 000, por ejemplo, se diferencian por los números enteros: log 3,7 ≈ 0,5682, log 370 = log(3,7 × 100) ≈ 0,5682 + 2 = 2,5682, y log 370 000 = log(3,7 × 105) ≈ 5,5682.
La parte decimal de un valor logarítmico se llama mantisa y la parte entera se llama característica del logaritmo. (Por ejemplo, los tres logaritmos anteriores tienen cada uno la mantisa 0,5682 y las características 0, 2 y 5, respectivamente). Las tablas logarítmicas del pasado enumeraban solo las mantisas de los números del 1 al 10. Luego se puede calcular el logaritmo de cualquier otro número. sumando el entero apropiado para representar la potencia de 10 necesaria.

En CÁLCULO conviene trabajar con logaritmos de base e. El número e es un número irracional con un valor aproximado de 2.718281828… Los logaritmos de base e se llaman logaritmos naturales, y un logaritmo de base e se denota como ln. Así, ln(e Si uno está dispuesto a trabajar con ^{3}) = 3, por ejemplo.

números complejos, entonces es posible dar significado al logaritmo de un número negativo. Por ejemplo, la FÓRMULA DE EULER nos dice que e

^{yo} = –1. En consecuencia ln(–1) = iπ. Yendo más allá, extendiéndonos a logaritmos de números complejos,

tienen, por ejemplo, $\ln i = \ln \sqrt{-1} = \ln e^{i\pi/2}$. En esto configuración, todos los números distintos de cero, reales y complejos, tienen logaritmos.

Véase también E; FUNCION EXPONENCIAL; LOGARÍTMICO FUNCIÓN; ESCALA LOGARÍTMICA; REGLA DE CÁLCULO.

función logarítmica Cualquier FUNCIÓN CONTINUA f(x), distinta de cero, definida para valores positivos de x con la propiedad de que f(a · x) = f(a) + f(x) para todos los valores positivos a y x, es llamada función logarítmica.
Se dice que tales funciones “convierten la multiplicación en suma”. La serie de observaciones a continuación muestra que cada función logarítmica está dada por un LOGARITMO: f(x) = logbx para alguna base positiva b.

1. Todas las funciones logarítmicas f(x) satisfacen f(1) = 0.

(Esto se sigue de la observación: f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1).)

2. Todas las funciones logarítmicas satisfacen $f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$.

En consecuencia, las funciones logarítmicas dan resultados tanto positivos como negativos.

(Esto se sigue de la observación: $f(1) = f(a \cdot \frac{1}{a}) = 0$

$f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0$.)

3. Para cualquier función logarítmica existe un número b para el cual f(b) = 1.

(Tenemos f(1) = 0 y que es posible elegir un valor a tal que f(a) sea positivo. Uno de los valores f(a), f(a f(a) + f(a), f(a uno. ^{2}) = Por lo tanto, es ^{3}) = f(a) + f(a) + f(a), … será mayor que posible encontrar un número c con f(c) > 1.
Por el TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO , debe haber un valor b entre 1 y c, de modo que f(b) = 1.)

Machine Translated by Google

4. Si f(x) es una función logarítmica con f(b) = 1, entonces f(x) = logb x.

(Para cualquier entero positivo n, tenemos f(x n) = f(x) + f(x) + f(x) = nf(x). Además, $1 (fx \bar{f})(\bar{=}+\ldots\frac{}{X^{-}} = - \quad fx\ nf\bar{x}\ \bar{)}\ (\ )$. por una fracción $\frac{pag}{q}$, tenemos $qf(x) = \bar{f}^{\frac{pag}{q}}((x)\ q) = f(\bar{x}^{\frac{pag}{q}}\ p)$ = pf (x), que muestra f(x r) = rf(x) para cualquier número racional r. Dado que todo número irracional es un LÍMITE de números racionales, esta propiedad también se cumple para los números irracionales. En particular, para cualquier valor de x, f(b x) = xf(b) = x. Es decir, f es de hecho la función que extrae el exponente de una potencia dada de b.)

Si una función logarítmica satisface f(e) = 1, entonces se llama función logarítmica. Es la función dada por el logaritmo natural: f(x) = ln x. su derivada es dada por $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$, y en consecuencia $\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt$. Por lo tanto, la función logarítmica puede alternativamente ser definida como el área debajo de $y = \frac{1}{x}$ curva. (Ver E).

La derivada de una función logarítmica a una base arbitraria b se puede calcular a través de la diferenciación implícita después de descifrar primero y luego volver a aplicar un logaritmo. Específicamente, si y = logb x, entonces b y = x. Aplicando el logaritmo natural se obtiene ylnb = lnx. Derivando, vemos $\frac{dy}{dx}\ln b = \frac{1}{x}$, $\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x \ln b}$. Así tenemos:

$$\frac{}{dx}(\ b\ \text{registro}\ x) = \frac{1\ 1}{\text{en}\, bx}\ -$$

Véase también HOMOMORFISMO; ESCALA LOGARÍTMICA; REGLA DE CÁLCULO.

escala logarítmica Una línea marcada con distancias cuyos LOGARITMOS son las distancias reales a lo largo de la línea se dice que está en escala logarítmica. Por ejemplo, en una escala logarítmica de base 10, si 10 es la etiqueta de 1 pulgada a lo largo de la línea, cada pulgada sucesiva se marcará como 100, 1000, etc. (La posición etiquetada como 1000, por ejemplo, es físicamente log10 1000 = 3 pulgadas a lo largo de la línea). Si un conjunto de ejes de coordenadas están ambos en escala logarítmica, entonces n curva y = x , la gráfica de a, por ejemplo, aparecerá como la gráfica de log y = log(x n) = n log x, es decir, como si las variables en cuestión fueran logy y logx. En esta configuración, el gráfico aparece como una línea recta de PENDIENTE n. Los científicos a menudo trazan gráficas en papel cuadriculado logarítmico y mida la pendiente para encontrar el valor de n que mejor se ajuste a los datos.

El término escala logarítmica también se usa para describir cualquier cantidad que normalmente se mide en términos de logaritmos. En 1935, el sismólogo estadounidense Charles Richter estableció la escala de Richter para describir la intensidad de los terremotos. La escala que ideó es logarítmica, base 10, lo que significa que un terremoto de 6 en su escala, por ejemplo, es 106 o 1 millón, veces más fuerte que los pequeños sismos que puso en valor cero. La medida de pH de acidez o alcalinidad utilizada en química también es logarítmica, al igual que la unidad DECIBEL utilizada para medir la intensidad del sonido.

Véase también REGLA DE DESLIZAMIENTO.

crecimiento logístico Ver MODELOS DE POBLACIÓN.

división larga Ver BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO.

radio largo La distancia desde el centro de un POLÍGONO regular hasta uno de sus vértices se llama radio largo del polígono. Esta cantidad es también el radio de CIR CUMCIRCLE del polígono. Si el polígono tiene n lados, cada uno de 1 unidad de longitud, entonces un ejercicio en TRIGONOME TRY muestra que el radio largo tiene valor

$$r = \frac{1}{2\ \text{pecado}\ \frac{180}{\text{norte}}}$$

Un análogo de PI para un polígono regular es la relación entre su PERÍMETRO y el doble de la longitud de su radio largo (que es igual al diámetro del polígono si n es par).
Esta cantidad se aproxima al valor de π cuando n se vuelve grande. Esto se deduce del hecho de que, según el REGLA DE APRIETE, $\frac{\text{pecado}(x)}{x}$ se aproxima al valor 1 como x, medida en radianes, se vuelve pequeña.

Véase también APOTEMA; MEDIDA EN RADIANES.

Lovelace, Augusta Ada Byron (1815–1852) Computación británica Nacida el 10 de diciembre de 1815 en Piccadilly, Inglaterra, Augusta Ada Byron Lovelace es recordada como una de las primeras personas en escribir un conjunto de instrucciones para una máquina de computación. Como asistente de

Machine Translated by Google



Augusta Ada Byron Lovelace, asistente del erudito del siglo XIX Charles Babbage, fue la primera en desarrollar una teoría de computación mecánica y la primera en escribir el equivalente de un programa de computadora. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

el notable CHARLES BABBAGE (1791-1871) en su diseño y construcción planificada de un "motor analítico", Lovelace describió los principios necesarios para realizar operaciones matemáticas en una máquina y, de hecho, fue la primera persona en escribir un programa de computadora.

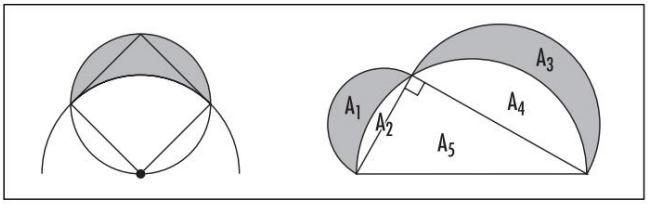
Hija del famoso poeta George Gordon, Lord Byron, Lovelace fue alentada a estudiar matemáticas por su madre, ella misma una experta matemática. El 5 de junio de 1833, mientras asistía a una fiesta, Lovelace conoció a Babbage y se enteró de su trabajo sobre computación mecánica. Fascinado por el tema, Lovelace visitó el estudio londinense de Bab bage dos semanas después para ver su primera máquina, la "máquina diferencial". A partir de esa fecha, Lovelace trabajó como asistente de Babbage en el desarrollo ment de un dispositivo superior capaz de recibir instrucciones y datos de tarjetas perforadas, y capaz de realizar todos los tipos posibles de operaciones matemáticas.

Los eruditos europeos de la época estaban escribiendo comentarios sobre la obra de Babbage, y Lovelace se encargó de traducir el material francés al inglés. En 1843 publicó una traducción comentada de una obra de Luigi Menabrea (1809-1896), Notions sur la machine analytique de Charles Babbage (Notas sobre el motor analítico de Charles Babbage), en la que, a través de sus extensas anotaciones, determinaba de manera efectiva toda la teoría teórica. funcionamiento de tal máquina. (Este material no fue desarrollado adecuadamente por Menabrea.) Lovelace, de hecho, había explicado cómo programar una máquina para realizar matemáticas abstractas.

En una nota filosófica, Lovelace abordó la pregunta apremiante de si las máquinas calculadoras (computadoras) alguna vez serían capaces de pensar. Argumentó que las máquinas solo podrán hacer lo que sabemos cómo ordenarles que realicen y, como tales, nunca podrán anticipar resultados o verdades. El último punto, sintió, es lo que constituye "pensar", mientras que el primero no lo hace. Desde entonces, este argumento se conoce como "la objeción de Lady Lovelace".

Debido a la falta de fondos, Babbage y Lovelace nunca pudieron completar la construcción del nuevo motor. No obstante, hoy en día se reconoce que el trabajo de Lovelace anticipó correctamente las cuestiones teóricas de la informática. Murió en Londres, Inglaterra, el 27 de noviembre de 1852.

lune Una figura en forma de media luna en el plano formado por dos arcos circulares se llama lune. Las lunas fueron estudiadas extensamente por HIPÓCRATES DE QUIOS en el siglo V a. C. Como un primer intento de resolver el infame problema de la CUADRATURA DEL CÍRCULO, demostró que es posible cuadrar los lunes del tipo que se muestra en la siguiente ilustración. (Es decir, Hipócrates esbozó un



Lunes

Machine Translated by Google

serie específica de pasos que permitieron a uno construir un cuadrado de la misma área que este lune usando solo una regla y un compás). Desde entonces, los matemáticos han demostrado que solo hay otros cuatro tipos de lunes que también se pueden cuadrar.

En la figura de la página anterior, las áreas de los dos lunes sombreados suman el área del triángulo. Aquí, cada arco circular es un semicírculo dibujado en el lado de un triángulo rectángulo. Esta afirmación se deriva de la versión generalizada del TEOREMA DE PITÁGORAS , que establece que las áreas de dos semicírculos construidos sobre los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo suman el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa. (En consecuencia, en nuestro diagrama, las áreas A1 + A2 y A3 + A4 suman A2 + A4 + A5 , lo que da como resultado A1 + A3 = A5).

En el estudio de la geometría esférica, la parte de la superficie de una esfera delimitada por dos grandes círculos también se denomina luna. Si el ángulo entre los dos grandes círculos es θ grados, entonces el área de superficie de este rebanada de la esfera es $2 \cdot \frac{\theta}{360}$ unidades al cuadrado, donde $r = 4\pi r$ es el radio de la esfera.

Machine Translated by Google

METRO

Maclaurin, Colin (1698–1746) Cálculo británico Nacido en febrero de 1698 (se desconoce su fecha exacta de nacimiento), en Kilmodan, Escocia, el erudito Colin Maclaurin es considerado el matemático británico más destacado de la generación que siguió a SIR ISAAC NEWTON. En sus dos famosos textos Geométrica organica (Geometría orgánica) de 1720 y Tratado de fluxiones de 1742, Maclaurin desarrolló y amplió el tema del CÁLCULO y ofreció muchos resultados originales. La famosa serie que lleva su nombre, sin embargo, es un caso especial de la obra de BROOK TAYLOR (1685-1731), como acertadamente reconoció Maclaurin. También escribió un influyente libro de texto elemental, Tratado sobre álgebra, sobre la aplicación del álgebra a la geometría.

Huérfano a los 10 años, Maclaurin ingresó a la Universidad de Glasgow en 1709, lo que, en ese momento, se consideraba una alternativa aceptable a la educación secundaria. Allí estudió los trabajos de EUCLID, lo que despertó en él la pasión por las matemáticas. A los 14 años completó el grado básico de maestría y dio una conferencia pública sobre la teoría de la gravitación de Newton, exhibiendo un nivel de conocimiento científico comparable al de los estudiosos de la época.

En 1717 Maclaurin fue nombrado profesor de matemáticas en el Marischal College de la Universidad de Aberdeen. Este puesto le brindó la oportunidad de viajar a Londres en 1719, donde conoció a SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) y continuó sus estudios de matemáticas y física. El trabajo de Maclaurin fue bien recibido y ese mismo año fue elegido miembro de la ROYAL SOCIETY . Dos años más tarde también recibió el gran premio de la Académie des Sciences por su trabajo sobre el impacto de los cuerpos. Al mismo tiempo, había escrito y publicado su famoso tratado Geométrica orgánica, que le granjeó una consideración considerable como un excelente erudito en geometría.

En un intento por resolver las críticas al cálculo recién desarrollado por Newton, Maclaurin publicó su propia versión de la teoría. Su extenso Tratado de fluxiones apeló a la geometría para aportar rigor al uso de FLUXION y fluidos por parte de Newton . También desarrolló la teoría de las SERIES infinitas, produjo nuevas pruebas de convergencia y discutió las expansiones de funciones en SERIE DE POTENCIA (SERIES DE TAYLOR). Este trabajo fue muy influyente y, en honor a su logro, su nombre permanece unido a la serie que consideró: la SERIE Maclaurin. Maclaurin también proporcionó muchas aplicaciones nuevas del cálculo en este trabajo.

Maclaurin recibió un segundo premio de la Académie des Sciences en 1740, esta vez por su estudio de las mareas. Que el premio también se otorgara a LEONHARD EULER (1707–83) y Daniel Bernoulli (1707–82) de la FAMILIA BERNOULLI ese mismo año demuestra que Maclaurin era considerado igual a los dos mejores matemáticos de su época. Murió en Edimburgo, Escocia, el 14 de enero de 1746.

Serie Maclaurin Ver SERIE TAYLOR.

Madhava de Sangamagramma (ca. 1350–1425) Trigonometría, astronomía india Nacido cerca de Cochin, en el suroeste de la India, Madhava es recordado por sus brillantes descubrimientos en ANÁLISIS. Calculó, por ejemplo, el equivalente de la SERIE DE TAYLOR del seno, coseno y

Machine Translated by Google

funciones arcotangentes de la TRIGONOMETRÍA, descubrió la SERIE DE GREGORIO para π (que usó para calcular una aproximación de este valor correcto a 11 decimal lugares), y, además, proporcionó estimaciones precisas para el término de error al truncar la serie después de un número finito de pasos. Madhava también produjo la más precisa tabla de valores de los senos de su tiempo. Los métodos Madhava utilizados para lograr estas proezas se cree que son esencialmente los mismos que los desarrollados en CÁLCULO por GOT TFRIED WILHELM LEIBNIZ, SIR ISAAC NEWTON y BROOK TAYLOR. Por supuesto, Madhava había descubierto estas técnicas 300 años antes de su invención de este tema.

Se sabe muy poco de la vida de Madhava, y todos sus escritos matemáticos se pierden. Los historiadores tienen aprendido del trabajo matemático de Madhava a través de la pocos textos astronómicos suyos que han sobrevivido, y de los comentarios eruditos que siguen a Madhava hecho de su obra.

Cabe mencionar que de su expansión en serie para arcotangente:

$$\text{bronceado}^{-} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Madhava establece x = 1 para obtener el familiar Gregory serie para π. No es bien sabido que Madhava también estableció $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ para obtener la siguiente fórmula alternativa para π:

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right)$$

cuadrado mágico Una matriz cuadrada de números para los cuales la suma de los números en cualquier fila, columna o principal diagonal es la misma se llama un cuadrado mágico. La suma constante obtenida se llama constante mágica de la cuadrado. Por lo general, los números en un cuadrado mágico son deben ser distintos, y a menudo se supone que para un cuadrado n × n , los números específicos 1, 2, 3, n^2 son …, utilizados. (Es conveniente designar tal cuadrado mágico como un tipo estándar.)

El ejemplo más antiguo conocido es el "Lho shu cuadrado" que aparece en un antiguo manuscrito chino desde la época del emperador Yu alrededor del 2200 a. Aquí los números del 1 al 9 están ordenados en un 3 × 3 matriz para producir un cuadrado mágico de constante mágica 15. Salvo rotaciones y reflejos, este es el único arreglo ment de estos nueve enteros que produce un mágico cuadrado. (Así decimos que solo hay una magia 3×3 cuadrado de tipo estándar.)

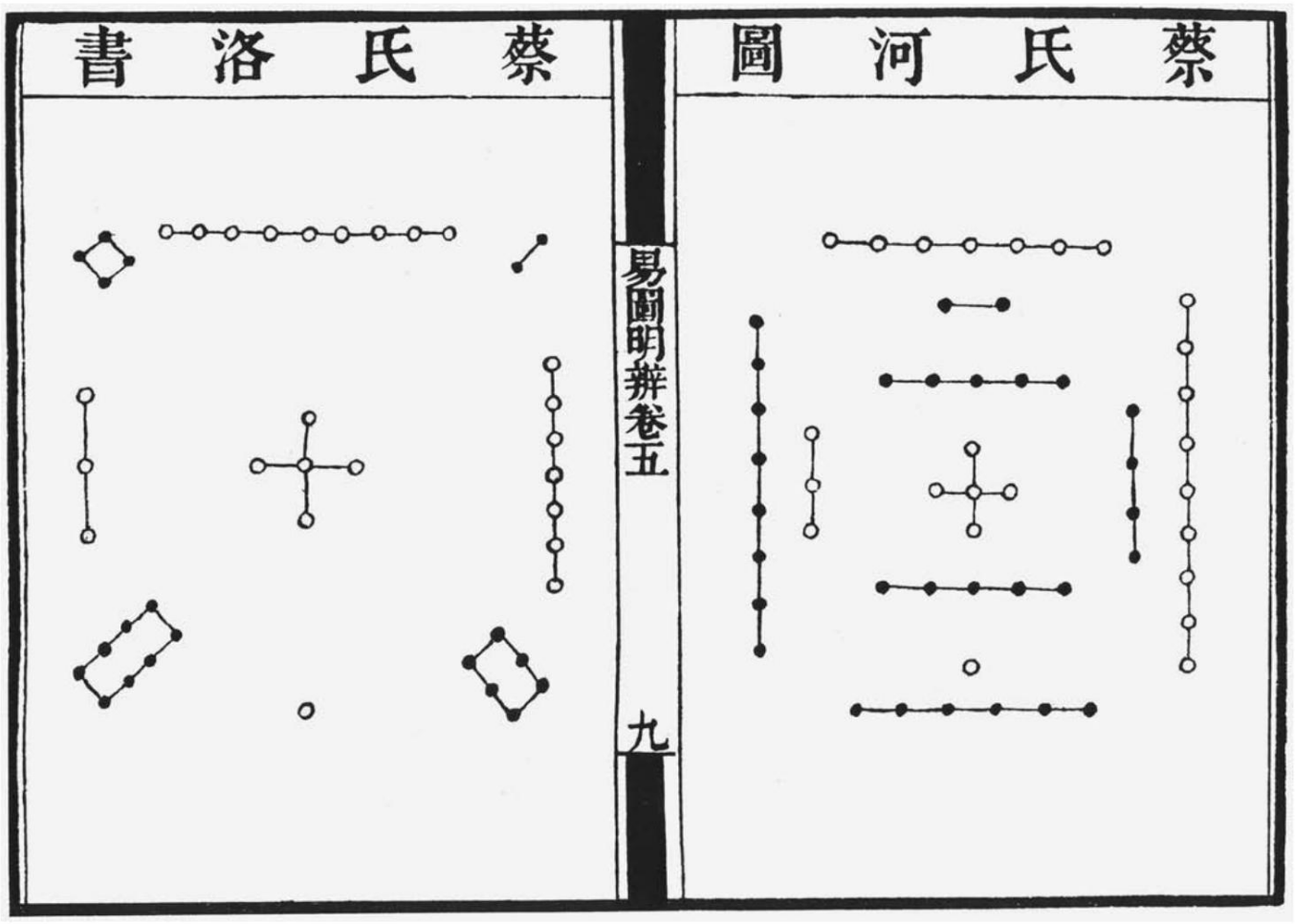
8	dieciséis	
3	5 7	
4 9 2		

Los eruditos chinos antiguos y los eruditos árabes posteriores, ejemplos calculados de cuadrados mágicos estándar de 4 × 4, 5 × 5 y de orden superior. (El cuadrado mágico de 5 × 5 que se muestra a continuación se atribuye a Yang Hui del siglo XIII, y el cuadrado mágico de 6 × 6 a Chêng Ta-wei del siglo XVI.) Artista alemán ALBRECHT DÜRER (1471–1528) representado el cuadrado mágico de 4 × 4 a continuación en el fondo de su grabado Melancholia, y se cree que esta es la primera introducción de un cuadrado mágico al Mundo occidental. Famoso científico y estadista Benjamin Franklin (1707-1790) fue un maestro en la invención de cuadrados mágicos de alto orden y se dice que jugó con nuevos plazas cada vez que los debates políticos se volvían tediosos.

16 3 2 13				
5 10 11 8				
9 6 7 12				
4 15 14 1				

1 23 16 4 21				
15 14 7 18 11				
24 17 13 9 2				
20 8 19 12 6				
5 3 10 22 25				

Machine Translated by Google



Tomado de una versión en bloque del siglo XVIII del Libro de los Cambios, o I Ching, el diagrama de la izquierda representa el cuadrado mágico Lho shu. (Foto cortesía de C. Walker/Topham/The Image Works)

27	29	2	4	13	36		
9	11	20	22	31	18		
32	25	7	3	21	23		
14	16	34	30	12	5		
28	6	15	17	26	19		
1	24	33	35	8	10		

Es sencillo calcular la constante mágica M de un cuadrado mágico estándar n × n . La suma de las entradas de cada fila produce la constante mágica M y, como hay n filas, la cantidad nM debe ser igual a la suma de todas las entradas de la tabla. Así, como muestran las fórmulas de SUMAS DE POTENCIAS :

$$2\,nM = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

flexible:

$$\text{METRO norte} = \frac{1}{2}\left(\text{norte}^2 + \text{norte}\right)$$

Para n = 1, 2, 3, 4, 5,... esto da la secuencia de valores 1,5,15,34,65,...

Machine Translated by Google

No hay cuadrados mágicos de 2 × 2 de tipo estándar, solo un cuadrado mágico estándar de 3 × 3, 880 cuadrados mágicos estándar de 4 × 4 y 275 305 224 cuadrados mágicos estándar de 5 × 5. Hasta el día de hoy, nadie sabe la cantidad de cuadrados mágicos estándar de 6 × 6.

Se conocen métodos generales para construir cuadrados mágicos estándar n × n de cualquier tamaño n mayor que 2. Por ejemplo, para cualquier valor impar de n, comience colocando el número 1 en cualquier lugar dentro de la matriz y colocando de manera incremental los números subsiguientes en el cuadrado en diagonal hacia arriba y hacia la derecha. Siga un "efecto envolvente" para que los caminos que salen de la parte superior de la matriz regresen a la parte inferior y los que van a la derecha regresen a la izquierda. Cuando uno encuentra un cuadrado que ya está lleno, coloque el número entero subsiguiente en la celda directamente debajo de la celda actual para luego continuar moviéndose en diagonal hacia arriba a la derecha. Por ejemplo, comenzando con 1 en el centro, este método produce el siguiente cuadrado mágico de 5 × 5. (Observe, a medida que uno lee la secuencia de entradas, los números 6, 11, 16 y 21 fueron "retrocedidos" a una diagonal inferior).

10	12	19	21	3
11	18	25	2	9
17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22

Este método de construcción se conoce como el método siamés y se atribuye al embajador francés en Siam (ahora Tailandia) Simon de la Loubere (ca. 1670). Existen métodos para construir cuadrados mágicos estándar de orden par, pero son considerablemente más complicados.

Hay una plétora de requisitos alternativos que uno podría colocar en una disposición cuadrada de números para producir cuadrados mágicos con propiedades alternativas notables. Enumeramos aquí solo algunos ejemplos:

1. Cuadrados semimágicos: una matriz cuadrada de números que no llega a ser un cuadrado mágico solo porque sus diagonales principales no se suman a la constante mágica se llama CUADRADO SEMI-MÁGICO. Estos cuadrados tienen la notable propiedad de que, cuando se los considera como matrices, la suma, el producto y el inverso de la MATRIZ de cualquier colección de cuadrados semimágicos es nuevamente semimágico.
2. Cuadrados mágicos de multiplicación: Se dice que una matriz cuadrada de números en la que cada fila, columna y diagonal tiene el mismo producto es un cuadrado mágico de multiplicación. La siguiente matriz, por ejemplo, es un cuadrado mágico.

12	9	2
1	6	36
18	4	3

3. Cuadrados mágicos de división: una matriz cuadrada de números en la que por cada triple de los números a, b y c en una fila, columna o diagonal, el cociente a ÷ (b ÷ c) es igual a un cuadrado mágico de división. . Por ejemplo, la siguiente matriz es un cuadrado de este tipo:

18	9	3
36	6	1
12	4	2

4. Cuadrados mágicos de suma y multiplicación: Un cuadrado que es simultáneamente un cuadrado mágico bajo suma y bajo multiplicación se llama cuadrado mágico de suma y multiplicación. La siguiente matriz de 8 × 8 es un ejemplo de dicho cuadrado:

Machine Translated by Google

39	34	138	243	100	29	105	152	
116	25	133	120	51	26	162	207	
119	104	108	23	174	225	57	30	
150	261	45	38	91	136	92	27	
135	114	50	87	184	189	13	68	
216	161	17	52	171	90	58	75	
19	60	232	175	54	69	153	78	
46	81	117	102	15	76	200	203	

5. Cuadrados de borde: un cuadrado mágico (bajo adición) que sigue siendo mágico cuando se elimina su borde se llama cuadrado mágico de borde. Si uno puede continuar eliminando los bordes de los cuadrados subsiguientes y aún así preservar la propiedad mágica, entonces decimos que tenemos un cuadrado mágico anidado. El siguiente es un ejemplo de un cuadrado mágico anidado:

31	30	33	16	15	
13	26	27	22	37	
14	21	25	29	36	
32	28	23	24	18	
35	20	17	34	19	

26	27	22	
21	25	29	
28	23	24	

6. Cuadrados alfamágicos: si reemplazando cada entrada en un cuadrado mágico (aditivo) con el número de letras en el nombre (inglés) de ese número se produce un nuevo cuadrado mágico, entonces decimos que tenemos un cuadrado alfamágico. Por ejemplo, el cuadrado de abajo, escrito con palabras, es alfamágico (el número de letras de cada nombre está escrito entre paréntesis, formando su propio cuadrado mágico).

cinco (4)	veintidós (9)	dieciocho (8)
veintiocho (11)	quince (7)	dos (3)
doce (6)	ocho (5)	veinticinco (10)

7. Rectángulos mágicos: una matriz rectangular de números en la que la suma de las entradas en cualquier fila o columna es la misma se llama rectángulo mágico. Si hay n filas y m columnas, y la constante mágica es M, la suma de todas las filas muestra que nM es igual a la suma de todas las entradas en la matriz. La suma de todas las columnas da nM como la suma de todas las entradas en la matriz, por lo que debemos tener nM = mM. Si se requiere que n y m sean diferentes, esto obliga a que la constante mágica sea cero. Por lo tanto, cualquier rectángulo mágico, como el que se muestra a continuación, debe incluir entradas negativas.

3	–4	1	
–3	4	–1	

También se pueden considerar arreglos alternativos de números y buscar pentagramas y hexagramas mágicos, o arreglos numéricos cúbicos mágicos, por ejemplo. Este es un tema popular de exploración para los entusiastas generales de las matemáticas.

magnitud Una medida positiva del tamaño de una cantidad se llama su magnitud. Por ejemplo, la magnitud de un número real es su VALOR ABSOLUTO. (Así, por ejemplo, 27 y –27, aunque de polaridad opuesta,

Machine Translated by Google

tienen la misma magnitud.) La magnitud de un VECTOR es su longitud.

Los físicos y los astrónomos usan la frase ORDEN DE MAGNITUD para referirse a la potencia más pequeña de 10 necesaria para representar una cantidad. Por ejemplo, los números 4×1023 y 9,78×1023 son del mismo orden de magnitud.

Véase también NOTACIÓN CIENTÍFICA.

Conjunto de Mandelbrot Ver FRACTAL.

matriz (plural, matrices) Una matriz rectangular de números que se muestran en filas y columnas y están entre paréntesis se denomina matriz. (En ciencia, la palabra matriz se usa para describir el material de fondo, suelo o roca, que sostiene un objeto como un fósil o un cristal en su lugar. En matemáticas, la palabra se usa para describir una matriz que "sostiene" números en su lugar.) Una matriz m × n tiene m filas y n columnas. Por ejemplo, el siguiente objeto es una matriz de 2 × 3:

$$\begin{matrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Una matriz se llama cuadrada si el número de filas es igual al número de columnas. Una matriz con una sola fila (matriz fila) o una sola columna (matriz columna) se puede considerar como un VECTOR.

Por lo general, una matriz se denota con una letra mayúscula. Por ejemplo, la matriz anterior podría llamarse A,

$$3 x 1 tan- = - + xx 3$$

y la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna como Aij. Por ejemplo, en este ejemplo, A11 = 5 y A23 = 2.

Las matrices surgen en el estudio de las ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS y en el estudio del ÁLGEBRA LINEAL. Cualquier TRANSFORMACIÓN LINEAL se puede representar mediante una matriz. Se pueden combinar matrices de acuerdo con un conjunto de OPERACIONES DE MATRICES estándar.

Véase también VECTOR PROPIEDAD; GRUPO LINEAL GENERAL; MATRIZ DE IDENTIDAD; MATRIZ INVERSA.

operaciones con matrices Hay tres operaciones aritméticas básicas que se pueden realizar en una MATRIZ o en un par de matrices de la misma dimensión (es decir, dos matrices con el mismo número de filas y el mismo número de columnas).

1. Multiplicación escalar: Para multiplicar una matriz por un número real k, multiplique cada entrada de la matriz por ese número. Por ejemplo, si

$$A = \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}$$

entonces

$$4A = \begin{matrix} 8 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 28 \\ 12 & 16 & 4 \end{matrix}$$

En general, la fórmula para el (i,j)-ésimo elemento del producto escalar kA es:

$$(kA)ij = kAij$$

2. Suma de matrices: para sumar dos matrices de la misma dimensión, agregue las entradas correspondientes e ingrese cada suma en el lugar correspondiente en la suma de matrices. Por ejemplo, si

$$un = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

y

$$B = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

entonces

$$AB + = \begin{matrix} + & + \\ (1 & 2) \\ 0 & 5 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{matrix}$$

En general, la fórmula para el (i,j)-ésimo elemento de la suma A + B es:

$$(A + B)ij = Aij + Bij$$

Machine Translated by Google

El producto escalar y la suma matricial satisfacen la relación:

$$k(A + B) = kA + kB$$

3. Multiplicación de matrices: El PRODUCTO DOT de dos vectores proporciona una forma natural de obtener un solo valor numérico a partir de dos listas separadas de números: el producto de (x1 ,x2 ,…,xn) y (y1 ,y2 ,…, yn) viene dada por la suma x1y1 + x2y2 +…+xnyn . Cada fila y columna de una matriz proporciona una lista de números, por lo que uno puede crear a partir de dos matrices A y B una nueva matriz de valores numéricos cuyas entradas son los productos punto de las filas o columnas de A con las filas o columnas de B. Ha resultado conveniente utilizar únicamente las filas de A y las columnas de B, siempre que el número de entradas de cada fila de A coincida con el número de entradas de cada columna de B. En resumen:

Si A es una matriz de n × m y B una matriz de m × r , entonces el producto de matriz AB es la matriz de n × r cuya (i,j)ésima entrada es el producto escalar de la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B. Tenemos:

$$(AB)ij = Ai1B1j + Ai2B2j + \ldots + AimBmj$$

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

entonces AB es la matriz 2 × 2:

$$AB = \begin{bmatrix} 21 & 03 & 1 & 2 & 23 & 05 & 1 & 1 & (&) & (&) & + & + & - & + & - & + \\ 11 & 33 & - & 52 & 13 & 35 & 5 & 1 &) & + & + & + & (& + \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 20 & 13 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, el producto BA no está definido.

En muchas aplicaciones se supone que todas las matrices son matrices cuadradas, es decir, tienen el mismo número de filas y columnas. En este escenario, aunque se pueden definir los productos AB y BA de dos matrices cuadradas A y B del mismo tamaño, es probable que sean desiguales. Por tanto, el producto de matriz no satisface la PROPIEDAD CONMUTATIVA. La MATRIZ DE IDENTIDAD es una matriz I con la propiedad de que AI=IA=A para cualquier matriz cuadrada A de tamaño fijo.

La transpuesta de una matriz A, denotada por AT, es la matriz que se obtiene de A intercambiando sus filas con sus columnas. El producto ATB es la matriz cuya (i,j)ésima entrada es el producto escalar de la i-ésima columna de A con la j-ésima columna de B. De manera similar, el producto ABT tiene (i,j)ésima entrada el producto escalar de la i- ésima fila de A con la j-ésima fila de B, y ATB T tiene (i,j)-ésima entrada el producto escalar de la i-ésima columna de A con la j-ésima fila de B.
Este último ejemplo es igual a la transpuesta del original = ATB T BA. Así tenemos: (BA) ^{T} producto.

Si una TRANSFORMACIÓN LINEAL está representada por una matriz A y una segunda por la matriz B, entonces la COMPOSICIÓN de estas dos transformaciones está representada por una matriz igual al producto BA. (Esto se lee al revés: la transformación representada por A se aplica primero y es seguida por la segunda transformación B.) Es precisamente el deseo de hacer que esta observación sea cierta lo que primero llevó a los matemáticos a definir
el producto matriz de la manera descrita anteriormente.

Véase también DETERMINANTE; GRUPO LINEAL GENERAL; MATRIZ INVERSA.

máximo/mínimo El punto más alto en el gráfico de una función se denomina punto máximo del gráfico, y el valor de la función en ese punto se denomina valor máximo de la función (o su máximo global o máximo absoluto). De manera similar, el punto mínimo de la gráfica es el punto en el que la gráfica tiene su valor más bajo, y el valor mínimo de la gráfica es el valor de la función en ese punto (también llamado mínimo global o mínimo absoluto). Es posible que una función no tenga un valor máximo o un valor mínimo. Por ejemplo, la función y = x, definida sobre todos los números reales, no tiene máximo ni

valor mínimo, y la función $y = \frac{1}{2\,1 + x}$, definido sobre todos los números reales, no tiene valor mínimo. El TEOREMA DEL VALOR EXTREMO muestra, por otra parte, que toda función continua definida en un intervalo cerrado adopta necesariamente tanto un valor máximo como un valor mínimo en ese intervalo.

Un máximo local (también llamado máximo relativo) para una función es un punto en el gráfico de una función que es más alto que todos sus puntos cercanos en el gráfico. Claramente, un máximo local no necesita ser el punto más alto en el gráfico, aunque el punto más alto ciertamente califica como un máximo local. Del mismo modo, un local

Machine Translated by Google

mínimo (o mínimo relativo) para un gráfico es el ubicación de un valor de función más pequeño que todos los cercanos valores de función. Nuevamente, un mínimo local no necesita ser un mínimo absoluto, aunque podría serlo.

Si la función en cuestión es diferenciable, entonces las herramientas y técnicas del CÁLCULO permiten localizar fácilmente los máximos y mínimos locales. Está despejado geométricamente, por ejemplo, que la pendiente de la recta tangente a un gráfico es cero en un máximo local o mínimo local. Tenemos:

> Si la función f(x) tiene un máximo local o mínimo local en x = c, entonces f′(c) = 0

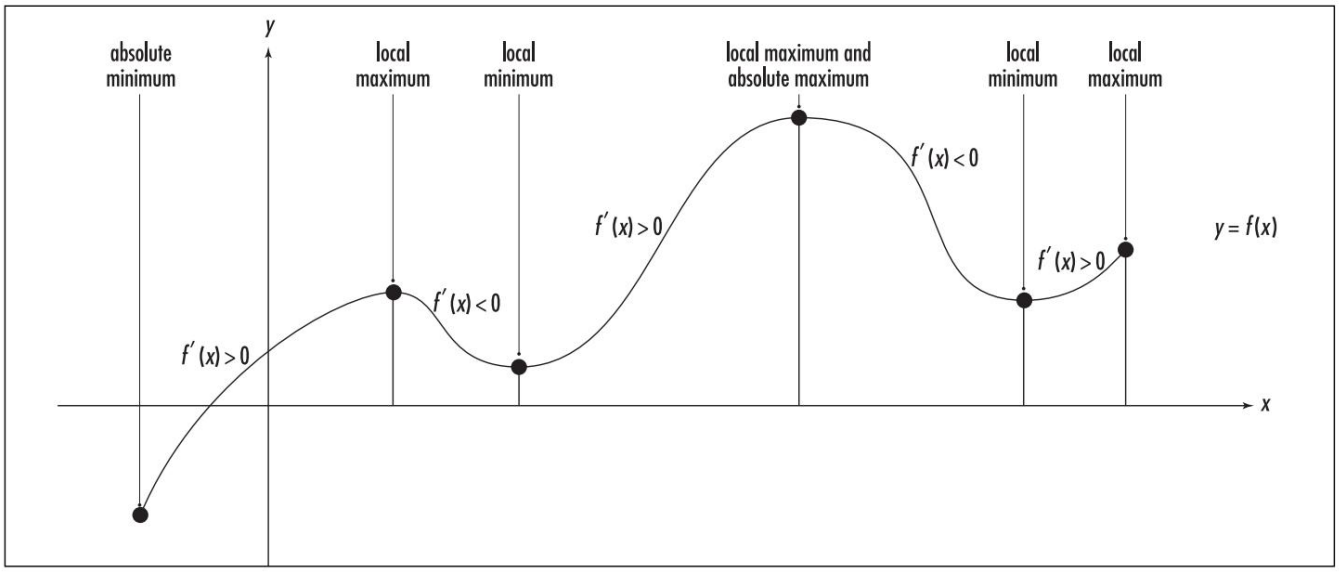
La definición límite de la derivada proporciona una precisión prueba de esto Si el valor f(c) es un máximo local, por ejemplo, entonces, para h pequeña, el valor f(c + h) es menor que el valor f(c). En consecuencia, si h se acerca al valor cero pasando por valores positivos justo arriba (fc h fc + −) () cero, entonces el cociente es negativo. esta hora muestra que la derivada $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ debe ser ≤ 0. Por otro lado, si h tiende a cero a través de valores negativos, entonces el cociente es positivo, y f′(c) ≥ 0. Debe darse entonces que f′(c) = 0.

Cualquier valor de x = c para el cual f′(c) = 0 se denomina punto crítico (o punto estacionario) de la función. A El estudio de las funciones CRECIENTES/DECRECIENTES establece:

> Un punto crítico x = c es un máximo local para la función f si, y solo si, f(x) es creciente justo a la izquierda de c y decreciendo justo a la derecho de c. En consecuencia, x = c es un máximo local si, y solo si, f′(c) = 0 y f′(x) > 0 solo a la izquierda de c, y f′(x) < 0 justo a su derecha.
>
> Un punto crítico x = c es un mínimo local para la función f si, y sólo si, f(x) decrece justo a la izquierda de c y crece justo a la derecho de c. En consecuencia, x = c es un mínimo local si, y solo si, f′(c) = 0 y f′(x) < 0 solo a la izquierda de c, y f′(x) > 0 justo a su derecha.

Esta observación, llamada criterio de la primera derivada, permite uno para determinar si un punto crítico es o no un máximo local o un mínimo local. (Cualquier crítico punto en el que la derivada sí cambia de signo se llama un punto de inflexión.) Como ejemplo, considere . la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Para encontrar sus puntos críticos necesitamos resolver la ecuación f′(x) = 0. Esto da:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)1 - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$, dando x = –1



máximos y mínimos

Machine Translated by Google

y x = 1 como puntos críticos. Para un valor justo a la izquierda de x = –1 (digamos, x = –1.1), vemos que f ′(x) es negativa. Para un valor justo a la derecha de x = –1 (por ejemplo, x = –0,9), es positivo. Por tanto, la función tiene un mínimo local en x = –1.

Un análisis similar muestra que x = 1 es un máximo local.

Un estudio de las funciones CONCAVE UP/CONCAVE DOWN establece:

> En un máximo local, una función es cóncava hacia abajo. En consecuencia, un máximo local para una función f(x) se puede identificar como un punto x = c con f′(c) = 0 y f″(c) < 0.
>
> Como mínimo local, una función es cóncava hacia arriba. En consecuencia, un mínimo local para una función f(x) se puede identificar como un punto x = c con f′(c) = 0 y f″(c) > 0.

Esta observación se llama la prueba de la segunda derivada.

Por ejemplo, considere el desafío de encontrar dos números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea lo más grande posible. Si hacemos que x e y representen dos números positivos variables, entonces se nos pide que "maximicemos" la función producto p = xy, dado que x + y = 100. Despejando y y sustituyendo se obtiene: P = x(100 – x) = 100x – x^2. Esto expresa P como una función de x solo. Un máximo para esta función sólo puede ocurren en un punto crítico. Resolviendo $\frac{dP}{dx} = 0$ se obtiene 100 – 2x = 0 o x = 50. Para clasificar este punto crítico, tenga en cuenta que $\frac{d^2P}{dx^2} = -2 < 0$. Esto muestra que la curva es cóncava hacia abajo. En consecuencia, el punto x = 50, el único punto crítico, es un máximo (global). El valor correspondiente de y es y = 100 – 50 = 50. Por lo tanto, el valor máximo del producto es 50 × 50 = 2500.

> Véase también OPTIMIZACIÓN.

Matemáticas mayas La cultura maya, con sede en la península de Yucatán, América Central, abarcó el período del 250 d.C. al 900 d.C., pero se basó en una civilización establecida en la región desde el 2000 a.C.

La gente de esta época había construido grandes ciudades, repletas de construcciones de todo tipo, incluidos grandes embalses para almacenar agua de lluvia, sofisticados sistemas de riego y campos elevados para la agricultura. Los gobernantes eran sacerdotes y las prácticas religiosas se sincronizaban con las observaciones astronómicas.

En 1511, con una fuerza de 11 barcos y 508 soldados, El explorador español Hernán Cortés conquistó los pueblos del Yucatán. Encontró casi ninguna resistencia. Treinta años después, el obispo Diego de Landa, de la Orden Franciscana, fue enviado al Nuevo Mundo como misionero e hizo todo lo posible para ayudar a los pueblos mayas y protegerlos de sus nuevos amos españoles. Al principio estaba horrorizado por las prácticas religiosas de la gente y los íconos inusuales que aparecían en sus textos escritos, creyendo que la escritura era mentira del diablo. Ordenó destruir todos los ídolos mayas y quemar todos los libros mayas, lo que afligió considerablemente a la población local. Quizá por remordimiento, Landa sintió la necesidad de escribir en 1566 un texto, Relación de las cosas de Yucatán , en el que se registraba la escritura, costumbres, prácticas religiosas e historia del pueblo maya, junto con algún intento en justificar sus acciones. Es a partir de este trabajo, y de cuatro remanentes de texto maya real salvados del fuego, que aprendemos de las matemáticas mayas. Gran parte de las matemáticas de la gente estaba motivada por los cálculos de los ciclos de los planetas y la necesidad de mantener un sistema de calendario preciso.

Viniendo de un clima tropical, los mayas eran plenamente conscientes de que el cuerpo humano viene con 20 dígitos, y no es sorprendente que estas personas desarrollaran un sistema de conteo de base 20 (hoy llamado sistema vigesimal). Así, en lugar de contar en grupos de unidades (1), decenas (10), centenas (100) y mil (1000), las personas de esta cultura contaban en términos de unidades (1) y veinte (20). Motivados por el número de días del año, los mayas trabajaron luego en grupos de 360 y luego en grupos de 20 × 360. Así, por ejemplo, un número representado como 2-12-5-17 en el sistema maya representa el valor:

$$17 \times 1 + 5 \times 20 + 12 \times 360 + 2 \times 20 \times 360 = 18\,837$$

(Por lo tanto, el sistema no es estrictamente vigesimal).

Los números se representaban como puntos y barras, con una barra que indicaba cinco unidades. Por lo tanto, un diagrama que representa un grupo de dos barras y tres puntos representa el número 13. (Algunos historiadores sugieren que cada punto representa la punta de un dedo y la barra horizontal una mano extendida).

Los mayas usaban la notación posicional para representar números grandes, incluido un símbolo para el cero, la imagen de un puño cerrado, o tal vez una caracola, para representar la no excavación de una determinada potencia de 20 o 360.

Los mayas tenían dos sistemas de calendario. El Tzolkin, el calendario ritual, contenía 13 meses, uno para cada dios del mundo superior, con 20 días por mes. De este modo

Machine Translated by Google

el Tzolkin siguió un año de 260 días (que resulta ser el número de días entre los dos días del año en que el Sol está directamente sobre la Península de Yucatán). El segundo calendario, el Haab, el calendario agrícola, era el año habitual de 365 días, dividido en 18 meses de 20 días y un mes corto de 5 días llamado Wayeb. Los dos calendarios coincidían cada 18,980 días (el mínimo común múltiplo de 260 y 365) es decir, cada 52 años, dando un período que constituía un "siglo" maya. Los mayas también eran plenamente conscientes de que el planeta más visible en los cielos, Venus, volvía exactamente a su misma posición cada 584 días, un número que resulta dividir 2 × 18 980.

Que Venus regrese a su misma posición precisamente al pasar exactamente dos "siglos", es decir cada 104 años, tuvo un profundo significado religioso para el pueblo maya.

Parece que los mayas no tenían métodos estándar para multiplicar o dividir números grandes, y parecía que nunca desarrollaron el concepto de fracción. Sin embargo, a pesar de la naturaleza engorrosa de su sistema de notación, los mayas realizaron algunos cálculos astronómicos excepcionalmente precisos. Por ejemplo, calcularon correctamente la duración exacta de un año en 365,242 días y la duración del mes lunar en 29,5302 días.

(Estos resultados no se presentaron en términos de decimales, por supuesto. Los registros muestran, por ejemplo, que los mayas calcularon que 149 meses lunares abarcan exactamente 4400 días). Los mayas realizaron sus observaciones astronómicas utilizando herramientas no más sofisticadas que un par de palos. atados juntos en un ángulo recto a través del cual observar los planetas.

media Una media de dos números a y b es un número m entre a y b que, en cierto sentido, representa el "medio" de los dos números. La medida más común de la "media" es el promedio o la media aritmética dada $m = \frac{a+b}{2}$. Representa la ubicación en la línea del número a mitad de camino entre las posiciones a y b. Alternativamente, se podría considerar la media geométrica dada por $m = \sqrt{ab}$. Esto representa la longitud de los lados de un cuadrado cuya área es la misma que la de un rectángulo a × b .

En el siglo IV a. C., los miembros de la escuela pitagórica posterior identificaron 10 medios, ahora llamados medios neopitagóricos. Por ejemplo, los dos primeros son las medias aritmética y geométrica. La tercera media, dada por $m = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, se llama media armónica y el cuarto, $m = \frac{a^2+b^2}{a+b}$, es la media contraarmónica. Todas las "medias" tienen la propiedad de que si los números a y b se multiplican cada uno por k, entonces m también se multiplica por k.

La noción de media puede extenderse a la de más de dos números. Dados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ establecimos:

significado aritmetico: $m = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

significado geometrico: $m = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

Significado armonico: $m = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

contador - media armónica: $m = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$

Por ejemplo, la media aritmética de 3, 8 y 9 es $\frac{3+8+9}{3} = 6$. It $\sqrt[3]{3 \cdot 8 \cdot 9} = 6$. 20/3 = 6 2/3, y su es un teorema del álgebra que, para cualquier conjunto de media geométrica números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la media aritmética siempre es mayor o igual que la media geométrica:

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

A esto se le llama desigualdad de la media aritmética y geométrica. (Para el caso con solo dos números a y b, el enunciado $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ es equivalente al enunciado evidentemente verdadero $(a-b)^2 \geq 0$.) Aplicando esta desigualdad a los números $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ el armónico-geométrico la desigualdad sigue:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

En estadística, la media aritmética μ de un conjunto de observaciones $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se denomina media muestral. El

Machine Translated by Google

El VALOR ESPERADO de una variable aleatoria también se llama es grosero.

Véase también VALOR MEDIO; ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

valor medio Sea f una FUNCIÓN CONTINUA en un intervalo cerrado [a,b]. La altura de un rectángulo cuya ancho es (b – a) y cuyo área es igual al área debajo de la curva sobre el intervalo [a,b] se llama valor medio de la función. El valor medio de f es se denota por f y viene dada por:

$$\bar{F} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

En términos generales, si uno "suaviza" las subidas y caídas de la gráfica de la función, sin cambiar la área debajo del gráfico, luego la altura de la resultante la curva de nivel es F.

Si la función f representa, por ejemplo, la temperatura del aire en la oficina general de correos en Adelaide, Australia, registrada durante un período de 24 horas, f representa el luego la temperatura promedio en el centro de Adelaide ese día.

teorema del valor medio (teorema del valor medio de Lagrange) matemático francés JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813) fue el primero en afirmar lo siguiente importante teorema en CÁLCULO, hoy llamado el teorema del valor medio:

> Si una curva es continua en un intervalo cerrado [a,b], y tiene una tangente en cada punto entre a y b, entonces hay al menos un punto en este intervalo en el que la tangente es paralela a la segmento de línea que conecta los puntos finales (a,f(a)) y (b,f(b)).

En un lenguaje matemático más estricto, este teorema dice:

> Si una función f (x) es continua en el cerrado intervalo [a,b], y diferenciable al aire libre intervalo (a,b), entonces existe al menos un valor c entre a y b tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Tenga en cuenta que la cantidad $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la PENDIENTE (rise overrun) del segmento de línea que conecta los dos puntos finales. También es igual a la pendiente media de la curva. durante todo el intervalo [a,b]. (Para ver esto, tenga en cuenta que en cualquier punto x, la cantidad f′(x) es la pendiente de la recta tangente en ese punto. Sumando, eso es integrando, sobre todos los valores y dividiendo por la longitud del intervalo en consideración da el promedio o la media pendiente de la curva: $\frac{\int_a^b f'(x)\,dx}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.) Por lo tanto, la El teorema del valor medio establece que para cualquier diferenciable función definida en un intervalo [a,b], existe una ubicación donde la pendiente real de la curva es igual a la pendiente media de la gráfica.

El teorema del valor medio tiene cuatro consecuencias importantes secuencias:

1. Si la derivada de una función es siempre positiva, entonces la función es creciente.

Esto significa que si a y b son dos números con a < b, entonces tenemos f(a) < f(b). Ya que, para algún número c, f(b) − f(a) tener $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y las cantidades b – a y f′(c) son ambas positivas, debemos tener que f(b) – f(a) es también positivo.

2. Si la derivada de una función es siempre negativa, entonces la función es decreciente.

Esto se establece de una manera similar a la anterior.

3. Si la derivada de una función es siempre cero, entonces la función es constante en valor.

Tenemos que demostrar que para dos valores cualesquiera a y b tenemos tener que f(a) es igual a f(b). Esto se sigue del teorema del valor medio, ya que para algún valor c tenemos:

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a) = 0\cdot(b-a) = 0$$

4. Si dos funciones f(x) y g(x) tienen la misma derivada, entonces las dos funciones difieren en una constante, es decir, f(x) = g(x)+C para algún número C.

Sea h(x) = f(x) – g(x). Entonces la derivada de h(x) es siempre cero, y así por el tercer resultado h(x) = C para algún valor constante C.

Machine Translated by Google

El propio teorema del valor medio puede establecerse como consecuencia del TEOREMA DE ROLLE . Uno hace esto escribiendo la ecuación de la línea que conecta los dos extremos (a,f(a)) y (b,f(b)) de la función f.
Está dado por:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(Ingrese x = a y x = b para ver que esto es correcto).
Ahora considere la función:

$$h(k) = f(x) - g(x)$$

Es una función diferenciable con h(a) = h(b) = 0, y por el teorema de Rolle, hay al menos un valor c entre a y b para el cual h′(c) = f′(c) – g ′(c) = 0. Esto produce la ecuación afirmada en el enunciado del teorema del valor medio.

El teorema del valor medio se puede considerar como un enunciado sobre la naturaleza de una curva diferenciable que interseca una línea recta. Más tarde, el matemático francés AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) generalizó el teorema a uno sobre dos curvas diferenciables cualesquiera que se cruzan en dos puntos. El resultado se conoce como teorema del valor medio ampliado o teorema del valor medio de Cauchy.

> Si dos funciones f y g tienen los mismos valores en x = a y x = b, son continuas en el intervalo cerrado [a,b], derivables en el intervalo abierto (a,b), y además si g(a) ≠ g(b) y g′(x) nunca es cero en (a,b), entonces hay al menos un valor c entre a y b para el cual:

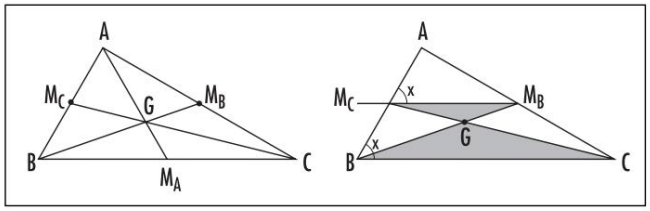
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

El teorema se demuestra de manera similar haciendo uso de la función de soporte:

$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)]$$

Véase también DERIVADO; AUMENTANDO/DISMINUYENDO.

mediana Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.



Las medianas son concurrentes

mediana de un triángulo Un segmento de línea que conecta el PUNTO MEDIO de un lado de un triángulo con el vértice opuesto a ese lado se llama mediana del triángulo. Todo triángulo tiene tres medianas. Se considera un resultado fundamental que las tres medianas de un triángulo siempre se encuentran en un punto común (llamado centroide del triángulo y generalmente denotado G). Para ver esto, considere un triángulo con vértices A, B y C y puntos medios como mostra

Primera nota:

> Cualquier línea que conecta los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado del triángulo.

En el diagrama anterior, según el principio SAS, los triángulos BAC y MCAMB son similares, con un factor de escala de dos, ya que comparten un ángulo común en A y los dos lados de cada triángulo coinciden en una proporción de 2 a 1. En consecuencia, los ángulos marcados con x son iguales, lo que produce dos ángulos alternos iguales, de lo cual se sigue del recíproco del POSTULADO PARALELO que las líneas MCMB y BC son paralelas.

Ahora tenemos que los ángulos MCMCC y MCCB son iguales, al igual que los ángulos MCMBB y MBBC. En consecuencia, según el principio AAA, los dos triángulos sombreados son similares, nuevamente en una proporción de 2 a 1. En particular, los segmentos de línea BG y GMB se encuentran en esta proporción, al igual que los segmentos de línea CG y GMC. Esto establece:

> El punto de intersección de cualquiera de las dos medianas de un triángulo se encuentra a dos tercios del camino a lo largo de cada mediana.

En consecuencia, la AMA mediana también interceptará la mediana BMB a dos tercios de la distancia a lo largo de BMB, es decir, en el mismo punto G. Por lo tanto, las tres medianas son, de hecho, CONCURRENTES en G.

Machine Translated by Google

Como una variación de la FÓRMULA DE HERON , el área de un triángulo se puede expresar únicamente en términos de las longitudes de las medianas del triángulo. Tenemos:

$$4 \text{ área } ABC = \sqrt{s(s-m_A)(s-m_B)(s-m_C)}$$

donde mA, mB y mC son las longitudes de los tres medianas y $s = \frac{m_A + m_B + m_C}{2}$.

Véase también AAA/AAS/ASA/SAS/SSS; EL TEOREMA DE APOLONIO ; LÍNEA EULER.

Menelao de Alejandría (ca. 70–130) Geometría griega, trigonometría Nacido en Alejandría, Egipto, el matemático Menelao se destaca por su único trabajo sobreviviente Sphaerica (Esferas), que contiene los primeros resultados conocidos sobre GEOMETRÍA ESFÉRICA y trigonometría esférica. Al convertir los resultados esféricos en planos, Menelao también estableció una serie de teoremas significativos sobre la geometría plana, incluido el famoso resultado que ahora lleva su nombre.

Se sabe muy poco de la vida de Menelao.
A pesar de haber sido citado a lo largo de la historia como natural de Alejandría, se sabe que Menelao pasó parte de su vida en Roma. Por ejemplo, los registros del año 98 enumeran una serie de observaciones astronómicas realizadas por Menelao desde esa ciudad en ese momento.

El trabajo de Menelao en geometría esférica probablemente se inspiró en su trabajo en astronomía. El primero de los tres volúmenes de Sphaerica define los principios básicos del tema e incluye la definición muy precisa de un triángulo esférico como uno formado por tres arcos de grandes círculos, cada uno menor que un semicírculo. Siguiendo el mismo nivel de rigor que establece el geómetra EUCLID, Menelao desarrolló la teoría de esta geometría con una profundidad considerable y un razonamiento lógico preciso. (Curiosamente, Menelao evitó cualquier uso de PRUEBA POR CONTRADICCIÓN, un enfoque que Euclides usó libremente).

En el volumen II de Sphaerica, Menelao desarrolló aplicaciones a la astronomía, y en el volumen III exploró la trigonometría esférica y las aplicaciones a la geometría plana.

Los eruditos árabes del período 850–1500 EC tradujeron el trabajo de Menelao y escribieron muchos comentarios sobre la pieza. Los mismos eruditos también hicieron referencia a otros textos de Menelao, incluidas piezas llamadas Cuerdas en un círculo y Elementos de geometría, así como un texto completo sobre el tema de la mecánica. Lamentablemente, no sobreviven copias de estas obras en la actualidad.

Véase también MATEMÁTICAS ÁRABES; DE MENELAO TEOREMA.

Teorema de Menelao Supongamos que una TRANSVERSAL corta los tres lados del triángulo A1A2A3 en los puntos P1 , P2 y P3 como se muestra:

Entonces, si AiPj representa la longitud del segmento de línea, ment conectando el punto Ai con el punto Pj , tenemos:

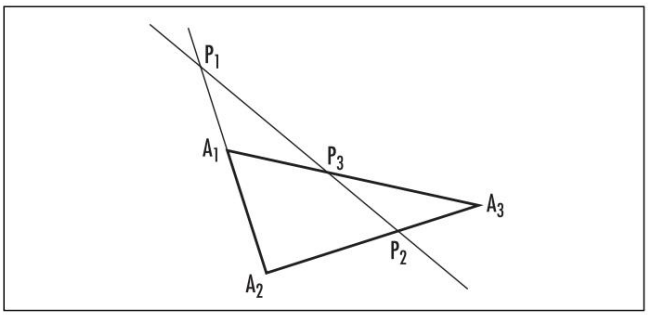
$$\frac{PA_1}{PA_2}\cdot\frac{PA_2}{PA_3}\cdot\frac{PA_3}{PA_1} = -1$$

Este resultado fue observado por primera vez por el matemático griego MENELAO DE ALEJANDRÍA (ca. 70-130 EC).
Lo demostró trazando líneas desde cada vértice Ai hasta la transversal para obtener cinco triángulos rectángulos.
Examinar los ángulos dentro de estos triángulos muestra que varios de estos triángulos son similares. Perseguir todos los pares de lados que, en consecuencia, están en la misma proporción finalmente establece el resultado.

El inverso del teorema de Menelao también es cierto:

> Si P1 , P2 y P3 son tres puntos en los lados de un triángulo A1A2A3 , con P1 en el lado A1A2 (posiblemente extendido), P2 en el lado A2A3 (posiblemente extendido) y P3 en el lado A3A1 (posiblemente extendido), satisfaciendo
>
> $$\frac{PA_1}{PA_2}\cdot\frac{PA_2}{PA_3}\cdot\frac{PA_3}{PA_1} = -1$$
>
> entonces los tres puntos son COLINEALES.

Véase también AAA/AAS/ASA/SAS/SSS; TEOREMA DE CEVA .



el teorema de Menelao

Machine Translated by Google

Expansión de Mercator (serie de Mercator) El TAY
SERIE LOR expansión del LOGARÍTMICO natural
FUNCIÓN se da de la siguiente manera:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Es válida para $-1 < x \le 1$. Esta serie a veces se denomina expansión de Mercator en honor al matemático danés Nicolaus Mercator (ca. 1619–87) quien, en 1668, fue el primero en publicar esta expansión.

La expansión de Mercator tiene la curiosa propiedad de probar aparentemente la afirmación absurda de que 1 es igual a 2. Establecer x = 1 produce:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

y entonces

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) - \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{56}\right) + \left(\frac{1}{90}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Esta paradoja alertó a los matemáticos sobre el hecho de que no siempre es permisible reordenar los términos de una serie. En 1837 PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1815-1859) demostró que tal operación es válida si la serie es absolutamente convergente. Desafortunadamente, la SERIE ARMÓNICA alterna expresada anteriormente no lo es.

Véase también CONVERGENCIA ABSOLUTA.

Proyección de Mercator No es posible hacer un mapa plano del mundo sin incorporar algún tipo de distorsión. A mediados de la década de 1600, el cartógrafo flamenco Gerhard Kremer (1512-1594), conocido como Mercator, ideó un método para mapear puntos desde la superficie de la Tierra a una superficie plana de tal manera que todas las direcciones de la brújula, al menos, son Preservado. Aunque las distancias y las áreas están distorsionadas bajo esta PROYECCIÓN, las formas generales de las regiones pequeñas, como los países pequeños y las masas de agua pequeñas, están razonablemente bien conservadas.

La construcción matemática de la proyección de Mercator se obtiene imaginando un cilindro colocado alrededor de la esfera de la Tierra tangente al ecuador y paralelo al eje de la Tierra. Un punto en la superficie de la Tierra se asigna a un punto en este cilindro dibujando una línea desde el centro de la Tierra y a través de este punto hasta que corta el cilindro. (Los polos norte y sur no están mapeados). Luego, el cilindro se corta y se desenrolla para formar una superficie plana.

En la proyección de Mercator, las líneas de longitud están separadas por la misma distancia, pero las líneas de latitud se alejan más del ecuador. Mercator ajustó el espaciado vertical de las líneas de latitud en su mapa plano para compensar esta distorsión y hacer que las formas de los países se parezcan más a su verdadera forma tal como aparecen en el globo.

La proyección de Mercator se puede dar mediante fórmulas matemáticas. Bajo su mapeo, un punto en la superficie de la Tierra en un ángulo α de latitud y un ángulo β de longitud tiene COORDENADAS CARTESIANAS x e y en el plano dadas por:

$$x = k\alpha$$

$$y = k \log \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

para alguna constante k. Los ángulos entre las líneas en la superficie de la esfera (lejos de los polos) se conservan bajo la proyección de Mercator, por lo que este mapeo es un ejemplo de MAPEO CONFORMAL.

Véase también PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA.

Mersenne, Marin (1588–1648) Francés Teoría de números, Teología Nacido el 8 de septiembre de 1588 en Oize, Francia, Marin Mersenne es recordado por la lista de números PRIMOS que llevan su nombre. Estos números primos están íntimamente relacionados con la formulación de incluso PER
NÚMEROS DE FECT.

Mersenne estudió teología cuando era adolescente y a los 23 años se unió a los Mínimos, una orden religiosa dedicada a la oración y la erudición. A lo largo de su vida, Mersenne se interesó por la TEORÍA DE LOS NÚMEROS, la mecánica y la acústica. Defendió la obra de GALILEO GALILEI (1564-1642) y RENÉ DESCARTES (1596-1650) contra la crítica teológica y se encargó de traducir muchos de los textos de Galileo al francés. Los historiadores creen

Machine Translated by Google

que es gracias a los esfuerzos de Mersenne que Galileo el trabajo se dio a conocer fuera de Italia.

Mersenne desempeñó un papel importante en el siglo XVII. ciencia, no sólo por su contribución a la teoría de números y mecánica, sino también por su servicio como canal de comunicación entre matemáticos: estudiosos escribiría a Mersenne con el único fin de que sus ideas fueran difundidas. Cartas de más de 78 corresponsales diferentes, incluido PIERRE DE FERMAT (1601-1665), Galileo y Christiaan Huygens fueron descubiertos en su celda del monasterio después de su muerte.

En 1644 Mersenne publicó Cogitata physico-mathematica (Pensamientos físico-matemáticos), su famoso texto sobre teoría de números. Mersenne estaba particularmente interesada en encontrar una fórmula que generaría todos los números primos números. Aunque fracasó en este esfuerzo, su trabajo no llevarlo a considerar aquellos números primos p para los cuales 2p – 1 también es primo, ahora llamado PRIMOS DE MERSENNE. Estos números han demostrado ser de gran importancia en varias ramas diferentes de la teoría de números.

Mersenne murió en París, Francia, el 1 de septiembre de 1648.

Primo de Mersenne Un número PRIMO de la forma 2n – 1 se llama primo de Mersenne. Por ejemplo, 23 – 1 = 7 y 27 – 1 = 127 y son números primos de Mersenne. Estos números fueron estudiados por el filósofo y matemático francés MARIN MERSENNE (1588-1648) en su intentos de encontrar una fórmula que generaría todos números primos. Aunque fracasó en esta búsqueda, los primos de esta forma se nombran hoy en su honor.

Note que si n se factoriza como n = ab, entonces la cantidad 2n – 1 también factoriza: 2ab –1 = (2a –1)(2a(b–1) + 2a(b–2) +…+ 2a + 1). Así, para que 2n –1 sea primo, debe ser el caso de que n sea primo. Sin embargo, no todos los números primos n conduce a un primo de Mersenne. Por ejemplo, aunque n = 11 es primo, 211 – 1 = 2047 = 23 × 89 no lo es. La primera pocos primos de Mersenne son 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, … correspondientes a la prima valores n igual a 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31,…

Actualmente solo se conocen 40 números primos de Mersenne, pero a pesar de su escasez, siguen siendo una fuente fructífera de grandes números primos. Casi con certeza, cuando un periódico proclama que se ha producido un nuevo número primo "más grande" encontrado, resulta ser de la forma 2n – 1. Por ejemplo, el número primo más grande conocido en el año 2004 es el Mersenne primo con n = 20.996.011. es un primo Número de más de 6 millones de dígitos. Los primos de Mersenne son íntimamente conectado con los NÚMEROS PERFECTOS.

Ver también DIFERENCIA DE DOS CUBOS.

punto medio Un punto en un segmento de línea que divide el la longitud de ese segmento en dos partes iguales se llama punto medio del segmento. Si dos puntos en un plano tienen COORDENADAS CARTESIANAS P = (x1 , y1) y Q = (x2 , y2), entonces el punto medio M del segmento que conecta P con Q tiene coordenadas $_{METRO} = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Del mismo modo, para dos puntos P = (x1 ,y1 ,z1) y Q = (x2 ,y2 ,z2) en un espacio tridimensional, las coordenadas del punto medio M del segmento de recta que los une vienen dados por: $_{METRO} = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$.

Una recta que pasa por el punto medio de un segmento de recta y PERPENDICULAR a ese segmento se llama bisectriz perpendicular. Un estudio de puntos EQUIDISTANTES muestra que las tres mediatrices de los tres lados de cualquier triángulo se encuentra en un solo punto (llamado circuncentro del triángulo). Las tres MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO también son CONCURRENTES.

El teorema del punto medio del círculo afirma que si uno dibuja un círculo C en el plano y selecciona un punto P en cualquier parte del plano, entonces todos los puntos medios de la línea segmentos que conectan P con puntos en el círculo forman un círculo de la mitad del radio original. Esto puede ser visto válido de la siguiente manera:

> Suponga que el círculo tiene radio r y está posicionado sobre el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. Entonces cualquier punto Q en el círculo tiene coordenadas Q = (r cosθ, r sinθ), para algún valor de θ. Si las coordenadas de P están dadas por P = (a,b), entonces la coordenada del punto medio M es $_{METRO} \left(\frac{a+r\cos\theta}{2}, \frac{b+r\sin\theta}{2}\right)$. Como θ varía, esto describe un círculo de radio $\frac{r}{2}$ con centro $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.
>
> Véase también BISECTOR; TEOREMAS DEL CÍRCULO.

rango medio Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

Möbius, August Ferdinand (1790–1868) Alemán Topología, Astronomía Nacido el 17 de noviembre de 1790,

Machine Translated by Google

en Schulpforta, Sajonia (ahora Alemania), el erudito August Ferdinand Möbius es recordado en matemáticas por su trabajo en GEOMETRÍA y TOPOLOGÍA, y su concepción de la superficie de un solo lado hoy llamada LA BANDA DE MOBIUS.

Möbius ingresó a la Universidad de Leipzig en 1809 para estudiar derecho, pero pronto cambió de intereses y se dedicó a estudio de las matemáticas, la astronomía y la física. en 1813 viajó a Göttingen para trabajar con CARL FRIED RICH GAUSS (1777–1855), el mejor matemático de el día, y también director del observatorio astronómico en Göttingen. Möbius completó una tesis doctoral en 1815 en el tema de la astronomía y poco después completó una tesis de habilitación en el tema de ecuaciones trigonométricas. En 1816 fue nombrado presidente de astronomía y mecánica en la Universidad de Leipzig. Permaneció en Leipzig el resto de su vida.

Möbius publicó un trabajo influyente, Der barycen trische Calcül (El cálculo de los baricentros), sobre análisis geometría en 1827. En él esboza una serie de avances significativos y originales en los campos de la PROYECTIVA GEOMETRÍA y GEOMETRÍA AFINAL. También estudió la geometría del plano de NÚMEROS COMPLEJOS, y mostró que cualquier función compleja de la forma:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con z un número complejo y a, b, c y d números reales que satisfacen ad – bc ≠ 0, transforma líneas rectas y círculos en el plano complejo en nuevas líneas rectas y círculos Las funciones complejas de la forma anterior son hoy llamadas funciones de Möbius.

En 1831 Möbius publicó importantes resultados en TEORÍA DE LOS NÚMEROS. Es mejor conocido en este campo por su descubrimiento de la fórmula de inversión de Möbius, que puede ser se describe a continuación. Considere una función μ definida en el conjunto de enteros positivos como sigue: μ(1) = 1; μ(p) = –1 si p es PRIMO; μ(n) = (–1)k si n tiene k factores primos, todos distintos; y μ(n) = 0 si n tiene una factorización prima que incluye números primos repetidos. (Así, por ejemplo, μ(70) = μ(2 · 5 · 7) = –1 y μ(20) = μ(2 · 2 · 5) = 0.) Si f es cualquier función sobre los enteros positivos y, a partir de ella, una nueva función F se define como F(n) = Σd|n f(d), una suma de todos los factores d de n, entonces la fórmula de inversión de Möbius establece que uno puede recuperar de F la función original f mediante la regla:

$$f(n) = \sum_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$$

Möbius escribió sobre la superficie de un solo lado que lleva su nombre en una pieza de 1858 descubierta sólo después su muerte. Su interés por el objeto estaba motivado por una pregunta general sobre la geometría de los poliedros que había captó su interés. Aunque Möbius no fue el primero para describir la superficie de un solo lado (el matemático alemán Johann Listing había considerado el objeto solo un pocos años antes), su análisis matemático de la superficie fue profundo y significativo.

Möbius también publicó importantes trabajos en los campos de astronomía, mecánica celeste y estática. El murió dentro Leipzig, Alemania, el 26 de septiembre de 1868. Su obra sobre La teoría de los números ha tenido un efecto profundo en la naturaleza de investigación en el tema en la actualidad. Por ejemplo, el concepto de la función de Möbius ha encontrado aplicaciones naturales para configuraciones abstractas generalizadas en geometría algebraica, combinatoria y conjuntos parcialmente ordenados, proporcionando así nuevos conocimientos en el estudio de los números.

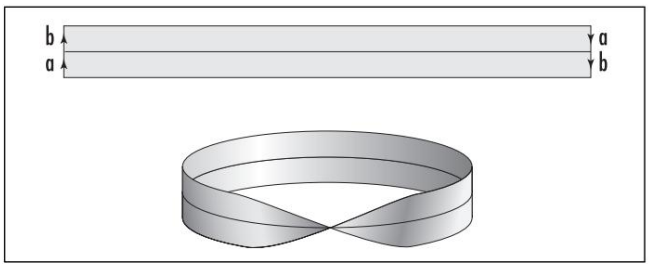
Banda de Möbius (cinta de Möbius) La superficie de un solo lado obtenido pegando los dos extremos de una tira angular recta larga torcida 180° para producir una media torcedura en el objeto resultante se llama banda de Möbius. Este superficie tiene la propiedad de que si uno pinta la superficie en todo el recorrido, uno encuentra que ambos lados de la tira original están coloreados. Esto demuestra que la superficie es ciertamente unilateral. Además, pasar el dedo a lo largo de la borde de una banda de Möbius cubre todos los puntos posibles en el borde del objeto, mostrando así, además, que la superficie tiene un solo borde.

En cierto sentido, es imposible cortar una banda de Möbius a la mitad. Por ejemplo, cortar el objeto a lo largo de un centro línea paralela al borde produce un solo conectado objeto de dos caras. La razón de esto se puede ver en el diagrama de la página siguiente. (Tenga en cuenta que la mitad superior de la tira original está conectado a la parte inferior a través de los segmentos etiquetados como que están pegados entre sí, y de nuevo para los segmentos etiquetados b.) En general, si una banda de papel con n medias vueltas se corta por la mitad a lo largo de la línea central, resultará una pieza si n es impar, y dos piezas se producen si n es par. Además, si uno intenta cortar un banda de Möbius en tercios (a lo largo de dos líneas paralelas que dividir la tira en tercios), luego dos anillos entrelazados resultado, uno el doble de largo que el otro. El más corto de los dos es otra banda de Möbius.

Pegando dos bandas de Möbius a lo largo de sus bordes produce una superficie llamada BOTELLA DE KLEIN. Uno

Machine Translated by Google

modo 340



banda de Moebius

También se puede obtener una botella de Klein “doblando” por la mitad una banda de Möbius a lo largo de la línea central paralela a su borde y pegando las puntas del borde que se unen. (Si se hace esto con una banda ordinaria de papel que no contiene medias vueltas, la superficie resultante es un TORO). Desafortunadamente, estas construcciones no pueden completarse por completo en un espacio tridimensional, y se debe hacer uso de la cuarta dimensión para obtener suficiente maniobrabilidad.

En un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS , si uno gira un segmento de línea en el plano yz alrededor del eje z, la superficie de revolución resultante es una banda sin medias vueltas. Si ese segmento de línea fuera a girar alrededor de su PUNTO MEDIO 180° durante el transcurso de la rotación alrededor del eje z, entonces la superficie resultante es una banda de Möbius. Por conveniencia, suponga que el segmento de línea tiene una longitud de 2 y está posicionado inicialmente en el plano yz paralelo al eje z con el punto medio en la posición de distancia 2 a lo largo del eje y . Cada punto del segmento de línea está determinado por un parámetro v, entre –1 y 1, con v = 0 correspondiente al punto medio del segmento. Suponga que cuando el segmento ha girado un ángulo θ sobre el eje z, el segmento ha girado un ángulo alrededor de su punto medio.

$$\frac{\theta}{2}$$

Luego, un análisis cuidadoso de las posiciones de los puntos a lo largo de este segmento a medida que giran sobre el eje z muestra que las ECUACIONES PARAMÉTRICAS de la banda de Möbius resultante están dadas por:

$$x = -2 \text{ v pecado } \frac{\theta}{2} \text{ pecado}(\theta)$$

$$y = -2 \text{ v pecado } \frac{\theta}{2} \text{ porque}(\theta)$$

$$z = v \text{ porque } \frac{\theta}{2}$$

Los matemáticos han demostrado que, para cualquier mapa de regiones dibujado en una banda de Möbius, como máximo seis colores alguna vez sería necesario pintar el diseño para que no se pinten del mismo color dos regiones que comparten un límite.

La banda de Möbius fue descubierta de forma independiente por el matemático alemán Johann Listing (1808–88) y el erudito alemán AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790–1868). La naturaleza unilateral de la banda fue posteriormente explotada por BF Goodrich Company en su diseño de cintas transportadoras similares a las de Möbius. Al distribuir el "desgaste" en ambos lados de una tira, estos cinturones duraron el doble que los cinturones convencionales.

Véase también DIMENSIÓN; TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES; SÓLIDO DE LA REVOLUCIÓN.

modalidad Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

aritmética modular Los números en la esfera de un reloj proporcionan un modelo para un sistema matemático inusual llamado "reloj matemático" o "aritmética mod 12".

Uno piensa de la siguiente manera: si actualmente son las 3:00, entonces 8 horas más tarde serán las 11:00. Escribimos 3 + 8 = 11, sin notar nada inusual aquí. Sin embargo, esperar 6 horas desde las 10:00, digamos, da la ecuación 10 + 6 = 4, porque el tiempo al final de esa espera será a las 4:00. Siguiendo esta nueva interpretación de la suma, las matemáticas del reloj dan, por ejemplo, 4 + 11 = 3, 8 + 2 = 10 y 7 + 7 = 2.

Es conveniente llamar al número 12 “cero”.

(Después de todo, en matemáticas de reloj, agregar 12 horas a cualquier hora no cambia la hora registrada en el reloj y, por lo tanto, no tiene efecto en este sistema). El número 13 se considera igual que 1 (la hora 13 en un reloj). se encuentra en la misma posición que la primera hora), el número 14 es 2, y así sucesivamente. En general, las matemáticas del reloj reemplazan cualquier número con su exceso sobre un múltiplo de 12. Por ejemplo, 26 es dos más que un múltiplo de 12, por lo que 26 es equivalente a 2. Escribimos 26 ≡ 2 (mod 12). De manera similar, 29 ≡ 5 (mod 12), 43 ≡ 7 (mod 12) y 72 ≡ 0 (mod 12). El número –2 es 10 más que un múltiplo de 12 y entonces –2 ≡ 10 (mod 12). El símbolo ≡ se llama

CONGRUENCIA.

Uno puede realizar multiplicaciones en matemáticas de reloj. Tenemos, por ejemplo, que 3 × 7, normalmente 21, es igual a 9 en la matemática del reloj: 3 × 7 = 9. (Esto también se puede realizar en términos de suma repetida: 3 × 7 = 7 + 7 + 7 = 2 + 7 = 9.) De la misma manera, 2 × 4 = 8, 4 × 5 = 8 y 6 × 6 = 0 en matemáticas de reloj. La siguiente tabla muestra todos los productos en este sistema.

Machine Translated by Google

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Observe que $2 \times 2 = 4$, por lo que es apropiado escribir $\sqrt{4} = 2$. También tenemos que $\sqrt{4}$ es igual a 4, 8 y 10, ya que $4 \times 4 = 4$, $8 \times 8 = 4$ y $10 \times 10 = 4$ en matemáticas de reloj. De la misma manera, $\frac{1}{1}$ es igual a 1, 5, 7 u 11, y $\sqrt{9}$ es igual a 3 o 9. No existe un número equivalente a $\sqrt{2}$, por ejemplo, en este sistema.

Es posible dar una interpretación de algunas fracciones en la matemática del reloj. Considere 4/5 por ejemplo. En la aritmética ordinaria, esta fracción es un número x tal que $5 \times x = 4$. Mirando la quinta fila de la tabla anterior, vemos que $5 \times 8 = 4$, por lo que es apropiado interpretar la fracción 4/ 5 como el número 8 en las matemáticas del reloj. De la misma manera, 1/5 = 5, 3/7 = 9 y 2/7 = 2. Note, sin embargo, que no es posible dar una interpretación a la fracción 1/6, por ejemplo, ya que el número 1 no aparece en ninguna parte de la sexta fila de la tabla. (No existe un número x tal que $6 \times x = 1$). El hecho de que no todas las fracciones estén representadas en las matemáticas del reloj se considera una deficiencia del sistema.

Matemáticas de reloj generalizadas: aritmética modular Uno puede imaginarse un reloj con un número diferente de horas representadas en su esfera. Por ejemplo, en matemáticas de las 5 en punto, solo se representan cinco horas, 0, 1, 2, 3 y 4 (nuevamente, es apropiado considerar que la quinta hora es igual a la hora cero), y todos los demás números son reemplazada por su exceso sobre un múltiplo de 5. Así, por ejemplo, tenemos $6 \equiv 1 \pmod 5$ y $32 \equiv 2 \pmod 5$. La tabla de productos para la aritmética mod-5 aparece como sigue. Observe que cada dígito aparece en cada fila (distinta de cero) de la tabla.

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

En general, en la aritmética modular de base N , cada número se reemplaza por su exceso sobre un múltiplo de N.

Si N es un NÚMERO COMPUESTO, N es igual a $a \times b$, entonces la entrada en la fila ath y la columna bth de la tabla de productos es cero (por ejemplo, 3×4 es cero en matemáticas de 12 relojes). En consecuencia, el número cero aparece en la fila ath más de una vez, dejando espacio insuficiente para que todos los demás dígitos aparezcan en esa fila. Por otro lado, si N es PRIMO, entonces todas y cada una de las filas distintas de cero de la tabla de productos contienen todos los dígitos, como lo demuestra la tabla de productos para matemáticas de 5 relojes. (Para ver por qué este es el caso, tenga en cuenta que para cualquier número a menor que el primo N es RELATIVAMENTE PRIMO a N, y así, por el ALGORITMO DE EUCLIDES, existen números enteros x e y tales que $ax + yN = 1$. Esto muestra que ax es 1 más que un múltiplo de N, por lo que $ax \equiv 1 \pmod N$. En consecuencia, el número 1 aparece en la fila ath, columna xth, de la tabla de productos. Lo mismo ocurre con el número 2, ya que $a(2x) = 2ax \equiv 2 \pmod N$, el número 3, $a(3x) = 3ax \equiv 3 \pmod N$, y así sucesivamente.) Tenemos:

> Si N es un número primo, todos los dígitos aparecen en cada fila distinta de cero de la tabla de productos para el módulo aritmético N.

En particular, para cualquier número a distinto de cero en la aritmética mod-N , el número 1 aparece en la fila ath de la tabla de productos. Por lo tanto, hay un número x tal que $a \times x = 1$. La fracción, por lo tanto, tiene una interpretación válida $\frac{1}{a}$ en este sistema. Este argumento se aplica a todas las fracciones que uno desee considerar. Tenemos:

> Si N es un número primo, entonces todas las fracciones existen en la aritmética mod-N.

Esto clasifica completamente todos los sistemas aritméticos modulares que poseen fracciones.

Machine Translated by Google

Pequeño teorema de Fermat Sea p un número primo. Luego, para cada número distinto de cero a menor que p, todos los dígitos de cero a p – 1 aparecen en la fila ath de la tabla de productos para la aritmética mod- paritmética. Ignorando el múltiplo cero de a, esto afirma que todos los múltiplos de a, a saber, a × 1, a × 2, …, a × (p – 1), corresponden, en algún orden, a la lista de dígitos 1, 2, … , p – 1. En consecuencia, el producto de los números de cada lista debe ser el mismo:

$$a \times 1 \times a \times 2 \times \ldots \times a \times (p-1) = 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1)$$

Reescribiendo rendimientos:

$$a^{p-1} \times 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1) = 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1)$$

Multiplicar por las fracciones 2 (que existen $1-$, $\frac{1}{3}$, hasta $\frac{1}{p-1}$ en las matemáticas de los relojes primos) da el famoso resultado descubierto por primera vez por el abogado francés y matemático aficionado PIERRE DE FERMAT (1601-1665):

> Para cualquier número primo p, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ para todos los valores distintos de cero a < p.

Aplicar esta observación al valor específico a = 2 proporciona un método útil para probar la primalidad de los números: si p es primo, entonces $2^{p-1} - 1$ es divisible por p. Si no, entonces el número p no es primo. Desafortunadamente, algunos números pasan la prueba sin ser primos. Por ejemplo, $2^{340} - 1$ es divisible por 341, aunque 341 sea compuesto. (Tenemos 341 = 11 × 31.) Los números compuestos de este tipo se llaman pseudoprimos.

Véase también CONGRUENCIA.

módulo (plural, moduli) El VALOR ABSOLUTO de una cantidad, sin tener en cuenta su signo o dirección, a veces se denomina módulo de la cantidad. Por ejemplo, los números –3 y 3, aunque de paridad opuesta, tienen el mismo módulo de 3. El módulo de un VECTOR es su longitud, y el módulo de un NÚMERO COMPLEJO es la longitud del vector que representa ese número complejo. Específicamente, si z = a + ib es un número complejo, entonces su módulo, escrito |z|, es el número real no negativo $\sqrt{a^2 + b^2}$. Si el número complejo se escribe en forma polar, $z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$, entonces su módulo es r.

En el estudio de LOGARITMOS, el número por el cual los logaritmos de una base se multiplican para dar $\log_a x$ ritmos de una base diferente se llama módulo. Por ejemplo, la ecuación:

$$\log_a x \times \log_b a = \log_b x$$

muestra que la multiplicación por el módulo $\log_b a$ convierte logaritmos de base a en logaritmos de base b. (Para ver por qué esto funciona, tenga en cuenta que si $y = \log_a x$, $a^y = x$. entonces a y En consecuencia, $\log_b(a^y) = \log_b x$, dando $y \times \log_b a = \log_b x$.) En particular, la multiplicación por el número $\log_{10} e \approx 0.434294$ convierte logaritmos naturales en logaritmos comunes.

En ARITMÉTICA MODULAR, el número por el cual se dividen las cantidades se llama módulo del sistema. Por ejemplo, en "matemáticas del reloj", el módulo del sistema es 12.

monomio Cualquier expresión algebraica que consta de un solo término, como $5x^3y^2$, se llama monomio.

Véase también BINOMIAL; POLINOMIO; TRINOMIO.

Método Monte Carlo Iniciado por JOHN VON NEU MANN (1903–57) y el matemático polaco Stanislav Ulam, el método Monto Carlo es un método probabilístico simple que a veces emplean los matemáticos aplicados para analizar procesos que son demasiado complicados para analizar de otra manera. Llamado así por el famoso casino de apuestas, el método Monte Carlo simplemente usa la LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS para estimar la probabilidad de que ocurra un evento deseado. Por ejemplo, para estimar la probabilidad de que cinco letras elegidas al azar del alfabeto formen una palabra en el idioma inglés, uno podría simplemente realizar el experimento un gran número de veces (es decir, hacer que una computadora seleccione cinco letras al azar 1000 veces). , say) y contar la proporción de veces que se obtiene una palabra en inglés. Esta proporción da una estimación de la probabilidad que uno busca. Muchos casinos emplean esta técnica para determinar las PROBABILIDADES de pago para muchos de sus juegos complicados.

El método de Monte Carlo también se utiliza para estimar el área de una figura plana con un contorno irregular. Por ejemplo, para estimar el área de un derrame de petróleo sobre el océano, los científicos toman una fotografía aérea de todo el derrame y toman nota de las dimensiones cubiertas por la fotografía, digamos un rectángulo de 4 por 5 km. Luego, la fotografía se digitaliza y se introduce en una computadora, que está programada para seleccionar, al azar, una gran cantidad de puntos.

Machine Translated by Google

en la fotografía, digamos, 10.000. Luego, la computadora cuenta el número r de estos puntos que golpean el derrame de petróleo. que se muestra en la fotografía, arrojando una proporción de $\frac{r}{10{,}000}$ que se aproxima bien a la fracción del área total cubierta por petróleo. Por ejemplo, si r = 7,568 puntos aterrizan en lugares correspondientes al derrame, entonces el área de todo el derrame está muy cerca de $\frac{7{,}568}{10.000} \times 20 = 15{,}1 \text{ km}^2$. Cuanto mayor sea el número de puntos seleccionados, más precisa será la estimación.

De la misma manera, uno puede estimar los valores de INTEGRALES definidos complicados, como $\int_3^7 \cos 2(x^2 + \sin(x))dx$. Por ejemplo, seleccione una gran cantidad de puntos al azar de un cuadro que contiene la curva en cuestión y cuente la proporción de ellos que se encuentran por debajo de la curva dada.

Ver también PROBLEMA DE LA AGUJA DE BUFFON; PROBABILIDAD.

Problema de Monty Hall Nombrado en honor al presentador de un popular programa de juegos de la televisión estadounidense ¡ Hagamos un trato!, el problema de Monty Hall es un rompecabezas clásico que a menudo se usa para evaluar a los iniciados en el campo de la teoría de la PROBABILIDAD . Va de la siguiente manera:

> En un programa de juegos, tres puertas cerradas se paran frente a ti. El anfitrión le informa que hay un premio en efectivo detrás de una de las puertas, y nada detrás de las otras dos. Selecciona una puerta, pero antes de abrirla, el anfitrión abre rápidamente una de las dos puertas restantes para mostrarle que el premio no está allí. Ahora te da la oportunidad de cambiar de opinión y abrir en su lugar la tercera puerta restante. La pregunta es: ¿qué debes hacer? ¿Debe quedarse con su elección original de puerta o cambiar a la otra opción? ¿Hay alguna ventaja en cambiar?

La primera reacción típica de uno a este rompecabezas es que no hay ninguna ventaja en cambiar. Dado que quedan dos puertas y solo una contiene un premio, la probabilidad de seleccionar la puerta correcta, ya sea quedándose con la puerta elegida o cambiando, es siempre del 50 por ciento. Sorprendentemente, este razonamiento no es correcto, ya que no hace uso de la información sutil que te presenta el anfitrión, que en realidad puedes usar para tu beneficio.

Suponga que, antes de jugar, decide que se quedará con su elección. Entonces, una victoria para usted depende de elegir la puerta correcta inicialmente, y hay una probabilidad de 1 en 3 de que esto suceda. Si, por otro lado, juegas el juego con la decisión de cambiar, entonces ganar se basa en elegir una puerta incorrecta inicialmente (aquí es donde la acción del anfitrión pasa a primer plano), y hay una probabilidad de 2 en 3 de que este sea el caso. En general, vemos que, de hecho, ¡cambiar duplica tus posibilidades de ganar! (Esta línea de razonamiento se vuelve aún más convincente si imagina un juego jugado con 100 puertas cerradas, de las cuales solo una oculta un premio.
Elegir la puerta correcta inicialmente es muy poco probable. Sin embargo, si el anfitrión revela que 98 de las puertas restantes están vacías, seguramente decidirá que las probabilidades están a su favor para cambiar).

Véase también EL CONDE DE KRUSKAL ; ROMPECABEZAS DE DOS CARTAS.

El teorema de Morley En 1899, el matemático Frank Morley (1860–1937) descubrió que las intersecciones de pares adyacentes de trisectores angulares en cualquier triángulo siempre forman un triángulo equilátero. Dicho con precisión, dado un triángulo ABC, dibuje para cada vértice un par de segmentos de línea que dividan el ángulo en ese vértice en tercios. Si los dos segmentos de línea más cercanos al lado AB se encuentran en el punto D, los dos segmentos más cercanos al lado BC en el punto E y los dos segmentos más cercanos al lado AC en el punto F, entonces se garantiza que DEF es un triángulo equiláte

Es notable que este elegante hecho de la GEOMETRÍA EUCLIDEA no se descubriera hasta mucho después de la época de Euclides. La demostración de este resultado, aunque un poco larga y detallada, sólo requiere técnicas geométricas muy elementales.

multiplicación El proceso de encontrar el producto de dos números se llama multiplicación. En aritmética elemental, la multiplicación se puede definir como el proceso de encontrar el número total de elementos en una colección de conjuntos donde cada conjunto en esa colección tiene el mismo número de elementos. Así, por ejemplo, la acumulación de cuatro conjuntos con tres objetos cada uno da un total de 12 objetos. Escribimos: 4 × 3 = 12. En este contexto, la multiplicación puede considerarse como un proceso de suma repetida: 4 × 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12. Si uno dispone los 12 objetos en una matriz rectangular de cuatro filas de tres, luego leer el arreglo como tres columnas de cuatro muestra que 3 × 4 proporciona la misma respuesta que 4 × 3. En general, este razonamiento muestra que los productos de contar números satisfacen el

Machine Translated by Google

PROPIEDAD CONMUTATIVA: a × b = b × a para todos los números contables a y b.

Si un número a se multiplica por un número b para formar un producto a × b, entonces el primer número a se llama a multiplicando y el segundo número b un multiplicador. (Por supuesto, la propiedad conmutativa de la multiplicación obvia la necesidad de distinguir el multiplicando del multiplicador).

El símbolo × para la multiplicación se usó en WILLIAM OUGHTRED'S (1574–1660) 1631 trabajo Clavis mathematicae (La clave de las matemáticas), pero los historiadores sospeche que el símbolo estuvo en uso hasta 100 años antes. Los matemáticos de hoy en día también usan un punto en relieve para indicar la multiplicación (4 · 3 = 12, por ejemplo), o simplemente escriba símbolos uno al lado del otro si las variables están siendo utilizado (x × y = xy o 2 × w = 2w, por ejemplo).

Existen varios métodos para calcular la producto de dos números grandes, como ISABEL MULTIPLICACIÓN, MULTIPLICACIÓN EGIPCIA y RUS MULTIPLICACIÓN DE SIAN.

El proceso de multiplicación se puede extender a NÚMEROS NEGATIVOS (dando la consecuencia necesaria que el producto de dos cantidades negativas es positivo), FRACCIONES, NÚMEROS REALES, NÚMEROS COMPLEJOS y MATRICES. Dos VECTORES se pueden multiplicar por un PUNTO PRODUCTO o un PRODUCTO CRUZADO. El producto de dos conjuntos. se llama PRODUCTO CARTESIANO.

El número 1 es un ELEMENTO DE IDENTIDAD multiplicativo en la teoría de la aritmética. Tenemos que a × 1 = a = 1 × a para cualquier número a.

El producto de dos funciones de valor real f y g es la función f · g, cuyo valor en cualquier entrada x es el producto de las salidas de f y g en ese valor de entrada: (f · g)(x) = f(x) · g(x). Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 2x$ y g(x) = 5x + 7, entonces $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 2x)(5x + 7) = 5x^3 + 17x^2 + 14x$.

Las fórmulas de productos en TRIGONOMETRÍA afirman:

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

Véase también ASOCIATIVO; PROPIEDAD DISTRIBUTIVA; INFI PRODUCTO DE NOCHE.

principio de multiplicación (principio fundamental de contar) Suponga que una tarea se puede dividir en dos pasos. Si el primer paso se puede hacer de una de las maneras, y el segundo de b maneras diferentes (independientemente de la resultado del primer paso), entonces el principio de multiplicación dice que la tarea original se puede hacer de a × b formas.

Como ejemplo, imagina que cinco caminos conectan ciudad A con la ciudad B, y siete caminos conectan la ciudad B con ciudad C. Entonces uno tiene 5 × 7 = 35 alternativas para conducir de A a C. Al lanzar un dado y una moneda, 6 × 2 = 12 resultados diferentes son posibles.

El principio de multiplicación se extiende a las tareas que se componen de más de dos pasos. Por ejemplo, con tres juegos diferentes de zapatos, cuatro pantalones diferentes, y tres camisas diferentes, una tiene 3 × 4 × 3 = 36 conjuntos usar. Hay 10 × 10 × 10 × 26 × 26 × 26 = 17.256.000 matrículas diferentes compuestas por tres números de un solo dígito seguidos de tres letras.

Véase también FACTORIAL; PERMUTACIÓN.

eventos mutuamente excluyentes (eventos disjuntos) Dos EVENTOS son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir ambos en una sola corrida de un experimento. Por ejemplo, al lanzar un dado, los eventos "sacar un 3" y "sacar un número par" son mutuamente excluyentes, mientras que los eventos que “ruedan un múltiplo de 3” y “sacar un número par” no lo son.

Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes para un experimento, entonces la probabilidad de que un evento o el otro ocurre viene dado por la ley de la adición:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Véase también PROBABILIDAD.

Machine Translated by Google

norte

Napier, John (Jhone Neper) (1550–1617) Aritmética logarítmica británica Nacido en Edimburgo, Escocia, en 1550 (su nombre exacto) se desconoce la fecha de nacimiento), se recuerda a John Napier en matemáticas por su trabajo sobre TRIGONOMETRÍA y métodos de cálculo, sobre todo por su invención de LOGARITMOS.

Como era habitual en ese momento, Napier ingresó al St. Andrew's University en 1563 a la edad de 13 años. Es Es poco probable que Napier estudiara matemáticas en esta institución, y los historiadores de hoy no están seguros de por qué. significa que adquirió un conocimiento práctico del tema. Napier se interesó activamente por la teología y publicó varios trabajos importantes sobre el papel de religión en la sociedad. Su estudio de las matemáticas fue sólo alguna vez un pasatiempo.

Napier era consciente de que los astrónomos de su época se vieron obstaculizados por la dificultad de hacer grandes cálculos a mano, en particular, calcular los productos de números muy grandes. Buscó un método que simplificaría el proceso. Usando el curioso modelo geométrico de un objeto que se mueve a lo largo de un segmento recto de unidad de longitud con velocidad que varía de acuerdo con su distancia desde el punto final, Napier encontró una fórmula que convirtió problemas de multiplicación en cálculos de suma más simples. Hoy diríamos que Napier trabajó con la fórmula:

$$_{\text{norte}} = 10^{7}\left(1 - \frac{1}{10^{7}}\right)^{L}$$



John Napier, un eminente matemático del siglo XVII, descubrió los logaritmos. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

donde N es un número y L es lo que él llamó el "ritmo loga" de ese número. (Napier insertó factores de 107 para ayudar a evitar la aparición de decimales en los cálculos). Napier publicó sus resultados en 1614 en su obra Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos).

Si dividimos la fórmula de Napier por 107 obtenemos:

$$\frac{\text{norte}}{7\ 10} = -\quad 1\quad \frac{1}{7\ 10}^{7\ 10^{\frac{L}{7}}} \approx \frac{1}{\text{mi}}^{\frac{L}{10^7}}$$

usando el hecho de que $\lim_{\text{manuscrito iluminado}\to\infty}\left(1+\frac{r}{\text{norte}}\right)^{\text{norte}} = \text{re}^{r}$, donde esta _ número de Euler. Así, hasta un factor de 107 los logaritmos, vemos eso de Napier están cerca de los logaritmos de hoy, pero en base 1/e. Bajo el consejo del erudito inglés HENRY BRIGGS (1561–1630), Napier modificó más tarde su método de logaritmos a base 10.

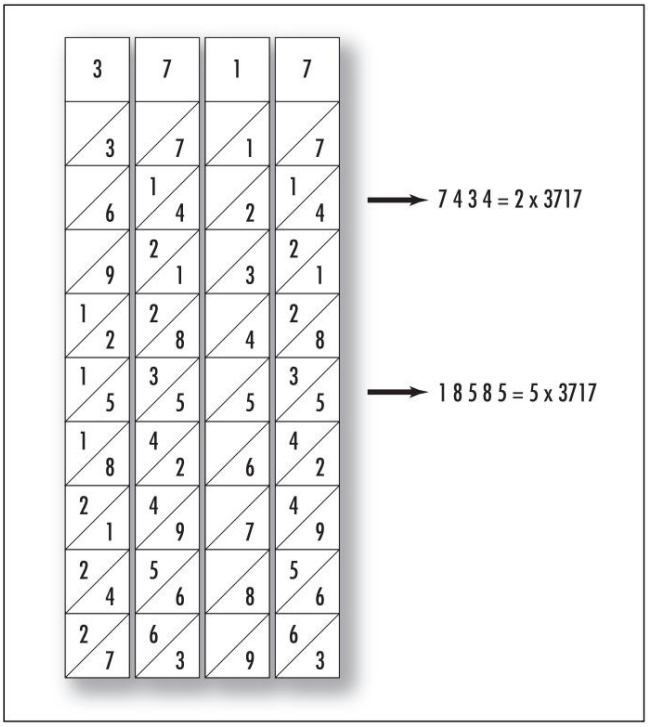
Napier inventó dispositivos mecánicos para ayudar en el cálculo, la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas y cúbicas. También hizo contribuciones significativas al estudio de la trigonometría esférica, encontrando fórmulas para la razón de los lados de triángulos dibujados en esferas. Estas fórmulas se nombran hoy en su honor.

Napier murió en Edimburgo, Escocia, el 4 de abril de 1617.

Véase también E; HUESOS DE NAPIER .

Huesos de Napier (varillas de Napier) En 1614, el matemático escocés JOHN NAPIER diseñó un conjunto de varillas graduadas, ahora llamados huesos de Napier, que pueden usarse para convertir todos los problemas largos de multiplicación en problemas de suma más fáciles y rápidos de resolver.
Cada vara, hecha de hueso o marfil, estaba grabada con una columna de números que consistía en los múltiplos del dígito inscrito en la cabeza de la vara. Se dibujaron líneas diagonales para separar las decenas y las unidades de cada múltiplo. Una barra en blanco representaba los múltiplos de cero.

Para calcular una multiplicación larga, como el producto 3717 × 25, uno alinearía cuatro barras, una para cada dígito 3, 7, 1 y 7, como se muestra:



Multiplicando con los huesos de Napier

Mirando la segunda y quinta filas (correspondientes a los dígitos 2 y 5), y sumando a lo largo de las diagonales en las filas (esto corresponde a hacer un seguimiento de los dígitos llevados), vemos que 2 × 3,717 = 7,434 y 5 × 3,717 = 18,585 . Sumar un cero a la cola del primer producto da 20 × 3717 = 74340, por lo que el producto que buscamos es la suma de los dos números 74340 y 18585. Esto se puede calcular rápidamente con lápiz y papel.

Hay una complicación: al mirar cualquier fila en particular, dos números en una diagonal pueden sumar un total de dos dígitos. Uno debe llevar el primer dígito de la suma a la siguiente diagonal a la izquierda. Por ejemplo, mirando la octava fila vemos que 8 × 3717 es igual a 29736. (El 1 de la suma de 8 y 5 lleva al 6 en la siguiente diagonal a la izquierda).

Véase también MULTIPLICACIÓN EGIPCIA; ISABELINO MULTIPLICACIÓN; MULTIPLICACIÓN DE DEDOS; MULTIPLICACIÓN; MULTIPLICACION RUSA.

Nash, John (1928–) Teoría estadounidense de juegos, topología Nacido el 13 de junio de 1928 en Bluefield, Virginia Occidental, John Nash es recordado por su trabajo seminal en

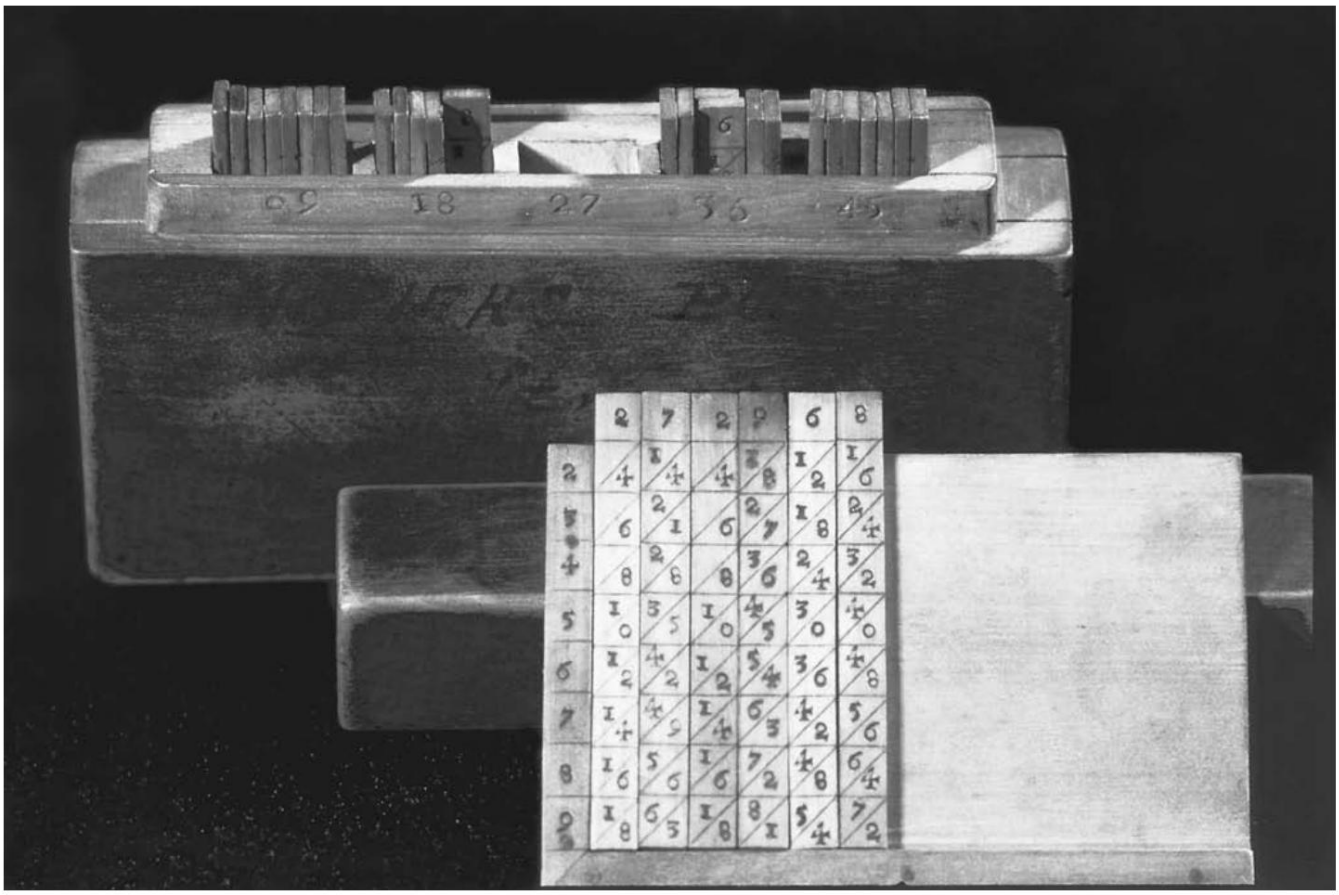
Machine Translated by Google

TEORIA DE JUEGOS DE SUMA DISTINTA DE CERO . La tesis doctoral de Nash de 1949 “Juegos no cooperativos” (solo 45 páginas largo) demostró tener un impacto tan profundo en la desarrollo y estudio de la teoría económica que simplemente redefinió la naturaleza del pensamiento económico durante las cuatro décadas que siguieron. Por ello, fue honrado como correceptor del Premio Nobel de Economía de 1994. Nash también hizo contribuciones extraordinarias a el campo de la TOPOLOGÍA y resolvió una serie de problemas de avance en el estudio de la geometría de Riemann.

Nash ingresó al Instituto de Tecnología Carnegie (ahora Universidad Carnegie-Mellon) en 1945 con la Tenía la intención de estudiar ingeniería química, pero pronto descubrió su pasión por las matemáticas. Se graduó 3 años más tarde con una licenciatura y una maestría en matemáticas e ingresó a la Universidad de Princeton en 1948 para comenzar a trabajar en un doctorado. Se graduó apenas 2 años después.

En 1954, Nash había publicado cinco extraordinarios artículos sobre el tema de la teoría de juegos, incluidos "Puntos de equilibrio en juegos de N-personas" en 1950, "El Problema de negociación” en 1950, y “Negociación no cooperativa Games” en 1951, y dos obras verdaderamente significativas sobre el tema de la geometría analítica, "Real Algebraic Mani folds" en 1952, y "C1 Isometric Embeddings" en 1954. Se había establecido claramente como un genio matemático y fue reconocido como tal por el comunidad matemática. era profesor titular en el Instituto de Tecnología de Massachusetts en el edad de 29

A principios de la década de 1960, Nash comenzó a desarrollar esquizofrenia paranoide y quedó prácticamente incapacitado. por la enfermedad durante las dos décadas siguientes. Él perdió su puesto en el MIT, pasó varios años viajó por Europa y América, y regresó a Princeton, Nueva Jersey, antes de recibir ayuda institucional.



Los huesos de Napier, como este conjunto de varillas que datan de 1690, proporcionaron los medios para simplificar el proceso de multiplicación larga. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

Lentamente, a lo largo de muchos años, Nash comenzó a recuperarse y, finalmente, volvió a enseñar en Princeton ya contemplar el trabajo matemático. Presentó una ponencia en el 10º Congreso Mundial de Psiquiatría en 1996 describiendo su enfermedad. Junto con el Premio Noble de 1994, Nash recibió el Premio Leroy P. Steele de 1999 de la Asociación Estadounidense de Matemáticas. Nash describe su disertación de 45 páginas como el "trabajo más trivial" de su carrera.

número natural (número de conteo, número entero) Cualquiera de los números enteros positivos 1, 2, 3,... se llama número natural o número de conteo. Los números naturales se usan para contar objetos separados. La colección de todos los números de conteo {1,2,3,...}, llamado el conjunto de números naturales, se denota N, oa veces IN o Z+ . Algunos matemáticos optan por incluir el número CERO en este conjunto. (No existe una convención estándar al respecto).

El conjunto de los números naturales se cierra bajo la ADICIÓN y la MULTIPLICACIÓN, es decir, la suma o el producto de dos números naturales cualesquiera vuelve a ser un número natural. El conjunto, sin embargo, no está cerrado bajo la RESTA o la DIVISIÓN. Por ejemplo, el resultado de restar 5 a 3 ya no es un número natural, ni tampoco el resultado de dividir 7 entre 2.

Un conjunto infinito de objetos cuyos elementos se pueden ordenar en una lista similar a la lista de números naturales se dice que es CONTABLE. No todos los conjuntos infinitos son numerables.

Véase también PROPIEDAD DE CIERRE; DISCRETO; FIGURAR NÚMEROS; NÚMERO; TEORÍA DE LOS NÚMEROS; NÚMERO ORDINARIO BRAS; NÚMERO ENTERO.

condición necesaria Ver CONDICIÓN—NECESARIO Y SUFICIENTE.

negación (no enunciado) En LÓGICA FORMAL un enunciado de la forma “no p” se llama negación del enunciado p. Por ejemplo, “Shakespeare no escribió Hamlet” es la negación de la afirmación que hizo Shakespeare. En la práctica no siempre es necesario que el término no aparezca. Por ejemplo, la negación de x > y es x ≤ y.

La negación de un enunciado p se denota con símbolos como ¬p (o, a veces, como ~p, –p o incluso p). La negación del enunciado tiene un valor de verdad opuesto al del enunciado original, por lo que tiene una TABLA DE VERDAD:

p	p
T	F
F	T

números negativos Cualquier NÚMERO REAL menor que CERO se llama número negativo. En aplicaciones prácticas, los números negativos se utilizan para indicar cantidades que están por debajo de algún punto de referencia. Por ejemplo, en la escala de temperatura de grado centi, una temperatura de -10° está 10° por debajo del punto de congelación del agua.

El producto de dos números negativos es una cantidad positiva. Por ejemplo, (–1) × (–1) = 1. Esto se puede justificar haciendo uso de la PROPIEDAD DISTRIBUTIVA y el hecho de que el producto de cualquier cantidad con cero es cero. En concreto, tenemos:

$$(-1) \times 0 = 0$$
$$(-1) \times (1 + (-1)) = 0$$
$$(-1) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$
$$-1 + (-1) \times (-1) = 0$$
$$(-1) \times (-1) = 1$$

Los números negativos generalmente fueron vistos con sospecha a lo largo de la historia. Los antiguos eruditos egipcios y babilónicos ignoraron las soluciones negativas de sus ecuaciones matemáticas, al igual que los antiguos eruditos griegos (para quienes el “número” estaba directamente asociado con la noción de longitud física). Los eruditos chinos se sentían cómodos trabajando con cantidades negativas en pasos intermedios hacia la solución de un problema, pero nunca las permitieron como soluciones finales.

El erudito indio del siglo VII BRAHMAGUPTA se destaca como el primer erudito en determinar correctamente la aritmética de las cantidades negativas. Consideró válida su existencia equiparando cantidades positivas con posesiones y cantidades negativas con deuda. Este trabajo fue posteriormente ampliado por el erudito ASKARA (aprox. BH 1114-1185). Aunque los eruditos árabes de esta época leyeron y tradujeron los textos indios, optaron por no trabajar con cantidades negativas. Como los eruditos europeos del siglo XII obtuvieron gran parte de su conocimiento matemático del mundo islámico, la familiaridad con las cantidades negativas no llegó fácilmente a Occidente.

En el siglo XVI, destacados matemáticos como GIROLAMO CARDANO, Michael Stifel y FRANÇOIS VIÈTE rechazaron rotundamente la noción de número negativo.

Machine Translated by Google

bras, considerando estas cantidades como "sin sentido" y "absurdas". Esta actitud generalmente persistió durante el siglo siguiente, aunque los estudiosos consideraron necesario trabajar con ellos algebraicamente mientras resolvían ecuaciones matemáticas más sofisticadas. Sin embargo, a principios del siglo XVIII, se admitía en general que los números negativos son una construcción necesaria en matemáticas. LEONHARD EULER (1707-1783) se sentía cómodo trabajando con cantidades negativas.

Con el desarrollo del ÁLGEBRA ABSTRACTA en el siglo XIX, la necesidad de asignar "significado" a los números se volvió menos importante. Aunque algunos eruditos del siglo XIX como AUGUSTUS DE MORGAN continuaron publicando comentarios en contra de la validez de las cantidades negativas, su utilidad y necesidad fueron generalmente aceptadas.

Véase también MATEMÁTICAS BABILÓNICAS; MATEMÁTICAS CHINAS; MATEMÁTICAS EGIPCIA; MATEMÁTICAS GRIEGAS EMATICA; NÚMERO; POSITIVO.

multiplicación anidada

Para evaluar un POLINOMIO como p(x) = 2x 3 – 4x + 3 para un valor particular x = 5, digamos, uno simplemente sustituye 5 por x y realiza el número requerido de multiplicaciones. En este ejemplo, se necesitan 3 + 2 + 1 = 6 multiplicaciones:

$$p(5) = 2 \times 5 \times 5 \times 5 + 7 \times 5 \times 5 - 4 \times 5 + 3 = 408$$

(Por lo general, un polinomio contiene un NÚMERO TRIANGULAR de productos). El número de multiplicaciones requeridas se puede reducir significativamente si primero se reescribe el polinomio en una forma conocida como multiplicación anidada. En este ejemplo escribimos:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 + 7x^2 - 4x + 3 \\ &= (2x^2 + 7x - 4)x + 3 \\ &= ((2x + 7)x - 4)x + 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, p(5) se puede calcular con solo tres operaciones de multiplicación:

$$\begin{aligned} p(5) &= ((2 \times 5 + 7) \times 5 - 4) \times 5 + 3 = \\ &((10 + 7) \times 5 - 4) \times 5 + 3 = \\ &(85 - 4) \times 5 + 3 = \\ &408 \end{aligned}$$

Observe que este proceso simplemente multiplicó el primer coeficiente por 5, sumó el segundo coeficiente, multiplicó el resultado por 5, sumó el tercer coeficiente, multiplicó por 5 y luego sumó el coeficiente final. El proceso se registra de forma compacta en una tabla de la siguiente manera:

5	2	7	−4	3
		10	85	405
	2	17	81	408

La primera fila enumera los coeficientes del polinomio y se coloca un cero debajo del primer coeficiente.
Se trabaja de izquierda a derecha sumando las entradas en las dos filas, multiplicando el resultado por 5 y registrando ese resultado en la siguiente columna. La entrada en la esquina inferior derecha es el valor p(5).

Los números restantes en la fila inferior tienen una interpretación sorprendente. De acuerdo con el TEOREMA DEL FACTOR, si el polinomio p(x) se divide por el término x – 5, entonces el resto será p(5) = 408. En este ejemplo se puede comprobar que

$$\frac{p(x)}{x-5} = 2x^2 + 17x + 81 + \frac{408}{x-5}$$

Los números en la fila inferior de la tabla de arriba son precisamente los coeficientes del cociente. Este mismo fenómeno ocurre para cualquier polinomio de cualquier grado. El examen de un ejemplo abstracto ilustra por qué esto funciona. (Para simplificar, volveremos a trabajar con una ecuación cúbica).

Considere el polinomio p(x) = ax3 + bx2 + cx + d dividido por el término lineal x – h. El proceso de DIVISIÓN LARGA produce lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} & ax^2 + (ah+b)x + ((ah+b)h+c) \\ x-h & ax^3 + bx^2 + cx + re \\ & \underline{ax^3 - ax^2h} \\ & (ah+b)x^2 + cx \\ & \underline{(ah+b)x^2 - (ah+b)xh} \\ & ((ah+b)h+c)x + d \\ & \underline{((ah+b)h+c)x - ((ah+b)h+c)h} \\ & ((ah+b)h+c)h + d \end{array}$$

Por otro lado, el método de evaluación de p(h) a través del proceso de multiplicación anidada produce la tabla:

Machine Translated by Google

h	ab	c	d
	0	ah	(ah + b) h	((ah + b)h + c)h
	a	ah + b	(ah + b)h + c	((ah + b)h + c)h + d = p(h)

La comparación de las dos tablas una al lado de la otra muestra que los dos procesos son idénticos.

El proceso de dibujar una tabla para evaluar un polinomio p(x) en un valor x = h, o, de manera equivalente, para dividir p(x) por x – h, se llama división sintética. Es un proceso muy simple y eficiente. Como ejemplo, la siguiente tabla muestra que el polinomio $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2 - 4x + 5x + 4$ tiene valor 6 cuando se evalúa en $x = 2\frac{1}{2}$, y cociente $2x^3 + 4x - 2x + 4$ cuando se divide por $x - 2\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$	2	3	–4	54	
	0	1	2	–1	2
	2	4	–2	4	6

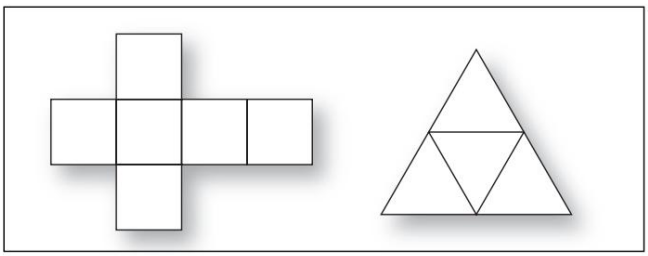
Volviendo al tema de los números triangulares: Cualquier producto anidado de la forma:

(9(…(9(9(9 + 1)+1)+1)…+1)+1)

es triangular Por ejemplo, 9 + 1 = 10 = T4 , 9(9 + 1) + 1 = 91 = T13 y 9(9(9 + 1) +1) + 1 = 820 = T40. Este se sigue de la relación 9Tn + 1 = T3n+1 comenzando con T1 = 1. Esta relación también muestra que si el número de nueves presentes en el producto anidado es n, entonces el $\frac{3^n - 1}{2}$-th número triangular se produce.

red En geometría, una red es un diagrama dibujado en una página que, al ser recortado y doblado a lo largo de las líneas indicadas, puede usarse para construir un POLIEDRO. Para ejemplo, el siguiente diagrama muestra redes de un cubo y un TETRAEDRO.

No todos los arreglos de seis cuadrados en una página produce una red para un cubo. (Por ejemplo, una fila de seis cuadrados no se pliega para formar un cubo.) Uno puede mostrar que hay 11 redes esencialmente diferentes para un cubo, cada uno representando una forma fundamentalmente diferente de



Redes para un cubo y un tetraedro

desplegando la figura. Solo hay dos formas diferentes para desplegar un tetraedro. Los matemáticos han demostrado que hay 261 formas diferentes de desplegar un HIPERCUBO de cuatro dimensiones en una red tridimensional de ocho cubos conectados.

En términos de contabilidad, la palabra neto se refiere a la utilidad calculada después de deducir todos los gastos operativos. Por ejemplo, si una pequeña escuela privada recibe $100,000 en pagos de matrícula por año como ingreso pero incurre en un gasto operativo anual de $97,000 (por salarios, cuotas de seguros, útiles escolares, etc.), entonces la escuela está operando con una utilidad neta anual de $3,000.

En el comercio, el término neto denota el peso de mercancías, excluyendo el peso de cualquier envoltorio o contenedor que contenga las mercancías. Por ejemplo, muchos supermercados las tiendas restan el peso de los envases de plástico utilizados para contener alimentos frescos del peso total del artículo que se compra. A los clientes se les cobra solo por el peso neto del artículo.

Neumann, John von (1903-1957) húngaro-estadounidense Teoría de juegos, Lógica, Análisis, Álgebra abstracta el 28 de diciembre de 1903, en Budapest, Hungría, puro y matemático aplicado John von Neumann es recordado por sus importantes contribuciones a una tremenda variedad de temas. En matemáticas puras, Trabajó en problemas de TEORÍA DE CONJUNTOS e ideó un conjunto de axiomas para el sujeto alternativos a los propuestos por ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871-1953). También hizo avances en la funcionalidad análisis, teoría de OPTIMIZACIÓN y TEORÍA DE GRUPOS, y logró proporcionar un sistema axiomático para la teoría de la mecánica cuántica. En matemáticas aplicadas, von Neumann es mejor recordado por su texto de 1944

Machine Translated by Google

The Theory of Games and Economic Behavior, escrito con Oskar Morgenstern (1902-1976), que esencialmente fundó el campo de la TEORÍA DE JUEGOS. También hizo importantes contribuciones al desarrollo de la computadora moderna, tanto como un problema de diseño práctico como una investigación teórica sobre la naturaleza y las capacidades de AUTOMATA. Fue el primero en idear una forma de almacenar programas dentro de una computadora.

Von Neumann demostró una increíble aptitud para las matemáticas a una edad muy temprana. Recibió tutoría privada en matemáticas de miembros de la facultad de la Universidad de Budapest cuando era estudiante de secundaria y, a los 18 años, había escrito y publicado un artículo de matemáticas en coautoría. Aunque von Neumann fue admitido en el programa de matemáticas de la Universidad en 1921, siguió los deseos de su padre y estudió química en la Universidad de Berlín y en la Technische Hochschule de Zúrich. Sorprendentemente, sin haber asistido nunca a una clase en la Universidad de Budapest, von Neumann continuó su trabajo en matemáticas de forma privada, aprobó el examen de matemáticas de la Universidad, escribió una tesis influyente sobre el tema de la teoría de conjuntos y obtuvo un título allí en 1926, todos los años. mientras estudiaba ingeniería química en Zúrich. En 1930 von Neumann aceptó una cátedra de matemáticas en la Universidad de Princeton en los Estados Unidos.

En 1932 publicó su innovador trabajo Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica) sobre mecánica cuántica teórica, que lo llevó al estudio de álgebras de operadores y análisis funcional durante los años siguientes. En 1938 recibió el Premio Bôcher de la American Mathematical Society por su trabajo en este campo. A principios de la década de 1940, el interés de von Neumann se centró en las matemáticas aplicadas, y en 1944 publicó su famoso artículo sobre el tema de la teoría de juegos. Su trabajo posterior en el diseño lógico de computadoras y la teoría de autómatas pareció, a von Neumann, una extensión natural de todos sus estudios previos.

Durante y después de la Segunda Guerra Mundial, von Neumann se desempeñó como consultor del Departamento de Defensa y del Laboratorio Científico de Los Álamos. En 1955 el presidente Eisenhower lo nombró miembro de la Comisión de Energía Atómica y en 1956 recibió el Premio Enrico Fermi por todas sus contribuciones al respecto. El mismo año fue honrado en la academia con el Premio Conmemorativo Albert Einstein.

Von Neumann fue elegido miembro de una gran cantidad de sociedades académicas a lo largo de su vida, incluida la Academia Nacional de Ciencias (Estados Unidos), la Academia Estadounidense de Artes y Ciencias, el Instituto Lomdardo do Scienze e Lettere (Italia) y la Real Academia de los Países Bajos. de Ciencias y Letras. Murió en Washington, DC, el 8 de febrero de 1957.

Newton, Sir Isaac (1642–1727) Cálculo, mecánica, dinámica, óptica, astronomía y filosofía natural británicos Nacido el 4 de enero de 1642 en Woolsthorpe, Inglaterra, Sir Isaac Newton es recordado como uno de los más grandes eruditos científicos de todos los tiempos. Dominó y revolucionó las matemáticas y la física del siglo XVII. Newton es responsable del desarrollo del CÁLCULO diferencial e integral y del descubrimiento del TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO que une los dos campos. También generalizó el TEOREMA BINOMIAL para incorporar exponentes no enteros; desarrolló métodos numéricos para resolver ECUACIONES DIFERENCIALES, aproximar LÍMITES y calcular integrales; y descubrió muchos resultados importantes en la teoría de ecuaciones. En física, es recordado por su formulación de un sistema de mecánica capaz de descripciones precisas y precisas de los movimientos de todos los objetos y por su ley universal de gravitación a través de una LEY DEL CUADRADO INVERSO . Describió este trabajo en su obra de 1687 Philosophiae naturalis principia mathemat ica (Los principios matemáticos de la filosofía natural), a menudo denominada simplemente Principia. Este es considerado hoy como uno de los trabajos científicos más importantes de todos los tiempos.

Newton entró en el Trinity College de Cambridge en 1661 para estudiar derecho y filosofía, pero pronto descubrió su interés por las matemáticas, la óptica y la mecánica. Un cuaderno personal de la época revela que leyó y analizó en detalle las obras de EUCLID (ca. 300-260 a. C.) y RENÉ DESCARTES (1596-1650) sobre el tema de la geometría, de GALILEO GALILEI (1564-1642) .) sobre la mecánica del universo, y de FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) y JOHN WAL LIS (1616–1703) sobre álgebra. Newton amplió algunas de las técnicas de Wallis para encontrar el área de figuras curvas y trabajó en nuevos enfoques para SERIES infinitas.

Se graduó de Cambridge con una licenciatura en 1665, pero no atrajo la atención de sus profesores como un erudito particularmente talentoso en ese momento.

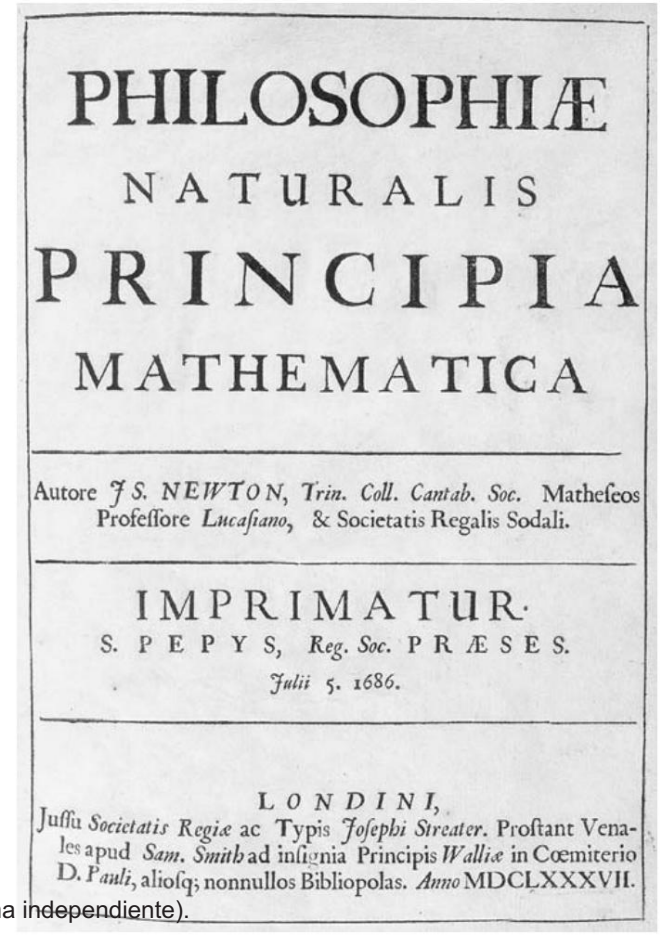
Machine Translated by Google



Sir Isaac Newton, un eminente científico del siglo XVIII, dominó y revolucionó las matemáticas y la física de finales del siglo XVII y principios del XVIII. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/ Topham-HIP/The Image Works)

La universidad cerró durante 2 años debido a la plaga y Newton regresó a su ciudad natal de Woolsthorpe. Allí comenzó a trabajar en el desarrollo de nuevos enfoques de las matemáticas, la física y la óptica. Hizo el descubrimiento fundamental de que la integración es el proceso inverso de la diferenciación y utilizó este concepto unificador para sentar las bases de una teoría general del cálculo. (Como tal, completó este trabajo dos décadas antes de que el erudito alemán GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) hiciera el mismo descubrimiento de forma independiente). Newton usó la noción de FLUXION (derivado) como base de su enfoque. Resumió su trabajo en su pieza de 1671 De methodis serierum et fluxionum (El método de las series infinitas y las fluxiones), pero no logró publicar el trabajo. (Una traducción al inglés de la pieza se imprimió póstumamente en 1736.) Esto parece haber sido un problema frecuente para Newton. Los historiadores deducen del examen de sus cartas y escritos personales que tenía una aversión morbosa y miedo a la crítica y invariablemente se abstendría de publicar sus ideas. Esto condujo a una amarga disputa, por ejemplo, 20 años después, cuando Leibniz publicó sus descubrimientos y afirmó haber inventado el cálculo.

La Universidad de Cambridge reabrió sus puertas en 1667 y Newton volvió a obtener una maestría un año después. En ese momento, a través de lo que había compartido con amigos e informado en cartas, se había ganado una reputación como un erudito dotado, y 2 años más tarde, en la



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Venales apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, aliosq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Considerado el trabajo científico más importante de los tiempos modernos, los Principia de Sir Isaac Newton describen la ley del cuadrado inverso de la gravitación y su aplicación a la derivación matemática de las tres leyes del movimiento planetario de Johannes Kepler. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/ Topham-HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

A la temprana edad de 27 años, Newton fue nombrado profesor Lucasiano en Cambridge.

En este momento, Newton comenzó un trabajo serio sobre la estudio de la óptica. Con la ayuda de un prisma descubrió que la luz blanca estaba compuesta por un espectro de colores, cada uno refractando a través de una lente en un ángulo diferente. Él concluyó entonces que todos los telescopios refractores estaban sujetos a aberraciones cromáticas y se pusieron a trabajar en la construcción de un modelo reflector. En 1672 fue elegido como miembro de la prestigiosa ROYAL SOCIETY de Londres en honor de esta obra. Publicó su texto Optiks (Óptica) en 1704.

Newton también comenzó a formular sus famosas leyes de movimiento y sus leyes de gravitación a mediados de la década de 1660. En 1684, el eminente astrónomo Edmond Halley (1656-1742) sugirió a Newton que debería investigar las matemáticas de la atracción gravitacional y tratar de derivar el famoso JOHANNES KEPLER tres leyes. Newton aparentemente respondió simplemente que él ya lo había hecho muchos años antes. Solo después de las insistentes insistencias de Halley, Newton accedió a publicar los resultados. en lo que se convertiría en su obra más famosa, la pieza Principia de 1687.

Newton también publicó en su vida, algo retrasado después de completar el trabajo, Enumeratio lin earum tertii ordnis (Enumeración de líneas de la tercera orden) en 1704, Arithmetica universalis (Universal aritmética), sus obras completas de álgebra en 1707, y Análisis por serie quantitatum (Análisis mediante varias series) en 1711.

Newton renunció a su puesto en la Universidad de Cambridge en 1701 para ocupar un cargo de prestigio en el gobierno de Londres y participó en muy pocas investigación matemática a partir de entonces. En 1703 fue elegido presidente de la Royal Society y reelegido a esa posición cada año hasta su muerte el 20 de marzo, 1727. En 1705 fue nombrado caballero por la reina Ana, convirtiéndose en el primer científico en ser tan honrado por sus logros académicos.

Es imposible subestimar la influencia que La obra de Newton ha influido en el desarrollo de todas las investigaciones científicas. Los eruditos de hoy están de acuerdo en que la publicación de Principia marcó el comienzo de la modernidad. era científica.

Método de Newton En muchas situaciones prácticas, uno es necesarios para encontrar una solución numérica a una ecuación de la forma f(x) = 0, incluso si no hay claros algebraicos medios para resolver tal ecuación. (No existen métodos generales adecuados para resolver $\sqrt{x} + \sqrt{x + 2}\sqrt{x + 3} - 5 = 0$, por ejemplo.) Si la función en cuestión es diferenciable (ver CÁLCULO DIFERENCIAL), entonces uno puede emplee el método de Newton para encontrar la ubicación aproximada de una RAÍZ.

Uno comienza haciendo una conjetura inicial x0 , con la esperanza de perder por completo el valor correcto de la raíz por solo un Pequeña cantidad. Supongamos que resulta que la raíz es h unidades lejos de x0 (así f(x0 + h) = 0). Usando esto valor de h, podemos aproximar la derivada de la funcionan en x0 como:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\frac{f(x_0)}{h}$$

Dando la vuelta, vemos que h es aproximadamente –f(x0)/f′(x0). Sustituyendo este valor por h muestra que si x0 es nuestra suposición inicial para la raíz, luego el punto:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

es probable que sea una aproximación mucho mejor a la raíz. (Geométricamente, x1 es la ubicación en la que la tangente línea a la gráfica y = f(x) en la posición x0 cruza el eje x .) Repitiendo este procedimiento, usando cada vez el resultado recién obtenido como la siguiente suposición inicial, produce a) secuencia de valores x0 ,x1 ,x2 ,…, con $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ produciendo sucesivamente mejores aproximaciones de la raíz. Se puede realizar este procedimiento hasta el grado deseado. de precisión se obtiene.

Para ilustrar el método de Newton, calculamos $\sqrt{2}$ a cuatro decimales. Calcular esta raíz es equivalente para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Poniendo $f(x) = x^2 - 2$, tenemos f′(x) = 2x. Así, la secuencia de aproximaciones viene dada por la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$$

(Compárese con el MÉTODO DE HERON .) Con x0 = 1 como nuestro estimación inicial, obtenemos las aproximaciones:

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1.5$$

Machine Translated by Google

$$x_2 = \frac{17}{12} = 1.416667$$

$$x_3 = \frac{99}{70} = 1.414216$$

$$x_4 = \frac{577}{408} = 1.414213$$

etcétera. Por lo tanto, con cuatro decimales, vemos $\sqrt{2} = 1.4142$.

Si uno inicialmente hace dos conjeturas x0 y x1 a la raíz de una ecuación f(x) = 0, entonces uno puede usar el fórmula $f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ para aproximar la pendiente de la curva en la posición x = x1 . Un approxi mejorado La mación para la raíz está dada por lo tanto por $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$. La aplicación repetida conduce a el método de la secante para aproximar raíces: dados dos conjunto de conjeturas iniciales x0 y x1 :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Neyman, Jerzy (1894–1981) Estadísticas de Moldavia
Nacido el 16 de abril de 1894 en Bendery, Moldavia, el estadístico Jerzy Neyman es recordado por su trabajo fundamental en la teoría de la estadística inferencial. Él hecho contribuciones significativas a la práctica de prueba y estimación de hipótesis, y fue el primero en introducir la noción de intervalo de confianza.

Neymar estudió matemáticas en la Universidad de Kharkov y recibió un doctorado en matemáticas y estadísticas en 1924 de la Universidad de Varsovia. En colaboración con el hijo de KARL PEARSON , ES Pearson, Neyman escribió una serie de artículos influyentes. Las dos piezas más destacadas “Sobre el problema de la las pruebas más eficientes de hipótesis estadísticas” y “La prueba de hipótesis estadísticas en relación con Probabilidades a priori” fueron publicados en 1933.

En 1938, Neymar emigró a los Estados Unidos, donde trabajó en la Universidad de California, Berkeley, por el resto de su vida. Murió en Oakland, California, el 5 de agosto de 1981.

Su trabajo en estadística, con la introducción de la intervalo de confianza, técnicas de muestreo revolucionadas y prácticas en agricultura, biología, medicina y la ciencias físicas, y su estudio de las poblaciones estratificadas condujo a un nuevo campo de la teoría estadística. La estructura de la encuesta de Gallup que se usa hoy, por ejemplo, es basado en este trabajo.

Ver también ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

círculo de nueve puntos Considere un triángulo con vértices A, B y C. Sean MA, MB y MC los PUNTOS MEDIOS de cada uno de sus tres lados. Considere también las tres altitudes del triángulo, líneas que pasan cada una por un vértice de el triángulo para encontrarse con el lado opuesto en un ángulo recto. Dejar HA, HB y HC sean los pies de las tres alturas, una sobre cada lado del triángulo. Un estudio de puntos EQUIDISTANTES muestra que las tres altitudes pasan a través de un común punto H llamado el ortocentro del triángulo. (Véase ALTI TUDE.) Sean PA, PB y PC los puntos medios de la recta segmentos que conectan H a cada vértice A, B y C, respectivamente. Ahora tenemos nueve puntos asociados con el triángulo: MA, MB, MC, HA, HB, HC, PA, PB y PC.

Sorprendentemente, estos nueve puntos siempre estarán en un círculo. Este círculo se llama el círculo de nueve puntos del triángulo.

Este resultado fue descubierto por el matemático alemán Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834). El centro de el círculo resulta estar sobre la LÍNEA DE EULER del triángulo. De hecho, si O es el circuncentro del triángulo, ese es, el centro del CÍRCULO del triángulo, entonces el centro del círculo de nueve puntos Q es el punto medio de el segmento de línea que conecta O con H. (Con esto conocido, entonces se puede probar que Q es de hecho la misma distancia de cada uno de los nueve puntos enumerados, estableciendo así la afirmación de que los nueve puntos se encuentran en un círculo.)

Feuerbach también demostró que el círculo de nueve puntos y el INCIRCLE del triángulo se tocan en un solo punto y, además, que el círculo de nueve puntos es TANGENTE a cada uno de los tres excírculos del triángulo.

Dados cuatro puntos arbitrarios en el plano, uno puede construya un círculo de nueve puntos para cualquier triángulo formado por un conjunto de tres de esos puntos. Como hay cuatro conjuntos de tres puntos, esto produce cuatro círculos de nueve puntos en total. Sorprendentemente, estos cuatro círculos de nueve puntos pasan todos a través de un único punto común.

Noether, Amalie (Emmy) (1882–1935) Alemán Abs tract álgebra
Nacido el 23 de marzo de 1882 en Erlangen, Bavaria, se recuerda a la matemática Emmy Noether

Machine Translated by Google

por su trabajo altamente creativo en la teoría de los ANILLOS y en ÁLGEBRA ABSTRACTA. Ella fue responsable de dirigir el álgebra lejos de los cálculos aritméticos detallados a un estudio axiomático general de la estructura. También se destaca por su determinación de tener éxito como mujer académica en el ámbito dominado por los hombres de la academia de principios del siglo XX.

Noether estudió idiomas y música durante sus años escolares y se formó para ser profesora de francés e inglés. En 1900 aprobó sus exámenes de certificación estatal pero nunca trabajó como educadora. en cambio ella

Decidió seguir una carrera en matemáticas, asistiendo a conferencias en la Universidad de Erlangen. En ese momento, a las mujeres no se les permitía inscribirse como estudiantes en la universidad y sus estudios en la universidad nunca se consideraron oficiales. En 1904 aprobó el examen de matriculación estatal y luego fue a la Universidad de Göttin gen. Tres años más tarde se doctoró en esa institución. Sin embargo, no se le permitió obtener el título de habilitación que le otorgaría la calificación adecuada para convertirse en miembro de la facultad universitaria. Noether regresó a Erlangen.

Durante los años siguientes, Noether publicó una serie de artículos influyentes sobre el tema del álgebra.

Su trabajo llamó la atención de destacados matemáticos DAVID HILBERT (1862–1943) y CHRISTIAN FELIX KLEIN (1849–1925), quienes la invitaron a regresar a la Universidad de Göttingen y lucharon contra la administración de la universidad para darle el derecho a obtener un título avanzado. . Finalmente se le otorgó un puesto oficial como miembro de la facultad de la universidad en 1922.

Los matemáticos de hoy consideran que su artículo de 1921 "Idealtheorie in Ringbereichen" (La teoría de los ideales en estructuras de anillos) tiene una influencia fundamental en el desarrollo del álgebra abstracta moderna.

Noether recibió muchos honores y premios por su trabajo. En 1928 fue invitada a dirigirse a la Conferencia Matemática Internacional en Bolonia, y volvió a hablar en Zúrich en 1932, el mismo año en que recibió conjuntamente el Premio en Memoria de Alfred Ackermann-Teubner por el avance del conocimiento matemático.

Con el levantamiento de los nazis en 1933, Noether fue despedida de su puesto en Göttingen debido a su fe judía. Luego aceptó una cátedra en Bryn Mawr College, Pensilvania. En ese momento también dio conferencias en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey.

Noether murió en Bryn Mawr el 14 de abril de 1935. Escribió un total de 45 artículos de investigación a lo largo de su carrera y dio forma a todo el curso de estudio en álgebra abstracta. El matemático Bartel Leendert van der Waer den (1903-1996) estuvo particularmente influenciado por su trabajo y continuó promoviendo sus ideas después de su muerte.

geometría no euclidiana Después de numerosos intentos fallidos a lo largo de la historia de establecer el POSTULADO PARALELO como consecuencia de los cuatro POSTULADOS DE EUCLIDES restantes, los matemáticos comenzaron a contemplar teorías de la geometría en las que el quinto postulado no se cumple. Cualquier teoría de GEOMETRÍA de este tipo se denomina geometría no euclidiana.

En 1795, el matemático y físico escocés John Playfair (1748-1819) presentó una formulación alternativa, pero equivalente, del postulado de las paralelas: a través de cualquier punto del plano, hay precisamente una línea que pasa por ese punto paralela a cualquier dirección prescrita. Reformular el postulado de esta manera hace evidente que la negación del famoso quinto postulado tiene dos partes. Cualquiera:

1. No hay rectas que pasen por un punto dado paralelas a una dirección dada.
2. Hay más de una línea a través de un punto dado paralela a una dirección dada.

De 1826 a 1829, el matemático ruso NICO LAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) desarrolló una teoría consistente de la geometría en la que el quinto postulado de Euclides falla de la manera descrita en el punto 2. El matemático húngaro JÁNOS BOLYAI (1802-1860) llegó de forma independiente a la misma conclusión sorprendente al suponer que a través de cualquier punto hay infinitas líneas distintas paralelas a una dirección dada. (CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-18) también había llegado a conclusiones similares, pero no publicó sus resultados). Tal teoría de la geometría se llama hoy
GEOMETRÍA HIPERBÓLICA.

En la década de 1850, el matemático alemán GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) presentó una forma alternativa de geometría en la que el quinto postulado de Euclides falla de la manera descrita en el punto 1 anterior. En esta teoría, hoy llamada geometría de Riemann o GEOMETRÍA ESFÉRICA, las “líneas” son círculos máximos dibujados en la superficie de una esfera. En consecuencia, es imposible dibujar un par de líneas que nunca se intersequen.

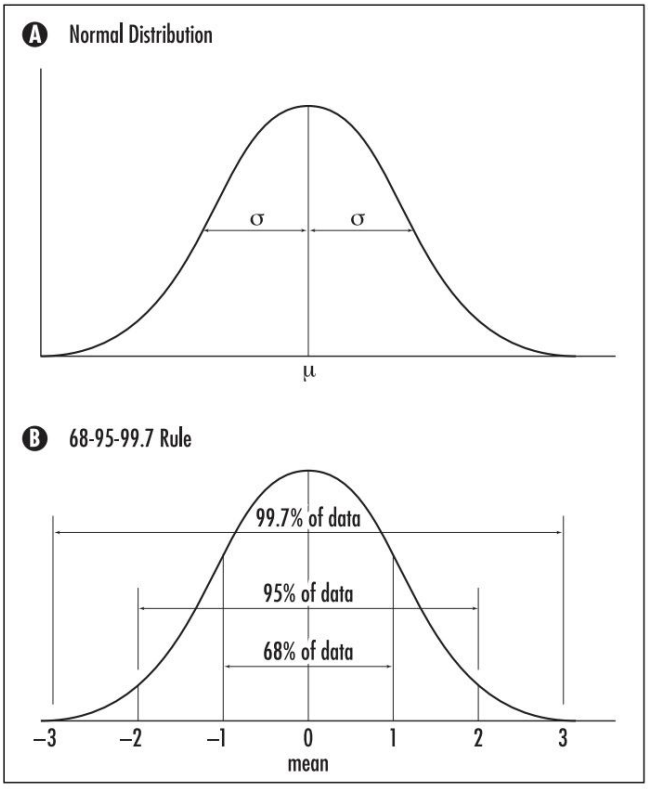
Machine Translated by Google

A pesar de la simplicidad del modelo de Riemann, no fue inmediatamente obvio para los estudiosos del siglo XIX que fuera permisible. El segundo postulado de Euclides parece afirmar que las líneas rectas deben tener una longitud infinita. Riemann tuvo la perspicacia de señalar que "extendido indefinidamente" no implica "infinitamente largo", lo que le permitió considerar una geometría en la que las líneas rectas se retuercen sobre sí mismas.

En geometría hiperbólica, todos los ángulos de un triángulo suman menos de 180°, y la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro es mayor que π. En geometría esférica, todos los ángulos de un triángulo suman más de 180°, y la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro es menor que π. La GEOMETRÍA EUCLIDEA, en la que los ángulos de un triángulo siempre suman exactamente 180° y la razón entre la circunferencia y el diámetro de cualquier círculo es exactamente π, puede considerarse como un término medio entre las dos.

Véase también EUCLID; EL AXIOMA DE PLAYFAIR .

distribución normal A principios del siglo XVIII, los científicos notaron que los errores de las mediciones en experimentos científicos repetidos muchas veces tendían a seguir la misma forma de DISTRIBUCIÓN, aunque los estudios se realizaron en campos no relacionados (física versus biología o sociología, por ejemplo). El patrón particular de errores observados se conoce hoy como distribución normal (o distribución gaussiana). El matemático francés ABRAHAM DE MOIVRE, en 1733, fue el primero en escribir una fórmula matemática para la distribución. Posteriormente, los matemáticos PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827), SIMÉON-DENIS POISSON (1781–1840) y CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) especificaron y demostraron muchas de sus propiedades matemáticas. A principios del siglo XX, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, y otros más tarde, refinaron y desarrollaron el trabajo de Laplace para establecer el TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL para explicar la frecuente aparición de la distribución normal en todos los estudios científicos.



La distribución normal

La distribución normal resulta ser una curva simétrica en forma de campana. Está escalada de modo que el área total bajo la curva sea exactamente igual a 1. La ubicación del pico de la curva se llama su media, denotada como μ, y el ancho de la curva se mide por un valor σ, llamado su desviación estándar . (Ver ESTADÍSTICAS: DESCRIPTIVAS y DISTRIBUCIÓN.) En ambos lados del pico, la curva cae uniformemente hacia abajo. Luego la curva cae menos empinada, con la curvatura hacia arriba. La ubicación en la que la curvatura cambia de dirección desde adentro hacia arriba está a una distancia de 1 desviación estándar de la media, el pico de la curva.

La "regla 68-95-99.7" afirma que el 68 por ciento del área bajo la curva se encuentra dentro de una distancia de 1 desviación estándar a cada lado de la media; el 95 por ciento del área se encuentra dentro de 2 desviaciones estándar de la media; y 99.7 por ciento dentro de 3 desviaciones estándar. Por ejemplo, podría observarse en un estudio médico que la estatura media de las mujeres de 18 a 24 años tiene una distribución normal, con una media μ = 64,5 pulgadas y una desviación estándar σ = 2,5 pulgadas. Entonces podemos deducir que el 68 por ciento de las mujeres jóvenes tienen entre 64,5 – 2,5 = 62 y 64,5 + 2,5 = 67 pulgadas de altura.

Si se sabe que una medida en un experimento sigue una distribución normal, entonces la probabilidad de que una medida tomada al azar se encuentre dentro del rango [a,b] se encuentra calculando el área bajo la curva sobre el intervalo [a,b]. Los textos de referencia en estadísticas proporcionan tablas de cálculos de área para una dis normal

Machine Translated by Google

tribución de media cero y desviación estándar 1 (la distribución normal estándar). Uno puede convertir un distribución normal arbitraria en una normal estándar formulario mediante el uso de Z-SCOREs, que luego le permite a uno calcular probabilidades para esa distribución.

La fórmula para la curva que describe una normal dis tribución de la media μ y la desviación estándar σ es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; -\infty < x < \infty$$

La función de distribución acumulativa del estándar distribución normal (μ = 0, σ = 1) se denota φ(z) y viene dada por $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. Referencias estadísticas por lo general enumera los valores de esta función de z = 0.0 a z = 4.0. (Tenemos φ(0.0) = 0 y φ(4.0) = 0.99997.) Los valores de la La función para valores negativos de z se puede deducir usando la hecho de que la distribución normal es de forma simétrica.

Ver también TEOREMA DE CHEBYSHEV ; ESTADÍSTICAS: INFERIR ENCIAL.

normal a una curva En un espacio bidimensional, una normal a una curva en un punto P de la curva es la línea a través de P que forma ángulos rectos con la TANGENTE a La curva. Por ejemplo, el radio de un círculo es normal a la circunferencia del círculo.

Ver también NORMAL A UN PLANO; NORMAL A SUR ROSTRO; ORTOGONAL; PERPENDICULAR.

normal a un plano (vector normal a un plano) En espacio tridimensional, un VECTOR cuya dirección es Se dice que una PERPENDICULAR a un plano es una normal al avión. Por consiguiente, un vector normal es perpendicular a cualquier vector que se encuentre en el plano dado.

Si ax + by + cz = d es la ecuación del plano, entonces n = < a,b,c > es una normal al plano. Esto sigue de la derivación de la ECUACIÓN VECTORIAL DE A AVIÓN. Cualquier múltiplo escalar (distinto de cero) de este vector es también una normal al avión.

Ver también NORMAL A UNA CURVA; NORMAL A SUR ROSTRO; ORTOGONAL.

normal a una superficie En el espacio tridimensional, una normal a una superficie en un punto P en la superficie es una línea por P que es PERPENDICULAR al plano TANGENTE de la superficie en P. Por ejemplo, una línea que pasa por el centro de una esfera es normal a la superficie en cada de los dos puntos corta a la esfera.

Se supone que las superficies en discusión son "suaves", de modo que en cada punto hay un plano tangente bien definido. Por ejemplo, una ESFERA es suave, como lo es un TORUS, pero la superficie de un cubo es no. (No hay un plano tangente bien definido en uno de sus esquinas, por ejemplo.)

Ver también NORMAL A UNA CURVA; NORMAL A UN AVIÓN; ORTOGONAL.

NP completo En 1971 el científico informático Steven Cook especificó cierta clase de problemas computacionales como "equivalentemente difíciles" en el sentido de que si alguno uno de los problemas de esta clase se puede resolver “en un cantidad de tiempo razonable” en una computadora, entonces todos los los problemas de esta clase pueden resolverse así. Esta categoría de problemas se llama NP completa.

El famoso PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO es uno tal problema Se trata de encontrar la ruta más corta que vis sus un número de ciudades. Se sabe que si n representa la número de ciudades en el problema, entonces, a medida que n aumenta, el número de posibles rutas a comprobar crece como una función FACTORIAL en n. Estos números crecen extraordinariamente rápido, más rápido que cualquier función POLINOMIAL en n. (Un polinomio es una fórmula de la forma $a_r n^r + a_{r-1} n^{r-} + \ldots + a_1 n + a_0$.) Problemas que crecen en complejidad como un polinomio se consideran “solubles en una cantidad razonable de tiempo." No se sabe si hay una manera de resolver El problema del viajante de comercio en tiempo polinomial. Si se pueden ser tan resueltos, entonces, como mostró Steven Cook, todos y cada uno de los cada problema NP también se puede resolver en polinomio tiempo. Hay muchos problemas diferentes en la clase NP. El hecho de que nadie hasta el día de hoy haya encontrado un algoritmo “rápido” para resolver cualquiera de ellos sugiere que el problema del viajante de comercio, en particular, no tiene ningún problema. medios de solución factibles computacionalmente. Las cartas NP significa "tiempo polinomial no determinista".

Un problema diferente pregunta si una solución propuesta a un problema se puede verificar para que sea válido dentro de una cantidad polinomial de tiempo. Esto lleva a la clase de "P" problemas. No se sabe si la clase de problemas P (aquellos que toman una cantidad de tiempo polinomial para comprobar soluciones) es la misma que la clase de problemas NP (aquellas que se espera tomen una cantidad polinomial de

Machine Translated by Google

tiempo para encontrar soluciones). Esta pregunta se suele escribir: P = NP?

Véase también TIEMPO POLINOMIAL.

raíz n -ésima de la unidad Cualquier NÚMERO COMPLEJO z tal que = 1 z^n se llama raíz n-ésima de la unidad. Cuando n es 2 o 3, las raíces relevantes generalmente se llaman raíces cuadradas y raíces cúbicas, respectivamente. Hay dos raíces cuadradas de la unidad, a saber, z = 1 y z = –1, y hay tres cubos raíces de la unidad: z = 1, $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, y $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. En general, como muestra el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA , existen n raíces n -ésimas de la unidad. El número z = 1 es una raíz enésima de la unidad para todos los valores de n.

EL TEOREMA DE EULER muestra que las raíces n-ésimas de la unidad están dadas por la fórmula:

$$z_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k$$

para k = 0,1,…,n (ya que $z^n = \left(e^{\frac{2\pi k i}{n}}\right)^n = e^{i2\pi k} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1 + 0 = 1$). Esto muestra que las n raíces n-ésimas de la unidad se encuentran todas en un círculo de radio uno y son equidistantes a lo largo de ese círculo en ángulos que son múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$. Es decir, cuando se grafican en el plano complejo, las n raíces n-ésimas de la unidad se encuentran en los vértices de un ngon regular con el punto z = 1 en el eje real como un vértice del polígono.

Una raíz n-ésima de la unidad z se llama primitiva si z^k pero $z^n = 1$, $z^k \neq 1$ para cualquier entero positivo menor que n. Por ejemplo, aunque z = –1 es una raíz cuarta de la unidad, no es una raíz primitiva, ya que también tenemos (–1)2 = 1. Los números z = i y z = –i son ambas raíces cuartas primitivas de unidad.

Una raíz n-ésima de la unidad z satisface la ecuación $z^n = 0$. $z^n - 1$ La factorización produce:

$$(z - 1)(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}) = 0$$

Si z es diferente de 1, entonces debe darse el caso de que el segundo término del lado izquierdo de esta expresión sea cero.
Esto demuestra:

Cada n-ésima raíz de la unidad distinta de 1 satisface $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1} = 0$.

Tomando n = 5, por ejemplo, e IGUALANDO REAL Y PARTES IMAGINARIAS, esto demuestra, por ejemplo, que:

$$\cos(0) + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$$

y

$$\sin(0) + \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} = 0$$

n-tupla (lista) Un conjunto de n objetos tomados en un orden particular se llama n-tupla. Una n-tupla de números a1 , a2 , en ese orden, generalmente tuplas se denota (a1 ,a2 ,…,an) o …, an , a1 ,a2 ,…,an . Dos n-(a1 ,a2 ,…,an) y (b1 ,b2 ,…,bn) son iguales si, y solo si, las entradas correspondientes coinciden: a1 = b1 , a2 = b2 ,…, an = bn . Así, por ejemplo, (2,1.3) y (1,2,3) son tres tuplas distintas.

Una tupla de 3 se denomina "triple" y una tupla de 4 "cuádruple". Cuando n = 2, una n-tupla se llama par ordenado.

Una n-tupla de números puede representar un punto en un espacio de n dimensiones, una SECUENCIA finita o, si se usan paréntesis angulares, un VECTOR de n dimensiones . Una PARTICIÓN ordenada de un número N es una n-tupla de números cuyas entradas suman N.

Véase también CONJUNTO PEDIDO.

número El desarrollo de diferentes tipos de números puede verse motivado por la necesidad de resolver diferentes tipos de ecuaciones. Por ejemplo, los números de contar (es decir, los NÚMEROS NATURALES N) son suficientes para resolver cualquier ecuación del tipo x + 2 = 5, por ejemplo, pero no una ecuación del tipo x + 5 = 2. (No hay solución a esta ecuación dentro del conjunto de números contables.) Esto motiva la introducción de NÚMEROS NEGATIVOS y la construcción de los ENTEROS Z. Pero

este conjunto no siempre es suficiente para resolver ecuaciones del tipo 5x = 3, por ejemplo. Desear soluciones a ecuaciones de este tipo lleva a la construcción de FRACCIONES y al conjunto de todos los NÚMEROS RACIONALES Q.
Desafortunadamente, nuevamente, no todas las ecuaciones pueden resolverse dentro de este sistema. Por ejemplo, la ecuación x no $2 - 2 = 0$ tiene solución racional. Extender el conjunto de números racionales para incluir soluciones a ecuaciones de este tipo introduce NÚMEROS IRRACIONALES y la construcción del sistema de NÚMEROS REALES R. Sin embargo, este nuevo sistema tampoco es suficiente para resolver todas las ecuaciones. Con la introducción de un solo número adicional, denotado i,

Machine Translated by Google

para representar una solución ("imaginaria") a la ecuación $x^2 + 1 = 0$, nacen los NÚMEROS COMPLEJOS C. Sorprendentemente, como lo muestra el TEOREMA FUNDAMENTAL DE ALGEBRA, la introducción de este número único es todo que se necesita para resolver cualquier ecuación POLINOMIAL $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Así los números complejos representan un sistema de números que es algebraicamente cerrado en el sentido de que la construcción de ningún nuevo tipo de número es necesarios para resolver ecuaciones aritméticas.

A nivel conceptual, la noción de "número" es íntimamente relacionado con el acto de contar. Simple Los sistemas de conteo de la antigüedad usaban marcas de conteo para números récord, y durante milenios este básico El esquema de numeración evolucionó al sofisticado SISTEMA DE VALOR DE LUGAR que usamos hoy. (Los antiguos egipcios de alrededor del 3000 a. C. fueron quizás los primeros en moverse solo del uso de marcas de conteo.) Fue un gran logro intelectual para la humanidad cuando la noción de "número" se eliminó de los objetos específicos que se estaban contados, reconociendo, por ejemplo, que dos vacas, dos casas, y dos días todos comparten una propiedad común de "dobleza". (Incluso hoy en día a veces usamos diferentes palabras para contar diferentes tipos de "dos". Por ejemplo, las palabras mellizos, pareja y pareja no se pueden usar indistintamente para representar a dos personas). Este simple reconocimiento de una comunalidad abstracta entre conjuntos de objetos fue explotado por el matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918) quien, a fines del siglo XIX, desarrolló una noción general de CARDINALIDAD. Con eso, Cantor amplió la noción de "número" para incluir cuentas de conjuntos de tamaño infinito. Estableció, por ejemplo, que hay un número infinito de diferentes tipos de infinito y logró desarrollar una significativa sistema de aritmética para sus números transfinitos.

El matemático irlandés SIR WILLIAM ROWAN HAMIL TON (1805-1865) siguió una ruta diferente y trabajó extender la noción de "número" para representar operaciones en un espacio n-dimensional. UN DIAGRAMA DE ARGAND muestra que los números complejos tienen una representación natural como puntos en un plano. Hamilton buscó dar significado a una aritmética para puntos en tres y espacio de dimensiones superiores. Aunque no lo logró en el logro de este objetivo para el espacio tridimensional, su invención de los QUATERNIONS muestra que esta hazaña puede hacerse en un espacio de cuatro dimensiones. (Los octoniones proporcionan una aritmética para el espacio de ocho dimensiones).

El siguiente diagrama ilustra la relación entre los sistemas numéricos descritos:

norte Z Q R C cuaterniones

Véase también MATEMÁTICAS ÁRABES; BABILÓNICO MATEMÁTICAS; BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO; CHINO MATEMÁTICAS; REPRESENTACIÓN DECIMAL; EGIPCIO MATEMÁTICAS; MATEMÁTICAS GRIEGAS; HINDÚ-ÁRABE NUMERALES; MATEMÁTICAS INDIAS; MATEMÁTICAS MAYAS ICS; NÚMEROS ROMANOS; CERO.

recta numérica (recta real) Una línea recta, normalmente horizontal, para la cual cada punto de la recta representa un NÚMERO REAL se llama recta numérica. uno asume que la línea se extiende indefinidamente tanto a la izquierda como a la derecha. Un solo punto O en la recta, llamado origen, corresponde al número CERO en el número real sistema, y es convencional suponer que un punto a distancia a unidades a la derecha de O representa el positivo número real a y un punto b unidades a la izquierda de O el número real negativo –b. Los números enteros se representan así como puntos espaciados uniformemente, separados por una unidad, a lo largo de la línea. Una recta numérica es una CARTA unidimensional Sistema de COORDENADAS SIAN .

La teoría de la CARDINALIDAD muestra que hay tantos puntos en la recta numérica como hay puntos en un plano bidimensional. EL DIAGONAL ARGUMENTO muestra que el conjunto de NÚMEROS RACIONALES (fracciones) no ocupan absolutamente ningún espacio en la recta numérica.

Véase también DIMENSIÓN.

sistemas numéricos Ver BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO.

teoría de números (aritmética superior) El estudio de la Las propiedades aritméticas de los números se llama teoría numérica. El hecho de que muchos enunciados simples sobre números pueden ser extraordinariamente difíciles de probar, si es que lo son. posible, hace de este tema un atractivo y estimulante Tema para matemáticos. (LA CONJECTURA DE GOLDBACH, por ejemplo, sigue sin resolverse). CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), encantado con el tema y su "riqueza inagotable", llamó a la teoría de números la "reina de las matemáticas".

La teoría elemental de los números es el estudio de aquellos temas de teoría de números que utilizan solo las técnicas básicas de ARITMÉTICA y matemáticas de secundaria en

Machine Translated by Google

sus soluciones. Por ejemplo, la clasificación de los LOS TRIPLES DE PITÁGORAS serían considerados un problema en teoría elemental de números, como lo sería la solución de muchas ECUACIONES DIOFANTINAS. (El uso de la palabra elemental aquí de ninguna manera implica que el nivel de la sofisticación matemática utilizada es elemental.) LA TEORÍA ANALÍTICA DE LOS NÚMEROS incorpora la noción de LÍMITE en el estudio de los números y el número algebraico La teoría amplía el estudio de la teoría de números a un estudio de NÚMEROS ALGEBRAICOS y nuevos sistemas numéricos que incluyen soluciones a problemas algebraicos que de otro modo no podrían resolverse. ecuaciones

Véase también ÁLGEBRA ABSTRACTA; CONJETURA CATALANA; LA CONJETURA DE COLLATZ ; LA PRUEBA DE EUCLIDES DE LA INFINITUD DE PRIMOS; ALGORITMO EUCLIDEO; TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA; LOS POSTU LATES DE PEANO ; PRINCIPAL; TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO.

derivación numérica La DERIVADA de un función f(x) se puede aproximar bien como un "Newton cociente":

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

al menos para valores pequeños de h. Cualquier uso de esta fórmula para aproximar el valor de una derivada se llama diferenciación numérica. Por ejemplo, podemos aproximar la derivada de $f(x) = x^2$ en x = 7 simplemente como $f'(7) \approx \frac{(7 + 0.1)^2 - 7^2}{0.1} = 14{,}1$.

Reescribiendo la fórmula para el cociente de Newton da:

$$f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$$

Si se conoce la derivada de la función, entonces esta fórmula se puede usar para aproximar los valores de f. Por ejemplo, para estimar raíces cuadradas, establezca $f(x) = \sqrt{x}$ para obtener:

$$\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + f'(x)h = \sqrt{x} + \frac{h}{2\sqrt{x}}$$

Así $\sqrt{38}$, por ejemplo, es aproximadamente $\sqrt{36} + \frac{2}{2\sqrt{36}} = 6 + \frac{1}{6} \approx 6.167$.

La segunda derivada de una función está bien aproximado por el cociente:

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Esto sigue usando la aproximación $f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$, con $f'(x+h) \approx \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h}$ y $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Véase también MÉTODO DE NEWTON .

Integración numérica De acuerdo con la teoría de CÁLCULO INTEGRAL, el valor numérico de una determinada integral $\int_a^b f(x)dx$ se determina encontrando una antiderivada tivo F(x) al integrando f(x) y luego calculando el cantidad F(b) – F(a). Aunque en teoría es sólido, es Es raro en las aplicaciones del mundo real que tal procedimiento pueda completarse alguna vez. Hay dos posibles complicaciones:

1. No se puede encontrar una antiderivada del integrando. (Considere la integral $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$, por ejemplo).
2. Es posible que la función f(x) no esté completamente especificada. (Al realizar un experimento, uno solo puede registrar un número finito de valores de datos, en cuyo caso los valores de una función f(x) sólo se conocen en un número finito de puntos).

No obstante, a pesar de estas limitaciones, los científicos y los ingenieros a menudo todavía requieren un valor numérico para el área bajo la curva y = f(x), al menos hasta cierto grado especificado de precisión. La integración numérica es cualquier técnica que permite encontrar un valor aproximado para una integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Hay dos elementos métodos tarios actualmente en uso:

1. Regla trapezoidal (también conocida como trapecio regla): Divide el intervalo [a,b] en n + 1 en partes iguales puntos espaciados a = x0 , x1 ,…xn–1, xn = b. Por conveniencia, denotar f(xi) por fi y sea Pi el punto (xi , fi) en la curva anterior x = xi . la linea recta segmento que conecta Pi a Pi+1 se puede utilizar como un aproximación para la curva y = f(x) entre y xi y xi+1. El área bajo esta parte de la curva es por lo tanto, aproximadamente el área de un trapezoide de ancho $h = \frac{b - a}{n}$ borde izquierdo de altura fi y borde derecho de altura fi+1. Esta área viene dada por $\frac{1}{2}h(f_i + f_{i+1})$.

Machine Translated by Google

La suma de las áreas de todos esos trapecios entre a y b da la regla trapezoidal:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

Los matemáticos han demostrado que el error en este aproximación está cerca $\frac{C}{n^2}$, para alguna constante C. de Por lo tanto, duplicar el número de puntos utilizados para hacer la aproximación aumenta la precisión del resultado por un factor de 4.

Para ilustrar la regla del trapezoide, estimamos $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ usando $n = 4$. Aquí $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1$ con $h = 0,25$.

Tenemos:

$$f_0 = 1$$
$$f_1 = \sqrt{0,75} = 0,866$$
$$f_2 = \sqrt{0,5} = 0,707$$
$$f_3 = \sqrt{0,25} = 0.500$$
$$f_4 = 0$$

Como consecuencia:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx \approx \frac{0.25}{2}\left(1 + 2(0.866) + 2(0.707) + 2(0.500) + 0\right)$$
$$= 0.643$$

(El verdadero valor de la integral es 2/3.)

2. Regla de Simpson: mientras que la regla trapezoidal usa segmentos de línea recta para aproximar la curva, la regla de Simpson usa los arcos de parábolas a través de tres puntos a la vez: uno a través de los puntos P0, P1 y P2 , el siguiente a través de P2 , P3 , y P4 , y así sucesivamente. (Se supone que n es par para este método.) Escriba al hacer las ecuaciones para cada uno de estos arcos parabólicos y al sumar las áreas debajo de cada uno se obtiene, después de un poco de trabajo, la regla:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

Los matemáticos han demostrado que el error en este aproximación C está cerca de $\frac{C}{n^4}$ para alguna constante C. Por lo tanto, duplicar el número de puntos utilizados para hacer la aproximación aumenta la precisión del resultado por un factor de 16.

Para ilustrar la regla de Simpson, nuevamente estimamos $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ usando n = 4. Tenemos:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx \approx \frac{0.25}{3}\left(1 + 4(0.866) + 2(0.707) + 4(0.500) + 0\right)$$
$$= 0.657$$

Si n es un múltiplo de 3, se pueden usar arcos de curvas cúbicas para establecer la regla:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \cdots + 3f_{n-1} + f_n\right)$$

Esto a veces se llama la regla de 3/8 de Simpson.

Estos métodos de aproximación se atribuyen incorrectamente al profesor de matemáticas inglesas THOMAS SIMPSON (1710-1761).

Véase también MÉTODO DE MONTE CARLO; NUMÉRICO DIFERENCIACIÓN.

Machine Translated by Google

O

oblate/prolate Una superficie curva similar a una esfera pero alargada o acortada en una dirección se llama esferoide. Si la longitud del diámetro de polo a polo es mayor que la longitud del diámetro que conecta dos puntos opuestos en el ecuador, entonces se dice que el esferoide es achatado. Si, por el contrario, el diámetro polar es menor que el diámetro ecuatorial, entonces el esferoide se llama alargado. La Tierra, por ejemplo, no es una esfera perfecta sino un esferoide achatado.

Véase también TIERRA; ELIPSOIDE; ESFERA.

oblicuo Este término se utiliza en una serie de configuraciones geométricas para significar "no en ángulo recto" o "no contiene un ángulo recto". Por ejemplo, dos líneas que se cruzan dibujadas en el plano son oblicuas si se encuentran en un ÁNGULO diferente de 90°, o tres líneas que se encuentran en un punto en el espacio tridimensional son oblicuas si no son perpendiculares entre sí. Una sola línea dibujada en el plano se llama línea oblicua si no es ni horizontal ni vertical, y un sistema de coordenadas oblicuas tiene ejes que no están en ángulo recto.

Todo ángulo que no sea múltiplo de 90° se llama ángulo oblicuo. Un triángulo oblicuo es aquel que no contiene un ángulo recto.

Un cono oblicuo es un cono con su vértice no directamente sobre el centro de su base (y por lo tanto, la línea que conecta el vértice con el centro de la base no forma ángulos rectos con la base). Un prisma oblicuo tiene bordes laterales que no son perpendiculares a la base.

Ver también COORDENADAS CARTESIANAS; ÁNGULO RECTO; LÍNEAS DE OSCILACIÓN.

ángulo obtuso Un ÁNGULO entre 90° y 180° se llama ángulo obtuso. UN TRIÁNGULO en el que uno de sus ángulos es obtuso se llama triángulo obtuso. De acuerdo con la LEY DE LOS COSENOS, un triángulo con lados de longitud a, b y c, y ángulos correspondientes A, B, C opuestos a esos lados, satisface:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Para que el ángulo C sea obtuso, debe darse el caso de que cosC < 0, es decir, a . Así, un triángulo a, b, c es + b 2 obtuso si se cumple una de las siguientes desigualdades: a < b 2 o b 2 2 < c , 2 2 c + un < un 2 2 + c .

Un ángulo entre 180° y 360° se llama ángulo reflejo. Un ángulo de 180° grados es un ángulo llano, y uno de 360° se llama vuelta completa o PERIGÓN .

Véase también ÁNGULO AGUDO; TEOREMA DE PITÁGORAS ; TRIÁNGULO.

anverso Cambiando el predicado B de un enunciado de la forma “todos los A son B” de positivo a negativo, o viceversa, y negando el enunciado como un todo produce el anverso del enunciado: “ningún A es B”.

Por ejemplo, el anverso de la declaración "todos los hombres son mortales" es "ningún hombre es inmortal". Los diagramas de Euler muestran que cualquier enunciado de este tipo es lógicamente equivalente a su anverso.

Véase también ARGUMENTO.

Machine Translated by Google

octante Los planos xy, yz y xz en un sistema tridimensional de COORDENADAS CARTESIANAS dividen el espacio en ocho regiones llamadas "octantes". el conjunto de puntos (x,y,z) que satisfacen x > 0, y > 0 y z > 0 constituyen el primer octante o "positivo". Los octantes restantes son etiquetó los octantes segundo, tercero y cuarto en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje z positivo, con el quinto, octantes sexto, séptimo y octavo debajo de estos cuatro, de nuevo en sentido contrario a las agujas del reloj, con el quinto octante directamente debajo del primero.

El análogo bidimensional de un octante es un QUAD RANT. Para n mayor que tres, el análogo n-dimensional se llama ortante. Puntos en la ortante positiva tener todas las coordenadas positivas. Ciencia ficción popular las novelas a menudo describen el espacio dividido en cuadrantes. Este es el término incorrecto para el espacio tridimensional.

Un ÁNGULO de 45° a veces también se llama octante.

probabilidades Si en un juego de azar hay un resultado que se consideren favorables (constituyendo así una EVENTO deseado E), y b resultados que son desfavorables (no en E), entonces la probabilidad a favor de E es la razón $\frac{a}{b}$, generalmente escrito a:b o “a to b”, y las probabilidades en contra de E es la proporción $\frac{b}{a}$, escrito b:a o “b a a”.

Por ejemplo, al lanzar un dado, las probabilidades a favor de sacar un 2 son 1:5. Sólo hay un resultado favorable, a saber, un 2 y cinco resultados desfavorables: {1,3,4,5,6}. Las probabilidades generalmente se escriben en forma reducida. Por ejemplo, si las probabilidades a favor de un evento son 12 a 4, uno normalmente escribe 3:1 en lugar de 12:4.

Las probabilidades están estrechamente relacionadas con los cálculos de PROBABILIDAD . Si las probabilidades a favor de un evento E son a a b, entonces se informa que a de un total de a + b es posible los resultados pertenecen al conjunto E. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra el evento E viene dada por $P(E) = \frac{a}{a+b}$, y el de si no ocurre por P(no E) = se conoce $\frac{b}{a+b}$. Por el contrario, si el la probabilidad de un evento E, entonces las probabilidades en favor de E se puede calcular como una razón de probabilidades:

$$\frac{P(E)}{P(\text{no } E)} = \frac{a}{b} = \frac{\text{abdominales}}{\text{abdominales}}$$

, y las probabilidades en contra como el razón inversa de probabilidades.

Las probabilidades se usan normalmente en las carreras de caballos, por lo general "probabilidades en contra": para decirles a los jugadores los pagos en vari nuestras apuestas. Por ejemplo, las probabilidades anunciadas de 5 a 3 en un caballo en particular indica que una apuesta de $3 en ese caballo ganará $5 (más la devolución de los tres dólares originales) si ese caballo gana la carrera. También le dice al jugador que se cree que este caballo tiene solo 3/8 oportunidad de ganar

Omar Khayyám (Umar al-Kh– ayamm–ı) (1048–1122) Álgebra Árabe , Astronomía Nacido el 18 de mayo de 1048, El erudito persa Omar Khayyám es recordado en matemáticas por sus importantes contribuciones a la avance de ALGEBRA. En su célebre texto Tratado de Demostración de problemas de álgebra, Khayyám desarrolló reglas geométricas y algebraicas para resolver ECUACIONES CUADRÁTICAS y CÚBICAS, haciendo un uso inteligente de SECCIONES CONICAS. Fue el primer matemático que jamás concebir una teoría general para resolver cúbicas y fue el primero en reconocer que las construcciones de regla y compás por sí solas nunca serían suficientes como un enfoque geométrico para este objetivo. Fuera de las matemáticas, Omar Khayyám es mejor conocido por sus poemas, que fueron traducidos libremente por Edward Fitzgerald en 1859 en el texto The Rubáiyát de Omar Khayyám.

Khayyám estudió filosofía y matemáticas en su lugar de nacimiento de Nishapur, Persia (ahora Irán), y rápidamente se convirtió en un erudito experto. A los 25 años tenía escrito tres textos significativos: uno sobre música, otro sobre aritmética, y uno un primer texto sobre el tema de álgebra. En 1073 Khayyám se mudó a la ciudad de Esfah– an para ayudar con la construcción de un observatorio y encabezar un equipo de científicos que estudian astronomía. En el transcurso de sus 18 años en el observatorio Khayyám completó tablas extraordinariamente precisas de datos astronómicos y tablas de valores trigonométricos. También calculó el duración del año sea de 365.24219858156 días, lo cual, en ese momento, era correcta hasta el sexto decimal. (El duración de un año está cambiando con el tiempo. Hoy su valor es 365.242190 días. El valor del sexto decimal cambios a lo largo de un siglo).

Más adelante en su vida, Khayyám se mudó al centro cultural de Merv (ahora Mary en Turkmenistán) y regresó a su intereses en álgebra. Escribió su famoso tratado sobre el tema mientras esté allí. Khayyám señaló que el gran griego los eruditos de la antigüedad no hicieron ningún estudio serio de la teoría de ecuaciones cúbicas y decidió tomar sobre sí mismo para desarrollar adecuadamente este trabajo. Khayyám creó ingeniosos métodos geométricos para encontrar ecuaciones cúbicas, pero

Machine Translated by Google

nunca, como esperaba, encontró técnicas algebraicas viables. No obstante, Khayyám logró clasificar todas las ecuaciones cúbicas y fue el primero en reconocer que tales ecuaciones podrían tener dos soluciones diferentes. (No está claro si Khayyám entendió o no que las cúbicas podrían, de hecho, poseer tres soluciones distintas).

Gran parte del trabajo de Khayyám sobre TEORÍA DE NÚMEROS y métodos de cálculo numérico se ha perdido. Su desarrollo del TRIÁNGULO DE PASCAL , como se le llama hoy, y su uso en el TEOREMA DEL BINOMIO, por ejemplo, sólo se mencionan de pasada en su famosa obra algebraica.
Khayyám también escribió sobre los principios fundamentales de la geometría. Trató de establecer que el famoso POSTULADO PARALELO es una consecuencia de otros postulados (fallando, por supuesto), pero descubrió en el camino una serie de resultados significativos sobre figuras no euclidianas. Es mejor recordado por sus contribuciones al álgebra.

Khayyám murió en la ciudad de Nishapur, Persia (ahora Irán), ca. 4 de diciembre de 1122.

operación Cualquier procedimiento mecánico sobre los elementos de un conjunto que produce un resultado único para esos elementos se denomina operación sobre ese conjunto. Por ejemplo, la suma es una operación sobre el conjunto de números enteros: para cualquier colección de números enteros existe un valor único llamado su suma. El acto de encontrar la unión de dos conjuntos es una operación sobre el conjunto de todos los conjuntos.

UNA OPERACIÓN UNARIA es una regla que asocia un resultado con cada elemento de un conjunto S. El acto de elevar un número al cuadrado, por ejemplo, es una operación unaria en el conjunto de números reales. UNA OPERACIÓN BINARIA proporciona un resultado por cada dos elementos de un conjunto S. La suma de dos números enteros es una operación binaria en el conjunto de todos los números enteros.

En ARITMÉTICA, la suma, la resta, la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas se denominan operaciones elementales. Por otro lado, la regla que asocia a cada número natural la suma de sus dígitos, por ejemplo, no es elemental.

Un símbolo usado para denotar una operación es a veces y log10 llamado operador. Por ejemplo, +, –, ×, ÷, $\sqrt{}$, $\overline{}$ son operadores.

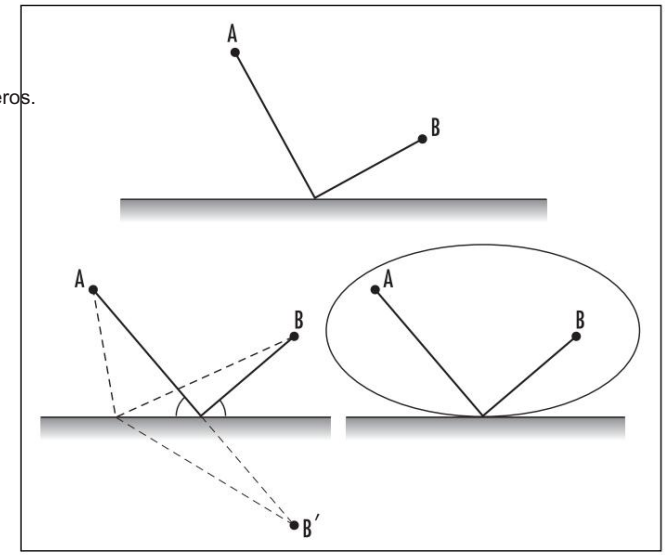
investigación de operaciones (investigación operativa, OR) El estudio del papel de las matemáticas y las ESTADÍSTICAS en la resolución de problemas que surgen en los negocios, el comercio y la producción de bienes y servicios se llama investigación de operaciones. A menudo surgirá un problema de OPTIMIZACIÓN en cualquier intento de minimizar los costos o de maximizar las ganancias, y se pueden requerir técnicas de PROGRAMACIÓN LINEAL . El problema de programar tareas interrelacionadas se puede analizar a través de la TEORÍA DE GRAFOS, y la búsqueda de una RUTA CRÍTICA en un diagrama esquemático puede conducir a mejores prácticas comerciales. El PROBLEMA DEL VIAJERO DEL VENDEDOR también ilustra el papel de la teoría de grafos en la determinación de la entrega eficiente de mercancías. Los problemas relacionados con la calidad y la confiabilidad de la producción dependen en gran medida de las técnicas de inferencia estadística, y las matemáticas de la TEORÍA DE JUEGOS han ayudado a las empresas a idear estrategias de mercado y prácticas comerciales mutuamente beneficiosas.

opuesto Se dice que un lado de un TRIÁNGULO es opuesto a un ángulo dado en el triángulo si ese lado no es uno de los brazos que forman el ángulo. Por ejemplo, el lado opuesto al ángulo mayor en un triángulo es el lado mayor del triángulo. (Esto se sigue de la LEY DE LOS COSENOS.)

Dos líneas que se cruzan en un punto (a menudo llamado vértice) forman cuatro ángulos. Cualquier par de ángulos que comparten este vértice, pero que no tienen un brazo en común, se llama un par de ángulos opuestos o verticales. Tienen la misma medida.

Si una figura geométrica tiene un centro de simetría, se dice que dos lados o dos ángulos son opuestos si están unidos por una línea que pasa por este centro.

optimización El proceso de encontrar la mejor solución posible a un problema se llama optimización. En



Resolviendo el problema del “camino más corto”

Machine Translated by Google

matemáticas, esto generalmente requiere encontrar el valor máximo o mínimo de una función, tal vez sujeto a algunas restricciones. Las técnicas de CÁLCULO son inmensamente exitosas para lograr tales objetivos. (Ver MÁXIMO/MÍNIMO.)

Algunos problemas de optimización pueden resolverse geométricamente. Considere, por ejemplo, el desafío de encontrar el camino más corto desde un punto A hasta un punto B que "viste" una pared recta. Al notar que es suficiente considerar solo caminos compuestos por dos segmentos de línea recta, preguntamos cuál de esos dos segmentos produce el viaje más corto.

Observe que cada camino de A a B a través de la pared se corresponde con un camino de la misma longitud desde A hasta el mismo punto de contacto en la pared, y luego a la imagen especular B′ de B en el otro lado de la pared. Como el camino recto que conecta A con B′ (formando ángulos iguales a ambos lados de la pared) es la ruta más corta de A a B′, se deduce que la ruta más corta de A a B a través de la pared es la que rebota en la pared. pared en ángulos iguales.
Alternativamente, uno puede resolver este problema dibujando ELIPSES alrededor de los puntos A y B con A y B como focos. La primera elipse que toca la pared da la ubicación en la pared que produce el camino más corto de A a B a través de la pared.

Que estas dos soluciones resuelvan el mismo problema establece la bien conocida propiedad de reflexión de una elipse: como cualquier camino desde un foco A de una elipse a un punto en la curva de la elipse y de regreso al segundo foco B es una solución a la problema de recorrido de caminos (siendo la pared recta la línea tangente a la elipse), se deduce que este camino rebota en el lado de la elipse en ángulos iguales. En consecuencia, un haz de luz emitido desde un foco A de una elipse sigue un camino que se refleja en el lado de la elipse para llegar al segundo foco B.

La LEY de refracción de SNELL también se puede considerar como la solución a un problema de optimización.

Véase también TRIÁNGULO ISOSCELES; PROGRAMACIÓN LINEAL; LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES; TRIÁNGULO DE PEDALES; STEINER PUNTO.

órbita Ver SISTEMA DINÁMICO.

conjunto ordenado Se dice que un conjunto S está parcialmente ordenado si viene provisto de una relación, generalmente denotada ≤, que permite comparar el tamaño o las posiciones relativas de elementos en el conjunto. La relación ≤ debe satisfacer las siguientes tres condiciones:

1. Reflexividad: a ≤ a para todo a S.
2. Antisimetría: si a ≤ byb ≤ a , entonces a = b .
3. Transitividad débil : si a ≤ byb ≤ c, entonces a ≤ c.

Por ejemplo, interpretar ≤ como "menor o igual que" proporciona un orden parcial en el conjunto de todos los números reales.
Por ejemplo, 4.6 ≤ √– 30 y –1 ≤ 0. El conjunto de todos los subconjuntos del conjunto {A,B,C,D,E}, por ejemplo, está parcialmente ordenado si se interpreta que ≤ significa "es un subconjunto de." En este caso, por ejemplo, {B,D} ≤ {A,B,D,} y Ø ≤ {C}, pero {A,B,C} ≤/ {B,C,D,E}. El conjunto de números naturales también se puede ordenar parcialmente interpretando ≤ como "es un factor de". Por ejemplo, en este escenario tenemos 3 ≤ 6 y 4 ≤ 12, pero 5 ≤/ 12. Observe en estos dos últimos ejemplos que no se pueden comparar todos los elementos del conjunto.

Un conjunto se dice totalmente ordenado si se cumple una cuarta condición:

4. Tricotomía: Para todo a,b S se cumple a ≤ b o b ≤ a .
(Si ambos se cumplen, entonces a = b.)

El conjunto de todos los números reales, o el conjunto de todos los números naturales, por ejemplo, están ambos totalmente ordenados bajo la relación "menor que o igual a". Los números naturales, sin embargo, no están totalmente ordenados bajo la relación "es factor de". Tampoco lo es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado.

A veces, un conjunto totalmente ordenado se llama cadena o secuencia, ya que todos los elementos se pueden ordenar en una línea, con cada elemento en la línea en relación ≤ con cada elemento a su derecha.

A menudo es conveniente escribir b ≥ a para significar a ≤ b y a < b para significar a ≤ b y a ≠ b. El enunciado b > a se interpreta de manera similar. Por ejemplo, en el ejemplo de subconjuntos, tenemos {A} < {A,B} y {C,D} ≥ {D,C}. (De hecho, {C,D} = {D,C}.)

Dados dos elementos a y b de un conjunto S con relación de orden parcial ≤, decimos que un elemento u de S es un límite superior para a y b si a ≤ u y b ≤ u. Llamamos u un límite superior mínimo si u es más pequeño que cualquier otro límite superior para a y b; es decir, si a ≤ v y b ≤ v para algún otro elemento v, entonces u ≤ v. Por ejemplo, en el ejemplo de los subconjuntos, el límite superior mínimo de {A,B} y {B,C} existe y es igual a su unión {A,B,C}. De manera similar, un elemento l es un límite inferior para a y b si l ≤ a y l ≤ b,

Machine Translated by Google

y es un límite inferior máximo si l es mayor que cualquier otro límite inferior para a y b. En nuestro ejemplo, el mayor límite inferior de {A,B} y {B,C} es su intersección {B}. Un conjunto parcialmente ordenado se llama red si cada par de elementos tiene un límite superior mínimo y un límite inferior máximo. La existencia de uniones e intersecciones muestra que el conjunto de todos los subconjuntos de cualquier conjunto dado es una red. El conjunto de números naturales bajo la relación "es un factor de" también es una red: el límite superior mínimo de dos números naturales cualesquiera es su MÚLTIPLO COMÚN más bajo , y el límite inferior mayor es su MAYOR FACTOR COMÚN. Muchos resultados de la TEORÍA DE LOS NÚMEROS pueden interpretarse como declaraciones sobre esta relación de orden de los números naturales.

Cualquier conjunto totalmente ordenado es una red. Por ejemplo, el límite superior mínimo de dos números reales a y b es simplemente el mayor de los dos, y su límite inferior máximo es el número menor.

Véase también ENLACE; PROPIEDADES DE ORDEN.

orden de una matriz (dimensión de una matriz) Una MATRIZ m × n , es decir, una matriz con m filas y n columnas, se dice que es de orden m × n (léase "m por n"). Una matriz n × n a veces se denomina matriz cuadrada de orden n.

En la TEORÍA DE GRUPOS se dice que un elemento g de un GRUPO es de orden n si n es el primer entero positivo tal g^n que = e, suponiendo que existe tal entero. (Aquí e es el ELEMENTO DE IDENTIDAD del grupo.) Si, en algún trabajo matemático, uno piensa en las matrices como elementos de un grupo, por lo general se reserva el orden de las palabras para un significado teórico de grupo y se usa la palabra dimensión para describir el tamaño de la matriz. . Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{matrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{matrix}$$

es una matriz cuadrada de dimensión 3 y orden 2, ya que A2 = I.

Ver también MATRIZ DE IDENTIDAD.

orden de magnitud Ver NOTACIÓN CIENTÍFICA.

orden de operación (precedencia operativa) Al evaluar cálculos aritméticos que involucran más de un tipo de operación, los matemáticos han asignado un orden de precedencia en cuanto a qué operaciones se ejecutan primero.

Se acuerda que cualquier cálculo que involucre ADICIÓN únicamente se computa en el orden en que se lee de izquierda a derecha. Por ejemplo, 8 + 5 + 2 se calcula como 13 + 2, que es 15. (Aunque la propiedad ASOCIATIVA de la suma muestra que el orden de cálculo en este caso no importa). Como la RESTA puede verse como la suma de números negativos cantidades, cualquier cálculo que involucre tanto la suma como la resta se calcula de la misma manera, como se lee de izquierda a derecha.
Por ejemplo, 2 – 5 + 7 se calcula como (–3) + 7, que es 4. (Nuevamente, la propiedad asociativa muestra que seguir esta convención no es vital).

La MULTIPLICACIÓN puede verse como una "suma repetida" y, en cierto sentido, es una operación más potente que la suma y la resta. Se le da prioridad sobre estas operaciones. DIVISIÓN, que puede verse como una multiplicación por cantidades RECÍPROCAS , recibe el mismo estatus. Por lo tanto, dado cualquier cálculo que involucre las cuatro operaciones, se espera que uno calcule todas las multiplicaciones y divisiones que aparecen primero (léase de izquierda a derecha) y todas las sumas y restas en segundo lugar. Por ejemplo, uno calcula:

$$2 + 4 \times 3 \div 6 – 3 \times 3 + 5$$

como 2 + 12 ÷ 6 – 9 + 5, que es igual a 2 + 2 – 9 + 5, que es cero. (Leer estrictamente de izquierda a derecha produce la respuesta incorrecta de 5).

Como los EXPONENTES pueden verse como un acto de realizar multiplicaciones repetidas, todas las potencias que aparecen en un cálculo tienen mayor prioridad sobre las multiplicaciones y divisiones, por lo que deben calcularse primero. Por ejemplo, 2 + 62 ÷ 9 se calcula como 2 + 36 ÷ 9 = 2 + 4 = 6.

A menudo se introducen paréntesis o BRACKETS para cambiar el orden de las operaciones en un cálculo. Los matemáticos siguen la convención de que si hay paréntesis, primero se deben calcular las cantidades dentro de los paréntesis (usando las reglas anteriores). Si hay varios conjuntos de paréntesis presentes, esto requiere evaluar primero los paréntesis más internos. Por ejemplo, calculamos:

$$2 \times (3 + (32 + 6) \times 2) + 1$$

como

Machine Translated by Google

$$2 \times (3 + (32 + 6) \times 2) + 1 = 2 \times (3 + (9 + 6) \times 2) + 1 = 2 \times (3 + 15 \times 2) + 1 = 2 \times (3 + 30) + 1 = 2 \times 33 + 1 = 66 + 1 = 67$$

A menudo, a los niños en edad escolar se les enseña un recurso mnemotécnico como "Por favor, disculpe a mi querida tía Sally" para recordar el orden de las operaciones: paréntesis, exponentes, multiplicación, división, suma, resta.

Ver también SOPORTES DE EXPANSIÓN.

propiedades de orden Los NÚMEROS REALES satisfacen una serie de propiedades básicas con respecto a la relación de orden <, es decir, estrictamente menor que. Tenemos:

1. Ley de la tricotomía: para dos números reales cualesquiera a y b, se cumple exactamente uno de los siguientes: a < b, b < a, o a = b
2. Ley Transitiva: Si a < b y b < c, entonces a < c.
3. Ley de la suma: si a < b, entonces a + c < b + c de verdad número c.
4. Ley de la multiplicación: si a < b y c > 0, entonces ac < bc.
5. Ley de Completitud: Cualquier conjunto de números reales que está acotado arriba tiene un LÍMITE superior mínimo .

Las primeras dos propiedades son características estándar de un CONJUNTO ORDENADO, y las siguientes dos propiedades explican hasta qué punto la suma y la multiplicación respetan la relación de orden. El enunciado final es una propiedad clave del sistema de números reales. En sus intentos de hacer la teoría del CÁLCULO matemáticamente rigurosa y precisa, los matemáticos se dieron cuenta de que uno tenía que estar seguro de que no faltaba ningún número en la recta numérica real. (El TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO , por ejemplo, se basa en esto). La quinta ley anterior está diseñada para asegurar esto. Con su construcción de un CORTE DE DEKIND, el matemático alemán JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916) pudo demostrar que el sistema de números reales sí satisface esta quinta propiedad. (El conjunto de números racionales, por otro lado, satisface las primeras cuatro propiedades pero no la quinta, por lo que no es completo. Aunque, por ejemplo, todo número racional x que satisface $x \le 2$ es menor que 3 , hay ningún número racional más pequeño que proporcione un límite para todos los racionales de este tipo).[2]

De las cinco propiedades básicas enumeradas anteriormente, siguen otras propiedades familiares de los números reales. Para Por ejemplo, se puede demostrar que si a < b, entonces –a > –b. (Utilice la propiedad 3 agregando –a y luego –b a ambos lados). De manera más general, tenemos que si a < b y c < 0, entonces ac > bc. De esto y de la propiedad 4, se sigue que el cuadrado de cualquier número distinto de cero es positivo: $a > 0$ para todo a. Esta observación final también muestra que no existe una relación de orden análoga para los NÚMEROS COMPLEJOS:

> Si los números complejos estuvieran ordenados, entonces tendríamos $i > 0$, dando como resultado el enunciado absurdo $-1 > 0$.

A menudo es conveniente escribir $a \le b$ para significar "menor que o posiblemente igual a". Por ejemplo, $3 \le 5$ y $12 \le 12$. A menudo, las propiedades de orden de los números reales se expresan en términos de esta versión de la relación.

Véase también AXIOMA DE ELECCIÓN; CONJUNTO BIEN ORDENADO.

números ordinales En el uso común, los adjetivos que denotan la posición de objetos individuales en una secuencia, como "primero", "segundo" o "107", se denominan números ordinales. A fines del siglo XIX, el matemático alemán GEORG CANTOR (1845–1918) observó que los números naturales 0, 1, 2,… satisfacen la siguiente propiedad de orden simple:

> Si uno escribe cualquier número finito de números naturales, entonces siempre hay un único número natural más antiguo que se omitió de la lista.

Por ejemplo, en la lista {0,1,4,7} el número 2 es el primer número natural que falta en esta lista. Usemos la notación a,b,c,…| para el primer número natural que falta de la colección a,b,c, … Por ejemplo, tenemos:

$$0,1,4,7 \mid = 2$$
$$0,1,2,3,4 \mid = 5$$
$$0 \mid = 1$$

Cantor consideró la posibilidad de permitir que las listas de números naturales fueran infinitas. Definió una cantidad ω (omega) como:

$$\omega = 0,1,2,3,\ldots\mid$$

es decir, ω es el primer número mayor que cualquier número natural finito. Se sigue entonces que $0,1,2,3,\ldots,\omega\mid = \omega + 1$, el primer número después de ω, y $0,1,2,3,\ldots,\omega, \omega + 1\mid = \omega + 2$, y así sucesivamente. Uno puede continuar y establecer que

Machine Translated by Google

$$0,1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots \mid = \omega+\omega = \omega\times 2$$

y

$$0,1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots,\omega+\omega,\omega+\omega+1,\ldots \mid = \omega+\omega+\omega = \omega\times 3$$

y, al continuar este proceso:

$$0,1,2,3,\ldots,\quad \omega,\omega+1,\ldots$$

$$\omega+\omega,\omega+\omega+1,\ldots$$

$$\omega\times\omega,\omega\times\omega+1,\ldots$$

$$\mid \quad \omega\times\omega\times\omega = \omega+\omega+\omega+\omega$$

$$= \omega\times\omega$$

$$= \omega^2$$

De esta manera, Cantor logró desarrollar un nuevo y extraordinario tipo de aritmética que extiende el conjunto de números naturales a un sistema que incluye números transfinitos. Dado que estas cantidades se derivaron de la propiedad de orden de los números naturales, llamó a estos nuevos números números ordinales. Cantor desarrolló reglas claras y precisas para hacer aritmética con estos números, incluyendo sumar, multiplicar y elevar números ordinales a potencias entre sí. Cantor señaló que el número ordinal es el primer número ordinal que no puede obtenerse de números ordinales anteriores mediante un número finito de sumas, multiplicaciones y exponenciaciones. Llamó a este número ε_0 .

Siguiendo el enfoque adoptado en el estudio de la CARDINALIDAD, Cantor también demostró que los números ordinales pueden construirse alternativamente de la siguiente manera. Primero, considere que dos conjuntos, cada uno de cuyos elementos están ordenados, son del mismo número ordinal si existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de los conjuntos que preserva el orden de esos elementos. (Por ejemplo, el conjunto de números enteros negativos y el conjunto de números enteros positivos tienen el mismo número ordinal a través de la correspondencia $n \leftrightarrow -n$). Entonces, ω se define como el número ordinal del conjunto de números naturales.

Oresme, Nicole (ca. 1323–1382) Francés Geometría de coordenadas Nacido ca. 1323 en Alemania, Francia (la fecha de nacimiento exacta no se conoce) la erudita medieval Nicole Oresme es mejor recordada en matemáticas por sus estudios de movimiento, y como el primer erudito en describir una relación entre dos variables como un GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN.

Oresme estudió la teoría del movimiento de Aristóteles , la cinemática, en la Universidad de París bajo la dirección del filósofo y lógico Jean Buridan. Recibió una licenciatura en artes a principios de la década de 1340 y luego obtuvo una maestría en teología en la misma institución en 1355. Aunque Oresme siguió una carrera dedicada al trabajo en una orden católica (luego fue nombrado obispo de Lisieux) , Oresme siguió manteniendo un interés activo en la obra de Aristóteles a lo largo de su vida y publicó obras importantes que influyeron en el pensamiento académico sobre este tema. Oresme encontró dificultades filosóficas con las definiciones de tiempo y espacio propuestas por Aristóteles, que en sí mismas dependían de la noción de movimiento, y propuso definiciones alternativas independientes de este concepto.

Quizás el trabajo más importante de Oresme es De con figurationibus qualitatum et motuum (La geometría de las cualidades y el movimiento), en el que describe, por primera vez, un procedimiento general para representar gráficamente las relaciones entre variables. Además, se dio cuenta de que el área bajo la gráfica de una cantidad que varía uniformemente representa el cambio total de la cantidad. En consecuencia, Oresme había inventado un tipo de geometría de coordenadas y dado los primeros pasos hacia el trabajo en CÁLCULO integral. (En este mismo trabajo, Oresme también demostró que la distancia recorrida en un tiempo fijo por un objeto que se mueve con aceleración constante es la misma que para un objeto que se mueve con velocidad uniforme igual a la velocidad del primer objeto en el punto medio del tiempo. Este es un logro notable dado que las herramientas y técnicas de cálculo no estaban disponibles para él en ese momento.)

Oresme también estudió SERIES infinitas , a menudo usando ingeniosos trucos gráficos para establecer resultados. La prueba estándar de la divergencia de la SERIE ARMÓNICA (agrupando los términos de la serie y comparándolos con sumas de un medio) se debe a él.

Sus estudios sobre los movimientos de los planetas también lo llevaron a estudiar proporciones y NÚMEROS RACIONALES. Oresme fue el primer erudito en la historia de las matemáticas en considerar y trabajar con exponentes fraccionarios. Como los eruditos de la antigüedad, Oresme buscó la armonía en el universo. Propuso, por ejemplo, que la razón de los períodos de dos cuerpos celestes cualesquiera siempre tendrá un valor racional. (Este no es el caso.)

Oresme murió en Lisieux, Francia, en 1382. El exacto se desconoce la fecha de la muerte.

Machine Translated by Google

orientación En matemáticas, el término orientación es se usa para referirse a un sentido de dirección o rotación. Para ejemplo, se dice que una línea que está etiquetada con una dirección orientarse, y un lazo cerrado dibujado en el plano puede asignarse una orientación en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario a las agujas del reloj. En el espacio de dos y tres dimensiones, se dice que los ejes de coordenadas son positivos o negativos. orientados (y se denominan DERECHOS/IZQUIERDOS) SISTEMAS), y una superficie, como una ESFERA por ejemplo, se dice que es orientable, ya que en cada lugar de la superficie hay, en términos generales, una noción bien definida de arriba." (Por ejemplo, como habitantes de la superficie de la Tierra definimos "arriba" a la dirección que apunta lejos del centro de la Tierra.) No todas las superficies son orientable La BANDA DE MÖBIUS, por ejemplo, es una superficie que no se puede orientar.

ortogonal (perpendicular) Este término se usa en cualquier ajuste para describir dos construcciones geométricas que cumplen a ángulos correctos. Por ejemplo, dos curvas, o recta rectas, son ortogonales si se cortan en ángulo recto, es decir, el ángulo entre las dos TANGENTES a la curvas en el punto de intersección es de 90°. Dos VECTORES son ortogonales si el ángulo entre ellos es de 90° (y en consecuencia, su PRODUCTO DOT es cero). dos superficies También se puede decir que es ortogonal. Por ejemplo, un avión que pasa por el centro de una esfera corta al superficie de la esfera ortogonalmente: el plano tangente a la esfera en cualquier punto de intersección es perpendicular al plano dado.

El término ortogonal también se usa en algunos entornos generalizados. Por ejemplo, dos funciones f y g son se dice que es ortogonal en el intervalo [a,b] si la integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$ es cero. (El producto escalar a · b de dos vectores a = < a1 , a2 ,…, an > y b = < b1 , b2 ,…, bn > es la suma de los componentes del vector multiplicada entre sí: a · b = a1b1 + a2b2 +…+ anbn . La integral anterior es una suma generalizada de los componentes de las funciones multiplicados juntos.) Las funciones sen(x) y cos(x), por ejemplo, son ortogonales en el intervalo [0, 2π]. Esta es una observación importante para el desarrollo de SERIE DE FOURIER.

Se dice que una MATRIZ es ortogonal si sus filas representan vectores que, tomados de dos en dos, tienen punto producto igual a cero.

Ver también NORMAL A UNA CURVA; NORMAL A UN AVIÓN; NORMAL A UNA SUPERFICIE.

La regla de Osborne Los matemáticos han observado que cada identidad trigonométrica produce una identidad para FUNCIONES HIPERBÓLICAS si simplemente:

1. Reemplace cada función trigonométrica con su análogo hiperbólico.

2. Cambiar el signo de cualquier término relacionado con el producto de dos senos hiperbólicos (sinh).

Este principio se llama regla de Osborne. Por ejemplo, de la identidad trigonométrica cos(x + y) = cosx acogedor – senx seny, obtenemos la identidad hiperbólica cosh(x + y) = cosh x coshy + sinhx sinhy. De 1 + 1 tan2x = sec2x, que es $1 + \frac{\text{pecado}^2 x}{\text{porque}^2 x} = \frac{}{\text{porque}^2 x}$, sigue $1 - \frac{\text{pecado}^2 x}{\text{aporrear}^2 x} = \frac{1}{\text{aporrear}^2 x}$, o 1 – tanh2x = sech2x. Este principio funciona porque, por la FÓRMULA DE EULER y la definición de las funciones hiperbólicas, cosx = $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ = cosh(ix) y senx = $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ = –isinh(ix). Por lo tanto, cualquier identidad que se cumpla para senos y cosenos será también vale para cosh y sinh, excepto un factor de i $i^2 = -1$ alterará el signo de un producto de dos hiperbólicos senos

Oughtred, William (1574–1660) Logaritmos británicos Nacido el 5 de marzo de 1574, el matemático inglés William Oughtred es mejor recordado por su trabajo en el desarrollo y diseño del dispositivo de cálculo conocido como REGLA DE CÁLCULO.

A principios del siglo XVII, los científicos estaban emocionado por el reciente descubrimiento de LOGARITHMs como un ayuda para convertir cálculos tediosos de multiplicación y división en operaciones de suma más simples y resta. En 1620 matemático inglés Edmund Gunter trazó una ESCALA LOGARÍTMICA a lo largo de una regla de 2 pies de largo y mostró cómo un par de calibradores podrían usarse para sumar y restar longitudes físicamente, y por lo tanto, proporcionar, por primera vez, una pura mecánica medios para calcular productos y cocientes. Inspirado por el trabajo de Gunter, Oughtred ideó un más simple dispositivo que consiste en dos reglas deslizantes que logran la misma hazaña. En 1632 publicó Circles of Propor tion and the Horizontal Instrument, un breve libro describir reglas de cálculo (y relojes de sol). Diapositiva de Oughred regla se convirtió en el equivalente moderno de la actual

Machine Translated by Google



William Oughtred, un erudito del siglo XVII, inventó la regla de cálculo moderna. (Fotografía cortesía del Museo de Ciencias de Londres/Topham-HIP/The Image Works)

calculadora de bolsillo para científicos y académicos durante los siglos venideros.

Oughtred también fue un erudito consumado en varias ramas de las matemáticas. En 1631 publicó un texto influyente, Clavis mathematicae (La clave de las matemáticas), en el que describía los NÚMEROS HINDÚ-ÁRABES y la REPRESENTACIÓN DECIMAL, y también esbozaba conceptos de álgebra. (En ese momento, los números romanos todavía estaban en uso). Introdujo los símbolos × para multiplicación y :: para proporción. En 1657, Oughtred también escribió uno de los primeros textos completos sobre TRIGONOMETRÍA, introduciendo por primera vez una notación concisa para el tema. También estudió GEOMETRÍA ESFÉRICA y astronomía.

Sorprendentemente, Oughtred recibió muy poca educación formal en el tema de las matemáticas. Recibió una maestría del King's College, Cambridge, en 1600, y fue ordenado ministro episcopal en 1603.
En 1604 se convirtió en vicario de Shalford y, más tarde, en rector de Albury, Surrey.

Oughtred ofreció instrucción matemática a varios estudiantes privados que venían a su casa y vivirían allí de forma gratuita. El famoso matemático JOHN WALLIS (1616-1703), por ejemplo, fue uno de sus alumnos. Oughtred murió en Albury, Inglaterra, el 30 de junio de 1660.

valor atípico Una observación que se considera inusual y posiblemente errónea porque está muy separada del grupo principal de puntos de la muestra se denomina valor atípico. Por ejemplo, en el conjunto {4, 8, 3, 6, 5, 6, 903}, la observación 903 es un valor atípico. Los valores atípicos pueden ser observaciones correctas que reflejan alguna anormalidad en el sistema que se está estudiando, o pueden ser el resultado de un error en la medición o el registro. Por ejemplo, 903 podría ser un error al escribir 9, 3.

Véase también DATOS; ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

óvalo Derivado de la palabra latina ovus para “huevo”, el término óvalo es un nombre genérico para cualquier figura curva que se asemeja a un círculo alargado. No existe una definición matemática precisa para este término.

Una ELIPSE se considera un óvalo. Se define como el conjunto de puntos P cuya suma de distancias a dos puntos fijos A y B en el plano es constante: |AP| + |PA| = k. El conjunto de todos los puntos P que tienen producto constante de dos puntos fijos A y B, |AP| × |PA| = k, también describe curvas que pueden parecer óvalos. Estas curvas fueron estudiadas por primera vez por el astrónomo italiano del siglo XVII Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) y hoy se llaman los óvalos de Cassini.

Machine Translated by Google

PAG

pares disjuntos (independientes, mutuamente excluyentes)

Se dice que una colección de conjuntos A, B, C, ... es disjunta por pares si la intersección de dos conjuntos cualesquiera de la colección está vacía. Por ejemplo, los conjuntos {1,2}, {3,4}, {5,6},... son disjuntos por pares, al igual que los tres conjuntos:

A = el conjunto de todos los números naturales pares

B = el conjunto de todos los números naturales 1 mayor que una potencia de 100

C = el conjunto de todos los números primos 1 menos que un múltiplo de 4

Se dice que una colección de subconjuntos separados por pares A, B, C, ... de un conjunto S más grande es exhaustiva si cada elemento de S se enumera como un elemento de (solo un) subconjunto especificado. En este caso también decimos que los conjuntos A, B, C, ... dividen el conjunto S. El primer ejemplo presentado arriba, por ejemplo, es un subconjunto exhaustivo de los números naturales y, por lo tanto, divide los números enteros positivos.

El segundo ejemplo, sin embargo, no lo hace. (El número 13, por ejemplo, no es miembro de ninguno de los subconjuntos especificados).

Dada una partición A, B, C, ... de un conjunto S, se dice que dos elementos a y b de S son equivalentes, con respecto a esa partición, denotada a ~ b, si pertenecen al mismo subconjunto especificado por el dividir. Por ejemplo, los días del año se dividen en siete conjuntos separados dados por los nombres de los días de la semana. Por ejemplo, el 1 de agosto de 1966 y el 30 de junio de 2003 son equivalentes en este contexto, ya que ambos pertenecen al subconjunto denominado “lunes”.

La noción de equivalencia satisface tres propiedades clave:

i. Reflexividad: cualquier elemento a es equivalente a sí mismo: a ~ a ii. Simetría: si a es equivalente a b, entonces b es equivalente a a: a ~ b b ~ a iii. Transitividad: si a es equivalente a b y b es equivalente a c, entonces a es equivalente a c: a ~ b, b ~ c a ~ c

En general, cualquier relación “~” definida sobre elementos de un conjunto S que satisfagan las tres propiedades enumeradas anteriormente se denomina relación de equivalencia sobre S. Por ejemplo, considerar dos palabras del idioma inglés como equivalentes si cada una posee el mismo número de vocales es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las palabras. Resulta que cualquier relación equivalente, sin importar cómo se defina, surge de una partición del conjunto en el que se basa. Por ejemplo, el conjunto de todas las palabras se divide por los conjuntos W0 , W1 , W2 , … donde Wk es el conjunto de todas las palabras con precisamente k vocales.

Véase también FÓRMULA DE LOS DÍAS DE LA SEMANA ; TEORÍA DE CONJUNTOS.

Pappus de Alejandría (ca. 300–350 EC) Geometría griega Nacido en Alejandría, Egipto, Pappus es considerado hoy en día como el último gran geómetra de la antigüedad que trabajó en la forma de pensar y la tradición académica griegas. Escribió comentarios sobre las obras de EUCLID y CLAUDIO PTOLOMEO, pero se le recuerda sobre todo por su tratado Synagoge (Colecciones), del cual los volúmenes III-VII de los ocho originales han sobrevivido intactos en la actualidad.

Machine Translated by Google

Estos textos contienen relatos detallados de gran parte de las matemáticas griegas, algunas de las cuales de otro modo se habrían perdido para nosotros.

Se sabe extraordinariamente poco de la vida de Pappus. Muchos historiadores sospechan que vivió en Alejandría toda su vida y que pudo haber dirigido allí su propia escuela.

La famosa obra de Pappus, Synagoge, fue escrita como una guía general de toda la geometría griega, más específicamente, una guía complementaria para leer junto con las obras originales griegas. Como tal, los libros I y II cubren aritmética básica y métodos para expresar números grandes.

El Libro III examina la MEDIA ARITMÉTICA, la MEDIA GEOMÉTRICA y la MEDIA ARMÓNICA de las proporciones, las propiedades de la geometría básica y la representación de estas medias en la geometría, así como algunas consideraciones sobre los SÓLIDOS PLATONICOS. El libro IV examina curvas especiales, incluida la ESPIRAL DE ARQUÍMEDES, y el problema de la TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.

En el libro V, Pappus presenta un análisis matemático de la estructura de los panales, mostrando que la estructura hexagonal utiliza la menor cantidad de perímetro para dividir el plano. También examina POLIEDROS.

El Libro VI explora el tema de la astronomía, principalmente como una revisión de las obras de Teodosio, Autólico, Aris tarco y Euclides sobre el tema como un medio para corregir errores de interpretación comunes.

En el libro VII aparece el siguiente problema, hoy conocido como problema de Pappus:

> Dadas cuatro líneas en el plano, encuentre el lugar geométrico de los puntos P tales que la proporción del producto de las distancias de P desde dos líneas cualesquiera al producto de las distancias a las dos líneas restantes sea constante.

Pappus muestra que la curva resultante es siempre una SECCIÓN CÓNICA. También generaliza el problema para considerar el caso de más de cuatro líneas en el plano.

Gran parte del trabajo geométrico del matemático francés RENÉ DESCARTES (1596-1650) se inspiró en este problema.

El Libro VIII de la Sinagoga trata de la mecánica. Comienza con una definición escrita del CENTRO DE GRAVEDAD de una figura (Pappus es el único erudito griego que alguna vez proporcionó una definición de este concepto) y analiza una serie de resultados geométricos que emplean la noción. También describe los principios de las palancas, poleas, cuñas, ejes y del tornillo.

Pappus escribió Synagoge en parte como un intento de revivir el ferviente interés en las matemáticas griegas clásicas y el estilo de investigación matemática que realizaban.

Desafortunadamente, esto no ocurrió. El trabajo de Pappus, sin embargo, influyó mucho en el curso del pensamiento en el desarrollo de la geometría proyectiva un milenio después. Muchos de sus resultados geométricos pueden expresarse y entenderse mejor dentro de este entorno.

Los teoremas de Pappus El matemático griego PAPPUS DE ALEJANDRÍA (ca. 320 EC) estableció dos resultados fundamentales sobre el área superficial y el volumen de un

SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

> Considere el sólido de revolución formado al girar una curva en el plano alrededor de una línea que no interseca la curva. Entonces, el área de la superficie de ese sólido es igual al producto de la longitud de la curva y la distancia que recorrió el baricentro (CENTRO DE GRAVEDAD) de la curva alrededor de la línea de revolución. El volumen del sólido es igual al producto del área delimitada por la curva (o el área entre la curva y la línea de revolución) y la distancia recorrida por el centroide de la curva.

Estos resultados se pueden probar aproximando la curva como una serie de segmentos de línea recta, estableciendo el reclamo de esta trayectoria poligonal y luego verificando que el resultado sigue siendo válido a medida que se trabaja con aproximaciones cada vez más finas de la curva. Este es un proceso que implica un LÍMITE. Es notable que Pappus pudiera establecer estos resultados antes del advenimiento de CAL CULUS unos 1.350 años después.

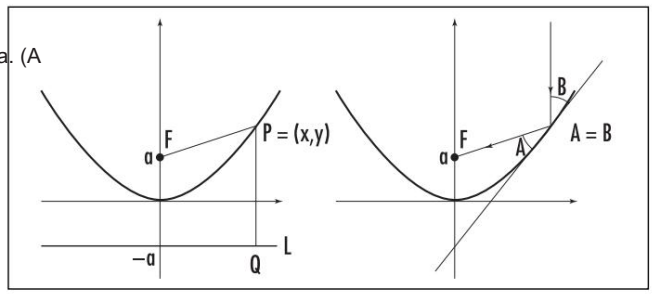
En el estudio de la GEOMETRÍA PROYECTIVA, también se atribuye a Pappus el siguiente resultado:

> Considere un hexágono ABCDEF en el plano. Este hexágono puede tener cualquier forma e incluso puede intersecarse a sí mismo. Suponga que los puntos A, C y E se encuentran en una línea recta y los puntos B, D y F se encuentran en otra. Para cada uno de los tres pares de lados opuestos del hexágono, encuentre la ubicación en la que estos lados (si están extendidos) se cruzan. Entonces estos tres puntos de intersección se encuentran en una línea recta.

BLAISE PASCAL (1623-1662) luego amplió este resultado para probar que si un hexágono tiene vértices sobre

Machine Translated by Google

cualquier SECCIÓN CÓNICA, entonces los tres puntos de intersección de pares de lados opuestos se encuentran en una línea recta. (A par de dos líneas rectas se puede considerar como una HIPÉRBOLA degenerada.)



Parábola

parábola Como una de las tres SECCIONES CÓNICAS, una la parábola es la curva plana que consta de todos los puntos P que están equidistantes de un punto fijo F dado, y una línea fija dada L. El punto fijo se llama foco de la parábola, y la línea fija su directriz. A la parábola también surge como la curva producida por la intersección de un plano a través de un CONO circular recto sostenido paralela al lado inclinado del cono.

La ecuación de una parábola se puede encontrar introduciendo un sistema de coordenadas en el que el foco es el punto F = (0,a), para algún número positivo a, y el directriz es la línea horizontal y = –a. Si P = (x,y) es un punto arbitrario en la parábola, entonces la DISTANCIA PARA $\sqrt{x}$ MULA describe la condición definitoria como + $(y - a)^2$ = y + a. Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene la ecuación:

$$y = x\frac{1}{4a}^2$$

Por el contrario, invertir estos pasos muestra que cualquier ecuación de la forma $y = A(x - p)^2 + q$ es la ecuación de una parábola con foco $F = (p, q + \frac{1}{4A})$ y directriz $q - \frac{1}{4A}$. Así, la gráfica de cualquier ecuación cuadrática y = es una parábola.

La propiedad de reflexión de una parábola establece que cualquier rayo de luz entrante perpendicular a la directriz se reflejará directamente en el foco F. En el diagrama arriba a la derecha, esto significa que los ángulos a la tangente línea a la curva A y B son iguales. (Esto se puede demostrar con CÁLCULO observando que, en el punto P = (x,y), el pendiente de la recta tangente a la parábola $y = \frac{1}{4a}x^2$ es $m1 = \frac{}{x - 2a}$, Considerando que la pendiente de la línea que conecta el del punto Q al F, es $m2 = \frac{2a}{x}$. Como m1m2 = –1, estas líneas – son perpendiculares. Esto demuestra que la recta tangente biseca el triángulo isósceles FPQ, produciendo que los ángulos A y B son iguales). Las antenas parabólicas y los telescopios reflectores utilizan antenas con secciones transversales parabólicas parapor supuesto, una parábola. El enfoque común de estos enfocar rayos de luz paralelos en un punto fijo y, a la inversa, reflectores de luz de búsqueda y faros de automóviles reflectores, por ejemplo, son parabólicos: todos los rayos de un bombilla colocada en el foco se reflejan paralelas a la eje de la parábola. (Véase PARABOLOIDE.)

Las parábolas aparecen en el plegado de una fina lámina de papel. Dibuje una línea recta oscura en la hoja; esto ser la directriz de la parábola, y un punto no en el línea, el foco. Dobla el punto sobre la línea y pliega el papel. Abre el pliegue y haz esto de nuevo, esta vez doblando el punto a un punto diferente en la línea. Como tu hacer esto muchas veces, emerge la forma de una parábola a lo largo del lado de todos los pliegues.

Se dice que una parábola tiene EXCENTRICIDAD e igual a 1. La razón de la distancia de un punto P en la curva desde un punto fijo (el foco) hasta su distancia desde un la línea fija (la directriz) siempre es 1.

Véase también CÍRCULO DE APOLONIO ; ELIPSE; HIPÉRBOLA.

paraboloide El SÓLIDO DE REVOLUCIÓN obtenido por rotar una PARÁBOLA alrededor de su eje se llama paraboloide Los puntos sobre su superficie satisfacen una ecuación de la forma $z = b(x^2 + y^2)$, donde b es una constante, y cada sección transversal horizontal, o cada CONTORNO LÍNEA, del sólido es un círculo. La forma de la figura se asemeja a un cuenco.

Las técnicas de CÁLCULO INTEGRAL muestran que el el volumen de una sección del sólido, hasta una altura h, está dado por $V = \pi a 2h$, donde a es el radio de la sección transversal circular a la altura h. Su superficie es

$$A = \frac{\pi a}{6h^2}\left(\text{un}^2 \quad 4 \quad ^2\right)^{\frac{3}{2}}3 \quad .$$

Cada sección transversal vertical del paraboloide es, por supuesto, una parábola. El enfoque común de estos

Machine Translated by Google

parábolas se llama el foco del paraboloide. La propiedad de reflexión de una parábola muestra que los rayos de luz y los haces de sonido emitidos desde el foco de una parábola se reflejan fuera del paraboloide como un haz paralelo. Los reflectores de los faros de los automóviles, por ejemplo, son parabólicos. Por el contrario, un haz paralelo recibido por un reflector paraboloide converge en su foco. Las antenas parabólicas y los telescopios reflectores utilizan reflectores parabólicos.

Un paraboloide elíptico tiene secciones transversales horizontales que son ELIPSES y viene dada por la ecuación z = ax2 + by2 , donde a y b son constantes. Un paraboloide hiperbólico (también llamado superficie de silla de montar) satisface z = ax2 – by2 . Tiene secciones transversales horizontales que son HIPERBOLAS y, de hecho, se parece a la forma de una silla de montar.

Véase también ELIPSOIDE; HIPERBOLOIDE.

paradoja Una afirmación que parece contradictoria o contraria al sentido común se llama paradoja. Algunas paradojas en matemáticas surgen como consecuencias lógicas de premisas aparentemente plausibles, como la paradoja de Banach-Tarski que surge del estudio del ÁREA, LA PARADOJA DE BERTRAND y LA PARADOJA DE RUSSELL .

(La aparición de estas paradojas particulares hizo que los matemáticos reevaluaran los fundamentos básicos de las matemáticas.) Otras paradojas pueden ser simples afirmaciones autocontradictorias. Por ejemplo, se dice que Sócrates dijo una vez: "Una cosa que sé es que no sé nada", y George Orwell escribió una vez: "La libertad es esclavitud". Ambas afirmaciones tienen un sabor similar a la PARADOJA DEL MENTIROSO .

Otras paradojas famosas incluyen:

La paradoja de Grelling
Algunas palabras en inglés se describen adecuadamente. Por ejemplo, pentasilábico, que significa “que tiene cinco sílabas”, es de hecho pentasilábico. Otras palabras no son autodescriptivas: por ejemplo, monosilábico, comestible y tangible. Defina una nueva palabra heterológica para que signifique “una palabra que no se describe a sí misma”. Ahora pregunte: "¿Es heterológico heterológico?"

La paradoja de
Berry El número un millón, cien mil, ciento veintiuno se puede nombrar como "el primer número que no se puede nombrar en menos de 10 palabras". (Todos los números (los números menores de 1.100.121 pueden nombrarse con nueve palabras o menos). Pero esta última descripción usa solo nueve palabras para indicar este número, por lo que puede nombrarse con menos de 10 palabras, a pesar de su definición.

La paradoja del barbero
Un barbero coloca un cartel en el escaparate de la tienda. Dice: “Este barbero afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos, y solo a estos hombres”. ¿Quién afeita al barbero?

La paradoja del abogado
Esta paradoja se atribuye tradicionalmente al filósofo griego Protágoras (490–421 a. C.)

Un profesor de derecho acepta bajo su tutela a un estudiante sin un céntimo para pagar la matrícula bajo el acuerdo de que el estudiante le paga al tutor sus honorarios si y sólo si gana su primer caso en la corte. Sin embargo, después de obtener el título de abogado, el estudiante emprende una carrera diferente y nunca emprende un primer caso. El tutor luego lo demanda por sus honorarios.

El estudiante hábilmente decide representar su propio caso. De esta manera, razona, nunca tendrá que pagar sus honorarios al tutor. Si gana la causa, se resolverá que no debe pagar, mientras que si la pierde, quedará exento de pagar según su acuerdo previo con el tutor. Sorprendentemente, el tutor también razona que no puede perder. Si el estudiante gana este caso, entonces debe pagar las tasas de acuerdo con su acuerdo anterior, mientras que, si el estudiante pierde, ¡el fallo será que debe pagar!

El concurso inesperado
Un maestro de escuela informa a su clase que habrá un concurso sorpresa algún día de la semana siguiente, y que nadie podrá deducir la noche anterior que el concurso llegará al día siguiente. Luego, los estudiantes razonan de la siguiente manera:

> No puede haber prueba el viernes, porque el jueves por la noche, al no haber tenido prueba los cuatro días anteriores, sabríamos que la prueba vendrá al día siguiente. Por lo tanto, la prueba debe ser un día que no sea el viernes.
>
> El quiz tampoco puede ocurrir el jueves, pues el miércoles por la noche, al no haber tenido quiz los tres días anteriores (y descartando el viernes como posibilidad) sabríamos que el quiz llegará al día siguiente.
>
> Por el mismo razonamiento, la prueba no puede realizarse el miércoles, el martes o incluso el lunes.

Machine Translated by Google

Los estudiantes deducen así lógicamente que no puede haber cuestionario ningún día de la semana siguiente. Fueron legítimamente sorprendidos por un examen sorpresa que llegó el miércoles. (A veces, esta paradoja se expresa en términos de un prisionero que espera su ejecución. En este contexto, se denomina la “paradoja del ahorcamiento inesperado”).

La paradoja de la billetera

Dos hombres deciden jugar el siguiente juego:

> Ambos hombres abren sus billeteras. El que tenga la menor cantidad de dinero gana el contenido de la billetera del otro.

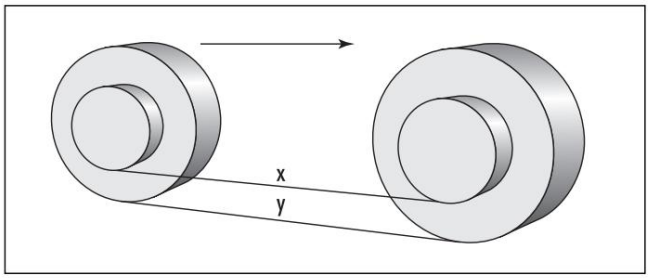
Cada hombre puede argumentar legítimamente que puede ganar más de lo que puede perder y, por lo tanto, que el juego está sesgado a su favor. Sin embargo, un juego tan simple de ganar/perder no puede ser ventajoso simultáneamente para ambos jugadores.

La paradoja de la rueda de

Aristóteles Se pegan dos ruedas de diferentes tamaños para que sus centros estén alineados. Luego, todo el sistema rueda a lo largo de una vía doble como se muestra: en una

revolución, ambas ruedas ruedan la misma distancia y, por lo tanto, en el diagrama, x = y. Pero x es la circunferencia de la rueda pequeña e y la circunferencia de la rueda grande. ¡Por lo tanto, nos vemos obligados a concluir que dos ruedas de diferentes tamaños tienen la misma circunferencia!

Estas paradojas se basan en declaraciones autorreferenciales ingeniosas (la paradoja de Grelling, la paradoja de Berry, la paradoja del barbero e incluso la paradoja del abogado), suposiciones falsas ocultas (los estudiantes asumieron que el maestro estaba diciendo la verdad; no lo saben; ganar y perder el el juego de la billetera no son igualmente probables; y ¿podría ser el barbero una mujer?), y compuesto disfrazado



Las ruedas de Aristóteles

movimientos (la rueda pequeña es llevada hacia adelante por la rueda grande a medida que gira y se desliza a lo largo de la pista superior).

Véase también CONDICIONAL; EL HOTEL INFINITO DE HILBERT ; LA PARADOJA DE JOURDAIN ; LA PARADOJA DE TRISTRAM SHANDY; LAS PARADOJAS DE ZENO .

paralela Se dice que dos rectas en un plano son paralelas si nunca se encuentran sin importar cuánto se extiendan. Si dos líneas etiquetadas como L y M son paralelas, entonces escribimos L M.

La noción de líneas paralelas es un concepto abstracto: no se puede trazar físicamente una línea de longitud infinita, ni se puede verificar la extensión total de dos líneas infinitas para determinar si finalmente se cruzan o no.
(Nosotros, como seres humanos, solo podemos concebir cantidades finitas y fenómenos locales). Para hacer factible el trabajo con líneas paralelas, el geómetra EUCLID (ca.
300 a. C.) introdujo un AXIOMA, llamado POSTULADO PARALELO, para describir el comportamiento local de las líneas paralelas. Afirmó que, para cualquier TRANSVERSAL que cruce un par de rectas paralelas, los ángulos interiores alternos son iguales.
(Así, por ejemplo, el par de ángulos marcados con x en el diagrama de la página 376 son de hecho iguales en medida, al igual que cada par de ángulos rectos con respecto a las líneas marcadas con a y b). A partir de esto, Euclides pudo establecer varias propiedades de líneas paralelas que intuitivamente esperamos que sean verdaderas. Por ejemplo, Euclides demostró:

> Dos líneas paralelas siempre se mantienen separadas por una distancia fija. Es decir, en el diagrama de la página 376, debe darse el caso de que la longitud a sea igual a la longitud b.

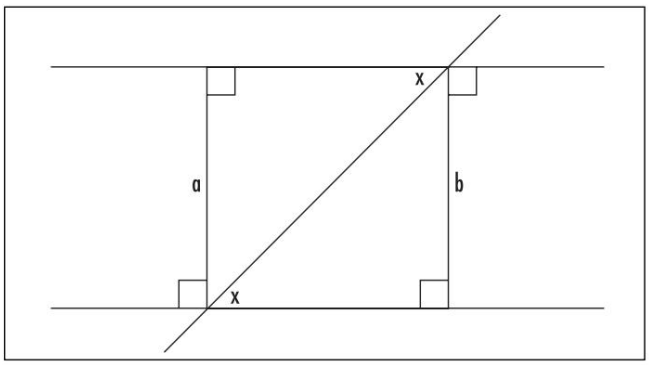
(Observe que los dos triángulos en el diagrama comparten los mismos ángulos y una longitud diagonal común. El principio ASA ahora asegura que son FIGURAS CONGRUENTES. En consecuencia, las distancias a y b deben ser iguales).

Euclides también observó que el recíproco de su postulado de las paralelas es verdadero y no requiere supuestos especiales sobre geometría para su demostración. (Se sigue inmediatamente del TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERIOR.)

> Si dos rectas cortadas por una transversal producen ángulos interiores alternos iguales, entonces las dos rectas deben ser paralelas.

Este resultado permite construir fácilmente líneas paralelas. Para producir una línea a través de un punto dado P paralelo

Machine Translated by Google



Lineas paralelas

a una línea dada L, dibuje una línea arbitraria L′ a través de P que interseque L. Mida el ángulo entre L y L′, y dibuje otra línea L″ a través de P, formando este ángulo con L′ para crear un diagrama con ángulos interiores alternos iguales. Por el resultado anterior, L″ es una línea que pasa por P paralela a L.

El matemático escocés John Playfair (1748–1819) demostró que para cualquier punto P y línea L en el plano, hay una, y sólo una, línea que pasa por P paralela a L. Este resultado se conoce hoy como AXIOMA DE PLAYFAIR . Playfair demostró que se podía tomar este axioma como punto de partida de la geometría y establecer a partir de él el postulado de las paralelas.

Véase también AAA/AAS/ASA/SAS/SSS; HISTORIA DE GEOMA PRUEBE (ensayo); PARALELOGRAMO; FIGURAS SIMILARES.

paralelepípedo (paralelepípedo) Una figura sólida con seis caras, cada una de las cuales es un PARALELOGRAMO, se llama paralelepípedo. Un cubo con las seis caras cuadradas es un ejemplo especial de un paralelepípedo, al igual que una "caja rectangular" con seis caras rectangulares (también llamada cuboide).
En estos dos ejemplos, los bordes se encuentran en las esquinas de los sólidos en ángulos de 90°, pero este no tiene por qué ser el caso de un paralelepípedo general.

El volumen de un paralelepípedo es el área de la BASE de la figura multiplicada por la altura de la figura. Si los tres bordes que se unen en una esquina se consideran como vectores a, byc, entonces el volumen del paralelepípedo también viene dado por el valor absoluto del TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL a · b × c.

Un paralelotopo es un paralelepípedo cuyas tres longitudes laterales están en la proporción 4:2:1.

Véase también PRISMA.

paralelogramo UN CUADRILÁTERO con lados opuestos paralelos, y por lo tanto de igual longitud, se llama paralelogramo. El área de un paralelogramo es "base por altura".
Es decir, si un par de lados paralelos, de longitud b, están separados por h unidades, entonces el área de la figura es bh. (Ver ÁREA.)

Un examen de ángulos alternos a través de líneas paralelas rápidamente muestra que los ángulos opuestos en un paralelogramo son iguales y que los ángulos adyacentes son suplementarios, es decir, suman 180°. El paralelogramo es el único cuadrilátero con esta propiedad.

Los DIAGONALES de un paralelogramo se bisecan entre sí, y nuevamente el paralelogramo es el único cuadrilátero que tiene esta propiedad. Si las dos longitudes de los lados de un paralelogramo son a y b, y las longitudes de sus dos diagonales son p y q, entonces

$$\text{pag}\ 2\ 2\ 2 = 2a + q \quad + 2b\ 2$$

Esto se obtiene aplicando la LEY DE LOS COSENOS a los cuatro triángulos definidos por las diagonales (dos triángulos a cada lado de cada diagonal) y sumando las cuatro ecuaciones. Interpretada como una ecuación de longitudes VECTORIALES , establece la LEY DEL PARALELOGRAMO en la teoría del espacio vectorial.

Un paralelogramo con los cuatro lados de igual longitud se llama rombo (o, a veces, rombo, diamante o rombo). Un romboide es un paralelogramo con lados adyacentes de diferente longitud.

Si los cuatro ángulos de un paralelogramo son iguales, entonces cada ángulo es igual a 90° y la figura es un RECTÁNGULO.
Un paralelogramo que es a la vez equilátero y equiangular es un CUADRADO.

Véase también TRAPEZOIDE/TRAPECIO.

ley del paralelogramo (regla del paralelogramo) El hecho de que la suma de VECTORES sea conmutativa a veces se denomina ley del paralelogramo. Esto es apropiado, ya que la suma de los dos vectores ayb en el plano, a + b, se da como la DIAGONAL del paralelogramo definido por los dos vectores. Tenga en cuenta que la segunda diagonal está dada por la diferencia de vectores a – b. Las propiedades geométricas de un paralelogramo establecen que las longitudes de estos vectores satisfacen la relación:

$$\text{un + segundo 2 + un – segundo 2 = 2a} \quad ^2 + 2b\ 2$$

Esta ecuación también se llama la ley del paralelogramo.

Véase también PROPIEDAD CONMUTATIVA.

Machine Translated by Google

postulado paralelo (quinto postulado de Euclides) En su famoso trabajo LOS ELEMENTOS, el geómetra EUCLIDES (ca. 300 a. C.) propuso cinco postulados básicos que describen los principios de la geometría en un PLANO plano. Su quinto postulado dice:

> Si dos rectas L y M subtendidas desde un segmento de recta común tienen ángulos interiores que suman menos de 180°, entonces esas rectas, si se extienden, se unirán para formar un TRIÁNGULO.

En consecuencia, se puede concluir que si esos ángulos suman más de 180°, entonces las líneas, si se extienden al otro lado del segmento de línea dado, formarán un triángulo en ese lado. (La suma de los ángulos interiores suplementarios será menor que 180°). Además, si las rectas nunca se encuentran, es decir, si son PARALELAS, entonces la suma de los dos ángulos x e y que se muestran no puede ser menor ni mayor que 180°, por lo que debe ser igual a 180°. Tenemos:

> Para un par de líneas paralelas con un TRANSVERSAL, como se muestra en el diagrama de abajo a la derecha, los ángulos marcados con xey deben sumar exactamente 180°. En consecuencia, los ángulos interiores alternos de la transversal son iguales.

Esto se toma a menudo como la afirmación del quinto postulado de Euclides. Por esta razón, a menudo se le llama el postulado paralelo.

Como el postulado de las paralelas está íntimamente relacionado con la formación de triángulos, no sorprende que uno pueda usarlo para probar:

> La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.

Como mostramos a continuación, es posible alternativamente tomar este enunciado como un postulado básico y usarlo para establecer el postulado de las paralelas. (Por lo tanto, el postulado de las paralelas y esta afirmación sobre los triángulos son supuestos iniciales lógicamente equivalentes).

En su texto de 1795 Elementos de geometría, el matemático escocés John Playfair ofreció una tercera versión lógicamente equivalente del postulado paralelo:

> Dada una línea L en el plano y un punto P que no está en esa línea, entonces existe una, y sólo una, línea que pasa por P paralela a L.

Esta versión alternativa del postulado se llama hoy AXIOMA DE PLAYFAIR . En 1829 proporcionó ruso matemático NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) la inspiración para considerar y descubrir una teoría consistente de una GEOMETRÍA NO EUCLIDEA.

Ahora tenemos tres afirmaciones:

1. El postulado de las paralelas de Euclides 2. Los ángulos en un triángulo suman 180° 3. El axioma de Playfair

Estas tres declaraciones son lógicamente equivalentes, es decir, cualquiera implica las otras dos. Para ver esto, basta mostrar que (3) implica (2), (2) implica (1), y que (1) implica (3). Tendremos que hacer uso del recíproco del postulado de las paralelas de Euclides:

> Si una transversal a través de un par de líneas produce ángulos interiores alternos iguales, entonces las líneas son paralelas.

Como muestra el TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERIOR , este enunciado puede demostrarse sin hacer uso de ninguno de los tres enunciados anteriores.

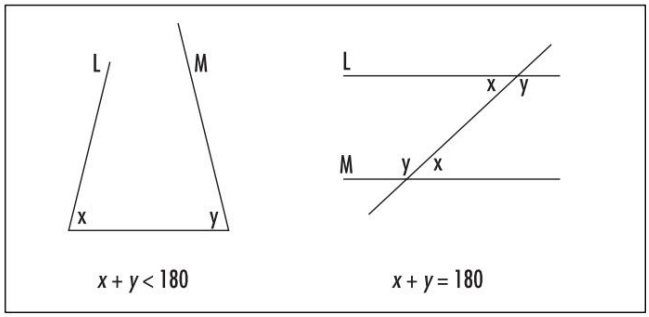
Considere ahora las tres implicaciones:

(3) implica (2):

Dado un triángulo con ángulos a, b y c como se muestra en el diagrama de la página 378, dibuja dos líneas en el vértice que copie los ángulos a y b. Dado que ambos producen ángulos interiores alternos iguales a través de una transversal, ambas líneas son paralelas a la base del triángulo. Según el axioma de Playfair, solo hay una línea de este tipo. Por lo tanto, los ángulos a, b y c están todos en la misma línea recta y suman 180°.

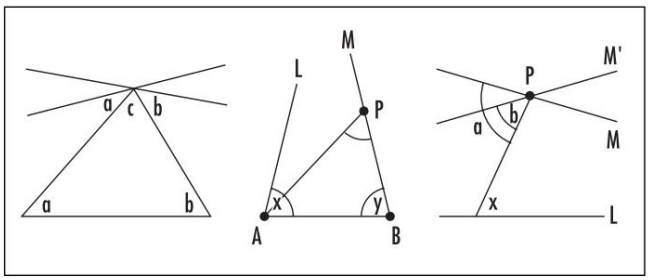
(2) implica (1):

En el diagrama central de la página 378, suponga que las líneas L y M son paralelas y, por lo tanto, nunca se encuentran. Podría



Entendiendo el postulado de las paralelas

Machine Translated by Google



Versiones equivalentes del postulado paralelo

¿Será que los ángulos x e y suman menos de 180°? Dibuje un punto P en la línea M y deslícelo a lo largo de M lo suficiente como para que el ángulo del triángulo APB en P sea menor que 180 – x – y. Claramente, el ángulo en este triángulo en A es menor que x. Ahora tenemos un triángulo con tres ángulos que suman algo menos que x + (180 – x – y) + y = 180°.

Esto es imposible por nuestra suposición de que (2) es verdadera. Después de todo, no puede ser el caso que L y M sean paralelos.

(1) implica (3):

La discusión sobre el teorema del ángulo exterior muestra que ciertamente existe al menos una línea que pasa por un punto P paralela a una línea dada L. Supongamos que hay dos de esas líneas. Llámalos M y M′ como se muestra en el diagrama de arriba. Dibuja cualquier línea de P a L. Ya que, por (1), asumimos que los ángulos interiores alternos son iguales para las líneas paralelas, ambos ángulos a y b que se muestran son iguales a x.
En consecuencia, M y M′ deben ser la misma línea.

Véase también HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (ensayo).

parámetro Ver ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

Ecuaciones paramétricas (ecuaciones de libertad) Cuando pensamos en una curva como la trayectoria trazada por un punto en movimiento, es conveniente representar la curva como dos ecuaciones, una para cada coordenada x e y, en términos de una tercera variable generalmente denotada como t: x = f(t) y y = g(t).
La variable t se denomina parámetro (del griego para, que significa “juntos”, y meter, que significa “medida”). Las ecuaciones con parámetros se denominan ecuaciones paramétricas. En problemas físicos, t generalmente se considera tiempo.

Cualquier curva y = f(x) puede expresarse en términos de ecuaciones paramétricas: simplemente establezca x = t y, en consecuencia, y = f(t).

Las representaciones paramétricas, sin embargo, no son únicas. La curva y = 4x por ejemplo, se puede representar como 2 y también x = t^2, y = $4t^2$, y = t^6. Infinitamente muchos otros Las representaciones son posibles.

UN CÍRCULO de radio r y centro (m,n) tiene una representación paramétrica: x = m + r cos t y y = n + r sen t. (Observe que $(x - m)^2 + (s - n)^2 = (r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$, la ecuación de un círculo.) Del mismo modo, una ELIPSE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene parametrización: x = a cos t y y = b sen t.

No existe un método general para transformar una ecuación de la forma F(x,y) = 0 en ecuaciones paramétricas. Cada ejemplo individual necesita ser examinado cuidadosamente, y a menudo se requiere mucho ingenio. (Por ejemplo, no está inmediatamente claro cuáles podrían ser las ecuaciones paramétricas para la curva dada por $x^5 = 0 + xy + y$). Para la dirección inversa, se puede intentar convertir un par de ecuaciones paramétricas en una sola ecuación . de la forma F(x,y) = 0 resolviendo para t. Para ilustrar, considere las ecuaciones: x = 3t + 1 y y = t – 1. La primera ecuación produce t = (x – 1)/3, y la segunda, t = y + 1. En consecuencia: y + 1 = (x – 1)/3, o y = x/3 – 4/3. Esto muestra que las ecuaciones paramétricas bajo estudio representan un camino rectilíneo.

La PENDIENTE de una curva dada mediante ecuaciones paramétricas es $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ siempre que la DERIVADA x′(t) no sea cero. Esto se sigue de la REGLA DE LA CADENA para diferenciación: si y es una función de x, que a su vez es una función de t, entonces $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$. Las ecuaciones

paramétricas también se usan para describir el movimiento de partículas en un espacio tridimensional . A uno se le dan tres ecuaciones en un parámetro t, una para cada una de las tres coordenadas x, y y z.

Véase también LONGITUD DE ARCO; ANCHO CONSTANTE.

paridad Se dice que dos enteros que son pares o impares tienen la misma paridad. Por ejemplo, 17 y 53 tienen la misma paridad (ambos son impares) y 9 y 14 tienen paridad opuesta. El estudio de NÚMEROS PARES E IMPARES a menudo hace uso de la paridad para establecer una serie de resultados sofisticados.

A veces, el término paridad se usa en un contexto más general para significar “estar en uno de dos estados posibles”.
Por ejemplo, tres discos de hockey etiquetados A, B y C que se encuentran en un campo de juego, no en línea recta, pueden estar en

Machine Translated by Google

uno de dos estados posibles: moverse de A a B a C podría tener un sentido de las manecillas del reloj o antihorario. Cada vez que un jugador de hockey golpea un disco entre los otros dos, la paridad del sistema cambia.
Esto demuestra, por ejemplo, que una jugadora de hockey nunca podrá devolver los tres discos a sus posiciones originales si realiza 33 golpes de este tipo.

Como otro ejemplo, es imposible que 25 personas de pie en una cuadrícula de cuadrados de 5 × 5, una persona por celda, cambien de lugar si se le pide a cada persona que se mueva de un lugar a una celda vertical u horizontal vecina. Un argumento de paridad explica por qué. Si imaginamos las celdas de color blanco y negro de acuerdo con un patrón de tablero de ajedrez, entonces las 13 personas de pie en las celdas negras deben ocupar solo 12 celdas blancas, lo que hace que el desafío sea irresoluble. (Sin embargo, si a los jugadores se les permite dar pasos en diagonal, entonces el rompecabezas se puede resolver.)

derivada parcial Dada una función f(x,y) de dos variables, la DERIVADA de f con respecto a una sola de las variables, tratando a la otra variable como una constante, se denomina derivada parcial de esa función.
Específicamente, la derivada parcial de la función con con respecto a x, denotado $\frac{\partial f}{\partial x}$ oa veces fx , es el LÍMITE:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

y la derivada parcial con respecto a y, denotada $\frac{\partial f}{\partial y}$ o fy , es:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Geométricamente, la gráfica de la función z = f(x,y) es una superficie situada en un espacio tridimensional, y ∂f mide la sobre el punto pendiente de la cantidad de superficie gráfica $\frac{\partial f}{\partial x}$ (x,y) en la dirección paralela al eje x, y es la pendiente de la superficie en la dirección $\frac{\partial f}{\partial y}$ paralela al eje y. Como una de las variables se trata como una constante, la derivada parcial de una función se puede encontrar usando las reglas normales de diferenciación. Por ejemplo, para la función f(x,y) = x 2y 3 + 2x + y, ∂f ∂f tenemos = 2xy3 + 2 y = 3x 2y 2 + 1. $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

El símbolo ∂ para “parcial” fue introducido en 1788 por el matemático francés JOSEPH-LOUIS LAGRANGE.
Se asemeja a la d utilizada para la diferenciación ordinaria.

La n-ésima derivada parcial de una función con respecto a ∂ a la misma variable se denota $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ y diferenciar con respecto a dos variables diferentes conduce a resultados mixtos Derivadas parciales: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \partial xy}$ y similares.

La cantidad $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ ∂ , por ejemplo, debe interpretarse como diferencia primero con respecto a y, y luego con respecto a x”. (Es decir, uno realiza las operaciones en orden inverso como lo indica el denominador). Por ejemplo, si f(x,y) = x 2y 3 + 2x + y entonces:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 + 2) = 6xy$$

y

$$\frac{\partial^2 F}{\partial yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 + 2) = 6xy$$

La igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

no es casualidad Los matemáticos han demostrado que el orden de la derivación parcial no importa siempre que todas las derivadas parciales involucradas sean funciones continuas. La noción de derivada parcial se extiende a funciones de más de dos variables.

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación que contiene derivadas parciales de una función. Por ejemplo, la función f(x,y) = e xy es una solución a la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$$

Ver también REGLA DE LA CADENA; ECUACIÓN DIFERENCIAL; DERIVADO DIRECCIONAL.

fracciones parciales Expresiones algebraicas que contienen la razón de dos POLINOMIOS $\frac{p(x)}{q(x)}$, con el grado de

Machine Translated by Google

p(x) menor que el grado de q(x), se puede dividir en parcial fracciones para un manejo más fácil. Esto primero requiere dividir el denominador q(x) en lineal e irreducible factores cuadráticos, cada uno con algún índice, y luego escribir $\frac{p(x)}{q(x)}$ como una suma de términos de cada uno de los siguientes tipos:

1. Correspondiente a cada término lineal (repetido) (x – k) n en q(x), existe una suma de términos $\frac{A_1}{(x-k)} + \frac{A_2}{(x-k)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-k)^n}$.
2. Correspondiente a cada irreducible (repetido) términos cuadráticos (ax2 + bx + c) m en q(x), hay un suma de términos $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m}$.

Aquí los números Ai , Bi y Ci son constantes. Alguno ejemplos ilustran el proceso:

$$\frac{4}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{x^2+2x}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$\frac{3x^2+7x+1}{x(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2} + \frac{Ejemplo\ F}{(x+1)^2}$$

Los valores de las constantes A, B, C, … se encuentran por multiplicando por el denominador y luego IGUALACIÓN DE COEFICIENTES. Alternativamente, uno puede sustituir valores apropiados para la variable x para determinar los valores de algunas de estas incógnitas más rápidamente. Por ejemplo, en el primer ejemplo, después de multiplicar mediante, tenemos: 4 = A(x – 3) + B(x + 2). Ajuste x = 3 da 4 = 0 + 5B, estableciendo que B es 4/5, y estableciendo x = –2 da A = –4/5. Así tenemos:

$$\frac{4}{(x+2)(x-3)} = \frac{-\frac{4}{5}}{x+2} + \frac{\frac{4}{5}}{x-3} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)$$

Los matemáticos han demostrado que cada racional función $\frac{p(x)}{q(x)}$, con el grado de p(x) menor que el grado de q(x), de hecho puede escribirse como una suma de fracciones, y que los términos constantes que aparecen, Ai , Bi , y Ci , son únicos para esa función racional. (Eso es, ninguna función racional puede expresarse como una suma de fracciones parciales de dos maneras diferentes). Las fracciones parciales son Generalmente se usa para resolver INTEGRALES y para resolver Ecuaciones diferenciales. Como ejemplo, tenemos:

$$\int \frac{4}{(x+2)(x-3)}\,dx = \frac{4}{5}\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{4}{5}\left(\ln|x-3| - \ln|x+2| + C\right)$$

$$= \frac{4}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C$$

pedido parcial Ver CONJUNTO PEDIDO.

suma parcial La n-ésima suma parcial Sn de un infinito la serie a1 + a2 + a3 +… es la suma de solo la primera n términos de la serie: Sn = a1 + a2 +…+ an . Por ejemplo, las primeras cuatro sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ son $S1 = \frac{1}{2}$, $S2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $S3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, y $S4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Se dice que una serie converge a un valor L si el las sumas parciales Sn tienden a L en el LÍMITE cuando n → ∞. En el ejemplo anterior, la secuencia de sumas parciales $1, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$ se aproxima al valor 1. Por lo tanto, escribir: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots = 1$.

Véase también SERIE CONVERGENTE.

partición En TEORÍA DE NÚMEROS una partición de un el número n es una representación de n como una suma de números positivos números enteros Por ejemplo, 20 + 15 + 5 y 10 + 10 + 10 + 10 son particiones del número 40, como lo es la representación 40 misma. Una partición se considera ordenada si la Se considera importante el orden de los términos en la suma.

Machine Translated by Google

Por ejemplo, 20 + 15 + 5 y 5 + 20 + 15 se consideran dos particiones ordenadas diferentes del número 40.

Solo hay una partición ordenada del número. 1, dos particiones ordenadas de 2, cuatro de 3 y ocho particiones ordenadas del número 4:

1:1
2:1 + 1 = 2
3:1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2 = 3
4:1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2
= 2 + 2 = 1 + 3 = 3 + 1 = 4

Este patrón persiste:

Un número n tiene 2n–1 particiones ordenadas.

(Se puede crear una partición ordenada de un número n por primero escribiendo n como una suma de n 1s, y luego eliminando algunos, todos o ninguno de los signos + entre los 1. Como los hay n : 1 signos más a considerar, cada uno de los cuales ofrece una opción de ya sea para salir o para borrar, esto proporciona 2n–1 posibilidades en total.)

Si el orden de los términos en una partición no se considera importante, entonces la partición se llama desordenado (Por ejemplo, 20 + 15 + 5 y 5 + 20 + 15 ahora se consideran la misma partición del número 40.) El símbolo P(n) generalmente se usa para denotar el número de particiones desordenadas que posee un número n . Por ejemplo, P(4) = 5, ya que solo hay cinco particiones desordenadas del número 4 (a saber, 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2, 3 + 1 y 4). La siguiente La tabla muestra los primeros 10 valores de la función de partición:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Hasta el día de hoy, nadie conoce una fórmula exacta para este función, y en general se sabe muy poco acerca de su comportamiento.

A mediados de 1700, LEONHARD EULER estudió este función y encontró una relación verdaderamente notable. Considere esos NÚMEROS FIGURADOS triangulares que son divisible por tres: 3, 6, 15, 21, 36, 45, … Tomando un tercio de esos números se obtiene la secuencia: 1, 2, 5, 7, 12, 15, … Declarando P(0) = 1 y P(n) igual a cero si n es negativa, Euler demostró que se cumple la siguiente fórmula:

$$P(n) – P(n – 1) – P(n – 2) + P(n – 5) + P(n – 7) – P(n – 12) – P(n – 15) +\ldots = 0$$

Aquí los signos entre términos se alternan en pares. Aviso también que aunque el lado izquierdo de esta ecuación aparece ser una suma infinita, eventualmente todos los términos en el suma igual a cero. En consecuencia, se requiere agregar y restar sólo una lista finita de números.

Esta fórmula nos permite calcular valores más altos de P(n). Por ejemplo, para encontrar el valor de P(11) use:

$$P(11) – P(10) – P(9) + P(6) + P(4) – P(–1) – P(–4) +\ldots = 0$$

Eso es,

$$P(11) – 42 – 30 + 11 + 5 – 0 – 0 +\ldots = 0$$

flexible

$$P(11) = 56$$

En la década de 1930, los matemáticos GODFREY HAROLD HARDY y SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN demostraron que si n es grande, entonces la función P(n) se aproxima bien mediante la fórmula:

$$P(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\sqrt{\frac{2n\pi^2}{3}}}$$

Así, por ejemplo, el valor de P(1,000) es aproximadamente

$$\frac{1}{4000\sqrt{3}} e^{\sqrt{\frac{2000\,\pi^2}{3}}} \approx 2.4 \times 10^{31}.$$

Comprender las propiedades del par desordenado función de la función sigue siendo un área activa de investigación.

Pascal, Blaise (1623–1662) Teoría de la probabilidad francesa , Cálculo, Geometría, Filosofía Nacido el 19 de junio de 1623, en Clermont-Ferrand, Francia, filósofo y El científico Blaise Pascal es recordado por su trabajo en GEOMETRÍA, hidrostática y teoría de la PROBABILIDAD . Aunque no inventó el famoso triángulo aritmético que lleva su nombre, hizo un uso extensivo de su propiedades en su desarrollo de la probabilidad y la estudio de distribuciones estadísticas. También trabajó en problemas de encontrar longitudes de arco y áreas de figuras curvas. Se destaca, en particular, por su trabajo sobre la

Machine Translated by Google

CYCLOID y el desarrollo de ideas a partir de este trabajo que condujo a la invención del CÁLCULO.

Pascal estaba fascinado con las matemáticas cuando era un adolescente y, a los 16 años, ya había descubierto una serie de resultados notables en el estudio de la GEOMETRÍA PROYECTIVA. Publicó su primer trabajo en geometría, Ensayo sobre secciones cónicas, en 1640.

Para ayudar a su padre en su trabajo de registro y recaudación de impuestos, entre los años 1642 y 1645 Pascal inventó y construyó una calculadora mecánica que podía realizar cálculos aritméticos sofisticados. Durante los siguientes 7 años, Pascal supervisó la construcción de hasta 50 de estas máquinas pero, lamentablemente, se vendieron pocas. La producción del "Pascaline" cesó, pero Pascal, no obstante, se destaca como la segunda persona en la historia en haber construido un dispositivo de este tipo. (El erudito alemán Wilhelm Schickard construyó el primero en 1624).

A fines de la década de 1640, Pascal se interesó por la hidrostática y las propiedades de la presión atmosférica. Publicó Nuevos experimentos sobre vacíos en 1647, un trabajo controvertido ya que los científicos en ese momento dudaban de que existieran vacíos, y 4 años más tarde su famosa obra Tratado sobre el equilibrio de los líquidos.



Blaise Pascal, un eminente erudito del siglo XVII, se destaca por su trabajo pionero en el campo de la teoría de la probabilidad. (Foto cortesía de Monique Salaber/The Image Works)

Su interés por las matemáticas puras nunca flaqueó durante este tiempo y continuó desarrollando su trabajo sobre la teoría de las SECCIONES CÓNICAS. (Lamentablemente, sus manuscritos de este período se han perdido hoy).

En correspondencia con PIERRE DE FERMAT (1601-1665), Pascal trabajó para resolver dos problemas desafiantes sobre juegos de azar: ¿cuál es el número esperado de lanzamientos necesarios para sacar un 6 doble con un par de dados? ¿Y cómo se deben repartir las apuestas hechas para un juego de dados, si el juego debe detenerse en medio de su juego? Pascal y Fermat resolvieron el primer problema y el segundo solo para el caso de un juego de dos jugadores. Este trabajo marcó el comienzo del desarrollo de la teoría moderna de la probabilidad.

Pascal fue un hombre profundamente religioso y también es recordado por su famosa línea de pensamiento racional argumentando a favor de creer en la existencia de Dios. Ahora llamada “la apuesta de Pascal”, el argumento de Pascal simplemente afirmaba que si Dios no existe, nada se pierde por creer en Él, mientras que si Dios existe, todo se perderá por no reconocer Su existencia.

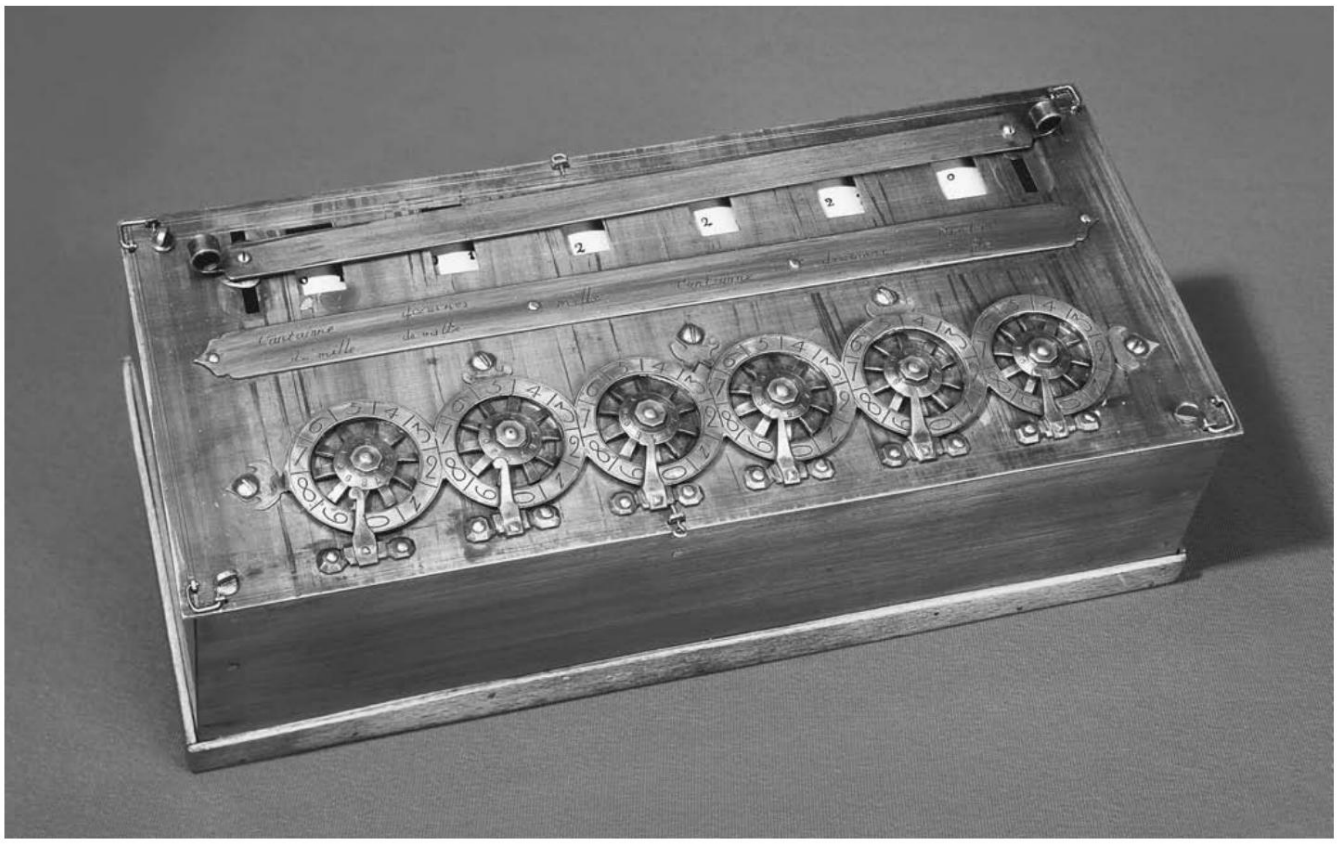
Pascal calculó la longitud del arco y el área de una rama de la curva cicloide, y también el volumen y el área de la superficie de un SÓLIDO DE REVOLUCIÓN obtenido al rotarlo sobre el eje x. Este fue su último logro matemático antes de dedicar su vida al servicio religioso. Murió de cáncer el 19 de agosto de 1662, a los 39 años.

Aunque no se le recuerda por haber producido una gran cantidad de trabajo profundamente creativo, Pascal desempeñó un papel fundamental en el desarrollo de varios nuevos campos de estudio (cálculo infinitesimal, teoría de la probabilidad, geometría proyectiva y estática de fluidos, por ejemplo). Hizo contribuciones significativas a cada campo y, quizás más importante, desempeñó un papel importante en aclarar los fundamentos de estos estudios y sistematizar los métodos que utilizan.

Distribución de Pascal Ver DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

Triángulo de Pascal La matriz triangular de números con 1 en el vértice, con un 1 al principio y al final de cada fila, y con la propiedad de que cada número interior es la suma de los dos números que están encima de él en la fila anterior se llama triángulo de Pascal. . Las primeras filas del triángulo se muestran a continuación:

Machine Translated by Google



En 1642 Blaise Pascal inventó y construyó la primera máquina calculadora del mundo. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham HIP/The Image Works)

```
          1
        1 1
      121
    1331
  14641
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
```

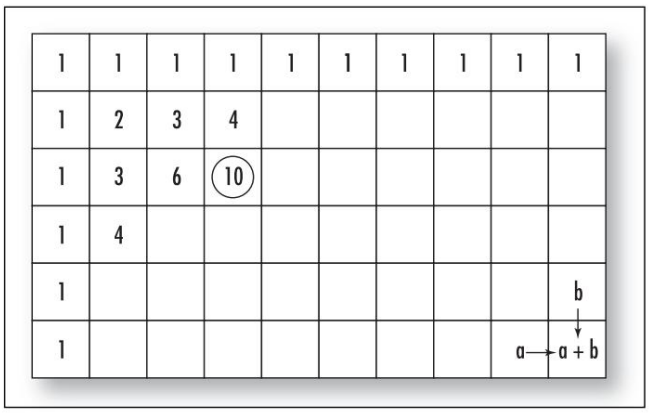
El triángulo lleva el nombre del matemático francés BLAISE PASCAL (1623-1662), quien lo utilizó ampliamente en su desarrollo de la teoría de la PROBABILIDAD . Sin embargo, Pascual nunca afirmó haber inventado el triángulo. Aparece, por ejemplo, en el texto de 1303 de CHU SHI-CHIEH Siyuan Yujian (El espejo precioso de los cuatro elementos), y las tablas de las primeras filas del triángulo aparecen en textos árabes antiguos.

Para motivar la construcción del triángulo, se puede hacer la siguiente pregunta:

> Si, en una cuadrícula rectangular, a uno se le permite moverse de una celda a otra solo dando pasos hacia el este o hacia el sur, ¿cuántas rutas distintas hay desde la celda superior izquierda a cualquier otra celda dada?

Por ejemplo, para pasar a la celda encerrada en un círculo que se muestra, uno podría dar tres pasos hacia el este seguidos de dos pasos hacia el sur (que registraremos como EEESS) o, alternativamente, un paso hacia el sur, dos pasos hacia el este, un paso hacia el sur, seguido de un paso hacia el sur. paso final al este (SEESE). De hecho, cualquier arreglo de tres Es y dos Ss corresponde a un camino posible, y uno puede verificar que hay 10 de tales combinaciones de cinco letras en total. Esto muestra que hay 10 rutas a la celda en un círculo que se muestra. Es conveniente asignar el número uno a la celda superior izquierda. (Comenzando en la celda superior izquierda, solo se necesita un curso de acción para llegar a esa celda, es decir, ninguna acción).

Machine Translated by Google



Descubriendo el triángulo de Pascal

También tenga en cuenta que para llegar a cualquier celda en particular, uno tiene dos opciones: o bien dirigirse a la celda directamente encima de ella y dar un paso final hacia el sur, o dirigirse a la celda justo a su izquierda y dar un paso final hacia el este. Por lo tanto, el número de caminos a una celda en particular es la suma de los dos conteos de las celdas arriba y a su izquierda. Este es la característica definitoria del triángulo de Pascal.

Podemos decir más: los números en cada celda cuentan el número de formas de organizar un número fijo de Es y Ss. Por ejemplo, el número debajo de la celda dentro de un círculo en la imagen será 20. Esto muestra que debe haber 20 formas distintas de organizar tres Es y tres Ss. Alternativamente, podríamos determinar este conteo preguntando: ¿Cuántas maneras hay de seleccionar tres lugares (las posiciones en las que estará la letra E) entre una cadena de seis posiciones?

La respuesta a esta pregunta está en el COMBINATORIAL COEFICIENTE $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ _ Contando la fila superior de el triángulo de Pascal como fila cero y la primera entrada de cada fila la entrada cero de esa fila, ahora vemos que la k-ésima entrada en la fila n del triángulo de Pascal corresponde al coeficiente combinatorio $\binom{n}{k}$, que es igual a número de maneras de organizar k Es y (n – k) Ss como una cadena de n letras. Tenemos:

El triángulo de Pascal es la matriz triangular de todos los coeficientes combinatorios.

El TEOREMA DEL BINOMIO muestra que la combinatoria los coeficientes también aparecen en expansiones de expresiones de la forma $(x + y)^n$. Tenemos:

Las entradas en la n-ésima fila del triángulo de Pascal son precisamente los coeficientes que aparecen en la expansión de $(x + y)^n$.

Por ejemplo, tenemos $(x + y) + 3x^2 2 = x + 2xy + y y^2$, $(x + y) + 3^3 = x 2y + 3xy2 + y + 6x 2y 2^3$, $(x + y)^4 4 = x 4x 3y + 4xy3 + y$ El triángulo^4.

de Pascal posee varias propiedades notables. Enumeramos solo una muestra.

1. Las entradas en la n-ésima fila del triángulo de Pascal suman a 2^n.

   Por ejemplo, 1 = 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 + 1 = 4, 1 + 3 + 3 + 1 = 8 y 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16. Esto se sigue de expandir la cantidad $(1 + 1)^n$.
2. La suma alterna de las entradas de cada fila del triángulo de Pascal es cero.

   Por ejemplo, 1 – 1 = 0, 1 – 2 + 1 = 0, 1 – 3 + 3 – 1 = 0 y 1 – 4 + 6 – 4 + 1 = 0. Esto se sigue de expandir la cantidad $(1 + (-1))^n$.

   Vale la pena observar que ambos resultados también se pueden obtener al notar que cada entrada en el triángulo de Pascal es la suma de dos entradas en la fila anterior. Así, la suma directa o alterna de las entradas de una fila corresponde a una suma que considera dos veces cada entrada de la fila anterior.
3. Los NÚMEROS DE FIBONACCI aparecen como sumas de entradas en ciertas diagonales del triángulo de Pascal.

   Para explicar: el vértice 1 constituye la primera diagonal. El primer 1 de la fila uno constituye la segunda diagonal. El primer 1 de la fila dos y el último 1 de la fila tres constituyen la tercera diagonal. (Tenga en cuenta que 1 + 1 = 2). Continuando de esta manera, vemos que 1 + 3 + 1 = 5, 1 + 4 + 3 = 8 y 1 + 5 + 6 + 1 = 13. Al escribir cada término en la diagonal como la suma de las dos entradas por encima de ella, vemos que la suma de las entradas en una diagonal coincide con la suma de las entradas de las dos diagonales anteriores.

4. Cada fila del triángulo de Pascal corresponde a los dígitos de una potencia de 11.

   Por ejemplo, 110 = 1, 111 = 11, 112 = 121, 113 = 1,331 y 114 = 14,461. Esto se sigue de expandir la cantidad $(10 + 1)^n$. Si no tuviéramos que llevar dígitos al realizar las multiplicaciones, esta correspondencia seguiría siendo exacta.
5. Seleccione cualquier entrada N en el triángulo de Pascal y encierre en un círculo todas las entradas que se encuentran en el paralelogramo que tiene N y el vértice como vértices opuestos. Entonces, la suma de todas las entradas en ese paralelogramo es 1 menos que el número M directamente debajo de N dos filas hacia abajo.

Machine Translated by Google

Por ejemplo, en el triángulo que se muestra en la página anterior, el número 20 es uno mayor que la suma de los números acotados en el paralelogramo con 6 como la esquina más baja. (Tenemos 6 + 3 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 19.) Esta propiedad se puede demostrar observando que el número M es la suma de los dos números anteriores, que, a su vez, son cada uno la suma de dos números en la fila anterior, y así sucesivamente. Uno puede hacer coincidir esta tabulación hacia atrás con las entradas del paralelogramo descrito (excepto por un solo 1).

Véase también NÚMEROS DE CATALÁN.

Peano, Giuseppe (1858–1932) Italiano Fundamentos de las matemáticas Nacido el 27 de agosto de 1858 en Cuneo, Italia, el lógico Giuseppe Peano es recordado por su influyente trabajo en lógica matemática y en los FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS. En 1889 publicó un famoso conjunto de axiomas (revisados en 1899), hoy llamados POSTU LATES DE PEANO , que definían los NÚMEROS NATURALES en términos de conjuntos. Un año más tarde inventó curvas que llenaban el espacio, como la CURVA DE PEANO , que en ese momento se creían imposibles. Estas curvas muestran, en cierto sentido, que hay tantos puntos en una línea como en un plano.

Peano se graduó de la Universidad de Turín en 1880 con un doctorado en matemáticas y su título de habilitación en 1884. Permaneció en la universidad como profesor de matemáticas durante toda su carrera.

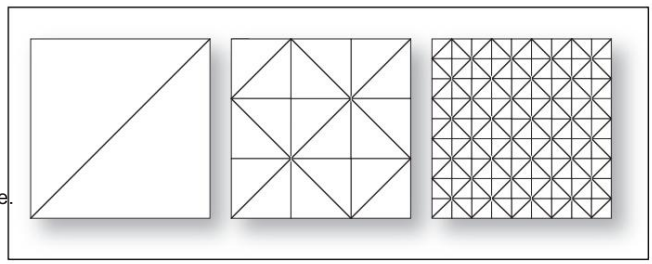
Los primeros trabajos de Peano fueron en el campo de las ECUACIONES DIFERENCIALES, donde estudió y estableció resultados significativos sobre el problema de clasificar aquellas ecuaciones para las que se garantiza que existen soluciones. Pero sus intereses cambiaron hacia la lógica matemática en 1888 con la publicación de su texto Geometric Calculus, cuyo capítulo inicial estaba dedicado al tema. Peano publicó sus famosos axiomas que definen los números naturales un año después en el pequeño folleto Arithmetices prin cipia, nova methodo exposita (Principios aritméticos, exposición de un nuevo método), que escribió íntegramente en latín para sorpresa de sus colegas. Poco después de esto, presentó su trabajo en su famosa curva.

Los historiadores matemáticos sienten que las contribuciones de Peano a las matemáticas disminuyeron después de esto. En 1892, Peano comenzó a trabajar en un enorme proyecto para cotejar todos los resultados matemáticos conocidos, esencialmente como una lista gigante. Este proyecto, al que llamó Formulario mathematico (Formas matemáticas), consumió sus horas de trabajo durante 16 años completos. Completó el proyecto en 1908, pero recibió poca atención por ello. Aunque el texto contenía una gran cantidad de información valiosa, era difícil de leer, no solo por su naturaleza seca, sino también porque Peano optó por escribirlo en un nuevo "lenguaje universal" que inventó a partir de una versión simplificada. del latín Esperaba desarrollar una cultura universal de exploración matemática unida por un lenguaje común. Su sueño nunca se realizó.

Peano murió en Turín, Italia, el 20 de abril de 1932. Gran parte de su trabajo matemático, aunque significativo en ese momento, es principalmente de interés histórico en la actualidad.

La curva de Peano En 1890, el matemático italiano GIUSEPPE PEANO (1858–1932) describió una curva que podía pasar por todos los puntos de un cuadrado. La curva se construye mediante un proceso iterativo. Uno comienza dibujando la diagonal de un cuadrado y luego dividiendo el cuadrado en nueve subcuadrados y dibujando ciertas diagonales de esos subcuadrados. En la siguiente etapa, cada subcuadrado se divide en nueve subsubcuadrados y se repite el patrón. La curva de Peano es la curva que resulta cuando este procedimiento se repite indefinidamente. Uno puede ver intuitivamente que la construcción de Peano es un objeto que pasa por todos los puntos del cuadrado. (Pasa por algunos puntos más de una vez.) Por esta razón, la curva de Peano se describe como una curva que llena el espacio. Su construcción muestra, en cierto sentido, que el conjunto de puntos dentro de un cuadrado no es más infinito que el conjunto de puntos en una curva.

Para que la definición de la curva de Peano sea matemáticamente precisa, para cada número t en el intervalo [0,1] sea Pn (t) el punto en el cuadrado que está t unidades a lo largo de la longitud de la curva que se produce en el n-ésimo paso del procedimiento anterior. (Observe, por ejemplo, $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ es el punto medio para todo n.) Luego defina P(t) como el LÍMITE de estos puntos:



Curva de llenado de espacio de Peano

Machine Translated by Google

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} P_n(t)$$

Se puede demostrar que esta fórmula sí representa una FUNCIÓN CONTINUA desde el intervalo unitario [0,1] hasta todos los puntos en el cuadrado unitario. Dado que cualquier función continua definida en un intervalo puede pensarse como la ECUACIÓN PARAMÉTRICA de una curva, es realmente apropiado pensar en la función de Peano como una curva en un espacio bidimensional.

Note que si tomamos la longitud del lado del cuadrado como 1 unidad, entonces la longitud de la diagonal es $\sqrt{2}$ unidades de largo. Cada iteración del procedimiento produce una curva tres veces más larga que la curva del paso anterior.

Véase también CARDINALIDAD; INFINIDAD.

Los postulados de Peano En 1889, el matemático italiano GIUSEPPE PEANO (1858–1932) presentó un primer conjunto de postulados básicos que esperaba caracterizarían con precisión las propiedades de los números naturales. Revisó su sistema 10 años después para afirmar: Hay un conjunto N cuyos elementos se llaman "num bras" con las siguientes propiedades:

1. A todo número a se le puede asignar otro número a′ llamado su sucesor. (Normalmente pensamos en a′ como un + 1).
2. No hay dos números diferentes que tengan el mismo sucesor.
3. Hay al menos un número que no es sucesor de ningún otro número.
4. Axioma de inducción: si un subconjunto M de números contiene al menos un número que no es un sucesor, pero tiene la propiedad de que para cualquier número a en M, su sucesor a′ está en M, entonces M = N. (Que es, cada número está en M.)

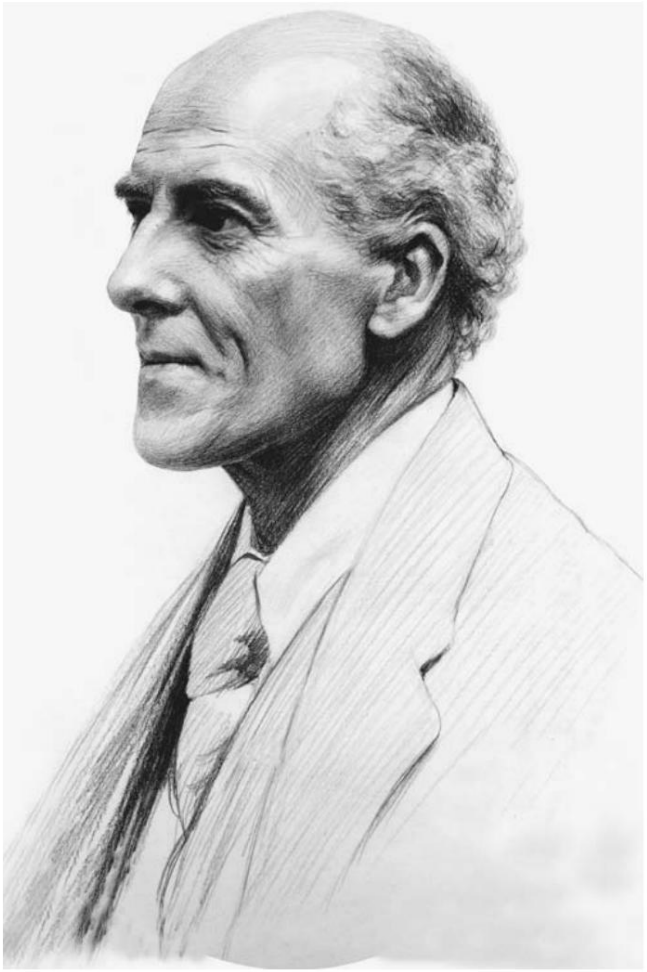
Vale la pena señalar que de estos axiomas se sigue que solo hay un número que no es el sucesor de ningún otro número. (Sea e cualquier número que no sea un sucesor y sea M el conjunto de todos los números que son sucesores junto con el número e. Por el axioma de inducción, M = N. Se sigue entonces que e es el único número que falla ser un sucesor.) Este número especial generalmente se llama CERO.

A partir de estos postulados muy básicos, Peano pudo definir una operación de suma de números y de allí derivar todas las propiedades de la aritmética que usamos hoy.

Véase también INDUCCIÓN; NÚMEROS NATURALES.

Pearson, Karl (1857–1936) Estadística británica Nacido el 27 de marzo de 1857 en Londres, Inglaterra, el matemático Karl Pearson es recordado por su influencia en el desarrollo de la estadística aplicada a la biología y las ciencias sociales. Pearson introdujo, por primera vez, conceptos básicos como la DESVIACIÓN ESTÁNDAR y la noción de COEFICIENTE DE CORRELACIÓN. También desarrolló la invaluable PRUEBA DE CHI-CUADRADO.

Educado en la Universidad de Cambridge, Pearson ocupó un puesto docente en el University College de Londres durante la mayor parte de su carrera, estudiando el análisis de la herencia y la evolución en biología. A partir de 1893, Pearson publicó una serie de 18 artículos, todos titulados "Mathematical



Karl Pearson, un eminente estadístico del siglo XX, fue el primero en desarrollar conceptos fundamentales como "desviación estándar" y "coeficiente de correlación". (Foto cortesía de Topham/Fotomas/The Image Works)

Machine Translated by Google

Contribution to the Theory of Evolution", que, a lo largo de 21 años, describió los principios del análisis estadístico. Su trabajo, sin embargo, no estuvo exento de controversia. Mientras que otros estadísticos de la época, incluidos SIR RONALD AYLMER FISHER (1890–1962) y WILLIAM SEALY GOSSET (1876–1937), enfatizaron el papel de las causas en lugar de la correlación y trabajaron con muestras pequeñas para deducir información confiable, Pearson analizó grandes tamaños de muestra y tendencias generales exploradas.

Esta diferencia de filosofía condujo a una amarga disputa entre Pearson y Fisher, lo suficientemente vehemente como para hacer que Fisher rechazara un puesto prestigioso en la universidad para simplemente evitar trabajar con Pearson.
No obstante, el trabajo de Pearson fue debidamente reconocido como significativo, y se le otorgó a Pearson el puesto como el primer Profesor Galton de Eugenesia en el Laboratorio Nacional de Eugenesia de Galton. Fue presidente allí desde 1911 hasta 1933.

Además de hacer contribuciones significativas al campo de la estadística, Pearson también ejerció la abogacía, participó activamente en la política y escribió obras literarias. En 1892 publicó The Grammar of Science, un texto filosófico que intentaba extender el enfoque y los métodos de la ciencia a una amplia gama de propósitos generales. Esta pieza incluso anticipó algunas de las ideas de la teoría de la relatividad.

Pearson fundó la revista Biometrics y fue editor de Annals of Eugenics. Debido a su trabajo fundamental en el desarrollo de las estadísticas modernas, muchos estudiosos consideran a Pearson como el fundador de las estadísticas del siglo XX. Murió en Coldharbour, Inglaterra, el 27 de abril de 1936.

Véase también SIR FRANCIS GALTON, HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo); ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

triángulo pedal Dado un punto P en un triángulo ABC, el triángulo pedal con respecto a P se forma trazando líneas perpendiculares desde P a cada uno de los tres lados del triángulo. Si X, Y y Z son las ubicaciones en las que estas líneas se encuentran con los lados del triángulo, entonces el triángulo XYZ es el triángulo pedal de P. El triángulo pedal puede extenderse fuera del triángulo si ABC es un triángulo obtuso.

Las tres alturas de cualquier triángulo se encuentran en un punto común O llamado ortocentro del triángulo. (Véase TRIÁNGULO.) El triángulo pedal con respecto a O, con vértices los pies de las alturas del triángulo, a menudo se denomina triángulo pedal de un triángulo dado. Es también llamado triángulo órtico. Los geómetras han demostrado que si uno construye una secuencia anidada de tres triángulos órticos, entonces el tercer triángulo órtico es similar al triángulo original.

La circunferencia pedal de un triángulo con respecto a un punto P es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo pedal con respecto a P. La circunferencia pedal con respecto al ortocentro O es la circunferencia inscrita del triángulo.

En 1775 el matemático italiano Giovanni Fagnano planteó el siguiente problema:

> De todos los triángulos inscritos en un triángulo acutángulo, ¿cuál tiene el menor perímetro?

Usando las técnicas del CÁLCULO, Fagnano pudo probar que el triángulo órtico es el triángulo inscrito deseado. (Esto también se puede demostrar por medios geométricos puros). Esta observación conduce a un resultado interesante: si XYZ es el triángulo inscrito de menor perímetro, entonces los dos lados X a Y e Y a Z son una solución al famoso camino a pie. problema en la teoría de la OPTIMIZACIÓN .
En consecuencia, estos dos lados interceptan la "pared" del triángulo dado en ángulos iguales y, por lo tanto, representan el camino que seguiría una pelota cuando se arroja a ese lado del triángulo. Como el mismo argumento se aplica a cualquier par de lados en el triángulo órtico, tenemos:

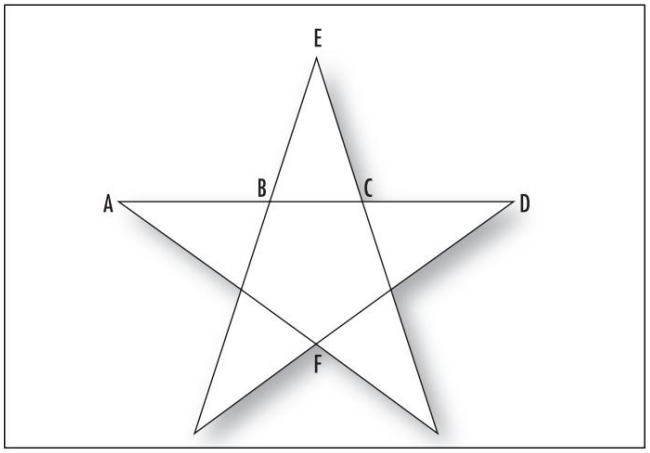
> El triángulo órtico representa la trayectoria cerrada de una pelota que rebota dentro de un triángulo acutángulo.

Los matemáticos han demostrado que esta es la única trayectoria de circuito cerrado que podría seguir una pelota dentro de un triángulo acutángulo. Para los triángulos obtusos no existe el triángulo inscrito de menor perímetro.

pentagrama (pentáculo, pentalpha, pentangle) La figura en forma de estrella formada por las cinco diagonales de un pentágono regular (o equivalentemente, formada al extender todos los lados de un pentágono regular para que se unan en pares) se llama pentagrama. La Orden de Pitágoras, un grupo de seguidores de PITÁGORAS, otorgó un profundo significado a varios números y formas geométricas, incluido el pentagrama. La figura a menudo se conoce como el "Pentagrama de Pitágoras". Sus propiedades geométricas se consideraban divinas.

La PROPORCIÓN DE ORO aparece varias veces en un pentagrama. Por ejemplo, el punto C divide la longitud AD

Machine Translated by Google



Pentagrama

en dos partes de proporción igual a la media áurea, y el punto B divide la longitud AC de la misma manera. esto, de Por supuesto, sucede en todos los lados de la estrella. También el longitudes AF, DF, AE y DE son todas iguales, haciendo AFDE un rombo.

Si la distancia de A a D es 1, entonces:

$$AB = CD = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$BC = -\sqrt{5}-2$$

$$AF = DF = AE = DE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

La distancia del centro del pentagrama a 1 el punto C es $\frac{}{\sqrt{10}}\sqrt{25-11\sqrt{5}}$ y al punto E es $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. La altura del pentagrama es $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}$.

porcentaje Un número que representa una fracción de 100 se llama porcentaje. Por ejemplo, 5 por ciento, escrito 5%, es la fracción $\frac{5}{100}$, y 125 por ciento es el fracción. $\frac{125}{100}$ El término porcentaje proviene del latín frase per centum, que significa “por cien”. Se dice que el emperador romano Augusto (63 a. C.-14 d. C.) impuso un impuesto de una parte por 100 sobre el producto de todos los bienes vendidos en subastas y mercados. Desde entonces ha sido popular para representar todos los impuestos en términos de porcentajes

Cualquier fracción se puede convertir a un porcentaje por multiplicando por 100. Por ejemplo, la fracción $\frac{4}{5}$ es se interpreta como “cuatro quintos de 100” y así se escribe: $\frac{4}{5} \times 100 = \frac{400}{5} = 80$ por ciento. Los decimales también pueden ser representados como porcentajes al multiplicar por 100: 0,327, por ejemplo, como porcentaje es igual a 0,327 × 100 = 32,7 por ciento.

Para volver a convertir un porcentaje en una fracción o un decimal, divida por 100 y omita el signo de porcentaje. Para ejemplo, el 85 por ciento representa "85 partes de 100" y así es la fracción 85/100 o, de forma equivalente, el decimal 0,85.

El cien por cien de una cantidad es el 100/100 de ella, es decir, todo. Por ejemplo, si 23 estudiantes son inscritos en un baile y los 23 aparecen en un particular día, entonces el 100 por ciento de la clase está presente. si solo 20 aparecen, entonces solo la fracción 20/23 ≈ 0.87 de la clase está presente, es decir, el 87 por ciento.

Un valor porcentual mayor que 100 por ciento representa una cantidad mayor que el total original. Para Por ejemplo, si Boys Soccer Group vendió 1,850 barras de chocolate en 2002 y 1,998 barras de chocolate en 2003, entonces el número de barras vendidas en 2003 en comparación con el número vendido el año anterior es o 108 $\frac{1998}{1850} = 1{,}08$ por ciento. Uno llamaría a esto un 8 por ciento Incremento en las ventas de barras de chocolate. En general, si una cantidad cambia del valor a al valor b, entonces el aumento porcentual del valor viene dado por la fórmula: $\frac{(b-a)}{a} \times 100$ por ciento.

Se dice que el símbolo % para porcentaje probable evolucionó a partir de notaciones abreviadas utilizadas por el siglo XV Escribanos italianos para el término por ciento. Tales abreviaturas incluido: por 100, P 00 y Pc°, con la c en la final expresión eventualmente reemplazada por una diagonal línea. Un manuscrito de 1425 muestra el símbolo % en uso.

El término porcentaje se usa para partes por mil. con el símbolo que lo acompaña: o/oo. por ejemplo, un cantidad expresada como 543 o/oo representa 543 partes por mil, o la fracción 543/1.000.

porcentaje de error Si el ERROR o la incertidumbre en un la medida de una cantidad se expresa como un PORCENTAJE-

Machine Translated by Google

EDAD de la medición total, entonces el error se llama error porcentual. Por ejemplo, cuando se usa 1,2 como una aproximación para la cantidad 1,16, entonces el porcentaje 0,04 × 100 ≈ 3,4 %. Si, al 62 pies, los ingenieros usan un dispositivo que mide al medio pie más cercano, entonces la altura del edificio debe escribirse: 62±0,5 pies. El porcentaje error de 0,5 de esta medida es: × El 100 ≈ 0,81 por ciento. —62 Véase también ERROR RELATIVO.

medir el error de altura es —1,16 de un edificio como

percentil (percentil, cuartil) Uno de los 99 valores que dividen un conjunto de datos dispuestos en orden numérico en 100 partes iguales se denomina percentil. Por ejemplo, el percentil 90 es el valor tal que el 90 por ciento de los puntos de datos están por debajo de ese valor. A menudo, las puntuaciones de las pruebas estandarizadas se presentan en términos de percentiles. Por ejemplo, si 525 estudiantes toman un examen y el 95 por ciento de los estudiantes obtienen un puntaje de 73 o menos, entonces el percentil 95 para ese examen es 74.

A menudo se considera conveniente dividir los conjuntos de datos en cuatro partes iguales. El cuartil inferior (o primero), denominado Q1 , es el percentil 25. El cuartil medio (o segundo), Q2 , la mediana, es el percentil 50, y el cuartil superior (o tercero), Q3 , es el percentil 75.

número perfecto Un número entero que es igual a la suma de sus FACTORES, excluyendo el número mismo, se llama número perfecto. Por ejemplo, los números 6, 28, 496 y 8128 son perfectos.

$$6 = 1 + 2 + 3 = 21 (22 – 1) 28$$
$$= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 22 (23 – 1) 496 = 1$$
$$+ 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$
$$= 24 (25 – 1)$$
$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 +$$
$$2032 + 4064 = 26 (27 – 1)$$

Los eruditos antiguos consideraban que los números perfectos tenían importantes propiedades numerológicas y los griegos los estudiaron extensamente. En el libro IX de LOS ELEMENTOS, escrito alrededor del año 300 a. C., EUCLID demostró que si 2n –1 es PRIMO, entonces 2n–1(2n – 1) es un número perfecto. A principios del siglo XVII, la filósofa y matemática francesa MARIN MERSENNE emprendió un estudio para determinar qué números de la forma 2n – 1 son primos. Cualquier número de este tipo se llama hoy MERSENNE PRIME.

Alrededor del año 100 a. C. , el erudito sirio Nicomachos de Gerasa sugirió que lo contrario del resultado de Euclides es cierto, es decir, que todo número perfecto debe ser de la forma 2n–1 (2n – 1) con 2n – 1 primo. (En particular, entonces, no puede haber números perfectos impares). En 1750, LEON HARD EULER demostró que, de hecho, todo número perfecto par debe ser de esta forma, demostrando parcialmente la afirmación de Nico machos. Sorprendentemente, hasta el día de hoy nadie sabe si existen o no ejemplos de números perfectos impares. Este sigue siendo un famoso problema sin resolver. Se ha demostrado que si existe algún número perfecto impar, debe ser mayor que un GOOGOL.

El resultado de Euler muestra que todo número par perfecto es un NÚMERO FIGURA triangular. Explícitamente, 2n–1(2n–1) $= \frac{2n\,(2n-1)}{2}$ es la fórmula para el (2n – 1)-ésimo triangular numero

También se sabe que todo número perfecto par debe terminar en 6 o en 8 (esto fue conjeturado por Nicómaco) y que todo número perfecto par mayor que 6 es una suma de números cúbicos impares consecutivos:

$$28 = 13 + 33$$
$$496 = 13 + 33 + 53 + 73$$
$$8128 = 13 + 33 +…+ 153$$

por ejemplo, y que todo par perfecto es uno más que un múltiplo de 9.

La suma de los inversos de todos los factores de un 1– 2 1– 1– el número 1– siempre es 2. Por ejemplo, + + + = 2 1 6 1– 28. (Este perfecto deduce del $+ + + \frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{7} \frac{1}{y} +$ +

hecho de que la suma de todos los factores de un número perfecto N es igual a 2N. Dividir la suma entre N produce el resultado.)

No se sabe si hay infinitos perfectos números. Se conocen menos de 50 números perfectos.

Un número que no es perfecto se clasifica como abundante o deficiente según que la suma de todos sus factores, excluyendo el número entero, sea mayor o menor que el número. Por ejemplo, 18 es abundante, ya que la suma de sus factores es mayor que 18 (tenemos 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21 > 18), mientras que 25 es deficiente porque sus factores suman menos de 25. (Tenemos tener 1 + 5 = 6 < 25). Todos los números primos son deficientes.

Véase también NÚMEROS AMIGOSAS; MATEMÁTICAS GRIEGAS.

Machine Translated by Google

perigon (ángulo redondo) Un ángulo de 360° se llama perigon. Representa una vuelta completa.

perímetro La longitud del límite de una figura plana se llama su perímetro. Por ejemplo, el perímetro de un rectángulo es el doble de su largo más el doble de su ancho. El perímetro de un círculo es su circunferencia. Sorprendentemente, es posible que una figura plana de ÁREA finita tenga un perímetro infinito.

Véase también FRACTAL.

período Ver FUNCIÓN PERIÓDICA.

período de duplicación Véase SISTEMA DINÁMICO.

función periódica Una función es periódica si se repite a intervalos regulares de la variable. Por ejemplo, la función sin(x) es periódica porque realiza un ciclo cada 360°, precisamente: sin(x) = sin(x + 360°) para todos los valores de x. También tenemos que sin(x) = sin(x + 720°) y sin(x) = sin(x + 1080°), por ejemplo. El valor positivo más pequeño p para el cual una función periódica f satisface f(x) = f(x + p) para todos los valores x se denomina período de la función. La función sen(x) tiene un período de 360°, al igual que la función cos(x). (La función tangente tan(x), sin embargo, tiene un período de 180°.)

En física, cualquier fenómeno que se repite a intervalos regulares, como el balanceo de un péndulo, la vibración de una fuente de sonido o la rotación de la Tierra, se denomina periódico, y el tiempo que tarda en completarse un ciclo de el fenómeno se llama su período. Esta idea se extiende también a otras ramas de las matemáticas. Por ejemplo, el decimal repetido 45,76185185185185185… = 45,76185 tiene periodo 3, ya que se están repitiendo tres cifras, y una rotación de 60° sobre un punto del plano tiene periodo 6, ya que seis rotaciones de este tipo devuelven los puntos a su punto original. ubicaciones.

Ver también SISTEMA DINÁMICO; SERIES DE FOURIER.

permutación (arreglo, orden) Un arreglo ordenado específico de una colección dada de objetos se llama permutación. Por ejemplo, la selección de un ganador, un primer finalista, y un segundo finalista de un grupo de tres finalistas en una competencia sería una permutación de esos tres participantes. Las listas ADBC y BDCA son dos permutaciones de las letras A, B, C y D.

El PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN muestra que n objetos distintos pueden ordenarse n! diferentes caminos. ¡Hay pues 4! = 24 permutaciones diferentes en todas las letras A, B, C y D. (Ver FACTORIAL).

El número de formas de organizar solo r objetos de una colección de n objetos distinguibles (r ≤ n) se denota como P_r^n. Estas se denominan "permutaciones tomadas r a la vez". Por ejemplo, hay 12 permutaciones de A,B,C,D tomadas de dos en dos: AB, AC, AD, BA, BC, = 12. Nuevamente, BD, CA, CB, CD, DA, DB, CC. Así P_2^4 el principio de multiplicación muestra que

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En particular, las $P_n^n = n!$.

permutaciones P del conjunto completo de números {1,2,…,n} se pueden clasificar como pares o impares contando el número de veces que aparece un número grande a la izquierda de un número más pequeño. Por ejemplo, en la permutación 25143 de los primeros cinco números de conteo, el número 2 aparece a la izquierda del 1; 5 aparece a la izquierda de 1, 4 y 3; y 4 aparece a la izquierda de 3. En total, un número grande aparece a la izquierda de un número pequeño un número impar de veces. Esta permutación es extraña.

Una transposición es una permutación que intercambia solo dos objetos. Por ejemplo, 14325 representa una transposición (el 4 y el 2 han cambiado de lugar).
Se puede comprobar que es posible devolver las entradas de cualquier permutación par a su orden original aplicando un número par de transposiciones, y las entradas de una permutación impar mediante un número impar de transposiciones. Esto a menudo se toma como la definición de lo que significa decir que una permutación es par o impar.

Una permutación en la que ningún elemento aparece en su ubicación original se denomina trastorno. Por ejemplo, BCAED es un trastorno de A, B, C, D, E. Hay precisamente

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

trastornos de n objetos.

Machine Translated by Google

Para probar esto, sea Si1 i2…ik el número de permutaciones que mantienen los elementos i1 ,i2 ,…ik fijos en su lugar. (Así, los n – k objetos restantes se pueden permutar de cualquier forma.) Tenemos Si1i2…ik = (n – k)!.

Hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir k objetos, y por el PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN hay, pues,

$$(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) - (S_{12} + S_{13} + \cdots + S_{n-1,n}) + \cdots + (-1)^{n-1}(S_{12\cdots n}) = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}0!$$

permutaciones que mantienen al menos un objeto en su ubicación correcta. La fórmula anterior sigue fácilmente.

La PROBABILIDAD de que una permutación elegida al azar sea un trastorno es este número dividido por n!, el número total de permutaciones. Si n es grande, su valor es muy cercano a la serie infinita:

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

que resulta ser la SERIE DE TAYLOR de e x evaluada en x = – 1. Esto resuelve el famoso “problema del control de sombreros”:

> Un grupo de caballeros revisa sus sombreros en el guardarropa de un club de campo. El empleado pierde los registros de qué sombrero pertenece a quién y comienza a repartir sombreros al azar cuando los hombres se van. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún hombre reciba su propio sombrero?

la respuesta es aproximadamente $e^{-1} = \approx \frac{1}{e}$ 0 37 . .

Las permutaciones también se utilizan para analizar el ROMPECABEZAS DE LA DIAPOSITIVA PARA QUINCE ADOLESCENTES. El número de permutaciones de n objetos en las que cada objeto se mueve como máximo un lugar, ya sea a la izquierda o a la derecha, desde su ubicación original es Fn+1, el (n+1)-ésimo NÚMERO DE FIBONACCI.

Véase también COEFICIENTE BINOMIAL; COMBINACIÓN; FUNCIÓN; SUBFACTORIAL.

perpendicular Este término se usa en cualquier entorno para describir dos construcciones geométricas que se encuentran a la derecha ángulos. Por ejemplo, dos rectas son perpendiculares si el ángulo entre ellas es de 90°. "Dejar caer una perpendicular" de un punto a la línea es dibujar un segmento de línea que comienza en el punto dado y se encuentra con la línea en ángulo recto. La longitud de este segmento de recta es la distancia más corta entre el punto dado y los puntos de la recta.
Esta longitud se llama la distancia perpendicular del punto a la línea.

La mediatriz de un segmento de recta es la recta que forma ángulo recto con el segmento que pasa por su punto medio. Representa todos los puntos en el plano que son equidistantes de los dos extremos del segmento de línea dado. Dos planos son perpendiculares si se encuentran en ángulo recto.

El término perpendicular tiende a usarse principalmente en discusiones sobre líneas y planos. Otras cantidades geométricas (como VECTORES y superficies curvas) pueden encontrarse en ángulos rectos, pero los matemáticos tienden a usar la palabra ORTOGONAL en estos entornos. Por ejemplo, dos vectores son ortogonales si el ángulo entre ellos es de 90°. Esta convención no es firme. A menudo, las palabras perpendicular y ortogonal se usan indistintamente.

Véase también PRODUCTO DOT; NORMAL A UNA CURVA; NI MAL A UN AVIÓN; NORMAL A UNA SUPERFICIE; PENDIENTE.

perspectiva Se dice que dos figuras planas están en perspectiva desde un punto P si, para cada punto A en una figura, hay un punto B correspondiente en la otra, de modo que la línea que conecta P con A también corta a B. El punto P se llama el centro de la perspectiva.

La noción de perspectiva desempeñó un papel importante en el desarrollo de las técnicas artísticas en el siglo XV. En un intento de capturar una sensación de profundidad en una escena pintada bidimensional, los artistas del Renacimiento comenzaron a dibujar objetos en el primer plano más grandes que los del mismo tamaño en el fondo. Imaginaron un punto distante en el infinito en la parte posterior de la escena y dibujaron líneas guía que emanaban de este punto a lo largo del lienzo para ayudar a crear un realismo tridimensional.
(Hoy llamamos a tal construcción una PROYECCIÓN central.)
Los artistas y eruditos ALBRECHT DÜRER (1471–1528) y GIRARD DESARGUES (1591–1661) fueron los primeros en estudiar las matemáticas de la perspectiva.

Los matemáticos también dicen que dos figuras planas están en perspectiva desde una línea si los lados correspondientes de cada forma, si se extienden, se encuentran en puntos que se encuentran en una línea común. EL TEOREMA DE DESARGUES muestra que si dos

Machine Translated by Google

figuras planas están en perspectiva desde un punto, entonces también están en perspectiva desde una línea, y viceversa. (Aunque el teorema se establece sólo para triángulos, cualquier figura poligonal se puede subdividir en triángulos para que se aplica el teorema).

pi El número real, denotado, π, definido como la relación de la circunferencia C de un CÍRCULO de cualquier tamaño dibujado en un plano a su diámetro D, se llama pi:

$$\pi = \frac{C}{D}$$

Su valor es π = 3.141592653589793… Que el valor de esta relación es la misma para todos los círculos planos no es inmediatamente obvio. Para ver por qué este es el caso, tenga en cuenta que si cualquier diagrama o imagen se escala hacia arriba o hacia abajo por un factor k, entonces todas las longitudes en esa imagen cambian por un factor k. En En particular, para una imagen de un círculo, la longitud de su circunferencia cambia a kC y la longitud de su diámetro a kD. En consecuencia, la relación entre la circunferencia y la el diámetro permanece sin cambios: $\frac{kC}{kD} = \frac{C}{D}$. Que cualquiera de los dos círculos en el plano se pueden considerar como versiones escaladas entre sí explica por qué el valor de π es el Lo mismo para todos los círculos. (Cabe mencionar que el propiedad de escala utilizada aquí es un fenómeno de GEOMETRÍA EUCLIDEA y que el valor de π no es el lo mismo para todos los círculos en GEOMETRÍA ESFÉRICA o GEOMETRÍA HIPERBÓLICA. Por ejemplo, el valor de π cambia para círculos dibujados en esferas, que varían en valor en cualquier lugar entre 2 y 3.141592…)

Un estudio de AREA muestra que el área de un círculo de el radio r viene dado por:

$$A = \pi r^2$$

Por lo tanto, π también se puede definir como la relación entre el área de un círculo a su radio al cuadrado.

Aunque no es estándar, se puede asociar un valor π a otras formas también. Por ejemplo, la proporción de el perímetro de un cuadrado a su ancho (diámetro corto) es lo mismo para todos los cuadrados. Así podemos decir: πcuadrado = 4. (Usando la diagonal del cuadrado como el diámetro largo produce en cambio el valor πcuadrado = $\frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2.828$.) El razón del perímetro de un triángulo equilátero a su diámetro (medido como la altura del triángulo) es el Lo mismo para todos los triángulos equiláteros. Tenemos: πtriángulo $= \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \approx 3.464$. De hecho, precisamente de esta manera, al inscribir polígonos con cada vez más lados dentro de un círculo y calculando los valores asociados de π para estos polígonos, ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) mostró que el verdadero valor de π para círculos se encuentra entre $\frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71}$ y $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$. la aproximación $\frac{22}{7}$, correcto hasta dos decimales, todavía se usa a menudo hoy.

Desde la antigüedad, los eruditos han intentado para encontrar el valor exacto de π. El PAPIRO DE RHIND de el antiguo Egipto (fechado ca. 1650 a. C.) describe un procedimiento para calcular el área de un círculo que es $\frac{256}{81}$ equivalente a utilizar el valor aproximado para π. Los babilonios de la misma época utilizaron el aproximado valor $3\frac{1}{8}$. Alrededor del año 150 d.C. el astrónomo griego CLAUDIUS PTOLOMEO estableció que $\pi \approx \frac{377}{120}$, y 300 años después El erudito chino ZU CHONGZHI usó la versión mejorada aproximación $\pi \approx \frac{355}{113}$, correcta hasta seis decimales. Aproximadamente 530 EC, erudito Se establece ARYABHATA la aproximación cercana hindú $\frac{62,832}{20,000} = \frac{3,927}{1,250}$ para π, y alrededor de 1150 CE BHASKARA, después de usar esta estimación varias veces en su trabajo, señaló que el $\sqrt{10}$ servicios como una aproximación suficientemente precisa para la mayoría de los propósitos prácticos.

En 1429 el matemático árabe JAMSHID AL-KASHɪ calculó el valor de π con 16 decimales, y en 1610, utilizando un polígono de 262 lados para aproximar un círculo, el matemático alemán Ludolph van Ceulen calculó con precisión los primeros 35 lugares decimales de π. Dedicó la mayor parte de su vida a la tarea.

En 1767 el matemático suizo JOHANN HEINRICH LAMBERT demostró que π es un NÚMERO IRRACIONAL, estableciendo así que la expansión decimal para π nunca terminará ni caerá en un ciclo repetitivo. Más tarde, en 1873, el erudito inglés WILLIAM SHANKS, después de 15 años de trabajo, computado, a mano, el decimal expansión de π a 607 lugares. Desafortunadamente hizo un error en el lugar 527, lo que hace que la expansión decimal sea incorrecta, pero nadie se dio cuenta del error durante casi un siglo.

Machine Translated by Google

En 1882 el matemático alemán FERDINAND VON LINDEMANN demostró que π es un NÚMERO TRASCENDENTAL, estableciendo de una vez por todas que el problema de la CUADRATURA DEL CÍRCULO no se puede resolver.

Con la llegada de las máquinas de computación en el siglo XX, los matemáticos pudieron calcular más y más dígitos de π. En 1949, JOHN VON NEUMANN usó la computadora ENIAC del gobierno de los EE. UU. para calcular π hasta el lugar decimal 2037. (Tomó 70 horas de tiempo de máquina).
En 1981, los científicos japoneses Kazunori Miyoshi y Kazuhiko Nakayama evaluaron 2 millones de decimales de π, y en 1991, utilizando una supercomputadora casera en un apartamento de la ciudad de Nueva York, los hermanos Gregory y David Chudnovsky calcularon π con 2 260 321 366 decimales. Hoy se conocen más de 1,24 × 1012 dígitos de π.

La secuencia de dígitos 0123456789 aparece en la expansión decimal de π que comienza en el lugar decimal 17,387,594,880. Esta es la primera, pero no la única, aparición de esta secuencia. El 9876543210 aparece primero en el lugar decimal 21,981,157,633.

Hay muchas fórmulas hermosas para π. Por ejemplo, la FÓRMULA DE VIÈTE , la SERIE DE GREGORY, la FUNCIÓN ZETA y el PRODUCTO DE WALLIS muestran, respectivamente, que:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}}{2}\times\cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

$$\frac{2\,pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 4^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\cdots$$

El PROBLEMA DE LA AGUJA DE BUFFON también proporciona otra aparición sorprendente de la π. El matemático suizo LEONHARD EULER (1707-1783) también mostró:

$$\pi = 4\arctan\frac{1}{2} + 4\arctan\frac{1}{3}$$

$$\pi = 4\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{1}{3}$$

$$\pi = 20\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{3}{79}$$

(Fórmulas similares se derivan de la identidad general:

$$\arctan x = \arctan\frac{1}{xy+1} + \arctan\frac{y}{2+x+xy}$$

para las elecciones adecuadas de x e y.) El matemático húngaro PAUL ERDÖS (1913-1996) estableció el siguiente resultado notable:

> Comenzando con un entero positivo n, redondearlo al múltiplo más cercano de n – 1 y luego redondear el resultado al múltiplo más cercano de n – 2, y así sucesivamente, hasta el múltiplo más cercano de 2. Llame al resultado f (norte). (Tenemos, por ejemplo, f(3) = 4, f(5) = 10 y f(7) = 18.)
> Entonces el LÍMITE de la razón de n a $f(n)$, cuando n se vuelve grande, es π:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{f(n)} = \pi$$

Una serie de preguntas básicas sobre la interacción entre π y el número e de Euler siguen sin respuesta.
Por ejemplo, nadie sabe aún si los números o loge (π) son $\pi + e$, $\pi - e$, racionales o irracionales (ni si π^{π} es algebraico o trascendental). Es curioso que la cantidad $e^{\pi} - \pi$ tenga un valor extraordinariamente cercano a 20.

Nuestra elección de utilizar el símbolo π para denotar la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro se debe al matemático británico William Jones (1675–1749), quien lo utilizó por primera vez en su publicación de 1706 Synopsis pal mariorum matheseos . Se cree que lo eligió porque π es la letra inicial de la palabra griega para “periferia”. Euler siguió la elección de Jones y popularizó el uso de este símbolo en su influyente texto Mechanica de 1736.

El número π ha captado el interés de muchos entusiastas de las matemáticas. Hay clubes en todo el mundo para aquellos que pueden recitar, de memoria, los primeros 100 e incluso los primeros 1000 dígitos de π. Algunas personas declaran el 14 de marzo como "día pi" y consideran significativo el tiempo 1:59 de ese día. (Esto coincide con la expansión decimal 3.14159…) Hay un mnemotécnico popular para memorizar los primeros 12 dígitos de π:

> Ver. Tengo una rima que asiste a mi débil cerebro, cuyas tareas a menudo se resisten.

Machine Translated by Google

El conteo de letras de cada palabra en esta oración coincide con los primeros 13 dígitos de la expansión decimal π.

En 1897, el matemático aficionado Dr. EJ Goodwin, de Solitude, Indiana, pensó que había descubierto una notable relación entre la circunferencia de un círculo y su área. En lugar de compartir su descubrimiento con la comunidad matemática, Goodwin llevó su "descubrimiento" a su representante en la Asamblea General de Indiana y lo persuadió para que presentara el siguiente proyecto de ley:

> Sea promulgado por la Asamblea General del estado de Indiana, que se ha encontrado que un área circular es igual al cuadrado en una línea igual al cuadrante de la circunferencia.

Claramente, ningún político entendió las matemáticas de esta afirmación, ya que el proyecto de ley fue aprobado y Goodwin estaba bien encaminado para persuadir al estado de Indiana de que el área de un círculo de circunferencia C está dada por $\frac{C}{4}^2$, o, equivalentemente, que el valor de π es exactamente 4.

Afortunadamente, debido a la atención de la prensa y la indignación de los matemáticos que viven en el estado, el proyecto de ley se descarriló antes de que alcanzara la aprobación total del Senado y se convirtiera en ley. El senador Hubbell, un opositor del proyecto de ley que también vio lo absurdo del reclamo, comentó acertadamente: "El Senado también podría tratar de legislar que el agua corra cuesta arriba".

Véase también E; FÓRMULA DE EULER ; MEDIDA EN RADIANES; ESCALA.

pie chart (gráfico circular) Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

principio del casillero (principio de Dirichlet, principio del cajón, principio del buzón, schubfachprinzip) Atribuido a PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859), el principio del casillero observa que si se colocan n objetos en p cajas, y n > p, entonces al menos uno caja recibe dos o más objetos. A menudo se cita el ejemplo de alojar n palomas en p casilleros. Este principio también puede enunciarse en la siguiente forma alternativa:

> Si a cada uno de los n objetos se le asigna una de las p etiquetas, y n > p, entonces al menos dos objetos tienen la misma etiqueta.

Así, por ejemplo, si sacamos tres calcetines de un cajón que contiene sólo calcetines negros y calcetines blancos (tres objetos, dos etiquetas), al menos dos de esos calcetines serán del mismo color.

Este sencillo principio tiene una serie de consecuencias sorprendentes. Por ejemplo:

> Existen dos personas (no calvas) en Sydney, Australia, con exactamente el mismo número de cabellos en la cabeza.

(Etiquete a cada persona por la cantidad de cabellos en su cabeza. Se sabe que ningún ser humano tiene más de 1 millón de cabellos, y hay más que esta cantidad de personas en Sydney).

> Cualquier colección de 18 enteros contiene dos enteros que difieren en un múltiplo de 17.

(Asigne a cada número entero su resto cuando se divide por 17. Tenga en cuenta que hay 17 restos posibles, del 0 al 16; cualquier colección de 18 enteros debe contener dos miembros con el mismo resto. Su diferencia es un múltiplo de 17).

> En cualquier grupo de seis personas, hay dos que tienen el mismo número de amigos en el grupo.

(Asigne a cada persona el número de amigos que tiene en el grupo. Los seis números del 0 al 5 son posibles, pero no el 0 y el 5 simultáneamente.
Así, entre los seis del grupo, sólo son posibles cinco etiquetas. Dos personas deben poseer el mismo valor.)

El principio del casillero se puede generalizar de la siguiente manera:

> Si a cada uno de los nk + 1 objetos se le asigna una de las n etiquetas, entonces al menos a k + 1 objetos se les asigna la misma etiqueta.

(Si cada etiqueta se usa como máximo k veces, entonces como máximo se etiquetan nk objetos. Como hay más objetos que este, algunas etiquetas deben usarse más de k veces). Como consecuencias tenemos, por ejemplo:

> Entre 2.000 personas, al menos cinco nacieron el mismo día del año.

(Etiquete a cada persona con el día en que nació. Como hay 366 etiquetas posibles y 2000 = 366 × 5 + 170 > 366 × 5 + 1, al menos cinco personas tienen la misma etiqueta).

Machine Translated by Google

> Si 865 puntos están dispersos en una hoja de papel cuadrada de 1 pie de ancho, entonces unos siete de esos puntos se agruparán lo suficientemente cerca como para estar en un cuadrado de 1 pulgada de ancho.

(Divida la hoja de papel en 144 cuadrados, cada uno de 1 pulgada de longitud de lado y etiquete cada punto por el cuadrado en el que se encuentra. Para los puntos que caen en una línea entre dos cuadrados, decida arbitrariamente a qué cuadrado pertenece.
Como 865 = 144 × 6 + 1, uno de estos cuadrados pequeños contiene siete puntos).

El siguiente principio a veces se considera una variación del principio del casillero:

> Si n números suman S, entonces no todos los números son mayores que $\frac{S}{n}$. Además, no todos los números son menor que $\frac{S}{n}$.

Como consecuencia simple tenemos:

> Si los salarios de cinco trabajadores sumaron $100,000, entonces al menos un trabajador no ganó más de $20,000.

Véase también COMBINADORES.

sistema de valor posicional Ver BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO.

plano Informalmente, un plano es una superficie plana que no tiene bordes y se extiende infinitamente en todas las direcciones. Más precisamente, un plano es una superficie geométrica, sin bordes, con la propiedad de que cualquier línea recta que conecta dos puntos en la superficie permanece en la superficie.

Los planos se consideran bidimensionales: dentro de la superficie solo hay dos direcciones de movimiento independientes: "izquierda y derecha" y "hacia adelante y hacia atrás". Cualquier otro movimiento (movimiento diagonal, por ejemplo) puede considerarse como un efecto combinado de estos dos movimientos.

Sentado en un espacio tridimensional, se piensa en un plano como un objeto geométrico sin grosor. Es posible escribir una ecuación para tal plano.

(Ver ECUACIÓN VECTORIAL DE UN PLANO.)

La geometría plana es el estudio de las relaciones entre puntos, líneas y curvas que se encuentran en el mismo plano. Una figura plana es una figura, como un cuadrado, un círculo o un triángulo, que yace en un avión. Los puntos que están todos en el mismo plano se llaman coplanares.

Dos planos sentados en un espacio tridimensional se intersecan si comparten puntos en común. Si lo hacen, el conjunto de puntos que comparten forma una línea recta. Dos planos que no se cortan se llaman paralelos. Tres planos sentados en un espacio tridimensional pueden intersecarse en un punto, a lo largo de una línea o no intersecarse en absoluto.

Tanto en el espacio bidimensional como en el tridimensional, dos puntos P y Q determinan una línea. En el espacio tridimensional, tres puntos P, Q y R determinan un plano (con la condición de que P, Q y R no estén sobre una línea recta). Para ver esto, considera la línea que pasa por P y Q. Hay infinitos planos que contienen esta línea. El punto R determina cuál de estos planos elegir. (Alternativamente, usando el análisis VECTORIAL , los VECTORES DE POSICIÓN QR son dos vectores en el plano deseado, por lo que su CRUZ QR es normal al plano. Esto es todo lo que necesitamos para escribir la ECUACIÓN VECTORIAL DE UN PLANO.) Cualquiera de los tres puntos en el espacio tridimensional son coplanares.
PRODUCTO n = $\overrightarrow{\text{relaciones públicas}} \times \overrightarrow{\text{relaciones públicas}}$

Cuatro puntos pueden o no estar todos en el mismo plano. Esta es la razón por la que es poco probable que las sillas de cuatro patas sean estables en suelos ásperos e irregulares. Las puntas de las patas de la silla representan cuatro puntos coplanares, pero es posible que las ubicaciones en las que desea colocar estos puntos en un piso irregular no lo sean. Un taburete de tres patas, sin embargo, siempre será estable, ya que tres puntos cualesquiera en el suelo irregular serán coplanares. Por esta razón, los taburetes de granero que se usan para ordeñar, por ejemplo, se fabrican tradicionalmente con tres patas.

Platón (ca. 428–348 a. C.) Filosofía griega Nacido en Atenas, Grecia, el filósofo Platón es recordado en matemáticas por promover la noción de que los conceptos matemáticos tienen una existencia real independiente del pensamiento humano. En consecuencia, esto está relacionado con el argumento de que los matemáticos descubren las matemáticas, en lugar de crearlas . Platón consideró las matemáticas como una parte esencial de una educación valiosa, e influyó mucho en la estima con la que se consideran las matemáticas en el mundo occidental. También fue el primero en describir los cinco SÓLIDOS PLATONICOS.

Platón era un hombre mundano muy interesado en la política y los asuntos humanos. Fue miembro del servicio militar durante la Guerra del Peloponeso.

Machine Translated by Google

(431-404 a. C.) entre Atenas y Esparta, y él
viajó por Egipto e Italia una vez que la democracia fue
restaurado a Atenas. En Egipto, Platón se enteró de la
reloj de agua y más tarde trajo la idea a Grecia.
En Italia se encontró con los seguidores de PITÁGORAS
y fue muy influenciado por las matemáticas que
estudió. Aunque Platón no hizo contribuciones directas
a las matemáticas, su respeto por la materia era profundo, y escribió
extensamente sobre la filosofía de la materia en sus obras.

Alrededor del 387 a. C. , Platón regresó a Atenas para
fundó una escuela dedicada a la instrucción y la investigación en
la filosofía y las ciencias. Él aseguró un pedazo de tierra
del héroe griego Academos, y la escuela se convirtió
conocida como la Academia. Platón presidió el instituto por el resto
de su vida.

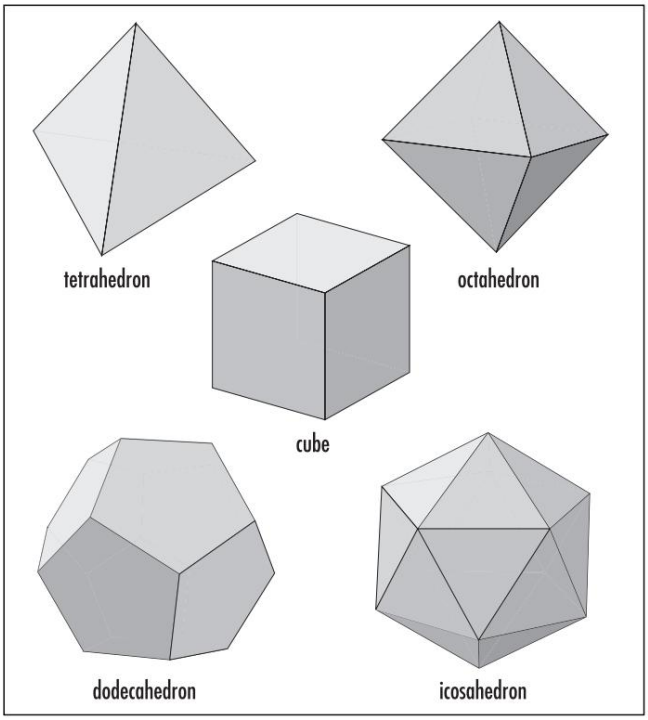
Platón escribió un total de 35 diálogos, conversaciones ficticias
entre personajes, ingeniosamente estructurados para
para revelar una línea filosófica de pensamiento e investigación. En
su diálogo Fedón, Platón describió los objetos matemáticos como
formas perfectas (una línea, por ejemplo,
realmente es un objeto que no posee amplitud), y profesó que los
objetos que vemos y podemos construir en el
universo físico son imitaciones imperfectas de estos ideales
formularios También discutió estas ideas en su obra The
República. Está claro en sus diálogos que Platón
Consideró las matemáticas como una fuente de verdad universal.
y que el estudio de las matemáticas ofrecía la mejor herramienta
para fomentar el desarrollo intelectual.

En su obra Timeo, Platón describió los cinco sólidos
platónicos como unidades fundamentales del universo. Él
sugirió, por ejemplo, que cada uno de los cuatro "elementos" (tierra,
fuego, aire y agua) es apropiadamente
modelado por la forma de un sólido platónico, a saber, el
CUBO, el TETRAEDRO, el octaedro y el
icosaedro, respectivamente. El quinto sólido platónico, el
dodecaedro, con sus 12 caras coincidentes con los 12 signos
del zodiaco, representaba el universo mismo. Alemán
el astrónomo JOHANNES KEPLER (1571–1630) fue tan
enamorado de la propuesta de armonía de la platónica
sólidos que más tarde desarrolló un sorprendentemente preciso
modelo del sistema solar basado en ellos.

La actitud y el respeto de Platón hacia el mismo
naturaleza del pensamiento matemático tuvo una influencia duradera
sobre todo el curso del progreso científico en Occidente.
Además de promover el valor de las matemáticas puras,
Platón también enfatizó la necesidad de una prueba rigurosa,
sentando así una base filosófica para otros
ers, sobre todo EUCLID, en el que continuar la investigación.
Platón también es acreditado por limitar el uso de formas geométricas.
herramientas al compás y la regla solamente.

Sólido platónico (poliedro regular) Cualquier POLIEDRO convexo,
cuyas caras son polígonos regulares congruentes, se denomina
sólido platónico. Por ejemplo, un CUBO,
compuesto por seis caras cuadradas idénticas, es un sólido platónico,
como lo es un TETRAEDRO compuesto por cuatro caras triangulares
equiláteras idénticas. Los sólidos platónicos tienen la propiedad
que no sólo todas sus caras son idénticas, sino que todas sus
los vértices también son iguales en el sentido de que el mismo número
de aristas se encuentran en cada vértice del poliedro.

Los eruditos griegos clásicos estudiaron extensamente los
polígonos regulares y los poliedros regulares. En el espacio
bidimensional, polígonos regulares con cualquier deseado
existe número de lados. En el espacio tridimensional, sin embargo,
sólo hay un pequeño número de poliedros regulares. Como propuesta
final en su reverenciada obra EL
ELEMENTOS, el geómetra EUCLID (ca. 300-260 a. C.)
mostró que solo hay cinco sólidos platónicos, a saber:



Los sólidos platónicos

Machine Translated by Google

1. Tetraedro regular, con cuatro caras triangulares y tres aristas que se unen en cada vértice 2. Cubo,
con seis caras cuadradas y tres aristas que se unen en cada vértice 3.
Octaedro, con ocho caras triangulares y cuatro
aristas que se encuentran en cada vértice
4. Dodecaedro, con 12 caras pentagonales y tres
aristas que se encuentran en cada vértice
5. Icosaedro, con 20 caras triangulares y cinco aristas que se unen en cada vértice

No es difícil ver por qué no puede haber otros sólidos platónicos. Observe que para cualquier poliedro, al menos tres caras poligonales deben encontrarse en cada vértice del sólido y que, para formar un pico en ese vértice, los ángulos de las caras que se encuentran en ese vértice deben sumar menos de 360°. (Si la suma de los ángulos alrededor de un vértice es exactamente 360°, entonces la superficie sería plana en el vértice. Si, por otro lado, los ángulos suman más de 360°, entonces la superficie se hundiría en ese vértice .) Ahora considere los diversos polígonos regulares que podrían usarse para construir un sólido platónico:

Triángulos equiláteros: cada ángulo en un triángulo equilátero mide 60°. Por lo tanto, tres, cuatro o cinco de estos triángulos podrían rodear un vértice de un poliedro, pero no seis o más. (La suma de los ángulos ya no sería inferior a 360°.) De hecho, cada una de estas posibilidades ocurre. Estos son el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, respectivamente.

Cuadrados: Cada ángulo en un cuadrado es igual a 90°. Por lo tanto, solo tres cuadrados podrían rodear un vértice en un poliedro. De hecho, esto ocurre. es el cubo.

Pentágonos regulares: cada ángulo en un pentágono regular es igual a 108°, por lo que solo tres pentágonos podrían rodear un vértice en un poliedro. De hecho, esto ocurre. Es el dodecaedro.

Hexágonos Regulares y Mayores: Cada ángulo en un polígono regular con seis o más lados es de 120° o mayor.
No hay tres de estas figuras que puedan rodear un vértice en un poliedro.

Que cada sólido platónico pueda colocarse dentro de una ESFERA, la figura tridimensional más perfecta, según la antigua secta pitagórica del año 500 a. C., de tal manera que cada vértice del sólido apenas toque la esfera, se consideró profundamente significativo en tiempos de la antigüedad Los griegos asociaron cada sólido platónico con un “elemento” del mundo físico. El tetraedro, con su volumen mínimo por unidad de superficie, era fuego, y el cubo estable era tierra sólida. El octaedro menos estólido era el aire, y el icosaedro, con la relación máxima de volumen por superficie, era el agua. Los pitagóricos, en un principio, desconocían la existencia del dodecaedro, pero al descubrirlo atribuyeron a esta figura el significado de todo el universo. (Sus 12 caras coinciden con los 12 signos del zodíaco). La palabra quintaesencia, que hoy significa el aspecto mejor o más puro de alguna cosa inmaterial, se deriva de la frase quinta esencial que significa el quinto elemento, es decir, el dodecaedro que representa todo. El filósofo PLATÓN (ca. 428–348 a. C.) escribió extensamente sobre los cinco poliedros regulares y su significado en su obra Timeo. Esta es la razón por la que hoy los llamamos sólidos platónicos.

El astrónomo y matemático alemán JOHANNES KEPLER (1571–1630) también trató de atribuir un significado especial a los cinco sólidos platónicos. En su época, solo se conocían cinco planetas, y Kepler trabajó para relacionar las órbitas de estos planetas de alguna manera con los cinco sólidos especiales. Propuso que la órbita de cada planeta estaba sobre una esfera y que la distancia entre esferas sucesivas era precisamente tal que cada uno de los sólidos platónicos, a su vez, encajaba perfectamente entre las dos esferas, con la esfera interior tocando las caras de la otra. poliedro, y los vértices del poliedro apenas tocan la esfera exterior. Kepler luego abandonó esta teoría. (Él, de hecho, se destaca por descubrir que la órbita de cada planeta no es un círculo sino una ELIPSE) . Sin embargo, es interesante notar que, teniendo en cuenta la excentricidad, su teoría del sólido platónico para los primeros cinco planetas es con una precisión de aproximadamente el 5 por ciento.

Si asumimos que cada borde de un sólido platónico tiene 1 unidad de longitud, entonces el VOLUMEN V de cada sólido se da de la siguiente manera:

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$_{\text{cubo en V}} = 1$$

$$V_{\text{octaedro}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$V_{\text{dodecaedro}} = \frac{15 + 5\sqrt{\ }}{4}$$

$$_{\text{vicosaedro}\ _} = \frac{5(\ ) + \sqrt{\ }}{12}$$

Machine Translated by Google

Vale la pena mencionar que, al igual que los sólidos platónicos, solo hay un número finito de poliedros semirregulares, es decir, poliedros con dos tipos de caras, cada una de las cuales es un polígono regular con cada vértice igual. Por ejemplo, el patrón clásico de 12 pentágonos y 20 hexágonos en un balón de fútbol representa un poliedro semirregular. ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287–212 a. C.) demostró que solo hay 13 poliedros semirregulares. Por esta razón, hoy en día se denominan sólidos de Arquímedes.

Véase también FIGURAS CONGRUENTES; POLÍGONO.

El axioma de Playfair Ver PARALELO; POSTULADO PARALELO.

trazar El acto de especificar la ubicación de un punto en un conjunto de ejes de coordenadas se denomina "trazar" el punto. Si un conjunto de puntos se especifica mediante una ecuación de la forma y = f(x), entonces la gráfica de la ecuación a veces se denomina gráfica.

Ver también COORDENADAS CARTESIANAS; COORDENADAS; GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN; DIAGRAMA DE DISPERSIÓN.

más El símbolo utilizado para denotar ADICIÓN es el signo más, +. Por ejemplo, el número 4 aumentado por la suma de dos unidades más se escribe 4+2. En general, cualquier operación que deba interpretarse como análoga a la suma se denota con un signo más. Por ejemplo, la operación GRUPO en un grupo abeliano abstracto generalmente se denota +. Como adjetivo, el símbolo + se usa para describir una cantidad de valor positivo. Por ejemplo, +4 es una cantidad 4 unidades mayor que cero.

Se cree que el símbolo se deriva de la abreviatura de la palabra latina et para "y", que se usaba a menudo para describir la adición: 4 y 2 suman 6, por ejemplo.
Un manuscrito latino de 1489 sobre aritmética escrito por Johannes Widman contiene el primer uso impreso conocido del símbolo. También contiene el símbolo "-" para SUB TRACCIÓN, que se cree que ya ha sido de uso común en Alemania durante varias décadas.

El símbolo de más/menos, ±, se usa para indicar una cantidad que se debe sumar y restar.
Por ejemplo, las dos soluciones a la CUADRATICA $\pm 1\ 5$
ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ se puede escribir $\frac{\sqrt{\ }}{2}$. Si el
la elección de la operación es importante, los matemáticos introducirán el símbolo . Por ejemplo, la expresión $a \pm bc$ indica que la segunda operación debe ser diferente de la primera. (Por lo tanto, la expresión se puede interpretar como a + b – c o a – b + c, pero no como a + b + c o a – b – c). Sin embargo, las cosas son confusas. Si no se utiliza el símbolo, todas las opciones de operaciones se consideran permisibles. La expresión a ± b ± c, por ejemplo, podría ser cualquiera de las cuatro posibilidades.
No hay ningún símbolo especial que indique que ambas operaciones deben ser iguales.

El símbolo más/menos fue utilizado por primera vez por los franceses. matemático Albert Girard en su texto Tables de 1621.

Poincaré, Jules-Henri (1854–1912) Francés Análisis, topología, mecánica Nacido el 29 de abril de 1854 en Nancy, Francia, el matemático Jules-Henri Poincaré es recordado como uno de los grandes genios de todos los tiempos que estuvo activo en casi todos los área de matemáticas y física. Poincaré fundó el campo de la TOPOLOGÍA algebraica (la aplicación de técnicas algebraicas para resolver problemas sobre el espacio, la figura y la forma) y descubrió una importante clase de funciones llamadas funciones automórficas. (Estas funciones, definidas en el campo de NÚMEROS COMPLEJOS, son cocientes de funciones lineales y tienen la propiedad de ser invariantes bajo varias simetrías del plano complejo.) En matemáticas aplicadas, es recordado por su importante trabajo en la teoría de mecánica celeste y por su trabajo en óptica, electromagnetismo, termodinámica, teoría cuántica y el desarrollo de la teoría de la relatividad especial. (Se le considera co-descubridor de la teoría especial con ALBERT EINSTEIN y Hendrik Lorentz.) Poincaré publicó más de 500 memorias durante su vida, así como una serie de libros de divulgación sobre la filosofía de las matemáticas y la ciencia.

Después de trabajar como ingeniero de minas en Vesoul durante varios años, Poincaré recibió un doctorado en matemáticas de la Universidad de París en 1879. Su tesis examinó las aplicaciones de las ECUACIONES DIFERENCIALES y sirvió como trampolín para su trabajo posterior en topología, funciones automórficas, y en física.
Poincaré tenía talento para reconocer conexiones entre temas de estudio dispares, lo que le permitía resolver problemas desde muchas perspectivas diferentes.

Poincaré publicó su primera obra sobre el tema de la topología en 1895 con su texto Analysis situs (Análisis de la posición). Al mismo tiempo también esbozó su método de teoría de la homotopía basado, esencialmente, en la

Machine Translated by Google

idea simple de que, aunque cualquier bucle dibujado en la superficie de una ESFERA puede reducirse continuamente hasta un punto (mientras permanece en la superficie de la esfera), el Lo mismo no es cierto para bucles dibujados en las superficies de otros objetos tridimensionales. Por ejemplo, no todos los lazos dibujados en la superficie de un TORO son homotópicamente equivalentes a un punto. Así, el estudio de bucles en superficies conduce a un método para distinguir superficies. (Esto es importante, por ejemplo, si uno está tratando de determinar la forma de objetos matemáticos que no se pueden visualizar). Poincaré conjeturó que cualquier superficie que tenga las mismas propiedades de homotopía de una esfera es topológicamente lo mismo que una esfera. Este resultado, conocida como la conjetura de Poincaré, se conoce desde hace mucho tiempo para sostener para superficies uni y bidimensionales, y, desde 1982, para superficies de cuatro y más dimensiones. El trabajo para demostrar que la conjetura es cierta para superficies tridimensionales continúa hoy.

De 1892 a 1899 Poincaré publicó su obra en tres volúmenes Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste (Nuevos métodos en mecánica celeste), un hito que pretendía caracterizar todas las posibles movimientos de sistemas mecánicos.

Fue nombrado presidente de la facultad de ciencias de la la Universidad de París en 1881, cátedra de matemáticas física y probabilidad en la Universidad de la Sorbona en 1886 y, en el mismo año, presidente de la prestigiosa École Polytechnique. Sostuvo estas sillas hasta que su muerte en 1912. En 1887 Poincaré fue elegido, por separado, para las cinco secciones de la Académie des Sciences (mecánica, física, geografía, navegación y geom etría), y en 1908 también fue elegido miembro de la Académie Française. También recibió una extraordinariamente grande número de premios y distinciones de otras instituciones científicas de todo el mundo, incluida la ROYAL SOCIETY MEDALLA SYLVESTER en 1901 y la Medalla Bruce de la Sociedad Astronómica del Pacífico en 1911.

Poincaré murió en París, Francia, el 17 de julio de 1912.

punto Una ubicación en el espacio (o en una curva o una superficie) se llama punto. Un punto generalmente se especifica por su COORDENADAS en un sistema de coordenadas. Por ejemplo, un punto en un sistema tridimensional de CARTESIANO COORDENADAS viene dada por un triple de números (x,y,z). En GEOMETRÍA elemental , un punto es un término indefinido pero se piensa libremente como una entidad geométrica que tiene sin dimensiones El geómetra EUCLID (ca. 300 a. C.) dio la vaga descripción de un punto como “aquello que no tiene anchura.”

Se dice que una colección de líneas es CONCURRENTE si las líneas se encuentran en un punto común. UN TRIÁNGULO posee muchos puntos interesantes de concurrencia.

En aritmética, el punto decimal es el símbolo utilizado separar la parte entera de un número de su parte fraccionaria. Por ejemplo, el número 2.53 se lee como "dos punto cinco tres".

Véase también REPRESENTACIÓN DECIMAL; NUEVE PUNTO CÍRCULO; TRAMA.

punto de contacto (punto de tangencia) El punto único en el que dos curvas, o dos superficies curvas, se tocan, pero no cruzar, se llama punto de contacto. Por ejemplo, el punto en el que una pelota que está sobre una mesa toca el superficie de la mesa es el punto de contacto de una ESFERA y un AVIÓN.

Véase también TANGENTE.

Poisson, Siméon-Denis (1781–1840) Teoría de la probabilidad francesa Nacido el 21 de junio de 1781 en Pithiviers, Francia, se recuerda al erudito Siméon-Denis Poisson por su trabajo fundamental sobre la teoría de la PROBABILIDAD, por el descubrimiento de la distribución que lleva su nombre, y también por su formulación de la LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS, todo completado en la última parte de su carrera matemática. Antes de eso, Poisson había hecho importantes contribuciones al tema de la mecánica celeste y a la teoría de la electricidad y el magnetismo.

Poisson ingresó en la École Polytechnique de París en 1798 para estudiar matemáticas bajo la dirección de JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) y PIERRE SIMON LAPLACE (1749–1827), ambos miembros de la facultad en ese momento. Después de graduarse apenas dos años más tarde, a Poisson se le concedió una cátedra adjunta en la institución y más tarde una cátedra completa en 1806.

Durante este período temprano de su carrera, Poisson estudió ECUACIONES DIFERENCIALES así como SERIE DE POTENCIAS. y sus aplicaciones a la mecánica y la física. A partir de 1808 produjo resultados fundamentales que se extienden el trabajo de Laplace y Lagrange sobre el movimiento del planetas, desarrollando nuevas técnicas de series para aproximar soluciones a perturbaciones en sus órbitas. Publicó un influyente tratado en dos volúmenes sobre el tema de la mecánica en 1811 y resolvió problemas importantes en

Machine Translated by Google

la teoría de la gravitación en los años siguientes. Encontró aplicaciones de este trabajo a la teoría del electromagnetismo en 1813 y a la teoría de la transferencia de calor en 1815.

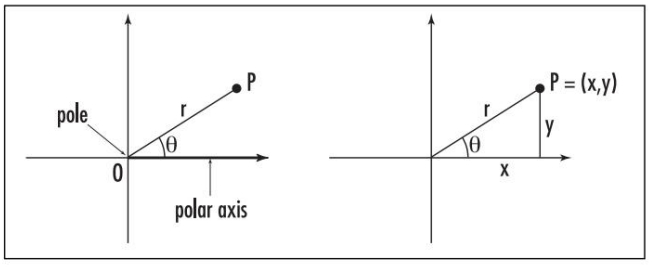
Al final de su carrera, los intereses de Poisson se volcaron hacia la probabilidad. Fascinado por los estudios del comportamiento social, comenzó a analizar la probabilidad de que ocurra un evento aleatorio en un intervalo de tiempo dado, dado que su probabilidad de ocurrir es muy pequeña, pero el número de oportunidades para que ocurra es grande. Este trabajo lo llevó a descubrir la DISTRIBUCIÓN DE POISSON, como se la llama hoy, cuyos detalles publicó en 1837.

Poisson fue un escritor prolífico y publicó más de 300 trabajos matemáticos durante su carrera. Desafortunadamente, los estudiosos de la época generalmente no consideraban importante su último trabajo, y Poisson nunca disfrutó del pleno respeto de la comunidad matemática. Fue solo después de su muerte, el 25 de abril de 1840, que se hizo evidente la importancia de sus muchas ideas innovadoras.

Distribución de Poisson Ver DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

coordenadas polares Inventadas por SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) las coordenadas polares identifican la ubicación de un punto P en el plano por su distancia r desde un punto fijo O en el plano, llamado origen o polo, y el ángulo θ la línea segmento OP hace con un rayo fijo colocado en O, llamado eje polar. El polo suele tomarse como el origen de un sistema estándar de COORDENADAS CARTESIANAS, siendo el eje polar el eje x positivo , y el ángulo θ medido en el sentido contrario a las agujas del reloj. El par de números (r,θ) se llama coordenadas polares de P.

Como ejemplo, el punto 1 unidad a lo largo del eje x y 1 unidad a lo largo del eje y, escrito (1,1) en cartesiano



Coordenadas polares

coordenadas, es una distancia $\sqrt{2}$ desde el origen y hace un ángulo de 45° con el eje x, y también tiene coordenadas polares ($\sqrt{2}$,45°). Sumando múltiplos de 360° a la ángulo, uno puede identificar el mismo punto como ($\sqrt{2}$,405°), ($\sqrt{2}$.765°) o incluso ($\sqrt{2}$, –315°), por ejemplo. Esto muestra que la representación de coordenadas polares de un punto no es única. Las coordenadas polares del origen no están bien definidas y, por lo general, se hace referencia a este punto simplemente como el punto con r = 0.

Es posible convertir entre coordenadas polares y cartesianas. Si un punto P tiene coordenadas cartesianas (x,y) y coordenadas polares (r,θ) , entonces P se encuentra en el vértice de un triángulo rectángulo con un lado horizontal de longitud x y un lado vertical de longitud y. La longitud r es la hipotenusa del triángulo y, por TRIGONOMETRÍA, θ es un ángulo cuyo seno es y/r, el coseno es x/r y la tangente es y/x. Así, con la ayuda del TEOREMA DE PITÁGORAS , tenemos las ecuaciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Como comprobación vemos que el punto P = (1,1) dado en coordenadas cartesianas sí tiene coordenadas polares el dado por $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45°$. El punto Q con coordenadas polares (2,30°) tiene coordenadas cartesianas dadas por: $x = 2\cos(30) = \sqrt{3}$ y $y = 2\sin(30) = 1$. Así Q = ($\sqrt{3}$,1).

Las coordenadas polares son útiles para describir ecuaciones en matemáticas que tienen simetría central con respecto al origen. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas, la ecuación de un círculo de radio cinco dice: $x^2 + y^2 = 25$. En coordenadas polares, esta ecuación se reduce a (rcosθ) (rsinθ) ply r = 5. La ecuación de una $r^2 = 25$, es decir, $r^2(\cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta) = r^2 = 25$, o sim ESPIRAL DE ARQUIMEDIO también es elemental en coordenadas polares: r = aθ para algunos constante A.

UNA DOBLE INTEGRAL $\iint_R f(x,y)dA$ se define como el volumen bajo el gráfico z = f(x,y) sobre una región R en el plano xy. Se puede calcular como una integral iterada $\iint f(x,y)dxdy$ con los límites de integración apropiados insertados. Para convertir esta integral a una expresada en coordenadas polares, se realiza una integración doble dada por $\iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$. La aparición de la r en el integrando se explica de la siguiente manera:

Machine Translated by Google

Subdivida la región R en pequeños fragmentos apropiados para su examen con coordenadas polares. el kth la sección es entonces una región dada por los valores r y θ acotado entre valores fijos: rk1 < r < rk2 y θk1 < θ < θk2 . Aparece como la región entre un sector de ángulo θk2 – θk1 de radio rk2 y el sector del mismo ángulo pero en un radio más pequeño rk1 , por lo que tiene área:

$$dA_k = \frac{\theta_{k2} - \theta_{k1}}{2\pi} \pi r_{k2}^2 - \frac{\theta_{k2} - \theta_{k1}}{2\pi} \pi r_{k1}^2$$

$$= \frac{1}{2}(\theta_{k2} - \theta_{k1})(r_{k2}^2 - r_{k1}^2)$$

$$= \frac{r_{k1} + r_{k2}}{2}(\theta_{k2} - \theta_{k1})(r_{k2} - r_{k1})$$

$$= \frac{r_{k1} + r_{k2}}{2} d\theta_k dr_k$$

donde $d\theta_k = \theta_{k2} - \theta_{k1}$ y $dr_k = r_{k2} - r_{k1}$. El doble la integral se da entonces como un límite

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\text{porque } \theta_k, r_k \text{ pecado } \theta_k)\,dA_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\text{porque } \theta_k, r_k \text{ pecado } \theta_k) \frac{r_{k1} + r_{k2}}{2} dr_k d\theta_k$$

se hizo cargo de subdivisiones cada vez más finas de la región R. Pero en este límite, los valores rk1 y rk2 se aproximan un valor común r, por lo que el término $= r$ aparece en 2 el integrando. (Cálculos similares explican por qué uno debe insertar una r al convertir una integral a COORDENADAS CILÍNDRICAS, y un término $\rho^2 \operatorname{sen}$ al convertir a COORDENADAS ESFÉRICAS).

Véase también CARL GUSTAV JACOB JACOBI; ROSA.

Pólya, George (1887–1985) Educación húngara, Geometría, Teoría de números Nacido el 13 de diciembre de 1887, en Budapest, Hungría, el matemático George Pólya es recordado no solo por su influyente trabajo en los campos de la teoría de la PROBABILIDAD , matemática física, GEOMETRÍA, COMBINACIÓN y NÚMERO TEORÍA, sino también por su trabajo histórico en educación matemática y resolución de problemas. Su famosa obra Cómo resolverlo proporcionó herramientas heurísticas para romper problemas complicados en componentes más simples y desarrollar estrategias de ataque y proporcionar prácticas ideas para encontrar soluciones y comprender el proceso creativo de hacer matemáticas. el trabajo fue inmensamente influyente y fue traducido a 17 idiomas, vendiendo más de 1 millón de copias. Polia es también conocido por acuñar el nombre TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL por el famoso resultado fundamental utilizado en ESTADÍSTICA.

Pólya recibió un doctorado en matemáticas de la Universidad de Budapest en 1912 después de completar una tesis sobre el tema de la probabilidad geométrica. Estaba interesado no sólo en comprender las matemáticas, sino también el proceso por el cual se descubre. En 1913 comenzó trabajar en un libro de texto en ANÁLISIS que organizaba temas y problemas no por su tema, sino por su método de solución. Este pensamiento pronto lo llevó a la trabajar en el arte de resolver problemas y escribir su famoso texto Cómo Resolverlo. En breve resumen, Pólya desarrolló el siguiente plan básico de cuatro etapas para resolviendo un problema:

1. Comprender el problema. (Identificar los conocidos y las incógnitas Dibuja un diagrama o una tabla. Utilizar el diagrama para identificar relaciones entre las variables o hacer lo mismo con fórmulas algebraicas).
2. Diseñe un plan. (Considere si el problema es similar a un ejemplo previamente resuelto. Busca un patrón. Considere fórmulas conocidas que puedan ser aplicables. Hacer conjeturas y uso de ensayo y error. romper el problema en partes más pequeñas o cajas. Trabaje hacia atrás desde el solución indicada. Repita el problema.)
3. Llevar a cabo el plan. (Revise cada paso. Demuestre o verifique cada paso.)
4. Mire hacia atrás, verifique el trabajo y reflexione sobre el problema. (¿Tiene sentido la solución obtenida? ¿Puede la solución se encuentra a través de un diferente, y tal vez más corto, ¿método? Haga preguntas de "qué pasaría si". ¿Qué pasa si la pregunta se cambia de cierta manera? ¿Qué pasa si se omiten algunas condiciones o declaraciones en el problema?)

Al identificar el proceso de pensamiento detrás de la resolución problemas por primera vez, Pólya revolucionó el arte de la educación matemática. Sostuvo que el mayor bien en la enseñanza de las matemáticas proviene de proporcionar estudiantes la oportunidad de descubrir resultados por sí mismos y que el desarrollo de la resolución de problemas habilidades proporciona los medios apropiados para que esto ocurra.

Pólya recibió muchos honores a lo largo de su vida, incluyendo la elección a la London Mathematical Society,

Machine Translated by Google

la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, la Academia Americana de las Artes y las Ciencias, y la Academia Suiza de Matemáticas. En 1933 fue premiado una beca Rockefeller para apoyar una visita a Princeton Universidad, y a mediados de la década de 1940, Pólya aceptó un posición en la Universidad de Stanford, donde permaneció durante el resto de su carrera. Murió en Palo Alto, California, el 7 de septiembre de 1985. Su texto clásico aún se utiliza hoy en día como el modelo estándar para cursos de resolución de problemas de nivel secundario y universitario.

polígono Una figura geométrica plana limitada por un número de rectas se llama polígono. El nombre se deriva del idioma griego con significado poli "muchos" y gonia que significa "ángulo". Es usual asumió que no hay dos líneas que forman la figura se cruzan (excepto en las esquinas o vértices del polígono). El polígono se llama convexo si el interior de la figura se encuentra completamente en un lado de cada línea utilizada para formar él. Se llama cóncavo de lo contrario. (Por ejemplo, un cuadrado es un polígono convexo, y la forma de una estrella es un polígono cóncavo).

La siguiente tabla da los nombres de los polígonos. con diferente número de lados.

Lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Nonágono o Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono o Endecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono o Triskaidecágono
14	tetradecágono o tetrakaidecágono
15	Pentadecágono o Pentakaidecágono
dieciséis	Hexadecágono o Hexakaidecágono
17	Heptadecágono o Heptakaidecágono
18	Octadecágono u Octakaidecágono
19	Eneadecágono o Eneakaidecágono
20	Icoságono
30	Triacontágono
40	tetracontagono
50	pentacontagon
60	hexacontágono
70	Heptacontagon
80	Octacontagono
90	Eneacontagon
100	Hectágono

Un polígono de n lados (un n-ágono) también tiene n interior ángulos, cada uno de los cuales es menor de 180° si el polígono es convexo. (Un polígono cóncavo tiene al menos un interior ángulo mayor de 180°.)

UNA DIAGONAL de un polígono es una línea recta que conecta dos vértices no adyacentes. dibujando todos los diagonales de un vértice dado muestra que cualquier convexa El polígono de n lados se puede subdividir en n–2 triángulos. (Lo mismo es cierto para los polígonos cóncavos, pero uno puede necesita usar una colección diferente de diagonales.) Como el la suma de los ángulos interiores de un TRIÁNGULO es 180°, esto muestra que los ángulos interiores de cualquier polígono de n lados suma a (n – 2) × 180°. Así, por ejemplo, el interior ángulos de cualquier cuadrilátero sumados a 2 × 180° = 360°, de cualquier pentágono a 3 × 180° = 540°, y así sucesivamente.

Atravesar el límite de un polígono se completa una vuelta completa. Esto demuestra que la suma de los exteriores los ángulos de cualquier polígono suman 360°. (Para un cóncavo polígono, uno debe contar los giros a la izquierda como positivos y a la derecha se vuelve negativa.)

Un polígono se llama equilátero si todas las longitudes de los lados son iguales y equiángulos si todos los ángulos interiores son iguales. A El polígono no necesita ser equilátero si es equiángulo (considere un RECTÁNGULO por ejemplo) ni equiángulo si es equilátero (considere el caso especial de un PARALELO GRAM llamado rombo). Los polígonos que son simultáneamente equiláteros y equiángulos se llaman regulares. polígonos UN CUADRADO, por ejemplo, es un polígono regular.

Cada uno de los ángulos interiores de un n-ágono regular tiene valor $\frac{(n-2)}{n} \times 180°$—la suma de los ángulos interiores dividido por el número de ángulos. Así, por ejemplo, un triángulo equilátero tiene ángulos interiores de $\frac{1}{3} \times 180 = 60°$, ángulos cuadrados de $\frac{2}{4} \times 180 = 90°$, pentágono regular ángulos de $\frac{3}{5} \times 180 = 108°$, y así sucesivamente.

Machine Translated by Google

El PERÍMETRO de un n-ágono regular , con lados de 1– 2
longitud s, es ns, y su ÁREA es × perímetro × r = nsr. 1–
2
Aquí r es la APOTEMA del polígono.

Es posible construir un triángulo equilátero usando solo una regla (una regla sin marcas) y un compás. Dibuja una línea recta. Coloque la brújula en un ángulo fijo y dibuje un círculo con centro en cualquier lugar a lo largo de esta línea. Elija un punto de intersección de este círculo con la línea y dibuje un segundo círculo del mismo radio con este punto elegido como su centro. Los centros de cada círculo y su punto de intersección ahora forman las tres esquinas de un triángulo equilátero.

También se puede dibujar un cuadrado, un 5-ágono regular y un 6-ágono regular, pero no un 7-ágono regular, usando solo compás y regla. La cuestión de qué n-ágonos regulares son CONSTRUCTIBLES de esta manera es antigua.

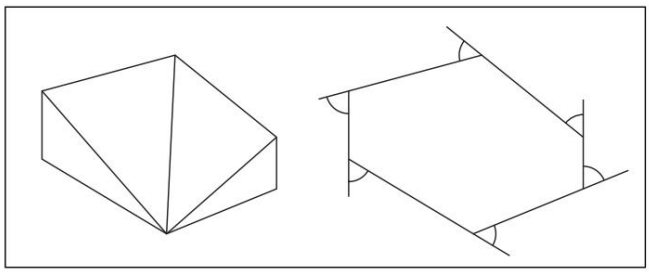
Dada una hoja de papel rectangular, también es posible crear la forma de un triángulo equilátero al doblar la hoja. Dobla el papel por la mitad a lo largo de la dirección de su longitud más larga, marcando esta línea media como un pliegue. Lleve la esquina inferior izquierda del papel a esta línea media para formar un pliegue diagonal que pase por la esquina inferior derecha. La ubicación de esta esquina izquierda en la línea media es el vértice de un triángulo equilátero con el borde inferior del papel como base.

Solo tres polígonos regulares teselan el plano: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular. Un estudio de TESSELATION muestra que ningún otro polígono regular puede hacer esto.

Todos los polígonos regulares tienen los siguientes notables propiedad:

> Para cualquier punto dentro de un polígono regular, la suma de las distancias de ese punto a cada uno de los lados es siempre la misma.

Supongamos, por ejemplo, que elegimos un punto P arbitrario dentro de un hexágono regular de lado s que se encuentra a distancias h1 , h2 ,…, h6 de los lados del hexágono.
Las líneas que conectan P con los vértices del hexágono dividen la figura en seis triángulos. El área del polígono es
en consecuencia, la suma de las áreas de estos triángulos, sh1 1–
2
1– 1– 1– 1–
+ sh2 + sh3 + sh4 + sh5 + sh6 , entonces h1 + h2 + h3 + h4 + h5 + h6 tiene valor 2 2 2 2 2 2 , no importa



Sumar los ángulos de un polígono

qué punto se elige. (En general, la cantidad 2 × área
s es igual al número de lados del polígono regular multiplicado por su apotema).

La generalización tridimensional de un polígono es un POLIEDRO. La generalización en cuatro dimensiones se llama policoron, y en un número arbitrario de dimensiones, politopo.

Véase también CÓNCAVO/CONVEXO; POLÍGONO CÍCLICO; RADIO LARGO.

poliedro (plural, poliedros) Una figura sólida tridimensional con una superficie compuesta de superficies poligonales planas se llama poliedro. Por ejemplo, un CUBO, de seis caras cuadradas, es un poliedro, como también lo es un TETRAEDRO de cuatro caras triangulares, y cualquier PIRÁMIDE o PRISMA, por ejemplo. Cada superficie poligonal se llama CARA del poliedro, y cualquier línea a lo largo de la cual se cruzan dos caras se llama arista. Cualquier punto en el que se encuentran tres o más caras se llama vértice o esquina del poliedro.

Los POLÍGONOS y los poliedros fueron estudiados en detalle por primera vez por los antiguos griegos, quienes también les dieron su nombre: poli significa "muchos" y hédra significa "asiento". Así, un poliedro se consideraba capaz de asentarse en cualquiera de sus caras. En este contexto, se suele suponer entonces que un poliedro es convexo, es decir, ningún plano que contenga una cara de la figura pasa también por el interior de la figura. (En consecuencia, un polígono convexo puede "asentarse" en cualquiera de sus caras sobre una mesa).
Un poliedro que no es convexo se llama cóncavo.

Los poliedros específicos se nombran según el número de caras que poseen. Por ejemplo, un tetraedro es cualquier figura sólida con cuatro caras poligonales, un pentaedro es uno con cinco caras y un hexaedro es

Machine Translated by Google

cualquier poliedro de seis caras. No hay poliedro con menos de cuatro caras.

Un poliedro convexo se llama regular si todas sus caras son polígonos regulares congruentes. El geómetra EUCLID (ca. 300-260 a. C.) demostró, en su volumen final de LOS ELEMENTOS, que solo hay cinco poliedros regulares: el tetraedro regular (con cuatro caras triangulares), el cubo (con seis caras cuadradas), el el octaedro (con ocho caras triangulares), el dodecaedro (con 12 caras pentagonales) y el icosaedro (con 20 caras triangulares). Estos cinco sólidos regulares desempeñaron un papel importante en el estudio griego de la geometría, y se atribuyó un gran significado místico a las figuras. El filósofo PLATÓN (ca. 428–348 a. C.) estudió y escribió extensamente sobre los cinco poliedros regulares, y por esta razón hoy en día se les llama SÓLIDOS PLATÓNICOS.

Un poliedro se llama semirregular si está compuesto por dos tipos diferentes de caras poligonales combinadas de la misma manera en cada vértice del poliedro. Por ejemplo, el patrón clásico dibujado en un balón de fútbol describe un poliedro semirregular compuesto por 12 pentágonos y 20 hexágonos dispuestos de modo que cada vértice de la figura esté rodeado por un pentágono y dos hexágonos. ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) demostró que existen solo 13 poliedros semirregulares, hoy llamados sólidos de Arquímedes.

Se dice que un poliedro está estrellado si se construye a partir de un poliedro regular uniendo pirámides a sus caras, o facetado si se forma con estas pirámides hacia adentro.

El matemático suizo LEONHARD EULER (1707-1783) descubrió una fórmula notable, el TEOREMA DE EULER , que relaciona el número de vértices v, aristas ey caras f de cualquier poliedro libre de agujeros similar al agujero de un TORO. Tenemos:

$$v - e + f = 2$$

Esta fórmula prueba, por ejemplo, que cualquier poliedro compuesto de caras pentagonales y hexagonales, no necesariamente regulares, con tres aristas que se unen en cada vértice, debe contener exactamente 12 caras de cinco lados. (Para ver esto, sea v el número de vértices del poliedro, e el número de aristas, p el número de caras pentagonales y h el número de caras hexagonales. Entonces v – e + p + h = 2. Además, como tres aristas se unen en cada vértice, cada cara pentagonal tiene cinco aristas y cada cara hexagonal seis aristas, tenemos 3v = 2e = 5p + 6h . Las ecuaciones obligan a p a tener el valor 12, sin importar el valor que adopte h .)

Véase también ALTITUD; BASE DE UN POLÍGONO/POLYHE DRON; CÓNCAVO CONVEXO; CONO; CILINDRO; ROSTRO; TRONCO; HIPERCUBO; NETO; PARALELEPÍPEDO; PRISMA; PIRÁMIDE.

polinomio Una suma de múltiplos de potencias enteras positivas de una variable se llama polinomio. La forma general de un polinomio es una expresión de la forma:

$$\text{ansiedad}^{\text{todo}} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

donde an , an–1,…,a1 ,a0 son números, llamados COEFICIENTES del polinomio, con el coeficiente principal an asumido como diferente de cero. El número a0 , que puede ser cero, se llama término constante del polinomio. La mayor potencia n que aparece en la expresión con coeficiente distinto de cero se llama GRADO DEL POLINOMIO. Por ejemplo, $\sqrt{2x^3} - 5x + 8$ y 5 son polinomios de grados tres y cero, respectivamente.

Un polinomio de grado dos se llama CUADRÁTICO, de grado tres, cúbico, de grado cuatro, cuartico, y de grado cinco, quíntico.

Uno puede sumar dos polinomios para producir un nuevo polinomio reuniendo términos semejantes, y uno puede multiplicar dos polinomios usando el proceso de EXPANDIR SOPORTES. Por ejemplo:

$$(x^{3} + 2x^{2} - 3x + 4) + (x^{2} + 4x - 2) = x^{3} + 3x^{2} + x + 2$$

y

$$(x^{2} + 2x + 1)(3x + 5) = 3x^{3} + 11x^{2} + 13x + 5$$

Si uno piensa en la variable x como una BASE no especificada DE UN SISTEMA NUMÉRICO, entonces puede realizar las mismas operaciones aritméticas con polinomios (como la MULTIPLICACIÓN ISABELINA y la DIVISIÓN LARGA) que con los números ordinarios. La razón de dos polinomios produce una FUNCIÓN RACIONAL.

Una función polinomial es una función cuyas salidas están dadas por una expresión polinomial. Por ejemplo, $f(x) = 5x^3 - 7x - 3$ es una función cúbica. No es posible que una función polinomial distinta de cero produzca cero como salida para todas las entradas x. Tenemos:

Machine Translated by Google

si ansía + an–1x $^{n-1}$ +…+ a1x + a0 = 0 para todos los valores x, entonces debe darse el caso de que an = an–1 =…= a1 = a0 = 0.

(Para ver esto, escriba anx + an–1x $^{n-1}$ +…+ a1x + a0 = hacha^{n} $1 + \frac{a_{n-1}}{\text{hacha}} + \frac{1}{\text{hacha}^{2}} + \frac{a_{1}}{\text{hacha}^{n-1}} + \frac{a_{0}}{\text{hacha}^{n}}$. Para un gran valor de x, el término anx n adoptará un valor muy grande, y la expresión entre paréntesis adoptará un valor cercano a 1 + 0 +…+ 0 + 0 = 1. Por lo tanto, el valor de toda la expresión del polinomio no será cero, a menos que an = 0. La repetición de este argumento muestra que todos los coeficientes tendrían que ser cero.) Como consecuencia tenemos:

> Si dos polinomios producen la misma salida valores para cada valor de entrada x, entonces los dos Los polinomios deben ser idénticos, es decir, sus coincidencia de coeficientes.

(La diferencia de estos dos polinomios sería un nuevo polinomio que siempre produce la salida cero). Esta segunda afirmación explica por qué el proceso de IGUALACIÓN DE COEFICIENTES es válido.

El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA asegura nosotros que cualquier ecuación polinomial de grado n de la forma ansiedad + an–1x $^{n-1}$ +…+ a1x + a0 = 0 tiene precisamente n raíces (cuando se cuenta con multiplicidad). Algunas raíces pueden ser NÚMEROS COMPLEJOS. Existen fórmulas aritméticas. para encontrar las raíces de cualquier ecuación cuadrática, cualquier ECUACIÓN CÚBICA, y cualquier ECUACIÓN CUÁRTICA. en 1824 El algebrista NIELS HENRIK ABEL demostró que no hay fórmulas análogas para resolver problemas de quinto y mayor grado. ecuaciones polinómicas.

Evaluar un polinomio de grado n normalmente requiere $\frac{n(n+1)}{2}$ el cálculo de n + (n –1) +…+ 2 + 1 + 0 = multiplicaciones. Por ejemplo, en la expresión

$$2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 2 \times x \times x \times x + 3 \times x \times x + 4 \times x + 5$$

aparece el signo de multiplicación “×” 3 + 2 + 1 + 0 = 6 veces. Esta es la formula del enésimo TRIANGULAR NÚMERO. El proceso de realizar una MULTIPLICACIÓN ANIDADA reduce la cantidad de productos necesarios para solo n Por ejemplo, reescribiendo $2x^3 + 4x + 3x^2$ como x(x(2x + 3) + 4) + 5 reduce el número de multiplicaciones presentes de seis a tres. El proceso de DIVISIÓN SINTÉTICA está íntimamente conectado con anidado multiplicaciones

LA FÓRMULA DE LAGRANGE muestra que dado cualquier n + 1 puntos, dibujados en el plano, cada uno con coordenadas x distintas , existe una función polinomial de grado n cuya gráfica pasa por cada uno de esos puntos. De este modo siempre es posible "ajustar" una función polinomial a cualquier conjunto finito de puntos de datos. Esto es útil para los propósitos de INTERPOLACIÓN y EXTRAPOLACIÓN.

Un polinomio puede tener más de una variable. Por ejemplo, $5x^2y + 7xy^2 - y^3$ es un polinomio bivariado de grado tres.

Véase también BINOMIAL; COMPLETANDO EL CUADRADO; LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES ; DIFERENCIA DE DOS CUBITOS; DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS; DISCRIMINANTE; TEOREMA DEL FACTOR; FACTORIZACIÓN; HISTORIA DE EQUA CIONES Y ÁLGEBRA (ensayo); MONOMIO; RESTO TEOREMA; RAÍZ; SOLUCIÓN POR RADICALES; TAYLOR SERIE; TRINOMIO.

tiempo polinomial Se dice que un cálculo se ejecuta en tiempo polinómico si el número de pasos elementales requerido para completar el cálculo se puede expresar como una función POLINOMIAL del tamaño de la entrada. Para ejemplo, si un paso básico es sumar o multiplicar dos números de un solo dígito, entonces el cálculo de multiplicar dos números de n dígitos a través de la multiplicación larga ordinaria requiere como máximo $4n^2$ pasos. (Multiplicando cada uno de los par de dígitos requiere n^2 pasos, y sumando todos los resultados, con llevar, es como mucho $3n^2$ pasos). Por lo tanto, la multiplicación larga se ejecuta en tiempo polinomial.

Cálculos que no se ejecutan en tiempo polinomial se dice que corren en tiempo exponencial. por ejemplo, el tarea de listar todos los arreglos posibles de n objetos crece como n FACTORIAL. Como la función factorial será exceder cualquier función polinomial de n para suficientemente valores grandes de n, la operación de enumerar todos los posibles pedidos es exponencial. Incluso con los más poderosos. computadoras, cálculos de tiempo exponencial en general requieren una cantidad inviable de tiempo para completarse. Los algoritmos de tiempo polinomial, sin embargo, son más prácticos.

Véase también NP COMPLETO; VENDEDOR VIAJERO PROBLEMA.

polyomino Generalizando el concepto de dominó, un polyomino es una forma hecha al unir cuadrados de 1 × 1 a lo largo de todo el borde de tal manera que ninguna esquina de un cuadrado se encuentra en un punto interior de otro

Machine Translated by Google

borde del cuadrado. Un poliominó compuesto de n cuadrados es llamado n-poliomino o simplemente n-omino.

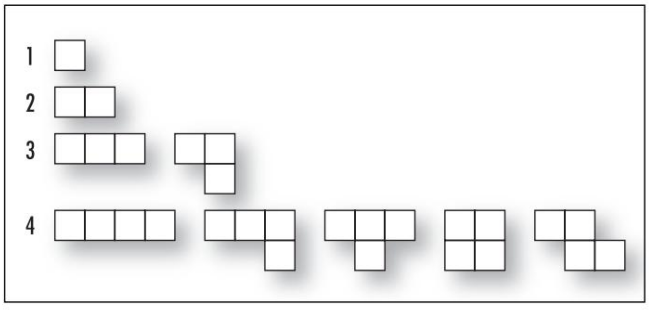
Dos polominós se consideran equivalentes si uno se puede levantar, girar y posiblemente voltear, para coincidir con el otro. Usando esta noción de equivalencia, hay es entonces solo un 1-omino (llamado "monomino"), uno 2-omino (el dominó), dos 3-ominós (cada uno llamado tromino), y cinco 4-ominoes (cada uno llamado tetromino).

Sea P(n) el número de n-ominós distintos. La siguiente tabla da el valor de P(n) para n de 1 a 12

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(n)	1	1	2	5	12	35	108	369	1,285	4,655	17,073	63,600

Se conocen los valores exactos de P(n) hasta n = 24, pero encontrar una fórmula general para P(n) sigue siendo una cuestión abierta. problema. En 1966 el matemático David Klarner demostró que existe un número K (hoy llamado número de Klarner) constante) tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n} = K$. (Esto demuestra que P(n) tiene un valor aproximado Kn si n es grande, por lo que el crece exponencialmente). El valor exacto de K es no se sabe, pero los matemáticos han establecido que se encuentra entre 3,9 y 4,649551. (Sospechan que es valor se encuentra cerca de 4.2.)

El orden de un poliominó es el número más pequeño. de copias idénticas de ese poliomino que puede ser ensamblados para formar un rectángulo. Si la creación de un ángulo recto es imposible, entonces se dice que ese poliominó tener un orden infinito. El tromino recto tiene orden uno (es en sí mismo un rectángulo) y el tromino doblado tiene orden dos. (Dos copias de este trominó pueden entrelazarse para producir un rectángulo de 2×3). Los cuatro tetrominós ilustrados arriba tienen órdenes 1, 2, 4, 1 y ∞, respectivamente. (A mira que el tetrominó final no puede teselar ningún rectángulo, considere la ubicación del tetromino en la parte superior izquierda esquina del rectángulo. Su orientación obliga a colocar los tetrominós debajo o a la derecha de él.)



Polominós

No hay polominós de orden tres. Contando el número de maneras diferentes de teselar un rectángulo de 2 × n con dominó produce los NÚMEROS DE FIBONACCI.

Generalizaciones de polominós a formas compuestas de unidades fundamentales distintas de los cuadrados (como como triángulos equiláteros y hexágonos regulares) son llamadas poliformas.

Véase también TESELACIÓN.

población Véase POBLACIÓN Y MUESTRA.

población y muestra ESTADÍSTICA es la ciencia de recopilar, tabular y resumir los DATOS obtenidos de sistemas particulares de estudio, y haciendo inferencias o predicciones basadas en esos datos. La palabra población se usa para el grupo de todos los individuos (o objetos o eventos) que son objeto de estudio. A muestra es un subgrupo o subconjunto representativo de la población. Por ejemplo, en un estudio médico sobre la tasas de crecimiento de niños de 8 años en los Estados Unidos, la población sería todos los niños estadounidenses de 8 años. Como no es factible examinar a todos los niños de una edad particular, una muestra de solo 1,000 niños podría ser utilizado para el estudio.

Una muestra en la que todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos para la muestra es llamada muestra aleatoria. Si, en una muestra, alguna parte de la población está más representada que realmente ocurre, entonces la muestra se llama sesgada. Sesgado debe evitarse el muestreo.

Un ejemplo histórico famoso de una predicción errónea basada en un muestreo sesgado ocurrió durante el 1936 Elecciones presidenciales de Estados Unidos. La publicación popular Literary Digest, como parte del sensacionalismo previo a la elección, realizó una encuesta para predecir la resultado de la carrera. Después de entrevistar a una muestra de votantes elegibles, elegidos por sorteo de nombres al azar de guías telefónicas de todo el país, los editores de la publicación concluyó que la elección era una conclusión inevitable: Alfred Landon iba a ganar con una plomo cómodo, y posteriormente publicaron

Machine Translated by Google

mucho comentario editorial a este efecto. Resultó, sin embargo, que el oponente de Landon, Franklin Roosevelt, ganó las elecciones por goleada. Los miembros del Digest no se dieron cuenta de que habían trabajado con una muestra sesgada: solo los estadounidenses adinerados podían permitirse teléfonos en el momento de la Gran Depresión y, por lo tanto, figurar en las guías telefónicas. Esta era una clase de votante que era más probable que votara por los republicanos. En consecuencia, la predicción del Digest fue errónea. La publicación cerró en 1937 debido tanto al fiasco del muestreo como a los tiempos difíciles de la depresión.

Hoy en día, se utilizan comúnmente varios métodos de muestreo para ayudar a garantizar que no se produzca ningún sesgo. Estos métodos incluyen:

Muestreo aleatorio A
cada sujeto de la población se le asigna un número, y los números se generan aleatoriamente con la ayuda de una computadora para seleccionar a los miembros.

Muestreo sistemático A
cada sujeto de la población se le asigna un número y, a partir de un número aleatorio, se selecciona cada k-ésimo miembro a partir de ese momento. Por ejemplo, uno podría seleccionar cada 23 personas, comenzando con el miembro 533.

Muestreo estratificado
Cuando una población se divide naturalmente en grupos (como hombre/mujer, o edad por década), la selección de una muestra aleatoria dentro de cada grupo produce lo que se llama una “muestra estratificada”. Las muestras producidas de esta manera se utilizan para garantizar que los representantes de cada subgrupo estén presentes en el estudio. Por ejemplo, en un estudio que involucró a estudiantes universitarios de primer y segundo año, uno podría seleccionar 25 estudiantes al azar de cada grupo (hombres de primer año, mujeres de primer año, hombres de segundo año y mujeres de segundo año) para hacer una muestra de 100 estudiantes.

Muestreo por
conglomerados Si se utiliza un subgrupo intacto de una población como muestra representativa de toda la población, la muestra se denomina muestra por conglomerados. Por ejemplo, el conjunto de todas las hembras de primer año podría usarse para representar la población de todos los estudiantes universitarios para los propósitos de un estudio, o los 12 huevos en una caja de huevos como representante de todos los huevos manejados por un supermercado en particular.

Véase también SESGO; ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

modelos de población En biología, el término población significa el número de individuos u organismos que viven en un área determinada. Por ejemplo, la población de Australia es el número de individuos que viven actualmente en ese continente, y la población de un cultivo de levadura de laboratorio es el número de organismos presentes en una placa de Petri en particular. Un modelo de población es una teoría matemática utilizada para describir o predecir cómo cambia el tamaño de una población con el tiempo.

El interés en cómo crecen las poblaciones se estimuló a fines del siglo XVIII cuando Thomas Malthus (1766–1834) publicó Un ensayo sobre el principio de la población como afecta la mejora futura de la sociedad. Malthus desarrolló un modelo simple que arrojó la inquietante conclusión de que eventualmente la población humana alcanzaría un tamaño que no podría sostenerse con los recursos alimentarios disponibles en este planeta. Aunque su modelo simplifica demasiado las cosas y ha demostrado ser incorrecto para hacer predicciones a largo plazo, el modelo de Malthus sigue siendo útil para comprender el crecimiento a corto plazo. Su modelo se desarrolla de la siguiente manera:

Sea P(t) el tamaño de la población en el momento t y suponga que en una unidad de tiempo (un minuto, un día o un año) un cierto porcentaje, digamos un b por ciento, de la población da a luz, y otro porcentaje, digamos d por ciento de la población, muere. (El número b se llama tasa de natalidad y d se llama tasa de mortalidad).

Así, después de una unidad de tiempo, la población aumenta en la cantidad bP(t) – dP(t). Tenemos:

$$P(t + 1) – P(t) = (b – d)P(t)$$

Esto dice que la tasa de cambio del tamaño de la población viene dada por una constante (b – d) multiplicada por el tamaño de la población. Suponiendo que la función de población P(t) puede, por conveniencia, considerarse que cambia continuamente con el tiempo, esta afirmación final puede interpretarse, en CÁLCULO, como una fórmula:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde k = b – d. (La constante k se llama tasa de crecimiento.) Así, P(t) es una función cuya derivada es una constante multiplicada por sí misma. Solo las funciones exponenciales tienen esta propiedad y así:

$$P(t) = P(0)e^{kt}$$

Machine Translated by Google

donde P(0) es el tamaño de la población en el momento cero. Este modelo predice que el tamaño de una población crecerá exponencialmente si la tasa de natalidad excede la tasa de mortalidad.

Los biólogos se dan cuenta de que muchos ecosistemas no pueden soportar tamaños de población arbitrariamente grandes (la Tierra solo puede suministrar una cantidad finita de recursos alimentarios por año, por ejemplo), por lo que este modelo simple no se considera realista. Generalmente, a medida que aumenta la población y se acerca a una capacidad máxima M, digamos, la tasa de crecimiento k disminuye. Se puede modelar esto dejando de suponer que k es constante, sino que varía de la siguiente manera:

$$k = M - P(t)$$

Por ejemplo. (Aquí, cuando el tamaño de la población P(t) está cerca de M, la tasa de crecimiento k es realmente pequeña). Esto conduce al modelo:

$$\frac{dP}{dt} = kP = (M - P)P$$

Esto se denomina modelo de crecimiento logístico y fue introducido por el biólogo holandés Pierre-François Verhulst (1804-1849). Es posible resolver esta ecuación diferencial y obtener una fórmula explícita para la función de población P(t). Sin embargo, se pueden describir rápidamente algunas características del crecimiento de la población sin ningún trabajo.

Por ejemplo,

1. Si el tamaño de una población comienza en el valor M, entonces $\frac{dP}{dt} = (M - M) \cdot M = 0$. Esto significa que no hay cambio en el tamaño de la población y la función P(t) siempre permanece en el valor M.

2. Si el tamaño de una población comienza en un valor mayor que M, entonces $\frac{dP}{dt} = (M - P) \cdot P < 0$. Esto significa que el tamaño de la población disminuirá. (No hay suficientes recursos alimentarios para mantener a una gran población).

3. Si el tamaño de una población comienza en un valor menor que M, entonces $\frac{dP}{dt} = (M - P) \cdot P > 0$. Esto significa que el tamaño de la población aumentará. La tasa de aumento disminuye a medida que el tamaño de la población se acerca a M. El gráfico de la función, por lo tanto, parece una curva en forma de S creciente atrapada sobre el eje x y debajo de la línea constante P = M.

El modelo logístico funciona bien para describir cambios de población para sistemas biológicos simples (como un cultivo de levadura) y, sorprendentemente, también funcionó bien para describir el crecimiento de la población de EE. UU. entre los años 1920 y 1950. Sin embargo, esto probablemente sea una coincidencia.
El crecimiento de la población humana es muy difícil de modelar debido a factores impredecibles como los avances en la tecnología médica, las guerras y, al modelar la población de un país específico, la inmigración.

vector de posición Dado un punto P en el plano, o en el espacio tridimensional, el VECTOR representado por el segmento de línea dirigido a P se llama vector de posición de P. Este vector tiene $\overrightarrow{OP}$ conectando el origen O las coordenadas de P como sus componentes. Por ejemplo, si P es el punto (2,5), entonces su vector de posición es el vector <2,5> = 2i + 5j.

En física, el vector de posición de una partícula a menudo se denota por r. Es una función del tiempo t y generalmente se expresa en la forma r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, donde x, y y z son funciones del tiempo. Representa la ubicación física de la partícula en cualquier tiempo t. La DERIVADA del vector de posición es el vector VELOCIDAD v(t) = x′(t)i + y′(t)j + z′(t)k, y su doble derivada es el vector aceleración a(t) = x″(t)i + y″(t)j + z″(t)k.

Ver también ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

positivo UN NÚMERO REAL x se dice que es positivo si es mayor que cero, es decir, si x > 0. Un número real menor que cero se llama negativo.

El producto de dos números positivos vuelve a ser positivo. Es sorprendente que las reglas de la aritmética dicten que el producto de dos NÚMEROS NEGATIVOS también debe ser positivo. Se sigue entonces que para cualquier número (real) distinto de cero x debemos tener $x^2 > 0$.

Ningún NÚMERO COMPLEJO puede considerarse positivo o negativo. Por ejemplo, si el número i es positivo entonces, por la afirmación anterior, debemos tener $i^2 > 0$, dando el absurdo $-1 > 0$. Se seguiría la misma conclusión si tuviéramos que considerar i negativo.

Un número real no especificado que es positivo o posiblemente cero se llama no negativo. Uno que es negativo o posiblemente cero se llama no positivo.

Véase también ORDENAR PROPIEDADES.

Machine Translated by Google

postulado Otro nombre para AXIOMA. es costumbre
llamar a los axiomas de GEOMETRÍA EUCLIDEA y de
Postulados ARITMÉTICOS en lugar de axiomas.

Ver también POSTULADOS DE PEANO .

serie de potencia Cualquier SERIE de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} un\ xn^{\cdots} = a0 +$
$^{2\ 3}+ a3x$ donde los coeficientes an son con a1x + a2x
constante y x es una variable se llama serie de potencias. Para
ejemplo, la SERIE DE TAYLOR de cualquier función es una potencia
serie, como es la SERIE GEOMÉTRICA $1 + x + x^{2} 3 + x +\ldots$.
Que una serie de potencias converja o no depende de
qué valor se elige para la variable x. Por ejemplo,
la serie geométrica converge si –1 < x < 1 y
diverge de otra manera. Como mínimo, toda serie de potencias
converge para x = 0.

Los matemáticos han demostrado el siguiente resultado:

Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} un\ xn^{\cdots}$, precisamente uno de
lo siguiente es cierto:

1. La serie converge solo para x = 0.
2. La serie converge (absolutamente) para todos los valores de x.
3. Existe un número real positivo R tal que la serie converge (absolutamente) para todos los valores –R < x < R y diverge para |x| > r (La serie podría, o no, converger para cada uno de los valores x = R y x = –R.)

El valor R se denomina radio de convergencia de la
serie de potencias. (Si la serie converge solo para x = 0, uno
suele decir que el radio de convergencia es cero. Si
la serie converge para todos los valores de x, entonces el radio
de convergencia es infinita.)

A menudo se hace uso de la prueba de la razón del estudio
de SERIES CONVERGENTES para encontrar el radio de
convergencia de una serie de potencias. Por ejemplo, la prueba de la razón
demuestra que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{\cdots}}{\cdots}$ converge si $\lim_{\cdots \to \infty} \frac{\left|\frac{X^{\cdots+1}}{\cdots + 1}\right|}{\left|\frac{X^{\cdots}}{\cdots}\right|}$
$= \text{límite}_{\cdots \to \infty} \frac{\cdots}{1 + \cdots}\ , XX| = |$ | es menor que 1 y diverge
si es mayor que 1. Por lo tanto, el radio de convergencia
para esta serie de potencias es R = 1. (Yendo más allá, nótese que,
para x = 1, la serie es la ARMÓNICA
SERIE $\sum_{=0}^{\infty} \frac{1^{\cdots}}{\cdots} = +1 + + \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$, que diverge, y por
it x = –1 es la serie armónica alterna
$\sum_{=0}^{\infty} \frac{()\text{-}\ \cdots}{\cdots} = -1 + -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$, que converge. El poder
serie en cuestión por lo tanto converge para –1 ≤ x < 1.)

Véase también CONVERGENCIA ABSOLUTA.

precisión El número total de dígitos registrados mientras
tomar una medida se llama la precisión de la
medición. Por ejemplo, una longitud registrada de 3.650
metros tiene una precisión de cuatro CIFRAS SIGNIFICATIVAS. (El
el dígito final cero indica que la medición fue
de hecho hecho al milmetro ms cercano.) El nmero de
dígitos a la derecha del punto decimal se llama
exactitud de la medida. Así, por ejemplo, la
la figura 3.650 tiene una precisión de tres decimales.

Véase también ERROR.

premisa Una afirmación que se sabe o se supone que
ser verdadero y en el que se basa un ARGUMENTO lógico es
llama la premisa del argumento. Una premisa podría ser
un AXIOMA de una teoría matemática particular, o
meramente una suposición que se toma como cierta a los efectos
de descubrir sus consecuencias. por ejemplo, el
premisa de que "las líneas paralelas se encuentran en un punto" condujo
matemáticos para descubrir el reino de PROYECTIVE
GEOMETRÍA, un nuevo enfoque válido y fructífero para comprender
la geometría ordinaria.

primo Un número entero que posee sólo dos positivos
factores se llama número primo, o simplemente primo. Para
ejemplo, 7 tiene solo dos factores positivos, a saber, 1 y 7,
y también lo es el primo. El número 24 tiene ocho factores positivos.
y por lo tanto no es primo, y el número 1 tiene un solo factor y no es
primo. El término compuesto se utiliza para
describir números mayores que 1 que no son primos.
(El matemático medieval FIBONACCI (1170-1250) llamado
números primos “incompuestos”.) Es vital que el número 1 no se
considere ni primo ni compuesto para la
TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA para ser verdadero.

Los primeros 25 números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13,
17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,
73, 79, 83, 89, 97. Estos son todos los números primos menores que

Machine Translated by Google

100. El matemático griego EUCLID (ca. 300 a. C.) fue el primero en demostrar que la lista de números primos continúa para siempre. Hoy llamamos a su argumento particular que establece esta PRUEBA DE EUCLIDES DE LA INFINITUD DE LOS PRIMOS.

Todo número entero se puede escribir como producto de números primos. (Si el número ya es primo, se considera un producto con un solo término). Por ejemplo, el número 100 se puede factorizar como 2 × 2 × 5 × 5. Por esta razón, los números primos se consideran el edificio multiplicativo bloques de los números naturales, y por lo tanto han sido objeto de mucho estudio intensivo a lo largo de los siglos. Sorprendentemente, muchas preguntas básicas sobre ellos quedan sin resolver. Por ejemplo, nadie conoce un simple fórmula que generará los números primos, o un procedimiento simple y computacionalmente factible para factorizar números grandes en números primos. No se sabe si existen infinitamente muchos PRIMOS GEMELOS , o si, como conjeturó CHRIS TIAN GOLDBACH (1690-1764), cada par número mayor que 2 es de hecho una suma de dos números primos. (Esto se conoce como CONJECTURA DE GOLDBACH). Además, no se sabe si hay infinitos números primos de el formulario $m^2 + 1$, es decir, 1 más que un número cuadrado, o si entre dos números cuadrados debe haber un primo (Se sabe, sin embargo, que para cualquier número n mayor que 1, hay un número primo entre n y 2n).

En 1791, CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) conjeturó que el n-ésimo número primo tiene un valor aproximado de n · ln(n) donde ln(n) es el LOGARITMO natural de n. Más tarde se demostró que esta afirmación era correcta y es hoy llamado TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO.

A pesar de la infinidad de números primos, estos números, en cierto sentido, son muy escasos. Es fácil producir una cadena arbitrariamente larga de enteros consecutivos, ninguno de los cuales son primos Por ejemplo, haciendo uso del FACTORIAL función, los números 1001! +2, 1001! + 3, hasta 1001! + 1001 forman una cadena de 1000 compuestos consecutivos números. (Estos números son, respectivamente, divisibles por 2,3,…,1001.) El TAMIZ DE ERATOSTENES se puede utilizar para "tamizar" los números primos hasta cualquier número entero.

Los números primos, especialmente los números primos grandes, juegan un papel clave en la CRIPTOGRAFÍA. el descubrimiento de Los nuevos números primos grandes son de interés para las finanzas. instituciones y servicios de seguridad que necesitan desarrollar códigos de encriptación efectivos. Los números primos grandes son descubiertos con la ayuda de una computadora, y son típicamente PRIMAS DE MERSENNE. El mayor número primo conocido al año 2003 es de 220.996.011 – 1. Son más de 6 millones dígitos largos.

El matemático y abogado francés PIERRE DE FER MAT (1601-1665) demostró que si p es un número primo, entonces $2^{p-1} - 1$ será divisible por p. Si no, significa que el número p no era primo para empezar. Esto se usa a menudo como una prueba para determinar si un número p es un buen candidato para ser primo. Desafortunadamente, algunos números pueden todavía pasar la prueba sin ser primo. Por ejemplo, $2^{340} - 1$ resulta ser divisible por 341, aunque el el número 341 no es primo (341 = 11 × 31). Compuesto Los números que pasan la prueba de Fermat se llaman pseudoprimos. Los primeros tres pseudoprimos son 341, 561 y 645.

Véase también NÚMERO COMPUESTO; FACTOR.

teorema de los números primos Los matemáticos definen π(n) ser el número de PRIMOS menor o igual que n. Para ejemplo, hay cuatro números primos menores que 10, y entonces π(10) = 4. La proporción $\frac{\pi(n)}{n}$ así mide la cuantitativa de números hasta n que son primos. Estudio de esta función es importante para comprender la distribución de los números primos entre los números naturales.

n	π(n)	π(n)/n
10	4	0.4
100	25	0.25
1,000	168	0.168
10,000	1.229	0.1229
100,000	9.592	0.09592
1,000,000	78.498	0.078498
10,000,000	664.579	0.0664579
100,000,000	5.761.455	0.05761455
1,000,000,000	45.505.251	0.045505251

A la edad de 14 años, el matemático CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) desarrolló una pasión por tabular datos sobre números primos. Observó, entre otras cosas, que la función invertida $r(n) = \frac{n}{\pi(n)}$ parece ser aumento de valor por cantidad constante 2.31 con cada 10-veces el aumento de n, al menos para valores grandes de n. Eso es,

$$r(10n) \approx r(n) + 2.31$$

Por ejemplo, r(100,000,000) es igual a $\frac{1}{0.05761455} \approx$

Machine Translated by Google

17,357 y r(1 000 000 000) es igual a 19,667. Como 2.31 $\frac{1}{0.045505251} \approx$ es aproximadamente el RITMO LOGA natural de 10, esto le sugirió a Gauss que r(n) se está comportando como la función de logaritmo natural. Él conjeturó:

$$\frac{\pi(\quad)}{\text{norte}} \approx \frac{1}{\text{en}(\quad)}$$

para valores grandes de n, pero nunca pudo probar esta afirmación.

Cien años después, JACQUES HADAMARD (1865–1963) y CHARLES-JEAN DE LA VALLÉE-POUSSIN (1866–1962) probaron la conjetura de Gauss de forma simultánea pero independiente utilizando técnicas sofisticadas de la TEORÍA DE NÚMEROS analítica. El resultado se conoce hoy como el teorema de los números primos. Nos dice que el n-ésimo número primo tiene un valor aproximado de n · ln(n).

principal Véase INTERÉS.

ejes principales La ecuación más general en tres variables de segundo grado es:

$$Ax2 + By2 + Cz2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

con constantes A a F no todas cero. En el espacio tridimensional, la gráfica de tal ecuación es una superficie llamada superficie cuádrica. Los matemáticos han demostrado que, al rotar y trasladar los ejes de coordenadas, es posible reescribir la ecuación con respecto a un nuevo conjunto de ejes para simplificar la forma de la ecuación, reduciéndola a uno de 13 tipos diferentes. Los nuevos ejes de coordenadas se denominan ejes principales de la cuádrica.

Seis de las posibles formas de la ecuación conducen a cuádricas no degeneradas:

1. Elipsoide: $\frac{2x}{un^2} + \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} + \frac{2z}{2c} = 1$

2. Hiperboloide de una hoja: $\frac{2x}{un^2} + \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} - \frac{2z}{2c} = 1$

3. Hiperboloide de dos hojas: $\frac{2x}{un^2} + \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} - \frac{2z}{2c} = -1$

4. Cono elíptico: $\frac{2x}{un^2} + \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} = \frac{2z}{2c}$

5. Paraboloide elíptico: $\frac{2x}{un^2} + \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} = \frac{z}{C}$

6. Paraboloide hiperbólico: $\frac{2x}{un^2} - \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} = \frac{z}{C}$

Las siete ecuaciones posibles restantes son cuádricas degeneradas:

1. Cilindro elíptico: $\frac{2x}{un^2} + \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} = 1$

2. Cilindro hiperbólico: $\frac{2x}{un^2} - \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} = 1$

3. Cilindro parabólico: $\frac{2x}{un^2} = \frac{y}{b}$

4. Pareja de aviones: $\frac{2x}{un^2} = \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2}$ o $\frac{2x}{un^2} = 1$

5. Plano único: $\frac{2x}{un^2} = 0$

6. Línea: $\frac{2x}{un^2} + \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} = 0$

7. Punto: $\frac{2x}{un^2} + \frac{\text{años}^2}{\text{segundo}^2} + \frac{2z}{2c} = 0$

En un espacio bidimensional, con una rotación y traslación adecuadas de los ejes de coordenadas, cualquier ecuación cuadrática no degenerada Ax2 + By2 + Cxy + D = 0 se puede reescribir como la ecuación de una elipse, una hipérbola o una parábola, o bien, en los casos degenerados, un par de líneas, una sola línea o un punto. Los ejes en el nuevo sistema de coordenadas se denominan nuevamente ejes principales.

Ver también SECCIONES CÓNICAS.

prisma Cualquier POLIEDRO con dos caras (las bases) que son polígonos congruentes que se encuentran en planos paralelos y de tal manera que las caras restantes (las caras laterales) son paralelogramos se llama prisma. En concreto, un prisma es un CILINDRO de base poligonal.

Las líneas que unen los vértices correspondientes de los polígonos base de un prisma se denominan aristas laterales. Si los bordes laterales de un prisma se encuentran con sus bases en ángulo recto, entonces el prisma se llama prisma recto. Un prisma que no es recto se llama oblicuo.

Los prismas se nombran según sus bases. Un prisma triangular tiene dos bases triangulares (y tres caras laterales); un prisma cuadrangular tiene dos bases cuadriláteras y cuatro caras laterales. Un CUBO es un ejemplo de un prisma cuadrangular recto.

Machine Translated by Google

La altura de un prisma se define como la distancia entre los dos planos paralelos que contienen las bases de las figuras. El VOLUMEN V de un prisma viene dado por el área de su base multiplicada por la altura de la figura:

$$V = \text{área de la base} \times \text{altura}$$

Esto se sigue del PRINCIPIO DE CAVALIERI .

Un prismatoide es un poliedro cuyos vértices se encuentran en uno u otro de dos planos paralelos. No se requiere que las dos bases de la figura sean congruentes, ni siquiera tengan el mismo número de vértices. Todas las caras laterales de un prismatoide son triangulares o cuadriláteros. Si el número de vértices de cada polígono base es el mismo y cada cara lateral es un cuadrilátero, entonces el prisma toideo se llama prismoide.

dilema del prisionero En TEORÍA DE JUEGOS, cualquier juego de conflicto parcial de suma variable de dos personas que imite el siguiente escenario clásico se denomina dilema del prisionero:

> Dos presos, recluidos en habitaciones separadas e incomunicados, deben elegir entre confesar o negar su participación en un crimen en equipo. Si ambos confiesan, cada uno será condenado a dos años de trabajos forzados. Si ambos niegan su participación, cada uno será sentenciado a cuatro años de trabajos forzados. Sin embargo, si un preso niega y el otro confiesa, entonces la negación conlleva solo un año de trabajos forzados y la confesión seis.

Las siguientes tablas muestran los pagos esperados para cada prisionero X e Y para cada uno de los cuatro resultados posibles del juego:

Resultados para el Prisionero X

		Prisionero Y: C	Prisionero Y: D
Prisionero X	C	2 años	6 años
	D	1 año	4 años

Resultados para el recluso Y

		Prisionero Y: C	Prisionero Y: D
Prisionero X	C	2 años	1 año
	D	6 años	4 años

Cada preso puede alegar lo siguiente:

> No tengo indicios de lo que hará mi pareja. Si tiene que elegir la opción C, confesar, entonces me conviene elegir la opción D, negar. Si va a elegir la opción D, entonces, nuevamente, me conviene elegir D. De cualquier manera, debería elegir la opción D.

La elección de D es, por tanto, una estrategia dominante para cada recluso, y es probable que ambos reclusos nieguen su participación en el delito. Además, vale la pena señalar que ningún jugador está tentado a desviarse de esta elección en un intento de engañar a su oponente en el juego: el riesgo de ser el único confesor lo inhibe.

Por lo tanto, el resultado (D, D) es un resultado estable para el juego, y es probable que ambos prisioneros sean sentenciados a cuatro años de trabajos forzados. (Cualquier resultado de un juego, como (D, D) para el dilema del prisionero, se denomina "equilibrio de Nash" para el juego si ningún jugador se puede beneficiar al salir unilateralmente de él).

El dilema del prisionero proporciona una PARADOJA:

> En el juego del dilema del prisionero, cada jugador tiene una estrategia dominante que, cuando se usa, produce un resultado menos beneficioso que si ambos se desviaran de la estrategia dominante.

Este fenómeno también se ve en la situación de una carrera armamentista entre dos naciones: el desarme mutuo beneficia a ambas naciones, pero el temor de que una nación opuesta decida desertar de tal acuerdo inhibe la cooperación.

Los elementos del dilema del prisionero pueden extenderse a juegos que involucran a más de dos jugadores. Por ejemplo, un profesor pide a cada uno de sus alumnos que escriba en un papel su nombre y la palabra cooperar o la palabra defecto. Los estudiantes saben que las piezas de dulces se distribuirán entre la clase de acuerdo con las siguientes reglas:

> Si cada estudiante decide cooperar, cada uno recibirá 10 piezas.
>
> Si dos o más estudiantes desertan, todos serán sancionados. Los que cooperen recibirán sólo cinco dulces, y los desertores no recibirán ninguno.
>
> Si, por otro lado, hay un solo estudiante audaz dispuesto a ser el único desertor, entonces ese desertor recibirá 80 caramelos y los demás estudiantes ninguno.

Machine Translated by Google

El juego de la gallina Una
variante interesante del juego del dilema del prisionero es el juego de la gallina. Se basa en el peligroso juego de conducción en el que dos conductores se dirigen directamente uno hacia el otro en una carretera de un solo carril. Cada conductor debe decidir en el último minuto si virar bruscamente a la derecha o no virar bruscamente. Para incorporar las matemáticas al juego, es conveniente introducir valores numéricos para los resultados del juego.

Supongamos que se asignan 10 puntos a la ganadora del juego: la que opta por no desviarse dado que el otro conductor sí lo hizo. Como esto es vergonzoso para el segundo conductor, se le otorgan 0 puntos. Si ambos conductores deciden desviarse, entonces, dado que esto es solo un poco vergonzoso para cada uno, asigne 5 puntos a cada jugador. Por otro lado, si ambos jugadores deciden no desviarse, entonces el resultado es desastroso y se asignan -10 puntos a cada conductor en este caso. Los resultados del juego de la gallina se pueden resumir en las siguientes dos tablas de pagos:

Resultados para el controlador 1

		Conductor 2: Viraje	Conductor 2: no desviarse
Conductor 1	Viraje	5	0
	no desviarse	10	–10

Resultados para el controlador 2

		Conductor 2: Viraje	Conductor 2: no desviarse
Conductor 1	Viraje	5	0
	no desviarse	10	–10

Observe que ninguno de los jugadores tiene una estrategia dominante en el juego de la gallina: su mejor acción depende de la elección que haga el otro conductor. Además, el juego de la gallina tiene dos equilibrios de Nash distintos: (desviarse, no desviarse) y (no desviarse, desviarse). (No es una ventaja para ningún jugador desviarse de una de estas opciones). Esto sugiere que un compromiso (Swerve, Swerve) no es fácil de lograr.

Muchos conflictos en la vida real, como las disputas laborales y los conflictos comerciales internacionales, tienen el sabor de un juego de gallina. Como sabemos, los resultados de tales disputas varían: una de las partes puede decidir “ceder” para evitar una salida desastrosa. vienen, mientras que muchas veces ninguna de las partes se rinde, y resultan huelgas y guerras.

Véase también JUAN NASH.

probabilidad Los principios de la teoría de la probabilidad fueron identificados por primera vez por el matemático y médico italiano del siglo XVI GIROLAMO CARDANO (1501–76), y luego por los matemáticos franceses BLAISE PASCAL (1623–62) y PIERRE DE FERMAT (1601–65). La idea clave es que si una situación puede describirse en términos de posibles resultados, cada uno igualmente probable, entonces la probabilidad de cualquier resultado en particular se define como el número 1 dividido por el número total de resultados.

Por ejemplo, si se lanza un dado, son posibles seis resultados: {1,2,3,4,5,6}. Por lo general, creemos que cada resultado es igualmente probable, por lo que decimos que la probabilidad de obtener un resultado en particular, como un 5, por ejemplo, es 1/6.

De manera más general, si se considera aceptable más de un resultado posible, entonces definimos la probabilidad de obtener uno de estos resultados como la relación entre el número de resultados deseados y el número total de resultados. Por ejemplo, hay tres formas de sacar un número par al lanzar un dado. Así decimos que la probabilidad de sacar un múltiplo de 2 es 3/6 = 1/2. Las posibilidades de lanzar cualquiera de los números 1, 4, 5 o 6 son 4/6 = 2/3.

Los matemáticos llaman al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento el ESPACIO MUESTRA, y cualquier conjunto particular de resultados (o simplemente un único resultado) un EVENTO. Por ejemplo, al lanzar un dado, el espacio muestral es el conjunto {1,2,3,4,5,6}, y un evento podría ser el subconjunto {2} (sacar un dos), por ejemplo, o { 2,4,6} (lanzamiento de un número par). Un evento es siempre un subconjunto del espacio muestral.

Si A representa un evento, es decir, un conjunto de resultados deseables, entonces se usa la notación P(A) para denotar la probabilidad de que ocurra ese evento, es decir, la probabilidad de que el resultado de una corrida del experimento pertenezca al conjunto A. Un valor P(A) siempre está entre cero y 1, donde el valor P(A) = 0 indica que el evento A nunca ocurrirá y el valor P(A) = 1 indica que el evento A siempre ocurrirá. Al lanzar un dado, 1– 2– por ejemplo, tenemos P(par) = , P({1,4,5,6}) = 2 3 P(un múltiplo de 7) = 0, y P(un entero número) = 1. ,

La asignación de probabilidades a los eventos requiere un conteo cuidadoso. A menudo, la mayor dificultad es identificar

Machine Translated by Google

Historia de la Probabilidad y la Estadística

Las preguntas sobre apuestas y juegos proporcionaron gran parte de los primeros impulso para el desarrollo de la teoría de la PROBABILIDAD . en 1654 Chevalier de Méré, un noble francés aficionado a los juegos de azar, escribió una carta al matemático BLAISE PASCAL (1623-1662) buscando consejo sobre cómo repartir las apuestas de los interrumpidos juegos.

Por ejemplo, supongamos, en un partido amistoso de tenis, dos cada jugador pone una apuesta de $100 en una apuesta para ganar "mejor de nueve" juegos, pero la lluvia interrumpe el juego después de solo cuatro juegos, con un jugador habiendo ganado tres juegos, el segundo solo uno. ¿Cuál sería entonces la forma justa de dividir el bote de $200? Por supuesto, la división del dinero debería reflejar de alguna manera la probabilidad de que cada jugador gane la apuesta si la serie de juegos debía terminarse.

Pascal transmitió la inquietud de analizar situaciones como estas a su colega PIERRE DE FERMAT (1601-1665), y sus correspondencias posteriores sobre el cuestión representó el nacimiento del nuevo campo de la probabilidad teoría. Ambos matemáticos resolvieron el “problema de de Méré de puntos” (usando dos enfoques completamente diferentes, por cierto) y luego trabajaron juntos para generalizar el problema y extender sus análisis a otros tipos de juegos de azar Sus descubrimientos despertaron el interés de otros estudiosos europeos. En 1656, el físico astrónomo y matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) publicó De ratiociniis in ludo aleae (Sobre el razonamiento en juegos de azar) resumiendo y ampliando las ideas desarrollado por Pascal y Fermat. Expresó su trabajo en términos de una nueva noción, la de VALOR ESPERADO. probó ser muy fructífero.

El principio clave detrás de la teoría de la probabilidad es la idea que si una situación se puede describir en términos de posibles resultados que son igualmente probables, entonces la probabilidad de cualquier resultado particular que ocurra es 1 dividido por el total número de resultados. Este principio fue reconocido y discutido por primera vez más de un siglo antes por el matemático y médico italiano GIROLAMO CARDANO. (1501-1576) en su obra Liber de ludo aleae (Libro sobre juegos de azar). Este texto, sin embargo, no fue publicado hasta 1663, 9 años después de que Pascal y Fermat hubieran resuelto el El problema de Méré. Es probable que Cardano sea conocido como "el padre de la teoría de la probabilidad" si el trabajo hubiera sido publicado durante su vida. Cardano también reconoció la LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.

El matemático suizo Jacob Bernoulli (1654-1705) de la famosa FAMILIA BERNOULLI reconoció la amplia gama aplicabilidad de la probabilidad en campos fuera del juego. Su libro Ars conjectandi (El arte de conjeturar), publicado póstumamente en 1713, demostró el uso de la teoría en medicina y meteorología. También fue el primer texto completo que trató temas de ESTADÍSTICA.

En cierto sentido, la probabilidad y la estadística representan dos lados de la misma situación fundamental. Probabilidad explora lo que se puede decir acerca de una muestra desconocida de un colección conocida. (Por ejemplo, conocemos todas las posibles combinaciones numéricas de un par de dados. ¿Qué es entonces ¿Cuál es el resultado más probable de lanzar un par de dados?) Las estadísticas exploran lo que se puede decir acerca de una colección desconocida. dada una pequeña muestra. (Si 37 de estas 100 personas se cepillan dientes dos veces al día, qué se puede decir sobre el cepillado de dientes hábitos de toda la población?) Los dos campos permanecieron estrechamente entrelazados durante gran parte del siglo XVIII y el primera parte del próximo siglo.

En 1733 ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) reconoció la aparición repetida de la DISTRIBUCIÓN NORMAL en estudios científicos y escribió una ecuación matemática para ello. Primero se hizo evidente por la "aleatoriedad" de los errores en las observaciones astronómicas y en experimentos científicos.

La segunda mitad del siglo XIX fue testigo de importantes progreso en el desarrollo y la comprensión de la teoría Fundamentos de la teoría de la probabilidad. Esto se debió principalmente a el trabajo de matemáticos-astrónomos-físicos franceses JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) y PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827), genio alemán CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) y el matemático francés SIMÉON-DENIS POIS-

los resultados fundamentales que se consideran igualmente probable. Por ejemplo, hay 11 resultados posibles al lanzar un par de dados, es decir, obtener un suma de 2, 3, …, 11 o 12, pero estos eventos no son igualmente probable. El resultado fundamental aquí es no la suma de los dos números en los dados, sino más bien el par de números que dan los dos dados—un número (del 1 al 6) en el primer dado y un segundo segundo número (nuevamente del 1 al 6) en el segundo. Allá hay 36 resultados igualmente probables en total. Como seis de estos pares tienen una suma de 7, podemos decir que la probabilidad de tirar 7 con un par de dados es $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. los 6 probabilidad de sacar 10 es $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, y la prueba La capacidad de lanzar 2 es solo $\frac{1}{36}$.

Machine Translated by Google

SON (1781–1840) quien, entre otras cosas, matemáticamente demostró la ley de los grandes números. La publicación más importante de esta época sobre la teoría de la probabilidad fue el libro de Laplace. 1812 texto Théorie analytique des probabilidades (Analytical teoría de la probabilidad). En él, Laplace recogió y amplió todo lo que se sabía sobre el tema en ese momento. Matemáticos rusos PAFNUTY CHEBYSHEV (1821-1894), Andrei Markov (1856–1922) y Alexandr Lyapunov (1857–1918) además desarrolló los fundamentos matemáticos de la materia en finales del siglo XIX.

Se puede considerar que el pensamiento estadístico básico tiene desarrollado considerablemente antes. Los antiguos egipcios recopiló DATOS sobre la población y la riqueza tan pronto como como 3050 BCE, desarrollando técnicas simples para cotejar y registrar la información numérica recopilada. La antigua Los chinos realizaron estudios similares alrededor del 2300 a. C. A Los griegos realizaron un censo en 594 a. C. con el fin de recaudar impuestos, y Atenas emprendió una encuesta de población. censo en 309 a. C. Los romanos también mantuvieron registros del censo, así como registros de nacimientos y defunciones, y reunió cantidades significativas de información numérica de encuestas geográficas realizadas en todo el imperio. Muy pocos Sin embargo, se mantuvieron registros estadísticos durante el período de la Edad Media.

En 1662, John Graunt analizó los registros de nacimiento y defunción. y produjo la primera TABLA DE VIDA. El propósito de la mesa. era hacer observaciones generales y predicciones sobre esperanza de vida para clases de miembros de una población particular. Este trabajo representó un paso significativo hacia analizar datos con fines de INFERENCIA.

En 1790, Estados Unidos realizó su primer censo decenal, anunciando el regreso de la realización de censos. Varias naciones europeas siguieron su ejemplo poco después. Belga el erudito LAMBERT ADOLPHE QUÉTELET (1796–1874) analizó los registros de la nación e hizo importantes observaciones sobre la influencia de la edad, el género, la ocupación y la condición económica en la mortalidad. En 1835 intentó aplicar métodos probabilísticos para el estudio de las características humanas, tanto físicas como conductuales. Los usó para dar lo que esperaba fuera una descripción completa del "hombre promedio". Aunque la obra de Quételet fue en general muy respetado, su intento de aplicarlo al campo de la conducta la ciencia fue recibida con críticas. En la década de 1860, el inglés El erudito FRANCIS GALTON (1822-1911) intentó aplicar métodos estadísticos para el estudio de la herencia humana. Su trabajo fue influyente y ayudó a definir la estadística como un disciplina matemática por derecho propio.

A principios del siglo XX, el mundo empresarial comenzó a reconocer la relevancia y utilidad de las estadísticas, especialmente en temas de control de calidad, economía, seguros y telecomunicaciones. Muchas grandes empresas comenzó a contratar estadísticos.

Mientras trabajaba para una compañía cervecera inglesa, el científico industrial WILLIAM SEALY GOSSET (1876–1937) desarrolló la PRUEBA T DEL ESTUDIANTE , que permite obtener información fiable a partir de muestras pequeñas. (Política de la empresa para instó a sus empleados a publicar. Gosset lo hizo en cualquier caso, escrito bajo el seudónimo de "Estudiante"). El matemático inglés KARL PEARSON (1857–1936) desarrolló la PRUEBA DE CHI CUADRADO y es considerado el fundador de la moderna evaluación de la hipótesis.

RONALD AYLMER FISHER (1890–1962) es considerado el estadístico más importante del siglo XX. Su 1925 text Métodos estadísticos para trabajadores de investigación transformó las estadísticas en una poderosa herramienta científica. Aclaró muchos de los principios matemáticos sobre los que se basa la se basa la disciplina. Fisher también desarrolló métodos de análisis multivariante para analizar adecuadamente problemas que involucran más de una variable.

En 1926, el matemático puro y aplicado JOHN VON NEUMANN (1903-1957) fundó la TEORÍA DE JUEGOS, una marco para el análisis de juegos de azar, como el póquer, que implican estrategia y elección por parte de los jugadores. Von Neumann reconoció las aplicaciones de la teoría a economía y ciencias sociales. El trabajo del Premio Nobel JOHN FORBES NASH, JR., (nacido en 1928) tomó sus aplicaciones a la economía a un nivel profundo.

Ver también ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA; ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

La probabilidad da una medida de probabilidad o frecuencia de ocurrencia. Si tiramos un par de dados 1.000 veces, entonces esperaríamos, en promedio, que cerca de una sexta parte de los rollos (alrededor de 167 de ellos) tuvieran una suma de 7; cerca de 1/12 de ellos (alrededor de 83 rollos) para tener suma 10; y cerca de 1/36 (alrededor de 28 de ellos) a tienen una suma de 2. Este principio se aclara en la LEY DE GRANDES NÚMEROS.

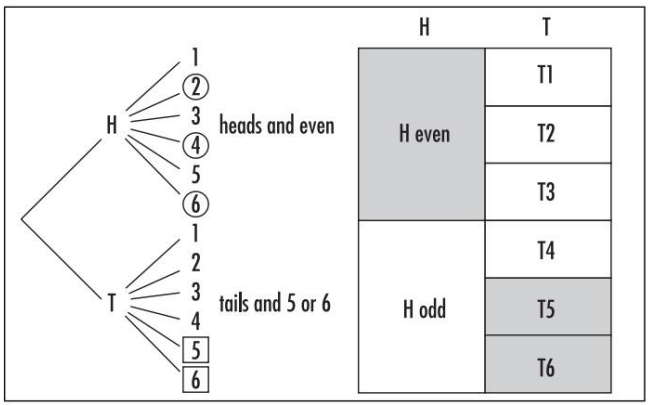
Cálculo de probabilidades

A menudo se utilizan dos modelos para ayudar a calcular las probabilidades en situaciones moderadamente complicadas. Ellos pueden también se puede utilizar para ilustrar dos reglas de cálculo.

1. Árboles de probabilidad y la regla de la suma

Un árbol de probabilidad es un diagrama que muestra todos los resultados de una secuencia de acciones. Se supone que el

Machine Translated by Google



Modelos de probabilidad

los resultados de una acción no afectan los resultados de las acciones que siguen.

Para ilustrar, imagine lanzar una moneda y luego lanzar un dado. Cada resultado del lanzamiento de la moneda, cara o cruz, podría ir acompañado de cualquiera de los seis posibles resultados de lanzar el dado: los números del 1 al 6.
El diagrama de árbol de probabilidad (que se muestra arriba) se usa para hacer esto explícito. En particular, muestra que son posibles 12 resultados diferentes al realizar estas dos acciones. Calcular la probabilidad de cualquier conjunto deseado de resultados ahora es sencillo. Por ejemplo, las posibilidades de lanzar una cara junto con un número par 1– . Del mismo modo, la son $\frac{3}{12}$ = probabilidad de sacar cruz 4

junto con un 5 o un 6 es 12 $\frac{2}{}$ = $\frac{1}{6}$.

Este modelo ilustra la propiedad aditiva en la teoría de la probabilidad. En nuestro ejemplo:

$$P(\text{cara y un número par o cruz y un 5 o un 6}) = \frac{3 + 2}{12}$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{2}{12}$$

= P(cara y un número par) + P(cruz y un 5 o un 6)

En general, si A representa un conjunto de resultados deseados y B otro conjunto de resultados que no tienen nada en común con A, entonces

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

En particular, los dos eventos "A" y "no A" son independientes, es decir, no tienen resultados en común. Como somos seguro de que A ocurrirá o no ocurrirá, P(A o no A) = 1, tenemos, por esta regla:

$$P(\text{no } A) = 1 - P(A)$$

Por ejemplo, la probabilidad de no sacar un dos cuando 5– lanza un dado es P(no 2) = 1 – p(sacar 2) = 1 – = 6 $\frac{1}{6}$.

Si dos eventos A y B tienen resultados en com mon, entonces la regla anterior se modifica para leer:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B).$$

El término P(A y B) se resta para contrarrestar la doble cuenta de los resultados comunes a A y B.

2. El modelo del cuadrado y la regla de la multiplicación El modelo del cuadrado para la teoría de la probabilidad usa un cuadrado para representar el conjunto de resultados al realizar un experimento un gran número de veces. Por ejemplo, al lanzar una moneda, esperaríamos, en promedio, que la mitad de los resultados fueran cara y la otra mitad cruz. Representamos esto dividiendo el cuadrado en dos porciones de igual área.
La parte izquierda ahora representa un conjunto de experimentos por derecho propio. En el próximo lanzamiento de un dado, esperaríamos, en promedio, que la mitad de estos resultados arrojen un número par y la otra mitad arroje un número impar. Esto divide la región de las cabezas en dos subporciones iguales. La parte derecha del cuadrado también representa un conjunto de experimentos por derecho propio. Al lanzar un dado, esperaríamos que un sexto de los resultados sea 1, un sexto sea 2, y así sucesivamente, hasta que un sexto de los resultados sea 6. Esto divide la región de las colas en seis porciones de igual área.

Ahora es fácil leer las probabilidades con respecto a las combinaciones de resultados. Por ejemplo, el resultado de “cara seguida de un número par” se representa por la mitad de la mitad del cuadrado, es decir:

$$P(\text{cara y un número par}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

El resultado “cruz y un 5 o un 6” está representado por un sexto de la mitad del cuadrado más otro sexto de la mitad del cuadrado. De este modo:

$$P(\text{cruces y 5 o 6}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Este modelo ilustra la propiedad multiplicativa en la teoría de la probabilidad. En nuestro ejemplo:

Machine Translated by Google

P (cara y un número par) = la mitad
de la mitad del cuadrado 1–
= × 1- 2
2

= P(par) × P(cara)

P(cruces y {5, 6}) =
un tercio de la mitad del cuadrado
= P({5,6}) × P(cruces)

En general, si A y B representan dos conjuntos de resultados deseados de dos conjuntos diferentes de experimentos, entonces la probabilidad de obtener tanto A como B al realizar los experimentos en sucesión es:

P(A y B) = P(A) × P(B)

Suponemos aquí que los resultados de un experimento no tienen efecto sobre los resultados del segundo, es decir, que los dos experimentos son EVENTOS INDEPENDIENTES.

Dificultades filosóficas La
probabilidad, tal como se ha definido hasta ahora, se basa en nuestra capacidad para contar los resultados. Si el conjunto de resultados es infinitamente grande, entonces el tema de contar no tiene sentido. No obstante, aún podemos tener una comprensión intuitiva de la "probabilidad" en estas situaciones. Por ejemplo, al girar la punta de una brújula, todavía estamos seguros de que la probabilidad de que el puntero caiga entre el norte y el este es 1/4, aunque hay infinitos lugares para que el puntero se detenga en el cuarto deseado del borde de la flecha. la brújula.
Si se elige un número entero al azar, sospechamos que la probabilidad de que sea par es /2; después de todo, solo hay dos posibilidades, par o impar, cada una de las cuales representa la mitad de los resultados posibles. Por lo tanto, determinar la "probabilidad" se basa en la capacidad de asignar una medida relativa de tamaño a conjuntos de puntos o resultados, incluso si esos conjuntos pueden ser infinitos. Este es un tema difícil y que causó mucha confusión durante el siglo XIX y principios del XX. (Ver ÁREA y PARADOJA DE BERTRAND .)

1

Una segunda dificultad radica en el hecho de que la definición de probabilidad de Cardano es circular: la probabilidad de cualquier resultado se determina sabiendo de antemano qué resultados son igualmente probables.

Cómo se entiende la probabilidad hoy
Al lanzar una moneda, por ejemplo, generalmente estamos dispuestos a decir que solo son posibles dos resultados: cara o cara. cruces, y creemos que es apropiado asignar una probabilidad de 1/2 para que ocurra cada uno. Las personas con una disposición contraria pueden argumentar, sin embargo, que podrían ocurrir más de dos resultados (la moneda podría caer de lado, por ejemplo) y que los valores de probabilidad deberían asignarse de manera diferente. Ciertamente, los problemas que surgen en la paradoja de Bertrand, por ejemplo, muestran que la noción de aleatoriedad está sujeta a la comprensión personal. Para que tenga lugar una discusión matemática significativa, debe acordarse de antemano qué resultados se consideran dentro del rango de posibilidades y cuál será la probabilidad de todos los conjuntos de resultados. (Esto lleva el enfoque de Cardano más allá: no solo se deben especificar los resultados igualmente probables, sino que también se deben declarar todas las probabilidades desde el principio).

Por lo tanto, en cualquier discusión sobre la teoría de la probabilidad, un matemático de hoy dirá desde el principio:

1. El espacio muestral S: el conjunto de todos los resultados considerados
posibles 2. Una medida de probabilidad P: una regla que asigna a cualquier evento AS un número P(A) llamado probabilidad de A.

La medida de probabilidad es satisfacer estas tres reglas:

i. Para cualquier evento A, P(A) es un número entre 0 y 1. ii. P(S) = 1. (Es decir, en cualquier corrida del experimento, ocurrirá un resultado). iii. Si dos
eventos A y B no tienen resultados en común, entonces P(A o B) = P(A) + P(B).

Para modelos finitos simples, como el acto de lanzar un dado, este modelo codifica el enfoque desarrollado por Cardano, Pascal y Fermat, pero también extiende este pensamiento a sistemas más complejos. Por ejemplo, al lanzar un dardo a un tablero de dardos, las probabilidades se pueden definir como proporciones de áreas. La probabilidad de acertar en el blanco, por ejemplo, es la relación entre el área del blanco y el área de todo el tablero. Esta definición satisface los axiomas i, ii y iii anteriores.

Entonces, la clave para analizar cualquier fenómeno aleatorio es definir apropiadamente una medida de probabilidad. Diferentes medidas de probabilidad pueden conducir a diferentes resultados. Los físicos y los científicos tienen el desafío de encontrar la medida que mejor refleje la intuición de uno.
comprensión del fenómeno que se discute.

Véase también PROBABILIDAD CONDICIONAL; EVENTO; SU HISTORIA DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo); DE KRUSKAL

Machine Translated by Google

CONTAR; MÉTODO MONTE CARLO; PROBLEMA DE MONTY HALL LEM; IMPARES; CAMINATA ALEATORIA; ESTADÍSTICAS; DOS TARJETAS ROMPECABEZAS.

función de densidad de probabilidad Ver DISTRIBUCIÓN.

Proclo Ver POSTULADOS DE EUCLIDES .

regla del producto La DERIVADA del producto de dos funciones f y g viene dada por la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

Por ejemplo, tenemos $\frac{d}{dx}(x\operatorname{sen} x) = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x + x\cos x$. La regla se puede probar usando el límite definición de la derivada de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)$$

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Alternativamente, se puede reconocer que la cantidad $f(x + h) \cdot g(x + h)$ es la fórmula para el área de un rectángulo, uno que contiene el rectángulo más pequeño de área $f(x) \cdot g(x)$. Escribir una fórmula para el área de la forma de L región entre los dos rectángulos, dividiendo por h, y tomando el límite cuando h se vuelve pequeño conduce a lo mismo Fórmula de la regla del producto.

La regla del producto se puede generalizar para aplicar a cualquier producto finito de funciones. Por ejemplo, para el producto de tres funciones tenemos:

$$(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$$

Si una de las funciones en un producto es una constante k, entonces la regla del producto muestra:

$$(kf(x))' = 0 \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = kf'(x)$$

Dos aplicaciones de la regla del producto dan el segundo derivada de un producto de dos funciones:

$$(f(x)\cdot g(x))'' = f(x)\cdot g''(x) + 2f'(x)\cdot g'(x) + f''(x)\cdot g(x)$$

En general, la n-ésima derivada de un producto de dos funciones es una suma de productos que contiene BINOMIAL COEFICIENTES:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Este resultado se llama teorema de Leibniz.

Ver también REGLA DE LA CADENA; DERIVADA SUPERIOR; CUO REGLA TIENTE.

proyección Cualquier mapeo de una figura geométrica en un PLANO para producir una imagen bidimensional de esa figura se llama proyección. Por ejemplo, el día sombra proyectada por un objeto al aire libre es un ejemplo de un proyección sobre el suelo. Dado que el Sol está a una gran distancia de la Tierra, los rayos de luz solar son esencialmente PARALELO, y las sombras proyectadas por él son proyecciones paralelas. Las sombras proyectadas por un solo punto de luz, sin embargo, como la llama de una vela, tienen diferentes formas que los arrojados por el sol. Tales proyecciones se llaman proyecciones centrales.

matemático e ingeniero francés GIRARD DESARGUES (1591-1661) observó que la proyección central de cualquier SECCIÓN CÓNICA es otra sección cónica. (Por ejemplo, la forma proyectada en el suelo por el borde circular de una linterna es una ELIPSE.) Esto lo llevó a estudiar aquellas propiedades de las figuras geométricas que quedan sin cambios bajo las proyecciones centrales, fundando así el campo de la GEOMETRÍA PROYECTIVA.

En el análisis VECTORIAL , la proyección de un vector a sobre un vector b es un vector paralelo a b cuya longitud es la longitud de la “sombra” proyectada por a si los dos vectores se colocan en el mismo lugar en el espacio y los "rayos de luz” proyectando la sombra son paralelas y PERPEN DICULAR a b. Así, la proyección de a sobre b es un vector de la forma xb, para algún valor de x, con la propiedad que el vector que une la punta de xb con la punta de a es perpendicular a b. Usando el PRODUCTO PUNTO de vectores, esto produce la ecuación:

Machine Translated by Google

$$b \cdot (a - xb) = 0$$

Resolver para x da la fórmula para el vector proyectado:

$$\text{Proyección de a sobre b} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$$

Véase también PROYECCIÓN DE MERCATOR ; ESTEREOGRÁFICO PROYECCIÓN.

geometría proyectiva La rama de la GEOMETRÍA que examina aquellas propiedades de las figuras geométricas que permanecen sin cambios por una PROYECCIÓN central se llama geometría proyectiva. Informalmente, las sombras proyectadas por una fuente puntual de luz, como la llama de una vela o el pequeño foco de una linterna, son proyecciones centrales, por lo que la geometría proyectiva examina aquellas propiedades que son iguales para la sombra de un objeto geométrico y el objeto mismo. Por ejemplo, la "sombra" de una línea recta es otra línea recta, por lo que la noción de "recta" es un concepto válido en geometría proyectiva.

El matemático e ingeniero francés GIRARD DESARGUES (1591–1661), a través de sus estudios de PERSPECTIVA en el arte, quedó impresionado por el hecho de que la imagen de una SECCIÓN CÓNICA proyectada es otra sección cónica. (Por ejemplo, el contorno del borde circular de una linterna, una sección cónica, dirigida al suelo en un ángulo apropiado produce la imagen de una ELIPSE, una PARÁBOLA o una rama de una HIPÉRBOLA.) Su estudio de este fenómeno fundó el campo de la geometría proyectiva. Desafortunadamente, su trabajo fue malinterpretado en ese momento y fue descuidado. El tema fue revivido más tarde en 1822 por el matemático francés Jean Victor Poncelet (1788-1867) con su publicación de Traité des proprietés des figures (Tratado sobre la propiedad proyectiva de las figuras).

EL TEOREMA DE DESARGUES es un resultado fundamental sobre la perspectiva. Para unificar casos especiales del teorema y permitir la posibilidad de que dos rectas sean paralelas en su enunciado, Desargues desarrolló la noción de "puntos en el infinito" de modo que se pudiera hablar apropiadamente del punto de cualquier intersección de dos cualesquiera . líneas en el plano. (Se dice que las líneas paralelas se intersecan en estos puntos en el infinito). En este marco, dos puntos cualesquiera en el plano determinan una línea, y dos líneas cualesquiera determinan un punto. Así, Desargues había creado una noción de geometría en la que las palabras punto y línea juegan papeles duales, y pueden intercambiarse en cualquier declaración verdadera sobre esta geometría para obtener nuevas declaraciones (verdaderas) en esta geometría. Esta noción de dualidad fue esbozada correctamente por primera vez por Poncelet.

Hoy en día, cualquier sistema de objetos, generalmente llamados puntos y líneas, que satisfagan los siguientes cinco axiomas se denomina geometría proyectiva:

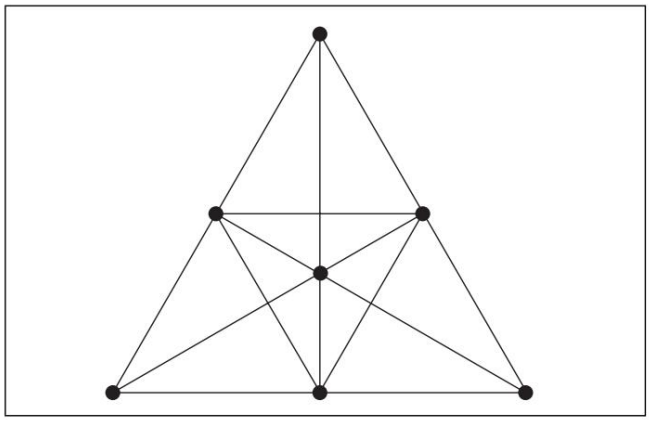
1. Para dos puntos distintos, hay exactamente una línea que los contiene a ambos.
2. Para dos líneas distintas cualesquiera, hay exactamente un punto común a ambos.
3. Hay al menos una línea.
4. Cada línea contiene al menos tres puntos.
5. No todos los puntos están en la misma línea.

(Los últimos tres axiomas aseguran que la geometría no es trivial).

Una geometría proyectiva finita es cualquier arreglo de un número finito de puntos y líneas que obedecen estos cinco axiomas. Por ejemplo, el siguiente diagrama, llamado plano de Fano, es una geometría proyectiva con siete puntos y siete líneas con exactamente tres puntos en cada línea y tres líneas a través de cada punto. (El triángulo central se considera una sola línea). Esto se denomina configuración simétrica de tipo 73 .

Sólo hay una configuración simétrica de tipo tres de tipo 93 , 10 de tipo 103 y 31 de tipo 113 . 83 , Se han determinado todas las configuraciones simétricas hasta el tipo 183 .

Véase también HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (ensayo).



La configuración simétrica del tipo 73

Machine Translated by Google

prueba Una demostración de que un enunciado se sigue de otro a través de un proceso de razonamiento lógico puro se llama prueba. Todas las demostraciones se basan en un conjunto de premisas, es decir, enunciados que se han establecido previamente como válidos, o se toman como AXIOMAS, y siguen una secuencia de deducciones que establecen que el enunciado final presentado, la conclusión, es verdadero. Alternativamente, uno puede pensar en una prueba como una pieza escrita que demuestra un razonamiento lógico que convence a todos los lectores de la validez absoluta del resultado, dadas las suposiciones hechas como premisas.

Como ejemplo, el siguiente argumento es una prueba. Supone que se entienden los principios básicos del álgebra y que se conocen dos hechos básicos sobre los números naturales, a saber, que todo número natural es par o impar, y que todo número par es múltiplo de 2.

Afirmación: si n es un número natural tal que n es impar, n^2 es entonces n mismo es impar.

Demostración: No puede darse el caso de que n sea par, porque entonces n sería de la forma 2k, haciendo $n = 4k^2 = 2(2k^2)$. Por lo tanto, n^2 par, no impar. Por lo tanto, n también debe ser impar.

El uso del término prueba en matemáticas difiere del uso de la palabra en el método científico. Por lo general, un científico propondrá una hipótesis para explicar un fenómeno físico y luego realizará experimentos para probar esa hipótesis. Si los resultados de la investigación se ajustan consistentemente a la hipótesis (y además, si la hipótesis conduce a predicciones sobre otros fenómenos físicos que luego se confirman), un científico puede decir que se ha probado un principio físico. Por ejemplo, que la materia se compone de elementos fundamentales tal y como se enumeran en una tabla periódica es una teoría científica comprobada. Sin embargo, es un resultado establecido únicamente en la experiencia y la observación.

Sin embargo, la observación por sí sola no constituye una prueba en matemáticas y puede conducir a conclusiones erróneas. Por ejemplo, uno puede verse tentado a argumentar $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ es una identidad algebraica válida ya que, después de todo, funciona para a = 1 y b = 0, por ejemplo. Después de probar todos los números del 1 al 1000, por ejemplo, uno podría concluir que todos los números son menores que 1 millón. (Un millar de instancias que respaldan una declaración seguramente la hacen convincente.) Ambas afirmaciones $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ son, por supuesto, absurdas. Por ejemplo, $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ no es igual a 1 + 1 = 2, y 1 000 001 no es menor que 1 millón. Estos ejemplos ilustran por qué un matemático solo aceptará justificaciones basadas en el razonamiento lógico y no solo en la observación.

Hay varios métodos diferentes de prueba. UNA PRUEBA DIRECTA procede linealmente de las premisas a la conclusión, mientras que una PRUEBA INDIRECTA (también llamada PRUEBA POR CONTRADICCIÓN, o reductio ad absurdum) asume la falsedad de la conclusión deseada y demuestra que es imposible. Muchas afirmaciones en TEORÍA DE NÚMEROS y TEORÍA DE GRÁFICOS también se establecen mediante el método de INDUCCIÓN matemática.

En 1976, dos matemáticos, Kenneth Appel y Wolfgang Haken, presentaron una "demostración" generada por computadora del famoso TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES. Basándose en 1.200 horas de cómputo informático para verificar casi 2.000 cláusulas especiales. Desafortunadamente, ningún individuo tiene los medios para verificar los detalles del trabajo y estar personalmente convencido de la validez del argumento. La cuestión de si el trabajo de Appel y Harken constituía o no una "prueba" provocó una gran controversia en la comunidad matemática. Para mayor comodidad, los matemáticos de hoy todavía buscan una prueba puramente matemática del resultado, evitando por completo la ayuda de la computadora.

Véase también FUERZA BRUTA; REA DEDUCTIVA/INDUCTIVA SONIDO; TEOREMA.

prueba por contradicción (reductio ad absurdum)

Ver PRUEBA INDIRECTA.

prueba por contraposición Ver CONTRAPOSITIVO.

proporcional Se dice que dos cantidades x e y son directamente proporcionales si su RAZÓN es siempre constante. y

Esto significa $= kx$, o $y = kx$, para alguna constante distinta de cero k se llama la constante de proporcionalidad. Por ejemplo, la ley de Hooke en física afirma que la fuerza F ejercida por un resorte extendido una pequeña longitud x es directamente proporcional a esa longitud: $F = kx$. Aquí k se llama constante de resorte.

Si y es directamente proporcional a x, escribimos $y \propto x$ y decimos que y varía directamente con x. Por supuesto, también se sigue que x y. Cuando los valores de y se grafican contra los valores correspondientes de x, el gráfico obtenido es una línea recta a través del origen.

Machine Translated by Google

Si una cantidad y es proporcional a la inversa de a variable x, es decir, y $\frac{1}{x}$, entonces decimos que y y x son inversamente proporcional o que y varía inversamente con x. Por ejemplo, las leyes de los gases en la física afirman que la presión del gas es inversamente proporcional al volumen.

En álgebra, los términos de un enunciado sobre las razones de cantidades a veces se denominan proporcionales. Por ejemplo, en la expresión:

un : segundo = c : re

la cantidad c es la tercera proporcional.

proposición En matemáticas, cualquier enunciado para el cual se requiere o se ha proporcionado una demostración se denomina proposición. En LÓGICA FORMAL, cualquier enunciado que tiene un valor de verdad de verdadero o falso (pero no ambos) se llama proposición.

Véase también TEOREMA.

Ptolomeo, Claudio (ca. 85–165 d . C.) Geometría griega , trigonometría, astronomía Nacido en Egipto, alrededor del año 85 d . más grande), a menudo considerado como el trabajo más significativo en TRIGONOMETRÍA de la antigüedad. El trabajo contiene tablas precisas de "acordes" (equivalentes a una tabla moderna de valores de senos), así como una descripción clara de cómo se construyó esa tabla. (Usó un resultado que hoy se conoce como TEOREMA DE PTOLOMEO , el equivalente geométrico de las fórmulas trigonométricas de SUMA que usamos hoy.) Se sabe que Ptolomeo también intentó probar el famoso POSTULADO PARALELO DE EUCLIDES .

Se desconoce el lugar exacto del nacimiento de Ptolomeo. Aunque nació en Egipto, se le conoce como un erudito griego clásico porque siguió las tradiciones académicas de los griegos y escribió en ese idioma. Su apellido, Ptolomeo, es griego, pero su primer nombre, Claudio, es romano. Esto sugiere que también fue considerado un ciudadano romano.

Traducciones precisas de todas las obras de Ptolomeo sobreviven hoy. Su trabajo más destacado, Syntaxis mathematica, se presenta en 13 volúmenes, y gran parte de las matemáticas desarrolladas en él están motivadas por preocupaciones



Claudio Ptolomeo, un eminente erudito del siglo II, escribió el Almagesto, la obra más influyente sobre el tema de la trigonometría de la antigüedad. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

de astronomía En particular, Ptolomeo trabajó para dar descripciones detalladas de los movimientos del Sol, la Luna y los planetas conocidos en ese momento. Creía que la Tierra estaba en el centro del sistema solar.

En los Libros 1 y 2 de Syntaxis mathematica, Ptolomeo desarrolla una teoría matemática de movimientos circulares compuestos (movimiento en EPICICLOS) como un medio para explicar el movimiento observado de los planetas. Esto motivó su necesidad de su precisa tabla de acordes. También vale la pena mencionar que en este trabajo Ptolomeo usó un polígono de 360 lados inscrito en un círculo para encontrar la siguiente aproximación para π correcta con tres decimales:

$$\pi \approx \frac{377}{120} \approx 3\ 14166\ .$$

El libro 3 de Syntaxis mathematica se ocupa del movimiento del Sol. Al analizar cuidadosamente el

Machine Translated by Google

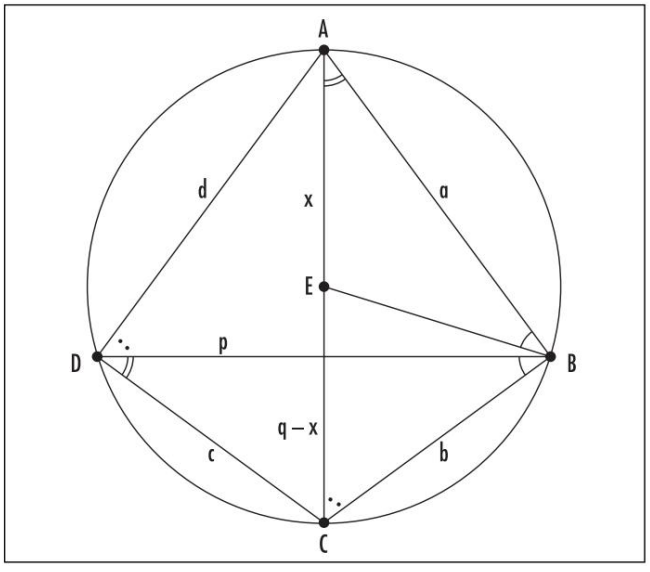
longitudes de las estaciones y el tiempo de los solsticios y equinoccios, Ptolomeo concluyó que, aunque, en su creencia, el Sol orbita alrededor de la Tierra, la Tierra no se encuentra en el centro de esa órbita. Desarrolla una teoría matemática para calcular la distancia desde ese centro a la que supuestamente se encuentra la Tierra.

Los libros 4 y 5 examinan el movimiento de la Luna, y el Libro 6 proporciona una teoría de los eclipses. Gran parte de los Libros 7 y 8 representan un catálogo de más de 1000 estrellas, y los cinco libros restantes exploran su teoría epicíclica del movimiento planetario.

Ptolomeo también escribió importantes trabajos científicos en otros campos. Su libro Analema analiza nuevos métodos matemáticos para construir relojes de sol; su obra Óptica examina las propiedades del color, la reflexión y la refracción; y su principal obra, Geografía, intenta trazar un mapa de todo el mundo conocido en su época, proporcionando medidas lo más precisas posibles de la latitud y la longitud de las principales ciudades.

El teorema de Ptolomeo El astrónomo y matemático griego del siglo II CLAUDIUS PTOLEMY demostró el siguiente resultado, ahora conocido como el teorema de Ptolomeo:

> Si a, b, c y d son las longitudes de los lados de un CUADRILÁTERO inscrito en una circunferencia, y si p y q son las longitudes de sus diagonales, entonces ac + bd = pq.



el teorema de ptolomeo

Se puede demostrar de la siguiente manera: de acuerdo con los TEOREMAS DEL CÍRCULO estándar, los ángulos CAB y CDB que se muestran son iguales. Construya la línea BE de modo que los triángulos ABE y CDB son similares. Entonces $\frac{a}{x} = \frac{p}{c}$. Uno entonces comprueba que los triángulos ABD y EBC también son semejantes (ángulos ADB y ACB son iguales), por lo que $\frac{q - x}{b} = \frac{p}{d}$. Como consecuencia $ac + bd = px + p(q - x) = pq$.

Ver también FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA ; SIMILAR CIFRAS.

matemáticas puras El estudio de estructuras y sistemas matemáticos abstractos, sin tener necesariamente en mente aplicaciones prácticas, se denomina matemáticas puras. Tiene varias ramas, que incluyen ÁLGEBRA ABSTRACTA, GEOMETRÍA, TEORÍA DE NÚMEROS, CÁLCULO, TOPOLOGÍA y los temas derivados de ellas, pero la distinción de MATEMÁTICAS APLICADAS podría no ser nítida. Por ejemplo, la GEOMETRÍA EUCLIDEA podría analizarse como un estudio abstracto de las relaciones entre líneas, puntos y formas geométricas con base en los cimientos de los POSTULADOS DE EUCLIDES , o podría, al mismo tiempo, verse como un estudio de resultados que podrían potencialmente (y, de hecho, ha demostrado ser útil para arquitectos, topógrafos, ingenieros y científicos.

Aunque gran parte de las matemáticas desarrolladas en la antigüedad estuvo claramente motivada por preocupaciones prácticas, el desarrollo de las matemáticas por sí mismas fue de interés para los primeros estudiosos. Por ejemplo, las tablillas babilónicas de ca. 1600 a. C. enumere grandes TRIPLES PITAGÓRICOS que podrían no tener un uso práctico. Los matemáticos griegos de alrededor del 400 a. C. comenzaron a buscar rigor, prueba y justificación en su pensamiento matemático, y ca. 300 aC Euclides produjo su tratado lógicamente riguroso LOS ELEMENTOS, que resume todo el conocimiento matemático conocido en su época. La organización única de ideas presentadas en su trabajo se convirtió en la característica clave de la pieza. Eso, en sí mismo, fue visto como un análisis del pensamiento lógico, uno que se convirtió en el paradigma de todo pensamiento matemático y científico durante los dos milenios que siguieron.

Durante el siglo XIX, los matemáticos comenzaron a buscar ideas unificadoras entre distintas ramas del álgebra y la geometría. El estudio general de estructuras y operaciones sobre ellas condujo al desarrollo del álgebra abstracta, por ejemplo. El desarrollo de las PARADOJAS en la TEORÍA DE CONJUNTOS y en los fundamentos de

Machine Translated by Google

CÁLCULO obligó a los estudiosos a buscar mayores niveles de rigor y abstracción. Incluso se examinó la naturaleza del propio razonamiento lógico como un intento de comprender y resolver paradojas fundamentales. Se reconoció la importancia de la necesidad de ANÁLISIS abstracto y síntesis, y se hizo más evidente la dicotomía entre matemática aplicada y matemática pura.

Hoy en día, muchas universidades de investigación poseen dos departamentos de matemáticas, uno considerado puro y otro aplicado. Los estudiantes pueden obtener títulos avanzados en cualquier campo.

Véase también MATEMÁTICAS BABILÓNICAS; GRIEGO MATEMÁTICAS.

pirámide UN CONO con un polígono en la base se llama pirámide. Específicamente, una pirámide es la figura sólida formada por un polígono y una serie de triángulos, uno unido a cada lado del polígono, todos reunidos en un punto común llamado ÁPICE de la pirámide. La pirámide se clasifica como pirámide recta si la línea que conecta el vértice de la pirámide con el CENTRO DE GRAVEDAD de la base se encuentra con la base en un ángulo recto.
(De lo contrario, se llama pirámide oblicua). Una pirámide cuadrada es una pirámide recta con una base cuadrada.

El estudio de los volúmenes de los conos muestra que el volumen de una pirámide es solo un tercio del área de la base de la figura por su altura. UN TETRAEDRO es una pirámide recta con cuatro triángulos equiláteros como caras.

Véase también FRUSTUM.

Pitágoras (ca. 569–475 a. C.) Geometría griega , teoría de números Nacido en Samos, Jonia, el matemático y místico griego Pitágoras es recordado como el fundador de la escuela pitagórica, que afirmaba haber encontrado la verdad universal a través del estudio de los números. Como tal, se acredita a los pitagóricos como los primeros en tomarse las matemáticas en serio como un estudio por derecho propio sin tener en cuenta la posible aplicación y la necesidad práctica. Ya no está claro qué aportó precisamente Pitágoras, pero se reconoce que la escuela descubrió el papel de las proporciones de los números enteros en la escala musical, las propiedades de los NÚMEROS FIGURADOS, LOS NÚMEROS AMIGABLES, los NÚMEROS PERFECTOS y la existencia de los NÚMEROS IRRACIONALES.

Aunque el TEOREMA DE PITÁGORAS era conocido por los babilonios más de 1.000 años antes, Pitágoras



Pitágoras, líder de una secta del siglo VI a. C. , afirmó haber encontrado la verdad universal a través del estudio de los números enteros y sus proporciones. (Foto cortesía de Topham/The Image Works)

ans son los primeros en haber proporcionado una prueba general del resultado.

Se sabe muy poco de la vida de Pitágoras. La secta que fundó era mitad científica y mitad religiosa y seguía un código de secreto que ciertamente promovía un gran misterio sobre el hombre mismo. Muchos escritos históricos atribuyen cualidades divinas a Pitágoras y, por lo general, no se consideran representaciones precisas. Se entiende que Pitágoras visitó a THALES DE MILETUS (ca. 625–547 a. C.) cuando era un hombre joven que, muy probablemente, contribuyó al interés de Pitágoras por las matemáticas. Alrededor del 535 a. C., Pitágoras viajó a Egipto y ciertamente fue influenciado por las sectas secretas de los sacerdotes egipcios. (Muchas de las prácticas que siguieron los pitagóricos eran las mismas que se practicaban en Egipto: negarse a comer frijoles o vestir ropa hecha con pieles de animales, por ejemplo).

En 525 a. C., las fuerzas persas invadieron Egipto y Pitágoras fue capturado y llevado a Babilonia.

Machine Translated by Google

Eventualmente, después de ser liberado, Pitágoras se estableció en el sur de Italia, donde fundó su famosa escuela alrededor del 518 a. C. Tanto hombres como mujeres fueron bienvenidos como miembros.

Pitágoras creía que todos los fenómenos físicos (y metafísicos) podían entenderse a través de los números. Se dice que esta creencia provino de su observación de que dos cuerdas vibrantes producen una combinación armoniosa de tonos sólo cuando las proporciones de sus longitudes pueden expresarse en términos de números enteros. (Pitágoras fue un músico consumado e hizo importantes contribuciones a la teoría de la música).

Pitágoras y sus seguidores estudiaron los números enteros y sus proporciones, e incluso llegaron a asignar propiedades místicas a los números. Por ejemplo, creían que el primer número natural, el 1, actuaba como la fuente divina de todos los números y, por lo tanto, tenía una estatura diferente a la de un número ordinario. (El número 2 se consideró el primer número). Todos los números pares se asumieron como femeninos y todos los números impares como masculinos, y todos los números impares (excepto el 13) representaban buena suerte.
El número 4 representaba "justicia", siendo el primer cuadrado perfecto, y el 5 matrimonio, como la unión (suma) del primer número par (2) y el primer número impar (3). El número 6 era "perfecto" ya que es igual a la suma de sus factores distintos de sí mismo.

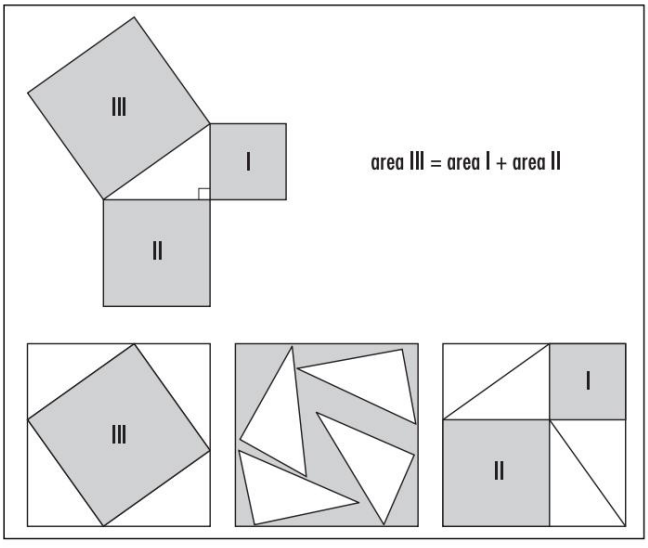
En GEOMETRÍA, los pitagóricos sabían que los ángulos interiores de un TRIÁNGULO siempre suman 180° (y, más generalmente, que los ángulos interiores de una figura de n lados suman (n – 2) × 180°), y sabían cómo construir tres de los cinco SÓLIDOS PLATONICOS. Podían resolver ecuaciones de la forma $x = a(a – x)$ utilizando métodos geométricos y desarrollaron una serie de técnicas para construir figuras de un área determinada. Atribuían gran significado místico al PENTAGRAMA por las proporciones geométricas que contiene. En astronomía, los pitagóricos sabían que la Tierra es redonda, pero creían que se encontraba en el centro del universo. Eran conscientes de que la órbita de la Luna está inclinada hacia el ecuador de la Tierra y fueron los primeros en darse cuenta de que la estrella vespertina y la estrella matutina eran el mismo objeto celestial (es decir, el planeta Venus).

Se desconoce la fecha exacta, el lugar y las circunstancias de la muerte de Pitágoras. A pesar de su fallecimiento, las facciones de la orden pitagórica original perduraron durante más de 200 años. Los miembros de la hermandad pitagórica reverenciaban tanto a su fundador que se consideraba impío que cualquier individuo reclamara un descubrimiento. para su propia gloria sin referirse al mismo Pitágoras. Se dice, por ejemplo, que el miembro Hippasus de Metapontum (ca. 470 a. C.) murió ahogado por anunciar su propio descubrimiento del dodecaedroan regular, el quinto sólido platónico. (Otras versiones de esta historia popular afirman que fue ejecutado por afirmar haber descubierto que la raíz cuadrada de 2 es un número irracional).

Teorema de Pitágoras (teorema de Pitágoras, principio del triángulo rectángulo) Aclamado como el resultado más importante de toda la geometría, el teorema de Pitágoras establece que, para un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la HIPOTENUSA es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Geométricamente, si uno construye cuadrados en los tres lados de un triángulo rectángulo, entonces el teorema afirma que el área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de los otros dos. Algebraicamente, si las longitudes de los tres lados del triángulo son a, b y c, siendo c la hipotenusa, entonces el teorema afirma que se cumple la siguiente relación:

$$un^2 + segundo^2 = c$$

El teorema se puede probar fácilmente colocando cuatro copias del triángulo rectángulo dado en un cuadrado grande. Siempre que los triángulos no se superpongan, la cantidad de espacio alrededor de ellos es siempre la misma, sin importar cuánto



teorema de pitagoras

Machine Translated by Google

los triángulos están dispuestos. En particular, los arreglos izquierdo y derecho muestran que el teorema es verdadero.

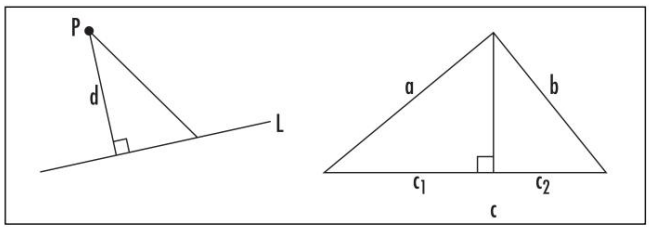
El teorema lleva el nombre del filósofo, matemático y místico griego PITÁGORAS (ca. 500 a. C.). Las tablillas babilónicas que datan de antes del 1600 a. C. enumeran tablas de números a, b y c que satisfacen la relación a + b 2 , lo que sugiere que los eruditos de la época estaban al tanto del resultado. (Se cree que los babilonios usaban 3-4-5 triángulos para medir los ángulos rectos cuando planeaban construcciones). El teorema se establece explícitamente en el antiguo texto hindú Sulbasutram (ca. 1100 a. C.) sobre los edificios del templo, y el diagrama de cuatro triángulos dispuestos en un cuadrado aparece en el antiguo texto chino Chou Pei Suan Ching de alrededor del año 500 a. C. Aunque los eruditos de otras culturas pueden haber estado al tanto del resultado, se atribuye a Pitágoras el primero en dar una explicación completa y adecuada de por qué el resultado es verdadero. .

Hoy en día se conocen muchas demostraciones diferentes del teorema de Pitágoras. Los antiguos griegos (pensando únicamente en términos de construcciones geométricas) mostraron cómo dividir explícitamente el cuadrado más grande en cuatro partes que podían reorganizarse para formar los dos cuadrados más pequeños. El método de prueba presentado anteriormente a menudo se llama prueba china. El presidente de los Estados Unidos, James Garfield, publicó su propia prueba del teorema de Pitágoras en 1876 como parte de su prueba para convertirse en masón de alto rango. A principios del siglo XX, el profesor Elisha Scott Loomis recopiló y publicó 367 demostraciones diferentes del resultado en su libro The Pythagorean Proposition. Embaldosar un suelo con cuadrados de dos tamaños diferentes proporciona una prueba visual sorprendente del teorema. (Véase CUADRADO.) Todavía hoy se están descubriendo nuevas pruebas de este famoso resultado.

Consecuencias del teorema Si un triángulo rectángulo tiene lados de longitud a, b y c, con el lado de longitud c opuesto al ángulo recto, entonces el teorema de Pitágoras afirma que c es ^{2} 2 = un + segundo 2 , de donde se sigue mayor que a y b. De este modo:

> En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto es de hecho la hipotenusa del triángulo.
> Es más largo que cualquiera de los dos lados restantes.

Aunque esta observación parece trivial, tiene algunas consecuencias importantes:



Consecuencias del teorema de Pitágoras

1. La distancia más corta d de un punto P a una línea L viene dada por la longitud de la perpendicular de P a L.
   En el diagrama anterior, cualquier otro segmento de línea que conecte P con L es más largo que d.
   Esta observación permite probar todos los TEOREMAS DEL CÍRCULO estándar.
2. En cualquier triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercero.
   Este resultado, llamado DESIGUALDAD TRIANGULAR, se obtiene trazando una línea perpendicular desde el vértice del triángulo. En el diagrama de arriba a la derecha, tenemos que a + b es mayor que c1 + c2 = c.
3. La distancia más corta entre dos puntos en un plano está dada por una línea recta.
   La desigualdad triangular muestra que la línea que conecta directamente dos vértices de un triángulo es más corta que la suma de las longitudes de los dos lados restantes. Por lo tanto, si un camino que conecta los puntos A y B se compone de segmentos de línea recta, cada par de segmentos se puede reemplazar con un segmento de línea recta más corto. La aplicación repetida de este procedimiento eventualmente reemplaza el camino con el camino en línea recta que conecta A con B. Si, por otro lado, un camino que conecta A con B es curvo, entonces uno puede aproximar el camino curvo por uno compuesto únicamente de pequeños tramos rectos. -segmentos de linea. Como acabamos de ver, la trayectoria en línea recta directa que conecta A con B es más corta que cualquier aproximación de este tipo. Se puede argumentar que si la aproximación se hace con cierto grado de precisión, la trayectoria en línea recta que conecta A con B también es más corta que la trayectoria curva.

Teorema de Pitágoras Generalizado Las formas construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo no necesitan ser cuadrados para que el teorema de Pitágoras sea verdadero. Por ejemplo, si uno fuera a construir triángulos equiláteros en cada uno de los tres lados de un triángulo rectángulo, entonces el área del triángulo grande sería igual a la suma

Machine Translated by Google

de las áreas de los dos triángulos pequeños. Lo mismo es cierto si se construyeran pentágonos, semicírculos o cualquier figura en cada lado del triángulo, siempre que las tres figuras sean similares. La razón es sencilla:

> Sea F una figura de área A con un lado de longitud 1, y considere un triángulo rectángulo con lados de longitud a, b y c con el lado de longitud c la hipotenusa. Dibuja versiones a escala de la figura F en cada uno de los tres lados del triángulo. Entonces, como el área se escala con la longitud al cuadrado, el área de la figura grande es a 2A, y las áreas de las dos copias más pequeñas son b 2A y c 2A. Por la versión ordinaria del teorema de Pitágoras tenemos c 2A = a 2A + b 2A.

El inverso del teorema

La LEY DE LOS COSENOS establece que, para cualquier triángulo, no necesariamente un triángulo rectángulo, con lados de longitud a, b y c, con el lado opuesto del ángulo c etiquetado como C, se cumple la siguiente relación:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Así, si un triángulo arbitrario fuera a satisfacer la relación $c^2 = a^2 + b^2$ de Pitágoras, entonces debe ser el caso de que cosC sea igual a cero, lo que significa que C es un ángulo de 90°. Esto da lo contrario al teorema de Pitágoras:

> Si un triángulo arbitrario con lados de longitud a, b y c satisface $c^2 = a^2 + b^2$, entonces ese triángulo es un triángulo rectángulo (con el ángulo recto opuesto al lado de longitud c).

Así, por ejemplo, un triángulo con lados de longitud 3, 4 y 5 es un triángulo rectángulo precisamente porque $3^2 + 4^2 = 5^2$. (Muchos textos elementales de matemáticas afirman sin explicación que un triángulo 3-4-5 es rectángulo.) Un estudio de las propiedades de los ángulos agudo, obtuso y recto en un TRIÁNGULO proporciona una prueba alternativa muy elemental de la inversa de Pitágoras.

Cualquier conjunto de números enteros a, b y c que satisfagan la relación $a^2 + b^2 = c^2$ se llama TRIPLE PITAGÓRICA. Los triples 5, 12, 13 y 20, 21, 29 son triples pitagóricos y de hecho forman las longitudes de los lados de dos triángulos rectángulos.

Véase también FÓRMULA DE DISTANCIA; ESCALA; SIMILAR CIFRAS.

Triples pitagóricos Un conjunto de números enteros positivos (a,b,c) se satisfaciendo la ecuación una terna $a^2 + b^2 = c^2$ llama pitagórica. Por ejemplo, (3,4,5) y (48,55,73) son dos conjuntos de ternas pitagóricas. El inverso del TEOREMA DE PITÁGORAS muestra que cualquier terna pitagórica (a,b,c) corresponde a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, con el lado de longitud c como hipotenusa. Los arquitectos egipcios, por ejemplo, utilizaron cuerdas anudadas para crear 3-4-5 triángulos y, por lo tanto, medir con precisión ángulos de 90°.

El problema de encontrar ternas pitagóricas es antiguo. El registro más antiguo que se sabe que existe sobre el tema de la teoría de números, una tablilla de arcilla de la era babilónica (ca. 1600 a. C.), contiene una tabla de triángulos rectángulos con lados enteros. El hecho de que el triple (4961,6480,8161) esté en la lista sugiere que los babilonios tenían un método general para generar triples pitagóricos y no se basaron únicamente en prueba y error para encontrarlos. (También sugiere que los eruditos de la época también estaban interesados en dedicarse a las matemáticas simplemente por el disfrute de la materia).

Los múltiplos de cualquier terna pitagórica dan nuevas ternas. Por ejemplo, del triple (3,4,5) obtenemos nuevos triples (6,8,10), (9,12,15), (12,16,20) y similares.
En cierto sentido, estos nuevos triples pitagóricos no son interesantes y los estudiosos tienden a centrarse en aquellos triples (a, b, c) para los cuales los números a, b y c no comparten factores comunes (aparte del número 1). Tales ternas pitagóricas se llaman primitivas. Por ejemplo, (5,12,13) es una terna pitagórica primitiva, pero (60,63,87) no lo es.

El matemático griego EUCLIDES (ca. 300 a. C.) en el libro 10 de su texto LOS ELEMENTOS clasificó completamente las ternas pitagóricas primitivas. Demostró que cualquier terna pitagórica primitiva debe ser de la forma:

$$(p^2 - q^2,\ 2pq,\ p^2 + q^2)$$

para algunos enteros positivos p y q, uno par, uno impar, con p > q y sin compartir factores comunes. Por ejemplo, el triple primitivo (3,4,5) se obtiene al establecer p = 2 y q = 1. Su demostración de esto usó solo principios básicos de aritmética pero fue algo complicada.

Sin embargo, utilizando la teoría de los NÚMEROS COMPLEJOS , el matemático suizo LEONHARD EULER descubrió en el siglo XVIII una derivación elemental de este resultado:

> Supongamos que a, b y c son tres enteros que satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ en la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. Escribe a (a + ib)(a – ib). Como todo número complejo

Machine Translated by Google

tiene raíz cuadrada, debe darse el caso de que a + ib es igual a (p + iq) 2 para algún número complejo p + iq. Tenemos a + ib = (p + iq) ^{2} = pag^{2} 2 - q + 2pqi, de donde se sigue que a = p ^{2} – q ^{2} yb = 2pq . Además, c. ^{2} 2 = un + segundo = (pag^{22}– q)^{2} + (2pq) ^{2} = (pag^{2} + q ^{22})^{2} dando c = p ^{2} + q ^{2}. Uno ahora comprueba que los números p y q deben ser números enteros con las propiedades indicadas.

(Para completar el paso final, escriba los números enteros (p^{2} + q ^{2}) + (pag^{22}– q) = 2p 2 y (pág. ^{2} + q ^{2}) – (pág.^{22}– q) = 2q 2 cada uno como un producto de números primos. Use esto para mostrar que si p y q no son cada uno enteros, entonces el triple obtenido no es primitivo.)

Toda terna pitagórica (a,b,c) es una solución de ecuación $\frac{a}{c}^{2} + \frac{b}{c}^{2} =$. Así, por ejemplo, 1 $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ es un punto en el CÍRCULO UNitario x^{2} 2 + y = 1 con racional coordenadas, como son $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}$ y $\frac{4961}{8161}, \frac{6480}{8161}$. Eso hay infinitos espectáculos de triples pitagóricos que la circunferencia unitaria pasa por infinitos puntos en el plano con coordenadas racionales x e y.

Un estudio de FRACCIONES CONTINUAS da un método alternativo para generar ternas pitagóricas. Si (a,b,c) es un triple (primitivo) con “catetos” a y b que difieren en k, entonces (2a + b + 2c, a + 2b + 2c, 2a + 2b + 3c) es un triple nuevo (primitivo) con patas que también difieren en k. Por ejemplo, del triple (3,4,5), cuyos dos primeros términos difieren en uno, obtenemos los nuevos triples

(3,4,5) → (21,20,29) → (119,120,169) →…

De (5,12,13), cuyos dos primeros términos difieren en siete, obtenemos los nuevos triples

(5,12,13) → (55,48,73) → (297,304,425) →…

Este procedimiento producirá todos los triples (primitivos) con catetos que difieren en una cantidad dada k.

Aunque hay un número infinito de soluciones enteras para la ecuación a ^{2} + segundo 2 = do^{2}, El último teorema de Fermat muestra que no hay soluciones distintas de cero para el com n ecuaciones panion a ^{norte} + segundo norte = do para n > 2. El planar curvas dadas por x ^{norte} n + y = 1, por lo tanto, nunca pasa puntos con coordenadas racionales.

Machine Translated by Google

q

QED La abreviatura QED es la abreviatura de quod erat demostrandum, en latín “que iba a ser demostrado”. EUCLID del siglo III a. C. escribió el
equivalente griego de esta frase al final de cada uno de sus pruebas que indicaran que se había llegado a su conclusión. Muchos matemáticos todavía siguen esta tradición.

Las iniciales QEF, de quod erat faciendum (que se iba a hacer), se añaden a veces después de la terminación de una construcción geométrica, y QEI, para quod erat inveniendum (que se haba de encontrar), despus de la finalización de un cálculo.

cuadrante En un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS, los dos ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes. Por convención, los cuadrantes están numerados, siendo el primer cuadrante el que encima del eje x y a la derecha del eje y (esto es la región en la que tanto x como y son positivas), y la cuadrantes segundo, tercero y cuarto dispuestos en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del origen.

Muchos textos populares de ciencia ficción describen el espacio tridimensional como dividido en cuatro cuadrantes. Este es un uso incorrecto del término.

A la cuarta parte de la circunferencia de un círculo se le llama a veces cuadrante, al igual que la cuarta parte del interior de un círculo (limitado por dos radios perpendiculares).

Véase también OCTANTE.

quadratic (quadric) Cualquier expresión, función o ecuación que contiene variables elevadas a la segunda el poder, pero ningún poder superior, se describe como cuadrático. Así, un polinomio cuadrático, por ejemplo, es un POLINOMIO de segundo grado, y una ecuación cuadrática es una ecuación formada al establecer un polinomio cuadrático igual a cero. Tal ecuación tiene la forma ax2 + bx + c = 0 con a, b y c NÚMEROS REALES o COMPLEJOS y un valor distinto de cero.

Las ecuaciones cuadráticas a menudo surgen al calcular las dimensiones de los rectángulos. (Esto explica el uso de el prefijo “quad” en su nombre, derivado del latín nombre quattuor para “cuatro”.) Por ejemplo, dijo que un cuadrilátero de área 55 ft2 tiene una longitud 6 unidades más larga que su ancho conduce a la ecuación (dada en términos de la ancho desconocido x) x(x + 6) = 55 que es la cuadrática ecuación $x^2 + 6x - 55 = 0$. Antiguo egipcio y bebé eruditos jónicos de ca. 2000 BCE fueron los primeros en lidiar con problemas de este tipo.

La técnica de COMPLETAR EL CUADRADO proporciona un método simple para resolver todas las ecuaciones cuadráticas. También conduce a la famosa fórmula cuadrática:

Una ecuación cuadrática de la forma ax2 + bx + c = 0 con a ≠ 0 tiene soluciones dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, la fórmula cuadrática muestra que $x^2 + 6x - 55 = 0$ tiene soluciones x = 5 y x = –11. (Lo positivo solución proporciona una respuesta aceptable a nuestro problema de ángulo cuádruple.)

Machine Translated by Google

La cantidad b 2 –4ac se llama el DISCRIMINANTE de la ecuación cuadrática ax2 + bx + c = 0. La fórmula cuadrática muestra que si el discriminante es un número real positivo, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
Si es cero, entonces la ecuación tiene solo una raíz (doble), y si el discriminante es un número real negativo, entonces no hay soluciones reales para la ecuación. (Sin embargo, hay dos soluciones complejas distintas.) Dados dos números r1 y r2 , – (r1 + r2)x + r1 r2 = 0 es una ecuación cuadrática con esos dos números como soluciones.

En general, la fórmula cuadrática muestra que las dos raíces de una ecuación cuadrática ax2 + bx + c = 0 tienen suma $-\frac{b}{a}$ y producto $\frac{c}{a}$.

Una función cuadrática es una función de la forma f(x) = ax2 + bx + c con a ≠ 0. Si las constantes a, b y c son números reales, entonces la gráfica de una función cuadrática es una PARÁBOLA CÓNCAVA HACIA ARRIBA si a es positivo y cóncavo hacia abajo si a es negativo. Reescribiendo la ecuación como:

$$\text{hacha}^2 + \text{bx} + \text{c} = \text{a}\left(\text{x}^2 + \frac{\text{b}}{\text{a}}\text{x} + \frac{\text{c}}{\text{a}}\right)$$

$$= \text{a}\left(\text{x}^2 + \frac{\text{b}}{\text{a}}\text{x} + \frac{\text{b}^2}{4\text{a}^2} - \frac{\text{b}^2}{4\text{a}^2} + \frac{\text{c}}{\text{a}}\right)$$

$$= \text{a}\left(\text{x} + \frac{\text{b}}{2\text{a}}\right)^2 - \frac{\text{b}^2}{4\text{a}} + \text{c}$$

muestra que, si a es positivo, la función cuadrática tiene b valor mínimo cuando x = – (Si a es negativo, entonces este 2a produce un valor máximo para la función). El punto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{\text{segundo}^2}{4a}\right)$ representa el vértice de la parábola. La gráfica cruza dos veces el eje x si la ecuación cuadrática f(x) = ax2 + bx + c = 0 tiene dos soluciones reales, toca el eje x en un punto de inflexión si las dos soluciones son iguales y no cruza el eje x en absoluto si no hay soluciones reales.

A los estudiantes de secundaria a menudo se les enseña a resolver ecuaciones cuadráticas mediante un proceso de factorización. Se observa que el producto de dos términos lineales Ax + B y Cx + D da como resultado un término cuadrático

$$(Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + (AD + BC)x + BD$$

con coeficientes a = AC, b = AD + BC, y c = BD.
Aquí b es una suma de dos factores del producto ac. Esto sugiere el siguiente procedimiento:

Para resolver una ecuación cuadrática ax2 + bx + c = 0, seleccione dos factores p y q del producto ac que suman b. (Esto da pq = ac y p + q = b.)
Reescribe la ecuación cuadrática como

$$ax^2 + px + qx + c = 0$$

y realizar álgebra para factorizar la ecuación.
Comience seleccionando un factor común de los dos primeros términos, ax2 y px, y un factor común de los dos términos finales, qx y c.

Por ejemplo, para resolver $8x + 2x^2 - 3 = 0$, buscamos dos factores de –24 que suman dos. Esto sugiere los factores –4 y 6. Reescribiendo, obtenemos:

$$8x^2 + 2x - 3 = 8x^2 - 4x + 6x - 3 =$$
$$4x(2x - 1) + 3(2x - 1) = (4x + 3)(2x - 1)$$

Ahora está claro que la ecuación cuadrática $8x^2 + 2x - 3 = (4x + 3)(2x - 1) = 0$ tiene soluciones $x = -\frac{3}{4}$ y $x = \frac{1}{2}$.

Es sorprendente que si a, b y c son números enteros, este método nunca producirá coeficientes fraccionarios. Uno puede explicar por qué este es el caso usando técnicas de TEORÍA DE NÚMEROS:

Dada una expresión cuadrática ax2 + bx + c con coeficientes integrales, y números enteros p y q con pq = ac y p + q = b, sea d el MÁXIMO COMÚN DIVISOR de a y p, y e el máximo común divisor de q y C. Entonces los números $\frac{a}{d}$ y $\frac{p}{d}$ Son enteros que no comparten ningún común. factores Lo mismo es cierto para $\frac{g}{mi}$ y $\frac{C}{mi}$. Desde $\frac{a}{d} \cdot \frac{g}{mi} = \frac{pag}{d} \cdot \frac{C}{mi}$ tenemos $ac = pq \cdot d/d$. La fracción $\frac{q/e}{c/f}$ es presentado en forma reducida, como es la fracción $\frac{a}{p/d} \cdot d/d$. Como son la misma fracción reducida, e sus numeradores y denominadores coinciden.
En consecuencia, $\frac{a}{d} = \frac{g}{mi}$ y la expresión $\frac{pag}{d} = \frac{C}{mi}$. Factorización cuadrática ahora produce:

$$\text{hacha}^2 + \text{bx} + \text{c} = \text{hacha}^2 + \text{px} + \text{qx} + \text{c}$$

$$= \text{dx}\left(\frac{a}{d}\text{x} + \frac{pag}{d}\right) + \frac{g}{mi}\text{x} + \frac{C}{mi}$$

Machine Translated by Google

$$= dx \left(\frac{a}{d}x + \frac{c}{mi}\right) + mi\left(\frac{a}{d}x + \frac{c}{mi}\right)$$

$$= + dxe\left(\frac{a}{d}x + \frac{c}{mi}\right)$$

Esta es una factorización con coeficientes integrales.

Para la expresión cuadrática $8x^2 + 2x - 3$, nosotros seleccionado p = –4 y q = 6. Entonces d = mcd(8,–4) = 4 y e = mcd(–3,6) = 3, nuevamente dando como resultado la factorización $((4)4\ 3\ \frac{8}{}\ +\ \frac{-3}{}\ )(=1+x2x+1x)\ 3$.

Una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado dos. Por ejemplo, ax2 + bxy + cy2 es un cuadrático forma en dos variables. Una curva cuadrática es una curva dada por una ecuación algebraica de segundo grado. Para ejemplo, un CÍRCULO, dado por una ecuación de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^{22} = r$, es una curva cuadrática.

Ver también HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo).

cuadrilátero (cuadrángulo, tetrágono) Cualquier POLÍGONO de cuatro lados se llama cuadrilátero. Por ejemplo, cualquier CUADRADO, TRAPECIO o PARALELOGRAMO es un cuadrilátero. Las cometas y los deltoides son cuadriláteros. cuyos lados adyacentes son iguales en pares.

Si p y q son las longitudes de las diagonales de un cuadrilátero convexo, y θ es el ángulo entre ellas, entonces el ÁREA del cuadrilátero se da como la suma de las áreas de los cuatro triángulos que crean:

$$\text{área} = \frac{1}{2}xy\,\text{sen}(\theta) + \frac{1}{2}pxqy\,\text{pecado}(\ ) - \theta$$

$$+ \frac{1}{2}\text{sí}(x\ )\text{pecado}(180^\circ\ \theta)$$

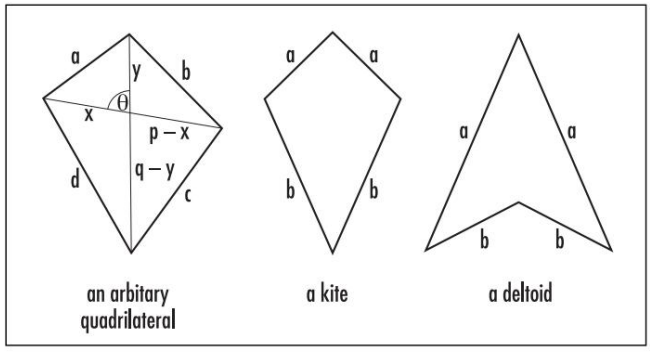
$$+ \frac{1}{2}(xq\ y\ )\text{pecado}(180^\circ\ \theta)$$

$$= \frac{1}{2}pq\ \text{pecado}(\ )\theta$$

Aplicando la LEY DE LOS COSENOS a cada uno de los cuatro triángulos y sumando se obtiene la segunda ecuación:

$$\text{segundo}\ 2 + \text{re}\ 2 \quad {}^{22} = \text{un}\ c = 2pqcos(\theta).$$

(Aquí a, b, c y d son las longitudes de los lados del cuadrilátero como se muestra en el diagrama). Resolviendo para sen(θ) en



cuadriláteros

la primera ecuación y para cos(θ) en la segunda y sustituyendo en la ecuación cos2 (θ)+sin2 (θ) = 1, a identidad estándar en TRIGONOMETRÍA, produce una versión de la FÓRMULA DE BRETSCHNEIDER para el área de un cuadrilátero:

$$\text{área} = \frac{1}{4}\sqrt{4\ 22\ 2\ \text{(pq bd ac}\qquad 222 + - -\ )^2}$$

Argumentos análogos muestran que estas dos fórmulas para mantener el área para cuadriláteros cóncavos también.

Un cuadrilátero se llama cuadrilátero cíclico si es un POLÍGONO CÍCLICO, es decir, si sus cuatro vértices están en un círculo. Una consecuencia de los TEOREMAS DEL CÍRCULO muestra que los ángulos internos opuestos de un cuadrilátero cíclico suma a 180°. El área de un cuadrilátero cíclico está dada por LA FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA .

Cada cuadrilátero, sin importar su forma, proporciona una TESSELATION del avión, es decir, copias de cualquier solo Se puede usar mosaico cuadrilátero para cubrir todo el plano. sin superposición.

Véase también CÓNCAVO/CONVEXO; TEOREMA DE PTOLOMEO .

cuantificador En inglés, con frecuencia encontramos enunciados que contienen las palabras all, some y no (o ninguno). Estas palabras se llaman cuantificadores. Por ejemplo, “Todos los libros de matemáticas son aburridos”, “Algunos lagos contienen agua dulce” y “Ningún poeta toca la viola” son afirmaciones cuantificadas.

Los matemáticos reducen todos los enunciados cuantificados a dos formas estándar mediante el uso del cuantificador universal: "para todos", denotado o el cuantificador existencial: “existe”, denotado . Por ejemplo, la declaración

Machine Translated by Google

que todos los números naturales de la forma 2n + 1 son impares es escrito:

$$A\ n,\ 2n + 1 \text{ es impar}$$

que existe un número natural n que satisface n × n = n + n se puede escribir:

$$n : \text{norte} \times \text{norte} = \text{norte} + \text{norte}$$

(los dos puntos generalmente se leen como "tal que"), y que no hay un número natural n que satisfaga n × n × n = n + n + n como:

$$\neg(\ n : \text{norte} \times \text{norte} \times \text{norte} = \text{norte} + \text{norte} + \text{norte})$$

Véase también ARGUMENTO; NEGACIÓN.

ecuación de cuarto grado (ecuación bicuadrática) Cualquier ecuación POLINOMIAL de grado cuatro de la forma ax4 + bx3 + cx2 + dx + e = 0 con a ≠ 0 se denomina ecuación de cuarto grado.

El erudito italiano LUDOVICO FERRARI (1522-1565), asistente de GIROLAMO CARDANO (1501-1576), fue el primero en encontrar una fórmula aritmética general que resolvería x en cualquier ecuación cuártica. Su método fue publicado por Cardano en la obra épica de 1545 Ars magna (El gran arte). El matemático francés RENÉ DESCARTES (1596–1650) también encontró un método de solución, que describimos brevemente aquí.

Al dividir por el coeficiente principal a, podemos suponer que estamos trabajando con una cuártica de la forma:

$$_{4x_} + Bx3 + Cx2 + Dx + E = 0$$

para números $B = \frac{b}{\text{un}_{,}}$, $C = \frac{c}{a}$, $re = \frac{d}{a}$, y $E = \frac{mi}{a}$.

Sustituyendo x = y – $\frac{B}{-}$ simplifica aún más la ecuación 4 a una sin un término cúbico:

$$^{4}_{\text{años}} + py2 + qy + r = 0$$

Esta forma de la cuártica se denomina cuártica reducida, y cualquier solución y de esta ecuación corresponde a una solución x = y – $\frac{b}{-}$ de la ecuación original 4a .

Suponga que la cuarta reducida se puede factorizar de la siguiente manera, para alguna elección apropiada de número λ, m y n:

$$^{4}_{\text{años}} + py2 + qy + r = (y^{2} + \lambda y + m)(y^{2} - \lambda y + n)$$

EXTENSIÓN DE SOPORTES y COEFICIENTE DE IGUALACIÓN CIENTS en consecuencia produce las ecuaciones:

$$nmp + =+ \lambda^{2}$$

$$\text{Nuevo Méjico}\ \frac{}{q\ \lambda}$$

$$nm\ r=$$

Sumando las dos primeras ecuaciones da n = $\frac{p\ q + 2\lambda}{\lambda\ ;\ \text{al}}$ restarlos se obtiene m = $\frac{q + 2\lambda}{\text{pag}\ \lambda\ ;\ y}$ sustituyendo en el tercero

la ecuación produce, después de un poco de trabajo algebraico, una ecuación cúbica únicamente en términos de λ:2

$$(\lambda^{2})^{3} + 2p(\lambda^{2})^{2} + (\text{pag}^{2} - 4r)(\lambda^{2}) - q^{2} = 0$$

LA FÓRMULA DE CARDANO ahora se puede usar para resolver λ,2 y, por lo tanto, para λ, m y n. Así soluciones a la ecuación de cuarto grado:

$$^{4}_{\text{años}} + py2 + qy + r = (y^{2} + \lambda y + m)(y^{2} - \lambda y + n) = 0$$

ahora se puede encontrar resolviendo y^{2}+ λy + m = 0 y y – λy + n =2 0 usando la fórmula CUADRÁTICA .

Este método, en principio, es sencillo, pero muy difícil de llevar a cabo en la práctica. Sin embargo, muestra que, si se tiene paciencia, se puede escribir una fórmula para la solución de una ecuación cuártica ax4 + bx3 + cx2 + dx + e = 0 usando solo los números a, b, c, d , y e, y sus raíces.

Durante la década de 1700 hubo un gran afán por encontrar una fórmula similar para la solución de la quíntica (ecuación de grado cinco). LEONHARD EULER (1707-1783) intentó encontrar esa fórmula, pero fracasó. Sospechó que la tarea podría ser imposible.

En una serie de artículos publicados entre los años 1803 y 1813, el matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822) desarrolló una serie de resultados algebraicos que sugerían fuertemente que no puede haber ningún procedimiento para resolver una ecuación general de quinto grado o mayor en un número finito de pasos algebraicos. De hecho, esta afirmación fue comprobada como correcta unos años más tarde por Norwegian

Machine Translated by Google

matemático NIELS HENRIK ABEL (1802–29). Por lo tanto, aunque existe una fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de grado dos, la fórmula de Cardano para resolver ecuaciones de grado tres y los métodos de Ferrari y Descarte para resolver ecuaciones de grado cuatro, nunca habrá una fórmula general para resolver todas las ecuaciones de grado cinco. o mas alto.

Por supuesto, algunas ecuaciones de grado cinco se pueden algebraicamente. (Ecuaciones de la forma $x^5 - a = 0$, resolver: por ejemplo, tiene soluciones $x = \sqrt[5]{a}$). En 1831, el matemático francés ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) clasificó por completo aquellas ecuaciones que se pueden resolver de esa manera. El trabajo que realizó dio lugar a una nueva rama de las matemáticas, hoy llamada TEORÍA DE GRUPOS.

cuartil Véase PERCENTIL.

cuaterniones El producto de dos NÚMEROS REALES distintos de cero nunca es cero, ni lo es el producto de dos NÚMEROS COMPLEJOS distintos de cero. Se dice que ambos conjuntos de números son álgebras de división. Dado que cada número complejo a+ib corresponde a un punto (a,b) en el plano R^2, com R2 , la multiplicación de números complejos proporciona una forma de definir una multiplicación en R2 que convierte a R2 en un álgebra de división:

$$(a,b) \times (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

(Observe que la multiplicación "obvia" dada por (a,b) × (c,d) = (ac,bd) no es satisfactoria: (1,0) × (0,4), por ejemplo, da la respuesta cero .)

A principios del siglo XIX, WILLIAM ROWAN HAMIL TON (1805-1865) se preguntó si había una multiplicación adecuada para R3 convirtiéndola también en un álgebra de división. A pesar de sus mejores esfuerzos, nunca pudo proponer una definición adecuada.

En el camino, sin embargo, Hamilton pudo proporcionar una regla de multiplicación adecuada para R4 a través de la invención de un nuevo sistema numérico llamado cuaterniones. Estos consisten en los números reales junto con tres nuevos símbolos i, j, k, que, como la raíz cuadrada de –1, satisfacen las relaciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

junto con:

$$i \times j = k \qquad j \times i = -k$$
$$k \times i = j \qquad i \times k = -j$$
$$j \times k = i \qquad k \times j = -i$$

Un elemento típico de los cuaterniones aparece como:

$$a + bi + cj + dk$$

donde a,b,c y d son números reales. La multiplicación de dos cuaterniones se define por la PROPIEDAD DISTRIBUTIVA y las relaciones descritas anteriormente. Por ejemplo,

$$(2 + i) \times (3 + 3j + k) = 6 + 6j + 2k + 3i + 3k - j = 6 + 3i + 5j + 5k$$

Hamilton pudo demostrar que los cuaterniones son un álgebra de división. Observe que no satisfacen la PROPIEDAD CONMUTATIVA: el orden de la multiplicación afecta la respuesta. Por ejemplo, i × j es diferente de j × i.

En la década de 1950, los matemáticos demostraron que Rn es un álgebra de división solo para n igual a 1, 2, 4 u 8. Estos son los números reales, los números complejos, los cuaterniones y otro sistema llamado números de Cayley (también conocido como los octoniones). Estos sistemas numéricos extendidos a veces se denominan números hipercomplejos.

Quételet, Lambert Adolphe Jacques (1796–1874) Estadística flamenca , astronomía Nacido el 22 de febrero de 1796 en Gante, Bélgica, los historiadores matemáticos se refieren a menudo a Adolphe Quételet como el padre de la estadística moderna. Aunque se formó como matemático y astrónomo, Quételet es recordado por su trabajo pionero en la recopilación de datos estadísticos y su uso para probar los puntos de vista tradicionales sobre temas de medicina y criminología. Su nuevo campo de "mecánica social" influyó profundamente en el pensamiento europeo en las ciencias sociales.

Criado en Gante, Bélgica, Quételet recibió un doctorado en matemáticas de la Universidad de Gante en 1819, después de haber escrito una disertación sobre la teoría de las SECCIONES CÓNICAS. Después de enseñar matemáticas durante cuatro años, se mudó a París en 1823 para comenzar sus estudios de astronomía. Durante el curso de este trabajo, conoció la disciplina de la teoría de la PROBABILIDAD y los métodos estadísticos particulares que los astrónomos estaban usando para obtener mediciones precisas de los fenómenos físicos. Comenzó a preguntarse si las mismas técnicas se aplican a los asuntos humanos. Para probar esta idea, realizó un estudio de datos de registros gubernamentales para analizar la consistencia numérica de los delitos. Este trabajo cosechó

Machine Translated by Google

mucha atención y estimuló debates generales sobre la naturaleza del libre albedrío versus el determinismo social. Él continuó su trabajo de análisis del crimen y luego lo amplió para analizar la mortalidad, el físico humano y problemas sociales Esta obra produjo mucha controversia. entre los científicos sociales de la época.

Quételet llegó a percibir el valor medio de un cualidad humana física o psíquica, o de carácter general característica social, como un "ideal" tangible y real que la naturaleza está tratando de crear, y argumentó que la hecho de que los individuos específicos rara vez siguen estos normas es de esperar como desviación estadística habitual. Sus análisis de los fenómenos sociales fueron ciertamente matemáticamente sofisticado y le ganó mucho respeto como investigador. No obstante, muchos de sus las ideas eran controvertidas. En 1835 publicó un relato detallado de su nueva ciencia social en Sur El hombre y el desarrollo de sus facultades, ensayo d'une physique sociale (Un tratado sobre el hombre y el desarrollo de sus facultades), que, entre otras cosas, detalló el "hombre promedio".

El índice de Quételet (QI) utilizado hoy en día, también conocido como el índice de masa corporal (IMC), se deriva de La obra de Quételet. Este índice de obesidad se define por la formula:

$$QI = \frac{\text{peso en kilogramos}}{(\text{altura en metros})^2} = \frac{704 \times \text{peso en libras}}{(\text{altura en pulgadas})^2}$$

Un individuo con un valor de QI superior a 30 se considera obeso.

Quételet falleció en Bruselas, Bélgica, el 17 de febrero de 1874. Tuvo un profundo efecto en el desarrollo de estadísticas de trabajo y la configuración del estudio de las ciencia. Florence Nightingale consideró su obra de la estatura de una "nueva biblia".

Ver también HISTORIAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo).

cociente En TEORÍA DE NÚMEROS y ARITMÉTICA, el El resultado de dividir un entero por otro se llama cociente. Puede haber o no un resto. Por ejemplo, 13 dividido por 4 da un cociente de 3 y un resto de 1. En general, el cociente de un el entero a dividido por b es un entero q tal que a = bq + r, donde r es un número entero con $0 \le r < q$. El el cociente se puede calcular con la ayuda del suelo función: $q = \frac{a}{b}$

Fuera de la aritmética de los números enteros, un cociente es entendido simplemente como el resultado de dividir a por b (y por lo que el tema de los restos es discutible). por ejemplo, el cociente de $\sqrt{48}$ y 3 es $\frac{\sqrt{48}}{3} \approx 2.309$.

El polinomio cociente de dos polinomios p(x) y q(x) es un polinomio Q(x) tal que p(x) = Q(x)q(x) + R(x) para algún polinomio R(x) de grado menor que el de q(x). Por ejemplo, dividir $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5x + 5$ por $q(x) = x^2 + 2x + 1$ da un cociente de $Q(x) = x^2 + 1$ y un resto de $R(x) = x + 3$:

$$4x^3 + 2x^2 + 3x + 5x + 5 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 1) + (x + 3)$$

Tal cálculo se puede lograr mediante el proceso de DIVISIÓN LARGA.

En cálculo, la REGLA DEL COCIENTE proporciona un medio para derivar la razón de dos funciones.

Véase también ALGORITMO DE EUCLIDES; SUELO/TECHO/ FUNCIONES DE PARTES FRACCIONARIAS; ARITMÉTICA MODULAR; TEOREMA DEL RESTO; DIVISIÓN SINTÉTICA.

regla del cociente La DERIVADA del cociente de dos funciones viene dada por la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Por ejemplo, tenemos $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$. La regla se puede demostrar haciendo uso tanto de la REGLA DEL PRODUCTO como de la REGLA DE LA CADENA: simplemente piensa en la cantidad $\frac{f(x)}{g(x)}$ como el producto: $f(x)\cdot(g(x))^{-1}$. Como consecuencia:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = f'(x)(g(x))^{-1} + f(x)(-1)(g(x))^{-2}g'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Machine Translated by Google

$$= \frac{(\text{efectos de } f)'(x)}{g(x)} + f(x)(g(x))^{-2}\,g'(x)$$

$$= \frac{(\text{efectos de } f)'(x)}{g(x)} - \frac{(\text{efectos de } f)(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

que es la fórmula de la regla del cociente. es mucho más fácil solo para usar las reglas del producto y de la cadena para cualquier problema en lugar de memorizar la regla del cociente fórmula.

Machine Translated by Google

R

medida en radianes Ver ÁNGULO.

radio de convergencia Ver SERIE DE POTENCIA.

Ramanujan, Srinivasa Aiyangar (1887–1920) Teoría numérica india
Nacido el 22 de diciembre de 1887 en Erode, estado de Tamil Nadu, India, Srinivasa Ramanujan es considerado uno de los mayores genios matemáticos de la India. Con un talento inexplicable para manejar SERIES y FRACCIONES CONTINUAS, Ramanujan hizo contribuciones significativas al campo de la TEORÍA DE NÚMEROS y ofreció una gran cantidad de fórmulas nuevas y fundamentalmente importantes que desde entonces han encontrado aplicaciones en muchas ramas diferentes de la ciencia. También se le recuerda por su famosa colaboración con el destacado matemático británico GODFREY HAROLD HARDY (1877–1947).

Ramanujan se destacó en el tema de las matemáticas durante sus primeros años escolares. Cuando era adolescente, se encontró con un pequeño texto de matemáticas de GC Carr llamado Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics.
Escrito en un estilo conciso, y siendo no mucho más que una lista de 5.000 fórmulas, ecuaciones y resultados matemáticos, sin pruebas ni explicaciones, Ramanujan se encargó de analizar todos y cada uno de los resultados y proporcionar su propia explicación.
A partir de ese momento, Ramanujan se preocupó únicamente por las matemáticas. A la edad de 17 años había realizado sus propias investigaciones sobre las propiedades de la SERIE ARMÓNICA y había calculado la CONSTANTE DE EULER con 15 decimales.

En 1904, Ramanujan ganó una beca para asistir a la Universidad Gubernamental de Kumbakonam, pero se la revocaron al año siguiente porque dedicó todo su tiempo a las matemáticas y descuidó sus otros cursos.
Asistió a otra universidad en Madrás, pero nunca se graduó, nuevamente por no asistir a sus cursos no matemáticos.

Como erudito autodidacta, Ramanujan comenzó a publicar resultados en el Journal of the Indian Mathemati cal Society. Su brillante artículo de 1911, “Algunas propiedades de los números de Bernoulli”, sobre los NÚMEROS DE BERNOULLI atrajo la atención nacional. Durante este tiempo, Ramanujan se ganaba la vida como empleado en una oficina de contabilidad.

Ramanujan pronto se dio cuenta de que estaba trabajando a un nivel matemático que estaba más allá de la experiencia de cualquiera que conociera en la India. Animado por sus amigos, comenzó a escribir a matemáticos de Inglaterra en busca de orientación. El renombrado teórico de números Godfrey Hardy del Trinity College, Cambridge, fue el destinatario de una de las cartas de Ramanujan y quedó impresionado por el contenido matemático que contenía. En 1914, Hardy trajo a Ramanujan a Inglaterra y así comenzó su extraordinaria colaboración.

Hardy quedó impresionado por la naturaleza intuitiva del trabajo de Ramanujan. Sin educación matemática formal, Ramanujan solo tenía una vaga idea de lo que constituía una prueba matemática, pero sin embargo tenía un profundo sentido interno de la verdad matemática y una visión asombrosa del funcionamiento de los números.
Una historia divertida, por ejemplo, afirma que Hardy

Machine Translated by Google

una vez le mencionó a Ramanujan que el número del taxi en el que había viajado ese día era 1.729, un número que pensó que era "bastante aburrido". Ramanujan respondió inmediatamente, por el contrario, que 1.729 no es nada aburrido, siendo el primero de todos los números enteros positivos que se pueden escribir como la suma de dos cubos de dos maneras diferentes. En un instante, Ramanujan de alguna manera se dio cuenta de que 1729 es igual a 123 + 13 y 103 + 93 y que ningún otro número menor que 1729 tiene esta propiedad dual.

Durante los 5 años que pasaron juntos en Inglaterra, Hardy y Ramanujan produjeron una serie de resultados de importancia fundamental en teoría de números. Su trabajo más notable fue sobre la teoría de las PARTICIONES.
Durante este tiempo, Ramanujan obtuvo una licenciatura en ciencias por un título de investigación (el equivalente a un doctorado) de Cambridge, fue elegido miembro de la ROYAL SOCIETY de Londres, el organismo científico más prestigioso de Inglaterra, y también miembro de Trinity. Colega.

Desafortunadamente, Ramanujan sufría de una salud extremadamente mala. Después de desarrollar tuberculosis, Ramanujan regresó a la India en 1919 pero murió un año después, el 26 de abril de 1920.

Ramanujan dejó tras de sí una serie de cuadernos inéditos llenos de teoremas y afirmaciones que los matemáticos han seguido estudiando. El profesor de matemáticas George Neville Watson (1886–1965) estudió los cuadernos y publicó 14 artículos, todos bajo el título de Teoremas declarados por Ramanujan. También publicó 30 artículos adicionales, todos inspirados en el trabajo de Ramanujan.

números aleatorios Se dice que una secuencia de números con la propiedad de que no se puede predecir el siguiente número de la secuencia a partir de los elementos anteriores es aleatoria. Tal secuencia no sigue ningún patrón regular o repetitivo. Si los números enumerados provienen de un grupo finito de posibles candidatos (digamos, números de un solo dígito del 0 al 9), entonces la LEY DE LOS NÚMEROS GRANDES afirma que, a la larga, cada número de ese grupo debe aparecer con la misma frecuencia.

El método tradicional para generar números aleatorios es sacar bolas numeradas de un recipiente.

No es posible generar cantidades verdaderamente aleatorias con una computadora (cualquier programa es un conjunto predeterminado de instrucciones), pero es posible crear una lista de números que parecen aleatorios. Los números generados de esta forma se denominan pseudoaleatorios. El seguimiento ing son dos métodos populares para generar números pseudoaleatorios.

Método del cuadrado medio
Desarrollado en 1946 por JOHN VON NEUMANN (1903–57) y sus colegas mientras trabajaba en el Manhattan
Project en Los Alamos Laboratories, el método del cuadrado medio funciona de la siguiente manera:

1. Seleccione un número de cuatro dígitos para que sea el primer número de la secuencia. (Este número se llama la semilla del algoritmo).
2. Eleva al cuadrado este número para producir un número de ocho dígitos. (Agregue un cero inicial si es necesario).
3. Use los cuatro dígitos del medio de este número de ocho dígitos como el siguiente número en la secuencia. Repetir.

El resultado que aparece es una lista aparentemente aleatoria de números entre 0 y 9999. Por ejemplo, comenzando con la semilla 7,254 obtenemos la secuencia 6205, 5020, 2004, 1601, 6320, 9424, 8117, … Desafortunadamente, el método del cuadrado medio puede producir secuencias de enteros que tienden hacia cero. Por ejemplo, partiendo de la semilla 1049 obtenemos la secuencia 1049, 1004, 80, 64, 40, 16, 2, 0, 0, 0,…

Método de congruencia lineal
Desarrollado por DH Lehmer en 1951, el método de congruencia lineal usa ARITMÉTICA MODULAR para generar una lista de números pseudoaleatorios. Funciona de la siguiente manera:

1. Seleccione tres números fijos a, b y m, y un valor inicial x0 (la semilla).
2. Dado un número xn en la secuencia, el siguiente número xn+1 en la lista se obtiene multiplicando xn por a, sumando b y tomando el resto al dividir por m:

$$x_{n+1} = ax_n + b \pmod{m}$$

Por ejemplo, tomando a = 2, b = 3 y m = 10, con semilla = 1, produce la secuencia 1, 5, 3, 9, 1, 5, 3, 9, 1, x0, … ., que, por desgracia ciclos y está lejos de pseu doradom. Aunque no es posible evitar los ciclos con este método, se puede elegir un valor extraordinariamente grande para m , de modo que la duración del ciclo producido sea extremadamente larga y no se produzca la repetición de números durante toda la vida. (Esto crea un

Machine Translated by Google

segundo problema, sin embargo, en que en un verdadero azar secuencia, los números de hecho aparecen más de una vez, que se evita aquí.) Muchas computadoras hoy en día usan este método con la opción m = 231 .

Los números pseudoaleatorios generados por computadora son utilizado en ESTADÍSTICAS para ayudar a facilitar el muestreo imparcial de una POBLACION.

Véase también MUESTRA.

variable aleatoria Ver DISTRIBUCIÓN.

paseo aleatorio En la teoría de la mecánica estadística, Una caminata aleatoria es el camino trazado por una partícula al realizar una secuencia de pasos unitarios en la que la dirección de cada paso se elige al azar. por ejemplo gasolina Las moléculas que se mueven al azar de un lado a otro en el espacio son realización aleatoria tridimensional de forma eficaz camina. (Su movimiento resultante se llama browniano movimiento, que se puede utilizar para explicar la difusión.)

Un niño parado en una acera puede realizar una caminata aleatoria unidimensional dando pasos hacia atrás. y hacia adelante de acuerdo con los resultados de lanzar una moneda (por ejemplo, "cara" significa un paso adelante, "cruz" un paso hacia atrás un paso). Otro niño parado en una cuadrícula infinita de cuadrados realiza una caminata aleatoria en dos dimensiones dando un paso hacia el norte, sur, este o oeste de acuerdo con los lanzamientos de un dado de cuatro caras (o de un dado ordinario si se ignoran las tiradas de 5 y 6).

Los jugadores que apuestan $ 1 a la vez en un casino están realizando efectivamente paseos aleatorios: el contenido de su las billeteras aumentan y disminuyen de forma aleatoria, una unidad a la vez.

Podemos preguntar, ¿cuáles son las posibilidades de que un jugador eventualmente perderá todo su dinero? (O de manera equivalente, ¿cuál es la probabilidad de que una partícula que realiza una caminata aleatoria unidimensional eventualmente se moverá un lugar detrás de "inicio"?)

Esta probabilidad se puede calcular de la siguiente manera. Suponga que el jugador tiene N dólares en la mano y, en cada ronda de juego, tiene un 50 por ciento de posibilidades de subir $1 y una probabilidad del 50 por ciento de perder $1. Sea p el probabilidad de que el jugador eventualmente solo tenga N – 1 dólar en mano.

Hay dos maneras para que un jugador pierda este dólar, ya sea de inmediato, o gane $1 y finalmente perder $2 más adelante. Esta espectáculos:

$$
\begin{aligned}
p_{\text{pag}} &= p_{\text{pag}}(\text{eventualmente perder \$1}) \\
&= P_{\text{PAG}}(\text{pierda \$1 de inmediato, O gane \$1} \\
&\quad \text{Y luego perder \$2}) \\
&= P(\text{perder \$1})\ P_{\text{PAG}}(\text{ganar \$1}) \\
&\quad \times P_{\text{PAG}}(\text{eventualmente perder \$2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, p_{\text{PAG}}(\text{eventualmente pierde \$2})
\end{aligned}
$$

Para perder $2, un jugador primero debe perder $1 y luego otro. De este modo:

$$
\begin{aligned}
&p_{\text{PAG}}(\text{eventualmente pierde \$2}) \\
&= p_{\text{PAG}}(\text{eventualmente perderá \$1} \\
&\quad \text{Y eventualmente perderá otro \$1}) \\
&= p_{\text{páginas}} \times p_{\text{páginas}}
\end{aligned}
$$

Tenemos así la ecuación: $(p - 1)2 = 0$, $p_{\text{pag}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p^2$, eso es, mostrando que p = 1. Es decir, con absoluta certeza, un jugador eventualmente bajará $1, y luego otro, y luego otro, todo el camino hasta ruina. Este fenómeno se llama RUINA DEL JUGADOR .

El cálculo anterior muestra que todas las unidades unidimensionales caminatas aleatorias profesionales (con las mismas posibilidades de dar un paso hacia atrás o hacia adelante) finalmente regresan a sus posiciones iniciales. Los matemáticos han demostrado que los paseos aleatorios bidimensionales (nuevamente con las mismas posibilidades de dar un paso en cualquiera de las cuatro direcciones) también eventualmente regresan a sus posiciones iniciales con absoluta certeza. Sorprendentemente, solo hay un 34 por ciento de posibilidades que un paseo aleatorio tridimensional tendrá la partículas regresan a su posición inicial.

Ver también FUNCIÓN ARMÓNICA.

rango En ESTADÍSTICA, una disposición de un conjunto de objetos o valores de DATOS en un orden dictado por la magnitud o la importancia de alguna característica se llama ranking de los objetos Por ejemplo, la disposición de 20 hombres en orden de altura es una clasificación, como lo es la disposición de 10 números de menor a mayor. La posición de un objeto en una lista dada por una clasificación se llama el rango de el objeto. Una clasificación podría ser puramente subjetiva, tal

Machine Translated by Google

como la clasificación de tartas en un concurso de degustación. El MÉTODO DE SPEARMAN y el MÉTODO DE KENDALL pueden ser Se utiliza para probar el grado de asociación entre dos clasificaciones diferentes del mismo conjunto de objetos.

En la teoría MATRIX , el rango de fila de una matriz es el número máximo de filas linealmente independientes matriz posee, y su rango de columna es el máximo número de columnas linealmente independientes que tiene. El proceso de ELIMINACIÓN GAUSSIANA muestra que estos dos valores siempre concuerdan, y el valor común de estos dos rangos se llama el rango de la matriz. Una matriz m × n se dice que es de rango completo si su rango es igual al menor de m y n Una matriz cuadrada de rango completo es invertible.

Ver también MATRIZ INVERSA; CORRELACIÓN DE RANGO.

correlación de rango Se utilizan comúnmente dos métodos para determinar si dos esquemas de clasificación son o no bien emparejado. Por ejemplo, en un concurso de pastelería, dos jueces pueden clasificar cinco pasteles de la siguiente manera:

	Manzana	Arándano	Cereza	Zarzamora	Saúco
juez 1	5	2	3	1	4
Juez 2	4	1	2	3	5

Si los jueces siguieron criterios puramente objetivos, y estaban libres de preferencia personal en sus elecciones, entonces uno esperaría dos opciones de clasificación idénticas. Si, por otro lado, los jueces siguieron criterios totalmente independientes, o ningún criterio en absoluto (aleatoriamente asignando rangos), entonces uno esperaría muy poco correlación entre las dos listas. Los resultados de este la competencia parece estar en algún lugar entre estos dos extremos

Coeficiente de correlación de rango de Kendall
En 1938, MG Kendall desarrolló una medida de rango asociación dada por un único valor numérico τ, adoptando valores entre –1 y 1. Un valor de 1 indica una coincidencia perfecta en valores de rango; un valor de 0 indica falta de consistencia en las asignaciones de rango; y un valor de –1 desacuerdo perfecto (es decir, la primera opción de un juez) es la opción menos favorecida del otro juez, y así sucesivamente.) El valor numérico τ se calcula completando el siguientes pasos:

1. Reorganizar el orden de los participantes para que las filas dadas por el primer juez están en orden.
2. Mirando ahora solo la segunda fila, calcule el puntuación de cada participante. Este es el número de participantes a su derecha superior en rango menos el número de entrantes a su derecha de menor rango. (El más a la derecha al participante se le asigna una puntuación de cero).
3. Suma todas las puntuaciones. Llame a esta suma S.
4. Si el número de participantes es n, entonces el máximo la suma posible es (n – 1) + (n – 2) +…+ 2 + 1 + 0 = 1– n(n -1). Coeficiente de Kendall de correlación de rango 2 es la relación de S a esta suma máxima:

$$\tau = \frac{S}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

En nuestro ejemplo, el paso 1 del procedimiento produce el tabla reordenada:

	Zarzamora	Arándano	Cereza	Saúco	Manzana
juez 1	1	2	3	4	5
Juez 2	3	1	2	5	4

Hay dos participantes a la derecha de dewberry con rango superior a 3 (saúco y manzana), y dos inferior a 3 (arándano y cereza), por lo que la zarzamora tiene puntuación 0. Del mismo modo, las puntuaciones de los pasteles restantes son: arándano = 3 – 0 = 3, cereza = 2 – 0 = 2, saúco = 0 – 1 = –1, y manzana = 0. La suma total de puntajes es S = 0 + 3 + 2 + (–1) + 0 = 4. La suma máxima posible es 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10. Por lo tanto, la correlación de rango de Kendall coeficiente aquí es:

$$\tau = = \frac{4}{10} \quad 0\ 4.$$

Este valor indica que las asignaciones de rango son posiblemente inconsistentes.

Coeficiente de correlación de rango de Spearman
Un coeficiente de rango alternativo fue desarrollado por Charles Spearman en 1904. Se denota ρ y se calcula sumando las diferencias al cuadrado en el rango

Machine Translated by Google

de cada participante y luego comparar el resultado con la suma máxima posible.

Para ilustrar: en el ejemplo anterior, la manzana recibió rangos de 5 y 4. La diferencia de rango al cuadrado es (5 – 4)2 = 12 = 1. De manera similar, la diferencia de rango al cuadrado para el arándano es (2 – 1)2 = 1 , y para los pasteles restantes, en orden alfabético, (3 – 2)2 = 1, (1 – 3)2 = 4 y (4 – 5)2 = 1. La suma de las cinco diferencias de rango al cuadrado produce la puntuación total: D2 = 1 + 1 + 1 + 4 + 1 = 8.

Con n entrantes, se puede demostrar que la máxima suma posible es $\frac{n(n^2-1)}{3}$. Ocurre cuando los rangos asignado por un juez están en orden inverso a los rangos asignados por el segundo. (Para ver esto, observe cómo cambia la cantidad D2 cuando se intercambian los rangos de dos participantes. Esto mostrará que la cantidad D2 es mayor cuando, para cualquier par de participantes, sus rangos asignados están en orden inverso). Para n = 5 , la suma máxima posible es 40.

El coeficiente de correlación de rangos de Spearman viene dado por:

$$\rho = 1 - 2\frac{D2}{\text{puntuación máxima posible}}$$

Note que un valor ρ = 1 ocurre cuando D2 = 0, es decir, hay un acuerdo perfecto. Un valor ρ = –1 ocurre cuando D2 tiene el valor máximo, es decir, desacuerdo perfecto.

En nuestro ejemplo, tenemos $\rho = 1 - 2 \cdot \frac{8}{40} = 0{,}6$. Este valor nuevamente indica algún desacuerdo y una inconsistencia en los dos esquemas de clasificación.

tasa de cambio Ver CÁLCULO DIFERENCIAL.

razón La relación de una cantidad numérica con otra expresada como un COCIENTE para indicar sus tamaños relativos se llama razón. Escribimos a:b para la razón de una cantidad a a una cantidad b, o, alternativamente, expresamos la razón como una FRACCIÓN a/b. El primer término de una razón a:b se llama antecedente y el segundo término consecuente. Por ejemplo, la razón de 10 a 4 se escribe 10:4 o 10/4, que se puede simplificar a 5/2. (Por lo tanto, el número 10 es 2 1/2 veces más grande que 4). Aquí, 10 es el antecedente y 4 es el consecuente.

El valor de una razón no cambia si ambos términos de la razón se multiplican o dividen por la misma cantidad. Por ejemplo, 10:4, 30:12 y 2,5:1 son equivalentes.

proporciones prestadas. Una razón para la cual uno de sus términos es igual a 1 se llama razón unitaria. Así, 2,5:1, por ejemplo, es una razón unitaria.

Si la razón de dos variables y y x es constante, entonces se dice que las dos variables son PROPORCIONALES.

Por ejemplo, si y/x tiene un valor constante k, entonces debe darse el caso de que y = kx.

En la teoría de la PROBABILIDAD , las PROBABILIDADES de un juego se expresan como una razón. Por ejemplo, si en un juego de azar uno de los posibles resultados se considera favorable y los restantes b resultados posibles son desfavorables, entonces la probabilidad a favor del juego es la relación a:b. Así, para un juego con probabilidades favorables de 3:2, por ejemplo, tres de los cinco resultados se consideran favorables y hay 3/5, o 60 por ciento, de posibilidades de ganar el juego.

Un número que se puede expresar como una razón de dos números enteros se llama NÚMERO RACIONAL. No todos los números son racionales. El TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA establece, por ejemplo, que $\sqrt{2}$ no es racional.

La PRUEBA DE LA RAZÓN se utiliza a menudo para determinar la convergencia de una SERIE infinita.

En la teoría de los VECTORES, el teorema de la razón (también conocida como la fórmula de la sección) establece lo siguiente:

> Si un punto P divide un segmento de línea AB en la razón a:b, entonces el vector de posición p de P viene dado en términos de los vectores de posición a y b de A y B, respectivamente, por la fórmula:
>
> $$_{pag} = \frac{ab+ab+}{}$$

La notación de razón para números se puede extender para indicar los tamaños relativos de más de dos cantidades.

Por ejemplo, la razón a:b:c establece que la razón de la primera cantidad a la segunda es a:b, que la razón de la segunda cantidad a la tercera es b:c, y que la razón de la primera cantidad a el tercero es a:c. Por ejemplo, los números 40, 80 y 200 están en la proporción 1:2:5.

Véase también PROPORCIÓN DE ORO.

función racional (expresión racional) Cualquier función p(x) f(x) = dada como una RAZÓN de dos polinomios p(x) y —q(x) q(x) se llama función racional. Tal función se define en todos los valores x para los cuales q(x) ≠ 0. Por ejemplo, $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 4}$ es una función racional con un dominio

Machine Translated by Google

de todos los valores reales excepto x = 2 y x = –2. cualquier soltero el polinomio p(x) puede considerarse como la función racional $\frac{p(x)}{1}$.

Si, para una función racional f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$, el denominador inator q(x) es cero en x = a, entonces la función tiene una ASINTOTA vertical en x = a o una DISCONTINUIDAD REMOVIBLE en x = a. En este último caso, debe ser que el el numerador p(x) también es cero en x = a. Por ejemplo, el 5 6 función racional $\frac{x^2 - +}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 3}$, a pesar de no definida en x = 3, es igual a la función continua x – 2 en todos los valores diferentes de 3, por lo que tiene un removible discontinuidad en ese punto.

Si una función racional f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$ tiende a un límite c como x → ∞ o como x → –∞, entonces la línea y = c es una asíntota horizontal para f. Por ejemplo, la línea y = 2 es un 6 5 asíntota horizontal de $\frac{x +}{3x^2 -}$. (Escribe $\frac{6x + 5}{3x - 2} = \frac{x \text{ sesenta y cinco} / x}{x(3 2 -) / x} = \frac{\text{sesenta y cinco} / x}{3 2 / x}$. Esto se acerca al valor $\frac{6 0}{3 0} = 2$ como x → ±∞.)

Toda función racional se puede reescribir en términos de FRACCIONES PARCIALES.

Véase también FUNCIÓN CONTINUA.

racionalizar el denominador El proceso de eliminar cualquier término de raíz cuadrada en el denominador de un expresión racional, sin cambiar el valor de esa expresión, se llama racionalizar el denominador. por 1 ejemplo, la cantidad se puede racionalizar por 2 multiplicando tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{2}$ para obtener: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 2 \sqrt{}}{\sqrt{2} 2 \sqrt{}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En general, una expresión de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{ab} - \sqrt{}}$$

se racionaliza multiplicando por el conjugado, $\sqrt{un} + \sqrt{b}$, para producir:

$$\frac{\sqrt{abdominales} + \sqrt{}}{abdominales}$$

Durante las décadas de 1950 y 1960, antes del advenimiento de calculadoras de bolsillo, se consideró necesario siempre Racionalizar el denominador de una expresión numérica. Tiene la ventaja de hacer cálculos relativamente directo. Por ejemplo, aunque uno puede leer de un libro de tablas que $\sqrt{2}$ es aproximadamente 1 1.414, calculando el valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mediante el El proceso de DIVISIÓN LARGA es tedioso. Sin embargo, reescribir $\frac{1}{\sqrt{2}}$ como $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nos permite ver inmediatamente que esta cantidad es simplemente la mitad de $\sqrt{2}$, y también lo ha aproximado valor 0,707.

Hoy, la cantidad $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se considera válido expresión de una cantidad numérica, y no hay absolutamente ninguna necesidad de racionalizar el denominador. Desafortunadamente, muchos programas de matemáticas de secundaria todavía insistir en reescribir tales expresiones, aunque el las razones para hacerlo ahora están obsoletas.

números racionales (racionales) Cualquier número que pueda expresarse como una RAZÓN, a/b, de dos enteros a y b, con b ≠ 0, se llama número racional. Por ejemplo, 2/5 y –6/2 (que es equivalente a –3) son racionales números. Todo número racional es una fracción, y como tales, las reglas para sumar, restar, multiplicar y la división de fracciones se aplica a los racionales. el conjunto de todos números racionales se denota Q (por cociente), y el conjunto de todos los racionales constituye un CAMPO matemático.

Cualquier número real cuya representación decimal eventualmente se repite en un ciclo o termina (y también puede considerarse como que contiene un ciclo repetido de ceros) es un racional. Por ejemplo, multiplicar x = 0,34 por 100 34 da 100x = 34, entonces x = . Multiplicar $\frac{17}{50}$ y = 2,3181818… por 10 y por 1000 y luego restando se obtiene:

$$\begin{aligned} 1000y &= 2318.181818\ldots \\ 10 \text{ años} &= 23.181818\ldots \\ 990y &= 2295 \end{aligned}$$

estableciendo que y = 2295/990 = 51/22. Por el contrario, el proceso de DIVISIÓN LARGA muestra que cada racional número tiene una expansión decimal que se repite. (Para ejemplo, al dividir 3 entre 7, cada residuo que aparece

Machine Translated by Google

en el proceso de división larga sólo puede haber uno de siete números —0, 1, 2, 3, 4, 5, 6— y así, eventualmente, algún resto debe aparecer dos veces. Tan pronto como esto ocurre, el proceso de división larga ciclos.) Esto establece:

> Los números racionales son precisamente aquellos números cuyas expansiones decimales se repiten.

Por lo tanto, cualquier número con una expansión decimal no periódica debe ser un NÚMERO IRRACIONAL. De manera similar, se puede mostrar que los racionales son precisamente aquellos números con desarrollos de FRACCIONES CONTINUAS terminales .

Entre dos números racionales y mentiras $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{b}$ otro racional—su punto medio $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} = \frac{ad+bc}{2bd}$, para instancia. Repitiendo este razonamiento se establece:

> Infinidad de números racionales se encuentran entre dos racionales dados.

Decimos que el conjunto de racionales representa un “subconjunto denso” de la LÍNEA NUMÉRICA real. Además, entre dos números reales x e y en la recta numérica, con x < y, existe un q racional que se encuentra entre ellos.
(Escriba x e y como desarrollos decimales y elija un valor decimal final que se encuentre entre ellos).

Estos argumentos de densidad muestran que no hay un número racional positivo más pequeño, es decir, no hay un "primer" número racional en la recta numérica positiva.
No obstante, el matemático alemán GEORG CANTOR (1845-1918) demostró con su famoso ARGUMENTO DIAGONAL que es posible ordenar todos los racionales positivos (y negativos) en una lista: $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Esta espectáculos:

> El conjunto de los números racionales es CONTABLE.

Con la ayuda de la SERIE GEOMÉTRICA $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ ahora podemos demostrar que la cantidad de —1 espacio ocupado por los racionales en la recta numérica es cero. (Esto es sorprendente dado que los racionales forman un subconjunto denso de la línea).

> Elija x = 1/10 y cubra el punto q1 en la recta numérica con un intervalo de longitud x, el punto q2 con un intervalo de longitud x^2 = x^3 = 0,001, y así sucesivamente. Estos intervalos probablemente se superponen, pero no ocupan más de:
>
> $$x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{9}$$
>
> cantidad de espacio en total. Así, el conjunto de puntos racionales ocupa como máximo una novena parte de la recta numérica real.
>
> Del mismo modo, trabajando con x = 1/100, deducimos que los racionales ocupan como máximo 1/99 del espacio en la recta numérica, o como máximo 1/999 del espacio si trabajamos con x = 1/ 1000. Continuando de esta manera, nos vemos obligados a concluir que la cantidad total de espacio ocupado por los números racionales es cero.

Decimos:

> Los racionales forman un conjunto con una medida de cero en la recta de números reales.

Dado que la recta numérica tiene una longitud infinita, debemos concluir que "la mayoría" de los números no son racionales.

Véase también NÚMERO ALGEBRAICO; NÚMERO; NÚMERO REAL BRAS; NÚMERO TRASCENDENTE.

prueba de razón Ver SERIE CONVERGENTE.

rayo (media línea) La parte de una línea recta que comienza en un punto y sigue para siempre en una dirección se llama rayo. Dos rayos en un plano que comienzan en el mismo punto crean una figura llamada ÁNGULO.

números reales Es extraordinariamente difícil definir con precisión qué se entiende por número real. Muchos textos estándar de matemáticas definen un número real como cualquier NÚMERO RACIONAL o cualquier NÚMERO IRRACIONAL. Desafortunadamente, dado que se declara que un número irracional es cualquier número que no es racional, no está claro de qué grupo de números provienen los números irracionales. Alternativamente, uno puede definir un número real como cualquier número que pueda expresarse como una expansión decimal. (Entonces, los números racionales son los que tienen expansiones repetidas y los irracionales son los que no). La dificultad con este enfoque es que no está claro cómo realizar operaciones aritméticas en estas entidades. Por ejemplo, al sumar dos números enteros grandes, 769 + 845, digamos, uno comienza con los dígitos más a la derecha, los suma, lleva un

Machine Translated by Google

dígito si es necesario, y continúa con los dígitos de la siguiente columna un lugar a la izquierda para repetir este proceso nuevamente. No está claro, entonces, cómo se debe proceder cuando se le pide sumar dos desarrollos decimales infinitos. (¿Cuál es el dígito más a la derecha con el que comenzar?)

A mediados del siglo XIX, cuando los matemáticos intentaron establecer una base teórica sólida para el CÁLCULO, los académicos se dieron cuenta de la necesidad de una comprensión rigurosa de lo que significa un "número real". En particular, para validar los tres teoremas clave en los que se basa el cálculo (a saber, el TEOREMA DEL VALOR EXTREMO , el TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO y el TEOREMA DEL VALOR MEDIO), era esencial que el sistema de números reales se demostrara "completo". ", en el sentido de que ningún número “falta” en el sistema. (Por ejemplo, falta la raíz cuadrada de 2 en el conjunto de números racionales).

El matemático francés AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) propuso una definición de número real utilizando secuencias de Cauchy. (Este enfoque se basa en la idea de que cada número irracional es el LÍMITE de una secuencia de números racionales). Aunque es fácil realizar operaciones aritméticas en secuencias de Cauchy, la integridad del sistema de números reales creado no está inmediatamente clara. En 1872, el erudito alemán JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831–1916) propuso la noción de DEDEKIND CUT como un medio para definir los números reales. Este enfoque tiene la ventaja de hacer evidente la integridad del sistema de números reales, pero la desventaja de hacer que las manipulaciones aritméticas de los números reales sean menos naturales. No obstante, ambos enfoques son válidos y se utilizan hoy en día como medio para definir los números reales.

La obra de GEORG CANTOR (1845-1918), con su famoso ARGUMENTO DIAGONAL, muestra que la CARDINALIDAD de los reales es mayor que la de los racionales.
No sorprende entonces que se necesite un enfoque más sofisticado para comprender el sistema de los números reales que para comprender los números racionales.

Hoy en día, el conjunto de números reales se denota R y se representa geométricamente como el conjunto de puntos en una LÍNEA NUMÉRICA. Los números reales constituyen un CAMPO matemático.

Véase también NÚMERO; PROPIEDADES DE ORDEN.

recíproco (inverso multiplicativo) El número 1 dividido por una cantidad se llama el recíproco de esa cantidad. Por ejemplo, el recíproco de 2 es 1/2, y el recíproco de $x^2 + 1$ es $\frac{1}{x^2+1}$. el producto de un cantidad y su recíproco es siempre 1.

El recíproco de cualquier FRACCIÓN $\frac{a}{b}$ es el correspondiente fracción con numerador y denominador intercambiado: $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$. El recíproco de un COMPLEJO segundo _ El NÚMERO x + iy se simplifica multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del número complejo:

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Este es el mismo proceso que RACIONALIZAR EL DENOMINADOR de una cantidad fraccionaria.

Una ecuación que no cambia (es decir, tiene el mismo conjunto de soluciones) si las variables en esa ecuación se reemplazan por sus recíprocos se llama ecuación recíproca. Por ejemplo, $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ es un recíproco ecuación, ya que reemplazando x por $\frac{1}{x}$ da $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 1 = 0$ que se simplifica a $1 - 3x + x^3 = 0$.

La serie recíproca de una SERIE dada es la serie cuyos términos son los recíprocos de los términos de la serie dada. Por ejemplo, cualquier SERIE ARMÓNICA es la serie recíproca de una SERIE ARITMÉTICA.

Véase también ELEMENTO INVERSO.

Recorde, Robert (ca. 1510–1558) Álgebra galesa Nacido en Tenby, Gales, ca. 1510 (se desconoce su fecha exacta de nacimiento), el matemático Robert Recorde es recordado por su trabajo fundamental en el establecimiento de la educación matemática general en Inglaterra, así como por la introducción del ÁLGEBRA en ese país. Recorde escribió una serie de influyentes libros de texto elementales, todos escritos en inglés y utilizando una terminología clara y sencilla. También se le recuerda por inventar el símbolo “=” para denotar iguales.

Recorde se licenció en medicina en la Universidad de Cambridge en 1545 y practicó la medicina en Londres durante varios años antes de ser nombrado inspector general de minas y dinero en Irlanda por el rey Eduardo VI. Vale la pena señalar que Recorde produjo la primera moneda en Inglaterra en tener la fecha escrita con

Machine Translated by Google

NÚMEROS HINDÚ-ÁRABES (los números que usamos hoy en día) en lugar de NÚMEROS ROMANOS.

Mantener un interés por las matemáticas a lo largo su vida, Recorde escribió una serie de textos instructivos en matemáticas. Su primera pieza, The Grounde of Artes, publicado en 1543, discutió las ventajas de la Números indo-árabes y técnicas aritméticas generales útiles para el comercio. Más tarde publicó un versión extendida de esta obra con el mismo nombre en 1552, que también exploró la teoría de los NÚMEROS ENTEROS y los NÚMEROS RACIONALES. Por esta época Recorde también publicó Pathwaie to Knowledge, una versión abreviada de la famosa obra de Euclides, LOS ELEMENTOS.

Recorde es quizás mejor recordado por su 1557 pieza The Whetstone of Witte, considerada el primer texto significativo sobre el tema del álgebra escrito en inglés. Su título es un juego de palabras que hoy no se entiende. Primeros algebristas usó la palabra latina cosa para "cosa", que significa la variable desconocida en una ecuación. esta palabra de cerca se asemeja a la palabra latina cos para "piedra de afilar", una piedra para afilar herramientas. Así, el título de Recorde se refiere a el arte del álgebra como recurso para agudizar el ingenio.

En este famoso texto, Recorde explica la teoría de ecuaciones y la aritmética de raíces cuadradas. el resuelve Ecuaciones CUADRÁTICAS (pero descarta las soluciones negativas). Señala, en particular, que para una ecuación de la forma $x^2 = ax - b$, el término a es igual a la suma de los dos raíces de la ecuación, y el término b su producto. (Vemos esto hoy al notar que $(x - r1)(x - r2) = x^2 - (r1 + r2)x + r1\,r2$.) Es en esta pieza que Recorde introduce el símbolo “=” para la igualdad, señalando que el el uso de dos segmentos de línea paralelos es apto "porque noe 2 las cosas pueden ser más iguales."

Recorde murió en Londres, Inglaterra, en 1558. El se desconoce la fecha exacta de la muerte.

rectángulo UN CUADRILÁTERO con los cuatro ángulos siendo ángulos rectos se llama rectángulo. UN CUADRADO es considerado un rectángulo.

El AREA de un rectangulo es el producto de su largo y su anchura, y su PERÍMETRO es el doble de la suma de estas dos cantidades:

$$\text{área} = \text{largo} \times \text{ancho}$$
$$\text{perímetro} = 2 \times \text{largo} + 2 \times \text{ancho}$$

Solo hay dos rectángulos con longitudes de lado enteras cuyas áreas y perímetros tienen la misma valor numérico: el rectángulo de 3 × 6 de área/perímetro 18, y 4 × 4 cuadrados de área/perímetro 16.

Las dos DIAGONALES de un rectángulo son iguales en longitud y se bisecan entre sí, y el rectángulo es el único cuadrilátero con esta propiedad. Los carpinteros miden las longitudes de las diagonales para verificar que su trabajo sea angular recto. También se puede utilizar esta observación para dibujar rectángulos sorprendentemente precisos en el suelo usando sólo dos trozos de cuerda de igual longitud y un trozo de tiza para la acera: ate las dos cuerdas juntas en sus puntos medios y jálelas para formar las dos que se bisecan. diagonales de un rectángulo. Marque los puntos finales de la cuerdas, estas son las esquinas del rectángulo, y dibuja sus lados usando una cuerda tensa como guía.

Véase también RECTÁNGULO DE ORO.

relación de recurrencia (relación recursiva, fórmula de reducción) Una ecuación que permite calcular la valores sucesivos de una FUNCIÓN o una SECUENCIA una vez El conjunto inicial de valores que se da se denomina relación de recurrencia. Por ejemplo, los NÚMEROS DE FIBONACCI Fn están completamente especificados por la relación de recurrencia $Fn = Fn–1 + Fn–2$ para $n > 2$ una vez que se nos dice que $F1 = 1$ y $F2 = 1$. El número de movimientos necesarios para resolver la TORRE DE ROMPECABEZAS DE HANOI con N discos, T(N), está dado por el relación de recurrencia $T(N + 1) = 2T(N) + 1$ con $T(1) = 1$. La relación de recurrencia $an+1 = an + 3$ con $a1 = 7$ define la sucesión aritmética 7, 10, 13, 16,…

En CÁLCULO INTEGRAL, el método de INTEGRACIÓN POR PARTES se utiliza a menudo para establecer una reducción importante fórmulas Por ejemplo, estableciendo $u = x^n$ y $v' = e^x$ en el integral a continuación establece la relación $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$. La aplicación repetida de esta fórmula permite uno para eventualmente evaluar la integral dada.

Otras fórmulas de reducción incluyen:

$$\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\,dx$$

$$\int x^n \cos x\,dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$$

Ver también SISTEMA DINÁMICO; CRECIMIENTO LOGÍSTICO; DEFINICIÓN RECURSIVA.

Machine Translated by Google

definición recursiva (definición inductiva, recursividad)
Se dice que una SECUENCIA an está definida recursivamente si:

1. Se da el primer término a0 .
2. Se presenta un algoritmo para calcular cualquier término a partir de su predecesor.

Por ejemplo, la secuencia de potencias 1, x, x2 puede , ^{3x} , … definirse recursivamente por:

$$a0 = 1$$
$$an+1 = xano$$

y la función FACTORIAL n! Puede ser definido como:

$$0! = 1$$
$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!$$

Ver también SISTEMA DINÁMICO; RELACIÓN DE RECURRENCIA.

forma reducida (términos más bajos) Se dice que una FRACCIÓN está en forma reducida si su numerador y denominador no comparten ningún factor común (aparte de uno). Por ejemplo, la fracción 12/25 está en forma reducida, mientras que 14/21 no lo está. (El numerador y el denominador comparten 7 como factor). Cancelar todos los factores comunes al numerador y al denominador de una fracción reduce la fracción a una de forma reducida. Por ejemplo, 14/21 es equivalente a la fracción reducida 2/3.

Los matemáticos han demostrado que si el numerador y el denominador de una fracción se eligen al azar, entonces la PROBABILIDAD de que la fracción resultante esté en forma reducida 6 es precisamente (alrededor del 62 por ciento).

$$\frac{a}{\pi^2}$$

Ver también CANCELACIÓN.

reflexión Ver TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA; LINEAL TRANSFORMACIÓN.

Regiomontanus (1436–1476) Alemán Trigonome try, Astronomía
Nacido el 6 de junio de 1436 en Königsberg, Prusia (ahora Alemania), el erudito Regiomontanus es recordado como autor de De triangulis omnimodis (Sobre todas las clases de triángulos), publicado póstumamente en 1533 , que fue la primera explicación moderna de la TRIGONOMETRÍA como disciplina independiente de la astronomía. Este trabajo fue extremadamente influyente en el renacimiento del tema en Occidente.


IOANNIS DE MONTE
REGIO, MATHEMATICI CLARISSIMI, TABVLÆ DIRECTIONVM PROFECtionumq; Horoscopi Astrologiæ Iudiciariæ, quàm tabulis instrumentisq; innumeris fabricandis vtiles ac necessariæ. Denuo nunc editæ, & pulchriore ordine dispositæ, multisq; in locis emendatæ.

EIVSDEM REGIOMONTANI TABVLA SINVVM, per singula minuta extensa, vniuersam sphæricorum triangulorum scientiam complectens.

ACCESSERVNT HIS TABVLAE ASCENSIONVM obliquarum, à 60. gradu eleuationis poli, vsque ad finem quadrantis: per ERASMVM REINHOLDVM Salueldensem supputatæ.

VVITEBERGAE
Imprimebantur in Officina Typographica Matthæi VVelack.
ANNO M. D. LXXXIV.

Regiomontanus, matemático y astrónomo del siglo XV, publicó Tabulae, un texto de tablas trigonométricas importante para los estudiosos de la época. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Aunque nació Johann Müller, Regiomontanus tomó el nombre de su lugar de nacimiento. (Königsberg significa "la montaña del rey", que se traduce al latín como "Regiomontanus".) Formado como astrónomo, fue nombrado profesor en el campo en la Universidad de Viena en 1641 y, siete años más tarde, fue nombrado astrónomo para Rey Matthias Corvinus de Hungría.

Hasta ese momento, la trigonometría se consideraba solo una parte de la astronomía. Aunque consciente del uso árabe de la función tangente, Regiomontanus discutió solo la función seno en su famosa obra.
A diferencia de los antiguos matemáticos indios, no pensó en el seno como una razón, sino como la longitud de un segmento de línea particular dibujado para un círculo de radio fijo. Utilizando un círculo de 60 000 unidades de radio, Regio montanus presentó una gran tabla de valores de senos y

Machine Translated by Google

discutió los medios para convertir estos valores a los apropiados para un círculo de un radio diferente. Su trabajo también esbozó toda la teoría básica de la trigonometría, junto con aplicaciones a la geometría plana y esférica. El trabajo de Regiomontanus fue extremadamente influyente.

Regiomontanus era un astrónomo capaz. En 1472 hizo observaciones detalladas de un cometa lo suficientemente precisas para que los eruditos lo identificaran más tarde como el cometa Halley. (Halley fue el primero en calcular la longitud de la órbita del cometa 210 años después.) Regiomontanus también ideó un método matemático para determinar la posición longitudinal en la TIERRA utilizando la ubicación de la Luna en el cielo. Murió en Roma, Italia, el 8 de julio de 1476.

regresión Si un DIAGRAMA DE DISPERSIÓN indica una relación entre dos variables en un estudio científico, cualquier intento de cuantificar esa relación se llama regresión. Por ejemplo, si un experimento produce puntos de datos (x1 , y1), (x2 , y2),…, (xn , yn), se puede intentar encontrar una fórmula y = f(x) que “se ajuste mejor” a los datos. El MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS busca minimizar la suma de los cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

utilizando técnicas de CÁLCULO. Este enfoque funciona particularmente bien si se sospecha una relación lineal f(x) = ax + b, pero también se puede usar para posibles relaciones cuadráticas f(x) = ax2 + bx + c, y relaciones sospechadas siguiendo otras fórmulas simples.

Véase también COEFICIENTE DE CORRELACIÓN.

relación (relación) Cualquier emparejamiento entre elementos de un conjunto con algunos elementos de otro, o elementos de un conjunto con otros elementos del mismo conjunto, se denomina relación. Por ejemplo, considere el conjunto de todas las personas del mundo. Entonces la correspondencia M “madre de” que asocia a cada persona su madre biológica es una relación. Para el conjunto de números reales, la relación "mayor que" G declara que a está relacionado con b si a es mayor que b, y la relación "círculo" C establece x como relacionado con y si los dos números satisfacen la ecuación $X^2 + y^2 = 1$.

Si dos miembros a y b de un conjunto están relacionados por una relación R, entonces escribimos aRb. Por ejemplo, si la madre de Brian es Joan, entonces “Brian M Joan” (es decir, Brian tiene como “madre” a Joan). También tenemos que 3G2, ya que 3 es mayor que 2, y 1C 0, ya que el punto (1,0) está en el círculo unitario. (Nota: la relación "mayor que" G generalmente se denota ">".)

Si se entiende la relación que se discute, también es conveniente escribir dos elementos que se relacionan simplemente como un par ordenado. Por ejemplo, en la relación maternal M tenemos (Brian, Joan), pero no (Joan, Brian). Los matemáticos generalmente prefieren la presentación de pares ordenados de una relación y, de hecho, definirán una relación simplemente como cualquier colección de pares ordenados. Esto tiene la ventaja de que si los elementos en discusión son números, entonces se pueden graficar los puntos que satisfacen una relación dada. Por ejemplo, bajo la relación G “mayor que” , un par (a,b) que satisface esta relación corresponde a un punto en el plano sobre la línea diagonal y = x. El conjunto de todos los pares (x,y) que pertenece a la relación circular C forma un círculo en el plano xy.

Una relación se llama FUNCIÓN si ningún elemento del primer conjunto (primera coordenada) de la relación coincide con más de un elemento del segundo conjunto (segunda coordenada). Por ejemplo, como Brian, como todo ser humano, puede tener una sola madre biológica, la relación de "cuidar de" es una función.

Dado que 3 > 2 y 3 > 1, por ejemplo, la relación "mayor que" no es una función. La relación del “círculo” C tampoco es una función ya que, por ejemplo, tanto (0,1) como (0, –1) pertenecen a la relación (tenemos 0C1 y 0C–1).

Si consideramos, en cambio, la relación “parábola” P definida como el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen $y^2 = x$ entonces esta relación es una función: si xPy1 y xPy2 , entonces debe ser el caso que y1 = y2 _ (Tenemos $y1^2 = y2^2 = x$

error relativo Si el ERROR o la incertidumbre en la medición de una cantidad se expresa como una relación con la medición total, entonces el error se denomina error relativo. Por ejemplo, cuando se usa 1,2 como una aproximación para la cantidad 1,16, el error relativo es 0,04/1,16 ≈ 0,034. Si, al medir la altura de un edificio como 62 pies, los ingenieros usaron un dispositivo que mide al medio pie más cercano, entonces la altura del edificio debe escribirse 62 ± 0,5 pies, y el error relativo de esta medida es 0,5 /62 ≈ 0,008.

Véase también ERROR DE PORCENTAJE.

Machine Translated by Google

primo relativo (coprimo) Dos enteros a y b son relativamente primos si su MÁXIMO FACTOR COMÚN es 1. En consecuencia, el único factor que tienen en común los dos números es 1. Por ejemplo, 15 y 28 son relativamente primo. Dos números consecutivos cualesquiera son relativamente primo.

Los números relativamente primos juegan un papel clave en la famoso problema del sello postal:

> ¿Qué valores de franqueo se pueden obtener usando 5-sellos de céntimos y 7 céntimos solamente?

Por ejemplo, se puede componer un valor de franqueo de 22 centavos con tres sellos de 5 centavos y un sello de 7 centavos, pero la cantidad de 23 centavos no puede obtenerse así. Uno puede comprobar que cada cantidad 24, 25, 26, 27 y 28 es posible. Sumar múltiplos de 5 a cada uno de estos números muestra que cualquier cantidad mayor que 24 es asequible. (Debajo de esto, se puede comprobar que sólo el los valores 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21 y 22 pueden estar compuesto.)

En general, dados dos valores de sello a y b, con valores a y b relativamente primos, se puede demostrar que siempre hay un número N de modo que toda cantidad N y superiores se pueden componer como una combinación de sellos de cada tipo. Este resultado no es cierto si a y b no son relativamente primos.

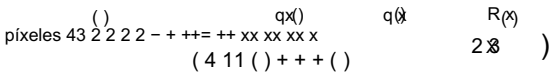
Los matemáticos han demostrado que la PROBABILIDAD que dos números enteros elegidos al azar son primos relativos es $\frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}61$.

Véase también FACTOR COMÚN; FACTOR; LLENADO DE JARRAS PROBLEMA.

teorema del resto El proceso de DIVISIÓN LARGA muestra que si un POLINOMIO p(x) de grado n se divide por un segundo polinomio q(x) de grado m, se obtiene, además de un término de COCIENTE Q(x), un polinomio de resto R(x) de grado estrictamente menor que m:

$$p(x) = Q(x)q(x) + R(x)$$

Por ejemplo, dividir $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 4$ por el polinomio de grado 2 $q(x) = x^2 + 1$ da un resto der R(x) = 2x + 1 de grado 1:



En particular, si un polinomio p(x) se divide por un término lineal x – a para alguna constante a, el resto del resultado debe ser un polinomio de grado cero, es decir, una constante:

$$p(x) = Q(x)\,(x - a) + b$$

Establecer x = a en esta ecuación muestra que p(a) = 0 + b. Así, el resto del término b es simplemente el valor de la polinomio en x = a. Esta observación se llama teorema del resto:

> Si un polinomio p(x) se divide por el término x – a, para alguna constante a, entonces el término restante es p(a):
>
> $$p(x) = (x - a)Q(x) + p(a)$$

Por ejemplo, si $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2x + 4$ se divide por x + 1 = x – (–1), el resto será p(–1) = – 1 – 7 – 2 + 4 = –6.

El teorema del resto es útil para encontrar el Factores de un polinomio. Por ejemplo, para el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2x + 4$, tenemos p(1) = 1 – 7 + 2 + 4 = 0, indicando que (x – 1) es un factor: $x^3 - 2x^2 - 7x + 2x + 4 = (x - 1)Q(x) + p(1) = (x - 1)Q(x)$.

Véase también TEOREMA DEL FACTOR; TEÓ FUNDAMENTAL REM DE ALGEBRA.

discontinuidad removible Ver FUNCIÓN CONTINUA.

Triángulo de Reuleaux Ver ANCHO CONSTANTE.

Papiro de Rhind (papiro de Ahmes) Este famoso documento es el texto matemático escrito más antiguo que se conoce. existir. Actualmente se encuentra en el Museo Británico, este 18-Rollo de papiro de un pie de largo, 13 pulgadas de ancho, data de ca. 1650 a. C. El documento fue descubierto enterrado en el Arenas del desierto egipcio, cerca del Valle de los Reyes, en a mediados del siglo XIX por un ciudadano egipcio desconocido. El escocés visitante Alexander Henry Rhind (1833-1863), quien tenía interés en las antigüedades, compró el papiro y lo transportó a Gran Bretaña.

El papiro es una copia de una obra que data de menos 200 años antes. Aunque el texto consiste principalmente de problemas numéricos y soluciones, con un énfasis en la aplicación práctica, es claro que el

Machine Translated by Google

Los egipcios de la época tenían en alta estima las matemáticas. El copista, cuyo nombre se traduce como Ahmes o Ahmose, copió también el grandioso título del papiro: Representación precisa: la entrada al conocimiento de todas las cosas existentes y todos los secretos oscuros. El propósito del texto parece ser el de un libro de texto: una serie de ejemplos y ejercicios organizados para ilustrar ciertas habilidades y técnicas matemáticas. Algunos de los últimos problemas discutidos, sin embargo, no tienen aplicación práctica e indican claramente un deleite en el estudio de las matemáticas por sí mismas.

Ver también FRACCIONES EGIPCIAS; MATEMÁTICAS EGIPCIA; MULTIPLICACIÓN EGIPCIA.

Escala de Richter Véase ESCALA LOGARÍTMICA.

Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826–1866)
Geometría alemana , análisis, cálculo, teoría de números Nacido el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, Hanover (ahora Alemania), Bernhard Riemann es recordado como uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX.
Su trabajo en GEOMETRÍA NO EUCLIDEA revolucionó el pensamiento moderno sobre el estudio de la forma y el espacio y proporcionó las herramientas que ALBERT EINSTEIN necesitaba para su descripción del universo en la teoría general de la relatividad. Entre sus muchas contribuciones significativas al ANÁLISIS, se recuerda a Riemann por su construcción de la integral de Riemann, que, por primera vez, extendió la teoría del CÁLCULO más allá del ámbito de las funciones continuas únicamente. Riemann también desarrolló una teoría de funciones complejas (es decir, funciones cuyas entradas y salidas son NÚMEROS COMPLEJOS) y estudió aplicaciones de cálculo en este entorno. En 1859, mientras buscaba una mejor aproximación para el número de primos dado por el famoso TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO, Riemann descubrió una versión generalizada de la importante FUNCIÓN ZETA de LEON HARD EULER . Hizo una conjetura profunda y esclarecedora sobre las propiedades de esta función, la hipótesis de Riemann, que, de ser cierta, proporcionaría una información inestimable sobre la distribución de los números primos. Probar (o refutar) la hipótesis de Riemann se considera el problema matemático sin resolver más importante de la actualidad.

Riemann mostró un gran interés por las matemáticas a una edad temprana y el director de su escuela secundaria lo animó a seguir esta línea de estudio. en 1846 Riemann se matriculó en la Universidad de Göttingen para estudiar con el matemático CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). Sorprendentemente, incluso con Gauss como miembro de la facultad, Göttingen no ofrecía un programa sólido en matemáticas, por lo que, un año después, Riemann se transfirió a la Universidad de Berlín, una institución reconocida por su fortaleza en matemáticas en ese momento. Mientras estuvo allí, Riemann desarrolló su teoría general de variables y funciones complejas que más tarde formaron la base de gran parte de su importante trabajo.

Después de completar su licenciatura en Berlín, Riemann regresó a Göttingen en 1849 para completar una tesis doctoral bajo la supervisión de Gauss.
Recibió un Ph.D. 2 años después en matemáticas.

Gauss describió el trabajo de tesis de Riemann como "una originalidad gloriosamente fértil". Al ver el rango de resultados de una función compleja como una superficie en un espacio tridimensional o incluso tetradimensional, Riemann logró vincular la teoría del cálculo y el análisis con el estudio de la forma, el espacio y la geometría. Este enfoque innovador fue inmediatamente reconocido como un importante punto de inflexión en el avance de las matemáticas. Por recomendación de Gauss, a Riemann se le asignó un puesto en Göttingen y comenzó a trabajar en su título de habilitación. Durante este tiempo, Riemann centró su atención en el estudio de la SERIE DE FOURIER y las cuestiones de integrabilidad. Fue durante este período que Riemann formuló su famosa definición de integral.

Como paso final para completar su título, se le pidió a Riemann que diera una conferencia pública. Gauss le pidió que hablara sobre la teoría de la geometría, y el 10 de junio de 1854, Riemann presentó al mundo exterior su innovador trabajo sobre la forma y el espacio.

Riemann ideó una noción general de distancia en un espacio n dimensional y desarrolló una teoría de TENSORES que le permitió definir adecuadamente la forma geométrica. En particular, Riemann desarrolló la noción de tensor de curvatura para medir o definir la deformación del espacio. Las matemáticas que Riemann presentó ese día demostraron ser el marco preciso que Einstein necesitaba para estructurar su teoría de la relatividad general. Riemann continuó presentando y publicando trabajos innovadores en los años siguientes.

El 30 de julio de 1859, Riemann fue nombrado catedrático de matemáticas en Göttingen, y unos días más tarde fue honrado con la elección a la Academia de Ciencias de Berlín. En ese momento, Riemann había desarrollado un interés en la TEORÍA DE NÚMEROS y la distribución de números primos.

Machine Translated by Google

números. En un informe escrito a la academia, Riemann presentó su trabajo sobre la famosa función zeta y su método de extender el alcance de la función a incluir números complejos como entradas: otra obra maestra. Este trabajo cambió por completo la dirección de investigación matemática en teoría de números durante el siglo siguiente. Riemann había logrado conectar las nociones de geometría y espacio a las funciones complejas y, ahora, al estudio de los números. Este importante logro proporcionó a los matemáticos los medios para traducir ideas y avances en una dispar campo en resultados y descubrimientos en otro.

Riemann padeció problemas de salud la mayor parte de su vida. y murió de tuberculosis a los 39 años en Selasca, Italia, el 20 de julio de 1866.

ángulo recto Un ÁNGULO igual a un cuarto de una revolución completa se llama ángulo recto. tal ángulo tiene una medida de 90° $\frac{\pi}{2}$ radianes La esquina de un cuadrado o es un ángulo recto.

Se podría decir que un ángulo recto es el "correcto" ángulo para usar en la arquitectura y la construcción de edificios Los arquitectos egipcios de 1500 a. C. eran conscientes que un triángulo 3–4–5 contiene un ángulo recto (lo contrario del TEOREMA DE PITÁGORAS muestra esto) y usó cuerdas anudadas de 3 + 4 + 5 = 12 unidades de largo para construir rápidamente estos triángulos en un sitio de construcción. Un ángulo recto es también el ángulo formado si se hiciera un giro perfecto a la derecha.

Véase también MEDIDA DE GRADO; MATEMÁTICA EGIPCIA ICS; MEDIDA EN RADIANES.

sistema diestro/zurdo En el espacio tridimensional uno identifica la ubicación de los puntos por haciendo referencia a un conjunto de tres rectas numéricas mutuamente perpendiculares, generalmente llamadas ejes x, y y z, se cortan en un punto llamado origen. Hay dos posibles formas de orientar los ejes.

Un sistema de coordenadas xyz se llama diestro si, tomando la mano derecha, el eje x positivo apunta en la dirección del pulgar, el eje y positivo en la dirección del dedo índice y el eje z positivo en la dirección del dedo medio (doblado). Una coordenada xyz sistema se llama zurdo si sigue las instrucciones de estos dedos de la mano izquierda en su lugar.

Invertir la dirección de cualquiera de los ejes, o cambiando las etiquetas de dos ejes cualquiera, cambia el orientación del sistema de coordenadas. Los matemáticos tienen establecido en la convención de preferir diestros sistemas sobre los zurdos.

Más generalmente, tres vectores a, b y c, en que orden, en el espacio tridimensional forman un diestro sistema si apunta el pulgar de la mano derecha en el dirección de a, y el dedo índice en la dirección de b tiene el vector c acostado en el costado de la palma de la mano (esta es la dirección que el dedo medio necesitaría rizo para apuntar en la dirección c). Alternativamente, los tres vectores forman un sistema de mano derecha si el VECTOR TRIPLE PRODUCTO a· (b × c) es un número positivo.

En el espacio bidimensional, los ejes de coordenadas pueden orientarse de nuevo en una de dos formas. Se dice que un conjunto de ejes de coordenadas xy está orientado positivamente si se requiere una rotación en sentido antihorario para girar el eje positivo. eje x sobre el eje y positivo (a través del menor ángulo posible) y orientado negativamente si, en cambio, se necesita un movimiento en el sentido de las agujas del reloj.

Ver también COORDENADAS CARTESIANAS; PRODUCTO CRUZADO.

Motivados por la pregunta de qué hace que la aritmética funcione de la forma en que lo hace, los matemáticos han identificado siete principios clave que satisfacen las operaciones de adición y multiplicación. Hoy, los matemáticos llamar a cualquier sistema matemático que satisfaga estos requisitos básicos axiomas un anillo.

Precisamente, un anillo es un conjunto R junto con dos métodos para combinar elementos de R para producir nuevos elementos de R, generalmente llamada suma "+" y multiplicación "*", satisfaciendo las siguientes reglas:

1. Ley Conmutativa de la Suma: Para todos los elementos a y b de R, tenemos: a + b = b + a.
2. Ley asociativa de la suma: para todos los elementos a, b, y c de R, tenemos: a + (b + c) = (a + b) + c.
3. Existencia de un Cero: El conjunto R tiene un elemento 0 con la propiedad de que a + 0 = 0 + a = a para todos los elementos a en R.
4. Existencia de Inversos Aditivos: Para cada elemento un en R hay un elemento, denotado –a, tal que a + (–a) = (–a) + a = 0.
5. Ley asociativa de la multiplicación: para todos los elementos a, b y c de R tenemos: a*(b*c) = (a*b)*c.
6. Existencia de un 1: Existe un elemento 1 de R con la propiedad de que a*1 = 1*a = a para todo a en R.
7. Leyes Distributivas: Para todos los elementos a, b y c de R tenemos: a*(b + c) = a*b + a*a y (b + c)*a = b*a + c*a.

Machine Translated by Google

Además, decimos que el anillo es conmutativo si se cumple un octavo axioma:

8. Ley Conmutativa de la Multiplicación: Para todos los elementos ayb de R, tenemos: a*b = b*a .

Por ejemplo, el conjunto de enteros bajo la suma y la multiplicación ordinarias es un anillo conmutativo. Por lo tanto, cualquier resultado que se sepa que se deriva de manera abstracta de los ocho principios descritos anteriormente se traduce en un resultado sobre números. El conjunto de todas las funciones f del conjunto de los números reales a sí mismo también satisface la definición de un anillo conmutativo, por lo que estos resultados también se traducen en hechos interesantes en la teoría de funciones. Como ejemplo simple, es sencillo probar que el elemento cero en un anillo es único. (Si 0 y 0′ son ambos ceros, entonces, por el axioma tres, 0 = 0 + 0′ = 0′). En consecuencia, también hay una sola función que puede comportarse como la función cero.

Se pueden imponer más condiciones a un sistema. Por ejemplo, un anillo conmutativo se denomina dominio integral si se cumple un noveno axioma:

9. Sin divisores de cero: Nunca se da el caso de que dos elementos distintos de cero a y b de R den a*b = 0.

El conjunto de números enteros es un dominio integral, pero el conjunto de funciones no lo es. Por ejemplo, si f es la función que da el valor cero para entradas negativas y el valor 1 en caso contrario, y g es la función que da el valor cero para entradas positivas y el valor 1 en caso contrario, entonces ni f ni g son la función cero, pero su producto f*g es. Cualquier sistema en ARITMÉTICA MODULAR forma un anillo pero no necesariamente un dominio integral.
Por ejemplo, 2 × 3 = 0 módulo 6.

Un anillo conmutativo se llama campo si, además, se cumple un décimo axioma:

10. Existencia de Inversos Multiplicativos: Para cada elemento distinto de cero a de R, existe un elemento b tal que a*b = b*a = 1.

El conjunto de enteros no es un campo. (El número 2, por ejemplo, no tiene inverso multiplicativo, ya que 1/2 no es un número entero). Sin embargo, el conjunto de todos los números reales bajo la suma y la multiplicación es un cuerpo, como lo es el conjunto de todos los números racionales y el conjunto de todos los números complejos.

Generalmente se supone que los elementos 0 y 1 en un anillo conmutativo o un campo son diferentes. si estos dos los elementos son iguales, es decir, si 0 = 1, entonces se puede demostrar que el anillo R contiene solo este elemento: R = {0}. Este anillo se llama el anillo trivial.

Véase también ÁLGEBRA ABSTRACTA; DE ASOCIACIÓN; COMMU PROPIEDAD TATIVA; PROPIEDAD DISTRIBUTIVA; GRUPO; TEORIA DE GRUPOS; CUATERNIONES; CERO.

Rolle, Michel (1652–1719) Francés Cálculo Nacido el 21 de abril de 1652 en Ambert, Francia, Michel Rolle es mejor recordado por el teorema de CÁLCULO que lleva su nombre. Aunque atrajo poca atención en el momento de su publicación, el teorema de Rolle es considerado hoy uno de los principios fundamentales de la materia.

Rolle comenzó su carrera como escribano y asistente de un abogado. Tuvo poca educación formal pero persiguió un interés personal en las matemáticas toda su vida. Se mudó a París en 1675 y pronto desarrolló una reputación como experto en aritmética. En 1682 alcanzó fama nacional por resolver un problema matemático recreativo planteado públicamente por el matemático francés Jacques Ozanam. En honor a este logro, Rolle recibió una pensión del controlador de finanzas generales de Francia y la admisión a la Académie Royal des Sciences en 1685.

En 1690 publicó la obra Traité d'algèbre (Tratado de álgebra), un texto sobre teoría de ecuaciones en el que, entre otras cosas, inventó y utilizó la notación $\sqrt{x}$ para la raíz enésima de x. Rolle también estudió GEOMETRÍA, ÁLGEBRA y ECUACIONES DIOFANTINAS. Su famoso teorema se publicó un año después en un texto oscuro y poco notado Démonstration d'une méthode pour resoudre les égalitez de tous les degrez (Prueba de un método para resolver ecuaciones de todos los grados).

Es irónico que Rolle sea considerado hoy una figura principal en el desarrollo del cálculo. Habiendo estudiado el tema emergente, se dice que Rolle encontró la teoría poco convincente. Incluso llegó a decir que el cálculo no es más que una “colección de falacias ingeniosas”. Murió en París, Francia, el 8 de noviembre de 1719.

Véase también TEOREMA DE ROLLE .

Teorema de Rolle En 1691 matemático francés MICHEL ROLLE (1652–1719) estableció que si una curva corta el eje x en dos ubicaciones a y b, es continua y tiene una TANGENTE en cada punto entre a y

Machine Translated by Google

b, entonces hay al menos un punto en este intervalo en el que la tangente a la curva es horizontal al eje x . En un lenguaje matemático más estricto, su orem dice:

> Para cualquier función f(x) continua en un intervalo cerrado [a,b], diferenciable en el intervalo abierto (a,b), y que satisface f(a) = f(b) = 0, existe al menos un valor c entre ayb tales que f'(c) = 0. Es decir, los ceros de una función derivable siempre están separados por ceros de la derivada .

Este resultado se sigue fácilmente del TEOREMA DEL VALOR EXTREMO , que afirma que cualquier función de este tipo alcanza un valor máximo en alguna ubicación c en el intervalo (a, b). La tangente a la curva debe ser horizontal en cualquiera de esos vértices. (Un estudio cuidadoso de los valores MÁXIMOS/MÍNIMOS establece esto.)

Aunque el teorema de Rolle es un caso especial del TEOREMA DEL VALOR MEDIO, es habitual demostrar el teorema de Rolle de forma independiente y usarlo como un primer paso para demostrar el resultado más general.

Números romanos Basados en un sistema de conteo simple similar al que usaban los antiguos egipcios, los mercaderes del imperio romano de alrededor del año 500 a. C. usaban símbolos de letras para las potencias de 10 y para los valores intermedios de 5, y simplemente agrupaban los símbolos para representan todas las demás cantidades. Los símbolos utilizados fueron:

yo= 1	
V = 5	
X=10	
L=50	
C 100	=
D 500	=
m 1000	=

La expresión CLXXIII, por ejemplo, representaba el número 100 + 50 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 173.

Aunque el orden de los símbolos no era importante, se convirtió en una convención enumerar los símbolos de mayor a menor, de izquierda a derecha.

Inicialmente, los símbolos D y M no formaban parte del sistema romano. Se escribió el número 1,000 (I), y se permitieron más aplicaciones de corchetes para el expresión de cantidades aún mayores. Por ejemplo, ((I)) representaba 10.000 y (((I))) representaba 100.000. Los canteros introdujeron los símbolos D y M para simplificar su trabajo.

Los romanos también introdujeron otras ornamentaciones para aumentar el valor de un símbolo numérico. Por ejemplo, se utilizaron barras verticales para representar un aumento de 100 veces, y una barra colocada sobre el símbolo representaba un aumento de 1000 veces. Por ejemplo,

$$|\underline{X}| = 100 \times 10 = 1000$$
$$\underline{X} = 1000 \times 10 = 10\,000$$
$$|\overline{\underline{X}}| = 100 \times 1000 \times 10 = 1\,000\,000$$

No había ningún símbolo para CERO en el sistema romano.

Para evitar la repetición cuádruple de símbolos (como en la expresión CCCCXXXXIIIIII para 444), se introdujo un principio sustractivo en el siglo XIII:

> La colocación de un valor pequeño inmediatamente a la izquierda de un valor más alto indica que ese valor pequeño debe restarse del valor más alto.

Por lo tanto, 4 podría escribirse como IV, 90 como XC y 444 como CDXLIV. El principio sustractivo estaba sujeto a dos reglas:

1. Los símbolos V, L y D no se pueden usar como números para restar.
2. Solo se puede colocar un símbolo I, X o C antes de un símbolo de número mayor.

Así, por ejemplo, no estaba permitido escribir IIX por ocho. Aunque no era un SISTEMA DE VALOR POSIBLE adecuado , con el principio de sustracción en uso, el orden de los símbolos usados ahora era importante.

Realizar operaciones de aritmética básica con números romanos es muy complicado. Por ejemplo, no es inmediato cuál debería ser la solución al siguiente problema de suma:

XLV
+ XVII
+ XXIX

El hecho de que los comerciantes europeos se sintieran cómodos trabajando con el sistema numérico romano durante más de un milenio sugiere que los eruditos no usaron el sistema numérico para realizar cálculos, solo para registrar el

Machine Translated by Google

resultados. (La aritmética se realizó en un tablero de conteo como ABACUS).

El sistema de números romanos siguió siendo popular en Europa occidental hasta el siglo XVII. Aunque el sistema finalmente fue reemplazado por el sistema NUMÉRICO HINDÚ-ÁRABE que usamos hoy en día, todavía sigue siendo una tradición usar números romanos para las carátulas de los relojes, para la inscripción de fechas en edificios y para datos de derechos de autor en películas y libros, por ejemplo. .

Véase también BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO; REPETIDOR DECIMAL RESENTACIÓN; MATEMÁTICAS EGIPCIA; NÚMERO.

raíz (cero) Cualquier valor de una variable en una ecuación que satisface la ecuación se llama raíz de la ecuación. Por ejemplo, la ecuación 2x + 1 = 7 tiene raíz x = 3, y la ecuación a = 8 tiene raíz a = 2. Como cualquier ecuación con una variable x se puede escribir en la forma f(x) = 0 para alguna FUNCIÓN f, las raíces de una ecuación a veces se denominan "ceros" de la función asociada f.

Si f(x) es un polinomio, entonces la ecuación f(x) = 0 se llama ecuación polinomial. La fórmula CUADRÁTICA muestra que una ecuación cuadrática ax2 + bx = c = 0 tiene dos raíces dadas por:

$$x = \frac{bb \pm \sqrt{-2\,4\quad C.A}}{2\,un}$$

El TEOREMA DEL FACTOR muestra que si x = r es una raíz de una ecuación polinomial f(x) = 0, entonces (x – r) es un factor de f(x). La raíz r se llama raíz simple si (x – r) es un factor de f(x), pero (x – r) es un factor de f(x), pero (x – r) no es; una raíz doble si (x – r) r) 3 no lo es; y, en general, una raíz de orden n si (x – r) n divide a f(x), pero (x – r) n+1 no lo hace. Por ejemplo, x = 2 es una raíz doble de la ecuación 2x 3 2 + 12x – 4 = 0, y x = 1/2 es una raíz simple. – 9x (Tenemos 2x 3 2 + 12x – 4 = (x – 2)2 (2x – 1).) El – 9x TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA afirma que una ecuación polinomial grado n tiene precisamente n raíces (posiblemente complejas) si las raíces se cuentan según su “multiplicidad”. Por ejemplo, la ecuación 2x 3 2 9x contada dos veces, como corresponde.

+ 12x – 4 = 0 tiene tres raíces, si la solución x = 2 es

Los métodos numéricos como el MÉTODO DE BISECCIÓN y el MÉTODO DE NEWTON se pueden usar para encontrar raíces de ecuaciones con cualquier grado de precisión deseado.

La raíz n-ésima de un número a, denotada $\sqrt[n]{a}$, es cualquier valor x que satisface la ecuación polinomial $x^n = a$.

Por ejemplo, el número 2 es una raíz décima de 1,024 (ya que 210 = 1,024), y –1 es una raíz sexta de 1, ya que (–1)6 = 1. Si n = 2, entonces una raíz enésima se llama RAÍZ CUADRADA. Si n = 3, entonces se llama RAÍZ CÚBICA.

prueba de raíz Ver SERIE CONVERGENTE.

rosa Una curva plana en forma de una colección de pétalos con un origen común se llama rosa. En coordenadas polares, tal curva tiene una ecuación de la forma r = asin(nθ) o r = a cos(nθ) para alguna constante a y entero positivo n. El ángulo θ toma valores entre cero y 360° y, en consecuencia, puede dar un valor negativo para r. En este caso, el punto correspondiente de la curva se dibuja a una distancia |r| desde el origen en dirección opuesta a la indicada por el ángulo θ.

Si n es impar, el número de pétalos que aparecen alrededor del origen es n. Si n es par, aparecen 2n bucles. En 1728, el matemático italiano Guido Grandi llamó a estas curvas “rhodonea”.

rotación Ver TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA; LINEAL TRANSFORMACIÓN.

redondeo Si un número tiene más dígitos de los que se pueden manejar o almacenar convenientemente, a menudo es conveniente reemplazar la cifra por el número más cercano con el número deseado de dígitos. Este proceso se llama redondeo. Por ejemplo, el número de dos dígitos más cercano a 68,7 es 69. Por lo tanto, 68,7 “redondeado a dos dígitos” es 69.
Redondeando 5.237 a un lugar decimal se obtiene 5.2.
Redondear 453 al 10 más cercano da 450, mientras que redondearlo al 100 más cercano da 500.

Es convencional “redondear hacia arriba” si el número bajo consideración está a la misma distancia de dos aproximaciones. Por ejemplo, se considera que 9 es el entero más cercano a 8,5.

Se pueden producir errores si un número se redondea más de una vez. Por ejemplo, redondear 78,347 a dos decimales da como resultado 78,35. Si luego decidimos redondear a un decimal, trabajar con el 78,35 da 78,4, mientras que el número original redondeado a un decimal es 78,3. Es fundamental, entonces, que todos los procesos de redondeo se ejecuten en un solo paso.

Machine Translated by Google

El proceso de simplemente eliminar dígitos adicionales se denomina truncamiento. Por ejemplo, cuando se trunca a un decimal, tanto 1,834 como 1,8999978 se convierten en 1,8.
Este proceso también se llama "redondeo hacia abajo".

Véase también ERROR; SUELO/TECHO/ PARTE FRACCIONAL FUNCIONES; ERROR DE REDONDEO .

error de redondeo (error de redondeo) El ERROR que se produce al REDONDEAR un valor a un número preestablecido de dígitos se denomina error de redondeo. Por ejemplo, redondear la cantidad 6,42 al lugar decimal más cercano produce 6,4, lo que introduce un error de 0,02.

Los errores de redondeo generalmente se amplifican a medida que se realizan los cálculos. Por ejemplo, redondeado a cuatro decimales, cos 1° tiene valor 0,9998. Esto sugiere que $\frac{1}{1 - \cos(1)}$ es igual a 5.000. esto es falso el valor correcto de esta cantidad está cerca de 6.565,8. Como las calculadoras redondean todas las cantidades a ocho o 10 decimales, también son susceptibles de errores de redondeo y pueden dar resultados erróneos.

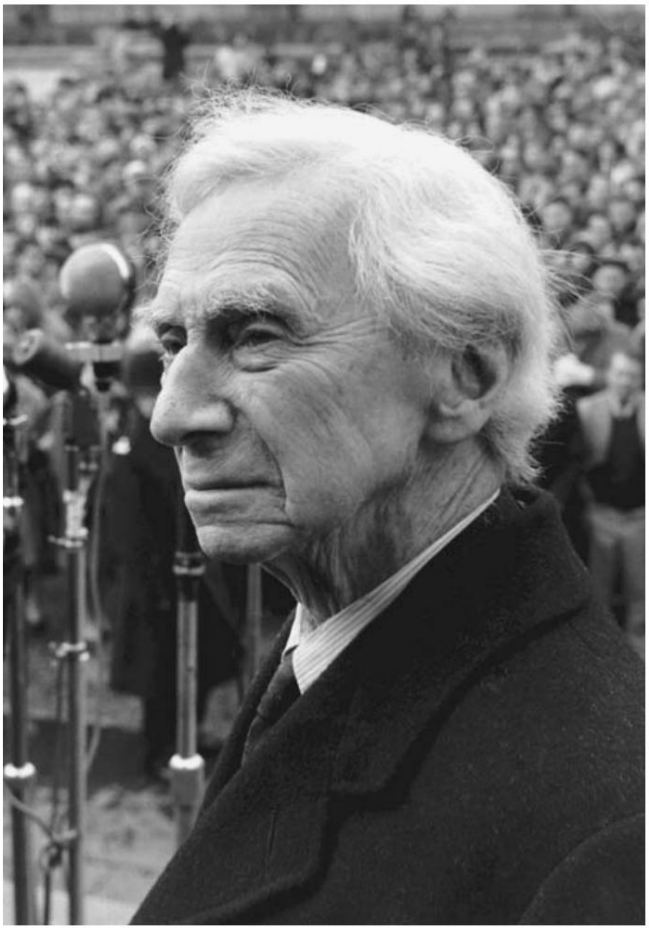
Royal Society (Sociedad Real de Londres) Fundada por carta real otorgada por Carlos II en 1660, la Royal Society de Londres es la institución científica más antigua del mundo que aún existe. Su misión hoy, como lo fue en el momento de su formación, es difundir el conocimiento actual sobre el mundo natural y apoyar y promover la investigación científica continua.

Antes del año 1600, los científicos y académicos comunicaban los resultados por correo, así como mediante la publicación de textos escritos tras la invención de la imprenta en el siglo XV. Tales formatos fijos y rígidos no permitían fácilmente la prueba de ideas y la discusión suelta del pensamiento. En un intento de rectificar esto, en 1620 Francis Bacon (1561-1626) estableció una organización llamada Novum Organum (El nuevo instrumento) que proporcionaba un foro público para que los científicos y otros se reunieran para discutir ideas y hallazgos científicos. y conocer el estado general del pensamiento científico actual. Cuarenta años después, se reconoció formalmente el valor de tal organización y se formó la Royal Society. Los eminentes científicos de la época fueron galardonados como miembros de la sociedad. SIR ISAAC NEWTON fue presidente de la sociedad desde 1703 hasta 1727.

Ser elegido como miembro de la Royal Society hoy se considera un honor verdaderamente prestigioso. Hay actualmente 65 premios Nobel entre los 1.300 becarios y miembros extranjeros de la Sociedad. A cada miembro se le da el derecho de usar las letras FRS (Fellow Royal Society) después de firmar con su nombre. La sociedad mantiene un sitio web (www.royalsoc.ac.uk).

La igualmente prestigiosa Real Academia de Ciencias de Francia se fundó 6 años después de la formación de la Royal Society.

Russell, Bertrand Arthur William (1872–1970) Fundamentos británicos de las matemáticas, Filosofía Nacido el 18 de mayo de 1872, en Ravenscroft, Gales, se recuerda al lógico matemático y filósofo Bertrand Russell por su texto, coescrito con ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861-1947), Principia Mathematica (1910,



Bertrand Russell, un eminente matemático del siglo XX, fue el primero en descubrir un defecto fundamental en la teoría elemental de conjuntos. (Foto cortesía de Topham/The Image Works)

Machine Translated by Google

1912, 1913), una obra monumental de tres volúmenes que intentaba derivar la totalidad de las matemáticas a partir de supuestos puramente lógicos. Aunque no tuvo un éxito total, el trabajo fue muy influyente. Russell también descubrió una paradoja fundamental en el corazón de la TEORÍA DE CONJUNTOS básica, hoy llamada PARADOJA DE RUSSELL .

Russell estudió matemáticas y ética en Trinity College, Cambridge, y desarrolló un interés en los fundamentos lógicos de las matemáticas al principio de su carrera.

En 1903 publicó Principios de las matemáticas, un texto que explora la premisa de que todas las matemáticas pueden reducirse a declaraciones de lógica, y que todas las pruebas matemáticas pueden reformularse como pruebas en la teoría de la lógica.

Fue durante la redacción de este trabajo que Russell descubrió su famosa paradoja en la teoría de conjuntos, un descubrimiento que dejó en claro que se necesitaba más trabajo para encontrar una base lógica para todas las matemáticas.

Su siguiente trabajo, el famoso Principia Mathematica, fue escrito como un intento de extender los métodos de sus Principios a una teoría ramificada más general que pudiera hacer frente a todas las perturbadoras paradojas autorreferenciales que surgían en la teoría de conjuntos. Aunque se reconoció como un avance brillante en la comprensión de los fundamentos lógicos de todas las matemáticas, el trabajo aún recibió algunas críticas de la comunidad matemática general por ser demasiado ad hoc, demasiado estricto o demasiado débil y que, como mínimo, , se necesitaba aún más trabajo para lograr el elevado objetivo que Russell se había fijado. En 1930, el matemático austríaco KURT GÖDEL (1906-1978) conmocionó al mundo matemático al demostrar, en sus teoremas de incompletitud, que no puede haber una base lógica para todas las matemáticas del tipo que buscaba Russell y que cualquier intento de encontrar un conjunto básico de axiomas en los que basar todas las matemáticas está a priori condenado al fracaso.

La influencia de Russell en el desarrollo de la lógica matemática fue profunda. Fue elegido miembro de la ROYAL SOCIETY en 1908 y escribió varios artículos asombrosos en el campo a lo largo de su carrera. Russell fue un activista político y fue arrestado varias veces a lo largo de su carrera por sus actividades contra la guerra. (Su artículo de 1919 “Introducción a la filosofía matemática” fue escrito durante un período de 6 meses en prisión).

Russell enseñó en el City College de Nueva York durante la década de 1930 y también fue una figura destacada en las protestas contra la guerra y antinucleares en los Estados Unidos.

Russell también escribió sobre una amplia gama de temas humanitarios, incluidas las ciencias políticas, las ciencias morales y los estudios religiosos. Fue condecorado con la Orden de Merit en 1949 y ganó el Premio Nobel de Literatura en 1950 por sus escritos colectivos que defienden los “ideales humanitarios y la libertad de pensamiento”.

Russell murió en Plas Penrhyn, Gales, el 2 de febrero de 1970.

La paradoja de Russell (antinomia de Russell) En 1902, el matemático y filósofo BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872–1970) encontró una falla fundamental en el corazón de la TEORÍA DE CONJUNTOS básica. Por lo general, los conjuntos no son miembros de sí mismos. Por ejemplo, si D representa el conjunto de todos los perros, entonces D, siendo un conjunto, no es en sí mismo un perro. Llamemos a tales conjuntos "normales". Russell notó, sin embargo, que no todos los conjuntos son normales. Por ejemplo, si S representa el conjunto de todos los conjuntos, entonces S es en sí mismo un conjunto y, por lo tanto, pertenece a S. El conjunto de todas las cosas que no son perros tampoco es norr

Sea N el conjunto de todos los conjuntos normales. Es decir, N es el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Ahora pregunte: ¿ N es normal? Si la respuesta es sí, entonces N es normal, lo que lo convierte en un elemento de N, que es precisamente lo que significa ser no normal. Si la respuesta es no, entonces N no es normal, lo que significa que N es un elemento de N, el conjunto de todos los conjuntos normales. Tenemos:

N normal N no normal
N no normal N normal

El conjunto N no puede ser ni normal ni no normal.

Esta contradicción se denomina paradoja de Russell, y su descubrimiento frustró los intentos de los matemáticos de utilizar la teoría de conjuntos como base fundamental de todas las matemáticas. También sugirió que todas las matemáticas podrían ser defectuosas si incluso la más simple de las teorías matemáticas, la teoría de conjuntos, es fundamentalmente contradictoria.

Russell también presentó varias versiones alternativas de su paradoja, incluida la famosa “paradoja del barbero” que presentó en 1919:

> Un peluquero en cierto pueblo tiene un letrero que dice: “Afeito a todos los hombres, y solo a los hombres, que no se afeitan solos”. ¿Quién afeita al barbero?

Al tratar de responder a esta pregunta, uno se encuentra sumido en el mismo tipo de callejón sin salida lógico que la paradoja original.

En 1910, Russell, con la ayuda de ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861–1947), publicó el primer volumen de un gigantesco tratado de tres volúmenes que intentaba

Machine Translated by Google

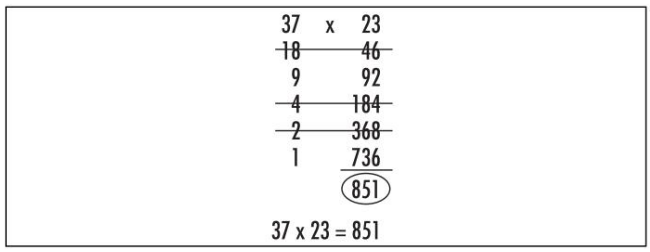
eludir las cuestiones planteadas por la paradoja y encontrar una base lógica para todas las matemáticas. Introdujo una noción de "tipo", exigiendo que los conjuntos y las oraciones en matemáticas pertenezcan a una estructura jerárquica. En el nivel más bajo hay afirmaciones sobre elementos individuales. En el siguiente nivel hay oraciones sobre conjuntos de elementos individuales y, a continuación, oraciones sobre conjuntos de conjuntos de elementos individuales, y así sucesivamente. Además, no se permite que ninguna oración esté al mismo nivel que su sujeto. Por lo tanto, cualquier enunciado que se refiera a sí mismo (como la definición del conjunto N) simplemente no está permitido en esta estructura jerárquica. Este enfoque ciertamente elude las paradojas autorreferenciales, pero muchos miembros de la comunidad matemática sintieron, sin embargo, que esta construcción no era particularmente satisfactoria.

Obsérvese que la paradoja del barbero se resuelve fácilmente observando que el barbero podría estar fuera del conjunto de los hombres, es decir, el barbero podría ser una mujer. La teoría del tipo de Rusell intentó imitar esta solución sacando conjuntos "fuera de sí mismos" a través de la noción de una jerarquía. En cambio, los matemáticos de hoy están intentando desarrollar una teoría matemática del "contexto" donde se considera importante el entorno en el que se hacen las declaraciones.

Multiplicación rusa También conocida como multiplicación campesina, se cree que el siguiente método de multiplicación se originó en Rusia.

1. Encabeza dos columnas con los números que deseas multiplicar.
2. Reduzca progresivamente a la mitad los números de la columna de la izquierda (ignorando los restos) mientras duplica las cifras de la columna de la derecha. Reduzca la columna de la izquierda a uno.
3. Eliminar todas las filas con un número par a la izquierda columna.
4. Sume todos los números supervivientes en la columna de la derecha. Esta suma es el producto deseado.

La clave para entender por qué funciona este método es notar que cada número se puede escribir como una suma de



multiplicación rusa

las potencias de 2: 1,2,4,8,16,32,… Por ejemplo, 37 = 32 + 4 + 1. Que 37 sea impar muestra que el número 1 está presente en esta expresión. Reducir a la mitad el número dos veces (ignorando los restos) produce:

$$37 = 32 + 4 + 1 \rightarrow 16 + 2 \rightarrow 8 + 1 = 9$$

Que la respuesta sea impar indica que 4 está presente en la expresión de 37 como suma de potencias de dos. Que reducir a la mitad tres veces más produzca la siguiente respuesta impar (correspondiente a 37 reducido a la mitad cinco veces en total) indica que 32 también está presente. Por lo tanto, la aparición de números impares en la columna de la izquierda indica qué potencias de dos se usan para construir el número 37. Para la multiplicación, tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned} 37 \times 23 &= (32 + 4 + 1) \times 23 \\ &= 32 \times 23 + 4 \times 23 + 1 \times 23 = 25 \times \\ &\quad 23 + 22 \times 23 + 20 \times 23 \end{aligned}$$

Así, el producto deseado se obtiene sumando el efecto de duplicar el número 23 cero, dos y cinco veces. Esto se logra en el paso 4 del procedimiento.

Por supuesto, este método funciona para cualquier par de números enteros que desees multiplicar. Es un método eficiente de multiplicación y muchas computadoras están programadas para calcular productos de esta manera.

Véase también MULTIPLICACIÓN EGIPCIA; MULTIPLICACIÓN ISABELINA; MULTIPLICACIÓN DE DEDOS; MULTIPLICACIÓN; HUESOS DE NAPIER .

Machine Translated by Google

S

Saccheri, Girolamo (1667–1733) Geometría italiana Nacido el 5 de septiembre de 1667 en San Remo, Génova, Girolamo Saccheri es recordado por su publicación de 1733 Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclides limpiado de toda mancha), en la que intentaba probar el POSTULADO DE LAS PARALELAS de Euclides como consecuencia del resto de los POSTULADOS DE EUCLIDES . Aunque Saccheri fracasó en este intento, estuvo muy cerca de ser el primero en descubrir una GEOMETRÍA NO EUCLIDEA.

Saccheri fue ordenado sacerdote jesuita en 1694 y enseñó filosofía y teología en varios colegios jesuitas en toda Italia. Se dedicó a las matemáticas como un interés externo durante varios años antes de ser nombrado catedrático de matemáticas en Pavía en 1699.

Como también habían creído muchos estudiosos a lo largo de los milenios, Saccheri estaba convencido de que el quinto postulado de Euclides, el postulado de las paralelas, podía deducirse como una consecuencia lógica de los cuatro axiomas restantes. Aunque era consciente de que nadie había logrado demostrar que así era, Saccheri se dio cuenta de que se podía adoptar otro enfoque, uno indirecto. Razonó de la siguiente manera:

> Imagine una geometría en la que los primeros cuatro axiomas de Euclides son verdaderos, pero el quinto axioma es falso. Si el quinto postulado se puede demostrar a partir de los primeros cuatro, entonces tendríamos una geometría con una CONTRADICCIÓN inherente: el quinto axioma es tanto verdadero como falso. Así, uno debería estudiar una teoría de la geometría en la que el postulado de las paralelas es falso y buscar una contradicción.

Saccheri siguió este plan y escribió sobre él en su famoso texto de 1733, pero nunca encontró la contradicción que buscaba. Poco más de un siglo después, el matemático húngaro JÁNOS BOLYAI (1802-1860) y el erudito ruso NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792-1856), con sus descubrimientos de la GEOMETRÍA HIPERBÓLICA, demostraron de forma independiente que nunca se descubrirá ninguna contradicción. Aunque Saccheri había desarrollado la teoría matemática de la geometría hiperbólica en gran medida, no se le puede atribuir su descubrimiento: nunca se dio cuenta de que es una teoría matemática consistente por derecho propio. No obstante, el trabajo de Saccheri es apropiadamente honrado en el campo, con muchos resultados y teoremas debidamente atribuidos a él. Murió en Milán, Italia, el 25 de octubre de 1733.

muestra Véase POBLACIÓN Y MUESTRA.

espacio muestral El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento o una acción se denomina espacio muestral. Por ejemplo, al lanzar un dado, son posibles seis puntajes, lo que da como resultado el espacio de muestra del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}. El espacio muestral para lanzar una moneda dos veces es el conjunto {cara|cara, cara|cruz, cruz|cara, cruz|cruz}.

Un espacio muestral puede ser infinitamente grande. Por ejemplo, la acción de registrar las alturas de los individuos tiene una matriz continua de valores para su espacio de muestra, valores entre 12 y 100 pulgadas, digamos, con todos los valores fraccionarios posibles entre ellos.

Véase también EVENTO; PROBABILIDAD.

Machine Translated by Google

escalar En el análisis VECTORIAL , cualquier cantidad que sea un número real y no un vector se denomina escalar. Por ejemplo, el número 2 es el coeficiente escalar del vector v en la expresión vectorial 2v. El PRODUCTO DOT de dos vectores (también llamado su producto escalar) es una regla para multiplicar dos vectores para producir un resultado escalar.

En física, cualquier número o medida que no implique el concepto de dirección se denomina escalar.
Por ejemplo, la longitud, la masa, la energía y la temperatura son cantidades escalares. La noción de velocidad también es una cantidad escalar, pero la de VELOCIDAD no lo es.

En la teoría MATRIZ , las entradas de una matriz a veces se denominan escalares. Una matriz cuadrada con todas las entradas de la diagonal principal iguales a cero y todas las entradas de la diagonal principal iguales en valor se llama matriz escalar.
Tal matriz es un múltiplo escalar de la MATRIZ DE IDENTIDAD I.

escala Se dice que dos figuras geométricas son versiones a escala la una de la otra si es posible hacer coincidir los puntos de una figura con los puntos de la segunda de tal manera que, si P y Q son dos puntos cualesquiera de la primera figura y P ′ y Q′ son los puntos correspondientes del segundo, entonces la relación de longitudes |PQ| : |P′Q′| es siempre el mismo valor positivo fijo k. (El número k se llama factor de escala). LAS FIGURAS SIMILARES son figuras escaladas.
Cualquier figura ampliada o reducida producida por una fotocopiadora moderna es una versión a escala de la figura original.

Si una figura geométrica se amplía por un factor de escala k, entonces todas las longitudes en esa imagen aumentan (o disminuyen si 0 < k < 1) por un factor de k. Todos los ÁNGULOS en esa figura permanecen sin cambios. En consecuencia, si un rectángulo a × b se amplía por un factor de escala k, entonces la figura resultante sigue siendo un rectángulo y tiene lados de longitud ka y kb. En consecuencia, el ÁREA de la figura ha aumentado por un factor k^2. Como la noción de área de un rectángulo define nuestra noción de área para todas las figuras geométricas (como un triángulo, un polígono o un círculo) tenemos que las áreas de todas las figuras aumentan, al escalar, por el factor k^2. De manera similar, dado que un prisma rectangular de dimensiones a × b × c escala para convertirse en un prisma rectangular de dimensiones ka × kb × kc, los volúmenes de todos los sólidos geométricos, al escalar, aumentan en un factor de k^3

Estas observaciones tienen algunas consecuencias interesantes en el mundo natural. Por ejemplo, la cantidad de pérdida de calor que experimenta un mamífero es proporcional a la cantidad de superficie que tiene en contacto con el aire, Considerando que la cantidad de comida que un animal debe comer en El fin de generar calor corporal depende del volumen de músculo que posea. A medida que el área de superficie crece por un factor de k^2 y el volumen por un factor de k^3, los mamíferos más grandes poseen una relación de área de superficie por volumen más pequeña que los mamíferos más pequeños. Por lo tanto, los mamíferos grandes (como los osos polares) se adaptan mejor a las condiciones árticas que los mamíferos más pequeños (como las ardillas): pierden menos calor por unidad de masa corporal y requieren menos alimento (en relación con su masa) para mantener suficiente producción de calor. Los pingüinos rey en la Antártida son significativamente más grandes que sus contrapartes en otras regiones del mundo. Como otro ejemplo, la velocidad a la que se puede mover un pez se rige por el volumen de músculo que posee. Los peces grandes tienen la ventaja de tener una relación superficie/volumen más pequeña que los peces más pequeños. No solo tienen más fuerza muscular, sino que también experimentan menos fricción en la superficie con el agua circundante (por unidad de músculo) que sus contrapartes más pequeñas.

En matemáticas, el estudio de la escala juega un papel importante en la definición de DIMENSIÓN y se utiliza para analizar FRACTAL. En otro contexto, las marcas en los ejes de un GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN constituyen la "escala" del diagrama. Cambiar la escala de los ejes tiene el efecto equivalente de agrandar o reducir el gráfico mismo. Las marcas en una regla también se llaman escala, y medir el mismo objeto con dos reglas de diferentes escalas es equivalente al acto de medir dos versiones a escala de la figura con una sola regla.

diagrama de dispersión (diagrama de dispersión, gráfico de Galton) Si un estudio científico registra información numérica sobre dos características de los individuos o eventos que se examinan (como la altura y el tamaño de los zapatos de los adultos participantes, o la temperatura y la presión a la que ocurren ciertos eventos climáticos), entonces esos DATOS se pueden representar en un diagrama de dispersión. Específicamente, si el par (x_i, y_i) representa los dos hechos numéricos registrados sobre el i-ésimo individuo, entonces el punto (x_i, y_i) se traza en COORDENADAS CARTESIANAS. Un diagrama de dispersión es el gráfico resultante cuando se muestran todos los puntos. Los puntos no están unidos por líneas.

Un diagrama de dispersión indicará cualquier relación entre las variables x e y . Si los puntos parecen estar cerca de una línea recta, se dice que están linealmente correlacionados. Luego se puede realizar una prueba matemática para determinar el grado de correlación calculando el

Machine Translated by Google

valor de un COEFICIENTE DE CORRELACIÓN. Si los puntos parecen estar en otro tipo de curva, entonces no están correlacionados linealmente. Las variables que no están correlacionadas probablemente producirán un diagrama con puntos dispersos al azar en el gráfico. Si todos los puntos menos uno parecen seguir una curva bien definida, entonces ese punto excepcional se denomina OUTLIER .

Véase también MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS.

notación científica (notación exponencial, forma estándar) Se dice que un número x está escrito en notación científica si se expresa como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia de 10:

$$x = p \times 10n$$

con $1 \le p < 10$ y n entero, positivo o negativo.
Por ejemplo, el número 547 se escribe 5,47 × 102 en notación científica. El número 0.00106 se escribe 1.06 × 10–3 .

La notación científica es útil para escribir, comparar y manipular números muy grandes y muy pequeños.
Por ejemplo, Sir Henry Cavendish calculó la masa de la Tierra en 1798 como 6.600.000.000.000.000.000.000 toneladas. Este número se escribe de forma compacta 6,6 × 1021 .
El diámetro de un núcleo atómico es de aproximadamente 0,000000000000075 o 7,5 × 10–14 m.

La potencia de 10 utilizada en notación científica indica el número de veces que se utiliza 10 como factor si el exponente es positivo, o el número de veces que se utiliza 1/10 como factor si el exponente es negativo. Por ejemplo, 3,2 × 103 es 3,2 × 10 × 10 × 10, lo que equivale a 3200, y 0,0402 es el número 4,02 dividido por 10 dos veces, por lo que 0,0402 = 4,02 × × =4,02 × 10–2 . 1—10 1—10

Cuando el valor de una cantidad se expresa en notación científica, la potencia de 10 utilizada se denomina orden de magnitud de la cantidad. Por ejemplo, la velocidad de la luz es 3,00 × 108 m/seg y la velocidad del sonido en el aire es 3,32 × 102 m/seg. Fácilmente podemos ver que la luz es aproximadamente 106 o 1 millón, veces más rápida que el sonido. El diámetro de la Vía Láctea es del orden de 1020 m.

Al escribir la medida de una cantidad en notación científica, se supone que todos los dígitos registrados son significativos. Esto hace evidente el ERROR de la medición. Las calculadoras usan el símbolo E para mostrar una cantidad en notación científica. Por ejemplo, en una llamada calculador, la expresión 1,2345E37 debe interpretarse como 1,2345 × 1037. La letra E es una abreviatura de "exponente".

secante Una línea que corta una curva, generalmente en más de un punto, se llama secante de la curva. Si la secante corta la curva en dos puntos, el segmento de la línea entre los dos puntos de intersección se llama ACORDE de la curva.

En geometría plana, el teorema de la secante se refiere a la propiedad de que las longitudes de dos secantes a un círculo satisfacen a(a + b) = c(c + d).

Esto se demuestra identificando triángulos semejantes a través de los TEOREMAS DEL CÍRCULO y estableciendo la correspondencia $\frac{c}{a+b} = \frac{a}{c+d}$.

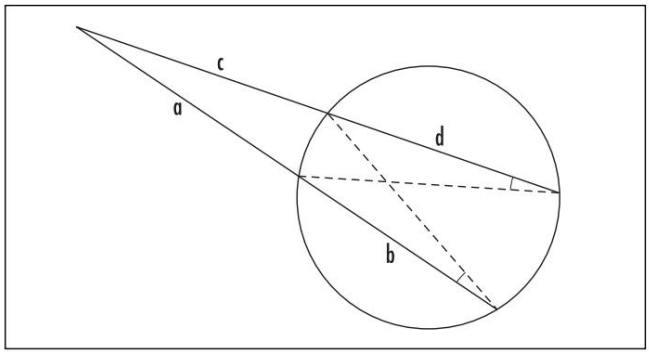
En trigonometría, el recíproco de la función coseno se llama función secante. Suele escribirse sec x. En un triángulo rectángulo es igual a la razón de la longitud de la hipotenusa a la del lado adyacente al ángulo x.

método de la secante Ver MÉTODO DE NEWTON .

selección Ver COMBINACIÓN.

autorreferencia Una oración que se refiere a sí misma se llama enunciado autorreferencial. Por ejemplo, la declaración "Esta oración tiene cinco palabras" es autorreferencial.

Las declaraciones autorreferenciales pueden ser problemáticas porque a menudo es difícil determinar su verdad o



Teorema de las dos secantes

Machine Translated by Google

falsedad. Aunque el enunciado anterior es claramente verdadero, el valor de verdad de “Esta oración es falsa”, por ejemplo, no está claro: no puede ser verdadero, porque entonces el enunciado dice que es falso, ni puede ser falso, porque entonces el afirmación es verdadera! (Este ejemplo constituye la base de LA PARADOJA DEL MENTIROSO .) La declaración "Esta oración es verdadera" es igualmente problemática: puede ser tanto verdadera como falsa. Las declaraciones autorreferenciales están prohibidas en los sistemas formales de lógica.

El matemático austriaco KURT GÖDEL (1906-1978) hizo un uso inteligente de una declaración autorreferencial para probar sus famosos teoremas de incompletitud.

Véase también LÓGICA FORMAL; LA INCOMPLETITUD DE GÖDEL TEOREMA; PROBLEMA DE PARADA; LA PARADOJA DE JOURDAIN .

cuadrado semimágico Una matriz cuadrada de números en la que la suma de los números en cualquier fila o columna es la misma se denomina cuadrado semimágico. (La matriz se denomina "totalmente mágica" si, además, los números en cada una de las dos diagonales también se suman a esta misma suma).
La suma común de las filas y columnas de la matriz se denomina suma mágica de la matriz. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{matrix}$$

es un cuadrado semi-mágico con suma mágica 10. (Esta matriz, sin embargo, no es un CUADRADO MÁGICO).

Los cuadrados semimágicos tienen una serie de propiedades notables en la teoría del álgebra MATRIZ . Por ejemplo, supongamos que A y B son cuadrados semimágicos del mismo tamaño con sumas mágicas a y b, respectivamente.
Considere cada uno como una matriz. Entonces:

1. La matriz suma A + B es de nuevo un cuadrado semimágico, con suma mágica a + b.
2. El producto de la matriz AB es nuevamente un semi-mágico cuadrado, con suma mágica ab.
3. El inverso A–1, si existe, sigue siendo semimágico, con suma mágica 1/a.

Estas afirmaciones pueden probarse estableciendo J como la matriz cuadrada con todas las entradas iguales a uno y observando que una matriz cuadrada A es semimágica con suma mágica a si, y solo si, AJ = aJ = JA.

No existe tal cosa como un "rectángulo semi-mágico" si uno insiste en que todas las entradas sean números positivos. Supongamos, por ejemplo, que una matriz tiene n filas y m columnas y las entradas en cada fila y columna suman a. Luego, al sumar cada una de las n filas, la suma de las entradas en la matriz completa debe ser na. Del mismo modo, la suma de cada una de las m columnas muestra que la suma de las entradas en todo el arreglo también debe ser ma. En consecuencia, debemos tener n = m. Si se permiten entradas cero o negativas, entonces son posibles los rectángulos semimágicos, pero la suma mágica debe ser necesariamente cero.

secuencia (progresión) Un conjunto de números dispuestos en una lista, con cada número de la lista especificado sin ambigüedades, se denomina secuencia. Por ejemplo, la secuencia 3, 5, 7, 9, 13 enumera cinco números específicos, y la secuencia 1, 4, 7, 10, 13, 16,... indica una lista infinita de números, en la que cada número es 3 mayor que su predecesor. Los números en una sucesión se llaman sus términos o elementos.

A veces, los términos de una secuencia se especifican como una fórmula. Por ejemplo, la sucesión 2, 5, 10,…, $n^2 + 1$,… indica que el término n de la sucesión se da como uno más que el número al cuadrado. Una sucesión con un número finito de términos se llama sucesión finita; uno con infinitos términos es una secuencia infinita. Una sucesión con el n-ésimo término dado por an se denota {an }, o unas 1 veces (an). Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ representa la secuencia

$$-1, 1, -1, 1, \ldots;$$

$\{(-1)^{n+1}\}$ la sucesión $-1, 1, -1, 1, \ldots$; y $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$ la secuencia $x, \frac{2x}{2!}, \frac{2x}{3!}, \frac{2x}{4!}, \ldots$.

También se puede especificar una secuencia a través de una RELACIÓN DE RECURSOS. Por ejemplo, la secuencia de NÚMEROS DE FIBONACCI {FN} está dada por Fn+2 = Fn+1 + Fn con F1 = 1 y F2 = 1.

Se dice que una sucesión a1 , a2 , a3 ,… converge en un número L si los números an se acercan cada vez más a L a medida que n se hace grande. Tal sucesión se llama SECUENCIA CONVERGENTE, y la cantidad L a la que converge se llama LÍMITE de la sucesión. Por ejemplo, $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ la sucesión converge al valor 1. Las sucesiones convergentes juegan un papel importante en las matemáticas. Por ejemplo, se puede pensar en un NÚMERO IRRACIONAL como el límite de una secuencia de números racionales.

Machine Translated by Google

números. (Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es el límite de la secuencia 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142,…) Como tal, es posible definir una cantidad elevada a una potencia irracional como un límite de potencias racionales, que están bien definidas . (Por ejemplo, $3^{\sqrt{2}}$ es el límite de la sucesión $3^{1}, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, \ldots$ = $100^{\sqrt{3}}$.) Cualquier suma infinita que sea una SERIE puede considerarse como un LÍMITE de una secuencia de SUMAS PARCIALES, y cualquier PRODUCTO INFINITO puede considerarse como el límite de una secuencia de productos parciales.

Véase también SECUENCIA ARITMÉTICA; ATADO; GEOMÉTRICO SECUENCIA RIC; SECUENCIA ARMÓNICA.

serie Una suma de números se llama serie. La suma puede ser finita, como 2 + 4 + 6 + 8 + 10, por ejemplo, o puede ser una suma infinita, como 2 + 5 + 8 + 11 +... por ejemplo. Cada número en la suma se llama 14 + un término de la serie.

En 1755 LEONHARD EULER introdujo el uso de la letra griega sigma Σ (S para “suma”) para abreviar la escritura de una serie. Por ejemplo, la suma de los primeros se pueden escribir cinco numeros pares $\sum_{n=1}^{5} 2n$ y la suma de todos los números 1 menos que un múltiplo de tres como $\sum_{n=1}^{\infty} (3n - 1)$. (Ver SUMA.)

No hay dificultades conceptuales con la noción de sumar solo una colección finita de números. Sin embargo, comprender lo que queremos decir con una suma infinita es un asunto delicado: tales sumas pueden exhibir caracteres muy diferentes. Algunas series claramente no suman un valor finito (como 2 + 5 + 8 + 11 + 14,..., por ejemplo), mientras que se podría argumentar que otras series infinitas sí lo hacen.

(El acto de caminar de un lado a otro de la habitación , por ejemplo, sugiere que la serie $+ + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ “suma” al valor 1: primer paseo la mitad de la habitación, y luego la mitad de la distancia restante, y luego la mitad de la distancia restante, y así sucesivamente).

En algunos casos la situación no está del todo clara. Por ejemplo, la serie 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + … de términos positivos y negativos parece oscilar: un número par de términos suma cero, un número impar 1, y no parece posible asignar una sola suma a esta serie.

(Algunos matemáticos en el pasado argumentaron que la suma de esta serie debería ser 1, un valor entre cero y 1.) /2 ,

Estos diferentes comportamientos de series infinitas causaron mucha confusión a los estudiosos a lo largo de los siglos. Los asuntos no se resolvieron correctamente hasta que AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) introdujo la noción de LÍMITE y pudo aplicarla al estudio del infinito.

sumas. Hoy decimos que una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} un = a1 +$ a2 + a3 +… converge a un valor finito L si la SECUENCIA de SUMAS PARCIALES:

$S1 = a1$

$S2 = a1 + a2$

$S3 = a1 + a2 + a3$

tiende a L en el límite cuando n → ∞. Por ejemplo, la serie infinita

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

tiene sumas parciales:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S = + + = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{4}$$

$$S = + + + = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{7}{8}$$

$$S = + + + + = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{15}{16}$$

que se acercan al valor 1. En este sentido decimos que el sentido suma $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$, sin embargo, sumar los términos de es igual a 1. (En una práctica la serie solo nos acerca cada vez más al valor 1: podemos nunca alcanzarlo. Estamos físicamente limitados por el hecho de que no podemos seguir agregando términos indefinidamente).

Una serie infinita que converge se llama serie convergente. Cualquier serie que no converge a un valor finito (ya sea porque el valor de la suma parece ser infinito, o porque las sumas parciales oscilan) se llama divergente. Hay una serie de pruebas para determinar si una serie converge o diverge o no. (Ver SERIE CONVERGENTE.)

Machine Translated by Google

Cada expansión decimal infinita se puede pensar en 3
como una serie infinita. Por ejemplo, 0 3333 L = + $\frac{3}{10}$ $\frac{3}{100}$
++ + $\frac{3}{1000}$ $\frac{3}{10000}$, y la serie converge a la
valor 1/3.

Véase también SERIE ALTERNATIVA; SERIES ARITMÉTICAS; SERIE EXPONENCIAL; SERIES GEOMÉTRICAS; GREGORIO SERIE; SERIE ARMÓNICA; SERIE MACLAURINA; FUERZA SERIE; SUMAS DE POTENCIAS; SERIE TAYLOR; PARA DE ZENO DOXES; FUNCIÓN ZETA.

teoría de conjuntos En términos generales, un conjunto es cualquier colección de objetos o números especificados de una manera bien definida. Cada elemento del conjunto se denomina elemento o miembro. del conjunto Por ejemplo, “perro” es un elemento del conjunto de mamíferos Si una entidad a es un elemento de un conjunto S, entonces escribimos a S. Si a no pertenece a S, escribimos a S.

Los conjuntos generalmente se especifican enumerando los elementos del conjunto entre un conjunto de llaves "{ }", o enumerando un pocos elementos del conjunto para indicar un patrón. Por ejemplo, {a,e,i,o,u} es el conjunto formado por las cinco vocales de el alfabeto, y {3,6,9,12,…} es el conjunto de todos los múltiplos de 3. También puede ser posible definir un conjunto como compuesto de elementos de alguna colección universal que satisfacen una determinada propiedad. Por ejemplo, {x R|x > 5} denota el conjunto de todos los números reales que son mayores que 5. (Algunos los matemáticos prefieren usar dos puntos “:” en lugar de un barra vertical en esta notación.)

El orden en que se enumeran los elementos de un conjunto es irrelevante Por ejemplo, {A,6,*} y {*,6,A} son los mismo conjunto. Además, los elementos de un conjunto se enumeran sin repetición. Por ejemplo, el conjunto {a, a, a, a, a} es el conjunto con un solo elemento A. El CONJUNTO VACÍO es el conjunto que no contiene elementos.

Dos conjuntos se consideran iguales si poseen precisamente los mismos elementos. Por ejemplo, los conjuntos {2,4,6,8,…} y {n|n es un número de conteo divisible por 2} son iguales conjuntos Se dice que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B si todo elemento de A es también miembro de B. Escribimos A B si están seguros de que los dos conjuntos no son iguales, y AB si es posible la igualdad de los conjuntos. Por ejemplo, el conjunto de todos múltiplos de 4 es un subconjunto del conjunto de todos los múltiplos de 2.

Aunque la noción intuitiva de un conjunto como colección de objetos es tan antigua como la raza humana, la idea de un conjunto como concepto matemático formal no fue propuesto hasta el siglo 19. En su desarrollo de BOOLEAN ALGE BRA, el matemático británico GEORGE BOOLE (1815-1864) introdujo la noción de conjunto como una herramienta fundamental para el estudio de la LÓGICA FORMAL. matemático alemán GEORG CANTOR (1845-1918), en sus intentos por comprender el fundamento de todas las matemáticas, llegó a consideran los conjuntos como aún más básicos y fundamentales que los noción de “número”. Cantor formalizó adecuadamente una teoría de las manipulaciones de conjuntos e introdujo el llamativo noción de CARDINALIDAD. Su obra lo llevó a profundas conocimientos sobre la naturaleza de los conjuntos finitos e infinitos, lo que lleva él para ampliar el concepto de número para incluir más que un tipo de INFINITY.

Establecer operaciones

Hay una serie de manipulaciones básicas de conjuntos, cada una de las cuales que se puede representar con un DIAGRAMA DE VENN.

Intersección de Conjuntos: La intersección de dos conjuntos A y B, denotado A ∩ B, es el conjunto de elementos comunes a tanto A como B. Por ejemplo, si A = {0,2,4,6,8,10,12} y B = {0,3,6,9,12,15}, entonces A ∩ B = {0, 6, 12}. Dos Los conjuntos que no tienen elementos en común se llaman disjuntos. La intersección de dos conjuntos disjuntos es el conjunto vacío.

Unión de conjuntos: La unión de dos conjuntos A y B, denotada A B, es el conjunto de todos los elementos que aparecen en A o en B, o en ambos. Por ejemplo, en el anterior ejemplo tenemos A B = {0,2,3,4,6,8,10,12,15}.

Si dos conjuntos A y B contienen cada uno un número finito de elementos, entonces el número de elementos en A B es igual al número de elementos en A más el número de elementos en B menos el número de elementos en A ∩ B. (Esta resta contrarresta el doble conteo de los elementos que pertenecen a ambos conjuntos). fórmula es una instancia de la INCLUSIÓN general PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN.

Las nociones de intersección de conjuntos y unión de conjuntos puede extenderse a consideraciones que incluyen más que dos conjuntos.

Complemento de conjunto: si un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, entonces el complemento de A en B, también llamado diferencia de conjuntos y denotado B – A, es el conjunto de todos los elementos de B que no pertenecen a A. Por ejemplo, si A = {1,3,5} y B = {1,2,3,4,5,6}, luego B – A = {2,4,6}. LAS LEYES DE DE MOR GAN explican cómo interactúa el complemento de conjuntos con intersecciones y uniones de conjuntos.

Dificultad filosófica

En 1902 matemático y filósofo británico BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872–1970)

Machine Translated by Google

asombró a la comunidad matemática con su construcción de una paradoja simple, hoy llamada RUSSELL'S PARADOJA, que demuestra que nuestra comprensión ingenua de la noción de conjunto es fundamentalmente defectuosa. A pesar de Cantor creía que la teoría de conjuntos es la base de que se construye toda la matemática, quedó claro para matemáticos que el concepto de conjunto y lo que los medios para ser un "elemento de" deben permanecer como términos indefinidos. En las décadas siguientes, matemáticos como ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871-1953) intentó desarrollar una teoría axiomática de conjuntos (basada en términos indefinidos) que evita por completo la paradoja de Russell. Hasta el día de hoy, no todos matemáticos están de acuerdo en que este objetivo aún no ha sido logrado.

Véase también ARGUMENTO; AXIOMA DE ELECCIÓN; CARDENAL IDAD; PRODUCTO CARTESIANO; DIFERENCIA; FINITO.

problema de los siete puentes de Königsberg Ver GRÁFICO TEORÍA.

sexagesimal Véase BASE DE UN SISTEMA NUMÉRICO.

Shanks, William (1812–1882) Computación británica Nacido el 25 de enero de 1812 en Northumberland, Inglaterra, William Shanks es recordado por sus cálculos extraordinariamente precisos de constantes matemáticas, todo hecho a mano. Shanks evaluó los RITMOS LOGA naturales de los números 2, 3, 5 y 10, cada uno a 137 decimales, publicó una tabla de todos los números primos hasta 60.000 y evaluó todas las potencias de dos de la forma 212n+1 para n de 1 a 60. También evaluó e y la CONSTANTE γ DE EULER a un gran número de lugares decimales, pero se le recuerda mejor por su cálculo de π con muchos cientos de lugares decimales. Él publicó este resultado en 1873.

Poco se sabe de la vida de Shanks. Sus métodos de computación eran esencialmente nada más que un Cuestión de paciencia y FUERZA BRUTA. Por ejemplo, Shanks usó la siguiente identidad para calcular 707 dígitos de π:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ broncearse}^{-1} \frac{1}{5} - \text{broncearse}^{-1} \frac{1}{239}$$

utilizando la SERIE DE GREGORIO $\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$. Al sustituir los valores y comenzar a $\frac{1}{239}$, uno puede calcular los dígitos de π.

En 1946 el matemático inglés DF Ferguson usó la identidad alternativa para calcular también π:

$$\frac{\pi}{4} = 3 \text{ broncearse}^{-1} \frac{1}{4} + \text{broncearse}^{-1} \frac{1}{20} + \text{broncearse}^{-1} \frac{1}{1985}$$

Señaló que Shanks había cometido un error en el 528. lugar y pasó a calcular correctamente π a 808 lugares decimales.

Shanks murió en Houghton-le-Spring, Inglaterra, en 1882. No se conoce la fecha exacta de la muerte.

Véase también E; PI.

Shannon, Claude Elwood (1916–2001) Estadounidense Teoría de la información Nacido el 30 de abril de 1916, en Michigan, Claude Elwood Shannon es recordado como el fundador del campo de la TEORÍA DE LA INFORMACIÓN. Su artículo seminal, "La teoría matemática de la comunicación", publicado con Warren Weaver en 1949, estableció los principios de las ciencias de la comunicación y introdujo la idea revolucionaria de que la información (imágenes, palabras, sonidos) podría transmitirse con éxito a través de un cable como una secuencia de 0 y 1. (Arriba entonces se pensó que sería necesario transmitir ondas electromagnéticas a través de cables a lograr esta hazaña.) Este documento introdujo el término poco por primera vez. Shannon también desarrolló un medio matemático para medir el contenido de la información de un mensaje

Shannon obtuvo una licenciatura en matemáticas e ingeniería eléctrica de la Universidad de Michigan en 1936. Completó el doctorado trabajo en el Instituto de Tecnología de Massachusetts en 1940 y trabajó en la construcción de un tipo temprano de computadora mecánica. Demostró, por primera tiempo, que es posible combinar ÁLGEBRA BOOLEANA con relés eléctricos y circuitos de conmutación para crear un máquina que puede "hacer" lógica matemática.

En 1941, Shannon se unió a AT&T Bell Telephones en New Jersey como investigador matemático y publicó su famosa obra 7 años después. Esta pieza también incluye la base matemática de la detección de errores: sumando

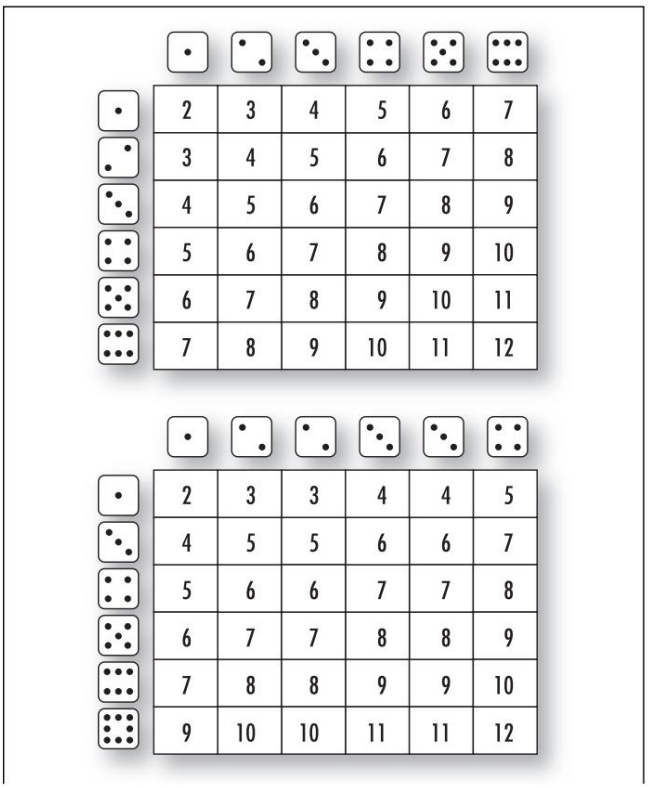
Machine Translated by Google

bits adicionales a un mensaje, Shannon demostró que es posible detectar y corregir errores que ocurren durante la transmisión de mensajes debido al ruido.

Shannon aceptó un puesto de profesor en el Instituto de Tecnología de Massachusetts en 1957, pero siguió siendo consultor de Bell Telephones. Continuó su trabajo sobre el álgebra de Boole, aplicándolo al nuevo campo de la inteligencia artificial. Shannon produjo los primeros programas efectivos para jugar al ajedrez.

Shannon recibió muchos honores por su trabajo, incluida la Medalla Nacional de Ciencias en 1966 y la Medalla de Oro de la Sociedad de Ingeniería de Audio en 1985. Murió en Medford, Massachusetts, el 24 de febrero de 2001.

Dados de Sicherman Un par de dados con caras renumeradas 1, 2, 2, 3, 3, 4 y 1, 3, 4, 5, 6, 8 se denominan dados de Sicherman, llamados así por su descubridor, el coronel George Sicher, hombre de Buffalo, Nueva York. Estos dados tienen una propiedad notable: la PROBABILIDAD de lanzar cualquier suma en particular (de 2 a 12) con los dados de Sicherman es igual a la probabilidad de lanzar esa misma suma con un dado.



Comparando dados ordinarios con dados de Sicherman

par de dados estándar. Por lo tanto, los dados de Sicherman se pueden usar en juegos de dados sin afectar las probabilidades del juego.

Las siguientes tablas muestran todos los resultados posibles de lanzar un par de dados estándar (arriba) y un par de dados Sicherman (abajo), 36 combinaciones en total para cada par. Todas las sumas aparecen con la misma frecuencia en cada tabla, por lo que todas las probabilidades de suma son idénticas. (Ambas mesas poseen tres 10, por ejemplo. Las probabilidades de sacar un 10 son, por lo tanto, las mismas para cada par: $^{3}\!/_{36}$ o $^{1}\!/_{12}$).

Los dados de Sicherman son únicos: no hay otra forma de volver a numerar las caras de dos cubos con números enteros positivos , dando como resultado dos dados con las mismas probabilidades de suma que los dados estándar.

Los dados tetraédricos (con cada dado con la forma de un TETRAEDRO) que tienen caras etiquetadas como 1, 2, 2, 3 y 1, 3, 3, 5 producen las mismas probabilidades de suma que los dados tetraédricos ordinarios etiquetados como 1, 2, 3, 4 y 1. 2, 3, 4.

tamiz de Eratóstenes (tamiz de Eratóstenes) Aunque no existe una fórmula conocida para generar números PRIMOS , existe un método simple para “tamizar” los números primos entre 1 y cualquier número dado N. El procedimiento se llama tamiz de Eratóstenes y se atribuye al erudito del siglo III ERATOSTENES DE CIRENE, un griego contemporáneo de EUCLIDES (ca. 300–260 a. C.).

El método se realiza de la siguiente manera:

1. Haz una lista de todos los números enteros positivos desde 2 hasta N.
2. Deje el número 2, pero tache cada segundo número después de él. Esto elimina todos los múltiplos de 2 mayores que 2.
3. Deje el siguiente número restante, 3, pero tache cada tercer número después de él (si aún no lo ha borrado). Esto eliminará todos los múltiplos de 3 mayores que 3.
4. Deje el siguiente número restante, 5, y elimine todos sus múltiplos.
5. Continúe este proceso yendo siempre al siguiente número restante y tachando los múltiplos que aparecen más adelante en la lista.
6. Los números enteros que no se borran cuando finaliza este proceso son los números primos entre 2 y N.

Cualquier número k en la lista que no sea primo se puede factorizar, k = a × b, y así se eliminará al considerar los múltiplos de a, digamos. Solo sobrevivirán aquellos números de la lista que no se factoricen, es decir, los números primos.

Machine Translated by Google

Cualquier NÚMERO COMPUESTO menor que N tiene al menos un factor primo menor que la raíz cuadrada de N. (Un número k menor que N no puede factorizarse como $k = a \times b$ con ambos a y b mayores que $\sqrt{N}$.) Esto muestra que al realizar este procedimiento, uno solo necesita eliminar múltiplos de números primos menores que la raíz cuadrada de N. Por ejemplo, para encontrar todos los números primos del 2 al 100, elimine sólo los múltiplos de 2, 3, 5 y 7 de la lista. Esta observación simplifica considerablemente el procedimiento.

En el siglo XIX, el astrónomo polaco Yakov Kulik utilizó este método para encontrar todos los números primos entre 1 y 100 000 000. Le tomó más de 20 años completar la tarea. Desafortunadamente, la biblioteca a la que Kulik entregó su manuscrito perdió las páginas que enumeraban los números primos que descubrió entre 12.642.000 y 22.852.800.

Cifras significativas Ver ERROR.

figuras semejantes Dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. (Se permiten imágenes especulares). Más precisamente, dos POLÍGONOS son similares si, bajo alguna correspondencia entre sus lados y vértices, los ángulos interiores correspondientes son iguales y los lados correspondientes difieren en proporción por un factor constante. La constante de proporcionalidad se llama factor de escala.

Como ejemplo, dos cuadrados cualesquiera son similares. Si la longitud de los lados de un cuadrado es el doble de la longitud de los lados del otro, digamos, entonces las dos figuras tienen un factor de escala de 2. Cualquier figura aumentada o reducida de tamaño, con la ayuda de una fotocopiadora, por ejemplo, produce una nueva figura similar a la primera.

Dos TRIÁNGULOS son semejantes si:

1. Los tres ángulos interiores de un triángulo coinciden con los ángulos interiores del otro.

Esto sigue, ya que la LEY DE LOS SENOS muestra que los lados correspondientes también tendrán la misma proporción. Esto a menudo se llama la regla AAA.

2. Tres lados de un triángulo son proporcionales, por el mismo factor de escala, a los tres lados del otro.

Esta vez la LEY DE LOS SENOS muestra que los tres ángulos correspondientes son iguales.

3. Un ángulo de un triángulo es igual a un ángulo del otro, y los lados que forman el ángulo en uno son proporcionales a los mismos lados en el otro.

La LEY DE LOS COSENOS muestra que los terceros lados de los triángulos están en la misma proporción.

Identificar triángulos semejantes suele ser el paso clave para probar resultados geométricos. Los TEOREMAS DEL CÍRCULO, EL TEOREMA DE PTOLOMEO y el teorema de la SECANTE , por ejemplo, demuestran esto.

Dos círculos cualesquiera son similares. Esta observación explica por qué el valor π es el mismo para todos los círculos.

Dos figuras que son semejantes con un factor de escala de 1 se llaman FIGURAS CONGRUENTES. Una figura que se compone de partes similares a la figura entera es un FRACTAL.

Véase también AAA/AAS/ASA/SAS/SSS; GEOMETRÍA EUCLIDIANA.

interés simple Ver INTERÉS.

Simpson, Thomas (1710–1761) Cálculo británico Nacido el 20 de agosto de 1710 en Leicestershire, Inglaterra, Thomas Simpson es recordado en matemáticas únicamente por la regla que erróneamente lleva su nombre.

Con una educación limitada, Simpson comenzó su carrera como astrólogo profesional y hombre de confianza. Después de un desafortunado incidente en 1733 por el que se vio obligado a abandonar su condado natal de Leicestershire, Simpson aceptó un puesto de profesor nocturno en Derby. Entonces se desarrolló su interés por las matemáticas.

Simpson publicó artículos matemáticos en el Ladies' Diary y pronto desarrolló una reputación como un erudito capaz en el campo del cálculo. En 1737 escribió A New Treatise of Fluxions y siguió este trabajo con el lanzamiento de cuatro textos más influyentes durante los siguientes 6 años. Su escritura le valió una fama considerable en Inglaterra en ese momento. En 1743 fue nombrado segundo maestro matemático de la Real Academia Militar y en 1735 fue elegido miembro de la REAL SOCIEDAD.

Más adelante en su carrera, mientras aún trabajaba como profesor de matemáticas, Simpson también publicó tres libros de texto elementales de gran éxito de ventas: Álgebra (1745), con 10 ediciones en inglés; Geometry (1747), con seis ediciones en inglés, cinco ediciones en francés y una edición en holandés; y Trigonometría (1748), con cinco ediciones en inglés.

Machine Translated by Google

LA REGLA DE SIMPSON , como se le llama hoy, apareció en su texto de 1743 Disertaciones Matemáticas. Que su nombre se asocie a una técnica que claramente no inventó, sino que simplemente describió, sirve como testimonio de la influencia y popularidad de su escritura. Simpson murió en Market Bosworth, Inglaterra, el 14 de mayo de 1761.

Regla de Simpson Ver INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

ecuaciones lineales simultáneas Una ecuación se llama lineal si cada término de la ecuación que contiene una variable contiene solo una variable elevada a la primera potencia. Por ejemplo, 3x + 4 = 6 y 2x + 7y – z = 11 son ecuaciones lineales (pero 2xy + z = 5 y 3x + 4 = 6, por ejemplo, no lo son). Una colección de ecuaciones lineales en varias variables requeridas para cumplir simultáneamente algún valor de esas incógnitas se llama sistema de ecuaciones lineales simultáneas. Por ejemplo, las ecuaciones

$$5x + 2y = 16$$
$$2x – y = 1$$

formar un par de ecuaciones lineales simultáneas. Este par tiene como solución x = 2 e y = 3.

Hay varios métodos para resolver pares de ecuaciones lineales simultáneas.

Método de Eliminación: Multiplicar cada ecuación por una cantidad adecuada para que coincidan los coeficientes de una de las variables. La solución del sistema es entonces evidente si se restan las dos ecuaciones. Por ejemplo, para resolver

$$x + 3y = 7$$
$$3x – y = 11$$

multiplica la primera ecuación por 3 para obtener el par equivalente:

$$3x + 9y = 21$$
$$3x – y = 11$$

Al restar se obtiene la ecuación: (3x + 9y) – (3x – y) = 21 – 11, es decir, 10y = 10, lo que indica que y es igual a 1. Dado que x + 3y = 7, ahora vemos que x debe ser 4.

Método de sustitución: Resuelva para una de las variables en una ecuación e inserte el resultado en la segunda ecuación. Por ejemplo, para la pareja

$$x + 3y = 7$$
$$3x – y = 11$$

la primera ecuación da x = 7 – 3y. Sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene 3(7 – 3y) – y = 11, es decir, 21 – 10y = 11 o, de nuevo, 10y = 10. La solución del sistema sigue como se muestra en el método anterior.

Método de equiparación: resuelve ambas ecuaciones para una variable e iguala los resultados. En nuestro ejemplo, la primera ecuación produce x = 7 – 3y y la segunda, $x = \frac{11 + y}{3}$. Igualando se obtiene $7 – 3y = \frac{11 + y}{3}$ o $21 – 9y = 11 + y$. Resolviendo para y da $y = 1$, de lo cual se sigue que $x = 4$.

También se puede buscar una SOLUCIÓN GRÁFICA. Tal enfoque muestra que cualquier par de ecuaciones lineales simultáneas tiene una solución única (como para el par anterior), ninguna solución o infinitas soluciones. Es imposible que un par de ecuaciones lineales tengan exactamente dos soluciones distintas, por ejemplo.

El proceso de ELIMINACIÓN GAUSSIANA proporciona los medios para resolver sistemas de ecuaciones lineales con más de dos incógnitas. Este enfoque arroja resultados clave sobre la teoría de matrices y el estudio de ÁLGEBRA LINEAL.

Véase también HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo); MATRIZ; SISTEMA DE ECUACIONES.

punto singular (singularidad) Cualquier punto en una curva en el que no hay una sola TANGENTE bien definida a la curva se llama punto singular. Puede ser que la curva se cruce a sí misma en ese punto, en cuyo caso hay dos tangentes a la curva, o que el punto sea una CÚSPIDE o un PUNTO AISLADO, por ejemplo.

Véase también PUNTO DOBLE.

Unidades SI Adoptado en 1960 por acuerdo internacional, el Système International d'Unités (unidades SI) es un sistema coherente de unidades utilizadas con fines científicos. Se basa en siete unidades básicas fundamentales de las cuales el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s) para medir longitud, masa y tiempo, respectivamente, son las

Machine Translated by Google

más común en matemáticas. Hay dos unidades suplementarias: el radián usado para medir ÁNGULOS y el estereorradián para medir un ÁNGULO SÓLIDO. Multiplicando y/o dividiendo estas bases y suplementos unidades, se obtienen otras unidades derivadas. Por ejemplo, la unidad de área es “metro cuadrado” (metro por metro), y la unidad de velocidad es “metro por segundo” (metro dividido por segundo). Hay 18 unidades derivadas específicas. que tienen sus propios nombres, como un Newton (N) para un medida de fuerza (dada como kilogramos por metro por segundo al cuadrado). La siguiente tabla enumera los elementos básicos y unidades suplementarias y sus símbolos.

Cantidad	Nombre	Símbolo
longitud	metro	metro
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
temperatura	Kelvin	k
cantidad de una sustancia	lunar	mol
corriente eléctrica	amperio	A
ángulo de	candela	cd
intensidad de la luz	radianes	radical
(suplementario) ángulo sólido (suplementario)	estereorradián	señor

Los múltiplos y fracciones de unidades se definen en múltiplos de 1.000 y se indican mediante prefijos o símbolos especiales. Estos se muestran en la siguiente tabla. Por ejemplo, 1 megaamperio equivale a 106 amperios y 1 milímetro equivale a 10–3 metros.

1024 yotta- (Y) Griego: okákis: ocho veces (24 = 8 × 3)
1021 zetta- (Z) Griego: heptákis: siete veces (21 = 7 × 3)
1018 exa- (E) Griego: hexákis: seis veces (18 = 6 × 3)
1015 peta- (P) Griego: pentákis: cinco veces (15 = 5 × 3)
1012 tera- (T) griego: téras: monstruo
109 giga- (G) Griego: gíg– como: gigante
106 mega- (M) Griego: mégas: grande
103 kilo- (k) Griego: chílioi: mil
10–3 mili- (m) Latín: mille: mil
10–6 micro- (μ) Griego: m _ ikrós: pequeño
10–9 nano- (n) Griego: n _ anos: enano
10-12 pico- (p) italiano: flautín: pequeño
10–15 femto- (f) Danés: femten: 15
10–18 atto- (a) danés: atten: 18
10–21 zepto- (z) Griego: heptákis: siete veces
10–24 yocto- (y) Griego: oktákis: ocho veces

Los siguientes prefijos adicionales también se utilizan a menudo:

102	hecto-	(h)	Griego: hekatón: cien
10	deka-	(da)	Griego: déka: diez
10–1	deci-	(d)	Latín: décimo: diez
10–2	centi-	(c)	Latín: centum: cien

El sistema métrico, un sistema de cuantificación de unidades de medida en términos de potencias de 10, se estableció por primera vez en 1790 por un Comité especial de Pesos y Medidas de la Academia Francesa de Ciencias. Asombrosamente, bases distintas de 10 fueron seriamente consideradas en el tiempo. (Hubo argumentos para usar el duodecimal sistema de base 12, así como la consideración de una base 11, con la esperanza de aprovechar la base PRIME). A medida que se hicieron progresos científicos a lo largo de los siglos, la sistema métrico se amplió para incluir medidas de corriente eléctrica, intensidad de luz, temperatura y cantidades moleculares. Este sistema ampliado de unidades SI descrito fue adoptado en la 11ª Conferencia General Internacional sobre Pesos y Medidas en 1960. Se hicieron ajustes menores al sistema en reuniones posteriores.

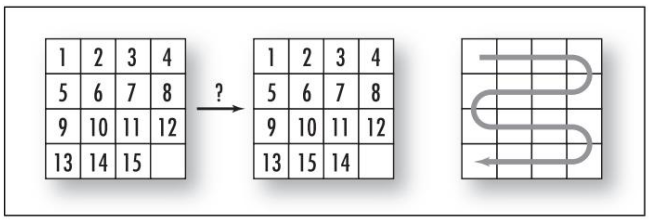
líneas oblicuas Dos líneas rectas no paralelas en un espacio tridimensional están oblicuas si no se cruzan. No par de líneas oblicuas se encuentran en un plano común.

sesgo Una medida del grado de asimetría de un DISTRIBUCIÓN se llama asimetría. Si una distribución tiene una cola corta a la izquierda y una larga a la derecha, entonces se llama positivamente sesgada, y negativamente sesgada si la situación es a la inversa.

Ver también ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

rompecabezas de diapositivas 15 (rompecabezas de jefe, rompecabezas de quince) en 1878 famoso rompecabezas estadounidense Sam Loyd (1841-1911) presentó su "rompecabezas del jefe", hoy llamado diapositiva 15 rompecabezas. El juego consta de 15 fichas, numeradas uno hasta el 15, dentro de un marco de 4 × 4 con un espacio dejado libre. Las tejas pueden deslizarse horizontal o verticalmente en la celda en blanco, pero todos los movimientos están confinados al plano del marco El desafío es convertir lo dado arreglo de mosaicos que se muestra arriba a la izquierda al que se muestra

Machine Translated by Google



Deslice quince rompecabezas

arriba a la derecha, con las fichas "14" y "15" intercambiadas. Loyd ofreció un premio de $1000 a la primera persona que presentara una solución correcta.

Resulta, como bien sabía Loyd, que este rompecabezas es imposible de resolver. La teoría de las PER MUTACIONES pares e impares explica por qué.

> Siguiendo el camino serpenteante indicado arriba, e ignorando la ubicación de la celda en blanco, se puede registrar cualquier arreglo de mosaicos como una lista de los números del 1 al 15. Por ejemplo, el arreglo inicial de mosaicos aparece como la lista:
>
> 1 2 3 4 8 7 6 5 9 10 11 12 15 14 13
>
> Dado que un número mayor aparece nueve veces a la izquierda de un número menor, esta lista representa una permutación impar de los números del 1 al 15.
> Observe que si uno desliza una ficha horizontalmente durante el juego, la lista correspondiente que representa la disposición de las fichas no cambia. Si, por el contrario, uno desliza una ficha verticalmente, el número de esa ficha se desplaza un número par de lugares hacia arriba o hacia abajo en la lista que representa la disposición de las fichas. El desplazamiento de un lugar número uno a la izquierda oa la derecha se puede efectuar mediante una sola transposición, dos lugares a la izquierda oa la derecha se pueden efectuar mediante dos transposiciones, y así sucesivamente. Así, el resultado de desplazar un número un número par de lugares hacia la izquierda o hacia la derecha es el resultado de aplicar un número par de transposiciones, preservando así la uniformidad o imparidad de la disposición de las fichas. Entonces, al jugar el juego, dado que la disposición inicial de las fichas corresponde a una permutación impar, la disposición de las fichas seguirá siendo para siempre una permutación impar. Es imposible, entonces, obtener el arreglo requerido por el objetivo del rompecabezas, a saber, 1 2 3 4 8 7 6 5 9 10 11 12 14 15 13, una permutación par.

Los matemáticos han demostrado que todos los arreglos de fichas que corresponden a permutaciones impares de los números del 1 al 15 pueden lograrse de hecho a través del juego.

regla de cálculo Se pueden realizar sumas simples con la ayuda de dos reglas ordinarias. Para calcular 2,7 + 3,5, por ejemplo, coloque el extremo (posición "0") de una regla en la ubicación 2,7 a lo largo de la segunda regla. Luego lee 3,5 unidades a lo largo de la primera regla. La etiqueta correspondiente en la segunda regla es entonces la suma deseada 6.2.

El matemático escocés JOHN NAPIER (1550–1617) descubrió los LOGARITMOS a principios del siglo XVII. Estas funciones tienen la notable propiedad de convertir cálculos de multiplicación en cálculos de suma más simples: log(N × M) = logN + logM.

En 1622, el matemático inglés WILLIAM OUGHTRED (1574–1660) se dio cuenta de que dos reglas deslizantes, con etiquetas colocadas en ESCALA LOGARÍTMICA, realizarían físicamente la suma de logaritmos y, por lo tanto, permitirían simplemente “leer” el resultado de cualquier multiplicación deseada. . (Como un ejemplo muy simple, imagine que deseamos calcular 100 × 1,000 con un par de reglas logarítmicas de base 10. Note que la marca con la etiqueta 100 se coloca 2 pulgadas a lo largo de la regla, y la marca etiquetada con 1,000 3 pulgadas). ... a lo largo de la regla. La suma 2 + 3 es, por supuesto, 5 pulgadas a lo largo de la regla. Pero esta quinta posición está etiquetada como 10,000, que de hecho es el producto 100 × 1,000).

El dispositivo mecánico de Oughtred de dos reglas deslizantes se llama regla de cálculo. El dispositivo se inspiró en el trabajo del erudito inglés Edmund Gunter (1581-1626), quien usó una sola regla y un par de punteros para lograr la misma hazaña.

Las reglas de cálculo fueron populares hasta la década de 1970, antes de la llegada de la calculadora de bolsillo.

Véase también HUESOS DE NAPIER .

pendiente (grado, gradiente) La pendiente de una línea es una medida de su inclinación. Esto se puede determinar de varias maneras:

1. Numéricamente: se dice que dos cantidades están linealmente relacionadas si un cambio unitario en una cantidad produce un cambio constante en la otra. El valor de ese cambio constante es la pendiente de la relación. Por ejemplo, la siguiente tabla muestra las ganancias obtenidas por una empresa que vende widgets.

Machine Translated by Google

No. de widgets vendidos	0	1	2	3	4	5
Beneficio (en dólares)	0	15	30	45	60	75

La relación es ciertamente lineal, ya que cada aparato adicional vendido produce el mismo aumento de $15 en beneficio obtenido Esta relación tiene pendiente 15. Observa que en la venta de dos widgets adicionales, la ganancia aumenta en $30, y en la venta de tres widgets adicionales, la ganancia aumenta en $45, y así sucesivamente. En particular, la proporción de aumento de la ganancia al aumento de la producción es siempre el mismo: $\frac{45-3}{30-2} = \frac{}{} = 15$. En general, si dos cantidades x e y están linealmente relacionadas, la pendiente de la relación es calculado como:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en los valores de y}}{\text{cambio en los valores de x}}$$

En particular, si el valor x1 produce el valor de salida y1 y x2 la salida y2 , entonces:

$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Gráficamente: Graficar los puntos de una relación lineal produce un gráfico de línea recta. La pendiente de la línea se determina colocando la punta de un lápiz en cualquier lugar de la línea, moviéndolo horizontalmente una unidad a la derecha y midiendo el distancia vertical que debe moverse la punta del lápiz para para volver a la línea. Un movimiento vertical hacia arriba es considerado positivo y vertical hacia abajo movimiento negativo. Graficar los puntos del ejemplo wid get/profit nuevamente muestra que este lineal relación tiene pendiente 15.

No importa qué punto de la línea se elija inicialmente: todas las ubicaciones arrojan el mismo valor para el pendiente a través de este método. (Esto solo es cierto para los gráficos de línea recta). También se puede hacer un recorrido horizontal de un longitud diferente a 1 para producir un valor diferente para la subida que hay que tomar para volver a la gráfica. El radio Sin embargo, "elevarse sobre correr", siempre adoptará el mismo valor. A los estudiantes de la escuela se les pide a menudo que memoricen este frase clave como la definición de pendiente:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en los valores de y}}{\text{cambio en los valores de x}} = \frac{\text{"elevar"}}{\text{"correr"}}$$

Si (x1 , y1) y (x2 , y2) son dos puntos cualesquiera de la recta, entonces podemos interpretar la cantidad x2 – x1 como una corrida con aumento correspondiente y2 – y1 y así, de nuevo, vemos que pendiente viene dada por:

$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una recta tiene pendiente positiva si, al moverse de izquierda a derecha, la recta sube de valor, pendiente negativa si disminuye en valor (por lo tanto, un paso unitario horizontalmente a la derecha requiere un aumento negativo para volver a la recta), y pendiente cero si es horizontal.

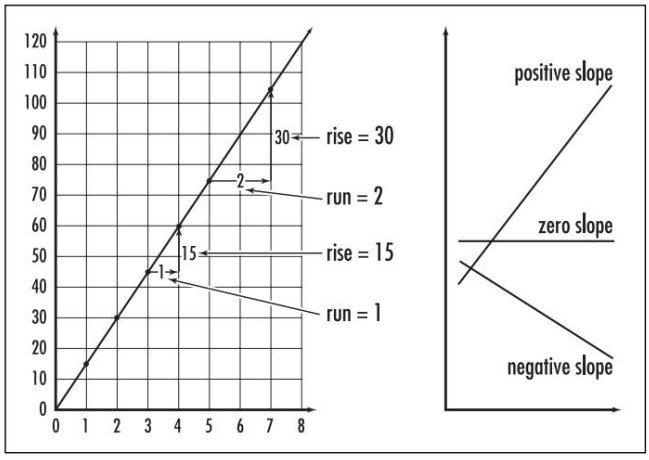
Las señales de tráfico en las carreteras a menudo usan una versión de este interpretación de la pendiente para advertir a los conductores de la pendiente del camino Por ejemplo, un letrero que diga "15% de calificación próximas 7 millas" advierte a los conductores que por cada milla recorrida durante las próximas 7 millas, la altitud de la carretera desciende 0.15 millas (La pendiente de la carretera es, por lo tanto, -0,15).

3. Algebraicamente: La ECUACIÓN DE UNA LÍNEA suele ser escrito en la forma y = mx + b, donde m y b son números. Vemos que un aumento del valor de x en 1 unidad provoca un aumento en el valor de y en m unidades:

Si $x \to x + 1$, entonces $y = mx + b \to m(x + 1) + b$
$= (mx + b) + m = y + m.$

Por tanto, la pendiente de la recta es m. Tenemos:

La pendiente de una recta es simplemente el coeficiente de la variable x en la ecuación y = mx + b.



Pendiente

Machine Translated by Google

Dos rectas diferentes con la misma pendiente son PARAL LEL. Por ejemplo, las líneas y = 2x + 3 y y = 2x – 5 son paralelo. Si dos rectas PERPENDICULARES tienen pendientes m1 y m2 respectivamente, entonces se cumple la siguiente relación:

$$m1 \cdot m2 = -1$$

Uno puede ver esto dibujando los segmentos de línea horizontal y vertical para la carrera y la subida para la primera (y entonces m1 = 90° $\frac{\text{elevar}}{\text{correr}}$), y luego girando esa imagen en sentido contrario a las manecillas del reloj. En esta nueva imagen, ¿cuál era la carrera es ahora una subida de una línea perpendicular, y lo que era una subida ahora es una carrera que apunta en la subida dirección. Así m2 = – $\frac{\text{opuesta}}{\text{correr}} = -\frac{1}{m1}$.

CÁLCULO DIFERENCIAL trata el tema de definición de pendiente para curvas que no son líneas rectas.

Véase también COLLINEAR; DEGRADADO; TANGENTE.

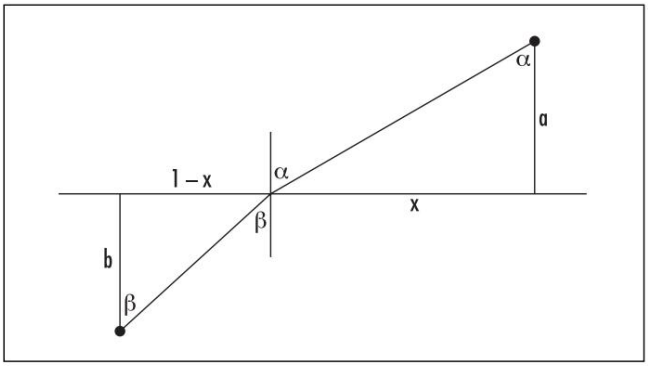
Ley de Snell Este principio, descrito por primera vez en 1621 por El matemático holandés Willebrord van Roijen Snell, es mejor explicado a través del estudio de una OPTIMIZACIÓN problema. Lo expresamos aquí en un entorno moderno.

> Un salvavidas se pone en marcha para rescatar a un nadador en apuros. El nadador que se ahoga, sin embargo, no es directamente en frente del salvavidas pero a una distancia ángulo a lo largo de la orilla. Para llegar al nadador, el salvavidas debe correr por la arena y luego sumérgete en el agua y nada al rescate. A surge la duda: como el salvavidas puede correr mucho más rápido de lo que puede nadar, hacia qué punto a lo largo de la orilla debe correr para que el total tiempo que tarda en llegar al nadador es como minimo?

Sorprendentemente, el camino en línea recta desde la estación de salvavidas hasta el nadador no proporciona la ruta más rápida.

Para analizar este problema, sean a, b, α y β las distancias y los ángulos que se muestran. Para mayor facilidad, suponga que el desplazamiento horizontal entre el salvavidas y el nadador es 1 unidad. Suponga también que la velocidad del salvavidas en la costa es r metros por segundo, y en el agua, s metros por segundo. Deseamos encontrar la longitud x a lo largo de la orilla que produce un camino que requiere la menor cantidad de hora de seguir.

Según el TEOREMA DE PITÁGORAS , el total distancia que recorre el salvavidas en la orilla es $\sqrt{a^2 + x^2}$ metros



La ley de Snell

Como la velocidad es igual a la distancia en el tiempo, esto toma un total de $\frac{\sqrt{\text{hacha}^2 + 2}}{r}$ segundos para completar. De la misma manera, vemos que el salvavidas estará en el agua $\frac{\sqrt{b^2 + (1 - x)^2}}{s}$ antes de llegar al nadador. Así, para esta posición x a lo largo de la costa, el tiempo total T(x) que se tarda en llegar a la nadador se da como:

$$T(x) = \frac{\sqrt{\text{hacha}^2 + 2}}{r} + \frac{\sqrt{b^2 + (1 - x)^2}}{s}$$

segundos. Ahora usamos las técnicas de CÁLCULO para Encuentre un mínimo local para esta función. (Ver MÁXIMO/ MÍNIMO.)

Un mínimo local de esta función solo puede ocurrir si la primera derivada de esta función es cero. Este rendimientos:

$$T'(x) = \frac{x}{ra\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1 - x}{sb\sqrt{1 + (1 - x)^2}} = 0$$

La prueba de la segunda derivada muestra que esto sí corresponden a un mínimo. Por lo tanto, la solución óptima a este problema ocurre cuando la cantidad $\frac{x}{ra\sqrt{x^2 + 1}}$ es igual $\frac{1 - x}{sb\sqrt{1 + (1 - x)^2}}$. Observe en el diagrama que seno = $\frac{x}{\sqrt{\text{hacha}^2 + 2}}$ y senβ = $\frac{1 - x}{\sqrt{\text{caja}^2 + (1 - x)^2}}$ Por lo tanto, la salvavidas debe correr a la posición en la orilla de tal manera que

Machine Translated by Google

los ángulos α y β satisfacen la relación fundamental sen

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{\text{pecado}\,\beta}{s}$$

En general tenemos:

Si la velocidad de viaje a través de un medio es s unidades por segundo, y a través de un segundo medio es r unidades por segundo, entonces el óptimo ruta de viaje a través de un límite que separa los dos medios ocurren cuando el ángulo de incidencia α y el ángulo de refracción β satisfacen la relación:

$$\frac{\text{pecado}\,\alpha}{r} = \frac{\text{pecado}\,\beta}{s}$$

Este principio se llama hoy ley de refracción de Snell. Snell observó que un haz de luz que se movía de una medio a otro, digamos, del aire al agua, obedece a este ley. Luz de un color, es decir, de un particular longitud de onda, viajará a través del mismo medio a una velocidad diferente a la de un haz de diferente color, por lo que tendrá su propio ángulo apropiado de refracción. Por esta razón, la luz blanca, la composición de todos los colores, se separa en un arco iris de colores. en el intercambio de un nuevo medio. Gotitas de agua suspendido en el aire después de una tormenta separa los colores de la luz del sol de esta manera para producir un gran arco iris visible desde el suelo.

pompas de jabón La película de una solución jabonosa es elástica y tiene la propiedad de que siempre “retira sobre sí mismo” para crear una superficie de la menor superficie posible. notando que una pompa de jabón, que contiene un volumen fijo de aire, siempre adopta la forma de una ESFERA proporciona una demostración física de las siguientes tres dimensiones variación del PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO:

De todas las figuras de volumen fijo, la esfera tiene la menor superficie.

Matemático polaco Hermann Schwarz (1843-1921) proporcionó una prueba matemática de esta observación en 1882.

Muchas preguntas básicas sobre la disposición de las burbujas que separan más de una cámara de aire no están resueltas. En 2000 los matemáticos Frank Morgan, Michael Hutchings, Manuel Ritoré y Antonio Ros lograron para demostrar que la doble burbuja familiar que se ve en la naturaleza (dos porciones de una esfera unidas a un límite curvo separando los dos volúmenes) es de hecho la forma del área de superficie total mínima para una configuración que encierra dos cámaras de aire. El problema de la triple burbuja correspondiente permanece abierto.

ángulo sólido Al igual que un ÁNGULO en dos dimensiones el espacio es la medida de la cantidad de longitud de una UNIDAD CÍRCULO “cortado” por dos rayos que describen el ángulo, un ángulo sólido en el espacio tridimensional es la cantidad de superficie de una ESFERA unidad interceptada por un haz de rayos que emanan del centro de la esfera. Un sólido el ángulo no necesita tener ninguna forma particular; se define por la nuca de un CONO, que puede tener cualquier forma.

La unidad de medida de un ángulo sólido se llama estereodian. Como el área de superficie de una esfera es $4\pi(1)^2$, hay son un total de 4π estereorradianes alrededor de un punto en el espacio. El la medida de un hemisferio es $\cdot 4\pi\frac{1}{2} = 2\pi$ estereorradianes.

Los ángulos sólidos se utilizan en física para medir la fracción de la emisión total de radiación de un fuente en el espacio. Por ejemplo, la Tierra, de radio aproximadamente 6370 km, expone una superficie total de $\frac{1}{2} \cdot 4\pi(6370)^2$ km2 hacia el Sol en cualquier momento. como el distancia de la tierra al sol es aproximadamente 150 millones de km, tenemos que la Tierra ocupa el fracción $\frac{\frac{1}{2}(4\pi 6370^2)}{(4\pi 150\,10^{6})^2} \approx \frac{1}{1\,110\,000\,000}$ de la superficie área de esfera alrededor del Sol de radio 150 millones de km. El ángulo sólido de la Tierra con respecto al Sol es esta fracción de los 4π estereorradianes completos del espacio sobre el Sol. Note que esta fracción es extremadamente pequeña. Vida en la Tierra es sostenida por menos de una mil millonésima parte de la energía total emitida por el sol.

El ángulo poliédrico de un POLIEDRO es el sólido ángulo de la región formada por la proyección de una cara de la poliedro en una esfera unitaria.

sólido de revolución Si la región bajo una curva y = f(x) entre x = a y x = b se gira una revolución alrededor del eje x, genera una imagen tridimensional figura llamada sólido de revolución. Más generalmente, cualquier figura en el plano rotada alrededor de una línea en el plano que no corta la figura produce un sólido de revolución.

Machine Translated by Google

Por ejemplo, la rotación de un semicírculo sobre su diámetro produce una ESFERA. Rotar un círculo alrededor de un eje que no corta el círculo produce un TORUS.

CÁLCULO INTEGRAL se utiliza para calcular el volumen de un sólido de revolución. Para el caso de una curva y = f(x) sobre un intervalo [a,b] rotado sobre el eje x, subdivida [a,b] en pequeños segmentos dados por los puntos a,x1 ,x2 ,…, xn ,b .
La región bajo la curva se aproxima como una colección de rectángulos de alturas f(xi) y anchos (xi+1 – xi).
Cuando se gira, cada uno de estos rectángulos produce un disco de radio f(xi) y ancho (xi+1 – xi) y, en consecuencia, de volumen π(f(xi))2 . (xi+1 – xi). El volumen del sólido en cuestión se aproxima bien por la suma de estos volúmenes individuales. Usando aproximaciones cada vez más finas se muestra que, en el límite, el volumen verdadero V del sólido de revolución está dado por la integral:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))2\, dx$$

Se puede usar este método de integración, llamado método del disco, para mostrar, por ejemplo, que el volumen de una esfera de radio r viene dada por $\pi r^{4-}_{3}{}^{3}$ (Use la función sobre $y = \sqrt{r\,2\,2 - x}$ el intervalo [–r,r].) Para los sólidos que surgen de curvas giratorias alrededor del eje y, se emplea una técnica de integración análoga, llamada método de capa cilíndrica, para calcular volúmenes.

Aproximando una sección de la curva y = f(x) como una serie de segmentos de línea recta, girando cada segmento alrededor del eje x y calculando el área de superficie de cada pequeño tronco de cono resultante, se puede demostrar que el área superficial S de un sólido de revolución viene dada por la integral:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\, dx\sqrt{1 + (f'(x))2}$$

(Esto supone que la derivada f′(x) es una función continua). Por ejemplo, se puede usar esta fórmula para mostrar que el área de superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

A mediados del siglo IV EC, sin la ayuda del cálculo integral formal, el matemático griego PAPO DE ALEJANDRÍA hizo dos hermosos descubrimientos geométricos.

> Si una figura en el plano gira alrededor de un eje que no corta a la figura, entonces el volumen del sólido de revolución producido es igual al producto del área de la región y la distancia recorrida alrededor del eje por el centroide de la figura.

> Si un segmento de una curva en un plano gira alrededor de un eje que no atraviesa el segmento, entonces el área de la superficie del sólido de revolución producido es igual al producto de la LONGITUD DEL ARCO del segmento y la distancia recorrida alrededor del eje por el centroide del segmento.

El centroide de una figura plana o de un segmento de una curva es su CENTRO DE GRAVEDAD o punto de equilibrio si imaginamos la figura plana hecha de un material uniformemente denso o el segmento curvo de un alambre uniformemente denso.
El baricentro de un círculo, considerado como una figura plana, por ejemplo, es su centro. El baricentro de su circunferencia es también su centro.

Si un círculo de radio r con centro R unidades desde el eje x se gira alrededor del eje x, la distancia recorrida por el centroide es 2πR. En consecuencia, por el teorema de Pappus, el volumen V y el área superficial S del toro producido son:

$$V = (\pi r^2) \times (2\pi R) = 2\pi\ {}^2r\ 2r$$

y

$$S = (2\pi r) \times (2\pi R) = 4\pi\ {}^{2\ RR}$$

Véase también HIPERBOLOIDE; TEOREMAS DE PAPPUS ; PARABOLOIDE.

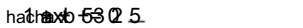
solución por radicales Si es posible expresar una solución a una ecuación POLINOMIAL en términos de los COEFICIENTES que aparecen en la ecuación bajo la aplicación de un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces, entonces decimos que tener una solución por radicales. Por ejemplo, las dos soluciones de una ecuación CUADRÁTICA $ax2 + 2\ 4\ bb -\pm -$ $bx + c = 0$ vienen dadas por $x = \frac{\sqrt{\quad C.A}}{2\ un}$. Estos son soluciones por radicales. LA FÓRMULA DE CARDANO muestra que cualquier solución a una ECUACIÓN CÚBICA es una solución por radicales, y el trabajo de LUDOVICO FERRARI (1522-1565) mostró que lo mismo es cierto para cualquier ECUACIÓN CUÁRTICA. Ciertamente, algunas ecuaciones de quinto grado tienen soluciones por radicales $\sqrt[5]{}$ (la solución de $xa, -a = 0$, es $x = a$, por ejemplo, por radicales), pero la cuestión general de si las soluciones de todas las ecuaciones de quinto grado (o superior) son soluciones por radicales siguió siendo un tema importante. cuestión no resuelta durante varios siglos. Esta pregunta es equivalente a preguntar si hay o no

Machine Translated by Google

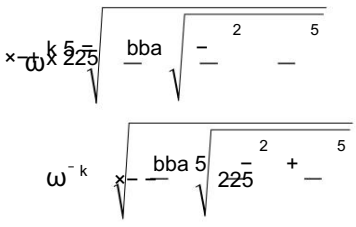
Existe una fórmula general similar a la fórmula cuadrática para ecuaciones cuadráticas que resuelve todas las ecuaciones de quinto grado (o superior).

El trabajo de ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) proporcionó los primeros pasos importantes hacia la comprensión de las propiedades generales de las soluciones de las ecuaciones polinómicas, y el matemático noruego NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) proporcionó la primera prueba de que no puede haber una fórmula general para la solución de ecuaciones de quinto grado mediante radicales. Esto es sorprendente dado que el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA asegura que cada ecuación de quinto grado tiene precisamente cinco soluciones. El resultado de Abel muestra entonces que, en general, no todas las soluciones pueden expresarse en términos de una aplicación finita de operaciones aritméticas simples sobre los coeficientes de la ecuación.

Como se mencionó anteriormente, algunas quínticas especiales tienen soluciones por radicales. Por ejemplo, ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) demostró que las soluciones de una ecuación de quinto grado de la forma:



(este polinomio se conoce hoy como la quíntica de De Moivre) tiene cinco soluciones dadas por:



donde es una raíz quinta de la unidad y k pasa por 0, 1, 2, 3 y 4.

Véase también GIROLAMO CARDANO; RAÍZ CÚBICA /RAÍZ ENÉSIMA ; RAÍZ CUADRADA; NICCOLÓ TARTAGLIA.

Método de Spearman Ver CORRELACIÓN DE RANGO.

esfera La superficie cerrada en el espacio tridimensional que consta de todos aquellos puntos que están a una distancia fija r de un punto O dado se llama esfera. La longitud r se llama radio de la esfera, y el punto O, el centro de la esfera. La FÓRMULA DE LA DISTANCIA muestra que si O tiene COORDENADAS CARTESIANAS O = (a,b,c), entonces la ecuación de una esfera viene dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

A menudo es conveniente considerar una esfera centrada con respecto al origen, en cuyo caso su ecuación se reduce simplemente a $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Este es el análogo tridimensional de la ecuación de un CÍRCULO de radio r en dos dimensiones: $x^2 + y^2 = r^2$. (El análogo unidimensional, dado por $x^2 = r^2$, da los puntos x = r y x = –r en el número $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ y el análogo tetradimensional dado por x es una hiperesfera en la cuarta DIMENSIÓN.)

Cualquier plano que pasa por el centro de una esfera divide la esfera en dos hemisferios. La curva de intersección de tal plano con la esfera es un círculo en la superficie de la esfera llamado círculo máximo. (El ecuador de la TIERRA, por ejemplo, es un gran círculo). Cualquier otro círculo dibujado en la superficie de la esfera se llama círculo pequeño.

Cualquier segmento de línea que conecta dos puntos en la superficie de la esfera y pasa por el centro de la esfera se llama DIÁMETRO , y los dos extremos de cualquier diámetro se llaman PUNTOS ANTIPODALES. El famoso teorema de Borsuk-Ulam afirma lo siguiente:

> Si f y g son dos funciones continuas en la superficie de una esfera (como la temperatura del aire y la presión del aire en la superficie de la Tierra), entonces debe existir un par de puntos antípodas P y Q para que f(P) = f(Q) y g(P) = g(Q).

La esfera puede considerarse como un SÓLIDO DE REVOLUCIÓN, obtenido al girar un círculo alrededor de su diámetro una revolución completa. Como tal, LOS TEOREMAS DE PAPPUS muestran que el VOLUMEN V y el área superficial A de una esfera de radio r están dados por las fórmulas:

$$A = \pi r^3$$

$$A = 4\pi r^2$$

Estas fórmulas también se pueden obtener mediante las técnicas de CÁLCULO INTEGRAL. (El cálculo también muestra que el volumen de una hiperesfera tetradimensional de radio r es $V = \pi r^4$.) También se puede usar el cálculo para establecer la siguiente resultado sorprendente:

> Si una hogaza de pan esférica se corta en n rebanadas de igual grosor, entonces el área superficial de

Machine Translated by Google

la corteza en cada rebanada es la misma. (Suponga que las rebanadas se hacen paralelas, cada una perpendicular a un diámetro fijo del pan).

La región de una esfera delimitada entre dos planos paralelos se llama segmento esférico o zona. Si el radio de la esfera es r y la distancia entre los dos planos es h, entonces el área superficial de la zona es 2πrh. (Observe que esta fórmula es independiente de donde los dos planos cortan la esfera). El sólido obtenido al rotar un sector de un círculo alrededor del diámetro del círculo se llama sector esférico, y una cuña esférica es cualquier segmento de una esfera. delimitado entre dos grandes círculos.

UN TRIÁNGULO ESFÉRICO es cualquier región en la superficie de una esfera delimitada por arcos de tres grandes círculos, y la trigonometría esférica es el estudio de los triángulos esféricos y los ángulos formados por la intersección de grandes círculos.
El estudio de la GEOMETRÍA ESFÉRICA muestra que los tres ángulos de cualquier triángulo esférico suman más de 180°. Un polígono esférico es la figura formada en la superficie de una esfera por tres o más arcos de grandes círculos. Los matemáticos han demostrado que los ángulos en un polígono esférico de n lados suman un valor superior a 180(n – 2)°, pero no superior a 180n°.

El famoso teorema de la bola peluda afirma que es imposible construir un CAMPO VECTORIAL continuo, en ninguna parte cero, en la superficie de una esfera.

Una sola esfera divide el espacio tridimensional en dos regiones: una interior y una exterior. Dos esferas que se cruzan dividen el espacio en cuatro regiones (la región interior a ambas esferas, dos regiones cada una interior a una esfera pero no a la otra, y la región externa exterior), tres esferas que se cruzan dividen el espacio en ocho regiones, cuatro esferas dividen el espacio en 16 regiones, y cinco esferas en 30 regiones. En general, N esferas que se cortan entre sí dividen el espacio en

$$^{\text{NORTE.}} (N2 – 3N + 8) 3$$

regiones diferenciadas. (Así, por ejemplo, se pueden organizar 10 esferas en el espacio para producir 260 regiones separadas).

En el espacio n-dimensional, el número máximo de esferas que no se intersecan (o hiperesferas) de un radio fijo r que se pueden organizar alrededor de una esfera central con cada toque o "besando" la esfera central se denomina número de beso n-dimensional. (También se le llama número de contacto, número de coordinación, ligancia o número de Newton). Como es posible organizar dos líneas segmentos en cada extremo de un segmento de línea dado, el número de beso unidimensional es 2. Uno puede disponer seis (pero no siete) círculos alrededor de un círculo dado, por lo que el número de beso bidimensional es 6. SIR ISAAC NEW TON (1642) –1727) creía correctamente que el número de besos en tres dimensiones es 12 (aunque este hecho no se probó correctamente hasta finales del siglo XIX).

En el espacio tridimensional sólo hay tres patrones periódicos (es decir, que se repiten a sí mismos) para apilar una colección infinita de esferas idénticas. Cada arreglo se llama empaquetamiento. La "red cúbica centrada en la cara" organiza las esferas en capas, con cada esfera rodeada por solo cuatro esferas dentro de esa capa. Las "redes cúbicas y hexagonales" organizan las esferas de tal manera que cada esfera en una capa está rodeada por otras seis esferas dentro de esa capa. (Los dos empaques difieren en cómo se coloca una tercera capa de esferas en relación con una primera capa). La densidad de un empaque es la fracción de espacio ocupada por las esferas. El cubico y el hexagonal

Los empaques tienen cada uno una densidad de $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74{,}05\%$.

En 1611, el matemático y astrónomo alemán JOHANNES KEPLER (1571–1630) conjeturó que los empaques cúbicos y hexagonales son los más densos posibles. No fue hasta 1998 que finalmente se demostró que este era el
caso.

El famoso TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES afirma que solo se necesitan cuatro colores para pintar cualquier mapa en la superficie de una esfera. EL TEOREMA DE EULER muestra que si v es el número de vértices en cualquier mapa, e el número de bordes entre países y r es el número de regiones definidas por el mapa, entonces v – e + r = 2.

Como la película de jabón es elástica y quiere "retirarse sobre sí misma", cualquier pompa de jabón que contenga un volumen fijo de aire adopta una forma que minimiza el área de superficie. Que las pompas de jabón sean esféricas proporciona una demostración física de la siguiente variación tridimensional del PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO:

> De todas las figuras en el espacio tridimensional de un volumen fijo, la esfera tiene la menor superficie
> área.

Véase también PROYECCIÓN DE MERCATOR ; OBLATO/ PROTARDO ; BURBUJAS DE JABÓN; ÁNGULO SÓLIDO; COORDENADAS ESFÉRICAS; TORO.

coordenadas esféricas (coordenadas polares esféricas) En el espacio tridimensional, la ubicación de un punto P puede

Machine Translated by Google

descrito por tres coordenadas ρ, θ y , llamadas coordenadas esféricas de P, donde ρ es la distancia de P desde el origen O de un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS , θ es el ángulo entre el eje x y la proyección de la línea segmento que conecta O con P en el plano xy (medido en sentido antihorario desde el eje x), y es el ángulo desde el eje z hasta el segmento de línea que conecta O con P. El ángulo θ, llamado longitud, toma un valor entre cero y 360°, y el ángulo , llamado colatitud, toma un valor entre cero y 180°. Los ángulos también se pueden presentar en RADIANES.

Las coordenadas esféricas son útiles para describir superficies con simetría esférica alrededor del origen. Por ejemplo, la ecuación de una esfera de radio 5 es simplemente ρ = 5. (Como los ángulos θ y varían en sus rangos permitidos, se describen los puntos de una esfera). La superficie definida por la ecuación θ = c , para alguna constante c (permitiendo que ρ y varíen), es un MEDIO PLANO vertical con un lado a lo largo del eje z, y la superficie = c es una siesta de un CONO circular recto.

Un punto P con coordenadas esféricas (ρ,θ,) tiene coordenadas cartesianas correspondientes (x,y,z) dadas por:

$$x = \rho \operatorname{sen} \cos\theta \text{ y}$$
$$= \rho \operatorname{sen} \operatorname{sen}\theta$$
$$z = \rho \cos$$

Para ver esto, proyecte el segmento de línea de longitud ρ que conecta O con P en el plano xy. Llame a la longitud de este segmento de línea r. Entonces, de acuerdo con las fórmulas de conversión de COORDENADAS POLARES , tenemos x = r cosθ e y = r sinθ. (Examine el triángulo rectángulo en el plano xy con el segmento de longitud r como hipotenusa). De acuerdo con el triángulo rectángulo en un plano vertical, con este segmento de línea de longitud r como base, el segmento de línea que conecta O con P de longitud ρ como hipotenusa, y un cateto vertical de longitud z, tenemos cos = y cos = r = ρ sen , $\frac{r}{\rho}$ ahora siguen $\frac{z}{\rho}$. Así z = ρ cos y las fórmulas de conversión.

Para convertir de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas utilice:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \text{broncearse}^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \cos^{-1}\frac{z}{\rho} = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

(La primera ecuación se deriva de la FÓRMULA DE DISTANCIA estándar).

Una integral triple de la forma $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ sobre un volumen V descrito en coordenadas cartesianas se convierte en la integral correspondiente:

$$\iiint_V f(\rho\operatorname{sen}\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\operatorname{sen}\theta, \rho\cos)\,\rho^2 \operatorname{sen}\, d\rho\, d\theta\, d$$

en coordenadas esféricas. La aparición del término $\rho^2 \operatorname{sen}$ en el integrando sigue por razones análogas a la aparición de r en la conversión de una DOBLE INTEGRAL de coordenadas planas cartesianas a coordenadas polares.

Como ejemplo, usando la medida en radianes, el volumen V de una esfera de radio R se puede calcular como:

$$V = \iiint_S 1\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\, d\theta\, d\, d\rho$$
$$= \int_0^R \int_0^{\pi} 2\rho^2 \operatorname{sen}\, d\, d\rho$$
$$= \int_0^R 4\pi\rho^2\, d\rho$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Ver también COORDENADAS CILÍNDRICAS.

Geometría esférica (geometría elíptica, geometría de Riemann)

Descubierta en 1856 por el matemático alemán GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866), y más tarde ligeramente modificada por FELIX KLEIN (1849-1925), la geometría esférica es una geometría NO EUCLIDEA. GEOMETRÍA en la que falla el famoso POSTULADO DE LAS PARALELAS de la siguiente manera:

> Por un punto dado que no está en una línea dada, no hay líneas paralelas a esa línea dada.

Riemann usó la superficie de una ESFERA como modelo de esta geometría interpretando la palabra línea en el sentido de un gran círculo en la esfera. Dado que en una teoría de la geometría se supone que dos rectas se intersecan en un solo punto (sin embargo, dos grandes círculos cualesquiera se intersecan en dos PUNTOS ANTIPODALES), es apropiado entonces interpretar la palabra punto en geometría esférica como un par de puntos antípodas en el superficie. En este escenario, ahora también es cierto que dos puntos distintos cualesquiera determinan una línea única.

Machine Translated by Google

Riemann y Klein probaron que todos excepto el quinto de LOS POSTULADOS DE EUCLIDES se mantienen en este modelo y, además, que este modelo es consistente (es decir, libre de CONTRADICCIONES). Esto establece que el postulado de las paralelas no puede deducirse lógicamente como consecuencia de la restantes axiomas propuestos por Euclides.

En la geometría esférica todos los ángulos de los triángulos suman más de 180°, y la relación de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es mayor que π (y esto el valor varía de un círculo a otro).

Véase también GEOMETRÍA EUCLIDEA; GEOMA HIPERBÓLICA ETRY; EL AXIOMA DE PLAYFAIR .

triángulo esférico Una figura de tres lados en la superficie de una ESFERA limitada por los arcos de tres grandes círculos es llamado triángulo esférico. A diferencia de los triángulos planos, el los ángulos en un triángulo esférico no suman el valor constante de 180°. De hecho, la suma de los ángulos siempre es mayor que 180° y puede ser tan grande como 540°. (Este ocurre cuando los tres lados del triángulo esférico se encuentran en el mismo círculo máximo.)

Un triángulo esférico rectángulo tiene al menos un ángulo recto. Un triángulo birectangular contiene dos ángulos rectos y un triangulo trirectangular tiene tres angulos rectos. (Para ejemplo, cualquier triángulo que conecte el Polo Norte con dos puntos en el ecuador de la Tierra es birectangular. Tal triángulo también puede ser trirectangular si los puntos en el ecuador se colocan apropiadamente.) Un esférico triángulo sin ángulos rectos se llama oblicuo.

Si los ángulos de un triángulo esférico son A, B y C, medida en grados, entonces el área de la superficie del triángulo viene dada por la fórmula:

$$\text{área} = \frac{\pi R^2}{180}\left(A + B + C - 180\right)$$

Aquí R es el radio de la esfera. La cantidad A + B + C – 180, generalmente denotado E, se llama el esférico exceso del triángulo. Si las longitudes de los tres lados del triángulo están dadas por a, b y c, entonces el exceso esférico también se puede calcular a través de la siguiente fórmula notable descubierta por el matemático suizo Simon Lhuilier (1750-1840):

$$\text{broncearse}\frac{mi}{4} = \sqrt{\text{bronceado}\left(\frac{abc\ abc\ abc\ abc}{4}\right)\text{broncearse}\left(\frac{}{}\right)\text{bronceado}\left(\frac{}{}\right)\text{bronceado}\left(\frac{}{4\ 4}\right.}$$

espiral de Arquímedes (Espiral de Arquímedes) Estudiada por el gran ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 BCE) en su obra Sobre espirales, una espiral de Arquímedes es la curva trazada por un punto que gira alrededor de un punto a una velocidad angular constante mientras se aleja desde ese punto a una velocidad constante. (Por ejemplo, es el camino trazado por una mosca que camina radialmente hacia afuera desde el centro de un disco giratorio uniforme.) La ecuación de tal espiral tiene una forma simple en COORDENADAS POLARES:

$$r = a\theta$$

donde a es una constante positiva.

Una curva dada por una ecuación de la forma $r = \frac{a}{\theta}$ se llama espiral hiperbólica. Estas curvas fueron estudiadas por Johann Bernoulli de la famosa FAMILIA BERNOULLI.

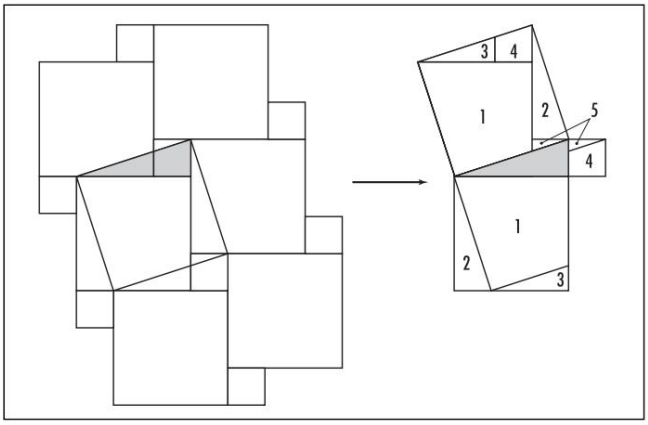
Las curvas de la forma $\frac{1}{}$ aparecen como fuertemente envueltas $ra = \theta\ n$ espirales Una curva dada por $\log r = a\theta$ se llama espiral logarítmica mic.

Véase también PROPORCIÓN DE ORO.

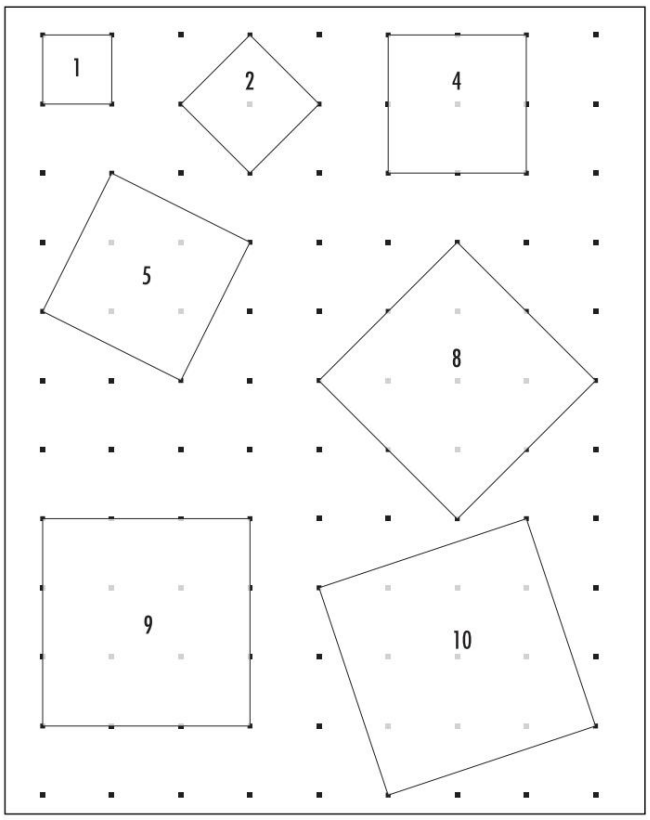
cuadrado En geometría, un cuadrado es una figura plana con cuatro lados rectos iguales y cuatro ángulos rectos interiores. Es a la vez un RECTÁNGULO, un PARALELOGRAMO, y un rombo.

Un cuadrado con longitud de lado x tiene ÁREA $x \times x = x^2$, lo que explica el término elevar al cuadrado para la operación de elevar un número o una variable a la segunda potencia.

Los cuadrados son soluciones a los PROBLEMAS ISOPERIMETRICOS del siguiente tipo clásico:



Machine Translated by Google



cuadrados en una red

Un granjero desea construir un corral rectangular con 400 pies de cerca. ¿Qué forma de rectángulo da el área más grande para esta longitud dada de cerca?

La respuesta es un bolígrafo cuadrado de 100 × 100. Cualquier otro ángulo recto tendrá un lado más corto que 100 pies, digamos 100 – x pies, un ancho mayor, 100 + x pies y, en consecuencia, un área de 2 pies2 de (100 – x)(100 + x) = 10 000 – x2 pies, que es menos que el área del bolígrafo cuadrado.

Un cuadrado es uno de los tres POLÍGONOS regulares que proporciona un TESELADO del plano. Dos cuadrados de diferentes tamaños también embaldosan el plano. Tal teselación contiene dentro de sí una prueba puramente visual de PYTHAGORAS'S TEOREMA.

Usando una hoja de papel cuadriculado, se pueden dibujar cuadrados de áreas 1, 2, 4, 5, 8, 9 y 10 unidades, todos con vértices en los puntos de red del papel, pero no cuadrados de áreas 3, 6 o 7 unidades.

El teorema de Pitágoras muestra que se puede dibujar un cuadrado de área N si, y sólo si, N es de la forma N = a + b 2 para 2 algunos enteros a y b. Por ejemplo, 9 = 32 + 2 y 5 = 22 + 12 0. (La longitud del lado de un cuadrado de área 5 abarca 2 unidades de ancho y 1 unidad de largo). Sorprendentemente, este conjunto de números satisface la PROPIEDAD DE CIERRE bajo la multiplicación.

Véase también NÚMEROS FIGURADOS; TEOREMA.

números cuadrados Ver NÚMEROS FIGURADOS.

raíz cuadrada Un número x, que, cuando se multiplica por sí mismo, produce un número dado a se llama el cuadrado raíz del número a. si $x^2 = a$, entonces escribimos $x = \sqrt{a}$. Por ejemplo, 3 es raíz cuadrada de 9, ya que 3 × 3 = 9, y cero es raíz cuadrada de cero, ya que 0 × 0 = 0. Geométricamente, la raíz cuadrada de una cantidad positiva a es la longitud de un lado de un cuadrado cuya área es a.

La invención el símbolo $\sqrt{\ }$, llamado signo radical, porque la extracción de raíces cuadradas se atribuye al matemático alemán Christoff Rudolff (1499-1545).
El nombre del símbolo proviene de la palabra latina radix para "raíz". Cualquier cantidad que aparece bajo un signo radical se llama radicando. Por ejemplo, en la ecuación $\sqrt{169} = 13$, 169 es el radicando y 13 es la raíz cuadrada.

Cualquier ecuación de la forma $x^2 = a$ con $a \neq 0$ tiene dos soluciones distintas. Por lo tanto, todo número diferente de cero tiene dos raíces cuadradas distintas. Por ejemplo, 3 y –3 son raíces cuadradas de 9. Por convención, si a es una cantidad positiva, entonces $\sqrt{a}$ se usa para denotar la raíz positiva y $-\sqrt{a}$ la raíz cuadrada negativa. Por ejemplo, escribimos $\sqrt{9} = 3$ aunque –3 también es una raíz cuadrada válida de 9.

Un estudio de EXPONENTES muestra que es apropiado definir un número elevado a la mitad de la potencia para que signifique la raíz cuadrada de ese número. No se define si esa raíz es positiva o negativa. Así, por ejemplo, $9^{\frac{1}{2}} = \pm 3$.

Los intentos de definir las raíces cuadradas de los números negativos conducen a la invención del NÚMERO COMPLEJO BERS. En el reino de los números complejos, cada número (excepto el cero) tiene exactamente dos raíces cuadradas.

La raíz cuadrada de cualquier número CONSTRUCTIBLE es de nuevo construible. Así, dado un segmento de línea de longitud a dibujado en una página, es posible construir a partir de él un segundo segmento de línea de longitud $\sqrt{a}$ usando solo las herramientas simples de una regla y un compás.

Matemático griego TEODORO DE CIRENE (ca. 425 a. C.) usó argumentos geométricos simples para probar

Machine Translated by Google

que los números de $\sqrt{2}$ a $\sqrt{17}$ (saltando $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{16} = 4$) son irracionales. Más generalmente, uno puede usar el TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA para mostrar que la raíz cuadrada de un entero positivo a es un NÚMERO RACIONAL si, y solo si, a es un cuadrado perfecto (es decir, a = b 2 para algún número entero b.) EL MÉTODO DE HERON proporciona un método para calcular la raíz cuadrada de cualquier real positivo con cualquier grado de precisión prescrito.

La desigualdad de la raíz cuadrada establece que para cualquier número entero positivo n tenemos:

$$2\left(\sqrt{1 \text{ norte}} + -\sqrt{\text{norte}}\right) < \frac{1}{\sqrt{\text{norte}}} < \frac{2}{--}\left(\sqrt{nn} \quad \sqrt{\quad 1}\right)$$

Un ejercicio de álgebra establece la validez de este declaración.

Aunque las declaraciones:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\text{un}} \cdot \sqrt{\text{segundo}}$$

y

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

son válidos para todos los números a y b (con b ≠ 0 en el sec segunda ecuación), la ecuación $\sqrt{a+b} = \sqrt{\text{eral}}$, $\sqrt{\text{un}} + \sqrt{b}$, en gen no es correcta. (Sustituya los valores a = 9 y b = 16, por ejemplo).

Véase también RAÍZ CÚBICA /RAÍZ ENÉSIMA ; MATRIZ DE IDENTIDAD; SOLUCIÓN POR RADICALES; SORDO.

la cuadratura del círculo (la cuadratura del círculo, la cuadratura del círculo) Uno de los problemas de la antigüedad (como DUPLICAR EL CUBO y TRISECAR UN ÁNGULO) de considerable interés para los estudiosos del griego clásico es la tarea de construir un cuadrado de la misma área que un círculo dado en el plano. Las únicas herramientas permitidas en la construcción son un compás y una regla (es decir, una regla sin marcas).

El problema tiene su origen en los inicios de las matemáticas. Los antiguos eruditos egipcios de 1650 a . C. describen en el PAPIRO DE RHIND una construcción de un cuadrado de área casi igual a la de un círculo. (La construcción es “exacta” si se trabaja con el aproximado valor 256/81 ≈ 3.1605 para π.) El erudito HIPÓCRATES DE QUIOS (ca. 440 a. C.) estaba interesado en el problema y desarrolló varios métodos para “cuadrar” una LUNE, una forma hecha de arcos de círculos, pero no logró cuadrar el círculo mismo. ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) usó su curva, la ESPIRAL DE ARQUÍMEDES , para cuadrar el círculo, brindando una solución al problema utilizando herramientas más avanzadas que la regla y el compás. APOLONIO DE PERGA (ca. 262-190 a. C.) también resolvió el problema con la introducción de curvas especiales y técnicas avanzadas. Sin embargo, el problema de construir un cuadrado del área deseada usando solo una regla y un compás quedó sin resolver.

El problema cobró considerable notoriedad durante los siglos siguientes. Los académicos indios, chinos y árabes también intentaron resolver el desafío y lograron encontrar soluciones al problema si se usaban varios valores aproximados para π. El problema fue estudiado por eruditos europeos del Renacimiento y se convirtió en un problema popular de estudio para los matemáticos aficionados durante los siglos XVIII y XIX. Los novatos que trabajaban en el desafío se hicieron conocidos como "cuadradores de círculos" y, a menudo, buscaban la fama presentando supuestas soluciones al problema a la prestigiosa ROYAL SOCI ETY de Londres. A finales de 1700, cansada de ser inundada con un gran número de tesis tediosas e incorrectas sobre el tema, la sociedad prohibió toda consideración de supuestas “pruebas” de la cuadratura del círculo. La Academia Francesa de Ciencias hizo lo mismo poco después.

Si asumimos que el radio del círculo dado es r, entonces se le pide a uno que produzca un cuadrado de lado a de modo que $a \cdot a = \pi r^2$. Básicamente, esto reduce el problema a uno de construir una longitud de $\sqrt{\pi}$ unidades de largo usando una regla y un compás.

La teoría de los números CONSTRUCTIBLES muestra que se puede construir cualquier cantidad de longitud racional, y que si se pueden producir dos longitudes l1 y l2 , también se pueden producir su suma, diferencia, producto y cociente, junto con la raíz cuadrada de cada cantidad. . Si uno usa un valor racional como una aproximación para π, entonces no es sorprendente que uno pueda producir soluciones al problema usando este valor aproximado. Además, si π en sí mismo es un número racional, entonces uno esperaría que fuera posible resolver el problema. Como nunca se había encontrado una solución, los estudiosos comenzaron a sospechar que π es irracional.

A mediados del siglo XVII, el matemático escocés JAMES GREGORY (1638-1675), en sus estudios de series infinitas,

Machine Translated by Google

intentó demostrar que π no solo es irracional, sino que, además, que es un NÚMERO TRASCENDENTE. Este establecería, de una vez por todas, que √ π no se puede construir. Desafortunadamente, Gregory no tuvo éxito en este objetivo. No fue hasta un siglo después que matemático alemán JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777) logró demostrar que π es irracional, y otro siglo después de que CARL LOUIS FERDI NAND VON LINDEMANN (1852-1939) finalmente demostró en 1880 que π es de hecho trascendental. Como consecuencia, Lindemann había demostrado que el problema de elevar al cuadrado el círculo es irresoluble.

Es interesante notar que en 1914 SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN (1887–1920) usó una construcción de regla y compás similar a la cuadratura de un círculo para encontrar la siguiente notable aproximación para π correcta al noveno decimal:

$$\pi \approx + 9^2 \quad \frac{19^2}{22}^{\frac{1}{4}}$$

regla de compresión (resultado sándwich) Esta regla afirma que si una función f(x) está intercalada entre otras dos funciones g(x) y h(x), al menos para valores x cercanos a a número a (es decir, tenemos g(x) ≤ f(x) ≤ h(x)), y si limx→a g(x) = L y limx→a h(x) = L, entonces debe ser el caso de que limx→a f(x) exista y sea igual a L también. Para ejemplo, las desigualdades 1 – x ≤ f(x) ≤ 1 + x ^{2} implicar que limx→0 f(x) = 1.

Quizás la aplicación más importante del sinx regla de compresión es el cálculo del límite surge $\frac{}{x}$, cual en el cálculo de la DERIVADA de la función seno. En el siguiente diagrama, notamos que el sector está intercalado entre dos triángulos rectángulos. Aquí el ángulo x es dado en MEDIDA RADIANES. Tenemos:

$$\text{área del pequeño triángulo rectángulo} = \frac{1}{2}\cos x \cdot \operatorname{sen} x$$

$$\text{área del sector} = 2 \cdot \pi 1 \frac{X}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(Esta es la fracción radio $\frac{X}{2\pi}$ del área de un círculo completo de 1), y

$$\text{área del gran triángulo rectángulo} \cdot 1 \frac{1}{2}\tan x.$$

De la imagen, vemos que $\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x \le \frac{X}{2} \le \frac{1}{2} \cdot \tan x$, que se puede reescribir: $\text{porquex} \le \frac{x}{\text{pecado } x} \le \frac{1}{\text{porquex}}$.

Dado que limx→0cosx = 1 y limx→0 $\frac{1}{\cos x}$ = 1, se sigue por la regla de compresión que limx→0 $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ existe y es igual a 1. Esto demuestra:

Si x se mide en radianes, entonces limx→0 $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ = 1.

(Si x se mide en grados, entonces el área del sector es · π. dada por $\frac{x}{360}$ Siguiendo el argumento anterior muestra que, para x medido en grados, limx→0 $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{180}$)

Por otro lado, el límite limx→0 $\frac{\cos x - 1}{x}$ sigue:

$$\text{límite}_{\to 0x} \frac{\text{porquex} - 1}{x} = \text{límite}_{X \to 0} \frac{(\text{porquex}) - 1 \quad \text{porque } x) + 1}{xx(\text{porque}) + 1}$$

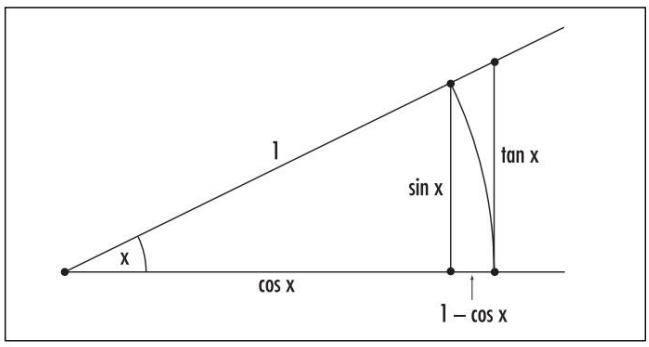
$$= \text{límite}_{X \to 0} \frac{\text{porque}^2 - 1}{xx(\text{porque}) + 1}$$

$$= \text{límite}_{X \to 0} \frac{-\text{pecado}^2 x}{xx(\text{porque}) + 1}$$

$$= -\text{límite}_{X \to 0} \frac{\text{pecado } x}{x} \quad \frac{\text{pecado } x}{\text{porque } x + 1}$$

$$= -1 \frac{0}{1+1}$$

$$= 0$$



Comparando áreas

Machine Translated by Google

Este resultado clave, necesario para calcular la derivada de la función coseno, también se puede establecer geométricamente haciendo uso de la regla de compresión y el diagrama anterior. (Para x medido en grados también tenemos cos x – 1

$\lim_{x\to 0} = \frac{0.)}{x}$

Finalmente, notamos que $\lim_{x\to 0} \frac{\text{bronceado } x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{pecado } x}{x} \cdot \frac{1}{\text{porque } x}$ $1- = 1$ (Para x medido en grados tenemos $= 1 \cdot 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{bronceado } x}{x} = \frac{\pi}{180}$.)

Véase también APOTEMA; MI; LÍMITE.

desviación estándar Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

estadística La estadística es la rama de las matemáticas que se ocupa de los métodos de recopilación, tabulación y resumir hechos numéricos (esto se llama descriptivo estadísticas), y para hacer inferencias y predicciones en base a estos hechos (estadística inferencial). La información numérica reunida se llama DATOS, y un hecho numérico individual sobre los datos se llama estadística.

Por ejemplo, un estudio médico podría registrar la alturas de 100 niños, todos de 8 años. La altura promedio de los niños serían un ejemplo de una estadística. Otra estadística sería la altura más alta registrada o el rango de alturas observado. hacer un juicio en base a los datos que otro niño fuera del estudio es de altura anormal sería un ejemplo de uso de datos con fines inferenciales.

La palabra estadística fue acuñada por el alemán politólogo Gottfried Achenwall (1719-1772) a significa “un resumen de cómo están las cosas”. Está basado en el verbo latino mirar fijamente que significa “estar de pie”.

La estadística es una herramienta indispensable utilizada en la práctica cada aspecto de la vida hoy. Las predicciones meteorológicas se basan en métodos de inferencia estadística, por ejemplo, como son la eficacia evaluada de nuevos medicamentos, nuevos procedimientos y otras prácticas de salud. Se utiliza la estadística extensamente en el gobierno, los negocios y el comercio para analizar encuestas de opinión, estrategias de campaña y publicidad, operaciones comerciales, control de la contaminación y otros preocupaciones ambientales, por ejemplo, y también en investigación científica y estudios económicos, políticos y sociológicos. Las compañías de seguros analizan las TABLAS DE VIDA para hacer inferencias y establecer tarifas de seguros. en el turno de cada década, cada hogar en los Estados Unidos es obligados a completar un breve cuestionario del censo. Las decisiones gubernamentales sobre la distribución de la representación y de los fondos se basan en los resultados del censo. En Además, un pequeño porcentaje de hogares debe completar un cuestionario más largo, a partir del cual se hacen más inferencias estadísticas sobre toda la población. En ocio, muchos aficionados al deporte siguen los análisis estadísticos para evaluar el rendimiento del equipo y de los jugadores.

Debido a que las estadísticas impregnan tantas áreas de la vida, estudio del tema es ahora una parte estándar de muchos planes de estudios de secundaria.

Ver también HISTORIAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (ensayo); POBLACIÓN Y MUESTRA; ESTADÍSTICAS: DESCRIPCIÓN TIVO; ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

estadística: descriptiva La ciencia de recopilar, tabular y resumir información numérica obtenido a partir de estudios observacionales o experimentales es llamadas estadísticas descriptivas. Por ejemplo, un médico estudio podría registrar los tipos de sangre de 100 ejército miembros y presentar la información obtenida en forma de listas o tablas, o tal vez visualmente a través de tablas, gráficos o diagramas de frecuencia como se describe a continuación. Características generales de los DATOS, como el grupo sanguíneo más común observado, o la forma de la distribución de frecuencias observado, se puede utilizar para describir y resumir el información. Proporcionar descripciones generales de los datos. permite sacar conclusiones sobre una población en particular como un todo. Como un ejemplo simple, se podría extrapolar y deducir que cierto porcentaje de la la población mundial entera tiene un tipo de sangre particular.

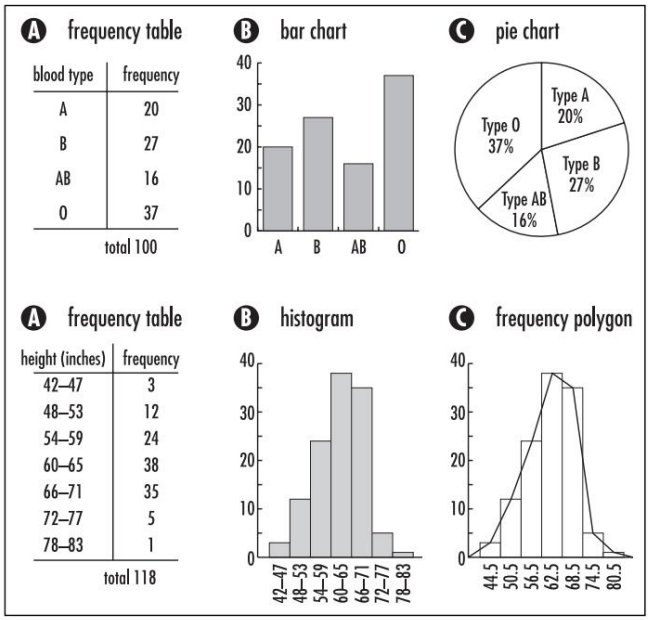
En el ejemplo anterior, las medidas tomadas son descriptivo y caen en categorías precisas: tipo A, tipo B, tipo AB y tipo O. Se dice que tal estudio es categórico. Sin embargo, un estudio numérico recopila información sobre los participantes (como altura, edad o peso), y colocar los datos en categorías es una cuestión de elección. Por ejemplo, uno podría desear organizar el edades de los pacientes internados en un hospital metropolitano ocupado en categorías de década (de 0 a 10 años, de 11 a 20 años y de etc.) o alguna otra división conveniente. Las medidas de altura, por ejemplo, pueden adoptar una forma continua. matriz de valores, incluidos valores fraccionarios. un estudio sobre las tasas de crecimiento humano podrían tener sus datos organizados en categorías de rangos de altura, por ejemplo, 60,1–65,0 pulg., 65,1–70,0 pulgadas, y así sucesivamente.

Machine Translated by Google

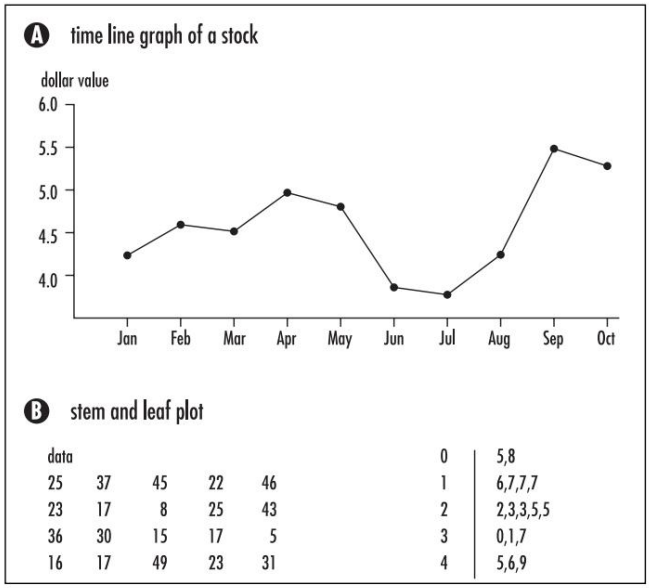
Una vez que se han establecido las categorías, existe una serie de métodos estándar para presentar y resumir los datos.

Formas de presentar los datos
Una distribución de frecuencia es una tabla o gráfico visual que muestra la frecuencia (número) de individuos en cada categoría posible considerada. Por ejemplo, de los 100 miembros del ejército evaluados anteriormente, suponga que 20 tienen tipo de sangre A, 27 tipo de sangre B, 16 tipo de sangre AB y 37 tipo de sangre O. Esta información se puede resumir en una tabla.

Esta distribución de frecuencias también se puede presentar visualmente. Un gráfico circular (también llamado gráfico circular) es un círculo dividido en secciones, una para cada categoría y cada una con un área proporcional a la frecuencia de esa categoría. Un gráfico de barras es un gráfico con barras verticales que representan la frecuencia de aparición de cada categoría. Si los datos son categóricos, las barras se dibujan separadas para enfatizar la naturaleza separada de las categorías descriptivas. Si los datos presentados son numéricos, las barras se dibujan sin espacios para indicar que los datos provienen de un rango de valores numéricos y también para indicar cómo se agruparon los datos. En este caso, el gráfico de barras se llama histograma.



Representando datos



Trazado de datos

Un polígono de frecuencia es similar a un histograma excepto que se dibuja una línea discontinua para conectar el punto medio de cada clase considerada a la altura de la barra vertical para esa clase. Por convención, la línea se dibuja tocando el eje horizontal en ambos lados de la distribución.

Un gráfico de serie temporal representa la naturaleza de una medida tomada durante un período de tiempo. Los valores de las acciones, por ejemplo, a menudo se representan a través de gráficos de línea de tiempo. Sin embargo, tal diagrama no representa una distribución de frecuencia.

Las tablas de valores de números enteros a veces se resumen mediante diagramas de tallo y hojas. Cada número se divide en dos partes: el dígito de las unidades (la "hoja") y el conjunto de dígitos a su izquierda (el "tallo"). En una columna se enumeran todos los tallos y las hojas correspondientes se organizan en una segunda columna a la derecha.

Maneras de resumir datos Hay
tres características generales que los estadísticos observan para resumir datos numéricos.

1. La forma general de un histograma: La siguiente tabla muestra algunas formas comunes de distribución de frecuencia. Las distribuciones rara vez se ajustan a formas exactas, pero los estadísticos aún encuentran útil describir la naturaleza general de la distribución.

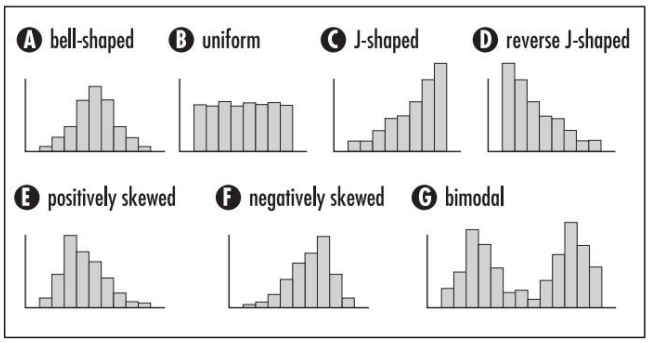
Machine Translated by Google

Una distribución en forma de campana tiene un solo pico y es aproximadamente simétrica en ambos lados del pico. Una distribución uniforme exhibe un número igual de medidas en cada categoría, y las distribuciones en forma de J y en forma de J inversa exhiben tendencias crecientes y decrecientes. Si una distribución tiene un solo pico, pero no es simétrica, entonces se denomina sesgada positiva o negativamente. Si una distribución tiene dos picos distintos, entonces se llama bimodal. (Por ejemplo, la incidencia de extremidades rotas en relación con la edad es bimodal, ya que los accidentes tienden a ocurrir con mayor frecuencia entre los niños y los ancianos que entre el resto de la población).

2. Medidas de Tendencia Central: Una medida de "tendencia central" es una sola medida que, en cierto sentido, es típica de todo el conjunto de datos. Representa el "centro" aproximado de la distribución de frecuencias. Hay cuatro medidas comúnmente en uso.

a. La media o promedio, generalmente denotada por la letra griega μ, se encuentra sumando todos los valores de los datos y dividiendo por el número total de mediciones. Es equivalente a la MEDIA ARITMÉTICA de los valores de los datos.

Por ejemplo, la media de los cuatro valores de datos 4, 5, 8, 8 es: $\mu = \frac{4588 +++}{4} = 6\ 25\ .\ .$ si en otro estudia el valor 6 ocurre 37 veces y el valor 9 $37\ 6\ 20\ 9 \times + \times$ veces, la media es: ≈ 7.05. En $\mu = \frac{\text{ocurre } 20}{57}$ general, si un valor de dato x1 aparece f1 veces, el valor de dato x2 un total de f2 veces, y así sucesivamente hasta que el valor de dato xn aparece un total de fn veces, entonces la media está dada por:



Clasificación de distribuciones

$$\mu = \frac{fxfx\ fx\ ff\ f \times 1\ 12\ 2}{+++\ 1\ 2}$$

La suma de las diferencias de cada valor de datos de la media es siempre cero. Por ejemplo, para el primer conjunto de datos presentado anteriormente, tenemos (4 – 6,25) + (5 – 6,25) + (8 – 6,25) + (8 – 6,25) = 0.

La media es la medida más utilizada de tendencia central. (Véase también VALOR ESPERADO.)

b. La moda es el valor en el conjunto de datos que ocurre más amenudo. Por ejemplo, de los 10 valores de datos 3, 6, 5, 3, 1, 6, 5, 3, 8, 3 la moda es 3, y para 4, 5, 8, 8 la moda es 8. Una distribución podría tener más de una moda si hay dos o más puntuaciones ocurrir un número igual de veces.

La moda se utiliza cuando se desea el caso más típico de un estudio. Para datos no numéricos, la moda es la única medida de tendencia central disponible.

C. La mediana es el valor medio de una secuencia de valores de datos, una vez que se ordenan de menor a mayor. Por ejemplo, la mediana del conjunto de datos 3, 3, 5, 6, 7, 16, 16, 19, 37 es 7. Si el conjunto de datos contiene un número par de entradas, entonces se toma el promedio de los dos valores centrales. como la mediana. Por ejemplo, la mediana de 4, 5, 8, 8 es $\frac{5 + 8}{2}$ = 6,5. La

mediana es útil para encontrar el valor en el centro de la distribución. Divide los datos en dos grupos de igual tamaño.

d. El rango medio de un conjunto de datos se encuentra tomando los valores promedio de los valores de datos más pequeños y más grandes que ocurren. Por ejemplo, el rango medio de 4 + 8 , el conjunto de datos 4, 5, 8, 8 es = 6.

2 El rango medio proporciona una estimación rápida de un valor central. Es fácil de calcular, pero se ve muy afectado por valores extremadamente bajos o altos en el conjunto de datos.

3. Medidas de dispersión: para interpretar qué tan bien es probable que una medida de tendencia central represente un grupo completo de valores de datos, los estadísticos también deben calcular una medida de dispersión. Los valores de datos agrupados alrededor de un valor central pueden estar bien

Machine Translated by Google

resumidos por su media o mediana, pero un conjunto de valores de datos dispersos en un amplio rango de valores no está bien representado por una sola medida de tendencia central. Por ejemplo, los dos conjuntos de datos 4.1, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 0.1, 0.3, 1.3, 7.8, 11.6 tienen una media de 4.22. Esto proporciona un buen valor representativo para el primer conjunto de datos, pero no para el segundo.

Las medidas estadísticas habituales de dispersión se dan de la siguiente manera:

a. El rango de un conjunto de datos es la diferencia entre los valores más bajo y más alto del conjunto. Por ejemplo, el rango del conjunto de datos 4, 5, 8, 8 es 8 – 4 = 4.

El rango es una medida de dispersión muy simple y no revela ninguna información sobre cómo se distribuyen los valores de los datos. También se ve muy afectado por valores extremadamente bajos o altos en el conjunto de datos. Sin embargo, el rango suele ser una medida útil en cuestiones prácticas diarias. Por ejemplo, las previsiones meteorológicas suelen dar el rango de temperaturas que se esperan para el día.

b. La desviación de un solo valor de datos es la diferencia entre ese valor y la media del conjunto de datos, escrita como una cantidad positiva. Por ejemplo, en el conjunto de datos 4, 5, 8, 8 con una media de 6,25, la desviación del valor de datos 5 es |5 – 6,25| = 1,25, y el valor de datos 8 tiene una desviación |8 – 6,25| = 1,75.

La desviación promedio de todos los valores de los datos brinda una buena medida de la dispersión general. Por ejemplo, el conjunto de datos 4, 5, 8, 8 tiene una desviación promedio:

$$\frac{|4-6.25|+|5-6.25|+|8-6.25|+|8-6.25|}{4}$$

$$=\frac{2.25+1.25+1.75+1.75}{4}=1.75$$

Cabe señalar un punto sutil. Dados n valores de datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, primero se calcula la media μ y luego las n desviaciones: $|x_1-\mu|, |x_2-\mu|, \ldots, |x_n-\mu|$. Una vez que se calculan las primeras n–1 de estas cantidades (y pueden resultar de cualquier valor), el valor de la n-ésima cantidad, sin embargo, es forzado: el conjunto de datos debe ajustarse a una media μ. Por lo tanto, solo hay que realizar n – 1 cálculos "independientes". Por esta razón, los matemáticos optan por dividir la suma de las desviaciones entre n – 1 en lugar de n. Por lo tanto, se calcula una medida de dispersión para el conjunto de datos 4, 5, 8, 8, por ejemplo

$$\frac{|4-6.25|+|5-6.25|+|8-6.25|+|8-6.25|}{3}$$

≈ 2.33. Si el número de valores de datos es grande, dividir por n – 1 en lugar de n tendrá poco efecto.

C. Cuando se mide la dispersión, los valores absolutos son matemáticamente difíciles de trabajar (especialmente con respecto a las manipulaciones teóricas requeridas en CÁLCULO). Por esta razón, los matemáticos prefieren trabajar con las desviaciones al cuadrado (nuevamente dando cantidades positivas) y luego aplicar la raíz cuadrada si se desea.

La varianza de un conjunto de datos es la suma de todas las desviaciones al cuadrado, dividida por uno menos que el número de valores de datos. Por ejemplo, la varianza de los cuatro valores de datos 4, 5, 8, 8 con media 6,25 es:

$$\frac{(4-6.25)^2+(5-6.25)^2+(8-6.25)^2+(8-6.25)^2}{3}$$

$$=4.25$$

La varianza generalmente se denota con el símbolo σ^2 (léase "sigma al cuadrado"). Para n valores de datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, viene dada por la fórmula:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n-1}$$

Debido a que las desviaciones se elevan al cuadrado, cuanto más lejos esté el valor de un dato de la media, más pronunciado será su efecto sobre el tamaño de la varianza.

d. Denotada por la letra griega σ, la desviación estándar de un conjunto de datos es la raíz cuadrada de su varianza. Por ejemplo, la desviación estándar de los cuatro valores de datos 4, 5, 8, 8 es $\sigma=\sqrt{4.25}\approx 2.06$. en general, para n valores de datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la desviación estándar viene dada por la fórmula:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n-1}}$$

La desviación estándar se usa mucho más comúnmente que la varianza como medida de dispersión. Se expresa en las mismas unidades que los valores de los datos (pulgadas, si las medidas son alturas para

Machine Translated by Google

ejemplo, o gramos si son pesos) en lugar
que las unidades al cuadrado, como se requiere para la varianza.

En una DISTRIBUCIÓN NORMAL, aproximadamente el 68 por ciento de los valores de los datos se encuentran dentro de una desviación estándar de la media (cualquier lado), el 95 por ciento dentro de dos desviaciones estándar, y 99.7 por ciento dentro de tres. Esto se conoce como la regla 68–95–99.7. Muestra que la desviación estándar de hecho da una buena indicación de la amplitud de los valores de los datos en una distribución disperso. Una pequeña desviación estándar, por ejemplo, indica que el 68 por ciento de los valores de los datos están estrechamente agrupados alrededor de la media.

Véase también DISTRIBUCIÓN; PERCENTIL; DIÁMETRO DE DISPERSIÓN GRAMO; ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

estadística: inferencial La ciencia del dibujo general Las conclusiones sobre una población basadas únicamente en información numérica recopilada de una muestra de esa población se denominan estadísticas inferenciales. (Véase POBLACIÓN Y MUESTRA.) Por ejemplo, un estudio médico podría observe que 16 de 100 miembros del ejército tienen tipo de sangre AB. Uno podría entonces inferir que aproximadamente un sexto de toda la población mundial es de este tipo de sangre.

Una afirmación o conjetura acerca de una característica numérica de una población se llama hipótesis. Por ejemplo, la afirmación “una sexta parte de la población mundial es del tipo de sangre AB” es una hipótesis que parece ser apoyado por el estudio médico descrito anteriormente. Es claro, sin embargo, si otro estudio de 600 estudiantes universitarios las personas mayores, 79 de las cuales eran del tipo de sangre AB, también respaldan la afirmación.

Una prueba estadística es un procedimiento matemático que permite determinar, hasta cierto grado especificado de confianza, sean o no los resultados de un determinado estudiar apoyar una hipótesis. La afirmación que se está probando aceptación o rechazo se denomina hipótesis nula. El Hipótesis alternativa es la afirmación que se aceptará si la hipótesis nula se considera falsa.

Los principios de las pruebas estadísticas están bien resumidos en el siguiente ejemplo:

Supongamos que a uno se le da una moneda. Deseamos determinar si la moneda es justa o no, es decir, si sacar cara es tan probable como sacar cruz. Tomamos como hipótesis nula la declaración, "La moneda es justa", y alternativa hipótesis, "La moneda está sesgada". para probar el hipótesis digamos que lanzamos la moneda 10 veces. Supongamos que obtuvimos 10 caras seguidas. Qué debemos concluir?

Como las posibilidades de sacar 10 caras seguidas con un monedas justas son muy pequeñas: la probabilidad de que esto ocurra es $\frac{1}{2}^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0.1\%$ —quizás concluiríamos que la moneda está sesgada. Pero hay una pequeña posibilidad de que una feria no obstante, la moneda podría haber producido este resultado. Reflejar este grado de incertidumbre, podemos decir que llegamos a la conclusión de que la moneda está sesgada con un "99.9 por ciento nivel de confianza.” La prueba estadística realizada aquí era un cálculo de probabilidad. Llegamos a aceptar la nulidad hipótesis con un nivel de confianza del 99,9 por ciento.

El rechazo de una hipótesis nula cuando en realidad era cierto se conoce como un error de tipo I (tal vez la moneda era justo). Si se acepta la hipótesis nula a pesar de siendo falso, se comete un error de tipo II. Un nivel de confianza (o nivel de significación) de una prueba estadística es el probabilidad de cometer un error tipo I. un 95 por ciento el nivel de confianza generalmente se considera aceptable. (Como una nota al margen, las posibilidades de lanzar nueve caras entre una series de 10 lanzamientos son $10 \times \frac{1}{2}^{10} = \frac{10}{1024} \approx 1\%$. Si en nuestro experimento, esto es lo que observamos, entonces concluiría nuevamente que la moneda está sesgada, con un 99 porcentaje de nivel de confianza. Observando ocho cabezas entre una serie de 10 lanzamientos conduce a la misma conclusión con un nivel de confianza del 95,6 por ciento).

El TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL proporciona los medios para realizar pruebas estadísticas útiles para analizar encuestas y sondeos públicos. Presentamos aquí dos ejemplos ilustrando dos aplicaciones comunes.

1. Estimación de la proporción de población:

En una encuesta reciente de Gallup, se encuestó a 1500 personas, y el 45 por ciento de ellas estuvo de acuerdo en que los impuestos en la gasolina debe aumentarse. hasta que punto ¿Esta cifra representa la verdadera proporción de todas las personas en este país que tienen este punto de vista?

Sea p el porcentaje verdadero (pero desconocido) de estadounidenses que creen que los impuestos a la gasolina deben ser aumentó. Nuestra tarea es encontrar el valor de p. Todo lo que tenemos que trabajar es la observación de que una muestra de 1.500 personas produjeron una proporción $\hat{p}$ de 45 por ciento manteniendo esta vista.

Machine Translated by Google

El teorema del límite central establece que, para muchas muestras diferentes de 1500 personas, el estadístico pˆ variará en valor según una distribución normal con media p y desviación estándar $\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$ donde, en este caso, N = 1.500. Como el valor de N es grande, la desviación estándar es pequeña, lo que significa que todos los valores de pˆ estarán estrechamente agrupados alrededor del valor medio p. En en particular, esto establece, como cabría esperar, que pˆ = 45 por ciento es una buena estimación para p. La clave es ahora preguntar, ¿qué tan bueno?

Del estudio de la DISTRIBUCIÓN NORMAL, la La regla 68–95–99.7 establece que el 95 por ciento de las mediciones de pˆ se encuentran dentro de una distancia de dos desviaciones de la media p. Es decir, hay un 95 por ciento de probabilidad de que nuestra medida de pˆ = 45 por ciento se encuentra dentro del rango de valores $p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{1500}}$ a $p + 2\sqrt{\frac{(1-p)}{\text{pág. } 1500}}$ (Este rango de valores también contiene p, por supuesto, en su centro.)

Como una aproximación, sustituimos en estas fórmulas el valor pˆ = 45 por ciento para p:

$$p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{1500}} \approx \hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1500}}$$

$$= 45 - 2\sqrt{\frac{45 \cdot 55}{1500}} \approx 42.4$$

$$p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{1500}} \approx \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1500}}$$

$$+ 45 2 = \sqrt{\frac{45 \cdot 55}{1500}} \approx 47 6$$

Esto produce un rango de valores [42.4, 47.6] que, en este aproximación, y con aproximadamente un 95 por ciento nivel de confianza, contiene el verdadero valor de la proporción p. Llamamos a este rango de valores un intervalo de confianza del 95%. Si Estos cálculos se realizaron en un gran número de resultados de la encuesta (todas con 1.500 personas), entonces estaría seguro de que cerca del 95 por ciento de los intervalos producidos contienen la verdadera proporción de población p.

2. Estimación de una media poblacional:

En un estudio de medios, 680 adultos jóvenes, de 21 a 25 años, se les dio una prueba sobre la actualidad. Los puntajes en la prueba variaron de 0 a 500, lo que indica un rango de conocimiento sobre el tema. El puntuación media fue m = 170 (y el estándar desviación fue de 80). Sobre la base de esta muestra, ¿Qué se puede decir sobre el conocimiento medio? nivel (puntuación) μ de la población de los 19 millones de adultos jóvenes?

El teorema del límite central establece que, para muchas muestras diferentes de 680 adultos jóvenes que toman la prueba, la la puntuación media m variará en valor de acuerdo con una distribución normal con media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Aquí σ es la desviación estándar de toda la población (desconocida) y N es el tamaño de la muestra (N = 680).
Dado que el valor de N es grande, la desviación estándar será $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ pequeña. Esto significa dos cosas: que es probable que la media m = 170 esté cerca del verdadero valor medio μ, y que usando la desviación estándar de 80 observada en la muestra como una aproximación al valor verdadero σ no alterará seriamente nuestros cálculos. Dicho esto, la regla 68-95-99.7 establece que hay un 95 por ciento posibilidad de que nuestro valor observado m = 170 caiga dentro dos desviaciones estándar del verdadero valor medio μ. Como una aproximación, entonces, evaluamos:

$$\mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \approx 170 - 2\frac{80}{\sqrt{680}} \quad 163 9$$

$$\mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \approx 170 + 2\frac{80}{\sqrt{680}} \quad 176 1$$

dando un intervalo de confianza del 95 por ciento de [163.9, 176.1] por lo que sería la puntuación media si la totalidad la población debía hacerse la prueba.

En 1908, WILLIAM SEALY GOSSET (1876-1937), publicando bajo el seudónimo de “Student”, hizo una análisis preciso de la distribución de los valores medios de distribuciones normales. Si σˆ es la desviación estándar de un muestra de tamaño N, Gosset calculó la distribución de valores para la media muestral m que uno esperaría usando σˆ como una aproximación de la verdadera desviación estándar σ de la población. En particular, describió la distribución del Z-SCORE de la media m:

$$\frac{\text{metro} - \mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}}$$

Machine Translated by Google

Esto se conoce hoy como distribución t de Student (con N – 1 grados de libertad). La prueba t de Student se usa para comprobar si cualquier diferencia en las medias de dos muestras diferentes es estadísticamente significativa. Por ejemplo, un estudio podría indicar que la altura media de 100 jugadores de baloncesto seleccionados al azar es 8 pulgadas más alta que la altura media de 100 jugadores de béisbol. La prueba t de Student probaría la hipótesis: "Ambas muestras se extrajeron de la misma población normal". Si el valor de 8 pulgadas se considera demasiado alto, se rechazaría la hipótesis y la diferencia de medias se consideraría significativa.

La prueba F prueba si dos muestras provienen o no de la misma población centrándose en cambio en la VARIANZA de cada muestra. Si dos muestras de tamaños N1 y N2 provienen de la misma población normal, entonces la razón de sus varianzas $\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$ debe ser aproximadamente igual a 1. La distribución F tabula los valores de estas relaciones, y la prueba F determina si la relación observada para dos muestras particulares tiene un valor aceptable.

Ver también PRUEBA DE CHI-CUADRADO; COEFICIENTE DE CORRELACIÓN CIENT.

Steiner, Jakob (1796–1863) Geometría suiza Nacido el 18 de marzo de 1796 en Utzenstorf, Suiza, el matemático Jakob Steiner es recordado por sus contribuciones fundamentales al estudio de la GEOMETRÍA PROYECTIVA y por su trabajo en la solución de la famosa ISOPERIMET RIC PROBLEMA. Una colección de puntos geométricos se llama hoy en su honor, PUNTOS STEINER, para reconocer su trabajo en OPTIMIZACIÓN geométrica.

Steiner no tuvo educación formal temprana. Se dice que no empezó a leer y escribir hasta los 14 años, y no asistió a ningún tipo de escuela hasta los 18 años.
Sin embargo, durante la última parte de su adolescencia, Steiner demostró talento para las matemáticas, lo que le valió la admisión a la escuela Johann Heinrich Pestalozzi en Yverdon, Suiza. Solo 2 años después de ingresar a la escuela como estudiante, fue contratado como profesor de matemáticas en la escuela.

Steiner ingresó a la Universidad de Heidelberg en 1818 y se transfirió a la Universidad de Berlín 3 años después para seguir una carrera de investigación en matemáticas. Su innovador trabajo en geometría fue debidamente señalado por los matemáticos de la época. Steiner recibió un doctorado honorario de la Universidad de Königsberg y el puesto de catedrático de matemáticas en la Universidad de Berlín en 1834. Ocupó ese puesto por el resto de su vida. Murió en Berlín el 1 de abril de 1863.

En su honor se nombran varias configuraciones finitas en geometría proyectiva, así como una superficie geométrica, la superficie de Steiner, que tiene la propiedad de que cada uno de sus planos tangentes corta la superficie en un par de SECCIONES CÓNICAS . Su influencia en el desarrollo de la optimización geométrica fue profunda.

Punto de Steiner Dados tres puntos A, B y C en el plano, un punto de Steiner para ese sistema es un punto P cuya suma de distancias AP + BP + CP es mínima. Que tal punto siempre existe fue establecido por primera vez por el matemático suizo JAKOB STEINER (1796–1863). Demostró que este punto ocurre en el lugar donde el ángulo entre cada uno de los segmentos de línea AP, BP y CP es de 120°. Para ver esto, primero suponga que el punto P se coloca a una distancia fija de C de modo que se encuentra en un círculo con C como su centro. Luego, un estudio de OPTIMIZACIÓN muestra que la ubicación en el círculo que minimiza la suma AP + BP + CP ocurre en el punto P donde las líneas AP y BP forman ángulos iguales a la línea tangente al círculo en P. Por lo tanto, la solución a esto La versión restringida del problema ocurre cuando los ángulos entre los segmentos de línea AP, BP y CP son iguales. Lo mismo ocurre para una solución con P a una distancia fija de A o P a una distancia fija de B. Como la solución del problema general resuelve simultáneamente cada versión restringida del problema, los tres ángulos deben ser iguales.

Dado que los tres ángulos suman 360°, cada uno debe ser igual a 120°.

El punto de Steiner resuelve el siguiente problema de construcción de carreteras:

> ¿Qué diseño de un sistema de caminos conecta tres pueblos utilizando la longitud total mínima de camino?

La solución es un diseño que conecte cada pueblo con un segmento recto de carretera directamente al punto Steiner de los tres pueblos.

Steiner también analizó los problemas de construcción de carreteras que involucran a más de tres pueblos. Demostró que dados N pueblos, N ≥ 3, es necesario introducir N – 1 puntos especiales entre los pueblos y trazar segmentos de línea recta entre estos puntos y los pueblos de tal manera que:

Machine Translated by Google

1. Cada ciudad está conectada a un punto Steiner 2.
Cada punto Steiner tiene tres caminos que parten de
equidistante 120° aparte.

Ver también PROBLEMA ISOPERIMETRICO.

diagrama de tallo y hojas (diagrama de tallo) Ver ESTADÍSTICAS: DESCRIPTIVO.

proyección estereográfica Considere un PLANO tangente a una ESFERA que toca la esfera en su polo sur S.
Entonces uno puede mapear puntos en la superficie de la esfera a puntos en el plano dibujando líneas rectas desde el polo norte N de la esfera a través de puntos en la superficie, y continuarlas hasta que intercepten el plano. Cada punto, excepto el propio polo norte, se asigna a un punto en el plano. Esta transformación geométrica de una esfera en un plano se denomina proyección estereográfica.

Cada punto en el plano corresponde a un punto único en la esfera, con puntos cada vez más alejados de S en el plano que coinciden con puntos cada vez más cercanos a N en la esfera. En este sentido, la esfera puede considerarse topológicamente equivalente a un plano con un único punto de infinito adicional bien definido unido a él. Si se considera que el plano es una representación del plano de NÚMEROS COMPLEJOS, entonces la esfera en esta construcción suele llamarse esfera de Riemann en honor al trabajo del matemático alemán GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) en este campo.

Una proyección estereográfica es un PING DE MAPA CONFORMAL. Esto significa que conserva los ángulos entre las curvas que se cruzan en la superficie de la esfera. Los círculos máximos en la esfera, que no pasan por N, se asignan a círculos en el plano, y los círculos máximos a través de N se asignan a líneas rectas. Por esta razón, los geómetras a menudo consideran apropiado considerar las líneas rectas como tipos especiales de círculos.

Una proyección gnomónica mapea puntos en el hemisferio sur de una esfera en un plano tangente a S dibujando líneas rectas desde el centro de la esfera a través de puntos en la superficie, y continuándolas hasta que interceptan el plano. En este modelo, cada punto en el ecuador de la esfera representa un "punto de infinito" diferente unido al plano.

Véase también PROYECCIÓN DE MERCATOR ; PROYECCIÓN.

Stevin, Simon (1548–1620) Aritmética flamenca, ingeniería
Nacido en Flandes, ahora Bélgica, en 1548 (se desconoce su fecha exacta de nacimiento), Simon Stevin es mejor recordado por The Tenth, su influyente texto de 1585 que defiende y explica la uso de decimales en todas las matemáticas y contabilidad. Aunque no inventó el sistema decimal (había sido utilizado por los árabes dos siglos antes), su artículo expositivo sobre el tema convenció a los estudiosos de la época de su mérito como método para manipular fracciones y números reales.

Stevin comenzó su carrera como contador y empleado de una oficina de impuestos antes de ingresar a la Universidad de Leiden a la edad de 35 años. Su trabajo en mecánica e ingeniería le valió una nota como experto en hidrostática y sus matemáticas relacionadas. Stevin escribió 11 textos en total a lo largo de su carrera académica, cubriendo temas de aritmética, álgebra, trigonometría, geografía y navegación. En su texto Principios del arte de pesar, Stevin analizó la suma geométrica de fuerzas, desarrollando un enfoque que simplificó las matemáticas de la mecánica. Este enfoque también formó la base de la teoría del análisis VECTORIAL desarrollada 200 años después: Stevin había definido esencialmente correctamente la suma de vectores.

Stevin también reconoció que la distancia que cae un objeto en una cantidad fija de tiempo es independiente del peso del objeto. Este descubrimiento normalmente se atribuye al erudito GALILEO GALILEI (1564–1642), pero Stevin había llegado a la misma conclusión 3 años antes de que Galileo informara sobre sus hallazgos.

En el siglo XV, los matemáticos de Persia, China e India usaban el sistema decimal para representar fracciones. Stevin reconoció las ventajas del sistema y argumentó, en su artículo The Tenth, que sumar fracciones decimales es tan fácil como sumar números enteros. (Sumar 0,73 y 0,25, por ejemplo, no es más difícil que sumar 73 a 25).

Sin embargo, no usó un punto decimal en su trabajo, eligiendo escribir 34.875, por ejemplo, como 340817253, encerrando en un círculo los dígitos 0, 1, 2 y 3 para indicar que los dígitos a la izquierda se multiplican por esas potencias de uno. -10mo.
(El matemático escocés JOHN NAPIER (1550–1617) es el responsable de popularizar el uso del punto decimal).

Escribir todos los números como fracciones decimales tuvo el profundo efecto psicológico de colocar todos los números en pie de igualdad, por así decirlo. El número π, por ejemplo, escrito como 3,141 (al menos como una aproximación)

Machine Translated by Google

parece no más importante o especial que cualquier otro número real, 6.234 o 84.668, por ejemplo. Un erudito en ese momento llamó a todos los números, en consecuencia, "igualmente aburridos".

Stevin también es recordado por introducir y popularizar los símbolos "+", "-" y "√ resta, y la operación de raíz cuadrada. " para la adición, Murió en La Haya, Países Bajos, ca. marzo de 1620.

La fórmula de Stirling La fórmula sorprendente:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

muestra que para valores grandes de n, la función $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ es una muy buena aproximación para el FACTORIAL n!. Esta ecuación límite se llama fórmula de Stirling. Aunque lleva el nombre del matemático escocés James Stirling (1692–1770), la fórmula fue descubierta por el matemático francés ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) mientras intentaba escribir una fórmula para la curva de DISTRIBUCIÓN NORMAL . Stirling escribió un influyente artículo sobre series infinitas que ayudó a De Moivre a descubrir este resultado.

La fórmula se puede derivar de WALLIS'S PROD

UCT. Presentamos aquí un argumento simple que da una idea de cómo el resultado podría ser cierto. Notando que ln n! se puede escribir como una suma de logaritmos, tenemos:

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \approx \sum_{k=1}^{n} \ln k \approx \int_{1}^{n} \ln x\, dx$$

Evaluando la integral, usando INTEGRACIÓN POR PARTES, se obtiene:

$$\int_{1}^{n} \ln x\, dx = x \ln x - x \Big|_{1}^{n} = n \ln n - n + 1 \approx n \ln n - n$$

Por lo tanto, en n! ≈ ln(n n) – n, dando $n! \approx n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$. un mas

argumento refinado produce el resultado de Stirling.

Prueba t de Student Ver ESTADÍSTICA: INFERENCIAL.

subfactorial En su estudio de 1878 de PERMUTACIONES, matemático W. Allen Whitworth introdujo el

noción de subfactorial. Ahora denotado $n_¡$, el n-ésimo subfactorial de un entero n está dado por

$$n_¡ = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

con $0_¡$ igual a 1. (Ver FACTORIAL). El valor $n_¡$ se obtiene multiplicando el número subfactorial anterior por n y sumando (–1)n. De este modo:

$$1_¡ = 1 \times 0_¡ - 1 = 1 \times 1 - 1 = 0\ 2_¡ = 2 \times 1_¡ + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1\ 3_¡ = 3 \times 2_¡ - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2\ 4_¡ = 4 \times 3_¡ + 1 = 4 \times 2 + 1 = 9$$

Por ejemplo. Un estudio del número e muestra que el la relación $\frac{n_¡}{n!}$ se aproxima al valor $\frac{1}{e}$ cuando n se vuelve grande.

Los subfactoriales surgen en el estudio de ciertas permutas. ciones llamadas trastornos.

Véase también E.

sustitución El acto de reemplazar todas las apariciones de una variable por otra variable, expresión o valor numérico se denomina sustitución. Por ejemplo, para evaluar $x^2 - 2x + 3$ para x = 5, simplemente reemplace todo ocurrencias de x con el valor 5. Esto produce el valor correspondiente de expresión $5^2 - 2 \cdot 5 + 3$ 18 para la expresión. (Decimos que hemos "sustituido x por el valor 5"). También se puede sustituir x por otras cantidades. Por ejemplo, reemplazar cada ocurrencia de x con la cantidad y – 1 produce la expresión $(y - 1)^2 + 2(y - 1) + 3$, que se simplifica a $y^2 + 2$. (Esta sustitución en particular demuestra ser fructífera, $x^2 - 2x + 3$ $= (x - 1)^2 + 2$ y pues queda claro ahora que la expresión x^2 nunca adoptará un valor menor que 2, y que la expresión es igual a este valor mínimo sólo cuando y = 0, es decir, cuando x = 1.) Se utilizan técnicas de sustitución para resolver SIMULTÁNEAS ECUACIONES LINEALES.

El método de sustitución se puede aplicar simultáneamente a más de una variable en una ecuación. Por ejemplo, el ÁREA A de un triángulo con lados de longitud a, b y c, con un ángulo θ entre los lados de longitud a y b,

viene dada por $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$. La LEY DE LOS COSENOS afirma $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. Resolviendo para sen θ y cos θ en cada expresión y sustituyendo los resultados en la ecuación $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se obtiene la FÓRMULA DE HERON .

La raíz cuadrada de 2 satisface la ecuación:

Machine Translated by Google

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

Sustituyendo esta fórmula en sí misma varias veces se obtiene la siguiente expansión de FRACCIÓN CONTINUA para $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Ver también INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN; TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

regla de sustitución para integración Ver INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN.

resta El proceso de encontrar la DIFERENCIA de dos números se llama resta. En la ARITMÉTICA elemental de los NÚMEROS ENTEROS, la resta se puede considerar como el proceso de eliminar un subconjunto de un conjunto. Por ejemplo, si se quitan tres manzanas de un conjunto de ocho manzanas, quedan cinco manzanas. Escribimos 8 – 3 = 5.

En un contexto más general, la resta se define mejor como la operación inversa de la SUMA: la diferencia a – b se define como una cantidad que, cuando se suma a b, da la respuesta a. Aquí a se llama minuendo, b sustraendo y el resultado a – b la diferencia. (Así, el sustraendo más la diferencia da el minuendo). En algunos contextos, es conveniente considerar la resta simplemente como la suma de NÚMEROS NEGATIVOS. Por ejemplo, la diferencia 8 – 3 puede verse como una suma 8 + (–3).

El proceso de resta no satisface la PROPIEDAD CONMUTATIVA. Por ejemplo, 8 – 3 no da el mismo resultado que 3 – 8. (Esto queda claro si uno reescribe estas diferencias en términos de sumas de cantidades negativas: 8 + (–3) y 3 + (–8) son sumas de dos pares diferentes de números).

El SISTEMA DE VALOR DE LUGAR que usamos hoy para escribir números simplifica el proceso de restar números enteros grandes. Por ejemplo, restar 216 de 589 da 5 – 2 = 3 unidades de 100, 8 – 1 = 7 unidades de 10 y 9 – 6 = 3 unidades de 1. Por lo tanto, 589 – 216 = 373. Este proceso sigue siendo válido incluso si se encuentran cantidades negativas de unidades. Por ejemplo, 463 – 198 puede calcularse como 3 |–3| –5, donde se usan barras verticales para separar potencias de 10. "Tomar prestada" 1 unidad de 100 de la primera columna, lo que equivale a 10 unidades de 10 en la segunda columna, nos permite reescribir esto como 2 |7| –5. Tomando prestada 1 unidad de 10 de la segunda columna, que es equivalente a 10 unidades individuales en la tercera columna, ahora nos permite reescribir esto como 2 |6| 5. Así tenemos: 463 – 198 = 265. A los estudiantes en las escuelas generalmente se les enseña un algoritmo que tiene un dígito prestado al principio del proceso de completar un problema de resta en lugar de dejar este trabajo como el paso final. Cualquier método es válido.

El proceso de resta se puede extender a FRACCIONES (completadas con la ayuda de calcular DENOMINADORES COMUNES), NÚMEROS REALES, NÚMEROS COMPLEJOS, VECTORES y MATRICES.

La diferencia de dos funciones de valores reales f y g es la función f – g, cuyo valor en cualquier entrada x es la diferencia de las salidas de f y g en esa entrada: (f – g) + 2x y g(x) (x) = f(x) – g(x). Por ejemplo, si $f(x) = x = 5x + 7$, $2 2 + 2x 5x – 7 = x$ entonces (f – g)(x) = x $= 3x – 7$.

Las fórmulas de resta en TRIGONOMETRÍA afirman:

$$\text{sen}(\ ) \text{sen} \cos \cos \text{sen} \; xy \; xyxy$$

$$\cos(\ + xy \; x)y \cos \cos \text{sen} \; \text{sen} \; xy$$

$$\text{bronceado}(\ ) xy \quad \frac{\text{bronceado } x \quad \text{bronceado}}{1 + \text{bronceado} \quad \text{bronceado } xy}$$

El matemático FIBONACCI (ca. 1175-1250) introdujo el término menos para la resta en su texto de 1202 Liber abaci (El libro del ábaco), que los eruditos luego abreviaron como m– en su propio trabajo. Se ha sugerido que quizás la letra "m" se eliminó más tarde para dejar la barra "-" como el símbolo elegido para la resta. Este símbolo apareció impreso por primera vez en el libro Behennde und hüpsche Rechnung auf fallen Kauffmannschaften de Johannes Widman de 1489 (Cálculos limpios y prácticos para todos los comerciantes).

Véase también ARITMÉTICA.

condición suficiente Ver CONDICIÓN—NECESARIO Y SUFICIENTE.

suma El proceso de encontrar la suma de una colección de números se llama suma. matemáticos

Machine Translated by Google

a menudo están interesados en problemas que implican la suma de un gran colección de cantidades y una notación compacta para escribir tales sumas es útil. La letra griega Σ (que representa "S" por "suma"), la llamada notación sigma inventado por el matemático suizo LEONHARD EULER en 1755, se puede utilizar para expresar la suma de los números a1 ,a2 ,…,an como $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Uno lee esto como "la suma de k = 1 a n de ak ", y lo calcula mediante el siguiente procedimiento:

> Escriba los términos ak , primero reemplazando k por 1, y luego con k reemplazada por 2, parando con k reemplazada por n. Suma todos los términos escrito: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a1 + a2 + \cdots + un$

Así, por ejemplo, la expresión $\sum_{k=1}^{4} k^2$ representa el suma 12 + 22 + 32 + 42, que es igual a 30

La letra k utilizada como subíndice en notación sigma es se llama índice de suma y es una VARIABLE DUMMY: cualquier otra letra podría usarse en su lugar. Para ejemplo, las expresiones $\sum_{r=1}^{4} r^2$ y $\sum_{n=1}^{4} n^2$ también representan la misma suma 12 + 22 + 32 + 42.

No es necesario que una suma comience con el índice k = 1. Para ejemplo, la expresión $\sum_{k=10}^{12} (k^3 - k^2)$ representa la suma (103 – 102) + (113 – 112) + (123 – 122). una suma podría contener un solo término, como para $\sum_{k=5}^{5} k^2 = 25$, para instancia. Cualquier suma de la forma $\sum_{k=m}^{n} a_k$ con n < m se considera vacío y tiene valor cero. Finalmente, las sumas que alternan en signo se pueden representar introduciendo un factor de la forma (–1)k–1. Por ejemplo, $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ es igual $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

Las sumatorias satisfacen las siguientes dos propiedades básicas:

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} (ca_k) = c \sum_{k=m}^{n} a_k$$

donde c es una constante. (Estas declaraciones son evidentemente verdadero cuando los sumatorios se escriben en su totalidad.)

La notación sigma también se usa para denotar SERIES, es decir, sumas infinitas:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Por ejemplo, la SERIE GEOMÉTRICA se puede escribir: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Si –1 < x < 1, entonces tiene valor $\frac{1}{1-x}$, en cuyo caso podemos escribir: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), inventor de la moneda CÁLCULO, usó una "S" alargada, ∫, tanto para la suma de una secuencia de números enteros y como un signo de integración (que él consideraba como una suma continua).

Véase también SERIE ARITMÉTICA; SERIE CONVERGENTE; PRODUCTO INFINITO; SUMAS DE POTENCIAS.

sumas de potencias Las siguientes fórmulas, llamadas fórmulas de sumas de potencias, dan ecuaciones simples para las sumas de los primeros números de conteo, cuadrados y cúbicos. Se pueden demostrar fácilmente por el método de INDUCCIÓN:

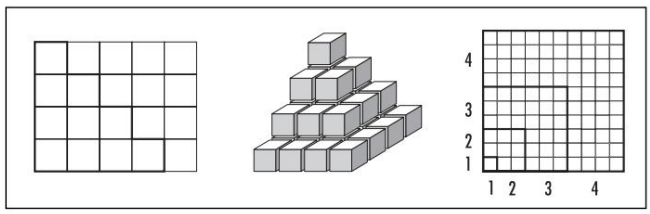
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

También es posible establecer estas fórmulas geométricamente.

La validez de la primera fórmula se puede ver por dividir una cuadrícula de cuadrados n × (n + 1) en dos "casos de escalera", cada uno de los cuales representa la misma suma 1 + 2 + 3 +…+ n. Esto da:



Cálculo de sumas de potencias

Machine Translated by Google

$$2\times (1 + 2 + 3 +\ldots+ n) = n \times (n + 1)$$

De manera similar, se puede demostrar que seis copias de un "escaleras" tridimensionales se apilan juntas para formar una $n \times (n + 1) \times (2n + 1)$ caja rectangular, por lo que se establece la validez de la fórmula de la suma de cuadrados. Finalmente, cada región en forma de L en un subdividido $(1 + 2 +\ldots+ n) \times (1 + 2 +\ldots+ n)$ cuadrado tiene área dada por a número de cubo La suma de estas áreas establece la fórmula de la suma de cubos.

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287-212 a. C.) sabía la fórmula para la suma de los primeros n contando números. Los eruditos árabes, que tradujeron y conservaron las obras de Arquímedes, también fueron así consciente del resultado. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) descubrió la misma fórmula cuando era un estudiante de escuela, empleando un ingenioso truco de escribir la misma suma hacia adelante y hacia atrás. (Esto es ahora considerada una técnica estándar en el estudio de SECUENCIAS ARITMÉTICAS.)

En 1713 el matemático suizo Jacques Bernoulli de la famosa FAMILIA BERNOULLI buscó un general fórmula para la suma de las primeras k-ésimas potencias: $1^k + 2^k + 3^k +\ldots+ n^k$. Observó que esta suma aparece como la coeficiente de x^k en la SERIE TAYLOR de

$$k!(1 + e^{x} + e^{2x} +\ldots+ e^{nx})$$

(Para ver esto, escribe cada término e^{mx} como una serie $1 + mx + \frac{mx^2}{2!} +\ldots$ Luego sume y recopile todos los términos que la expresión x^k contengan .) Usando la fórmula para el suma de una SECUENCIA GEOMÉTRICA, esta expresión puede ser reescrito como:

$$k!\frac{(e^{x})^{n+1} - 1}{e^{x} - 1} = k!\frac{e^{(n+1)x} - 1}{x}\,\frac{x}{e^{x} - 1}$$

El primer factor aquí es k!, y la serie de Taylor de la El segundo factor es sencillo:

$$\frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} = 1 + \frac{(n+1)}{2!}x + \frac{(n+1)^2}{3!}x^2 +\ldots$$

Desafortunadamente, la serie de Taylor del tercer factor es difícil de calcular. Bernoulli decidió simplemente escribir:

$$\frac{x}{e^{x} - 1} = B_0 + B_1 x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_3}{3!}x^3 +\ldots$$

para algunos números $B_0, B_1, B_2, \ldots$ aún por determinar. Dado esto, ahora se sigue que $1^k + 2^k + 3^k +\ldots+ n^k$ es el coeficiente de x^k en el producto:

$$k!\left(1 + \frac{(n+1)}{2!}x + \frac{(n+1)^2}{3!}x^2 +\ldots\right)\left(B_0 + B_1 x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_3}{3!}x^3 +\ldots\right)$$

Expandiendo paréntesis e identificando el coeficiente de x^k en este producto finalmente conduce a la notable fórmula:

$$1^k + 2^k + 3^k +\ldots+ n^k = \frac{(n+B)^{k+1} - B^{k+1}}{k + 1}$$

donde una cantidad B^r debe interpretarse como el valor B_r.

Los números $B_0, B_1, B_2, \ldots$ son hoy conocidos como el Números de Bernoulli, y sus valores están dados por:

$$B_0 = 1,\quad B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\quad B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_6 = \frac{1}{42},\ldots$$

con $B_k = 0$ para todos los valores impares de k mayores que 1. Así, como ejemplo, volvemos a tener:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 +\ldots+ n^2 = \frac{(n+B)^3 - B^3}{3}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + B_1 3n^2 + 3B_1 n + B_2}{3}$$

$$= \frac{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Desde entonces, los números de Bernoulli se han estudiado extensivamente, y muchas de sus propiedades ahora están bien comprendido. Estos números aparecen en evaluando la FUNCIÓN ZETA en valores pares. Específicamente, los matemáticos han demostrado que:

Machine Translated by Google

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} B_{2n} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

Esto da, por ejemplo, $\zeta(2) = \frac{2\pi}{6}$ y $\zeta(4) = \frac{4\pi}{90}$.

Surd Una expresión numérica que contiene números irracionales que surgen únicamente de la operación de sacar raíces cuadradas o más altas se llama Surd. Por ejemplo, $\sqrt{5}$, $3\sqrt{2} - \sqrt{7}$, y $4\sqrt[5]{2}$ son todos irónicos. (Sin embargo, lo irracional el número e + ln 2, por ejemplo, no contiene raíces y, por lo tanto, no es un irracional) . $\sqrt{11} + \sqrt[4]{13}$, por ejemplo) y una mixta $\sqrt{7}$, por ejemplo).

El conjugado de un sarcasmo que es la suma de dos términos es la diferencia de esos mismos dos términos. Para ejemplo, el conjugado de $2\sqrt{3} + 4\sqrt{5}$ es solo $2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$. Si se trata de raíces cuadradas, entonces el producto de un iracundo y su conjugado es siempre un número racional.
Esta observación se utiliza en el proceso de RATIONALIZAR EL DENOMINADOR de una expresión racional complicada.

surdos de la forma $\frac{ab \pm \sqrt{\ }}{c}$, donde a, b y c son los números enteros, con b que no es un cuadrado perfecto, a veces se llaman sarcasmos cuadráticos. El término surd rara vez se usa hoy en día y generalmente se considera obsoleto.

silogismo Ver ARGUMENTO.

simetría Se dice que una figura o una expresión es simétrica si sus partes pueden intercambiarse sin cambiar la figura o la expresión como un todo. Por ejemplo, una figura geométrica como la letra "W" se puede dividir en dos partes, la mitad izquierda y la mitad derecha, que se pueden intercambiar mediante un REFLEJO sobre una línea vertical para dejar la forma general de la figura sin cambios. Decimos que esta figura tiene simetría de reflexión sobre una línea vertical. De la misma manera, la letra “C” tiene simetría de reflexión sobre una línea horizontal y la letra “S” tiene simetría de ROTACIÓN sobre su punto central. La figura de un CÍRCULO tiene simetría de reflexión sobre cualquier línea que pase por su centro y simetría de rotación a través de cualquier grado de giro. sobre su centro. Un CUBO tiene simetría de reflexión sobre cualquier plano que pase por su centro paralelo a una de sus caras.

Se dice que una figura geométrica tiene simetría rotacional de n veces alrededor de un eje de rotación si es simétrica sobre una rotación de $\frac{360°}{n}$ sobre ese eje. Por ejemplo, un pentágono regular tiene una simetría rotacional quíntuple alrededor de una línea que pasa por su centro PERPENDICULAR a la página en la que se dibuja la figura. UN TETRAEDRO tiene simetría rotacional triple alrededor de un eje que pasa por uno de sus vértices, y simetría rotacional doble alrededor de un eje que pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas.

la ecuacion x^2 variables +2 es simétrico en las xy + y xey , lo que significa que al intercambiar las dos variables se obtiene una nueva ecuación equivalente a la original. En general, se dice que una función f de varias variables es totalmente simétrica si el intercambio de dos variables cualesquiera no cambia la función: f(x1 ,…,xi ,…, xj ,…,xn) = f(x1 ,…, xj ,…, xi ,…, xn) para todos los valores i y j.

El conjunto de todas las PERMUTACIONES de n letras x1 ,x2 ,…,xn forma un GRUPO llamado grupo simétrico de orden n. Cualquier ecuación POLINOMIAL p(x) = 0 es simétrica con respecto a las permutaciones de las raíces de la ecuación. Si el polinomio está completamente factorizado (como es posible de acuerdo con el TEOREMA FUNDAMENTAL DE ALGE BRA), entonces cualquier reordenamiento de las raíces de la ecuación (x – α1)(x – α2) … (x – αn) = 0 no alterar la ecuación.

Una FUNCIÓN y = f(x) cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y a través de una reflexión se dice que es par.
Se dice que uno que es simétrico con respecto a una rotación de 180° con respecto al origen es impar. Las funciones pares satisfacen f(–x) = f(x) para todos los valores x, y las funciones impares f(–x) = –f(x).

Se dice que una MATRIZ A cuadrada es simétrica si, para cada valor apropiado i y j, la entrada en la i-ésima fila y la j -ésima columna coincide con la entrada en la j-ésima fila y la i -ésima columna: Aij = Aji.

Se dice que una RELACIÓN es simétrica si x está relacionado con y significa que y también está relacionado con x. Por ejemplo, “es hermano de” es una relación simétrica entre personas. (Si Lashana es hermano de Terell, entonces Terell también es hermano de Lashana.) Sin embargo, la relación “es hermana de” no es simétrica.

Una figura o expresión que no es simétrica se llama asimétrica.

Ver también FUNCIONES PARES E IMPAR; FRISO PATRÓN.

Machine Translated by Google

división sintética Ver MULTIPLICACIÓN ANIDADA.

sistema de ecuaciones Un conjunto de ecuaciones en varios incógnitas—requeridas para ser verdaderas para valores particulares de esas incógnitas—se llama un sistema de ecuaciones. Para ejemplo, las tres ecuaciones

$$2x - 3xy + z = 4 = 11$$
$$3x(y + z) = z^2 (x + y)$$
$$x^3 + y^3 = 17 + z$$

tiene la solución x = 1, y = 2 y z = 2. Geométricamente, cada ecuación representa una curva o superficie en el espacio, y una solución al sistema de ecuaciones es un común punto de intersección de esas superficies. es posible para un sistema de ecuaciones para no tener soluciones. (Para ejemplo, claramente no hay valores de x e y para cual $x^2 + y = 1$ y $y^2 + x = 2$.)

Resolver un sistema arbitrario de ecuaciones, si es que lo hace posible, suele ser una tarea muy difícil. A menudo, un matemático recurrirá a métodos gráficos y buscará para una SOLUCIÓN GRÁFICA. En casos especiales, un método de SUSTITUCIÓN podría resultar útil. Por ejemplo, considere las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x - y = 1$$

Resolviendo y en la segunda ecuación se obtiene y = x –1. Insertando este valor en la primera ecuación da un Ecuación CUADRÁTICA en x, a saber, $x^2 + (x - 1)2 = 25$. Esto se puede reescribir $2x^2 - 2x + 1 = 25$ o como $2x^2 - 2x - 24 = 0$. Resolviendo para x se obtienen dos soluciones, con valores correspondientes para y. Tenemos x = 4 y y = 3 como una solución, y x = –3 e y = –4 como otra. (Gráficamente, hemos encontrado la ubicación de los dos puntos en los que la recta x – y = 1 interseca a la CÍRCULO $x^2 + y^2 = 25$.)

El estudio del ÁLGEBRA LINEAL y el proceso de La ELIMINACIÓN GAUSSIANA proporciona medios efectivos y directos para resolver sistemas de SIMULTÁNEA LINEAL ECUACIONES.

Véase también REGLA DE CRAMER ; HISTORIA DE LAS ECUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo).

Machine Translated by Google

T

tangente Una línea recta que toca una curva sin cortarla en esa ubicación se llama línea tangente a la curva, y la ubicación en la que la línea y la curva se tocan se llama punto de contacto. Dicho esto, sin embargo, esto no debe tomarse como la definición precisa de una línea tangente. En general, se permite que una recta tangente tenga más de un punto de contacto, puede atravesar la curva en puntos distintos del punto de contacto e incluso puede atravesar la curva en el punto de contacto si este punto también es un PUNTO DE INFLEXIÓN. Para incluir estas posibilidades, los matemáticos definen la recta tangente a una curva en términos de un LÍMITE:

> La línea tangente a una curva en un punto P es la posición límite de una línea que pasa por P y por un segundo punto Q en la curva cuando ese punto Q se desliza hacia P.

Pero incluso esta definición tiene algunas dificultades, ya que puede darse el caso de que la posición límite no esté bien definida. No hay una línea tangente única a la esquina de un cuadrado, por ejemplo.

Una curva se dice suave si cada punto en ella tiene una línea tangente bien definida en ese punto. La teoría del CÁLCULO DIFERENCIAL se utiliza para encontrar la PENDIENTE de una recta tangente a una curva.

Si una curva se cruza a sí misma, entonces se dan nombres especiales al punto de intersección de acuerdo con el comportamiento de las rectas tangentes en ese punto. Un punto de auto-intersección se llama nodo (o crunodo) si hay son dos rectas tangentes distintas en ese punto, y un punto tac si las dos rectas tangentes coinciden.

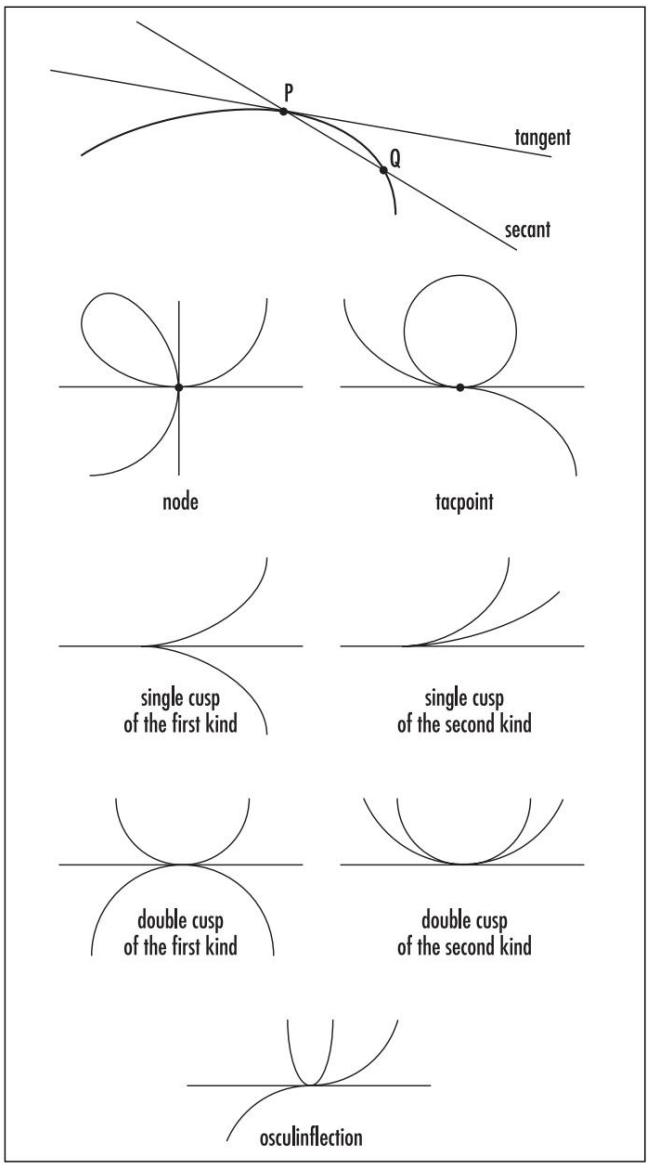
Si dos ramas diferentes de una curva se tocan en un punto y tienen una línea tangente común en ese punto, entonces ese punto se llama cúspide. Una cúspide simple tiene dos ramas que se unen y terminan en un punto, y una cúspide doble tiene dos ramas que continúan a través del punto de contacto. Una cúspide se clasifica como de "primer tipo" si las ramas de la curva pertenecen a lados opuestos de la línea tangente, o de "segundo tipo" si se encuentran en el mismo lado (al menos cerca del punto de contacto) . Si una rama de una doble cúspide tiene un punto de inflexión en el punto de contacto, entonces la doble cúspide se llama osculinflexión.

Un plano tangente a una superficie es un plano que toca la superficie sin atravesarla. Esta definición informal puede ajustarse y hacerse más precisa considerando la posición límite de los planos que pasan por tres puntos de la superficie. Si una ESFERA sólida descansa sobre una mesa, por ejemplo, entonces la superficie de la mesa es un plano tangente para el sólido. En el punto de contacto, todos los puntos cercanos a ese punto se encuentran en el mismo lado del plano tangente. Un punto en una superficie se llama punto de silla si los puntos cercanos a él se encuentran a ambos lados del plano tangente en ese punto. (La forma de la superficie en ese punto se asemeja a la silla de montar de un caballo).

En geometría, se dice que dos figuras cualesquiera son tangentes en un punto P si se tocan, pero no se cortan, en P. En TRIGONOMETRÍA, la tangente de un ángulo A, denotada tan(A), es la razón $\frac{\text{pecado(A)}}{\text{porque (A)}}$.

Véase también NORMAL A UNA SUPERFICIE; PARABOLOIDE.

Machine Translated by Google



Tangentes, secantes y puntos de contacto

Tartaglia, Niccolò (1499–1557) Nacido en álgebra italiana en Brescia, Italia, en 1499 (su fecha exacta de nacimiento no es conocido), el erudito Niccolò Tartaglia es recordado como uno de los primeros matemáticos en descubrir la tan buscada solución a la ECUACIÓN CÚBICA general. Su método era publicado, sin permiso, por GIROLAMO CARDANO (1501-1576), a quien le había revelado los detalles en confianza. Tartaglia también publicó el influyente texto en tres volúmenes General trattato di numeri et misure (Tratado en números y medidas), y fue el primer italiano erudito para traducir y publicar el famoso tratado de EUCLID LOS ELEMENTOS.

Tartaglia, nacido Niccolò Fontana, era solo un niño cuando los franceses invadieron su ciudad natal en 1512. Durante la masacre, Tartaglia recibió una espada severa heridas en la mandíbula y el paladar y fue dado por muerto en un catedral. Sobrevivió, pero a partir de entonces solo pudo hablar. con dificultad, de ahí su apodo, Tartaglia, que significa "tartamudo."

Durante el Renacimiento, la mayoría de los eruditos recibían el apoyo de mecenas ricos y tenían que demostrar su talento derrotar a otros académicos en concursos públicos. Para Por esta razón, los matemáticos mantendrían sus métodos secreto. En 1535 Tartaglia descubrió un medio para resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + ax2 = b$ y comenzó dando a conocer su hazaña. Anteriormente, SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526) había revelado a su alumno Anto nio Maria Fiore (ca. 1506-1560) un método para resolver



Niccolò Tartaglia, un eminente matemático del siglo XVI, encontró un método general de solución de ecuaciones cúbicas. (Foto cortesía del Museo de Ciencias, Londres/Topham HIP/ The Image Works)

Machine Translated by Google

cúbicos del tipo $x^3 + cx = d$. Buscando fama, Fiore chal llevó a Tartaglia a un debate y le entregó 30 preguntas de un tipo que estaba seguro Tartaglia sería Incapaz de contestar. En la madrugada del 13 de febrero, 1535, el día del debate, la inspiración vino a Tartaglia, y descubrió un método general que Resuelve ambos tipos de ecuaciones. Tartaglia ganó el concurso con facilidad.

La noticia de la victoria de Tartaglia llegó a Cardano, quien, con su ayudante LUDOVICO FERRARI (1522-1565), fue trabajando en la solución de la ECUACIÓN CUÁRTICA. Este el trabajo requería el conocimiento de la solución cúbica, y así Cardano buscó en Tartaglia detalles de sus métodos. Después de muchas súplicas, Tartaglia finalmente reveló su solución a Cardano, bajo la promesa de que los métodos permanecerán en secreto. Después de descubrir que otro erudito, Scipione del Ferro, había ideado métodos idénticos décadas antes, Cardano rompió esa promesa y publicó la solución, junto con la solución a la cuartica, en su texto de 1545 texto Ars magna (El gran arte). Se produjo una amarga disputa entre Tartaglia, Cardano y Ferrari. Hoy, para honrar el logro de ambos hombres, la fórmula para la solución de la cúbica se llama la fórmula Cardano-Tartaglia.

Tartaglia murió en Venecia, Italia, el 13 de diciembre de 1557.

tautocrona Ver CYCLOID.

tautología En LÓGICA FORMAL, un enunciado compuesto que posiblemente no puede ser falso en virtud de su estructura es llamado tautología. Por ejemplo, “Si todos los planetas están hecho de queso, entonces Marte está hecho de queso” es cierto independientemente de la validez de las declaraciones de los componentes que “todos los planetas están hechos de queso” y “Marte es hecho de queso.” Las tautologías son verdaderas simplemente por las leyes de la lógica y no por ningún hecho conocido Acerca del mundo. Son por tanto afirmaciones que contienen sólo información definitoria.

Ver también LEYES DEL PENSAMIENTO; MESA DE LA VERDAD.

Taylor, Brook (1685–1731) Nace el cálculo británico el 18 de agosto de 1685, en Edmonton, Inglaterra, el matemático Brook Taylor es recordado hoy por su importantes aportes al desarrollo de CALCU LUS. En su texto de 1715 Methodus incrementorum directa et inversa (métodos directos e indirectos de incremento), Taylor formuló métodos para desarrollar funciones como series infinitas. Estos son hoy conocidos como SERIE TAYLOR. Taylor también inventó la técnica de INTEGRACIÓN POR PARTES.

Taylor se graduó de St. John's College, Cambridge, en 1709 con un título avanzado en matemáticas, y ya había escrito su primer artículo matemático. 1 año antes A pesar de su corta edad Taylor rápidamente desarrolló una reputación como experto en el campo del cálculo. Fue elegido miembro de la prestigiosa ROYAL SOCI ETY en 1712 e inmediatamente fue nombrado miembro de un comité especial para decidir sobre la cuestión de si fue SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) o GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) que había descubierto el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO que une diferenciación con integración.

A pesar de la vinculación de su nombre a la técnica, Taylor no fue el primero en desarrollar una teoría de la Expansiones infinitas de funciones. Varias décadas antes JAMES GREGORY (1638-1675), Johann Bernoulli (1667-1748) de la famosa FAMILIA BERNOULLI, ABRA HAM DE MOIVRE (1667-1754), y otros habían descubierto de forma independiente variantes de la expansión de Taylor teorema. (Taylor desconocía este cuerpo de trabajo cuando escribió su famoso texto de 1715.) El significado de expansiones en series infinitas, sin embargo, no fue correctamente reconocida hasta 40 años después de la muerte de Taylor cuando, en 1772, influyente matemático francés JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) lo proclamó un importante principio básico del cálculo diferencial.

Como erudito de amplia base, Taylor también escribió sobre temas de física experimental y teórica. Publicó artículos sobre magnetismo, termómetros, vibraciones cuerdas, la acción capilar y las leyes matemáticas que dictan el movimiento de los planetas. Inventó la alternativa métodos para calcular logaritmos y aproximar Soluciones a ecuaciones algebraicas. En 1715 también publicó Linear Perspective, un influyente texto que esboza los fundamentos matemáticos de la GEOMETRÍA PROYECTIVA y el papel del punto de fuga en el arte. El murió dentro Londres, Inglaterra, el 29 de diciembre de 1731.

Serie de Taylor Muchas funciones, como trigonométricas funciones y funciones exponenciales y logarítmicas, son difíciles de manipular, mientras que sumar, restar,

Machine Translated by Google

y multiplicar funciones POLINOMALES es relativamente directo. En 1715 el matemático inglés BROOK TAYLOR trabajó para aproximar funciones complicadas con polinomios simples.

Supongamos que es posible aproximar un función complicada f(x) como un polinomio:

$$f(x) \approx a0 + a1x + a2x^{2} + \ldots + \text{año}$$

Uno analiza la situación notando primero que colocar x = 0 en esta fórmula produce:

$$f(0) = a0 + 0 + 0 + \cdots + 0$$

Esto demuestra que la aproximación puede hacerse exacta, al menos en x = 0, estableciendo a0 = f(0). Para determinar el coeficiente a1 , diferencie una vez y luego establezca x = 0:

$$f'(x) = 0 + a1 + 2a\,2x + 3a3x^{2} + \cdots + \text{nanx}^{n-1}$$
$$f'(0) = a1$$

Esto muestra que a1 = f′(0) es una buena opción. es decir, por establecer a1 para que sea este valor, no solo los valores de la función y polinomio coinciden en x = 0, pero las pendientes de los dos gráficos también coinciden en x = 0.

Derivando otro tiempo y haciendo x = 0 (que es decir, igualar las segundas derivadas) da como resultado:

$$f''(x) = 2a2 + 2 \cdot 3a3x + \cdots + n(n-1)anx^{n-2}$$
$$f''(0) = 2a2$$

y entonces $a_2 = \frac{F''(0)}{2}$. Continuando así obtenemos:

$a_3 = \frac{F'''(0)}{3!}$, , $a_{\text{norte}} = \frac{F^{(n)}(0)}{\text{norte}!}$.

Por tanto, una buena aproximación a la función f(x), en menos alrededor del valor x = 0, sería el polinomio:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^{2} + \frac{F'''(0)}{3!}x^{3} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{\text{norte}!}x^{n}$$

Cuanto mayor sea el grado que utilice el polinomio, mejor será la aproximación. Así, el mejor polinomio de todos sería un polinomio de grado infinito,

es decir, una SERIE DE POTENCIAS:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^{2} + \cdots$$

Los matemáticos han demostrado que si f puede en efecto ser diferenciada infinitamente muchas veces, entonces esta "aproximación" es exacta para el rango de valores al que converge la serie (llamado su RADIO DE CONVERGENCIA), es decir, el función realmente es igual a la suma infinita expresada en el lado derecho de la fórmula. Esta fórmula es llamada serie de Taylor.

Como ejemplo, considere la función $f(x) = e^{x}$. Derivando y sustituyendo en x = 0 se obtiene:

$f(x) = e^{x}$ $\quad f(0) = 1$
$f'(x) = e^{x}$ $\quad f'(0) = 1$
$f''(x) = \text{mi}^{x}$ $\quad f''(0) = 1$

y entonces $\text{mi}^{x} = 1 + 1 + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{3} + \cdots + \frac{x^{n}}{n!} + \cdots$. Un estudio de la serie de potencias. muestra que esta serie tiene un radio de convergencia infinito, y así esta ecuación es válida para todos los valores de x.

La serie de Taylor de f(x) = sen x viene dada por:

$f(x) = \text{sen}\,x$ $\quad F(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$ $\quad F'(0) = 1$
$f''(x) = -\text{sen}\,x$ $\quad F''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$ porque $\quad F'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \text{sen}\,x$ $\quad F^{(4)}(0) = 0$

$$\text{pecado}\,x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \frac{x^{7}}{7!} + \cdots$$

Similarmente,

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} - \frac{x^{6}}{6!} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^{2} + x^{3} + \cdots$$ (válido solo para $-1 < x < 1$)

y

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{3} - \frac{x^{4}}{4} + \cdots$$ (válido solo para $-1 < x \leq 1$)

Dado que las calculadoras portátiles están programadas sólo para sumar, restar, multiplicar y dividir, la serie de Taylor hace Es posible calcular valores de funciones complicadas.

Machine Translated by Google

(Teniendo en cuenta que las calculadoras solo muestran ocho o 10 decimales, solo es necesario usar los primeros términos de la serie de Taylor para obtener respuestas adecuadamente precisas).

Para aproximar una función cercana a un valor x = a diferente de cero, se usa un polinomio de la forma: +… Usando el mismo a2 (x – a) + a3 (x – a) técnica de derivación y 2 3 a0 + a1 (x – a) + sustitución en x = a produce:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Esto se llama una serie de Taylor "centrada en x = a". Las series de Taylor, como se discutió anteriormente, centradas en x = 0, a veces se denominan series de Maclaurin. En 1742, el matemático escocés COLIN MACLAURIN (1698–1746) escribió un influyente texto en el que describía los métodos de Taylor. Aunque Maclaurin no pretendió haber descubierto estas series centradas en cero (él mismo reconoció que no son más que un caso especial de los resultados generales de Taylor), los estudiosos honran su trabajo asociando su nombre con estas series especiales.

Talyor realizó su trabajo a principios del siglo XVIII, pero se sabe que otros estudiosos, como JAMES GRE GORY (1638–75), utilizaron series de potencias de la misma manera décadas antes.

Ver también ECUACIÓN DIFERENCIAL; DE MERCATOR EXPANSIÓN.

tensor Así como un VECTOR es una cantidad matemática que describe traslaciones en un espacio bidimensional o tridimensional, un tensor es una cantidad matemática que se usa para describir transformaciones generales en un espacio n-dimensional. Precisamente, si las ubicaciones de los puntos en el espacio n-dimensional están dadas en un sistema de coordenadas por (x 1 ,x 2 ,...,x n) y en un sistema de coordenadas transformado por (y 1 ,y 2 ,...,y n) (conviene usar superíndices en lugar de subíndices), entonces un "tensor contravariante de rango 1" es una cantidad T, con componentes individuales, que se transforma de acuerdo con la regla:

$$T^{i}_{\text{nuevo}} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_r} T^{r}$$

(Los coeficientes aquí son DERIVADAS PARCIALES). Así, por ejemplo, si el cambio de coordenadas es una traslación, yi = xi + ai para algunos números ai , se sigue que T i = T i . Esto significa que la cantidad T es una cantidad, con n componentes, sin cambios por traslación. Es decir, T es de hecho un vector.

Se permiten reglas de transformación más complicadas para cantidades con componentes dados por dos o más superíndices (o incluso subíndices). ALBERT EIN STEIN (1879–1955) utilizó el análisis tensorial en su teoría general de la relatividad.

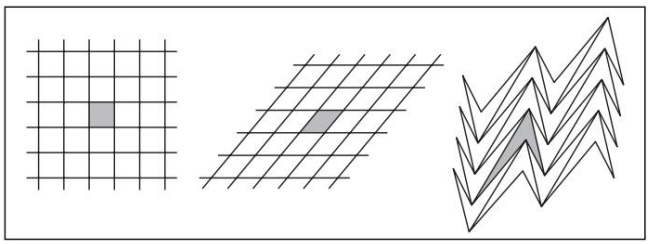
teselado (revestimiento, embaldosado) Un revestimiento del PLANO con formas geométricas se denomina teselado o embaldosado. Por lo general, las formas, llamadas mosaicos, son POLÍGONOS y el patrón producido es, en cierto sentido, repetitivo. Cada punto en el plano debe estar cubierto por una loseta, y dos losetas pueden intersecarse solo a lo largo de sus bordes. Una ubicación donde tres o más bordes se encuentran en un punto se llama vértice de la teselación. (Por lo general, se supone que las baldosas vecinas se encuentran a lo largo de su borde común).

Una teselación regular usa polígonos regulares congruentes, todos de un tipo, como mosaicos. Por ejemplo, se puede usar mosaico cuadrado para cubrir un plano, como se muestra a continuación. Cuatro aristas se encuentran en cada vértice de la teselación. (Tenga en cuenta que cuatro ángulos de 90° suman un total de 360° alrededor de ese vértice). Un triángulo equilátero también forma mosaicos en el plano (seis triángulos, que contienen ángulos de 60°, caben alrededor de un vértice), al igual que el hexágono regular. (Tres hexágonos, que contienen ángulos de 120°, caben alrededor de un vértice). Como ningún otro polígono regular tiene valores de ángulo apropiados para caber alrededor de un vértice, estos son los únicos mosaicos regulares del plano.

Una teselación semirregular utiliza polígonos regulares congruentes de más de un tipo, dispuestos de manera que la disposición de los polígonos en cada vértice de la teselación sea idéntica. Por ejemplo, se puede teselar el plano con hexágonos regulares y triángulos equiláteros de manera que cada hexágono esté rodeado por seis triángulos y cada triángulo por tres hexágonos para producir una teselación semirregular. Los matemáticos han demostrado que sólo hay ocho mosaicos semirregulares del plano. (Si uno abandona la restricción de que la disposición de los polígonos alrededor de cada vértice sea idéntica, entonces hay infinitas teselaciones de este tipo).

Una teselación monoédrica es una teselación que utiliza copias congruentes de un solo tipo de mosaico (no necesariamente

Machine Translated by Google



teselaciones

un polígono regular). El diagrama de arriba muestra que cualquier PARALELOGRAMO teja el plano. Como dos copias del mismo triángulo encajan para formar un paralelogramo, tenemos:

> Cualquier triángulo proporciona una teselación monoédrica del plano.

Al distorsionar la teselación monoédrica con gramos paralelos, se puede mostrar:

> Cualquier cuadrilátero, cóncavo o convexo, proporciona una teselación monoédrica del plano.

No todos los pentágonos o todos los hexágonos cubrirán el plano. En su tesis doctoral de 1918, el matemático Karl Reinhardt (1895–1941) clasificó los hexágonos que forman mosaicos y descubrió que se dividen en tres tipos básicos. Hasta el día de hoy, nadie sabe cuántas clases de pentágonos convexos forman mosaicos en el plano. (Actualmente se han identificado catorce tipos.) Reinhardt demostró que ningún polígono convexo con siete o más lados cubrirá el plano.

Una teselación del plano usando dos CUADRADOS de diferentes tamaños proporciona una demostración visual sorprendentemente elegante del TEOREMA DE PITÁGORAS .

tetraedro (pirámide triangular) Cualquier figura sólida (POLIEDRO) con cuatro caras triangulares se llama tetraedro. Si las cuatro caras son triángulos equiláteros congruentes, entonces la figura se llama regular.

La altura h y el volumen V de un tetraedro regular con longitud de arista a están dados por:

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

$$va = \frac{\sqrt{2}}{12}3$$

y tal tetraedro regular cabe perfectamente dentro de un cubo de longitud lateral $\frac{a}{\sqrt{2}}$. (Elija un vértice del cubo y dibuja diagonales en las tres caras que rodean ese vértice. Estos coinciden con las tres aristas de un tetraedro atrapado.)

Aunque es posible apilar un número finito de cubos pequeños para formar un cubo más grande, es imposible completar una hazaña similar para los tetraedros regulares: ningún tetraedro regular es una unión de tetraedros regulares más pequeños.

La suma de los primeros n NÚMEROS TRIANGULARES se llama el n-ésimo número tetraédrico. Por ejemplo, el quinto número tetraédrico es 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35.

Si colocamos conjuntos triangulares de 1, 3, 6, 10 y 15 puntos uno encima del otro haciendo uso de la tercera dimensión en el espacio, el conjunto de puntos producido es un tetraedro, lo que explica el nombre de estos NÚMEROS FIGURADOS . La fórmula general para el n-ésimo número tetraédrico 1– es n(n + 1)(n + 2).

Los números tetraédricos 6 aparecen como una de las diagonales del TRIÁNGULO DE PASCAL .

Véase también RED; SÓLIDO PLATONICO.

Tales de Mileto (ca. 625–547 a. C.) Geom etría griega , Filosofía

Nacido en la región de Mileto, Asia Menor (ahora Turquía), Tales es considerado el primer científico y filósofo de la historia occidental, al menos en el sentido de ser el primer erudito a quien se han atribuido descubrimientos científicos y matemáticos particulares. En lugar de confiar en la mitología y la religión para explicar el mundo natural, Tales buscó principios racionales en la ciencia. Este trabajo lo llevó a buscar también principios unificadores en geometría y, como tal, fue el primer erudito en intentar derivar hechos geométricos mediante procesos de deducción y razonamiento lógico. Estableció, por ejemplo, proposiciones geométricas fundamentales como “los ángulos de la base de cualquier triángulo isósceles son iguales” y “el ángulo en un semicírculo es un ángulo recto”.

Poco se sabe de la vida de Tales y todos sus textos escritos se han perdido. No obstante, los eruditos que siguieron a Tales hicieron numerosas referencias a sus logros y a su enfoque del estudio del mundo.

El filósofo griego PROCLUS (ca. 450 EC) afirmó que Tales adquirió su conocimiento matemático de los eruditos egipcios, y siglos más tarde, Hieronymus, un estudiante de Aristóteles, escribió que Tales midió el

Machine Translated by Google

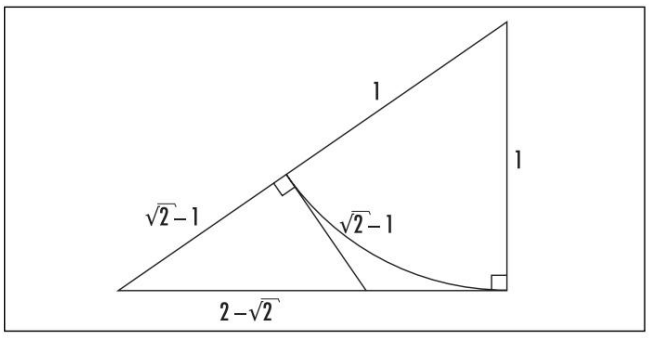
altura de las pirámides observando la longitud de las sombras. (Los historiadores de hoy toman esto como evidencia de que Tales estaba familiarizado con los principios de los triángulos semejantes). El historiador griego Heródoto (ca. 485 a. C.) escribió que Tales predijo correctamente el eclipse de sol en 585 a. C. (aunque algunos eruditos actuales sugieren que esto puede haber sido solo una conjetura afortunada).

Aristóteles escribió sobre la cosmovisión de Tales en su texto Metafísica. Al parecer, Tales creía que la Tierra era un disco plano que flotaba sobre un océano infinito de agua. Usó esta teoría para dar una explicación racional de por qué ocurren los terremotos.

Teodoro de Cirene (ca. 465–398 a. C.) Geometría griega , teoría de números Nacido en Cirene (ahora Shahhat, Libia), Teodoro es recordado por su trabajo sobre los NÚMEROS IRRACIONALES, demostrando que no solo es $\sqrt{2}$ irracional, pero también lo son $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, así como las raíces de todas las demás cantidades no cuadradas hasta 17.

Se observa que Teodoro fue tutor del gran filósofo PLATÓN (ca. 428-348 a. C.) en el tema de las matemáticas. Más tarde, Platón describió gran parte del trabajo de Teodoro en su texto Teeteto, y es principalmente a través de este documento que sabemos algo de la vida y obra de Teodoro. Aprendemos allí, por ejemplo, que Theodorus también estudió astronomía, música y aritmética.

Desafortunadamente, Platón no describió el método por el cual Teodoro demostró que sus cantidades eran irracionales, y los historiadores de hoy se preguntan por qué.
Theodorus detuvo su trabajo con el número $\sqrt{17}$. Es probable que Theodorus haya desarrollado una serie de argumentos que dependían en gran medida del número particular que se estaba estudiando y no logró desarrollar un enfoque general.



Probar que la raíz cuadrada de dos es irracional

que se ocupó de todos los números de una sola vez. Esto es aún más curioso, dado que la prueba aritmética estándar de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ era bien conocida por los estudiosos de su época, una prueba que puede generalizarse muy fácilmente a números distintos de 2. (Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, entonces $a^2 = 2b^2$, creando una contradicción: el número PRIMO 2 aparece un número par de veces en la factorización prima de a 2 y un número impar de veces en la factorización de $2b^2$.) También se puede establecer la irracionalidad de $\sqrt{2}$ geométricamente como sigue:

> El ALGORITMO EUCLIDEO muestra que dos longitudes geométricas son CONMENSURABLES (de razón racional) si la resta repetida, a su vez, de la longitud más pequeña de la más larga produce finalmente dos segmentos de la misma longitud. Así, dos longitudes para las cuales este proceso continúa indefinidamente deben ser de una razón irracional. Tomando nota de esto, considera segmentos de línea de longitud 1 y longitud $\sqrt{2}$ que forman un triángulo rectángulo isósceles. Con un arco circular, construye un segmento de línea de longitud $\sqrt{2} - 1$, la diferencia de estas dos longitudes. Ahora considere los dos segmentos de longitudes 1 y $\sqrt{2} - 1$. Dibuje un segundo triángulo rectángulo con lado de longitud $\sqrt{2} - 1$ como se muestra. La hipotenusa de su triángulo tiene longitud $2 - \sqrt{2}$. Como este proceso puede repetirse indefinidamente, siempre restando la menor longitud de la mayor, debe darse el caso de que las dos cantidades originales, 1 y $\sqrt{2}$, sean de razón irracional.

Muchos historiadores creen que Teodoro pudo haber desarrollado argumentos geométricos específicos de este tipo, usando triángulos, pentágonos y diecisiete ágonos, por ejemplo, para mostrar que los números que consideraba eran irracionales.

teorema (proposición) Un enunciado en matemáticas que se ha probado que es verdadero se llama teorema. El nombre se origina de la palabra griega theórema que significa “un tema para la contemplación”.

A menudo, los teoremas se clasifican en función de su importancia. Un lema es un teorema auxiliar, es decir, un resultado que se demuestra verdadero a efectos de establecer posteriormente un resultado más importante. (En griego, lema significa “una cosa tomada”.) Un corolario es un teorema de consecuencia inmediata, es decir, un resultado que se sigue de una

Machine Translated by Google

teorema previamente establecido que requiere poca o ninguna explicación adicional. Una conjetura, por otro lado, es una declaración que aún no se ha probado o refutado. La siguiente secuencia de resultados ilustra estas ideas:

> Lema: Un número natural al cuadrado es divisible por cuatro o deja un resto de 1 cuando se divide por 4.

Prueba: Sea a un número natural. Si a es par, entonces se puede escribir en la forma a = 2m para algún número m. En consecuencia, $a^2 = (2m)^2$ es divisible por 4. Si, por el contrario, a es impar, entonces a = 2m + 1 para algún número m, entonces $a = (2m + 1)2 = 4m2 + 4m + 1$ es 1 más que un múltiplo de 4.

> Teorema: si un número N es igual a la suma de dos, cuadrado, $N = un^2 + segundo^2$, entonces N deja un resto de 0, 1 o 2, pero no 3, cuando se divide por 4.

Prueba: por el lema, un 2 deja un resto de 0 o 1 cuando se divide por 4, al igual que el número b^2. Es imposible que los dos residuos sumen un residuo total de 3.

> Corolario: es imposible escribir 2.867.039 como suma de dos números cuadrados.

Prueba: este número deja un resto de 3 cuando se divide por 4.

> Conjetura: Es posible escribir 3.457.417.105 como suma de dos números cuadrados.

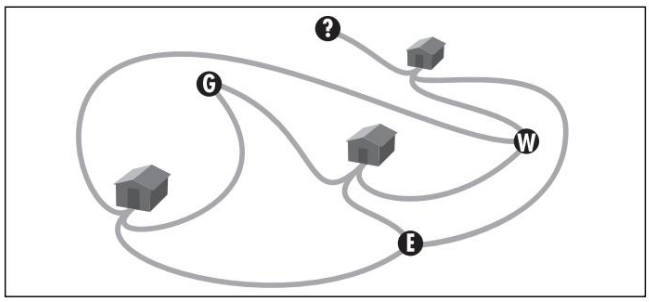
Esto aún está por ser probado o refutado.

Véase también CUADRADO.

problema de los tres servicios públicos Un acertijo clásico desafía al lector a conectar tres casas a cada una de las tres compañías de servicios públicos (agua, electricidad y gas), una tubería entre cada casa y cada compañía, de tal manera que no se crucen las líneas o la red principal.

Resulta que este rompecabezas no se puede resolver si los edificios están situados en un plano. Un argumento heurístico simple da una idea de por qué este es el caso:

> Cualquier solución al problema sería un diagrama de seis casas y nueve tuberías, dividiendo el plano en regiones. Parece que cada región debe estar delimitada por cuatro tubos. Si hay regiones R , entonces 4R representa el número total de tuberías en la imagen, contadas dos veces (cada tubería limita con dos regiones). Por lo tanto , 4R = 18, lo que sugiere que debe haber un número no entero de regiones. Este absurdo demuestra la imposibilidad de la tarea.



El problema de las tres utilidades

Sorprendentemente, el rompecabezas se puede resolver si uno dibuja las tres casas y las tres empresas en la superficie de un TORUS. (Se puede verificar esto usando un marcador para dibujar las figuras en un bagel, por ejemplo).

Véase también GRÁFICO.

gráfico de serie temporal Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

topología (análisis situs, geometría de hoja de caucho) El estudio de las propiedades de las formas y superficies geométricas que permanecen sin cambios cuando las formas de esos objetos se distorsionan por una DEFORMACIÓN continua (como estirarse, encogerse o torcerse) se llama topología. A diferencia de un geómetra clásico, un topólogo no está interesado en cuestiones de distancias y ángulos, sino sólo en las posiciones relativas de los puntos. Todo lo que se requiere de una transformación topológica es que los puntos que comienzan muy juntos permanezcan relativamente juntos. Desde este punto de vista, un círculo y un cuadrado (de cualquier tamaño) son topológicamente equivalentes, ya que cualquiera puede deformarse continuamente en el otro, y una serie de propiedades geométricas se aplican igualmente bien a cualquier objeto. Por ejemplo, la declaración, "Quitar un punto de un círculo produce

Machine Translated by Google

un segmento de línea" es válido para toda la clase de objetos topológicamente equivalentes a un círculo.

Cualquier transformación que requiera perforar o rasgar una superficie, o unir dos porciones disjuntas de una figura, no se considera una acción topológica válida. (Rasgar una superficie, por ejemplo, separa los puntos que estaban muy juntos). Como es imposible deformar una ESFERA en un TORO sin perforar la superficie, estas dos formas no son topológicamente equivalentes. Como otros ejemplos, las letras mayúsculas C, M y Z son topológicamente equivalentes, al igual que las letras D, O, P y R, pero ninguna letra del primer grupo es topológicamente equivalente a una letra del segundo. Ninguna letra del alfabeto es topológicamente equivalente a la letra B (aparte de la propia B mayúscula).

El estudio de la topología comenzó con LEONHARD EULER (1707-1783) y su análisis del famoso PROBLEMA DE LOS SIETE PUENTES DE KÖNIGSBERG. El matemático CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) examinó la distorsión de los nudos y las propiedades invariantes que surgen en el estudio de la GEOMETRÍA PROYECTIVA. En 1895, el matemático francés HENRI POINCARÉ (1854–1912) examinó estos trabajos y publicó cinco artículos, estableciendo un marco teórico para un estudio formal de la topología.

La disciplina de la topología de conjuntos de puntos intenta capturar la noción de "cercanía" sin mencionar la distancia. En este enfoque teórico, a uno se le da un conjunto X y una colección específica de subconjuntos llamados conjuntos abiertos, que, en cierto sentido, están destinados a representar aquellos puntos que se consideran "cercanos" entre sí. Se requiere que estos subconjuntos satisfagan tres propiedades básicas:

1. El conjunto vacío Ø y todo el conjunto X se consideran abierto.
2. Si A y B son dos conjuntos abiertos, entonces su intersección A ∩ B también es un conjunto abierto.
3. La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es otra conjunto abierto.

Cualquier conjunto X con una colección de subconjuntos clasificados como abiertos que satisfacen las tres propiedades establecidas se denomina espacio topológico. Por ejemplo, el conjunto de números reales con uniones de INTERVALOS abiertos como conjuntos abiertos es un espacio topológico. También lo es el conjunto X = {a,b,c,d} con subconjuntos Ø, {a}, {b,c,d} y X como conjuntos abiertos. Se dice que dos espacios topológicos son equivalentes si existe un uno a uno correspondencia entre los puntos en un espacio y los puntos en el otro de modo que los conjuntos abiertos en un espacio se correspondan con los conjuntos abiertos en el otro.

Véase también TEORÍA DEL NUDO; LA BANDA DE MOBIUS.

toro (anillo de anclaje, rosquilla) Una superficie curva cerrada que posee un solo orificio similar a la superficie de una rosquilla o una cámara de aire se llama toro (plural: toros). Un toro puede considerarse como un SÓLIDO DE REVOLUCIÓN obtenido al girar un círculo en un plano una revolución completa alrededor de una línea que no corta el círculo. (Este círculo se llama círculo generador). Como tal, LOS TEOREMAS DE PAPPUS muestran que el VOLUMEN V y el ÁREA de superficie A de un toro están dados por las fórmulas:

$$V = 2\pi^2 ab^2$$
$$A = 4\pi^2 ab$$

donde a es el radio del círculo girado alrededor de una línea, y b es la distancia del centro del círculo a esa línea. Estas fórmulas también se pueden obtener mediante las técnicas de CÁLCULO INTEGRAL En un sistema de COORDENADAS

CARTESIANAS , si el círculo de radio a se coloca en el plano yz con centro en la posición b a lo largo del eje y y se gira alrededor del eje z , entonces la ecuación del toro resultante producido viene dada por:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2$$

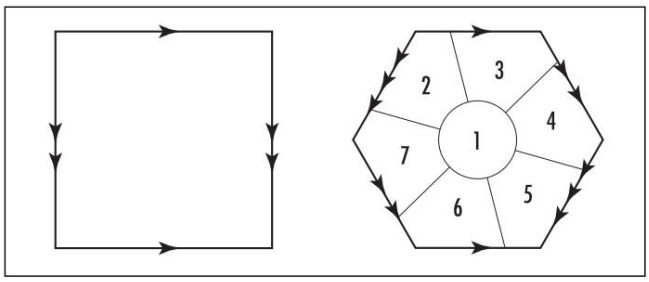
Esto se deriva del TEOREMA DE PITÁGORAS aplicado a un triángulo rectángulo dentro del círculo generador cuando se gira a una posición tal que las coordenadas x, y y z de un punto en el toro son (x, y, z). (Examine el triángulo rectángulo de altura z con radio a como su hipotenusa.)

Si θ denota el ángulo de un punto en el círculo generador y el ángulo a través del cual gira ese círculo generador alrededor del eje z, entonces se obtienen las siguientes ECUACIONES PARAMÉTRICAS para el toro:

$$x = (b + a\cos\theta)\cos$$
$$y = (b + a\cos\theta)\text{sen}$$
$$z = a\sin\theta$$

Cada punto en el círculo generador de un toro, cuando se gira sobre el eje z, traza un círculo. Así un

Machine Translated by Google



Construyendo un toro

toroide puede considerarse el PRODUCTO CARTESIANO de dos circunferencias: cada punto de un toro corresponde a un par de puntos, uno en una circunferencia (la circunferencia generadora) y un segundo en una segunda circunferencia (la circunferencia trazada por ese punto en la generatriz). círculo). El conjunto de todas las posiciones posibles de una manecilla de hora y una manecilla de minutos en un reloj, cada una correspondiente a un círculo completo de valores, describe un conjunto de resultados topológicamente equivalente a un toro. (Los físicos dirían que el "espacio de fase" de las dos manecillas de un reloj es un toro).

Uno puede construir físicamente un toro cosiendo los lados opuestos de una lámina de goma cuadrada como se muestra. (Uno debe asegurarse de alinear las direcciones de las flechas indicadas). Al unir los lados opuestos de un hexágono, también se produce un toroide.

Esta última construcción muestra que es posible producir un diseño de siete regiones en un toro de manera que cada región comparta una parte del límite con cada una de las seis regiones restantes. Por lo tanto, algunos mapas en un toro requieren siete colores para pintar si uno desea asegurarse de que las regiones vecinas sean siempre de colores distintos.
Los matemáticos han demostrado que la situación nunca es peor que esta: siete colores siempre serán suficientes para colorear un mapa toroidal, por complicado que sea ese mapa.

Dado un toro perforado hecho de caucho, como una cámara de aire con un pequeño orificio, es físicamente posible estirar el orificio para abrirlo y voltear la superficie del revés a través de ese orificio. Sorprendentemente, la superficie resultante es otro toroide. Un toro doble es una superficie cerrada con dos agujeros. Evertir un toro doble a través de una perforación en su superficie nuevamente produce la misma superficie nuevamente, otro toro doble, y el mismo resultado es válido para toros triples y toros múltiples con cualquier número de agujeros.

Véase también TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES; ESFERA.

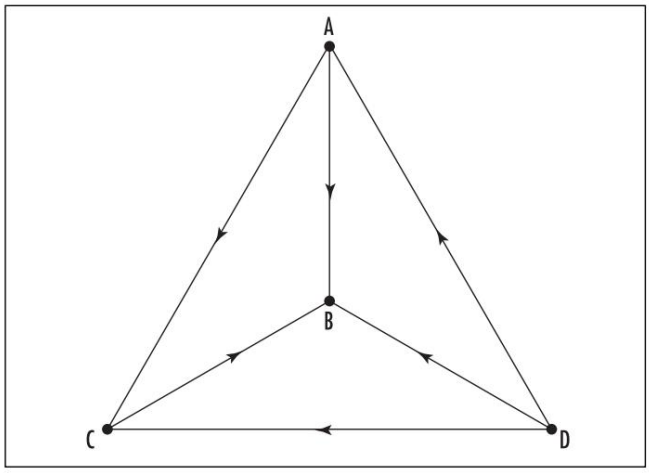
torneo (torneo de todos contra todos, dígrafo completo) Una competencia entre una colección de equipos se llama torneo si cada posible par de equipos juega exactamente un partido, y cada juego resulta en una victoria para un equipo y una derrota para el otro . (Es decir, no se permiten empates). Matemáticamente, un torneo entre n jugadores es un GRÁFICO con n vértices, con aristas dibujadas entre cada posible par de puntos, dirigido con flechas que apuntan de un vértice a otro. Aquí, cada vértice representa un equipo, y un borde que apunta del vértice A al vértice B indica una victoria del equipo A sobre el equipo B. El siguiente diagrama, por ejemplo, representa un torneo entre cuatro equipos, A, B, C y D. .

Vemos que el equipo A perdió ante el equipo D pero venció a los equipos B y C.

Un grafo de n vértices con una arista entre cada posible par de vértices dirigido por una flecha se llama grafo dirigido completo o simplemente dígrafo completo de n vértices.

Estructuralmente, hay esencialmente sólo un dígrafo completo posible en dos vértices (aunque, en términos de juego en equipo, hay dos interpretaciones posibles: o el equipo A vence al equipo B, o el equipo B vence al equipo A). Para n igual a 3, 4, 5, 6 y 7 hay, respectivamente, 2, 4, 12, 56 y 456 dígrafos completos diferentes en n vértices.

Cualquier equipo que venza a todos los demás equipos en un torneo se denomina fuente o transmisor, y cualquier equipo que pierde frente a todos los demás equipos se denomina sumidero o receptor. (Estos nombres reflejan la interpretación alternativa de un



Representando un torneo

Machine Translated by Google

digraph como un diagrama de flujo de información). En el ejemplo anterior, el equipo D es una fuente y el equipo B es un sumidero. Es imposible que un torneo posea dos fuentes diferentes o dos sumideros diferentes. Un torneo no necesita poseer ni una fuente ni un sumidero.

Cada torneo posee un SENDERO HAMILTONIANO. Esto significa que es posible encontrar un camino a través del diagrama de un dígrafo completo que comienza en un vértice y sigue los bordes en direcciones que respetan las flechas para visitar todos y cada uno de los otros vértices exactamente una vez. Por ejemplo, en el diagrama anterior, el viaje D → A → C → B representa un camino hamiltoniano. Alternativamente, un camino hamiltoniano puede interpretarse simplemente como una lista de todos los equipos que jugaron dispuestos en un orden tal que el primer equipo de la lista venció al segundo, el segundo equipo de la lista venció al tercero, y así sucesivamente. El siguiente ejemplo ilustra un método general para construir una lista de este tipo (o, de manera equivalente, una ruta hamiltoniana) para cualquier torneo.

Considere la siguiente tabla que describe los resultados de un torneo con cinco equipos, A, B, C, D y E:

Un latido BC latido B C venció DD venció E
A latido CB latido DE latido C
D venció AB venció E
un latido mi

y considere los equipos uno a la vez para crear una lista apropiada. Primero escribe A.
Ahora bien, si el equipo B venció a A, entonces está permitido escribir B a la izquierda de A. Sin embargo, este no es el caso, por lo que B debe escribirse a la derecha de A. Nuestra lista, hasta ahora, aparece: A B .

Ahora considere al equipo C y pregunte: "¿ C venció a A?" Como la respuesta es no, no se nos permite escribir C inmediatamente a la izquierda de A.

¿ C venció a B? Sí. Por lo tanto, se nos permite escribir C inmediatamente a la izquierda de B. Nuestra lista hasta ahora dice: AC B. (Tenemos que A venció a C y C venció a B).

Ahora considere al equipo D y busque el primer equipo en la lista parcialmente construida que D venció. Este es el equipo A. Esto lleva a la nueva lista: DAC B.

Finalmente considere el equipo E. El primer equipo en esta lista parcialmente construida que venció E es C. Esto nos permite colocar a E entre A y C para pro duce la lista completa: DAEC B. Nótese que sí tiene la propiedad de que cada equipo de la lista vence al que le sucede. Esta lista representa un circuito hamiltoniano en el dígrafo apropiado.

El número total de juegos jugados en un torneo con N jugadores viene dado por la fórmula:

$$\frac{\text{norte norte}(\ )}{-1\ 2}$$

(Cada uno de los N equipos juega N – 1 juegos, pero este doble cuenta el número total de juegos jugados). Este es el (N – 1) NÚMERO FIGURA triangular .

Si N es impar, siempre es posible construir un ejemplo de un torneo entre N equipos en el que cada equipo tenga el mismo número de victorias. Esta hazaña no se puede lograr si N es par. (Si cada equipo tiene w victorias, entonces N × w representa el número total de juegos

jugó. En consecuencia, debemos tener es una $w = \frac{\text{norte}}{2}-1$. Este fórmula inválida si N es par.)

torre de Hanoi (torres de Hanoi, torre de Brahma)
Considere tres postes y una colección de discos de diferentes tamaños, todos colocados inicialmente en un poste en orden de tamaño, desde el más grande en la parte inferior hasta el más pequeño en la parte superior. Un antiguo desafío exige que todos los discos se transfieran a un polo diferente de tal manera que:

1. Solo se mueve un disco a la vez.
2. Ningún disco se asienta nunca sobre otro disco de menor tamaño.

Una versión de ocho discos de este rompecabezas fue patentada y vendida como juguete por Edouard Lucas en 1883. Llamó al rompecabezas la Torre de Hanoi y escribió que el juego se basaba en una "torre de Brahma" en la que los sacerdotes tenían el desafío. de mover 64 discos de un polo a otro bajo las mismas restricciones, moviendo solo un disco por día. La leyenda afirmaba que el mundo terminaría el día en que se completara la tarea.

Un rompecabezas que contiene solo uno o dos discos se resuelve fácilmente. Si uno conoce un método para resolver el rompecabezas con N discos, entonces la solución a la versión del disco (N + 1) sigue fácilmente: transfiera los N discos superiores a un polo a través del método conocido, mueva el disco grande (N + 1))th disco al polo vacío, y transfiera los N discos al polo que contiene el disco grande. Si T(N) denota el num

Machine Translated by Google

número de movimientos necesarios para resolver la versión N-disc del rompecabezas, del procedimiento anterior se deduce que:

$$T(N + 1) = T(N) + 1 + T(N)$$
$$= 2T(N) + 1$$

con T(1) = 1 y T(2) = 3. Esta RELACIÓN DE RECURRENCIA tiene solución:

$$T(N) = 2N – 1$$

Esto muestra que la versión de 64 discos del rompecabezas requiere 264 – 1 = 18 446 744 073 709 551 615 movimientos.
Según la leyenda, el fin del mundo llegará así en aproximadamente 5,05 × 1016 años.

Si uno desea transferir N discos a un polo específico, entonces comienza a resolver el rompecabezas moviendo el disco más pequeño al polo deseado si N es impar, pero al tercer polo si N es par.

Si numeramos los N discos 1, 2,…, N de menor a mayor, entonces la siguiente tabla muestra el orden en que se mueven los discos para resolver las primeras cinco versiones pequeñas del rompecabezas:

norte	Solución
1	1
2	1, 2,
3	1 1, 2, 1, 3, 1, 2,
4	1 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1
5	1, 2 , 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1 , 3, 1, 2, 1

Cada línea de la tabla se genera repitiendo dos versiones de la solución anterior e insertando el número N en el centro. Sorprendentemente, el número r en cualquier secuencia que represente una solución al rompecabezas es igual a 1 más que el exponente de la mayor potencia de 2 que divide el número r. Por ejemplo, la mayor potencia de 2 que divide a 12 es 22 y 2 + 1 = 3 es el número 12 en cualquier secuencia que representa una solución al rompecabezas.

Dado que 16 = 24 es la mayor potencia de 2 que divide el número 10.000, esta observación también muestra que los sacerdotes Brahman moverán el disco 4 + 1 = 5 el día 10.000.

tractrix (curva equivalente, tractora) Si uno arrastra el extremo delantero de una bicicleta a lo largo de un camino recto, entonces el camino trazado por la rueda trasera (asumiendo que la ruedas de la bicicleta estaban inicialmente desplazadas) forma una curva llamada tractriz. Esta curva tiene la propiedad de que el punto final de cada segmento de línea de longitud fija (la longitud de la bicicleta) TANGENTE a la curva se encuentra con la trayectoria en línea recta.

La curva fue estudiada por primera vez por el físico holandés Christiaan Huygens (1629-1695), quien describió la trayectoria en términos de un objeto arrastrado por una longitud fija de cuerda. Acuñó el nombre “tractrix” para el camino, derivado de la palabra latina trahere que significa “arrastrar”. La curva también se llama a veces "hund kurve" (en alemán, "curva de sabueso"), inspirada en la imagen de un perro reacio que es arrastrado con una correa por un dueño insistente.

trayectoria La trayectoria de un objeto o partícula en movimiento se denomina trayectoria. La trayectoria de una partícula a menudo se describe a través de ECUACIONES PARAMÉTRICAS. Por ejemplo, las ecuaciones x(t) = cos(t) e y(t) = sin(t) dan, en cada tiempo t, las coordenadas x e y de una partícula cuya trayectoria es un CÍRCULO UNitario. La trayectoria de una pelota lanzada al aire es una PARÁBOLA invertida, suponiendo que se puedan ignorar los efectos de la resistencia del aire.

El término trayectoria también se usa en la teoría de SISTEMAS DINÁMICOS como un nombre alternativo para la ÓRBITA de un punto.

número trascendental Ver NÚMERO ALGEBRAICO.

transformación Cualquier FUNCIÓN o mapeo que cambia una cantidad en otra se llama transformación. Aunque el término es esencialmente sinónimo del término función, generalmente se usa solo en el contexto de la geometría, donde se habla de una TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA y una TRANSFORMACIÓN DE

COORDENADAS.

La notación matricial se usa a menudo para describir transformaciones geométricas del plano. Un punto en el plano es representado por una columna VECTOR $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ y un geométrico transformación como una matriz A de 2 × 2. El efecto de la transformación geométrica viene dado por la multiplicación de matrices. Por ejemplo, la aplicación de las siguientes matrices de 2 × 2

$$\begin{matrix} 1 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 1\ 0 \\ -1\ , & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\ , & 0\ 0 \end{matrix}$$

Machine Translated by Google

tiene el efecto de, respectivamente, reflejar puntos a través de el eje x, rotando puntos alrededor del origen a través de un ángulo θ y puntos de proyección en el eje x.

En álgebra, un cambio en la forma de una matemática expresión, sin cambiar su validez, se llama transformación. Por ejemplo, la acción de EXPANDIR BRACKETS transforma la expresión $y = (x + 1)2$ en la expresión equivalente $y = x^2 + 2x + 1$.

Véase también TRANSFORMACIÓN AFÍNA; TRANS LINEAL FORMACIÓN; PROYECCIÓN.

transformación de coordenadas (transformación de ejes) En geometría de coordenadas, a menudo es conveniente cambiar la posición de un conjunto de ejes de coordenadas, ya sea por una ROTACIÓN o una TRASLACIÓN, para simplificar la expresión de una determinada curva en estudio. Por ejemplo, considere la curva dada por la ecuación $x^2 – 6x + y^2 + 4y = 3$. Por COMPLETANDO EL CUADRADO, esta ecuación se puede reescribir:

$$(x -3)2 + (y + 2)2 = 16$$

Poniendo $X = x – 3$ y $Y = y + 2$ esto dice:

$$X2 + Y^2 = 16$$

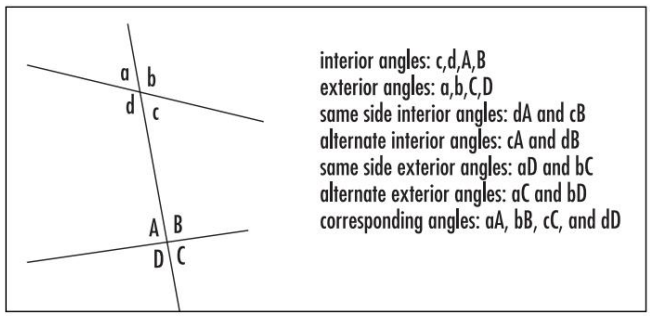
identificando la curva como un CÍRCULO de radio cuatro. En esto En efecto, hemos introducido dos nuevos ejes de coordenadas, X e Y, cada uno de los cuales es una traslación de uno de los ejes x e y originales . El origen del nuevo sistema de coordenadas se encuentra en la ubicación donde X = 0 e Y = 0, es decir, en el punto (3,–2).

Cambio desde el uso de COORDI CARTESIAN NATES a COORDENADAS POLARES, o, en tres dimensiones geometría, a COORDENADAS ESFÉRICAS o COORDENADAS CILÍNDRICAS, también se considera una transformación de coordenadas

Ver también EJES PRINCIPALES; TRANSFORMACIÓN.

traducción Ver TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA.

transversal (atravesar) Una línea que corta dos o más otras rectas se llama transversal. Cuando una transversal corta solo otras dos líneas, se forman ocho ángulos. El los cuatro ángulos que están entre las dos rectas se llaman ángulos interiores, y los cuatro que están fuera se llaman ángulos exteriores. Se dan nombres especiales a los pares de ángulos, como se muestra en el siguiente diagrama:



Los ángulos asociados a una transversal

Según el POSTULADO PARALELO, dos líneas cortados por una transversal son paralelos si, y sólo si, dos los ángulos interiores alternos son iguales (o, de manera equivalente, si dos ángulos correspondientes cualesquiera son iguales).

trapecio/trapecio UN CUADRILÁTERO con dos los lados paralelos se llaman trapezoide en los Estados Unidos y un trapecio en el Reino Unido. Los asuntos son confuso, para una figura de cuatro lados sin dos lados paralelo se llama trapecio en los Estados Unidos y un trapecio en el Reino Unido. Seguimos el uso de EE. UU. de los términos aquí.

El área de un trapezoide viene dada por la fórmula

$$\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

donde b1 y b2 son las longitudes de los dos paralelos bordes, y h es la distancia entre ellos. (Ver ÁREA.) La línea media o mediana de un trapezoide es el segmento de línea recta que une los PUNTOS MEDIOS de los lados no paralelos. Un ejercicio de geometría muestra que tiene una longitud $m = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$. (Use triángulos semejantes.) Así, el área de un trapezoide es la misma que la de un RECTÁNGULO de largo m y ancho h.

Si los dos lados no paralelos de un trapezoide son iguales de longitud (y no ellos mismos paralelos), entonces llamamos al Figura un trapezoide isósceles.

Ver también FIGURAS SIMILARES.

regla trapezoidal Ver INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

Machine Translated by Google

problema del viajante de comercio Un problema matemático basado en una situación de la vida real, llamado problema del viajero de comercio, se puede plantear de la siguiente manera:

> Hay un cierto número de pueblos conectados en pares por carreteras. Se especifican las distancias de todas las rutas de carretera entre pueblos.
> Planifica un viaje que visite todos los pueblos y regrese al punto de partida minimizando la distancia total recorrida.

Alternativamente, se puede tratar de minimizar los costos de viaje al trasladarse de un pueblo a otro, o el tiempo necesario para completar todo el viaje, por ejemplo. El deseo de encontrar rutas eficientes como estas es un problema práctico importante. Puede conducir a importantes ahorros financieros para las empresas de transporte y otros tipos de industria.

El problema del viajante de comercio es equivalente al desafío de encontrar un circuito hamiltoniano de distancia mínima en un GRAPH, un desafío en el campo de GRAPH TEORÍA.

Un método para resolver el problema del viajante de comercio es simplemente hacer una lista de todas las rutas posibles y ver cuál es la más eficiente. Podemos contar el número de rutas a verificar de la siguiente manera:

> Supongamos que hay n pueblos en total. Comenzando en una ciudad, hay n – 1 opciones de qué ciudad visitar a continuación. Habiendo llegado a ese pueblo, hay n – 2 opciones para qué pueblo visitar en segundo lugar, y así sucesivamente, hasta llegar a una elección final de un pueblo para visitar antes de volver a empezar. Observando que, para los propósitos de este problema, recorrer una ruta en la dirección de avance es equivalente a recorrer esa ruta en la dirección inversa, ¡tenemos un total de ( ) n −1! Posibles rutas en todas a tener en cuenta. 2

(Este argumento hace uso del PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN.) Para los valores más pequeños de n, esta cuenta es pequeña y es bastante factible programar una computadora para verificar todas las rutas posibles, pero para cualquier problema práctico de tamaño razonable, esta fórmula produce un conteo extraordinariamente grande. Por ejemplo, el problema de solo 20 pueblos ya genera más de 60 billones de rutas diferentes para su consideración. Incluso las computadoras más rápidas de la actualidad no pueden ayudarnos a encontrar la ruta más eficiente en un período de tiempo razonable.

Lo que se busca es un ALGORITMO manejable que funcione en un tiempo razonable. Un posible enfoque es usar el algoritmo del vecino más cercano:

> Comenzando en un pueblo, visite primero el pueblo más cercano, luego visite el pueblo más cercano que aún no haya visitado, y así sucesivamente. Regrese a la ciudad de inicio cuando no haya otra opción disponible.

Una computadora puede programarse fácilmente para realizar este algoritmo rápidamente. Desafortunadamente, aunque es fácil de realizar, se sabe que este procedimiento podría no producir necesariamente la ruta más eficiente en general.

Sigue siendo un problema sin resolver si existe un procedimiento simple que garantice producir la ruta óptima cada vez que se intenta. La mayoría de los matemáticos creen que tal algoritmo nunca se encontrará.

Véase también NP COMPLETO; LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

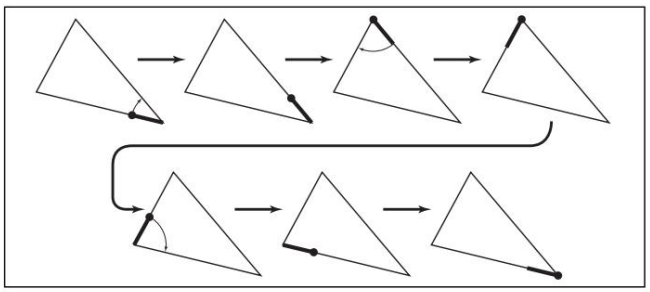
árbol Ver GRÁFICO.

triángulo (trigón) UN POLÍGONO con tres lados se llama triángulo. Precisamente, un triángulo es la figura geométrica cerrada formada por tres segmentos de recta (los lados del triángulo) que unen tres puntos no colineales en el plano (los vértices del triángulo). Cada triángulo contiene tres ÁNGULOS interiores.

El POSTULADO PARALELO muestra que los tres ángulos interiores de un triángulo suman 180°. Esto también se puede demostrar físicamente con un truco de torneado de lápiz:

> Dibuja un triángulo grande en una hoja de papel y coloca un lápiz en una esquina del triángulo contra un lado. Toma nota de la dirección a la que apunta la punta del lápiz.
>
> Gira el lápiz en el ángulo dado por la esquina en la que se encuentra. A continuación, deslice el lápiz a lo largo del lado del triángulo hasta el segundo ángulo del triángulo. (Observe que esta acción de deslizamiento no altera la dirección en la que apunta actualmente el lápiz). Gire el lápiz a través de este segundo ángulo, asegurándose de permanecer en el interior del triángulo.
>
> Ahora deslice el lápiz a lo largo del segundo lado del triángulo para colocarlo en el tercer ángulo del triángulo. Gira el lápiz a través de este tercer ángulo y deslízalo de nuevo a su posición original. Observe que el lápiz ahora apunta en la dirección opuesta a su inicio.

Machine Translated by Google



Girar un lápiz dentro de un triángulo

Esta demostración muestra que el efecto neto de girar un lápiz a través de cada uno de los tres ángulos de un triángulo es girar el lápiz media vuelta. Por lo tanto, los tres ángulos del triángulo de hecho suman 180°. Además, está claro que este argumento trabajo para cualquier triángulo que se pueda dibujar. Un argumento similar muestra que la suma de los ángulos en cualquier cuadrilátero es 360° en cualquier polígono de cinco lados, 540° y, en En general, la suma de los ángulos en cualquier forma de N lados es (N -2) × 180°.

Los triángulos se clasifican según el relativo longitudes de sus lados: Un triángulo es escaleno si cada lado es de diferente longitud, isósceles si al menos dos lados son de igual longitud y equilátero si los tres lados son iguales mismo largo. Un estudio del principio SAS muestra que los ángulos OPUESTOS a los dos lados iguales en longitud en un triángulo isósceles tienen igual medida. como un equilátero triángulo es también isósceles, se sigue que un equilátero triángulo es EQUANGULAR, es decir, los tres ángulos tienen la misma medida (de 60°).

Los triángulos se pueden clasificar alternativamente según sus ángulos. Un triángulo acutángulo tiene los tres ángulos menos de 90° en medida, un triángulo rectángulo contiene precisamente un ángulo igual a 90°, y un triángulo obtuso contiene un ángulo de medida superior a 90°. (No es posible que un triángulo tenga dos ángulos obtusos.)

Si la imagen de un triángulo está orientada de modo que un lado del triángulo es horizontal, entonces ese lado se llama base del triangulo. La altura del triángulo es la distancia vertical entre la base de la figura y el vértice del triángulo que no está sobre la base. Un estudio de ÁREA muestra que, si se orienta apropiadamente, el interior de un triángulo ocupa la mitad del interior del rectángulo que encierra el triángulo, con la base como un lado del rectángulo Por lo tanto, el área de un triángulo está dada por la formula:

$$\text{área} \quad \frac{1}{2}\text{altura base} = \times \times$$

Si los tres lados del triángulo tienen longitudes a, b y c, entonces la FÓRMULA DE HERON también muestra que el área de el triangulo esta dado por:

$$= \text{---} \; ss\,a\,sb(sc)\;\;)(\;)(\;\text{área}$$

dónde $s = \frac{a\,B+\,C}{2}$ es el semiperímetro del triángulo.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS muestra que si un triángulo rectángulo tiene lados de longitud a, b y c, con los lados a y b rodeando el ángulo recto, entonces $a^{2}{}_{+\,\text{segundo}\,2\,2} = do$. El La DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO sigue como consecuencia.

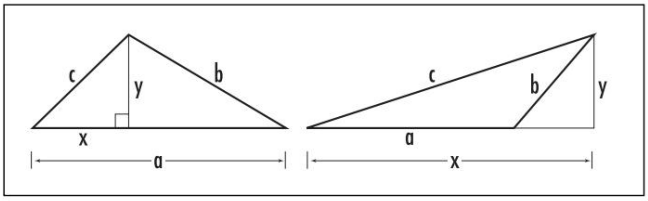
Para un triángulo arbitrario con lados de longitud a, b y c, si el ángulo entre los lados a y b es agudo (es decir, menos de 90°), entonces un $^{2}{}_{+\,\text{segundo}\,2} > c^{2}$. Si, por el contrario, el el ángulo entre los lados a y b es obtuso (mayor de 90°), entonces $un^{2}{}_{+\,\text{segundo}\,2\,2} < do$. Esto se sigue de la LEY DE COSENOS. También se puede ver algebraicamente de la siguiente manera:

Para el diagrama de abajo a la izquierda, el ángulo entre lados a y b es agudo. Claramente tenemos a > x y b > y, por lo que $a^{2}{}_{+\,\text{segundo}\,2} \quad {}_{2\,2} > x \quad {}_{+\,y} \quad {}^{2}$. Para el dia = c gramo abajo a la derecha, el ángulo entre los lados a y b es obtuso. Claramente tenemos x > a. Como consecuencia:

$$\begin{aligned} {}_{2c_} &= x\;{}^{2\,2}{}_{+\,y} \\ 2 &= x \;\; + (b^{\,2} - (x - a) \quad {}^{2}) \\ &= \text{segundo}\,2\,2 + 2ax - un \\ &< \text{segundo}\,2\,2 + 2a \cdot un - un \quad {}_{=\,\text{segundo}\,2} + un^{2} \end{aligned}$$

Estas observaciones proporcionan una prueba del CONVERSO de Teorema de Pitágoras:

Si, para un triángulo con lados de longitud a, b y c, tenemos un $2 + b\,2 = do^{2}$, entonces el triangulo es un rectangulo triángulo con ángulo recto entre los lados de longitud a y b.



Estableciendo el inverso del teorema de Pitágoras

Machine Translated by Google

(No puede darse el caso de que el ángulo entre los lados a y b es aguda, pues entonces $a^2 + b^2 > c^2$, que no es cierto. El ángulo entre estos dos lados tampoco puede ser obtuso. La única posibilidad que queda es que estos dos lados rodean un ángulo recto.)

Para un triángulo rectángulo o un triángulo obtuso, estos las observaciones muestran que el lado más largo de dicho triángulo se encuentra opuesto al ángulo más grande del triángulo. El LA LEY DE LOS SENOS se puede usar para probar que esto es cierto incluso para triángulos acutángulos:

> En cualquier triángulo el lado más largo del triángulo se encuentra frente al ángulo mayor del triángulo.

Propiedades especiales de los triángulos

Hay una serie de propiedades sorprendentes de los triángulos. digno de mención.

1. Líneas y Concurrencia

Una línea PERPENDICULAR que pasa por el PUNTO MEDIO de un lado dado de un triángulo se llama bisectriz perpendicular del triángulo, y una línea perpendicular que pasa por el vértice opuesto al lado dado es llamada altura del triángulo. Un estudio de equidistancia (ver EQUIDISTANTE) muestra que las tres bisectrices perpendiculares de cualquier triángulo pasan por un punto común (llamado el circuncentro del triángulo), al igual que las tres alturas de cualquier triángulo (a través de un punto llamado el ortocentro del triángulo). Eso es, cada conjunto de tres líneas es CONCURRENTE.

UNA MEDIANA DE UN TRIÁNGULO es una línea que conecta uno vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto ese triangulo Es posible probar que las tres medianas de cualquier triángulo también son concurrentes. (Lo común punto de intersección se llama centroide del triángulo.) El matemático suizo LEONHARD EULER (1707-1783) mostró que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de cualquier triángulo se encuentra en línea recta, hoy llamada LÍNEA DE EULER.

Un estudio de equidistancia también muestra que los tres Las rectas que bisecan los ángulos de un triángulo son concurrentes.

2. Triángulos equiláteros

Elija cualquier punto P dentro de un triángulo equilátero y calcular la suma de las distancias de este punto desde cada uno de los tres lados del triángulo. Entonces esta suma es igual al valor de la altura del triángulo, sin importar donde se encuentra el punto P. (Para ver esto, supongamos que el el triángulo equilátero tiene lado de longitud b. Etiqueta los vértices del triángulo A, B y C. Dibuja segmentos de recta que conecten P con cada vértice del triángulo. Entonces el área A del triángulo, $A = \frac{1}{2}bh$ donde h es la altura del triángulo equilátero, es la suma de las áreas de los tres triángulos ABP, ACP y BCP. Sean h1 , h2 y h3 sean las alturas de estos tres triángulos, respectivamente. nosotros tener $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bh1 + \frac{1}{2}bh2 + \frac{1}{2}bh3$ dando h1 + h2 + h3 = h.)

3. Embaldosados

Cualquier triángulo puede usarse para un TESELADO del plano.

4. Teorema de Napoleón

Emperador francés Napoleón Bonaparte (1769–1821) Se alega que descubrió el siguiente resultado sorprendente:

> Dado un triángulo arbitrario, dibuje un triángulo equilátero en el exterior de cada lado del triángulo. Entonces los centros de estos tres triángulos equiláteros forman otro triángulo equilátero, llamado el triángulo exterior de Napoleón de el triángulo primitivo. Además, si volteamos cada triángulo equilátero de modo que ahora se encuentra dentro del triángulo original, entonces los centros de esos triángulos nuevamente forman un triángulo equilátero, llamado el triángulo interno de Napoleón. La diferencia de las áreas de la externa e interna triángulos de Napoleón es igual al área del triángulo original.

5. Triángulos enteros

Un triángulo se llama triángulo entero si la longitud de cada lado del triángulo es un número entero. Así cualquier triángulo que se forma colocando fósforos, digamos, sin romper los fósforos, es un triángulo entero. Es interesante contar el número de triángulos enteros que se pueden crear con un número fijo de fósforos. Por ejemplo, hay cuatro triángulos enteros diferentes con perímetro 11: un triángulo 5-5-1, un triángulo 5-4-2, un 5-3-3 triángulo y un triángulo 4-4-3. Sorprendentemente, el conde disminuye si agrega un fósforo extra a la colección: uno solo puede hacer tres triángulos diferentes con perímetro 12 (es decir, triángulos 5-5-2, 5-4-3 y 4-4-4).

Machine Translated by Google

Los matemáticos han demostrado que el número de triángulos enteros diferentes que se pueden formar con n cerillas es dado por la formula $\left\langle \frac{n^2}{48} \right\rangle$ si n es par, y $\left\langle \frac{(n+3)^2}{48} \right\rangle$ si n es impar, donde los corchetes se usan para indicar redondeando al entero más cercano.

El triángulo entero 5-12-13 (un triángulo rectángulo) tiene la propiedad de que el valor numérico de su área es el igual que su perímetro: A = 30, P = 30. El triángulo 6-8-10 es el único otro triángulo entero recto con este propiedad. Si uno relaja la condición de tener razón, entonces existen muchos triángulos no rectángulos con esta propiedad. Por ejemplo, un triángulo 7-15-20 tiene área y perímetro cada uno con el valor numérico 42. (Utilice fórmula de Heron para calcular su área).

Alternativamente, se puede buscar un par de números enteros triángulos que comparten el mismo valor de perímetro y mismo valor para el área. Una vez más, hay muchos pares de este tipo. Por ejemplo, los triángulos 14-18-29 y 8-25-28 cada uno tiene perímetro 61 y área $210\sqrt{22}$. El 45-94-94 y 49-84-100 también comparten el mismo perímetro y el misma area.

Véase también AAA/AAS/ASA/SAS/SSS; BASE DE UN POLÍGONO/ POLIEDRO; LA PARADOJA DE BERTRAND ; CÍRCULO; EQUILÁTERO; NÚMEROS FIGURADOS; HIPOTENUSA; PEDAL TRIÁNGULO; NÚMEROS TRIANGULARES.

desigualdad triangular La proposición de que la suma de las longitudes de cualquiera de los dos lados de un TRIÁNGULO es mayor que la longitud del tercer lado se llama triangular desigualdad. Por lo tanto, si a, b y c son las tres longitudes de los lados de un triángulo, entonces se cumple cada una de las siguientes relaciones:

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Este resultado se sigue como consecuencia de PYTHAGORAS'S TEOREMA. La proposición inversa también es cierta: Si tres números a, b y c satisfacen las tres relaciones anterior, entonces es posible dibujar un triángulo con lados de longitud a, b y c. (Para ver esto, dibuje un segmento de línea de longitud a, dibuje un círculo de radio b con centro en un punto final del segmento de línea, y un círculo de radio c con el segundo punto final como centro. Las tres relaciones asegúrese de que estos círculos se intersecan en un punto P. Entonces P es el vértice de un triángulo abc con lado de longitud a como el base.) As, la construccin de un tringulo 7-9-12, para ejemplo, es posible, pero la construcción de un 16-23-40 triángulo no lo es. (El número 40 es mayor que 16 + 23.)

Si alguna de las relaciones anteriores se reemplaza por una igualdad, a = b + c, por ejemplo, entonces el triángulo correspondiente es degenerado, lo que significa que sus tres vértices se encuentran en un línea recta. Esta observación se puede utilizar de la siguiente manera:

> Si la distancia: de Adelaida a Darwin es 3.200 km, de Adelaida a Brisbane son 1.200 km, de Brisbane a Canberra son 600 km, y de Canberra a Darwin hay 1.400 km, luego sólo se puede deducir que las cuatro ciudades se encuentran en la misma linea recta.

La desigualdad triangular se puede reformular de la siguiente manera:

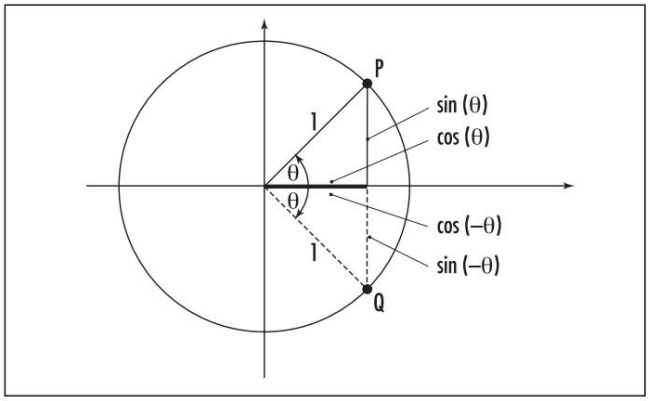
> La longitud de cualquier lado de un triángulo es menor que la mitad del perímetro del triángulo.

(Agregando a a ambos lados de la primera desigualdad, por ejemplo, da 2a < a + b + c. La cantidad correcta es la perímetro del triángulo.) Esta caracterización permite uno para identificar rápidamente todos los triángulos con lados enteros que tiene un perímetro dado (como hecho con palitos de fósforo, por ejemplo). Por ejemplo, con 11 fósforos uno puede hacer cuatro triángulos dados por los triples 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3 y 4-4-3. (Cada número es menos de la mitad de 11.) Sorprendentemente, el conteo disminuye si uno agrega otra cerilla a la colección—solo hay tres triángulos enteros con perímetro 12: 5-5-2, 5-4-3, y 4-4-4. Los matemáticos han demostrado que el número de triángulos que se pueden formar con n cerillas es $\left\langle \frac{n^2}{48} \right\rangle$ si n es par y $\left\langle \frac{(n+3)^2}{48} \right\rangle$ si n es impar, donde el los corchetes angulares indican el redondeo al entero más próximo.

números triangulares Ver NÚMEROS FIGURADOS.

trigonometría Contrariamente a su nombre, la teoría de la trigonometría está mejor motivada como una teoría sobre CIR CLE, no triángulos. (Esto, de hecho, coincide con la historia desarrollo del tema.) Comenzando con el círculo más simple imaginable, a saber, un círculo de radio 1 centrado en el origen, uno define dos funciones, seno y coseno, simplemente como las coordenadas x e y de un

Machine Translated by Google



El seno y el coseno de un ángulo positivo y uno negativo

punto en ese círculo ubicado en un ángulo particular θ. Se ha convertido en una convención medir ángulos en relación con el eje x positivo, con un ángulo positivo interpretado como un giro en sentido contrario a las manecillas del reloj y un ángulo negativo como un giro en el sentido de las manecillas del reloj. La coordenada y de un punto en el círculo es el seno (abreviado "sin") del ángulo en el que se encuentra ese punto, y la coordenada x es el coseno del valor complementario (abreviado "cos"). Así, un punto P ubicado en el ángulo θ tiene coordenadas P = (cos(θ), sin(θ)).
Un punto Q ubicado en el ángulo –θ tiene coordenadas Q = (cos(–θ), sin(–θ)).

Vemos en el diagrama que las funciones seno y coseno satisfacen las relaciones:

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$$

Además, el TEOREMA DE PITÁGORAS da $(\sin(\theta))2 + (\cos(\theta))2 = 1$. Siguiendo la convención de escribir $(\sin(\theta))n$ como $\sin n\theta$, se lee:

$$\text{sen}2\theta + \cos2\theta = 1$$

Tenga en cuenta que sumar o restar un múltiplo de 360° (o, si se usa la medida en radianes, cualquier múltiplo de 2π) a un ángulo no cambia la ubicación del punto en el CÍRCULO UNIDAD que representa . Tenemos:

$$\cos(\theta + 360k) = \cos\theta$$
$$\text{sen}(\theta + 360k) = \text{sen}\theta$$

para cualquier número entero k.

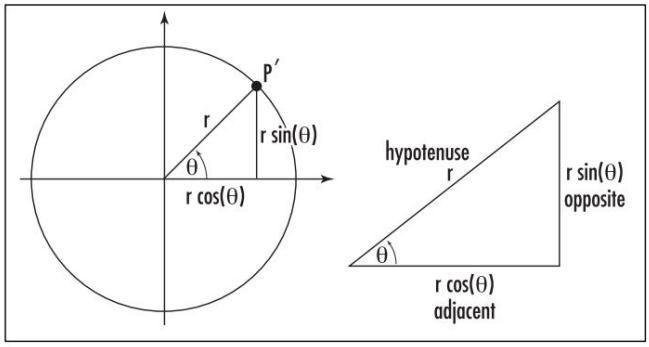
Es posible calcular el seno y el coseno de algunos ángulos simples. Por ejemplo, un punto ubicado en el ángulo θ = 0 grados se encuentra en la posición (1,0), por lo que cos(0) = 1 y sin(0) = 0. De manera similar, el punto en el ángulo θ = 90° tiene coordenadas (0,1) dando como resultado cos(90) = 0 y sin(90)
= 1. Un punto en el ángulo θ = 45° se encuentra en un vértice de un triángulo rectángulo isósceles, lo que demuestra que los valores de seno y coseno para 45° son iguales. El teorema de Pitágoras dice nosotros que $\cos(45) = \sin(45) = \sqrt{2}\ \frac{1}{}$. Del mismo modo, un punto en el ángulo θ = 60 se encuentra en el vértice de la mitad de un equilátero triángulo de lado 1. Obtenemos $\cos(60) = \frac{1}{2}$ y por Teorema de Pitágoras, sen(60) = invertido $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Estos valores son para un ángulo de 30°.

Conexión con círculos más grandes y triángulos Si uno agranda el diagrama del círculo unitario por un factor de ESCALA r, entonces todas las longitudes en ese diagrama aumentan por ese factor r. En consecuencia, las coordenadas de un punto P′ ubicado en un ángulo θ en un círculo de radio r (todavía centrado en el origen) vienen dadas por los valores cos θ y senθ multiplicados por r. Tenemos P′ = (r cos θ, r sen θ).

Dentro del diagrama se encuentra un triángulo rectángulo con un ángulo θ y una hipotenusa igual a r. El lado opuesto al ángulo θ tiene una longitud de r senθ, y el lado restante adyacente al ángulo tiene una longitud de r cos θ. Note que la razón "opuesto sobre la hipotenusa" tiene valor sen θ:

$$\frac{\text{hip}}{\text{hop}} = \frac{\text{r sen } \theta}{\text{r}} = \text{sen } \theta$$

De manera similar, la relación "adyacente sobre la hipotenusa" produce cosθ:



Relacionar la trigonometría con los triángulos

Machine Translated by Google

Historia de la trigonometría

Desde tiempos muy remotos, topógrafos, arquitectos, navegantes y astrónomos han utilizado los TRIÁNGULOS para determinar distancias que no se pueden medir directamente. Esto dio origen al tema que hoy conocemos como trigonometría. Hay problemas en el texto egipcio antiguo, el PAPIRO RHIND de alrededor de 1650 a. C., que requieren la determinación de los ángulos de inclinación de las caras de las pirámides usando el equivalente de la función cotangente que usamos hoy, y una tablilla de arcilla babilónica de alrededor de 1700 a . una tabla de val secante vale para los 15 ángulos entre 30° y 45°. Se dice que el filósofo griego TALES DE MILETO (ca. 600 a. C.) utilizó triángulos similares para determinar la altura de la pirámide de Keops comparando la longitud de su sombra con la longitud de la sombra de una varilla insertada en el suelo.

ERATOSTENES DE CIRENE (ca. 250 aC) calculó la circunferencia de la TIERRA usando longitudes de sombras y un argumento geométrico simple sobre ángulos.

Los astrónomos griegos de la antigüedad creían que el las estrellas y los planetas del cielo nocturno se movían a lo largo de los arcos circulares de una esfera celeste gigante, y trabajaron para desarrollar modelos que pudieran predecir con precisión el movimiento de estos objetos en la esfera. En lugar de expresar las cuestiones en términos de ángulos, lo que resultó ser difícil, los astrónomos griegos optaron por trabajar con medidas de longitudes rectas estrechamente relacionadas con los ángulos, es decir, las longitudes de ACORDES de CÍRCULOS.

Hiparco de Rodas (ca. 200 a. C.) construyó una tabla de tales longitudes de cuerda para un círculo de circunferencia 21,600 = 360 × 60 unidades (lo que corresponde a 1 unidad de circunferencia por cada minuto de arco).

En el siglo II EC, el matemático CLAUDIUS PTOLEMY escribió el primer tratado extenso sobre la teoría de las cuerdas y su uso para obtener información sobre los “triángulos esféricos”, es decir, triángulos formados por grandes arcos circulares en la superficie de una esfera. Además de elaborar teoremas, Ptolomeo explicó cómo construir tablas de valores de cuerdas y presentó su propia lista de valores de cuerdas para todos los ángulos entre cero y 180° en incrementos de medio grado.

El siguiente paso importante en el desarrollo de la trigonometría se produjo en la India. Los eruditos del siglo V EC ya habían descubierto que trabajar con medios acordes para medios ángulos simplificaba enormemente la teoría de los acordes y sus aplicaciones a la astronomía. Como se muestra en la figura de la derecha, este enfoque es casi la misma construcción que la función seno actual. Mientras que pensamos en el seno como una relación de longitudes (la longitud de la media cuerda al radio), los eruditos indios interpretaron el seno como la longitud real de la media cuerda. Llamaron a esta longitud jy a-ardha o simplemente jy a,.

Por supuesto, los jy a, valor de un ángulo diferente para círculos de diferentes tamaños. Los eruditos ARYABHATA, BH ASKHARA II, y y otros desarrollaron técnicas asombrosamente sofisticadas para calcular valores de medios acordes.

Los eruditos árabes del siglo X se interesaron mucho por la obra de la India. El matemático Abu al-Wafa (ca. 950) de Bagdad sistematizó teoremas y demostraciones de la trigonometría india y preparó su propia tabla completa de valores de medias cuerdas. También se cree que inventó la función tangente, a la que llamó “sombra”, y posiblemente las funciones secante y cosecante. (Aún así, todos se consideraban como longitudes específicas, no como proporciones de longitudes). Los eruditos árabes no sabían cómo

$$\frac{\text{hip}}{\text{adj.}} = \frac{\text{r porque } \theta}{\text{r}} = \text{porque } \theta$$

Como cualquier triángulo rectángulo puede verse como proveniente de un círculo con un radio igual a la longitud de la hipotenusa, uno puede usar estas proporciones como las definiciones del seno y el coseno de un ángulo dado θ. Este es el enfoque que suele adoptarse en los textos introductorios sobre el tema. Los estudiosos han dado nombres a las seis proporciones que aparecen en un triángulo rectángulo que contiene un ángulo θ:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hip}}$$

$$\text{porque}\,\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hip}}$$

$$\text{bronceado} == \frac{\text{oportunidad}}{\text{hip}} \quad \frac{\text{r sen } \theta}{\theta\ \text{r cos}} \quad \frac{\text{sen } \theta}{\text{porque}\,\theta}$$

$$\text{segundo}\theta == \frac{\text{adj.}}{\text{hip}} \quad \frac{\text{r}}{\text{r porque } \theta} \quad \frac{1}{\text{porque}\,\theta}$$

$$\csc\theta == \frac{\text{adj.}}{\text{oportunidad}} \quad \frac{\text{r}}{\text{r sen } \theta} \quad \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$\text{cuna } \theta == \frac{\text{adj.}}{\text{oportunidad}} \quad \frac{\theta\ \text{r cos}}{\text{r sen } \theta} \quad \frac{\text{porque}\,\theta}{\text{sen } \theta}$$

Aquí tan representa la tangente, sec la secante, csc la cose cant y cot la cotangente. Estos nombres provienen de la siguiente observación:

Sea P un punto en el círculo unitario ubicado en un ángulo θ. Trazar una recta tangente vertical a la

Machine Translated by Google

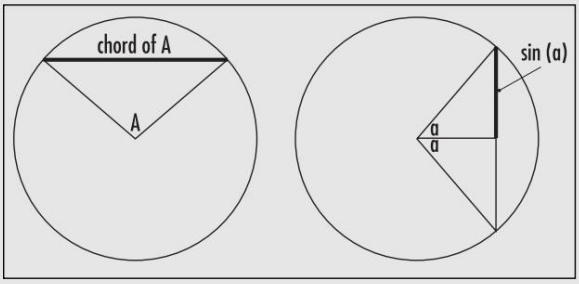
tradujeron la palabra sánscrita jy a a sus textos y simplemente escribieron jiba como una aproximación cercana.

En el siglo XII, los eruditos europeos comenzaron a traducir las obras árabes y pronto se familiarizaron con la extensa teoría de la trigonometría. Al malinterpretar jiba como la palabra árabe jaib para "cala" o "bahía", los traductores escribieron el equivalente latino sinus como el nombre de la cantidad de media cuerda. De esto tenemos el nombre "seno".

El famoso erudito FIBONACCI (ca. 1170-1250) también viajó extensamente por los países árabes y escribió sobre su trigonometría en su famosa obra Practica geometriae.

Alrededor de 1464, el astrónomo y matemático alemán REGIOMONTANUS (1436-1476) compiló De triangulis omnimodis, un compendio de trigonometría de esa época. Este trabajo tuvo una enorme influencia y durante las siguientes décadas aparecieron otros textos sobre el tema. El matemático alemán Georg Joachim Rhaeticus (1514-1574) publicó en 1551 el Canon doc trinae triangulorum, que definía, por primera vez, las seis funciones trigonométricas básicas y explicaba cómo relacionarlas con los triángulos rectángulos sin hacer ninguna referencia a los círculos. . El médico danés Thomas Fincke (1561-1656), en su obra Geometriae rotundi, acuñó los términos tangente y secante y desarrolló otras fórmulas trigonométricas fundamentales. La palabra trigonometría en sí misma fue inventada por el matemático alemán Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613) en su tratado Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus. En ese momento, la trigonometría ciertamente se consideraba un tema valioso de búsqueda matemática, independientemente de las aplicaciones a la astronomía.

El tema también demostró ser útil en el estudio del álgebra. matemático francés FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603)



Acordes y semiacordes

mostró, por ejemplo, que se podían resolver ciertas ecuaciones cúbicas haciendo sustituciones trigonométricas. Su famosa fórmula para π se puede derivar con el uso repetido de funciones trigonométricas.

Hasta este punto, los valores del seno, así como los otros valores trigonométricos, todavía se consideraban longitudes de línea reales y no proporciones de longitudes. Después de la invención del CÁLCULO, LEONHARD EULER (1707-1783) se dio cuenta de que es apropiado pensar en el seno no como una longitud física, sino como una función del ángulo independiente de la longitud. Sugirió que esto podría lograrse escalando todos los círculos bajo consideración a círculos unitarios, una operación que es equivalente a dividir todas las cantidades por el radio del círculo. Así, por primera vez, todas las cantidades trigonométricas se consideraron proporciones. En 1748, Euler escribió Introductio in analysin infinito rum, que se convirtió en el libro de texto dominante sobre el tema de la trigonometría durante el siglo siguiente. Básicamente, describe los principios de la trigonometría tal como los consi

círculo en el punto M = (1,0). Extienda el radio OP más hasta que se encuentre con la línea tangente en Q. Entonces tan θ es la longitud del segmento de línea tangente MQ y sec θ es la longitud de la secante al círculo OQ.

Dividiendo la identidad pitagórica sen2θ + cos2θ = 1 entre cos2θ y sen2θ se obtienen las identidades:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Las fórmulas de suma y resta

El diagrama de la página siguiente muestra que dos copias congruentes de un triángulo rectángulo que contiene un ángulo A y dos copias de un segundo triángulo rectángulo que contiene un ángulo B se puede arreglar en el mismo rectángulo grande de dos maneras diferentes.

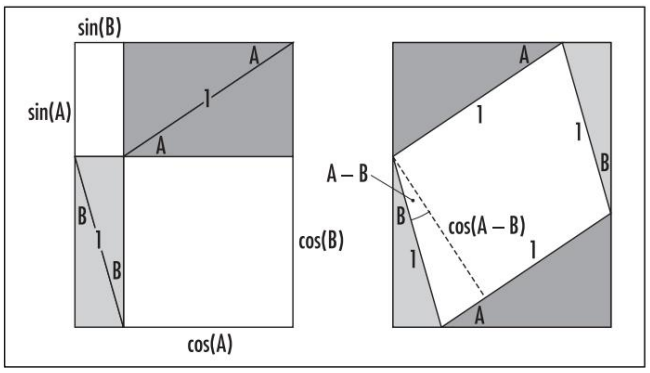
El ÁREA de la región que rodea a los cuatro triángulos, que debe ser la misma para cada diagrama, se puede calcular como la suma de las áreas de dos rectángulos o como el área de un PARALELOGRAMO de base de longitud 1 y altura de longitud cos (A - B). Esto produce la fórmula de la diferencia para los cosenos:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Sustituyendo en –B por B, se obtiene la fórmula de suma para cosenos:

$$\cos(A + B) = \cos A \cos(-B) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(-B) =$$
$$\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Machine Translated by Google



Demostrando la fórmula de la diferencia

Alternativamente, coloque el ángulo A en la otra esquina de cada uno de los triángulos que contienen este ángulo, y usa el mismos diagramas de cuatro triángulos dispuestos en un rectángulo. Esto produce las fórmulas de suma y diferencia para senos:

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen } A \cos B + \cos A \text{ sen } B$$
$$\text{sen}(A – B) = \text{sen } A \cos B – \cos A \text{ sen } B$$

Estas fórmulas también se siguen fácilmente de la FÓRMULA DE EULER . También tenemos las siguientes fórmulas de suma y resta para la función tangente:

$$\text{broncearse}(A + B) = \frac{\text{bronceado } A + \text{bronceado } B}{1 - \text{bronceado } A \text{ bronceado } B}$$

$$\text{broncearse}(A - B) = \frac{\text{bronceado } A - \text{bronceado } B}{1 + \text{bronceado } A \text{ bronceado } B}$$

Estos se obtienen escribiendo tan(A + B) = sin(A + B)/ cos(A + B), por ejemplo.

Véase también LA FÓRMULA DE DE MOIVRE ; DERIVADO; HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (ensayo); FUNCIONES HIPERBÓLICAS; FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS; TAYLOR SERIE.

trinomio Cualquier expresión algebraica que consta de tres términos, como a + b + c o la expresión cuadrática ax2 + bx + c, se llama trinomio.

Véase también MONOMIAL; BINOMIO; POLINOMIO.

producto vectorial triple Hay dos formas básicas de combine las operaciones PRODUCTO PUNTO y PRODUCTO CRUZADO en VECTORES para formar un producto de tres vectores tridimensionales a, b y c.

La combinación a · (b × c) se llama escalar triple producto de los tres vectores. el resultado de esto operación es un número real (escalar) que es positivo si a, b, y c forman un sistema diestro y es negativo si, en cambio, forman un sistema de mano izquierda. Cambiando el el orden de los vectores en este triple producto puede cambiar la orientación del sistema involucrado. Tenemos:

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) = –b \cdot (a \times c)$$
$$= –a \cdot (c \times b) = –c \cdot (b \times a)$$

El triple producto escalar tiene una buena interpretación geométrica:

> El valor absoluto del triple producto escalar es igual al volumen del PARALELEPIPE formado por los vectores a, b y c.

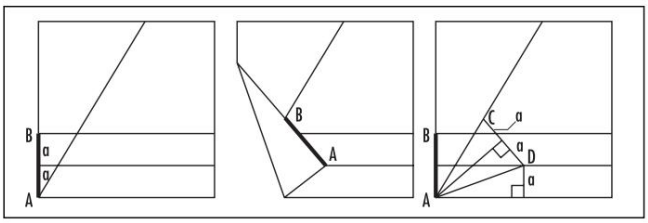
Para ver esto, observe que b × c es un vector perpendicular a la base del paralelepípedo formado por los dos vectores b y c. Si θ es el ángulo entre este vector y a, entonces la altura del paralelepípedo es la absoluta valor de |a| cos(θ). Dado que, según el producto vectorial, el área de la base está dada por |b × c | tenemos eso el volumen del paralelepípedo es: base × altura = |a||b × c || cos(θ)|, que es precisamente la fórmula de la valor absoluto del producto escalar: a · (b × c).

Un ejercicio de álgebra muestra que el triple escalar El producto de tres vectores se puede calcular tomando el DETERMINANTE de la MATRIZ 3×3 cuyas filas son las entradas de los vectores a, b y c, respectivamente.

El triple producto vectorial de tres vectores se define siendo la combinación: a × (b × c). El resultado es un vector que se encuentra perpendicular a b × c, así como a a. como b × c es perpendicular al plano formado por b y c, se sigue que a × (b × c) se encuentra en el plano bc.

Ver también SISTEMA DE MANO DERECHA/IZQUIERDA .

Trisección de un ángulo Uno de los problemas de la antigüedad. (como DUPLICAR EL CUBO y CUADRAR EL CÍRCULO) de considerable interés para los estudiosos del griego clásico



Trisección de un ángulo

Machine Translated by Google

fue la tarea de desarrollar un procedimiento general que dividiera cualquier ángulo dado en tres partes iguales. Se desconoce el origen de este problema, aunque parece una pregunta natural dado que el procedimiento de bisecar cualquier ángulo es relativamente sencillo. (Dado un ángulo definido por dos rayos, dibuje el arco de un círculo centrado en el vértice del ángulo para encontrar dos puntos en los rayos a la misma distancia de este vértice. Ahora dibuje círculos de radio fijo con centros en cada uno de estos dos puntos La línea que conecta el vértice del ángulo con el punto de intersección de los dos círculos es una bisectriz de ángulo.)

Utilizando un compás y una regla, es decir, una regla con longitudes específicas marcadas a lo largo, HIPÓCRATES DE QUIOS (ca. 440 a. C.) desarrolló una solución general sencilla al problema, al igual que ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287–212 a. C.) unos 200 años después. Alrededor de este tiempo, en aras de un mayor desafío intelectual, los académicos decidieron agregar la restricción de que solo las herramientas primitivas de una regla sin marcas y un compás podrían usarse en la solución. La dificultad del problema aumentó significativamente. APOLONIO DE PERGA (ca. 262–190 a. C.) encontró una solución al problema utilizando solo las herramientas básicas bajo el supuesto de que se podía dibujar una HIPERBOLA . Desafortunadamente, esto no se consideró un supuesto admisible. El problema siguió siendo uno de los mayores desafíos sin resolver durante dos milenios.

A principios del siglo XIX, los matemáticos se centraron en el problema específico de trisecar un ángulo de 60° o, de manera equivalente, en el problema de construir un ángulo de 20° utilizando únicamente regla y compás. En particular, si se puede producir tal ángulo, entonces es posible construir un segmento de línea de longitud x = cos20 (como uno de los catetos de un triángulo rectángulo con un ángulo de 20°). La identidad trigonométrica cos(3θ) = 4cos3 (θ) – 3cos(θ), observando que cos(60) = 1/2, muestra que la longitud x debe satisfacer la ecuación: 8x 3 – 6x – 1 = 0.

La teoría de los números CONSTRUCTIBLES muestra que cualquier cantidad de longitud racional se puede construir con regla y compás, y que si se pueden producir dos longitudes l1 y l2 , también se pueden producir su suma, diferencia, producto y cociente, junto con el raíz cuadrada de cada cantidad. Los matemáticos demostraron que cualquier solución x de la ecuación anterior no puede ser racional y, además, en 1837, el matemático francés Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) demostró que tal número x no es construible. Por lo tanto, el problema general de la trisección de un ángulo no tiene solución.

Es interesante notar que en el campo del origami, usando solo la herramienta de plegado de papel, es posible trisecar cualquier ángulo agudo dado. Suponga que el ángulo se coloca en la esquina inferior izquierda A de una hoja de papel cuadrada, con un rayo que define el ángulo como el borde inferior de la hoja y el otro rayo, llámelo L, un pliegue en el papel.
Dobla un pliegue de una altura arbitraria paralelo al borde inferior y dobla un segundo pliegue paralelo a la mitad de esta altura. Llame a la distancia entre estos dos pliegues a, y el punto en el borde izquierdo a la altura 2a punto B. Tome la esquina inferior izquierda de la hoja y doble el papel de modo que el punto B quede en el pliegue L (llame a la ubicación de este punto C) y de modo que el punto A se encuentre en el pliegue a la altura a, para definir un punto D. La línea que conecta A con D es exactamente un tercio del ángulo original.

(Para ver por qué esto funciona, observe que el TEOREMA DE PITÁGORAS establece que los segmentos de recta AD y BD tienen la misma longitud. Por la simetría del plegado, la longitud AC es igual a la longitud AD, lo que establece que el triángulo CAD es isósceles. Dibuje la bisectriz de este triángulo desde A. Esto produce un diagrama con tres triángulos rectángulos congruentes, que muestra que el ángulo en A está dividido en tres partes iguales.)

La paradoja de Tristram Shandy Esta paradoja sobre el infinito se deriva de la novela Tristram Shandy de Lawrence Sterne de 1760, que pretende ser parte de la autobiografía del protagonista. En él, el héroe Shandy observa que le ha llevado dos años describir sus primeros dos días, por lo que concluye que le será imposible completar la autobiografía en su totalidad. El filósofo y matemático BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUS SELL (1872–1970) señaló que, sin embargo, si el autor fuera inmortal, podría completar su objetivo y seguir escribiendo al mismo ritmo de progreso. (Por supuesto, se necesitaría una cantidad infinita de tiempo para hacerlo). Russell argumentó que una vida de duración infinita contiene tantos años como días.

Véase también CARDINALIDAD; EL HOTEL INFINITO DE HILBERT ; INFINIDAD; PARADOJA.

solución trivial Cualquier solución a un problema que es obvia, o que no tiene interés en el contexto dado, se llama solución trivial. Por ejemplo, la famosa ecuación de n tiene solución trivial ÚLTIMO FERMAT x ciones x = 0, y = 0, z ^{n} + ^{n} y = z TEOREMA DE = 0 y x = 1, y = 0, z = 1, y el

Machine Translated by Google

ecuación diferencial y $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \sin(xy)\,2\,dx\sqrt{y}\,0 =$ tiene solución trivial y = 0. Cualquier solución a un problema que puede ser de interés se llama no trivial. por ejemplo, el ecuación $x^3 - 2x = 0$ tiene solución no trivial $x = \sqrt{2}$.

La palabra trivial proviene de la palabra latina triv ium, el nombre medieval para los tres menos complicados de las siete materias de estudio ofrecidas en las universidades medievales: gramática, retórica y lógica. (El restante cuatro materias: aritmética, astronomía, geometría y música—fueron conocidos como el quadrivium.)

Los matemáticos a menudo usan la palabra trivial para describir un resultado que requiere poco o ningún esfuerzo para probar. Por ejemplo, que cualquier múltiplo de 4 es divisible por 2 se consideraría un resultado trivial.

tabla de verdad En el campo de la LÓGICA FORMAL, cálculo proposicional es el nombre que se le da al análisis de los valores de verdad de enunciados complicados construidos a partir de enunciados más simples. declaraciones unidas entre sí a través de los conectores y; o; si … entonces …; y si, y sólo si (llamados, respectivamente, el CONJUNCIÓN, la DISYUNCIÓN, el CONDICIONAL, y el BICONDICIONAL). También se puede considerar la NEGACIÓN de un enunciado.

Por ejemplo, la afirmación "La luna es redonda y está hecho de queso verde" es una declaración compuesta hecho de dos declaraciones más simples ("La luna es redonda" y "La luna está hecha de queso verde") vinculados juntos a través del conectivo y. El valor de verdad de la enunciado como un todo depende del valor de verdad del dos declaraciones individuales de las que se compone.

En los símbolos, las declaraciones generalmente se representan como letras minúsculas (p, q, r, por ejemplo), y los conectivos que las combinan se denotan:

p y q: pq
p o q: p q
Si p entonces q: p → q
p si, y sólo si, q: p ↔ q
no p: ¬p

Un enunciado compuesto es un enunciado construido de declaraciones más simples a través de conectores. Por ejemplo,

p (q → r) y p (¬p)

son declaraciones compuestas. (Los paréntesis se utilizan para indicar el orden en que se van a unir los conectores aplicado.) Por ejemplo, si p es el enunciado "La luna es redonda", q la afirmación "La luna está hecha de verde queso", y r la afirmación "La luna es comestible", entonces p (q → r) se puede interpretar como, "La luna es redonda Y, SI la luna es de queso verde, ENTONCES es comestible." El enunciado p (¬p) puede ser interpretado como "La luna es o no es redonda".

Una tabla de verdad es una tabla que muestra el valor de verdad de un enunciado (normalmente compuesto) dados los posibles valores de verdad de los enunciados simples de los que se trata. compuesto. Los valores de verdad de los conectivos básicos son dado de la siguiente manera:

pag	q pq p q		pag → q	pag ↔ q
T	T	T	T	T
V	F	T	F	F
F	T	T	T	F
F	F	F	T	T

pag	¬p
T	F
F	T

(Los valores de verdad presentados aquí están motivados por la intuición. Ver CONJUNCIÓN, DISYUNCIÓN, CONDICIONAL, BICONDICIONAL y NEGACIÓN para más detalles.) El valor de verdad de cualquier enunciado compuesto ahora es completamente determinado. El procedimiento es mecánico. Por ejemplo, el enunciado compuesto p (q → r) tiene la siguiente tabla de verdad, en negrita:

pag qr pag		v (q —> r)
T TT T		T TTT
T TF T		F TFF
TFT T		T FTT
T FF T		T FTF
F TT F		F TTT
F TF F		F TFF
F F F F		FFTT
FFF F		FFTF
		(4) (5) (1) (3) (2)

Machine Translated by Google

(Los números en la parte inferior de la tabla indican el orden en que se calcularon las columnas. columna 5 muestra los posibles valores de verdad del enunciado p (q → r) como un todo.) Por lo tanto, si consideramos que p y r son verdaderos y q falso, por ejemplo, entonces debemos concluir que p (q → r) como un todo es verdadero. (Fila tres de la tabla.)

La tabla de verdad para p (¬p) es:

pag	pag	^	(¬p)
T	T	T	F
F	F	T	T
	(1)	(3)	(2)

Una proposición compuesta que es verdadera independientemente de la valores de verdad de sus enunciados componentes (es decir, uno que tiene T para cada fila de su tabla de verdad) se llama TAUTOLOGÍA. Así p (¬p), por ejemplo, es una tautología. También se puede comprobar que (p q) → (r p) es Otro ejemplo de tautología.

Una proposición compuesta que siempre es falsa se llama una contradicción Por ejemplo, p (¬p) y [(p → q) p] → (¬q) son contradicciones.

Dos proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes si tienen los mismos valores de verdad en el correspondiente filas de sus tablas de verdad. Por ejemplo, se puede comprobar que p → q y (¬p) q tienen tablas de verdad idénticas y son por tanto lógicamente equivalentes. La noción de tal la equivalencia está ligada a la bicondicional.

Véase también ARGUMENTO; LEYES DEL PENSAMIENTO.

punto de inflexión Un punto en un gráfico derivable y = f(x) en la que f′(x) = 0 y f′(x) cambia de signo se llama punto de retorno. Tal punto es un máximo local o mínimo para el gráfico.

Véase también MÁXIMO LOCAL/ MÍNIMO LOCAL.

primos gemelos Dos números impares consecutivos, ambos que son PRIMOS, se llaman primos gemelos. Por ejemplo, los pares 3 y 5, 17 y 19, y 10.006.427 y 10.006.429 son primos gemelos. Los matemáticos sospechan que hay infinitos pares de primos gemelos, pero son incapaces de probar esto como un hecho. Esto sigue siendo un famoso desafío sin resolver.

Los primos gemelos más grandes conocidos, a partir del año. 2002, son 665551035 × 2 80025 – 1 y 665551035 × 2 80025 + 1.

Dos primos que difieren en 4, como 19 y 23 para ejemplo, se llaman primos primos. Hay otros nombres informales para pares de números primos que difieren en seis, ocho, 10 y 12. El nombre "primos gemelos" fue acuñado por el Matemático alemán Paul Stäckel (1892-1919).

El triple “3, 5, 7” es el único conjunto de tres números impares consecutivos que son primos. (Cualquier triple de los números impares consecutivos deben contener un número divisible por 3. Si el primer número impar en el triple es uno más que un múltiplo de 3, luego el segundo impar número del triple es múltiplo de 3. Si el primer número del triple es dos más que un múltiplo de tres, entonces el tercer número impar es divisible por 3.)

rompecabezas de dos cartas El siguiente rompecabezas clásico es a menudo se utiliza para demostrar la necesidad de atención al realizar cálculos de PROBABILIDAD :

> Dos cartas, una roja por ambos lados, la otra rojo por un lado y negro por el reverso—son colocado en una bolsa. Se sacude la bolsa y uno se retira la tarjeta. Ves esa cara de esto la tarjeta es roja ¿Cuál es la probabilidad de que el el reverso de esa tarjeta es negro?

Uno se siente tentado a responder la mitad; después de todo, la posibilidades de seleccionar la tarjeta roja/negra es de 1 en 2. Sin embargo, esta línea de razonamiento pasa por alto una sutileza: el rompecabezas es realmente uno de PROBABILIDAD CONDICIONAL, y nosotros se les pide que determinen la probabilidad de seleccionar la tarjeta de doble color dado que la cara que vemos es rojo. Como hay tres caras rojas, de las cuales solo una tiene negro en el reverso, concluimos que hay en realidad, solo hay un tercio de posibilidades de que sea la carta de dos colores. Esta sorprendente conclusión se puede verificar realizando el experimento varias veces.

Véase también TEOREMA DE BAYES ; EL CONDE DE KRUSKAL ; EL PROBLEMA DE MONTY HALL.

Machine Translated by Google

tu

operación unaria Una operación o una regla que se aplica a elementos individuales de un conjunto para producir otros (pero no necesariamente diferentes) elementos del conjunto se denomina operación unaria. Por ejemplo, la regla que toma el valor absoluto de un número real puede considerarse como una operación unaria sobre el conjunto de números reales. La operación que refleja formas geométricas sobre el eje x es una operación unaria sobre el conjunto de todas las figuras geométricas del plano. Sin embargo, la regla que asocia cada figura geométrica con su área, por ejemplo, no es una operación unaria sobre este conjunto, ya que los resultados son números, no otras figuras geométricas. Una operación unaria se puede considerar como una FUNCIÓN de un conjunto al mismo conjunto.

Véase también OPERACIÓN BINARIA; OPERACIÓN.

solución única Se dice que una ecuación tiene una solución única si solo hay un valor posible de la(s) variable(s) descrita(s) en la ecuación que hace que la ecuación sea verdadera. Por ejemplo, la ecuación x + 4 = 7 tiene el = 0 tiene solución única x = 3, y la ecuación a la solución ^{2} + segundo ^{2} única, en el reino de los números reales, (a,b) = (0,0). Por otro lado, la ecuación x tiene más de una solución (x podría ser 3 ^{2} – 9 = 0 o –3), y la ecuación x A veces se pueden usar argumentos geométricos para ^{44} años ^{6} = –7 no tiene soluciones reales. + 2 determinar si un sistema de ecuaciones tiene o no una solución única. Por ejemplo, el par de ecuaciones

$$2x + 4y = 5x$$
$$+ 3y = 8$$

representa dos rectas de diferentes pendientes. Como dos líneas no paralelas deben intersecarse en un punto único, existe una solución única para el sistema. Un sistema de tres ecuaciones que representan tres planos en el espacio tiene una solución única solo si esos tres planos se encuentran en un solo punto.

A veces, una solución se llama esencialmente única si el término unicidad se refiere solo a la estructura subyacente del problema y las variaciones de la solución no afectan el contenido matemático. por ejemplo, el solución a la ECUACIÓN DIFERENCIAL $\frac{dy}{dx}$ = x es esencialmente único. Una solución es x La $\frac{1}{2}$ ^{2}, y cualquier otro solución a este problema difiere de esta solo por la adición de una constante. En ARITMÉTICA MODULAR, x = 43 es, esencialmente, la única solución a:

$$x \equiv 3 \text{ (módulo 5)}$$
$$x \equiv 7 \text{ (módulo 12)}$$

Cualquier otra solución al problema difiere de 43 por un múltiplo de 60.

círculo unitario El círculo de radio 1 con centro en el origen se llama círculo unitario. En COORDENADAS CARTESIANAS tiene ecuación x El círculo ^{2} ^{2} = 1. + y unitario juega un papel fundamental en el desarrollo de la TRIGONOMETRÍA: el coseno y el seno de un ángulo θ se definen como las coordenadas x e y, respectivamente, de un punto en un círculo unitario ubicado un bronceado

Machine Translated by Google

ángulo θ desde el eje x. En consecuencia, las ECUACIONES PARAMÉTRICAS del círculo unitario son x = cos θ e y = sen θ, con θ como parámetro.

desconocido (indeterminado, variable) Una cantidad cuyo valor se va a determinar se llama un desconocido. En matemáticas, encontrar el valor de una incógnita generalmente requiere resolver una ecuación. Para la ecuación 2x + 5 = 13, por ejemplo, la variable x es la incógnita. Alge bra muestra que esta incógnita tiene valor 4.

En la antigüedad, los eruditos describían las incógnitas y las ecuaciones que las relacionaban con palabras. Antiguo egipcio los eruditos usaron la palabra montón para una cantidad desconocida, y muchas otras culturas simplemente usaron la palabra cosa. El erudito árabe MUHAMMAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı (ca. 780–850), de cuyo título del libro Hisab al-jabr w'al muq– abala proviene la palabra álgebra, usó la palabra shai para referirse a un cantidad desconocida Cuando su famoso libro fue traducido al latín, las palabras res y causa (según el traductor) se usaron para shai.

Los eruditos alemanes del Renacimiento tradujeron causa como coss, que los ingleses adoptaron, llamando al estudio de ecuaciones y cantidades desconocidas “el arte cósico”.
Este nombre para el álgebra fue popular durante muchas décadas. Literalmente significa “el arte de las cosas”.

Machine Translated by Google

V

Vallée-Poussin, Charles-Jean de la (1866–1962) Bélgica Análisis , Teoría de números Nacido el 14 de agosto de 1866 en Lovaina, Bélgica, Charles-Jean de la Vallée Poussin es recordado como uno de los dos matemáticos que independientemente demostró el famoso TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO conjeturado por primera vez por CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). El segundo matemático en probar el resultado fue el matemático francés JACQUES HADAMARD (1865–1963). Aunque ambos académicos aplicaron la teoría de funciones complejas a la FUNCIÓN ZETA para establecer el resultado, las dos pruebas utilizaron argumentos lógicos muy diferentes.

Vallée-Poussin estudió matemáticas en la Universidad de Lovaina, en la Universidad de Berlín y en la Universidad de París antes de aceptar un puesto en la facultad de Lovaina, donde permaneció el resto de su carrera. Se especializó en el campo del ANÁLISIS y recibió un premio de una couronne de la Real Academia de Bélgica por su trabajo en ECUACIONES DIFERENCIALES en 1892. En ese momento, Vallée-Poussin estaba estudiando técnicas recientemente desarrolladas en análisis complejo y se dio cuenta de que, en 1896, que todas las piezas estaban en su lugar para desarrollar una demostración de la conjetura de los números primos de Gauss. (Hadamard llegó a la misma conclusión el mismo año). Vallée-Poussin también llevó las cosas más allá para hacer contribuciones significativas al estudio general de la función zeta de Riemann y la hipótesis de Riemann, así como otras preocupaciones en el análisis. En 1903 publicó un texto muy popular Cours d'analyse (Un curso de análisis) sobre estos temas, escrito tanto para principiantes como para expertos en la materia. (Vallée-Poussin escribió el material introductorio en letra grande y discusiones intercaladas sobre puntos técnicos avanzados en letra pequeña). En los años siguientes, escribió cuatro ediciones revisadas del texto, así como el libro Integrales de Lebesgue, que se considera una extensión de la pieza.

Vallée-Poussin recibió muchos honores a lo largo de su carrera, incluida la elección a la Academia Belga, la Academia Estadounidense de Artes y Ciencias, el Instituto de Francia y la Academia Nacional Estadounidense de Ciencias. En 1928, después de ocupar el cargo de catedrático de matemáticas en la Universidad de Lovaina durante 35 años, el rey de Bélgica le confirió el título de barón. Vallée-Poussin también fue comandante de la Legión de Honor y presidente de honor de la Unión Matemática Internacional. Murió en Lovaina el 2 de marzo de 1962.

Véase también GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN.

variable Un símbolo, como x, y, z o n, que se usa en ecuaciones algebraicas para representar una cantidad cuyo valor no se conoce o no se especifica se denomina variable. Por ejemplo, en la expresión $x + x^2 = 6$, el símbolo x representa un número desconocido cuya suma con su cuadrado es igual a 6. (Los métodos de ÁLGEBRA se pueden aplicar para mostrar que x debe ser 2 o –3).

Las variables se utilizan para codificar operaciones numéricas. Por ejemplo, la operación de elevar al cuadrado los 10 primeros 2 enteros números se pueden escribir “$y = n^2$ para $n = 1,2,3,\ldots,10$.” En esta expresión, el valor de la variable n no es

Machine Translated by Google

especificado, pero se nos informa que debe ser un número entero entre 1 y 10 inclusive. Tampoco se especifica el valor de la variable y , pero se nos dice que su valor depende del valor elegido para n. Por esta razón, y se denomina variable dependiente: una vez que se ha declarado un valor para n , sigue un valor para y . La variable n se llama variable independiente porque su valor no depende de los valores de ninguna otra variable.

También se dice que dos o más variables son independientes si el valor elegido de una variable no tiene efecto sobre el posible valor de la segunda. Por ejemplo, si x representa el precio de una libra de azúcar en un día determinado e y el número de estudiantes que toman matemáticas en la universidad, entonces x e y son variables independientes. Si cada estudiante de matemáticas fuera a comprar una libra de azúcar, entonces el dinero total gastado, z = xy, es una nueva variable. Aquí, z no es independiente de x o y.

En álgebra, los símbolos también se usan a menudo para indicar cantidades cuyos valores se suponen conocidos. Por ejemplo, en la expresión ax + b = 0, se supone que ayb son números especificados , y que x es el valor que se b determinará . (Tenemos x = – .) Aquí estamos siguiendo una convención, establecida por primera vez por RENÉ DESCARTES (1596–1650), que establece que las letras minúsculas al final del alfabeto (como x, y y z) representan números desconocidos. cantidades y letras minúsculas desde el principio del alfabeto (como a, b y c) cantidades conocidas. (Las letras de la mitad del alfabeto deben interpretarse a través del contexto).

Véase también CONSTANTE; FUNCIÓN; HISTORIA DE EQUACIONES Y ÁLGEBRA (ensayo).

varianza Ver ESTADÍSTICA: DESCRIPTIVA.

vector En física e ingeniería, suele ser adecuado describir cantidades físicas, como la velocidad o la fuerza, en términos de magnitud y dirección. Por ejemplo, la velocidad del viento está completamente especificada por un solo número que especifica su magnitud (fuerza del viento), pero la velocidad del viento se refiere tanto a la velocidad del viento como a la dirección en la que se mueve el aire. La fuerza gravitatoria actúa sobre los objetos en la superficie de la Tierra con una magnitud (fuerza) que depende de la masa del objeto y en una dirección que tira del objeto hacia el centro de la Tierra. Cualquier cantidad que se especifica tanto por una magnitud como por una dirección se llama vector.

Los vectores generalmente se representan como segmentos de línea con flechas que indican la dirección del vector. La longitud del segmento de línea indica la magnitud del vector. Por ejemplo, un vector plano de magnitud 2 en la dirección este se dibuja en el plano como un segmento de línea horizontal, de 2 unidades de largo, con una flecha que apunta hacia la derecha. La ubicación en la que comienza este segmento de línea no es importante. Todos los segmentos de línea de 2 unidades de largo que apuntan hacia la derecha representan el mismo vector. Por lo tanto, uno es libre de trasladar un vector a cualquier posición inicial en el plano, siempre que la longitud del vector y su dirección permanezcan sin cambios.

Un vector generalmente se denota en los libros de texto con letras en negrita. Por ejemplo, el símbolo a podría representar un vector y b otro. Sin embargo, en algunos textos, ya menudo en notas manuscritas, se acostumbra subrayar letras o utilizar barras o flechas para indicar que las cantidades representadas son vectoriales: a, a . El a, o la magnitud o la longitud de un vector a se denota |a| (oa veces como a).

Un vector puede ser especificado por un par ordenado de números. Por ejemplo, el vector de magnitud 2 en dirección este se puede representar como el par: a = <2,0>. Este vector “transporta partículas” 2 unidades a la derecha y ninguna unidad hacia arriba o hacia abajo. El vector b = <1,1> “lleva partículas” 1 unidad hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba. Esto representa el vector de magnitud $\sqrt{2}$ (la longitud de la diagonal del cuadrado unitario) en dirección noreste.
El vector c = <–1,–1> es el mismo vector pero apunta en dirección opuesta. El vector 0 = <0,0> se denomina vector cero y representa una cantidad sin magnitud ni dirección.

El uso de corchetes angulares para indicar vectores es común en física e ingeniería, aunque algunos textos usan paréntesis para representar vectores. Esto puede resultar confuso, ya que los paréntesis también se usan para indicar puntos en el plano.

Si P = (p1 , p2) y Q = (q1 , q2) representan dos puntos en el plano, entonces un vector que “lleva una partícula” de la posición P a Q está dado por: <q1 – p1 , q2 – p2> . Este vector a veces se denota $\overrightarrow{PQ}$. El punto P se llama punto inicial del vector y Q es el punto terminal.
(Sin embargo, tenga en cuenta que un vector no está fijo en ninguna ubicación específica. Cualquier vector de la misma longitud y dirección que $\overrightarrow{PQ}$ representa el mismo vector, aunque los puntos inicial y terminal puedan ser diferentes).

Si a = < a1 ,a2 > es un vector, entonces los números a1 y a2 se denominan componentes del vector. La longitud

Machine Translated by Google

del vector viene dada por el TEOREMA DE PITÁGORAS : |a| = √a1 2 que es solo la FÓRMULA DE LA DISTANCIA en este 2 + a2 nueva configuración

Los vectores dibujados en el plano se llaman bidimensionales. Los vectores tridimensionales, dados por ternas de números, representan cantidades con magnitud y dirección en el espacio tridimensional. SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) acuñó el término vector para estas cantidades en su libro Lectures on Quaternions. El nombre se basa en la palabra latina vectus, el participio perfecto de vehere, que significa "llevar".

Operaciones con vectores La suma de vectores combina dos (o más) vectores para producir un nuevo vector, llamado vector resultante. Para sumar dos vectores a y b, coloque el vector b (sin cambiar su magnitud o dirección) de modo que su punto inicial se encuentre en el punto terminal de a. La resultante a + b es el vector que “transporta partículas” desde el punto inicial de a hasta el punto terminal de b. Geométricamente, este es el vector que corresponde a la hipotenusa del triángulo formado por a y b.

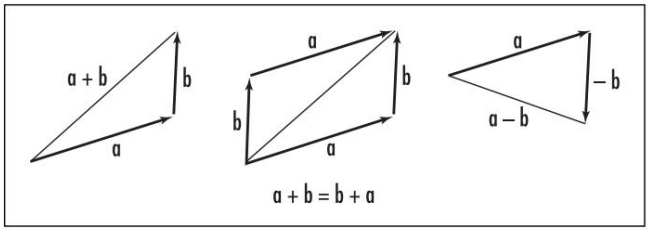
Algebraicamente, si a = <a1 , a2> y b = <b1 , b2>, entonces a + b = <a1 + b1 , a2 + b2>. (Si a “desplaza partículas” a1 unidades hacia la derecha y b desplaza partículas b1 unidades a la derecha, entonces el efecto combinado a+b desplaza las partículas a1 + b1 hacia la derecha. De manera similar para el movimiento vertical combinado.)
Desde cualquier punto de vista vemos que la suma de vectores es CONMUTATIVO:

un + segundo = segundo + un

También se puede comprobar que la suma de vectores es ASOCIATIVA:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

y que el vector cero actúa como elemento de identidad: a + 0 = a = 0 + a.



Operaciones vectoriales

La multiplicación escalar multiplica vectores por números para producir nuevos vectores. En el análisis vectorial se acostumbra referirse a los números como escalares. Si a es un vector y r un escalar, entonces ra es el vector con:

• La misma dirección que a si r > 0 • La dirección opuesta a a si r < 0 • Longitud |ra| igual a |r| |un|

Algebraicamente, si a = <a1 ,a2>, entonces ra = <ra1 ra2>. De este modo, por ejemplo, si a = <6,–8>, entonces a = <3,– 4> es el vector de la mitad de largo, apuntando en la misma dirección; –a = <–6,8> es el vector de la misma longitud pero apuntando en dirección contraria; y 0a = <0,0> = 0 es el vector cero.

La resta de vectores se realiza sumando un vector al negativo del otro. Por ejemplo, si a y b son vectores, entonces el vector a – b es el resultado de sumar –b a a. Geométricamente, esto corresponde a invertir la dirección del vector b y colocar este vector invertido con punto inicial en el punto terminal de a, como se ilustra a continuación. Tenemos: a + (–a) = 0.

Las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar satisfacen una serie de reglas básicas, lo que produce un sistema matemático llamado ESPACIO VECTORIAL.

Hay dos tipos estándar de multiplicación en vectores. Estos son el PRODUCTO PUNTO y la CRUZ PRODUCTO.

Un vector de longitud 1 se llama vector unitario. En el espacio bidimensional hay dos vectores unitarios estándar i = <1,0> yj = <0,1>. Cualquier vector bidimensional a = < a1 ,a2 > puede escribirse como una combinación (lineal) de estos dos vectores unitarios:

$$a = < a1 ,a2 > = a1 <1,0> +a2 < 0,1 > = a1\, i+a2\, j$$

De manera similar, en el espacio tridimensional, hay tres vectores unitarios estándar: i = <1,0,0>, j = <0,1,0> y k = <0,0,1>. Estos también forman una BASE para el espacio de vectores tridimensionales. Los físicos a menudo prefieren representar los vectores como combinaciones de los vectores unitarios estándar.

Véase también ORTOGONAL; LEY DEL PARALELOGRAMO; VECTOR DE POSICIÓN; PROYECCIÓN; TENSOR; VEC TRIPLES PRODUCTO TOR; ECUACION VECTORIAL DE UNA LINEA; VECTOR ECUACION DE UN PLANO; CAMPO VECTORIAL; ESPACIO VECTORIAL.

ecuación vectorial de una línea La ecuación de una LÍNEA en un espacio bidimensional se puede escribir de la forma:

Machine Translated by Google

y = mx + b. Desafortunadamente, no existe una ecuación análoga para una línea situada en un espacio tridimensional.
Observe, sin embargo, que si P = (p1 ,p2 ,p3) y Q = (q1 ,q2 ,q3) son dos puntos en la recta, entonces $u = \overrightarrow{PQ} = \langle q1 - p1 ,q2 - p2 ,q3 - p3 \rangle$ es un VECTOR con dirección a lo largo de la línea, y cualquier otro punto en la línea se puede encontrar colocando un múltiplo escalar de u en la posición P. Es decir, la ecuación:

$$P + tu = (p1 + t(q1 - p1), p2 + t(q2 - p2), p3 + t(q3 - p3)) = (1 - t)P + tQ$$

con t variando sobre todos los números reales, describe todos los puntos en la línea. Esto se llama la ecuación vectorial de la línea. (Técnicamente, se debe trabajar con el vector de posición p = <p1 ,p2 ,p3> en lugar del punto P = (p1 ,p2 ,p3), de modo que la suma a la izquierda de la ecuación anterior sea la suma de dos como cantidades.)

La fórmula y = mx + b, que describe la ecuación de una línea en el plano, también se puede considerar como una ecuación vectorial. Aquí, los puntos (x,y) en la línea están dados por:

$$(0,b) + x(1,m)$$

donde (0,b) es un punto de la línea (la intersección y) y u = < 1,m > es la dirección que toma la línea (1 paso por encima y m pasos hacia arriba).

ecuación vectorial de un plano La ecuación matemática de un plano es una fórmula de la forma:

$$hacha + por + cz = d$$

donde a, b, c y d son números. Todo punto (x,y,z) que satisfaga esta ecuación es un punto en un plano con VEC TOR n = < a,b,c > como NORMAL AL PLANO.

Para derivar esta fórmula, sea P = (p1 ,p2 ,p3) un punto en un plano dado y n = < a,b,c > un vector perpendicular al plano. Para encontrar la ecuación para cualquier otro punto Q = (x,y,z) en este plano, observe que la POSICIÓN z – p3 > se encuentra en el plano VECTOR $\overrightarrow{PQ}$ = < x – p1 , y – p2 , y por lo tanto es perpendicular a n . El DOT PROD UCT n · $\overrightarrow{PQ}$ es por lo tanto cero. Esto da la ecuación:

$$\langle a,b,c \rangle \cdot \langle x - p1 ,y - p2 ,z - p3 \rangle = a(x - p1) + b(y - p2) + c(z - p3) = 0$$

que se puede reescribir:

$$hacha + por + cz = d$$

donde d es solo un número.

Note que los componentes de n aparecen como los coeficientes de las variables en la ecuación. Esto permite "leer" rápidamente vectores normales a planos. Por ejemplo, el plano 2x – 3y + 4z = 10 tiene un vector normal n = < 2, –3, 4 >, al igual que el plano 2x – 3y + 4z = 6. El plano y = 0 tiene un vector normal n = < 0 ,1,0 >.

Para hallar la ecuación del plano con vector normal n = < 2,2,1 >, digamos, y que pasa por el punto P = (5,–1,3), se comienza escribiendo la ecuación parcial: 2x + 2y + z = d. Para encontrar d, sustituye las coordenadas del punto P. En este ejemplo tenemos: d = 2,5 + 2·(–1) + 3 = 11, por lo que este plano tiene la ecuación 2x + 2y + z = 11.

campo vectorial Una función que asigna a cada punto en el espacio un VECTOR se llama campo vectorial. Por ejemplo, las corrientes de viento en la superficie de la Tierra forman un campo vectorial en la superficie de la Tierra: en cada lugar donde hay un vector que describe la velocidad y la dirección del viento. En el espacio tridimensional hay un campo vectorial gravitacional, dado por la intensidad y la dirección de la fuerza gravitacional, que experimentaría una unidad de masa cuando se colocara en cada lugar del espacio. La intensidad y dirección de la fuerza varía de un punto a otro.

El teorema de la bola peluda afirma que cualquier campo vectorial que varíe suavemente a través de la superficie de una esfera, con vectores tangentes a la esfera, debe tener al menos un vector que sea el vector cero. Muestra, por ejemplo, que en cualquier instante debe haber algún lugar en la superficie de la Tierra en el que la velocidad horizontal del viento sea cero. También muestra que es imposible peinar todos los pelos de una pelota de tenis contra la superficie de la pelota de una manera suave y uniforme sin producir nunca un mechón. Esta segunda interpretación explica el nombre del teorema.

Véase también CURL; DIVISIÓN

espacio vectorial El conjunto de VECTORES bidimensionales o tridimensionales viene equipado con dos operaciones fundamentales: la suma vectorial y la multiplicación escalar (es decir, una multiplicación por números reales). Estas dos operaciones obedecen a las siguientes reglas:

Machine Translated by Google

1. La suma de vectores es CONMUTATIVA:

$$un + segundo = segundo + un$$

2. La suma de vectores es ASOCIATIVA:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

3. Existe un vector cero 0 tal que:

$$un + 0 = un$$

4. Todo vector a tiene un negativo –a tal que:

$$a + (–a) = 0$$

5. Para todo vector a tenemos:

$$1.a = un$$

6. Si r es un escalar y a y b son vectores, entonces:

$$r(a + b) = ra + rb$$

7. Si r y s son escalares y a es un vector, entonces:

$$(r + s)a = ra + sa$$

8. Si r y s son escalares y a es un vector, entonces:

$$(rs)a = r(sa)$$

Un espacio vectorial es cualquier conjunto V para el cual es posible definir una noción de suma (es decir, una regla que combina dos elementos del conjunto V para producir un nuevo elemento de V) y multiplicación escalar (es decir, un medio para multiplicar elementos de V por números) de modo que el las ocho reglas anteriores se mantienen. Ciertamente, el conjunto de todos los vectores bidimensionales forma un espacio vectorial, al igual que el conjunto de todos los vectores tridimensionales, pero ejemplos de los espacios vectoriales no necesitan ser de este tipo. Por ejemplo, deja Sea V el conjunto de todas las funciones del conjunto de todos los reales números al conjunto de los números reales. Uno puede agregar cualquier dos funciones f y g:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

y multiplicar funciones por números:

$$(rf)(x) = rf(x)$$

Se comprueba que se cumplen las ocho reglas anteriores (aquí 0 es la función que toma el valor constante cero), haciendo de V un espacio vectorial. Además, el conjunto de todas las matrices de 3×3 es un espacio vectorial (uno puede sumar dos matrices y multiplicar matrices por escalares), como lo es el conjunto de todos los NÚMEROS COMPLEJOS. (Uno puede sumar dos números complejos y uno puede multiplicar números complejos por números reales).

Las propiedades de los vectores y sus manipulaciones algebraicas han sido estudiadas extensamente por eruditos durante siglos. Que los matemáticos han aislado la octava clave propiedades que hacen que los vectores funcionen como lo hacen permite aplicar inmediatamente todo lo que se sabe de vectores a cualquier sistema, por abstracto que sea sea, que satisfaga estas ocho reglas básicas. Por ejemplo, los matemáticos han demostrado que todo espacio vectorial debe tener una BASE. En consecuencia, debe existir una base para el conjunto de todas las funciones y para el conjunto de todos los 3×3 matrices. Identificar una posible base para el conjunto de todos funciones conduce a un estudio de la SERIE DE FOURIER.

Véase también GRUPO; DEPENDIENTE LINEAL E INDE PENDIENTE.

velocidad El estudio del movimiento examina tres nociones fundamentales: distancia, velocidad y aceleración.

La distancia recorrida por un objeto en movimiento (también llamado su desplazamiento) es la longitud total del camino que movido a lo largo Si el objeto viaja a lo largo de una línea recta trayectoria, entonces se dice que su movimiento es rectilíneo. (Movimiento que no es rectilíneo se llama curvilíneo.) Si, además de ser rectilíneo, un objeto recorre distancias iguales D en períodos iguales de tiempo T, entonces su movimiento es dice que es uniforme. Este es el tipo de movimiento más fácil de analizar. En este escenario, la relación $\frac{D}{T}$ es constante y se llama la velocidad (uniforme) v del objeto, $v = \frac{D}{T}$, y la imagen de un gráfico de velocidad versus tiempo es una línea horizontal a la altura v. La fórmula D = v × T, coincidentemente, es la ecuación para el área del rectángulo de ancho T y altura v. Esto muestra, al menos en este escenario simple, que el desplazamiento es igual al área bajo el gráfico de velocidad

Si, en movimiento rectilíneo, la velocidad de un objeto cambia con el tiempo, como cuando un automóvil acelera del reposo al velocidad de la carretera, entonces el análisis de la velocidad y el desplazamiento es más complicado. Si f(t) denota la posición

Machine Translated by Google

del objeto en el tiempo t, entonces la cantidad f(t + h) – f(t) representa el cambio de posición del objeto desde el tiempo t hasta un tiempo posterior t + h. La velocidad promedio del objeto durante este período de tiempo está dada por:

$$\frac{\text{cambio de posición}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{\text{pies}(t+h) - \text{pies}(t)}{h}$$

Calcular la velocidad promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, es decir, al tomar valores cada vez más pequeños de h en la fórmula anterior, da la velocidad "real" del objeto en el tiempo t tal como lo lee un velocímetro, por ejemplo. Tenemos:

$$\text{velocidad instantanea} = \lim_{\text{hora } 0 \to} \frac{\text{pies}(t+h) - \text{pies}(t)}{h}$$

Esta, por supuesto, es la fórmula para la DERIVADA de la función de distancia f(t).

> Para un objeto que se mueve en línea recta, la velocidad instantánea del objeto es la derivada de la fórmula de la distancia. Es decir, la velocidad instantánea es la tasa instantánea de cambio de posición.

Ahora aproxime el área bajo un gráfico de velocidad versus tiempo como una colección de rectángulos angostos. Dado que, como hemos visto, el área de cada rectángulo representa la distancia recorrida durante un pequeño período de tiempo, la suma de estas áreas da una aproximación de la distancia total recorrida por el objeto. El uso de rectángulos cada vez más estrechos da mejores y mejores aproximaciones. En el LIMIT tenemos:

> Para un objeto que se mueve en línea recta, la INTEGRAL de la función de velocidad da la distancia total recorrida. Es decir, la distancia recorrida es el área bajo la gráfica de velocidad versus tiempo.

Si un objeto en movimiento sigue una trayectoria curva, generalmente se asigna a la velocidad no solo una magnitud, sino también una dirección de movimiento. Es decir, la velocidad se considera un VECTOR. El término velocidad se usa para denotar la distancia recorrida por unidad de tiempo, y la velocidad es este número junto con una indicación de en qué dirección ocurre este movimiento.

La razón de cambio de la velocidad se llama aceleración. Su magnitud viene dada por la primera derivada de velocidad (y, en consecuencia, la segunda derivada del desplazamiento). También se considera un vector y se le asigna una dirección.

> La aceleración a es la primera derivada de la velocidad y la segunda derivada de la distancia:
>
> $$a = \frac{d}{dt}(\text{velocidad}) \qquad \frac{d^2}{\text{puntos}}\text{distancia} = a = (\ )$$

Los físicos a menudo siguen la notación de SIR ISAAC NEWTON de denotar la diferenciación con respecto al tiempo con un punto y denotar el desplazamiento con la letra s. Tenemos: $a = v = \dot{s}$. Si la posición de

un objeto en movimiento está dada por un conjunto de ECUACIONES PARAMÉTRICAS x = x(t) y y = y(t), entonces el vector de posición del objeto es el vector < x(t),y(t)>, su velocidad es el vector < ·x(t), · y(t)>, y su aceleración es el vector <ẍ(t), ÿ(t)>.

Los científicos de la NASA a veces usan el término tirón para denotar la tasa de cambio de aceleración. Los astronautas que aceleren a un ritmo uniforme serán empujados hacia atrás en sus asientos con una fuerza constante, lo que dará lugar a un viaje suave. Cualquier cambio en el valor de la aceleración conduce a cambios en las presiones de fuerza.

La aceleración debida a la gravedad, denotada g, es la aceleración con la que un objeto cae libremente a la tierra sin que lo impida la resistencia del aire. Durante muchos siglos se creyó que los objetos más masivos caerían más rápido que los objetos más ligeros, pero en 1638, GALILEO GALILEI (1564-1642) demostró, mediante la teoría y la experimentación, que no es así: todos los objetos que caen aceleran a la misma velocidad. la misma velocidad independientemente de su masa. (Si la aceleración dependiera de la masa, ¿a qué velocidad caerían dos cuerpos unidos de diferente masa que caen juntos?) El valor aceptado para g es 9.80665 m/seg/seg, pero esta magnitud varía en diferentes lugares de la Tierra debido al hecho que la Tierra no es una esfera perfecta.
(En los polos su valor es 9,8321 m/seg2 y en el ecuador 9,7799 m/seg2).

Venn, John (1834–1923) Lógica británica, teoría de la probabilidad Nacido el 4 de agosto de 1834 en Hull, Inglaterra, el lógico John Venn es recordado por introducir y popularizar el uso de diagramas de círculos superpuestos como un medio para representar relaciones entre conjuntos. Aunque tales diagramas fueron utilizados décadas antes por GOT TFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) y LEONHARD

Machine Translated by Google

EULER (1707-1783) como un dispositivo para analizar ARGUMENTOS, no fue hasta la publicación del libro Lógica simbólica de Venn en 1881 que la práctica de usar tales diagramas se hizo común. Hoy estos diagramas se nombran en su honor.

Venn se graduó de Gonville and Caius College, Cambridge, en 1857 después de estudiar teología y artes liberales. Después de trabajar como sacerdote ordenado durante varios años, Venn regresó a la misma institución en 1862 para aceptar un puesto como profesor de ciencias morales.
Durante este tiempo se interesó por la lógica y la teoría de la PROBABILIDAD , y desarrolló una "teoría de la frecuencia" de la probabilidad, que publicó en 1866 en su Lógica del azar. Este trabajo influyó mucho en el desarrollo de la teoría de la estadística. Quince años después, Venn publicó Symbolic Logic, que siguió con The Principles of Empirical Logic en 1889. Venn fue elegido miembro de la ROYAL SOCIETY en 1883.

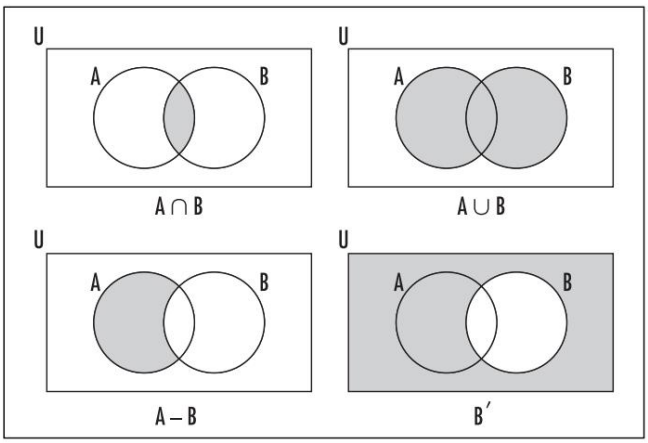
Después de la publicación de su trabajo sobre lógica, Venn cambió de intereses y se dedicó a investigar y escribir un relato completo de la historia de Gonville y Caius College. Esta fue una tarea que lo consumió todo, y solo se publicó un volumen del trabajo antes de su muerte, el 4 de abril de 1923.

Los diagramas de Venn han tenido un profundo efecto en la educación matemática moderna. A menudo se utilizan como un dispositivo para fomentar el pensamiento lógico en la etapa temprana del desarrollo intelectual de un niño y son una característica estándar en el plan de estudios de la escuela primaria.

Véase también DIAGRAMA DE VENN.

Diagrama de Venn Un diagrama en el que los conjuntos matemáticos se representan mediante círculos superpuestos dentro de un límite que representa el conjunto universal se denomina diagrama de Venn. Dichos diagramas proporcionan representaciones pictóricas convenientes de las relaciones entre conjuntos. Por ejemplo, en el diagrama de arriba a la derecha, un conjunto universal U está representado por el interior de un rectángulo, y dos subconjuntos A y B de U como los interiores de dos círculos superpuestos dentro del rectángulo. La intersección A ∩ B, la unión A B, el complemento de B dentro de A, denotado A – B, y el complemento universal de B, denotado B′, por ejemplo, son evidentes.

Por ejemplo, si U es el conjunto de todos los insectos, A es el subconjunto de todas las mariposas y B es el subconjunto de todos los insectos azules, entonces la región sombreada A ∩ B representa todas las mariposas azules, A B todos los insectos que son azul o son una mariposa, A – B todas las mariposas que no son azules, y B′ todos los insectos que no son azules.



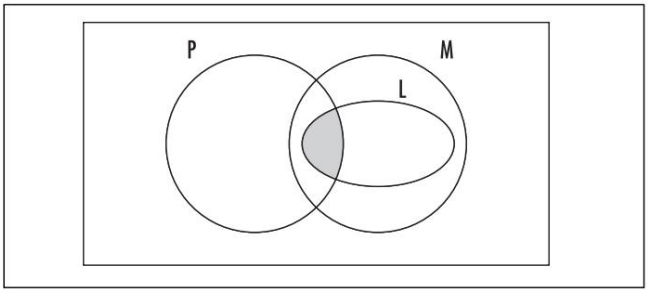
Establecer operaciones

Es posible demostrar la validez de un ARGUMENTO con la ayuda de un diagrama de Venn. Consideremos, por ejemplo, la siguiente línea de razonamiento:

> Todos los lógicos son matemáticos. Algunos filósofos son lógicos. Por lo tanto, algunos filósofos son matemáticos.

En el conjunto universal de todas las personas, sea L el conjunto de los lógicos, M el conjunto de los matemáticos y P el conjunto de los filósofos. La primera premisa del argumento afirma que L es un subconjunto de M, y la segunda que los conjuntos P y L tienen una intersección no vacía. Esto conduce a un diagrama de Venn de la siguiente forma.

Ahora es evidente que P y L pueden cruzarse solo dentro de M, estableciendo así la validez de la conclusión. El matemático alemán GOTTFRIED



Un diagrama de Venn

Machine Translated by Google

WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) y el gran LEON HARD EULER (1707–83) utilizaron diagramas similares a estos para analizar argumentos. En el contexto de la LÓGICA FORMAL, los diagramas de Venn se denominan a menudo de EULER.
DIAGRAMAS.

Un solo conjunto A divide al conjunto universal en dos partes disjuntas, A y su complemento A′. Dos subconjuntos A y B generalmente dividen el conjunto universal en cuatro partes disjuntas: A ∩ B, A′ ∩ B, A ∩ B′ y A′ ∩ B′. (Este no es el caso, sin embargo, si A es un subconjunto de B, B es un subconjunto de A, o si A y B no se cortan.) Tres subconjuntos A, B y C, en su disposición más general, dividir el conjunto universal en ocho piezas disjuntas. (El diagrama producido se puede utilizar para ilustrar las LEYES DE DE MORGAN .)

No es posible dibujar un diagrama de cuatro círculos superpuestos para representar cuatro subconjuntos generales A, B, C y D de tal manera que se hagan evidentes las 16 piezas disjuntas del conjunto universal. Por esta razón, los diagramas de Venn generalmente solo se usan para ilustrar relaciones entre dos o tres conjuntos.

Véase también TEORÍA DE CONJUNTOS; JUAN VENN.

Viète, François (Franciscus Vieta) (1540–1603) Álgebra francesa Nacido en Fontenay-le-Comte, Francia, en 1540 (se desconoce su fecha exacta de nacimiento), al erudito François Viète se le suele llamar “el padre del álgebra. ” Su influyente obra de 1591 In artem analyticam isagoge (Introducción a las artes analíticas) se considera uno de los primeros textos occidentales sobre el tema. Su práctica de usar letras como símbolos de incógnitas representó un primer paso hacia el desarrollo de la notación algebraica moderna y le permitió hacer avances significativos en el tema. Viète también hizo importantes contribuciones al campo de la TRIGONOMETRÍA.

Viète nunca fue empleado como matemático profesional. Después de graduarse de la Universidad de Poitiers en 1560, comenzó una carrera en la práctica legal, pero pronto decidió cambiar de ocupación al aceptar un puesto como tutor privado en 1564. Dentro de este cargo, se interesó por las matemáticas y pronto desarrolló una reputación como un erudito capaz. Viète ocasionalmente daba conferencias matemáticas en institutos de educación superior, y en 1589 fue contratado por el rey Enrique IV de Francia para descifrar mensajes secretos que se enviaban al enemigo del estado, Felipe II de España.

Su primera obra publicada, Canon mathematicus seu ad triangula (El canon matemático aplicado a los triángulos), apareció en 1579 y pretendía ser una introducción a la astronomía matemática. En él, Viète usó las seis funciones trigonométricas principales para resolver problemas relacionados con triángulos planos y esféricos, enumeró tablas de valores para estas funciones y explicó las matemáticas detrás de la construcción de esas tablas. Posteriormente, en 1593, Viète escribió otros dos textos sobre el tema de la trigonometría, Zeteticorum libri quinque (Álgebra volumen cinco), imitando el quinto libro de la Aritmética de DIOPHANTUS , y Variorum de rebus mathematicis responsorum (Varios problemas matemáticos), que contiene su famoso fórmula para π como un producto infinito de radicales. También disertó sobre los problemas clásicos de DUPLICACIÓN DEL CUBO y TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.

Hoy en día, Viète es mejor recordado por sus avances en álgebra presentados en su famoso texto Isagoge de 1591, que demostró claramente el valor de manipular letras como símbolos para cantidades conocidas y desconocidas como un medio para resolver problemas algebraicos. Viète también introdujo una notación mejorada para cuadrados, cubos y otras potencias, y acuñó el término coeficiente.
Con su nuevo enfoque del álgebra, Viète abordó con éxito una serie de problemas que los eruditos clásicos no habían podido resolver. Viète murió en París, Francia, el 23 de febrero de 1603.

Véase también COEFICIENTE; FÓRMULA DE VIÈTE .

Fórmula de Viète (fórmula de Vieta) En 1593, el matemático francés FRANÇOIS VIÈTE descubrió la siguiente fórmula notable que relaciona π con un producto infinito de radicales:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{}}\right)\times\cdots$$

Su fórmula se establece haciendo uso repetido de las fórmulas de doble ángulo de TRIGONOMETRÍA:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

Comience escribiendo:

Machine Translated by Google

$$\operatorname{sen}(\theta)\cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}$$

$$= \ldots$$

$$= 2^n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$$

Entonces:

$$\frac{\theta}{\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{\theta}{2}\sec\frac{\theta}{2^2}\sec\frac{\theta}{2^3}\cdots\sec\frac{\theta}{2^n}\times\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}.$$

Usando la fórmula de doble ángulo para el coseno, esto se puede reescribir:

$$\frac{\theta}{\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta)}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)}}}\cdots\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}$$

aún con n términos radicales. Poner $\theta = \frac{\pi}{2}$. Desde $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, esto da:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\cdots\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

y dado que, de acuerdo con la REGLA DE SQUEEZE, $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \to 1$ como $x \to 0$, sigue la fórmula de Viète.

Véase también PI, PRODUCTO DE WALLIS .

vinculum En el siglo XV era popular colocar una línea horizontal encima, oa veces debajo, de un grupo de términos en una expresión para indicar que esos términos debían tratarse como una unidad en la evaluación de esa expresión. La línea horizontal se llamaba vinculum. Hoy usamos paréntesis para indicar el orden de las operaciones.
Por ejemplo,

$$x - y\overline{\qquad} + z = x - (y + z)$$

El uso del vinculum apareció por primera vez en el manuscrito de 1484 Le triparty en la science des nombres (Tri party en la ciencia de los números) escrito por el médico francés Nicola Chuquet (1445-1488). A medida que se desarrollaron las imprentas, se adoptaron paréntesis para facilitar la composición tipográfica.

Hoy en día, un vinculum se usa principalmente para indicar decimales periódicos (por ejemplo, la $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ con cantidad 142857 considerada como una unidad periódica) y para denotar el complejo conjugado de un NÚMERO COMPLEJO.

La barra horizontal que se usa para escribir fracciones también se denomina a veces vinculum. También se puede considerar como un dispositivo para indicar qué términos deben tratarse como una unidad. Por ejemplo, en la $\frac{x+y}{3}$ el expresión la cantidad entera “x + y” debe dividirse por tres, no x solo ni yo solo. De este modo $\frac{x+y}{3} = \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$.

volumen En términos generales, el volumen de un objeto o región tridimensional es “la cantidad de espacio que ocupa”. Tal definición apela a la comprensión intuitiva. En general, sin embargo, es muy difícil explicar con precisión a qué nos referimos con “espacio” y la “cantidad” que ocupa. Al igual que con la noción de AREA, este es un problema serio, como lo demuestra la paradoja de Banach-Tarski que surge en el estudio cuidadoso de ese tema.

En cualquier caso, dado algún tipo de comprensión de lo que queremos decir con "área", es natural definir el "volumen" de un objeto simple con paredes verticales de altura h y una base de área A para que sea simplemente el producto A × h:

volumen = área de la base × altura

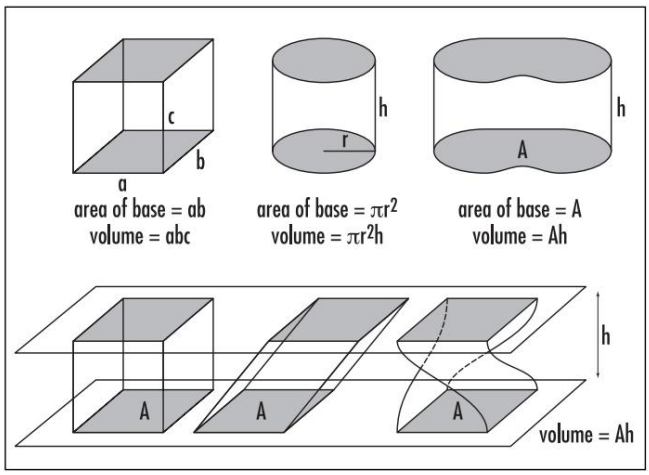
Por ejemplo, una caja rectangular de una unidad de ancho, b unidades de profundidad y c unidades de altura tiene una base de área a × b y, por lo tanto, un volumen dado por a × b × c. Un cilindro de altura h con

Machine Translated by Google

base circular de radio r tiene área de base πr 2 y por lo tanto un volumen πr 2h.

Este punto de vista imagina volúmenes también aproximados por pilas de capas delgadas de "volumen", cada una de las cuales es una sección transversal horizontal de un sólido del mismo tamaño y tamaño. forma como base. Como una baraja de 52 cartas apiladas para producir una caja rectangular, el volumen de una pila de hojas no cambia si la pila está sesgada: la forma de la el deck puede cambiar, pero su volumen no. Esta observación fue notada por primera vez por el matemático italiano del siglo XVII BONAVENTURA CAVALIERI (1598–1647). conduce a un principio general, hoy llamado PRINCIPIO DE CAVALIERI :

> Los sólidos de igual altura tienen volúmenes iguales si las secciones están formadas por planos paralelos a la base en el misma distancia de la base tienen áreas iguales.



El volumen de figuras.

Se utilizan técnicas de CÁLCULO INTEGRAL para calcular volúmenes. Los métodos aquí realmente no son diferentes a aproximar sólidos nuevamente como pilas de delgadas tarjetas o, tal vez, como colecciones de cajitas (cuyas se conocen los volúmenes) y tomando el LÍMITE como mejor y se hacen mejores aproximaciones.

Por ejemplo, supongamos que un sólido tiene una altura h y que el área de una sección transversal formada por un plano paralelo al la base a la altura x es A(x). Imagina que cortamos el sólido en "cartas" delgadas en las posiciones 0 = x0 < x1 < … xn–1 < xn = h. Entonces el volumen V del sólido se puede aproximar bien como la suma de los volúmenes de las tarjetas de área base A(xi) y xi , es decir, . Tomando $V \approx \sum_{i=0}^{n-1} A(x_i)\,\Delta x_i$ ancho $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ el límite a medida que más y más valores entre 0 y h son elegido (es decir, a medida que se usan tarjetas cada vez más delgadas) da el volumen verdadero del sólido como una integral:

$$V = \int_0^h A(x)\,dx$$

Por ejemplo, la sección transversal de una esfera de radio r en una distancia x desde el plano que pasa por la ecuación $\sqrt{r^2}$ es un círculo de radio y área $\pi(r^2 - x^2)$. Así, el volumen de una esfera de radio r es:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi\left(r^2 - x^2\right)dx = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Cualquier sección transversal de un CONO con base de forma arbitraria es una versión escalada de la misma forma plana. A la mitad de la distancia desde el vértice del cono, la cruz sección tiene un área de un cuarto del área de la base. En un tercio de la distancia desde el vértice, la sección transversal tiene área un noveno del área de la base. En general, si el el área de la base es A y la altura del cono es h, entonces el área de la sección transversal a una distancia x de el ápice tiene área $A(x) = A \times \left(\frac{x}{h}\right)^2$. El volumen de cualquier cono con base de área A y altura h es así:

$$V = \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 dx = Ah\frac{1}{3}$$

El volumen de un FRUSTUM se puede calcular de la misma forma.

La palabra volumen proviene del latín volumen, que significa "pergamino", donde el tamaño o la mayor parte de un libro eventualmente condujo al uso de la palabra para el tamaño o grueso de cualquier objeto.

Véase también DOBLE INTEGRAL; ESCALA; SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

Machine Translated by Google

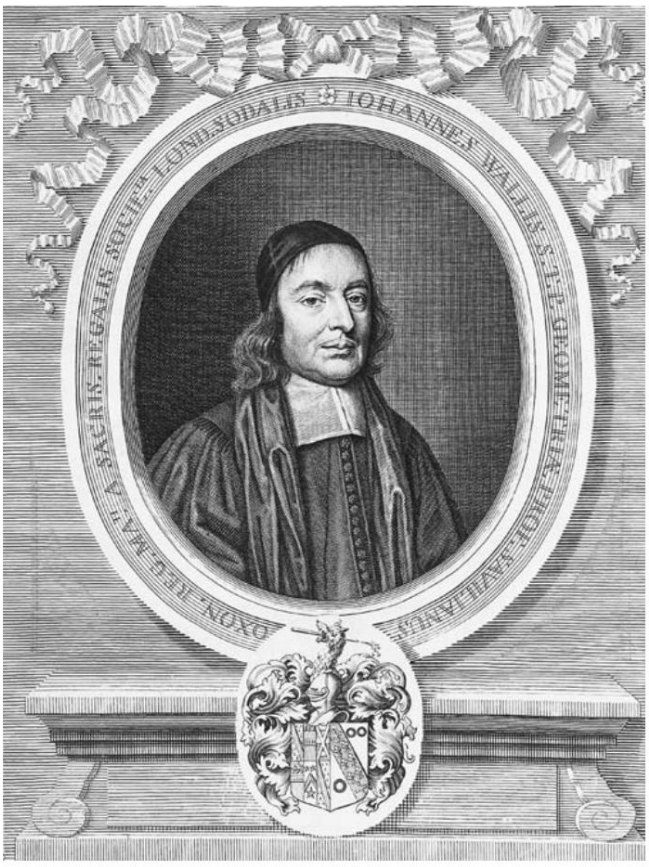
W

Wallis, John (1616–1703) Cálculo británico Nacido el
23 de noviembre de 1616, en Kent, Inglaterra, matemático
John Wallis es recordado por sus contribuciones sustanciales al
desarrollo inicial de CÁLCULO, que estableció
el trabajo preliminar para SIR ISAAC NEWTON (1642–1727)
para luego desarrollar completamente el tema. Sus contribuciones a
La mecánica también ayudó a Newton a formular las leyes de
movimiento. Fue considerado el principal matemático inglés de su
época.

Wallis tuvo poca exposición a las matemáticas durante
la primera parte de su vida. Recibió una licenciatura en artes
Licenciatura en 1637 y maestría en 1640 en teología y fue ordenado
ministro en 1640.

Por casualidad, mientras trabajaba como capellán durante
la época de los disturbios civiles en Inglaterra, Wallis descubrió
que podía descifrar fácilmente los mensajes codificados que los
feligreses compartían con él. Esto demostró un talento para
pensamiento matemático, y Wallis pronto fue contratado por
los parlamentarios para decodificar los mensajes realistas.

Durante este tiempo, Wallis leyó las obras de
JOHANNES KEPLER y BONAVENTURA CAVALIERI y
otros, y desarrolló un interés para ampliar la
ideas de cálculo infinitesimal desarrolladas por estos
autores En 1656, Wallis escribió su influyente texto Arith metica
infinitorum (Serie infinita), que contiene,
entre muchas cosas, su famosa fórmula de producto para $\frac{\pi}{2}$.
Wallis también estudió y escribió sobre los temas de CONIC
SECCIONES y ÁLGEBRA. fue el primero en explicar
el significado de potencias cero, negativas y fraccionarias



John Wallis, un eminente matemático del siglo XVII,
Usó infinitesimales para desarrollar importantes técnicas de
computación. Sir Isaac Newton basó gran parte de su desarrollo
del cálculo en las ideas de Wallis. (Foto cortesía de la Ciencia
Museo, Londres/Topham-HIP/The Image Works)

Machine Translated by Google

$(xx^{0}x,,)^{\text{metro}}\overline{\overline{\text{norte}}}$ y fue uno de los primeros eruditos en permitir soluciones negativas y complejas a las ecuaciones. Él argumentó que el número i, que representa el cuadrado raíz de –1, tiene un lugar en las aplicaciones matemáticas del mundo real. Wallis también introdujo el símbolo ∞ para el infinito.

Además de trabajar como investigador matemático, Wallis también hizo contribuciones significativas como historiador matemático. Restauró varias antiguas textos griegos y presentó un estudio exhaustivo de la historia del álgebra en su obra de 1685 Tratado sobre Álgebra. Murió en Oxford, Inglaterra, en noviembre 8, 1703.

Wallis ayudó a dar forma a todo el curso del trabajo matemático en Inglaterra durante la última parte del siglo XVII y allanó el camino para que Newton desarrollara su ideas Como resultado, Gran Bretaña se convirtió en el centro de la investigación matemática a fines del siglo XVII y permaneció así. hasta la influencia de LEONHARD EULER (1707-1783) y miembros de la FAMILIA BERNOULLI movieron el foco a la Europa continental a mediados del siglo XVIII.

Véase también PRODUCTO DE WALLIS .

Producto de Wallis En 1656 Matemático inglés JOHN WALLIS descubrió lo siguiente notable expresión para el número como $\frac{\pi}{2}$ PRODUCTO INFINITO:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

Descubrió este resultado mientras intentaba calcular INTEGRALES de la forma

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\text{norte}}\,dx$$

con n no necesariamente un número entero. (Por ejemplo, cuando $\text{norte} = \frac{1}{2}$, cuatro veces esta integral es igual al área de un círculo). El trabajo de LEONHARD EULER (1707–83) sobre la FUNCIÓN ZETA también conduce a una prueba de Wallis producto, uno que es relativamente fácil de seguir.

La fórmula de Wallis llevó al colega inglés LORD WILLIAM BROUNCKER (1620-1684) para descubrir la siguiente fórmula asombrosa de FRACCIÓN CONTINUA para π:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}$$

Véase también IP.

Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897) Análisis alemán Nacido el 31 de octubre de 1815, el erudito alemán Karl Weierstrass es recordado como una figura destacada en el campo del ANÁLISIS matemático. A lo largo de su carrera enfatizó la necesidad de rigor absoluto y, siguiendo los esfuerzos de AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857), trabajó para introducir definiciones precisas de nociones fundamentales en el estudio de CÁLCULO. Desarrolló la famosa definición ε – δ de un LÍMITE que usamos hoy, así como una aclaración precisa del significado de continuidad, convergencia y de DIFERENCIALES. Para ilustrar que la comprensión intuitiva por sí sola nunca es suficiente, Weierstrass presentó ejemplos de funciones patológicas que son continuas pero no tienen rectas tangentes bien definidas. Weierstrass también resolvió el famoso PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO con su "cálculo de variaciones".

Weierstrass ingresó a la Universidad de Bonn en 1834 para obtener un título en derecho y finanzas, pero nunca completó el programa, eligiendo seguir en su lugar un estudió matemáticas en la Academia Teológica y Filosófica de Münster en 1839. Comenzó su carrera académica como profesor de matemáticas en una escuela provincial.

Mientras enseñaba, Weierstass publicó una serie de artículos sobre el estudio de funciones reales y complejas. El gran parte de su trabajo inicial pasó desapercibido para la comunidad matemática, y no fue hasta la publicación de su pieza de 1854 Zur Theorie der Abelschen Functio nen (Sobre la teoría de las funciones abelianas) que se reconoció el genio de Weier Strass como matemático. Él recibió inmediatamente un doctorado honoris causa de la Universidad de Königsberg y se le otorgó un licencia de un año de la escuela para proseguir estudios matemáticos avanzados. Nunca volvió a la enseñanza escolar, sin embargo. En 1856, a la edad de 40 años, Weierstrass aceptó una cátedra en la Universidad de Berlín, que conservó por el resto de su vida.

Machine Translated by Google

Weierstrass hizo contribuciones significativas a la estudio de SERIE DE POTENCIAS y su convergencia, y para SERIE DE FOURIER y sus aplicaciones a problemas en geometría y mecánica. Al proporcionar una definición precisa de un límite, Weierstrass revolucionó por completo comprensión matemática de los principios fundamentales de CÁLCULO y análisis moderno. En un sentido muy real, Weierstrass estableció los estándares de rigor que siguen todos los matemáticos hoy en día.

En el estudio de SERIES CONVERGENTES, la prueba de comparación muestra que la función:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{pecado}(\pi n x^2)}{n^2}$$

converge para todo valor de x. (Comparar con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) Weierstrass pudo demostrar, además, que esta función es continua, pero que no tiene derivada en cualquier valor irracional de x. Esta fue quizás su mayor famoso ejemplo de una función patológica que es continua pero no posee una línea tangente significativa en casi todos los puntos. Que tales funciones existan, como señaló Weier Strass, de hecho demuestra la necesidad de cuidado intransigente en el desarrollo de los detalles en Todo el trabajo teórico. Jules Henri Poincaré (1854-1912) admiraba su "unidad de pensamiento" en este asunto.

Weierstrass murió en Berlín, Alemania, en febrero 19, 1897.

conjunto bien ordenado Se dice que un CONJUNTO ORDENADO A es bien ordenado si todo subconjunto no vacío de A tiene un miembro est pequeño. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales es bien ordenado: para cualquier conjunto de números naturales uno se preocupa para describir, habrá un miembro más pequeño de ese conjunto. Por otro lado, el conjunto de todos los enteros no está bien ordenado. Por ejemplo, el subconjunto de enteros negativos no tiene miembro más pequeño.

En 1904 el matemático alemán ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871–1953) demostró que cualquier el conjunto ordenado se puede hacer bien ordenado si uno está dispuesto para cambiar el orden en ese conjunto. Por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros se pueden hacer bien ordenados si se dispone ellos de la siguiente manera:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, 4,…

(El elemento "más pequeño" en el conjunto de todos los enteros negativos, por ejemplo, ahora es –1.) Zermelo necesitaba invocar un controvertido AXIOMA DE ELECCIÓN para probar esta afirmación.

Whitehead, Alfred North (1861-1947) Lógica británica , Física teórica, Filosofía Nacido el 15 de febrero de 1861, en Kent, Inglaterra, Alfred Whitehead es mejor recordado en matemáticas por su obra de tres volúmenes Prin cipia Mathematica, escrita en colaboración con los ingleses. lógico BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872-1970). Whitehead y Russell esperaban derivar toda la matemática de principios puramente lógicos.

Whitehead ingresó en el Trinity College de Cambridge en 1880 para estudiar matemáticas aplicadas. el trabajo y enseñó en este campo durante 12 años antes de que sus intereses finalmente se volviera hacia las matemáticas puras y los principios fundamentales de la materia. En 1891 comenzó trabajo en el Tratado de Álgebra Universal, un proyecto que le llevó siete años completarlo. Al mismo tiempo, Bertrand Russell ingresó a la universidad como estudiante universitario y Whitehead inmediatamente lo reconoció como un estudiante. Filósofo brillante y erudito matemático capaz. Su colaboración en Principia Mathematica comenzó en 1900 e inicialmente estaba destinado a ser un volumen único trabajar. El descubrimiento de Russell en 1901 de su famosa teoría de conjuntos Las paradojas, sin embargo, obligaron a los dos hombres a reevaluar el proyecto y ampliar la obra a un tratado de tres volúmenes. Estos volúmenes se publicaron entre 1910 y 1913.

Durante este tiempo, Whitehead también publicó otros material, incluyendo textos sobre proyectivas y descriptivas geometría y una descripción general popular de las matemáticas, Introducción a las matemáticas. cabeza blanca también escribió artículos sobre la filosofía de la ciencia y ofreció un punto de vista alternativo a la teoría de ALBERT EINSTEIN de la relatividad en su libro de 1922 El principio de la relatividad. La obra no fue bien entendida y ha sido ignorado en gran medida.

Whitehead trabajó como profesor en Cambridge para más de 30 años antes de aceptar un puesto como catedrático de filosofía en la Universidad de Harvard en 1924. Permaneció allí hasta su jubilación en 1937. Murió en Cambridge, Massachusetts, 10 años después, el 30 de diciembre de 1947.

número entero UN NÚMERO NATURAL a veces es referido como un número entero. Los asuntos son confusos

Machine Translated by Google

porque a muchos estudiosos de las matemáticas también les gusta referirse a cero como un número entero, y a algunos también les gusta considerar cualquier número entero negativo como un número entero. Hay no existe una convención estándar en este sentido. Es cierto, sin embargo, que ningún matemático consideraría un número que no es un número entero un número entero.

Véase también NÚMERO; TEORÍA DE LOS NÚMEROS.

Wiles, Andrew John (1953–) Algebraica británica teoría de números Nacido el 11 de abril de 1953 en Cambridge, Inglaterra, el matemático Andrew Wiles obtuvo fama internacional en 1994 como la primera persona en resolver uno de los problemas matemáticos más escurridizos y difíciles de todos los tiempos, EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT . Este notorio problema, planteado por el número francés orist PIERRE DE FERMAT (1601-1665), establece que el ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras positivas si n es un número entero mayor que 2. Encontrar una prueba de esta afirmación aparentemente simple ha demostrado ser una desafío extraordinariamente difícil, que ha frustrado a matemáticos profesionales y aficionados durante más de 300 años.

Desde la primera lectura del último teorema de Fermat en A la edad de 10 años, Wiles soñaba con resolverlo. Cuando era joven, intentó por primera vez enfoques que pensó que Fermat podría haber seguido al pensar en el teorema él mismo. Esto resultó ser inútil. En la universidad, Wiles estudió la obra de los grandes de los siglos XVIII y XIX académicos que habían trabajado en el problema, con la esperanza de obtener alguna idea sobre cómo se podría abordar el desafío. Persiguiendo aún más las matemáticas, Wiles ingresó Clare College, Cambridge, y en 1980 recibió un Doctor. en matemáticas. En 1982 Wiles viajó a la Unidos para tomar una cátedra en la Universidad de Princeton, Nueva Jersey.

Aunque la tesis de Wiles y los primeros trabajos de investigación no estaba directamente relacionado con la solución del último orema de Fermat, Wiles se enteró más tarde de algunos desarrollos importantes que conectaban la posible solución del problema con algunos enfoques nuevos en curva elíptica teoría, el tema de su tesis. Ante esta noticia, Wiles abandonó todos los intereses de investigación no relacionados para centrarse exclusivamente en resolver el teorema. Trabajando durante 7 años recto, esencialmente en reclusión, Wiles modificado y adaptado los avances recientemente desarrollados en muchos dispares campos para forjar un camino que, con suerte, conduciría a una solución al problema. En 1993, en medio de una oleada de Con gran entusiasmo mediático, Wiles anunció a la comunidad matemática que había tenido éxito. Subsecuente Una revisión cuidadosa de su trabajo, sin embargo, reveló una sutil, pero daño, error, y todo se creía perdido.

Después de otros 18 meses de esfuerzos concertados, con Con la ayuda de su colega Richard Taylor de la Universidad de Cambridge, Wiles logró encontrar una forma de eludir el error y producir, por fin, un prueba infalible del famoso resultado. la prueba de la teorema aparece en un volumen de 1995 de Annals of Matemáticas. Representa uno de los mayores logros intelectuales del siglo XX.

Wiles ganó muchos premios por su logro, incluyendo el Premio Wolf en 1995, el Premio Wolfskehl en 1997, el Premio Cole de la Sociedad Americana de Matemáticas en 1997, y el Premio Rey Faisal en 1998. Porque él superaba el límite de edad de 40 años, Wiles no recibió una MEDALLA FIELDS por su trabajo, pero fue honrado con una placa de plata durante la ceremonia de la Medalla Fields de 1998. Wiles reside actualmente en Princeton, Nueva Jersey.

Machine Translated by Google

Z

Zeno de Elea (ca. 490–425 a. C.) Filosofía griega Nacido en Elea, Luciana (ahora sur de Italia), el filósofo griego Zeno es recordado por su invención de una serie de PARADOJAS que influyeron significativamente y desafiaron la percepción griega de la magnitud. movimiento y continuidad. La cuestión de si la materia y el tiempo se componen o no de partes fundamentales indivisibles ("átomos") fue de gran interés para los filósofos de la época. Zeno logró idear una variedad de argumentos convincentes que parecen probar que cualquier punto de vista que uno desee adoptar no puede ser correcto. Cuatro de sus paradojas en particular adquirieron cierta notoriedad.

Permanecieron sin resolver durante más de dos milenios.

Esencialmente no se sabe nada de la vida de Zeno, excepto lo que se puede deducir de los escritos de PLATO en su diálogo Parménides. Allí nos enteramos de que Zeno estudió en la Escuela Eleática de Filosofía bajo la dirección del fundador Parménides. Esta secta analizó el concepto de monismo, la idea de que “todo es uno” y que el cambio y el movimiento son simplemente ilusiones y no forman parte de una realidad eterna. Se cree que Zeno escribió un solo texto, su colección de 40 paradojas sobre la naturaleza del tiempo, el espacio y el movimiento. El texto, desafortunadamente, no ha sobrevivido, y conocemos su contenido a través de los escritos de otros. ARISTÓTELES describe las cuatro famosas paradojas en su obra Física.

Ver también LAS PARADOJAS DE ZENO .

Las paradojas de Zenón En sus estudios, el filósofo griego

ZENO DE ELEA propuso 40 PARADOJAS que desafían nuestra comprensión del tiempo, el espacio y el movimiento. Cuatro de sus paradojas han atraído una atención considerable por ser particularmente problemáticas.

Con respecto al tiempo y el espacio, hay dos posibilidades: o tales magnitudes pueden dividirse en partes cada vez más pequeñas un número ilimitado de veces (es decir, el espacio y el tiempo forman un continuo), o existe alguna unidad fundamental indescomponible de cada uno que ya no se puede dividir (similar a la noción de que la materia está compuesta de partículas indivisibles). Las dos primeras de las famosas paradojas de Zeno argumentan que el movimiento es imposible si se adopta el primer punto de vista, mientras que las dos últimas argumentan que el movimiento es nuevamente imposible si se adopta la última perspectiva. Sus paradojas son las siguientes:

1. Dicotomía: Suponga que el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles.

Para cruzar la habitación, primero se debe llegar al punto medio. Pero para hacer eso, uno debe llegar al punto a una cuarta parte del camino. Pero para llegar hasta aquí, uno debe pasar por el punto de un octavo de ancho, y antes de eso, el punto de 1/16 de ancho.
Como esta división se puede hacer indefinidamente, parece que nunca podemos comenzar a caminar por la habitación, podemos nunca llegar a un primer punto de nuestro viaje. Por lo tanto, el movimiento es imposible.

2. Aquiles y la tortuga: Suponga que el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles.

Machine Translated by Google

Aquiles y una tortuga participan en una carrera en la que a la tortuga se le da una ventaja. Considere la de Aquiles circunstancia. Para alcanzar a la tortuga, primero debe llegar a la posición inicial de la tortuga. Para entonces, la tortuga, por supuesto, habrá pasado a una nueva posición. Para alcanzar a la tortuga, Aquiles debe alcanzar esta segunda posición, y, de nuevo, cuando lo hace entonces la tortuga se habrá movido más lejos. Continuando así, vemos que es imposible para Aquiles nunca alcanzar a la tortuga, no importa cuán rápido el mueve.

3. La paradoja de la flecha: suponga que el tiempo y cada espacio se componen de unidades fundamentales discretas.

Considere una flecha en vuelo. En cualquier fundamental unidad de tiempo, la flecha ocupa una determinada posición instantánea en el espacio. En este momento, es indistinguible de una flecha inmóvil que ocupa el mismo ubicación en el espacio durante esa misma unidad de tiempo. Cómo entonces es que se percibe el movimiento?

4. La paradoja del estadio: asume ese tiempo y el espacio cada uno se compone de discretos unidades fundamentales.

Imagine dos corredores en un estadio moviéndose en sentido opuesto direcciones desde la misma posición inicial. supongamos que cada uno de los corredores se mueve a una velocidad equivalente a una distancia fundamental de espacio por cada unidad fundamental de tiempo. Pregunte ahora, "¿Qué ve un corredor cuando mira detrás de su hombro? La respuesta: su oponente se mueve 2 unidades de espacio en 1 unidad de tiempo. Sólo podemos concluir que debe haber una unidad más pequeña que la unidad de tiempo supuestamente indivisible que corresponde a solo 1 unidad de este movimiento.

Algunos comentarios están en orden. Vale la pena señalar que muchos textos han intentado resolver el problema de Zeno paradoja de la dicotomía al argumentar que el hecho de que puede caminar a través de una habitación prueba que la suma infinita $+ + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}$ … converge al valor finito (SERIES) + 1. Esto, sin embargo, no es relevante para el argumento propuesto en esta primera paradoja. Zeno está sugiriendo en su lugar que es imposible construir tal suma infinita por comenzando en el "extremo equivocado", por así decirlo. (Sin embargo, la construcción de una suma infinita es apropiada para analizar la segunda paradoja.)

Algunos eruditos sugieren que la tercera paradoja de Zeno es un primer paso importante en el estudio de INFINITESIMALES y temas de CÁLCULO DIFERENCIAL. la norma d la fórmula para la velocidad es $v = \frac{d}{t}$, donde d es la distancia = recorrida y t el tiempo que se tarda en hacerlo. En un 0 particular instante, esto conduce a la ecuación sin sentido $v = \frac{0}{0}$. Aquí, se dice, Zeno está señalando la matemática dificultad de los infinitesimales, el mismo problema que fue para perseguir a los inventores del cálculo dos milenios después.

Zermelo, Ernst Friedrich Fernando (1871-1953) Teoría de conjuntos alemana , Física Nacido el 27 de julio de 1871, en Berlín, Alemania, el matemático Ernst Zermelo es recordado por fundar la TEORÍA DE CONJUNTOS axiomática. En 1908 publicó un conjunto de siete axiomas diseñados para superar las paradojas planteadas por BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872-1970) en teoría de conjuntos, y para proporcionar, por primera vez, una base rigurosa y lógica para el tema en desarrollo. los axiomas de Zermelo, aunque posteriormente modificado por otros matemáticos, han siguió siendo el punto de partida en el que mucho continuó se ha basado el trabajo sobre este tema.

Zermelo recibió un doctorado en matemáticas de la Universidad de Berlín en 1894 después de completar una tesis explorando temas de cálculo, el cálculo de variaciones y sus aplicaciones a la física. Él continuó trabajar en esta área en la universidad por 3 adicionales años antes de mudarse a Göttingen para estudiar hidrodinámica. Obtuvo una cátedra en Göttingen para su destacada investigación en este campo.

En ese momento en otras partes de Europa, los matemáticos intentaban dar sentido a la controvertida obra presentado por el matemático alemán GEORG CANTOR (1845-1918). El matemático alemán DAVID HILBERT (1862-1943), en su famosa conferencia de París de 1900, citó la resolución de CONTINUUM de Cantor HIPÓTESIS como la pregunta más desafiante e importante del siglo XX. Zermelo quedó cautivado por la problema cuando se enteró, y comenzó a dedicar todo su tiempo y esfuerzo para solucionarlo. Pronto se dio cuenta de que un primer paso para resolver la conjetura general sería para establecer una segunda de las afirmaciones de Cantor, a saber, que cualquier conjunto puede ser un CONJUNTO BIEN ORDENADO.

Zermelo publicó su primera colección de resultados en este tema en 1901 con el trabajo “Über die Addition transfiniter Cardinalzahlen” (Sobre la adición de

Machine Translated by Google

cardenales transfinitos), y 2 años más tarde logró probar la conjetura del buen orden en su artículo de 1904 “Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann”
(Prueba de que todo conjunto puede estar bien ordenado). Su éxito le valió fama y reconocimiento internacional como un matemático brillante. La Universidad de Göttingen le otorgó inmediatamente una cátedra completa.

En 1905, dejando a un lado el trabajo adicional sobre la hipótesis del continuo, Zermelo comenzó la tarea de axiomatizar la teoría de conjuntos. Al identificar un pequeño conjunto de suposiciones básicas sobre el tema, esperaba resolver algunas de las paradojas sobre conjuntos infinitos que surgían en el tema. Desafortunadamente, encontró necesario incluir un "axioma del infinito" que afirma, esencialmente, que existen conjuntos infinitos, junto con el extraordinariamente controvertido AXIOMA DE ELECCIÓN, que afirma que siempre es posible seleccionar, de un solo golpe, un objeto de cada conjunto en cualquier colección infinita de conjuntos. Los matemáticos se sentían incómodos con cada una de estas suposiciones en ese momento. Además, a pesar de sus esfuerzos, Zermelo no pudo demostrar que los axiomas que proponía estuvieran libres de contradicciones. Luego, otros matemáticos comenzaron a trabajar en esta tarea, y unos 15 años más tarde, en 1922, los matemáticos Adolf Fraenkel y Thoralf Skolem desarrollaron de forma independiente un sistema refinado de 10 axiomas que se consideró suficientemente útil.

Zermelo dejó Göttingen en 1910 para ocupar el cargo de catedrático de matemáticas en la Universidad de Zúrich, donde permaneció durante 6 años. Zermelo pasó el resto de su vida en Friburgo. Murió allí el 21 de mayo de 1953.

Véase también LA PARADOJA DE RUSSELL .

cero (cero) El número de conteo, denotado 0, que se usa para indicar que no hay objetos presentes se llama cero. Este número tiene la propiedad aritmética de que su suma con cualquier otro número no cambia ese número: a + 0 = a = 0 + a para todos los valores a. Así, el cero sirve como el ELEMENTO DE IDENTIDAD aditivo en aritmética. El cero es el único número real que no es ni POSITIVO ni negativo.

Fue solo recientemente en la historia de las matemáticas que el cero fue reconocido como una entidad matemática válida e importante. En tiempos de la antigüedad, se pensaba que los números representaban únicamente cuentas o magnitudes de cantidades. Por lo tanto, si no había objetos para contar, no había número para considerar (y, por lo tanto, hablar de cero como un número, en consecuencia, no tenía sentido). La antigua Los eruditos egipcios y griegos nunca usaron el cero en sus cálculos. Los antiguos babilonios fueron los primeros en utilizar una noción de cero al usarlo, en cierto sentido, como marcador de posición al expresar números grandes (al igual que usamos ceros hoy para distinguir entre 102 y 12). El matemático hindú BRAHMAGUPTA (ca. 598) –665) es acreditado hoy como el primer erudito en reconocer el cero como un número válido y usarlo en cálculos aritméticos. Su idea fue posteriormente ampliada por MUHAM MAD IBN M– US– A AL-KHW– ARIZM– ı (ca. 780–850) en su famoso desarrollo de una teoría del álgebra. El matemático italiano FIBONACCI (ca. 1170-1250) popularizó gran parte del trabajo de al-Khw– arizm– ı en Europa Occidental, pero no fue hasta el Renacimiento que la noción de cero finalmente se consideró un concepto válido.

La aritmética que involucra cero puede ser problemática. Aunque cualquier número se puede multiplicar por cero (para producir la respuesta cero), ningún número se puede dividir por cero. Por ejemplo, no puede haber una respuesta al problema de la división 1 ÷ 0. (Si 1/0 = x, luego multiplicar por el denominador da el resultado absurdo: 1 = x × 0 = 0). La cantidad 0/0 también se considera indefinido. (Se podría argumentar que la respuesta a este problema de división es 17, ya que 0 = 17 × 0, o, de la misma manera, que la respuesta es 2 ya que 0 = 2 × 0. No existe una única solución bien definida para 0 ÷ 0.)

Se considera un número contable incluso si se puede escribir como la suma de dos números enteros iguales. Como cero es igual a 0 + 0, se deduce que cero es un número par.

El estudio de los EXPONENTES muestra que es apropiado definir x como 1 para cualquier número real x distinto de cero. (Por ejemplo, $20 = 1$ y $1730 = 1$).
Si bien es cierto que $\lim_{x\to 0^+} x = 1$, no es válido suponer que 0^0 también es igual a 1. (Este LÍMITE no existe si se permiten NÚMEROS COMPLEJOS en nuestras consideraciones, por lo que la noción de elevar cero a la La potencia cero es problemática en este contexto.) Un estudio del FACTORIAL muestra que es apropiado definir 0! = 1.

A la RAÍZ de una función a veces se le llama cero de la función. Una función cero es una función cuya salida siempre es cero. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{\text{registro}\sqrt{1 - x^2}}{2x}$ definido en valores positivos de x es siempre cero. En la TEORÍA DE JUEGOS, un juego de suma cero es un juego en el que la victoria de algún jugador o jugadores siempre se equilibra con las pérdidas de los demás jugadores. Una matriz cero es una MATRIZ cuyas entradas son cero.

Machine Translated by Google

El número 286 es la mayor potencia conocida de 2 cuya expansión decimal no contiene ningún dígito igual a cero. (Observe que 210 = 1024, por ejemplo, tiene un segundo dígito igual a cero.) Todas las potencias de dos hasta 2 46,000,000 han sido comprobadas.

Véase también MATEMÁTICAS BABILÓNICAS; PAR E IMPAR NÚMEROS; MATEMÁTICAS GRIEGAS; MATEMÁTICAS INDIAS.

función zeta En 1740 el matemático suizo LEONHARD EULER (1707–83) estudió series infinitas de la forma:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

El TEST INTEGRAL muestra que esta serie converge si s es un número real mayor que 1. Euler llamó a esta función, definida para valores s > 1, función zeta.

Esta función está íntimamente relacionada con la distribución de números PRIMOS . Para ver esto, recordemos que el TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA afirma que cada número es un producto de un conjunto único de números primos. Así, en la EXPANSIÓN DE PARÁMETROS para el siguiente producto infinito, seleccionando un término de cada conjunto de paréntesis, cada número entero aparece una vez, y solo una, en la suma infinita que resulta:

$$\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \cdots\right)\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{2^s 3^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{2^{3s}} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{11^s} + \cdots$$

Aunque este argumento no es matemáticamente preciso, los matemáticos han demostrado que es válido realizar este procedimiento en los recíprocos de todos los números involucrados, incluso elevados a la s-ésima potencia. Como consecuencia:

$$\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

La fórmula para una SERIE GEOMÉTRICA muestra que esta ecuación se puede reescribir:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \times \cdots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

dando así una fórmula alternativa para la función zeta como un producto infinito sobre todos los números primos p:

$$\zeta(s) = \prod_{\text{todos los primos p}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Euler logró calcular el valor de la función zeta para ciertos valores de s. Mostró, por ejemplo, que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$, y $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$. (Continuó esta lista hasta ζ(26).)

A continuación mostramos cómo Euler calculó ζ(2). Hasta el día de hoy, se sabe muy poco sobre los valores de la función zeta en números enteros impares.

En 1859 el matemático alemán GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) demostró que la función zeta está bien definida incluso si el argumento s es un NÚMERO COMPLEJO. mostró la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge si la parte real de s es mayor que 1, y es posible extender la definición de la función para incorporar todos los valores complejos de s. Por esta razón, la función zeta a menudo también se denomina función zeta de Riemann.

Riemann estaba particularmente interesado en ubicar los ceros de la función zeta, es decir, encontrar los valores de s que producen ζ(s) = 0. Demostró que la función no tiene ceros si Re(s) ≥ 1, que sus únicos ceros en Re(s) ≤ 0 están en s = –2, –4, –6,…, y que tiene infinitos ceros en 0 < Re(s) < 1. Los llamó “ceros no triviales”. Riemann comentó que es razonable creer que todos los ceros no triviales se encuentran en la línea Re(z) = 1/2, pero no ofreció ninguna prueba. Este comentario casual se ha convertido en una de las conjeturas sin resolver más famosas de todos los tiempos. Los matemáticos la llaman la hipótesis de Riemann, y probar su verdad o falsedad tendría profundas implicaciones en el estudio de la TEORÍA DE NÚMEROS. (Por ejemplo, una parte crucial de probar el TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO se basa en demostrar que ζ(s) ≠ 0 para Re(s) = 1).

Machine Translated by Google

Cálculo de Euler de ζ(2)

Aquí mostramos cómo Euler estableció la fórmula $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$. Aunque el argumento no es matemáticamente riguroso, los matemáticos demostraron más tarde que los problemas planteados en este enfoque pueden hacerse matemáticamente sólidos.

Considere la función senx con su número infinito de ceros en las posiciones 0, ± π, ± 2π, ± 3π,… La SERIE DE TAYLOR de la función seno es:

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

que consideraremos como un polinomio de grado infinito con la misma colección infinita de raíces.

El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA afirma que cualquier polinomio se factoriza en términos lineales, un término para cada raíz de la ecuación. Asumiendo que el teorema sigue siendo válido para polinomios infinitos debemos tener entonces que:

$$\text{pecado}\, x = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

o, dividiendo por x:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

(Aquí hemos escrito el factor correspondiente a la raíz x = π, por ejemplo, como $1 - \frac{x}{\pi}$ en lugar de x – π. Esto se hace para asegurar que, al expandir los paréntesis del lado derecho de la segunda expresión, el resultado arroje un término constante igual a 1, como se requiere). Combinando pares de términos tenemos:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{x^4}{2^2 2^2 \pi^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \cdots$$

Ahora considere expandir los corchetes en el lado derecho de esta expresión para obtener términos que produzcan el x^2. Esto solo puede ocurrir seleccionando una cantidad x de un conjunto de paréntesis y el término 1 de todos los paréntesis restantes. Esto da:

$$\cdots - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \cdots$$

$$1 = -\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \cdots$$

De acuerdo con el lado izquierdo de esta expresión, ¡esta cantidad debe ser igual a $\frac{x^2}{3!} = -\frac{x^2}{6}$, lo que lleva a Fórmula de Euler:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Como beneficio adicional, considere nuevamente la ecuación:

$$\frac{\text{senx}}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

y pongo x = $\frac{\pi}{2}$. Esto da:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots$$

que establece el PRODUCTO WALLIS :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

Véase también TEORÍA ANALÍTICA DE LOS NÚMEROS; BERNOULLI NÚMEROS; SERIES DE FOURIER; SUMAS DE POTENCIAS.

Zhu Shijie Véase CHU SHIH-CHIEH.

Machine Translated by Google

puntuación z (valor z) Si un conjunto de DATOS tiene una media μ y desviación estándar σ, entonces la puntuación z de un determinado el valor de los datos x viene dado por:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Esta transformación convierte los valores de datos de una establecido en otro conjunto de valores con media 0 y desviación estándar 1. Permite comparar efectivamente dos o más conjuntos de datos independientes. Como ejemplo: un grupo de estudiantes universitarios de música de primer año reciben exámenes de interpretación, teoría y composición. Uno estudiante, John, desea juzgar qué tan bien le fue en cada una de las categorías. La siguiente tabla resume los resultados:

Categoría	Desviación estándar media Puntuación de John		
Actuación	730	40	670
Teoría	380	35	450
Composición	640	25	660

Las puntuaciones z de John son:

$$\text{Actuación} : z = \frac{670 - 730}{40} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Teoría} : z = \frac{450 - 380}{35} = 2$$

$$\text{Composición} : z = \frac{660 - 640}{25} = \frac{4}{5}$$

Aunque John obtuvo su puntaje más alto en desempeño, este puntaje está 1 1/2 desviaciones estándar por debajo del nota media en esta categoría. A pesar del bajo número, John obtuvo la mejor puntuación en teoría, obteniendo una puntuación estándar de 2 desviaciones por encima de sus compañeros de clase.

Si se cree que un conjunto de datos se distribuye normalmente con media μ y desviación estándar σ, la conversión a valores z permite comparar datos con el estándar distribución normal. Por ejemplo, para calcular la probabilidad de que una medida tomada al azar caiga dentro de un rango de valores [a,b], se calcula el área bajo el estándar por encima del intervalo $[a - \mu / \sigma, b - \mu / \sigma]$ curva normal:

$$\varphi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

Esto se puede encontrar mirando una tabla de valores de distribución (z) y cálculo de la diferencia

Véase también DISTRIBUCIÓN NORMAL; ESTADÍSTICAS: DESCRIPTIVO.

Zu Chongzhi (Tsu Chung Chi) (ca. 430–500) Computación china , astronomía Nacido en Fan-yang (ahora Hopeh), China, el erudito Zu Chongzhi es recordado por su invención del calendario Daming, su cálculo altamente preciso de un valor para π, y su derivación de la fórmula para el volumen de una esfera usando un método equivalente al descubierto por el italiano matemático BONEVENTURA CAVALIERI (1598–1647) un milenio completo después.

Zu Chongzhi desarrolló un interés por la astronomía en una edad temprana. Cuando era un erudito joven, notó una discrepancia en la posición de la sombra de un reloj de sol y el calendario que se usaba en China en ese momento, lo que lo motivó a trabajar durante muchos años en un sistema de calendario mejorado. Esta obra se completó en el año 462, pero no fue hasta 510, gracias a los esfuerzos de su hijo, que el Daming calendario fue adoptado oficialmente.

Volviendo su atención a las matemáticas, Zu Chongzhi trabajó para calcular un valor preciso para el relación de una circunferencia de un círculo a su diámetro, π. Notando, para empezar, que la circunferencia de un hexágono es tres veces su diámetro, y que cortando su esquinas para crear un dodecágono produce una relación ligeramente más grande que 3, Zu Chongzhi continuó afeitándose las esquinas para eventualmente producir un polígono con 192 lados, que, según midió, produjo una relación circunferencia-diámetro de 355/113. Esto representa un valor aproximado de π con una precisión de seis decimales. Semejante la precisión no fue superada por otros 1.000 años. Él Vale la pena señalar que Zu Chongzhi hizo su impresionante cálculos sin la ayuda de un ABACUS (no utilizado en China hasta el 1100) o cualquier otro tipo de cálculo dispositivo.

A través de los escritos de eruditos posteriores, los historiadores han determinado que Zu Chongzhi escribió al menos 51 obras. Lamentablemente ninguno sobrevive hoy. Zu Chongzhi es honrado hoy como uno de los pocos matemáticos chinos en tienen una característica lunar que lleva su nombre: un cráter de 28 kilómetros de ancho ubicado 20° al norte del ecuador lunar.

Machine Translated by Google

Machine Translated by Google

APÉNDICE I

CRONOLOGÍA

California. 50.000 a. C.

Los huesos de animales grabados con marcas de conteo proporcionan evidencia de que los pueblos paleolíticos de Europa central pudieron para contar.

California. 15.000 a. C.

Los huesos de animales con muescas descubiertos en el Medio Oriente proporcionan más evidencia de un conteo temprano.

California. 3000 a.

Los antiguos egipcios mejoraron el sistema de conteo e idearon un sistema de numeración que permitía la expresión de grandes números con solo unos pocos símbolos.

California. 2600 a.

La Gran Pirámide de Giza es construida por los egipcios.

California. 1800 a.

Los eruditos babilónicos desarrollan un SISTEMA DE NUMERACIÓN DE VALOR DE LUGAR de base 60 . Con él, realizan trabajos aritméticos complejos, resuelven ecuaciones CUADRÁTICAS y calculan TRIPLES PITAGÓRICAS.

California. 1650 a.

El escriba egipcio Ahmes copia un antiguo manual matemático en un rollo de papiro. El anticuario británico Alexander Henry Rhind (1833-1863) compró el rollo en un mercado egipcio en 1858, y el rollo se conoce hoy como el PAPIRO RHIND. El texto detalla el método para calcular el área de un círculo y otras formas geométricas básicas, el método de "posición falsa" para resolver ecuaciones lineales básicas y una tecnología nique para encontrar la inclinación de una pirámide. El valor 256/81 ≈ 3.1605 se usa para π.

California. 600 a.

Los eruditos indios escriben los Sulba sultras, un conjunto de textos instructivos religiosos que proporcionan métodos geométricos detallados para la construcción de retablos. Las matemáticas descritas en los textos incluyen fórmulas para las áreas de formas geométricas básicas, así como para los volúmenes de prismas y cilindros.

California. 585 a.

El matemático griego TALES DE MILETO funda la primera escuela conocida de filosofía y matemáticas.
Tales desarrolla siete proposiciones geométricas importantes, anunciando la demanda de rigor y demostración en el pensamiento matemático griego.

California. 569 a.

Nace Pitágoras de Samos. Alrededor del año 510 a. C., Pitágoras funda una sociedad matemática y filosófica secreta que incluye tanto a hombres como a mujeres.
Los pitagóricos se destacan como los primeros en proporcionar una prueba de lo que hoy se conoce como TEOREMA DE PITÁGORAS y se les atribuye el descubrimiento de IRRACIONAL
Números.

California. 450 a.

ZENO OF ELEA propone una serie de paradojas que desafían las nociones de espacio, tiempo y movimiento.

California. 387 a.

El filósofo griego PLATÓN (ca. 428–348 a. C.) funda la Academia en Atenas. Su insistencia en que las matemáticas

Machine Translated by Google

Ser una parte integral de una educación formal eleva el estatus de las matemáticas en el mundo occidental.

California. 386 a. C.

El oráculo de Delos le dice a la gente de Atenas que para acabar con una plaga deben duplicar el tamaño del altar en forma de cubo al dios Apolo. Esto establece el problema de DUPLICAR EL CUBO.

California. 370 a.

EUDOXO DE CNIDO (ca. 400–350 a. C.) desarrolla un "método de agotamiento" para determinar las áreas de figuras curvas simples. El método es un precursor de la noción de LÍMITE desarrollada en el CÁLCULO del siglo XVIII .

California. 350 a.

ARISTÓTELES (ca. 384–322 a. C.) analiza la estructura de los ARGUMENTOS y el razonamiento lógico para desarrollar ideas fundamentales para el campo de la LÓGICA FORMAL.

California. 310 a.

El gobernante Ptolomeo Soter funda la Biblioteca de Alejandría.
Sigue siendo el centro del aprendizaje intelectual durante más de 700 años.

California. 300 a.

El geómetra griego EUCLID resume todo el conocimiento matemático conocido en su época en LOS ELEMENTOS. El método de deducción lógica y rigor que proporciona sigue siendo el paradigma del pensamiento matemático actual.

California. 240 a.

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (ca. 287–212 a. C.) utiliza el método de agotamiento para calcular el área bajo una sección de una PARÁBOLA. También realiza contribuciones fundamentales en los campos de la geometría, la ingeniería, la astronomía y la hidrostática. Descubre un método para calcular el valor π con cualquier grado de precisión y muestra, en particular, que sus valores se encuentran entre 3 10/71 y 3 1/7.

California. 230 a.

ERATOSTENES DE CIRENE (ca. 275–195 AEC) calcula que la circunferencia de la TIERRA es de 28,500 millas. Desarrolla la TAMIZ DE ERATOSTENES para calcular números PRIMOS .

California. 220 a.

APOLONIO DE PERGA (ca. 262–190 a. C.) desarrolla el estudio de las SECCIONES CÓNICAS. También desarrolla una teoría de EPICICLOS para modelar el movimiento planetario.

California. 214 a.

Comienza la construcción de la Gran Muralla China.

California. 150 a.

Hiparco de Nicea (ca. 190-126 a. C.) desarrolla ideas iniciales en la teoría de la TRIGONOMETRÍA. Utiliza la geometría para calcular las distancias del Sol y la Luna desde la Tierra.

California. 100 a.

Los eruditos chinos escriben JIUZHANG SUANSHU (Nueve capítulos sobre las artes matemáticas). El texto incluye soluciones a ecuaciones lineales y CUADRÁTICAS , el cálculo de áreas y volúmenes, una declaración del TEOREMA DE PITÁGORAS y el uso de NEGATIVO

NÚMEROS.

California. 140

El astrónomo griego CLAUDIUS PTOLEMY escribe el Almagesto, el trabajo más influyente en la astronomía matemática hasta el siglo XVI. Incluye una tabla de valores de acordes equivalente a una tabla de senos moderna.

Utiliza el valor 377/120 para π.

California. 250

El matemático griego DIOPHANTUS DE ALEJANDRÍA escribe Arithmetica. Es el primero en usar símbolos para representar cantidades desconocidas.

California. 320

PAPPUS OF ALEXANDRIA intenta revivir el interés en la búsqueda clásica griega de las matemáticas. Escribe Synagoge (Colecciones) como guía de las grandes obras griegas.

California. 370

Nace HIPATIA (ca. 370-415), la primera mujer nombrada en la historia de las matemáticas. Se convierte en directora de la escuela platónica de Alejandría.

California. 475

Nace el astrónomo y matemático indio ARYABHATA (ca. 476–550). Desarrolla métodos para extraer raíces cuadradas, sumar series aritméticas y calcular valores de cuerdas. Él usa el valor 3.1416 para π.

California. 480

El erudito chino ZU CHONGZHI (430–500) usa el valor 355/113 para π.

Machine Translated by Google

California. 600

Los eruditos hindúes inventan la REPRESENTACIÓN DECIMAL, el método de numeración que usamos hoy para representar números.

California. 640

El matemático y astrónomo hindú BRAHMAGUPTA (ca. 598–665) introduce los NÚMEROS NEGATIVOS y el concepto de CERO como número en la ARITMÉTICA.

641

La Biblioteca de Alejandría es quemada.

California. 775

Los eruditos árabes comienzan a traducir las grandes obras griegas e indias al árabe.

California. 830

MUHAMMAD IBN M– USS– A AL-KHW– ARIZM– ı (ca. 780–850) escribe dos textos influyentes que fundan el campo de ALGE BRA. Al-Khw– arizm– ı también promueve el uso del sistema ARITMÉTICO hindú de base 10.

850

El matemático indio Mahavira escribe el Ganita Sera Samgraha (El compendio de la aritmética), el primer texto indio dedicado exclusivamente al tema de las matemáticas.

1079

El erudito persa OMAR KHAYYAM (ca. 1048-1131) calcula que la duración del año es de 365,24219858156 días, hasta el sexto decimal.

1202

El teórico de números italiano FIBONACCI (ca. 1170–1250) escribe Liber abaci (El libro del ábaco), introduciendo los NÚMEROS HINDÚ-ÁRABES en Europa occidental. Fibonacci también descubre la secuencia 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

1360

La matemática francesa NICOLE ORESME (ca. 1323-1382) descubre que el área bajo una curva de velocidad corresponde a la distancia recorrida.

1482

La primera edición impresa del texto de Euclides LOS ELEMENTOS se produce en Venecia, Italia. Se convierte en el libro de texto más traducido y publicado de todos los tiempos.

1498

El erudito alemán Johannes Widmann (1462-1498) escribe Aritmética mercantil en la que los símbolos "+" y aparecen “–” impresos por primera vez.

1533

El erudito alemán REGIOMONTANO (1436-1476) publica el primer tratado moderno completo sobre el tema de TRIGONOMETRÍA.

California. 1541

El matemático italiano NICCOLÒ TARTAGLIA (ca. 1499–1557) descubre un método general para resolver ECUACIONES CÚBICAS. Le cuenta su método, en confianza, a GIROLAMO CARDANO (1501-1576) y LUDOVICO FERRARI (1522-1565), quienes publican los detalles sin su consentimiento. Ferrari descubre un método para resolver ECUACIONES CUARTICAS.

1557

El matemático galés ROBERT RECORDE (ca. 1510-1558) introduce el símbolo “=” para la igualdad en el primer texto de álgebra del mundo impreso en inglés.

1585

El matemático holandés SIMON STEVIN (1548–1620) introduce la notación decimal para las fracciones.

1591

El matemático francés FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) escribe In artem analyticam isagoge (Introducción a las artes analíticas), estableciendo los principios del ÁLGEBRA moderna y la notación algebraica moderna.

1594

El matemático escocés JOHN NAPIER (1550–1617) comienza su trabajo sobre técnicas aritméticas que eventualmente lo llevaron al descubrimiento de los LOGARITMOS. Publica su obra en 1614.

1609

El astrónomo y matemático alemán JOHANNES KEPLER (1571–1630) observa que los planetas se mueven en órbitas elípticas. El científico italiano GALILEO GALILEI (1564–1642) mejora la invención del telescopio y comienza sus propias observaciones astronómicas.

1622

El matemático británico WILLIAM OUGHRED (1574–1660) inventa la regla de cálculo. Introduce el símbolo “x” para la multiplicación y las abreviaturas “sin” y “cos” para seno y coseno, respectivamente.

Machine Translated by Google

1629

El matemático francés PIERRE DE FERMAT (1601-1665) usa el álgebra para resolver problemas geométricos pero no publica sus resultados. El matemático y filósofo francés RENÉ DESCARTES (1596–1650) desarrolló posteriormente técnicas similares y hoy en día se le reconoce como el fundador de este enfoque.

1635

El matemático italiano BONAVENTURA CAVALIERI (1598–1647) introduce un método de indivisibles para comparar volúmenes (un precursor de los métodos de CÁLCULO INTEGRAL) y el PRINCIPIO DE CAVALIERI .

California. 1637

FERMAT presenta la moderna TEORÍA DE LOS NÚMEROS. Escribe un problema al margen de un texto que confunde a los matemáticos durante siglos. EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT fue finalmente resuelto por ANDREW WILES en 1994.

1639

El matemático francés GIRARD DESARGUES (1591–1661) publica un tratado sobre su recién descubierta GEOMETRÍA PROYECTIVA. El trabajo es esencialmente ignorado durante 200 años.

1654

El matemático BLAISE PASCAL (1623-1662) inicia una correspondencia con FERMAT sobre cuestiones de juegos de azar. A través de cinco letras consecutivas, juntas crean la teoría de la PROBABILIDAD.

1662

Se establece la ROYAL SOCIETY de Londres. El matemático británico LORD WILLIAM BROUNCKER (1620–84) es elegido como su primer presidente.

1666

SIR ISAAC NEWTON (1642–1727) desarrolla el CÁLCULO DIFERENCIAL e INTEGRAL pero no publica sus resultados hasta 1711.

1673

El matemático alemán GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) desarrolla el CÁLCULO DIFERENCIAL e INTEGRAL independientemente de NEWTON. Leibniz comienza a publicar sus resultados en 1684 y Newton lo acusa de plagio. Se produce una amarga disputa entre los dos hombres, que dura cuatro décadas.

1687

A instancias del astrónomo Edmund Halley, Newton publica Principia, hoy considerado uno de los las mejores obras científicas de todos los tiempos. Newton describe sus leyes de movimiento y la LEY DEL CUADRADO INVERSO para la gravitación.

1693

Halley compila el primer conjunto de TABLAS DE VIDA y utiliza ESTADÍSTICAS para analizar las tasas de natalidad y mortalidad.

1696

El erudito francés MARQUIS DE GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE L'HÔPITAL (1661–1704) publica el primer libro de texto sobre CÁLCULO.

1703

NEWTON es elegido presidente de la ROYAL SOCIETY de Londres. Ocho años después, luego de una investigación oficial, la sociedad concluye que Newton, y no LEIBNIZ, es el verdadero inventor del CÁLCULO. Más tarde se revela que Newton, como presidente, escribió la proclamación final.
El veredicto no se considera válido hoy.

1718

El matemático francés ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) publica Doctrine of Chances, el texto más avanzado sobre la teoría de la PROBABILIDAD de su época.
De Moivre desarrolla posteriormente el resultado que hoy se conoce como FÓRMULA DE STIRLING .

1736

El matemático suizo LEONHARD EULER (1707–83) resuelve el PROBLEMA DE LOS SIETE PUENTES DE KÖNIGSBERG, estableciendo así los campos de TOPOLOGÍA y TEORÍA DE GRAFOS. A lo largo de su vida, Euler también descubre, entre muchos logros, el número e, su famosa fórmula que relaciona las funciones trigonométricas con este número, valores específicos de la FUNCIÓN ZETA y, en geometría, la LÍNEA DE EULER. Euler también introduce la noción de FUNCIÓN y populariza el uso del símbolo π para la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro.

1742

CHRISTIAN GOLDBACH (1690–1764) escribe a EULER planteándole el problema que desde entonces se conoce como CONJECTURA DE GOLDBACH .

1748

MARIA GAËTANA AGNESI (1718-1799) publica su estudio de dos volúmenes de matemáticas elementales y avanzadas.

1750

El matemático suizo GABRIEL CRAMER (1704-1752) publica la REGLA DE CRAMER .

Machine Translated by Google

1767

El matemático alemán JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777) demuestra que π es irracional.

1795

Francia adopta el sistema métrico.

John Playfair (1748–1819) publica una forma equivalente del famoso POSTULADO PARALELO, hoy conocido como AXIOMA DE PLAYFAIR .

1797

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) demuestra el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA. A lo largo de su vida, Gauss, entre muchos logros, deriva el MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS, clasifica los polígonos regulares CONSTRUCTIBLES y realiza contribuciones fundamentales a la TEORÍA DE NÚMEROS, LA GEOMETRÍA, LA ESTADÍSTICA, la física matemática y la astronomía.

1799

El agrimensor noruego Casper Wessel (1745–1818) publica el equivalente de un DIAGRAMA ARGAND como un medio para representar NÚMEROS COMPLEJOS. El contable y matemático francés JEAN ROBERT ARGAND (1768–1822) desarrolla el mismo método en 1806.

1812

El matemático e inventor británico CHARLES BABBAGE (1791–1871) construye la primera calculadora mecánica. En 1823, Babbage obtiene fondos para construir el "motor diferencial", la primera computadora digital, pero el proyecto nunca se completa.

California. 1820

El algebrista noruego NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) demuestra que no puede haber una fórmula general similar a la famosa fórmula cuadrática que resuelva todas las ecuaciones polinómicas de quinto grado. Poco después, el matemático francés ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) comienza a trabajar para clasificar qué ecuaciones de quinto y grado superior pueden resolverse de esta manera y, en consecuencia, funda el campo de GRUPO TEORÍA.

1821

El matemático francés AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) desarrolla la noción de LÍMITE como un intento de colocar el CÁLCULO sobre una base matemática sólida. Esta idea es posteriormente refinada por el erudito alemán KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897).

1822

El matemático francés JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) publica un tratado sobre la teoría del calor y desarrolla la noción de SERIE DE FOURIER.

1829

El matemático ruso NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792–1856) y el matemático húngaro JÁNOS BOLYAI (1802–60) descubren de forma independiente la GEOMETRÍA NO EUCLIDEA.

1843

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–65) descubre CUATERNIONES. Dos años más tarde, ARTHUR CAYLEY (1821-1895) descubre los octonianos.

1844

JOSEPH LIIOUVILLE (1809-1882) descubre el primer ejemplo de NÚMERO TRASCENDENTAL.

1854

El erudito británico GEORGE BOOLE (1815-1864) establece el campo de la lógica simbólica con su desarrollo del ÁLGEBRA BOOLEANA.

El matemático alemán GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–66) ofrece un enfoque universal de la geometría. Descubre la GEOMETRÍA ESFÉRICA. Más tarde realiza avances significativos en la teoría de los números y el estudio de los números PRIMOS .

1858

AGOSTO FERDINAND MÖBIUS (1790–1868) y Johann Benedict Listing descubre de forma independiente el MÖBIUS BANDA.

matemático alemán JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831-1916) sugiere la noción de un CORTE DEDEKIND como medio para definir adecuadamente el REAL NÚMEROS.

CAYLEY introduce la noción de MATRIZ en el estudio del álgebra.

1872

FELIX CHRISTIAN KLEIN (1849–1925) unifica los campos de la geometría con su “programa Erlanger”. También descubre la BOTELLA DE KLEIN.

1873

WILLIAM SHANKS (1812-1882) calcula, a mano, los primeros 607 decimales de π. Tiene razón hasta el puesto 527.

Machine Translated by Google

1874

GEORG CANTOR (1845–1918) desarrolla la TEORÍA DE CONJUNTOS y su teoría de la CARDINALIDAD.

1882

FERDINAND VON LINDEMANN (1852–1939) demuestra que π es trascendental y, por lo tanto, que el desafío de LA CUADRATURA DEL CÍRCULO es imposible.

1883

Françoise-Edouard-Anatole Lucas (1842-1891) inventa el rompecabezas de la TORRE DE HANOI .

1896

JACQUES HADAMARD (1865–1963) y CHARLES DE LA VALLÉE-POUSSIN (1866–1962) prueban de forma independiente el TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO conjeturado por primera vez por GAUSS en 1792.

1899

El matemático alemán DAVID HILBERT (1862–1943) proporciona un tratamiento axiomático completo de EUCLIDEAN GEOMETRÍA.

1900

En el Congreso Internacional de Matemáticos de París, HILBERT presenta su famosa lista de 23 problemas para desafiar a los estudiosos del siglo XX.

1901

HENRI LÉON LEBESGUE (1875–1941) presenta un nuevo enfoque revolucionario para el CÁLCULO INTEGRAL.

1903

El matemático sueco Nils Fabian Helge von Koch (1870–1924) presenta la CURVA DE KOCH, el primer ejemplo de un objeto que luego se clasificaría como FRACTAL.

1904

JULES-HENRI POINCARÉ (1854–1912) conjetura que cualquier objeto tridimensional que comparta las mismas características topológicas que una ESFERA debe ser una esfera.

1905

ALBERT EINSTEIN (1879–1955) escribe cinco artículos innovadores en el campo de la física matemática.
Los dos últimos artículos desarrollan su famosa teoría especial de la relatividad. Einstein publica su teoría general de la relatividad en 1916.

1910

BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947) comienzan pub

publicación de sus Principia Mathematica de tres volúmenes , un ambicioso intento de derivar todas las matemáticas mediante principios lógicos a partir de un pequeño conjunto de principios AXIOMAS.

1913

El matemático indio SRINIVASA AIYANGAR RAMANU JAN (1887–1920) comienza una colaboración de cinco años con el matemático británico GODFREY HAROLD HARDY (1877–1947).

1921

La matemática alemana AMALIE NOETHER (1882–1935) publica su teoría de los ANILLOS, desviando la investigación en álgebra del estudio del cálculo hacia el estudio de las estructuras abstractas.

1925

SIR RONALD AYLMER FISHER (1890–1962) publica Statistical Methods for Research Workers, un trabajo influyente que proporciona la base para el diseño experimental moderno.

1928

James Alexander (1888–1971) desarrolla el polinomio de Alexander, el primer invariante en la TEORÍA DEL NUDO. Posteriormente, John Conway definió el polinomio de Conway en 1968 y Vaughn Jones el polinomio de Jones en 1985.

1931

KURT GÖDEL (1906-1978) sorprende a la comunidad matemática al establecer un par de “oremas incompletos”. Gödel demuestra que dentro de cualquier sistema lógicamente riguroso necesariamente habrá enunciados que no puedan ser ni probados ni refutados. El objetivo perseguido por RUSSELL y Whitehead se muestra inalcanzable.

1938

CLAUDE ELWOOD SHANNON (1916–2001) establece que el ÁLGEBRA BOOLEANA se puede aplicar con éxito al diseño de computadoras. Funda el campo de la TEORÍA DE LA INFORMACIÓN en 1949.

1944

El matemático húngaro-estadounidense JOHN VON NEU MANN (1903–57) y el economista estadounidense Oskar Morgenstern (1902–77) fundaron la TEORÍA DE JUEGOS.

1963

Edward Lorenz desarrolla la teoría del CAOS .

Machine Translated by Google

1976

Con 1200 horas de tiempo de computadora, Kenneth Appel y Wolfgang Haken prueban los CUATRO COLORES TEOREMA.

1978

Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman desarrollan el sistema de cifrado de clave pública RSA.

1979

Benoit Mandelbrot descubre el SET MANDELBROT. Más tarde funda el campo de la geometría FRACTAL .

Bajo la instigación del Papa Juan Pablo II, la Iglesia Católica Romana abre sus archivos sobre los juicios de Galilea.
La Iglesia revierte su condena del erudito del siglo XVII en 1992.

1994

ANDREW WILES, con la ayuda de Richard Taylor, demuestra el ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT .

1998

Thomas Hales utiliza métodos informáticos para establecer la conjetura de 1611 de JOHANNES KEPLER de que el empaquetamiento cerrado cúbico y el empaquetamiento cerrado hexagonal de esferas son los empaquetamientos más densos de esferas. Los matemáticos no pueden verificar la prueba sin la ayuda de una computadora.

1999

Hales demuestra la "conjetura del panal", que establece que cualquier partición del plano en regiones de igual área tiene un perímetro igual al diseño de un panal.

Yasumasa Kanada de la Universidad de Tokio calcula π con 206.158.430.000 decimales.

2000

Michael Hutchings, Frank Morgan, Manuel Ritoré y Antonio Ros prueban la sobresaliente conjetura de la “doble burbuja” en la teoría de las BURBUJAS DE JABÓN. Establecen que el diseño de superficie mínima que encierra dos volúmenes fijos es de hecho la configuración de “doble burbuja” que se observa en la naturaleza.

2003

Tomás Oliveira e Silva verifica que la CONJETURA DE GOLDBACH es válida para todos los números pares entre cuatro y 6 × 1016 .

Michael Shafer descubre que el número de 6.320.430 dígitos 220.996.011 – 1 es PRIME. Es el número primo más grande y el número 40 de MERSENNE conocido hasta la fecha.

2004

Martin Dunwoody anuncia a la comunidad matemática que pudo haber probado la conjetura de Poincaré. Los matemáticos esperan los detalles de su demostración.

Machine Translated by Google

ANEXO II

BIBLIOGRAFÍA Y RECURSOS WEB

Imprimir

Abbot, EA Flatland: Un romance de muchas dimensiones. Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press, 1991.

Abbott, JC, ed. Los documentos de Chauvenet: una colección de artículos expositivos ganadores de premios en matemáticas. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1978.

Ahlfors, Lars V. Análisis complejo. 3ra ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1979.

Aigner, Martin y Günter M. Ziegler. Pruebas de la Libro. Nueva York: Springer-Verlag, 1999.

Almgren, FJ, Jr. y JE Taylor. "Geometría de las películas de jabón". Scientific American 235, no. 1 (1976): 82–93.

Anderson, I. Un primer curso de matemáticas combinatorias. Oxford, Reino Unido: Clarendon Press, 1974.

Ángel, Allen R. y Stuart R. Porter. Una Encuesta de Matemáticas con Aplicaciones. 6ª ed. Boston: Addison-Wesley, 2001.

Anne, C. "Fracciones egipcias y el problema de la herencia". The College Mathematics Journal 29, no. 4 (1998): 296–300.

Anton, Howard, Irl Bivens et al. Cálculo: edición breve. 7mo edición Nueva York: John Wiley & Sons, 2002.

Apostol, Tom M. y Hubert E. Chrestenson et al., eds. Un siglo de cálculo, parte 1, 1894–1968 y Un siglo de cálculo, parte 2, 1969–1991. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1992.

Appel, Kenneth y Wolfgang Haken. "La solución del problema del mapa de cuatro colores". Scientific American 237, no. 4 (1977) 108–121.

Arnold, BH Conceptos intuitivos en topología elemental. Englewood, Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1962.

Ash, J. Marshall y Solomon W. Golomb. "Revestimiento de rectángulos deficientes con trominós". Revista de Matemáticas 77, núm. 1 (2004): 46–55.

Atiyah, MF e IG MacDonald. Introducción al Álgebra Conmutativa. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1969.

Averbach, Bonnie y Orin Chein. Resolución de problemas a través de las matemáticas recreativas. Nueva York: Dover, 1980.

Ball, WW Rouse y HSM Coxeter. Recreaciones Matemáticas y Ensayos. 12ª edición. Toronto: Prensa de la Universidad de Toronto, 1974.

Barnsley, MF Fractales en todas partes. San Diego: Prensa Académica, 1988.

Barr, Esteban. Experimentos en Topología. Nueva York: Dover, 1964.

Beckman, Petr. Una historia de π. 3ra ed. Nueva York: St. Martin's Press, 1971.

Belcastro, Sarah-Marie y Thomas C. Hull. "Clasificación de patrones de friso sin usar grupos". The College Mathematics Journal 33, no. 2 (2002): 93–98.

Benjamin, Arthur T. y Jennifer J. Quinn. Pruebas que realmente cuentan. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 2003.

Berlinghoff, William P. y Fernando Q. Gouvêa. Matemáticas a través de las edades: una historia suave para maestros y otros. Farmington, Maine: Oxton House Publishers, 2002.

Binmore, K. Diversión y juegos: un texto sobre teoría de juegos. Lexington, Massachusetts: Heath, 1992.

Blitzer, Roberto. Pensando Matemáticamente. 2ª ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2003.

Bondi, C., ed. Nuevas Aplicaciones de las Matemáticas. Londres: Penguin Books, 1991.

Machine Translated by Google

Borowski, EJ y JM Borwein. El diccionario de matemáticas de Harper Collins. Nueva York: Harper Collins, 1991.

Brams, SJ y AD Taylor. División justa: del corte de torta a la resolución de disputas. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1996.

Bruno, Leonard C. Matemáticas y matemáticos: la historia de los descubrimientos matemáticos en todo el mundo. vol. 1, A–H y vol. 2, I–Z. Farmington Hills, Michigan: Gale Group, 1999.

Montón, Bryan. Falacias y paradojas matemáticas. Nuevo York: Dover, 1982.

Cajori, Florián. Una historia de las notaciones matemáticas. Nuevo York: Dover, 1993.

do Carmo, Manfredo P. Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Acantilados de Englewood, Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1976.

Chang, Gengzhe y Thomas W. Sederberg. Una y otra vez. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1997.

Chartrand, Gary. Introducción a la teoría de grafos. Nueva York: Dover, 1977.

Clapham, Christopher. El Diccionario Oxford Conciso de Matemáticas. 2ª ed. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press, 1996.

Cohen, I. Bernard y George E. Smith, eds. El compañero de Cambridge a Newton. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2002.

Conway, John H. La forma sensual (cuadrática). Asistencia de Francis YC Fung. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1997.

Conway, John H. y Richard Guy. El Libro de los Números. Nueva York: Springer-Verlag, 1996.

Courant, Richard y Herbert Robbins. ¿Qué son las Matemáticas? 2ª ed. Revisado por Ian Stewart. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press, 1996.

Cristal, David, ed. La Enciclopedia de Cambridge. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1990.

Davenport, H. La aritmética superior: una introducción a la teoría de los números. Nueva York: Dover, 1983.

Davis, Philip J. y Reuben Hersh. La Experiencia Matemática. Harmondsworth, Reino Unido: Penguin Books, 1981.

Denes, J. Cuadrados latinos y sus aplicaciones. Nueva York: Prensa Académica, 1974.

Devaney, Robert L. Un primer curso en sistemas dinámicos caóticos, teoría y experimento. Lectura, Massachusetts: Addison Wesley, 1992.

———. Caos, fractales y dinámicas: experimentos informáticos en matemáticas. Menlo Park, California: Addison-Wesley, 1990.

Devaney, Robert L. y L. Keene, eds. Caos y Fractales: Las Matemáticas detrás de los Gráficos por Computadora. Providence, RI: American Mathematical Society, 1989.

Devlin, Keith. La alegría de los juegos. 2ª ed. Nueva York: Springer Verlag, 1993.

Doyle, Peter G. y J. Laurie Snell. Paseos aleatorios y redes eléctricas. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1984.

Dunham, Guillermo. Viaje a través de Genius. Nueva York: Juan Wiley & Sons, 1990.

———. El universo matemático: un viaje alfabético a través de grandes pruebas, problemas y personalidades. Nueva York: John Wiley & Sons, 1994.

Eves, Howard W. Círculos matemáticos. vol. 1. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 2003.

Farris, FA y NK Rossing. "Frisos de cuerda tejida". Revista de Matemáticas 72, núm. 1 (1999): 32–38.

Firby, PA y CF Gardiner. Topología de superficie. 2ª ed. Nueva York: Ellis Horwood, 1991.

Fisher, Stephen D. Variables complejas. 2ª ed. Nueva York: Dover, 1990.

Fomin, Dmitri y Sergey Genkin et al. Círculos Matemáticos (Experiencia Rusa). Providence, RI: Sociedad Matemática Estadounidense, 1996.

Freund, John E. y Gary A. Simon. Estadística: un primer curso. 5ª ed. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice Hall, 1991.

Garner, Martín. Códigos, Cifras y Escritura Secreta. Nuevo York: Dover, 1972.

———. Música fractal, Hypercards y más. Nueva York: w. H. Freeman y compañía 1992.

———. Matemáticas, Magia y Misterio. Nueva York: Dover, 1956.

———. Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... y el regreso del Dr. Matrix. Nueva York: WH Freeman, 1989.

Garfunkel, Salomón. Para todos los propósitos prácticos. 5ª ed. Nueva York: WH Freeman, 2000.

Gibson, Carol, ed. Los Hechos en Archivo Diccionario de Matemáticas matices Nueva York: Facts On File, 1985.

Gillespie, Charles Coulston, ed. Diccionario de Bibliografía Científica. Nueva York: Charles Scribner's Sons, 1972.

Giordano, Frank R. y Maurice D. Weir et al. Un primer curso de modelado matemático. 2ª ed. Pacific Grove, California: Brooks/Cole, 1997.

Goldman, Jay R. La reina de las matemáticas: una guía históricamente motivada para la teoría de números. Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters, 1998.

Golomb, Solomon W. Polyominoes: Rompecabezas, Patrones, Problemas y Empaques. 2ª ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

Gorini, Catherine A. Los hechos en el manual de geometría de archivo. Nueva York: Facts On File, 2003.

Graham, Ronald y Donald Knuth et al. Matemáticas Concretas. 2ª ed. Boston: Addison-Wesley, 1994.

Grinstead, CM y LJ Snell. Introducción a la probabilidad. 2ª ed. Providencia, RI: Sociedad Matemática Estadounidense, 1997.

Machine Translated by Google

Gullberg, Jan. Matemáticas desde el nacimiento de los números. Nuevo York: WW Norton & Co. 1997.

Guy, Richard y Robert E. Woodrow, eds. El lado más ligero de las matemáticas. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1994.

Hadlock, Charles Robert. Teoría de campos y sus problemas clásicos. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 2000.

Hall, Nina, ed. Explorando el caos: una guía para la nueva ciencia del desorden. Nueva York: WW Norton & Co. 1991.

Hardy, GH y EMWright. Introducción a la teoría de los números. 5ª ed. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press, 1979.

Hass, J. "Conjetura general de doble burbuja en R3 resuelta". Concéntrate, No. 5 (2000): 4–5.

Herstein, IN Temas de álgebra. 2ª ed. Nueva York: Juan Wiley & Sons, 1975.

Hildebrandt, S. y A. Tromba. Matemáticas y Forma Óptima. Nueva York: Scientific American Books, 1985.

Hill, Víctor E., IV. "El presidente Garfield y el teorema de Pitágoras". Math Horizons, (febrero de 2002): 7–9.

Hoffman, Pablo. El hombre que solo amaba los números. Nueva York: Hiperión, 1998.

Honsberger, Ross. Ingenio en Matemáticas. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1970.

———. Diamantes matemáticos. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 2003.

———. Gemas Matemáticas. Washington, DC: Matemáticas Asociación cal de América, 1973.

———. Más bocados matemáticos. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1991.

Honsberger, Ross, ed. Ciruelas matemáticas. Washington, DC: Asociación Matemática de América.

Casco, Thomas. "Una nota sobre el plegado de papel 'imposible'". American Mathematical Monthly 103, no. 3 (1996): 242–243.

Jacobs, Konrad. Invitación a Matemáticas. Princeton, Nueva Jersey: Prensa de la Universidad de Princeton, 1992.

James, Juan. Matemáticos notables: de Euler a von Neumann. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2002.

Kac, Mark y Stanislaw M. Ulam. Matemáticas y Lógica. Nueva York: Dover, 1968.

Kaplan, Robert y Ellen Kaplan. El arte del infinito: los placeres de las matemáticas. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press, 2003.

Kay, David C. Geometría universitaria: un enfoque de descubrimiento. 2ª ed. Boston: Addison-Wesley, 2001.

Kim, Scott. "Hiperespacio: arriba, afuera y lejos". Descubrir 23, núm. 10 (octubre de 2002), 82.

Kolmogorov, AN y SV Fomin. Análisis real introductorio. Traducido y editado por Richard A. Silverman. Nueva York: Dover, 1970.

Konhauser, Joseph DE y Dan Velleman et al. ¿Hacia dónde se fue la bicicleta? … Y Otros Misterios Matemáticos Intrigantes. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1996.

Maor, Eli. Los hechos en el manual de cálculo de archivo. Nueva York: Hechos en archivo, 2003.

———. Hasta el infinito y más allá: una historia cultural del infinito. Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press, 1987.

Massey, William S. Un curso básico de topología algebraica. Nueva York: Springer-Verlag, 1991.

McDaniel, Michael. "Nudos para ti". Math Horizons, (noviembre de 2003): 9–12.

Meisters, GH "El ritmo del algoritmo del día de la semana de Lewis Carroll". Math Horizons, (noviembre de 2002): 24–25, 34.

Mesterton-Gibbons, Michael. Un enfoque concreto para el modelado matemático. Nueva York: John Wiley & Sons, 1995.

Morgan, Franco. "Doble burbuja, no más problemas". Matemáticas Horizons, (noviembre de 2000): 2, 30–31.

Mnatsakanian, M. "Anillos anulares de áreas iguales". Math Horizons, (noviembre de 1997): 5–8.

Neilson, William Allan, editor. Diccionario biográfico de Webster. Springfield, Mass.: G. & C. Merriam Company, 1976.

Nelson, David, ed. El Diccionario Pingüino de Matemáticas. 2ª ed. Londres: Penguin Books, 1998.

Nelson, Roger B. "Pinturas, mosaicos y pruebas". Math Horizons, (noviembre de 2003): 5–8.

Newman, James R. El mundo de las matemáticas: una pequeña biblioteca de literatura matemática desde A'h-mosé the Scribe hasta Albert Einstein. Redmond, Washington: Tempus Books, 1956.

Olivastro, Domingo. Rompecabezas antiguos: acertijos clásicos y otros juegos matemáticos atemporales de los últimos 10 siglos. Nueva York: Bantum Books, 1993.

Ore, Oystein. Teoría de números y su historia. Nueva York: Dover, 1976.

Pasles, Paul C. "Algunos cuadrados mágicos de distinción". Matemáticas Horizons, (febrero de 2004): 10–12.

Paulos, John Allen. Más allá de la aritmética. Nueva York: Knopf, 1991.

———. Innumeracy: analfabetismo matemático y su consecuencia secuencias Nueva York: Hill & Wang, 1988.

Peterson, I. El turista matemático: instantáneas de las matemáticas modernas. Nueva York: WH Freeman, 1988.

———. Islas de la verdad: un crucero de misterio matemático. Nueva York: WH Freeman, 1990.

———. "Esfuerzo y problemas por las burbujas dobles". Ciencia Noticias 148 (1995): 101.

Felipe, Antonio. “Dar vuelta a una superficie de adentro hacia afuera”. Científico Americano 214 (1964): 112–120.

Porkes, Roger. El Diccionario HarperCollins de Estadística. Nueva York: HarperCollins, 1991.

Machine Translated by Google

Powers, David L. Problemas de valores en la frontera. 3ra ed. Fort Worth, Texas: Harcourt Brace College Publishers, 1987.

Rademacher, Hans y Otto Toeplitz. El disfrute de las matemáticas. Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press, 1957.

Rucker, R. La Cuarta Dimensión: Hacia una Geometría de Realidad Superior. Boston: Houghton Mifflin, 1984.

Rudin, Walter. Análisis Real y Complejo. 3ra ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1987.

Saari, DG y F. Valognes. “Geometría, votaciones y paradojas”. Revista de Matemáticas 71, núm. 4 (1998): 243–259.

Saaty, TL y PC Kainen. El problema de los cuatro colores: asaltos y conquistas. Nueva York: Dover, 1986.

Sharpes, Donald K. Fundamentos educativos avanzados para profesores. Nueva York: RoutledgeFalmer, 2002.

Shashkin, Yu A. Puntos fijos. Providencia, RI: Sociedad Matemática Estadounidense, 1991.

Shifrin, Teodoro. Álgebra abstracta: un enfoque geométrico. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice Hall, 1996.

Simmons, George F. Cálculo con geometría analítica. 2ª ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1996.

Singh, Simón. El enigma de Fermat. Nueva York: casa al azar, 1997.

Smart, James R. Geometrías modernas. 5ª ed. Pacific Grove, California: Brooks/Cole, 1998.

Sondheimer, Ernst y Alan Rogerson. Números e infinito: una cuenta histórica de los conceptos matemáticos. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1981.

Stein, Sherman K. y Anthony Barcellos. Cálculo y Geometría Analítica. 5ª ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1992.

Stewart, Ian. Conceptos de las Matemáticas Modernas. Nueva York: Dover, 1995.

Stewart, James. Cálculo de una sola variable. 3ra. Pacífico Grove, California: Brooks/Cole, 1995.

Strafflin, P. Teoría y estrategia de juegos. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 1993.

Tanton, James. "Una docena de preguntas sobre una rosquilla". Matemáticas Horizontes, (noviembre de 1998): 26–31.

———. “Una docena de preguntas sobre el problema isoperimétrico”. Math Horizons, (febrero de 2003): 23–26.

———. "Una docena de preguntas sobre las potencias de dos". Math Horizons, (septiembre de 2001): 5–10.

———. "Una docena de preguntas sobre cuadrados y cubos". Math Horizons, (septiembre de 2000): 29–34.

———. “Una docena de razones por las que 1 = 2”. Math Horizons, (febrero de 1999): 21–25.

———. Resuelve Esto: Actividades Matemáticas para Estudiantes y Clubes. Washington, DC: Asociación Matemática de América, 2001.

———. "Los jóvenes estudiantes se acercan a los triángulos enteros". Enfocar 22, núm. 5 (2002): 4–6.

Todd, Débora. El manual de álgebra hechos en archivo. Nueva York: Facts On File, 2003.

Vakil, Ravi. Un mosaico matemático: patrones y resolución de problemas. Burlington, Ontario: Brendan Kelly Publishing, 1996.

Vagón, Stan. La paradoja de Banach-Tarski. Cambridge, Reino Unido: Prensa de la Universidad de Cambridge, 1985.

Weeks, JR La forma del espacio. Nueva York: Marcel-Decker, 1985.

West, Beverly Henderson y Ellen Norma Griesbach et al. La Enciclopedia Prentice-Hall de Matemáticas. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1982.

Sitios Web

Bogomolni, Alexander. “¡Corta el nudo!” Disponible en linea. URL: http://www.cut-the-knot.org. Consultado el 15 de junio de 2004. Un recurso integral de rompecabezas y juegos matemáticos interactivos.

Caldwell, Chris. "El primo más grande conocido por año: una breve historia". Disponible en linea. URL: http://www.utm.edu/research/primes/notes/by_year.html. Consultado el 1 de mayo de 2004. Chris Caldwell brinda una historia detallada de la búsqueda de números primos grandes y mantiene a los lectores actualizados sobre los hallazgos actuales.

Departamento de Economía de la New School for Social Research. “El sitio web de la historia del pensamiento económico”. Disponible en linea. URL: http://cepa.newschool.edu/het/home. htm. Accedido el 20 de abril de 2004. Este sitio proporciona una revisión integral del desarrollo del pensamiento y las prácticas económicas.

Universidad de Drexel. “Foro de Matemáticas”. Disponible en linea. URL: http://mathforum.org. Accedido el 20 de abril de 2004. Este sitio amigable para los estudiantes ofrece un servicio interactivo de preguntas y respuestas para estudiantes y profesores de matemáticas, así como una gran cantidad de recursos matemáticos, ensayos y debates enumerados por tema.

Frazier, Kendrick. “Una mente en juego: una entrevista con Martin Gardner”. Comité para la Investigación Científica de Reclamaciones de lo Paranormal. Disponible en linea. URL: www.csicop.org/si/9803/gardner.html. Consultado en marzo de 1998. Una entrevista en profundidad con el matemático recreativo Martin Gardner.

Grissinger, Arthur. "Estrategia de resolución de problemas de Polya". Disponible en linea. URL: www.lhup.edu/agrissin/polya.htm. Consultado el 23 de abril de 2004. Este sitio ofrece un breve resumen de las estrategias de resolución de problemas propuestas por George Polya.

Joyce, David. “Matemáticas en China”. Disponible en linea. URL: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/china.html. Consultado el 17 de septiembre de 1995. David Joyce proporciona una descripción detallada del desarrollo de las matemáticas en China.

Machine Translated by Google

Kadon Enterprises, Inc.. "Inventor del juego: Martin Gardner". Disponible en linea. URL: http:// www.gamepuzzles.com/ martin.htm. Consultado el 20 de abril de 2004. Este sitio presenta un breve artículo sobre la vida y obra de Martin Gardner.

Kimberling, Clark. “Estudios biográficos”. Disponible en linea. URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud. Consultado el 20 de abril de 2004. Clark Kimberling proporciona una serie de ensayos biográficos detallados sobre matemáticos famosos.

Loy, Jim. “Trisección de un ángulo”. Disponible en linea. URL: http:// www.jimloy.com/geometry/trisect.htm. Consultado el 23 de abril de 2004. Este sitio presenta, con una explicación detallada, las variadas técnicas que se han propuesto a lo largo de los siglos para la trisección de ángulos arbitrarios.

Academia de matemáticas en línea. “Enciclopedia de Matemáticas Interactivas de los Reinos Platónicos”. Disponible en linea. URL: http://www. academiamatemática.com. Accedido el 23 de abril de 2004. Este sitio ofrece citas de matemáticas, breves notas históricas y algunas discusiones sobre conceptos matemáticos.

Miller, Jeff. "Primeros usos conocidos de algunas de las palabras de las matemáticas". Disponible en linea. URL: http://miembros. aol.com/ jeff570/mathword.html. Accedido el 23 de abril de 2004. Este extenso sitio intenta identificar el primer uso de los términos matemáticos actuales.

———. “Primeros usos conocidos de varios símbolos matemáticos”. Disponible en linea. URL: http://members.aol.com/jeff570/ mathsym.html. Consultado el 23 de abril de 2004. Este sitio intenta identificar el primer uso de un símbolo matemático determinado y proporciona la fecha y el nombre del documento en el que apareció por primera vez.

O'Connor, John y Edmund Robertson eds. "Archivo MacTutor de Historia de las Matemáticas". Disponible en linea. URL: http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history. Consultado el 20 de abril de 2004. Este sitio galardonado pro Ofrece la colección más completa de ensayos históricos y biográficos actualmente disponible.

Sandifer, C. Edward. "Página de inicio de Ed Sandifier". Disponible en linea. URL: http://vax.wcsu.edu/~sandifer/homepage.html. Consultado el 16 de enero de 2004. Ed Sandifer es un experto en la vida y obra de Leonhard Euler y proporciona una gran cantidad de información invaluable sobre este famoso erudito en este sitio web.

Verrill, H. "Trisección de origami de un ángulo". Disponible en linea. URL: http://hverrill.net/origami/. Consultado el 24 de junio de 2002. Este sitio proporciona una descripción general accesible del uso de las matemáticas en el origami.

Wales, Jimmy y Larry Sanger, fndrs. "Wikipedia: La enciclopedia libre: Matemáticas". Disponible en linea. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/ Mathematics. Accedido el 15 de junio de 2004. Este sitio sirve como un recurso fácil de usar sobre temas matemáticos.

Weistein, Eric. “El mundo de la biografía científica de Eric Weisstein”. Disponible en linea. URL: http://scienceworld.wol fram.com/ biography. Consultado el 20 de abril de 2004. Este sitio proporciona información biográfica sobre una extensa lista de matemáticos famosos.

———. "Mundo matemático". Disponible en linea. URL: http://math world.wolfram.com. Accedido el 22 de abril de 2004. Esta enciclopedia en línea, quizás el recurso matemático más completo actualmente disponible en la Web, proporciona información detallada sobre casi todos los aspectos de la investigación matemática actual.

Wilkins, David R. "La historia de las matemáticas". Disponible en linea. URL: http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath. Consultado el 23 de abril de 2004. Este sitio proporciona un directorio de sitios web de todo el mundo que se relacionan con la historia de las matemáticas, así como presenta biografías de algunos matemáticos de los siglos XVII y XVIII.

Machine Translated by Google

ANEXO III

ASOCIACIONES

Las siguientes organizaciones brindan información sobre matemáticas, investigación matemática y educación matemática de interés para estudiantes y maestros.

Sociedad Matemática Estadounidense, 201 Charles Street, Providence, RI 02904-2294. Teléfono: (800) 321 4267. Sitio web: www.ams.org.

Asociación de Mujeres en Matemáticas, 4114 Computer and Space Sciences Building, College Park, Md. 20742-2461. Teléfono: (301) 405 7892. Sitio web: www.awm-math.org.

Sociedad Matemática Canadiense, 577 King Edward, Suite 109, Ottawa, Ontario, Canadá K1N 6N5. Teléfono: (613) 562 5702. Sitio web: www.cms.math.ca.

Clay Mathematics Institute, One Bow Street, Cambridge, Mass. 02138. Teléfono: (617) 995 2600. Sitio web: www.claymath.org.

Sociedad Matemática Europea, Departamento de Matemáticas, PO Box 4 (Yliopistonkatu 5), 00014 Universidad de Helsinki, Finlandia. Teléfono: 3589 1912 2883. Sitio web: www.emis.de.

Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones, 400 Lind Hall, 207 Church Street, SE, Minneapolis, Minn. 55455-0436. Teléfono: (612) 624 6066. Sitio web: www.ima.umn.edu.

Instituto de Estadística Matemática, PO Box 22718, Beach Wood, Ohio 44122. Teléfono: (216) 295 2340. Sitio web: www.imstat.org.

Unión Matemática Internacional, Instituto de Estudios Avanzados, Einstein Drive, Princeton, NJ 08540. Teléfono: (609) 683 7605. Sitio web: www.mathunion.org.

Sociedad Internacional de Artes, Matemáticas y Arquitectura, Departamento de Matemáticas, Universidad de Albany, 1400 Washington Avenue, Albany, NY 12222. Teléfono: (518) 442 3300. Sitio web: www.isama.org.

Instituto Internacional de Estadística, PO Box 950, 2270 AZ Voorburg, Países Bajos. Teléfono: 31 70 3375737. Sitio web: www.cbs.nl/isi.

Sociedad Matemática de Londres, De Morgan House, 57–58 Russell Square, Londres WC1B 4HS. Teléfono: 020 7637 3686. Sitio web: www.lms.ac.uk.

Math Circle, PO Box 313, Jamaica Plane, Massachusetts 02130. Teléfono: (617) 519 6397. Sitio web: www.themathcircle.org.

Asociación Matemática de América, 1529 Eighteenth Street NW, Washington, DC 20036-1385. Teléfono: (800) 741 9415. Sitio web: www.maa.org.

Instituto de Investigación de Ciencias Matemáticas, 17 Gauss Way, Berkeley, California 94720-5070. Teléfono: (510) 642 0143. Sitio web: www.msri.org.

Fundación de Matemáticas de América, 129 Hancock Street, Cambridge, Mass. 02139. Teléfono: (510) 525 7931. Sitio web: www.mfoa.org.

Foro de Matemáticas, 3210 Cherry Street, Filadelfia, Pensilvania. 19104. Teléfono: (800) 756 7823. Sitio web: www.mathforum.org.

Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 1906 Association Drive, Reston, Va. 20191-1502. Teléfono: (703) 620 9840. Sitio web: www.nctm.org.

Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center, Philadelphia, Penn. 19104-2688. Teléfono: (215) 382 9800. Sitio web: www.siam.org.

Instituto de Matemáticas de St. Mark, 25 Marlborough Road, Southborough, Mass. 01772. Teléfono: (508) 786 6126. Sitio web: www.stmarksschool.org.

Machine Translated by Google

ÍNDICE

Los números de página en negrita indican las entradas principales. Los números de página en cursiva indican ilustraciones o diagramas.

A

AAA (ángulo-ángulo-ángulo) regla 1, 463
AAS (ángulo-ángulo-lado) regla 1
ábaco 2, 2–3, 56, 74, 260
Abel, Niels Henrik 3, 10, 84, 215, 241, 405, 431–432 y soluciones a ecuaciones polinómicas 471
Grupos abelianos 3, 5, 83, 241
Premio Abel 3
abscisa 62
convergencia absoluta 3–4, 248, 337 prueba para 3–4, 104
error absoluto 167
frecuencia absoluta 206
máximo/mínimo absoluto 330, 331 valor
absoluto (módulo) 4–5, 131, 133, 142, 310, 328–329 de número complejo 25, 86
álgebra abstracta 5, 10, 314, 354–355 grupo
abstracto 68 número abundante 389
Académie Française 8
aceleración 523
Representación precisa (Ahmes) 447
Aquiles y la tortuga (paradoja) 532–533 acnode. Ver punto aislado Acosta, José de 260 ciencia actuarial 5, 312 ángulo agudo 5–6, 14 triángulo acutángulo 506
sumando 6 suma 5, 6, 205 fórmulas de suma (trigonometría) 6, 41–42
ley de la suma 344, 367
cuadrado mágico de la suma y la multiplicación 327, 328 regla de la suma, en la teoría de la probabilidad 415–416, 416
función aditiva 6
elemento de identidad aditivo (cero) 6, 257
inverso aditivo y anillos 448

Adleman, Leonard 111
geometría afín 6–7, 339
transformación afín 7
Agnesi, Maria Gaëtana 7–8, 58
Ahmes (Ahmose) 155, 447 Papiro de Ahmes. Ver Rhind papiro
Alembert, Jean Le Rond d' 8, 8–9, 209 y series de Fourier 202
Teorema de Alembert, d'. Véase el teorema fundamental del álgebra
0 (alef nulo) 60–61
Alexander, James Waddell 295–296
Polinomio de Alexander 295–296
álgebra 9–11 y geometría 124
L'Álgebra (Bombelli) 47–48
Álgebra (Simpson) 463
curva algebraica 114
función algebraica 11
notación algebraica 51
número algebraico 11, 60, 97 y teoría analítica de números 360
estructura algebraica 11
álgebra de la lógica, Boole 48
Álgebra con Aritmética y Medición (Colebrook) 42
algoritmo 11, 294
Al-jam' w'al-tafriq ib hisab al hind (al-Khw¯arizmı¯) 293
Almagesto (Ptolomeo) 421
cuadrado alfamágico 328, 328
ángulos interiores/exteriores alternos 504
serie armónica alterna 248, 409 nudo
alterno 295 serie alterna 11–12 prueba de serie alterna 12, 104–105 altitud 12–13, 105 de triángulo concurrencia de 12 , 12–13, 165 y línea de Euler 174–175, 507
números amistosos 13, 18, 423
Analema (Ptolomeo) 422
analógico frente a digital 135–136
Analyse des infiniment petits (L'Hôpital) 40, 310
analysis 13, 423
Analysis per quantitatum series (Newton) 353
analysis situs. Ver topología
Análisis situs (Poincaré) 398 “The Analyst” (Berkeley) 58 motor
analítico, Babbage's 32 geometría
analítica 13, 347 teoría analítica de números 13, 139–140, 360, 411 análisis 27 anillo
de anclaje. Véase el teorema auxiliar del toro 498–499 ángulo 13–15, 14, 276, 441 45º (octante) 363 de elevación/depresión 14 de inclinación 261

bisectriz de ángulo 46, 260
paréntesis de ángulo 50, 519 trisección de ángulo. Ver trisección
de un ángulo Annales de Mathématiques (revista) 25 Annals of Eugenics (revista) 387
Annals of Mathematics 531 anillo 15, 89, 94, 177 cancelación anómala 56 antiderivada 94–95, 211, 360

antidiferenciación 15, 133, 272

antinomia. Ver la paradoja de Russell

Machine Translated by Google

puntos antípodas (antípodas) 15, 471, 473
antisimetría 365
vértice (ápices) 15, 91, 423
Apolonio de Perge 15–16, 76, 78, 93, 105, 115, 136–137, 189, 239, 252, 253, 476 y duplicando
el cubo 149
y la trisección de un ángulo 513
círculo de Apolonio 16
Teorema de Apolonio 16
apotema (radio corto) 16, 403
Appel, Kenneth 200–201, 420
matemáticas aplicadas 17
funciones apropiadamente agradables 315
aproximación 17
Matemáticas árabes 17–18
Arbogast, Luis 249 arco 18, 76
sólidos de Arquímedes 398
Espiral de Arquímedes 239, 400, 474
Arquímedes 18, 18–21, 19, 20, 91, 93, 105, 115, 173, 180, 213, 238–239, 270, 272, 476 y sólidos de
Arquímedes 398 en la
medalla Fields 194 y su
espiral 474 y poliedros semirregulares 404
y suma de los primeros n números 489
y la trisección de un ángulo 513
El tornillo de agua de Arquímedes 20, 21
Arquitas 21–22, 172
longitud de arco 22, 470 área 22–25, 23, 24
de anillo 15 de
formas básicas 23, 23–24, 156, 248, 293
del círculo 76, 222, 392
de figuras curvas 172 del
elipsoide 161–162 como
concepto mal definido 22–23, 24, 526
del polígono 403
del cuadrilátero, Fórmula de Bretschneider para 52–53, 430
de cuadrilátero inscrito en círculo, fórmula de Brahmagupta para 51–52 de
rectángulo 443 de
cuadrado 474 de
trapezoide 504 de
triángulo 486
funciones hiperbólicas de área 281
Argand, Jean Robert 25, 86
Diagrama de Argand 25, 86, 359
argumento 25–26, 86, 199, 524–525
Aristóteles 26–27, 238, 270, 309, 532
y lógica formal 25–26, 199
La rueda de Aristóteles paradoja 375 aritmética 27
Aritmética (Diofanto) 137–138, 189, 190, 239, 253, 525
Arithmetica infinitorum (Wallis) 528
Arithmetica universalis (Newton) 353
Arithmetices principia, nova methodo exposita (Peano) 385
desigualdad de media geométrica aritmética 219, 333
media aritmética 333 La
aritmética de los logaritmos (Briggs) 53–54 secuencia
aritmética 28, 139–140 serie aritmética
28 disposición. Véase
matriz de permutación 28 flecha paradoja,
Zeno's 533 Ars conjectandi (Jacob Bernoulli) 39–40, 414 Ars magna (Cardano)
10, 47, 59–60, 112, 190–191, 494 Artin, Emil 52 A¯ryabhata (matemático
indio) 17, 28–29, 264, 392 A¯ryabhatiya (A¯ryabhata) 28–29
ASA (ángulo-lado-ángulo) regla 1
“Como iba a St. Ives” 156
propiedad asociativa 29, 83 de la suma 5 en
álgebra booleana 49 y
grupos 241 de matrices 223
y orden de operación 366 y
anillos 448 de
suma vectorial 520, 522
astroide 115
Astronomiae physicae et geometricae elementa (D. Gregory) 240
Astronomia nova (Kepler) 292
asimétrica 490
asíntota 29–30, 234, 440 serie
asintótica 39 atto- (10-18) 465
atractor 150
aumento 6
autómata 30, 30–31, 37, 350–351
funciones automórficas 398
promedio. Véase el axioma
(postulado) medio (promedio) 31, 170, 314
axioma de elección 31, 530, 534

B

Babbage, Carlos 32, 32–33, 322
Máquina diferencial de Babbage 33
Matemáticas babilónicas 9, 33–35, 249, 425, 426, 428 Bacon,
Francis 452 Manuscrito
de Bakhshali 264 punto de
equilibrio. Ver centro de gravedad La
balancitta (Galileo) 213 Banach,
Stefan 24, 35 Paradoja de
Banach-Tarski 24–25, 35, 374, 526 ornamento de
banda. ver friso
paradoja
del peluquero patrón 374–375, 453–454
Barbier, Joseph 95
gráfico de barras 479, 479
“El problema de la negociación” (Nash) 347
Barrow, Isaac 35–36, 36, 54
El cálculo baricentrische (Möbius) 339
base del exponente 180
base del sistema numérico 36–38, 37
base de polígono/poliedro 38, 506
logaritmos en base 10 53
Bayes, Rev. Thomas 38–39
Teorema de Bayes 39, 302
teniendo 39
Behennde unnd hüpsche Rechnung auf fallen Kauffmannschaften (Widman) 6, 487 bel
118 Bell,
Alexander Graham 118 bell-
distribución en forma 356, 480, 480 Berkeley,
George 58 Bernays,
Paul 250 Familia
Bernoulli 39–40, 50, 284, 529 Bernoulli,
Daniel 40, 107, 202 Bernoulli, Jacob
39–40, 58, 414
Bernoulli, Jacob (II) 40
Bernoulli, Jacques 65–66, 489
Bernoulli, Juan 40, 58, 107, 114, 272, 310, 474, 494
Bernoulli, Juan (II) 40
Bernoulli, Juan (III) 40
Bernoulli, Nicolás (I) 40
Bernoulli, Nicolás (II) 40
Números de Bernoulli 40, 435, 489
Desigualdad de Bernoulli 267–268
Paradoja de Berry 374–375
Bertrand, Louis François 40, 71
Conjetura de Bertrand 167
Paradoja de Bertrand 40, 40–41, 75, 374, 417
“Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann” (Zermelo) 533–534
Bha¯skara II (Bhaskaracharya) 10, 17, 41–42, 264, 392
y números negativos 348 sesgo 42
bicondicional (enunciado "si, y sólo si") 42, 91, 514
punto de bifurcación 151
Bijaganita (Bha¯skara) 41–42
biyección 209
distribución bimodal 480, 480
búsqueda de línea binaria. Ver método de
bisección números binarios 30, 42–43,
88, 150 operación binaria 43, 257, 279 cancelación como 56–59 cierre como
79 propiedad conmutativa como 83
Fórmula de Binet 193
binomial 43
coeficiente binomial 45, 64–65, 80, 418
distribución binomial 43–44, 44, 143, 180
expansión binomial 44–45
teorema binomial 18, 44–45, 80–81, 219, 309, 364
Biometría (diario) 387 ecuación
bicuadrática. Ver ecuación cuártica triángulo
birectangular 474 método de bisección (búsqueda de línea dicotómica, búsqueda de línea binaria) 45–46, 277, 451
bisectriz 46
bit 461
Blatzer, Richard 47
índice de masa corporal (IMC). Véase el índice de Quételet Números de
Bohlen 195 Bolyai, János 46–47, 171, 219, 255, 318, 355, 455 Bolzano, Bernard Placidus 47, 276
Teorema de Bolzano. Ver teorema del valor intermedio

Machine Translated by Google

Bombelli, Rafael 47–48, 50, 113
Boole, George 10, 48, 48–49, 199, 309, 460 Álgebra booleana 49, 460, 461–462 borde
cuadrado 328, 328 Borel, Félix Edouard Émile 216, 307 Anillos
borromeos 49, 49 Borsuk, Karol 15 Borsuk-Ulam teorema 15, 471 Bosse, Abraham 124 Rompecabezas de Boss. Consulte la diapositiva 15 rompecabezas
enlazado 49–50 delimitado arriba/abajo,
definición de 50 Bourbaki, Nicolas 50, 168 llaves 50,
460 problema de braquistocrona 39, 114,
310 corchetes 50–51,
366 Brahe, Tycho 292
Brahmagupta 9, 51, 114, 264, 348, 534
Fórmula de Brahmagupta 51–52, 53, 249, 264, 430
Brahmasphutasiddhanta (Brahmagupta) 51, 264
trenza 52, 52
trenza grupo 52
ancho 309
Fórmula de Bretschneider 52–53
Briggs, Enrique 53–54, 320, 346
Logaritmos Briggsianos 53
Brinkley, Juan 245
Asociación Británica para la Avance de la ciencia 68
Bromhead, sir Edward 239–240
Proyecto Brouillon d'une atteinte aux evenemens des recontres du cone avec un plan (Desargues) 123–124
Brouncker, Lord William 54, 529
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan 198
Teorema del punto fijo de Brouwer 198
Movimiento browniano 158
fuerza bruta 54–55, 461
Buffon, Georges 55
Problema de Buffon-Laplace. Ver Problema de la aguja de
Buffon Problema de la aguja de Buffon 55, 55,
302, 393 Bürgi,
Jobst 320 Buridan,
Jean 368 efecto mariposa 151

C

corte de torta Ver división ferial
Calandrini, Giovanni Ludovico 107
calculadora mecanica 382, 383
cálculo 7, 8–9, 56, 100, 320 historia de 57–58, 67, 126, 325, 368 y optimización 365 y ley de Snell de refracción 468–469
cálculo de variaciones, Weierstrass's 284, 529
calendario, chino 537
cancelación 56–59 ley de cancelación, para las fracciones 204–205
Canon doctrinae triangulorum (Rético) 511
anuncio canon mathematicus seu triangula (Viète) 525
Cantor, Georg 11, 59, 203, 208, 270, 297, 533 sobre la cardinalidad 60–62, 129–130, 271, 460–461 y la hipótesis del continuo 100 sobre el infinito 47 y la teoría de números 63, 359, 367–368, 441, 442
Juego Cantor 203
Cardano, Girolamo (Jerónimo Cardan) 10, 47, 59–60, 112, 190–191, 431, 494 y números imaginarios 87 y números negativos 348–349 y teoría de probabilidad 413, 414, 417 fórmula
de Cardano 112–113, 431, 470, 494 cardinalidad
60–62, 100, 106, 129–130, 209, 270, 359 y teoría de números 123, 359, 368, 442 cardioide 62, 115 Carr, GC
435 “carrying digits”
2, 6 coordenadas cartesianas (coordenadas ortogonales) 62–63, 105, 114, 124, 226, 275, 504 de cardioide 62 frente a coordenadas cilíndricas 115 y cosenos directores 138 vs. coordenadas polares 400 cuadrantes en 428 de toro 500
Producto cartesiano (producto cruzado, producto directo externo, conjunto de productos, producto directo de conjunto) 63 Espacio cartesiano. Ver euclidiana espacio
Cassini, Giovanni Domenico 370
Castillon, Johann 62
expulsando nueves 63–64
Catalán, Eugène Charles 64
conjetura catalana 64
Números catalanes 64–65
catenaria 65–66, 255
Cauchy, Agustín-Louis 47, 66, 66–67, 103, 287, 529 y definición de límite 269, 312, 459 y teorema del valor medio 335 y teoría de números 442
Ecuaciones de Cauchy-Riemann 67
Desigualdad de Cauchy-Schwarz 268
Cauchy secuencia 442
Cavalieri, Buenaventura Francisco 57, 67, 74, 293, 527, 528
Principio de Cavalieri 57, 67–68, 115, 412, 527, 537
Cayley, Arturo 68, 200
Teorema de Cayley-Hamilton 68–69
Números Cayley 359, 432
soportes de techo/suelo 51
función de techo (función de mínimo entero) 198
teorema del límite central 69–70
centro de gravedad 18–19, 69, 372, 470
centro de masa vs. centro de gravedad 69
percentil. Véase percentil
del ángulo central 77, 77
teorema del ángulo central/ángulo periférico 77, 77
teorema del límite central 143, 401, 482–483 y distribución normal 356
proyección central 418
tendencia central, medidas de 480
centroide 335, 372, 470, 507 Ceva, Giovanni 70 Teorema de Ceva 70 Ceyuan
Haijing (Li Ye) 318 cadena 365–366 regla de la
cadena 70–71, 88, 133, 138, 258, 274, 281, 282, 378, 433–434 cambio de
variable. Véase integración: por sustitución caos 71, 151, 203
caos juego 204
charactera universalis 309 polinomio característico 68–69, 156 vector característico. Ver vector propio
Chebyshev (Chebyshev), Pafnuty Lvovich 71, 72, 167, 415
Polinomios de Chebyshev 71
Teorema de Chebyshev 71, 72, 304
Chen, Jing-Run 230
Chêng Ta-wei 325
tablero de ajedrez
rompecabezas 224 pollo (juego) 218, 413, 413
Ch'in Chiu-shao 72, 73
Matemáticas chinas 72–74
prueba china 425
Teorema del resto chino 73
prueba chi-cuadrado 74–75, 98, 386, 415
conjunto de elección 31 cuerda 75, 76, 457, 510, 511
Acordes en círculo (Menelao) 336
teoremas de cuerdas
78 valores de cuerdas, de Hiparco 239
Chou pei suan ching (anónimo) 73, 425
Chudnovski, Gregory y David 393
Chuquet, Nicola 526 Chu
Shih-Chieh (Zhu Shijie) 73–74, 75, 383 círculo 75–76, 92, 136, 141–142, 166, 188 área de 24, 24 diámetro de 130 excentricidad de 155 Círculos de
proporción y el Instrumento Horizontal (Oughtred) 369 cuadratura del
círculo. Ver la cuadratura del círculo
teoremas del círculo 75, 76–78, 114, 425, 430
inversión circular 225
circuncentro 78, 338, 507
circuncírculo 76, 78, 165, 303–304, 321, 354
circunferencia del círculo 75–76 de la tierra 29
circunscribir /inscribe 78 “C1
Incrustaciones isométricas” (Nash) 347
cisoide 136–137
claridad 66–67, 529–530
Clavis mathematicae (Oughtred) 344, 370
matemática del reloj 92, 340–341 curva cerrada
114 semiplano cerrado 243–244
semiespacio cerrado 243–244
intervalo cerrado 184, 276, 278
propiedad de cierre 79 de la suma 5 y grupos 241 de matrices 222 grupo
muestreo 407 coeficiente
79, 404, 525 Cogitata physico-mathematica (Mersenne) 338 Cohen, Paul 101 Colebrook,
HJ 42 Conjetura de
Collatz 79

Machine Translated by Google

La matemática recopilada
Papeles de Arthur Cayley 68
Colección (Pappus) 13, 253
colineal 79–80, 233
Colson, John 7–8
combinación (selección,
arreglo desordenado) 80–
82
coeficiente combinatorio 45,
384
combinatoria 82, 243
conmensurable 82, 172, 238
denominador común 82–83
diferencia común 28 divisor
común 83 factor común
83 fracción común
205 múltiplo común 83,
305 nociones comunes 170
razón común 223 grupo
conmutativo 83
propiedad conmutativa 83
de suma 5 en booleano
álgebra 49 de
productos escalares 148
y grupos 241 de
multiplicación 10,
344 y cuaterniones 432 y
anillos 448–449 y resta
487 de suma vectorial
520, 522 anillo
conmutativo 449 prueba de

comparación 4, 103
compás y regla 95
complemento (operación de
conjunto)
460
ángulos complementarios 14
dígrafo completo. Ver
torneo
grafo dirigido completo 501 grafo
completo 233 induccion
completa. Ver inducción ley
de
completitud 367 propiedad
de completitud, de números reales
47 completando
el cuadrado 84, 84,
428
complejo conjugado del número
complejo 526
espacio euclidiano complejo 170
fracción compleja 206
números complejos (C) 85–87,
219, 358–359, 408, 522
completando el cuadrado y
84
y fórmula de Euler 176
historia de 25, 47–48, 245, 398

y círculos que se cortan 76
multiplicación de 86
propiedades de orden y 367
coordenadas polares de 86
y ternas pitagóricas 426

recíproco de 442
en trigonometría 121–122 y
función zeta 535–536
componentes de un vector 519
compuesto 87, 186, 409
número compuesto 87, 463
composición (de funciones)
69–70, 87–88, 274, 280
composición (de matrices) 330
interés compuesto 153–154, 275–
276
enunciado compuesto 514 –515
Comptes Rendu (diario) 66
computadora 88. Véase
también calculadora,
mecánica y álgebra booleana
49 y ruta crítica 109
historia de 32–33, 167,
321, 351
cóncavo 88
polígono cóncavo 402
cóncavo hacia arriba/cóncavo hacia
abajo
89, 89, 429
concéntrico 89 “Un bosquejo conciso del
Fundamentos de Geometría”
(Lobachevsky) 318
conclusión (del silogismo) 27
concurrente 89, 261, 335, 338, 399,
507
condicional (enunciado “si...
entonces”) 89–90, 514
convergencia condicional 4,
104
ecuación condicional 163
serie condicionalmente convergente
4
probabilidad condicional 39, 90–
91, 263
condición—necesaria y
suficiente 91
cono 91
mapeo conforme
(transformación equi
angular, transformación isogonal)
91, 337,
485 congruencia
92 transformación de congruencia.
Ver isometría
ángulos congruentes 14
figuras congruentes 92, 463
triángulos congruentes 1–2
tronco cónico 207 hélice
cónica 248
Las cónicas (Apolonio de
Perga) 15–16, 93, 253
secciones cónicas 18, 76, 92–93,
93, 123–124, 149, 238, 419
conjetura 31, 499
conjugado de número complejo
86–87
conjugado de suma/diferencia
131
conjugado de surd 490
conjunción (enunciado “y”) 93–94,
514 circuito
de conjunción 94 conectado
94
gráfico conectado 233
consistente 94
constante 94
constante de integración 94–95,
272, 273
ancho constante 75, 95, 130
construible 95–97, 97, 149, 218,
238, 403, 475, 476 , 513

constructivismo 297
número de contacto 472
contingencia tabla 98, 98
fracción continua 98–100,
487
cálculo de π usando 54 y
definición de número
real 441
proporción áurea como
231 y triples pitagóricos
427
continuidad, definida por Cauchy
66
“Continuidad e irracionalidad
Números” (Dedekind) 119
función continua 88, 100, 184,
276, 386 interés
compuesto continuo 276
variable
aleatoria continua
143
hipótesis del continuo 59, 62, 100–
101, 250, 533 integral
de contorno (integral curvilínea,
integral de línea) 101, 239 línea
de
contorno 101
contradicción 94, 101, 170, 171,
228, 229, 473
contrapositivo 101–102, 265
razonamiento contrapositivo 26
convergencia 66, 324
secuencia convergente 102,
312, 458
serie convergente 3, 12,
102–105, 182, 240, 260,
409, 459, 530
Prueba de relación de d'Alembert 8,
223
converse 105, 506
convexo 88
polígono convexo 402
Conway, John Horton 296
cooperar contra defecto,
en el dilema del prisionero
412 geometría de coordenadas
63, 368 coordenadas
105, 399 número de
coordinación 472 teoría
copernicana 214 coprimos. Ver relativamente primo
esquina 403
corolario 498–499
correlación y prueba de chi-
cuadrado
74–75 coeficiente de correlación
79, 106, 107, 306–307, 386,
456–457
ángulos correspondientes 504
función cosecante 510
función coseno 139, 509, 510 regla
del coseno. Ver ley de los cosenos
“el arte cósico” 10, 517
función cotangente 510
número contable 11, 106, 348,
441 número contable. Véase
número natural;
contraejemplo de números enteros 107, 120,
229
contraarmónica media 333
número de conteo. Ver número
natural
Cours d'analyse (Cauchy) 66
Cours d'analyse (Vallée
Poussin) 518
Un curso de matemáticas puras
(Hardy) 246
primos primos 515
covarianza 106, 107, 306
cobertura. Véase teselado
Cramer, Gabriel 107–108
Regla de Cramer 107, 108–109,
223, 282
Crelle, August Leopold 3
Crelle's Journal 3
ruta crítica 109, 109 punto
crítico 331 producto
cruzado (producto vectorial) 63,
110, 520
criptografía 111, 410 , 525 cubo
(hexaedro) 111–112, 115, 396,
397 números
cúbicos 195 raíz
cúbica 112, 451
ecuación cúbica 34, 84,
112–114
discriminante de 141
historia de 59–60,
190–191, 493–494
celosía cúbica 472
codo 309
función de distribución
acumulativa
143 tablillas cuneiformes 33,
34 curl
144 curva 114,
314 curvas, clasificación de Cramer
de 108
integral curvilínea. Ver
cúspide integral
de contorno 492,
493 ciclo (teoría de grafos)
233 grupo cíclico
295 polígono cíclico
114 cuadrilátero cíclico 78, 264,
430
cicloide 114–115, 310
ciclotomía 115, 411
coordenadas cilíndricas 115,
504
hélice cilíndrica 248

D

datos 116, 478
Datos (Euclides) 169

Machine Translated by Google

fórmula de los días de la semana 116–118
decibelios 118 representación decimal 36–38, 72–73, 260, 264, 370, 485 declinación 261, 261 descomposición 118–119
De configurationibus qualitatum et motuum (Oresme) 368
decremento 262
Decker, Ezequiel de 54
Dedekind, Julio Wilhelm Ricardo 58, 119, 120, 172–173, 270, 367, 442
Dedekind cortó 119-120, 172–173, 262, 277, 367
y números reales acotados 50
y definición del número real 442 y
teorema del valor extremo 184
De determinatibus funcionalibus (Jacobi) 287 lógica deductiva 420 Aristóteles y 26 razonamiento deductivo 120–121 defecto vs. cooperar, en el dilema del prisionero 412 deferente, de cicloide 115 número deficiente 389 integral definida 148–149, 275 deformación 121 Degen,
Ferdinand 3, 5 hipérbola degenerada 373 cuádricas degeneradas 411 grado (medida de ángulo) 14 grado de un polinomio 121, 404
grado de un vértice (valencia) 121, 233
grados de libertad 121 Dehn, Max 165 Problema del altar de Delian. Ver duplicación del deltoides del cubo 430, 430
De methodis serierum et fluxionum (Newton) 352
De Moivre, Abraham 85, 107, 121–122, 471, 486, 494
y distribución normal 356, 414, 486
Fórmula de De Moivre (De identidad de Moivre) 85, 122
La quíntica de De Moivre 471
Demostración de un método pour resoudre les égalitez de tous les degrez (Rolle) 449
"Démonstration d'un théorème sur les fractions continúa periódicamente" (Galois) 215
De Morgan, Augusto 122–123, 200, 265, 270, 349
Leyes de De Morgan 123, 460, 525
denominador 204
subconjunto denso 441 numerable (enumerable, numerable) 123
conjuntos numerables 59, 60–62, 100, 106
eventos dependientes 262–263
variable dependiente 519
trastorno 390–391, 486
De ratiociniis in ludo aleae (Huygens) 414
derivada 132, 132, 198, 262, 271–272, 418 y
cálculo de velocidad y aceleración 523
primero y segundo, y graficando 234
Desargues, Girard 123–124, 270, 391, 418, 419
Teorema de Desargues 124, 270, 391, 419
Descartes, René 10, 57, 124–125, 125, 180, 189, 431–432, 519 y
números amistosos 13
y geometría analítica 13 y geometría de coordenadas 62–63, 226, 235 y
fórmula de Euler-Descartes 177
y números imaginarios 87
La regla de los signos de Descartes 124, 125–126 estadística descriptiva. Ver estadística:
determinante descriptivo 126–128, 223, 281–282, 287, 309 función determinante 108 De triangulis omnimodis (Regiomontanus) 444, 511
desviación 481
diagonal 128–129, 376, 402, 443
argumento diagonal 59, 60, 100, 106, 123, 129, 129–130 , 359, 441–442 cuadrado latino diagonal 302 Dialogo (Galileo) 214 diámetro 75, 76, 130, 471 diamante 376, 474 dado, tetraédrico 462 línea dicotómica
buscar. Véase la paradoja de la dicotomía del
método de bisección, Zeno's 533
El problema de Dido 130, 284
Dieudonné, Jean 288
Die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefurdete Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen" (Einstein) 158
diferencia 130–131, 487
diferencia motor, Babbage's 32–33, 33
fórmula de diferencia 511–512,
Máquina de 512 diferencias. Ver diferencia motor
diferencia de dos cubos 131
diferencia de dos cuadrados 9, 131, 257
diferencial 131–132, 132, 310
Diferencial e Integral Cálculo (Babbage) 32
cálculo diferencial 56, 132–134, 226, 308–309
versus cálculo integral 211–212
ecuaciones diferenciales 134–135, 234, 252, 299, 309, 385, 399 y
fracciones parciales 380
geometría diferencial 226
diferenciación 133, 309
dígitos 135–136
digital vs. analógico 135–136
extracción de dígitos 183 diedro 136
ángulo diedro 136
dilatación 225, 278, 317
dimensión 136
dimensión de una matriz. Ver orden de una matriz
Diocles 136–137
Ecuaciones diofánticas 54, 99, 137, 239, 250, 289–290, 360 Diofanto 9, 137–138, 180, 189–191, 239, 252–253 número dirigido.
Véase derivada direccional entera 138–139, 233 cosenos directores 138 números directores 138 razones de direcciones 138 sólidos
directamente congruentes 92
prueba directa 139, 265, 420
razonamiento directo 26 directriz 155
del cono 91
del cilindro 115 de la parábola 373
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 139–140, 172, 208, 337, 394 Principio de Dirichlet. Véase método de disco del principio del casillero 470
funciones discontinuas 100
Discorsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze (Galileo) 213
discreta 140
matemática discreta 167
transformación discreta 140
discriminante 84, 140–141, 429
discriminante de 113 cúbicos
eventos disjuntos. Ver disyunción de eventos
mutuamente excluyentes (declaración "o") 141, 514
circuito de disyunción 141
razonamiento disyuntivo 26
dispersión, medidas de 480–482
desplazamiento 141
Disquisitiones arithmeticae (Gauss) 218–219
distancia
del punto a la línea 142 del punto al plano 142 y velocidad 522–523 fórmula de
distancia 22, 75, 141–142, 310 , 520 distribución 72, 142–143, 143, 197, 218 chi-cuadrado 74–75
propiedad distributiva 143–144 en álgebra booleana
49 de productos punto 148
y multiplicación isabelina 160 pitagóricos y
9 y cuaterniones 432
y anillos 448 div (operador de divergencia) 144 divergente
144 secuencia divergente 102 serie divergente 240, 459 divina proporción. ver dorado
relación
reglas de divisibilidad 92, 144–146
división 146, 205
divisor de cero 147
Doctrina del cambio (De Moivre) 122
dodecaedro 396, 397 dona. Véase producto
punto toroide (producto interior, producto escalar) 110, 136, 138, 147–148, 520
fórmula de ángulo doble 525
cúspide doble 492, 493
integral doble 148 , 239, 400, 473
doble punto 148
doble raíz 140, 451 doble toro 501 doblando el
cubo 149 principio del cajón. Ver dualidad del principio del casillero en geometría proyectiva 124
Dudeney, Henry Ernest 165
variable ficticia 148–149, 488
duplicando el cubo 18, 21, 97, 136–137, 149, 166, 172, 239, 525
Dürer, Albrecht 149–150, 231, 232, 325, 391 diádica 150 fracción
diádica 43 sistema
dinámico 71, 88, 150–151, 203, 296 dinámica 299

Machine Translated by Google

mi

e (excentricidad de la cónica) 155
e (número de Euler) 11, 152–154, 154, 173, 283, 300, 301, 314 tierra 154–155, 166 excéntrica 89 excentricidad 155, 161, 254, 373 forma escalonada 220
arista
en el gráfico 233
del poliedro 403
Fracciones egipcias (fracciones unitarias) 155, 156, 192, 206
matemáticas egipcias 155–156, 423, 428, 497
Multiplicación egipcia 155, 156
valor propio 156–157, 282
vector propio (vector e, vector latente, vector característico, vector propio) 156–157, 282

“Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen” (Einstein) 158
Einstein, Albert 157, 157–159, 227, 255, 398, 447, 496, 530 elasticidad, matemáticas de 227–228

“Élémens d'arithmétique universelle” (Kramp) 187 teoría elemental de números 359–360

operaciones elementales 364
operación de fila elemental 220–222
Elemente der Mathematik (Blazer) 47
Los elementos (Euclides) 1, 78, 159, 168–169, 171, 172, 183, 226, 238–239, 252, 253, 270
compás y
regla en 95 y fundamentos de las
matemáticas 200
números perfectos en 389
Sólidos platónicos en 396–397
Elementos de geometría (Legendre) 308
Elementos de matemáticas (Bourbaki) 50
Elementos de aritmética (De Morgan) 122
Elementos de geometría (Menelao) 336
Elementos de geometría (Playfair) 377
método de eliminación. Véase eliminación gaussiana
multiplicación isabelina 159–160, 160, 404 ell 309
elipse 92–93, 93, 137, 155, 160, 160–161, 239 propiedad de reflexión de 365 elipsoide 161–162, 411 cono elíptico 411 cilindro elíptico 411 geometría elíptica.
Ver esférico paraboloide
elíptico de geometría 374, 411
conjunto vacío (conjunto nulo, Ø) 162, 257, 267, 460
Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts, et des métiers (d'Alembert) 8
puntos finales, de curva 114
enumerables. Véase enumerable
Enumeratio linearum tertii ordinis (Newton) 353 división justa
sin envidia 188 epiciclo 115
epicicloide 115
Epiménides 311
igualdad 162 signo
igual (=) 442
coeficiente de
equiparación 162, 380, 405
igualar partes reales e imaginarias 162–163 ecuación
163 ecuación de
la recta 163–164 equiángulo 164–165, 166, 506
poligono equiangular 402
transformacion equiangular.
Ver mapeo conforme
equidescomponible 165, 165
equidistante 76, 78, 165–166, 260
equilátero 164, 166, 285, 506 polígono
equilátero 402 “Puntos de
equilibrio en juegos de N personas” (Nash) 347 conjuntos
equipotentes (equipolent, equinumerables) 60 curva
equitangencial. Ver equivalencia de tractrix
371 nudos
equivalentes 295–296 conjuntos
equivalentes 60
Eratóstenes 154, 166–167, 462, 510 Tamiz
de Eratóstenes 462–463 Erdös,
Paul 167, 393 Número de
Erdös 167 error 167–168, 197, 451, 457 detección de error 46 1 –462
error suma de cuadrados 306
Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques (Argand) 25
Ensayo sobre secciones cónicas (Pascal) 382
“Ensayo sobre la aplicación de Análisis Matemático a la Teoría de la Electricidad y Magnetismo” (Verde) 239
Un ensayo sobre el principio de Población (Malthus) 407
“Un ensayo para resolver un Problema en la Doctrina de Oportunidades” (Bayes) 38
Euclides 1, 78, 168–169, 172, 183, 224, 226, 238–239, 252, 253, 265, 270, 314, 324, 410 y
compás y
regla 95 definición del punto 399 y
lógica formal 199, 250 y
fundamentos de las matemáticas 200 y teorema fundamental de la
aritmética 210 y números perfectos 389 y sólidos
platónicos 396–397 y matemáticas puras 422 y ternas
pitagóricas 426

Algoritmo euclidiano 11, 82, 159, 169–170, 210, 237 Geometría
euclidiana 170, 409 axiomas en 31 Hilbert en 250
frente a geometría
no euclidiana 294
y SAS regla 2
Espacio euclidiano (espacio cartesiano, n-espacio) 170
Euclides ab omni naevo vindicatus (Saccheri) 455
Euclides de Megara (filósofo) 168
Postulados de Euclides 6–7, 159, 170–171, 226, 255, 455, 474
Ver también postulado paralelo
Demostración de Euclides de la infinitud de los números primos 159, 171–172, 238, 265, 410
Eudoxo 26, 57, 172–173
Euler, Leonhard 10, 107, 120, 140, 152, 161–163, 173, 173–174, 175, 180, 182, 185, 208, 284, 300, 431, 523–525, 529
y fracciones continuas 99 e interés compuesto continuo 276
y el último teorema de Fermat 190
y fundamentos de matemáticas 200 y geometría 6, 64, 80 y la conjetura de Goldbach 229–230
y teoría de grafos 235–236 y teoría de números 13, 18, 187, 202, 247, 283, 349, 389, 426 y función de partición 381 y pi (π) 393
y topología 500 y círculo unitario en trigonometría 511 y función zeta 105, 447, 535–536 Circuito de Euler 233 Fórmula de Euler-Descartes. Ver Teorema de Euler
Diagramas de Euler 26, 362
Circuito euleriano 235–236
Camino euleriano 235
Línea de Euler 80, 174, 174–175 , 354, 507
Ladrillo de Euler 174
Constante de Euler 174, 175, 175, 247 , 283, 461
Fórmula de Euler 85–8 6, 122, 152, 163, 174, 175–176, 182, 185, 209, 236, 314 y logaritmos 320 Problema de división de polígonos de Euler, números catalanes y 65 Polinomio de Euler 174 Cuadrados de Euler 303
Teorema de Euler (fórmula de Euler Descartes) 80, 174, 176–177, 177, 233, 278–279, 358, 404, 472 Euler función totient 174 e-vector.
Véase funciones pares de vectores propios 177, 490
números pares 177–178
evento 178, 413, 417 exa-(1018) 465 excircle 261, 354 medio excluido, ley de 304 Exercitatio geometrica (D. Gregory) 240
Exercitationes geometricae sex (Cavalieri) 67
subconjuntos exhaustivos 371 cuantificador existencial ("existe") 430–431
corchetes de expansión 9, 131, 162, 179, 179 , 404, 431
y teorema del binomio 45 y propiedad distributiva 143 y multiplicación isabelina 160 valor esperado (media, expectativa, μ) 179–180, 334 exponente 180–181, 263, 366, 475
función exponencial 152–153, 181, 181–182
desigualdades exponenciales 268
notación exponencial. Véase notación científica
serie exponencial 182
tiempo exponencial 405
expresión 182
ángulo exterior 182, 182–183, 504, 504
teorema del ángulo exterior 182, 183, 183, 377

Machine Translated by Google

producto directo externo. Véase extracción de productos cartesianos
183–184 extrapolación 184, 278, 405 razón extrema y media. Véase el teorema del valor extremo de la proporción áurea 49, 119, 184, 330, 442 extremum 184

F

cara 185, 403
ángulo de la cara 185 red cúbica centrada en la cara
472 cara del gráfico
185 poliedro facetado 404 factor 185–186
factorial 80, 174, 186–187, 444, 486
factorización 118–119, 187
teorema del factor 187
árbol de factores 210
Fagnano, Giovanni 387
división justa (corte de torta) 187–188
falacia del inverso 26 falacia del inverso 26 posición falsa, método del 9, 156
Faltings, Gerd 190
Fano avión 419, 419
Farey, Juan 188
Secuencia de Farey (serie) 188–189
al-Farisi 18
Distribución F 484
retroalimentación
150 femto- (10-15)
465 Ferguson, DF 461
Fermat, Pierre de 138, 139–140, 189, 272, 410, 531 y números amistosos 13 y geometría de coordenadas 63, 226, 234–235 y figurar los números 66, 287
e historia del cálculo 57 pequeño teorema de 342 y teoría de la probabilidad 413, 414, 417
Último teorema de Fermat 137, 138, 139–140, 189–190, 227, 531
El pequeño teorema de Fermat 342
Ferrari, Ludovico 10, 60, 190–191, 431–432, 470, 494
Ferro, Scipione del (Ferreo, dal Ferro) 10, 59–60, 112, 191, 493–494
Feuerbach, Karl Wilhelm 354
Fibonacci 10, 155, 156, 191–192, 409, 511 y números arábigos hindúes 251 y signo menos 487 y cero 534
Números de Fibonacci 192–193, 193, 197, 384, 443, 458 y proporción áurea 231 y poliominós 406 campo 5, 85, 442 Fields, John Charles 194 Fields medallas 193–194, 531 quince rompecabezas. Ver diapositiva 15
rompecabezas figurar números 66, 99, 194, 194–195, 287, 381, 389, 423 Fincke, Thomas 511
multiplicación de dedos 195–196
finito 196, 270
diferencias finitas 33, 75, 196–197
inducción finita. Ver inducción
geometría proyectiva finita 419
conjuntos finitos
106 Fiore, Antonio Maria 493–494
prueba de la primera derivada 331–332 Fisher, Sir Ronald Aylmer 197–198, 387, 415
simetría rotacional quíntuple 490
problema de las cinco piedras 43 punto fijo 198 soportes de piso/techo 51 función de piso (función del mayor entero) 198 mecánica de fluidos 8, 144, 248, 299
flujo 144
fluxión 57–58, 198, 309, 352 cuerda focal 198 radio focal 198 foco (focos)
155, 199 de una elipse 161 de hipérbola 253, 253–254 de parábola 373 de paraboloide 374 pie (unidad de longitud) 309 campo de fuerza 101
Ford, Lester R. 188 lógica formal (lógica simbólica) 25, 89–90, 94, 101, 199, 238, 304–305 Aristóteles y 26 expresiones en 182 fundadas por Boole 48 Gödel y 228–229 teoría de conjuntos y 460 fórmula 199–200 Formulario matemático (Peano) 385
fundamentos de las matemáticas 47, 200
teorema de los cuatro colores 55, 200–201, 420, 472 y banda de Möbius 340 y toro 501
cuatro elementos (tierra, aire, fuego, agua) 397
Fourier, Jean-Baptiste Joseph 139, 201, 202, 208
Serie de Fourier 139–140, 177, 201–203, 202, 307, 522, 530
cuarta dimensión 136
fractal 136, 203–204, 204, 456, 463 formas fractales y paradoja de Banach-Tarski 24 y caos 71
fracción 146, 204–206, 341, 358, 439, 444 en notación binaria 43 recíproco de 442
dimensiones fraccionarias 136
exponente fraccionario 181, 368
paréntesis de parte fraccionaria 51 función de parte fraccionaria 98, 198
Fraenkel, Adolf 534
Français, Jacques y los números complejos 25
Franklin, Benjamin 325
ecuaciones de libertad. Ver ecuaciones paramétricas
Frege, Gottlob 199
frecuencia 206
distribución de frecuencia 479
polígono de frecuencia 479, 479
tabla de frecuencia 479, 479
teoría de probabilidad de frecuencia, 524 números amigables de Venn. Consulte el patrón de friso de números amistosos 206, 206–207
frustum 207
F-test 484 grupo lineal completo 222–223 giro completo 14, 362, 390 función 139, 173, 207–209, 208, 445 análisis funcional 35
función de una función. Ver función de composición de una regla de función. Ver regla de la cadena principio fundamental del conteo. Ver principio de multiplicación propiedad fundamental del tiempo mínimo 189 teorema fundamental de álgebra 85, 112, 186–187, 209–210, 359, 405, 451 y ecuaciones polinómicas 471 pruebas de 10, 25, 218 y función zeta 536
teorema fundamental de aritmética 83, 118–119, 186–187, 210–211, 283, 409, 439, 476 demostrada por Gauss 218 y función zeta 535
teorema fundamental del cálculo 133, 153, 211–212, 240, 272, 494 formulado por Leibniz 308 en historia del cálculo 57–58
teorema fundamental de las isometrías 212, 284
lógica difusa 212, 305
teoría de conjuntos borrosos 212

GRAMO

Galilei, Galileo 65, 93, 114, 125, 213–215, 214, 270, 485, 523
Gallai, Tibor 80
método de galera 159
Galois, Evariste 10, 215, 242, 288, 432, 471
Galton, Sir Francisco 215-216, 415
gráfico de Galtón. Consulte el diagrama de dispersión La ruina del jugador 216, 437 Teoría de juegos 216–218, 346–348, 350–351, 415
función gamma 174, 187
Gardner, Martín 218
Garfield, Jaime 425
Garnier, René 288
Gauss, Carl Friedrich 119, 140, 218–219, 226, 268 y teorema fundamental de álgebra 209 y geometría 47, 97, 355–356 y teoría de grupos 242 y teoría de nudos 295 y teoría de números 10, 25, 28, 87, 195, 287, 359, 489 y números primos 243, 410–411, 518 y probabilidad 356, 414 y topología 500
Eliminación gaussiana (pivote) 119, 219–222, 282, 288, 438, 491
Gelfond, Aleksandr 11
forma general de una ecuación 222
grupo lineal general 222–223, 314
máximo/mínimo general 331
teoría general de la relatividad 158
General trattato di numeri et misure (Tartaglia) 493 círculo generador 500 generador 91, 115 geodésica 219, 223 cúpula
geodésica 223
Geografía (Ptolomeo) 422
Geometriae pars universalis (J. Gregory) 240
Geometriae rotundi (Fincke) 511
geométrica orgánica (Maclaurin) 324
distribución geométrica 44
media geométrica 333

Machine Translated by Google

progresión geométrica. Ver secuencia geométrica
secuencia geométrica 223–224, 489
serie geométrica 103, 163, 409, 441, 488
transformación geométrica 224–225, 258, 316, 503
La géométrie (Descartes) 63, 124–125, 226
"Geometrische Untersuchungen" (Lobachevsky) 318
geometría 124, 125, 225–228, 238–239
Geometría (Simpson) 463
Germain, Marie-Sophie 190, 226–228 giga-
(109) 465
Girard, Albert 209, 398
reflexión de deslizamiento 206, 225, 228 máximo/mínimo global 330
gnomon 228
proyección gnomónica 485
Gödel, Kurt 31, 101, 199, 200, 228–229, 453, 458
Lo incompleto de Gödel teoremas 101, 199, 229, 250, 458
Goldbach, cristiano 229, 230, 410
conjetura de Goldbach 229–230, 250, 359, 410
proporción áurea 193, 230–231, 388–389
rectángulo áureo 231–232, 232
triángulo áureo 232
Goodwin, EJ 394
googol/googolplex 232, 389
Gosset, William Sealy 232, 387, 415, 483
grado 233
grado. Véase pendiente
gradian 14 gradiente 139, 233, 466–468, 467
Cuadrado greco-latino 302–303
Grandi, Guido 451
gráfico (red) 94, 233, 233, 501
solución gráfica 163, 234, 491
gráfica de función 114, 207, 234–235, 275, 368 teoría
de gráficas 82, 174, 235–236, 245, 505 Graunt,
John 312, 415 gravitación,
teoría de 399–400 gran círculo
223, 314 máximo común
divisor (mayor factor común) 82, 169–170, 236–237, 290, 305, 446 función del mayor entero.
Ver función de piso
alfabeto griego 237, 237
Matemáticas griegas 9, 237–239
Verde, Jorge 239–240
Gregorio, David 240
Gregorio, Santiago 57, 240, 241, 476–477, 494, 496
Serie Gregorio 11–12, 241, 325, 393, 461
La paradoja de Grelling 374–375
El Grounde de Artes (Recorde) 443
grupo 59, 241–242, 252, 279, 398, 490 teoría
de grupos 5, 10, 215, 242, 288, 299, 350, 432
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kolmogórov) 296
Grundlagen der Geometrie (Hilberto) 171, 250
Grundlagen der Mathematik (Hilbert y Bernays) 250 gr 310

Gunter, Edmundo 369, 466

H

rompecabezas de la mercería 165
Hadamard, Jacques 243, 411, 518
Haidao suanjing (Liu Hui) 73
teorema de la bola peluda 472, 521
Haken, Wolfgang 200–201, 420
semiacorde 511
semicono 91–93, 473
semirrecta. Ver rayo semiabierto intervalo
278 semiplano 94, 235, 243–244, 267, 473
semiespacio 243–244
Hall, Monty 343
Hall, Philip 244
Halley, Edmund 5, 312, 353, 445
El cometa Halley 445
Coincidencia de Hall (matrimonio) teorema 244
problema de detención 88, 244
Hamilton, Sir William Rowan 10, 87, 236, 244–245, 359, 432, 520
circuito hamiltoniano 236, 505
Camino hamiltoniano 236, 502
teorema del sándwich de jamón
245 mano (unidad de longitud)
309 apretón de manos lema 121, 236, 245
apretones de manos en una mesa problema 65
Hardy, Godfrey Harold 246, 381, 435–436 función
armónica 246 media
armónica 21, 333 secuencia
armónica (progresión) 246–247
serie armónica 4, 104–105, 174, 247–248, 368, 409 Haros,
C. 188 problema
de guardarropa 391 al-
Haytham 18
Heawood, Percy 200–201
altura
del cono 91
del cilindro 115
del pentagrama 388
del prisma 412
del tetraedro 497 del triángulo 506
Heisenberg, Werner 68
hélice 114, 248
hemisferio 471
Hermite, Charles 11, 154, 301, 314
Herodotus 498
Heron 248–249
Fórmula de Heron 52–53, 78, 248, 249, 336, 486, 506, 508
Método de Heron 34–35, 183, 248, 249, 285, 353, 476
hertz (Hz) 206
Hertz, Heinrich 158
Heumann, Casper 312
notación hexadecimal 135
celosía hexagonal 472
hexaedro . Véase
jerarquía de
cubos 454 Hieronymus
497–498 aritmética superior. Ver teoría
de números derivada
mayor 249 máximo común divisor. Ver máximo común
divisor Hilbert, David 137, 170, 171, 199, 229, 249–250, 355, 533 Axiomas de Hilbert
171 Paradoja del hotel infinito de Hilbert 250–
251, 269 Espacio de
Hilbert 250 Números arábigos hindúes 191–192, 251,
263 , 370, 451
Hipparchus 510
Hippasus 172, 283
Hippocrates 251–252,
322–323, 476, 513
Hippocrates lune 251 Hisab al-jabr w'al muqabala
(al-Khwa¯rizmı¯) 10, 17, 251, 293, 517
histograma 143, 479, 479
Historia natural y moral de las Indias (Acosta) 260
HOMFLYPT polinomio 296
homogéneo 252
homomorfismo 252
homotopía 398–399
panal 292, 372
Horner, Guillermo Jorge 72
Cómo resolverlo (Pólya) 401
hundkurve 503
Hutchings, Michael 469
Huygens, Christiaan 114–115, 180, 414, 503
Hidrodinámica (Daniel Bernoulli) 40
hidrodinámica 140
hidrostática 18–19, 20
hipatia 239, 252–253
hipérbola 30, 92–93, 93, 137, 155, 189, 239, 253, 253–254, 513 coseno
hiperbólico 65–66, 254–255 cilindro
hiperbólico 411 funciones
hiperbólicas 254, 254–255, 369 geometría
hiperbólica 219, 227, 255, 318, 355–356, 455
paraboloide hiperbólico 374, 411
seno hiperbólico 254
espiral hiperbólica 474
hiperboloide 255–256, 256
hiperboloide de una/dos hojas 411
números hipercomplejos 432
hipercubo 112, 256
hiperesfera 136, 471
hipocicloide 115
hipotenusa 77, 256, 509
Hipótesis física nova (Leibniz) 309
prueba de hipótesis 143

I

i (raíz cuadrada de –1) 85, 173, 358–359, 529 i
(vector unitario) 520
Ibrahim ibn Sinan 18
icosaedro 232, 396, 397 "Teoría ideal en Ringbereichen" (Noether) 355

identidad 163, 257, 304
elemento de identidad 257, 258, 279, 295, 366 aditivo
534 multiplicativo 344
matriz identidad (matriz unitaria) 128, 257, 257–258, 281
propiedad de identidad 222, 241 imagen (rango) 207, 258, 483 Imaginarios
Véase también números complejos (C)
diferenciación implícita 258–259
función implícita 259
factor impropio 186
fracción impropia 205
integral impropia (integral sin restricciones, integral infinita) 104, 144, 259–260
En artem analiticam isagoge (Viete) 525
Matemáticas incas 260
incentro 260
pulgada
309 incircunferencia 260–261, 354 inclinación 261, 261

Machine Translated by Google

plano inclinado 261
principio de inclusión-exclusión 48–49, 261, 391, 460
números compuestos 409
crecientes/decrecientes 89, 261–262
incremento 262
integral indefinida 95, 272, 275
independientes. Véase el axioma
independiente disjunto por pares 171, 262 eventos independientes 91, 178, 262–263, 417 variable independiente 519 indeterminada. Véase ecuación indeterminada
desconocida 263 índice (índices) 263. Véase también exponente
índice de la suma 488
Matemáticas indias 263–265 prueba indirecta (prueba por contradicción, reductio ad absurdum) 139, 171, 265, 336, 420
inducción 122, 126, 176–177, 261, 265–267, 270, 420
definición inductiva. Ver definición recursiva
razonamiento inductivo 120–121 Indus inch 263
desigualdad 267–268
inferencia 268, 415
estadística inferencial. Ver estadística: inferencial
infinito 196
integral infinito. Véase integral impropia
orden infinito 406
producto infinito 144, 268–269, 312, 459
serie infinita 102, 324, 351, 368, 439
infinitesimal 47, 57–58, 67, 269, 271, 533 infinito
(∞) 269–270 , 529 punto de inflexión (inflexión) 89, 89, 270, 492
teoría de la información 271 función inyectiva 209 producto interno. Ver producto escalar en radio 260
inscribir/circunscribir 78
teoremas del ángulo inscrito 77, 77–78
círculo inscrito 387 valor instantáneo 271
velocidad instantánea 523
entero (número dirigido, número con signo) 271, 358
triángulo entero 507–508
integral 66, 180, 380, 447, 523
cálculo integral 22, 24, 56, 133, 271–273, 272, 308–309 y el método de Arquímedes de agotamiento 18
vs. cálculo diferencial 211–212 y
cálculo de volumen 470, 527
dominio integral 449
“Intégrale, longeur, aire” (Lebesgue) 307
Integrales de Lebesgue (Vallée Poussin) 518
prueba integral, para serie convergente
104 integrando 148–149, 273, 274, 360
integración 15, 133, 272 por partes 95, 273–274, 443, 486 por
sustitución (cambio de variable, regla de sustitución para integración) 274–275, 287

intersección 275
intersección forma 164, 275
interés 275–276
ángulo interior 276, 504, 504
teorema del valor intermedio (Teorema de Bolzano) 100, 184, 276–277, 367, 442
método de bisección y 46
La prueba de Bolzano de 47 y Dedekind corta 119 y
el teorema del sándwich de jamón 245
en historia del cálculo 58 y
función logarítmica 320

interpolación 184, 405. Véase también fórmula de Lagrange
intersección 144, 460
intervalo 278
Introducción a l'analyse des lignes courbes algébriques (Cramer) 107–108
“Introducción a la filosofía matemática” (Russell) 453 Una introducción a las matemáticas (Whitehead) 530

“Introducción a la doctrina de las fluxiones” (Bayes) 38–39
invariante 278–279
elemento inverso 279–280
función inversa (asignación inversa, función inversa) 280–281
funciones hiperbólicas inversas 281
mapeo inverso. Ver función inversa
matriz inversa 222, 280, 281–282
propiedad inversa 5, 49, 223, 241
ley del cuadrado inverso
282 funciones trigonométricas inversas 280–281, 282–283 inversión en un círculo 225
Una investigación de las leyes del pensamiento (Boole) 48
números irracionales 59, 238, 283, 358, 423 y
definición de número real 441–442
Las dudas de Kronecker sobre el 297
El trabajo de Theodorus en 498
polinomio irreducible 186 Isagoge ad locos planos et solidos (Fermat) 189, 226 transformación
isogonal. Ver mapeo conforme punto aislado (acnodo)
283 isometría (transformación de congruencia) 140, 283–284 isomorfismo 284 desigualdad
isoperimétrica 268
problemas isoperimétricos 130, 284–285, 469, 472, 474–475, 484–485, 529 trapezoide
isósceles (trapecio) 285, 504
triángulo isósceles 238, 285, 285, 506 “Ist die Trägheit eines Körpes von seinem
Energieinhalt abhängig?” (Einstein) 158 Istituzioni analitiche (Agnesi)

7
integral iterada 148
iteración 150–151, 285–286
Iverson, Kenneth 198

j
j (i de ingenieros) 85
j (vector unitario) 520
Jacobi, Carl Gustav Jacob 287–288
Determinantes jacobianos 287
Jacquard, Joseph-Marie 33 tirón 523
Jiuzhang suanshu (anónimo) 73, 226
Jones, Vaughn 295–296
Jones, Guillermo 393
Polinomio de Jones 296
Jordán, Marie Ennemond Camilo 288, 307
Jordán, Wilhelm 288
Jordan forma canónica 288
Teorema de la curva de Jordan 76, 288
Problema de Josefo 288–289
Paradoja de Jourdain 289
Diario de Matemáticas Pures et Appliqués (Diario de Liouville) 317
Revista de Pura y Aplicada Matemáticas (diario de Crelle) 3
Distribución en forma de J 480, 480
problema de llenado de jarras 137, 170, 289–290
Julia, Gastón Mauricio 203–204
Juego Julia 203–204
Jungius, Joaquín 65

K
k (vector unitario en el espacio tridimensional) 520
al-Kashi, Jamshid Mas'ud 18, 291, 392
Kasner, Edward 232
Kempe, Alfred Bray 200
Kendall, MG 438
Coeficiente de Kendall 438
Método de Kendall 438
Kepler, Johannes 93, 291– 293, 292, 396, 397, 472, 528
Leyes de Kepler, Newton y 353

La clave de la aritmética (al. Kashi) 291
Khandakhadyaka (Brahmagupta) 51
Khayyám, Omar. Véase Omar Khayyám
al-Khwa¯rizmı¯, Muhammad ibn Mu¯ sa¯ 9, 10–11, 17, 251, 293–294, 517, 534 kilo-
(103) 465
cinemática 27, 213
cometa 430, 430
Klarner, David 406
Constante de Klarner 406
Klein, Felix Christian 294, 314, 355, 473–474 Botella
de Klein 200–201, 294–295, 339–340 Grupo
de cuatro de Klein (viergruppe) 295
teoría del nudo 295, 295–296
Koch, Nils Fabian Helge von 203
Curva de Koch 203
Kolmogorov, Andrey Nikoláyevich 296
Kramp, cristiano 187
Kremer, Gerhard (Mercator) 337
Kronecker, Leopoldo 296–297
Conteo de Kruskal 297–298
Kulik, Yakov 463

L
Laczovich, Miklov 165
exponentes escalonados 65
Lafforgue, Laurent 194
Lagrange, Joseph-Louis 99, 201, 249, 278, 299–300, 379, 399, 414 y teoría de
grupos 242 e historia del cálculo 58 y teorema del valor medio 334
y números cuadrados 195 y serie de Taylor 494

Machine Translated by Google

Fórmula de Lagrange 120, 278, 300, 405
Teorema de Lagrange 299
Lagrangiano (unidad) 300
Descripción lagrangiana 300
Multiplicadores lagrangianos 300
Lambert, Johann Heinrich 283, 300–301, 392, 477
Landa, Diego de 332
Langlands, Roberto 194
Laplace, Pierre-Simon, marqués de 69, 245, 301–302, 356, 399, 414
Operador de Laplace 302
Transformada de Laplace 302 Vector latente. Véase vector propio superficie lateral 115 Cuadrado latino 174, 302–303 latitud 105, 154, 337
celosía 366
método de celosía 159
punto de celosía 164, 166
polígono de celosía 164–165, 166
ley de promedios 303, 304 ley de conservación de la energía 309
ley de la continuidad 309
ley de los cosenos 5–6, 16, 78, 303, 303–304, 506 ley del medio excluido 304 ley de los cuerpos que caen 213 ley de la identidad 304 ley de los grandes números 71–72, 303, 304, 399, 414–415, 436
ley de no contradicción 304 ley de los senos 1–2, 78, 303, 303–304, 463, 507 ley de la palanca 18, 69, 304 leyes de la gravedad 353 leyes del movimiento planetario 291–293 leyes del pensamiento 26, 304–305
paradoja del abogado 374–375 coeficiente principal 305 mínimo común denominador 83
mínimo común múltiplo 83, 305
función de mínimo entero. Consulte el método de mínimos cuadrados de la función de techo 107, 218, 302, 305–307, 308, 445 Lebesgue, Henri-Léon 58, 307 LeBlanc, Louis 227 Leçons sur les séries trigonométriques (Lebesgue) 307 Lectiones geometricae (Barrow) 36 Lectures on Quaternions (Hamilton) 520 derivada izquierda 307–308 sistema zurdo 369, 448 identidad izquierda 257 izquierda/derecha, límite del 313 Legendre, Adrien-Marie 187, 308
Polinomios de Legendre 308
Símbolo de Legendre 308
Lehmer, DH 436
Leibniz, Gottfried Wilhelm 122, 208, 308, 308–309, 523–525 y notación de cálculo 249, 488
y diferencial 132
y descubrimiento del cálculo 57–58, 211, 227, 240, 272, 352, 494 e integrales dobles 148 y lógica formal 199, 228 Serie de Leibniz. Véase serie de Gregorio
Teorema de Leibniz 418
lema 498–499
longitud 309–310
lente 76
Leonardo de Pisa. Ver Fibonacci Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste (Poincaré) 399
¡Hagamos un trato! (programa de juegos) 343 principio de buzón. Véase el principio del casillero “Una carta sobre series asintóticas” (Bayes) 39 Cartas a una princesa alemana (Euler) 174 palancas y poleas 19–20 L'Hôpital, Guillaume François, marquis de 40, 58, 310 Regla de L'Hôpital 40, 310 – 311 Lho shu cuadrado 325, 326 Lhuilier, Simon 474
paradoja del mentiroso 289, 311, 374, 458
Liber abaci (Fibonacci) 156, 191-192
Liber de ludo aleae (Cardano) 414
Liber quadratorum (Fibonacci) 192
tablas de vida (tablas de mortalidad) 311–312, 415
ligancia 472 probabilidad 197
Lilavati (Bha¯skara) 41–42
límite 312–313
d'Alembert y 8–9
y teoría analítica de números 13
El trabajo de Bolzano sobre 47 y la regla de la cadena 70–71 ε - δ
definición de 529 y definición de la tangente 492 derivada como 132
ideado por Cauchy 66 en historia del cálculo 58
Lindemann, Carl Louis Ferdinand von 11, 297, 313–314, 393, 477 línea 314, 315
álgebra lineal 314, 491
método de congruencia lineal 436–437
ecuación lineal 34, 156, 163, 314–315
interpolación lineal 277–278
linealmente dependiente/ independiente 315
Perspectiva lineal (Taylor) 494
programación lineal 316
transformación lineal 7, 316–317
integral de línea. Ver integral de
contorno Liouville, Joseph 11, 59, 215, 317–318 Constante de Liouville (número de Liouville) 11, 317
Listing, Johann 295, 339, 340
Littlewood, John 246 Liu Hui 73 Li Ye (Li Chi, Li Zhi) 73, 318 Geometría lobachevskiana. Ver geometría hiperbólica Lobachevsky, Nikolai Ivanovich 46–47, 171, 219, 227, 255, 318, 355, 377, 455
máximo/mínimo local 330–331, 331, 468 locus (loci)
319 logaritmo 247, 252, 284, 319–320, 342, 411, 461, 466
historia de 53–54, 55, 291–293, 345–346 de matriz 157
diferenciación logarítmica 258–259
función logarítmica 152–153, 153, 320–321 , 337 gráfico logarítmico 235 escala logarítmica 118, 321, 369, 466 espiral logarítmica 39, 474
Logarithmorum chilias prima (Briggs) 54
lógicamente equivalente 515
puertas lógicas 88
Lógica del azar (Venn) 524 división larga 37, 37–38, 38, 146, 349, 404, 433 longitud 105, 154–155, 337, 445
radio largo 321
Loomis, Elisha Scott 425 bucle (teoría de grafos) 233
Lorentz, Henry 398
Lovelace, Augusta Ada 33, 321–322, 322
términos más bajos. Ver forma reducida Loyd, Sam 465–466 rombo 376, 474
Lucas, Edouard 502 lune 251–252, 322, 322–323 Lyapunov, Aleksandr Mikhailovich 69, 356, 415

METRO

Maclaurin, Colin 107–108, 324, 496 Serie
Maclaurin. Véase la serie de Taylor
Madhava de Sangamagramma 264, 324–325
constante mágica 325
cuadrado de división mágica 327, 327
cuadrado mágico de multiplicación 327, 327
rectángulo mágico 328, 328
cuadrado mágico 149, 149–150, 325, 325–328, 326, 327
magnitud 328–329 al-Mahani 18 arco mayor 18
premisa mayor 27
Malthus, Thomas 407
Mandelbrot, Benoit 204
Mandelbrot set 204
Manière universelle de Mr. Desargues (Jefe) 124
cartografía. Ver función
Markov, Andrei 415
Cadenas de Markov 296 El análisis matemático de la lógica (Boole) 48
“Contribución matemática a la teoría de la evolución” (Pearson) 387
disertaciones matemáticas (Simpson) 464
inducción matemática. Ver inducción
“La teoría matemática de la comunicación” (Shannon y Weaver) 461 La disculpa de un matemático (Hardy) 246
Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (von Neumann) 351 matriz (matrices) 109, 119, 126–128, 221–222, 314, 329 suma de matrices 329–330 álgebra de matrices 68, 458 matriz inversa. Ver matriz inversa
multiplicacion de matrices 241, 330
operaciones matriciales 329–330
Matyasevic, Yuri 137
estrategia maximin 217
máximo/mínimo 89, 133, 310, 330–332, 331 Matemática maya 332–333 McManus, Chris 118
media (promedio) 44, 333–334, 480, 537 media. Ver valor esperado
valor medio 334 teorema del valor medio 22, 94–95, 119, 184, 211, 262, 311, 334–335, 442, 450

Machine Translated by Google

Medida de un círculo (Arquímedes) 18
medidas de tendencia central 480
medidas de dispersión 480–482 teoría
de la medida 58, 307
Mécanique analytique (Lagrange) 299
Mécanique céleste (Laplace) 67, 245
Mechanica (Euler) 173, 393
mecánica 8
mediana 174–175, 480
mediana del triángulo 335, 335–336, 338, 507
Meditationes algebraicae (Advertencia)
229 mega- (106) 465
Melancolía (Durero) 149, 325
“Mémoire sur les équations algébriques” (Abel) 5
“Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques” (Lamberto) 300
“Memorias sobre la geometría Representación de lo Imaginario Números” (Français) 25
Memorias sobre la teoría de Matrices (Cayley) 68
Menabrea, Luis 322
Menelao 17, 336
Teorema de Menelao 70, 336, 336
Mercator (cartógrafo). Ver Kremer, Gerhard Mercator,
Nicolaus (matemático) 337 Expansión de
Mercator 4, 337 Proyección de
Mercator 91, 337 Méré, Chevalier de
414 meridiano 154–155
Mersenne, Marin 189,
337–338, 389

Mersenne primer 338, 389, 410
Metafísica (Aristóteles) 498 metro
465 método.
Ver algoritmo método de
agotamiento 18, 20, 57, 67, 172 método de
indivisibles 67 Methodus incrementorum
directa e inversa (Taylor) 494

Métrica (Heron) 248, 249 micro-
(10-6) 465 método
del cuadrado medio 436 punto
medio 76, 338 rango
medio 480
Mihailescu, Preda 64 milla
309–310 mili-
(10-3) 465 estrategia
minimax 217 teorema
minimax 218
mínimo. Ver máximo/mínimo arco
menor 18
premisa menor 27
minuendo 487
signo menos 131, 398, 486, 487

minuto (medida del ángulo) 14
Mirifici logarithmorum canonis descripción (Napier) 346
Miscelánea analítica (De Moivre) 122
estrategia mixta (teoría de juegos) 217–218
surdo mixto 490
Miyoshi, Kazunori 393
Möbius, Augusto Fernando 338–339, 340
Banda de Möbius (tira) 294–295, 339–340, 340, 369
Función de Möbius 339
Fórmula de inversión de Möbius 339
modo 480
aritmética modular 59, 71–72, 92, 147, 174, 218, 340–342, 436
módulo. Véase valor absoluto
mónico 305
teselado monoédrico 496–497
monomio 342
monomino 406
Método Monte Carlo 342–343
Problema de Monty Hall 343
Conjetura de Mordell 190
Morgan, Frank 469
Morgenstern, Oskar 216, 350–351
Morley, Frank 343
Teorema de Morley 343
Morrison, Nathan 296 tablas
de mortalidad. Ver tablas de vida
elección múltiple 81–82
multiplicando 344
multiplicación 5, 86, 86, 146, 205, 343–344, 370 ley de
multiplicación 367 principio
de multiplicación (principio fundamental de contar) 344 y permutaciones
391 regla de multiplicación
para exponentes 180–181 en teoría de la probabilidad 416, 416–417 identidad
multiplicativa 257 inverso
multiplicativo 449 multiplicador
344 análisis
multivariado 197 mutuamente
excluyentes. Véase eventos disjuntos mutuamente
excluyentes por pares (eventos disjuntos) 344 mutuamente
ortogonales 302
Mysterium cosmographicum (Kepler) 292

norte

Nakayama, Kazuhiko 393 nano-
(10-9) 465
Napier, Juan 74, 293, 319–320, 345, 345–346, 466
Huesos de Napier (varillas) 74, 346, 346, 347
Fórmulas de Napier 346
Desigualdad de Napier 268
Teorema de Napoleón 507
nappe 91–93, 473
Nash, Juan 346–348, 415
Equilibrio de Nash 413
Naturales y Políticos Observaciones hechas sobre el Facturas de Mortalidad (Graunt) 312
número natural 106, 129, 348, 358, 385 Véase también número entero
cero. Ver cero
Nave, Hannibal 191
número de besos n-dimensional 472
espacio n-dimensional 68, 472
algoritmo del vecino más cercano 505
negación (sentencia 'no') 348, 514
coordenadas negativas 63
infinito negativo 121
negativamente orientado 369, 448
negativamente sesgado 465, 480, 480
números negativos 48, 51, 348–349, 358, 408
pendiente negativa 467
media neopitagórica 333
multiplicación anidada 349, 349–350, 350, 405 neto
(contabilidad) 350 neto
(geometría) 350, 350 neto (de
hipercubos) 256 peso neto
350 red. Ver
gráfico Neumann, John
von 350–351, 393
elemento neutro. Ver elemento de identidad
Nuevos experimentos sobre vacíos (Pascal) 382 Newton, Sir
Isaac 93, 122, 125, 132, 169, 180, 282, 292, 324, 351–353, 352, 452, 523, 528 y teorema
del binomio 45 y descubrimiento de cálculo 57–58, 211, 227, 240, 272, 308–309, 352, 494 y fluxiones 198 y coordenadas polares 63, 400 y beso
tridimensional número 472
newton numero 472
Cociente de Newton 132, 360
Método de Newton 46, 249, 286, 353–354, 451
La tercera ley del movimiento de Newton 9
Un nuevo tratado de fluxiones (Simpson) 464
Neyman, Jerzy 354
simetría rotacional n-fold 490
n-gon 97, 402
Nicómaco de Gerasa 389
círculo de nueve puntos
354 nodo 148, 233, 493
Noether, Amalie (Emmy) 10, 354–355 n-
omino 406 no
contradicción, ley de 304 “Juegos no cooperativos” (Nash) 347
cuádricas no degeneradas 411
tiempo polinomial no determinista 357
conjunto no vacío 162
geometría no euclidiana 159, 171, 227, 255, 314, 355–356, 377, 473–474 descubrimiento de 46, 318, 455 vs. geometría euclidiana 294 no medible

conjuntos 24 no negativos
408 no positivos 408
decimales no
periódicos 441 solución no trivial
514 teoría de juegos de
suma distinta de cero 347 distribución
normal 69–70, 72, 122, 143, 356, 356–357, 414, 482, 483, 486 normal a
una curva 357
normal a un plano 357
normal a una superficie 357
“Nota sobre la aplicación de Maquinaria a la Cálculo de astronómico y tablas matematicas” (Babbage) 32-33
“Note sur une équation aux difference finie” (catalán) 64

Notions sur la machine analytique de Charles Babbage (Menabrea) 322 Nova
methodus pro maximis et minimis (Leibniz) 309 Nova stereometria doliorum (Kepler) 292–293 Novum Organum (Bacon)
452 NP completa 88, 357–358 n-
poliomino 406 n- espacio. Véase
espacio euclidiano
grupo diédrico n- ésimo 242 grupo
lineal general de orden n
(GLn) 222–223 raíz de orden n 451

Machine Translated by Google

grupo simétrico de n-ésimo orden 490
raíz n-ésima 112
raíz n-ésima de la unidad 358 prueba del término
n-ésimo 103 n-
tupla 358 ángulo
nulo 14 conjunto nulo. Véase conjunto vacío
número 358–359 máquina de
base numérica 30 recta numérica
359, 441, 442 rompecabezas de
nombres de números 54–55
sistemas numéricos 358–359 teoría de números 82, 139–140, 159, 167, 191, 337–338, 359
–360, 429–430 numerable. Véase
numerador
numerable 204 diferenciación
numérica 360 integración numérica 360–361

O

obelus (%) 146
esferoide achatado 154, 362
oblicuo 362
ángulo oblicuo 362
cono oblicuo 362
cilindro oblicuo 115
pirámide oblicua 423
ángulo obtuso 14, 362
triángulo obtuso 362, 506
anverso 362
octaedro 396 , 397
octante 363
octoniones 359, 432
funciones impares 177, 490
números impares 177–178
probabilidades (probabilidad) 363, 439
Oeuvres completes d'Augustin Cauchy 67
Obras de Camille Jordan 288
problema de oficial 302–303
Omar Khayyám (Umar al Kha¯yyamı¯) 18, 227, 363–364
“Sobre una curiosa propiedad de Fracciones vulgares” (Farey) 188
“Sobre un nuevo método en Teoría elemental de números” (Erdös) 167
Sobre los espejos ardientes (Diocles) 136
Sobre conoides y esferoides (Arquímedes) 18
Sobre las Divisiones (Euclides) 169 Función “uno a uno” 209
Sobre cuerpos flotantes (Arquímedes) 18–19
Sobre el razonamiento en un juego de dados (Huygens) 180
Sobre espirales (Arquímedes) 474
sobre la economía de Maquinaria y Manufacturas (Babbage) 33
“Sobre el problema de los más Pruebas Eficientes de Estadística Hipótesis” (Neyman) 354
“Sobre la propagación del calor en los cuerpos sólidos” (Fourier) 201
Sobre la esfera y el cilindro (Arquímedes) 18, 173
“Sobre la teoría de los grupos Dependiendo de la simbólica Ecuación θ n = 1” (Cayley) 68
función “sobre” 208
semiplano abierto 243–244
semiespacio abierto 243–244
intervalo abierto 278
operación 364
precedencia operativa. Ver orden de operación
investigación de operaciones (OR) 33, 364
opuestos 364
ángulos opuestos 364
sólidos opuestamente congruentes 92
Optica promota (J. Gregory) 240
Óptica (Euclides) 169
Óptica (Ptolomeo) 422
óptica, Newton y 353 Optiks
(Newton) 353 optimización
133, 161, 285, 316, 364, 364–365 e historia del cálculo 57 y triángulos inscritos 387 y ley de refracción de Snell 468 Steiner y 484–485 von Neumann y 350 OR. Ver órbita de investigación de operaciones (secuencia de
iteraciones) orden 150. Ver orden de permutación, de poliomino 406
partición ordenada 380–381
conjunto ordenado 365–366, 367,

530
orden de una matriz (dimensión de una matriz) 258, 366 orden
de grupo 366 orden de
magnitud 329 orden de
operación (precedencia operativa) 366–367 propiedades
de orden 267, 367 números ordinales 367–368 ordenada 62

Oresme, Nicole 63, 208, 234, 368
orientación 369
origami 513
origen 105, 359
ortant 363
triángulo órtico 387
ortocentro 12, 354, 387, 507 ortogonal
369, 391 ortogonal. Ver
coordenadas cartesianas regla 369 de Osborne
osculación (tacnodo) 148
osculinflexión 492, 493
Oughtred, William 344, 369–370, 370, 466 valor
atípico 370
óvalo 370
óvalos de Cassini 370
Ozanam, Jacques 449

PAG

esferas de embalaje 472
rueda de paletas 174
Paganini, Nicolò 13
disjuntos por pares (independientes, mutuamente excluyentes) 371
Pappus 13, 57, 239, 253, 371–372, 470
El problema de Pappus 372
Teoremas de Pappus 372–373, 470, 471 y toro 500 parábola 92–
93, 93, 137, 155, 189, 239, 373, 373, 429 como trayectoria 213, 503

cilindro parabólico 411
paraboloide 101, 235, 373–374
paradoja 374–375, 412, 532 y matemáticas puras 422–423
“Paradoxien des Unendlichen” (Bolzano) 47
paralelo 375–376, 376, 377
paralelepípedo (paralelepípedo) 376
y triple producto escalar de tres vectores 512
paralelogramo 376, 430, 474 área de 23, 23 producto cruzado (vector) como 110 ley del
paralelogramo (regla del paralelogramo) 376, 376–377
paralelotopo 376
postulado paralelo (quinto postulado de Euclides) 159, 227, 239, 255, 375, 377, 377–378, 378, 473 y alturas del triángulo 12–13

y ángulos del triángulo 505
recíprocos del teorema del ángulo exterior 183 y Euclides vs. no Geometría euclidiana 170–171, 318, 355–356
Omar Kayyám y 18, 364

proyección paralela 418
ecuaciones paramétricas (ecuaciones de libertad) 164, 378, 386 y longitud de arco de curva 22 de cardioide 62 de
círculo 75, 95
de hélices 95 de
banda de Möbius 340 de
toro 500 de
círculo unitario 517
paréntesis 50–51, 519 paridad
378–379
Parménides 532
Parménides (Platón) 532
derivada parcial 138, 233, 239, 259, 379
ecuaciones diferenciales parciales, d'Alembert y 8–9
fracciones parciales 162, 379–380
conjunto parcialmente ordenado 365–366 suma parcial 102, 380, 459 y límite 312
partición 358, 380–381, 436 función de partición 381
Pascal, Blaise 74, 189, 381–382, 382, 383 sobre la cicloide 310 y la historia del cálculo 57 y el teorema de Pappus 372–373 y teoría de la probabilidad 413, 414, 417
Distribución de Pascal 44
Triángulo de Pascal 45, 65, 195, 196, 382–385, 384, 497 y combinación 80–81 funciones
patológicas 529
Camino al conocimiento (Recorde) 443
matriz de pagos 217
Peano, Giuseppe 265, 385
Curva de Peano 385, 385–386
Postulados de Peano 31, 265, 271, 385, 386
Pearson, ES 354
Pearson, Karl 106, 107, 215–216, 386, 386–387, 415

multiplicación campesina. Véase el círculo de pedal de
multiplicación ruso, del triángulo
387 triángulo de pedal
387 Pell, John
54 Ecuación de Pell
54 truco para girar el lápiz 505–506, 506
péndulos 114–115, 213
Penny Cyclopedia 122
pentágono 285
pentagrama (pentáculo, pentalpha, pentangle) 230, 387–388, 388, 424 porcentaje
388 porcentaje de
error 388–389 percentil (centil, cuartil) 389

número perfecto 18, 174, 338, 389, 423–424 perigon
(ángulo redondo) 14, 362, 390 perímetro
390, 403, 443 período
duplicación 151

Machine Translated by Google

función periódica 390
peripatética 27
ángulo periférico 77, 77
permillaje 388
permutación 82, 127, 186, 209, 390–391, 490 grupo
de permutación 68
perpendicular 369, 391, 468
bisectriz perpendicular 46, 174–175, 338, 391, 507
perspectiva 149–150, 391–392, 419 peta-
(1015) 465 Phaedo
(Platón) 396 filotaxis
193 Física
(Aristóteles) 532 física,
aristotélica 27 pi (π) 55, 392–394 aproximaciones de
20, 28–29, 291 , 537
irracional 283, 300, 477 no construible 97
trascendental 11, 301, 313–314, 393, 477 Piazzi, Giuseppe 219 pico-
(10-12) 465 gráfico
circular (gráfico) 479, 479 principio del casillero 394–395 Pitiscus, Bartholomaeus 511
pivotante. Ver sistema de valor
posicional de eliminación gaussiana 6, 51, 155, 192, 251, 359, 487 curva plana 114 gráfica plana
233 Planck, Max 158
plano 80, 315, 395
geometría plana 170
Lugar geométrico plano
(Apolonio) 189 Platón
166, 238 , 395–396, 397, 498, 532 Sólidos platónicos 159, 232, 238, 291–292, 395, 396, 396–398, 404, 424
Platonicus (Eratóstenes) 166 Playfair, John 171, 227, 355, 376, 377 Reproducir de
feria axioma 46, 171, 227, 355, 376, 377 gráfico
398 Plouffe, Simon 183 más 398
símbolo más/
menos 398
signo más 398, 486
Pneumatica
(Heron) 248–249 Poincaré, Jules Henri 255, 314, 398–399 , 500 , 530 Disco de
Poincaré 255 Conjetura de Poincaré 399 punto 399
punto de contacto
(punto de tangencia) 399 punto de inflexión.
Ver punto de inflexión forma punto-
pendiente, de la ecuación de la recta 164
Poisson, Siméon-Denis 44, 71, 399–400, 414–415
Distribución de veneno 44, 399–400
gráfico de coordenadas polares
235 coordenadas polares 22, 39, 63, 400, 400–401, 504
de cardioide 62
de números complejos 86, 86
de espiral logarítmica 474 de rosa 451
forma polar 176
Polignac, Alfonso de 107
Pólya, George 401–402
polychoron 403
polígono 119, 149, 402–403, 403
área de 23, 24
circunferencia de 78
convexidad de 88
ángulos exteriores de 182 y mosaico 496–497 problema
de división de polígonos 64 ángulo
poliédrico 469 poliedro 88, 128–129, 176–177, 185, 236, 403–404 polinomio 404–405
ecuaciones polinomiales
163, 215
polinomio tiempo 405
poliomino 405–406, 406 politopo
403
Poncelet, Jean Victor 419
población y muestra 406–407
media de población 483
modelo de población 182, 407–408
vector de posición 395, 408
positivo 408
orientado positivamente 369, 448
sesgado positivamente 465, 480, 480
pendiente positiva 467
problema del sello postal 446
postulado (axioma) 31, 170, 409
potencial 239
potencia serie 121, 324, 399, 409, 495, 530
Problemas P frente a problemas NP 357–358 Practica geometriae (Fibonacci) 511
precisión 66–67, 409, 529–530
“Ensayo preliminar y elemental sobre el álgebra como ciencia del tiempo puro”
(Hamilton) 245
premisa 409
datos primarios 116
prima 409–410, 461
factorización prima 187
números primos 186, 389
y la conjetura de Bertrand 71, 167
frente a los números compuestos 87 y la factorización 186–187 y
el teorema fundamental de la aritmética 83, 186–187 la
infinitud de 171–172 el
trabajo de Mersenne sobre el
338 el teorema de los números primos 71, 219, 410, 410–411, 447 , 535 pruebas de 167, 243, 518
ejes principales 411
Principia (Newton) 293, 351–353, 352 Principia
Mathematica
(Russell y Whitehead) 453, 530
Principios filosóficos
(Descartes) 125
El principio de la relatividad
(cabeza blanca) 530
Los principios de la empírica
Lógica (Venn) 524
Principios de Matemáticas
(Russell) 453
Principios del Arte de
Pesaje (Stevin) 485
Analítica anterior y posterior
(Aristóteles) 27
prisma 403, 411–412
prismatoide 412
prismoide 412
dilema del prisionero 218, 412, 412–413
probabilidad 122, 143, 189, 243, 262–263, 413–418 y funciones armónicas 246
El trabajo de Kolmogorov en 296
Método de Montecarlo 342–343
Problema de Monty Hall 343 y
eventos mutuamente excluyentes
344 probabilidades y 363
Pascual y 382
y permutaciones 391
Veneno y 399-400
Quételet y 432–433 y paseos aleatorios 437
y teoría de conjuntos 178
y rompecabezas de dos cartas
515 función de densidad de probabilidad 143
modelos de probabilidad 416
árbol de probabilidad 415–416, 416
procedimiento. Ver algoritmo
Proclus 171, 239, 497
producto de matriz 330
producto regla 133, 273, 309, 418, 433–434 conjunto
de productos. Ver producto cartesiano
progresión. Ver secuencia armónica
vector proyectado 418–419
proyección 337, 391–392, 418–419
geometría proyectiva 123–124, 270, 339, 372, 382, 409, 418, 419
esferoide
alargado 362 prueba 420
prueba por
contradicción. Ver pruebas indirectas,
defectuosas que 0 = 1 29 que 1 =
2 4, 248, 337 que 1 es el entero más grande 284
que todos los caballos son del mismo color 266–267 que la luna está hecha de queso 90
factor propio 186
fracción propia 205
divergente propiamente
dicho 144 vector propio. Véase
proporción de vector propio 149, 230–232, 370 proporcional 420–421, 439 proposición 421
Protágoras 374
prueba de la serie p
104 números pseudoprimos 410
pseudoesfera 300
Ptolomeo 239, 253, 392, 421, 421–422 , 510
Teorema de Ptolomeo 52, 422, 422
criptografía de clave pública 111
matemáticas puras 159, 168, 422–423 puro
sordo 490
pirámide 403, 423
tronco piramidal 207
Pitágoras 9, 57, 172, 230, 238, 387, 396, 423, 423–424, 425
Teorema de Pitágoras 159, 165–166, 208, 226, 238, 256, 314, 424, 424–426, 425, 506 en matemáticas
babilónicas 34–35 en matemáticas chinas
73 inversa de 506, 506–507 y
fórmula de distancia 141 y ley de cosenos 303 y coordenadas polares 400 y ternas
pitagóricas 426
teselado y 474, 475, 497 y
vectores 520
La Proposición de Pitágoras (Loomis) 425
Triples pitagóricos 99, 137, 162–163, 190, 226, 360, 422, 426–427

Machine Translated by Google

Q

QED 159, 428
QEF/QEI 428 QI.
Ver índice Quételet Qin
Jiushao. Ver Ch'in Chiu shao

cuadrilátero. Ver cuadrilátero
cuadrante 363, 428
cuadrático 428–430
curva cuadrática 430
ecuaciones cuadráticas 163, 373, 443
forma cuadrática 430
fórmula cuadrática 84, 200, 451
cuadratura del círculo. Ver cuadratura del círculo
Cuadratura de la parábola (Arquímedes) 18
cuadrilátero 88, 376, 430, 430
cuádruple (4-tupla) 358
cuantificador 199, 430–431
cuántica (quanta) 158
mecánica cuántica 159
ecuación cuartica 59–60, 84, 190–191, 431–432 cuartil.
Ver cuaterniones percentiles
241, 244–245, 359, 432 Quételet, Lambert
Adolphe Jacques 415, 432–433
Índice de Quételet (QI) 433
quintaesencia 397 ecuación
quíntica 3 quipu 260
cociente 85, 146, 204,
433 regla del
cociente 133, 433– 434

R

radián 14, 115, 465, 477 medida
en radianes 473, 509 signo
radical 475 radio 76
teorema de
la cuerda del radio 78, 78 radio de
convergencia 495 raíz 36–38
Rahn, Johann
Heinrich 146 Ramanujan, Srinivasa
246, 381, 435–436, 477
aleatoriedad 41 números
aleatorios 436–437
muestreo aleatorio 407 recorrido
aleatorio 246, 437 rango.
Ver imagen rango 437–438
rango correlación
438–439
ranunculoide 115 razón 146,
420, 439 función
racional (expresión) 439–
440

racionalizando el denominador 85, 440, 442, 490
números racionales (Q) 106, 129, 358, 440–441, 443
vs. números algebraicos 11
definibles como razón 439
y definición de número
real 441–442
numerabilidad de 123
discreción de 140
prueba de razón 103, 182, 439 teorema de razón
439 datos brutos
116 rayo (media línea)
441 “variedades algebraicas reales” (Nash) 347
línea real. Ver recta numérica
números reales (R) 106, 129–130, 358, 441–442 y corte de Dedekind
119–120
y Euclid 172
no numerabilidad del receptor
123 501–502
“Recherches sur diversos
application de l'analyse infinitésimale à la théorie des
nombres” (Dirichlet) 140
recíproco 442
ecuación recíproca 442
Recorde, Robert 162, 442–443
rectángulo 185, 376, 443, 474 área de 23, 23 vs.
trapezoide 504
rectangular (cartesiano) coordenadas 62–63, 105
relación de recurrencia (relación recursiva, fórmula de reducción) 443, 458
definición recursiva (definición inductiva, recursividad) 444
forma reducida (términos más bajos) 444
reducción al absurdo. Ver
fórmula de
reducción de prueba
indirecta. Ver relación
de recurrencia ángulo de
reentrada 276 reflexión 198, 206, 283–284, 490
en un círculo 225
e isometría 212 en una línea 224–225 en
un punto 225
propiedad de reflexión
de la elipse 365
de la parábola 373, 373
ángulo reflejo 14, 362
“Réflexions sur la cause
générale des vents” (d'Alembert)
8 reflexividad 365
Regiomontanus 444–445, 511
regresión 107, 445 línea
de regresión 306
polígono regular 164, 166, 402
poliedro regular. Ver teselado regular sólido
platónico 496 “Rein Analytischer Beweis” (Bolzano) 47
Reinhardt, Karl 497
Relación de las cosas de Yucatán (Landa) 332
relación 445 complemento
relativo 131 error relativo 445
frecuencia relativa
206 primo relativo 139, 172, 174, 446 máximo/mínimo relativo

330–331, 331
resto 433 teorema
del resto 187, 446 discontinuidad
removible 440 decimales periódicos
440–441, 526
movimiento retrógrado 173
triángulo de Reuleaux 95
función inversa. ver inversa
función
distribución inversa en forma de J 480, 480
Rhaeticus, Georg Joaquín 511

Rhind, Alexander Henry 446 Papiro de Rhind 9, 155–156, 392, 446–447, 476, 510 romboide 376
rombo (rombo)
376, 474 Richter, Charles 321
Escala de Richter 321
Riemann, Georg
Friedrich 58, 227, 270, 272, 355, 447–448, 473–474, 485, 535
Hipótesis de Riemann 243, 246,
250, 447 Geometría de Riemann. Ver geometría
esférica Integral de Riemann 58, 447 Esfera de Riemann
485 Función zeta de Riemann.
Ver función zeta ángulo
recto 14, 226, 448 cono circular derecho 473
cilindro derecho 115 derivada
derecha 307–308 sistema
diestro 369, 448 regla
de la mano derecha 110
identidad derecha 257 derecha/
izquierda, límite de la
313 pirámide derecha
423 cuadrangular derecha prisma
411

triángulo esférico rectángulo 474
triángulo rectángulo
506 principio del triángulo rectángulo. Véase el
teorema de Pitágoras anillo
5, 144, 252, 271, 354–
355, 448–449 Ringel,
Gerhard 200 subida sobre carrera (pendiente) 467
Ritoré, Manuel 469
Rivest, Ron 111
Roberval, Gilles Personne de 57
Rolle, Michel 449
Teorema de Rolle 184, 335, 449–450
Números romanos 155, 192, 251, 450–451 raíz
(cero) 451, 534 prueba
de raíz 103–104 Ros,
Antonio 469 rosa 451
rotación
206, 225, 278, 283 –284, 317, 490 ángulo redondo.
Ver redondeo de perigon 451–
452 error de redondeo
(redondeo) 452

torneo de todos contra todos. Ver torneo
Real Sociedad de Londres 452
Método de encriptación RSA 111
Problema de banda elástica 247–248
geometría de hoja de caucho. Ver
topología Rudolff, Christoff
475 Ruffini, Paolo 10, 72, 431
rule, 68-95-99.7 356
Russell, Bertrand Arthur William 199, 229, 452, 452–453 , 460–461, 530, 533 Paradoja
de Russell (antinomia) 200 , 374, 453–454, 460–461 Multiplicación
rusa (multiplicación campesina) 43, 156, 454, 454

S

Saccheri, Girolamo 171, 227, 455
punto silla 217, 492 saliente
276 ángulo
interior/exterior del mismo lado
504 muestra
143 media
muestral 333 espacio
muestral 178, 413, 417, 455
The Sand Reckoning (Arquímedes) 19
resultado sándwich. Ver regla de compresión
Regla SAS (lado-ángulo-lado) 1–2, 463, 506
Escalar 456
multiplicación escalar 329, 520
producto escalar. Ver producto
punto producto escalar triple
512 escala 36–38,
456 factor de escala
463 escaleno
506 dispersión 481

Machine Translated by Google

diagrama de dispersión (diagrama de dispersión, gráfico de Galton) 106, 456–457 Schickard, Wilhelm 382 Schnirelmann, L. 230 schubfachprinzip. Véase el principio del casillero Schwarz, Hermann 469 notación científica 125, 168, 457
hélice de tornillo 174
secante 457, 493, 510
teorema de la secante 1, 457, 457
segundo (medida del ángulo) 14
datos secundarios 116
prueba de la segunda derivada 332 bisectriz del segmento 46 Segner, JA 64
selección. Ver combinación
autorreferencia 244, 457–458
cuadrado semimágico 327, 458
semieje mayor 161
semieje menor 161
poliedro semirregular 404 teselado semirregular 496 secuencia (progresión) 458–459

secuencia (conjunto totalmente ordenado, cadena) 365–366 serie 459–460, 488 conjunto complemento 460 conjunto producto directo. Ver Intersección de conjuntos de productos cartesianos 460
Operaciones de conjuntos 524
Teoría de conjuntos 144, 422–423, 460–461 y axioma de elección 31 como álgebra booleana 49 y leyes de De Morgan 123 diferencia en 131 y probabilidad 178 y paradoja de Russell 453–454 von Neumann y 350 el intento de Zermelo de axiomatizar 534 paradojas de la teoría de conjuntos 530 unión de conjuntos 460
siete puentes del problema de Königsberg 235, 235, 500
números sexagesimales 33–34
sombras 149
Shamir, Adi 111
Shanks, William 392, 461
Shannon, Claude Elwood 271, 461–462 radio corto. Ver apotema Shushu jiuzhang (Ch'in) 72 Método siamés 327 Sicherman, Col.
George 462 Dados de Sicherman 462, 462 Sidereus nuncius (Galileo) 213 Sierpinski, Vaclav 203
Triángulo de Sierpinski 203–204, 204
tamiz de Eratóstenes 410, 462–463
notación sigma 459, 488 sigma al cuadrado 481 número con signo. Ver números enteros
significativos 168, 409 figuras similares 456, 463 triángulos similares 1–2 fracción simple 205 interés simple 275 raíz simple 451
simplificación, por cancelación 56
Simpson, Tomás 463–464
Regla de Simpson 361, 464
ecuaciones lineales simultáneas 219–220, 234, 282, 315, 464, 486, 491 y determinante de matriz 126–128 resuelto por la regla de Cramer 108–109, 128 función seno 291, 509, 510–511 , 511 historia de 28–29, 51, 444–445

regla del seno. Ver ley de los senos
cúspide única 492, 493
singularidad 464
punto singular 464
sumidero 501–502 Sirotta, Milton 232
Unidades SI 464–465
68-95-99.7 regla 356
Siyuan Yujian (Chu Shih Chieh) 383
curva oblicua 114
líneas oblicuas 465 asimetría 465 Skolem, Thoralf 5 34
rompecabezas de la diapositiva 15
(rompecabezas del jefe, rompecabezas de los quince) 391, 465–466, 466 regla de cálculo 369–370, 466 pendiente (pendiente, gradiente) 132, 466–468, 467 forma pendiente-intersección 164 superficie lisa vs. no lisa 357 Snell, Willebrord van Roijen 468–469 Ley de refracción de Snell 365, 468, 468–469
pompas de jabón 469, 472 Sócrates 374
sistema solar, estabilidad matemática de 296
ángulo sólido 15, 469
geometría sólida 170
sólido de revolución 57, 372, 382, 469–470, 500 solución por radicales 3, 215, 470–471

cubo soma 218
“Algunas propiedades de Los números de Bernoulli” (Ramanujan) 435
fuente 501–502
curva de llenado de espacio 385
Spearman, Charles 438
Coeficiente de Spearman 438–439
Método de Spearman 438
Teoría especial de la relatividad 158
Gravedad específica 18 Velocidad frente a velocidad 519 Sphaerica (Menelaus) 336 Esfera 76, 136, 166, 471–472 Conexión de 94
Diámetro de 130
Mapa de cuatro colores en 200-201
círculo máximo como “recto” 314
volumen de, vs. cilindro 20, 91, 115
empaquetamiento de esferas 292, 472 coordenadas esféricas 472–473, 504 exceso esférico 474 geometría esférica 225–226, 227, 270, 323, 355–356, 472, 473–474 hélice esférica 248 segmento esférico 472 triángulo esférico 472, 474 esferoide 161
espiral de Arquímedes 372, 474, 476
espirales en la naturaleza 193 juego de división 279, 279 cuadrado 430, 474–475 corchetes 50–51 matriz cuadrada 329 modelo cuadrado 416, 416–417 números cuadrados 194, 194–195 pirámide cuadrada 423 raíz cuadrada 157, 249, 451, 475–476, 486
cuadratura del círculo (cuadratura del círculo, cuadratura del círculo) 97, 238–239, 251–252, 313–314, 393, 476–477
regla de compresión (resultado sándwich) 16, 321, 477, 477–478, 526
SSS (lado-lado-lado) regla 1–2, 463
Stäckel, Paul 515
paradoja del estadio 533
problema de subir escaleras 65
desviación estándar 44, 386, 481–482 vs. media y puntuación z 537
forma estándar. ver científico notación
Métodos estadísticos para Research Workers (Fisher) 197, 415
estadística 414, 437, 478
descriptiva 116, 478–482
inferencial 143, 268, 354, 478, 482–484
Bayes y 38–39 y teorema del límite central 69–70
Steiner, Jakob 284, 484 Punto de Steiner 484–485
Superficie de Steiner 484 Poliedro estrellado 404
Diagrama de tallo y hojas 479, 479
Estereorradián 15, 465, 469
Proyección estereográfica 485
Stevin, Simon 485–486 Stifel, Michael 180, 348–349 Stirling fórmula 122, 486 ángulo recto 14, 362
regla y compás 95 muestreo estratificado 407 estrictamente creciente/decreciente 261–262 Distribución t de Student 484
Prueba t de Student 415, 484 subfactorial 486 sustitución 486–487, 491
regla de sustitución para integración. Véase integración: por sustitución resta 146, 205, 487 sustraendo 487 duplicación
sucesiva 156 Sulbasutram 425
suma (Σ) 173, 487–488 suma, índice de 148
problema de suma 65
sumas de potencias 51, 488, 488–490 ángulos suplementarios 14
surd 490 función sobreyectiva
208 “Sur la décomposition des ensembles de points en partens respectment

congruent” (Banach, Tarski) 35 Sur l'homme et le development de ses facultés, essai d'une physique sociale (Quételet) 432–433 “Sur l'intégration des las funciones se interrumpen” (Lebesgue) 307 Su-yuan yu-chien (Chu Shih Chieh) 73–74, 75 silogismo 27 lógica simbólica. Véase lógica formal Lógica simbólica (Venn) 524 diferencia simétrica 131 simetría 206–207, 490 Sinagoga (Pappus) 239, 371–372 Sinopsis de resultados elementales en matemáticas puras (Carr) 435 Sinopsis palmariorum matheseos (Jones) 393 Sintaxis matemática (Ptolomeo) 421–422 muestreo sistemático 407 sistema de ecuaciones 121, 491 “Sistemas de rectas en un plano” (Hamilton) 245

Machine Translated by Google

T

Tabulae (Regiomontanus) 444 tacnodo
(osculación) 148 tacpoint 493
Tait, Peter 295
punto de tangencia.
Ver punto de contacto
tangente (geométrica) 492, 493
tangente (trigonométrica) 132, 492, 510 plano
tangente 492 teoremas
de la tangente 76–77, 77
Tarski, Alfredo 24, 35
Tartaglia, Nicolás 10, 60, 112, 190–191, 493, 493–494
diagrama de tareas
109 propiedad tautocrona de los péndulos 114–115, 299
tautología 494, 515
Taylor, arroyo 240, 274, 324, 325, 494, 495
Taylor, Ricardo 190, 531
Serie de Taylor 152, 182, 240–241, 268, 271, 315, 324–325, 337, 409, 494–496 y
aproximación 16 convergencia de 45
El trabajo de Chebyshev sobre 71 y la fórmula de Euler 175
y teorema general del binomio 45 e
historia del cálculo 57 y
permutaciones 391 de la función seno 536
Chebyshev. Ver técnica de
Chebyshev. Ver algoritmo
tensor 447, 496 El
Décimo (Stevin) 485 tera-
(1012) 465
teselación (revestimiento, mosaico) 403, 430, 475, 496–497, 497, 507
teseracto 256
"La prueba de hipótesis estadísticas en relación con las probabilidades A a priori"
(Neyman) 354
tetrágono. Ver cuadrilátero
tetraédrico dados 462
números tetraédricos 195, 497
tetraedro 165, 396, 397, 403, 423, 497
tetromino 406
Álgebra teutsche (Rahn) 146
Thabit ibn Qurra 18
Tales 238, 423, 497–498, 510
Teeteto (Platón) 498
La gramática de la ciencia (Pearson) 387
Teodoro 82, 283, 475–476, 498
Teón de Alejandría 252–253
Teorema de Teón de
Esmirna 99 (proposición) 498–499
teorema de Tales 77
Teoremas establecidos por Ramanujan (Watson) 436
Theoria motus corporum coelestium (Gauss) 219
Teoría analítica de la chaleur (Fourier) 201
Théorie analytique des probabilités (Laplace) 301, 415
Theorie der Parallellinien (Lamberto) 300
"Teoría de las operaciones lineales" (Banach) 35
La teoría de los juegos y Comportamiento económico (von Neumann y Morgenstern) 216, 350–351
La teoría de los números (Hardy y Wright) 246
"Teoría de Sistemas de Rayos" (Hamilton) 245
problema de tres cuerpos 299
coordenadas tridimensionales 63, 363
vectores tridimensionales 520 simetría
rotacional triple 490
problema de tres utilidades 233, 499, 499
mosaico. Véase teselado
Timaeus (Platón) 396, 397
tiempo, como cuarta dimensión 136, 256
gráfico de serie temporal 479,
479 espacio topológico 500
topología 121, 307, 339, 499–500
Torricelli, Evangelista 114 toro
94, 399, 470, 500– 501, 501
Fórmula de Euler para 236
Teorema de Euler y 177 y
teorema de la curva de Jordan 76, 288
y problema de tres utilidades 499
conjunto totalmente ordenado 365–366 torneo (torneo de todos contra todos, dígrafo completo) 501 , 501–502
torres de Hanoi (Brahma) 443, 502–503 tractrix
(curva equitangencial, tractory) 503
Traité analytique des secciones coniques (L'Hôpital) 310
Traité d'algebre (Rolle) 449
Traité de dynamique (d'Alembert) 8
Traité de la résolution des ecuaciones numéricas de todos los grados (Lagrange) 299
Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides (d'Alembert) 8
Traité de mécanique céleste (Laplace) 301
Traité des propriétés des figures (Poncelet) 419
Traité des sustituciones et des ecuaciones algebraicas (Jordania) 288
trayectoria 503
curva trascendental 114
números trascendentales 11, 59, 297, 301, 317–318, 477
números transfinitos 368
transformación 503–504 ley transitiva 367
razonamiento transitivo 26
traslación 206, 225, 283–284
transmisor 501–502
transposición de matriz 330
transposición 390
transversal 336, 375, 377, 504, 504
trapezoide (trapezium) 23 , 24 , 430 , 504 regla
trapezoidal para integración 360–361 problema
del viajante de comercio 55, 505 poligonal
504, 504
Tratado de fluxiones (Maclaurin) 324
Tratado de álgebra (Maclaurin) 324
Tratado de álgebra (Wallis) 529
Tratado sobre la demostración de problemas de álgebra (Omar Khayyám) 363
Tratado sobre las proporciones humanas (Dürer) 231 Tratado sobre la cuerda y el seno (al-Kashi) 291 Tratado sobre el equilibrio de los líquidos (Pascal) 382 Tratado sobre el álgebra universal (Whitehead) 530
árbol (teoría de grafos) 233
triángulo (trigón) 114, 505–508 área de 23, 23, 249 diámetro de 130 recta de Euler en 174–175 ángulos exteriores de 182–183 triángulo
desigualdad 267, 425, 506, 508 números
triangulares 194 , 194–195, 349, 405, 497 ley de tricotomía
31, 365, 367 trigon. Véase triángulo
Trigonometria (Pitiscus) 511 funciones trigonométricas 254, 369
trigonometría 16, 28, 239, 444–445, 508–512, 516–517
Trigonometría (Simpson) 463
Trigonometría y Doble Álgebra (De Morgan) 122 trinomio 512
Le triparty en la science des nombres (Chuquet) 526 triple
(3-tupla) 358 integral
triple 148 toro triple
501 producto
vectorial triple 376, 448, 512 triángulo
trirectangular 474 trisecando un ángulo 97, 239, 291, 372, 512, 512–513, 525
Tristram Shandy paradoja 269, 513 trivial
183, 514 anillo
trivial 449 solución
trivial 513–514 tromino 406
truncamiento
452 tabla de verdad
25, 514, 514–515, 515
para bicondicionales 42
para conjunción 94 para
contrapositivos 101–102 para
disyunción 141 para
hipotéticos 90, 90 para
negación 348 Tsu
Chung Chi. Ver Zu Chongzhi
Turing,
Alan 244 punto de
inflexión 515 primos
gemelos 410, 515 curva torcida 114
rompecabezas de dos cartas
91, 515 teorema de dos cuerdas
78, 78 vectores bidimensionales 520
teorema de dos panqueques 245, 277
forma de dos puntos 164
dos -teorema de la secante 457, 457
tipo, en teoría de conjuntos 454

U

"Über die Addition transfiniter Cardinalzahlen" (Zermelo) 533–534 "Über
die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Riemann) 227 "Über die Stabilität des Gleichgewichts" (Dirichlet) 140
Über die Zahl (Lindemann) 314
"Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" (Einstein) 158
Ulam, Stanislaw 15
operación unaria 364, 516
intervalo ilimitado 278
incertidumbre y error 167–168
fracción indefinida 205–206 prueba
inesperada (colgante) paradoja 374–375, 375

Machine Translated by Google

distribución uniforme 480, 480
movimiento uniforme
522 unión (operación fija) 144, 460
teorema de factorización única. Ver teorema fundamental de la aritmética
solución única 516
razón unitaria 439
círculo unitario 427, 516–517
regla del denominador unitario
204 fracción unitaria. Ver matriz
unitaria de fracciones egipcias.
Véase esfera de
unidad de matriz de
identidad 469 cálculo
universal 199 lenguaje universal
199 matemáticas universales 199

cuantificador universal ("para todos") 430–
431 desconocido (indeterminado, variable) 517 disposición desordenada. Ver combinación
partición no ordenada 381
integral sin restricciones. Ver integral impropia
"Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik" (Dirichlet) 140

valencia V. Ver grado de un vértice
Vallée-Poussin, Charles-Jean de la 411, 518
Varahamihira 264
variable 517, 518–519
varianza 106, 306, 481, 484
Variorum de rebus
responsorio matemático (Viete) 525
Veblen, Oswald 288
vector 14, 142, 147, 164, 310, 519–520 y
colinealidad 80
descomposición de 119
suma vectorial 376, 520
ecuación vectorial de la recta 520–
521 del plano 521
campo vectorial 101,
521 multiplicación vectorial 329, 520
operaciones vectoriales
520 producto vectorial. Véase
producto vectorial espacio vectorial 5, 71, 201, 243, 315, 520, 521–522 resta de
vectores 520 triple producto vectorial de tres vectores 512
velocidad 132, 408, 519, 522–523
Venn, John 523–524
Diagrama de Venn 123, 524, 524–525
Verhulst, Pierre-François 408
vértice 91, 233, 403, 505
ángulos verticales 364
cuerdas vibrantes 8, 299
viergruppe. Ver grupo de Klein-cuatro
Viète, François (Franciscus Vieta) 10, 113–114, 348–349, 511, 525
Fórmula de Viète (Vieta's fórmula) 231, 393, 511, 525–526
vinculum 81, 526
Vinogradoff, Ivan 230
Vlacq, Adriaan 54, 320
Voevodsky, Vladimir 194
volumen 526–527, 527 de
cono 91, 173, 293, 527 de
cubo 111 de
cilindro 115 , 156 de
tronco 207, 527 como
concepto mal definido 526 de
paralelepípedo 376 de
sólidos platónicos 397 de
prisma 412 de
pirámide 173, 293, 423 de
sólidos de igual altura 67–68 de
esfera 293 de
esfera vs. cilindro 20, 91, 115 de
tetraedro 497 von
Neumann, John 216, 218, 415, 436
Vorlesungen über Zahlentheorie (Dirichlet) 140

teoría del vórtice, la fracción vulgar
125 de Descartes 205

W

Waerden, Bartel Leendert van der 355 al-
Wafa, Abu 510
Wallace, William 165
paradoja de la billetera 375
Wallis, John 63, 180, 269, 370, 528, 528–529 y
números complejos 25
Producto de Wallis 269, 393, 486, 528, 529, 536
patrón de papel tapiz 207
Wantzel, Pierre Laurent 149, 513
Waring, Edward 229
deformación del espacio
447 Watson, George Neville 436
transitividad débil 365
Weaver, Warren 461
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm 5, 58, 284, 297, 312, 529–530
Desigualdad del producto de Weierstrass
268 Conjunto bien ordenado
530, 533 Wessel, Casper
25, 86 The Whetstone of Witte (Recorde)
443 Whitehead, Alfred North 199, 229, 452–454, 530
Whitworth, W. Allen 486
número entero 443, 530–531. Véase también número natural
Widman, Johannes 6, 131, 398, 487 Wiles,
Andrew John 190, 531

Teorema de Wilson 299
palabra (trenzas) 52
Wright, EM 246

Y

Yang Hui 325
año, longitud de 333, 363
Yi, Tien-Lien 71
yocto- (10-24) 465
Yorke, James 71
yotta- (1024) 465
Youngs, JWT 200

Z

Zadeh, Lofti 212
Zahlbericht (Hilberto) 250
Zenón 57, 238, 270, 532
Las paradojas de Zenón 269, 532–
533 zepto- (10-21) 465
Zermelo, Ernst Friedrich Fernando 31, 350, 461, 530, 533–534 cero
(cero) 5, 6, 41, 51, 332, 534–535
en álgebra booleana 49
como exponente 534 factorial de
534 en la recta numérica
359 como número frente a marcador
de posición 51, 293 y anillos 448
fracción cero 205 matriz cero 147, 534 cero de función.
Véase el juego de suma cero
raíz 217, 534 término cero, de la serie 223 función zeta 105, 174, 243, 246, 250, 393, 447–448, 489, 535–536 y pruebas de prima teorema del número 518
Zeteticorum libri quinque (Viète) 525
zetta- (1021) 465
Zhu Shijie. Ver Chu Shih Chieh
zona 472
puntuación z (valor z) 357, 483, 537
Zu Chongzhi (Tsu Chung Chi) 74, 392, 537
"Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Einstein) 158

Zur Theorie der Abelschen Función (Weierstrass) 529