

chapitre 3

CINEMATIQUE AVANT : LE DENAVIT-HARTENBERG CONVENTION

Dans ce chapitre, nous développons les équations cinématiques directes ou de configuration pour les robots rigides. Le problème de cinématique avant concerne la relation entre les articulations individuelles du robot manipulateur et la position et l'orientation de l'outil ou de l'effecteur terminal. Formulé plus formellement, le problème de cinématique avant consiste à déterminer la position et l'orientation de l'effecteur final, compte tenu des valeurs des variables articulaires du robot. Les variables articulaires sont les angles entre les liaisons dans le cas des liaisons rotoïdes ou rotatives, et l'extension des liaisons dans le cas des liaisons prismatiques ou coulissantes. Le problème de la cinématique directe doit être mis en contraste avec le problème de la cinématique inverse, qui sera étudié dans le chapitre suivant, et qui concerne la détermination des valeurs des variables articulaires qui permettent d'obtenir une position et une orientation souhaitées pour l'effecteur final du robot.

3.1 Chaînes cinématiques

Comme décrit au chapitre 1, un robot manipulateur est composé d'un ensemble de liaisons reliées entre elles par diverses articulations. Les articulations peuvent être soit très simples, comme une articulation rotoïde ou une articulation prismatique, soit plus complexes, comme une rotule. (Rappelez-vous qu'une articulation rotoïde est comme

72 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

une charnière et permet une rotation relative autour d'un seul axe, et une articulation prismatique permet un mouvement linéaire le long d'un seul axe, à savoir une extension ou une rétraction.) La différence entre les deux situations est que, dans le premier cas, l'articulation n'a que un seul degré de liberté de mouvement : l'angle de rotation dans le cas d'une articulation rotoïde et la quantité de déplacement linéaire dans le cas d'une articulation prismatique. En revanche, une articulation à rotule a deux degrés de liberté. Dans ce livre, il est supposé que toutes les articulations n'ont qu'un seul degré de liberté. Notez que l'hypothèse n'implique aucune perte réelle de généralité, puisque des articulations telles qu'une rotule (deux degrés de liberté) ou un poignet sphérique (trois degrés de liberté) peuvent toujours être considérées comme une succession de liaisons à un seul degré de liberté avec des liaisons de longueur nulle entre elles.

En supposant que chaque articulation a un seul degré de liberté, l'action de chaque articulation peut être décrite par un seul nombre réel : l'angle de rotation dans le cas d'une articulation rotoïde ou le déplacement dans le cas d'une articulation prismatique. L'objectif de l'analyse cinématique directe est de déterminer l'effet cumulé de l'ensemble des variables articulaires. Dans ce chapitre, nous allons développer un ensemble de conventions qui fournissent une procédure systématique pour effectuer cette analyse. Il est bien sûr possible d'effectuer une analyse cinématique directe même sans respecter ces conventions, comme nous l'avons fait pour l'exemple du manipulateur planaire à deux liens au chapitre 1. Cependant, l'analyse cinématique d'un manipulateur à n liens peut être extrêmement complexe et les conventions introduites ci-dessous simplifient considérablement l'analyse. De plus, ils donnent naissance à un langage universel avec lequel les robots ingénieurs peuvent communiquer.

Un robot manipulateur à n articulations aura $n + 1$ liens, puisque chaque articulation relie deux liens. On numérote les articulations de 1 à n , et on numérote les liens de 0 à n , en partant de la base. Par cette convention, l'articulation i relie le lien $i - 1$ au lien i . Nous considérerons que l'emplacement de l'articulation i est fixe par rapport au maillon $i - 1$. Lorsque l'articulation i est actionnée, le maillon i se déplace. Par conséquent, le maillon 0 (le premier maillon) est fixe et ne bouge pas lorsque les articulations sont actionnées. Bien sûr, le robot manipulateur pourrait lui-même être mobile (par exemple, il pourrait être monté sur une plate-forme mobile ou sur un véhicule autonome), mais nous ne traiterons pas ce cas dans le présent chapitre, car il peut être manipulé facilement en étendant légèrement les techniques présentés ici.

Avec le $i^{\text{ème}}$ joint, on associe une variable jointe, notée q_i . Dans le cas d'un joint rotoïde, q_i est l'angle de rotation, et dans le cas d'un

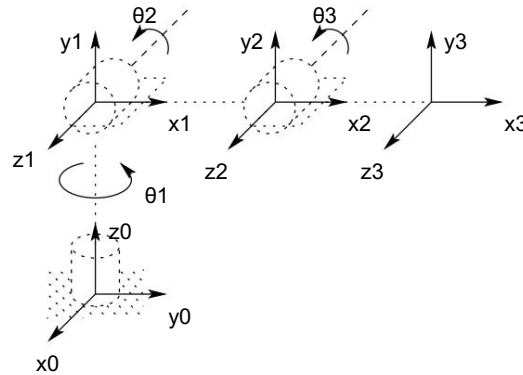


Figure 3.1 : Cadres de coordonnées attachés au manipulateur coudé.

articulation prismatique, q_i est le déplacement de l'articulation :

$$q_i = \begin{matrix} \theta_i : \text{articulation } i \text{ rotoïde} \\ d_i : \text{articulation } i \text{ prismatique} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Pour effectuer l'analyse cinématique, nous attachons de manière rigide un cadre de coordonnées à chaque lien. En particulier, nous attachons $o_i x_i y_i z_i$ au lien i . Cela signifie que, quel que soit le mouvement exécuté par le robot, les coordonnées de chaque point sur le lien i sont constantes lorsqu'elles sont exprimées dans le cadre de coordonnées i . De plus, lorsque l'articulation i est actionnée, le lien i et son cadre attaché, $o_i x_i y_i z_i$, subissent un mouvement résultant. Le cadre $o_0 x_0 y_0 z_0$, qui est fixé à la base du robot, est appelé cadre inertiel. La figure 3.1 illustre l'idée de fixer rigidement les cadres aux liens dans le cas d'un manipulateur coudé.

Supposons maintenant que A_i soit la matrice de transformation homogène qui exprime la position et l'orientation de $o_i x_i y_i z_i$ par rapport à $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$. La matrice A_i n'est pas constante, mais varie au fur et à mesure que la configuration du robot est modifiée. Cependant, l'hypothèse que toutes les articulations sont soit révolutées soit prismatiques signifie que A_i est une fonction d'une seule variable articulaire, à savoir q_i . Autrement dit,

$$A_i = A_i(q_i). \quad (3.2)$$

Or la matrice de transformation homogène qui exprime la position et l'orientation de $o_j x_j y_j z_j$ par rapport à $o_i x_i y_i z_i$ est appelée, par convention, une matrice de transformation, et est notée T_{ij} . Dès le chapitre 2, nous voyons que

$$J_j^* = A_{i+1} A_{i+2} \dots A_{j-1} A_j \text{ si } i < j$$

74 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

$$\begin{aligned} J_j^* &= j \text{ si } j = j \\ J_j^* &= (T_{j-1}^j)^{-1} \text{ si } j > i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Par la manière dont nous avons fixé rigidement les différents cadres aux liens correspondants, il s'ensuit que la position de tout point sur le l'effecteur terminal, lorsqu'il est exprimé dans le cadre n , est une constante indépendante de la paramétrage du robot. Dénoter la position et l'orientation de l'effecteur terminal par rapport au référentiel inertiel ou de base par un triple vecteur O_0^n (qui donne les coordonnées de l'origine du cadre effecteur avec par rapport au repère de base) et la matrice de rotation $3 \times 3 R_0^n$, et définir la matrice de transformation homogène

$$H = \begin{pmatrix} R_0^n & O_0^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Puis la position et l'orientation de l'effecteur dans le référentiel inertiel sont donnés par

$$H = T_n^0 = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n). \quad (3.5)$$

Chaque transformation homogène A_i est de la forme

$$A_i = \begin{pmatrix} R_{i-1}^i & O_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Ainsi

$$J_j^* = A_{i+1} \cdots A_j = \begin{pmatrix} R_{i+1}^j & O_{i+1}^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

La matrice R_{i+1}^j exprime l'orientation de o_{j+1}^j par rapport à o_{i+1}^i et est donné par les parties de rotation des matrices A comme

$$R_{i+1}^j = R_{j+1}^i \cdots R_{j+1}^{j-1}. \quad (3.8)$$

Les vecteurs de coordonnées O_j^i sont donnés récursivement par la formule

$$O_j^i = O_{j-1}^i + R_{j-1}^i O_{j-1}^{j-1}, \quad (3.9)$$

Ces expressions seront utiles au chapitre 5 lorsque nous étudierons les matrices jacobiniennes.

En principe, il n'y a que ça pour avancer la cinématique ! Déterminez les fonctions $A_i(q_i)$, et multipliez-les au besoin. Cependant, il est possible d'obtenir une rationalisation et une simplification considérables en introduire d'autres conventions, telles que la représentation de Denavit-Hartenberg d'une articulation, et c'est l'objectif du reste du chapitre.

3.2 Représentation de Denavit Hartenberg

S'il est possible de réaliser l'ensemble de l'analyse de ce chapitre en utilisant un cadre arbitraire attaché à chaque lien, il est utile d'être systématique dans le choix de ces cadres. Une convention couramment utilisée pour sélectionner des cadres de référence dans des applications robotiques est la convention Denavit-Hartenberg, ou DH. Dans cette convention, chaque transformation homogène A_i est représentée comme un produit de quatre transformations de base

$$A_i = R_z, \theta_i \text{ Trans}_z, d_i \text{ Trans}_x, a_i R_x, \alpha_i \quad (3.10)$$

$$= \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 & c\theta_i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_i & 0 & 1 & d_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & a_i & s\theta_i & s\theta_i & a_i c\theta_i & s\theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_i & a_i & -c\theta_i & s\theta_i & a_i s\theta_i & 0 & a_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s\theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les quatre grandeurs θ_i , d_i , a_i et α_i sont des paramètres associés au lien i et à l'articulation i . Les quatre paramètres a_i , α_i , d_i et θ_i dans (3.10) reçoivent généralement respectivement les noms de longueur de lien, de torsion de lien, de décalage de lien et d'angle d'articulation. Ces noms dérivent d'aspects spécifiques de la relation géométrique entre deux cadres de coordonnées, comme cela apparaîtra ci-dessous. Puisque la matrice A_i est une fonction d'une seule variable, il s'avère que trois des quatre quantités ci-dessus sont constantes pour un lien donné, tandis que le quatrième paramètre, θ_i pour une articulation rotoïde et d_i pour une articulation prismatique, est la variable conjointe.

D'après le chapitre 2, on peut voir qu'une matrice de transformation homogène arbitraire peut être caractérisée par six nombres, comme, par exemple, trois nombres pour spécifier la quatrième colonne de la matrice et trois angles d'Euler pour spécifier la matrice de rotation supérieure gauche 3×3 . Dans la représentation DH, en revanche, il n'y a que quatre paramètres. Comment est-ce possible? La réponse est que, alors que le cadre i doit être attaché de manière rigide au lien i , nous avons une liberté considérable dans le choix de l'origine et des axes de coordonnées du cadre. Par exemple, il n'est pas nécessaire que l'origine, O_i , de la trame i soit placée à l'extrémité physique du lien i . En fait, il n'est même pas nécessaire que la trame i soit placée à l'intérieur du lien physique; le cadre i pourrait se trouver dans l'espace libre - tant que le cadre i est rigidement attaché au lien i . Par un choix judicieux de l'origine et des axes de coordonnées, il est possible de réduire le nombre de paramètres

76 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

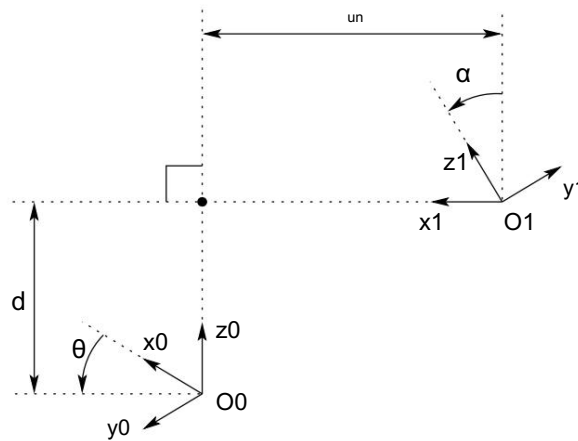


Figure 3.2 : Cadres de coordonnées vérifiant les hypothèses DH1 et DH2.

nécessaire de six à quatre (ou même moins dans certains cas). Dans la section 3.2.1, nous montrerons pourquoi, et sous quelles conditions, cela peut être fait, et dans la section 3.2.2, nous montrerons exactement comment effectuer les affectations du cadre de coordonnées.

3.2.1 Problèmes d'existence et d'unicité

Il est clair qu'il n'est pas possible de représenter une transformation homogène arbitraire en utilisant seulement quatre paramètres. Par conséquent, nous commençons par déterminer quelles transformations homogènes peuvent être exprimées sous la forme (3.10).

Supposons que nous disposions de deux trames, désignées par les trames 0 et 1, respectivement. Alors il existe une unique matrice de transformation homogène A qui prend les coordonnées du cadre 1 dans celles du cadre 0. Supposons maintenant que les deux cadres aient deux caractéristiques supplémentaires, à savoir :

(DH1) L'axe x_1 est perpendiculaire à l'axe z_0

(DH2) L'axe x_1 coupe l'axe z_0

comme le montre la figure 3.2. Dans ces conditions, on affirme qu'il existe des nombres uniques a , d , θ , α tels que

$$A = R_{z,\theta} \text{Trans}_{z,d} \text{Trans}_{x,a} R_{x,\alpha} . \quad (3.11)$$

Bien sûr, puisque θ et α sont des angles, nous voulons vraiment dire qu'ils sont uniques à un multiple de 2π près. Pour montrer que la matrice A peut s'écrire dans cette

3.2. REPRÉSENTATION DE DENAVIT HARTENBERG

77

forme, écrivez A comme

$$U_n = \begin{pmatrix} R_{01}^0 & O_{01}^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

th et notons r_i le i colonne de la matrice de rotation R_{01}^0 . Nous allons maintenant examiner les implications des deux contraintes DH.

Si (DH1) est satisfaite, alors x_1 est perpendiculaire à z_0 et on a $x_1 \cdot z_0 = 0$. En exprimant cette contrainte par rapport à $o_0x_0y_0z_0$, en utilisant le fait que r_1 est la représentation du vecteur unitaire x_1 par rapport au repère 0, on obtient

$$0 = x_1^0 \cdot z_0^0 \quad (3.13)$$

$$= [r_{11}, r_{21}, r_{31}]^T \cdot [0, 0, 1]^T \quad (3.14)$$

$$= r_{31}. \quad (3.15)$$

Puisque $r_{31} = 0$, il suffit maintenant de montrer qu'il existe des angles uniques θ et α tel que

$$R_{01}^0 = R_{x,\theta} R_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta c\alpha & s\theta s\alpha \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

La seule information dont nous disposons est que $r_{31} = 0$, mais cela suffit. D'abord, puisque chaque ligne et colonne de R_{01}^0 doit avoir une longueur unitaire, $r_{31} = 0$ implique que

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1, \\ r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Il existe donc des uniques θ, α tels que

$$(r_{11}, r_{21}) = (c\theta, s\theta), \quad (r_{33}, r_{32}) = (c\alpha, s\alpha). \quad (3.18)$$

Une fois que θ et α sont trouvés, il est courant de montrer que les éléments restants de R_{01}^0 doit avoir la forme montrée en (3.16), en utilisant le fait que R_{01}^0 est une rotation matrice.

Ensuite, l'hypothèse (DH2) signifie que le déplacement entre O_0 et O_1 peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs z_0 et x_1 . Ce peut s'écrire $O_1 = O_0 + dz_0 + ax_1$. Encore une fois, nous pouvons exprimer cette relation dans les coordonnées de $o_0x_0y_0z_0$, et nous obtenons

$$O_1^0 = O_0^0 + dz_0^0 + ax_1^0 \quad (3.19)$$

78 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c\theta \\ 0 & +d & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & s\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$= \begin{pmatrix} ac\theta & 0 & 0 \\ as\theta & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

En combinant les résultats ci-dessus, nous obtenons (3.10) tel que revendiqué. Ainsi, on voit que quatre paramètres suffisent pour spécifier toute transformation homogène qui satisfait les contraintes (DH1) et (DH2).

Maintenant que nous avons établi que chaque matrice de transformation homogène satisfaisant aux conditions (DH1) et (DH2) ci-dessus peut être représentée sous la forme (3.10), nous pouvons en fait donner une interprétation physique à chacune des quatre grandeurs de (3.10). Le paramètre a est la distance entre les axes z_0 et z_1 , et est mesuré selon l'axe x_1 . L'angle α est l'angle entre les axes z_0 et z_1 , mesuré dans un plan normal à x_1 . Le sens positif de α est déterminé de z_0 à z_1 par la règle de droite comme le montre la figure 3.3. Le paramètre d est la distance entre l'origine

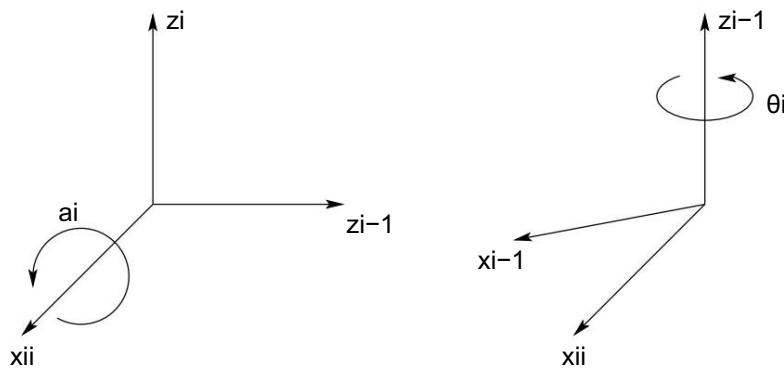


Figure 3.3 : Sens positif pour α_i et θ_i .

O_0 et l'intersection de l'axe x_1 avec z_0 mesurée le long de l'axe z_0 .

Enfin, θ est l'angle entre x_0 et x_1 mesuré dans un plan normal à z_0 .

Ces interprétations physiques s'avéreront utiles pour développer une procédure d'attribution de repères de coordonnées satisfaisant les contraintes (DH1) et (DH2), et nous tournons maintenant notre attention vers le développement d'une telle procédure.

3.2.2 Affectation des cadres de coordonnées

Pour un robot manipulateur donné, on peut toujours choisir les repères $0, \dots, n$ de telle manière que les deux conditions ci-dessus soient satisfaites. Dans certaines circonstances, cela nécessitera de placer l'origine O_i de la trame i à un emplacement qui peut ne pas être intuitivement satisfaisant, mais ce ne sera généralement pas le cas. En lisant les informations ci-dessous, il est important de garder à l'esprit que les choix des différents cadres de coordonnées ne sont pas uniques, même lorsqu'ils sont contraints par les exigences ci-dessus. Ainsi, il est possible que différents ingénieurs dérivent des affectations de cadres de coordonnées différentes, mais tout aussi correctes, pour les liaisons du robot. Il est très important de noter, cependant, que le résultat final (c'est-à-dire les cadres de liaison intermédiaires de la matrice 0_n) sera le même, quelle que soit l'attribution de T (en supposant que les cadres de coordonnées pour le lien n coïncident). Nous commencerons par dériver la procédure générale. Nous discuterons ensuite de divers cas particuliers où il est possible de simplifier davantage la matrice de transformation homogène.

Pour commencer, notez que le choix de z_i est arbitraire. En particulier, d'après (3.16), nous voyons qu'en choisissant α_i et θ_i de manière appropriée, nous pouvons obtenir n'importe quelle direction arbitraire pour z_i . Ainsi, pour notre première étape, nous affectons les axes $z_0, \dots, z_{n-1}$ d'une manière intuitivement agréable. Plus précisément, nous attribuons à z_i l'axe d'actionnement de l'articulation $i + 1$. Ainsi, z_0 est l'axe d'actionnement de l'articulation 1, z_1 est l'axe d'actionnement de l'articulation 2, etc. Il y a deux cas à considérer : (i) si l'articulation $i + 1$ est de révolution, z_i est l'axe de révolution de l'articulation $i + 1$; (ii) si l'articulation $i + 1$ est prismatique, z_i est l'axe de translation de l'articulation $i + 1$. Au début, il peut sembler un peu déroutant d'associer z_i à l'articulation $i + 1$, mais rappelez-vous que cela satisfait la convention que nous avons établie dans la section 3.1, à savoir que l'articulation i est fixe par rapport au cadre i , et que lorsque l'articulation i est actionnée, le lien i et son cadre attaché, $o_i x_i y_i z_i$, subissent un mouvement résultant.

Une fois que nous avons établi les axes z pour les liens, nous établissons le cadre de base. Le choix d'un cadre de base est presque arbitraire. Nous pouvons choisir l'origine O_0 du repère de base comme étant n'importe quel point sur z_0 . Nous choisissons ensuite x_0, y_0 de n'importe quelle manière pratique tant que le cadre résultant est droitier. Ceci configure l'image 0.

Une fois le cadre 0 établi, nous commençons un processus itératif dans lequel nous définissons le cadre i en utilisant le cadre $i - 1$, en commençant par le cadre 1. La figure 3.4 sera utile pour comprendre le processus que nous décrivons maintenant.

Pour établir le repère i il faut considérer trois cas : (i) les axes z_{i-1}, z_i ne sont pas coplanaires, (ii) les axes z_{i-1}, z_i se coupent (iii) les axes z_{i-1}, z_i sont parallèles. Notons que dans les deux cas (ii) et (iii) les axes z_{i-1} et z_i sont coplanaires. Cette situation est en fait assez courante, comme nous le verrons dans

80CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

Figure 3.4 : Affectation de la trame de Denavit-Hartenberg.

Article 3.3. Considérons maintenant chacun de ces trois cas.

(i) z_{i-1} et z_i ne sont pas coplanaires : si z_{i-1} et z_i ne sont pas coplanaires, alors il existe un segment de droite unique perpendiculaire à la fois à z_{i-1} et z_i tel qu'il relie les deux droites et qu'il ait une longueur minimale. La droite contenant cette normale commune à z_{i-1} et z_i définit x_i et le point où cette droite coupe z_i est l'origine O_i . Par construction, les deux conditions (DH1) et (DH2) sont satisfaites et le vecteur de O_{i-1} à O_i est une combinaison linéaire de z_{i-1} et x_i . La spécification du repère i est complétée en choisissant l'axe y_i pour former un repère de droite. Les hypothèses (DH1) et (DH2) étant satisfaites, la matrice de transformation homogène A_i est de la forme (3.10).

(ii) z_{i-1} est parallèle à z_i : Si les axes z_{i-1} et z_i sont parallèles, alors il y a une infinité de normales communes entre eux et la condition (DH1) ne spécifie pas complètement x_i . Dans ce cas, nous sommes libres de choisir l'origine O_i n'importe où le long de z_i . On choisit souvent O_i pour simplifier les équations résultantes. L'axe x_i est alors choisi soit dirigé de O_i vers z_{i-1} , selon la normale commune, soit comme l'opposé de ce vecteur. Une méthode courante pour choisir O_i est de choisir la normale qui passe par O_{i-1} comme axe x_i ; O_i est alors le point d'intersection de cette normale avec z_i . Dans ce cas, d_i serait égal à zéro. Une fois x_i fixé, y_i est déterminé, comme d'habitude par la règle de la main droite. Les axes z_{i-1} et z_i étant parallèles, a_i sera nul dans ce cas.

(iii) z_{i-1} coupe z_i : Dans ce cas x_i est choisi normal au plan formé par z_i et z_{i-1} . La direction positive de x_i est arbitraire. Le plus

3.2. REPRÉSENTATION DE DENAVIT HARTENBERG

81

le choix naturel pour l'origine O_i est dans ce cas au point d'intersection de z_i et z_{i-1} . Cependant, tout point commode le long de l'axe z_i suffit. Notez que dans ce cas, le paramètre a_i est égal à 0.

Cette procédure constructive fonctionne pour les trames $0, \dots, n-1$ dans un robot à n liens. Pour terminer la construction, il est nécessaire de spécifier le cadre n . Le système de coordonnées final $o_x n_y n_z$ est communément appelé effecteur final ou cadre d'outil (voir Figure 3.5). L'origine O_n est le plus souvent

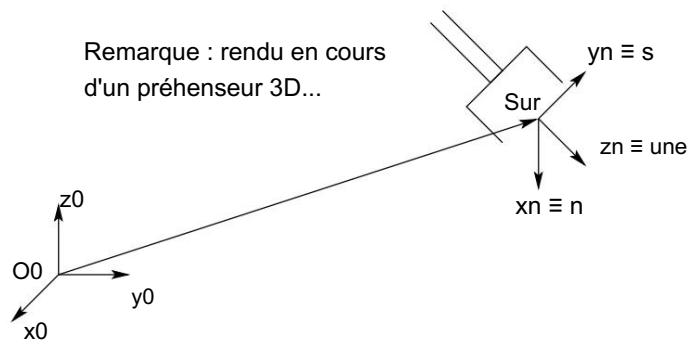


Figure 3.5 : Affectation du référentiel d'outils.

placés symétriquement entre les doigts de la pince. Les vecteurs unitaires le long des axes x_n , y_n et z_n sont étiquetés respectivement n , s et a . La terminologie provient du fait que la direction a est la direction d'approche, en ce sens que le préhenseur s'approche typiquement d'un objet le long de la direction a . De même la direction s est la direction de coulissement, la direction selon laquelle les doigts de la pince coulissent pour s'ouvrir et se fermer, et n est la direction normale au plan formé par a et s .

Dans les robots contemporains, le mouvement articulaire final est une rotation de l'effecteur terminal de θ_n et les deux derniers axes articulaires, z_{n-1} et z_n , coïncident. Dans ce cas, la transformation entre les deux derniers référentiels est une translation selon z_{n-1} d'une distance d_n suivie (ou précédée) d'une rotation de θ_n radians autour de z_{n-1} . C'est une observation importante qui simplifiera le calcul de la cinématique inverse dans le chapitre suivant.

Enfin, notez le fait important suivant. Dans tous les cas, que l'articulation considérée soit rotoïde ou prismatique, les grandeurs a_i et α_i sont toujours constantes pour tout i et sont caractéristiques du manipulateur. Si l'articulation i est prismatique, alors θ_i est aussi une constante, tandis que d_i est le i si l'articulation i est révolutive, alors d_i est ^{ème} variable conjointe. De la même manière, constant et θ_i est le i ^{ème} variable conjointe.

82 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

3.2.3 Résumé

Nous pouvons résumer la procédure ci-dessus basée sur la convention DH dans l'algorithme suivant pour dériver la cinématique avant pour tout manipulateur.

Étape 1 : Localisez et étiquetez les axes d'articulation $z_0, \dots, z_{n-1}$.

Étape 2 : Établissez le cadre de base. Définissez l'origine n'importe où sur l'axe z_0 .

Les axes x_0 et y_0 sont choisis commodément pour former un cadre de droite.

Pour $i = 1, \dots, n - 1$, effectuez les étapes 3 à 5.

Étape 3 : Localisez l'origine O_i où la normale commune à z_i et z_{i-1} coupe z_i . Si z_i intersecte z_{i-1} localisez O_i à cette intersection. Si z_i et z_{i-1} sont parallèles, placez O_i dans n'importe quelle position pratique le long de z_i .

Étape 4 : Établir x_i le long de la normale commune entre z_{i-1} et z_i à travers ou dans la direction O_i , normale au plan $z_{i-1} - z_i$ si z_{i-1} et z_i se croisent.

Étape 5 : Établissez y_i pour compléter un cadre de droite.

Étape 6 : Établir le cadre de l'effecteur terminal $o_n x_n y_n z_n$. En supposant que la n -ième articulation est rotoïde, posons $z_n = a$ le long de la direction z_{n-1} . Établissez l'origine O_n commodément le long de z_n , de préférence au centre de la pince ou à l'extrémité de tout outil que le manipulateur peut porter. Définir $y_n = s$ dans le sens de la fermeture de la pince et définir $x_n = n$ comme $s \times a$. Si l'outil n'est pas un simple préhenseur, placez x_n et y_n de manière pratique pour former un cadre à droite.

Étape 7 : Créer un tableau des paramètres de lien $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$.

a_i = distance le long de x_i de O_i à l'intersection de x_i et z_{i-1} axes.

d_i = distance selon z_{i-1} de O_{i-1} à l'intersection des axes x_i et z_{i-1} . d_i est variable si l'articulation i est prismatique. α_i = l'angle entre z_{i-1} et z_i

mesuré autour de x_i (voir Figure 3.3).

θ_i = l'angle entre z_{i-1} et x_i mesuré autour de z_{i-1} (voir Figure 3.3). θ_i est variable si l'articulation i est rotoïde.

Étape 8 : Former les matrices de transformation homogènes A_i en substituant les paramètres ci-dessus dans (3.10).

Étape 9 : Formulaire $T_n^0 = A_1 \cdots A_n$. Cela donne alors la position et l'orientation du repère de l'outil exprimé en coordonnées de base.

3.3 Exemples

Dans la convention DH le seul angle variable est θ , donc on simplifie la notation en écrivant ci pour $\cos \theta_i$ etc. On note aussi $\theta_1 + \theta_2$ par θ_{12} , et $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ par c_{12} , et ainsi de suite. Dans les exemples suivants, il est important de rappeler que la convention DH, bien que systématique, laisse encore une liberté considérable dans le choix de certains des paramètres du manipulateur. Ceci est particulièrement vrai dans le cas d'axes d'articulation parallèles ou lorsqu'il s'agit d'articulations prismatiques.

Exemple 3.1 Manipulateur de coude planaire

Considérez le bras planaire à deux liaisons de la figure 3.6. Les axes articulaires z_0 et

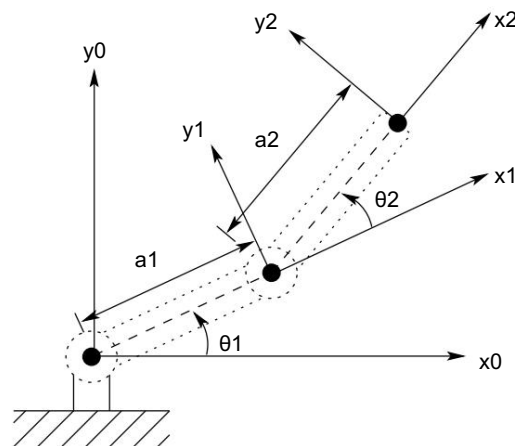


Figure 3.6 : Manipulateur planaire à deux liaisons. Les axes z pointent tous hors de la page et ne sont pas représentés sur la figure.

z_1 sont normaux à la page. Nous établissons le cadre de base $o_0x_0y_0z_0$ comme indiqué. L'origine est choisie au point d'intersection de l'axe z_0 avec la page et la direction de l'axe x_0 est totalement arbitraire. Une fois la trame de base établie, la trame $o_1x_1y_1z_1$ est fixée comme le montre la convention DH, où l'origine O_1 a été située à l'intersection de z_1 et de la page.

La trame finale $o_2x_2y_2z_2$ est fixée en choisissant l'origine O_2 à la fin du lien 2 comme indiqué. Les paramètres de liaison sont indiqués dans le Tableau 3.1. Les matrices A sont

84CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

Tableau 3.1 : Paramètres de liaison pour le manipulateur planaire à 2 liaisons.

Lien	a_i	α_i	d_i	θ_i		
1	a_1	0	0	θ_1		1
2	a_2	0	0	θ_2		2

variable

déterminé à partir de (3.10) comme

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Les matrices T sont donc données par

$$J_1^0 = A_1. \quad (3.24)$$

$$J_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Notez que les deux premières entrées de la dernière colonne de T_2^0 sont les x et y composants de l'origine O2 dans le cadre de base ; c'est,

$$x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \quad (3.26)$$

$$y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

sont les coordonnées de l'effecteur terminal dans le repère de base. La partie tournante de T_2^0 donne l'orientation du repère $o_2x_2y_2z_2$ par rapport au repère de base.

Exemple 3.2 Robot cylindrique à trois maillons

Considérons maintenant le robot cylindrique à trois maillons représenté symboliquement par Illustration 3.7. Nous établissons O0 comme indiqué à l'articulation 1. Notez que le placement de

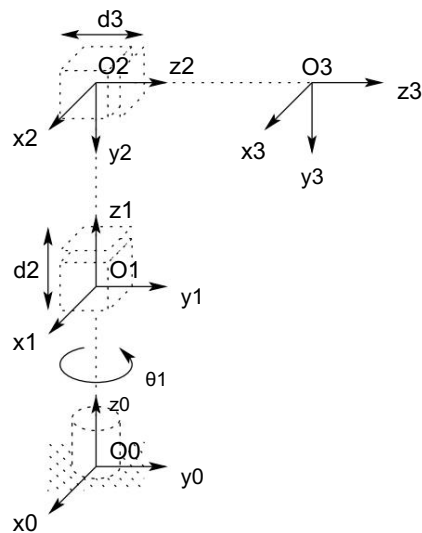


Figure 3.7 : Manipulateur cylindrique à trois maillons.

Tableau 3.2 : Paramètres de liaison pour le manipulateur cylindrique à 3 liaisons.

Lien	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	0	-90°	j_0	0
3	0	j	0	0

variable

l'origine O_0 suivant z_0 ainsi que la direction de l'axe x_0 sont arbitraires. Notre choix de O_0 est le plus naturel, mais O_0 pourrait tout aussi bien être placé à l'articulation 2. L'axe x_0 est choisi normal à la page. Ensuite, puisque z_0 et z_1 coïncident, l'origine O_1 est choisie à l'articulation 1 comme indiqué. L'axe x_1 est normal à la page lorsque $\theta_1 = 0$ mais, bien sûr, sa direction changera puisque θ_1 est variable. Puisque z_2 et z_1 se coupent, l'origine O_2 est placée à cette intersection. La direction de x_2 est choisie parallèle à x_1 pour que θ_2 soit nul.

Enfin, le troisième cadre est choisi à la fin du lien 3 comme indiqué.

Les paramètres de liaison sont maintenant affichés dans le Tableau 3.2. Le A correspondant

86 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

et les matrices T sont

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & s_1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 & 0 \\ s_1 & c_1 d_3 & d_1 + d_2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Exemple 3.3 Poignet sphérique

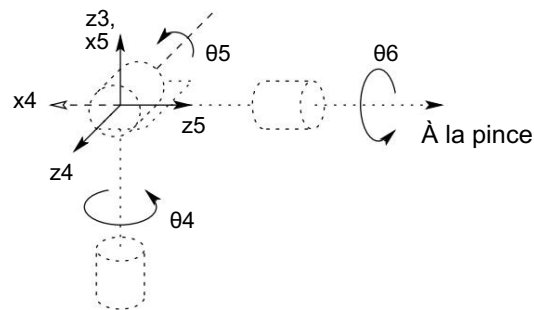


Figure 3.8 : L'affectation du cadre de poignet sphérique.

La configuration sphérique du poignet est illustrée à la figure 3.8, dans laquelle les axes articulaires z_3 , z_4 , z_5 se coupent en O . Les paramètres de Denavit-Hartenberg sont indiqués au tableau 3.3. Le manipulateur de Stanford est un exemple de manipulateur possédant un poignet de ce type. En fait, l'analyse suivante s'applique à pratiquement tous les poignets sphériques.

3.3. EXEMPLES

87

Tableau 3.3 : Paramètres DH pour poignet sphérique.

Lien	a_i	d_i	θ_i	ϕ_i
4			0	θ_4
5	0	d_5	0	θ_5
6		0	d_6	θ_6

variable

Nous montrons maintenant que les trois dernières variables conjointes, θ_4 , θ_5 , θ_6 sont les angles d'Euler ϕ , θ , ψ , respectivement, par rapport au cadre de coordonnées $o_3x_3y_3z_3$. Pour le voir, il suffit de calculer les matrices A_4 , A_5 et A_6 à l'aide du tableau 3.3 et de l'expression (3.10). Cela donne

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 & s_4 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & s_5 & 0 & 0 \\ -c_5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 & s_6 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

En les multipliant ensemble, on obtient

$$J_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} R_3^3 & O_3 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \end{bmatrix}$$

La comparaison de la partie rotationnelle R_3^3 avec la transformée de l'angle d'Euler R_3 de T tion (2.51) montre que $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ peuvent bien être identifiés comme les angles d'Euler ϕ , θ et ψ par rapport au repère $o_3x_3y_3z_3$.

88 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

Exemple 3.4 Manipulateur cylindrique avec poignet sphérique

Supposons que nous attachons maintenant un poignet sphérique au manipulateur cylindrique de l'exemple 3.3.2 comme le montre la figure 3.9. A noter que l'axe de rotation de

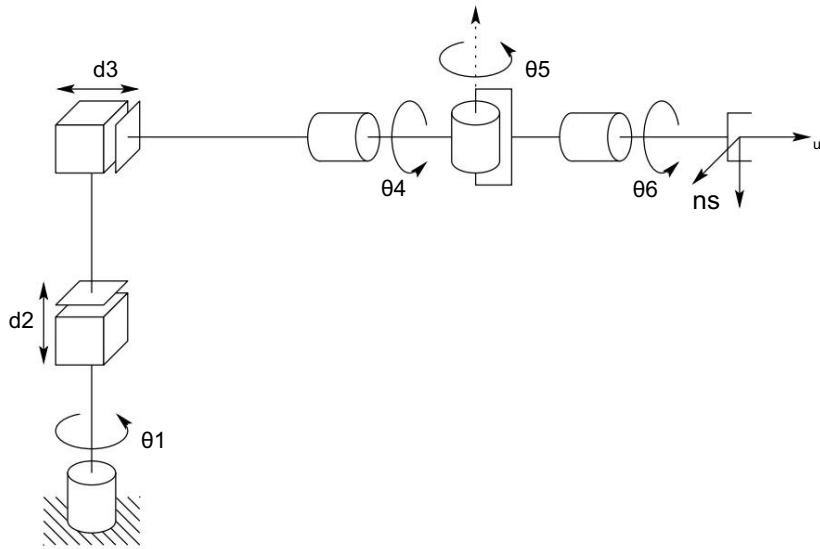


Figure 3.9 : Robot cylindrique avec poignet sphérique.

l'articulation 4 est parallèle à z_2 et coïncide donc avec l'axe z_3 de l'exemple 3.3.2.

L'implication de ceci est que nous pouvons immédiatement combiner les deux expressions précédentes (3.28) et (3.32) pour dériver la cinématique avant comme

$$J_6^0 = T_3^0 J_6^3 \quad (3.33)$$

avec T_3^0 donné par (3.28) et J_6^3 donnée par (3.32). Par conséquent, la cinématique avant de ce manipulateur est décrite par

$$J_6^0 = \begin{bmatrix} c1 \ 0 \ -s1 \ -s1d1 \ s1 \ 0 \ c1 \\ c1d3 \ 0 \ -1 \ 0 \ d1 + d2 \ 0 \ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4c6 & c4s5 & c4s5d6 \\ s4c5c6 + c4s6 & -s4c5s6 + c4c6 & s4s5 & s4s5d6 \\ -s5c6 & s5c6 & c5 & c5d6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$= \begin{bmatrix} r11 & r12 & r13 & dx \\ r21 & r22 & r23 & dy \\ r31 & r32 & r33 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. EXEMPLES

89

où

$$\begin{aligned}
r_{11} &= c_1 c_4 c_5 c_6 - c_1 s_4 s_6 + s_1 s_5 c_6 \\
r_{21} &= s_1 c_4 c_5 c_6 - s_1 s_4 s_6 - c_1 s_5 c_6 \\
r_{31} &= -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\
r_{12} &= -c_1 c_4 c_5 s_6 - c_1 s_4 c_6 - s_1 s_5 c_6 \\
r_{22} &= -s_1 c_4 c_5 s_6 - s_1 s_4 s_6 + c_1 s_5 c_6 \\
r_{32} &= s_4 c_5 c_6 - c_4 c_6 \\
r_{13} &= c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5 \\
r_{23} &= s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5 \\
r_{33} &= -s_4 s_5 \\
dx &= c_1 c_4 s_5 d_6 - s_1 c_5 d_6 - s_1 d_3 \quad dy = \\
&= s_1 c_4 s_5 d_6 + c_1 c_5 d_6 + c_1 d_3 \quad dz = \\
&= -s_4 s_5 d_6 + d_1 + d_2.
\end{aligned}$$

Remarquez comment la plus grande partie de la complexité de la cinématique avant pour ce manipulateur résulte de l'orientation de l'effecteur tandis que l'expression de la position du bras de (3.28) est assez simple. L'hypothèse de poignet sphérique simplifie non seulement la dérivation de la cinématique avant ici, mais simplifiera également considérablement le problème de cinématique inverse dans le chapitre suivant.

Exemple 3.5 Manipulateur de Stanford

Considérons maintenant le manipulateur de Stanford illustré à la figure 3.10. Ce manipulateur est un exemple de manipulateur sphérique (RRP) avec un poignet sphérique. Ce manipulateur a un décalage dans l'articulation de l'épaule qui complique légèrement les problèmes de cinématique directe et inverse.

Nous établissons d'abord les cadres de coordonnées conjoints en utilisant la convention DH comme indiqué. Les paramètres de liaison sont indiqués dans le Tableau 3.4.

Il est simple de calculer les matrices A_i comme

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 & 0 & c_1 \\ s_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

90CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

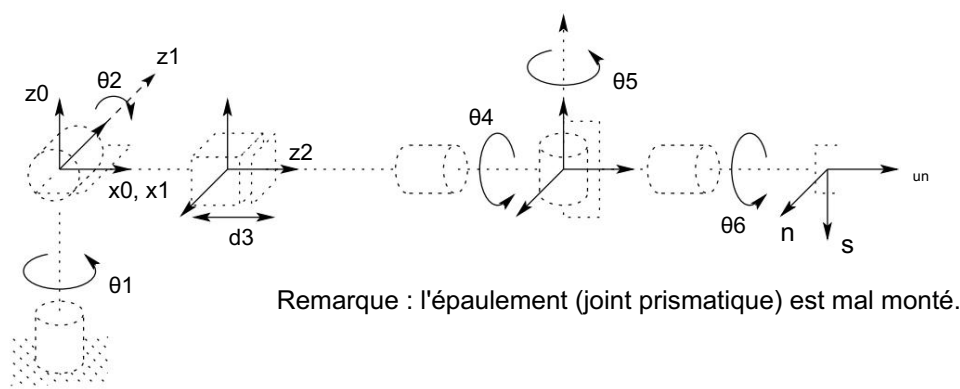


Figure 3.10 : Affectation du cadre de coordonnées DH pour le manipulateur de Stanford.

Tableau 3.4 : Paramètres DH pour le manipulateur de Stanford.

Lien	d_i	a_i	α_i	θ_i	0	0	-90
1			d_2	0	+90		
2			0	0			
3					0		
4		0	0	-90			
5	0	0	+90		6	d_6	0

variable conjointe

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 & s_2 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 & s_4 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

3.3. EXEMPLES

91

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 & s_5 & 0 \\ -c_5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 & c_6 & 0 \\ s_6 & 0 & 0 & 1 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

J_6^0 est alors donnée comme

$$J_6^0 = A_1 \cdot \dots \cdot A_6 \quad (3.41)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx & r_{21} & r_{22} \\ r_{22} & r_{23} & dy & r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{33} & dz & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

où

$$\begin{aligned} R_{11} &= C_1 [C_2 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6] - D_2 (S_4 C_5 C_6 + \\ &C_4 S_6) \quad R_{21} = S_1 [C_2 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6] + C_1 \\ &(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \quad R_{31} = c_2 s_5 c_6 \quad r_{12} = \\ &c_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6] - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \quad r_{22} = \\ &-s_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6] + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \quad r_{32} = \\ &s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \quad (3.43) \quad r_{13} = c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \quad r_{23} \\ &= s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{33} &= -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \\ dx &= c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5) \quad dy \\ &= s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6 (c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2) \quad dz = \\ &c_2 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Exemple 3.6 Manipulateur SCARA

Comme autre exemple de la procédure générale, considérons le manipulateur SCARA de la Figure 3.11. Ce manipulateur, qui est une abstraction du robot AdeptOne de la figure 1.11, est constitué d'un bras RRP et d'un poignet à un degré de liberté, dont le mouvement est un roulis autour de l'axe vertical. La première

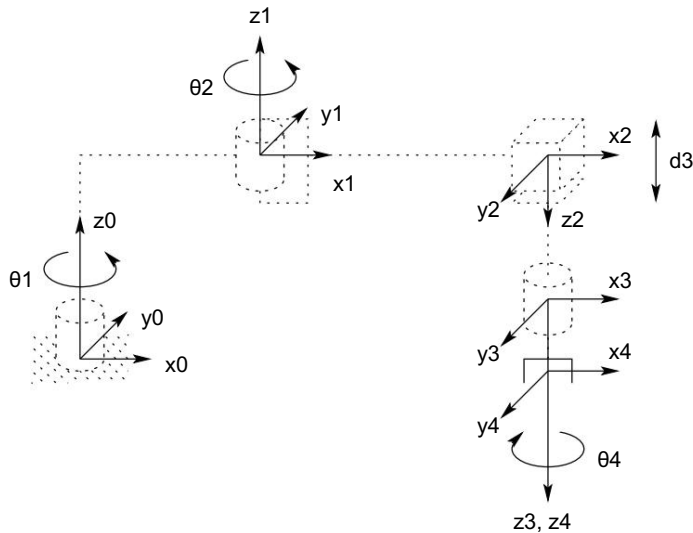


Figure 3.11 : Affectation du cadre de coordonnées DH pour le manipulateur SCARA.

Tableau 3.5 : Paramètres articulaires pour SCARA.

Lien	a_i	α_i	d_i	θ_i	a	α	d	θ
1					a_1	180°	0	0
2	0		0					
3	0							
4	0		0	d_4				

variable conjointe

L'étape consiste à localiser et à étiqueter les axes des articulations comme indiqué. Puisque tous les axes des articulations sont parallèles, nous avons une certaine liberté dans le placement des origines. Les origines sont placées comme indiqué pour plus de commodité. Nous établissons l'axe x_0 dans le plan de la page comme indiqué. Ceci est complètement arbitraire et n'affecte que la configuration zéro du manipulateur, c'est-à-dire la position du manipulateur lorsque $\theta_1 = 0$.

Les paramètres de joint sont donnés dans le tableau 3.5, et les matrices A sont comme

3.3. EXEMPLES

93

suit.

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 & s_1 \\ c_1 & 0 & a_1 s_1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & s_2 & & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & & & & \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 & s_4 \\ c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Les équations cinématiques directes sont donc données par

$$J_4^0 = A_1 \cdots A_4 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 c_4 + s_1 s_2 s_4 & -c_1 c_2 s_4 + s_1 c_2 c_4 & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 c_4 - c_1 s_2 s_4 & -s_1 c_2 s_4 - c_1 c_2 c_4 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & -d_4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

3.4 Problèmes

1. Vérifiez l'énoncé après l'équation (3.18) que la matrice de rotation R a la forme (3.16) à condition que les hypothèses DH1 et DH2 soient satisfaites.
2. Considérez le manipulateur planaire à trois liaisons illustré à la figure 3.12. Dérivez

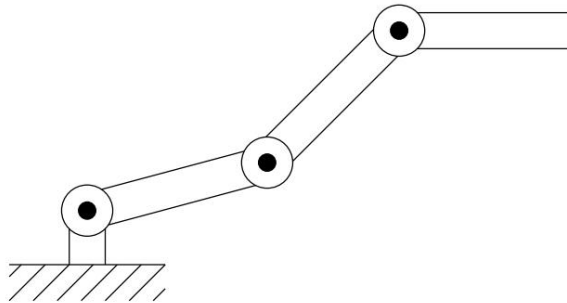


Figure 3.12 : Bras planaire à trois liaisons du problème 3-2.

les équations cinématiques directes en utilisant la convention DH.

3. Considérez le manipulateur cartésien à deux liens de la figure 3.13. Dérivez

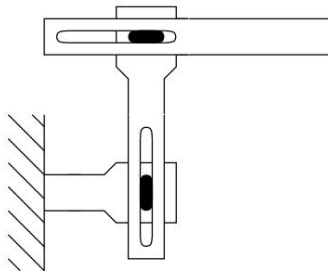


Figure 3.13 : Robot cartésien à deux liens du problème 3-3.

les équations cinématiques directes en utilisant la convention DH.

4. Considérez le manipulateur à deux liaisons de la figure 3.14 qui a l'articulation 1 révolutée et l'articulation 2 prismatique. Dérivez les équations cinématiques directes en utilisant la convention DH.
5. Considérez le manipulateur planaire à trois liaisons de la Figure 3.15 Dérivez équations cinématiques directes en utilisant la convention DH.

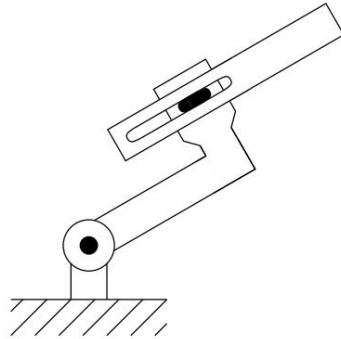


Figure 3.14 : Bras planaire à deux liaisons du problème 3-4.

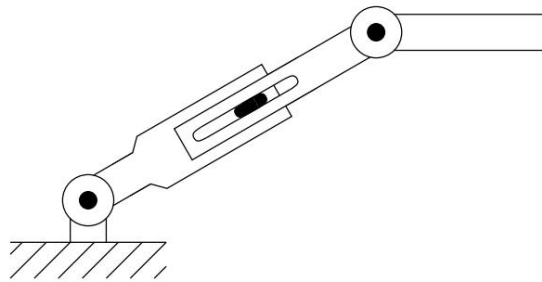


Figure 3.15 : Bras planaire à trois liaisons avec articulation prismatique du problème 3-5.

6. Considérez le robot articulé à trois bras de la figure 3.16. Dérivez les équations cinématiques directes en utilisant la convention DH.
7. Considérez le manipulateur cartésien à trois liens de la figure 3.17. Dérivez les équations cinématiques directes en utilisant la convention DH.
8. Fixez un poignet sphérique au manipulateur articulé à trois bras du problème 3-6, comme illustré à la figure 3.18. Dérivez les équations cinématiques directes pour ce manipulateur.
9. Fixez un poignet sphérique au manipulateur cartésien à trois maillons du problème 3-7, comme illustré à la figure 3.19. Dérivez les équations cinématiques directes pour ce manipulateur.
10. Considérez le manipulateur PUMA 260 illustré à la Figure 3.20. Dérivez l'ensemble complet des équations cinématiques directes, en établissant des cadres de coordonnées DH appropriés, en construisant un tableau des paramètres de liaison, en formant les matrices A, etc.

96 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

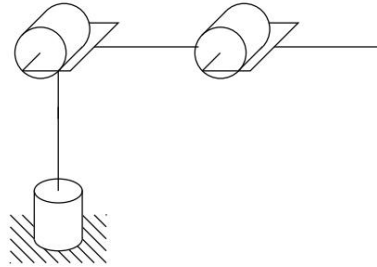


Figure 3.16 : Robot articulé à trois bras.

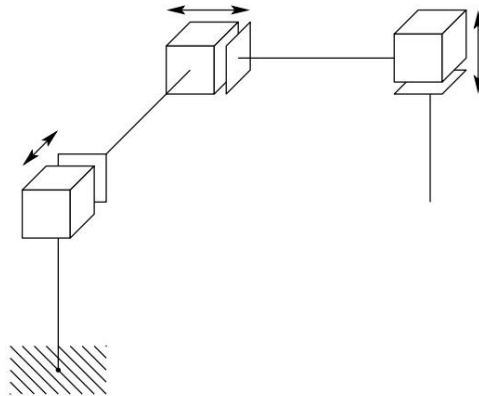


Figure 3.17 : Robot cartésien à trois maillons.

11. Répétez le problème 3-9 pour le robot Rhino XR-3 à cinq degrés de liberté illustré à la figure 3.21. (Remarque : vous devez remplacer le poignet Rhino par le poignet sphérique.)
12. Supposons qu'un Rhino XR-3 est boulonné à une table sur laquelle un cadre de coordonnées $osxsyszs$ est établi, comme illustré à la Figure 3.22. (Le référentiel $osxsyszs$ est souvent appelé référentiel de station.) Étant donné le référentiel de base que vous avez établi au problème 3-11, trouvez la transformation homogène T_s reliant le référentiel $_0$ de base au référentiel de station. Trouvez la relation entre la transformation homogène T_s le repère $_5$ cadre de l'effecteur final et de la station. Quelle est la position et l'orientation de l'effecteur terminal dans le cadre de la station lorsque $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_5 = 0$?
13. Considérez le robot GMF S-400 illustré à la figure 3.23. Dessinez la représentation symbolique de ce manipulateur. Établissez des cadres de coordonnées DH et écrivez les équations cinématiques directes.

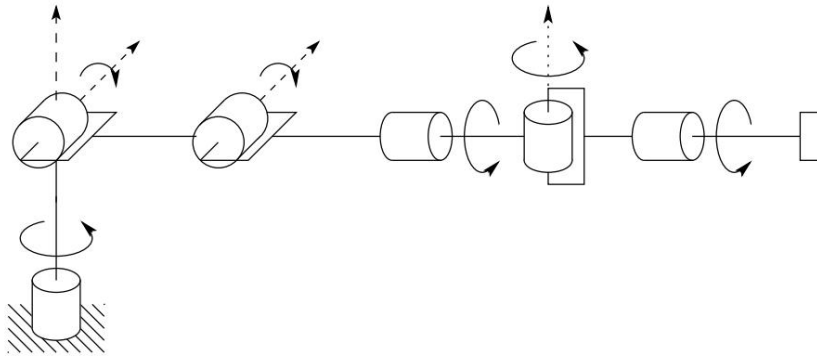


Figure 3.18 : Manipulateur coudé avec poignet sphérique.

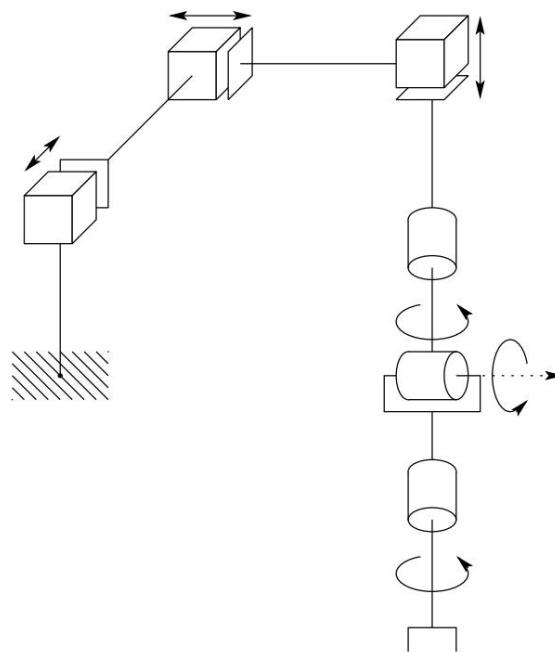


Figure 3.19 : Manipulateur cartésien à poignet sphérique.

98CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

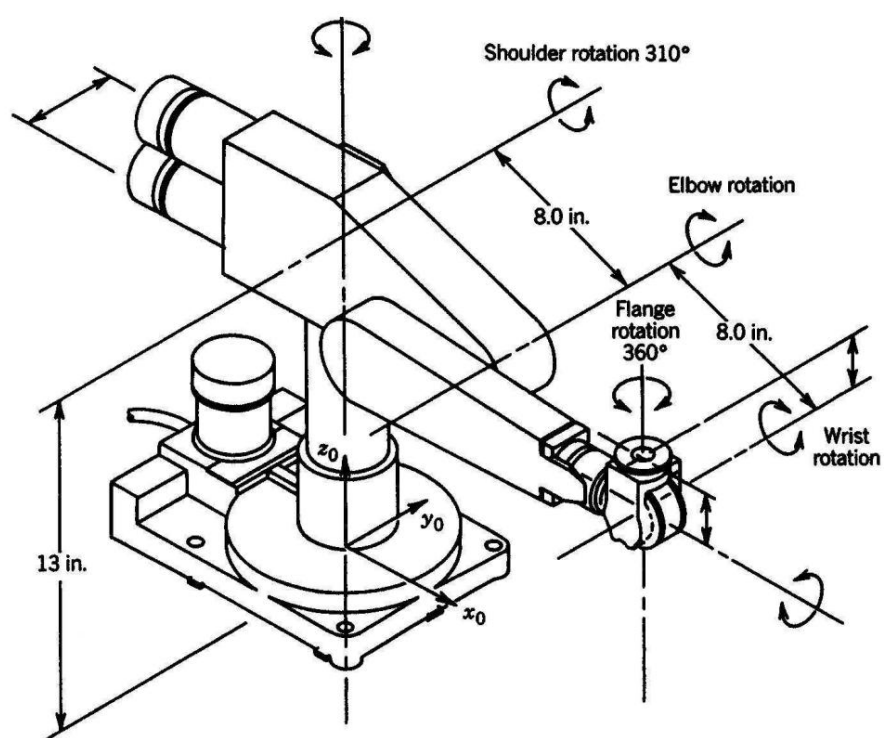


Figure 3.20 : Manipulateur PUMA 260.

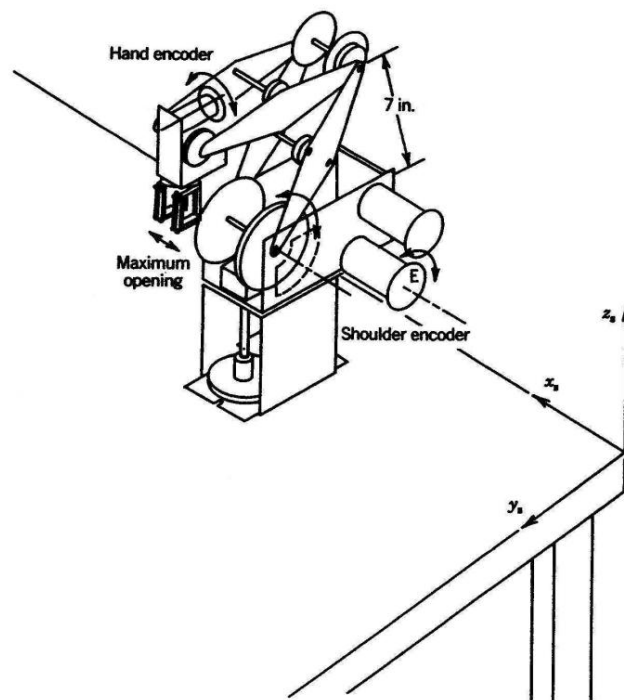


Figure 3.21 : Robot Rhino XR-3.

100CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

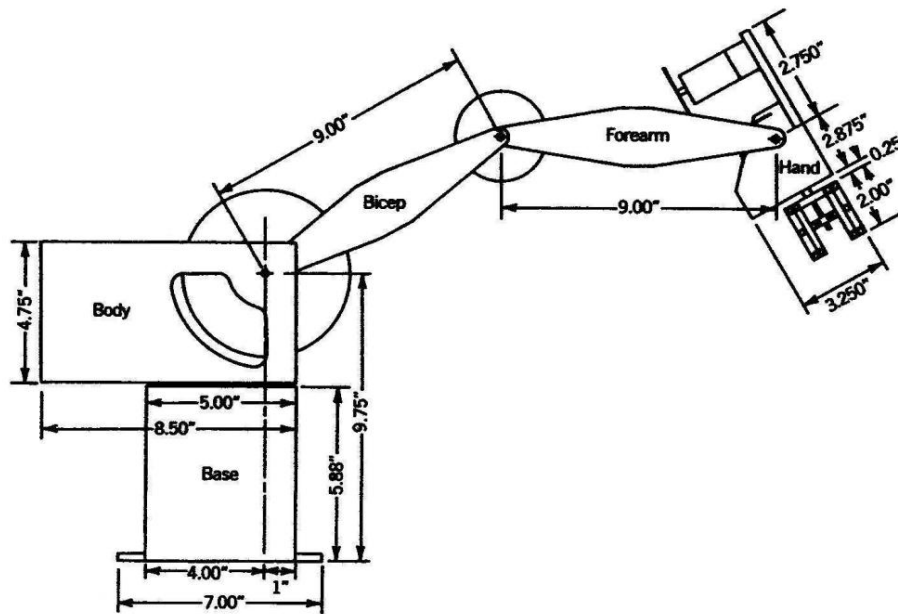


Figure 3.22 : Robot Rhino attaché à une table. De : A Robot Engineering Manuel, par Mohsen Shahinpoor. Copyright 1987, Harper & Row Publishers, Inc.

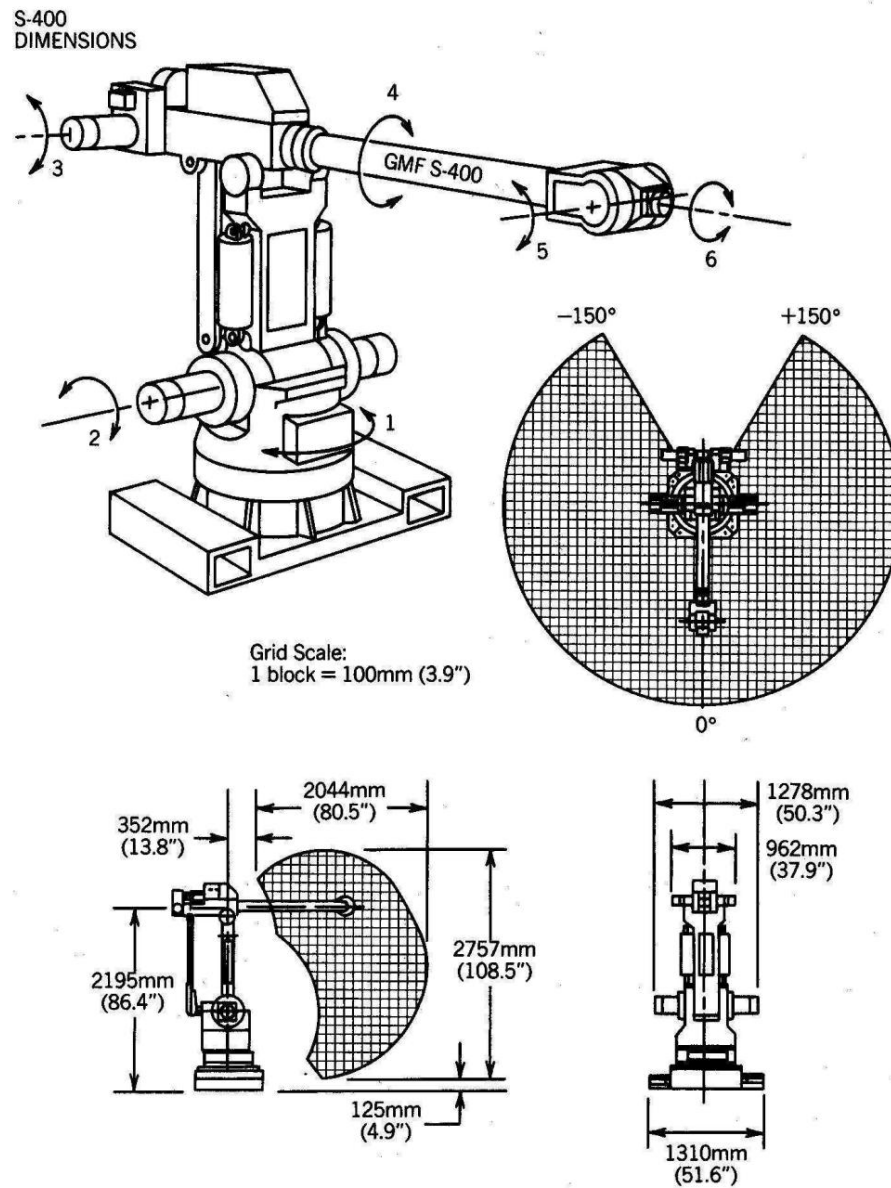


Figure 3.23 : Robot GMF S-400. (Avec l'aimable autorisation de GMF Robotics.)

102CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG