Класс дифференциальных уравнений кинематической оптимальности слияния движений с геометрической инвариантностью

3 сентября 2014 г.

Феликс Поляков*

Абстрактный

Нейронаучные исследования выполнения рисующих движений обычно анализируют нейронное представление либо геометрических (например, направление, форма), либо временных (например, скорость) характеристик траекторий, а не представление траектории в целом. Эта работа посвящена математическим идеям, лежащим в основе разделения и слияния геометрических и временных характеристик, характеризующих биологические движения. Предполагается, что примитивы движения способствуют эффективности представления движений в мозгу и соответствуют различным критериям биологических движений, в том числе кинематической плавности и геометрической связности. Используется критерий «максимальной гладкости» траекторий произвольного порядка n, $n = 3$ – случай минимально-рывковой модели. Я вывожу класс дифференциальных уравнений, которым подчиняются траектории движения, для которых максимально гладкие траектории n-го порядка имеют постоянную скорость. Скорость инвариантна относительно класса геометрических преобразований. Решения уравнений предположительно служат кандидатами на геометрические примитивы движения. Скорость здесь определяется как скорость накопления геометрических измерений вдоль нарисованного пути. Геометрическое измерение может быть выбрано как дуга в определенной геометрии.

Например, степенная модель двух третей соответствует кусочно-постоянной скорости накопления равноаффинной дуги. Производный класс дифференциальных уравнений состоит из двух частей. Первая часть идентична для всех геометрических параметризаций пути. Вторая часть специфична для параметризации и необходима для определения того, действительно ли решение первой части представляет собой кривую. Приводятся соответствующие контрпримеры. Представлены уравнения различной геометрии на плоскости и в пространстве и их известные решения. Производный класс дифференциальных уравнений представляет собой новый инструмент для обнаружения кандидатов на примитивы геометрического движения.

Ключевые слова: геометрические примитивы движения — компактное представление — аффинная дифференциальная геометрия — временные аспекты движения — парабола — логарифмическая спираль — окружность — параболический винт — эллиптический винт

* Кафедра математики, Университет Бар-Илан, Рамат-Ган 5290002, Израиль felix@math.biu.ac.il

1. Введение

Различные нейробиологические исследования проанализировали геометрические особенности биологических движений (например, действия, подобные рисованию) и их представление в мозгу. В частности, было обнаружено, что одиночные нейроны и нейронные популяции в моторной коре настроены на направление движения [24, 61, 60, 62, 45, 44]. Исследования различных типов целенаправленных движений, напр. движения к мишеням, последовательные движения рук или движения по заданным траекториям указывали на то, что в корковой активности представлен последовательный порядок субдвижений1 , «аспекты движения» (имеются в виду аспекты формы движения и местоположения цели) и фрагменты движения [34, 1, 2, 33, 63, 32]. Доказательства важной роли неевклидовой геометрии и, в частности, эквиаффинной [50, 51, 54, 41, 12, 52, 53, 55, 42, 16, 9, 43] и аффинной [4] в производстве обеспечено восприятие биологического движения. Была предложена масштабная инвариантность нейронной презентации движений руки [30]. Суперпозиция эквиаффинных преобразований и скейлинга составляет группу аффинных преобразований. Было высказано предположение, что биологические движения могут быть представлены в нескольких геометриях [4].

Представление о композиционности движений, т. е. о представлении сложных движений на основе ограниченного «алфавита» примитивных субдвижений, анализируется в многочисленных исследованиях двигательного контроля. Существование двигательных примитивов показано на уровне сил, создаваемых мышцами, действующими на конечности [5, 27, 49 , 37 , 47, 48, 25, 26], на уровне мышечных синергий [67, 11, 31, 36, 10], на уровне кинематики движения [46, 20, 7, 39 , 59, 57, 17, 21, 58] и на уровне вычислительных единиц сенсомоторной системы [68, 65]. Разложение сложных движений на примитивы реализовано и для движений рук осьминога [71]. Результаты недавних работ [13, 14] дают дополнительные указания на то, что кажущиеся непрерывными движения могут быть представлены в мозгу на определенном иерархическом уровне дискретным образом.

Параболические формы были предложены в качестве геометрических структурных элементов сложных рисуночных движений на основе математического моделирования и анализа кинематических и нейрофизиологических данных поведения обезьян [54, 52, 53, 55] . Было высказано предположение, что сложные траектории движения могут быть составлены путем объединения параболоподобных форм. Аффинные преобразования, примененные к параболическим сегментам, приводят к параболическим сегментам. Более того, любой параболический отрезок может быть получен из произвольного параболического отрезка единственным аффинным преобразованием. Таким образом, последовательность конкатенированных параболоподобных форм может быть получена путем применения последовательности аффинных преобразований к одному параболическому шаблону [52] и, таким образом, упрощения представления сложных движений в мозгу. Такое представление может означать, что геометрический примитив движения представляет собой набор преобразований, наделенных примитивной геометрической формой, к которой применяются преобразования. Пример кусочно-параболической кривой, напоминающей реальную траекторию движения обезьяны, показан на рис.

Здесь я развиваю математические инструменты, направленные на нахождение примитивных геометрических фигур. Траектории вдоль этих примитивных форм согласуются с

1Означает последовательный порядок реализации определенного геометрического объекта.

различные модели, описывающие биологическое движение. Классы примитивных форм, предположительно составляющих более сложные траектории, инвариантны по отношению к классам геометрических преобразований, что позволяет обеспечить компактное представление сложных траекторий движения в мозгу.

2 Предпосылки для математической задачи из исследований моторного контроля

Было замечено, что плоские траектории руки являются плавными, а гладкость определялась как минимизация интегрального квадрата скорости изменения ускорения, называемого также рывком движения [35, 22], а именно:

$$\int_0^T \left(\frac{д^3х}{дт^3}\right)^2 + \left(\frac{д^3г}{дт^3}\right)^2 дт . \tag{2.1}$$

Информацию о траектории движения можно разделить на две части: (1) геометрическую спецификацию, называемую также траекторией движения, и (2) временную спецификацию, определяемую функцией, связывающей каждый момент времени с положением на траектории движения. Временная спецификация полностью определяется скоростью движения по пути. В оригинальных работах по модели минимального рывка [35, 22] максимально гладкая траектория ограничена начальной точкой, промежуточной точкой, через которую должен пройти путь, и конечной точкой. Таким образом, критерий минимизации функционала стоимости в (2.1) снабжен поточечным геометрическим ограничением на оптимальную траекторию, проходящую через одну или несколько промежуточных точек.
Поэтому в исходной постановке модели весь непрерывный путь траектории может быть выявлен одновременно с определением скорости движения[2]. Модель минимального рывка широко используется и упоминается в различных исследования двигательного контроля.

Согласно ограниченной модели минимального рывка [66] движения рук стремятся максимизировать плавность рисования (минимизировать стоимость рывка)

$$\int_0^T \left(\frac{d^3x(œu(t))}{дт^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3y(œu(t))}{дт^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3z(œu(t))}{dt^3}\right)^2 дт \tag{2.2}$$

для заданного траекторного пути {x(œu), y(œu), z(œu)}. То есть траектория движения уже предоставлена в качестве входных данных для процедуры оптимизации, и для решения задачи оптимизации необходимо найти профиль скорости. Исполняемая трехмерная кривая в функционале стоимости (2.2) параметризована евклидовой длиной дуги

$$œu(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2}\, d\tau \tag{2.3}$$

[2] Компоненты x(t) и y(t) траекторий, стесненные промежуточными точками и минимизирующие функционал стоимости (2.1), составлены из кусков полиномов 5-го порядка по времени, производных 3-го порядка от x(t), y(t) непрерывны [22].

с точкой, обозначающей дифференцирование по времени t.

Пример 2.1. Траектория r(t) = r(σeu(t)) = [x(σeu(t)), y(σeu(t)), z(σeu(t))] полностью определяется геометрической (не связанной со временем) параметризацией3 r(σeu) и временная параметризация геометрического параметра σeu(t) (или, что то же самое, строго неотрицательная скорость σ̇ eu). Здесь геометрический параметр σeu – евклидова длина кривой, которая непрерывно отображается на 3-кратно дифференцируемую кривую.

Далее дифференцирование по геометрическому параметру σ обозначается штрихами и цифрами в скобках, а дифференцирование по времени t до 3-го порядка обозначается точками. Дифференциация более высокого порядка по времени обозначается в основном общепринятыми обозначениями для дифференцирования

$$\phi'(\sigma) \quad \frac{f''}{d\sigma}\,(\sigma) \quad d\sigma k \quad (d/dt)\!: \frac{d\,2f}{d\sigma 2}\; d\,3f\; d\,kf\; \frac{df}{d\sigma 3},\; f(k)(\sigma) \quad ,\; f''(\sigma)\;,$$

$$\dot{f}(\sigma(t)) \quad \frac{df}{}\;\ddot{f}(\sigma(t)) \quad dt,\; \frac{d\,2f}{dt2},\; \dddot{f}(\sigma(t)) \quad dt3\; \frac{d\,3f}{}\;.$$

Обозначения будут напоминаться далее в тексте.

Степенной закон двух третей — еще одна кинематическая модель движений рук. Он описывает связь между геометрическими свойствами пути движения и скоростью движения по этому пути. Эмпирические наблюдения степенной модели двух третей были интерпретированы как свидетельство сегментации движения [40]. Степенной закон двух третей также был продемонстрирован в исследованиях зрительного восприятия [69, 41, 12, 9]. Сегментация движений рук на основе кривизны траектории была недавно проанализирована в [15].

Степенная модель двух третей эквивалентна утверждению о кусочно-постоянной эквиаффинной скорости4 (4.2) рисовальных движений [18, 50, 29, 19]: σ̇ ea = const. Основываясь на эмпирических результатах, связанных со степенной моделью двух третей и их интерпретацией с точки зрения дифференциальной геометрии, эквиаффинные и аффинные дуги стали актуальной параметризацией в анализе биологических движений и их нейронной репрезентации [18, 50, 51, 54 , 52, 19, 55, 53, 16, 42, 4, 9, 43].

Сравнение предсказаний моделей минимального рывка и степенного закона двух третей было проанализировано для ряда геометрических фигур в [70]. Евклидова скорость σ̇ eu, минимизирующая функционал стоимости с произвольным порядком гладкости н

$$\int_0^T \left(\frac{dnx\,(t)}{dtn}\right)^2 + \left(\frac{d\,n\,y(t)}{dtn}\right)^2 \,дт \tag{2.4}$$

3 Геометрическая параметризация с дугой, инвариантной в определенной геометрии, называется естественной параметризацией; σeu — дуга в евклидовой геометрии.

4 Предысторию понятий эквиаффинной геометрии, которые используются в этой работе, можно найти в другом месте, например. [64, 28]. В частности, они представлены в части «Основные сведения» в [51] и в главе 2 в [52] вместе с их связью со степенным законом двух третей, а также в Приложении А к [52].

сравнивали с экспериментальными данными для планарных движений «точка-точка»[5] [56]. Аппроксимированные прогнозы траекторий движения, то есть скорости движения по заданным геометрическим траекториям, которые минимизируют функционал стоимости с произвольного порядка n (2.4) по ряду периодических траекторий и сравнивались с предсказаниями степенного закона двух третей и экспериментальными данными [56].

В случае ограниченной модели минимального рывка (n = 3) задача поиска путей, для которых максимально гладкие траектории удовлетворяют двум третям степенная модель изучалась с помощью параметризации пути с эквиаффинным дуги [54, 52]. Необходимое условие для таких путей было получено в виде системы двух дифференциальных уравнений [54, 52]. Известными решениями являются любые двумерные вектор-функции, описывающие параболические формы и окружности [54, 52] и частный случай логарифмической спирали [6, 55]. Траектории с минимальным рывком вдоль параболических путей обеспечивают нулевое значение стоимости (2.1) [51, 52]. Известен не параболические решения (окружность и конкретная логарифмическая спираль) не дают нулевая стоимость.

Любая кривая может быть геометрически параметризована в бесконечном числе различных способы. Широко известная параметризация основана на евклидовой длине дуги. В общем случае геометрическую параметризацию кривой можно реализовать с помощью непрерывное отображение скалярного параметра на кривую.

Пример 2.2. Кривая без точек перегиба может быть параметризована с помощью интеграл евклидовой скорости, взвешенный с евклидовой кривизной, возведенной до определенного степень: σпример $(t) = \int_0^t \dot{\sigma}\ eu(\tau) \cdot [ceu(\sigma eu(\tau))]^{\beta} d\tau$. Эта геометрическая параметриза правомерно для любого β. Это измерение дуги Евклида, когда β = 0 и измерение эквиаффинной дуги при β = 1/3.

Пример дуги σ из примера 2.2 инвариантен относительно евклидовых преобразований. Однако, когда β = 0, он не равен евклидовой длине, которая является интеграл первого порядка дифференциального инварианта в группе плоских евклидовых преобразования. Далее по тексту я также рассматриваю дуги в других подгруппах группа аффинных преобразований.

В данной работе рассматривается задача поиска путей, максимально гладкие траектории которых обеспечивают накопление геометрического параметра с постоянной скоростью для произвольного порядка гладкости n. Выведен класс дифференциальных уравнений, описывающих такие пути. Система двух дифференциальных уравнений соответствует каждому порядку гладкости n. Системы особого интереса и их решения представлены ниже. Часть решений представлена здесь впервые а некоторые известны из более ранних работ, в которых использовалась эквиаффинная параметризация. [51, 52, 6, 55].

---

[5] Кинематические модели двухточечных перемещений на плоскости обычно предполагают, что траектория движения представляет собой прямую линию, скорость и ускорение движения в начальной и конечной точках траектория нулевая.

3 Системы дифференциальных уравнений, общий случай

Рассмотрим n раз дифференцируемую кривую $rL(\sigma) = (x1(\sigma), x2(\sigma), ..., xL(\sigma))$ в L -мерном пространстве, $\sigma \in [0, \Sigma]$. Пусть, не ограничивая общности, $\sigma(t)$ — строго возрастающая[6] и n раз дифференцируемая функция от $t \in [0, T]$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(T) = \Sigma$. Функционал стоимости среднеквадратичной производной [56], связанный с производной n-го порядка кривой и ее параметризацией $\sigma(t)$, определяется следующим образом:

$$J\sigma(rL, n) = \int_0^T \left(\frac{dnx1(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 + \left(\frac{dnx2(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 + ... + \left(\frac{dnxL(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 дт$$

$$\text{"="} \int_0^T \left\| \frac{d}{n} rL(\sigma(t))\, dtn \right\|^2 дт . \quad (3.1)$$

3.1 Траектории движения, обеспечивающие оптимальные траектории с постоянная скорость

При заданной геометрической параметризации σ пути r (кривой, по которой «рисуется» траектория) в L-мерном пространстве через $\tilde{\sigma}$ rL,n(t) я обозначаю временную параметризацию «рисования» пути, обеспечивающего минимальную стоимость $J\sigma$ (rL, n) при ограничениях на границе:

$$\dot\sigma(0) = \dot\sigma(T) = \Sigma/T, \quad \left.\frac{d\,k\sigma}{дтк}\right|_{т=0} \text{"="} \left.\frac{d\,k\sigma}{дтк}\right|_{т=T} = 0,\ к = 2, . . . , п - 1 \quad (3.2)$$

$$\tilde{\sigma}\ rL,n(t) = \arg\min_{\sigma(т)} J\sigma(rL, n),\ t \in [0, T] ,$$

точка обозначает дифференцирование по времени t. Решение задачи оптимизации без ограничений на границе обозначается как σ rL,n(t):

$$\dot\sigma\ rL,n(t) = \arg\min_{\sigma(т)} J\sigma(rL, n),\ t \in [0, T] . \quad (3.3)$$

Для заданной размерности пространства L и порядка дифференцирования n я стремлюсь найти кривые, для которых решение оптимизационной задачи с ограничениями (3.2) обеспечивает постоянную скорость «рисования» кривой:

$$\tilde{A} = rL : \dot{\tilde{\sigma}}\ n, L_{рЛ,}\ n(t) = const = \frac{\Sigma}{T} . \quad (3.4)$$

Также рассматривается задача идентификации кривых по тому же критерию оптимальности, но без граничных условий из (3.2):

$$An, L = rL : \dot\sigma^{*}_{рЛ,}\ n(t) = const = \frac{\Sigma}{T} . \quad (3.5)$$

6Функция σ(t) должна быть строго монотонной. Здесь рассматривается случай строго возрастающей функции, однако такие же результаты можно получить и для строго убывающей функции.

Решения задач и оптимизации (3.3) для кривых из класса $A_{n,L}$ удовлетворяют граничным условиям, установленным в (3.2), по определению, и обе задачи оптимизации минимизируют один и тот же функционал стоимости. Поэтому все решения (кривые), принадлежащие множеству $A_{n,L}$, принадлежат множеству $\tilde{A}_{n,L}$:

$$A_{n,L} \subset \tilde{A}_{n,L} \, . \tag{3.6}$$

Таким образом, необходимым условиям, выведенным для кривых из класса $\tilde{A}_{n,L}$, на самом деле удовлетворяют кривые из обоих классов: $\tilde{A}_{n,L}$ и $A_{n,L}$.

Введем систему двух дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{d^n r}{d\sigma^n}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \frac{d^{n-i} r}{d\sigma^{n-i}} \cdot \frac{d^{n+i} r}{d\sigma^{n+i}} = \text{константа}$$
$$\dot{\sigma}(t)\,|_{t(\sigma)=\sigma} \equiv v(t)\,|_{t(\sigma)=\sigma} = 1 \, , \tag{3.7}$$

точка между двумя векторами обозначает их скалярное произведение. Дифференцирование обеих частей верхнего уравнения в (3.7) приводит к системе, в которой верхнее уравнение представляется просто скалярным произведением производных первого и (2n)-го порядка вектора положения по геометрическому параметру σ:

$$\frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{d^{2n} r}{d\sigma^{2n}} = 0$$
$$\dot{\sigma}(t)\,|_{t(\sigma)=\sigma} \equiv v(t)\,|_{t(\sigma)=\sigma} = 1 \, . \tag{3.8}$$

Я рассматриваю кривые из классов $\tilde{A}_{n,L}$ и $A_{n,L}$ как кандидаты на примитивы геометрического движения. Системы (3.7), (3.8) могут быть использованы как инструмент для идентификации таких кривых, как следует из основного математического результата данной работы:

Предложение 3.1. Кривые из множеств $\tilde{A}_{n,L}$ и $A_{n,L}$, определенных в (3.4) и (3.5) соответственно, обязательно удовлетворяют верхним уравнениям систем (3.7) и (3.8).

Утверждение 3.1 доказано в приложении A. Примеры систем (3.7) и (3.8) вместе с известными решениями демонстрируются для различных геометрических параметризаций в разделах 4, 5 в уравнениях (4.3), (4.10), (4.13), (4.18), (4.22), (5.3), (5.4).

Ряд важных замечаний о системах (3.7), (3.8) и кривых, принадлежащих множествам $\tilde{A}_{n,L}$ и $A_{n,L}$ представлены ниже.

1. Верхнее уравнение в системах (3.7) и (3.8) не зависит от геометрической параметризации кривой. Уравнение выводится из критерия максимальной гладкости траектории (3.2) на основе уравнения Эйлера-Пуассона для вариационных задач. Частные случаи верхней

дифференциальное уравнение для плоских кривых при $n = 2, 3, 4$ и произвольном n приведены[7] в табл. 1. Верхнее уравнение в системах инвариантно относительно произвольных евклидовых преобразований в силу евклидовой инвариантности скалярного произведения.

2. Нижнее уравнение в системах (3.7) и (3.8) зависит от выбора геометрической параметризации. Левая часть нижнего уравнения и геометрический параметр σ из систем инвариантны относительно одного и того же класса геометрических преобразований[8]. Когда система (3.7) или (3.8) решается для идентификации кривых-кандидатов из множеств $\tilde{A}_{n,L}$ и $A_{n,L}$, условие, формализованное нижним уравнением, гарантирует, что решение верхнего уравнения действительно является кривой в L-мерном пространстве и согласуется с параметризацией σ. Пример 3.2 ниже демонстрирует решение верхнего уравнения, которое не согласуется с параметризацией σ и, следовательно, не представляет собой кривую. В случаях, когда кривая описывается вектор-функцией, параметризованной некоторым σ, можно проверить, удовлетворяет ли кривая необходимому условию принадлежности к классам, определенным в (3.4), (3.5). Для этого достаточно проверить, удовлетворяет ли векторное выражение верхнему уравнению из любой из систем (3.7), (3.8), поскольку нижнее уравнение автоматически выполняется для существующих кривых.

3. Использование условий трансверсальности в дополнение к верхнему уравнению в системах (3.7) и (3.8) может дать более узкое необходимое условие принадлежности кривой множеству $A_{n,L}$.

4. Следующее достаточное условие для кривых из множества $\tilde{A}_{3,L}$ было сформулировано ранее для случая минимальной рывковой стоимости ($n = 3$) [52]:

$$\begin{cases} 2r \cdot r^{(4)} + 2p''' \cdot r^{(5)} = \mathrm{const}_0 \cdot r \\ 9p''^2 + 2p' \cdot p''' - 24p'' \cdot p''' = \mathrm{const}_1 \end{cases} \quad \min_{0 \leq \sigma \leq \Sigma} \tag{3.9}$$

Левая часть верхних уравнений системы (3.9) идентична левой части верхнего уравнения в необходимом условии (3.7) и ограничена ограничением на знак константы в правой части.

[7] Функционалы стоимости $J_\sigma(r_L, n)$ для плоской ($L = 2$) и пространственной ($L = 3$) кривых использовались в различных исследованиях двигательного контроля для порядков дифференцирования n, равных 2-4, например. [35, 22, 70, 66, 54, 56, 52, 3, 55].

[8] Например, если параметр σ является евклидовой длиной, уравнение инвариантно относительно евклидовых преобразований. Если параметр σ является эквиаффинной дугой, то нижнее уравнение системы инвариантно относительно эквиаффинных преобразований.

Заказ	Уравнение, пример или общий случай 2x	Производная уравнения x ′ x	Комментарии к уравнению	Известные решения, когда σ является эквиаффинной дугой
2	«2»2 + y x ′ x (3) 2y ′ y (3) = const	(4) + y ′ y (4) = 0	Случай плоскостного критерия «минимального ускорения» в теории управления двигателем	Параболы 2D:
3	«2»2 + y x 2x ′′ x (4) 2y ′′ y (4) +2x ′ x (5) + 2y ′ y (5) = константа	x 'x (6) + y 'y (6) = 0	Случай плоского «минимального рывка» критерий в теории управления двигателем	Параболы, окружности [52, 55], логарифмическая спираль [6, 55]. 3D: Параболическая винтовая линия [52, 55]. 3D: Эллиптическая винтовая линия
4	Икс (4)2 + y (4)2 2x ′′′ x (5) 2y ′′ y (5) +2x ′′ x (6) + 2y ′′ y (6) 2x ′ x (7) 2y ′ y (7) = константа	x 'x (8) + y 'y (8) = 0	Случай плоской «минимальной привязки» критерий в теории управления двигателем	2D: Параболы, окружности, логарифмическая спираль 3D: Параболические и эллиптические винтовые линии
. . .	. . .	. . .		
н	x (н) 2 + y (н) 2 + 2 $\sum_{я=1}^{n-1}$ (1)i (x (n i)x (n+i) (n i) + yy (n+i)) = const (н) 2 + 2 р $\sum_{я=1}^{n-1}$ (1)i г (n i) (n+i) · г = константа	x 'x (2n) + y 'y (2n) = 0 ′ г (2n) = 0 · г	Уравнение для плоского случая. L-мерное пространство. Для трехмерных кривых L = 3.	При L <= n, r = {x1, . . . , xL} ст xк(σ) = $\frac{к\ σ}{к!}$, к = 1, . . . , л; о является равноаффинная дуга в размерности L.

Таблица 1. Верхнее уравнение в системах (3.7), (3.8), которому обязательно удовлетворяют кривые, принадлежащие классам A˜ и An, L относительно σ. Точка между п, л двумя определенные в (3.4) и (3.5) соответственно. Штрих и порядок дифференцирования в скобках соответствуют производной векторами в скобках в строке, соответствующей случаю n, обозначает скалярное произведение векторов. Подробная информация о плоских решениях, упомянутых в таблице 1, представлена в таблице 2. Пространственные решения анализируются в разделе 5.

Пример 3.2. [9] Производная по времени эквиаффинной дуги, называемой эквиаффинной скоростью определяется следующим образом: $v_{ea} = (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^{1/3}$. Производная по времени длины евклидовой дуги определяется как $\dot{\sigma}$ $v_{eu} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Евклидова кривизна в некоторой точке траектории вычисляется следующим образом:

$$c_{eu} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \text{"="} \frac{v_{ea}^3}{v_{eu}^3}$$

и поэтому

$$v_{ea} = v_{eu}\, c_{eu}^{1/3} .$$

Рассмотрим параметризацию с евклидовой кривизной, возведенной в степень β:

$$\tilde{v}_\beta \equiv v_{eu} c_{eu}^{\beta} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2 - 3\beta/2} (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^{\beta} . \quad (3.10)$$

Соответствующий геометрический параметр равен интегральной скорости:

$$\tilde{\sigma}_\beta(t) = \int_{\tau=0}^{t} \tilde{v}_\beta d\tau$$

которая является строго монотонной функцией для кривой без точек перегиба (хотя она не обязательно представляет собой дугу кривой в некоторой геометрии).

Следовательно, $\tilde{\sigma}_\beta$ является законной параметризацией кривой без точек перегиба.

Очевидно, что векторная функция

$$x = \tilde{\sigma}_\beta,\ y = \tilde{\sigma}_\beta^2/2$$

удовлетворяет уравнениям в таблице 1 для $n \geq 2$, поскольку производные от x, y по $\tilde{\sigma}_\beta$, начиная с порядка 3, равны нулю. Однако если взять линейную параметризацию $\tilde{\sigma}_\beta$ по времени, означающую постоянную скорость, скажем, $\tilde{\sigma}_\beta = t$, то $x = t$, $y = t^2/2$, что означает $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 1$. В свою очередь, использование $t = \tilde{\sigma}_\beta$ в (3.10) влечет

$$\tilde{v}_\beta = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2 - 3\beta/2} \cdot 1^\beta = (1 + \tilde{\sigma}_\beta^2)^{1/2 - 3\beta/2} = 1, \text{ когда } \beta = 1/3 .$$

Таким образом, возникает противоречие между параметризацией векторной функции и геометрической параметризацией кривой, которая, казалось бы, может быть определена этой векторной функцией.

Следовательно, векторная функция $\{x = \tilde{\sigma}_\beta, y = \tilde{\sigma}_\beta^2/2\}$ не представляет кривую, параметризованную $\tilde{\sigma}_\beta$, при $\beta \neq 1/3$, а случай $\beta = 1/3$ соответствует параметризации с эквиаффинной дугой.

4 Дуга в геометриях аффинной группы на плоскости и некоторые его подгруппы

Различные виды инвариантности анализировались в исследованиях действия и восприятия движения. Например, предполагаются движения рук из точки в точку.

[9] Основы геометрических понятий, которые используются в примере 3.2, можно найти в другом месте, например. в [64, 28]. Они представлены в рамках управления двигателем в главе 2 [52].

для создания почти прямых путей. Такие формы соответствуют евклидовой инвариантности; более сложные движения анализировались в рамках эквиаффинной и аффинной геометрий, ссылки на соответствующие работы приведены во введении. В этом разделе я привожу системы (3.7), (3.8) для случая модели минимального рывка (n = 3) при постоянной скорости дуги накопления в различных геометриях. Выражения для скорости накопительной дуги, представленные ниже, основаны на результатах работы [64]. Информация о взаимосвязи между полученной системой уравнений (3.7) и возможными решениями сведена в Таблицу 2.

Системы уравнений, представленные в этом разделе, представляют собой частные случаи системы (3.7). Соответствующие частные случаи системы (3.8) можно получить, просто заменив верхнее уравнение скалярным произведением производных 1-го и 6-го порядка вектора положения по соответствующей дуге.

4.1 Эквиаффинная группа

Равноаффинные преобразования координат включают 5 независимых параметров и имеют вид:

$$x1 = \alpha x + \beta y + a \; y1 = \gamma x + \delta y + b, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1 . \tag{4.1}$$

Скорость накопления равноаффинной дуги вычисляется следующим образом [64]:

$$\dot\sigma_{\text{шт.}} "=" \begin{vmatrix} \dot x & \ddot x \\ \dot y & \ddot y \end{vmatrix}^{1/3} \tag{4.2}$$

Система (3.7) при n = 3 (случай модели минимального рывка) на плоскости принимает вид [51, 52, 55]:

$$x'^2 \; \text{const}, x'2y'\;2x''\; xx(4)\; y''2y= 1 y(4) + 2x'\; x(5) + 2y'\; y(5) + y = \tag{4.3}$$

где дифференцирование осуществляется по равноаффинной дуге

$$\sigma ea = \int_0^{\tau} \dot\sigma\; ea(\tau)d\tau . \tag{4.4}$$

Система (4.3) переписывается в (4.10) для случая, когда эквиаффинная кривизна кривой является известной функцией эквиаффинной дуги. Результаты для возможных решений (парабола, окружность, логарифмическая спираль [55]) следующие:

1. Парабола параметризуется эквиаффинной дугой с точностью до эквиаффинной транс ea/ формации следующим образом: $x = \sigma ea$, $y = \sigma^2$ 2. Класс парабол представляет собой очевидное решение (4.3), инвариантное относительно произвольных аффинных преобразований [52, 55]. Рисование парабол с постоянной равноаффинной скоростью минимизирует функционал стоимости (3.1) и обеспечивает нулевую стоимость [51].

Machine Translated by Google

2. Окружность параметризуется равноаффинной дугой следующим образом:

$$3/4\ x = x0\ \text{шт.} + \kappa \cdot \cos(\overline{\kappa ea} \sigma ea) \cdot$$
$$3/4\ y = y0 + \text{шт.}\ \kappa\ \sin(\overline{\kappa ea} \sigma ea)\ . \tag{4.5}$$

Здесь кеа — эквиаффинная кривизна [64, 28, 8] (необходимые предпосылки для текущей схемы приведены в [52]):

$$\kappa ea = x''y''' - x'''y'' \cdot \tag{4.6}$$

Равноаффинная кривизна является положительной константой для эллипсов, включая окружности, нулем для парабол и отрицательной константой для гипербол [64]. Окружность является не инвариантным решением относительно произвольных равноаффинных преобразований, однако окружности являются инвариантными решениями относительно евклидовых преобразований (4.20) (переноса и поворота) [52, 55].

3. Логарифмическая спираль может быть параметризована полярным углом:

$$x = \text{const} \cdot \exp(\beta\phi) \cos\phi\ ,\ y = \text{const} \cdot \exp(\beta\phi) \sin\phi\ . \tag{4.7}$$

Вводя параметризацию с эквиаффинной дугой из (4.2) и интегрируя

$$d\sigma ea/d\phi = (\text{const}2\ (1 + \beta^2))^{1/3} \cdot e^{2\beta\phi/3}$$

приводит к:

$$\phi(\sigma ea) = \ln \frac{3}{2\beta} \frac{2\beta\sigma ea}{2}))\ \ 1/3 + 1 \cdot (\text{const}2\ (1 + \beta\ 3$$

которые можно подставить в (4.7), чтобы получить выражения для x(σea), y(σea).
По-видимому, (4.7) является решением (4.3) только для случая β = ±3/ 7 [6, 55].

Производные 1-го и 3-го порядка вектора положения плоской кривой r(σea) относительно эквиаффинной дуги параллельны. Параллелизм следует из тождества x = 1, которое, в частности, фигурирует в системе (4.3). По-видимому, эквиаффинная кривизна (4.6) кривой является масштабным коэффициентом между производными 1-го и 3-го порядка вектора положения:

$$r'''(\sigma ea) + \kappa(\sigma ea) r'(\sigma ea) = 0$$

откуда следует возможность выражения высших производных вектора r(σea) через его производные 1-го и 2-го порядка, когда эквиаффинная кривизна является известной функцией эквиаффинной длины. В частности,

$$r^{(6)} = r''\ (3\kappa''(\sigma ea) + \kappa^2(\sigma ea)) + r'(\kappa'''(\sigma ea) + 4\kappa'(\sigma ea)\kappa(\sigma ea))\ .$$

Поэтому производная первого порядка верхнего уравнения системы (4.3) (r = 0) может быть переписана

$$r' \cdot r^{(6)} = (r' \cdot r'')(3\kappa''(\sigma ea) + \kappa^2(\sigma ea)) + r^2(\kappa'''(\sigma ea) + 4\kappa'(\sigma ea)\kappa(\sigma ea)) = 0\ . \tag{4.8}$$

Отметив, что р ′ ′′ · г "=" 1 г ′ 2 (г 2 dœa), из уравнения (4.8) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{г}{dœa}(г^2\ \ r \quad ′\ 2\ к\ ′′′(œa) + 4к\ ) = \frac{′ (œa)к(œa)\ 3к\ ′′}{(œa) + к\ 2(œa)} . \tag{4.9}$$

После интегрирования (4.9) систему (4.3) можно переписать следующим образом:

$$′\ 2\ р\ (œa) = rx\ ′\ \ y^2\ (0)\ \exp[\ \ 2\ (F(œa)\ \ \ F(0))] \quad ′′\ \ x\ ′′\ \ y\ ′\ = 1 \ , \tag{4.10}$$

где

$$F(œa) = \frac{к^{«}\ + 4к\ ′\ \ к}{2\ 3к\ ′′\ \ + к} dœa .$$

4.2 Аффинная группа

Аффинные преобразования координат включают 6 независимых параметров и имеют вид:

$$x1 = αx + βy + a\ y1 = γx + δy + b, \quad α\ β\ γ\ δ = 0 . \tag{4.11}$$

Скорость накопления аффинной дуги вычисляется следующим образом10:

$$σ˙_a "=" \frac{\overline{3˙\ σ3_{шт.}\ \cdot\ xd˙\ \ 4x/dt4\ yd˙\ 4y/dt4 \ + 12˙\ σ3_{шт.}\ \cdot\ x˙˙ \ \dddot{Икс}\ \ y˙˙\ \dddot{y}\ \ 5\ \ x˙\ y˙\ \dddot{Икс}\ \dddot{y}^{\ 2}}}{9˙\ σ6_{шт.}} = ˙\ œa\ \ \overline{кеа} , \tag{4.12}$$

где ˙ œa — эквиаффинная скорость (4.2), а кеа — эквиаффинная кривизна (4.6). Система (3.7) при n = 3 на плоскости принимает вид

$$«2»2 + y\,x \quad 2x\ ′′\ \ x\ (4)\ \ \ 2y\ ′′\ \ y\ (4) + 2x\ ′\ \ x\ (5) + 2y\ ′\ \ y\ (5) = \mathrm{const},$$

$$\frac{3(x\ ′\ \ y\ ′′\ \ \ x\ ′′\ \ y\ ′\ ) \cdot \ ′\ x\ y′\ \ Икс(4)\ y(4) \ + 12(x\ ′\ \ y\ ′′\ \ \ x\ ′′\ \ y\ ′\ ) \cdot\ x^{«}\ y^{«}\ \ x"\ y^{«}\ \ 5\ \ ′\ x\ y′\ \ x"\ y^{«}\ ^{2}}{9(x\ 'y\ \ "\ -\ x\ "y\ ')^{2}} = 1 . \tag{4.13}$$

Здесь дифференцирование осуществляется по аффинной дуге σa. Результаты для возможных решений (парабола, окружность, логарифмическая спираль) следующие:

1. Аффинная длина параболы равна нулю, так же как равно-аффинная длина прямой равна нулю или евклидова длина точки равна нулю. Поэтому проверять, являются ли параболы решениями системы (4.13), бессмысленно. Аффинная кривизна параболы не определена.

10Формула для скорости накопления аффинной дуги в [64] содержит опечатку и поэтому отличается от (4.12).

2. Круг. Заметив, что аффинная дуга представляет собой интегрированный квадратный корень из эквиаффинной кривизны(σa = keadσea [64]) и что эквиаффинная кривизна окружности является положительной постоянной, для окружности немедленно получаем: σea = к ea σa $^{1/2}$.
Подставляя в (4.5), получаем:

= x0 + к 3/4шт. $^{3/4}$ · cos(σa) x
+ к шт. sin(σa) y = y0 (4.14)

что является решением системы (4.13). Окружности представляют собой неинвариантные решения относительно произвольного аффинного преобразования. Класс окружностей инвариантен относительно евклидовых преобразований и равномерного масштабирования.

3. Логарифмическая спираль. Скорость накопления аффинной дуги логарифмической спирали (4.7) относительно изменения полярного угла ϕ равна постоянная понижения dσa/dϕ = $\overline{9 + β3^2}$. Итак, без ограничения общности ϕ= 3 / 9 + β 2 σa. Выражение для логарифмической спирали (4.7) принимает вид

x(σa) = const · exp β 3 σa cos 9+β2 3 / 9+β2 σa
(4.15)
y(σa) = const · exp β σa sin 3 9+β2 3 / 9+β2 a .

Логарифмическая спираль удовлетворяет системе (4.13) для β, которые являются решениями уравнения: 5 5β ^{2} + β ^{4} 9β0 ^{6} и существуют действительные решения β = ± 5 ± 2 5.

4.3 Центр-аффинная группа

Центрально-аффинные преобразования координат включают 4 независимых параметра и имеют вид:

x1 = αx + βy y1 = γx + δy , α β γ δ = 0 . (4.16)

Скорость накопления центрально-аффинной дуги вычисляется следующим образом [64]:

σ̇ ок "=" σ̇ 3 шт. / x ẋ y ẏ (4.17)

Система (3.7) при n = 3 на плоскости принимает вид

x «2 ′ ′′ ′ 2 2x ′′ x (4) 2y ′′ y (4) + 2x ′ x (5) + 2y ′ y (5) = const, + yx ′ y ′
x ′′ y ′ = 1 . / x'y xy ' - (4.18)

Дифференцирование проводится по центральной аффинной дуге σca.

Результаты для возможных решений (парабола, окружность, логарифмическая спираль) следующие:

1. Парабола. Из уравнения (4.17) следует, что координаты параболы, параметризованной центрально-аффинной длиной, с точностью до центрально-аффинного преобразования равны: x(σca) = 1/const·exp(σca/ 2), y(σca) = 1/(2const2)·exp(2σca). Эти выражения не удовлетворяют верхнему уравнению системы (4.18).

2. Круг. Используя параметризацию окружности с равноаффинной длиной, как в (4.5), уравнение (4.17) подразумевает, без ограничения общности, что для окружности центрально-аффинная скорость связана с равноаффинной скоростью следующим образом:

$$\dot{\sigma}_{ок}\ \ \dot{\sigma}\ = кеа^{1/8}\cdot\ \ шт.$$

Равноаффинная кривизна окружности есть положительная постоянная. Следовательно, рисование круга с постоянной равноаффинной скоростью эквивалентно рисованию круга с постоянной равноаффинной скоростью. Таким образом, система (4.18) выполняется для любой окружности, поскольку окружности удовлетворяют соответствующей системе уравнений эквиаффинной параметризации.

3. Логарифмическая спираль. Непосредственное вычисление на основе (4.17) означает, что скорость накопления центрально-аффинной дуги относительно изменения полярного угла φ из (4.7) есть следующая константа dσca/dφ = 1 + β2. Без ограничение общности φ = $\frac{1}{\overline{1+\beta^2}}$ σa. Выражение для логарифма микрофонная спираль (4.7) становится

$$x(\sigma ca) = const \cdot \exp \beta\ \ \frac{1}{\overline{1+\beta 2}}\sigma ca \cos\ \ \frac{1}{\overline{1+\beta 2}}\sigma ca \qquad (4.19)$$
$$y(\sigma ca) = const \cdot \exp \beta\ \ \frac{1}{\overline{1+\beta 2}}\sigma ca \sin\ \ \frac{1}{\overline{1+\beta 2}}\sigma ca .$$

Логарифмическая спираль удовлетворяет системе (4.18) при β = ± 5 ± 2 5. Это те же β, что и в случае аффинной группы!

4.4 Евклидова группа

Евклидовы преобразования координат 3-параметрические, они имеют вид:

$$x1 = x \cos(\theta)\ \ y \sin(\theta) + a\ y1 = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) + b\ , \qquad (4.20)$$

Скорость накопления евклидовой дуги, являющаяся стандартным понятием тангенциальной скорости, интеграл которой равен длине прочерченной траектории, вычисляется следующим образом:

$$\dot{\sigma}_{\text{Евклид}} = \overline{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ . \qquad (4.21)$$

Система (3.7) при n = 3 на плоскости принимает вид

$$\frac{x''^2 + y''^2}{x'^2 + y'^2} \quad 2x''\ x^{(4)} \quad 2y''\ y^{(4)} + 2x'\ x^{(5)} + 2y'\ y^{(5)} = \text{const}, \qquad (4.22)$$
$$x'^2 + y'^2 = 1 .$$

Дифференцирование проводится по евклидовой дуге œu. Результаты для возможных решений (парабола, окружность, логарифмическая спираль) следующие:

1. Парабола. Из уравнения (4.21) следует, что координаты параболы, параметризованной евклидовой длиной, с точностью до евклидова преобразования получаются из следующих двух уравнений: $œu(x) = 0{,}5x \sqrt{x^2+1} + 0{,}5 \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $y(x) = x^2/2$. Эти выражения не удовлетворяют системе (4.22) и поэтому движение с постоянной евклидовой скоростью по параболе не минимизирует рывок. Тот же результат можно заключить и из того факта, что траектория рисования параболы с постоянной равноаффинной скоростью (которая минимизирует рывок) отличается от траектории рисования той же фигуры с постоянной евклидовой скоростью, конечно, длительность обеих их траекторий равны.

2. Круг. Движение с постоянной евклидовой скоростью по окружности эквивалентно движению с постоянной угловой скоростью, поэтому оно также эквивалентно движению с постоянной равноаффинной скоростью. Итак, для окружностей выполняется система (4.22).

3. Логарифмическая спираль. Прямое вычисление на основе (4.7) и (4.21) означает, что скорость накопления длины евклидовой дуги по отношению к изменению полярного угла ϕ представляет собой выражение $dœu/dϕ = \sqrt{1 + β^2}\, \exp(βϕ)$. Без ограничения общности $ϕ = \ln \frac{β}{\sqrt{1 + β^2}} œu /β$. Экспресс для логарифмической спирали (4.7) принимает вид

$$x(œu) = \text{const} \cdot \frac{β}{\sqrt{1+β^2}} œu \cos \ln \frac{β}{\sqrt{1+β^2}} œu /β \qquad (4.23)$$
$$y(œu) = \text{const} \cdot \frac{β}{\sqrt{1+β^2}} œu \sin \ln \frac{β}{\sqrt{1+β^2}} œu /β.$$

1 Логарифмическая спираль удовлетворяет системе (4.22) при $β = ± \frac{1}{\sqrt{5}}$. Эти значения β отличаются от значений β в случаях, когда эквиаффинные, аффинные или центрально-аффинные дуги накапливаются с постоянной скоростью, а функционал стоимости минимизируется.

4.5 Псевдорешения

Псевдорешением мы называю вектор-функцию, которая удовлетворяет верхнему уравнению системы (3.7), но не удовлетворяет нижнему уравнению системы. В

Другими словами, вектор-функция не представляет собой кривую для данной геометрической параметризации. Пример 3.2 продемонстрировал векторную функцию, которая решение в эквиаффинной параметризации и только псевдорешение в множестве других параметризаций. Судя по всему, таких примеров больше. Когда $\beta = \pm 5 \pm 2 \quad 5$ (такие же значения β были получены в случаях логарифмической спираль, параметризованная аффинными или центрально-аффинными дугами) следующие два вектора функции:

$$x(\sigma) = \cos(\sigma)\,\mathrm{ch}(\beta\sigma)$$
$$y(\sigma) = \sin(\sigma)\,\mathrm{ch}(\beta\sigma)\,, \qquad (4.24)$$

$$x(\sigma) = \cos(\sigma)\,\mathrm{sh}(\beta\sigma)$$
$$y(\sigma) = \sin(\sigma)\,\mathrm{sh}(\beta\sigma)\,, \qquad (4.25)$$

удовлетворяют верхнему уравнению системы (3.7), но не представляют собой кривую параметризованный любым из вышеупомянутых (равноаффинный, аффинный, центрально-аффинный, Евклидовы) параметризации.

4.6 Резюме известных плоских решений и некоторых псевдорешений

Результаты раздела 4 для решений-кандидатов и псевдорешений в 2 размеры и порядок гладкости траектории n = 3 приведены в табл. 2.

Объект	Инвариантность	Равноаффинный дуга	аффинный дуга	Центр-аффинный дуга	евклидов дуга
Парабола	аффинный	Любой	Не имеет значения	Никто	Никто
Круг	- Евклидово - Равномерное масштабирование	Любой	Любой	Любой	Любой
Логарифмическая – спираль (4.7)	евклидова - Равномерное масштабирование	Когда β = ±3/ 7	Когда β = ± 5 ± 2	Когда β = 5 ± 5 ± 2	Когда β = 5 ± 1/ 5
«кош-спираль» (4.24) «синх-		Псевдорешение	Псевдорешение	Псевдорешение	Псевдо-решение
спираль» (4.25)		Псевдорешение	Псевдорешение	Псевдорешение	Псевдо-решение

Таблица 2. Известные решения и два псевдорешения системы (3.7) и (3.8)) на плоскости при порядке гладкости траектории n = 3 и геометрических параметризациях, инвариантных в аффинной группе и трех ее подгруппах. Инвариантность класс кривых и значение параметра β логарифмической спирали равны указано.

4.7 Достаточ ное у сл овие

Достаточ ное у сл овие (3.9) принадл е жности кривой множе ству A˜ , опре де л е нному в (3.4), выпол няе тся для парабол и окру жносте й. Для л огарифмич е ской спирал и достаточ ное у сл овие выпол няе тся тол ько для ч асти з нач е ний β из табл . 2, как показ ано в табл . 3. Л огарифмич е ские спирал и со з нач е ниями β из табл . 3 являются ре ше ниями з адач и минимиз ации (3.2) с гранич ными у сл овиями11 (они могу т —ре ше ния з адач и минимиз ации бе з гранич ных у сл овий, но э то не доказ ано). Для л огарифмич е ских спирал е й со з нач е ниями β, отсу тству ющими в табл ице 3, сл е ду е т приме нить дру гой те ст, ч тобы опре де л ить, де йствите л ьно л и они принадл е жат множе ству A˜ н, л .

	Равноаффинный дуга	аффинный дуга	Центр-аффинный дуга	евклидов дуга
β	$3/\sqrt{7}$	$5 \pm \sqrt{5}$	$5 \pm \sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$

Табл ица 3: Л огарифмич е ская спирал ь со з нач е ниями β в табл ице у довл е творяе т достаточ ному у сл овию(3.9) для з адач и оптимиз ации (3.2) с гранич ными у сл овиями.

5 Космич е ские ре ше ния для параме триз ации с Тре хме рная равноаффинная ду га

Равноаффинные пре образ ования координат в пространстве вкл юч ают 11 не з ависимых параме тров и име ют вид:

$$x_1 = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z + a \quad y_1 = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z + b \quad z_1 = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} z + c, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 1 . \tag{5.1}$$

Скорость накопл е ния пространстве нной равноаффинной ду ги выч исляе тся сл е ду ющим образ ом [64]:

$$\dot\sigma_{ea3} = \begin{vmatrix} \dot x & \ddot x & \dddot x \\ \dot y & \ddot y & \dddot y \\ \dot z & \ddot z & \dddot z \end{vmatrix}^{1/6} \tag{5.2}$$

Систе ма (3.7) при n = 3 в пространстве принимае т вид

$$\frac{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}{\ldots}\;\; 2x'' x^{(4)} \;\; 2y'' y^{(4)} \;\; 2z'' z^{(4)} + 2x' x^{(5)} + 2y' y^{(5)} + 2z' z^{(5)} = \text{константа},$$

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = 1 , \tag{5.3}$$

11Не обходимым у сл овиям (3.7), (3.8) у довл е творяют ре ше ния как оптимиз ации з адач и: 1) с крае выми у сл овиями (3.2) и 2) бе з крае вых у сл овий (3.3).

или после дифференцирования обеих частей верхнего уравнения в (5.3)

$$x\ 'x\ (6) + y\ \ 'y\ \ (6) + z \quad {}^{\prime}\ {}_{\Gamma}\ ^{(6)} = 0,$$

$$\begin{matrix} {}^{\prime}\ {}_{x} & x^{«} & x^{"} & \\ {}_{\prime} & {}^{"} & {}^{"} & = 1\ . \\ {}^{\prime}\ {}^{\Gamma}_{\Gamma} & y^{"}_{з} & y^{"}_{з} & \end{matrix} \tag{5.4}$$

Дифференцирование осуществляется по пространственной равноаффинной дуге

$$œa3 = \int_{0}^{\tau} σ\ \ ea3(τ)dτ\ . \tag{5.5}$$

Следующие две кривые являются известными решениями системы (5.4).

1. Параболическая винтовая линия [52] параметризуется пространственной равноаффинной дугой с точностью до пространственного равноаффинного преобразования следующим образом:

$$\begin{aligned} &x = œa3 \\ &y \text{ знак равно } œa3\ 2/2 \\ &z \text{ знак равно } œa3\ 3/6\ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

   Очевидно, что параболическая винтовая линия является инвариантным решением относительно произвольных пространственных равноаффинных преобразований. Класс параболических винтовых линий инвариантен относительно произвольных пространственных аффинных преобразований.

2. Эллиптическая винтовая линия параметризована пространственной равноаффинной дугой с точностью до пространственное эквиаффинное преобразование следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{Икс знак равно } α \text{ потому что } α \\ &-1/3œa3\ y \text{ знак равно } α \sin α \\ &-1/3œa3\ z \text{ знак равно } α\ -1/3œa3\ . \end{aligned} \tag{5.7}$$

   Пространственные евклидовы преобразования и пространственный равномерный скейлинг эллиптических винтовых линий также являются решениями системы (5.3). Произвольные равноаффинные преобразования эллиптической винтовой линии вида (5.7) не обязательно будут решениями системы (5.3).

Достаточное условие (3.9) для задачи оптимизации с границами (3.2) 12+3   6 10 выполняется для параболической винтовой линии, когда œa3 находится вне интервала. $\frac{12 \quad 3}{6\ 10}$, $\overline{}$.

Эллиптическая винтовая линия относится к классу решений оптимизационной задачи с краевыми условиями, так как удовлетворяет достаточному условию (3.9).

6 Еще кейсы

Выше были рассмотрены некоторые решения для ряда частных случаев уравнения: размерность L = 2, 3; плавность траектории (3-го порядка); и параметризация в 4 геометриях. Во-первых, решений рассматриваемых уравнений может быть больше. Во-вторых, другие случаи уравнения, например. при порядке гладкости траектории n = 4 может иметь как известные при n = 3, так и другие решения. При эквиаффинной параметризации все параболы и окружности являются решениями для случая n = 4, как и в случае n = 3. Однако решение из класса логарифмических спиралей (при $\beta = \pm(43 \pm 4 \quad 97))$ отличается от логарифмической спирали, которая является решением для случая n = 3 ($\beta = \pm 3/ \quad 7$). Рассмотрение системы уравнений при различных комбинациях размерности, порядка гладкости траектории и геометрической параметризации может привести к большему количеству решений, кандидатура которых на роль геометрических примитивов движения может быть дополнительно проанализирована.

7 Послесловие

Следующее озарение видного математика 20 века Андрея Колмогорова предвосхитило мысль о существовании геометрических примитивов движения [38]: «Если обратиться к человеческой деятельности – сознательной, но не подчиняющейся правилам формальной логики, т. или семи-интуитивной деятельности, например к двигательным реакциям, мы обнаружим, что высокое совершенство и острота механизма непрерывного движения основывается на движениях непрерывного геометрического типа... Можно, однако, считать, что это не радикальное возражение против дискретных механизмов. Скорее всего, интуиция непрерывных кривых в мозгу реализуется на основе дискретного механизма»12.

На мой взгляд, идея Колмогорова означает, что представление кривых в мозгу основано на геометрических примитивах, являющихся частью «дискретных механизмов». Способ представления «непрерывных кривых в мозгу», которые на самом деле состоят из геометрических примитивов, может выходить за рамки планирования траекторий и соответствовать также процессам восприятия и геометрического воображения. Более того, я предполагаю, что на определенном иерархическом уровне познавательных процессов пересекаются «дискретные механизмы» сложных движений и речи. Наблюдения за низкоразмерным представлением движений обезьян, пишущих каракули, с помощью параболических примитивов и конкатенации параболических сегментов в сложные траектории, связанные с вознаграждением [53], подтверждают осуществимость этого предположения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Вывод предложения 3.1.

Дана геометрическая параметризация σ кривой. Правило σ(t) накопления σ со временем вдоль кривой строго монотонно и дифференцируемо столько раз, сколько необходимо. Заметив взаимно однозначное соответствие между t и σ, для функции $\sigma(t) \quad [0, \Sigma]$ определим обратную функцию $t = \tau(\sigma) \quad [0, T]$.

12 Перевод с русского Ф.П.

Используются следующие обозначения:

$$v \quad v(\sigma) \quad \frac{г}{dt}\sigma(t) \quad {}_{= \tau(\sigma)} \quad \dot{\sigma} \quad (t)\big|_{t=\tau(\sigma)} . \tau$$

Далее для дифференцируемой функции f используется следующее свойство, основанное на цепном правиле :

$$\frac{г}{dt}f(\sigma(t)) = \frac{d\sigma}{дт} \cdot \frac{dd\, f(\sigma)}{f(\sigma)} \quad vf' \quad \frac{\dot{\sigma}}{, d\sigma}\, d\sigma \tag{A.1}$$

где штрих означает дифференцирование по σ. Так, например, две производные более высокого порядка от σ по времени будут:

$$ш = ш(\sigma) \quad \frac{2\,д}{dt2}\sigma(t)_{t=\tau(\sigma)} \quad "=" \quad \frac{г}{dt}[v(\sigma(t))]_{t=\tau(\sigma)} \quad = v \frac{г}{d\sigma}{}' \quad v = v \quad v \tag{A.2}$$

$$j = j(\sigma) = \sigma(t)\ dt3\ t=\tau(\sigma) \quad г\,3 \quad v\, d\sigma - dw = v'' \quad v = ' \quad 2\ 2 + вв .$$

Без ограничения общности дальнейшие выводы будут реализованы для траекторий в 2 измерениях. Выводы для траекторий в 3-х и более измерениях идентичны. Итак, рассмотрим Jσ(rL, n) из (3.1) с L = 2 и используем (A.1) для реализации замены переменных:

$$J\sigma(r2, n) = \int_0^T \left(\frac{dnx(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 + \left(\frac{d\,ny(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 дт = \tag{A.3}$$

$$\int_0^{\Sigma} \frac{1}{в} \left[\left(\frac{dnx(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 + \left(\frac{d\,ny(\sigma(t))}{dtn}\right)^2\right]_{\tau = \tau(\sigma)} d\sigma =$$

$$\int_0^{\Sigma} \frac{1}{в} B(x\ ' \ x'', \ldots, '\ ;\ x(п),\ y\ , y'', \ldots, y(п)\ ; v, v', \ldots, v(n \quad 1))\, d\sigma ,$$

где In обозначает выражение, параметризованное с помощью σ:

$$B \quad \left[\left(\frac{dnx(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 + \left(\frac{d\,ny(\sigma(t))}{dtn}\right)^2\right]_{\tau = \tau(\sigma)} . \tag{A.4}$$

Например:

Приме р А.1. В сл у ч ае n = 3 име е м:

$$J\sigma(r2, 3) = \int_0^T (\dots_{\text{Икс}} 2 + \dot{y}^2) дт = \int_0^\Sigma \frac{1}{в} (_{\text{Икс}} «2 + y «2)в\ 6 + 9(x «2»2 + y)ш^{2\,2\,В} + (x ' 2 ' 2 + y)jj^2 + 6(x '''x '' + y '''y '')v\ 4w + 2(x ''' x ' + y '''y ')v^3 + 6(x '' x ' + y '' y ')vwj\ d\sigma =$$

$$\int_0^\Sigma \frac{1}{в} \cdot I3(x', x'', x'''; y', y'', y'''; v, v', v'')\, d\sigma$$

с w, j из (П.2).

Я подх ожу к з адач ам оптимиз ации (3.2) и (3.3) стандартным ме тодом вариационног о исч исл е ния, у равне ние м Э йл е ра-Пу ассона (Э П) с множите л е м Л аг ранжа (наприме р, [23]). Множите л ь Л аг ранжа (λ) испол ьз у е тся, ч тобы г арантировать, ч то

скорость накопл е ния ду г и достижима: $\int_0^\Sigma \frac{d\sigma}{в}$ знак равно T .

$$Э\ П (В/об) = \frac{(In/v)}{v} \quad \frac{г}{d\sigma} \quad \frac{(\ (In/v))}{v'} + \frac{2\ д}{d\sigma 2} \quad \frac{(In/v)}{v''} \quad . . .(A.5)$$

$$+(\ 1)n \ 1 \frac{г\ n \ 1}{d\sigma n \ 1} \quad \frac{(In/v)}{v(n \ 1)} \quad + \frac{}{\lambda \ v} \quad \frac{1}{в} \quad "="$$

$$= v (2n \ 3)(\dots) + v (2n \ 4)(\dots) + . . . + в ' (\dots)$$

$$+в^{2n \ 2} (\dots) + \lambda \frac{}{v} \quad \frac{1}{в} = 0 . \quad (A.6)$$

Все произ водные от v в выраже ниях в скобках (...) в (П.6) име ют порядок ниже , ч е м порядок произ водной от v , у множе нной на скобки. Обратите внимание , ч то ч л е н в (А.6) $v^{2n \ 2}$ пре дставл яе т собой з нач е ние скорости в сте пе ни 2n 2, а не порядок произ водной. Итак, выраже ние

$$v^{2n \ 2} (\dots) + \lambda \frac{}{v} \quad \frac{1}{в}$$

—е динстве нная ч асть (П.6), не соде ржащая произ водных от v. Обоз нач им ч е ре з μn выраже ние в скобках, у множе нное на $v^{2n \ 2}$, так ч то у равне ние Э йл е ра-Пу ассона (П.6) можно пе ре писать сл е ду ющим образ ом:

$$EP(I) = v (2n \ 3)(\dots) + v (2n \ 4)(\dots) + . . . + в ' (\dots) + v\ 2n \ 2\mu n + \lambda \frac{}{v} \quad \frac{1}{в} = 0 \quad (A.7)$$

Те пе рь как

Приме р А.2. Рассмотрим сл у ч ай крите рия минимал ьног о рывка, дру г ими сл овами г л адкости 3-г о порядка. Испол ьз ование произ водных, иде нтич ных произ водным, испол ьз у е мым в

[52], уравнение Эйлера-Пуассона, соответствующее (П.6), будет иметь следующий вид:

в« · (...) + v « · (...) + v ′ · (...) +

4 +в · (x «2 + y «2 2x ′′ x (4) 2y ′′ y (4) + 2x ′ x (5) + 2y ′ y (5)) + λ $\frac{}{v}$ $\frac{1}{в}$ = 0 .

Здесь

′′′ 2 ′′′ 2 + y µ3 = x 2x ′′ x (4) 2y ′′ y (4) + 2x ′ x (5) + 2y ′ y (5) .

Желаемое v для оптимального решения является постоянным согласно (3.4). Следовательно, все производные от v равны нулю, и уравнение Эйлера-Пуассона для желаемого v сводится к следующему:

$$v\, 2n \quad 2\mu n \quad \frac{\lambda}{2\,В} = 0 .$$

Как сказано выше, v, λ постоянны, поэтому при допущении v = 0, которое очевидно имеет место,

$$\mu n = константа. \tag{A.8}$$

Предложение А.3.

µn = x (n) 2 + y (н) 2 2 x (n 1)x (n+1) + y (n 1)y (n+1) + 2 x (n 2)x (n+2) + y (n 2)y (n+2)

+ . . . + (1)n 1 · 2 x ′ x (2n 1) + y ′ y (2n 1) ,

или более формально

µn = x (n) 2 + y (н) 2 + 2 $\sum_{я=1}^{n \; 1}$ (1)i x (n i)x (n+i) (n i) (n+i) + yy , (A.9)

которое является двумерной версией верхнего уравнения системы (3.7).

Доказательство. Чтобы найти выражение для µn , выполните дифференцирование в уравнении Эйлера-Пуассона (П.5). По-видимому, аргумент функционала стоимости из (П.3),

$$\left(\frac{dnx\,(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 + \left(\frac{d\,ny(\sigma(t))}{dtn}\right)^2$$

можно разделить на части x и y, и поэтому функциональный аргумент In уравнения Эйлера-Пуассона также разделим:

$$В = В, x \quad + В, \quad y \;\text{"="}\; \left(\frac{dnx\,(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 + \left(\frac{d\,ny(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 \Bigg|_{т\, =\, т\,(\sigma)} . \tag{A.10}$$

Результат дифференцирования в x части

$$В, x \;\text{"="}\; \left(\frac{dnx\,(\sigma(t))}{dtn}\right)^2 \Bigg|_{т\, =\, т\,(\sigma)} \tag{A.11}$$

идентичен результату дифференцирования в у части In, $y \; "=" \; \frac{d\, ny(\sigma(t))}{dtn}^{2}\Big|_{т = т (\sigma)}$

вплоть до имени аргумента (x заменяется на y).

Таким образом, без ограничения общности, я реализую доказательство только для части x , и мне нужно доказать, что

$$(Э - П)\frac{B, x}{в} = (E - P)\frac{1}{в}\frac{dnx (\sigma(t))}{dtn}^{2}\Big|_{t=\tau (\sigma)} "=" \tag{A.12}$$

$$= v^{2n \;\; 2}\; _{Икс}(н)^{2}\; 2x (n \;\; 1)x (n+1) + 2x (n \;\; 2)x (n+2) + . . . + (\;\; 1)n \;\; 1 \cdot 2x' \;\; x (2n \;\; 1)$$

$$+ в'(. . . .) + v''(. . . .) + . . . + в \;\; (n) (. . . .) + \lambda x \frac{}{v} \frac{1}{в} .$$

Результат для части y , идентичный (A.12), при правильной замене членов x на члены y , описанные выше, немедленно влечет за собой равенство (A.9), которое я доказываю.

Теперь выражение для d nx(σ(t))/dtn будет переписано и параметризовано с помощью σ. Производные по времени от x(σ(t)) с параметрами σ вычисляются следующим образом:

$$\dot{x}\;|_{т = т (\sigma)} \;"="\; \frac{dx}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}\Big|_{т = т (\sigma)}{}' = x в$$

$$\ddot{x}\;|_{т = т (\sigma)} = v \cdot \;\dot{x}\;|_{т = т (\sigma)}{}' = x''в \;\; 2 + x'\;'_{вв}$$

$$\dddot{x}\;|_{т = т (\sigma)} = v \cdot \;\ddot{x}\;|_{т = т (\sigma)}{}' = x'''v^{3} + 3x «в» 2 В\;' + x в''в^{2}\;' \; 2 + v\;_{(Икс}\; в).$$

По индукции можно показать, что

$$\frac{dnx (\sigma(t))}{dtn}\Big|_{т = т (\sigma)} = v^{п-1}\sum_{к=2}^{н}\binom{Н}{К} x (n(k \;\; 1))v (k \;\; 1) (n) + xv + \sum_{я, у >0} в^{(я)} в (к) (...) . \tag{A.13}$$

Выражения, обозначенные (...) и умноженные на v (i)v (j) в (A.13), не имеют значения в наших выводах, поскольку их вклад в предположение будет обнулен в соответствии с In, x о постоянной скорости (v = const).

Из выражения (П.13) для квадрата производной следует:

$$\frac{dnx (\sigma(t))}{dtk}^{2}\Big|_{т = т (\sigma)} = v^{2n \;\; 2}\left(\sum_{к=2}^{н}\binom{Н}{К} x (n(k \;\; 1))v (k \;\; 1) \;\; + x в^{(Н)}\right)^{2} \tag{A.14}$$

$$+ \sum_{я, у >0} (и)\; вв\; (к) (...) = \sum_{я, у >0} (и)\; вв\; (к) (...)$$

$$2n \;\; 2 + v\;_{Икс}(Н)^{2}\; 2 + в\; 2vx(n)n \sum_{к=2}\binom{Н}{К} x (n(k \;\; 1))v (k \;\; 1) \quad .$$

Machine Translated by Google

Итак, для In, x из (П.11)

$$\frac{B, x}{в} = v^{2n-1} \cdot x^{(н)2} + 2 \cdot v^{2n-2} \cdot x^{(н)н} \sum_{к=2}^{н} \binom{н}{к} x^{(n(k-1))v(k-1)} + \sum_{я,\, y>0} (и)\, вв\, (к)\, (\ldots) \quad (A.15)$$

а уравнение Эйлера-Пуассона (П.6) для In, x/v будет иметь следующий вид:

$$(Э-П)\ \frac{B, x}{в} = λx \frac{}{v} \frac{1}{в} + (2n-1)v^{2n-2}\, {}_{Икс}(н)^{2}\ 2 \binom{н}{2} \cdot \frac{г}{dσ} v^{2n-2} \cdot x^{(н)} \cdot x^{(n-1)}$$

$$+ 2 \binom{н}{3} \cdot \frac{г^2}{dσ2} v^{2n-2}\, x^{(n)} \cdot x^{(n-2)} + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot \binom{н}{н} \cdot \frac{д^{n-1}}{dσn-1} x^{2n-2} \cdot x^{(n)} v \cdot {}' + \sum_{я>0} в\, (i)\, (\ldots) =$$

$$\sum_{я>0} в\, (i)\, (\ldots) + λx\, v \frac{}{}\, \frac{1}{в} + (2n-1)v^{2n-2}\, x^{(н)2} +$$

$$2 \sum_{к=2}^{н} (-1)^{k-1} \binom{н}{к} \cdot \frac{d^{k-1}}{dσk-1} v^{2n-2} \cdot x^{(н)} \cdot x^{(п-(к-1))} \quad . \quad (A.16)$$

Значения биномиальных коэффициентов в (П.16) образуют срез треугольника Паскаля без двух чисел на границе. Свойство треугольника Паскаля, которое я ввожу в другом месте, подразумевает, что

$$(2n-1)v^{2n-2}\, {}_{Икс}(н)^{2} + 2 \sum_{к=2}^{n} (-1)^{k-1} \binom{н}{к} \cdot \frac{д^{k-1}}{dσk-1} v^{2n-2} \cdot x^{(н)} \cdot x^{(п-(к-1))} \text{ "=" }$$

$$v^{2n-2}\, {}_{Икс}(н)^{2}\ 2x^{(n-1)}x^{(n+1)} + 2x^{(n-2)}x^{(n+2)} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 2x' x^{(2n-1)}$$

и так

$$(Э-П)\ \frac{B, x}{в} \text{ "=" } \sum_{я>0} в\, (i)\, (\ldots) + λx \frac{}{v} \frac{1}{в} + v^{2n-2}\, {}_{Икс}(н)^{2}\ 2x^{(n-1)}x^{(n+1)} +$$

$$2x^{(n-2)}x^{(n+2)} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 2x' x^{(2n-1)} \quad ,$$

что завершает доказательство предложения A.3, означая, что предложение 3.1 верно. □

Рекомендации

[1] Бруно Б. Авербек, Дэвид А. Кроу, Мэтью В. Чейфи и Апостолос П. Георгопулос, Нейронная активность в префронтальной коре при копировании геометрических фигур 1. Отдельные клетки кодируют форму, последовательность и метрические параметры, Experimental Brain Research 150 (2003), no. 2, 127–141.

[2] ________ , Нейронная активность в префронтальной коре при копировании геометрических фигур 2. декодирование сегментов формы из нейронных ансамблей, Experimental Brain Research 150 (2003), no. 2, 142–153.

[3] Шай Бен-Ицка и Амир Карниел, Критерий минимального ускорения с ограничениями подразумевает релейное управление в качестве основного принципа для оптимальных траекторий движений рук, Neural Computation 20 (2008), no. 3, 779–812.

[4] Даниэль Беннекин, Ронит Фукс, Ален Бертоз и Тамар Флэш, Синхронизация движения и инвариантность возникают из-за нескольких геометрий, PLoS Comput Biol 5 (2009), no. 7.

[5] Эмилио Биззи, Фердинандо А. Мусса-Ивальди и Саймон Гистер, Вычисления, лежащие в основе выполнения движения: биологическая перспектива, Наука 253 (1991), нет. 5017, 287–291.

[6] Идо Брайт, Планирование движения посредством оптимизации, магистерская диссертация, факультет компьютерных наук и прикладной математики, Институт Вейцмана, 2007 г.

[7] E Burdet и TE Milner, Квантование человеческих движений и изучение точных движений, Biol Cybern 78 (1998), 307 – 318.

[8] Эуджениу Калаби, Питер Дж Олвер и Аллен Танненбаум, Аффинная геометрия, кривые потоки и инвариантные численные приближения, Adv. по математике. 124 (1996), 154–196, www: http://www.math.umn.edu/olver/papers.html.

[9] A Casile, E Dayan, V Caggiano, T Hendler, T Flash и MA Giese, Нейронное кодирование кинематических инвариантов человека во время наблюдения за действием, Cereb Cortex 20 (2010), no. 7, 1647–55.

[10] А д'Авелла, А. Портоне, Л. Фернандес и Ф. Лакуанити, Управление быстрыми движениями с помощью комбинаций мышечной синергии, J Neurosci 26 (2006), 7791 – 7810.

[11] А д'Авелла, П. Салтиель и Э. Биззи, Комбинации мышечных синергий в построении естественного двигательного поведения, Nat Neurosci 6 (2003), 300 – 308.

[12] Эран Даян, Антонино Касиле, Нава Левит-Биннун, Мартин Гизе, Тальма Хендлер и Тамар Флэш, Нейронные представления кинематических законов движения: свидетельство связи действия и восприятия, Proc Natl Acad Sci USA 104 (2007), 20582 –20587.

[13] Адам С. Дики, Яли Амит и Николас Г. Хацопулос, Гетерогенное нейронное кодирование корректирующих движений в моторной коре, Frontiers in Neural Circuits 7 (2013), Статья 51.

[14] Laura Dipietro, Howard Poizner, and Hermano I. Krebs, Пространственно-временная динамика обработки коррекции моторики в режиме онлайн, выявленная с помощью электроэнцефалографии высокой плотности, Journal of Cognitive Neuroscience 26 (2014), no. 9, 196–1980.

[15] Доминик Эндреас, Ярон Мейрович, Тамар Флэш и Мартин А. Гизе, Сегментация языка жестов на моторные примитивы с помощью байесовского бинирования, Front Comput Neurosci. 7 (2013), вып. 68.

[16] Поллик Ф.Е., Маоз У., Хэндзел А.А., Гиблин П.Дж., Сапиро Г. и Флэш Т. Трехмерные движения рук с постоянной равноаффинной скоростью, Cortex 45 (2009), 325–39.

[17] А. Фишбах, С. А. Рой, К. Бастианен, Л. Е. Миллер и Дж К. Хоук, Кинематические свойства оперативного исправления ошибок у обезьян, Experimental Brain Research 164 (2005), no. 4, 442–457.

[18] Тамар Флэш и Амир А. Хандзель, Аффинная дифференциальная геометрия траекторий человеческих рук, Тезисы Общества неврологии (1996).

[19] ________, Аффинно-дифференциальный геометрический анализ движений рук человека, Биологическая кибернетика 96 (2007), нет. 6, 577–601.

[20] Тамар Флэш и Илан Хенис, Модификация траектории руки при достижении визуальных целей, Журнал когнитивной нейронауки 3 (1991), нет. 3, 220–230.

[21] Тамар Флэш и Биньямин Хохнер, Моторные примитивы у позвоночных и беспозвоночных, Текущее мнение в нейробиологии 15 (2005), 1–7.

[22] Тамар Флэш и Невилл Хоган, Координация движений рук: экспериментально подтвержденная математическая модель, Журнал неврологии 5 (1985), нет. 7, 1688–1703 гг.

[23] И. Гельфанд, С. Фомин, Вариационное исчисление, Dover Books on Mathe. матика, 2000.

[24] Апостолос П. Георгопулос, Джон Ф. Каласка, Роберто Каминити и Джо Т. Мэсси, О взаимосвязи между направлением двумерных движений рук и разрядом клеток в моторной коре приматов, Журнал неврологии 2 (1982), нет. 11, 1527–1537.

[25] С. Гистер, В. Патил и Ч. Харт, Примитивы, премоторные импульсы и генерация паттернов: комбинированная вычислительная и нейроэтологическая перспектива, Prog Brain Res 165 (2007), 323–346.

Machine Translated by Google

[26] С. Ф. Гистер и С. Б. Харт, Моторные примитивы и синергия в спинном мозге и после травмы — текущее состояние дел, Анналы Нью-Йоркской академии наук (2013), 114–126.

[27] Саймон Ф. Гистер, Фердинандо А. Мусса-Ивальди и Эмилио Биззи, Конвергентные силовые поля, организованные в спинном мозге лягушки, Журнал нейробиологии 13 (1993), нет. 2, 467–491.

[28] Генрих В. Гуггенхаймер, Дифференциальная геометрия, Довер, Нью-Йорк, 1977.

[29] Амир А. Хэндзел и Тамар Флэш, Геометрические методы в изучении моторного контроля человека, Когнитивные исследования, Бюллетень Японского общества когнитивных наук, 6 (1999), нет. 3, 309–321.

[30] Наама Кадмон Харпаз, Тамар Флэш и Илан Динштейн, Масштабно-инвариантное кодирование движения в двигательной системе человека, Нейрон 81 (2014), 452–462 .

[31] CB Hart и SF Giszter, Модульные премоторные приводы и всплески единиц как примитивы для моторного поведения лягушек, журнал = J Neurosci, том = 24, год = 204, страницы = 5269 – 5282 .

[32] Николас Г. Хацопулос и Яли Амит, Синтез представлений фрагментов сложных движений из ансамблей моторной коры, J Physiol Paris 106 (2012), 112 – 119.

[33] Николас Г. Хацопулос, Цинцин Сюй и Яли Амит, Кодирование фрагментов движения в моторной коре , J Neuroscience 27 (2007), no. 19, 5105 – 5114.

[34] С. Хохерман и С.П. Уайз, Влияние траектории движения руки на двигательную корковую активность у бодрствующих макак-резусов, экспериментальное исследование мозга, 83 (1991), нет. 2, 285–302.

[35] Н. Хоган, Принцип организации класса произвольных движений, Дж Неврологи. 83 (1984), вып. 2, 2745–2754.

[36] Ю.П. Явненко, Р.Е . Поппеле и Ф. Лакванити, Пять основных паттернов мышечной активации объясняют мышечную активность во время передвижения человека, J. PhysioL 556 (2004), 267 – 282.

[37] Уильям Дж. Карго и Саймон Ф. Гистер, Быстрая коррекция направленных движений путем суммирования примитивов силового поля, Journal of Neuroscience 20 (2000), no. 1, 409–426.

[38] Андрей Колмогоров, Математика – наука и профессия, Наука, Москва, 1988.

[39] Х.И. Кребс, М.Л . Айзен, Б.Т. 8, 4645–4649.

[40] Франческо Лакуанити, Карло Терцуоло и Паоло Вивиани, Закон, касающийся кинематических и фигуральных аспектов движений рисования, Acta Psychologica 54 (1983), 115–130.

[41] Нава Левит-Биннун, Эдна Шехтман и Тамар Флэш, О сходстве между восприятием и созданием эллиптических траекторий, Экспериментальные исследования мозга, 172 (2006), №. 4, 533–55.

[42] Ури Маоз, Ален Бертоз и Тамар Флэш, Комплексное неограниченное трехмерное движение руки и постоянная равноаффинная скорость, J Neurophysiol 101 (2009), вып. 2, 1002–15.

[43] Ури Маоз и Тамар Флэш, Пространственная постоянная равноаффинная скорость и движение. восприятие, J Neurophysiol 111 (2014), нет. 2, 336–49.

[44] Даниэль В. Моран и Эндрю Б. Шварц, Моторная корковая активность во время рисуночных движений: представление населения во время спирального отслеживания, Журнал нейрофизиологии 82 (1999), 2693–2704.

[45] ________, Представление двигательной корковой активности скорости и направления во время достижения, Журнал нейрофизиологии 82 (1999), 2676-2692.

[46] П. Морассо и Ф. А. Мусса Ивальди, Формирование траектории и почерк: вычислительный режим, Biol Cybern 45 (1982), 131 – 142.

[47] Ф.А. Мусса-Ивальди и Э. Биззи, Моторное обучение посредством комбинации примитивы, Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci 355 (2000), 1755–1769.

[48] Ф.А. Мусса-Ивальди и С.А. Солла, Нейронные примитивы для управления движением, IEEE. J Ocean Eng 29 (2000), 640–650.

[49] Ричард Николс, Биомеханический взгляд на спинальные механизмы скоординированных мышечных действий: принцип архитектуры, Acta Anatomia 151 (1994), 1–13.

[50] Фрэнк Э. Поллик и Гильермо Сапиро, Постоянная аффинная скорость предсказывает 1/3 степенной закон восприятия и генерации плоского движения, Vision Research 37 (1997), вып. 3, 347–353.

[51] Феликс Поляков, Анализ обезьяньих каракулей в процессе обучения в рамках моделей плоскостного движения руки, Факультет компьютерных наук и прикладная математика, Научный институт Вейцмана (2001).

[52] ________, Примитивы и инварианты движения в каракульных движениях обезьяны: анализ и математическое моделирование кинематики движений и нейронной активности, Департамент компьютерных наук и прикладной математики, Институт Вейцмана (2006).

[53] Феликс Поляков, Ротем Дрори, Йорам Бен-Шауль, Моше Абелес и Тамар Flash, компактное представление движений рисования с последовательностями параболические примитивы, PLoS Computational Biology 5 (2009), нет. 7.

[54] Феликс Поляков, Тамар Флэш, Моше Абелес, Йорам Бен-Шаул, Ротем Дрори и Золтан Надасди, Анализ планирования движения и обучения движениям обезьян, записывающим каракули, Материалы десятой раз в два года конференции Международного графономического общества. Университет Неймегена, Неймеген, Нидерланды. (2001), 78–83.

[55] Феликс Поляков, Эран Старк, Ротем Дрори, Моше Абелес и Тамар Флэш, Примитивы параболического движения и корковые состояния: слияние оптимальности с геометрической инвариантностью, Биологическая кибернетика 100 (2009), нет. 2, 159–184.

[56] Магнус Дж Э. Ричардсон и Тамар Флэш, Сравнение плавных движений рук со степенным законом двух третей и связанной с ним гипотезой сегментированного контроля, Journal of Neuroscience 22 (2002), no. 18, 82018211.

[57] Б. Рорер и Н. Хоган, Избегание ложных разложений на поддвижения: глобально оптимальный алгоритм, Biol Cybern 89 (2003), 190 – 199.

[58] ________, Избегая ложных декомпозиций субдвижения: алгоритм рассеяния, Biol Cybern 94 (2006), 409 – 414.

[59] TD Sanger, Движения руки человека, описываемые низкоразмерной суперпозицией основных компонентов, J Neursci 20 (2000), 1066 – 1072.

[60] Эндрю Б. Шварц, Прямая корковая репрезентация рисунка, Science 265 (1994), 540–542.

[61] ________, Моторная активность коры при рисовании: репрезентация популяции при отслеживании синусоид, Journal of Neurophysiology 70 (июль 1992 г.), no. 1, 28–36.

[62] Эндрю Б. Шварц и Даниэль Б. Моран, Моторная корковая активность во время рисуночных движений: представление населения во время отслеживания лемнискаты, Журнал нейрофизиологии 82 (1999), нет. 5, 2705–2718.

[63] Марьям М. Шанечи, Роллин С. Ху, Марисса Пауэрс, Грегори В. Уорнелл, Эмери Н. Браун и Зив М. Уильямс, Нейронное разделение популяции и параллельный интерфейс мозг-машина для последовательной двигательной функции, Nat Neurosci. 15 (2012), вып. 2.

[64] П. А. Широков, А. П. Широков, Аффинная дифференциальная геометрия, ГИФМЛ, М., 1959, нем. изд.: Аффинная дифференциальная геометрия, Тойбнер, 1962.

[65] Курт А. Тороуман и Реза Шадмер, Обучение действию посредством адаптивной комбинации двигательных примитивов, Nature 407 (2000), 742–747, Интересно.

[66] Эмануэль Тодоров и Майкл И. Джордан, Максимизация гладкости по заданному пути точно предсказывает профили скорости сложных движений рук, Журнал нейрофизиологии 80 (1998), нет. 2, 696–714.

[67] MC Tresch, P Saltiel и E Bizzi, Конструкция движения спинным мозгом, Nat Neurosci 2 (1999), 162 – 167.

[68] EJ van Zuylen, CC Gielen, and JJ van der Gon Denier, Координация и неоднородная активация мышц рук человека во время изометрических крутящих моментов, J Neurophysiol 60 (1988), 1523 – 1548.

[69] П. Вивиани и Н. Стукки, Биологические движения выглядят одинаково: свидетельство моторно-перцептивных взаимодействий, Журнал экспериментальной психологии: человеческое восприятие и производительность, 18 (1992), нет. 3, 603–623.

[70] Паоло Вивиани и Тамар Флэш, Минимальный рывок, степенной закон двух третей и изохрония: конвергентные подходы к планированию движения, Журнал экспериментальной психологии: Человеческое восприятие и производительность, 21 (1995), вып. 1, 233–242.

[71] Идо Зельман, Мириам Титон, Йорам Йекутиели, Шломи Ханасси, Биньямин Хохнер и Тамар Флэш, Кинематическая декомпозиция и классификация движений рук осьминога, Frontiers in Computational Neuroscience 7 (2013).