

Capítulo 3

CINEMÁTICA AVANZADA: LA DENAVIT-HARTENBERG CONVENCION

En este capítulo desarrollamos las ecuaciones cinemáticas directas o de configuración para robots rígidos. El problema de la cinemática directa tiene que ver con la relación entre las articulaciones individuales del manipulador del robot y la posición y orientación de la herramienta o efector final. Expresado de manera más formal, el problema de la cinemática directa consiste en determinar la posición y orientación del efector final, dados los valores de las variables conjuntas del robot. Las variables articulares son los ángulos entre los eslabones en el caso de rótulas o rotacionales, y la extensión del eslabón en el caso de prismáticas o deslizantes. El problema de la cinemática directa debe contrastarse con el problema de la cinemática inversa, que se estudiará en el próximo capítulo, y que se ocupa de determinar los valores de las variables articulares que logran una posición y orientación deseadas para el efector final del robot.

3.1 Cadenas cinemáticas

Como se describe en el Capítulo 1, un robot manipulador se compone de un conjunto de enlaces conectados entre sí por varias articulaciones. Las articulaciones pueden ser muy simples, como una articulación giratoria o prismática, o pueden ser más complejas, como una articulación esférica.

(Recuerde que una articulación giratoria es como una bisagra y permite una rotación relativa alrededor de un solo eje, y una articulación prismática permite un movimiento lineal a lo largo de un solo eje, es decir, una extensión o retracción). La diferencia entre las dos situaciones es que, en En el primer caso, la articulación tiene un solo grado de libertad de movimiento: el ángulo de rotación en el caso de una articulación giratoria y la cantidad de desplazamiento lineal en el caso de una articulación prismática. Por el contrario, una articulación de rótula tiene dos grados de libertad. En este libro se supone que todas las juntas tienen un solo grado de libertad. Nótese que la suposición

62CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA AVANZADA: LA CONVENCION DE DENAVIT-HARTENBERG

no implica ninguna pérdida real de generalidad, ya que las articulaciones como una rótula (dos grados de libertad) o una muñeca esférica (tres grados de libertad) siempre se pueden considerar como una sucesión de un solo grado. nudos de libertad con eslabones de longitud cero en el medio.

Con la suposición de que cada articulación tiene un solo grado de libertad, la acción de cada articulación puede describirse mediante un solo número real: el ángulo de rotación en el caso de una articulación giratoria o el desplazamiento en el caso de una prismática. articulación. El objetivo del análisis cinemático directo es determinar el efecto acumulativo del conjunto completo de variables conjuntas.

En este capítulo desarrollaremos un conjunto de convenciones que proporcionan un procedimiento sistemático para realizar este análisis. Por supuesto, es posible llevar a cabo un análisis de cinemática directa incluso sin respetar estas convenciones, como hicimos para el ejemplo del manipulador plano de dos vínculos en el Capítulo 1. Sin embargo, el análisis cinemático de un manipulador de n vínculos puede ser extremadamente complejo y las convenciones que se presentan a continuación simplifican considerablemente el análisis. Además, dan lugar a un lenguaje universal con el que los ingenieros de robots pueden comunicarse.

Un robot manipulador con n articulaciones tendrá $n + 1$ enlaces, ya que cada articulación conecta dos enlaces. Numeramos los nudos del 1 al n , y numeramos los eslabones del 0 al n , comenzando desde la base. Por esta convención, la articulación i conecta el enlace $i - 1$ al enlace i . Consideraremos que la ubicación de la articulación i es fija con respecto al vínculo $i - 1$. Cuando se acciona la articulación i , el vínculo i se mueve. Por lo tanto, el eslabón 0 (el primer eslabón) está fijo y no se mueve cuando se accionan las articulaciones. Por supuesto, el robot manipulador podría ser móvil (por ejemplo, podría montarse en una plataforma móvil o en un vehículo autónomo), pero no consideraremos este caso en el presente capítulo, ya que puede manejarse fácilmente ampliando ligeramente las técnicas. presentado aquí. th con el i

conjunta, asociamos una variable conjunta, denotada por q_i . En el caso de una articulación giratoria, q_i es el ángulo de rotación, y en el caso de una articulación prismática, q_i es el desplazamiento de la articulación:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{articulación } i \text{ giratoria} \\ d_i & \text{articulación } i \text{ prismática} \end{cases} \quad (3.1)$$

Para realizar el análisis cinemático, adjuntamos rigidamente un marco de coordenadas a cada enlace. En particular, adjunto oixiyizi al enlace i . Esto significa que, sea cual sea el movimiento del robot se ejecuta, las coordenadas de cada punto en el vínculo i son constantes cuando se expresan en el marco de coordenadas i . Además, cuando se activa la articulación i , el eslabón i y su marco adjunto, oixiyizi, experimentan un movimiento resultante. El marco o0x0y0z0, que está unido a la base del robot, se denomina marco inercial. La Figura 3.1 ilustra la idea de unir marcos rigidamente a los eslabones en el caso de un manipulador de codo.

Ahora supongamos que A_i es la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y orientación de oixiyizi con respecto a o $i-1$ x $i-1$ y $i-1$ z $i-1$. La matriz A_i no es constante, sino que varía a medida que cambia la configuración del robot. Sin embargo, la suposición de que todas las articulaciones son giratorias o prismáticas significa que A_i es una función de una única variable conjunta, a saber, q_i . En otras palabras,

$$A_i = A_i(q_i). \quad (3.2)$$

3.1. CADENAS CINEMATICAS

63

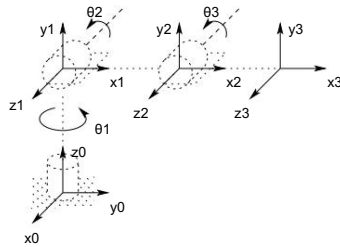


Figura 3.1: Marcos de coordenadas adjuntos al manipulador de codo.

Ahora bien, la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y orientación de $o_j x_j y_j z_j$ con respecto a $o_i x_i y_i z_i$ se denomina, por convención, matriz de transformación, y se denota por T_{ji}^i . Del capítulo 2 vemos que

$$\begin{aligned} T_{ji}^i &= A_{i+1} A_{i+2} \dots A_j^{-1} A_j \text{ si } i < j = I \text{ si } i = j \\ T_{ji}^i &= (T_{ji}^i)^{-1} \text{ si } j > i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por la forma en que hemos unido rigidamente los diversos marcos a los enlaces correspondientes, se deduce que la posición de cualquier punto en el efector final, cuando se expresa en el marco n , es una constante independiente de la configuración del robot. Denotar la posición y orientación del efector final con respecto al marco inercial o base por un vector de tres (que da las coordenadas del origen del marco ${}^0_{en}$ del efector final con respecto al y y definir la transformación homogénea marco base) y la matriz de rotación de 3×3 matriz R_0 .

$$H = \begin{pmatrix} R_0 & {}^0_{en} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Entonces, la posición y orientación del efector final en el marco inercial están dadas por

$$H = T_{0n}^0 = A_1(q_1) \dots A_n(q_n). \quad (3.5)$$

Cada transformación homogénea A_i es de la forma

$$A_i = \begin{pmatrix} R_{ji}^{-1} & {}^{o_{j-1}}_{o_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Por eso

$$T_{ji}^i = A_{i+1} \dots A_j = \begin{pmatrix} T_{ji}^i & {}^{o_{j-1}}_{o_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

64CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA AVANZADA: LA CONVENCION DE DENAVIT-HARTENBERG

La matriz R_i expresa la orientación de $o_j x_j y_j z_j$ relativa a $o_i x_i y_i z_i$ y está dada por las partes rotacionales de las matrices A como

$$R_j^i = R_{y_{j+1}}^i \dots R_{y_j}^{j-1} \quad (3.8)$$

Los vectores de coordenadas ${}^i_{o_j}$ están dados recursivamente por la fórmula j

$${}^i_{o_j} = {}^{o_{j-1}}_{-1}^i + R_{y_{j-1}}^i {}^{o_{j-1}}_{-1}^{j-1} \quad (3.9)$$

Estas expresiones serán útiles en el Capítulo 5 cuando estudiemos las matrices jacobianas.

En principio, ¡eso es todo lo que hay que hacer para la cinemática directa! Determine las funciones $A_i(q_i)$ y multiplíquelas según sea necesario. Sin embargo, es posible lograr una cantidad considerable de racionalización y simplificación mediante la introducción de convenciones adicionales, como la representación Denavit-Hartenberg de un nudo, y este es el objetivo del resto del capítulo.

3.2 Representación de Denavit Hartenberg

Si bien es posible realizar todo el análisis de este capítulo usando un marco arbitrario adjunto a cada enlace, es útil ser sistemático en la elección de estos marcos. Una convención comúnmente utilizada para seleccionar marcos de referencia en aplicaciones robóticas es la convención Denavit-Hartenberg o DH. En esta convención, cada transformación homogénea A_i se representa como un producto de cuatro transformaciones básicas

$$\begin{aligned} A_i &= Rot_z, \theta_i Trans_z, d_i Trans_x, a_i Rot_x, \alpha_i \\ &= \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 & c\theta_i & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s\theta_i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & c\alpha_i & s\theta_i & s\alpha_i & a_i c\theta_i & s\theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_i & c\alpha_i & -c\theta_i & s\alpha_i & a_i s\theta_i & d_i & 0 & c\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde las cuatro cantidades θ_i , α_i , d_i y a_i son los parámetros asociados con el vínculo i y el nudo i . Los cuatro parámetros a_i y θ_i en (3.10) generalmente reciben los nombres de longitud de enlace, torsión de enlace, desplazamiento de enlace y ángulo de unión, respectivamente. Estos nombres se derivan de aspectos específicos de la relación geométrica entre dos marcos de coordenadas, como se verá a continuación. Dado que la matriz A_i es una función de una sola variable, resulta que tres de las cuatro cantidades anteriores son constantes para un vínculo dado, mientras que el cuarto parámetro, θ_i para una articulación giratoria y d_i para una articulación prismática, es la variable conjunta.

Del Capítulo 2 se puede ver que una matriz de transformación homogénea arbitraria se puede caracterizar por seis números, como, por ejemplo, tres números para especificar el

3.2. REPRESENTACIÓN DE DENAVIT HARTENBERG

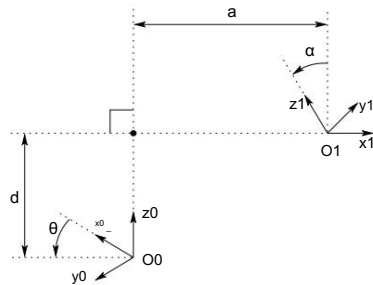


Figura 3.2: Marcos de coordenadas que satisfacen los supuestos DH1 y DH2.

cuarta columna de la matriz y tres ángulos de Euler para especificar la matriz de rotación superior izquierda de 3×3 . En la representación DH, en cambio, sólo hay cuatro parámetros. ¿Cómo es esto posible? La respuesta es que, si bien se requiere que el marco i esté unido rígidamente al vínculo i , tenemos una libertad considerable para elegir el origen y los ejes de coordenadas del marco. Por ejemplo, no es necesario que el origen, o_i , de la trama i se coloque en el extremo físico del enlace i . De hecho, ni siquiera es necesario que el marco i se coloque dentro del enlace físico; el marco i podría estar en el espacio libre, siempre que el marco i esté rígidamente unido al eslabón i . Mediante una elección inteligente del origen y los ejes de coordenadas, es posible reducir el número de parámetros necesarios de seis a cuatro (o incluso menos en algunos casos). En la Sección 3.2.1 mostraremos por qué y bajo qué condiciones se puede hacer esto, y en la Sección 3.2.2 mostraremos exactamente cómo hacer las asignaciones de marcos de coordenadas.

3.2.1 Cuestiones de existencia y singularidad

Claramente, no es posible representar ninguna transformación homogénea arbitraria usando solo cuatro parámetros. Por lo tanto, comenzamos por determinar qué transformaciones homogéneas pueden expresarse en la forma (3.10). Supongamos que nos dan dos marcos, indicados por los marcos 0 y 1, respectivamente. Entonces existe una única matriz de transformación homogénea A que toma las coordenadas del marco 1 en las del marco 0. Ahora suponga que los dos marcos tienen dos características adicionales, a saber:

(DH1) El eje x_1 es perpendicular al eje z_0

(DH2) El eje x_1 corta al eje z_0

como se muestra en la Figura 3.2. Bajo estas condiciones, afirmamos que existen números únicos a , d , θ , α tales que

$$A = \text{Rot}_z, \theta \text{Trans}_z, d \text{Trans}_x, a \text{Rot}_x, \alpha. \quad (3.11)$$

66CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA AVANZADA: LA CONVENCION DE DENAVIT-HARTENBERG

Por supuesto, dado que θ y α son ángulos, en realidad queremos decir que son únicos dentro de un múltiplo de 2π . Para mostrar que la matriz A se puede escribir de esta forma, escriba A como

$$A = \begin{bmatrix} R_{01} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

y denotemos con r_{ij} la i -ésima columna de la matriz de rotación R_{01} . Ahora examinaremos la implicaciones de las dos restricciones DH.

Si (DH1) se cumple, entonces x_1 es perpendicular a z_0 y tenemos $x_1 \cdot z_0 = 0$. Expresando esta restricción con respecto a $o_0x_0y_0z_0$, usando el hecho de que r_1 es la representación del vector unitario x_1 con respecto al marco 0, tenemos obtener

$$0 = x_1 \cdot z_0 = r_1 \cdot z_0 \quad (3.13)$$

$$= [r_{11}, r_{21}, r_{31}]^T \cdot [0, 0, 1]^T \quad (3.14)$$

$$= r_{31}. \quad (3.15)$$

Como $r_{31} = 0$, ahora solo necesitamos mostrar que existen ángulos únicos θ y α tales que

$$R_{01}^a = R_{x, \theta} R_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta c\alpha & s\theta s\alpha \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\alpha \\ s\alpha & c\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La única información que tenemos es que $r_{31} = 0$, pero esto es suficiente. Primero, dado que cada fila y columna de R_{01} debe tener una unidad de longitud, $r_{31} = 0$ implica que

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1, \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por lo tanto, existen únicos θ , α tales que

$$(r_{11}, r_{21}) = (c\theta, s\theta), \quad (r_{13}, r_{23}) = (c\alpha, s\alpha). \quad (3.18)$$

Una vez que se encuentran θ y α , es rutinario mostrar que los elementos restantes de R_{01} deben tener la forma que se muestra en (3.16), usando el hecho de que R_{01} es una matriz de rotación.

Luego, la suposición (DH2) significa que el desplazamiento entre o_0 y o_1 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores z_0 y x_1 . Esto se puede escribir como $o_1 = o_0 + dz_0 + ax_1$. Nuevamente, podemos expresar esta relación en las coordenadas de $o_0x_0y_0z_0$, y obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$= \begin{bmatrix} ac\theta \\ as\theta \\ d \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Combinando los resultados anteriores, obtenemos (3.10) como se afirma. Así, vemos que cuatro parámetros son suficientes para especificar cualquier transformación homogénea que satisfaga las restricciones (DH1) y (DH2).

Ahora que hemos establecido que cada matriz de transformación homogénea que satisface las condiciones (DH1) y (DH2) anteriores se puede representar en la forma (3.10), de hecho podemos dar una interpretación física a cada una de las cuatro cantidades en (3.10). El parámetro a es la distancia entre los ejes z_0 y z_1 , y se mide a lo largo del eje x_1 . El ángulo α es el ángulo entre los ejes z_0 y z_1 , medido en un plano normal a x_1 . El sentido positivo de α se determina de z_0 a z_1 mediante la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura 3.3. El

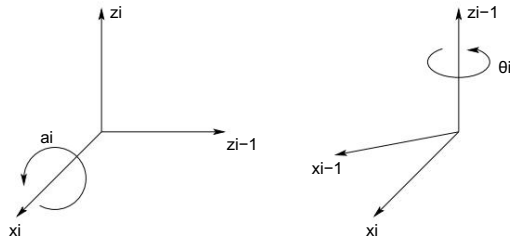


Figura 3.3: Sentido positivo de α_i y θ_i .

el parámetro d es la distancia entre el origen o_0 y la intersección del eje x_1 con z_0 medida a lo largo del eje z_0 . Finalmente, θ es el ángulo entre x_0 y x_1 medido en un plano normal a z_0 . Estas interpretaciones físicas resultarán útiles para desarrollar un procedimiento para asignar marcos de coordenadas que satisfagan las restricciones (DH1) y (DH2), y ahora centraremos nuestra atención en desarrollar dicho procedimiento.

3.2.2 Asignación de los marcos de coordenadas

Para un manipulador de robot dado, siempre se pueden elegir los marcos $0, \dots, n$ de tal manera que se cumplan las dos condiciones anteriores. En ciertas circunstancias, esto requerirá colocar el origen o_i del marco i en una ubicación que puede no ser intuitivamente satisfactoria, pero normalmente este no será el caso. Al leer el material a continuación, es importante tener en cuenta que las opciones de los diversos marcos de coordenadas no son únicas, incluso cuando están limitadas por los requisitos anteriores. Por lo tanto, es posible que diferentes ingenieros obtengan asignaciones de marcos de coordenadas diferentes, pero igualmente correctas, para los enlaces del robot. Es muy importante notar, sin embargo, que el resultado final (es decir, la matriz T de la asignación de marcos de enlace 0T_n) será el mismo, independientemente intermedios (asumiendo que los marcos de coordenadas para el enlace n coinciden). Comenzaremos por derivar el procedimiento general. A continuación, discutir varios casos especiales comunes donde es posible simplificar aún más la matriz de transformación homogénea.

Para empezar, tenga en cuenta que la elección de z_i es arbitraria. En particular, de (3.16) vemos que al elegir α_i y θ_i apropiadamente, podemos obtener cualquier dirección arbitraria para z_i . Así, para nuestro primer paso, asignamos los ejes $z_0, \dots, z_{n-1}$ de una manera intuitivamente agradable. En concreto, asignamos a z_i el eje de actuación de la articulación $i+1$. Así, z_0 es el eje de actuación de la articulación 1, z_1 es el eje de actuación de la articulación 2, etc. Hay dos casos a considerar: (i) si la articulación $i+1$ es giratoria, z_i es el eje de revolución de la articulación $i+1$; (ii) si el nudo $i+1$ es prismático, z_i es el eje de traslación del nudo $i+1$. Al principio puede parecer un poco confuso asociar z_i con la articulación $i+1$, pero recuerde que esto satisface la convención que establecimos en la Sección 3.1, a saber, que la articulación i está fija con respecto al marco i , y que cuando la articulación i se activa, enlace i y su marco adjunto, oixiyizi, experimentan un movimiento resultante.

Una vez que hemos establecido los ejes z para los enlaces, establecemos el marco base. La elección de un marco base es casi arbitraria. Podemos elegir que el origen o_0 del marco base sea cualquier punto en z_0 . Luego elegimos x_0, y_0 de cualquier manera conveniente siempre que el marco resultante sea diestro. Esto configura el cuadro 0.

Una vez que se ha establecido el marco 0, comenzamos un proceso iterativo en el que definimos el marco i usando el marco $i-1$, comenzando con el marco 1. La figura 3.4 será útil para comprender el proceso que ahora describimos.

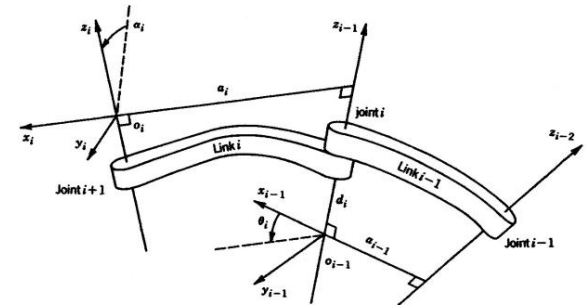


Figura 3.4: Asignación de tramas Denavit-Hartenberg.

Para configurar el marco i es necesario considerar tres casos: (i) los ejes z_{i-1}, z_i no son coplanares, (ii) los ejes z_{i-1}, z_i se intersectan (iii) los ejes z_{i-1}, z_i son paralelos. Tenga en cuenta que en ambos casos (ii) y (iii) los ejes z_{i-1} y z_i son coplanares. De hecho, esta situación es bastante común, como veremos en la Sección 3.3. Consideremos ahora cada uno de estos tres casos.

(i) z_{i-1} y z_i no son coplanares: si z_{i-1} y z_i no son coplanares, entonces existe un único segmento de línea perpendicular tanto a z_{i-1} como a z_i tal que conecta ambas líneas y tiene una longitud mínima. La línea que contiene esta normal común a z_{i-1} y z_i define x_i .

3.2. REPRESENTACIÓN DE DENAVIT HARTENBERG

69

y el punto donde esta línea se cruza con z_i es el origen de o_i . Por construcción, ambas condiciones (DH1) y (DH2) se cumplen y el vector de o_{i-1} a o_i es una combinación lineal de z_{i-1} y x_i . La especificación del marco i se completa eligiendo el eje y_i para formar un marco de la derecha. Dado que se cumplen los supuestos (DH1) y (DH2), la matriz de transformación homogénea A_i tiene la forma (3.10).

(ii) z_{i-1} es paralelo a z_i : si los ejes z_{i-1} y z_i son paralelos, entonces hay infinitas normales comunes entre ellos y la condición (DH1) no especifica x_i por completo.

En este caso, somos libres de elegir el origen o_i en cualquier lugar a lo largo de z_i . A menudo se elige o_i para simplificar las ecuaciones resultantes. Entonces, el eje x_i se elige para que esté dirigido desde o_i hacia z_{i-1} , a lo largo de la normal común, o como el opuesto de este vector. Un método común para elegir o_i es elegir la normal que pasa por o_{i-1} como el eje x_i ; o_i es entonces el punto de intersección de esta normal con z_i . En este caso, d_i sería igual a cero.

Una vez que se fija x_i , se determina y_i , como de costumbre, por la regla de la mano derecha. Como los ejes z_{i-1} y z_i son paralelos, a_i será cero en este caso.

(iii) z_{i-1} corta a z_i : En este caso, x_i se elige normal al plano formado por z_i y z_{i-1} . La dirección positiva de x_i es arbitraria. La elección más natural para el origen de o_i en este caso está en el punto de intersección de z_i y z_{i-1} . Sin embargo, cualquier punto conveniente a lo largo del eje z_i es suficiente. Tenga en cuenta que en este caso el parámetro a_i es igual a 0.

Este procedimiento constructivo funciona para tramas $0, \dots, n-1$ en un robot de enlace n . Para completar la construcción, es necesario especificar el marco n . El sistema de coordenadas final $o_n x_n y_n z_n$ se conoce comúnmente como el marco de herramienta o efector final (consulte la figura 3.5). El origen

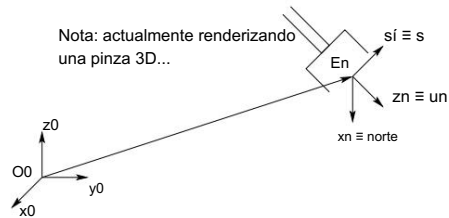


Figura 3.5: Asignación de cuadros de herramientas.

en la mayoría de los casos se coloca simétricamente entre los dedos de la pinza. Los vectores unitarios a lo largo de los ejes x_n , y_n y z_n están etiquetados como n , s y a , respectivamente. La terminología surge del hecho de que la dirección a es la dirección de aproximación, en el sentido de que la pinza normalmente se acerca a un objeto a lo largo de la dirección a . De manera similar, la dirección s es la dirección de deslizamiento, la dirección a a lo largo de la cual los dedos de la pinza se deslizan para abrirse y cerrarse, y n es la dirección normal al plano formado por a y s .

70CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA AVANZADA: LA CONVENCIÓN DE DENAVIT-HARTENBERG

En los robots contemporáneos, el movimiento articular final es una rotación del efector final por θ_n y los dos ejes finales articulares, z_{n-1} y z_n , coinciden. En este caso, la transformación entre los dos marcos de coordenadas finales es una traslación a lo largo de z_{n-1} por una distancia d_n seguida (o precedida) por una rotación de θ_n radianes sobre z_{n-1} . Esta es una observación importante que simplificará el cálculo de la cinemática inversa en el próximo capítulo.

Finalmente, tenga en cuenta el siguiente hecho importante. En todos los casos, ya sea que la articulación en cuestión sea giratoria o prismática, las cantidades a_i y d_i son siempre constantes para todo i y son características del manipulador. Si la articulación i es prismática, entonces θ_i también es una constante, mientras que d_i es la i variable conjunta. De manera similar, si el eje i es giratorio, entonces d_i es constante y θ_i es la i variable del eje i .

3.2.3 Resumen

Podemos resumir el procedimiento anterior basado en la convención DH en el siguiente algoritmo para derivar la cinemática directa para cualquier manipulador.

Paso 1: Ubique y etiquete los ejes de articulación $z_0, \dots, z_{n-1}$.

Paso 2: Establezca el marco base. Establezca el origen en cualquier lugar del eje z_0 . El x_0 y el y_0 los ejes se eligen convenientemente para formar un marco de mano derecha.

Para $i = 1, \dots, n-1$, realice los pasos 3 a 5.

Paso 3: Ubique el origen o_i donde la normal común a z_i y z_{i-1} intersecta a z_i . Si z_i se interseca con z_{i-1} , localice o_i en esta intersección. Si z_i y z_{i-1} son paralelos, ubique o_i en cualquier posición conveniente a lo largo de z_i .

Paso 4: Establezca x_i a lo largo de la normal común entre z_{i-1} y z_i a través de o_i , o en la dirección normal al plano $z_{i-1} - z_i$ si z_{i-1} y z_i se cruzan.

Paso 5: Establezca y_i para completar un marco de mano derecha.

Paso 6: establezca el marco del efector final en $x_n y_n z_n$. Suponiendo que la n -ésima articulación es giratoria, establezca $z_n = a$ a lo largo de la dirección z_{n-1} . Establezca el origen en convenientemente a lo largo de z_n , preferiblemente en el centro de la pinza o en la punta de cualquier herramienta que lleve el manipulador. Establezca $y_n = s$ en la dirección del cierre de la pinza y establezca $x_n = n$ como $s \times a$. Si la herramienta no es una pinza simple, ajuste x_n e y_n convenientemente para formar un marco de mano derecha.

Paso 7: Cree una tabla de parámetros de enlace $a_i, d_i, \theta_i, \dot{\theta}_i$.

a_i = distancia a lo largo de x_i desde o_i hasta la intersección de los ejes x_i y z_{i-1} . d_i = distancia

a lo largo de z_{i-1} desde o_{i-1} hasta la intersección de los ejes x_i y z_{i-1} . d_i es variable si la articulación i es prismática.

θ_i = el ángulo entre z_{i-1} y z_i medido con respecto a x_i (ver Figura 3.3).

3.3. EJEMPLOS

71

θ_i = el ángulo entre x_{i-1} y x_i medido con respecto a z_{i-1} (ver Figura 3.3). θ_i es variable si la articulación i es giratoria.

Paso 8: Forme las matrices de transformación homogéneas A_i sustituyendo los parámetros anteriores en (3.10).

Paso 9: Formulario $T_n^0 = A_1 \cdots A_n$. Esto luego da la posición y orientación de la herramienta. marco expresado en coordenadas base.

3.3 Ejemplos

En la convención DH, el único ángulo variable es θ , por lo que simplificamos la notación escribiendo c_i para $\cos \theta_i$, etc. También denotamos $\theta_1 + \theta_2$ como θ_{12} y $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ como c_{12} , y así sucesivamente. En los siguientes ejemplos, es importante recordar que la convención DH, aunque sistemática, aún permite una libertad considerable en la elección de algunos de los parámetros del manipulador. Esto es particularmente cierto en el caso de ejes de articulaciones paralelas o cuando se trata de articulaciones prismáticas.

Ejemplo 3.1 Manipulador de codo plano Considere el brazo plano de dos vínculos de la figura 3.6. Los ejes de articulación z_0 y z_1 son normales a

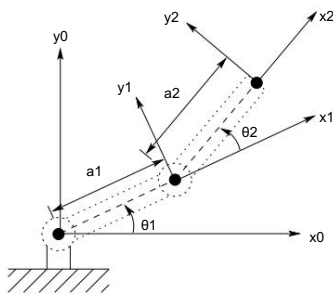


Figura 3.6: Manipulador plano de dos vínculos. Todos los ejes z apuntan fuera de la página y no se muestran en la figura.

la página. Establezcamos el marco base $o_0x_0y_0z_0$ como se muestra. El origen se elige en el punto de intersección del eje z_0 con la página y la dirección del eje x_0 es completamente arbitraria. Una vez que se establece el marco base, el marco $o_1x_1y_1z_1$ se fija como se muestra en la convención DH, donde el origen o_1 se ha ubicado en la intersección de z_1 y la página.

El cuadro final $o_2x_2y_2z_2$ se fija eligiendo el origen o_2 al final del enlace 2 como se muestra.

Los parámetros del enlace se muestran en la Tabla 3.1. Las matrices A se determinan a partir de (3.10) como

72CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA AVANZADA: LA CONVENCIÓN DE DENAVIT-HARTENBERG

Tabla 3.1: Parámetros de enlace para manipulador plano de 2 enlaces.

Enlace	a_i	d_i	θ_i	a_{i+1}	d_{i+1}	θ_{i+1}	a_{i+2}
1							
2							

variable

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 & c_1 & s_1 & c_1 \\ 0 & a_1 s_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 & c_2 & s_2 & c_2 \\ 0 & a_2 s_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Las matrices T están dadas por lo tanto por

$$T_1^0 = A_1. \quad (3.24)$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} & c_{12} & 0 \\ s_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Observe que las dos primeras entradas de la última columna de T_2^0 son las componentes x e y de el origen o_2 en el marco base; eso es,

$$\begin{aligned} x &= a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ y &= a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \quad (3.26)$$

son las coordenadas del efector final en el marco base. La parte rotacional de la orientación T del 2^0 da el marco $o_2x_2y_2z_2$ en relación con el marco base.

Ejemplo 3.2 Robot cilíndrico de tres vínculos Considere ahora

el robot cilíndrico de tres vínculos representado simbólicamente en la figura 3.7. Establezcamos o_0 como se muestra en la articulación 1. Tenga en cuenta que la ubicación del origen o_0 a lo largo de z_0 , así como la dirección del eje x_0 , son arbitrarias. Nuestra elección de o_0 es la más natural, pero o_0 también podría colocarse en la articulación 2. El eje x_0 se elige normal a la página. A continuación, dado que z_0 y z_1 coinciden, se elige el origen o_1 en el nodo 1, como se muestra. El eje x_1 es normal a la página cuando $\theta_1 = 0$ pero, por supuesto, su dirección cambiará ya que θ_1 es variable. Como z_2 y z_1 se intersectan, el origen o_2 se coloca en esta intersección. Se elige la dirección de x_2

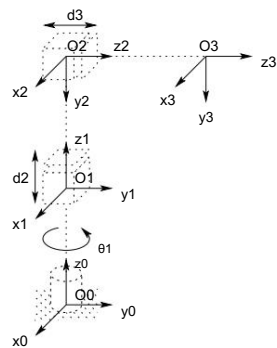


Figura 3.7: Manipulador cilíndrico de tres enlaces.

Tabla 3.2: Parámetros de enlace para manipulador cilíndrico de 3 enlaces.

enlace	a_i	α_i	d_i	θ_i	d_1
1	0	0	θ	1	
2	0	-90°	d_2	0	0
3	0	d_3	0	0	0

variable

paralela a x_1 para que θ_2 sea cero. Finalmente, el tercer cuadro se elige al final del enlace 3 como se muestra.

Los parámetros del enlace ahora se muestran en la Tabla 3.2. Las matrices A y T correspondientes

son

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & s_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 d_3 & 0 & e^{\theta_1} & 0 & d_1 & + \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Ejemplo 3.3 Muñeca esférica

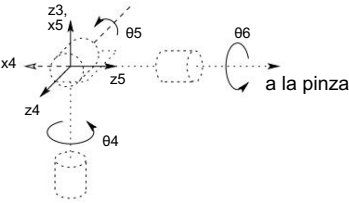


Figura 3.8: Asignación del marco de la muñeca esférica.

La configuración de muñeca esférica se muestra en la figura 3.8, en la que los ejes de articulación z_3 , z_4 , z_5 se cruzan en o . Los parámetros de Denavit-Hartenberg se muestran en la Tabla 3.3. El manipulador de Stanford es un ejemplo de manipulador que posee una muñeca de este tipo. De hecho, el siguiente análisis se aplica a prácticamente todas las muñecas esféricas.

Mostramos ahora que las tres variables conjuntas finales, θ_4 , θ_5 , θ_6 son los ángulos de Euler ϕ , θ , ψ , respectivamente, con respecto al marco de coordenadas $o_3x_3y_3z_3$. Para ver esto solo necesitamos calcular

variable

las matrices A4, A5 y A6 utilizando la tabla 3.3 y la expresión (3.10). Esto da

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$A5 = \begin{pmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 \\ s5 & 0 & -c5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Multiplicando estos rendimientos juntos

$$T_6^3 = A4A5A6 = \begin{array}{c} R_3^3 \quad O_6^3 \\ 0 \quad 1 \end{array} \quad (3.32)$$

Comparando la parte rotacional $R3$ de T_6^3 con la transformación del ángulo de Euler (2.51) muestra que 04, 05, 06 pueden identificarse como los ángulos de Euler ϕ , θ y ψ con respecto al marco de coordenadas o3x3y3z3.

Ejemplo 3.4 Manipulador cilíndrico con muñeca esférica

Suponga que ahora conectamos una muñeca esférica al manipulador cilíndrico del ejemplo 3.3.2 como se muestra en la figura 3.9. Tenga en cuenta que el eje de rotación de la articulación 4 es paralelo a z_2 y por tanto coincide con el eje z_3 del ejemplo 3.3.2. La implicación de esto es que podemos

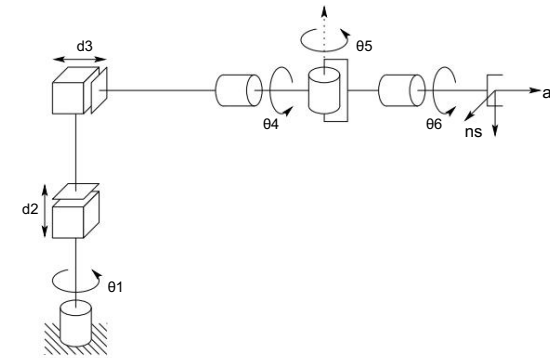


Figura 3.9: Robot cilíndrico con muñeca esférica.

combine inmediatamente las dos expresiones anteriores (3.28) y (3.32) para derivar el avance cinemática como

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3 \quad (3.33)$$

con T_3^0 dado por (3.28) y T_6^3 dada por (3.32). Por lo tanto, la cinemática directa de este manipulador es descrito por

$$T_6^0 = \begin{array}{cccc} c1\ 0\ -s1\ -s1d1 & c4c5c6 - s4s6 - c4c5s6 - s4c6\ c4s5\ c4s5d6 & & \\ s1\ 0 & c1 & c1d3 & \\ 0\ -1\ 0\ d1 + d2 & s4c5c6 + c4s6 - s4c5s6 + c4c6\ s4s5\ s4s5d6 & & \\ 0\ 0\ 0 & -s5c6 & s5c6 & c5\ c5d6 \\ & 0 & 0 & 0\ 1 \end{array} \quad (3.34)$$

dónde

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1c_4c_5c_6 - c_1s_4s_6 + s_1s_5c_6 \\ r_{21} &= s_1c_4c_5c_6 - s_1s_4s_6 - c_1s_5c_6 \\ r_{31} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ r_{12} &= -c_1c_4c_5s_6 - c_1s_4c_6 - s_1s_5s_6 \\ r_{22} &= -s_1c_4c_5s_6 - s_1s_4s_6 + c_1s_5s_6 \\ r_{32} &= s_4c_5c_6 - c_4c_6 \\ r_{13} &= c_1c_4s_5 - s_1c_5 \\ r_{23} &= s_1c_4s_5 + c_1c_5 \\ r_{33} &= -s_4s_5 \\ dx &= c_1c_4s_5d_6 - s_1c_5d_6 - s_1d_3 \\ dy &= s_1c_4s_5d_6 + c_1c_5d_6 + c_1d_3 \quad dz = \\ &= -s_4s_5d_6 + d_1 + d_2. \end{aligned}$$

Observe cómo la mayor parte de la complejidad de la cinemática directa de este manipulador resulta de la orientación del efector final, mientras que la expresión para la posición del brazo de (3.28) es bastante simple. La suposición de la muñeca esférica no solo simplifica aquí la derivación de la cinemática directa, sino que también simplificará en gran medida el problema de la cinemática inversa en el próximo capítulo.

Ejemplo 3.5 Manipulador de Stanford
Considere ahora el manipulador de Stanford que se muestra en la figura 3.10. Este manipulador es un

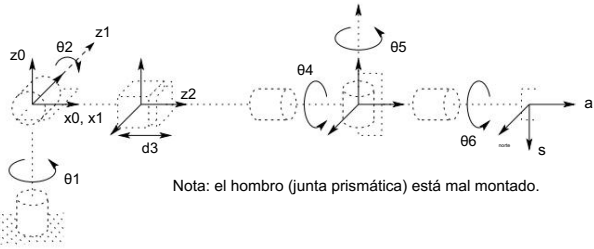


Figura 3.10: Asignación del marco de coordenadas DH para el manipulador de Stanford.

ejemplo de un manipulador esférico (RRP) con una muñeca esférica. Este manipulador tiene un desplazamiento en la articulación del hombro que complica ligeramente los problemas de cinemática directa e inversa.

Tabla 3.4: Parámetros DH para el manipulador Stanford.

Enlace	d_i	a_i	θ_i	α_i
1	d_2	0	θ_1	0
2	0	0	θ_2	0
3	0	0	θ_3	0
4	0	0	θ_4	0
5	0	0	θ_5	0
6	0	0	θ_6	0

variable conjunta

Primero establecemos los marcos de coordenadas conjuntas usando la convención DH como se muestra. El los parámetros del enlace se muestran en la Tabla 3.4.
Es sencillo calcular las matrices A_i como

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & s_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & s_4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 & 0 & -c_5 \\ 0 & 0 & s_5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c_6 & -s_6 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 \\ s_6 & 0 & 1 & d_6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.3. EJEMPLOS

79

T_6^0 entonces se da como

$$T_6^0 = A_1 \cdots A_6 \quad (3.41)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

dónde

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - d_2(s_4c_5c_6 + c_4s_6) & r_{21} &= \\ s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) & r_{31} &= \\ -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 & r_{12} &= \\ c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) & r_{22} &= \\ -s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) & r_{32} &= \\ s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 & r_{13} &= \\ c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 & r_{23} &= s_1 \\ (c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 & r_{33} &= -s_2c_4s_5 \\ + c_2c_5 & dx &= c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5) & dy &= s_1s_2d_3 + c_1d_2 + \\ d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) & dz &= c_2d_3 + d_6(c_2c_5 - \\ c_4s_2s_5). & & \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ejemplo 3.6 Manipulador SCARA

Como otro ejemplo del procedimiento general, considere el manipulador SCARA de la figura 3.11. Este manipulador, que es una abstracción del robot AdeptOne de la figura 1.11, consta de un brazo RRP y una muñeca de un grado de libertad, cuyo movimiento es un giro sobre el eje vertical. El primer paso es ubicar y etiquetar los ejes de las articulaciones como se muestra. Dado que todos los ejes de las articulaciones son paralelos, tenemos cierta libertad en la ubicación de los orígenes. Los orígenes se colocan como se muestra por conveniencia. Establecemos el eje x_0 en el plano de la página como se muestra. Esto es completamente arbitrario y solo afecta la configuración cero del manipulador, es decir, la posición del manipulador cuando $\theta_1 = 0$.

Los parámetros conjuntos se dan en la Tabla 3.5, y las matrices A son las siguientes.

80CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA AVANZADA: LA CONVENCIÓN DE DENAVIT-HARTENBERG

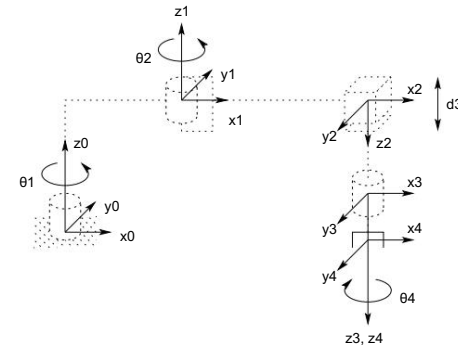


Figura 3.11: Asignación del marco de coordenadas DH para el manipulador SCARA.

Tabla 3.5: Parámetros conjuntos para SCARA.

Enlace	a_i	α_i	d_i	θ_i
1		0	0	
2	a_1	a_2	180	0
3	0	0	0	0
4			d_4	

variable conjunta

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 & c_1 & 0 \\ s_1 & a_1s_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 & c_2 & s_2 \\ 0 & a_2s_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ s_4 & 0 & 0 & 1 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Por lo tanto, las ecuaciones cinemáticas directas están dadas por

$$T_4^0 = A_1 \cdots A_4 = \begin{pmatrix} c_1c_2c_4 + s_1s_2c_4 - c_1s_2c_4 + s_1c_2c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_1c_2 \\ s_1c_2c_4 - c_1s_2c_4 - s_1c_2c_4 - c_1c_2c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_1c_2 \\ 0 & 0 & -1 - d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Capítulo 4

CINEMÁTICA INVERSA

En el capítulo anterior mostramos cómo determinar la posición y orientación del efector final en términos de las variables conjuntas. Este capítulo se ocupa del problema inverso de encontrar las variables conjuntas en términos de la posición y orientación del efector final. Este es el problema de la cinemática inversa y, en general, es más difícil que el problema de la cinemática directa.

En este capítulo, comenzamos formulando el problema general de cinemática inversa. A continuación, describimos el principio del desacoplamiento cinemático y cómo se puede utilizar para simplificar la cinemática inversa de la mayoría de los manipuladores modernos. Usando el desacoplamiento cinemático, podemos considerar los problemas de posición y orientación de forma independiente. Describimos un enfoque geométrico para resolver el problema de posicionamiento, mientras explotamos la parametrización del ángulo de Euler para resolver el problema de orientación.

4.1 El problema general de la cinemática inversa

El problema general de la cinemática inversa puede enunciarse como sigue. Dada una transformación homogénea 4×4

$$H = \begin{pmatrix} R & o & 0 \\ 1 & & \end{pmatrix} SE(3) \quad (4.1)$$

con $R \in SO(3)$, encontrar (una o todas) las soluciones de la ecuación

$$T_{-}^o(q_1, \dots, q_n) = H \quad (4.2)$$

dónde

$$T_{-}^o(q_1, \dots, q_n) = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n). \quad (4.3)$$

Aquí, H representa la posición y orientación deseadas del efector final, y nuestra tarea es encontrar los valores para las variables conjuntas $q_1, \dots, q_n$ para que $T_{-}^o(q_1, \dots, q_n) = H$.

La ecuación (4.2) da como resultado doce ecuaciones no lineales en n variables desconocidas, que se pueden escribir como

$$T_{ij}(q_1, \dots, q_n) = h_{ij}, \quad 4 \leq i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, \quad (4.4)$$

donde T_{ij} , h_{ij} se refieren a las doce entradas no triviales de T_{-}^o y H , respectivamente. (Como the y H inferior de ambos T_{-}^o son $(0,0,0,1)$, cuatro de las dieciséis ecuaciones representadas por son triviales.)

Ejemplo 4.1

Recuerde el manipulador de Stanford del ejemplo 3.3.5. Suponga que la posición deseada y la orientación del cuadro final viene dada por

$$H = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & b_{uey} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & o_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & o_{nzas} \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Para encontrar las variables conjuntas correspondientes $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5$ y θ_6 debemos resolver el siguiente conjunto simultáneo de ecuaciones trigonométricas no lineales (cf. (3.43) y (3.44)):

$$\begin{aligned} c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= r_{11} s_1[c_2 \\ (c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= r_{21} - s_2(c_4c_5c_6 \\ - s_4s_6) - c_2s_5s_6 &= r_{31} c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + \\ s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= r_{12} s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + \\ s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= r_{22} s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 = r_{32} \\ c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 &= r_{13} \\ s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 &= r_{23} \\ -s_2c_4s_5 + c_2c_5 &= r_{33} \\ c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5) &= o_x s_1s_2d_3 \\ + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) &= o_y c_2d_3 + d_6(c_2c_5 \\ - c_4s_2s_5) &= o_z. \end{aligned}$$

Las ecuaciones del ejemplo anterior son, por supuesto, demasiado difíciles de resolver directamente en forma cerrada. Este es el caso de la mayoría de los brazos robóticos. Por lo tanto, necesitamos desarrollar técnicas eficientes y sistemáticas que exploten la estructura cinemática particular del manipulador. Mientras que el problema de la cinemática directa siempre tiene una solución única que se puede obtener simplemente evaluando las ecuaciones directas, el problema de la cinemática inversa puede o no tener una solución. Incluso si existe una solución, puede o no ser única.

Además, debido a que estas ecuaciones cinemáticas directas son en general funciones no lineales complicadas de las variables conjuntas, las soluciones pueden ser difíciles de obtener incluso cuando existen.

Al resolver el problema de la cinemática inversa, estamos más interesados en encontrar una solución de forma cerrada de las ecuaciones que una solución numérica. Encontrar una solución de forma cerrada significa encontrar una relación explícita:

$${}^o_o c_k = f_k(h_1, \dots, h_6), \quad k = 1, \dots, 6 \quad (4.6)$$

Las soluciones de forma cerrada son preferibles por dos razones. Primero, en ciertas aplicaciones, como el seguimiento de una costura de soldadura cuya ubicación es proporcionada por un sistema de visión, las ecuaciones cinemáticas inversas deben resolverse a una velocidad rápida, digamos cada 20 milisegundos, y tener expresiones de forma cerrada en lugar de una búsqueda iterativa es un problema. Necesidad práctica. Segundo, las ecuaciones cinemáticas en general tienen múltiples soluciones. Tener soluciones de forma cerrada permite desarrollar reglas para elegir una solución particular entre varias.

La cuestión práctica de la existencia de soluciones al problema de la cinemática inversa depende tanto de la ingeniería como de consideraciones matemáticas. Por ejemplo, el movimiento de las articulaciones giratorias puede estar restringido a menos de 360 grados completos de rotación, de modo que no todas las soluciones matemáticas de las ecuaciones cinemáticas se correspondan con configuraciones físicamente realizables del manipulador. Supondremos que la posición y la orientación dadas son tales que existe al menos una solución de (4.2). Una vez que se identifica una solución a las ecuaciones matemáticas, se debe verificar más a fondo para ver si satisface o no todas las restricciones sobre los rangos de posibles movimientos de las articulaciones. Para nuestros propósitos aquí, de ahora en adelante supondremos que la matriz homogénea H dada en (4.2) corresponde a una configuración dentro del espacio de trabajo del manipulador con una orientación alcanzable. Esto entonces garantiza que las soluciones matemáticas obtenidas correspondan a configuraciones alcanzables.

4.2 Desacoplamiento Cinemático

Aunque el problema general de la cinemática inversa es bastante difícil, resulta que para los manipuladores que tienen seis articulaciones, con las últimas tres articulaciones intersecándose en un punto (como el manipulador de Stanford anterior), es posible desacoplar el problema de la cinemática inversa en dos problemas más simples, conocidos respectivamente como cinemática de posición inversa y cinemática de orientación inversa. Para decirlo de otra manera, para un manipulador de seis grados de libertad con una muñeca esférica, el problema de la cinemática inversa puede dividirse en dos problemas más simples, a saber, primero encontrar la posición de la intersección de los ejes de la muñeca, en lo sucesivo llamado centro de la muñeca, y luego encontrar la orientación de la muñeca.

Para concretar, supongamos que hay exactamente seis grados de libertad y que los tres últimos ejes de articulación se cortan en un punto ${}^o_o c$. Expresamos (4.2) como dos conjuntos de ecuaciones que representan las ecuaciones de rotación y posición

$${}^o_o R_6(q_1, \dots, q_6) = R \quad (4.7)$$

$${}^o_o c_6(q_1, \dots, q_6) = {}^o_o c \quad (4.8)$$

donde ${}^o_o R$ y ${}^o_o c$ son la posición y la orientación deseadas del marco de la herramienta, expresadas con respecto al sistema de coordenadas mundial. Por lo tanto, tenemos ${}^o_o R$ y ${}^o_o c$, y el problema de cinemática inversa es resolver para $q_1, \dots, q_6$.

La suposición de una muñeca esférica significa que los ejes z_3 , z_4 y z_5 se intersecan en ${}^o_o c$, y, por lo tanto, los orígenes o_4 y o_5 asignados por la convención DH siempre estarán en el centro de la muñeca ${}^o_o c$. A menudo o_3 también estará en ${}^o_o c$, pero esto no es necesario para nuestro desarrollo posterior. El punto importante de esta suposición para la cinemática inversa es que el movimiento de los tres eslabones finales sobre estos ejes no cambiará la posición de ${}^o_o c$, por lo tanto, la posición del centro de la muñeca es una función de solo las tres primeras variables articulares.

El origen del marco de la herramienta (cuyas coordenadas deseadas están dadas por ${}^o_o c$) se obtiene simplemente mediante una traslación de la distancia d_6 a lo largo de z_5 desde ${}^o_o c$ (vea la Tabla 3.3). En nuestro caso, z_5 y z_6 son el mismo eje, y la tercera columna de R expresa la dirección de z_6 con respecto al marco base. Por lo tanto, tenemos

$${}^o_o c = {}^o_o c + d_6 R_{36} \quad (4.9)$$

Así, para tener el efector final del robot en el punto con coordenadas dadas por ${}^o_o c$ y con la orientación del efector final dada por $R = (r_{ij})$, es necesario y suficiente que el centro de la muñeca ${}^o_o c$ tenga coordenadas dadas por

$${}^o_o c = {}^o_o c - d_6 R_{36} \quad (4.10)$$

y que la orientación del marco o_6 con respecto a la base esté dada por R . Si los componentes de la posición del efector final ${}^o_o c$ se denotan ${}^o_o c_x$, ${}^o_o c_y$, ${}^o_o c_z$ y los componentes del centro de la muñeca ${}^o_o c$

$$\begin{aligned} {}^o_o c_x &= {}^o_o c_x - d_6 r_{36} \\ {}^o_o c_y &= {}^o_o c_y - d_6 r_{46} \\ {}^o_o c_z &= {}^o_o c_z - d_6 r_{56} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Usando la Ecuación (4.11) podemos encontrar los valores de las tres primeras variables conjuntas. determina la transformación de orientación R_0 . Esto que depende únicamente de estas tres primeras variables conjuntas. Ahora podemos determinar la orientación del efector final en relación con el marco o_3 a partir de la expresión

$$R = R_0 R_3 \quad (4.12)$$

como

$$R_3 = (R_0)^{-1} R = (R_0)^T R \quad (4.13)$$

Como veremos en la Sección 4.4, los tres ángulos articulares finales se pueden encontrar como un conjunto de ángulos de Euler correspondientes a R_3 . Tenga en cuenta que el lado derecho de (4.13) se conoce completamente ya que se da R y R_0 se puede calcular una vez que se conocen las tres primeras variables conjuntas. La idea del desacoplamiento cinemático se ilustra en la figura 4.1.

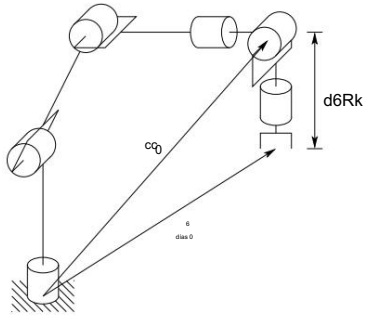


Figura 4.1: Desacoplamiento cinemático.

Resumen

Para esta clase de manipuladores, la determinación de la cinemática inversa puede resumirse mediante el siguiente algoritmo.

Paso 1: Encuentre q_1, q_2, q_3 tal que el centro de la muñeca o tenga las coordenadas dadas por

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - d6R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Paso 2: Usando las variables conjuntas determinadas en el Paso 1, evalúe R_0 .

Paso 3: Encuentra un conjunto de ángulos de Euler correspondientes a la matriz de rotación

$$R_0^3 = (R_0^1 R_0^2)^{-1} R = (R_0^1 R_0^2)^T r \quad (4.15)$$

4.3 Posición inversa: un enfoque geométrico

Para los arreglos cinemáticos comunes que consideramos, podemos usar un enfoque geométrico para encontrar las variables q_1, q_2, q_3 correspondientes a o dadas por (4.10). Restringimos nuestro tratamiento al enfoque geométrico por dos razones. En primer lugar, como hemos dicho, la mayoría de los diseños de manipuladores actuales son cinemáticamente simples y generalmente consisten en una de las cinco configuraciones básicas del Capítulo 1 con una muñeca esférica. De hecho, es en parte debido a la dificultad del problema general de cinemática inversa que los diseños de manipuladores han evolucionado hasta su estado actual.

En segundo lugar, existen pocas técnicas que puedan manejar el problema general de la cinemática inversa para configuraciones arbitrarias. Dado que es más probable que el lector encuentre configuraciones de robots

del tipo considerado aquí, la dificultad añadida que implica tratar el caso general parece injustificada. Se dirige al lector a las referencias al final del capítulo para el tratamiento del caso general.

En general, la complejidad del problema de cinemática inversa aumenta con el número de parámetros de enlace distintos de cero. Para la mayoría de los manipuladores, muchos de los a_i son cero, los α_i son 0 o $\pm\pi/2$, etc. Especialmente en estos casos, un enfoque geométrico es el más simple y natural. Ilustraremos esto con varios ejemplos importantes.

Configuración articulada

Considere el manipulador de codo que se muestra en la figura 4.2, con las componentes de o por x_c, y_c, z_c . Proyectamos o sobre el plano $x_0 - y_0$ como se muestra en la figura 4.3.

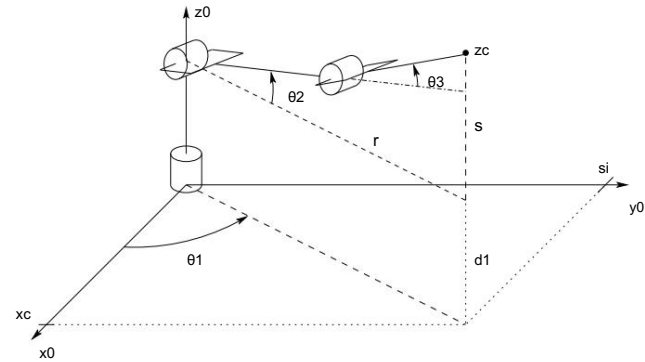


Figura 4.2: Manipulador de codo.

Vemos en esta proyección que

$$\theta_1 = A \tan(x_c, y_c), \quad (4.16)$$

en la que $A \tan(x, y)$ denota la función arcotangente de dos argumentos. Un $\tan(x, y)$ se define para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ y es igual al único ángulo θ tal que

$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}. \quad (4.17)$$

Por ejemplo, $A \tan(1, -1) = -\pi/4$, mientras que $A \tan(-1, 1) = +\pi/4$.

Tenga en cuenta que una segunda solución válida para θ_1 es

$$\theta_1 = \pi + A \tan(x_c, y_c). \quad (4.18)$$

4.3. POSICIÓN INVERSA: UN ENFOQUE GEOMÉTRICO

89

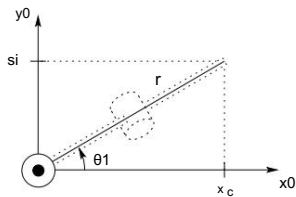


Figura 4.3: Proyección del centro de la muñeca en el plano $x_0 - y_0$.

Por supuesto, esto, a su vez, conducirá a diferentes soluciones para θ_2 y θ_3 , como veremos a continuación.

Estas soluciones para θ_1 son válidas a menos que $x_c = y_c = 0$. En este caso (4.16) no está definida y el manipulador está en una configuración singular, como se muestra en la Figura 4.4. En esta posición el

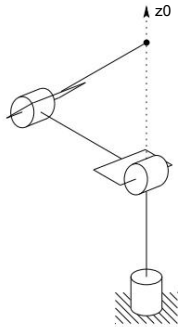


Figura 4.4: Configuración singular.

el centro de la muñeca oc se cruza con z_0 ; por tanto, cualquier valor de θ_1 deja fijo a oc . Por lo tanto, hay infinitas soluciones para θ_1 cuando oc interseca a z_0 .

Si hay un desplazamiento $d = 0$ como se muestra en la Figura 4.5, entonces el centro de la muñeca no puede intersectar z_0 . En este caso, dependiendo de cómo se hayan asignado los parámetros DH, tendremos $d_2 = d$ o $d_3 = d$. En este caso, habrá, en general, solo dos soluciones para θ_1 . Estos corresponden a las denominadas configuraciones de brazo izquierdo y brazo derecho, como se muestra en las Figuras 4.6 y 4.7. La Figura 4.6 muestra la configuración del brazo izquierdo. De esta figura, vemos geométricamente que

$$\theta_1 = \varphi - \alpha \quad (4.19)$$

90

CAPÍTULO 4. CINEMÁTICA INVERSA

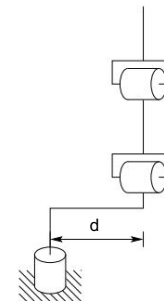


Figura 4.5: Manipulador de codo con desplazamiento de hombro.

dónde

$$\varphi = A \arccos\left(\frac{x_c}{r}\right) \quad (4.20)$$

$$2\alpha = A \tan^{-1} \frac{y_c}{x_c} \quad (4.21)$$

$$= \text{Un bronceado } \sqrt{x_c^2 + y_c^2} - r, \text{ re.}$$

La segunda solución, dada por la configuración del brazo derecho que se muestra en la Figura 4.7, está dada por

$$\theta_1 = A \tan^{-1} \frac{y_c}{x_c} + A \tan^{-1} \frac{r}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2} - r}, \text{ re.} \quad (4.22)$$

Para ver esto, tenga en cuenta que

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (4.23)$$

$$\tan(\theta_1 - \alpha) = \frac{y_c}{x_c} \quad (4.24)$$

$$\tan(\theta_1 - \alpha) = \frac{y}{x} \quad (4.25)$$

$$y = A \tan\left(\theta_1 - \alpha\right) \sqrt{x_c^2 + y_c^2} - r, \text{ re.} \quad (4.26)$$

$$\quad (4.27)$$

que juntos implican que

$$\beta = A \arccos\left(\frac{r}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2} - r}, \text{ re.}\right) \quad (4.28)$$

ya que $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ y $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$.

Para encontrar los ángulos θ_2 , θ_3 para el manipulador de codo, dado θ_1 , consideramos el plano formado por el segundo y tercer eslabón como se muestra en la figura 4.8. Dado que el movimiento de los enlaces

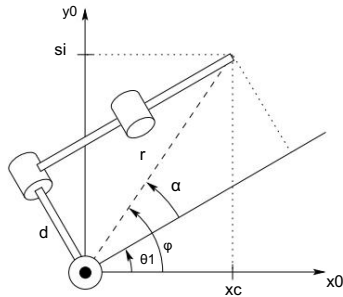


Figura 4.6: Configuración del brazo izquierdo.

dos y tres es plana, la solución es análoga a la del manipulador de dos vínculos del Capítulo 1. Como en nuestra derivación anterior (cf. (1.8) y (1.9)) podemos aplicar la ley de los cosenos para obtener

$$\begin{aligned} \cos \theta_3 &= \frac{2x_c^2 + 2y_c^2 + r^2 - d^2}{2a_2a_3} \\ &= \frac{2x_c^2 + y_c^2 + r^2 - d^2 + z_c^2 - 2z_c d + d^2}{2a_2a_3} = D, \end{aligned} \quad (4.29)$$

desde $r^2 = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2$. Por lo tanto, θ_3 viene dado por

$$\theta_3 = \arccos(D), \pm \pi - \arccos(D). \quad (4.30)$$

De manera similar, θ_2 se da como

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) - \arctan\left(\frac{a_3 \sin \theta_3}{a_2 + a_3 \cos \theta_3}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) - \arctan\left(\frac{y_c}{x_c + d - z_c}\right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Las dos soluciones para θ_3 corresponden a la posición del codo hacia arriba y la posición del codo hacia abajo, respectivamente.

Un ejemplo de un manipulador de codo con compensaciones es el PUMA que se muestra en la Figura 4.9. Hay cuatro soluciones para la cinemática de posición inversa como se muestra. Corresponden a las situaciones brazo izquierdo-codo arriba, brazo izquierdo-codo abajo, brazo derecho-codo arriba y brazo derecho-codo abajo. Veremos que hay dos soluciones para la orientación de la muñeca dando así un total de ocho soluciones de la cinemática inversa para el manipulador PUMA.

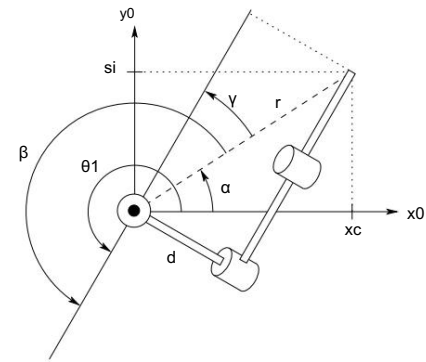


Figura 4.7: Configuración del brazo derecho.

Configuración esférica

A continuación, resolvemos la cinemática de posición inversa para un manipulador esférico de tres grados de libertad que se muestra en la figura 4.10. Como en el caso del manipulador de codo, la primera variable articular es la rotación base y se da una solución como

$$\theta_1 = \arctan(x_c, y_c) \quad (4.32)$$

siempre que x_c e y_c no sean ambos cero. Si tanto x_c como y_c son cero, la configuración es singular como antes y θ_1 puede tomar cualquier valor.

El ángulo θ_2 se da a partir de la figura 4.10 como

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) + \pi \quad (4.33)$$

donde $r^2 = x_c^2 + y_c^2$. Como en el caso del manipulador de codo una segunda solución viene dado por

$$\theta_1 = \pi + \arctan(x_c, y_c); \quad (4.34)$$

La distancia lineal d_3 se encuentra como

$$d_3 = \sqrt{r^2 + s^2} - d, \quad \text{donde } s = z_c - d_1. \quad (4.35)$$

La solución de raíz cuadrada negativa para d_3 no se tiene en cuenta y, por lo tanto, en este caso obtenemos dos soluciones para la cinemática de posición inversa siempre que el centro de la muñeca no se cruce con z_0 . Si hay un desplazamiento, habrá configuraciones de brazo izquierdo y derecho como en el caso del manipulador de codo (Problema 4-12).

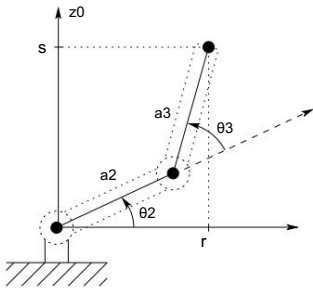


Figura 4.8: Proyectando sobre el plano formado por los eslabones 2 y 3.

4.4 Orientación inversa

En la sección anterior usamos un enfoque geométrico para resolver el problema de la posición inversa. Esto da los valores de las tres primeras variables articulares correspondientes a una posición dada del origen de la muñeca. El problema de la orientación inversa ahora consiste en encontrar los valores de las tres variables conjuntas finales correspondientes a una orientación dada con respecto al marco $o_3x_3y_3z_3$. Para una muñeca esférica, esto puede interpretarse como el problema de encontrar un conjunto de ángulos de Euler correspondientes a una matriz de rotación R dada. Recuerde que la ecuación (3.32) muestra que la matriz de rotación obtenida para la muñeca esférica tiene la misma forma que la rotación matriz para la transformación de Euler, dada en (2.52). Por lo tanto, podemos usar el método desarrollado en la Sección 2.5.1 para resolver los tres ángulos de articulación de la muñeca esférica. En particular, resolvemos para los tres ángulos de Euler, ϕ , θ , ψ , usando las Ecuaciones (2.54) – (2.59), y luego usamos el mapeo

$\theta_4 = \phi,$
 $\theta_5 = \theta,$
 $\theta_6 = \psi.$

Ejemplo 4.2 Manipulador articulado con muñeca esférica Los parámetros DH para la asignación de tramas que se muestran en la Figura 4.2 se resumen en la Tabla 4.1. Multiplicando las matrices A_i correspondientes se obtiene la matriz R_0^3 para el manipulador articulado o de codo como

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

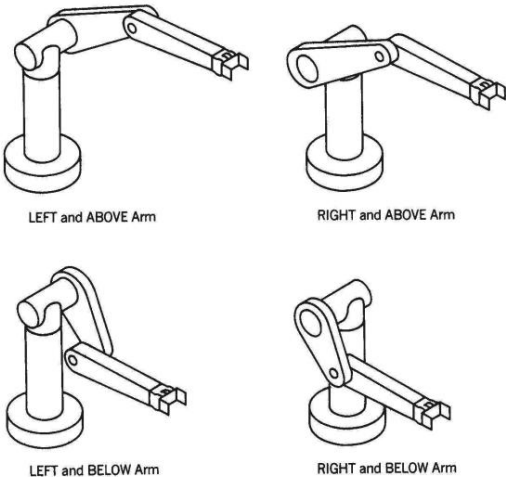


Figura 4.9: Cuatro soluciones de la cinemática de posición inversa para el manipulador PUMA.

Tabla 4.1: Parámetros de enlace para el manipulador articulado de la Figura 4.2.

Enlace					
1	2	3	4	5	6
	d_1	θ	1	0	90
	a_2	0	0	θ	2
	a_3	0	0	θ	3
variable					

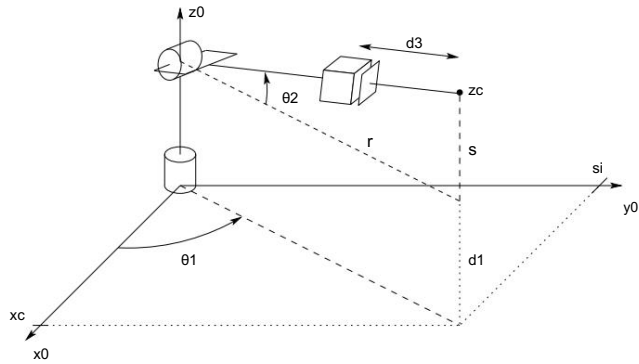


Figura 4.10: Manipulador esférico.

La matriz $R_6^3 = A_4 A_5 A_6$ se da como

$$R_6^3 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Por lo tanto, la ecuación a resolver ahora para las tres variables finales es

$$R_6^3 = (R_0^3)^T R \quad (4.38)$$

y la solución del ángulo de Euler se puede aplicar a esta ecuación. Por ejemplo, las tres ecuaciones dadas por la tercera columna en la ecuación matricial anterior están dadas por

$$c_4 s_5 = c_1 c_2 r_{13} + s_1 c_2 r_{23} + s_2 r_{33} \quad (4.39)$$

$$s_4 s_5 = -c_1 s_2 r_{13} - s_1 s_2 r_{23} + c_2 r_{33} \quad (4.40)$$

$$c_5 = s_1 r_{13} - c_1 r_{23} \quad (4.41)$$

Por lo tanto, si no ambas expresiones (4.39), (4.40) son cero, entonces obtenemos θ_5 de (2.54) y (2.55) como

$$\theta_5 = A \tan \frac{s_1 r_{13} - c_1 r_{23}}{c_1 r_{13} + s_1 r_{23}} \pm 1 - (s_1 r_{13} - c_1 r_{23})^2 \quad (4.42)$$

Si se elige la raíz cuadrada positiva en (4.42), entonces θ_4 y θ_6 están dados por (2.56) y (2.57), respectivamente, como

$$\theta_4 = A \tan \frac{c_1 c_2 r_{13} + s_1 c_2 r_{23} + s_2 r_{33}}{-c_1 s_2 r_{13} - s_1 s_2 r_{23} + c_2 r_{33}} \quad (4.43)$$

$$\theta_6 = A \tan(-s_1 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} - c_1 r_{22}) \quad (4.44)$$

Las otras soluciones se obtienen análogamente. Si $s_5 = 0$, entonces los ejes articulares z_3 y z_5 son colineal. Esta es una configuración singular y solo se puede determinar la suma $\theta_4 + \theta_6$. Uno La solución es elegir θ_4 arbitrariamente y luego determinar θ_6 usando (2.62) o (2.64).

Ejemplo 4.3 Resumen de la solución del manipulador de codo

Para resumir el desarrollo anterior escribimos una solución a la inversa cinemática del manipulador de codo de seis grados de libertad que se muestra en la figura 4.2 que tiene sin desplazamientos articulares y una muñeca esférica.

Dado

$$o = \begin{bmatrix} buey \\ oye \\ onz \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

entonces con

$$xc = buey - d_6 r_{13} \quad (4.46)$$

$$yc = oye - d_6 r_{23} \quad (4.47)$$

$$= oz - d_6 r_{33} \quad (4.48)$$

un conjunto de variables conjuntas DH está dado por

$$\theta_1 = A \tan(xc, yc) \quad (4.49)$$

$$\theta_2 = A \tan \frac{xc^2 + yc^2 - d_2^2}{2xc}, \quad zc = A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \quad (4.50)$$

$$\theta_3 = A \tan D, \pm 1 - D_2, \quad \text{donde } D = \frac{xc^2 + yc^2 - re^2 + zc^2 - un^2 - un^2}{2a_2 a_3} \quad (4.51)$$

$$\theta_4 = A \tan(c_1 c_2 r_{13} + s_1 c_2 r_{23} + s_2 r_{33}, -c_1 s_2 r_{13} - s_1 s_2 r_{23} + c_2 r_{33}) \quad (4.52)$$

$$\theta_5 = A \tan \frac{s_1 r_{13} - c_1 r_{23}}{c_1 r_{13} + s_1 r_{23}} \pm 1 - (s_1 r_{13} - c_1 r_{23})^2 \quad (4.53)$$

$$\theta_6 = A \tan(-s_1 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} - c_1 r_{22}) \quad (4.54)$$

Las demás soluciones posibles se dejan como ejercicio (Problema 4-11).

Ejemplo 4.4 Manipulador SCARA

Como otro ejemplo, consideramos el manipulador SCARA cuya cinemática directa es definido por T_4^0 de (3.49). La cinemática inversa se da entonces como el conjunto de soluciones de la ecuación

$$\begin{bmatrix} c_{12} c_4 + s_{12} s_4 & s_{12} c_4 - c_{12} s_4 & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} c_4 - c_{12} s_4 & -c_{12} c_4 - s_{12} s_4 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Primero notamos que, dado que SCARA tiene solo cuatro grados de libertad, no todos los H posibles de $SE(3)$ permiten una solución de (4.55). De hecho, podemos ver fácilmente que no hay solución de (4.55) a menos que R sea de la forma

$$R = \begin{pmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ s\alpha & -c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

y si este es el caso, la suma $\theta_1 + \theta_2 - \theta_4$ está determinada por

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \alpha = A \tan(r_{11}, r_{12}). \quad (4.57)$$

Proyectar la configuración del manipulador en el plano $x_0 - y_0$ produce inmediatamente la situación de la figura 4.11.

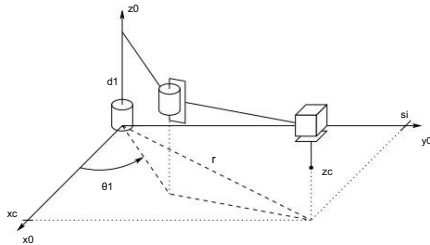


Figura 4.11: Manipulador SCARA.

Vemos de esto que

$$\theta_2 = A \tan c_2, \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (4.58)$$

dónde

$$c_2 = \frac{2x_1^2 + 2y_1^2 + 2z_1^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \quad (4.59)$$

$$\theta_1 = A \tan(o_x, o_y) - A \tan(a_1 + a_2c_2, a_2s_2). \quad (4.60)$$

Entonces podemos determinar θ_4 a partir de (4.57) como

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \theta_1 + \theta_2 - \alpha \\ &= \theta_1 + \theta_2 - A \tan(r_{11}, r_{12}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Finalmente d_3 se da como

$$d_3 = o_z + d_4. \quad (4.62)$$