

Три проблемы в робототехнике

Дж. М. Селиг

Школа вычислительной техники, информационных систем и математики

Университет Южного берега

Лондон SE1 0AA, Великобритания

Абстрактный

Три довольно разные проблемы робототехники изучаются с использованием одной и той же технологии.

ника из теории винтов. Первая проблема касается систем пружин.

потенциальная функция дифференцируется в направлении произвольного винта, чтобы найти

положение равновесия. Вторая проблема почти идентична с точки зрения

вычислений, решение методом наименьших квадратов задачи нахождения твердого движения

претерпеваемое телом по заданным только данным о точках на теле ищется. в

третья задача – найти якобиан платформы Стюарта. Опять же это достигается

дифференцированием по винту. Далее, свойства второго порядка

изучаются первые две проблемы. Вычисляется гессиан вторых производных и

следовательно, свойства устойчивости положений равновесия пружинной системы равны

найденный.

Обозначение

$\mathbb{R}^n$ n-мерное евклидово пространство.

$\mathbb{RP}^3$ Трехмерное проективное пространство.

$SE(3)$ Группа собственных евклидовых движений в трех измерениях, то есть твердое тело.
движения.

$SO(3)$ Группа вращений в 3-х измерениях.

R Матрица вращения 3×3 .

M Матрица 4×4 , представляющая жесткое преобразование, иногда называемое гомогенным преобразованием.
ное представительство.

a, b Векторы положения точек в трехмерном пространстве.

a^-, b^- Точки в 3-мерном пространстве, представленные как точки в 4-мерном пространстве, в
секционированная форма, $a^-^T = (a^T, 1)$ например.

A , В 3-мерные векторы, представленные в виде антисимметричных матриц 3×3 , так что $Ax =$
 $a \times x$ для любого вектора x .

I_3 Единичная матрица 3×3 .

λ Постоянная пружины.

J 6×6 матрица Якоби.

Матрица жесткости K 6×6 .

Матрица S 4×4 , представляющая элемент алгебры Ли или винт.

$W \times 1$ вектор, представляющий гаечный ключ, который является элементом векторного пространства, двойственного к алгебра Ли.

1. Введение

Когда Болл писал свой трактат [1] в конце 19 века, Софий Ли был написан о том, что он называл «непрерывными группами». Если бы Болл знал о работе Ли, возможно, было очевидно, что это как-то связано с его собственным, так как Ли интересовался симметрии дифференциальных уравнений. Позже Кляйн выдвинул идею о том, что эти «группы Ли» можно рассматривать как геометрические симметрии. Это было после обоих Болл и Ли умерли, когда «теория лжи» стала занимать центральное место в современной геометрии. В частности, работы Киллинга и Картана по алгебрам Ли были очень популярны. свободно Подробнее об истории теории Ли см. [2]. Оглядываясь назад, можно видно, что конечные винты Болла были просто элементами группы Ли: группа собственные евклидовы преобразования в R^3 . Твисты или моторы были элементами Алгебра Ли этой группы. Их также иногда называют бесконечно малыми винтами. хотя точнее шаровые винты можно отождествить с элементами проективного пространства, образованное из алгебры Ли. Это линии, проходящие через происхождение во лжи алгебра.

Многие другие элементы теории Ли также присутствовали в теории винта Болла. Но возможно, их значение не было полностью оценено. Например, произведение Ли или Скобка Ли — это просто перекрестное произведение винтов. Для Болла это было просто геометрическое операция, аналог векторного произведения трехмерных векторов.

Некоторые авторы ссылаются на теорию винтов и методы групп Ли, как если бы они были разными.

подходит. Точка зрения этого автора состоит в том, что между ними нет различия, винт

Теория — это просто специализация теории Ли к группе преобразований твердого тела.

ции. Тем не менее, теория имени винта остается полезной. Как описательная стенография и

также это напоминание о том, что именно Болл разработал почти всю теорию до Ли

группы придумали!

Большая часть робототехники связана с жесткими движениями. В кинематике и динамике

Изучаются жесткие движения как полезной нагрузки, так и звеньев робота. В работе

видение обычная проблема состоит в том, чтобы восстановить жесткое движение, которое испытывает камера

из сделанных им изображений. Следовательно, группа движений твердого тела является центральным объектом

в робототехнике. На сегодняшний день теория винтов широко используется в кинематике роботов.

представлен сообществом механизмов. Его начинают использовать в динамике

и управление роботами, но ни в коем случае не является методом первого выбора в этих областях. В

зрение робота эти методы почти не известны. Одной из задач этой работы является

продемонстрировать, что эти методы имеют универсальную применимость к задачам робототехники

и показать, что широкий спектр проблем в робототехнике имеет общую основную тему.

В этой работе используется тот факт, что группа Ли является дифференциальным многообразием. Чтобы свести к минимуму

гладкой функции на таком пространстве машина множителей Лагранжа не нужна.

Можно работать с коллектором напрямую, не нужно думать о группе как о

встроены в декартово пространство, как следует из использования множителей Лагранжа.

Дифференцирование по касательным векторным полям можно использовать для нахождения уравнений для

стационарные точки функции. Наиболее удобными для использования являются левые векторные поля.

инвариантные поля в группе. Это просто элементы алгебры Ли группы,

Рисунок 1: Твердое тело, подвешенное системой пружин

повороты или винты. Следовательно, эту технику можно рассматривать как «дифференциацию вдоль винт».

2 пружины

Рассмотрим твердое тело, поддерживаемое системой пружин, см. рис. 1. Далее предположим что пружины имеют естественную длину 0, подчиняются закону Гука и могут как толкать, так и тянуть.

Пружинные постоянные λ_i пружин могут быть разными. Гравитация будет игнорироваться здесь

для простоты. Однако нетрудно понять, как его можно включить в более

сложная модель, либо путем изменения потенциальной функции, полученной ниже

или изменив уравнения равновесия, чтобы включить гравитацию из-за силы тяжести.

Пусть $\mathbf{a}_i^T = (a_i^T, 1)$ быть точками крепления пружин к земле или

репера, а $\mathbf{b}^T = (b^T, 1)$ соответствующие точки крепления на твердом теле при

тело находится в какой-то стандартной «домашней» конфигурации. Если тело испытывает жесткое

движение точек крепления будет двигаться,

$$\begin{matrix} \mathbf{b}_j^T & \mathbf{P}^T & \mathbf{b}_i^T \\ & \text{"="} & \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix},$$

который будет сокращен до $\mathbf{b}_j^T = \mathbf{M} \mathbf{b}_i^T$. Первый вопрос, который можно задать по этому поводу

ситуация такова: существует ли равновесная конфигурация твердого тела?

Задача состоит в том, чтобы минимизировать потенциальную энергию пружинной системы, для этого задано

следующей функцией,

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i a_i^{-1} M b_i^{-1} M^T b_i^{-1} M b_i^{-1}.$$

Заметим, что эта функция определена на группе $SE(3)$, то есть $\Phi : SE(3) \rightarrow \mathbb{R}$, поскольку M

меняется по группе разные значения потенциального результата.

Если бы это была просто функция на $\mathbb{R}^n$ стационарные точки будут найдены путем вычисления

частные производные, а затем приравнять их к нулю. Стандартный метод борьбы

эта проблема заключалась бы в минимизации матричных элементов с использованием множителей Лагранжа для

учитывать ограничение, что матрица должна быть групповым элементом.

Однако более простой метод для функций без ограничений можно симитировать, используя

какая-то теория многообразия. Чтобы найти стационарные точки функции, определенной на многообразии

функция должна быть продифференцирована вдоль векторных полей на многообразии. Как обычно

результаты обнуляются, а затем решаются полученные уравнения для нахождения стационарных точек.

Для этого должен работать набор векторных полей, которые охватывают пространство всех векторных полей на

требуется коллектор.

Поскольку рассматриваемое многообразие является основным многообразием группы Ли,

такой полный набор векторных полей всегда доступен. Элементы алгебры Ли

можно использовать левоинвариантные векторные поля.

Для дифференцирования вдоль векторного поля значение функции в двух точках равно

попарно, текущая позиция и позиция на небольшом расстоянии вдоль пути, касательного к

векторное поле, то предел разности значений функции в этих

соседние точки берутся по мере того, как путь становится все короче и короче.

Позволяет:

$$C = \begin{pmatrix} \Omega m v \\ 0 \end{pmatrix},$$

— элемент алгебры Ли или винт, заданный в представлении 4×4 . Здесь Ω представляет собой 3×3 антисимметричная матрица, соответствующая вектору ω , то есть $\Omega x = \omega \times x$ для любого вектора

Икс.

Если M элемент группы, записанный в представлении 4×4 , то действие S на M , дается левым переводом,

$$M(\tau) = e^{\tau CM}.$$

Это проведет M по касательной к векторному полю, определяемому S . Взяв производную вдоль пути, а затем установка $t = 0$ дает,

$$CM = CM.$$

Следовательно, производная потенциала определяется выражением

$$S\Phi = \sum_i \lambda_i a_i \tilde{a}_i - M b_i \tilde{b}_i + \sum_j S^T M b_j \tilde{b}_j.$$

Для равновесия это должно обращаться в нуль для произвольного S . Следовательно, S должно быть выделено, поэтому

рассмотрим термин,

$$\sum_i \lambda_i a_i \tilde{a}_i - M b_i \tilde{b}_i + \sum_j S^T M b_j \tilde{b}_j = 0 \quad \text{где} \quad \sum_j S^T M b_j \tilde{b}_j = 0 \quad \text{в} \quad \text{ю}.$$

где I_3 — единичная матрица 3×3 , а B_i — антисимметричная матрица, соответствующая к би.

Подставляя это в уравнение равновесия и используя тот факт, что S и, следовательно, ω и v произвольны, получается следующий результат:

$$\sum_i \lambda_i a_i \tilde{a}_i - M b_i \tilde{b}_i + \sum_j S^T M b_j \tilde{b}_j = 0 \quad \text{где} \quad \sum_j S^T M b_j \tilde{b}_j = 0.$$

После небольшой обработки это матричное уравнение дает 2 векторных уравнения:

$$\sum_i \lambda_i a_i \times (a_i - R b_i - t) = 0 \quad (1)$$

и

$$\sum_i \lambda_i (a_i - R b_i - t) = 0 \quad (2)$$

Если все веса λ_i равны, то уравнение 2 говорит, что оптимальное преобразование

отображает центроиды точек a в точки b . Другой способ выразить это состоит в том, что в

равновесной конфигурации центроиды двух наборов точек должны совпадать. К

продолжить, выбрать начало координат так, чтобы центр тяжести b точек лежал в

начала координат, $\sum_i \lambda_i b_i = 0$. Вектор переноса теперь задается уравнением (2) как,

$$t = \frac{\sum_i \lambda_i a_i}{\sum_i \lambda_i}.$$

В приведенной выше форме с уравнением (1) не очень легко иметь дело, более податливой формой является

представление 3×3 . Небольшое вычисление подтверждает, что антисимметричная матрица

соответствующее векторному произведению $r \times q$, задается как $qr^T - rq^T$. Следовательно, в таком виде

уравнение становится,

$$\sum_i \lambda_i R b_i a_i^T - \sum_i \lambda_i a_i b_i^T R^T = 0,$$

где использован результат $t = \sum_i \lambda_i a_i / \sum_i \lambda_i$. Теперь, записывая, $P = \sum_i \lambda_i a_i a_i^T$, это

уравнение становится;

$$R P T = P R^T \quad (3)$$

Это показывает, что матрица $P R T$ симметрична. Итак, пусть $P R T = Q$, где Q — sym

метрика, то

$$P = K R.$$

Это разлагает матрицу P как произведение симметричной матрицы с правильным

ортогональный. По сути, это полярное разложение матрицы. Уведомление

что полярное разложение $P = RQ'$ также удовлетворяет уравнению, матрица вращения R

здесь то же самое, что и выше, но симметричная матрица $Q' = R^T Q R$ просто конгруэнтно

к исходной симметричной матрице. Итак, что касается решения для R , там

нет никакой разницы между этими растворами. На самом деле полярное разложение матрицы

разбивает ее на ортогональную матрицу и неотрицательную симметричную матрицу. Здесь правильный

требуется ортогональная матрица и симметричная. Если ортогональная матрица из

полярное разложение P является отражением, тогда умножение на -1 дает вращение. Более

подробности о полярном разложении матрицы можно найти, например, в [3].

Полярное разложение дает одно решение, но это решение не единственное. Позволять

$P = QR$ — полярное разложение P , теперь подставьте его в уравнение (3),

$$R^T P Q = Q R P R^T.$$

Записав $R_i = R^T$, уравнение принимает вид

$$R_i Q R_i = Q.$$

Предположим, что v лежит в направлении оси вращения R_i , так что $R_i v = v$, postmul

наложение приведенного выше уравнения на v дает,

$$R_i Q v = Q v.$$

Следовательно, $Q v$ лежит вдоль оси R_i и, следовательно,

$$Q v = \mu v,$$

для некоторой постоянной μ . Любое решение для вращения R_i должно иметь свою ось вращения

выровненный с собственным вектором Q .

Возможные углы поворота можно найти, рассмотрев действие на собственный

векторы Q , используя тот факт, что собственные векторы симметричной матрицы взаимно

ортogonalный. Если матрица P невырождена, то хорошо известно, что поляра de

состав уникальнй. Если все собственные значения Q различны и также имеют разные

величин, то единственными возможными углами являются 0 и π . Всего это дает четыре решения,

$R_i = I_3$ — решение, найденное выше, т. е. R — это просто вращение от полярной de

состав. Три других решения для R_i представляют собой повороты на π радиан вокруг трех

собственные векторы Q . Таким образом, всего имеется четыре решения для поворота $R = R_P R_i$. В каждом

случае R_P - это вращение из полярного разложения P , а R_i , как указано выше, вращения

π относительно i -го собственного вектора Q , с четвертым решением, заданным $R_0 = I_3$. Уведомление

что четыре вращения образуют дискретную подгруппу группы вращений, эта подгруппа

— известная четырехгруппа Клейна $Z_2 \times Z_2$.

Если какое-либо из приведенных выше условий нарушается, то P сингулярна, два собственных значения

Q равны или сумма пары собственных значений равна нулю, то решений больше. Для

Например, если сумма пары собственных значений Q равна нулю, то любое вращение вокруг оставшихся

собственный вектор будет удовлетворять уравнению для R_i .

Тот факт, что в общем случае четыре стационарные точки потенциальной энергии

функции были найдены неудивительно. Теория Морса изучает взаимосвязь

о многообразиях и критических точках определенных на них функций см. [4].

критические точки, или стационарные точки здесь, соответствуют ячейкам в клеточном разложении.

коллектора. Многообразие, о котором идет речь здесь, является основным многообразием

группа вращений $SO(3)$, известно, что это трехмерное проективное пространство, RP^3 минимальное клеточное разложение RP^3 имеет четыре ячейки с размерами 0, 1, 2 и 3. см. [5, с. 105]. Следовательно, общая функция на $SO(3)$ будет иметь минимум 4 критических точки. При этом индекс критических точек, количество отрицательных собственных значений своей матрицы Гессе дает размер соответствующей ячейки. Таким образом, без всякого дальнейших вычислений будет известно, что четыре критические точки составляют локальную максимум, локальный минимум и два типа седловых точек. Проблема найти, какие минимальное решение будет рассмотрено позже.

Вышеизложенное показывает, что в общем случае, когда матрица P невырождена, пружинная система на фиг.1 имеет единственное устойчивое положение равновесия. Более того, система будет иметь три неустойчивых положения равновесия. Этот результат не зависит от количества или расположения пружин, если $\det(P) \neq 0$.

3 Жесткое движение по точечным данным

Рассмотрим систему обзора или дальномерную систему, которая может измерять местоположение точки в 3-х измерениях. Представьте себе, что твердое тело имеет множество точек с известными позициями. Тело подвергается неизвестному твердому движению и положениям баллы измеряются. Эти измерения будут содержать ошибки и вопрос, который необходимо решить. здесь рассматривается вопрос: как можно оценить твердое движение, совершаемое телом?

Пусть положения известных точек равны $\mathbf{b}^j$ и соответствующие измеренные точки $\mathbf{a}^i$.

Запишите неизвестное жесткое преобразование как M , тогда функция

$$\Phi = \sum_j \|\mathbf{a}^j - M\mathbf{b}^j\|^2$$

представляет собой сумму квадратов разностей между измеренными точками и их идеальное (бесшумное) положение. Выбор M для минимизации этой функции дает «наименьший» оценка квадратов жесткого преобразования. Эта функция практически идентична функция потенциальной энергии, изученная в предыдущем разделе, единственными отличиями являются общий коэффициент равен половине и что все λ установлены равными 1.

История этой проблемы очень интересна. Проблема найти роту Это, безусловно, интересная часть, и впервые она была решена Маккензи в 1957 г. [6]. Он пришел к этой проблеме в контексте кристаллографии. В 1966 году Вахба нашел та же проблема при изучении ориентации искусственных спутников, [7]. В 1976 году Моран повторно решил проблему, используя кватернионы, [8]. Мотивация здесь пришла из геологии, в частности движение тектонических плит. Что касается производства, Надас нашел и повторно решил проблему в 1978 г. [9]. Здесь заявка была к производителю керамических подложек для кремниевых чипов. В сообществе робототехники проблема обычно приписывают Хорну [10], см., например, [11, гл. 5].

Приведенное выше решение, пожалуй, немного проще стандартных рассуждений которые включают минимизацию с ограничениями, причем ограничения используются для выражения тот факт, что матрицы должны лежать в группе.

Стандартные решения не всегда были в терминах полярного разложения. На самом деле (как минимум) возможны два других описания решения.

Чтобы вычислить полярное разложение матрицы, тексты по численному анализу рек. рекомендуется начинать с разложения матрицы по сингулярным числам, см. для примера пле [12]. Поэтому неудивительно, что решение нашей задачи может быть получено непосредственно из сингулярного разложения.

Напомним, из раздела выше, что $RPT = PRT$, нужно решить для поворота

матрица R , где $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Далее, напомним,

$$P = QR,$$

где Q был симметричным. Следовательно, Q можно диагонализировать как $Q = UDU^T$ с U ортог

ональная и D -диагональная. Теперь пиши,

$$P = UDU^T R = UDV^T,$$

где $V = U^T R$ по-прежнему ортогонален. Это просто сингулярное разложение

P . Другими словами, предположим, что сингулярное разложение P есть $P = UDV^T$

тогда четыре решения $R = UV^T U^T P$.

Другая форма решения может быть получена следующим образом: начните с полярного де
 состав P ,

$$P = QR,$$

где Q — симметричная матрица. Пост-умножение этого уравнения на его транспонирование дает,

$$PP^T = Q^2. \text{ Наконец, замена } Q \text{ дает,}$$

$$R = (PP^T)^{-1/2} P^T P.$$

Здесь можно взять несколько различных квадратных корней матрицы (PP^T) ,

выбор ограничен требованием, чтобы определитель R был равен 1. Это

означает, что должен быть взят единственный положительный квадратный корень, см. [3, с. 405].

Наконец, здесь рассмотрим определитель матрицы P . Классический результат говорит нам, что
 полярное разложение матрицы P единственно, если P невырождена, см. [3, с. 413]

например. Классическое полярное разложение разлагает матрицу P на или

прямоугольная матрица и положительно-полуопределенная симметричная матрица. Здесь правильно-ортогональное

матрица и симметричная матрица (не обязательно положительно-полуопределенная), это

не влияет на единственность решения.

Таким образом, необходимо исследовать определитель матрицы P , определенный выше. К

для упрощения обсуждения предположим, что жесткость пружины k_i установлена равной 1.

Когда имеется менее трех пружин или пар точек, определитель всегда

единственное число. Для трех пар точек простое вычисление показывает,

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^T = (a_1 a_2 a_3)(b_1 b_2 b_3),$$

здесь скалярное тройное произведение записано как $a \cdot (b \times c) = (abc)$.

Обобщение этого на n пар точек дает,

$$\det(P) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}^T = (a_1 a_2 \dots a_n)(b_1 b_2 \dots b_n).$$

Конечно, это сингулярно, если все точки a или все точки b лежат на плоскости, проходящей через

источник.

4 Матрица Якоби для платформ Стюарта

Рассмотрим общую платформу Стюарта. Этот манипулятор имеет шесть ног, соединенных в паре.

аллель. Каждая нога состоит из гидропривода между парой пассивных сферических

суставы. Шесть ножек соединяют основание или землю с подвижной платформой. Регулируя

длины шести ножек с помощью гидравлических приводов платформа может маневрировать

с шестью степенями свободы. См. рисунок 2.

Рисунок 2: Общая платформа Стюарта

Для параллельных манипуляторов инверсная кинематика является простой, в то время как передняя кинематика затруднена. Предположим, что положение и ориентация платформы дана, длину ног найти несложно. Пусть a_i будет положением центра шарового шарнира на площадке, принадлежащей i -му плечу. В домашней конфигурации соответствующее положение шарнирного центра на платформе будет b_i . Итак, теперь длину i -го катета, а точнее его площадь, можно записать,

$$\|a_i - M^{-1}b_i\|^2 = \|a_i - M^{-1}b_i\|^2 \quad i = 1, \dots, 6.$$

Как обычно, M — это жесткое преобразование, на этот раз движение, переводящее платформу из домой к текущему положению. Обратите внимание, что длины катетов можно рассматривать как функции на группе, однако более привычно думать о них как о компонентах отображения из группы в пространство длин катетов, $SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^6$. Точка в $\mathbb{R}^6$ дается в координаты как $(l_1, l_2, \dots, l_6)$. Ищется якобиан этого отображения. Делать берется производная от длин катетов,

$$\frac{d}{dt} \|a_i - M^{-1}b_i\|^2 = 2(a_i - M^{-1}b_i)^T \frac{d}{dt} M^{-1}b_i.$$

Перестановка этого дает,

$$\dot{l}_i = \frac{1}{2} (b_i - a_i)^T M^{-1} \dot{b}_i - \frac{1}{2} (a_i \times b_i)^T (b_i - a_i)^T \omega.$$

Это дает скорость соединения каждой ноги как линейную функцию скорости винта.

Платформа. Якобиан J - это матрица, удовлетворяющая формуле

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_6} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial q_6} \end{bmatrix} = Df.$$

Таким образом, можно видеть, что строки этой матрицы Якоби просто,

$$J_i = \frac{1}{\|b_i\|} (b_i \times a_i)^T, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Это рывок, заданный единичной силой, направленной вдоль i -й ноги.

Рассмотрим систему пружин, как в разделе 2. Предположим, что пружин всего шесть.

Теперь можно показать, что якобиан, связанный с положением равновесия, равен $\sin$

гуляр. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнения (1) и (2), которые определяют положение равновесия,

расположить вещи так, чтобы положение равновесия было исходным положением и, следовательно,

$R = I_3$ и $t = 0$, тогда уравнения принимают вид

$$\lambda_i a_i \times b_i = 0,$$

и

$$\lambda_i (a_i - b_i) = 0.$$

В терминах якобиана для соответствующей платформы Стюарта, т. е. такой, у которой катет

длины соответствуют длинам пружин, видно, что ряды

Якобианы линейно зависимы, поэтому матрица вырождена.

Задача прямой кинематики для платформы Стюарта состоит в том, чтобы определить положение

и ориентация платформы с учетом длины ног. Хорошо известно, что для заданного

множества длин катетов существует конечное число различных решений, в общем случае 40. Различаются

Все решения называются различными позами или положениями платформы. Замена

ножки с пружинками видно, что потенциальная функция будет иметь такое же значение в каждой из этих поз или поз, поскольку функция зависит только от длины пружины. Однако ни одно из этих положений не будет минимумом потенциальной функции поскольку, как показано выше, устойчивое положение равновесия единственно.

5 Матрица жесткости

Проблемы, представленные в последних трех разделах, хорошо известны и решены множеством различных методов. Преимуществом изучаемых здесь методов теории винтов является относительно легко изучать высшие производные.

Во-первых, обратите внимание, что ключ можно найти благодаря пружинам. В целом ключ представляет собой 6-мерный вектор сил и крутящих моментов,

$$B_T = \begin{pmatrix} \tau \\ F \end{pmatrix},$$

где τ — момент относительно начала координат, а F — сила. Обратите внимание, что ключи не элементы алгебры Ли, но элементы векторного пространства, двойственного алгебре Ли. Обычно сила, обусловленная потенциалом, определяется его градиентом. То же самое и здесь, с точки зрения внешней производной d , $W = d\Phi$. Сопряжение ключа с произвольным винтом S дает,

$$W(S) = d\Phi(S) = S\Phi,$$

см. [13, §. 4.20], например. Эти расчеты уже были сделаны в разделе 2.

выше, гаечный ключ дан,

$$B_T = \begin{pmatrix} \sum_i \lambda_i a_i \times (a_i - R b_i - t) \\ \sum_i \lambda_i (a_i - R b_i - t) \end{pmatrix},$$

это могло бы, конечно, также быть выведено из элементарной механики.

Для пружинных систем раздела 2 важным объектом является матрица жесткости система. В этом разделе матрица жесткости вычисляется путем взятия вторых производных потенциальной функции.

Бесконечно малое перемещение тела изображается винтом. гаечный ключ произведенное смещением s определяется как $W = Ks$, где K — матрица жесткости.

Матрица жесткости представляет собой гессиан потенциальной функции, то есть ее матрицу частные производные второго порядка, см. [14, гл. 5]. Это справедливо только при равновесии позиция.

В литературе по робототехнике были попытки распространить эти идеи на равновесные конфигурации, см., например, Гриффиса и Даффи [15] и Зефрана и Кумар [16]. Однако в данной работе будет использоваться классическое определение матрицы жесткости.

использоваться.

Теперь запишите результат выше для гаечного ключа как

$$W = \sum_i \lambda_i \begin{pmatrix} A_i^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование этого вдоль произвольного винта дает

$$SW = \sum_i \lambda_i \begin{pmatrix} A_i^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R B_i P^T + T I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},$$

используя результат раздела 2. Следовательно, матрица жесткости имеет вид

$$K = \sum_i \lambda_i \begin{pmatrix} A_i^T (R B_i R^T + A_i T) & A_i^T A_i \\ A_i (R B_i R^T + T) & I \end{pmatrix}.$$

На этот раз выберите начало координат в точке $i \lambda_i a_i$, а затем используйте равновесие

условие 2 для упрощения матрицы жесткости до,

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_i R B_i R^T & 0 \\ 0 & \lambda_i I_3 \end{pmatrix}.$$

Это особенно хороший результат, но на первый взгляд он немного удивителен. Термин

$\lambda_i I_3$ в правом нижнем углу означает, что система имеет одинаковую жесткость в любой

направлении, независимо от жесткости отдельных пружин и их расположения.

Это связано с предположением, что пружины имеют нулевую естественную длину.

Далее рассматривается задача нахождения индекса найденных критических точек. Для

краткости лишь вопрос, какая из критических точек является минимумом потенциала

энергии, то есть будет рассмотрено устойчивое равновесие. То есть: какое из решений

для R дает матрицу жесткости K со всеми положительными собственными значениями? Обратите внимание, что три из

собственными значениями K являются просто λ_i , и это положительно, если все константы пружины λ_i равны

положительный. Таким образом, необходимо изучить только собственные значения верхнего левого блока

K . После небольшой обработки это можно записать в терминах матрицы P или ее поляры

разложение,

$$\lambda_i A_i R B_i R^T = R P T + \text{Tr}(R P T) I_3 = R_i Q + \text{Tr}(R_i Q) I_3.$$

Здесь $\text{Tr}()$ представляет собой след матрицы. Теперь эта матрица имеет те же собственные векторы

как $R_i Q$ и, следовательно, как Q , помня, что R_i было либо единицей, либо вращением π

о собственном векторе Q . Итак, предположим, что собственные значения Q равны μ_1 , μ_2 и μ_3

с соответствующими собственными векторами e_1 , e_2 и e_3 . Предполагая, что R_i — это вращение вокруг

собственный вектор e_i , собственные значения матриц можно найти, рассматривая действие

на собственные векторы e_1 , e_2 и e_3 . Собственные значения для $R_0Q + \text{Tr}(R_0Q)I/3$:

$$(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3), \quad (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3) \text{ и } (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3).$$

Необходимо учитывать только одну другую матрицу, поскольку остальные представляют собой просто циклические перестановки.

ции, собственные значения $R_1Q + \text{Tr}(R_1Q)I/3$ равны,

$$(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3), \quad (\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3) \text{ и } (\mu_1 - \mu_2 - 2\mu_3).$$

Теперь осталось рассмотреть только два случая: если $\det(P) > 0$, то Q положительно определен.

а значит, таковы и все его собственные значения. В этом случае легко видеть, что критическая точка

представленный R_0 , будет минимальным. Это решение $R = R_p$.

В другом случае $\det(P) < 0$ классическое полярное разложение дает положительное

определенная симметричная матрица и отражение. Умножение их на -1 дает вращение

и отрицательно определенная симметричная матрица. То есть Q имеет все отрицательные собственные значения. Как

Предположим, что эти собственные значения имеют порядок $0 > \mu_1 - \mu_2 - \mu_3$, т. е. μ_1 является собственным

значение наименьшей величины, тогда матрица $R_1Q + \text{Tr}(R_1Q)I/3$ будет иметь все положительные

собственные значения и, следовательно, R_1 соответствует минимуму потенциала. Итак, в целом,

если $\det(P) < 0$, минимальное решение дается формулой $R = R_p R_i$, где R_i — поворот π

о собственном векторе Q с собственным значением наименьшей величины.

6. Выводы

Понятием, объединяющим три проблемы, изучаемые в данной работе, является представление о функциях

определено на группе преобразований твердого тела. Удалось найти

стационарные точки функций и классифицировать эти критические точки. Это включает в себя

простой метод дифференцирования вдоль винта.

Результаты согласуются с данными Канатани [11, гл. 5], его методы были, пожалуй, немного элегантнее, чем выше. Используемые здесь методы являются более общими, все найдены критические точки потенциальной функции, а не только минимум и с немного больше усилий можно было бы найти индекс каждого из них.

Эти идеи занимают центральное место в предмете теории Морса, области исследования, которая касается критические точки функций, определенных на многообразии, к топологии многообразия сам. В этом случае топология многообразия, лежащего в основе многообразия группы $SO(3)$ хорошо известен, и с его помощью можно кое-что сказать о критической точке потенциальную функцию.

Проблема с пружинами немного искусственная, в том, что пружины с нулевым нат. использовалась уральская длина. Это упрощает вычисления. Можно повторить большую часть приведенного выше анализа используют пружины с конечной натуральной длиной, см. [17]. Число Определение критических точек теперь становится очень сложной задачей, но все еще будет ограничено топология группы.

Задача оценки жесткого движения по точечным данным достаточно реалистична. Полезность оценки будет зависеть от распределения ошибок для измеренного точки. В литературе имеются некоторые результаты по этому поводу, см. [18]. Кажется, есть большой простор для дальнейших исследований в этом направлении.

Здесь было место только для краткого рассмотрения последствий Платформа Стюарта. Конечно, используя технику дифференцирования по винту, Ускорительные свойства платформы Стюарта могут быть рассчитаны. Однако обычное здесь возникают трудности с геометрическим определением второй производной. В частности обстоятельства понятно, что нужно делать, например, не так уж сложно найти

динамику платформы Стюарта см. в [19]. Опять же, это плодородная почва для
будущие разработки.

Рекомендации

[1] Мяс РС. Теория винтов. Издательство Кембриджского университета, Кембридж, 1900.

[2] Т. Хокинс. Рождение теории групп Ли. Математический интеллигент,
16 (2), стр. 6–17 1994.

[3] Р.А. Хорн и К.Р. Джонсон. Матричный анализ, издательство Кембриджского университета,
Кембридж, 1985 год.

[4] Дж. Милнор. Теория Морса. Издательство Принстонского университета, Нью-Джерси, 1969.

[5] М. Гринберг. Лекции по алгебраической топологии. WA Benjamin Inc., Нью-Йорк,
1967.

[6] Дж. К. Маккензи. Оценка отношения ориентации. Акта. Хрустальная, 10,
стр. 62–62 1957.

[7] Г. Вахба. Раздел о проблемах и решениях: оценка спутника по методу наименьших квадратов.
отношение. SIAM rev, 8, стр. 384–385, 1966.

[8] П.П. Моран. Кватернионы, мера Хаара и оценка палеомагнитного ро
ция. В J. Gani (ed.), Perspectives in Prob. и Stats., стр. 295–301, Applied
Probability Trust, Шеффилд, 1975.

[9] А. Надас. Метод наименьших квадратов и оценка максимального правдоподобия жесткого движения.

Отчет IBM Research, RC6945, IBM, Yorktown Heights, NY, 1978.

[10] БКП Хорн. Решение в замкнутой форме абсолютной ориентации с использованием единичных кватернионов.

Журнал Оптического общества Америки, A-4: 629–642, 1987 г.

[11] К. Канатани. Геометрические вычисления для машинного зрения. Кларендон Пресс, Окс

Форд, 1993 год.

[12] WH Press, SA Teukolsky, WT Vetterling и BP Flannery. Числовой

Рецепты на C: искусство научных вычислений, 2-е изд. Издательство Кембриджского университета,

Кембридж, 1992.

[13] Б. Ф. Шютц. Геометрические методы математической физики. Кембриджский университет

Сити Пресс, Кембридж, 1980.

[14] В. И. Арнольд. Геометрические методы классической механики, том 60 изд.

Уатные тексты по математике. Спрингер-Верлаг, Нью-Йорк, 1978 г.

[15] М. Гриффис и Дж. Даффи. Моделирование глобальной жесткости класса простых податливых

связь. Механизм и теория машин, 28 (2): 207–224, 1993.

[16] М. Зефран и В. Кумар. Аффинная связь для декартовой матрицы жесткости.

В материалах Международной конференции IEEE 1997 г. по робототехнике и Au

tomation, Альбукерке, Нью-Мексико, страницы 1376–1381.

[17] Дж. М. Селиг. Матрица пространственной жесткости из простых растянутых пружин в Pro

материалы Международной конференции IEEE по робототехнике и автоматизации 2000 г.,

Сан-Франциско, Калифорния, стр. 3314–3319, 2000.

[18] Г.С. Уотсон. Статистика вращений, в конспектах лекций по математике, Springer

Верлаг, 1379, стр. 398-413, 1989.

[19] Дж. М. Селиг и П. Р. Макари. Ограниченная динамика роботов II: параллельные машины

Журнал робототехнических систем, 16, стр. 487–498, 1999.