

Глава 3

ПЕРЕДНЯЯ КИНЕМАТИКА: НАШИ ДЕНАВИТ-ХАРТЕНБЕРГ СОГЛАШЕНИЕ

В этой главе мы разработаем прямые или конфигурационные кинематические уравнения для жестких роботов. Проблема прямой кинематики связана с взаимосвязью между отдельными соединениями робота-манипулятора и положением и ориентацией инструмента или исполнительного органа. Говоря более формально, задача прямой кинематики состоит в том, чтобы определить положение и ориентацию рабочего органа по заданным значениям совместных переменных робота. Переменными соединениями являются углы между звеньями в случае вращательных или вращательных соединений и удлинение звена в случае призматических или скользящих соединений. Задачу прямой кинематики следует противопоставить задаче обратной кинематики, которая будет изучаться в следующей главе и которая связана с определением значений совместных переменных, которые обеспечивают желаемое положение и ориентацию рабочего органа робота.

3.1 Кинематические цепи

Как описано в главе 1, робот-манипулятор состоит из набора звеньев, соединенных между собой различными соединениями. Соединения могут быть как очень простыми, например, вращающееся или призматическое соединение, так и более сложными, например, шарнирное соединение. (Напомним, что вращательный шарнир подобен

72 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

шарнир и допускает относительное вращение вокруг одной оси, а призматический сустав допускает линейное движение вдоль одной оси, а именно вытяжение или втягивание.) Разница между двумя ситуациями заключается в том, что в первом случае сустав имеет только единую степень свободы движения: угол поворота в случае вращательного соединения и величина линейного смещения в случае призматического соединения. Напротив, шаровой шарнир имеет две степени свободы. В этой книге предполагается, что все суставы имеют только одну степень свободы. Обратите внимание, что это допущение не влечет за собой никакой реальной потери общности, поскольку такие суставы, как шаровидный сустав (две степени свободы) или сферическое запястье (три степени свободы), всегда можно рассматривать как последовательность шарниров с одной степенью свободы и звеньями нулевой длины между ними.

В предположении, что каждый шарнир имеет одну степень свободы, действие каждого сустава можно описать одним действительным числом: углом поворота в случае вращательного шарнира или смещением в случае призматического шарнира. Целью прямого кинематического анализа является определение кумулятивного эффекта всего набора совместных переменных. В этой главе мы разработаем набор соглашений, обеспечивающих систематическую процедуру выполнения этого анализа. Конечно, можно провести прямой кинематический анализ даже без соблюдения этих соглашений, как мы сделали для примера двухзвенного плоского манипулятора в главе 1. Однако кинематический анализ n -звенного манипулятора может быть чрезвычайно сложным и введенные ниже соглашения значительно упрощают анализ. Более того, они порождают универсальный язык, на котором инженеры-роботы могут общаться.

Робот-манипулятор с n суставами будет иметь $n + 1$ звено, так как каждое сочленение соединяет два звена. Пронумеруем соединения от 1 до n , а звенья пронумеруем от 0 до n , начиная с основания. Согласно этому соглашению, соединение i соединяет ссылку $i - 1$ со ссылкой i . Будем считать положение сустава i фиксированным относительно звена $i - 1$. Когда шарнир i приводится в действие, звено i перемещается. Следовательно, звено 0 (первое звено) неподвижно и не двигается при срабатывании сочленений. Конечно, сам робот-манипулятор может быть мобильным (например, он может быть установлен на мобильной платформе или на автономном транспортном средстве), но мы не будем рассматривать этот случай в настоящей главе, так как с ним можно легко справиться, немного расширив методы, представленные здесь.

с q_i совместной, мы связываем совместную переменную, обозначаемую q_i . В случае вращательного соединения q_i представляет собой угол поворота, а в случае

3.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

73

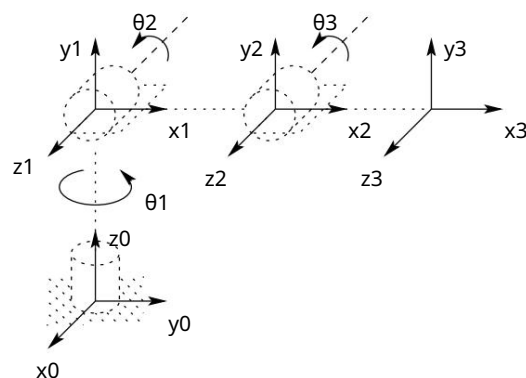


Рисунок 3.1: Координатные рамки, прикрепленные к коленчатому манипулятору.

призматический шарнир, q_i - смещение сустава:

$$C_i = \begin{matrix} \theta_i : \text{соединение } i \text{ вращающееся} \\ d_i : \text{соединение } i \text{ призматическое} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Для выполнения кинематического анализа к каждому звену жестко привязана система координат. В частности, мы присоединяем $o_i x_i y_i z_i$ к ссылке i . Это означает, что какое бы движение ни выполнял робот, координаты каждой точки на звене i остаются постоянными при выражении в i -й системе координат. Кроме того, когда шарнир i приводится в действие, звено i и прикрепленная к нему рама, $o_i x_i y_i z_i$, испытывают результирующее движение. Рамка $o_0 x_0 y_0 z_0$, прикрепленная к основанию робота, называется инерциальной рамой. На рис. 3.1 показана идея жесткого крепления рам к звеньям в случае локтевого манипулятора.

Теперь предположим, что A_i — однородная матрица преобразования, выражающая положение и ориентацию $o_i x_i y_i z_i$ относительно $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$. Матрица A_i не постоянна, а изменяется при изменении конфигурации робота. Однако предположение о том, что все суставы вращательные или призматические, означает, что A_i является функцией только одной переменной сустава, а именно q_i . Другими словами,

$$A_i = A_i(q_i). \quad (3.2)$$

Теперь однородная матрица преобразования, выражающая положение и ориентацию $o_j x_j y_j z_j$ относительно $o_i x_i y_i z_i$, по соглашению называется матрицей преобразования и обозначается T_{ij} . Из главы 2 мы видим, что

$$T_{ji}^n = A_{i+1} A_{i+2} \dots A_j \quad \text{если } i < j$$

74 ГЛАВА 3. Прямая кинематика: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

$$\begin{aligned} T_{j-1}^j &= I, \text{ если } j = i \\ T_{j-1}^j &= (T_{i-1}^i)^{-1} \text{ если } j > i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

По способу, которым мы жестко прикрепили различные рамки соответствующим ссылкам, следует, что положение любой точки на рабочий орган, выраженный в кадре n , является константой, не зависящей от конфигурации робота. Обозначим положение и ориентацию концевого зажима относительно инерциальной или базовой системы координат трехвектором O_0 (что дает координаты начала координат рабочего органа с относительно базового кадра) и матрица вращения $3 \times 3 R_0$, и определить однородная матрица преобразования

$$H = \begin{pmatrix} R_0^T O_0 \\ 0 \quad 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Тогда положение и ориентация рабочего органа в инерциальной системе отсчета даны

$$H = T_n^0 = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n). \quad (3.5)$$

Каждое однородное преобразование A_i имеет вид

$$A_i = \begin{pmatrix} R_i^T O_i^{i-1} \\ 0 \quad 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Следовательно

$$T_{j-1}^j = A_{i+1} \cdots A_j = \begin{pmatrix} R_i^T O_i^{j-1} \\ 0 \quad 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Матрица R_i выражает ориентацию $o_j x_j y_j z_j$ относительно $o_i x_i y_i z_i$ и задается вращательными частями A -матриц как

$$R_{j-1}^j = R_{j-1}^{j-1} \cdots R_j^j. \quad (3.8)$$

Координатные векторы O_i задаются рекурсивно по формуле

$$O_{j-1}^j = O_{j-1}^{j-1} + R_{j-1}^{j-1} O_j^{j-1}, \quad (3.9)$$

Эти выражения будут полезны в главе 5, когда мы будем изучать матрицы Якоби.

В принципе, это все, что нужно для кинематики вперед! Обозначить функции $A_i(q_i)$ и перемножить их по мере необходимости. Тем не менее, можно добиться значительной упорядоченности и упрощения за счет введение дополнительных соглашений, таких как представление сустава Денавитом-Хартенбергом, и это является целью оставшейся части главы.

Из главы 2 видно, что произвольная однородная матрица преобразования может быть охарактеризована шестью числами, такими как, например, три числа для задания четвертого столбца матрицы и три угла Эйлера для задания верхней левой матрицы поворота 3×3 . В представлении DH, напротив, всего четыре параметра. Как это возможно? Ответ заключается в том, что хотя система i должна быть жестко прикреплена к звену i , у нас есть значительная свобода в выборе начала координат и координатных осей системы координат. Например, нет необходимости, чтобы начало O_i кадра i располагалось на физическом конце канала i . На самом деле нет необходимости даже размещать кадр i внутри физического соединения; кадр i мог бы лежать в свободном пространстве — до тех пор, пока кадр i жестко прикреплен к звену i . Грамотно выбрав начало координат и оси координат, можно сократить количество параметров

76 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

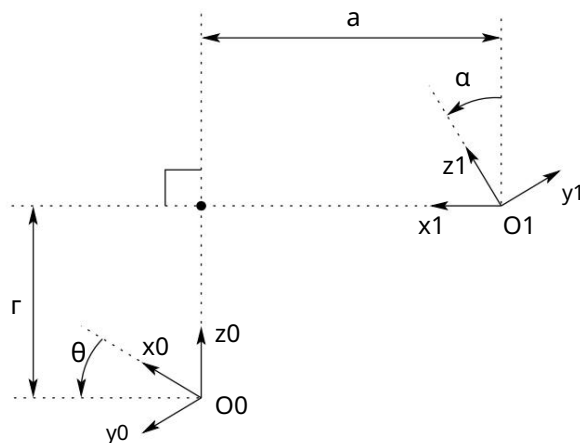


Рисунок 3.2: Система координат, удовлетворяющая предположениям DH1 и DH2.

необходимо от шести до четырех (или даже меньше в некоторых случаях). В разделе 3.2.1 мы покажем, почему и при каких условиях это можно сделать, а в разделе 3.2.2 мы покажем, как именно выполнять назначения системы координат.

3.2.1 Проблемы существования и уникальности

Ясно, что любое произвольное однородное преобразование невозможно представить, используя только четыре параметра. Поэтому начнем с определения того, какие именно однородные преобразования могут быть выражены в виде (3.10).

Предположим, что нам даны два кадра, обозначенные кадрами 0 и 1 соответственно.

Тогда существует уникальная однородная матрица преобразования A , которая переводит координаты из кадра 1 в координаты кадра 0. Теперь предположим, что два кадра имеют две дополнительные функции, а именно:

(DH1) Ось x_1 перпендикулярна оси z_0

(DH2) Ось x_1 пересекает ось z_0

как показано на рисунке 3.2. В этих условиях мы утверждаем, что существуют единственные числа a , d , θ , α такие, что

$$A = R_z, \theta \text{Trans}_z, d \text{Trans}_x, a R_x, \alpha. \quad (3.11)$$

Конечно, поскольку θ и α являются углами, мы действительно имеем в виду, что они уникальны с точностью до кратных 2π . Чтобы показать, что матрица A может быть записана в этом

3.2. ПРЕДСТАВИТЕЛЬСТВО ДЕНАВИТ ХАРТЕНБЕРГ

77

форма, напишите A как

$$A = \begin{pmatrix} R_{01} & O_{01} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

th, и пусть r_i обозначает i -й столбец матрицы вращения R_{01} . Мы сейчас изучим последствия двух ограничений DH.

Если (DH1) выполнено, то x_1 перпендикулярно z_0 и мы имеем $x_1 \cdot z_0 = 0$. Выражая это ограничение относительно $o_0x_0y_0z_0$, используя тот факт, что r_1 представление единичного вектора x_1 относительно репера O_0 , мы получаем

$$0 = x_1^0 \cdot r_1^0 \quad (3.13)$$

$$= [r_{11}, r_{21}, r_{31}]^T \cdot [0, 0, 1]^T \quad (3.14)$$

$$= r_{31}. \quad (3.15)$$

Поскольку $r_{31} = 0$, нам нужно только показать, что существуют единственные углы θ и α такое, что

$$P_1^0 = R_{x, \theta} R_{x, \alpha} = \begin{pmatrix} c\theta & s\theta c\alpha & s\theta s\alpha \\ s\theta & c\theta c\alpha & c\theta s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Единственная информация, которой мы располагаем, это то, что $r_{31} = 0$, но этого недостаточно. Первый, поскольку каждая строка и столбец R_{01} должна иметь единичную длину, $r_{31} = 0$ означает, что

$$\begin{aligned} p_{11}^2 + p_{21}^2 &= 1, \\ p_{32}^2 + p_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Следовательно, существуют единственные θ , α такие, что

$$(r_{11}, r_{21}) = (c\theta, s\theta), \quad (r_{33}, r_{32}) = (c\alpha, s\alpha). \quad (3.18)$$

Как только θ и α найдены, обычно показывается, что остальные элементы R_{01} должен иметь вид, показанный в (3.16), с учетом того, что R_{01} это ротация матрица.

Далее, предположение (DH2) означает, что смещение между O_0 и O_1 может быть выражен как линейная комбинация векторов z_0 и x_1 . Этот можно записать как $O_1 = O_0 + dz_0 + ax_1$. Опять же, мы можем выразить эту связь в координатах $o_0x_0y_0z_0$, и мы получим

$$O_1^0 = O_0^0 + dz_0^0 + \text{топор} \quad (3.19)$$

78 ГЛАВА 3. Прямая кинематика: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

$${}^{0}_{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$${}^{0}_{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 & a \\ -s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Объединяя приведенные выше результаты, получаем (3.10) требуемое. Таким образом, мы видим, что четырех параметров достаточно для задания любого однородного преобразования, удовлетворяющего ограничениям (DH1) и (DH2).

Теперь, когда мы установили, что каждая однородная матрица преобразования, удовлетворяющая приведенным выше условиям (DH1) и (DH2), может быть представлена в виде (3.10), мы фактически можем дать физическую интерпретацию каждой из четырех величин в (3.10). Параметр a представляет собой расстояние между осями z_0 и z_1 и измеряется вдоль оси x_1 . Угол α — это угол между осями z_0 и z_1 , измеренный в плоскости, нормальной к x_1 . Положительный смысл для α определяется от z_0 до z_1 по правилу правой руки, как показано на рис. 3.3. Параметр d представляет собой расстояние между началом

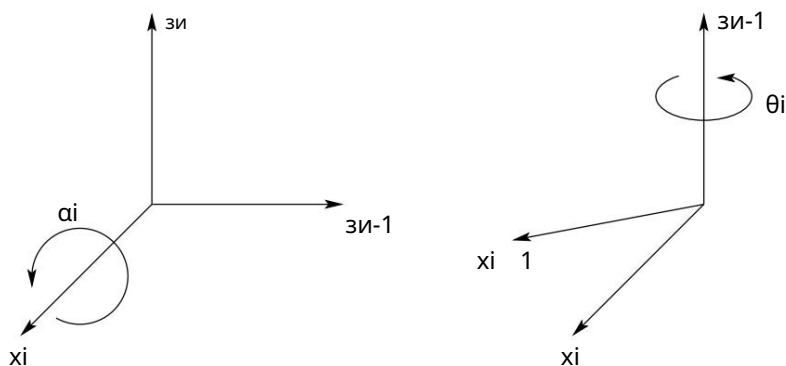


Рисунок 3.3: Положительный смысл для α_i и θ_i .

00 и пересечение оси x_1 с z_0 , измеренным вдоль оси z_0 .

Наконец, θ — это угол между x_0 и x_1 , измеренный в плоскости, нормальной к z_0 .

Эти физические интерпретации окажутся полезными при разработке процедуры задания систем координат, удовлетворяющих ограничениям (DH1) и (DH2), и сейчас мы обратим внимание на разработку такой процедуры.

3.2.2 Назначение систем координат

Для данного робота-манипулятора всегда можно выбрать кадры $0, \dots, n$ так, чтобы выполнялись два вышеуказанных условия. В определенных обстоятельствах это потребует размещения начала координат O_i кадра i в месте, которое может быть интуитивно неудовлетворительным, но обычно это не так. При чтении изложенного ниже материала важно помнить, что выбор различных систем координат не уникален, даже если он ограничен вышеуказанными требованиями. Таким образом, возможно, что разные инженеры получают разные, но одинаково правильные назначения системы координат для звеньев робота. Однако очень важно отметить, что конечный результат (т. е. матрица T кадров промежуточных звеньев (в предположении, что 0_n) будет одинаковым, независимо от назначения системы координат для звена n совпадают). Мы начнем с вывода общей процедуры. Затем мы обсудим различные общие частные случаи, когда можно еще больше упростить однородную матрицу преобразования.

Для начала отметим, что выбор z_i произвольный. В частности, из (3.16) мы видим, что, выбирая подходящим образом c_i и θ_i , можно получить любое произвольное направление для z_i . Таким образом, для нашего первого шага мы назначаем оси $z_0, \dots, z_{n-1}$ интуитивно приятным способом. В частности, мы назначаем z_i осью срабатывания сустава $i + 1$. Таким образом, z_0 — ось срабатывания сустава 1, z_1 — ось срабатывания сустава 2 и т. д. Рассмотрим два случая: (i) если шарнир $i + 1$ вращающийся, то z_i — ось вращения шарнира $i + 1$; (ii) если шарнир $i + 1$ призматический, то z_i является осью перемещения шарнира $i + 1$. Сначала может показаться немного запутанным связывать z_i с шарниром $i + 1$, но вспомните, что это удовлетворяет установленному нами соглашению в разделе 3.1, а именно, что шарнир i зафиксирован по отношению к раме i , и что, когда шарнир i приводится в действие, звено i и прикрепленная к нему рама $o_i x_i y_i z_i$ испытывают результирующее движение.

После того, как мы установили оси Z для ссылок, мы устанавливаем базовый кадр. Выбор базовой рамы почти произволен. Мы можем выбрать начало координат O_0 базовой системы координат в качестве любой точки на z_0 . Затем мы выбираем x_0, y_0 любым удобным способом, лишь бы полученный репер был правым. Это устанавливает кадр 0.

Как только кадр 0 установлен, мы начинаем итеративный процесс, в котором мы определяем кадр i , используя кадр $i - 1$, начиная с кадра 1. Рисунок 3.4 будет полезен для понимания процесса, который мы сейчас описываем.

Для построения системы i необходимо рассмотреть три случая: (i) оси z_{i-1}, z_i не компланарны, (ii) оси z_{i-1}, z_i пересекаются, (iii) оси z_{i-1}, z_i параллельны. Заметим, что в обоих случаях (ii) и (iii) оси z_{i-1} и z_i компланарны. Эта ситуация на самом деле довольно распространена, как мы увидим в

80 ГЛАВА 3. Прямая кинематика: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

Рисунок 3.4: Назначение кадра Денавита-Хартенберга.

Раздел 3.3. Рассмотрим теперь каждый из этих трех случаев.

(i) z_{i-1} и z_i не компланарны: если z_{i-1} и z_i не компланарны, то существует единственный отрезок прямой, перпендикулярный обеим z_{i-1} и z_i , такой, что он соединяет обе прямые и имеет минимальную длину. Линия, содержащая эту общую нормаль к z_{i-1} и z_i , определяет x_i , а точка, в которой эта линия пересекает z_i , является началом координат O_i . По построению выполняются оба условия (DH1) и (DH2), и вектор из O_{i-1} в O_i является линейной комбинацией z_{i-1} и x_i . Спецификация кадра i завершается выбором оси y_i для формирования правого кадра. Поскольку выполняются предположения (DH1) и (DH2), матрица однородного преобразования A_i имеет вид (3.10).

(ii) z_{i-1} параллельна z_i : если оси z_{i-1} и z_i параллельны, то между ними существует бесконечно много общих нормалей, и условие (DH1) не определяет x_i полностью. В этом случае мы можем выбрать начало координат O_i в любом месте вдоль z_i . Часто O_i выбирают для упрощения получающихся уравнений. Затем выбирается ось x_i либо направленная от O_{i-1} к z_{i-1} вдоль общей нормали, либо противоположная этому вектору. Обычный метод выбора O_i состоит в том, чтобы выбрать нормаль, проходящую через O_{i-1} , в качестве оси x_i ; Тогда O_i является точкой, в которой эта нормаль пересекает z_i . В этом случае d_i будет равно нулю. Как только x_i зафиксировано, y_i определяется, как обычно, по правилу правой руки. Так как оси z_{i-1} и z_i параллельны, то a_i в этом случае будет равно нулю.

(iii) z_{i-1} пересекает z_i : в этом случае x_i выбирается нормально к плоскости, образованной z_i и z_{i-1} . Положительное направление x_i произвольно. Большинство

естественный выбор начала O_i в этом случае находится в точке пересечения z_i и z_{i-1} . Однако достаточно любой удобной точки на оси z_i . Обратите внимание, что в этом случае параметр a_i равен 0.

Эта конструктивная процедура работает для кадров $0, \dots, n-1$ в n -звенном роботе. Для завершения построения необходимо указать кадр n . Конечная система координат $o_n x_n y_n z_n$ обычно называется концевым исполнительным органом или станиной инструмента (см. рис. 3.5). Происхождение H_n чаще всего

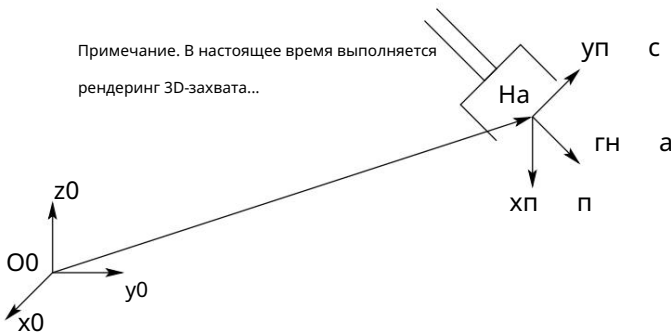


Рисунок 3.5: Назначение рамы инструмента.

располагаться симметрично между пальцами захвата. Единичные векторы вдоль осей x_p , y_p и z_p обозначены как p , s и a соответственно. Терминология возникает из-за того, что направление a является направлением приближения в том смысле, что захват обычно приближается к объекту вдоль направления a . Точно так же направление s — это направление скольжения, направление, вдоль которого пальцы захвата скользят, открываясь и закрываясь, а p — это направление, нормальное к плоскости, образованной точками a и s .

В современных роботах конечным движением сустава является поворот концевой эффектора на θ_n , и две последние оси сустава, z_{n-1} и z_n , совпадают. В этом случае преобразование между последними двумя системами координат представляет собой перемещение вдоль z_{n-1} на расстояние d_n , за которым следует (или предшествует) поворот на θ_n радиан вокруг z_{n-1} . Это важное наблюдение, которое упростит вычисление инверсной кинематики в следующей главе.

Наконец, отметим следующий важный факт. Во всех случаях, независимо от того, является ли рассматриваемый шарнир вращательным или призматическим, величины a_i и d_i всегда постоянны для всех i и характерны для манипулятора. Если шарнир i призматический, то θ_i также является константой, а d_i — это i , если шарнир i вращательный, то d_i постоянный, а θ_i — это i .

совместная переменная. Сходным образом,
совместная переменная.

82 ГЛАВА 3. Прямая кинематика: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

3.2.3 Резюме

Мы можем обобщить описанную выше процедуру, основанную на соглашении DH, в следующем алгоритме для получения прямой кинематики для любого манипулятора.

Шаг 1: Найдите и обозначьте оси соединения $z_0, \dots, z_{n-1}$.

Шаг 2: Установите базовую раму. Установите начало координат в любом месте оси z_0 .

Оси x_0 и y_0 выбраны удобно, чтобы образовать правую систему отсчета.

Для $j = 1, \dots, n-1$, выполнить шаги с 3 по 5.

Шаг 3: Найдите начало O_i , где общая нормаль к z_i и z_{i-1} пересекает z_i . Если z_i пересекает z_{i-1} , найдите O_i на этом пересечении. Если z_i и z_{i-1} параллельны, расположите O_i в любом удобном месте вдоль z_i .

Шаг 4: Установите x_i вдоль общей нормали между z_{i-1} и z_i через или в направлении O_i , нормали к плоскости z_{i-1} и z_i , если z_{i-1} и z_i пересекаются.

Шаг 5: Установите y_i , чтобы завершить правую рамку.

Шаг 6: Установите раму рабочего органа на $x_{n-1}z_{n-1}$. Предполагая, что n -й шарнир является вращательным, установите $z_n = a$ вдоль направления z_{n-1} . Установите начало координат O_n удобно вдоль Z_n , предпочтительно в центре захвата или на кончике любого инструмента, который может быть у манипулятора. Установите $y_n = s$ в направлении закрытия захвата и установите $x_n = p$ как $s \times a$. Если инструмент не является простым захватом, установите x_n и y_n так, чтобы было сформировать правую рамку.

Шаг 7: Создайте таблицу параметров ссылки a_i , d_i , α_i , θ_i .

a_i = расстояние по x_{i-1} от O_{i-1} до пересечения x_i и z_{i-1} оси.

d_i = расстояние по z_{i-1} от O_{i-1} до пересечения осей x_i и z_{i-1} . d_i является переменной, если шарнир i призматический. α_i =

угол между z_{i-1} и z_i , измеренный относительно x_i (см. рис. 3.3).

θ_i = угол между x_{i-1} и x_i , измеренный относительно z_{i-1} (см. рис. 3.3). θ_i является переменным, если шарнир i вращается.

Шаг 8: Сформируйте однородные матрицы преобразования A_i , подставив вышеуказанные параметры в (3.10).

Шаг 9: Форма $T_N^0 = A_1 \cdots A_n$. Затем это дает положение и ориентацию рамки инструмента, выраженной в базовых координатах.

3.3 Примеры

В соглашении ДН единственным переменным углом является θ , поэтому мы упрощаем обозначения, записывая $\cos \theta_i$ вместо $\cos \theta_i$ и т. д. Мы также обозначаем $\theta_1 + \theta_2$ через θ_{12} , а $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ через c_{12} и так далее. В следующих примерах важно помнить, что соглашение ДН, хотя и является систематическим, по-прежнему допускает значительную свободу выбора некоторых параметров манипулятора. Это особенно верно в случае параллельных осей суставов или когда задействованы призматические суставы.

Пример 3.1. Плоский локтевой манипулятор.

Рассмотрим двухзвенный плоский рычаг на рис. 3.6. Совместные оси z_0 и

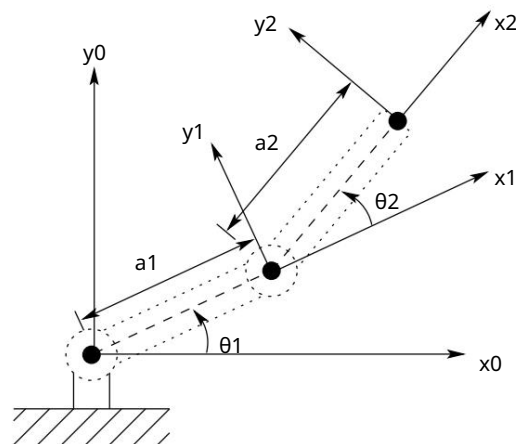


Рисунок 3.6: Двухзвенный планарный манипулятор. Все оси Z указывают за пределы страницы и не показаны на рисунке.

z_1 нормальны к странице. Мы устанавливаем базовый кадр $o_0x_0y_0z_0$, как показано. Начало выбрано в точке пересечения оси z_0 со страницей, а направление оси x_0 совершенно произвольно. Как только базовый кадр установлен, кадр $o_1x_1y_1z_1$ фиксируется, как показано соглашением ДН, где начало координат O_1 находится на пересечении z_1 и страницы.

Окончательный кадр $o_2x_2y_2z_2$ фиксируется путем выбора начала координат O_2 в конце ссылки 2, как показано на рисунке. Параметры канала показаны в таблице 3.1. А-матрицы

84 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

Таблица 3.1: Параметры звена для двухзвенного планарного манипулятора.

Ссылка	a_i	d_i	θ_i	
1	a_1	0	θ_1	1
2	a_2	0	θ_2	2

* переменная

определяется из (3.10) как

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ c_1 c_1 & 0 & 0 & a_1 c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ c_2 c_2 & 0 & 0 & a_2 c_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Таким образом, Т-матрицы имеют вид

$$T_1^0 = A_1. \quad (3.24)$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ c_{12} c_2 & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Обратите внимание, что первые две записи последнего столбца T_2^0 x и y компоненты происхождения O2 в базовой рамке; то есть,

$$x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \quad (3.26)$$

$$y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

- координаты рабочего органа в базовой раме. Вращательная часть T_2^0 дает ориентацию кадра $o_2 x_2 y_2 z_2$ относительно базового кадра.

Пример 3.2 Трехзвенный цилиндрический робот

Рассмотрим теперь трехзвенный цилиндрический робот, символически представленный Рисунок 3.7. Мы устанавливаем O0, как показано на стыке 1. Обратите внимание, что размещение

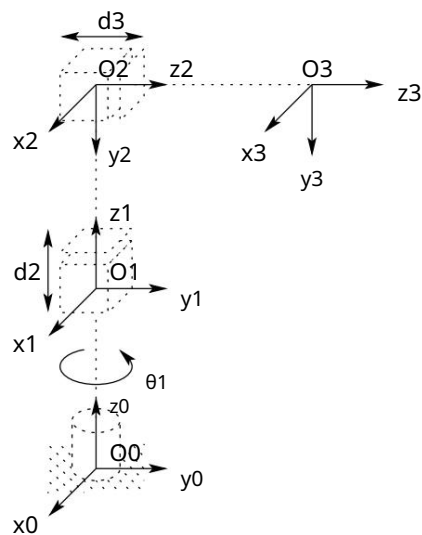


Рисунок 3.7: Трехзвенный цилиндрический манипулятор.

Таблица 3.2: Параметры звена трехзвенного цилиндрического манипулятора.

Ссылка	a_i	d_i	θ_i	d_1
1			θ_1	1
2	0	90°	d_2	0
3		0	d_3	0

* переменная

начало координат O_0 вдоль z_0 , а также направление оси x_0 произвольны. Наш выбор O_0 наиболее естественен, но O_0 можно было бы с таким же успехом разместить на стыке 2. Ось x_0 выбрана перпендикулярно странице. Затем, поскольку z_0 и z_1 совпадают, начало координат O_1 выбирается на стыке 1, как показано. Ось x_1 нормальна к странице, когда $\theta_1 = 0$, но, конечно, ее направление изменится, поскольку θ_1 является переменной величиной. Поскольку z_2 и z_1 пересекаются, начало координат O_2 находится на этом пересечении. Направление x_2 выбрано параллельно x_1 , так что θ_2 равно нулю. Наконец, третий кадр выбирается в конце ссылки 3, как показано.

Параметры связи теперь показаны в таблице 3.2. Соответствующий А

86 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

и Т-матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 & s_1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & s_1 d_3 & 0 \\ c_1 & c_1 d_3 & d_1 + d_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Пример 3.3 Сферическое запястье

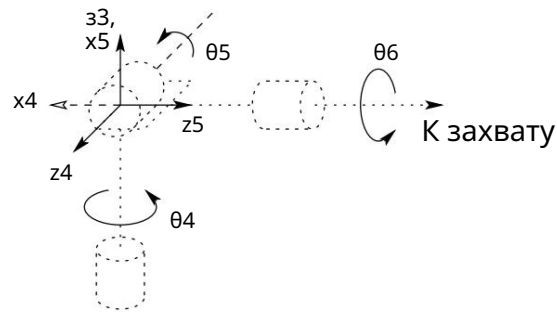


Рисунок 3.8: Назначение сферического каркаса запястья.

Сферическая конфигурация запястья показана на рис. 3.8, в которой оси суставов z_3 , z_4 , z_5 пересекаются в точке O . Параметры Денавита-Хартенберга приведены в табл. 3.3. Стэнфордский манипулятор является примером манипулятора с запястьем такого типа. На самом деле следующий анализ применим практически ко всем сферическим запястьям.

3.3. ПРИМЕРЫ

87

Таблица 3.3: Параметры ДН для сферического запястья.

Связь	a_i	α_i	d_i	θ_i	θ
4					4
5	0	90	0	θ	5
6			0	d_6	6

* переменная

Покажем теперь, что последние три совместные переменные, $\theta_4, \theta_5, \theta_6$, являются углами Эйлера ϕ, θ, ψ соответственно относительно системы координат $o_3x_3y_3z_3$. Чтобы убедиться в этом, нам нужно только вычислить матрицы A_4, A_5 и A_6 , используя таблицу 3.3 и выражение (3.10). Это дает

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 & s_4 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_5 & 0 & s_5 & s_5 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_6 & s_6 & 0 & 0 & s_6 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} c_4c_5c_6 & s_4s_6 & c_4c_5s_6 & s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & c_5c_6 & c_5 & c_5d_6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Умножение этих значений дает

$$T_6^3 = A_4A_5A_6 = \begin{pmatrix} R_3 & O_3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$T_6^3 = \begin{pmatrix} c_4c_5c_6 & s_4s_6 & c_4c_5s_6 & s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & c_5c_6 & c_5 & c_5d_6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Сравнение вращательной части R_3 с преобразованием угла Эйлера (2.51) показывает, что $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ действительно могут быть идентифицированы как углы Эйлера ϕ, θ и ψ относительно системы координат $o_3x_3y_3z_3$.

88 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

Пример 3.4 Цилиндрический манипулятор со сферическим запястьем

Предположим, что теперь мы присоединяем сферическое запястье к цилиндрическому манипулятору из примера 3.3.2, как показано на рис. 3.9. Обратите внимание, что ось вращения

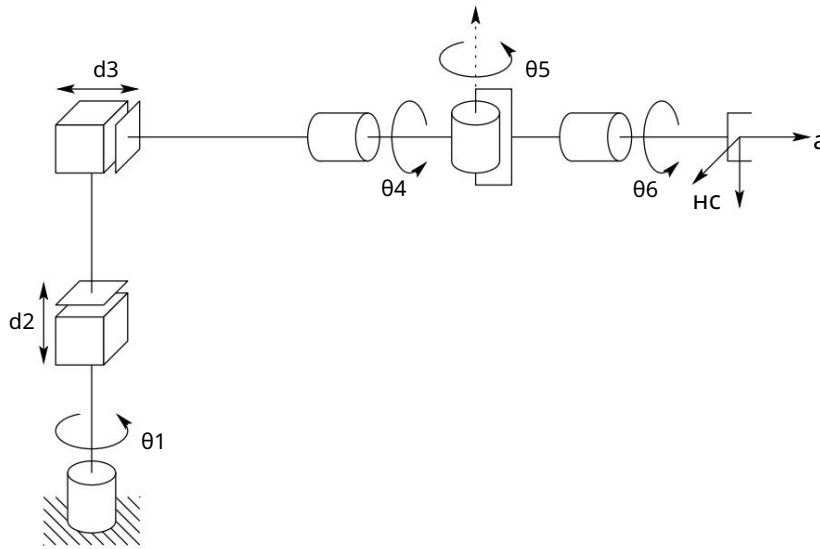


Рисунок 3.9: Цилиндрический робот со сферическим запястьем.

шарнир 4 параллелен z_2 и, таким образом, совпадает с осью z_3 примера 3.3.2.

Следствием этого является то, что мы можем немедленно объединить два предыдущих выражения (3.28) и (3.32), чтобы получить прямую кинематику как

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3 \quad (3.33)$$

с T_3^0 (3.28) и T_6^3 дается (3.32). Поэтому передняя кинематика этого манипулятора описывается выражением

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} c1 & 0 & s1 & s1d1 & s1 & 0 & c1 \\ c1d3 & 0 & 1 & 0 & d1 + d2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r11 & r12 & r13 & dx \\ r21 & r22 & r23 & dy \\ r31 & r32 & r33 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c4c5c6 & s4s6 & c4c5s6 & s4c6 & c4s5 & c4s5d6 & s4c5c6 \\ + c4s6 & s4c5s6 & + c4c6 & s4s5 & s4s5d6 & (3.34) & c5d6 & 1 \\ s5c6 & 0 & s5c6 & 0 & c5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

где

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= c_1 c_4 c_5 c_6 - c_1 s_4 s_6 + s_1 s_5 c_6 \\
 r_{21} &= s_1 c_4 c_5 c_6 - s_1 s_4 s_6 - c_1 s_5 c_6 \\
 r_{31} &= s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\
 r_{12} &= c_1 c_4 c_5 s_6 - c_1 s_4 c_6 - s_1 s_5 s_6 \\
 r_{22} &= s_1 c_4 c_5 s_6 - s_1 s_4 s_6 + c_1 s_5 s_6 \\
 r_{32} &= c_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \\
 r_{13} &= c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5 \\
 r_{23} &= c_1 c_4 s_5 + c_1 c_5 \\
 r_{33} &= s_4 s_5 \\
 dx &= c_1 c_4 s_5 d_6 - s_1 c_5 d_6 - s_1 d_3 \, dy = \\
 &= s_1 c_4 s_5 d_6 + c_1 c_5 d_6 + c_1 d_3 \, dz = \\
 &= -s_4 s_5 d_6 + d_1 + d_2.
 \end{aligned}$$

Обратите внимание, что большая часть сложности прямой кинематики для этого манипулятора возникает из-за ориентации рабочего органа, в то время как выражение для положения руки из (3.28) довольно простое. Предположение о сферическом запястье не только упрощает здесь вывод прямой кинематики, но и значительно упрощает задачу обратной кинематики в следующей главе.

Пример 3.5. Стэнфордский манипулятор

Рассмотрим теперь Стэнфордский манипулятор, показанный на рис. 3.10. Этот манипулятор является примером сферического (RRP) манипулятора со сферическим запястьем. Этот манипулятор имеет смещение в плечевом суставе, что несколько усложняет задачи как прямой, так и обратной кинематики.

Сначала мы устанавливаем совместные системы координат, используя соглашение DH, как показано. Параметры связи приведены в таблице 3.4.

Матрицы A_i легко вычислить как

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

90ГЛАВА 3. Прямая кинематика: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

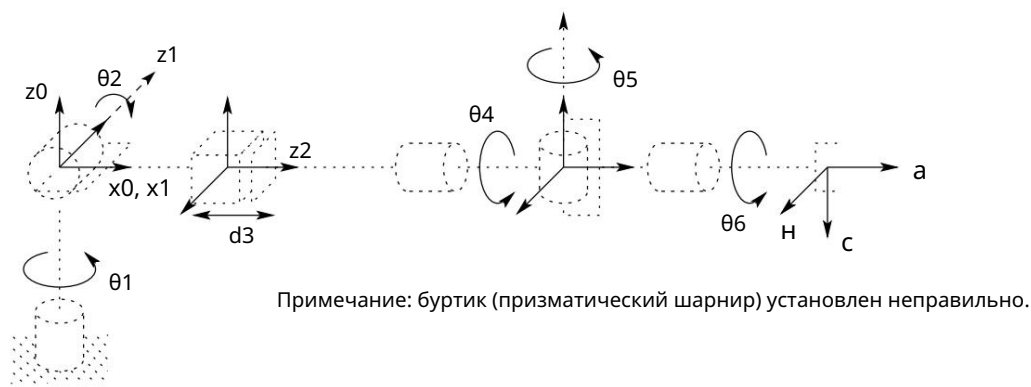


Рисунок 3.10: Назначение системы координат DH для манипулятора Stanford.

Таблица 3.4: Параметры DH для Stanford Manipulator.

Связь	d_i	a_i	α_i	θ_i	0	0	90
1			d_2	0	$+90$		
2	0	0					
3					0		
4	0	0	90				
5	0	0	$+90$	6	d_6	0	0

*
совместная переменная

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 & s_2 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & & \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 & s_4 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

3.3. ПРИМЕРЫ

91

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 & s_5 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & s_6 & 0 & 0 & c_6 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 & 1 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

T_6^0 затем дается как

$$T_6^0 = A_1 \cdots A_6 \quad (3.41)$$

$$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx & r_{21} \\ r_{22} & r_{23} & dy & r_{31} & r_{32} \\ r_{33} & dz & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (3.42)$$

где

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - d_2(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ r_{21} &= s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ r_{31} &= s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \\ r_{12} &= c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ r_{22} &= s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ r_{32} &= s_2(-c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \quad (3.43) \\ r_{13} &= c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 \\ r_{23} &= s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 \\ r_{33} &= s_2c_4s_5 + c_2c_5 \\ dx &= c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5) \\ dy &= s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) \\ dz &= c_2d_3 + d_6(c_2c_5 - c_4s_2s_5). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Пример 3.6 Манипулятор SCARA

В качестве другого примера общей процедуры рассмотрим манипулятор SCARA на рис. 3.11. Этот манипулятор, представляющий собой абстракцию робота AdeptOne на рис. 1.11, состоит из руки RRP и запястья с одной степенью свободы, движение которых представляет собой перекал вокруг вертикальной оси. Первый

92ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

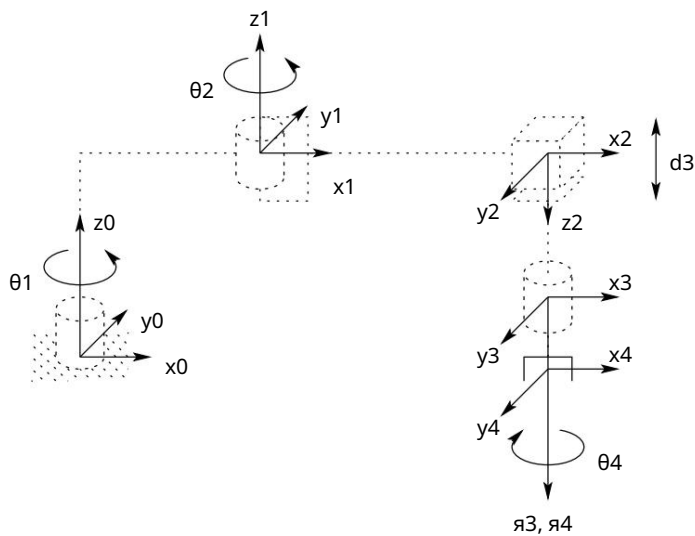


Рисунок 3.11: Назначение системы координат DH для манипулятора SCARA.

Таблица 3.5: Совместные параметры для SCARA.

Связь	a_i	α_i	d_i	θ_i	a_1	0	0
1	a_2	180°	0	0	0	0	
2							
3	0						
4	0		0	d_4			

*
совместная переменная

шаг состоит в том, чтобы найти и пометить оси соединения, как показано на рисунке. Поскольку все оси соединений параллельны, у нас есть некоторая свобода в размещении начала координат. Истоки расположены так, как показано для удобства. Устанавливаем ось x_0 в плоскости страницы, как показано. Это совершенно произвольно и влияет только на нулевую конфигурацию манипулятора, то есть на положение манипулятора при $\theta_1 = 0$.

Параметры соединения приведены в таблице 3.5, а А-матрицы таковы:

3.3. ПРИМЕРЫ

93

следует.

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 & a_1 c_1 & s_1 \\ c_1 & 0 & a_1 s_1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & s_4 & 0 & 0 & s_4 \\ c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Таким образом, прямые кинематические уравнения имеют вид

$$T_4^0 = A_1 \cdots A_4 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 c_4 + s_1 s_2 s_4 & c_1 c_2 s_4 + s_1 s_2 c_4 & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 c_4 + c_1 s_2 s_4 & s_1 c_2 s_4 + c_1 s_2 c_4 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.49).$$

3.4 Проблемы

1. Проверьте утверждение после уравнения (3.18), что матрица вращения R имеет вид (3.16) при условии выполнения допущений DH1 и DH2.
2. Рассмотрим трехзвенный планарный манипулятор, показанный на рис. 3.12. получить

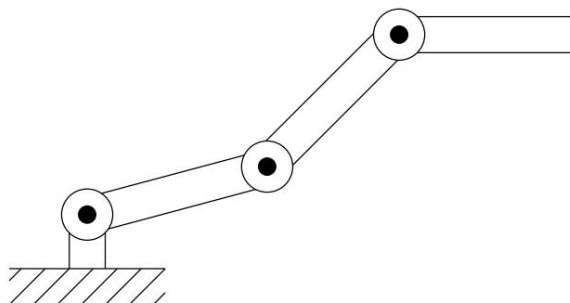


Рисунок 3.12: Плоское трехзвенное плечо задачи 3-2.

прямые кинематические уравнения с использованием DH-соглашения.

3. Рассмотрим двухзвенный декартов манипулятор на рис. 3.13. получить

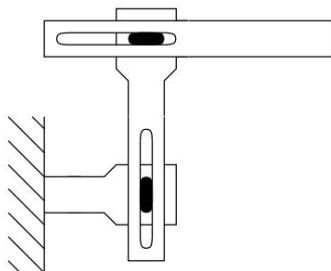


Рисунок 3.13: Двухзвенный декартовский робот задачи 3-3.

прямые кинематические уравнения с использованием DH-соглашения.

4. Рассмотрим двухзвенный манипулятор на рис. 3.14, у которого соединение 1 вращающееся, а соединение 2 призматическое. Выведите прямые кинематические уравнения, используя DH-соглашение.
5. Рассмотрим трехзвенный планарный манипулятор на рис. 3.15. Получите прямые кинематические уравнения с использованием DH-соглашения.

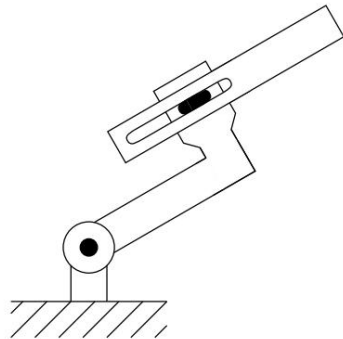


Рисунок 3.14: Плоское двухзвенное плечо задачи 3-4.

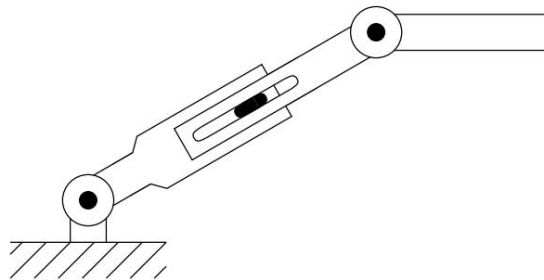


Рис. 3.15: Трехзвенный плоский рычаг с призматическим соединением задачи 3-5.

6. Рассмотрим трехзвенный шарнирный робот, изображенный на рис. 3.16. Получите прямые кинематические уравнения с использованием ДН-соглашения.
7. Рассмотрим трехзвенный декартов манипулятор на рис. 3.17. Выведите прямые кинематические уравнения, используя ДН-соглашение.
8. Прикрепите сферическое запястье к трехзвенному шарнирному манипулятору задачи 3-6, как показано на рис. 3.18. Выведите прямые кинематические уравнения для этого манипулятора.
9. Прикрепите сферическое запястье к трехзвенному декартовому манипулятору задачи 3-7, как показано на рис. 3.19. Выведите прямые кинематические уравнения для этого манипулятора.
10. Рассмотрим манипулятор PUMA 260, показанный на рис. 3.20. Получить полный набор прямых кинематических уравнений, установив соответствующие системы координат ДН, построив таблицу параметров звеньев, сформировав А-матрицы и т. д.

96 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

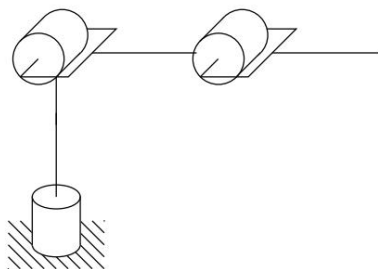


Рисунок 3.16: Трехзвеновый шарнирный робот.

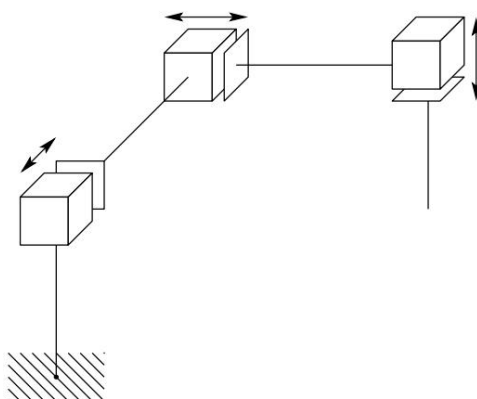


Рисунок 3.17: Трехзвеновый декартовский робот.

11. Повторите задачу 3-9 для робота Rhino XR-3 с пятью степенями свободы, показанного на рис. 3.21. (Примечание: вы должны заменить запястье Rhino на круглое запястье.)
12. Предположим, что Rhino XR-3 привинчен к столу, на котором установлена система координат $osxsyszs$, как показано на рис. 3.22. (Фрейм $osxsyszs$ часто называют кадром станции.) Учитывая базовый кадр, который вы установили в задаче 3-11, найдите однородное преобразование T_s , связывающее базовый кадр с кадром станции. Найдите отношение рамы рабочего органа к однородное преобразование T_s кадр $_5$ станции. Каково положение и ориентация концевой эффектора в кадре станции, когда $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_5 = 0$?
13. Рассмотрим робота GMF S-400, показанного на рис. 3.23. Нарисуйте условное обозначение этого манипулятора. Установите системы координат ДН и напишите уравнения прямой кинематики.

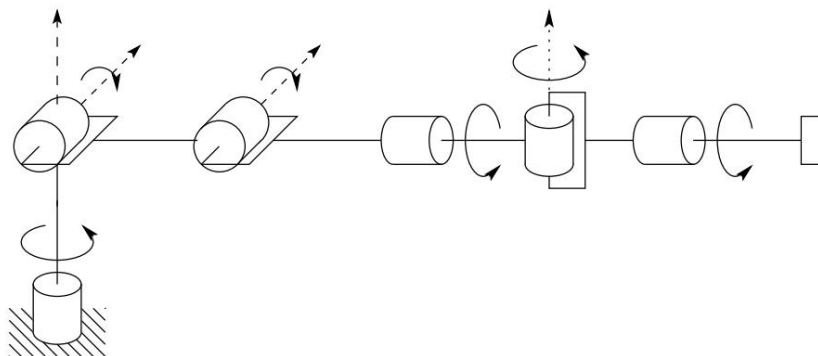


Рисунок 3.18: Локтевой манипулятор со сферическим запястьем.

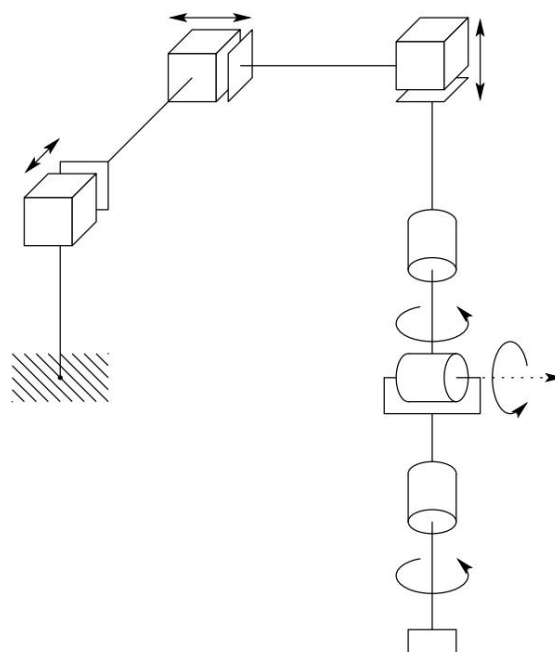


Рисунок 3.19: Декартов манипулятор со сферическим запястьем.

98 ГЛАВА 3. Прямая кинематика: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

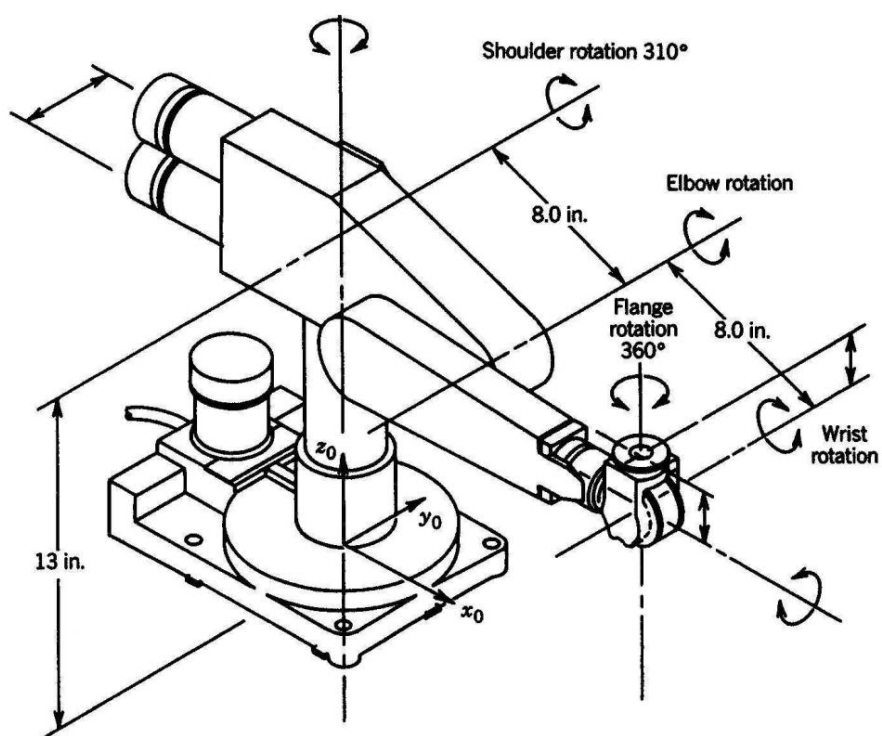


Рисунок 3.20: Манипулятор PUMA 260.

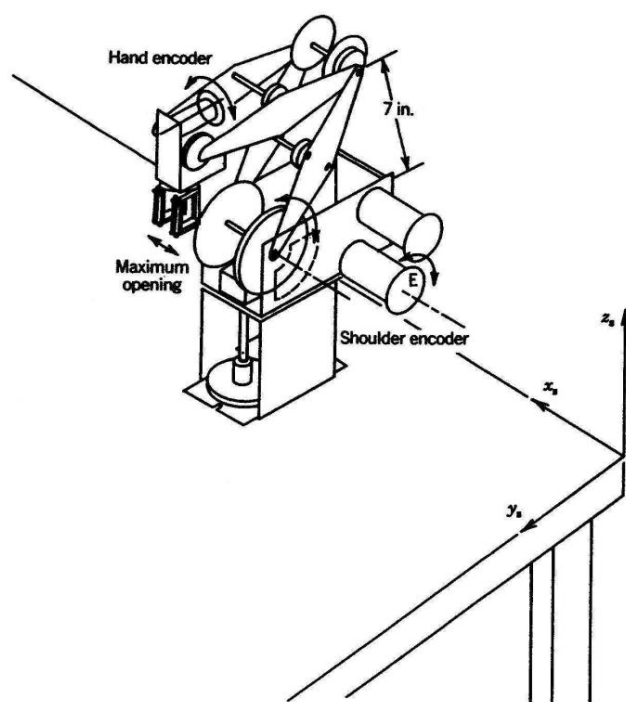


Рисунок 3.21: Робот Rhino XR-3.

100 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

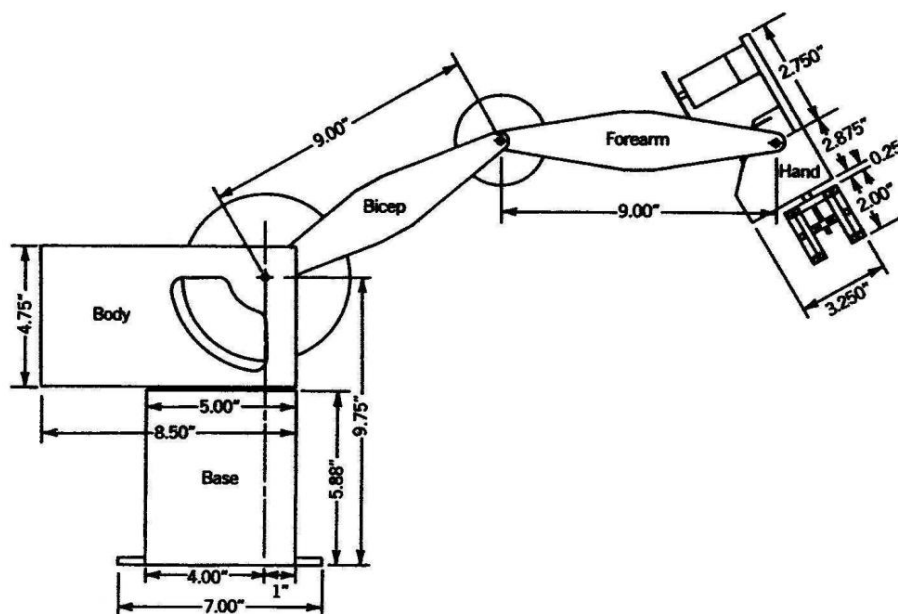


Рисунок 3.22: Робот Rhino прикреплен к столу. Из: Роботостроение Учебник Мохсена Шахинпура. Copyright 1987, Harper & Row Publishers, Inc.

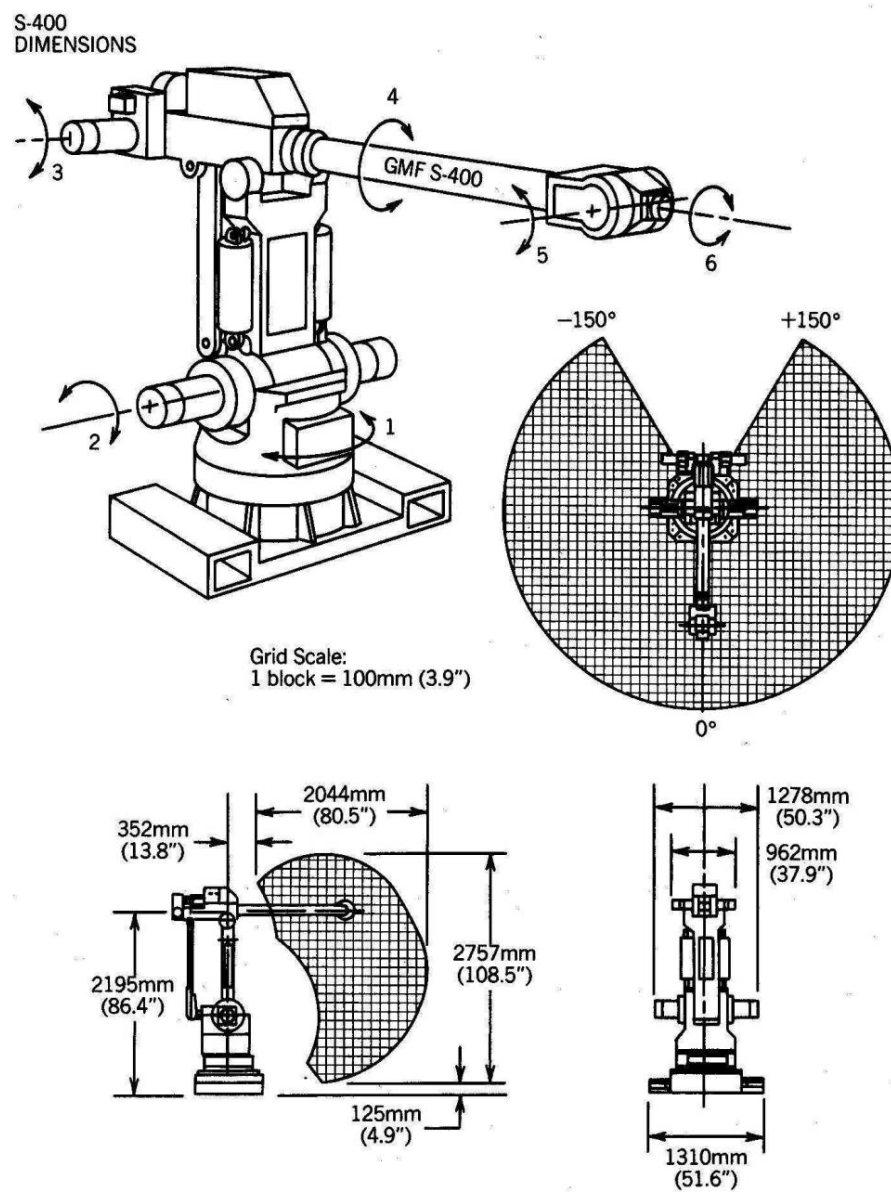


Рисунок 3.23: Робот GMF S-400. (Предоставлено GMF Robotics.)

102 ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ КИНЕМАТИКА: КОНВЕНЦИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА