

chapitre 3

CINEMATIQUE AVANT : LE DENAVIT-HARTENBERG CONVENTION

Dans ce chapitre, nous développons les équations cinématiques directes ou de configuration pour les robots rigides. Le problème de cinématique avant concerne la relation entre les articulations individuelles du robot manipulateur et la position et l'orientation de l'outil ou de l'effecteur terminal. Formulé plus formellement, le problème de cinématique avant consiste à déterminer la position et l'orientation de l'effecteur final, compte tenu des valeurs des variables articulaires du robot. Les variables articulaires sont les angles entre les liaisons dans le cas des liaisons rotoïdes ou rotatives, et l'extension des liaisons dans le cas des liaisons prismatiques ou coulissantes. Le problème de la cinématique directe doit être mis en contraste avec le problème de la cinématique inverse, qui sera étudié dans le chapitre suivant, et qui concerne la détermination des valeurs des variables articulaires qui permettent d'obtenir une position et une orientation souhaitées pour l'effecteur final du robot.

3.1 Chaînes cinématiques

Comme décrit au chapitre 1, un robot manipulateur est composé d'un ensemble de liaisons reliées entre elles par diverses articulations. Les articulations peuvent être soit très simples, comme une articulation rotoïde ou une articulation prismatique, soit plus complexes, comme une rotule.

(Rappelons qu'une articulation rotoïde est comme une charnière et permet une rotation relative autour d'un seul axe, et qu'une articulation prismatique permet un mouvement linéaire le long d'un seul axe, à savoir une extension ou une rétraction.) La différence entre les deux situations est que, dans Dans le premier cas, l'articulation n'a qu'un seul degré de liberté de mouvement : l'angle de rotation dans le cas d'une articulation rotoïde et la quantité de déplacement linéaire dans le cas d'une articulation prismatique. En revanche, une articulation à rotule a deux degrés de liberté. Dans ce livre, il est supposé que toutes les articulations n'ont qu'un seul degré de liberté. A noter que l'hypothèse

62CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

n'implique pas de réelle perte de généralité, puisque des articulations telles qu'une articulation à rotule (deux degrés de liberté) ou un poignet sphérique (trois degrés de liberté) peuvent toujours être considérées comme une succession d'articulations à un degré. joints de liberté avec des liens de longueur nulle entre eux.

En supposant que chaque articulation possède un seul degré de liberté, l'action de chaque articulation peut être décrite par un seul nombre réel : l'angle de rotation dans le cas d'une articulation rotoïde ou le déplacement dans le cas d'une articulation prismatique. articulation. L'objectif de l'analyse cinématique directe est de déterminer l'effet cumulatif de l'ensemble des variables articulaires.

Dans ce chapitre, nous allons développer un ensemble de conventions qui fournissent une procédure systématique pour effectuer cette analyse. Il est bien sûr possible d'effectuer une analyse cinématique directe même sans respecter ces conventions, comme nous l'avons fait pour l'exemple du manipulateur planaire à deux liens au chapitre 1. Cependant, l'analyse cinématique d'un manipulateur à n liens peut être extrêmement complexe et les conventions introduites ci-dessous simplifient considérablement l'analyse. De plus, ils donnent naissance à un langage universel avec lequel les robots ingénieurs peuvent communiquer.

Un robot manipulateur à n articulations aura $n + 1$ liens, puisque chaque articulation relie deux liens. On numérote les articulations de 1 à n , et on numérote les liens de 0 à n , en partant de la base. Par cette convention, l'articulation i relie le lien $i - 1$ au lien i . Nous considérerons que l'emplacement de l'articulation i est fixe par rapport au maillon $i - 1$. Lorsque l'articulation i est actionnée, le maillon i se déplace. Par conséquent, le maillon 0 (le premier maillon) est fixe et ne bouge pas lorsque les articulations sont actionnées. Bien sûr, le robot manipulateur pourrait lui-même être mobile (par exemple, il pourrait être monté sur une plate-forme mobile ou sur un véhicule autonome), mais nous ne traiterons pas ce cas dans le présent chapitre, car il peut être manipulé facilement en étendant légèrement les techniques présenté ici. e Avec le i

conjointe, on associe une variable conjointe, notée q_i . Dans le cas d'une articulation rotoïde, q_i est l'angle de rotation, et dans le cas d'une articulation prismatique, q_i est le déplacement de l'articulation :

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{: articulation } i \text{ rotoïde} \\ d_i & \text{: articulation } i \text{ prismatique} \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour effectuer l'analyse cinématique, nous attachons de manière rigide un cadre de coordonnées à chaque lien. En particulier, nous attachons oixiyizi au lien i . Cela signifie que, quel que soit le mouvement du robot s'exécute, les coordonnées de chaque point sur le lien i sont constantes lorsqu'elles sont exprimées dans le cadre de coordonnées i . De plus, lorsque l'articulation i est actionnée, le lien i et son cadre attaché, oixiyizi, subissent un mouvement résultant. Le cadre o0x0y0z0, qui est fixé à la base du robot, est appelé cadre inertiel. La figure 3.1 illustre l'idée de fixer rigidement les cadres aux liens dans le cas d'un manipulateur coudé.

Supposons maintenant que A_i soit la matrice de transformation homogène qui exprime la position et l'orientation de oixiyizi par rapport à o0x0y0z0. La matrice A_i n'est pas constante, mais varie au fur et à mesure que la configuration du robot est modifiée. Cependant, l'hypothèse que toutes les articulations sont soit révolutes soit prismatiques signifie que A_i est une fonction d'une seule variable articulaire, à savoir q_i . Autrement dit,

$$A_i = A_i(q_i). \quad (3.2)$$

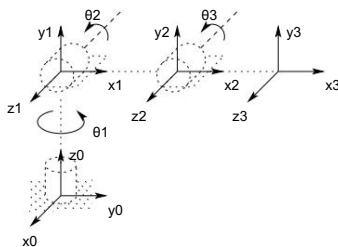


Figure 3.1 : Cadres de coordonnées attachés au manipulateur coudé.

Or la matrice de transformation homogène qui exprime la position et l'orientation de $o_jx_jy_jz_j$ par rapport à $o_ixiyizi$ est appelée, par convention, une matrice de transformation, et est notée T_j . Dès le chapitre 2, nous voyons que

$$\begin{aligned} T_{ji}^{-1} &= A_{i+1}A_{i+2} \dots A_j^{-1}A_i \text{ si } j < i \\ J_j &= j-1 \\ J_j^{-1} &= (T_j^{-1}) \text{ si } j > i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De la manière dont nous avons solidarisé les différents cadres aux maillons correspondants, il s'ensuit que la position de tout point de l'effecteur, exprimée dans le cadre n , est une constante indépendante de la configuration du robot. Désigner la position et l'orientation de l'effecteur par rapport au référentiel inertiel ou de base par un trois-vecteur (qui donne les coordonnées de l'origine du référentiel de l'effecteur par rapport au et définit la transformation homogène cadre de base) et la matrice de rotation 3×3 matrice, R_0^n

$$H = \begin{pmatrix} R_0^n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Ensuite, la position et l'orientation de l'effecteur terminal dans le référentiel inertiel sont données par

$$H = T_n^0 = A_1(q_1) \dots A_n(q_n). \quad (3.5)$$

Chaque transformation homogène A_i est de la forme

$$A_i = \begin{pmatrix} R_{i-1}^i & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Ainsi

$$J_j^{-1} = A_{i+1} \dots A_j = \begin{pmatrix} R_{i+1}^j & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

La matrice R_i exprime l'orientation de $o_jx_jy_jz_j$ par rapport à $o_ixiyizi$ et est donnée par les parties rotationnelles des matrices A comme

$$R_j^{-1} = R_{j+1}^{-1} \dots R_{j-1}^{-1} \quad (3.8)$$

Les vecteurs de coordonnées o_j sont donnés récursivement par la formule j

$$o_{oj} = o_{j-1} + R_{oj,j-1}^{-1} o_{j-1} \quad (3.9)$$

Ces expressions seront utiles au chapitre 5 lorsque nous étudierons les matrices jacobiniennes.

En principe, il n'y a que ça pour avancer la cinématique ! Déterminez les fonctions $A_i(q_i)$ et multipliez-les au besoin. Cependant, il est possible d'atteindre une quantité considérable de rationalisation et de simplification en introduisant d'autres conventions, telles que la représentation Denavit-Hartenberg d'une articulation, et c'est l'objectif du reste du chapitre.

3.2 Représentation de Denavit Hartenberg

S'il est possible de réaliser l'ensemble de l'analyse de ce chapitre en utilisant un cadre arbitraire attaché à chaque lien, il est utile d'être systématique dans le choix de ces cadres. Une convention couramment utilisée pour sélectionner des cadres de référence dans les applications robotiques est la convention Denavit Hartenberg, ou DH. Dans cette convention, chaque transformation homogène A_i est représentée comme un produit de quatre transformations de base

$$\begin{aligned} A_i &= Rot_z, \theta_i Trans_z, d_i Trans_x, a_i Rot_x, \alpha_i \\ &= \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 & c\theta_i & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s\theta_i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & a_i & s\theta_i & a_i c\theta_i & s\theta_i \\ c\theta_i & a_i & -c\theta_i & a_i s\theta_i & d_i & 0 & a_i \\ 1 & a_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

où les quatre grandeurs θ_i , a_i , d_i et α_i sont les paramètres associés au lien i et à l'articulation i . Les quatre paramètres a_i et θ_i dans (3.10) reçoivent généralement respectivement les noms de longueur de lien, de torsion de lien, de décalage de lien et d'angle de joint. Ces noms dérivent d'aspects spécifiques de la relation géométrique entre deux cadres de coordonnées, comme cela apparaîtra ci-dessous. Puisque la matrice A_i est une fonction d'une seule variable, il s'avère que trois des quatre quantités ci-dessus sont constantes pour un lien donné, tandis que le quatrième paramètre, θ_i pour une articulation rotoïde et d_i pour une articulation prismatique, est la variable conjointe.

D'après le chapitre 2, on peut voir qu'une matrice de transformation homogène arbitraire peut être caractérisée par six nombres, comme, par exemple, trois nombres pour spécifier la

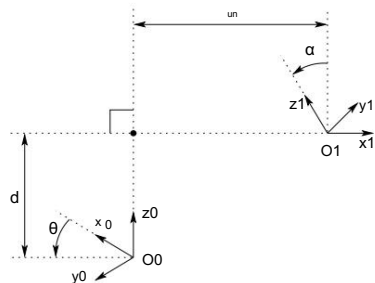


Figure 3.2 : Cadres de coordonnées vérifiant les hypothèses DH1 et DH2.

quatrième colonne de la matrice et trois angles d'Euler pour spécifier la matrice de rotation supérieure gauche 3×3 . Dans la représentation DH, en revanche, il n'y a que quatre paramètres. Comment est-ce possible? La réponse est que, alors que le cadre i doit être attaché de manière rigide au lien i , nous avons une liberté considérable dans le choix de l'origine et des axes de coordonnées du cadre. Par exemple, il n'est pas nécessaire que l'origine, o_i , de la trame i soit placée à l'extrémité physique du lien i . En fait, il n'est même pas nécessaire que la trame i soit placée à l'intérieur du lien physique ; le cadre i pourrait se trouver dans l'espace libre - tant que le cadre i est rigidement attaché au lien i . Par un choix judicieux de l'origine et des axes de coordonnées, il est possible de réduire le nombre de paramètres nécessaires de six à quatre (voire moins dans certains cas). Dans la section 3.2.1, nous montrerons pourquoi, et sous quelles conditions, cela peut être fait, et dans la section 3.2.2, nous montrerons exactement comment effectuer les affectations du cadre de coordonnées.

3.2.1 Problèmes d'existence et d'unicité

Il est clair qu'il n'est pas possible de représenter une transformation homogène arbitraire en utilisant seulement quatre paramètres. Par conséquent, nous commençons par déterminer quelles transformations homogènes peuvent être exprimées sous la forme (3.10). Supposons que nous disposions de deux trames, désignées par les trames 0 et 1, respectivement. Alors il existe une unique matrice de transformation homogène A qui prend les coordonnées du cadre 1 dans celles du cadre 0. Supposons maintenant que les deux cadres aient deux caractéristiques supplémentaires, à savoir :

(DH1) L'axe x_1 est perpendiculaire à l'axe z_0

(DH2) L'axe x_1 coupe l'axe z_0

comme le montre la figure 3.2. Dans ces conditions, on affirme qu'il existe des nombres uniques a , d , θ , α tels que

$$A = \text{Rot}_z, \theta \text{Trans}_z, d \text{Trans}_x, a \text{Rot}_x, \alpha. \quad (3.11)$$

Bien sûr, puisque θ et α sont des angles, nous voulons vraiment dire qu'ils sont uniques à un multiple de 2π près. Pour montrer que la matrice A peut être écrite sous cette forme, écrivez A comme

$$Un = \begin{matrix} R0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \quad (3.12)$$

et notons r_i les i ème colonnes de la matrice de rotation $R0 \ 1$. Nous allons maintenant examiner les implications des deux contraintes DH.

Si (DH1) est satisfaite, alors x_1 est perpendiculaire à z_0 et on a $x_1 \cdot z_0 = 0$. En exprimant cette contrainte par rapport à $o0x0y0z0$, en utilisant le fait que r_1 est la représentation du vecteur unitaire x_1 par rapport au repère 0, on obtient

$$0 = x_1 \cdot z_0 = r_{11} \cdot z_0 \quad (3.13)$$

$$= [r_{11}, r_{21}, r_{31}] \cdot [0, 0, 1]^T \quad (3.14)$$

$$= r_{31}. \quad (3.15)$$

Puisque $r_{31} = 0$, il suffit maintenant de montrer qu'il existe des angles uniques θ et α tels que

$$R0 \ 1 = Rx, \theta Rx, \alpha = \begin{matrix} c\theta & -s\theta c\alpha & s\theta s\alpha \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{matrix} \quad (3.16)$$

La seule information dont nous disposons est que $r_{31} = 0$, mais cela suffit. Premièrement, puisque chaque ligne et colonne de $R0 \ 1$ doit avoir une longueur unitaire, $r_{31} = 0$ implique que

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1, \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Il existe donc des uniques θ , α tels que

$$(r_{11}, r_{21}) = (c\theta, s\theta), \quad (r_{12}, r_{22}) = (c\alpha, s\alpha). \quad (3.18)$$

Une fois θ et α trouvés, il est de routine de montrer que les éléments restants de $R0 \ 1$ doivent avoir la forme montrée en (3.16), en utilisant le fait que $R0 \ 1$ est une matrice de rotation.

Ensuite, l'hypothèse (DH2) signifie que le déplacement entre $o0$ et $o1$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs z_0 et x_1 . Cela peut être écrit comme $o1 = o0 + dz_0 + ax_1$. Encore une fois, nous pouvons exprimer cette relation dans les coordonnées de $o0x0y0z0$, et on obtient

$$o1 = o0 + dz_0 + ax_1 \quad (3.19)$$

$$= \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} + d \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} + a \begin{matrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{matrix} \quad (3.20)$$

$$= \begin{matrix} ac\theta \\ as\theta \\ d \end{matrix} \quad (3.21)$$

En combinant les résultats ci-dessus, nous obtenons (3.10) tel que revendiqué. Ainsi, on voit que quatre paramètres suffisent pour spécifier toute transformation homogène qui satisfait les contraintes (DH1) et (DH2).

Maintenant que nous avons établi que chaque matrice de transformation homogène satisfaisant aux conditions (DH1) et (DH2) ci-dessus peut être représentée sous la forme (3.10), nous pouvons en fait donner une interprétation physique à chacune des quatre grandeurs de (3.10). Le paramètre a est la distance entre les axes z_0 et z_1 , et est mesuré selon l'axe x_1 . L'angle α est l'angle entre les axes z_0 et z_1 , mesuré dans un plan normal à x_1 . Le sens positif de α est déterminé de z_0 à z_1 par la règle de droite comme le montre la figure 3.3. Le

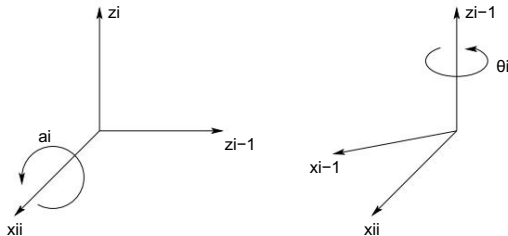


Figure 3.3 : Sens positif pour α et θ .

le paramètre d est la distance entre l'origine o_0 et l'intersection de l'axe x_1 avec z_0 mesurée selon l'axe z_0 . Enfin, θ est l'angle entre x_0 et x_1 mesuré dans un plan normal à z_0 . Ces interprétations physiques s'avèreront utiles pour développer une procédure d'attribution de repères de coordonnées satisfaisant les contraintes (DH1) et (DH2), et nous tournons maintenant notre attention vers le développement d'une telle procédure.

3.2.2 Affectation des cadres de coordonnées

Pour un robot manipulateur donné, on peut toujours choisir les repères $0, \dots, n$ de telle sorte que les deux conditions ci-dessus soient satisfaites. Dans certaines circonstances, cela nécessitera de placer l'origine o_i de la trame i à un emplacement qui peut ne pas être intuitivement satisfaisant, mais ce ne sera généralement pas le cas. En lisant les informations ci-dessous, il est important de garder à l'esprit que les choix des différents cadres de coordonnées ne sont pas uniques, même lorsqu'ils sont contraints par les exigences ci-dessus. Ainsi, il est possible que différents ingénieurs dérivent des affectations de cadres de coordonnées différentes, mais tout aussi correctes, pour les liaisons du robot. Il est très important de noter, cependant, que le résultat final (c'est-à-dire la matrice T de l'affectation des cadres, T_n^0) sera le même, peu importe de liaison intermédiaires (en supposant que les cadres de coordonnées pour le lien n coïncident). Nous allons commencer par dériver la procédure générale. Nous allons ensuite discuter de divers cas particuliers courants où il est possible de simplifier davantage la matrice de transformation homogène.

Pour commencer, notez que le choix de z_i est arbitraire. En particulier, d'après (3.16), nous voyons qu'en choisissant α_i et θ_i de manière appropriée, nous pouvons obtenir n'importe quelle direction arbitraire pour z_i . Ainsi, pour notre première étape, nous affectons les axes $z_0, \dots, z_{n-1}$ d'une manière intuitivement agréable. Plus précisément, nous attribuons à z_i l'axe d'actionnement de l'articulation $i + 1$. Ainsi, z_0 est l'axe d'actionnement de l'articulation 1, z_1 est l'axe d'actionnement de l'articulation 2, etc. Il y a deux cas à considérer : (i) si l'articulation $i + 1$ est de révolution, z_i est l'axe de révolution de l'articulation $i + 1$; (ii) si l'articulation $i + 1$ est prismatique, z_i est l'axe de translation de l'articulation $i + 1$. Au début, il peut sembler un peu déroutant d'associer z_i à l'articulation $i + 1$, mais rappelez-vous que cela satisfait la convention que nous avons établie dans la section 3.1, à savoir que l'articulation i est fixe par rapport au cadre i , et que lorsque l'articulation i est actionnée, le lien i et son cadre attaché, $o_{i+1}y_{i+1}z_{i+1}$, subissent un mouvement résultant.

Une fois que nous avons établi les axes z pour les liens, nous établissons le cadre de base. Le choix d'un cadre de base est presque arbitraire. Nous pouvons choisir l'origine o_0 du repère de base comme étant n'importe quel point sur z_0 . Nous choisissons ensuite x_0, y_0 de n'importe quelle manière pratique tant que le cadre résultant est droitier. Ceci configure l'image 0.

Une fois le cadre 0 établi, nous commençons un processus itératif dans lequel nous définissons le cadre i en utilisant le cadre $i - 1$, en commençant par le cadre 1. La figure 3.4 sera utile pour comprendre le processus que nous décrivons maintenant.

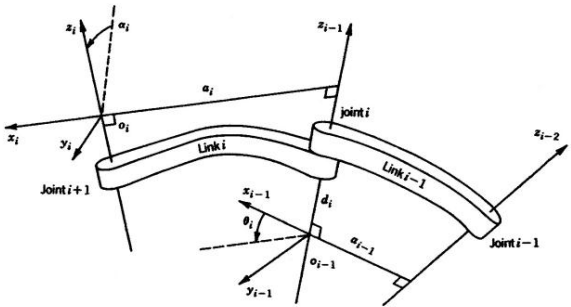


Figure 3.4 : Affectation de la trame de Denavit-Hartenberg.

Pour établir le repère i il faut considérer trois cas : (i) les axes z_{i-1}, z_i ne sont pas coplanaires, (ii) les axes z_{i-1}, z_i se coupent (iii) les axes z_{i-1}, z_i sont parallèles. Notons que dans les deux cas (ii) et (iii) les axes z_{i-1} et z_i sont coplanaires. Cette situation est en fait assez courante, comme nous le verrons dans la section 3.3. Considérons maintenant chacun de ces trois cas.

(i) z_{i-1} et z_i ne sont pas coplanaires : si z_{i-1} et z_i ne sont pas coplanaires, alors il existe un segment de droite unique perpendiculaire à la fois à z_{i-1} et z_i tel qu'il relie les deux droites et qu'il ait une longueur minimale. La ligne contenant cette normale commune à z_{i-1} et z_i définit x_i .

et le point où cette ligne coupe z_{i-1} est l'origine o_i . Par construction, les deux conditions (DH1) et (DH2) sont satisfaites et le vecteur de o_{i-1} à o_i est une combinaison linéaire de z_{i-1} et x_i . La spécification du repère i est complétée en choisissant l'axe y_i pour former un repère de droite. Les hypothèses (DH1) et (DH2) étant satisfaites, la matrice de transformation homogène A_i est de la forme (3.10).

(ii) z_{i-1} est parallèle à z_i : Si les axes z_{i-1} et z_i sont parallèles, alors il y a une infinité de normales communes entre eux et la condition (DH1) ne spécifie pas complètement x_i .

Dans ce cas, nous sommes libres de choisir l'origine o_i n'importe où le long de z_i . On choisit souvent o_i pour simplifier les équations résultantes. L'axe x_i est alors choisi soit dirigé de o_i vers z_{i-1} , selon la normale commune, soit comme l'opposé de ce vecteur. Une méthode courante pour choisir o_i consiste à choisir la normale passant par o_{i-1} comme axe x_i ; o_i est alors le point d'intersection de cette normale avec z_i . Dans ce cas, d_i serait égal à zéro.

Une fois x_i fixé, y_i est déterminé, comme d'habitude par la règle de la main droite. Les axes z_{i-1} et z_i étant parallèles, a_i sera nul dans ce cas.

(iii) z_{i-1} coupe z_i : Dans ce cas x_i est choisi normal au plan formé par z_i et z_{i-1} . La direction positive de x_i est arbitraire. Le choix le plus naturel pour l'origine o_i dans ce cas est au point d'intersection de z_i et z_{i-1} . Cependant, tout point commode le long de l'axe z_i suffit. Notez que dans ce cas, le paramètre a_i est égal à 0.

Cette procédure constructive fonctionne pour les trames 0, ..., $n-1$ dans un robot à n liens. Pour terminer la construction, il est nécessaire de spécifier le cadre n . Le système de coordonnées final $o_n x_n y_n z_n$ est communément appelé l'effecteur final ou le cadre de l'outil (voir Figure 3.5). L'origine

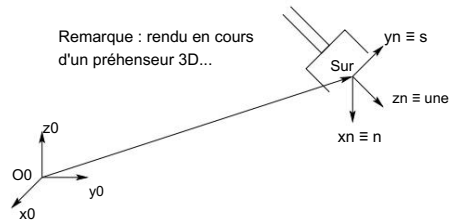


Figure 3.5 : Affectation du référentiel d'outils.

on est le plus souvent placé symétriquement entre les doigts du préhenseur. Les vecteurs unitaires le long des axes x_n , y_n et z_n sont étiquetés respectivement n , s et a . La terminologie provient du fait que la direction a est la direction d'approche, en ce sens que le préhenseur s'approche typiquement d'un objet le long de la direction a . De même la direction s est la direction de coulissement, la direction selon laquelle les doigts de la pince coulisent pour s'ouvrir et se fermer, et n est la direction normale au plan formé par a et s .

Dans les robots contemporains, le mouvement articulaire final est une rotation de l'effecteur terminal de θ_n et les deux derniers axes articulaires, z_{n-1} et z_n , coïncident. Dans ce cas, la transformation entre les deux derniers référentiels est une translation selon z_{n-1} d'une distance d_n suivie (ou précédée) d'une rotation de θ_n radians autour de z_{n-1} . C'est une observation importante qui simplifiera le calcul de la cinématique inverse dans le chapitre suivant.

Enfin, notez le fait important suivant. Dans tous les cas, que l'articulation considérée soit rotoïde ou prismatique, les grandeurs a_i et d_i sont toujours constantes pour tout i et sont caractéristiques du manipulateur. Si l'articulation i est prismatique, alors θ_i est aussi une constante, tandis que d_i est le i

variable conjointe. De même, si l'articulation i est une révolution, alors d_i est constant et θ_i est la i variable articulaire.

3.2.3 Résumé

Nous pouvons résumer la procédure ci-dessus basée sur la convention DH dans l'algorithme suivant pour dériver la cinématique avant pour tout manipulateur.

Étape 1 : Localisez et étiquetez les axes d'articulation $z_0, \dots, z_{n-1}$.

Étape 2 : Établissez le cadre de base. Définissez l'origine n'importe où sur l'axe z_0 . Les x_0 et y_0 les axes sont choisis commodément pour former un cadre droit.

Pour $i = 1, \dots, n-1$, effectuez les étapes 3 à 5.

Étape 3 : Localisez l'origine o_i où la normale commune à z_i et z_{i-1} coupe z_i . Si z_i intersecte z_{i-1} localisez o_i à cette intersection. Si z_i et z_{i-1} sont parallèles, placez o_i dans n'importe quelle position pratique le long de z_i .

Étape 4 : Établir x_i le long de la normale commune entre z_{i-1} et z_i passant par o_i , ou dans la direction normale au plan $z_{i-1} - z_i$ si z_{i-1} et z_i se coupent.

Étape 5 : Établissez y_i pour compléter un cadre de droite.

Étape 6 : Établir le cadre de l'effecteur terminal $o_n x_n y_n z_n$. En supposant que la n -ième articulation est rotoïde, posons $z_n = a$ le long de la direction z_{n-1} . Établissez l'origine sur commodément le long de z_n , de préférence au centre de la pince ou à l'extrémité de tout outil que le manipulateur peut porter. Définir $y_n = s$ dans le sens de la fermeture de la pince et définir $x_n = n$ comme $s \times a$. Si l'outil n'est pas un simple préhenseur, placez x_n et y_n de manière pratique pour former un cadre à droite.

Étape 7 : Créer un tableau des paramètres de lien $a_i, d_i, \theta_i, \dot{\theta}_i$.

a_i = distance le long de x_i de o_i à l'intersection des axes x_i et z_{i-1} . d_i = distance le long de z_{i-1} de o_{i-1} à l'intersection des axes x_i et z_{i-1} . d_i est variable si l'articulation i est prismatique.

θ_i = l'angle entre z_{i-1} et z_i mesuré autour de x_i (voir Figure 3.3).

3.3. EXEMPLES

71

θ_i = l'angle entre x_{i-1} et x_i mesuré autour de z_{i-1} (voir Figure 3.3). θ_i est variable si l'articulation i est révolutée.

Étape 8 : Formez les matrices de transformation homogènes A_i en substituant les paramètres ci-dessus dans (3.10).

Étape 9 : Formulez $T_n^0 = A_1 \cdots A_n$. Cela donne alors la position et l'orientation de l'outil cadre exprimé en coordonnées de base.

3.3 Exemples

Dans la convention DH le seul angle variable est θ , donc on simplifie la notation en écrivant c_i pour $\cos \theta_i$ etc. On note aussi $\theta_1 + \theta_2$ par θ_{12} , et $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ par c_{12} , et ainsi de suite. Dans les exemples suivants, il est important de rappeler que la convention DH, bien que systématique, laisse encore une liberté considérable dans le choix de certains des paramètres du manipulateur. Ceci est particulièrement vrai dans le cas d'axes d'articulation parallèles ou lorsqu'il s'agit d'articulations prismatiques.

Exemple 3.1 Manipulateur à coude plan Considérons le bras plan à deux bras de la Figure 3.6. Les axes articulaires z_0 et z_1 sont normaux à

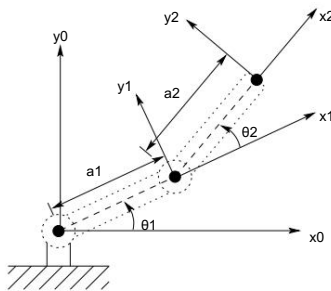


Figure 3.6 : Manipulateur planaire à deux liaisons. Les axes z pointent tous hors de la page et ne sont pas représentés sur la figure.

la page. Nous établissons le cadre de base $o_0x_0y_0z_0$ comme indiqué. L'origine est choisie au point d'intersection de l'axe z_0 avec la page et la direction de l'axe x_0 est totalement arbitraire. Une fois la trame de base établie, la trame $o_1x_1y_1z_1$ est fixée comme indiqué par la convention DH, où l'origine o_1 a été située à l'intersection de z_1 et de la page.

La trame finale $o_2x_2y_2z_2$ est fixée en choisissant l'origine o_2 à la fin du lien 2 comme indiqué.

Les paramètres de liaison sont indiqués dans le Tableau 3.1. Les matrices A sont déterminées à partir de (3.10) comme

72CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

Tableau 3.1 : Paramètres de liaison pour le manipulateur planaire à 2 liaisons.

Lien	a_i	d_i	θ_i	a_1	0	0	θ
1	a_1	0	θ_1	0	0	0	1
2	a_2	0	θ_2	0	0	0	2

variable

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 & s_1 c_1 \\ 0 & a_1 s_1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 & s_2 c_2 \\ 0 & a_2 s_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Les matrices T sont donc données par

$$J_1^0 = A_1. \quad (3.24)$$

$$J_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} & s_{12} c_{12} & 0 \\ s_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Notez que les deux premières entrées de la dernière colonne de T_2^0 sont les composantes x et y de l'origine o_2 dans le repère de base ; c'est,

$$x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \quad (3.26)$$

$$y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

sont les coordonnées de l'effecteur terminal dans le repère de base. La partie rotationnelle de T_2^0 donne l'orientation T du cadre $o_2x_2y_2z_2$ par rapport au cadre de base.

Exemple 3.2 Robot cylindrique à trois maillons Considérons

maintenant le robot cylindrique à trois maillons représenté symboliquement par la figure 3.7. Nous établissons o_0 comme indiqué à l'articulation 1. Notez que le placement de l'origine o_0 le long de z_0 ainsi que la direction de l'axe x_0 sont arbitraires. Notre choix de o_0 est le plus naturel, mais o_0 pourrait tout aussi bien être placé à l'articulation 2. L'axe x_0 est choisi normal à la page. Ensuite, puisque z_0 et z_1 coïncident, l'origine o_1 est choisie à l'articulation 1 comme indiqué. L'axe x_1 est normal à la page lorsque $\theta_1 = 0$ mais, bien sûr, sa direction changera puisque θ_1 est variable. Puisque z_2 et z_1 se coupent, l'origine o_2 est placée à cette intersection. La direction de x_2 est choisie

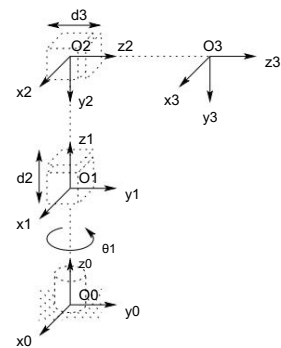


Figure 3.7 : Manipulateur cylindrique à trois maillons.

Tableau 3.2 : Paramètres de liaison pour le manipulateur cylindrique à 3 liaisons.

Lien	a _i	a _i	d _i	θ _i	d _i
1	0	0	θ	1	
2	0	-90	2	0	0
3					0

variable

parallèle à x1 de sorte que θ2 soit nul. Enfin, le troisième cadre est choisi à la fin du lien 3 comme indiqué.

Les paramètres de liaison sont maintenant affichés dans le Tableau 3.2. Les matrices A et T correspondantes

sont

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & s_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_1 & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \end{pmatrix}$$

$$J_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 d_3 & 0 & +1 & 0 & d_1 + \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Exemple 3.3 Poignet sphérique

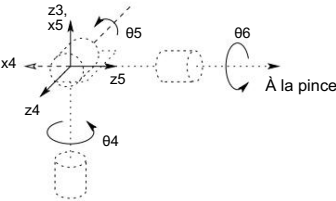


Figure 3.8 : L'affectation du cadre de poignet sphérique.

La configuration sphérique du poignet est illustrée à la figure 3.8, dans laquelle les axes articulaires z3, z4, z5 se coupent en o. Les paramètres de Denavit-Hartenberg sont présentés dans le tableau 3.3. Le manipulateur de Stanford est un exemple de manipulateur possédant un poignet de ce type. En fait, l'analyse suivante s'applique à pratiquement tous les poignets sphériques.

Nous montrons maintenant que les trois dernières variables conjointes, θ4, θ5, θ6 sont les angles d'Euler φ, θ, ψ, respectivement, par rapport au cadre de coordonnées o3x3y3z3. Pour voir cela, il suffit de calculer

3.3. EXEMPLES

75

Tableau 3.3 : Paramètres DH pour poignet sphérique.

Lien	a_i	d_i	θ_i
4	0	-90	0
5	0	90	0
6	0	0	d6

variable

les matrices A4, A5 et A6 en utilisant le tableau 3.3 et l'expression (3.10). Cela donne

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

En les multipliant ensemble, on obtient

$$J_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{pmatrix} R_3^3 & O_6^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$= \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparaison de la partie rotative R_3^3 de T_6^3 avec la transformation d'angle d'Euler (2.51) montre que θ_4 , θ_5 , θ_6 peuvent en effet être identifiés comme les angles d'Euler ϕ , θ et ψ par rapport au cadre de coordonnées $o_3 x_3 y_3 z_3$.

Exemple 3.4 Manipulateur cylindrique avec poignet sphérique

Supposons que nous attachons maintenant un poignet sphérique au manipulateur cylindrique de l'exemple 3.3.2 comme le montre la figure 3.9. A noter que l'axe de rotation de l'articulation 4 est parallèle à z_2 et coïncide donc avec l'axe z_3 de l'exemple 3.3.2. L'implication de ceci est que nous pouvons

76 CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

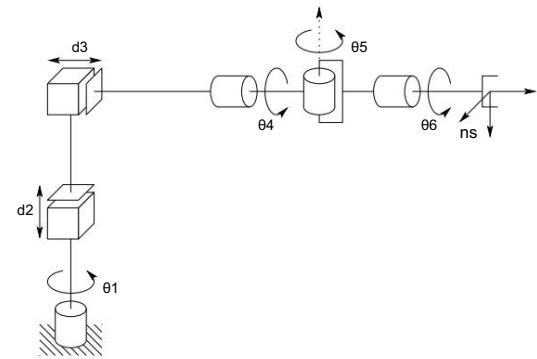


Figure 3.9 : Robot cylindrique avec poignet sphérique.

combiner immédiatement les deux expressions précédentes (3.28) et (3.32) pour obtenir le cinématique comme

$$J_6^0 = T_3^0 J_6^3 \quad (3.33)$$

avec T_3^0 donné par (3.28) et T_6^3 donnée par (3.32). Par conséquent, la cinématique avant de ce manipulateur est décrit par

$$J_6^0 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_1 & c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_1 & s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 & -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3. EXEMPLES

77

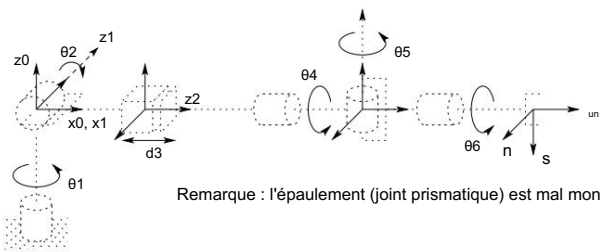
où

$$\begin{aligned}r_{11} &= c1c4c5c6 - c1s4s6 + s1s5c6 \\r_{21} &= s1c4c5c6 - s1s4s6 - c1s5c6 \\r_{31} &= -s4c5c6 - c4s6 \\r_{12} &= -c1c4c5s6 - c1s4c6 - s1s5c6 \\r_{22} &= -s1c4c5s6 - s1s4s6 + c1s5c6 \\r_{32} &= s4c5c6 - c4c6 \\r_{13} &= c1c4s5 - s1c5 \\r_{23} &= s1c4s5 + c1c5 \\r_{33} &= -s4s5 \\dx &= c1c4s5d6 - s1c5d6 - s1d3 \\dy &= s1c4s5d6 + c1c5d6 + c1d3 \quad dz = \\&= -s4s5d6 + d1 + d2.\end{aligned}$$

Remarquez comment la plus grande partie de la complexité de la cinématique vers l'avant pour ce manipulateur résulte de l'orientation de l'effecteur tandis que l'expression de la position du bras de (3.28) est assez simple. L'hypothèse du poignet sphérique simplifie non seulement la dérivation de la cinématique avant ici, mais simplifiera également considérablement le problème de la cinématique inverse dans le chapitre suivant.

Exemple 3.5 Manipulateur de Stanford

Considérons maintenant le manipulateur de Stanford illustré à la figure 3.10. Ce manipulateur est un



Remarque : l'épaule (joint prismatique) est mal montée.

Figure 3.10 : Affectation du cadre de coordonnées DH pour le manipulateur de Stanford.

exemple d'un manipulateur sphérique (RRP) avec un poignet sphérique. Ce manipulateur a un décalage dans l'articulation de l'épaule qui complique légèrement les problèmes de cinématique directe et inverse.

78CHAPITRE 3. LA CINÉMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

Tableau 3.4 : Paramètres DH pour le manipulateur de Stanford.

Lien	d_i	a_i	θ_i	α_i
1			$+90$	
2				
3				
4	0	0	-90	0
5	d_5	0		$+90$
6				0

variable conjointe

Nous établissons d'abord les cadres de coordonnées conjoints en utilisant la convention DH comme indiqué. Les paramètres de liaison sont indiqués dans le tableau 3.4.

Il est simple de calculer les matrices A_i comme

$$A_1 = \begin{bmatrix} c1 & 0 & -s1 & 0 & 0 & c1 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & s1 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ c2 & 0 & s2 & 0 & s2 & -c2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 & 0 & c4 \\ 0 & & & & & s4 \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 & 0 & -c5 \\ 0 & & & & & s5 \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c6 & -s6 & 0 & 0 & c6 & 0 & 0 \\ s6 & 0 & 1 & d6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.3. EXEMPLES

79

J_6^0 est alors donnée comme

$$J_6^0 = A1 \cdots A6 \quad (3.41)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

où

$$\begin{aligned} R11 &= C1 [C2 (C4C5C6 - S4S6) - S2S5C6] - D2 (S4C5C6 + \\ C4S6) \quad R21 &= S1 [C2 (C4C5C6 - S4S6) - S2S5C6] + C1 (S4C5C6 \\ + C4S6) \quad R31 &= c2s5c6 \quad r12 = c1[-c2(c4c5s6 \\ + s4c6) + s2s5s6] - s1(-s4c5s6 + c4c6) \quad r22 &= -s1[-c2(c4c5s6 + s4c6) \\ + s2s5s6] + c1(-s4c5s6 + c4c6) \quad r32 &= s2(c4c5s6 + s4c6) + c2s5s6 \quad r13 = \\ c1(c2c4s5 + s2c5) - s1s4s5 \quad r23 &= \\ s1(c2c4s5 + s2c5) + c1s4s5 \quad r33 &= \\ -s2c4s5 + c2c5 \quad dx &= c1s2d3 - s1d2 + \\ +d6(c1c2c4s5 + c1c5s2) - \\ s1s4s5 \quad dy &= s1s2d3 + c1d2 + d6(c1s4s5 + c2c4s1s5 + c5s1s2) \\ dz &= c2d3 + d6(c2c5 - c4s2s5). \end{aligned} \quad (3.43)$$
$$(3.44)$$

Exemple 3.6 Manipulateur SCARA

Comme autre exemple de la procédure générale, considérons le manipulateur SCARA de la figure 3.11. Ce manipulateur, qui est une abstraction du robot AdeptOne de la figure 1.11, est constitué d'un bras RRP et d'un poignet à un degré de liberté, dont le mouvement est un roulis autour de l'axe vertical. La première étape consiste à localiser et à étiqueter les axes des articulations comme indiqué. Puisque tous les axes des articulations sont parallèles, nous avons une certaine liberté dans le placement des origines. Les origines sont placées comme indiqué pour plus de commodité. Nous établissons l'axe x_0 dans le plan de la page comme indiqué. Ceci est complètement arbitraire et n'affecte que la configuration zéro du manipulateur, c'est-à-dire la position du manipulateur lorsque $\theta_1 = 0$.

Les paramètres de joint sont donnés dans le tableau 3.5, et les matrices A sont les suivantes.

80CHAPITRE 3. LA CINEMATIQUE DIRECTE : LA CONVENTION DE DENAVIT-HARTENBERG

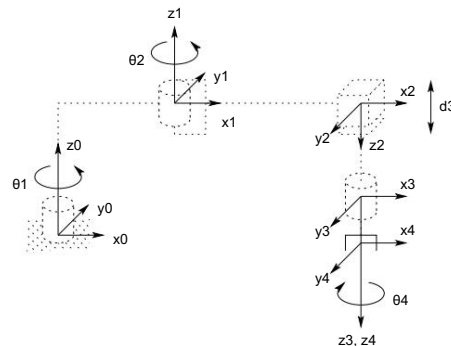


Figure 3.11 : Affectation du cadre de coordonnées DH pour le manipulateur SCARA.

Tableau 3.5 : Paramètres articulaires pour SCARA.

Lien	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	0	0
2	a_1	a_2	180	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	d_4

variable conjointe

$$A1 = \begin{pmatrix} c1 & -s1 & 0 & a1c1 & c1 & 0 \\ s1 & a1s1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$A2 = \begin{pmatrix} c2 & s2 & 0 & a2c2 & s2 & -c2 & 0 \\ a2s2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$A4 = \begin{pmatrix} c4 & -s4 & 0 & 0 & c4 & 0 & 0 \\ s4 & 0 & 1 & d4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Les équations cinématiques directes sont donc données par

$$J_4^0 = A_1 \cdots A_4 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 c_4 + s_1 c_2 s_4 & -c_1 c_2 s_4 + s_1 c_2 c_4 & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 c_4 - c_1 c_2 s_4 & -s_1 c_2 s_4 - c_1 c_2 c_4 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

L'équation (4.2) donne douze équations non linéaires à n variables inconnues, qui peuvent s'écrire

$$T_{ij}(q_1, \dots, q_n) = h_{ij}, \quad 4 \leq j = 1, 2, 3, j = 1, \dots, \quad (4.4)$$

où T_{ij} , h_{ij} font référence aux douze entrées non triviales de T_n^0 et H , respectivement. (Puisque les rangées inférieures des T_n^0 et H sont $(0,0,0,1)$, quatre des seize équations représentées par deux T (4.2) sont triviales.)

Exemple 4.1

Rappelons le manipulateur de Stanford de l'exemple 3.3.5. Supposons que la position souhaitée et l'orientation du cadre final sont données par

$$H = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \text{boeuf} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \text{oy} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \text{onces} \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Pour trouver les variables conjointes correspondantes $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5$ et θ_6 , nous devons résoudre l'ensemble simultané suivant d'équations trigonométriques non linéaires (cf. (3.43) et (3.44)) :

$$\begin{aligned} c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= r_{11} \\ s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= r_{21} \\ -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5s_6 &= r_{31} \\ c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= r_{12} \\ s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= r_{22} \\ s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 &= r_{32} \\ c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 &= r_{13} \\ s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 &= r_{23} \\ -s_2c_4s_5 + c_2c_5 &= r_{33} \\ c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5) &= \text{boeuf} \\ s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) &= \text{oy} \\ c_2d_3 + d_6(c_2c_5 - c_4s_2s_5) &= \text{onces}. \end{aligned}$$

Les équations de l'exemple précédent sont, bien sûr, beaucoup trop difficiles à résoudre directement sous forme fermée. C'est le cas de la plupart des bras de robot. Par conséquent, nous devons développer des techniques efficaces et systématiques qui exploitent la structure cinématique particulière du manipulateur. Alors que le problème de cinématique directe a toujours une solution unique qui peut être obtenue simplement en évaluant les équations directes, le problème de cinématique inverse peut ou non avoir une solution. Même si une solution existe, elle peut être unique ou non.

Chapitre 4

CINEMATIQUE INVERSE

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment déterminer la position et l'orientation de l'effecteur terminal en fonction des variables articulaires. Ce chapitre traite du problème inverse consistant à trouver les variables conjointes en termes de position et d'orientation de l'effecteur final. C'est le problème de la cinématique inverse, et il est, en général, plus difficile que le problème de la cinématique directe.

Dans ce chapitre, nous commençons par formuler le problème général de cinématique inverse. Ensuite, nous décrivons le principe du découplage cinématique et comment il peut être utilisé pour simplifier la cinématique inverse de la plupart des manipulateurs modernes. En utilisant le découplage cinématique, nous pouvons considérer indépendamment les problèmes de position et d'orientation. Nous décrivons une approche géométrique pour résoudre le problème de positionnement, tandis que nous exploitons la paramétrisation de l'angle d'Euler pour résoudre le problème d'orientation.

4.1 Le problème général de la cinématique inverse

Le problème général de la cinématique inverse peut être énoncé comme suit. Soit une transformation homogène 4×4

$$H = \begin{pmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad SE(3) \quad (4.1)$$

avec $R \in SO(3)$, trouver (une ou toutes) les solutions de l'équation

$$J_n^0(q_1, \dots, q_n) = H \quad (4.2)$$

où

$$J_n^0(q_1, \dots, q_n) = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n). \quad (4.3)$$

Ici, H représente la position et l'orientation souhaitées de l'effecteur terminal, et notre tâche est de trouver les valeurs des variables articulaires $q_1, \dots, q_n$ pour que $T_n^0(q_1, \dots, q_n) = H$.

De plus, du fait que ces équations cinématiques directes sont en général des fonctions non linéaires compliquées des variables articulaires, les solutions peuvent être difficiles à obtenir même lorsqu'elles existent.

En résolvant le problème de cinématique inverse, nous sommes plus intéressés à trouver une solution sous forme fermée des équations plutôt qu'une solution numérique. Trouver une solution sous forme fermée signifie trouver une relation explicite :

$$q_k = f_k(h_1, \dots, h_6), \quad k = 1, \dots, n.m. \quad (4.6)$$

Les solutions de forme fermée sont préférables pour deux raisons. Premièrement, dans certaines applications, telles que le suivi d'un cordon de soudure dont l'emplacement est fourni par un système de vision, les équations cinématiques inverses doivent être résolues à un rythme rapide, disons toutes les 20 millisecondes, et avoir des expressions de forme fermée plutôt qu'une recherche itérative est une nécessité pratique. Deuxièmement, les équations cinématiques ont en général plusieurs solutions. Avoir des solutions de forme fermée permet de développer des règles pour choisir une solution particulière parmi plusieurs.

La question pratique de l'existence de solutions au problème de la cinématique inverse dépend de considérations d'ingénierie ainsi que de mathématiques. Par exemple, le mouvement des articulations rotoïdes peut être limité à moins de 360 degrés de rotation complets de sorte que toutes les solutions mathématiques des équations cinématiques ne correspondront pas à des configurations physiquement réalisables du manipulateur. Nous supposons que la position et l'orientation données sont telles qu'il existe au moins une solution de (4.2). Une fois qu'une solution aux équations mathématiques est identifiée, elle doit être vérifiée plus avant pour voir si elle satisfait ou non à toutes les contraintes sur les plages de mouvements articulaires possibles. Pour nos besoins ici, nous supposons désormais que la matrice homogène donnée H dans (4.2) correspond à une configuration dans l'espace de travail du manipulateur avec une orientation atteignable. Ceci garantit alors que les solutions mathématiques obtenues correspondent à des configurations réalisables.

4.2 Découplage cinématique

Bien que le problème général de la cinématique inverse soit assez difficile, il s'avère que pour les manipulateurs à six articulations, les trois dernières articulations se coupant en un point (comme le manipulateur de Stanford ci-dessus), il est possible de découpler le problème de la cinématique inverse en deux des problèmes plus simples, appelés respectivement cinématique de position inverse et cinématique d'orientation inverse. En d'autres termes, pour un manipulateur à six degrés de liberté avec un poignet sphérique, le problème de cinématique inverse peut être séparé en deux problèmes plus simples, à savoir d'abord trouver la position de l'intersection des axes du poignet, ci-après appelé le centre du poignet, puis trouver l'orientation du poignet.

Pour être concret, supposons qu'il y ait exactement six degrés de liberté et que les trois derniers axes articulaires se coupent en un point o . Nous exprimons (4.2) sous la forme de deux ensembles d'équations représentant les équations de rotation et de position

$$R_o(q_1, \dots, q_6) = R \quad (4.7)$$

$$o_o(q_1, \dots, q_6) = o \quad (4.8)$$

où o et R sont la position et l'orientation souhaitées du cadre de l'outil, exprimées par rapport au système de coordonnées universel. Ainsi, on nous donne o et R , et le problème de cinématique inverse est à résoudre pour $q_1, \dots, q_6$.

L'hypothèse d'un poignet sphérique signifie que les axes z_3 , z_4 et z_5 se coupent en o et donc que les origines o_4 et o_5 attribuées par la convention DH seront toujours au centre du poignet o . Souvent o_3 sera également à o , mais ce n'est pas nécessaire pour notre développement ultérieur. Le point important de cette hypothèse pour la cinématique inverse est que le mouvement des trois dernières liaisons autour de ces axes ne changera pas la position de o , et donc, la position du centre du poignet est donc fonction des trois premières variables articulaires uniquement.

L'origine du repère de l'outil (dont les coordonnées souhaitées sont données par o) est simplement obtenue par une translation de la distance d_6 le long de z_5 à partir de o (voir tableau 3.3). Dans notre cas, z_5 et z_6 sont le même axe, et la troisième colonne de R exprime la direction de z_6 par rapport au repère de base. Par conséquent, nous avons

$$o_o = o + d_6 R_{c_6} \quad (4.9)$$

Ainsi pour avoir l'effecteur du robot au point de coordonnées donné par o et d'orientation de l'effecteur donné par $R = (r_{ij})$, il faut et il suffit que le centre du poignet o ait des coordonnées données par

$$o_o = o - d_6 R_{c_6} \quad (4.10)$$

et que l'orientation du cadre $o_6x_6y_6z_6$ par rapport à la base soit donnée par R . Si les composantes de la position de l'effecteur terminal o sont notées o_x , o_y , o_z et les composantes du centre du poignet o

$$\begin{aligned} & \text{c}_6 \text{ sont notés } x_c, y_c, z_c \text{ alors (4.10) donne la relation} \\ & \begin{array}{lcl} x_c & = & d_6 r_{13} \\ y_c & = & d_6 r_{23} \\ z_c & = & d_6 r_{33} \end{array} \end{aligned} \quad (4.11)$$

En utilisant l'équation (4.11), nous pouvons trouver les valeurs des trois premières variables détermine la transformation d'orientation R_0 conjointes. Ceci qui ne dépend que de ces trois premières variables conjointes. Nous pouvons maintenant déterminer l'orientation de l'effecteur par rapport au cadre $o_3x_3y_3z_3$ à partir de l'expression

$$R = R_0 R_3 \quad (4.12)$$

$$R_3 = (R_0)^{-1} R = (R_0)^{-1} R \quad (4.13)$$

Comme nous le verrons dans la section 4.4, les trois derniers angles articulaires peuvent alors être trouvés comme un ensemble d'angles d'Euler correspondant à R_3 . Notons que le second membre de (4.13) est complètement connu puisque R est donné et R_0 peut être calculé une fois que les trois premières variables conjointes sont connues. L'idée de découplage cinématique est illustrée à la figure 4.1.

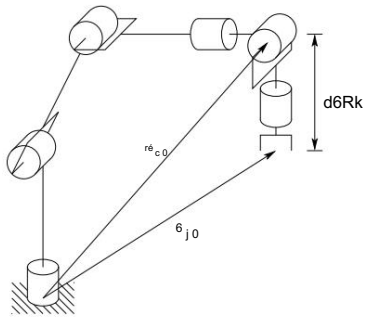


Figure 4.1 : Découplage cinématique.

Résumé

Pour cette classe de manipulateurs, la détermination de la cinématique inverse peut être résumée par l'algorithme suivant.

Étape 1 : Trouver q_1, q_2, q_3 tels que le centre du poignet o_c ait les coordonnées données par

$$\begin{pmatrix} x_{o_c} \\ y_{o_c} \\ z_{o_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - d_6 R \quad (4.14)$$

Étape 2 : À l'aide des variables conjoints déterminées à l'étape 1, évaluez R_0^3 .

Étape 3 : Trouver un ensemble d'angles d'Euler correspondant à la matrice de rotation

$$R_6^3 = (R_0^3)^T R = (R_0^3)^T R \quad (4.15)$$

4.3 Position inverse : une approche géométrique

Pour les arrangements cinématiques courants que nous considérons, nous pouvons utiliser une approche géométrique pour trouver les variables, q_1, q_2, q_3 correspondant à o donné par (4.10). Nous limitons notre traitement à l'approche géométrique pour deux raisons. Tout d'abord, comme nous l'avons dit, la plupart des conceptions actuelles de manipulateurs sont cinématiquement simples, consistant généralement en l'une des cinq configurations de base du chapitre 1 avec un poignet sphérique. En effet, c'est en partie à cause de la difficulté du problème général de cinématique inverse que les conceptions de manipulateurs ont évolué jusqu'à leur état actuel.

Deuxièmement, il existe peu de techniques capables de gérer le problème général de la cinématique inverse pour des configurations arbitraires. Étant donné que le lecteur est le plus susceptible de rencontrer des configurations de robot

du type considéré ici, la difficulté supplémentaire qu'implique le traitement du cas général semble injustifiée. Le lecteur est renvoyé aux références en fin de chapitre pour le traitement du cas général.

En général, la complexité du problème de cinématique inverse augmente avec le nombre de paramètres de liaison non nuls. Pour la plupart des manipulateurs, beaucoup des a_i di sont nuls, les a_i sont 0 ou $\pm\pi/2$, etc. Dans ces cas en particulier, une approche géométrique est la plus simple et la plus naturelle. Nous allons illustrer cela par quelques exemples importants.

Configuration articulée

Considérons le manipulateur coudé illustré à la figure 4.2, avec les composantes de o par x_c, y_c, z_c . Nous projetons o_c sur le plan $x_0 y_0$ dénoté o_{xy} comme le montre la figure 4.3.

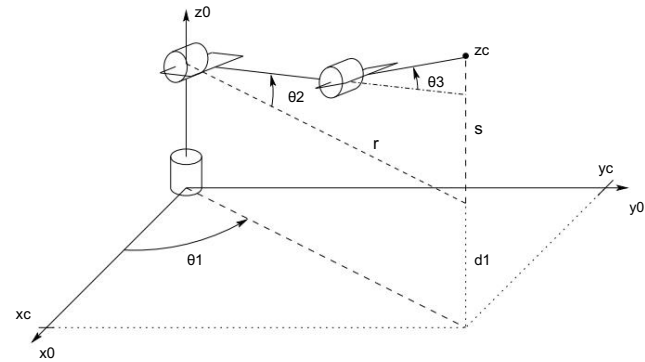


Figure 4.2 : Manipulateur coudé.

On voit sur cette projection que

$$\theta_1 = A \tan(x_c, y_c), \quad (4.16)$$

où $A \tan(x, y)$ désigne la fonction arctangente à deux arguments. Un $\tan(x, y)$ est défini pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et est égal à l'angle unique θ tel que

$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}. \quad (4.17)$$

Par exemple, $A \tan(1, -1) = -\pi/4$, tandis que $A \tan(-1, 1) = +3\pi/4$. Notez qu'une deuxième solution valide pour θ_1 est

$$\theta_1 = \pi + A \tan(x_c, y_c). \quad (4.18)$$

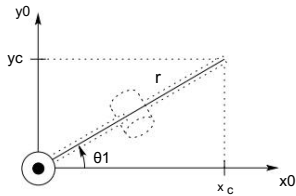


Figure 4.3 : Projection du centre du poignet sur le plan $x_0 - y_0$.

Bien sûr, cela conduira à son tour à des solutions différentes pour θ_2 et θ_3 , comme nous le verrons ci-dessous.

Ces solutions pour θ_1 , sont valides sauf si $x_c = y_c = 0$. Dans ce cas (4.16) n'est pas défini et le manipulateur est dans une configuration singulière, illustrée à la Figure 4.4. Dans cette position le

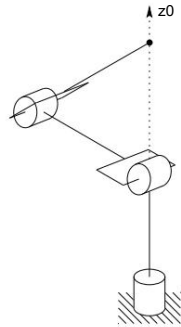


Figure 4.4 : Configuration singulière.

le centre du poignet oc coupe z_0 ; donc toute valeur de θ_1 laisse oc fixe. Il existe donc une infinité de solutions pour θ_1 lorsque oc coupe z_0 .

S'il existe un décalage $d = 0$, comme illustré à la Figure 4.5, le centre du poignet ne peut pas couper z_0 . Dans ce cas, selon la manière dont les paramètres DH ont été affectés, nous aurons $d_2 = d$ ou $d_3 = d$. Dans ce cas, il n'y aura en général que deux solutions pour θ_1 . Celles-ci correspondent aux configurations dites bras gauche et bras droit comme le montrent les figures 4.6 et 4.7. La figure 4.6 montre la configuration du bras gauche. De cette figure, on voit géométriquement que

$$\theta_1 = \varphi - \alpha \quad (4.19)$$

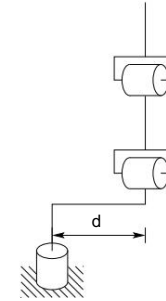


Figure 4.5 : Manipulateur de coude avec décalage d'épaule.

où

$$\varphi = A \tan(x_c, y_c) - \text{ré} \quad (4.20)$$

$$2\alpha = A \tan r \quad (4.21)$$

$$= \text{Un bronzage } x \frac{z_c^2 + y_c^2 - d^2}{2}, d.$$

La deuxième solution, donnée par la configuration du bras droit illustrée à la Figure 4.7 est donnée par

$$\theta_1 = A \tan(x_c, y_c) + A \tan - r \quad (4.22)$$

Pour voir cela, notez que

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (4.23)$$

$$A \tan(x_c, y_c) \beta = \gamma + \pi \quad (4.24)$$

$$\gamma = A \tan(r) \quad (4.25)$$

$$\gamma = A \tan(r) \quad (4.26)$$

$$\gamma = A \tan(r) \quad (4.27)$$

qui, ensemble, impliquent que

$$\beta = A \tan - r \quad (4.28)$$

puisque $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$.

Pour trouver les angles θ_2 , θ_3 pour le manipulateur coudé, étant donné θ_1 , nous considérons le plan formé par les deuxième et troisième liaisons comme illustré à la Figure 4.8. Depuis le mouvement des liens

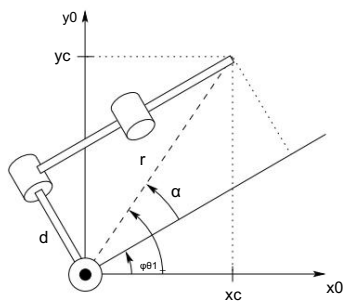


Figure 4.6 : Configuration du bras gauche.

deux et trois est planaire, la solution est analogue à celle du manipulateur à deux maillons du chapitre 1. Comme dans notre dérivation précédente (cf. (1.8) et (1.9)) on peut appliquer la loi des cosinus pour obtenir

$$\begin{aligned} \cos \theta_3 &= \frac{r^2 + d^2 - z_c^2}{2rd} \\ &= \frac{r^2 + d^2 - (y_c^2 + z_c^2)}{2rd} := D_1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

depuis $r^2 = x_c^2 + y_c^2 + d^2$ et $s = z_c$. Par conséquent, θ_3 est donné par

$$\theta_3 = A \tan D_1 \pm 1 - D_2. \quad (4.30)$$

De même, θ_2 est donné par

$$\begin{aligned} \theta_2 &= A \tan(r, s) - A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \\ &= \text{Un bronzeage } x^2 + y^2 - d^2, z_c - A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Les deux solutions pour θ_3 correspondent respectivement à la position coude vers le haut et vers le bas.

Un exemple de manipulateur coude avec décalages est le PUMA illustré à la Figure 4.9. Il existe quatre solutions à la cinématique de position inverse, comme indiqué. Celles-ci correspondent aux situations bras gauche-coude vers le haut, bras gauche-coude vers le bas, bras droit-coude vers le haut et bras droit-coude vers le bas. Nous verrons qu'il existe deux solutions pour l'orientation du poignet donnant ainsi un total de huit solutions de la cinématique inverse pour le manipulateur PUMA.

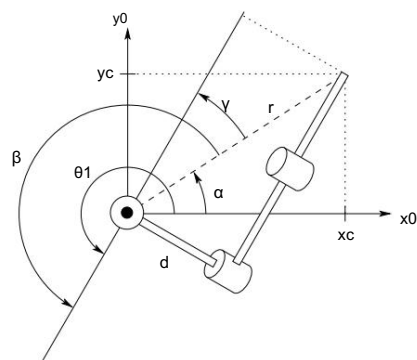


Figure 4.7 : Configuration du bras droit.

Configuration sphérique

Nous résolvons ensuite la cinématique de position inverse pour un manipulateur sphérique à trois degrés de liberté représenté sur la figure 4.10. Comme dans le cas du manipulateur de coude, la première variable articulaire est la rotation de base et une solution est donnée par

$$\theta_1 = A \tan(x_c, y_c) \quad (4.32)$$

à condition que x_c et y_c ne soient pas tous les deux nuls. Si x_c et y_c sont nuls, la configuration est singulière comme précédemment et θ_1 peut prendre n'importe quelle valeur.

L'angle θ_2 est donné à partir de la Figure 4.10 comme

$$\theta_2 = A \tan(r, s) + 2 \frac{\pi}{2} \quad (4.33)$$

où $r + y^2$ pour θ_2 est $\frac{2}{c}$, $s = z_c - d_1$. Comme dans le cas du manipulateur de coude une deuxième solution donnée par

$$\theta_1 = \pi + A \tan(x_c, y_c); \quad (4.34)$$

La distance linéaire d_3 se trouve comme

$$d_3 = r^2 + s^2 - 2x_c^2 + y_c^2 + (z_c - d_1)^2. \quad (4.35)$$

La solution de racine carrée négative pour d_3 n'est pas prise en compte et donc dans ce cas, nous obtenons deux solutions à la cinématique de position inverse tant que le centre du poignet ne coupe pas z_0 . S'il y a un décalage, il y aura des configurations de bras gauche et droit comme dans le cas du manipulateur de coude (Problème 4-12).

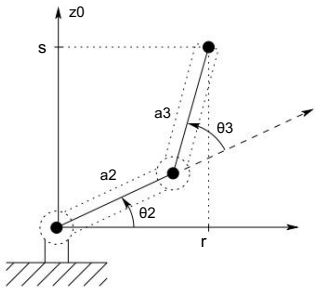


Figure 4.8 : Projection sur le plan formé par les liaisons 2 et 3.

4.4 Orientation inverse

Dans la section précédente, nous avons utilisé une approche géométrique pour résoudre le problème de position inverse. Cela donne les valeurs des trois premières variables articulaires correspondant à une position donnée de l'origine du poignet. Le problème d'orientation inverse consiste maintenant à trouver les valeurs des trois dernières variables conjointes correspondant à une orientation donnée par rapport au repère $\phi_3 \phi_2 \phi_1$. Pour un poignet sphérique, cela peut être interprété comme le problème de trouver un ensemble d'angles d'Euler correspondant à une matrice de rotation donnée R . Rappelons que l'équation (3.32) montre que la matrice de rotation obtenue pour le poignet sphérique a la même forme que la rotation matrice de la transformation d'Euler, donnée en (2.52). Par conséquent, nous pouvons utiliser la méthode développée à la section 2.5.1 pour résoudre les trois angles articulaires du poignet sphérique. En particulier, nous résolvons pour les trois angles d'Euler, ϕ , θ , ψ , en utilisant les équations (2.54) – (2.59), puis utilisons la cartographie

$\theta_4 = \phi,$
 $\theta_5 = \theta,$
 $\theta_6 = \psi.$

Exemple 4.2 Manipulateur articulé avec poignet sphérique Les paramètres DH pour l'affectation de trame illustrée à la Figure 4.2 sont résumés dans le Tableau 4.1. La multiplication des matrices A_i correspondantes donne la matrice R_0 pour le manipulateur articulé ou coudé comme

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

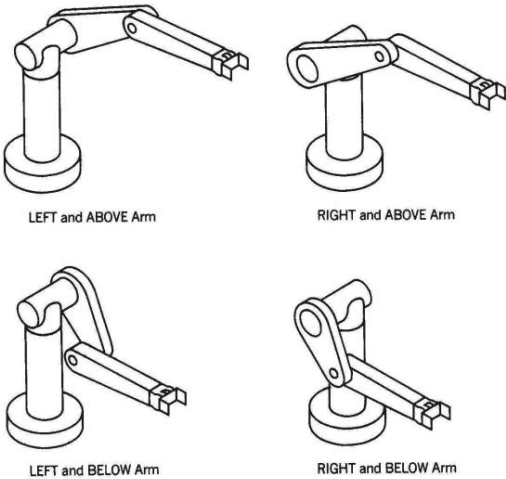


Figure 4.9 : Quatre solutions de la cinématique de position inverse pour le manipulateur PUMA.

Tableau 4.1 : Paramètres de liaison pour le manipulateur articulé de la Figure 4.2.

Lien	a_i	α_i	d_i	θ_i	ϕ	θ	ψ
1		θ	1				
2	a_2	0	0	θ		2	
3	a_3	0	0	θ			3

variable

4.4. ORIENTATION INVERSE

95

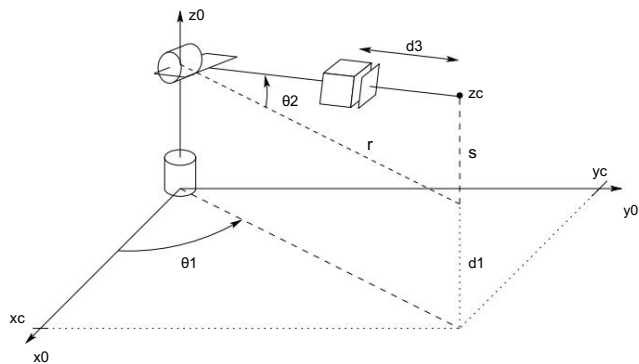


Figure 4.10 : Manipulateur sphérique.

La matrice $R_6^3 = A_4 A_5 A_6$ est donnée comme

$$R_6^3 = \begin{pmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4c6 & c4s5 \\ s4c5c6 + c4s6 & -s4c5s6 + c4c6 & s4s5 \\ -s5c6 & s5s6 & c5 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

L'équation à résoudre maintenant pour les trois dernières variables est donc

$$R_6^3 = (R_0^3)^T R \quad (4.38)$$

et la solution de l'angle d'Euler peut être appliquée à cette équation. Par exemple, les trois équations données par la troisième colonne de l'équation matricielle ci-dessus sont données par

$$c4s5 = c1c23r13 + s1c23r23 + s23r33 \quad (4.39)$$

$$s4s5 = -c1s23r13 - s1s23r23 + c23r33 \quad (4.40)$$

$$c5 = s1r13 - c1r23. \quad (4.41)$$

Par conséquent, si les deux expressions (4.39), (4.40) ne sont pas nulles, alors nous obtenons θ_5 à partir de (2.54) et (2.55) comme

$$\theta_5 = A \tan \frac{s1r13 - c1r23}{c1r23}, \pm 1 - (s1r13 - c1r23)^2 \quad (4.42)$$

Si la racine carrée positive est choisie dans (4.42), alors θ_4 et θ_6 sont donnés par (2.56) et (2.57), respectivement, comme

$$\theta_4 = A \tan \frac{c1c23r13 + s1c23r23 + s23r33}{-c1s23r13 - s1s23r23 + c23r33} \quad (4.43)$$

$$\theta_6 = A \tan(-s1r11 + c1r21, s1r12 - c1r22). \quad (4.44)$$

96

CHAPITRE 4. CINEMATIQUE INVERSE

Les autres solutions sont obtenues de manière analogue. Si $s5 = 0$, alors les axes articulaires $z3$ et $z5$ sont colinéaires. Il s'agit d'une configuration singulière et seule la somme $\theta_4 + \theta_6$ peut être déterminée. Un La solution consiste à choisir θ_4 arbitrairement puis à déterminer θ_6 à l'aide de (2.62) ou (2.64).

Exemple 4.3 Résumé de la solution du manipulateur coudé

Pour résumer le développement précédent, nous écrivons une solution à l'inverse cinématique du manipulateur coudé à six degrés de liberté illustré à la figure 4.2 qui a pas de décalages articulaires et un poignet sphérique.

Donné

$$o = \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

puis avec

$$x_c = o_x - d_6 r_{13} \quad (4.46)$$

$$y_c = o_y - d_6 r_{23} \quad (4.47)$$

$$z_c = o_z - d_6 r_{33} \quad (4.48)$$

un ensemble de variables conjoints DH est donné par

$$\theta_1 = A \tan(x_c, y_c) \quad (4.49)$$

$$\theta_2 = A \tan \frac{x_c^2 + y_c^2 - d_2^2}{2x_c y_c}, z_c - A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \quad (4.50)$$

$$\theta_3 = A \tan D, \pm 1 - D_2, \quad \text{où } D = \frac{x_c^2 + y_c^2 - d^2 + z_c^2 - u_{23}^2 - u_{n2}^2}{2a_2 a_3} \quad (4.51)$$

$$\theta_4 = A \tan \frac{c1c23r13 + s1c23r23 + s23r33}{-c1s23r13 - s1s23r23 + c23r33} \quad (4.52)$$

$$\theta_5 = A \tan \frac{s1r13 - c1r23}{c1r23}, \pm 1 - (s1r13 - c1r23)^2 \quad (4.53)$$

$$\theta_6 = A \tan(-s1r11 + c1r21, s1r12 - c1r22). \quad (4.54)$$

Les autres solutions possibles sont laissées en exercice (Problème 4-11).

Exemple 4.4 Manipulateur SCARA

Comme autre exemple, on considère le manipulateur SCARA dont la cinématique avant est défini par T_4^0 de (3.49). La cinématique inverse est alors donnée comme l'ensemble des solutions de l'équation

$$\begin{pmatrix} c12c4 + s12s4 & s12c4 - c12s4 & 0 & a1c1 + a2c12 \\ s12c4 - c12s4 & -c12c4 - s12s4 & 0 & a1s1 + a2s12 \\ 0 & 0 & -1 & -d3 - d4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Notons d'abord que, puisque le SCARA n'a que quatre degrés de liberté, tous les H possibles de SE(3) ne permettent pas une solution de (4.55). En fait on voit facilement qu'il n'y a de solution de (4.55) que si R est de la forme

$$R = \begin{pmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ s\alpha & -c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

et si tel est le cas, la somme $\theta_1 + \theta_2 - \theta_4$ est déterminée par

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \alpha = A \tan(r_{11}, r_{12}). \quad (4.57)$$

La projection de la configuration du manipulateur sur le plan $x_0 - y_0$ donne immédiatement la situation de la figure 4.11.

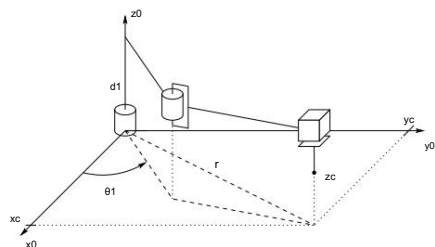


Figure 4.11 : Manipulateur SCARA.

On voit par là que

$$\theta_2 = A \tan c_2, \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (4.58)$$

où

$$c_2 = \frac{2 \cdot 2 + \frac{xy}{z} a_1 a_2}{\sqrt{1 - \frac{xy}{z} a_1 a_2}} \quad (4.59)$$

$$\theta_1 = A \tan(o_x, o_y) - A \tan(a_1 + a_2 c_2, a_2 s_2). \quad (4.60)$$

On peut alors déterminer θ_4 à partir de (4.57) comme

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \theta_1 + \theta_2 - \alpha \\ &= \theta_1 + \theta_2 - A \tan(r_{11}, r_{12}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Enfin d_3 est donné par

$$d_3 = \text{once} + d_4. \quad (4.62)$$