Machine Translated by Google

Энциклопедия

Автор и редактор

Эльзейн Салах Эльзейн

Член IEEE

- Статьи по прикладной математике

Издательство IEEE, Великобритания



Этот контент является конфиденциальным

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Моделирование влияния дезинформации на передачу Динамика COVID-19

Цзыи Су [†] и Эфраим Адьинги [*,†]

Школа математики и статистики Рочестерского технологического института, Рочестер, Нью-Йорк 14623, США; zs4768@rit.edu * Адрес для переписки:
[†] eoasma@rit.edu Эти авторы внесли равный вклад в эту работу.

Аннотация: Угроза, исходящая от пандемии COVID-19, сопровождалась эпидемией дезинформации, вызывающей растерянность и недоверие среди населения. Дезинформация о COVID-19, преднамеренная или непреднамеренная, принимает различные формы, включая теории заговора, ложное лечение и неточную информацию о происхождении и распространении вируса. Хотя пандемия выявила значительное влияние дезинформации на общественное здравоохранение, математическое моделирование стало ценным инструментом для понимания распространения COVID-19 и воздействия мер общественного здравоохранения. Однако исследования по математическому моделированию распространения дезинформации, связанной с COVID-19, проводились ограниченно. В этой статье мы представляем математическую модель распространения дезинформации, связанной с COVID-19. Модель подчеркивает проблемы, создаваемые дезинформацией, поскольку вместо того, чтобы сосредотачиваться только на воспроизводстве, которое приводит к новым инфекциям, существует дополнительный пороговый параметр, который стимулирует распространение дезинформации. Равновесия модели анализируются как на локальную, так и на глобальную устойчивость, а также представлены численные модели. Мы также обсуждаем потенциал модели для разработки эффективных стратегий борьбы с дезинформацией, связанной с COVID-19.

Ключевые слова: COVID-19; дезинформация; математическая модель

check for updates

Цитирование: Су, З.; Агьинги, Э. Моделирование влияния дезинформации на динамику передачи COVID-19. Прикладная математика 2024, 4, 544–560. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020029

Академический редактор: Томас Вуллиш

Поступила: 1 марта 2024 г.

Пересмотрено: 24 апреля 2024 г.

Принято: 26 апреля 2024 г.

Опубликовано: 30 апреля 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария.

Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons

Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

COVID-19, также известный как коронавирусная болезнь, вызванная новым коронавирусом SARS-CoV-2, оказал глубокое влияние на глобальное здравоохранение с момента его появления в конце 2019 года. Первый случай был зарегистрирован в Ухане, Китай, и вирус быстро распространился по всему миру, при этом в разных регионах наблюдались многочисленные волны инфекций. После более чем 118 000 случаев заболевания в 114 странах и 4291 случая смерти Всемирная организация здравоохранения (ВОЗ) 11 марта 2020 года объявила COVID-19 пандемией [1,2]. COVID-19 в основном передается воздушно-капельным путем, когда инфицированный человек кашляет, чихает, разговаривает или тяжело дышит вне посредственной близости от других [3]. Он демонстрирует широкий спектр клинических проявлений: от легких гриппоподобных симптомов до тяжелой дыхательной недостаточности и полиорганной недостаточности [4,5]. На динамику передачи заболевания повлияло несколько факторов, включая социальное поведение. COVID-19 продолжает развиваться, при этом распространенность и тяжесть заболевания варьируются из-за появления новых вариантов, кампаний вакцинации и мер общественного здравоохранения, принимаемых правительствами и организациями здравоохранения. Во всем мире по состоянию на 27 сентября 2023 г. зарегистрировано 770 875 433 подтвержденных случая заболевания COVID-19, в том числе 6 959 316 случаев смерти, зарегистриро

Во время пандемии многие страны приняли ряд мер по сдерживанию распространения COVID-19, таких как социальное дистанцирование, ношение масок, самокарантин и, в конечном итоге, вакцинация, когда они стали доступны, что по существу помогло регулировать передачу вируса. коронавирусная болезнь. Однако отсутствие четких и кратких сообщений со стороны представителей общественного здравоохранения также способствовало распространению дезинформации, связанной с COVID-19. Постоянно меняющийся характер пандемии и непонимание сути вируса.

Machine Translated by Google

на раннем этапе привело к появлению противоречивой информации и сообщений от должностных лиц общественного здравоохранения, что привело к путанице и недоверию среди населения. Это побудило некоторых людей обратиться за советом к альтернативным источникам информации, включая дезинформацию.

Дезинформация, связанная с COVID-19, принимала различные формы [7–9]. Широко распространены теории заговора, связанные с COVID-19, часто утверждающие, что вирус был намеренно создан и распространен как биологическое оружие или как часть глобального заговора [10]. Например, теория о том, что технология 5G ответственна за распространение COVID-19, широко распространилась в социальных сетях, несмотря на отсутствие научных доказательств в поддержку этого утверждения [11]. Также пропагандируются ложные методы лечения и лечения COVID-19, что приводит к опасным последствиям для людей, которые им следуют. Например, широко сообщалось об использовании дезинфицирующих средств, таких как отбеливатель, для лечения COVID-19, что приводило к тяжелым травмам и смертям [12]. Также распространяются ложные утверждения о том, что некоторые лекарства, такие как гидроксихлорохин, эффективны при лечении COVID-19, что приводит к накоплению запасов и нехватке препарата, который на самом деле неэффективен при лечении вируса [13]. Слухи о происхождении и распространении COVID-19 также способствовали распространению дезинформации вокруг этой болезни. Например, теория о том, что вирус был намеренно создан и распространен Китаем, продвигается некоторыми СМИ и политиками, несмотря на отсутствие доказательств в поддержку этого утверждения [10]. Более того, дезинформация о вакцинах включает необоснованные утверждения о побочных эффектах, сомнения в их эффективности и необоснованные теории о секретных планах. Такая дезинформация подрывает общественное доверие к вакцинам, что приводит к нерешительности в отношении вакцинации и ставит под угрозу достижение широкого охвата вакцинацией. Политизация пандемии также способствовала распространению дезинформации, связанной с COVID-19. Политические лидеры и средства массовой информации часто занимают поляризующую позицию в отношении пандемии, что приводит к усилению дезинформации и теорий заговора [14]. Это привело к отсутствию консенсуса относительно серьезности пандемии и эффективности мер общественного здравоохранения, что еще больше способствовало распространению дезинформации.

Математические модели широко использовались для понимания распространения COVID-19 и информирования о мерах общественного здравоохранения [15]. Некоторые из этих моделей обычно включают набор дифференциальных уравнений, которые описывают динамику распространения вируса, включая количество инфицированных людей, скорость передачи и эффективность таких мер, как социальное дистанцирование и вакцинация [16,17]. Математические модели могут использоваться для оценки ключевых параметров пандемии, таких как базовый коэффициент воспроизводства (R0), который измеряет среднее число людей, инфицированных каждым инфицированным человеком в восприимчивой популяции [18]. Оценивая R0, математические модели можно использовать для прогнозирования потенциального воздействия различных вмешательств и для определения политики общественного здравоохранения.

Существует множество проблем, связанных с моделированием COVID-19, включая неопределенность ключевых параметров, таких как скорость передачи, продолжительность заразности и продолжительность иммунитета после выздоровления или вакцинации [19,20]. Кроме того, сложная динамика пандемии, включая появление новых вариантов и изменение общественного поведения из-за дезинформации, затруднила точное прогнозирование хода пандемии. В этом исследовании мы представим математическую модель роли вводящей в заблуждение информации в динамике передачи COVID-19, поскольку дезинформированные люди, скорее всего, будут игнорировать такие меры, как социальное дистанцирование, ношение масок, вакцинация и другие, принятые для защиты населения. . Модель основана на предположении, что некоторая часть населения уязвима к дезинформации. Мы называем дезинформацией ложную или неточную информацию, которая распространяется намеренно или непреднамеренно и приводит к искажению фактов или неправильному пониманию реальности. Его можно распространять по различным каналам, включая социальные сети, новостные агентства, из уст в уста или онлайн-платформы. Дезинформация может принимать различные формы, такие как вводящие в заблуждение заявления, сфабрикованные данные, теории заговора или неверное толкование достоверной информации. Зачастую она направлена на обман или манипулирование отдельными людьми, что приводит к пагубным последствиям, включая подрыв доверия, пропаганду страха и паники, препятствие информированному принятию решений и потенциально пагубное воздействие на общественное здравоохранение, социальную сплоченность и демократические процессы.

Machine Translated by Google

Целью данного исследования является оценка влияния количества дезинформации на
Циркуляция оказывает влияние на динамику передач и COVID-19 среди населения. Чтобы достичь
Для достижения этой цели мы сформулировали модель типа SIR с дополнительным отсеком, представляющим
лица, введенные в заблуждение посредством дезинформации. Потому что там было много
дезинформация (преднамеренная или непреднамеренная), связанная с COVID-19, модель
представленное также рассматривает количество дезинформации как состояние, помеченное буквой M на основе
предположение, что оно синтезировано вводящими в заблуждение людьми. Этот подход аналогичен целевому
клеточные модели, в которых вирионы продуцируются инфицированными клетками [21]. Равновесные решения
модель получена с использованием вычисленных пороговых параметров и установлена их устойчивость.
как аналитически, так и численно. Моделирование модели показывает, что COVID-19 будет
существенно негативно повлиять на население, если дезинформация не будет должным образом решена.

2. Математическая модель

Представленная ниже модель по своей природе является моделью SIR с дополнительными отсеками.
для дезинформированных людей, смертей и плотности распространения вводящей в заблуждение информации.
Мы предполагаем, что по мере того, как восприимчивая популяция (S) вступает в контакт с циркулирующими ложными
или неточная информация (M) распространяется среди сообщества, некоторые будут введены в заблуждение в
скорость ρ и перейти в дезинформированный отсек (Sm). Независимо от среды
через который оно распространяется, мы предполагаем, что в любой момент времени (t) циркулируют
дезинформация (M) – это совокупность всех форм, включая вводящие в заблуждение заявления,
сфабрикованные данные, теории заговора или неверную интерпретацию достоверной информации. Мы предполагаем
что дезинформация генерируется со скоростью μ0 людьми, которые уже дезинформированы или
плохие актеры, которых мы также отнесли к категории дезинформированных, и мы полагаем, что вводящие в заблуждение
Плотность информации убывает со скоростью μ1. Таким образом, модель предполагает, что вводящие в заблуждение
информация генерируется только людьми в отсеке Sm . Мы также предполагаем, что
люди, введенные в заблуждение посредством информационных кампаний или других источников, отвергают ложную информацию
вывыздоравливайте со скоростью κ и возвращайтесь в уязвимый отсек. Взаимодействие между
восприимчивые (S) и дезинформированные (Sm) лица с лицами, инфицированными COVID-19
(I) приводят к инфекциям соответственно со скоростями α и σ. Мы предположили, что зараженные люди
либо выздоровел (R) со скоростью β, либо умер (D) от осложнения, связанного с COVID-19 , на момент
скорость γ. Далее предполагается, что новые особи набираются только как восприимчивые на некоторых стадиях.
коэффициент Λ и что естественный уровень смертности во всех компартментах равен θ. Принципиальная схема
Модель представлена на рисунке 1, а сводка параметров и их описание даны на рисунке .
Таблица 1.

Принимая во внимание изложенные выше предположения и проиллюстрированные на схеме
На диаграмме система дифференциальных уравнений, управляющая моделью, выглядит следующим образом:

$$\frac{dC}{dt} = \Lambda + \kappa Sm - \alpha SI - \rho SM - \theta S \quad (1)$$

$$\frac{dsm}{DT} = \rho SM \quad \sigma Sm\, I \quad \kappa Sm \quad \theta Sm \quad (2)$$

$$\frac{DI}{dt} = \alpha SI + \sigma Sm\, I \quad \beta I \quad \gamma I \quad \theta I \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = \beta I \quad \theta R \quad (4)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma I \quad (5)$$

$$\frac{dm}{dt} = \mu 0 Sm \quad \mu 1 M, \quad (6)$$

где мы предположили, что все значения параметров положительны, а начальные условия
S(0) = S0, Sm(0) = Sm0, I(0) = I0, R(0) = R0, D(0) = D0 и M(0) = M0 — все это
неотрицательный. Отметим, что в начале вспышки Sm(0) 0 и R(0) = D(0) = 0.

Machine Translated by Google

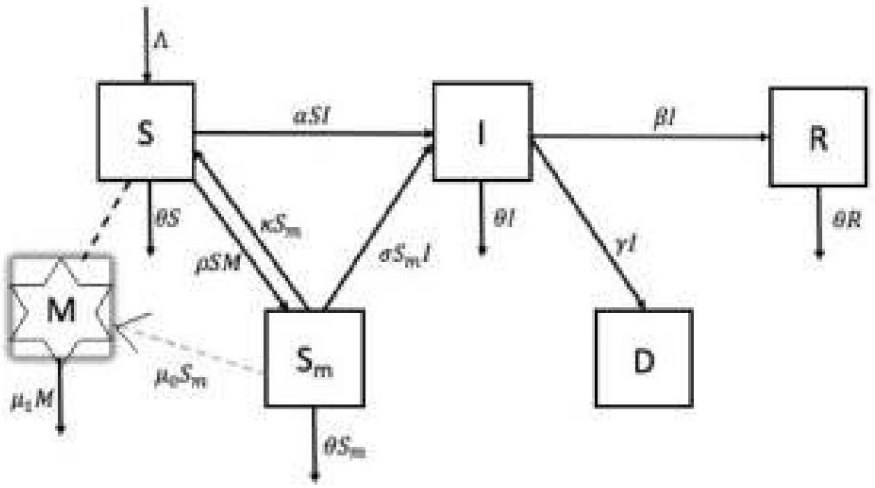


Рисунок 1. Схематическая диаграмма передачи COVID-19 при дезинформации. Переход отдельных лиц из отсеков S и Sm в отсек I в результате их взаимодействия с особями в отсеке I. Особи переходят между отсеками S и Sm в результате взаимодействия с дезинформировать M (либо потребляя его, либо восстанавливаясь после него). Плотность дезинформации создается особи в отсеке См.

Таблица 1. Описание параметров модели.

Параметр	Описание
Λ	Скорость вербовки восприимчивых лиц
α	Скорость заражения восприимчивых людей
β	Скорость, с которой инфекционные выздоравливают
ρ	Скорость, с которой восприимчивые люди вводятся в заблуждение
к	Скорость, с которой введенные в заблуждение выздоравливают от дезинформации
σ	Скорость заражения дезинформированных людей
γ	Смертность от инфекционных
θ	Естественная смертность
μ0	Темпы роста вводящей в заблуждение информации
μ1	Скорость исчезновения вводящей в заблуждение информации

Прежде чем продолжить, отметим, что уравнение смертности от COVID-19 (D), то есть Уравнение (5) отделено от остальной системы и поэтому им пренебрегают. все последующие анализы. Начнем с изучения основных динамических характеристик модели. В частности, установлена положительность решений модели и пространства инвариантности. Следующий результат показывает, что модель всегда допускает положительные решения.

Теорема 1. Пусть начальными условиями модели являются S(0) > 0, Sm(0) 0, I(0) 0, R(0) 0, и M(0) 0. Тогда решения (S(t), Sm(t), I(t), R(t), M(t)) модели с положительным начальные условия будут оставаться положительными все время t > 0.

Доказательство. Начнем с деления уравнений (1)–(4) и (6) соответственно на переменные S, Sm, I, R и M. Интегрируя полученные дифференциальные уравнения на интервале времени [0, t], и применяя начальные условия, получаем следующие выражения:

$$S(t) = S0 \exp \int_0^t \left(\alpha I(\eta) + \rho M(\eta) \frac{\Lambda}{S(\eta)} \frac{Cм(\eta)}{S(\eta)} \theta \right) d\eta,$$

$$Sm(t) = Sm0 \exp \int_0^t \rho \frac{C(\eta)M(\eta)}{Sm(\eta)} \sigma I(\eta) \kappa \theta \, d\eta,$$

$$I(t) = I0 \exp \int_0^t (\alpha S(\eta) + \sigma Sm(\eta) \beta \gamma \theta) d\eta,$$

$$R(t) = R0 \exp \int_0^t \frac{я(\eta)}{P(\eta)} \theta \, d\eta \text{ и } M(t) = M0 \exp \beta \int_0^t \mu 0 \frac{Cм(\eta)}{M(\eta)} \mu 1 \, d\eta.$$

Machine Translated by Google

Поскольку начальные условия неотрицательны, из приведенных выше выражений очевидно, что S(t), Sm(t), I(t), R(t) и M(t) всегда положительны во все времена, когда t > 0. Таким образом, решение модели с указанным начальным условием всегда положительно.

Далее мы покажем, что решение модели ограничено. С данным условием мы рассматриваем живую популяцию(L) , определенную формулой L(t) = S(t) + Sm(t) + I(t) + R(t) , и показываем, что L(t) и M(t) ограничены следующим результатом.

Теорема 2. Если начальные условия модели удовлетворяют L(0) $\frac{\Lambda}{\theta}$ и M(0) $\mu_0\Lambda$, то $\theta\mu_1$, , решение модели ограничено.

Доказательство. Поскольку S(t) > 0, Sm(t) 0, I(t) 0 и R(t) 0 из теоремы 1, очевидно, что L(t) ограничена снизу и, следовательно, L (t) 0. Осталось только установить, что L(t) ограничена сверху . Дифференцируя L(t) = S(t) + Sm(t) + I(t) + R(t) и подставляя производные из модели, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dL}{dt} = \Lambda \quad \theta(S + Sm + I + R) \quad \gamma I.$$

откуда получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{dL}{dt} \quad \Lambda \quad \theta L$$

чье решение удовлетворяет

$$L(t) \quad \frac{\Lambda}{\theta} - \left(\frac{\Lambda}{\theta} \quad L(0)\right)e^{\quad \theta t}.$$

Из приведенного выше неравенства видно, что живое население системы всегда ограничено сверху . Далее , из неравенства мы наблюдаем, что если начальное условие L(0) Чтобы сделать $\frac{\Lambda}{\theta}$, тогда мы имеем, что L(t) $\frac{\Lambda}{\theta}$ при t является строгой верхней границей.

вывод об ограниченности модели, мы также установили, что плотность дезинформации M(t) ограничена. В теореме 1 мы уже показали , что M(t) всегда положительна, т. е . M(t) 0, а значит, ограничена снизу . В целях ограниченности сверху рассмотрим случай, когда L(0) $\hat{\theta}$. Поскольку L(t) , должно быть Sm(t) $\hat{\theta}$. Используя дифференциальное уравнение для плотности дезинформации, получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{dM}{dt} \quad \mu_0\Lambda \quad \mu_1 M \theta$$

решение M(t) которого удовлетворяет

$$M(t) \quad \frac{\mu_0\Lambda \quad \mu_1\theta\Lambda}{\mu_1\theta} \quad \mu_1\theta \quad M(0)\right)e^{\quad \mu_1 t}.$$

Очевидно, что плотность информации ограничена сверху . Аналогично, если M(0) $\frac{\mu_0\Lambda}{\theta\mu_1}$, тогда мы имеем M(t) $\frac{\mu_0\Lambda}{\theta\mu_1}$ как строгая верхняя граница. □

Лемма 1. Замкнутое множество

$$\Pi = (S(t), Sm(t), I(t), R(t), M(t)) \quad R \quad \frac{5}{+}; L(t) \quad \frac{\Lambda}{\theta}, M(t) \quad \theta \quad \frac{\mu_0\Lambda}{\theta\mu_1}$$

является положительно инвариантным и привлекательным для модели.

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из теорем 1 и 2 , в которых предполагается тривиальность существования и единственность решения. □

Machine Translated by Google

3. Анализ модели. В этом

разделе мы вычисляем равновесия и обеспечиваем условия их существования. Мы также предоставляем число воспроизводства модели и используемого для изучения стабильности вычисленных равновесий. Обратите также внимание, что уравнение для выздоровевших (R) отделено от остальной системы, в дополнение к уравнению для смертей (D). Поэтому мы будем игнорировать эти уравнения в последующем анализе, поскольку их поведение можно легко вывести, учитывая поведение оставшейся подсистемы.

3.1. Существование

равновесий. Разделив уравнения для R и D, равновесие модели определяется решением подсистемы

$$\begin{aligned} &\Lambda + \kappa S_м - \alpha S_я - \rho S - M - \theta S = 0 \\ &\rho S - M - \sigma S_м я - \kappa S_м - \theta S_м = 0 \\ &\alpha S_я + \sigma S_м я - \beta I - \gamma I - \theta I = 0 \\ &\mu 0 S_м - \mu 1 M = 0. \end{aligned}$$

Поскольку последнее уравнение выше зависит только от переменной $S_м$, M можно представить в виде

$$M^* = \frac{\mu 0 S_м}{\mu 1}.$$

Из третьего уравнения подсистемы мы видим, что либо $I = 0$, что приводит к безболезненному равновесию (DFE) модели, либо $\alpha S + \sigma S_м - \beta - \gamma - \theta = 0$, что приводит к эндемическому равновесию

Предположим, что $E0 = (S, C_м, я, M)$ обозначает ДФЭ, тогда дальнейшее вычисление дает два ДФЭ,

$$E^1_0 = \frac{\Lambda}{\theta}, 0, 0, 0 \text{ и } E^2_0 = \frac{(\theta+\kappa)\mu 1}{\rho\mu 0}, \frac{\Lambda}{\theta} - \frac{(\theta+\kappa)\mu 1}{\rho\mu 0}, 0, \theta\mu 1 - \frac{(\theta+\kappa)\rho}{\rho\mu 0}.$$

Заметим здесь, что второй ДФЭ E^2_0 будет существовать только в том случае, если $\frac{\Lambda}{\theta} > \frac{(\theta+\kappa)\mu 1}{\rho\mu 0}$.

Прежде чем продолжить анализ, мы сделаем паузу и вычислим число воспроизводства модели R_0. Число репродукции — это количество вторичных инфекций, возникающих при попадании заразного человека в полностью восприимчивую популяцию. Используя матричный метод следующего поколения (см., например, Дуатель и др. [22]) и DFE, E^1_0 и E^2_0 соответственно, получаем числа воспроизводства

$$R^1_{p0} = \frac{\alpha\Lambda}{\theta(\beta+\gamma+\theta)} \text{ и } R^2_{p0} = \frac{1}{\beta+\gamma+\theta} - \frac{(\theta+\kappa)\mu 1}{\rho\mu 0}\left(\Lambda\alpha(\theta+\rho\mu 0) + \alpha(\theta+\kappa)\mu 1\right).$$

Заметим здесь, что R^1_{p0} регулирует модель при отсутствии дезинформации и управляет R^2_{p0} моделью, когда дезинформация сохраняется.

Теперь мы обратим наше внимание на установление местных равновесий модели. Предположим, что $EE = (S^*, C^*_м, я^*, M^*)$ обозначает эндемическое равновесие, тогда используя уравнение $\alpha S - \sigma S_м - \beta - \gamma - \theta = 0$ и необходимые уравнения в подсистеме, получаем два эндемических равновесия, а именно:

$$EE1 = \frac{A}{\theta}, 0, \frac{A}{\alpha}(R^1_{p0} - 1), 0$$

и

$$EE2 = \frac{(\theta+\kappa+\sigma I^*)\mu 1}{\rho\mu 0}, \frac{A}{\sigma} - \frac{\alpha(\theta+\kappa+\sigma I^*)\mu 1}{\sigma\rho\mu 0}, я^*, \frac{\mu 0}{\mu 1}\left(\frac{A}{\sigma} - \frac{\alpha(\theta+\kappa+\sigma I^*)\mu 1}{\sigma\rho\mu 0}\right),$$

Machine Translated by Google

где $A = \beta + \gamma + \theta$ и где

$$я = (P_0^2 - 1)\frac{\theta A}{\sigma} A + (\frac{\theta\alpha\mu 1}{\rho\mu 0}\frac{\sigma}{\alpha} - 1)^1.$$

Заметим здесь также, что первое эндемическое равновесие EE1 существует, если $R_{\alpha(\theta+\kappa+\sigma I)\mu 1} 2 > 1$ и $A_0^1 > 1$, и второе эндемическое равновесие EE2 существует, если $R_0 > 0$.

3.2. Стабильность

равновесий. В этом разделе мы устанавливаем результаты локальной стабильности для DFE и эндемических равновесий, полученных выше при соответствующих условиях. Начнем с того, что отметим, что матрица Якоби J(S, Sm, I, M) подсистемы имеет вид

$$ДЖ(\cdot) = \begin{matrix} \alpha I & \rho M & \theta\rho M \\ \alpha I\,0 & & \end{matrix} \begin{matrix} \kappa & & \alpha S \\ \sigma I & \kappa & \theta \\ \sigma I & & \end{matrix} \begin{matrix} & \sigma Sm & \rho S \\ \alpha S + \sigma Sm & \beta \quad \gamma \quad \theta\,0 & \rho S \\ \mu 0 & & 0 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mu 1 \end{matrix}.$$

Теорема 3. Если $\mu 1\theta(\theta + \kappa) > \mu 0\rho\Lambda$ и $R_0^1 < 1$, то DFE E_0^1 локально асимптотически устойчива, в противном случае, то оно неустойчиво.

Доказательство. Вычисление матрицы Якобиана в DFE $E_0^1 = (\frac{\Lambda}{\theta}, 0, 0, 0)$, мы получаем

$$J(E_0^1) = \begin{matrix} \theta & \kappa & \alpha\frac{\Lambda}{\theta} & \rho\frac{\Lambda}{\theta} \\ 0 \quad \kappa & \theta & 0 & \\ 0 & 0 & \alpha\frac{\Lambda}{\theta} - \beta - \gamma - \theta\,0 & p\frac{\Lambda}{\theta} \\ 0 & \mu 0 & & \mu 1 \end{matrix}$$

характеристический полином которого равен

$$P(\lambda) = \det(J(E_0^1) \quad \lambda I)$$

получение собственных значений

$$\lambda 1 = \theta$$

$$\lambda 2 = \alpha - \beta - \gamma - \theta\,\theta$$

$$\frac{(\theta + \kappa + \mu 1) \quad (\mu 1 + \theta + \kappa)\,\lambda 3 = \sqrt{\quad^2 \quad 4((\theta + \kappa)\mu 1 \quad \mu 0\rho\frac{\Lambda}{\theta})}}{2}$$

$$\frac{(\theta + \kappa + \mu 1) + (\mu 1 + \theta + \kappa)\,\lambda 4 = \sqrt{\quad^2 \quad 4((\theta + \kappa)\mu 1 \quad \mu 0\rho\frac{\Lambda}{\theta})}}{2}.$$

Из сказанного выше очевидно, что $\lambda 1$ и $\lambda 3$ имеют отрицательные вещественные части, поскольку $R_0^1 = \frac{\alpha\Lambda}{\mu 0\theta(\beta+\gamma+\theta)}$ и $\lambda 2$ можно переписать как

$$\lambda 2 = \alpha\,\theta\,1\frac{\Lambda}{\mu 0\theta(\beta + \gamma + \theta)}$$

$$= P \quad 0\,(\beta + \gamma + \theta) \quad (\beta + \gamma + \theta)$$

$$= (P_0^1 \quad 1)(\beta + \gamma + \theta).$$

Machine Translated by Google

Таким образом, если $R_0^1 < 1$, то $\lambda_2 < 0$. λ_4 имеет отрицательную действительную часть, если

$$\theta + \kappa + \mu_1 > \sqrt{(\mu_1 + \theta + \kappa)^2 - 4((\theta + \kappa)\mu_1 - \mu_0\rho\frac{\Lambda}{\theta})}$$

$$(\theta + \kappa + \mu_1)^2 > (\mu_1 + \theta + \kappa)^2 - 4((\theta + \kappa)\mu_1 - \mu_0\rho\frac{\Lambda}{\theta})$$

$$0 > -4((\theta + \kappa)\mu_1 - \mu_0\rho\frac{\Lambda}{\theta})$$

$$\mu_1\theta(\theta + \kappa) > \mu_0\rho\Lambda$$

соответствует действительности. Следовательно, если $\mu_1\theta(\theta + \kappa) > \mu_0\rho\Lambda$ и $R_0^1 < 1$, то ДФЭ E_0^1 локально асимптотически устойчив, в противном случае он неустойчив, если $R_0^1 > 1$. □

На этом мы завершаем анализ первого DFE E_0^1 путем установления результата глобальной стабильности. Для этого напомним, как было установлено в разделе 2, что в любой момент времени t живая популяция $L(t) = S(t) + S_m(t) + I(t) + R(t)$ ограничена сверху и удовлетворяет условиям

$$L(t) \leq \frac{\Lambda}{\theta} - (\frac{\Lambda}{\theta} - L0)e^{-\theta t},$$

где $L0 = L(0)$. Следующие результаты являются следствием приведенного выше неравенства.

Лемма 2. Живущая популяция $L(t) \leq L0$ в любой момент времени t.

Следующий результат обеспечивает глобальную устойчивость для E_0^1, то есть когда есть первого DFE E^1: нет COVID-19, а также нет дезинформации.

Теорема 4. Ввиду леммы 2, если $L0 = 1 E_0^{\frac{\alpha}{\theta}\frac{\Lambda}{\theta}, \sigma}$ и если $R_0^1 < 1$, то первое равновесие без болезней, глобально асимптотически устойчива, в противном случае она неустойчива.

Доказательство. Для доказательства теоремы 4 рассмотрим кандидата функции Ляпунова $V = \frac{1}{2}I^2$. Взяв ее производную, получим:

$$\frac{dV}{dt} = I\dot{I} = I(\alpha SI + \alpha S_m I - \beta I - \gamma I - \theta I) = I[\alpha S + \alpha S_m - (\beta + \gamma + \theta)] I\alpha S + \alpha S_m - (\beta + \gamma + \theta)(\frac{\beta + \gamma + \theta}{\beta + \gamma + \theta} - 1)I^2.$$

Поскольку модель предполагает, что $\alpha < \sigma$, то приведенное выше уравнение принимает вид

$$\frac{dV}{dt} \leq (\beta + \gamma + \theta)(\frac{\sigma(S + S_m)}{\beta + \gamma + \theta} - 1)I^2.$$

Если $L0 = \frac{\alpha}{\sigma}\frac{\Lambda}{\theta}$ то по лемме 2 получаем, что $S + S_m \leq \frac{\alpha}{\sigma}\frac{\Lambda}{\theta}$. Таким образом, мы получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leq (\beta + \gamma + \theta)(\frac{\alpha\Lambda}{\theta(\beta + \gamma + \theta)} - 1)I^2$$

$$\leq (\beta + \gamma + \theta)(R_0^1 - 1)I^2.$$

Ясно, что если $R_0^1 < 1$, то $\frac{dV}{dt} < 0$ и, следовательно, по принципу инвариантности ЛаСаля равновесие без болезней E_0^1 глобально асимптотически устойчива [23]. □

Далее рассмотрим локальную устойчивость второго ДФЭ E_0^2 и сформулируем следующий результат.

Machine Translated by Google

Теорема 5. Если $\rho\Lambda\mu_0 > \theta(\theta+\kappa)\mu_1$ и $R_0^2 < 1$, то ДФЭ E_0 в противном случае, то оно неустойчиво.

локально асимптотически устойчива,

Доказательство. Вычислив матрицу Якобиана на втором ДФЭ, т. е. $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\theta}, 0, \frac{(\theta+\kappa)\mu_1}{\rho\mu_0}\right)$, получим матрицу Якоби

$$J(E_0^2) = \begin{pmatrix} \frac{\rho\Lambda\mu_0}{\theta\mu_1} + \kappa & \kappa & \alpha\frac{(\theta+\kappa)\mu_1}{\rho\mu_0} & \rho\frac{(\theta+\kappa)\mu_1}{\rho\mu_0} \\ \frac{\rho\Lambda\mu_0}{\theta} - \kappa - \kappa & -\theta\frac{\theta\mu_1}{\rho\mu_0} & \alpha\left(\frac{\Lambda}{\theta} - \frac{(\theta+\kappa)\mu_1}{\rho\mu_0}\right) & -\frac{(\theta+\kappa)\mu_1}{\rho\mu_0}\rho \\ 0 & 0 & \alpha\frac{(\theta+\kappa)\mu_1}{\rho\mu_0} + \alpha(\rho\mu_0\frac{\theta}{\Lambda\theta} - \frac{(\theta+\kappa)\mu_1}{\rho\mu_0}) - \beta - \gamma & 0 \\ 0 & \mu_0 & \theta\rho\mu_0 0 & \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что из третьей строки приведенной выше матрицы мы видим, что

$$\rho\mu_0 2 \quad \theta\mu_1 \Lambda\lambda_1 = \alpha + \alpha(\theta - \frac{\theta\mu_1}{\rho\mu_0}) - \beta - \gamma - \theta$$

$$= R_0(\beta+\gamma+\theta) - (\beta+\gamma+\theta)$$

$$= (R_0^2 - 1)(\beta+\gamma+\theta) < 0, \text{ если } R_0^2 < 1.$$

Оставшийся множитель характеристического многочлена имеет третью степень и определяется выражением

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0,$$

где

$$b_1 = \mu_1 + \theta + \theta\frac{\rho\Lambda\mu_0}{\theta\mu_1} - \rho\Lambda\mu_0$$

$$\theta\mu_1 b_3 = \rho\Lambda\mu_0 - (\theta+\kappa)\mu_1\theta.$$

Чтобы установить, что остальные собственные значения (то есть нули приведенного выше кубического уравнения) имеют отрицательные действительные части, мы используем критерий Рауса – Гурвица. Из приведенных выше коэффициентов b_1, b_2 и b_3 очевидно, что если выполнено условие $\rho\Lambda\mu_0 > (\theta+\kappa)\mu_1\theta$, то $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ и $b_3 > 0$. Далее мы также видим, что неравенство

$$(\kappa\mu_1) > \rho\Lambda\mu_0 - \frac{\rho\Lambda\mu_0}{(\theta+\kappa)\mu_1\theta} = b_3 + \theta\mu_1\theta\mu_1 \quad \rho\Lambda\mu_0 \; b_1b_2 = (\mu_1 + \theta)$$

соответствует действительности. Поскольку все b_1, b_2 и b_3 положительны $b_1b_2 > b_3$, с помощью критерия Рауса–Гурвица заключаем, что остальные собственные значения имеют отрицательные действительные части. Следовательно, если $R_0^2 < 1$, ДФЭ E_0 локально асимптотически устойчиво, то в противном случае оно неустойчиво. □

Замечание 1. Напомним, что условие $\rho\Lambda\mu_0 > (\theta+\kappa)\mu_1\theta$ было наложено для обеспечения справедливости ДФЭ E_0.

Теорема 6. Если $R_0^1 > 1$, то эндемическое равновесие EE1 локально асимптотически устойчиво, в противном случае оно неустойчиво.

Machine Translated by Google

Доказательство. Оценивая матрицу Якобиана при эндемическом равновесии EE1, то есть при EE1 = ($\frac{A}{\alpha}$, 0, $\frac{\theta}{\alpha}$(P_0^1 − 1), 0) где A = β + γ + θ, получаем матрицу Якобиана

$$J(EE1) = \begin{pmatrix} 1 - \theta R_0^1 & \kappa & A\rho\frac{\alpha}{A} \\ 0 & -(\sigma + \frac{\theta}{\alpha}(P_0^1 - 1)) - \kappa & 0 \\ 1 - \theta R_0^1 & \sigma + \frac{\theta}{\alpha}(P_0^1 - 1) & -\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином

$$P(\lambda) = \det(J(EE1) - \lambda I)$$
$$= (-\sigma - \frac{\theta}{\alpha}(P_0^1 - 1)) - \lambda)[(-\mu_1 - \lambda)(\theta R_0^1 - \lambda - \lambda^2 + A\theta R_0^1)],$$

а собственные значения

$$\lambda_1 = -\sigma - \frac{\theta}{\alpha}(P_0^1 - 1)) < 0, \text{ если } R_0^1 > 1$$
$$\lambda_2 = -\mu_1 < 0$$
$$\lambda_3 = \frac{\theta R_0^1 - \sqrt{(\theta R_0^1)^2 - 4A\theta R_0^1}}{2}$$
$$\lambda_4 = \frac{1 - \theta R_0^1 + \sqrt{(\theta R_0^1)^2 - 4A\theta R_0^1}}{2}.$$

Из результатов, приведенных выше, видно, что собственные значения λ_3 и λ_4 всегда являются отрицательными действительными числами или имеют отрицательные действительные части, поскольку $\sqrt{(\theta R_0^1)^2 - 4A\theta R_0^1} < 1 - \theta R_0^1$. Следовательно, мы можем заключить, что если $R_0^1 > 1$, тогда эндемическое равновесие EE1 локально асимптотически устойчиво и неустойчиво, если $R_0^1 < 1$. □

Замечание 2. Заметим здесь, что аналогично теореме 6 можно установить, что если $R_0^2 > 1$, то эндемическое равновесие

$$EE2 = (S, \frac{A - \alpha S}{\sigma}, I, \frac{\mu_0}{(\mu_1 - \alpha)}\frac{A - \alpha S}{\sigma}),$$

где $S = \frac{(\theta+\kappa+\sigma)\mu_1}{\rho\mu_0}$, $I = (P_0^2 - 1)\frac{\theta A}{\sigma} A + \frac{\theta\alpha\mu_1}{\rho\mu_0}(\sigma + \alpha - 1)$, и $A = \beta + \gamma + \theta$ есть локально стабильный.

4. Результаты и обсуждение.

В этом разделе мы представляем численное моделирование модели при различных обстоятельствах с упором на население Соединенных Штатов. Мы моделируем количество инфекций для различных показателей, связанных с дезинформацией, а в некоторых случаях и для количества совокупных смертей. Значения параметров, используемые в моделировании, были выбраны на основе значений из опубликованной литературы по COVID-19 [20,24–26], где они были доступны, а другие значения параметров предполагались для изучения поведения модели. Начальные условия были выбраны так, чтобы отразить численность населения Соединенных Штатов, составляющую приблизительно 335 миллионов человек, путем установки $S(0) = 3{,}35 \times 10^8$. Учитывая, что истинная численность населения США оценивается в диапазоне от 331 до 341 миллиона человек, мы провели несколько симуляций с небольшими отклонениями в начальных условиях, и долгосрочное поведение предсказаний модели не изменилось.

В предыдущем разделе мы установили несколько качественных результатов, касающихся равновесий модели. Мы начнем с численного подтверждения этих результатов на рисунках 2–4.

Machine Translated by Google

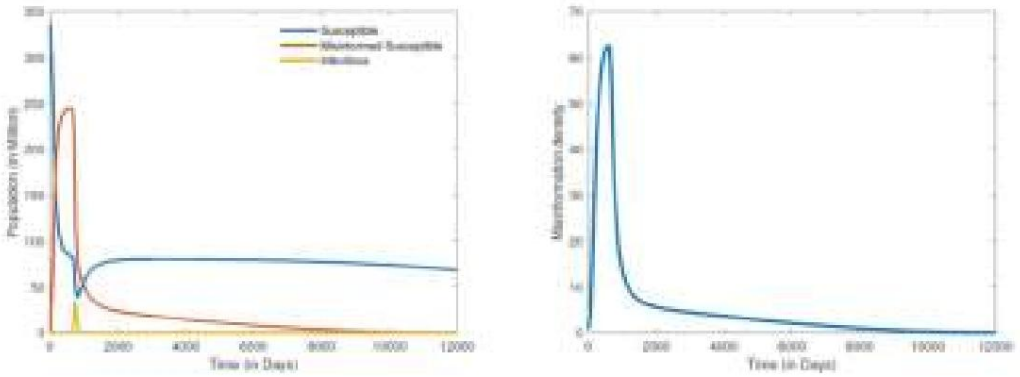


Рисунок 2. Численное моделирование первого ДФЭ: распределение популяций (слева) и плотность информации (справа) для значений параметров Λ = 0, α = 0,25 × 10 4 , β = 1/14, ρ = 0,1, κ = 20ρ , σ = 0,5 × 10 3 , γ = 10 4 θ = 4 × 10 5 , μ0 = 0,0025 и μ1 = 0,01.

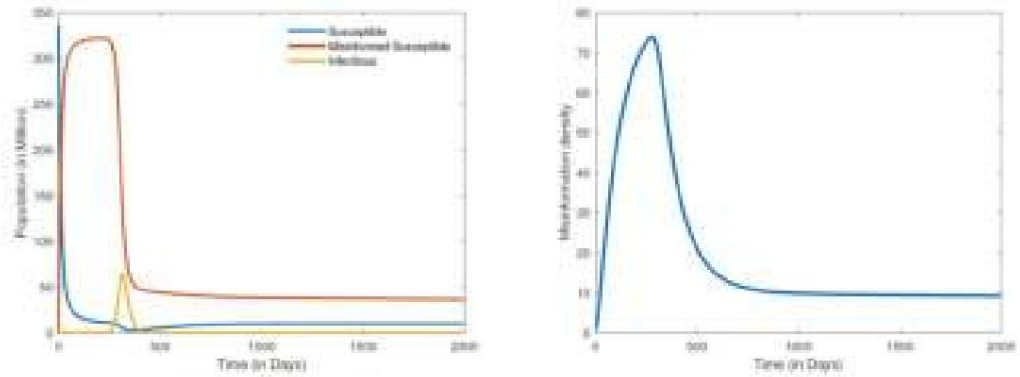


Рисунок 3. Численное моделирование второго ДФЭ: распределение популяций (слева) и плотность информации (справа) для значений параметров Λ = 0, α = 0,25 × 10 4 , β = 1/14, ρ = 0,1, κ = 2,5 ρ, σ = 0,5 × 10 3 , γ = 10 4 , θ = 4 × 10 5 , μ0 = 0,0025 и μ1 = 0,01.

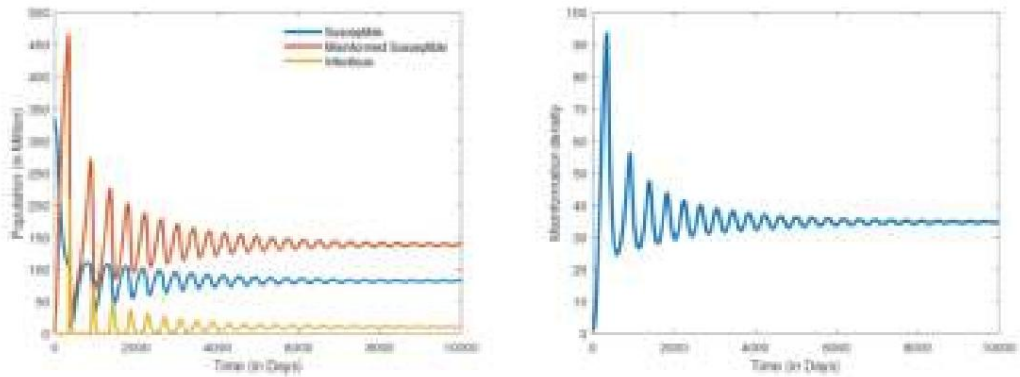


Рисунок 4. Численное моделирование устойчивого эндемического равновесия: распределение популяций (слева) и плотность информации (справа) для значений параметров Λ = 0,75, α = 0,25 × 10 4 , β = 1/14, ρ = 0,1, κ = 20ρ, σ = 0,5 × 10 3 , γ = 10 4 , θ = 4 × 10 5 μ0 = 0,0025 и μ1 = 0,01.

Результаты на рисунке 2 демонстрируют глобальную устойчивость первого DFE. Моделирование показывает, что болезнь, дезинформация и плотность дезинформации в конечном итоге вымирают с течением времени. Из этих результатов важно отметить, что, хотя COVID-19 может вымереть гораздо раньше, для искоренения как дезинформации, так и плотности дезинформации потребуется гораздо больше времени. Отметим здесь, что численные расчеты для первого DFE были получены путем установки коэффициента выздоровления де

Machine Translated by Google

примерно в 20 раз превышает скорость, с которой восприимчивые люди вводятся в заблуждение (ρ). Когда скорость выздоровления дезинформированных людей установлена примерно в два раза выше скорости, с которой восприимчивые люди впадают в заблуждение, мы получили моделирование, представленное на рисунке 3. Очевидно, что результаты на рисунке 3 демонстрируют второй DFE, который мы также установили в предыдущем разделе. Эти результаты показывают, что даже если COVID-19 полностью исчезнет, дезинформация об этом заболевании никогда не исчезнет. Теории заговора, такие как происхождение Covid-19, что болезнь является биологическим оружием, неправильные представления о вакцинах против Covid-19 и отрицатели Covid-19, вероятно, сохранятся еще долгое время, учитывая легкость и скорость, с которой в настоящее время распространяется дезинформация.

Результаты для равновесий без болезней, обсуждавшиеся выше, были получены в предположении закрытой популяции (Λ = 0), то есть в сообщество не входят новые особи. Это сценарий, при котором действует либо строгий карантин, либо ограничение передвижения. Это действительно имело место с ранними вариантами COVID-19 , когда города/страны могли сдерживать распространение болезни посредством строгих ограничений, однако дезинформацию сдержать не удалось. Смещая парадигму с закрытого населения на открытое, где существует свобода передвижения людей, входящих и выходящих из сообщества, динамика быстро смещается к моделированию эндемического равновесия. Результаты на рисунке 4 демонстрируют глобально стабильное эндемическое равновесие. Напомним, что установление коэффициента выздоровления (к) дезинформированных лиц примерно в 20 раз превышающего уровень дезинформации восприимчивых людей (ρ) привело к DFE. Однако для открытой популяции, где уровень пополнения Λ = 0,75 и к = 20ρ, мы получаем эндемическое равновесие. Рисунок 4. Дальнейшее увеличение скорости выздоровления дезинформированных людей, скажем, в 50 раз превышает скорость, с которой восприимчивые люди дезинформация, то есть к = 50ρ, приводит к бифуркации Хопфа, которая делает эндемическое равновесие нестабильным, как показано на рисунке 5. Стоит отметить, что бифуркация здесь преобразует устойчивое равновесие в нестабильное, содержащее очень большую амплитуду колебаний. Таким образом, на основании результатов, представленных на рисунках 4 и 5, мы можем сделать вывод, что недостаточно опровергнуть вводящую в заблуждение информацию путем проверки фактов средствами массовой информации. Опровержение, а также правильное информирование общественности о COVID-19 должно осуществляться одновременно.

Медиаграмотность также важна для борьбы с дезинформацией, связанной с COVID-19. Повышение медиаграмотности может помочь людям идентифицировать и отличать заслуживающие доверия источники информации от дезинформации. Образованная общественность, менее подверженная введению в заблуждение, приведет к лучшим результатам в искоренении COVID-19 или контроле распространения заболевания в эндемичном состоянии. Отметим здесь, что все симуляции, которые мы проводили для положительная скорость пополнения, то есть Λ > 0 (независимо от того, насколько мало значение Λ), привела к эндемическому равновесию. Как следствие, учитывая тот факт, что мы живем среди открытого населения со свободой передвижения, COVID-19 станет эндемичным.

Далее мы обращаем внимание на моделирование влияния, которое изменение уровня выздоровления дезинформированных лиц (к) окажет на количество случаев COVID-19 и совокупную смертность. Результаты по количеству случаев COVID-19 для закрытой популяции показаны на рисунке 6. Здесь мы наблюдаем, что увеличение скорости выздоровления дезинформированных (к) приводит к меньшему количеству случаев COVID-19. Чем больше скорость выздоровления (к), тем дальше требуется, чтобы число случаев достигло пика, а величина пика также меньше. Мы также отмечаем, что, поскольку достижение пика занимает больше времени, учитывая более высокий уровень выздоровления (к), появляется драгоценное время , которое чиновники общественного здравоохранения могут использовать для реализации других мер, чтобы еще больше снизить воздействие болезни на все население. Результаты на рисунке 7 показывают совокупную смертность от COVID-19 для различных дезинформированных показателей выздоровления для закрытой популяции. Из этих симуляций также очевидно, что более высокий уровень выздоровления к приведет к меньшему количеству совокупных смертей от COVID-19 . По данным ВОЗ [6], в период с 3 января 2020 года по 21 сентября 2023 года в США было зарегистрировано около 1 127 252 смертей от COVID-19 . В Соединенных Штатах уровень введения людей в заблуждение менее чем в пять раз выше . Учитывая, что дезинформированные люди способствуют росту дезинформации, уровень выздоровления введенных в заблуждение людей в США кажется не большим.

Machine Translated by Google

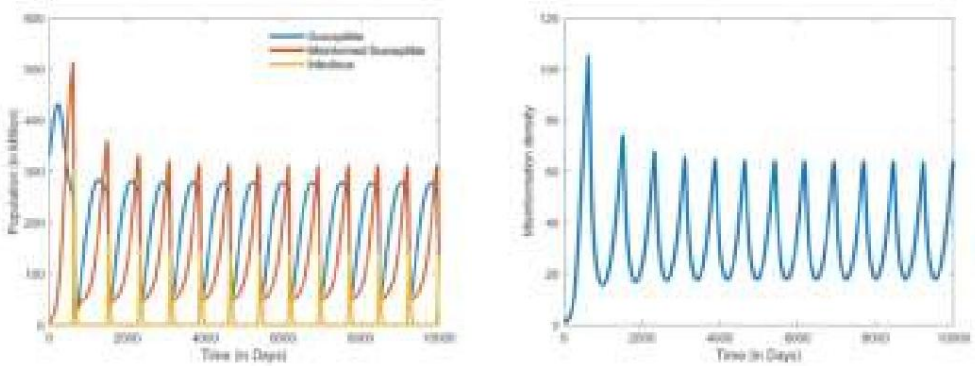


Рисунок 5. Численное моделирование нестабильного эндемического равновесия: распределение популяций (слева) и плотность информации (справа) для значений параметров Λ = 0,75, α = 0,25 × 10 4 , β = 1/14, ρ = 0,1, κ = 50ρ, σ = 0,5 × 10 3 , γ = 10 4 , θ = 4 × 10 5 μ0 = 0,0025 и μ1 = 0,01.

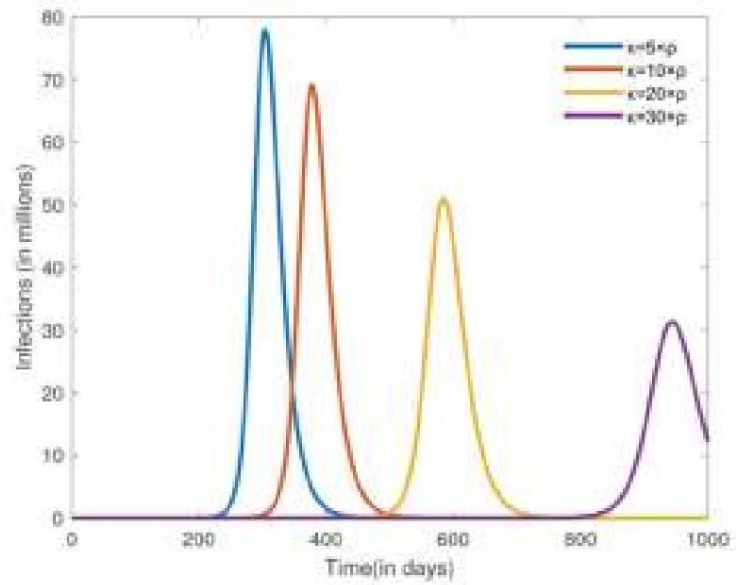


Рисунок 6. Численное моделирование количества инфекций для различных дезинформированных показателей выздоровления κ. Значения остальных параметров фиксированы: Λ = 0, α = 0,25 × 10 4 , β = 1/14, ρ = 0,1, σ = 0,5 × 10 3 γ = 10, θ = 4 × 10 5 μ0 = 0,0025 и μ1 = 0,01.

Наконец, мы рассматриваем влияние роста плотности дезинформации и темпов ее снижения на количество случаев COVID-19 , уделяя особое внимание закрытой популяции. Результаты на рисунке 8 относятся к разным скоростям роста μ0, а результаты на рисунке 9 — к различным скоростям затухания μ1. Из результатов на рисунке 8 мы ясно видим , что снижение темпов роста плотности дезинформации приводит к меньшему количеству случаев COVID-19. Действительно, поддержание низких темпов роста также приводит к меньшему пику заражения, который происходит в дальнейшем, что дает время, которое можно использовать для реализации других стратегий сдерживания и, следовательно, минимизации бремени болезни . Продвижение точной информации имеет важное значение для борьбы с дезинформацией, связанной с COVID-19. Должностные лица общественного здравоохранения и заслуживающие доверия источники информации должны предоставлять четкую и краткую информацию о вирусе и мерах общественного здравоохранения, в Позитивные сообщения замедляют темпы роста дезинформации. С другой стороны, увеличение скорости распада дезинформации также приводит к меньшему пику заражения, который происходит гораздо позже . Для борьбы с дезинформацией, связанной с COVID-19, могут быть внедрены механизмы проверки фактов . Платформы телевидения, радио и социальных сетей могут внедрять механизмы проверки фактов, чтобы отмечать и удалять дезинформацию, связанную с заболеванием.

Machine Translated by Google

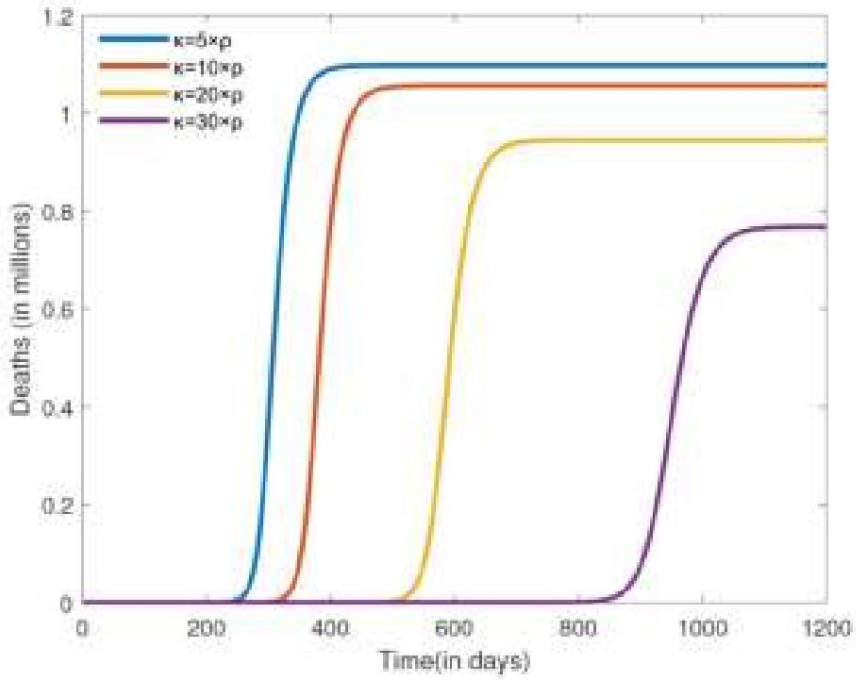


Рисунок 7. Численное моделирование совокупной смертности для различных показателей выздоровления κ. Другой параметр значения фиксируются при Λ = 0, α = 0,25 × 10 4, β = 1/14, ρ = 0,1, σ = 0,5 × 10 3 , γ = 10 4, θ = 4 × 10 5, μ0 = 0,0025 и μ1 = 0,01.

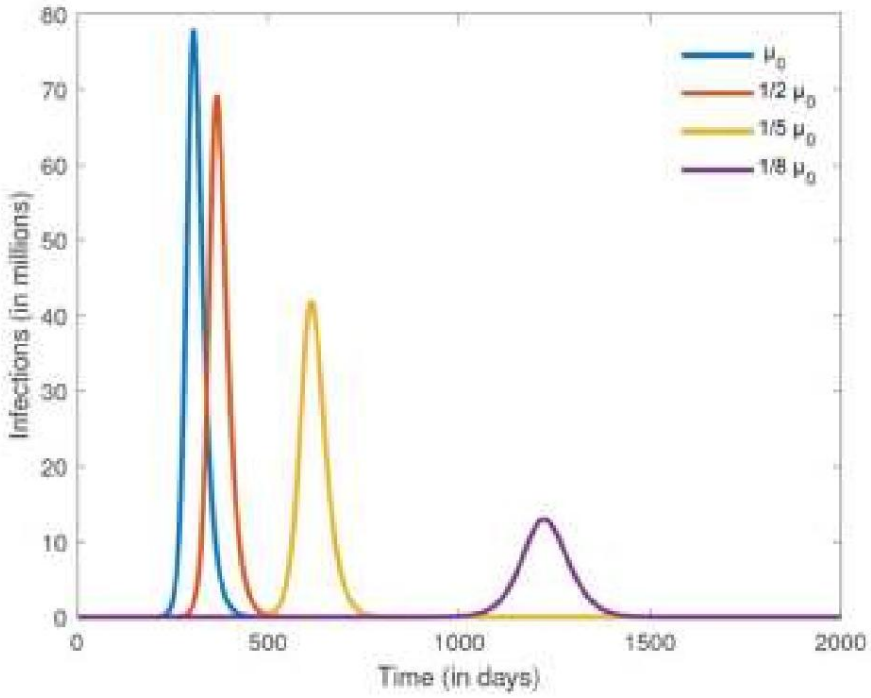


Рисунок 8. Численное моделирование количества заражений при разном росте дезинформации ставки μ0. Значения остальных параметров зафиксированы на уровне Λ = 0, α = 0,25 × 10 4., β = 1/14, ρ = 0,1, κ = 5ρ, σ = 0,5 × 10 3 , γ = 10 4, θ = 4 × 10 5, и μ1 = 0,01.

Machine Translated by Google

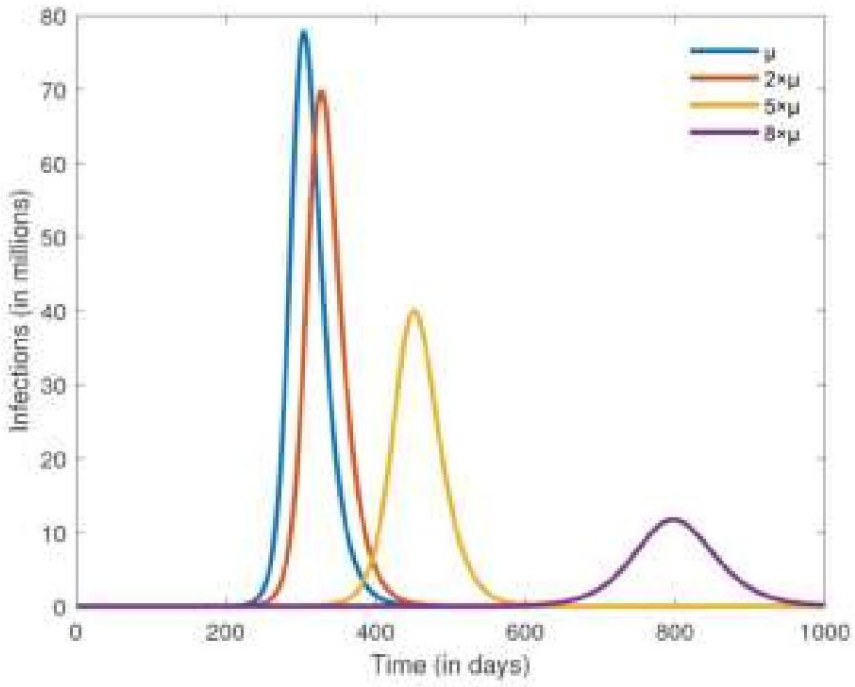


Рисунок 9. Численное моделирование количества заражений при различных скоростях затухания дезинформации μ1 = μ. Значения остальных параметров зафиксированы на уровне Λ = 0, α = 0,25 × 10 4., β = 1/14, ρ = 0,1, κ = 5ρ, σ = 0,5 × 10 3 , γ = 10 4, θ = 4 × 10 5 , и μ0 = 0,0025.

5. Выводы

Пандемия COVID-19 выдвинула проблему дезинформации на первый план. подчеркивая значительное влияние на здоровье населения. Дезинформация может подорвать усилия контролировать распространение вируса и, таким образом, привести к ряду негативных последствий, включая рост неуверенности в вакцинации, несоблюдение мер общественного здравоохранения и недоверие. чиновников здравоохранения. В этой статье мы сформулировали модель, которая отражает динамику передач и COVID-19 одновременно с распространением дезинформации в сообщество. Анализ модели показывает, что она имеет два состояния равновесия без болезней: одно содержит дезинформацию, а другое — нет. DFE без дезинформации номер воспроизводства R0 и является как локально, так и глобально стабильным, если R0 < 1. DFE содержащий дезинформацию, дает пороговый параметр, который делает равновесие стабильным. если значение параметра меньше единицы.

Факторы, способствующие распространению дезинформации, связанной с COVID-19, включают: быстрое распространение информации через социальные сети, эффект эхо-камеры и политизация пандемии. Когда модель применяется к населению Соединенных Штатов Моделирование кумулятивного числа смертей позволяет предположить, что Соединенные Штаты плохо справились с этой задачей. по борьбе с дезинформацией, связанной с COVID-19. Численное моделирование модели предполагают, что необходим многогранный подход для борьбы с распространением дезинформации и распространять точную информацию о пандемии. Стратегии борьбы с дезинформацией связанные с COVID-19, включают распространение точной информации, повышение медиаграмотности, и внедрение механизмов проверки фактов. Кроме того, моделирование модели прогнозирует что пока люди могут входить в сообщество и выходить из него, вирус COVID-19 будет остаются эндемичными в таком сообществе.

В заключение мы показали, что математическое моделирование может играть важную роль. в понимании распространения дезинформации, связанной с COVID-19, и разработке эффективных стратегий борьбы с дезинформацией. Борьба с дезинформацией о COVID-19 имеет важное значение для укрепления общественного здравоохранения и контроля распространения вируса. Кроме того, крайне важно устранить коренные причины распространения дезинформации, а также способствовать распространению достоверной информации, повышению медиаграмотности и внедрению механизмов проверки фак

Machine Translated by Google

Вклад автора: концептуализация, ZS и EA; методология, З С и Э А; программное обеспечение, З С и Э А; валидация, ZS и EA; формальный анализ, З С и Э А; расследование, З С и Э А; ресурсы, З С и Э А; курирование данных, ZS и EA; письменное – подготовка оригинального проекта, З С и Э А; написание-обзор и редактирование, З С и Э А; визуализация, ZS и EA; надзор, Э А; администрирование проекта, Э А; приобретение финансирования, EA. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: данные содержатся в статье.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Ссылки

1. Вступительное слово Генерального директора ВОЗ на брифинге для СМИ по COVID-19 — 11 марта 2020 г. Доступно онлайн: https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s- Вступительное слово на брифинге для СМИ по поводу COVID-19 --- 11 марта 2020 г. (по состоянию на 1 января 2023 г.).
2. Кучинотта, Д.; Ванелли, М. ВОЗ объявляет COVID-19 пандемией. Акта Биомед. 2020, 91, 157–160. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
3. Центры по контролю и профилактике заболеваний. Доступно онлайн: https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/science/science-трусы/sars-cov-2-transmission.html (по состоянию на 1 января 2023 г.).
4. Центры по контролю и профилактике заболеваний. Доступно онлайн: https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/symptoms-testing/.симптомы.html (по состоянию на 1 января 2023 г.).
5. да Роза Мескита, Р.; Франселино Силва Жуниор, LC; Сантос Сантана, FM; Фариас де Оливейра, Т.; Кампос Алькантара, Р.; Монтейру Арносо, Г.; Родригес да Силва Фильо, Э.; Галдино душ Сантос, АГ; Оливейра да Кунья, EJ; Салгейру де Акино, SH; и др. Клинические проявления COVID-19 у населения в целом: систематический обзор. Вена Клин Вохеншр. 2021, 133, 377–382. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
6. Всемирная организация здравоохранения. Панель мониторинга «Кто Коронавирус (COVID-19)». Доступно онлайн: https://covid19.who.int/. (доступ на 1 октября 2023 г.).
7. Суарес-Льедо, В.; Альварес-Гальвес, Дж. Распространенность дезинформации о здоровье в социальных сетях: систематический обзор. Дж Мед. Интернет Рез. 2021, 23, e17187. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
8. Грин, СМ; Мерфи, Дж. Количественная оценка влияния фейковых новостей на поведение: данные исследования дезинформации о COVID-19. Дж Эксп. Психол. Прил. Адв. Интернет-издание. 2021, 27, 773. [CrossRef]
9. Эгли, Дж; Сяо Ю. Дезинформация о COVID-19: данные о различных латентных профилях и сильной связи с доверием к науке. BMC Public Health 2021, 21, 89. [CrossRef]
10. Левовский С.; Джейкобс, П.; Нил, С. Гипотеза лабораторной утечки усложнила поиск истины у чёным. нау к. Являюсь. 2022, 326, 72–77.
11. Флаэрти, Э.; Шторм, Т.; Фаррис, Э. Заговор COVID-19 и 5G: ошибки пространственного анализа в эпоху демократизации данных. Соц. нау к. Мед. 2022, 293, 114546. [CrossRef] [ПабМед]
12. Литман Л.; Розен, З.; Хартман, Р.; Розенцвейг, К.; Вайнбергер-Литман, СЛ; Мосс, Э. Джей; Робинсон, Дж. Действительно ли люди пилотируют отбеливатель, чтобы предотвратить Covid-19? Руководство по защите данных опроса от проблемных респондентов. PLoS ONE 2023, 18, e0287837 [CrossRef] [ПабМед]
13. Коман, К.; Буларка, МС; Репанович, А.; Рогозеа, Л. Дезинформация о лекарствах во время пандемии COVID-19: взгляд медицинского персонала. PLoS ONE 2022, 17, e0276693. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
14. Харт, П.С.; Чинн, С.; Сорока, С. Политизация и поляризация в новостях о COVID-19. нау к. Коммун. 2020, 42, 679–697. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
15. Энсеринк, М.; Купершмидт, К. В связи с COVID-19 моделирование приобретает жизненно важное значение. Наука 2020, 367, 1414–1415. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
16. Муса С.; Кураши, С.; Чжао, С.; Юсуф, А.; Мустафа, Юта; Хе, Д. Математическое моделирование эпидемии COVID-19 с эффектом программы информирования. Заразить. Дис. Модель. 2021, 6, 448–460. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
17. Мур, С.; Хилл, EM; Тилдсли, MJ; Дайсон, Л.; Килинг, М.Дж. Вакцинация и нефармацевтические вмешательства при COVID-19: А исследование математического моделирования. Ланцет Инфект. Дис. 2021, 21, 793–802. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
18. Ахаия, Северная Каролина; Суббараджасетти, Южная Каролина; Шетти, RM R0 и Re о COVID-19: можем ли мы предсказать, когда произойдет вспышка пандемии Содержится? Индийский Дж Крит. Уход Мед. 2020, 24, 11:25–11:27. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
19. Оливарес А.; Стаффетти, Э. Количественная оценка неопределенности математической модели динамики передач и COVID-19 с учетом стратегии массовой вакцинации. Фракталы солитоны хаоса 2021, 146, 110895. [CrossRef] [ПабМед]
20. Чжу, М.; Агьюинги, Э. Моделирование прорывных инфекций COVID-19 среди вакцинированного населения. Wseas Транс. Сист. 2023, 22, 584–592. [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

21. Нгуен, В.К.; Эрнандес-Варгас, Э.А. Оценка параметров в математических моделях вирусных инфекций с использованием R. В вирусе гриппа. Методы молекулярной биологии, том 1836; Ямаути Ю, Ред.; Humana Press: НьюЙорк, штат НьюЙорк, США, 2018.

22. Даутель, К.; Адьинги, Э. Моделирование влияния образовательной кампании на динамику передачи Эболы. Ж Биол. Сист. 2020, 29, 1–23. [Перекрестная ссылка]

23. ЛаСаль Ж.П. Устойчивость динамических систем; СИАМ: Филадельфия, Пенсильвания, США, 1976 г.

24. Эйкенберри, КБ; Манкузо, М.; Ибои, Э.; Фан, Т.; Эйкенберри, К.; Куанг, Ю; Костелич, Э.; Гумель, А.Б. Маскировать или не маскировать: моделирование возможности использования масок для лица широкой общественностью для сдерживания пандемии COVID-19. Заразить. Дис. Модель. 2020, 5, 293–308. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

25. Тан, Б.; Брагацци, Нидерланды; Ли, К.; Тан, С.; Сяо, Ю; Ву Дж. Обновленная оценка риска передачи нового коронавируса (2019-nCoV). Заразить. Дис. Модель. 2020, 5, 248255.

26. Сюй, К.; Панг, Ю; Лю, З.; Шен, Дж; Ляо, М.; Ли, П. Взгляд на стохастическое моделирование COVID-19 с учетом эффектов различной передачи ставки: моделирование с использованием реальных статистических данных из Великобритании, Австралии, Испании и Индии. Физ. Скр. 2024, 99, 025218 [CrossRef]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Аппроксимация функции скачком.

Высокошумящий корпус

Кусай Музаффар [1,*], Давид Левин [2] и Майкл Верман [1]

[1] Кафедра компьютерных наук, Еврейский университет в Иерусалиме, Иерусалим 9190401, Израиль; michael.werman@mail.huji.ac.il

[2] Факультет прикладной математики Тель-Авивского университета, Тель-Авив 6997801, Израиль; levin@tauex.tau.ac.il

* Переписка: qusay.muzaffar@mail.huji.ac.il

Аннотация: В данной статье представлена новая сеть глубокого обучения, предназначенная для обнаружения интервалов скачкообразных разрывов в кусочно-гладких функциях с одной переменной по их зашумленным выборкам. Повышение точности оценок разрывов скачков можно использовать для нахождения более точной общей аппроксимации функции, поскольку традиционные методы аппроксимации часто дают значительные ошибки вблизи разрывов. Обнаружение интервалов разрывов относительно просто при работе с точными данными функции, поскольку конечные различия в данных могут служить индикаторами гладкости. Однако эти показатели гладкости становятся ненадежными при работе с сильно зашумленными данными. В этой статье мы предлагаем сеть глубокого обучения, позволяющую точно определить место скачка разрыва даже при наличии значительного шума.

Ключевые слова: теория приближений; глубокое обучение; кусочно-гладкая аппроксимация функций; очень зашумленные данные

MSC: 65Д15

check for updates

Цитирование: Музаффар, К.; Левин, Д.; Верман, М. Аппроксимация функции скачком – случай высокого шума. Прикладная математика 2024, 4, 561–569. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020030

Академический редактор: Клод Шафе

Поступила: 29 февраля 2024 г.
Пересмотрено: 2 апреля 2024 г.
Принято: 15 апреля 2024 г.
Опубликовано: 2 мая 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Скачки происходят, когда функция испытывает внезапное конечное изменение своего значения в определенной точке. Функции, содержащие скачкообразные разрывы, широко распространены в различных областях, включая физику, электротехнику, компьютерное зрение, геологию, биологию и другие прикладные области [1–3]. Следовательно, часто возникает задача аппроксимации этих функций по выборочным данным. Оценка местоположения разрыва имеет решающее значение, поскольку стандартные методы аппроксимации часто вносят значительные ошибки из-за потери регулярности вблизи скачкообразных разрывов.

В нескольких статьях исследовались алгоритмы аппроксимации кусочно-гладких одномерных функций с особым упором на обнаружение интервала разрывов, в том числе [4,5]. В более поздней статье [6] для аппроксимации функции использовалась функция разности данных, называемая сигнатурой. Однако вышеупомянутые методы не работают при работе с зашумленными данными.

Альтернативные алгоритмы, разработанные для зашумленных данных, были предложены и обсуждены в других статьях, таких как [7]. Однако эти методы основаны на предварительном знании функции, на поиске типа функции, называемой усредняющей функцией, и на параметрах регуляризации. Кроме того, не предоставляется никакой информации о количестве или типе аддитивного шума. В [8] представлен другой метод, основанный на численной второй производной, хотя и ограниченный выборками на равномерной сетке. Он требует знания верхней границы второй производной функции и ограничен шумом, составляющим менее шестой части длины скачка. В [9] описан третий метод с использованием сверток. Однако сравнительный анализ показывает меньший процент успеха по сравнению с предложенным методом.

Machine Translated by Google

Глубокое обучение — это методология машинного обучения, в которой искусственные нейронные сети с несколькими уровнями обработки используются для постепенного извлечения функций более высокого уровня из данных между входом и выходом. Модели глубокого обучения состоят из нескольких слоев нейронов, которые иерархически обрабатывают входные данные. Каждый уровень учится преобразовывать данные в более абстрактное представление, причем последний уровень обеспечивает выходные данные модели (например, классификацию, регрессию, генерацию). Процесс обучения включает итеративную настройку параметров нейронной сети (например, весов и смещений) с использованием алгоритмов оптимизации, таких как градиентный спуск [10].

Модели глубокого обучения можно обучать на больших наборах данных для автоматического изучения шаблонов и функций непосредственно из данных, что устраняет необходимость ручном проектировании функций. Эта способность изучать сложные представления на основе необработанных данных получила широкое признание в качестве предпочтительного подхода в различных приложениях, включая распознавание речи, визуальное распознавание объектов, обнаружение объектов, обработку естественного языка, открытие лекарств и геномику [11].

В этой статье мы предлагаем новую полностью сверточную нейронную сеть [10] для оценки положения скачка одномерной функции по набору зашумленных выборок. Впоследствии мы используем два кубических сплайна для аппроксимации функции: один для данных на левой стороне скачка, а другой - на правой стороне. Показано, что наш метод превосходит предыдущие методы, продемонстрированные в результате серии экспериментов.

2. Наш подход

В этом разделе мы представляем наш подход к аппроксимации места разрыва одномерной кусочно-гладкой функции f по выборке с аддитивным шумом $\{(x_i, f(x_i) + \omega_i)\}_{i=0}^{H}$, где

$$\omega_j \sim N(0, \sigma^2).$$

2.1. Модель

Наша модель глубокого обучения состоит в общей сложности из десяти сверточных слоев, как показано на рисунке 1. Путем экспериментов мы определили, что десятиуровневая модель обеспечивает наилучший баланс между простотой с точки зрения обучаемых функций и точностью вывода. Эти десять слоев состоят из одного входного слоя, одного выходного слоя и восьми промежуточных слоев. Каждый слой оснащен двумя операторами свертки, которые используют фильтры размером 3 и 5. Мы выбираем два разных размера фильтров, чтобы модель могла фиксировать поведение функции с помощью выборок двумя разными способами. Стоит отметить, что мы выбираем фильтры с нечетными номерами, чтобы размер вывода после операции свертки был таким же, как размер ввода после заполнения. Например, если у нас есть входные данные размера N, мы добавляем нули в начале и в конце входных данных, а затем применяем свертку с размером фильтра 3 и сохраняем исходный размер входных данных: что равно N. Если бы мы выбрали фильтр размером 2, то в этом случае выходной размер был бы N + 1. Сохранение размера входных данных помогает уловить детали модели. Выходные каналы этих двух операторов объединяются, как показано в уравнении (1). Начальный уровень принимает 8 входных каналов (уравнение (3)) и выводит 64 канала. Для i-го промежуточного слоя входные данные составляют 64 × i каналов, и он генерирует 64 канала. Выход i-го промежуточного слоя объединяется с его входными каналами и передается на (i + 1)-й уровень.

$$\boxed{}\ \boxed{v\ \ Cf5}\ \cdot \qquad (1)$$

$v\ \ Cf3$

Последний слой имеет входные данные из 64 каналов и выводит вектор вероятности.

$$v(x) = \begin{matrix} x, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{matrix} \qquad (2)$$

Machine Translated by Google

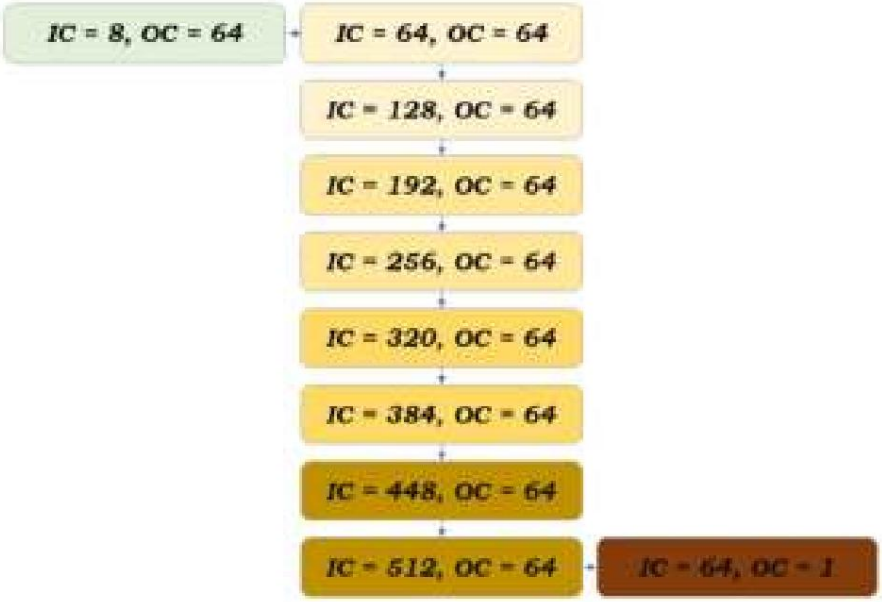
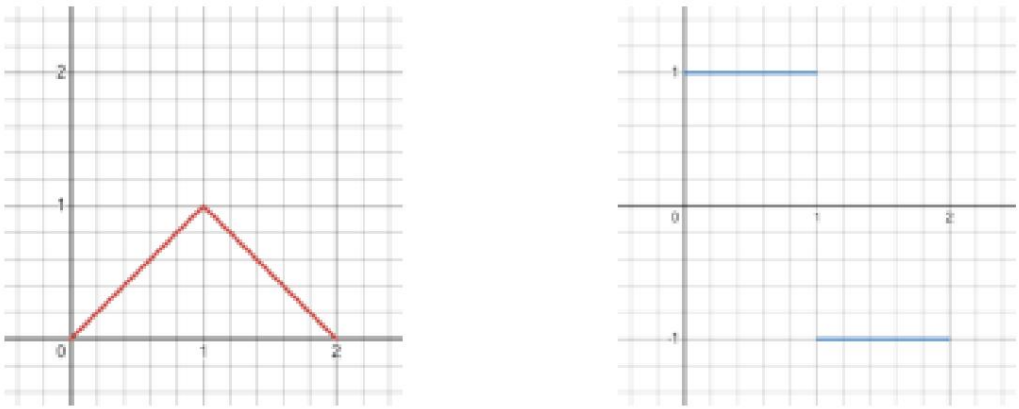


Рисунок 1. Архитектура модели. Каждый прямоугольник представляет слой, а два числа указывают количество входных и количество выходных каналов. В каждом слое есть две сверточные операции, как в уравнении (1). В промежуточных слоях каждый выход объединяется со входом того же слоя и передается на следующий уровень.

Функция активации, уравнение (2) (см. рисунок 2), применяется к выходным данным двух операторов свертки после их объединения перед передачей на следующий уровень.



(а) (б)

Рис. 2. График функции активации (а) и график ее производной (б).

Выборки x и y размера N + 1, где N произвольно, являются частью входных данных модели. Мы дополняем входные данные прямыми разностями первого, второго и третьего порядка, как представлено в уравнении (3).

$$(x, y) \quad x, y, \quad x, \quad y, \quad {}^{2}_{x}, \; {}^{2}_{y}, {}^{3}_{x}, \; {}^{3}_{y} \tag{3}$$

Выходные данные модели представляют собой вектор вероятностей длины N, где k-я запись — это вероятность того, что существует разрыв между k-м и k + 1-м образцом. Функция потерь — это перекрестная энтропия [10], поскольку проблема заключается в классификации.

$$L(x) = -\sum_{n=1}^{N}\sum_{c=1}^{C} \text{журнал} \frac{e^{x_{n,c}}}{\sum_{i=1}^{C} e^{x_{n,i}}} \tag{4}$$

Machine Translated by Google

Пусть M — модель, и пусть $p = M(x, y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_x^3, \sigma_y^3)$. Тогда $\tilde{i} = \arg\max\{p\}$ — индекс ближайшего образца к точке разрыва слева. Мы определяем

$$\tilde{\xi} = \frac{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}}{2} \tag{5}$$

как аппроксимированная точка разрыва.

2.2. Данные

обучения. В этом разделе мы описываем процесс создания синтетических данных для обучения модели, как на входе, так и на выходе. Напомним, что случайное число между a и b из равномерного распределения обозначается как

$$в \quad U[a, б]$$

Мы начинаем с генерации одномерных кусочных функций, каждая из которых содержит разрыв скачка, из которого мы случайным образом отбираем точки. Чтобы создать реалистичный сценарий, мы вводим в эти выборки белый шум и используем их в качестве входных данных. Выходные данные состоят из индекса ближайшей выборки слева от разрыва скачка. Позволять

$$т = \quad 3 \quad t + i \quad t \qquad \begin{matrix} T \\ я = 0 \end{matrix} \tag{6}$$

— множество узлов, где $t \quad U[\frac{3}{10}\frac{5}{10}, —]$ и $T = \quad _т^1 \quad +7$, значит узлов достаточно внутри и вне интервала, и пусть

$$г(x) = \begin{matrix} 1 & , x < 0 \\ 0 & , 0 \quad x \end{matrix}.$$

Теперь мы позволяем

$$f(x) = ag(x \quad \xi) + bxg(x \quad \xi) + \qquad \begin{matrix} T\text{-к-}1 \\ я = 0 \end{matrix} \quad ciBi,k,t(x). \tag{7}$$

Здесь $B_{i,k,t}$ — кубические базисные функции B-сплайнов ($k = 3$). Коэффициенты кубических B-сплайнов $\{ci\}_{я=0}^{T\text{-к-}3}$ выбираются случайным образом из равномерного распределения:

$$\{ци\}_{я=0}^{T\text{-к-}3} \qquad U[\quad 2, 2].$$

Аналогично подбираются коэффициенты a и b .

$$a, б \quad U \quad 2, \quad 10 \ \frac{4}{—} \qquad \frac{4}{2\,10,}$$

Наконец, расположение точки разрыва следующее:

$$\xi \qquad \frac{6}{H}, 1 — \frac{5}{H}$$

Входные данные состоят из точек, выбранных из функции f(x) вида, как в Уравнение (7):

$$S = (x_i, f(x_i) + \omega_i) \qquad \begin{matrix} H \\ i=0, \end{matrix} \tag{8}$$

где

$$\omega_i \quad U\,0, 3 \quad \frac{a}{—} \quad .$$

Machine Translated by Google

Здесь $\{\omega_i\}_{i=0}^{N-1}$ это аддитивный шум. Выходные данные представляют собой единичный вектор длины N, где 1 находится на образце шкафа слева от скачка. Мы обучаем модель с помощью алгоритма стохастического градиентного спуска ADAM [12].

2.3. Аппроксимация функции по ее выборкам

После определения интервала разрыва и аппроксимации местоположения точки разрыва мы используем две аппроксимации кубического сплайна для аппроксимации функции с ее скачкообразным разрывом. Мы используем аппроксимацию кубическими сплайнами, поскольку аппроксимация кубическими сплайнами выгодна из-за их гладкости, гибкости, точности, простоты реализации и численной стабильности. Эти свойства делают кубические сплайны универсальным и широко используемым инструментом для интерполяции данных, подбора кривых и моделирования в различных областях, включая математику, инженерное дело, компьютерную графику и научные вычисления. Сначала мы разделили данные на левые и правые группы следующим образом:

$$\begin{aligned} x_\ell &= x \text{ является компонентой } (x, y) \quad S : x < \tilde{\xi} \\ x_r &= x \text{ является компонентой } (x, y) \quad S : x > \tilde{\xi} \\ y_\ell &= y \text{ является компонентой } (x, y) \quad S : x < \tilde{\xi} \\ y_r &= y \text{ является компонентой } (x, y) \quad S : x > \tilde{\xi} \end{aligned} \tag{9}$$

где S определяется как в уравнении (8), а $\tilde{\xi}$ — из уравнения (5).

Затем, используя приближение наименьших квадратов, мы находим два кубических сплайна $\Gamma_\ell(x)$, которые аппроксимируют функцию с левой стороны скачка, используя данные x_ℓ и y_ℓ, а также второй $\Gamma_r(x)$, который аппроксимирует функцию с правой стороны скачка, используя данные x_r и y_r. Прежде чем продолжить, начнем с построения узлов для обоих сплайнов. Позволять

$$\ell = \frac{\tilde{\xi} - N}{5}^{1} \quad \text{и} \quad r = \frac{1 - \tilde{\xi} - N}{5}^{1},$$

и пусть $T_\ell = \ell + 7$ и $T_r = \ell$ правые приближения равны $_{p}^{1} + 7$. Затем два набора узлов слева и

$$t_\ell = -3 \ell + i \ell_{T_\ell - i=0} \quad \text{и} \quad t_r = 3 r + \xi + j r_{T_r - j=0}$$

Обозначим множество коэффициентов при $\Gamma_\ell(x)$ и $\Gamma_r(x)$ через c_ℓ и c_r соответственно. Чтобы найти оптимальные наборы коэффициентов c_ℓ и c_r, мы находим решение в замкнутой форме для следующего уравнения:

$$\arg\min_{\substack{c_\ell \in R^{T_\ell - 4} \\ c_r \in R^{T_r - 4}}} \left| \frac{M_\ell 0}{0 \; r\text{-}H} \right|_{\text{кр}}^{c_\ell} \Big|_{\text{год}}^{r_\ell}{}_{Л2}^{2} + \left| \frac{\lambda_\ell D_\ell \; 0 \; 0 \; \lambda_r D_r}{} \right|_{\text{кр}}^{c_\ell}{}_{Л2}^{2}.$$

Здесь матрицы $M_\ell \in R^{x_\ell \times c_\ell}$ и $M_r \in R^{x_r \times c_r}$ являются матрицами данных и определяются следующим образом:

$$M_\ell = \begin{matrix} \ddots & \vdots & \iddots \\ \dots B_{j,k=3,t_\ell}(x_{\ell,i}) & \cdots & , \; r\text{-}H = \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{matrix} \quad \begin{matrix} \ddots & \vdots & \iddots \\ \dots B_{j,k=3,t_r}(x_{r,i}) \dots \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Матрицы $D_\ell \in R^{c_\ell - 2 \times c_\ell}$ и $D_r \in R^{c_r - 2 \times c_r}$ являются матрицами второй разности. Эти матрицы используются в приведенном выше уравнении, так что оптимальным решением является решение с минимальной второй производной.

Machine Translated by Google

3. Численные результаты

В этом разделе мы иллюстрируем два аспекта нашего подхода: аппроксимацию местоположения скачка разрыва в заданной функции и аппроксимациюсамой функции. Кроме того, мыпровели статистическое тестирование, чтобыпоказать эффективность нашего метода по сравнениюс двумя альтернативными методами. Наконец, мыпровели еще один статистический тест, чтобы представить среднююошибку нашего окончательного приближения.

3.1. Обнаружение интервала разрыва и аппроксимация функции

В этом разделе мыпредставляем наш подход к аппроксимации точки разрыва случайно сгенерированной функции и последующей аппроксимации самой функции. Для этого мысгенерировали две функции вформате, описанном в уравнении (7).
Мывзяли 40 случайных выборок из [0, 1]. Затем эти образцыбыли подвергнуты добавлениюбелого шума с дисперсией, равной одной трети высотыпрыжка.

Далее мыиспользовали нашу модель для определения индекса ближайшего образца слева от разрыва. Впоследствии мыиспользовали процедуру, описанную в разделе 2.3 , для получения аппроксимации функции. Результатыэтих экспериментов представлены на рисунке 3.

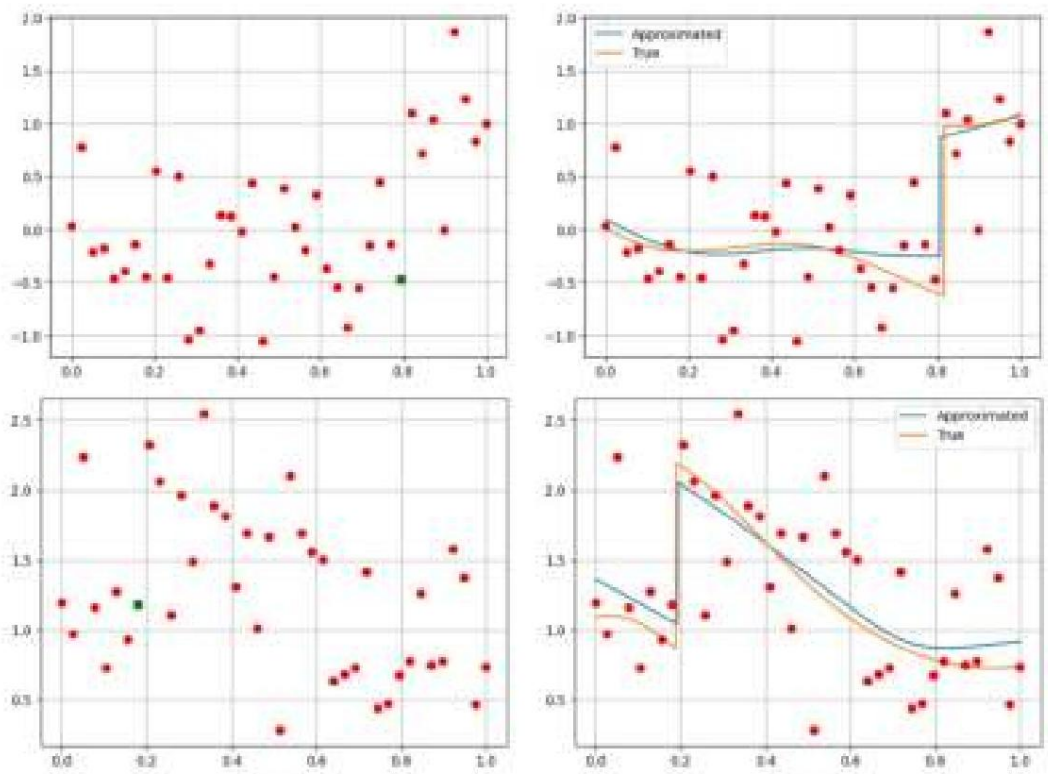


Рисунок 3. Мыдемонстрируем наш метод визуально, аппроксимируя положение точки разрыва двух одномерных кусочно-гладких функций по их выборкам, к которым был добавлен белый шум. На верхнем левом и нижнем левом рисунках показаны образцыс добавленным шумом. Все образцыокрашены в красный цвет, за исключением точки, обозначающей ближайший образец справа к разрыву скачка, которая окрашена в зеленый цвет. Наш подход нашел зеленую точку . На верхнем правом и нижнем правом рисунках показаны аппроксимации двух функций, которые были получены с использованием двух кубических сплайнов для каждой из функций.

3.2. Сравнение нашего подхода с двумя другими подходами

В [6] сигнатура g степени k равна ok (g) RN+k , что представляет собой прямую разность k-го порядка выборок g , дополненных k нулями с каждой стороны. В [9] был разработан метод, основанный на использовании функции фильтра, с помощьюкоторой вычисляется свертка для обнаружения точки разрыва. В этом эксперименте мысравниваем наш метод с

Machine Translated by Google

два других вышеупомянутых метода на большом количестве выборок с различным шумом уровни. Выборки взяты из одномерных кусочно-гладких функций с несколькими разрывы высоты прыжка. В таблицах 1–3 представлены результаты одного из подходов. Столбцы представляют высоту прыжка, а строки представляют собой отклонение аддитивный белый шум. Как показано в таблицах, наш подход дает увеличение между в два и десять раз по сравнению с другими методами.

Таблица 1. Вероятность обнаружения интервала расположения неспрерывности методом [6].
Столбцы и строки представляют высоту прыжка и уровень шума соответственно. Каждая ячейка содержит среднее значение успех 1000 испытаний.

	0,30	0,60	0,90	1.20	1,50	1,80	2.10	2.40
0,00	0,38	0,47	0,50	0,49	0,48	0,49	0,48	0,49
0,10	0,10	0,28	0,45	0,50	0,50	0,53	0,48	0,51
0,20		0,10	0,21	0,29	0,42	0,46	0,46	0,50
0,30			0,12	0,14	0,24	0,29	0,37	0,42
0,40				0,11	0,14	0,19	0,25	0,31
0,50					0,11	0,13	0,17	0,22
0,60						0,11	0,13	0,17
0,70							0,10	0,12
0,80								0,12

Таблица 2. Вероятность обнаружения интервала расположения неспрерывности методом [9].
Столбцы и строки представляют высоту прыжка и уровень шума соответственно. Каждая ячейка содержит среднее значение успех 1000 испытаний.

	0,30	0,60	0,90	1.20	1,50	1,80	2.10	2.40
0,00	0,24	0,24	0,28	0,24	0,26	0,25	0,24	0,23
0,10	0,30	0,27	0,25	0,25	0,27	0,24	0,25	0,27
0,20		0,30	0,26	0,28	0,24	0,25	0,28	0,25
0,30			0,33	0,28	0,29	0,26	0,28	0,28
0,40				0,34	0,30	0,30	0,26	0,30
0,50					0,34	0,32	0,30	0,28
0,60						0,32	0,29	0,33
0,70							0,34	0,31
0,80								0,33

Таблица 3. Вероятность обнаружения интервала расположения неспрерывности нашим методом.
Столбцы и строки представляют высоту прыжка и уровень шума соответственно. Каждая ячейка представляет собой среднее успех 1000 испытаний.

	0,30	0,60	0,90	1.20	1,50	1,80	2.10	2.40
0,00	0,89	0,99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0,10	0,53	0,93	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0,20		0,67	0,92	0,98	1.00	1.00	1.00	1.00
0,30			0,73	0,92	0,97	0,99	1.00	1.00
0,40				0,76	0,90	0,95	0,98	0,99
0,50					0,79	0,89	0,94	0,97
0,60						0,79	0,88	0,95
0,70							0,79	0,88
0,80								0,79

3.3. Измерение ошибок аппроксимации функций.

В этом эксперименте мы сравниваем наш подход с подходом использования сигнатуры [6] при аппроксимации одномерной кусочно-гладкой функции по ее зашумленным выборкам. Как и прежде, мы провели тестирование на многих образцах с различными уровнями шума. Мы измеряем погрешность аппроксимация с использованием метрики L_∞ на множестве $[0, \min(\xi, \tilde{\xi}) \cup \max(\xi, \tilde{\xi}), 1]$, где ξ и $\tilde{\xi}$ — действительная и аппроксимированная точки разрыва. Дополнительно мы измеряем

Machine Translated by Google

~ξ - ξ . Мы создали два графика на рисунках 4 и 5 для двух подходов и двух измерения. Ось X представляет дисперсию аддитивного белого шума, тогда как Ось Y представляет высоту прыжка. Каждая точка на графике представляет собой среднее значение ошибка 100 попыток. В первом тесте ошибка нашего подхода составила менее половины ошибки другого подхода, а во втором тесте ошибка нашего подхода была пятой.

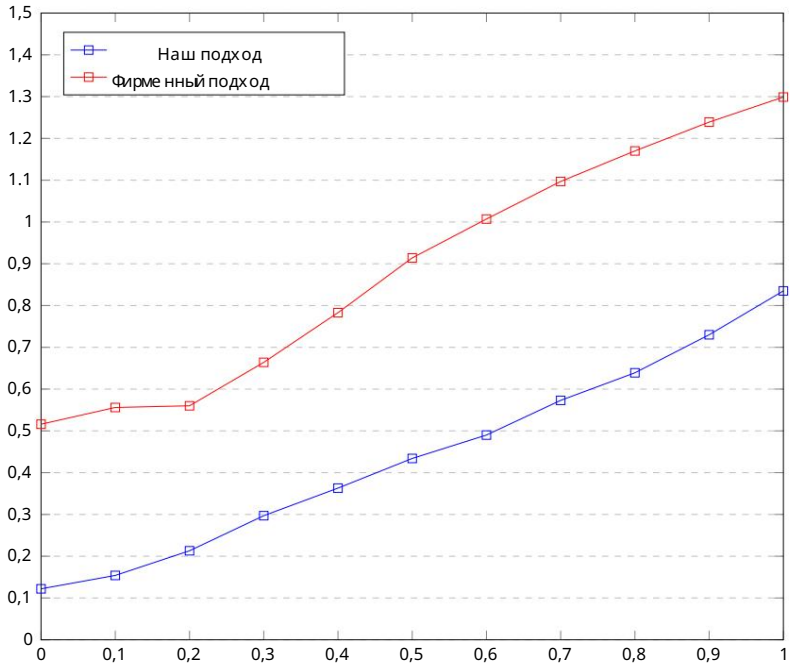


Рис. 4. На этом графике показана L -погрешность аппроксимации на множестве 0, min (ξ, ~ξ) макс (ξ, ~ξ), 1 , где ξ и ~ξ — действительная и аппроксимируемая точки разрыва. Здесь ξ и ~ξ — действительная и аппроксимированная точки разрыва.

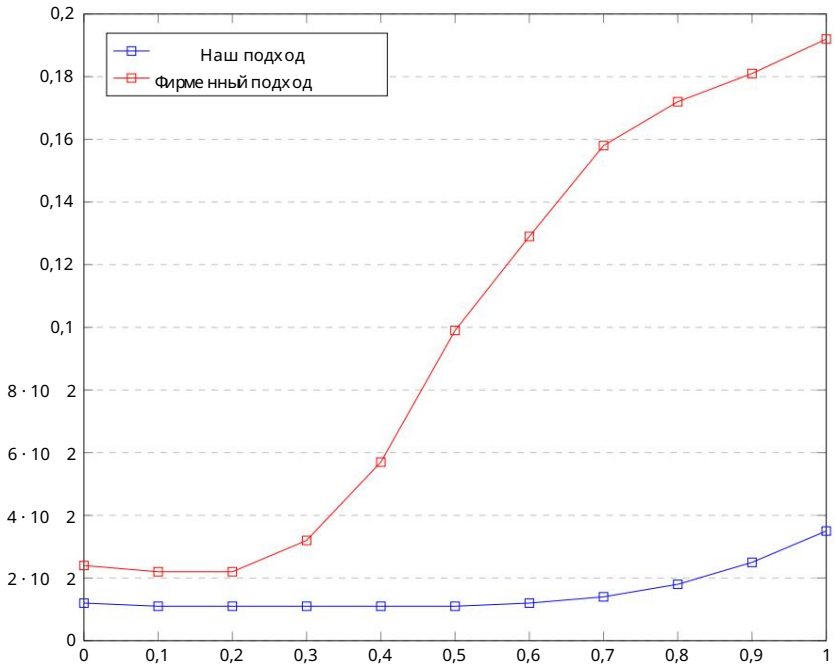


Рисунок 5. На этом графике показана ошибка ~ξ ξ . Здесь ξ и ~ξ — действительная и аппроксимируемая точка разрыва.

Machine Translated by Google

4. Выводы

Мы представили новый подход, основанный на глубоком обучении, для аппроксимации местоположения точки разрыва скачка по заданным выборкам с сильно аддитивным шумом одномерной кусочно-гладкой функции с разрывом скачка. Мы сравнили наш подход с двумя другими методами и продемонстрировали значительно более высокий уровень успеха нашего метода по сравнению с ними. Кроме того, мы продемонстрировали наш подход к аппроксимации местоположения разрыва в синтетических данных сгенерированных кусочно-гладких одномерных функций. Затем мы аппроксимировали эти функции и показали измерения погре
Наша будущая работа будет посвящена распространению этой работы на двумерные кусочно-гладкие функции, в которых скачок происходит не в одной точке, а на одномерной кривой. В случае, если двумерные данные расположены на одинаковом расстоянии вдоль оси Y, мы можем использовать этот подход для определения местоположения ближайших точек к одномерной кривой. Однако аппроксимация одномерной кривой не является интуитивно понятной и станет предметом будущих исследований.

Вклад авторов: Методология, управление качеством; расследование, CMK; письменное – подготовка первоначального проекта, MK; написание — обзор и редактирование, MW и QM; надзор, MW и DL. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Израильский научный фонд ISF.

Заявление о доступности данных: В настоящем документе не используются какие-либо конкретные данные.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Ссылки

1. Агеев А.Л.; Антонова Т.В. О новом классе некорректных задач. Изв. Урал. Гос. ун-ив. Мат. Мех. Информ. 2008, 58, 24–42.
2. Черепащук А.М.; Гончарский А.В.; Ягола, А.Г. Обратные задачи и астрофизики. В сб. «Некорректные задачи и естествознания»: Материалы международной конференции, проходившей в Москве 19–25 августа. 1991 год; Де Грюйтер: Берлин, Германия, 1992 г.; стр. 472–481.
3. Теребеж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач; Физматлит: Москва, Россия, 2005.
4. Арандига, Ф.; Донат, Р. Нелинейные многомасштабные разложения: подход А. Хартена. Число. Алгоритм 2000, 23, 175–216. [Перекрестная ссылка]
5. Шу, К.-В. Существенно неколебательные и весовые существенно неколебательные схемы для гиперболических законов сохранения. В расширенной числовой аппроксимации нелинейных гиперболических уравнений: лекции, прочитанные на 2-й сессии Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME), проходившей в Четраро, Италия, 23–28 июня. 1997 год; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 1998 г.; стр. 325–432.
6. Амат С.; Левин, Д.; Руис-Альварес, Дж.Дж.Э. тапная стратегия аппроксимации кусочно-гладких функций в двух и трех размерах. ИМА Дж. Нумер. Анальный. 2021, 42, 3330–3359. [Перекрестная ссылка]
7. Антонова, Т. В. Новые методы локализации разрывов зашумленной функции, Числ. Анальный. Прил. 2010, 3, 306–316.
8. Мбакоп Э. Реконструкция разрывов в зашумленных данных; Посетитель: Пенсильвания, США. Доступно онлайн: https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=0c1b69c38e1df16c7c939ad07705ee6bb53a6bd2 (по состоянию на 31 марта 2024 г.).
9. Ли Д. Обнаружение, классификация и измерение разрывов. СИАМ J. Sci. Стат. Вын числить. 1991, 12, 311–341. [Перекрестная ссылка]
10. Гудфеллоу И.; Бенджио, Ю.; Курвиль, А. Глубокое обучение; MIT Press: Кембридж, Массачусетс, США, 2016.
11. Ле Кун, Ю.; Бенджио, Ю.; Хинтон, Г. Глубокое обучение. Природа 2015, 521, 436–444. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
12. Кингма, ДП; Ба, Дж. Адам: Метод стохастической оптимизации. arXiv 2014, arXiv:1412.6980.
13. Чапра, Южная Каролина; Канале, Р.П. Численные методы для инженеров, 8-е изд.; McGraw-Hill Education: НьюЙорк, штат НьюЙорк, США, 2021 г.

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Квантовые смеси и потеря информации в системах многих тел

Диана Монтеолива [1], Анджело Пластино 2* и Анхель Рикардо Пластино 3

[1] UNLP-Comisión de Investigaciones Científicas, Провинция Буэнос-Айрес, Ла-Плата, 1900 год, Аргентина; monteoli@fisica.unlp.edu.ar
[2] Институт физики Ла-Платы– CCT-CONICET, Национальный университет Ла-Платы, CC 727, Ла-Плата 1900, Аргентина
[3] CeBio-Departamento de Ciencias Básicas, Национальный университет дель Нороэсте, Prov. де Буэнос-Айрес (ЮННОБА), КОНИСЕТ, Хунин, 1988 год, Аргентина; arplastino@unnoba.edu.ar
* Адрес для переписки: plastino@fisica.unlp.edu.ar.

Аннотация: В нашем исследовании мы исследуем явление потери информации, измеряемое расходимостью Кульбака–Лейблера, в многофермионной системе, такой как модель Липкина. Потеря информации происходит по мере увеличения числа N частиц, особенно когда система находится в смешанном состоянии. Мы обнаружили, что в этих условиях происходит значительная потеря информации. Однако мы наблюдаем, что эти потери практически исчезают, когда система находится в чистом состоянии. В нашем анализе используются инструменты теории информации для количественной оценки и понимания этих эффектов.

Ключевые слова: многофермионные системы; степень смешения; конечная температура; SU2 симметрия;

MSC: 81-82

1. Введение

В данной статье мы изучаем, используя инструменты теории информации, особенности квантовых смесей [1–5] в контексте точно решаемой модели N взаимодействующих фермионов массы m, называемой моделью Липкина. Наше внимание сосредоточено на потерях информации, измеряемых дивергенцией Кульбака-Лейблера (KL), которые происходят, когда N увеличивается по сравнению с предыдущим, более низким, эталонным фермионным номером №.

Ниже мы представляем основное содержание нашего исследования.
Модель Липкина [6–16] представляет собой хорошо известную модель N взаимодействующих фермионов массы m. Оно хорошо известно в ядерной физике и квантовых системах многих тел, особенно при изучении взаимодействия парных корреляций и квантовых фазовых переходов [6]. Использование инструментов теории информации для изучения корреляций между степенью квантовой смеси (QMx) и некоторыми характеристиками модели является интересным и действенным направлением исследований. Здесь мы уделяем особое внимание связи QMx с числом частиц N. Теория информации обеспечивает формализм для количественной оценки и понимания корреляций, энтропии и информационного содержания в физических системах. Ключевые понятия включают энтропию, взаимную информацию и условную энтропию. Эти инструменты можно применять для анализа взаимосвязей между различными параметрами в квантовой системе и дать представление о сложности, корреляциях и запутанности, присутствующих в системе. Такой междисциплинарный подход, объединяющий модель Липкина, теорию информации и квантовую статистическую механику, может обеспечить богатую основу для изучения сложных связей между характеристиками модели и специальными статистическими кванторами.

1.1. Квантовые смеси

В этом вкладе концепция квантовой смеси (QMx) [1–4] изучается с точки зрения взаимодействующих многофермионных систем. QMx важен в квантовой механике, поскольку он отражает присущую квантовым системам вероятностную природу и дает возможность описать их статистическое поведение. Квантовая механика принципиально отлич

check for updates

Цитирование: Монтеолива, Д; Пластино, А.; Пластино, АР Квантовые смеси и потеря информации в системах многих тел. Прикладная математика 2024, 4, 570–579. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020031

Поступила: 4 марта 2024 г.
Пересмотрено: 13 апреля 2024 г.
Принято: 20 апреля 2024 г.
Опубликовано: 2 мая 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария.
Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons
Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Machine Translated by Google

из классической механики, и одной из ее ключевых особенностей является существование состояний суперпозиции и связанной с ней концепции квантовой запутанности. Концепция квантовых смесей важна,

потому что [1–5]: • В квантовой механике системы могут существовать в нескольких состояниях одновременно – явление, известное как суперпозиция. Квантовая смесь представляет собой вероятностную комбинацию этих состояний и позволяет нам описать общее

- состояние системы, когда она не находится в чистом состоянии; Вероятностные предсказания: квантовая механика предсказывает результаты вероятностно. Состояние системы описывается волновой функцией, а вероятности различных исходов определяются квадратами величин амплитуд вероятности. Квантовая смесь воплощает эти вероятностные предсказания для сложных систем; • Измерение и наблюдаемые: когда измерение производится в квантовой системе, система обычно переходит в одно из возможных состояний, и результат измерения является вероятностным. Квантовые смеси позволяют выразить статистическое распределение результатов измерений ансамбля одинаково

подготовленных систем; • Квантовая теория информации: концепции квантовой смеси являются фундаментальными в квантовой теории информации, где изучаются

- манипуляции и передача квантовой информации. Понимание того, как смешанные состояния развиваются и взаимодействуют, имеет важное значение для разработки квантовых алгоритмов и протоколов квантовой связи; Статистическая механика: в контексте статистической механики квантовые смеси используются для описания статистических ансамблей квантовых систем. Например, большой

канонический ансамбль включает в себя смесь состояний с разным числом частиц; • Подводя итоги [1–5], концепция квантовой смеси является фундаментальным аспектом квантовой механики, который позволяет нам учитывать вероятностную и статистическую природу квантовых систем. Это важнейший инструмент для прогнозирования, понимания корреляций и ра

Приведенные выше соображения совершенно ясно показывают, что смешанные состояния играют решающую роль в квантовой механике и что их важность заключается в обеспечении более полного и реалистичного описания физических систем по сравнению с одними лишь чистыми состояниями. Как говорилось выше, смешанное состояние представляет собой статистический ансамбль чистых состояний. В этот ансамбль с определенными вероятностями могут входить различные чистые состояния. Математически смешанное состояние описывается матрицей плотности, которая представляет собой положительный полуопределенный эрмитовский оператор, действующий в гильбертовом пространстве. Смешанные состояния необходимы при работе со статистическими ансамблями, тепловым равновесием или открытыми квантовыми системами, которые подвержены взаимодействию с окружающей средой. Во многих практических ситуациях мы можем не иметь полных знаний о точном состоянии квантовой системы. Вместо этого мы могли бы иметь статистическую информацию о вероятностях различных чистых состояний, в которых может находиться система. Смешанные состояния обеспечивают естественный способ описания таких статистических ансамблей. В квантовой теории информации смешанные состояния играют центральную роль в характеристике производительности различных квантовых алгоритмов и протоколов квантовой связи. Действительно, следует подчеркнуть, что смешанные состояния имеют основополагающее значение для всесторонне го понимания квантовых систем, особенно при рассмотрении статистического характера измерений, тепловых эффектов и влияния взаимодействия с окружающей средой. Они обеспечивают мост между идеализированной концепцией чистых состояний и практическими аспектами реальных квантовых систем [1–5]. Наконец, для наших нынешних целей интересно отметить, что потеря квантовых характеристик поведения по мере того, как число частиц становится большим, является хорошо известным явлением [5]. Действительно, мы знаем, что когда число фермионов в коллективе становится очень большим, некоторые квантовые системы могут демонстрировать поведение, приближающееся к классическому поведению. Это часто называют принципом соответствия. Тогда статистическое поведение большого числа квантовых частиц может напоминать классическое поведение в ма

Machine Translated by Google

1.2. Характер наших результатов

Подчеркнем, что в настоящей статье все результаты точны. Мы используем легко разрешимую многофермионную модель, называемую моделью Липкина (ЛМ) [6] , которая имеет важное значение в области квантовой физики и физики конденсированного состояния [6–16]. Эта модель, хотя и упрощена, дает ценную информацию о поведении сложных квантовых систем и обеспечивает упрощенные условия, в которых фундаментальные квантовые принципы могут быть исследованы аналитически. Исследователи часто используют LM для разработки и тестирования новых теоретических основ, таких как методы многих тел и квантовая теория поля [6–16].

Мы будем использовать здесь очень низкие температуры. Это хорошо известный метод статистической механики, позволяющий аппроксимировать свойства основного состояния системы. Это приводит к созданию общего и мощного подхода в физике конденсированного состояния и квантовой механике. Этот подход использует связь между низкотемпературными свойствами и основным состоянием системы [15,16]. В качестве низких температур T применим значения, соответствующие обратной температуре $\beta = 20$ или 10, где $\beta = 1/kT$, а k — постоянная Больцмана.

1.3. Настоящая цель и организация

Наша цель — исследовать некоторые подсказки относительно прецедентных соображений в контексте знаменитой модели ядерной физики, называемой моделью Липкина [7]. Можно привести сотни соответствующих ссылок. Конечно, для такой задачи нет места . Мы ограничимся [6–16]. Модель предлагает нам чисто квантовую среду . Мы хотим исследовать те особенности модели, которые описывают квантовые смеси. Остальная часть статьи организована следующим образом. Мы начнем с раздела 2 с описания математики модели Липкина [6–16]. В разделе 3 приводятся материалы, относящиеся к дивергенции Кульбака–Лейблера , одному из двух основных информационных инструментов, которые мы используем здесь. Второй инструмент развивается в этой работе в контексте модели Липкина (она хорошо известна в других источниках), которая рассматривается в разделе 4, где мы показываем, что он представляет собой действительный квантор для оценки степени смешения. Наша основная тема, связанная с потерей информации, обсуждается в разделе 5 , а выводы сделаны в разделе 6.

2. Формализм Липкина [15,16]

Рассмотрим N взаимодействующих фермионов массы m и определим $\Omega = N/2$. Модель Липкина [6–16] состоит из $N = 2\Omega$ фермионов массы m , которые размещаются в двух различных одночастичных (sp) уровнях энергии, каждый из которых N-кратно вырождается. Эти два уровня разделяет энергетическая щель . Этот разрыв называется ϵ. Таким образом, мы сталкиваемся в общей сложности с 4-омными sp-микросостояниями, помеченными двумя квантовыми числами (обозначаемыми μ и p). Первое квантовое число μ достигает значений $\mu = -1$ (нижний уровень) и $\mu = +1$ (верхний уровень). Квантовое число p, называемое квазиспином, относится к 2N-кратному вырождению. Эту пару p, μ принято рассматривать как «узел». Этот узел может быть занят (фермионом) или пуст. Наборы Липкина [6]

$$H = 2Дж, \tag{1}$$

где J действует как своего рода угловой момент. Кроме того, Липкин [6] использует особые операторы типа углового момента, обозначаемые квазиспиновыми операторами, которые

$$Jz = \sum_{p,\mu} \mu C^{+}_{p,\mu} C_{p,\mu}, \tag{2}$$

$$Дж+ = \sum_{p} C^{+}_{p,+} C_{p,-}, \tag{3}$$

$$J_{-} = \sum_{p} C^{+}_{p,-} C_{p,+}, \tag{4}$$

Machine Translated by Google

вместе с оператором Казимира

$$\text{Дж}^2 = \text{Дж}_z^2 (J_+ J_- + J_- J_+). + 2 \tag{5}$$

Собственные значения J^2 принимают вид $J(J + 1)$, а гамильтониан Липкина принимает вид J образуют (v — константа связи) [6]

$$H = \epsilon J_z + \frac{в}{4}(\text{Дж}_+^2 + \text{Дж}_-^2). \tag{6}$$

Матрица нашего гамильтониана имеет вид [6]

$$\langle n'|HL|n\rangle = \begin{cases} \frac{H}{2}\,[n+1\quad Nn\quad \frac{N}{2}]^{2-n} + 2n\quad 1\,\omega\delta n', & n \\ \frac{в}{2}\sqrt{(N\quad n)(N\quad n+1)(n+1)n}\,\delta n', & n+2 \\ \frac{в}{2}\sqrt{(N\quad n')(N\quad n'+1)(n'+1)n'}\,\delta n', & n-2 \end{cases} \tag{7}$$

с $n = 0, 1, \ldots, N$ для $J = N/2$. Диагонализация (числовая) дает энергетические собственные значения $E_n(v, J)$.

2.1. Внешняя среда системы: каноническая ансамблевая тепловая ванна Гибба при температуре T

Предполагается, что наша структура Липкина взаимодействует с резервуаром тепла. Используя приведенные выше собственные значения [15,16], мы построим каноническую статистическую сумму ансамбля Z [15], из которой мы получаем все соответствующие квантовые температуры, которые возникают [15,16].

Мы построим Z, используя вероятности, входящие в Z [16]. Наши тепловые показатели и Z получаются из вероятностных распределений [16] $p_n(v, J, \beta)$. β — это, как мы видели выше, обратная температура. Соответствующие формулы можно найти в [16]. Если обозначить среднюю энергию U, энтропию S и свободную энергию F, получим [15,16]

$$p_n(v, J, \beta) = \frac{1}{Z(v, J, \beta)} e^{-\beta E_n(v,J)}, \tag{8}$$

$$Z(v, J, \beta) = \sum_{n=0}^{H} e^{-\beta E_n(v,J)}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} U(v, J, \beta) = \langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z(v, J, \beta)}{\partial \beta} \\ &= \sum_{n=0}^{H} E_n(v, J) P_n(v, J, \beta) \\ &= \frac{1}{Z(v, J, \beta)} \sum_{n=0}^{H} E_n(v, J) e^{-\beta E_n(v,J)}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$S(v, J, \beta) = \sum_{n=0}^{H} P_n(v, J, \beta) \ln[P_n(v, J, \beta)] \tag{11}$$

$$F(v, J, \beta) = U(v, J, \beta) \quad T S(v, J, \beta). \tag{12}$$

Эти тепловые кванторы дают гораздо больше информации, чем полученные с помощью квантовых кванторов нулевой температуры T [16]. Как указано выше, используя достаточно низкое T, наши индикаторы обеспечивают достаточно хорошее представление панорамы $T = 0$ [16]. Ниже мы часто принимаем $\beta = 10$ или даже меньше.

2.2. Степень смешения Липкина для квантового состояния ρ

Чистота и смешивание — основные понятия, которые играют важную роль в описании квантовых систем, подобных модели Липкина. Эти два понятия очень важны при анализе

Machine Translated by Google

квантовая информация, вычисления, запутанность и измерения. Понимание разницы между чистыми и смешанными состояниями требует понимания когерентности, суперпозиции и статистического поведения. Как известно, степень смешения Cf состояния ρ равна в терминах вероятностей pi [17]:

$$Cf = 1 \quad Tr\rho^{2} = 1 - \sum_{i} p_i^{2}, \tag{13}$$

где $Tr\rho^{2}$ — чистота Ру (заглавные буквы Р). Для чистого состояния Cf = 0 и Ру = 1. Cf является очень важным количественным показателем в этом исследовании. $Py = \sum_{n=0}^{H} (Pn(v, J, \beta))2$ и $Cf = S2 = 1 \quad P_{i}^{2}$.

Мы также повторяем, рискуя избыточностью, что для липкинского состояния при фиксированной температуре T используются для вероятностей и статистической суммы все важные величины

$$J, \beta) = \frac{1}{Z(v, J, \beta)} e \quad \beta En(v,J) Z(v, J, \beta) = pn(v, \sum_{n=0}^{H} e \quad \beta En(v,J) . \tag{14}$$

3. Дивергенция Кульбака–Лейблера (КЛ) [18]

Это важный инструмент теории информации. Дивергенция Кульбака – Лейблера (KL) количественно определяет различимость двух состояний. Для квантовых состояний КЛ-дивергенция может улавливать различия, связанные с интерференцией и запутанностью, предоставляя ценную информациюо свойствах квантовой системы. Приложения КЛ можно найти в квантовой теории информации, квантовых вычислениях и квантовой коммуникации, где понимание и количественная оценка дают меру разницы между двумя распределениями вероятностей. В классической теории информации расхождение KL между распределениями вероятностей P(x) и Q(x) определяется выражением:

$$DKL(P||Q) = \sum_{x} P(x)\log(P(x)/Q(x)). \tag{15}$$

Дивергенция KL количественно определяет, сколько информации теряется при использовании Q для аппроксимации P. Она неотрицательна и равна нулютогда и только тогда, когда два распределения одинаковы. В контексте квантовой механики концепция КЛ-дивергенции может быть расширена для сравнения двух квантовых состояний. Для двух квантовых состояний, описываемых операторами плотности ρ и σ, квантовая расходимость ФФКульбака–Лейблера определяется выражением

$$D(\rho||\sigma) = Tr(\rho\log(\rho) \quad \rho\log(\sigma)). \tag{16}$$

4. Новый квантово-термический индикатор для модели Липкина.

На первый взгляд это может показаться странным, но учтите количество (в единицах длины)

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m_{кБ}T}}, \tag{17}$$

называется тепловой длиной де Бройля. Конечно, в модели Липкина нет измерения длины, но наш сценарий содержит фермионы массы m (массы системы Nm) при температуре T, так что значение λ может быть вычислено, и мы должны показать его значимость для Модель Липкина, которую мы делаем ниже. Согласно соглашению де Бройля, очень маленькие λ должны указывать на классичность. Очевидно, что это происходит при высоких T и больших N, как указано в(17), как и следовало интуитивно ожидать.

Масса протона $m_p = 1{,}67262192 \times 10^{-27}$ кг. Радиус атома водорода r_H равен 10^{-10} м. Можно построить график зависимости λ от $N m_p$. Поскольку $\hbar = 6{,}582119569 \times 10^{-16}$ Дж, получаем

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{\text{депутат}}} \sqrt{\beta} = 0{,}0403419\, H \sqrt{\beta} = 1{,}0857 \times 1020\, H \sqrt{\frac{1}{HT}}\, pX, \tag{18}$$

где центр считает $k_B = 1$ и выражается в метрах, а последнее равенство выражается в единицах r_H и мы взяли $\beta = 1/k_BT$ с $k_B = 1{,}380648 \times 10^{-23}$ Дж/К.

Machine Translated by Google

4.1. Связь между λ и N

На рис. 1 изображена зависимость λ от числа фермионов N. Последнее, как и ожидалось, уменьшается с ростом N. Мы ожидаем такого поведения, поскольку хорошо известно, что классичность начинает проявляться при больших N [5].

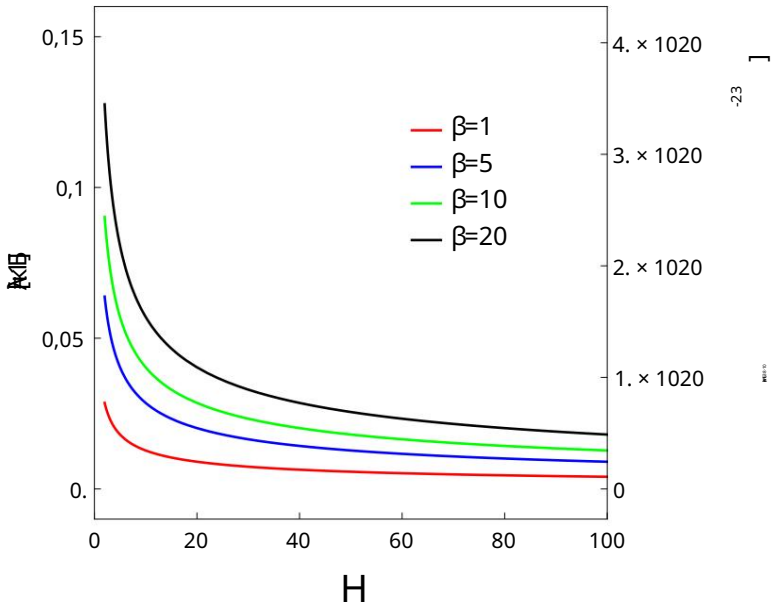


Рисунок 1. Квантор тепловой длины λ в зависимости от N для нескольких значений β = 1, 5, 10 и 20 (в метрах для левой вертикальной шкалы и в единицах радиуса атома водорода в правой вертикальной шкале), принимая kB = 1 (слева) и kB = 1,380648 × 10 23 (справа). Мы видим, что тепловая длина уменьшается с ростом числа фермионов в системе со скоростью, регулируемой температурой. Показатели увеличиваются по мере снижения температуры. Длина становится меньше по мере роста N, что можно рассматривать как пережиток классичности. Интуитивно следует ожидать, что эффекты более заметны при более низких температурах, чем при более высоких.

Повторим, что график ясно показывает, что наш квантор λ работает так, как и следовало ожидать. Действительно, как упоминалось выше, хорошо известное возникновение классичности по мере роста числа частиц N в системе является интересным аспектом квантовой физики [5]. В дальнейшем в данной работе мы НЕ встретимся с этим явлением.

4.2. Связь между чистотой, температурой и λ

На рисунке 2 представлена зависимость Py = 1 Cf от λ.

Мы видим, что, как и было обещано выше, тепловая длина демонстрирует ожидаемые свойства: она растет при большой чистоте и уменьшается при большой степени смешения. Таким образом, λ подтверждается как квантовый индикатор.

Ограничение, которое мы наблюдаем в модели Липкина, в которой степень квантового смешения не может превышать половины, вероятно, возникает из-за сочетания принципа Паули и особенностей вырожденных уровней в системе. Принцип Паули ограничивает заселенность узлов фермионами. Никакие два фермиона не могут одновременно занимать одно и то же место. В нашем случае в каждом квазиспиновом р-узле могут разместиться два фермиона (один со спином вверх, другой со спином вниз).

В модели Липкина на каждом уровне может находиться несколько фермионов. Однако максимальное число фермионов, которые могут занять соответствующие вырожденные уровни, составляет 2N. Это потому, что доступно 2N отдельных сайтов.

Когда система наполовину заполнена, как в данном случае, всего мы имеем N фермионов. Эта ситуация соответствует одному фермиону в каждом из дважды вырожденных р-спинов и представляет собой сценарий максимальной квантовой смеси.

Machine Translated by Google

Принцип исключения Паули по-прежнему применяется независимо к каждому спиновому состоянию, допуская максимум два фермиона (со спином вверх и вниз) в каждом вырожденном p-спине.

Таким образом, принцип исключения Паули в сочетании с вырождением уровней приводит к максимальной квантовой смеси, когда система наполовину заполнена N фермионами. Эта ситуация соответствует одному фермиону в каждом дважды вырожденном p -квазиспине, что приводит к состояниюмаксимальной суперпозиции. Конкретная структура модели Липкина, учитывающая квазиспиновое вырождение, определяет ограничения на заселенность и результирующую квантовую смесь.

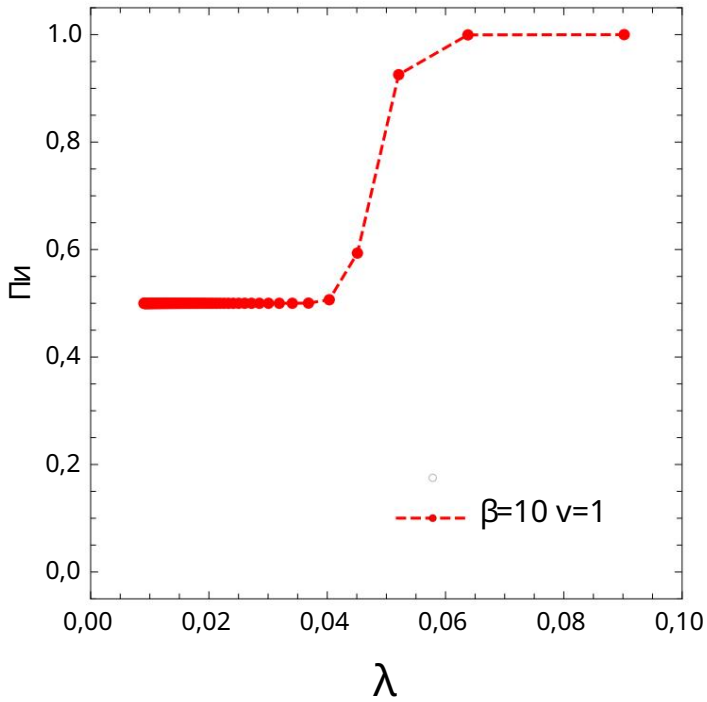


Рисунок 2. Зависимость частоты от тепловой длины волны де Бройля (в метрах) для β = 10, N = 20 и v = 1. Когда частота мала, длина волны также мала, и наоборот, когда частота приближается к единице. Обнаруживается минимальная частота, равная половине (см. текст).

5. Потеря информации и λ

5.1. Связь KL и потери информации

Мы переформулируем здесь наш материал Кульбака–Лейблера в терминах числа фермионов N, содержащихся в нашей системе Липкина. Расхождение Кульбака-Лейблера (КЛ) между двумя распределениями вероятностей P1 и P2, как мы видели, является мерой того, насколько одно распределение вероятностей отличается от другого. В частности, KL(P1||P2) количественно определяет потерюинформации, когда P2 используется для аппроксимации P1. Другими словами, расхождение KL измеряет ожидаемый дополнительный объем информации, необходимый для кодирования данных из P1 с использованием распределения вероятностей P2, то есть количественно определяет, сколько информации теряется, когда истинное распределение P1 аппроксимируется P2. В этой работе первое распределение будет описывать N-фермионную системуту, тогда как P2 делает то же самое для идентичной системы, но содержащей 2N частиц.

5.2. Степень потери информации при изменении N

Теперь мы решим вопрос, касающийся степени потери информации при изменении N, используя KL как меру того, насколько одно распределение вероятностей (PD) отличается от второго PD в контексте сравнения систем с различным числом частиц. Мы обнаружим, что расходимость КЛ уменьшается при сравнении системы с относительно малым числом частиц N с системой с большим N для квантовых смешанных систем. Эффект уменьшения резко

Machine Translated by Google

меньше, если системы находятся в чистом состоянии. Этот вопрос рассмотрен на рисунке 3, где λ (в метрах) соотносится с KL-расхождением между N и 2N фермионами (N = 100). Информация теряется при увеличении N, но это происходит совсем по-другому, если состояние смешанное или чистое.
Этот факт составляет основной вывод настоящей работы.

График показывает, что этот процесс потери происходит и при больших тепловых длинах, чем больше становится v. Главной особенностью здесь является то, что степень потери информации весьма велика при малых тепловых длинах. Мы утверждаем, что потери продолжают существовать на протяжении длительного времени. Мы не видим этого на нашем графике из соображений масштаба. Становится ясно, что чем выше чистота, тем меньше потери информации.

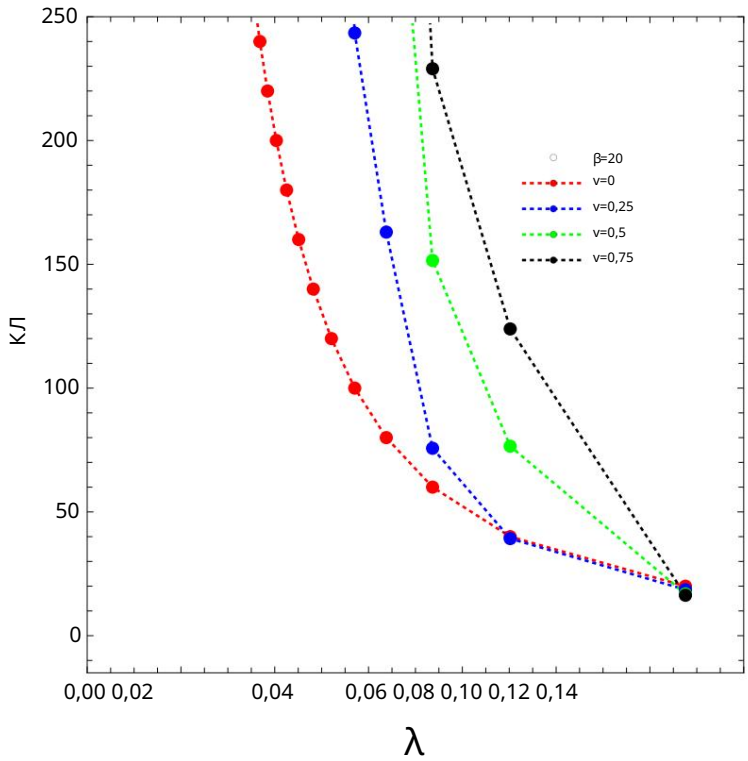


Рисунок 3. Зависимость KL от λ для нескольких значений v, полученная путем сравнения распределений вероятностей, относящихся к сценариям N и 2N. Эти значения KL измеряют наши потери информации. Возьмем β = 20. Когда мы достигнем λ 13 см, мы попадем в область чистого состояния нашего индикатора, как мы видели выше. В этом чистом режиме потери информации настолько малы, что их невозможно увидеть в выбранном нами вертикальном масштабе. Различия меньше, чем использованные там точки. Мы видим, что потеря информации при увеличении N для смешанных состояний намного больше, чем для чистых.

5.3. Возможные интерпретации В

квантовой механике запутанность — это уникальная особенность, которая может существовать в чистых состояниях. Когда система находится в чистом состоянии, запутанность между частицами может привести к более сложным и коррелированным распределениям вероятностей. Напротив, смешанные состояния возникают из ансамблей квантовых систем, потенциально с уменьшенной запутанностью. Наличие смешанных состояний может привести к более постепенному изменению распределения вероятностей с увеличением числа частиц, что приведет к меньшей расходимости KL.

Смешанные состояния можно рассматривать как статистические ансамбли чистых состояний. Сравнивая систему с малым числом частиц с системой с большим количеством частиц в сценарии со смешанным состоянием, вы фактически рассматриваете среднее значение для множества возможных чистых состояний внутри ансамбля. Такое усреднение может привести к более плавному и менее выраженному изменению распределения вероятностей, способствуя меньшему расхождению KL.

Квантовые смеси могут демонстрировать меньшие корреляции между частицами по сравнению с запутанными чистыми состояниями. С увеличением числа частиц статистическая независимость

Machine Translated by Google

Между частицами может стать более выраженным, что приведет к менее сложному и более предсказуемому распределению вероятностей.

Смешанные состояния часто имеют более высокую энтропию, чем чистые состояния. Увеличение энтропии может способствовать более равномерному и менее информативному распределению вероятностей, особенно при увеличении числа частиц. Это может привести к меньшему расхождению KL.

6. Выводы

Мы столкнулись с различными способами визуализации разницы между смешанными и чистыми состояниями, а также ввели новый квантор степени квантовой смеси, называемый λ, который можно представить как длину.

Для систем, рассматриваемых в этой работе, значения λ, превышающие ~12 см, указывают на чистоту, равную единице, тогда как меньшие значения указывают на увеличение степени смешивания состояний (см. Рисунок 3). Следует отметить, что, согласно уравнению (18), значения λ, меньшие, скажем, 0,001 мм, могут свидетельствовать о пережитках классического поведения. Таким образом, мы можем правильно назвать нашу λ псевдотепловой длиной, которая является полезным индикатором чистоты для модели Липкина. При высокой чистоте он дает большие значения, и наоборот, при большой степени смешения состояний.

Мы видели, что при конечной температуре T чистота системы P уменьшается быстрее. мод, когда степень фермион-фермионного взаимодействия v становится больше.

Мы обнаружили, что в модели Липкина при конечной температуре T рост N увеличивает степень смешения. Если увеличить N, информация, измеряемая расхождением KL, будет потеряна. Чем больше степень смешения, тем больше сопутствующая потеря информации. В случае чистых состояний (при нулевой температуре) потери становятся исчезающе малыми.

Вклад автора: расследование, DM, AP и ARP; Администрация проекта, АП; Написание — оригинальный черновик, DM, AP и ARP. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Это исследование было частично поддержано CONICET (Национальный совет по научным и техническим исследованиям Аргентины).

Заявление о доступности данных: Все данные содержатся в рукописи.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Ссылки

1. Бенгтссон И.; Зичковски, К. Геометрия квантовых состояний: введение в квантовую запутанность; Издательство Кембриджского университета: Кембридж, Массачусетс, США, 2006.
2. Джагер, Г. Квантовая информация: обзор; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 2007.
3. Джулини, Д.; Йоос, Э.; Кифер, К.; Купш, Дж; Стаматеску, И.-О.; Зе, Декогеренция HD и появление классического мира в квантовой теории; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 1996.
4. Факки, П.; Мариано, А.; Паскацио, С. Декогеренция в зависимости от энтропии в нейтронной интерферометрии. Физ. Ред. А 2001, 63, 052108. [Перекрестная ссылка]
5. Зурек, В.Х. Декогеренция и переход от квантового к классическому – новый взгляд. Физ. Сегодня 1991, 44, 1–31. [Перекрестная ссылка] 6. Липкин, НЈ; Мешков Н.; Глик, А.Дж. Применимость методов аппроксимации многих тел для разрешимой модели: (I) Точные решения и теория возмущений. Ну кл. Физ. 1965, 62, 188. [CrossRef]
7. Липкин, Х.Ю; Мешков Н.; Глик, А.Дж. Обоснованность методов аппроксимации многих тел для разрешимой модели: (II). Линеаризация процедуры. Ну кл. Физ. 1965, 62, 199. [CrossRef]
8. Липкин, Х.Ю; Мешков Н.; Глик, А.Дж. Обоснованность методов аппроксимации многих тел для разрешимой модели: (III). Точные решения и теория возмущений. Ну кл. Физ. 1965, 62, 188. [CrossRef]
9. Липкин, Х.Ю; Мешков Н.; Глик, А.Дж. Обоснованность методов аппроксимации многих тел для разрешимой модели: (IV). Деформированное решение Хартри-Фока. Ну кл. Физ. 1965, 62, 220. [CrossRef]
10. Роу, Д.Д. Модель Липкина. Пре подобный Мод. Физ. 1968, 40, 153. [CrossRef]
11. Шмид, К.В.; Бауэр, А. Модель Липкина. Физ. Республика 1982, 88, 251–334.
12. Исакер, П.В.; Хайнце, С. Модель Липкина: парадигма самосогласованной теории переходов формы. Физ. Респ. 1991, 199, 67.
13. Дукельский Дж; Питтель, С.; Сьерра, Г. Квантовые фазовые переходы в модели Липкина-Мешкова-Глика. Пре подобный Мод. Физ. 2004, 76, 643. [Перекрестная ссылка]
14. Ли Дж. Квантовый фазовый переход и фазовая диаграмма в модели Липкина-Мешкова-Глика. Физ. Ред. Б 2017, 95, 075139.

Machine Translated by Google

15. Пластино, Арканзас; Монтеолива, Д.; Пластино, А. Теоретико-информационные особенности многих фермионных систем: исследование, основанное на точно решаемые модели. Энтропия 2021, 23, 1488. [CrossRef] [ПабМед]
16. Монтеолива, Д.; Пластино, А.; Пластино, А.Р. Статистические квантификаторы разрешают споры в области ядерной теории. Q. Rep. 2022, 4, 127. [Перекрестная ссылка]
17. Кольцо, П.; Шак, П. Ядерная проблема многих тел; Шпрингер: Берлин/Гейдельберг, Германия, 1980.
18. Санчес-Морено, П.; Зарзо, А.; Дехеса, Дж С. Дивергенция Дженсена на основе информации Фишера. Дж Физ. Математика. Теор. 2012, 45, 125305. [Перекрестная ссылка]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

G-модифицированное уравнение Гельмгольца с новыми разложениями для Возмущающий гравитационный потенциал Земли, его функционал и исследование изогравитационных поверхностей

Герассимос Мануссакис

Кафедра математики, Школа прикладных математических и физических наук, Афинский национальный технический университет, Iroon Polytechneiou 9, 15780 Зографос, Греция; gmanous@math.ntua.gr

Аннотация: G-модифицированное уравнение Гельмгольца представляет собой уравнение в частных производных, которое позволяет выразить интенсивность гравитации g как серию сферических гармоник, имеющих радиальное расстояние r в иррациональных степенях. Уравнение Лапласа в трехмерном пространстве (в декартовых координатах представляет собой сумму частных производных второго порядка неизвестной величины, равных нулю) используется для выражения гравитационного потенциала Земли (возмущающего и нормального потенциала) с целью представления других полезные величины, известные также как функционалы возмущающего потенциала, такие как гравитационное возмущение , гравитационная аномалия и волнистость геоида как серия сферических гармоник. Мы демонстрируем, что с помощью G-модифицированного уравнения Гельмгольца не только интенсивность гравитации, но также возмущающий потенциал и его функционалы могут быть выражены как серия сферических гармоник. Представление интенсивности гравитации в виде серии сферических гармоник позволяет нам создавать новые модели глобальной гравитации . Кроме того, проводится более детальное исследование изогравитационной поверхности Земли.

Наконец, мы сводим наши результаты в таблицу, из которой становится ясно, что новые модели глобальной гравитации для силы тяжести g будут очень полезны для многих геофизических и геодезических приложений.

Ключевые слова: гравитация; гравитационная аномалия; гравитационное возмущение; вертикальный градиент силы тяжести; тревожный потенциал; сферические гармоники; изогравитационные поверхности

MSC: 35A09; 35C10; 35J25; 33C05; 33C75

check for updates

Образец цитирования: Мануссакис, Г. G-модифицированное уравнение Гельмгольца с новыми разложениями для возмущающего гравитационного потенциала Земли, его функционалови исследования изогравитационных поверхностей. Прикладная математика 2024, 4, 580–595. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020032

Академический редактор: Томас Вулли

Поступила: 7 марта 2024 г.

Пересмотрено: 24 апреля 2024 г.

Принято: 26 апреля 2024 г.

Опубликовано: 4 мая 2024 г.

Копирайт: © 2024 автора. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Введение

Сферические гармоники важны во многих теоретических и практических приложениях (электромагнитные поля, электронные конфигурации, гравитационные поля, геоиды, компьютерная графика, космическое микроволновое фоновое излучение и т. д.). Некоторые из этих приложений кратко упомянуты в данной работе . Сферические гармоники широко изучены и широко применимы благодаря своим многочисленным полезным свойствам. В компьютерной графике [1] они весьма полезны, поскольку имеют многие из тех же сильных сторон, что и вейвлеты Хаара, и существуют методы, которые устраняют разрыв между ними. Это позволяет отображать низкочастотные и высокочастотные функции. Кроме того, в [2–4] они используются при формировании реалистичной модели глобальной молнии.

Гравитационный потенциал — это величина, выраженная как серия сферических гармоник. Эта серия используется для формулирования моделей глобальной гравитации и моделей локальной гравитации. Модель глобальной гравитации [5], также называемая моделью глобального геопотенциала, служит математическим представлением внешнего гравитационного потенциала небесного тела. Здесь мы сосредоточимся на сценарии, в котором Земля является притягивающим телом. Использование моделей глобальной гравитации позволяет нам определить все связанные функционалы гравитационного поля, например векторы гравитации и гравитацию

Важно отметить, что эти модели [6–9] имеют решающее значение, поскольку они дают ценную информацию об особенностях Земли, включая волнистость геоида, гравитационные аномалии, гравитационные возмущения,

Machine Translated by Google

и вертикальное отклонение. Стоит отметить, что эти модели имеют широкое применение, включая определение орбиты, инерциальную навигацию самолетов и ракет, океанографические исследования циркуляции океана и геофизические исследования распределения плотности.

Векторное магнитное поле Земли [10] связано со скалярным геомагнитным потенциалом, который подчиняется уравнению Лапласа и может быть представлен в виде серии сферических гармоник. Приложения геомагнитного потенциала [11,12] невероятно обширны, они варьируются от изучения распространения гидромагнитных волн и ионосферных течений до исследования приливов, мониторинга изменений тропосферной погоды и исследования земной коры.

Интенсивность гравитации и электростатических сил можно математически выразить как серию сферических гармоник. Этот ряд возникает в результате решения G-модифицированного уравнения Гельмгольца. Интенсивность электростатики играет решающую роль в самых разных приложениях [13], начиная от тепло- и массопереноса и заканчивая синтезом наноматериалов и сокращением выбросов CO2. Кроме того, сфероиды [14–16] использовались для решения проблем электромагнитного рассеяния и анализа электростатических взаимодействий между сфероидальными частицами в различных сценариях. Интенсивность гравитации очень ценна в различных приложениях. Он играет решающую роль [17,18] в обнаружении сейсмических разломов, оценке простых сферических структур внутри Земли, определении геоида и квазигеоида (которые определяют физическую форму Земли и опорную поверхность физических высот), [19] анализе топография морской поверхности, понимание структуры литосферы, определение толщины плавучего льда и [20] даже обнаружение археологических структур во время исследований.

В этом исследовании мы представляем новый метод определения возмущающего потенциала, не зависящий от уравнения Лапласа. Выразив [21] гравитационную аномалию и гравитационное возмущение как серию сферических гармоник с помощью модифицированного уравнения Гельмгольца (с радиальным расстоянием r, возведенным в иррациональные степени), мы можем без особых усилий определить возмущающий потенциал с помощью простого уравнения в частных производных. Этот новый подход позволяет нам представить относительные величины, связанные с гравитационным потенциалом (т.е. его функционалы), в новом ряду сферических гармоник. Кроме того, выражая интенсивность гравитации как серию сферических гармоник, мы можем провести более тщательный анализ изогравитационных поверхностей. Важно подчеркнуть, что в этом контексте Земля рассматривается как невращающееся тело.

2. Уравнение Лапласа, возмущающий потенциал и относительные величины

В случае Земли возмущающий потенциал T [22] (который представляет собой разницу между действительным гравитационным потенциалом Земли W и нормальным потенциалом U, создаваемым подходящим эллипсоидом вращения) является решением уравнения Лапласа.

$$2T = 0 \tag{1}$$

Концепция возмущающего потенциала имеет важное значение, поскольку она жизненно важна для расчета волнистости геоида N, которая представляет собой расстояние между поверхностью геоида и поверхностью подходящего эллипсоида вращения. Кроме того, он играет решающую роль в определении других важных величин, таких как гравитационное возмущение δg, гравитационная аномалия g и отклонения вертикали. Существуют три классические задачи [5] для определения возмущающего потенциала T по граничным значениям на сфере: (а) задача Пуассона, (б) задача Хотина и (в) задача Стокса.

Первая задача — это задача Дирихле на сфере радиуса R, где значения T заданы на сфере. Вторая задача, как сферическое приближение, предполагает решение задачи Неймана. В этой задаче нам предоставляются значения гравитационного возмущения δg (представляющие собой радиальную производную возмущающего потенциала T). Третья задача (как сферическое приближение) представляет собой задачу Робина, в которой значения гравитационной аномалии g заданы на геоиде, удовлетворяющем следующему соотношению

$$\frac{T}{p} + \frac{2}{P}T = g \tag{2}$$

Machine Translated by Google

Вместо решения краевых задач для определения возмущающего потенциала T мы используем глобальные геопотенциальные модели (GGM). Глобальная геопотенциальная модель [5,23] представляет собой математическое выражение, которое позволяет рассчитать возмущающий потенциал посредством сферического гармонического расширения. Гармонический ряд GGM конечен и также представляет собой набор математических выражений, числовых значений и алгоритмов. С помощью этих инструментов пользователи могут легко выполнять вычисления для определения числовых значений величин, связанных с возмущающим потенциалом (таких как гравитационное возмущение и гравитацио Кроме того, эти вычисления позволяют оценить конкретные ошибки, связанные с этими величинами.

Приведем некоторые выражения конечных рядов [22–24] в сферических координатах (r, θ, λ) (θ отсчитывается от оси z, (нормированные коэффициенты).

$$T(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3)$$

$$\delta g(r,\theta,\lambda) = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{N_{max}} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda) \quad (4)$$

$$g(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{N_{max}} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda) \quad (5)$$

Волнистость геоида рассчитывается по формуле

$$N(\theta,\lambda) = \frac{1}{\gamma_{эллипсоид}(\theta,\lambda)} T(R,\theta,\lambda) \quad (6)$$

где γ — значение нормальной силы тяжести [22] на эллипсоиде, G — гравитационная постоянная и M — масса Земли. Составляющими отклонения вертикали [23] являются

$$\xi(r,\theta,\lambda) = -\frac{1}{r\gamma(r,\theta,\lambda)} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (7)$$

$$\eta(r,\theta,\lambda) = -\frac{1}{r\gamma(r,\theta,\lambda)\sin\theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)(\bar{P}_{nm+1}(\cos\theta) - m\tan\theta\cdot\bar{P}_{nm}(\cos\theta)) \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} m(\bar{C}_{nm}\sin m\lambda - \bar{S}_{nm}\cos m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (10)$$

В уравнениях (7) и (8) нормальная сила тяжести [22] определяется в подходящей точке, которая расположена на соответствующей эквипотенциальной поверхности нормального гравитационного поля. Возмущающий потенциал T — это величина, которую невозможно измерить напрямую. Поэтому для определения его значения необходимы другие измеримые величины. Однако в следующем параграфе мы продемонстрируем альтернативный метод определения T.

3. G-модифицированное уравнение Гельмгольца, возмущающий потенциал и относительные величины

Полагая, что гравитационное возмущение δg является непрерывной функцией на поверхности геоида, мы можем определить его, решив задачу Дирихле, включающую G-модифицированное уравнение Гельмгольца.

$$\begin{cases} \nabla^2(\delta g) - \frac{2}{r^2}\delta g = 0 \\ \delta g|_S = f1(\theta', \lambda) \end{cases} \quad (11)$$

Machine Translated by Google

Выражение гравитационного возмущения в сферических гармониках [21] выглядит следующим образом:

$$\delta g(r, \theta', \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}} \delta g_{nm}[a_{nm} P_{nm}(\sin\theta') \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\sin\theta') \sin m\lambda] \quad (12)$$

Согласно [22] на поверхности геоида, которая в сферическом приближении соответствует сфере радиуса R, можно получить

$$f1(\theta', \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{R}\right)^{\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}} [a_{nm} P_{nm}(\sin\theta') \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\sin\theta') \sin m\lambda] \quad (13)$$

положить

$$A_{nm}^{\delta r} = P - \frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \delta r_{nm} \quad (14)$$

$$B_{nm}^{\delta r} = P - \frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \delta g_{nm} \quad (15)$$

Ряд в уравнении (13) принимает вид

$$f1(\theta', \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} [A_{nm}^{\delta g} P_{nm}(\sin\theta') \cos m\lambda + B_{nm}^{\delta g} P_{nm}(\sin\theta') \sin m\lambda] \quad (16)$$

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f1(\theta', \lambda) P_{jk}(\sin\theta') \sin\theta' d\lambda d\theta' =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} [A_{nm}^{\delta g} P_{nm}(\sin\theta') \cos m\lambda + B_{nm}^{\delta g} P_{nm}(\sin\theta') \sin m\lambda] \cdot \quad (17)$$

$$\cdot P_{jk}(\sin\theta') \sin\theta' d\lambda d\theta'$$

а коэффициенты [22] ряда (17) равны

$$A_{n0}^{\delta r} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f1(\theta', \lambda) P_n(\sin\theta') \sin\theta' d\lambda d\theta' \quad (18)$$

$$A_{nm}^{\delta r} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f1(\theta', \lambda) P_{nm}(\sin\theta') \cos m\lambda \sin\theta' d\lambda d\theta', \quad m' = 0 \quad (19)$$

$$B_{nm}^{\delta r} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f1(\theta', \lambda) P_{nm}(\sin\theta') \sin m\lambda \sin\theta' d\lambda d\theta' \quad (20)$$

Следовательное выражение для гравитационного возмущения имеет вид

$$\delta g(r, \theta', \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{\frac{R}{r}}^{\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}} [A_{nm}^{\delta g} P_{nm}(\sin\theta') \cos m\lambda + B_{nm}^{\delta g} P_{nm}(\sin\theta') \sin m\lambda] \quad (21)$$

Аномалиюсилытяжести также можно идентифицировать с помощьюаналогичной задачи Дирихле, если известны значения аномалии силытяжести g на поверхности геоида.

$$\begin{aligned} &2(\quad g) \quad \frac{2}{R} 2 \quad g = 0 \\ &gS = f2(\theta', \lambda) \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение м гравитационной аномалии является

Machine Translated by Google

$$g(r,\theta',\lambda)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}}\left[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right] \tag{23}$$

Теперь мы готовы обнаружить тревожный потенциал. Функция T будет определяться получено [22] из следующего уравнения в частных производных:

$$\frac{T}{p}=\delta g$$

$$\frac{T}{p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}}\left[A_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+B_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right] \tag{24}$$

Решение этого уравнения в частных производных есть

$$T(r,\theta',\lambda)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2P}{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}{2}}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+B_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right]+f_{\delta g}(\theta',\lambda) \tag{25}$$

Функция $f_{\delta g}$ является произвольной функцией, но ее можно определить из следующего граничного условия [22]:

$$\delta g=-g+\frac{2}{P}T \tag{26}$$

Подставляя необходимые величины из уравнений (21), (23) и (25), имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+B_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right]+$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+B_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right]+ \tag{27}$$

$$+2R\,f_{\delta g}(\theta',\lambda)$$

Следовательно, функция $f_{\delta g}$ выражается как серия сферических гармоник.

$$f_{\delta g}(\theta',\lambda)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right] \tag{28}$$

Коэффициенты указанного ряда равны

$$A_{nm}=\frac{P}{2}\,\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}-5}{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}\,A_{nm}^{\delta g}-A_{nm}^{g} \tag{29}$$

$$B_{nm}=\frac{P}{2}\,\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}-5}{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}\,B_{nm}^{\delta g}-B_{nm}^{g} \tag{30}$$

Наконец, возмущающий потенциал T определяется как

$$T(r,\theta',\lambda)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2P}{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}{2}}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+B_{nm}^{\delta g}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right]+$$

$$+2\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{P}{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}\left(\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}-5}{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}A_{nm}^{\delta g}-A_{nm}^{g}\right)P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda+ \tag{31}$$

$$+\left(\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}-5}{\sqrt{9+4n(n+1)}-1}B_{nm}^{\delta g}-B_{nm}^{g}\right)P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda$$

Machine Translated by Google

Процедуру нахождения уравнения (31) можно назвать альтернативной гравиметрической
определение тревожного потенциала.

Выражение для возмущающего потенциала, заданное уравнением (31), можно заменить конечным рядом сферических гармоник, чтобы разработать новую глобальную геопотенциальную модель. Следуя геодезической терминологии, в этой модели возмущающий потенциал является функционалом гравитационных возмущений. При n = Nmax уравнение (31) становится конечным рядом и позволяет определить частные производные третьего порядка возмущающего потенциала в сферических координатах. Эти производные могут быть выражены в различных декартовых системах [25] и эффективно использоваться в различных геофизических исследованиях и изысканиях.

В уравнении (31) при r = R возмущающий потенциал определяется на поверхности геоид. Результат следующий:

$$T(R, \theta', \lambda) \quad T(\theta', \lambda) = \frac{P}{} \overset{\delta g}{[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda]} \overset{\delta g}{2} \; g \; g \tag{32}$$
$$[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda]$$

Приведенную выше формулу можно записать как

$$T(\theta', \lambda) = \frac{P}{2}[\delta g(\theta', \lambda) \qquad g(\theta', \lambda)] \tag{33}$$

Следовательно, на поверхности геоида возмущающий потенциал равен разнице между гравитационным возмущением и гравитационной аномалией, умноженной на R/2. Используя уравнение (6), волнистость геоида можно выразить в новой альтернативной форме.

$$N(\theta', \lambda) = [\delta g(\theta', \lambda) \qquad g(\theta', \lambda)] \frac{P}{2\gamma(\theta', \lambda)} \tag{34}$$

Уравнения (33) и (34) также отражают значимость гравитационного возмущения и гравитационной аномалии (определяемой измерениями). Интересный теоретический результат получается, если δg и g заменить равными им.

$$T(r, \theta', \lambda) = \frac{P}{2}[\gamma_{эллипсоид}(\theta', \lambda) \qquad \gamma_{geoid}(r, \theta', \lambda)] \tag{35}$$

$$N(r, \theta', \lambda) = \frac{P}{2} \frac{\gamma_{эллипсоид}(\theta', \lambda) \qquad \gamma_{geoid}(r, \theta', \lambda)}{\gamma_{эллипсоид}(\theta', \lambda)} \tag{36}$$

Следовательно, если известно значение нормальной силы тяжести у на поверхности геоида, то известны возмущающий потенциал (на этой поверхности) и волнистость геоида (опять же как серия сферических гармоник).

Интенсивность силы тяжести g представляет собой весьма значимую величину, которую можно выразить как ряд сферических гармоник.

$$g(r, \theta', \lambda) = \overset{+ \quad н}{\underset{п=0 \; м=0}{}} \frac{P}{p} \overset{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} [A \lceil_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B \quad \lceil_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda] \tag{37}$$

Эта формула гораздо более удобна, чем обычная формула.

$$g(r, \theta', \lambda) = \quad \text{grad}V_E \tag{38}$$

где V_E означает ньютоновский гравитационный потенциал Земли. Уравнение (33) также полезно для различных преобразований между различными типами высот, таких как ортометрическая коррекция высоты и динамическая коррекция.

Machine Translated by Google

В сферическом приближении вертикальный градиент силы тяжести равен радиальной производной силы тяжести; таким образом [22] (напомним, что мы имеем дело с невращающейся Землей),

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -2gJ \tag{39}$$

где J — средняя кривизна относительной эквипотенциальной поверхности.

$$\frac{r}{p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2p}\right)^{\frac{P}{p}} \frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2} \left[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda\right], \quad p > p \tag{40}$$

Объединив уравнения (39) и (40), мы можем определить среднюю кривизну эквипотенциальных поверхностей гравитационного поля Земли.

4. Исследование изогравитационной поверхности Земли.

Уравнение (37) позволяет исследовать изогравитационные поверхности гравитационного поля Земли. На этих поверхностях величина силы тяжести остается постоянной. Как указано в [26], изогравитационные поверхности очень напоминают сферы. Для проведения локализованного исследования изогравитационных поверхностей мы инициируем следующую трансформацию

$$\begin{aligned} X &= r\cos\theta'\cos\lambda \\ Y &= r\cos\theta'\sin\lambda \\ Z &= r\sin\theta' \end{aligned}, \quad \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta \tag{41}$$

Декартова система (X, Y, Z) [22] имеет центр в центре тяжести Земли, ось Z совпадает со средней осью вращения Земли, ось X находится на меридиональной плоскости Гринвича и направлена наружу, а ось Y делает систему правосторонней. Затем,

$$\frac{(X,Y,Z)}{(r,\theta',\lambda)} = \begin{vmatrix} \cos\theta'\cos\lambda & r\sin\theta'\cos\lambda & -r\cos\theta'\sin\lambda \\ \cos\theta'\sin\lambda & r\sin\theta'\sin\lambda & r\cos\theta'\cos\lambda \\ \sin\theta' & -r\cos\theta' & 0 \end{vmatrix} \tag{42}$$

Единичные нормальные векторы:

$$\bar{\varepsilon}1 = (\cos\theta'\cos\lambda, \cos\theta'\sin\lambda, \sin\theta') \tag{43}$$

$$\bar{\varepsilon}2 = (-\sin\theta'\cos\lambda, -\sin\theta'\sin\lambda, \cos\theta') \quad \varepsilon 3 = \tag{44}$$

$$\bar{(}-\sin\lambda, \cos\lambda, 0) \tag{45}$$

Пусть P — произвольная точка со сферическими координатами $(r_P, \theta_P', \lambda_P)$. Определим вторую декартову систему (x, y, z) такую, что ее центр находится в точке P, а ось z имеет то же направление, что и вектор $\varepsilon 1$ (уравнение (43)). Ось x касается меридиана сферы радиуса r_P и центра тяжести Земли и имеет то же направление, что и вектор $\varepsilon 2$. Ось Y делает систему правосторонней. Преобразование между (X, Y, Z) и (x, y, z) [27]:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin\theta'\cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\theta'\cos\lambda \\ -\sin\theta'\sin\lambda & \cos\lambda & \cos\theta'\sin\lambda \\ \cos\theta' & 0 & \sin\theta' \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + r_P \end{pmatrix} \tag{46}$$

Частные производные интенсивности гравитации первого и второго порядка, выраженные в системе (x, y, z) [27], задаются следующим образом:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial r}} \tag{47}$$

Machine Translated by Google

$$\frac{g}{y} = \frac{1}{\text{потому что } \theta' \quad \lambda} \frac{gr}{} \tag{48}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{r}{p} \tag{49}$$

$$\frac{2r}{x2} = \frac{1}{rr} \frac{r}{} + \frac{1}{p^2} \frac{2g}{\theta' 2} \tag{50}$$

$$\frac{}{2g \quad x \quad y} = \frac{1}{^2 \quad \theta' \quad \lambda \text{ потому что } \theta' r} \frac{2g}{} \quad \frac{\text{грех } \theta'}{p \quad g \, 2 \cos 2 \theta'} \frac{}{} \lambda \tag{51}$$

$$\frac{2r}{x \quad z} = \frac{1}{^2} \frac{g}{\theta' r} \quad - \frac{1}{r} \frac{g}{\theta' r} \tag{52}$$

$$\frac{2r}{y^2} = \frac{1}{rr} \frac{r}{} + \frac{1}{\text{крокодил } \theta' \quad \theta'} \frac{g}{} + 2 \frac{1}{p2g \, 2 \cos 2 \theta'} \frac{}{} \lambda 2 \tag{53}$$

$$\frac{2g}{y \quad z} = \frac{1}{^2 \quad \lambda \text{ потому что } \theta' r} \frac{g}{} \quad \frac{1}{\text{потому что } \theta' \quad r \quad \lambda} \frac{gr}{} \tag{54}$$

$$\frac{2r}{z2} = \frac{2r}{r2} \tag{55}$$

Выше упомянутые уравнения (от уравнения (47) до уравнения (55)) называются точкой P. Из -за ненулевой частной производной g по r, параметризация изогравитационной поверхности [21] для малого области вблизи точки P равна

$$\bar{s} : (\quad \varepsilon, \varepsilon) \times (\quad \varepsilon, \varepsilon) \quad \Re 3 : (x, y) \quad s(x, y) = (x, y, \bar{z}(x, y)) \tag{56}$$

Функция z неизвестна, но можно определить ее частные производные. Следовательно, координатные векторы равны

$$\frac{\bar{c}}{x} \quad x = 1, 0, \frac{}{} \quad g \quad x = 1, 0, \frac{}{\bar{z}} \tag{57}$$

$$\frac{\bar{c}}{} \quad z = 1, 0, \frac{}{} = 1, 0, \frac{\frac{r}{y}}{\frac{r}{z}} \tag{58}$$

Нормальный вектор

$$\overline{HK} = x \frac{\bar{c}}{} \times \frac{\bar{c}}{y} = \frac{\frac{r}{x}}{\frac{r}{z}}, \frac{\frac{r}{y}}{\frac{r}{z}}, 1 \tag{59}$$

Единичный вектор нормали

$$\overline{H} = \frac{r}{z} \frac{1}{\text{градг}} \overline{HK} \tag{60}$$

Фундаментальными элементами [21] первого рода являются

$$E = \frac{\frac{r}{x} \quad 2 + \frac{r}{z}^2}{\frac{r}{z}^2} \tag{61}$$

$$\Phi = \frac{\frac{g}{x} \frac{g}{y2}}{\frac{g}{z}} \tag{62}$$

Machine Translated by Google

$$\Gamma = \frac{\left(\frac{g}{y}\right)^2 + \left(\frac{r}{z}\right)^2}{\frac{r}{z}^2} \tag{63}$$

Основными элементами второго рода являются

$$L = N, \frac{c}{2} = x\,2\,\frac{r}{z}\,\frac{\left(\frac{2r}{x2}\right)\left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2\,\frac{g}{x}\,\frac{g}{z}\,gg + 2\,x\,z\,\left(\frac{2r}{z2}\right)\left(\frac{r}{x}\right)^2}{\left(\frac{r}{z}\right)^3\,\text{градг}} \tag{64}$$

$$M = N, \frac{c}{z^2 r\,x\,y} = \frac{2\,\frac{g}{x}\,\frac{g}{y}\,ggg\,z\,x\,z - \frac{2}{r\,x\,y}\left(\frac{r}{z}\right)^2 - \frac{2\,g\,gg}{z2\,x\,y}}{\left(\frac{r}{z}\right)^3\,\text{градг}} \tag{65}$$

$$N = N, \frac{c}{y^2} = \frac{r}{z}\,\frac{\left(\frac{2r}{y^2}\right)\left(\frac{r}{z}\right)^2 - y\,z\,\frac{2}{y\,z3}\,g\,gg + \left(\frac{2r}{z2}\right)\left(\frac{g}{y}\right)^2}{\left(\frac{r}{z}\right)^3\,\text{градг}} \tag{66}$$

Пусть P — точка, удаленная от Земли, т. е. rP принимает большое значение. Поскольку мы медленно приближаемся к Земле вдоль полярной оси r = rP, gx и gy становятся малыми величинами. Таким образом, уравнения (61) – (66) становятся

$$ЭП = 1 \tag{67}$$

$$ФП = 0 \tag{68}$$

$$ГП = 1 \tag{69}$$

$$ЛП = \left.\frac{\frac{2}{r}}{x\,2\,\text{gradg}}\right|_П = \left.\frac{\frac{2r}{x2}}{\frac{g}{z}}\right|_П = \frac{1}{РП}\,\frac{1}{p_П^2}\left.\frac{\frac{2r}{\theta'2}}{\frac{g}{r}}\right|_П \tag{70}$$

$$МП = \left.\frac{\frac{2}{r\,x\,y}}{\text{градг}}\right|_П = \left.\frac{\frac{2}{r\,x\,y}}{\frac{g}{z}}\right|_П = \frac{1}{p_П^2\,\text{потому что}\,\theta P'}\left.\frac{\frac{2}{r\,\theta'\,\lambda}}{\frac{r}{p}}\right|_П + \frac{\text{грех}\,\theta P'}{p_П^2\,g\cos 2\,\theta P'}\,\frac{\frac{r}{\lambda}}{rP} \tag{71}$$

$$НП = \left.\frac{\frac{2r}{2}}{y\,\text{gradg}}\right|_П = \left.\frac{\frac{2r}{y^2}}{\frac{g}{z}}\right|_П = \frac{1}{РП} + \frac{1}{p_П^2\,\text{детская кроватка}\,\theta P'}\,\frac{g}{\theta'\,g\,r_П} + \frac{1}{p_П^2\cos 2\,\theta P'}\,\frac{\frac{2}{r}}{\lambda 2\,g_П\,r} \tag{72}$$

В точке P главные кривизны k1 и k2 из гравитационной поверхности [28] являются корнями следующего уравнения:

$$\begin{matrix}(EG - F^2)P\,k^2 - (EN - 2FM + GL)P\,k + (LN - M2)P = 0\\ (L + N)P\,k + (LN - M2)P = 0\end{matrix} \tag{73}$$

Следовательно,

$$= \left.\frac{L + N + \sqrt{(L - N)\,k1^2 - 4M2}}{2}\right|_П \tag{74}$$

$$k2 = \left.\frac{L + N - \sqrt{(L - N)^2 - 4M2}}{2}\right|_П \tag{75}$$

Machine Translated by Google

Средняя и гауссова кривизны изогравитационной поверхности в точке P равны

$$Ч = \frac{Л + Н}{2}_{П} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-}\frac{1}{р_{П}^{2}}\frac{\frac{2г}{\theta'^{2}}}{\frac{g}{r}}_{П}\frac{1}{РП} + \frac{1}{р_{П}^{2}}\frac{\frac{g}{\theta'}}{g}_{детская\ кроватка\ \theta P'} + \frac{1}{р_{П}^{2}\cos 2\,\theta P'}\frac{\frac{2}{r}}{\frac{g}{\lambda^{2}}}_{g_{П}\,r}\right) \quad (76)$$

$$КГ = \frac{Л\,Н\text{-}М2}{Э\,Г\text{-}Ф2}_{П} = \frac{1}{1\,рП}\left(\frac{1}{р_{П}^{2}}\frac{\frac{2g}{\theta'^{2}}}{\frac{g}{r}}_{П}\frac{1}{1\,рП} + \frac{1}{р_{П}^{2}}\frac{\frac{g}{\theta'}}{g}_{детская\ кроватка\ \theta P'} + \frac{1}{р_{П}^{2}\cos 2\,\theta P'}\frac{\frac{2g}{\lambda^{2}}}{\frac{g}{r}}_{г\,п\,2}\right)_{П}$$
$$\frac{1}{р_{П}^{2}}\frac{\frac{2r}{\theta'\,\lambda}}{\frac{r}{р}}_{потому\ что\ \theta P'} + \frac{грех\,\theta P'\,2}{РП\cos 2\,\theta P'}\frac{\frac{g}{\lambda}}{g}_{П\quad г\,П} \quad (77)$$

Если точка P находится далеко от Земли, уравнения (76) и (77) примут вид

$$Н = рП\frac{1}{} \quad (78)$$

$$КГ = \frac{1}{р_{П}^{2}} \quad (79)$$

Следовательно, при больших значениях r изогравитационные поверхности представляют собой сферырадиуса rP.

При приближении к Земле вдоль полярной оси r = rP средняя кривизна определяется уравнением (76), а кривизна Гаусса получается из следующего соотношения:

$$К_{Г}^{г>} = \frac{1}{р_{П}^{2}} + \frac{1}{р_{П}^{3}}\left(\frac{1}{-}\frac{1}{детская\ кроватка\ \theta P'}\frac{\frac{g}{\theta'}}{g}_{г\,П}\frac{1}{\cos 2\,\theta P'}\frac{\frac{2}{r}}{\frac{g}{\lambda^{2}}}_{g_{П}\,r} + \frac{\frac{2г}{\theta'^{2}}}{\frac{g}{r}}_{П}\right) \quad (80)$$

Кривизна Гаусса в точке P характеризует форму изогравитационной поверхности вокруг этой точки. Второй член уравнения (80) описывает отклонение формы изогравитационной поверхности от сферы. По мере постепенного приближения точки P к Земле (с малым δr) изогравитационные поверхности образуют замкнутые поверхности с положительной гауссовой кривизно

В районе точки P форма изогравитационной поверхности представляет собой эллиптический параболоид.

На рисунке 1 показана форма изогравитационной поверхности вокруг точки P, которая представляет собой параболоид. Форма изогравитационных поверхностей усложняется, когда точка P приближается к Земле. Предполагая, что геоид представляет истинную форму Земли, пусть P будет точкой на геоиде, особенно на Северном полюсе (θ' = π/2). Изогравитационная поверхность, проходящая через точку P, не может пересекать геоид. Следовательно, обе поверхности касаются в точке P, т. е. имеют общую касательную плоскость. Вокруг точки P z - координаты соседних точек имеют положительный знак.

Пусть γ — кривая на изогравитационной поверхности, образованная пересечением изогравитационной поверхности и плоскости меридиана. Поскольку изогравитационные поверхности являются замкнутыми поверхностями, это означает, что по мере дальнейшего движения от точки P по кривой γ мы достигаем точки A, где кривизна Гаусса положительна, а соседние точки изогравитационной поверхности имеют отрицательные z-координаты. Следовательно, на кривой γ между точками P и A существует точка Q, в которой кривизна Гаусса равна нулю и z-координаты соседних точек также равны нулю Это означает, что точка Q является особой точкой, т. е. LQ = MQ = NQ = 0.

Изогравитационная поверхность, проходящая через точку P, пересекает плоскость экватора и лежит вне геоида, без особых точек. Множество точек, имеющих нулевую гауссову кривизну, определяется как особое кольцо изогравитационной поверхности. Вблизи поверхности геоида каждая изогравитационная поверхность имеет хотя бы одно особое кольцо.

На рис. 2 показано упрощенное представление особого кольца. Когда точка P перемещается вдоль оси z, rP увеличивается. Мы продемонстрировали, что при достижении больших значений полярного расстояния r изогравитационные поверхности становятся сферами. Это указывает на то, что кривизна Гаусса в точке P приближается к нулю. Одновременно с этим отдельные кольца медленно сжимаются.

Machine Translated by Google

они достигают критической точки, когда кривизна Гаусса в точке P становится нулевой. Точка P представляет собой расположение особого кольца на этой поверхности. Если rP превысит критическое значение, изогравитационные поверхности будут иметь положительную кривизну Гаусса повсюду, что приведет к отсутствиюособых колец. Наконец, когда rP принимает большие значения, изогравитационные поверхности становятся сферами с радиусом rP.

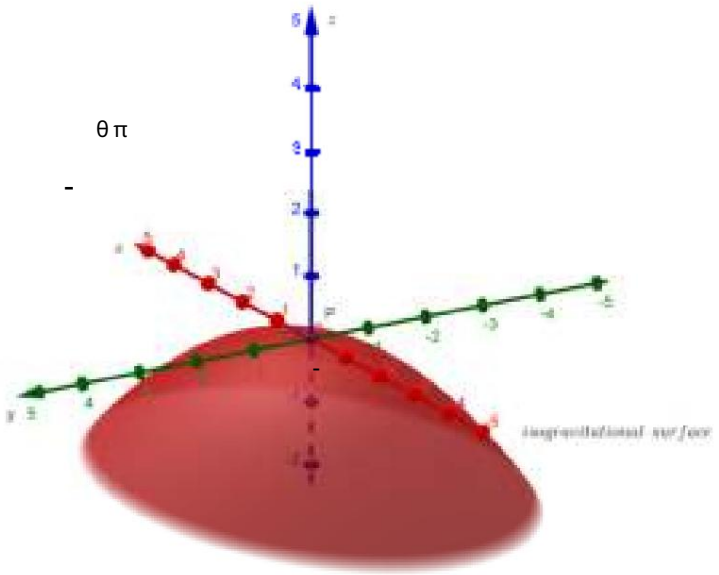


Рисунок 1. Изогравитационная поверхность.

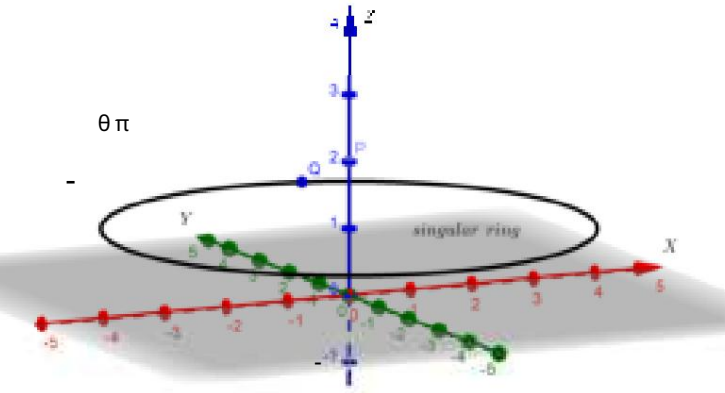


Рисунок 2. Особое кольцо.

На рис. 3 показано упрощенное изображение семейства особых колец.

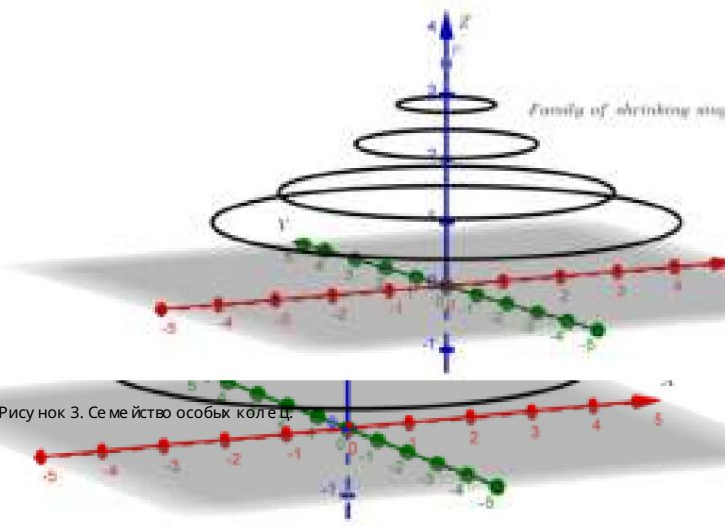


Рисунок 3. Семейство особых колец.

Machine Translated by Google

5. Возмущающие изогравитационные поверхности, аномалистические изогравитационные поверхности и Сравнение двух методов определения возмущающего потенциала

Возмущающая изогравитационная поверхность характеризуется постоянным значением силы тяжести возмущение δg. Аналогично аномалистическая изогравитационная поверхность характеризуется постоянным значением гравитационной аномалии g. Это локальное исследование похоже на исследование изогравитации. поверхности, где средняя и гауссова кривизны определяются уравнениями (76) и (77), соответственно, с заменой g на δg (или g).

В таблице ниже мы представляем краткое изложение результатов разделов 3 и 4. в первом столбце перечислены гравитационные величины, а во втором столбце указано, есть ли каждая величина выражается как серия сферических гармоник, определяемых уравнением Лапласа. уравнение. Мы используем «да», чтобы указать, когда количество явно выражено как таковое и «нет», когда это не так. В третьем столбце выбирается «да», если указано количество. как ряд сферических гармоник, полученных из G-модифицированного уравнения Гельмгольца. термин «прямой» используется для описания величины, которая удовлетворяет выбранному частному дифференциалу. уравнение и остается либо измеримым, либо постоянным на границе. И наоборот, мы используйте термин «косвенный», когда условия, упомянутые выше, не выполняются. Кроме того, символы «Ve» и «VE» обозначают ньютоновскую гравитационную силу Земли и эллипсоида. потенциал соответственно.

Из таблицы 1 мы видим, что уравнение Лапласа дает преимущество в анализ гравитационного потенциала, тогда как G-модифицированное уравнение Гельмгольца имеет край в изучении интенсивности гравитации, гравитационного возмущения и гравитационных аномалий. Это Стоит отметить, что процесс определения возмущающего потенциала с использованием G-модифицированной Уравнение Гельмгольца довольно простое, поскольку оно включает в себя решение простой частичной задачи. дифференциальное уравнение (см. уравнение (24)).

Таблица 1. Сравнение Лапласа и G – модифицированного уравнения Гельмгольца.

Количество	Уравнение Лапласа сферическое Гармоники, радиальное расстояние врациональных полномочиях	G-модифицированный Гельмгольц Уравнение, сферическое Гармоники, радиальное расстояние виррациональных силах
Возмущающий потенциал T	Да, косвенное определение	Да, косвенное определение
Гравитационный потенциал эллипсоида Ve	Да, прямое определение *	Нет
Гравитационный потенциал Земли VE	Да, косвенное определение	Нет
Гравитационное возмущение δg	Да, косвенное определение	Да, прямое определение
Гравитационная аномалия g	Да, косвенное определение	Да, прямое определение
Интенсивность силы тяжести g	Нет	Да, прямое определение
Интенсивность гравитации эллипсоида γ	Нет	Да, прямое определение
Вертикальный градиент g	Нет	Да, косвенное определение
Вертикальный градиент γ	Нет	Да, косвенное определение
Компонент ξ	Да, косвенное определение	Да, косвенное определение
Компонент η	Да, косвенное определение	Да, косвенное определение
Волнистость геоида N	Да, косвенное определение	Да, косвенное определение

* Подробную информацию можно найти в [22].

6. Суммирование результатов

В этом разделе мы сводим в таблицу новые результаты, представленные в разделе 3.

В таблице 2 представлена значимость G-модифицированного уравнения Гельмгольца, которое позволяет нам изучать гравитационные величины независимо от гравитационного потенциала и выражать их как новый вид серии сферических гармоник. Мы решили выразить самое значимое подробные формулы, связанные с гравитацией g, гравитационным возмущением δg, гравитационной аномалией g, возмущающий потенциал T, волнистость геоида N, вертикальный градиент силы тяжести и нормальный

Machine Translated by Google

сила тяжести на геоиде (выделена жирным шрифтом). Кроме того, в табл. 2 включены и составляющие отклонения вертикали.

Таблица 2. Новые выражения сферических гармоник, полученные из G-модифицированного уравнения Гельмгольца.

Количество	Выражение
Гравитация g	$g(r,\theta',\lambda) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{p}\left(\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}\right)^{p}\left(\frac{g}{r}\right)^{p}[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda]$
Гравитационное возмущение δg	$\delta g(r,\theta',\lambda) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{p}\left(\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}\right)^{p}\left(\frac{\delta g}{g}\right)^{p}[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda]$
Гравитационная аномалия g	$g(r,\theta',\lambda) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{p}\left(\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}\right)^{p}\left(\frac{g}{g}\right)^{p}[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda]$
Возмущающий потенциал T в трехмерном пространстве	$T(r,\theta',\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2p}{\sqrt{9+4n(n+1)}\ 1}\left(\frac{p}{r}\right)^{\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}\ 1}{2}}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\delta g}{g}\right)^{p}[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda] + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P}{2}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}\ 5}{\sqrt{9+4n(n+1)}\ 1}\right)^{\frac{\delta g}{g}}A_{nm}\left(\frac{r}{R}\right)^{p}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + \left(\frac{\sqrt{9+4n(n+1)}\ 5}{\sqrt{9+4n(n+1)}\ 1}\right)^{\frac{\delta g}{g}}B_{nm}\left(\frac{r}{R}\right)^{p}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda$
Возмущающий потенциал на геоиде	$T(\theta',\lambda) = \frac{P}{2}\left(\frac{\delta g}{g}\right)^{p}[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda] \quad [A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda] = \frac{P}{2}[\delta g(\theta',\lambda) \quad g(\theta',\lambda)]\,,\ r = R$
Волнистость геоида N	$N(\theta',\lambda) = [\delta g(\theta',\lambda) \quad g(\theta',\lambda)]\frac{P}{\gamma(\theta',\lambda)}$ уравнение эллипсоида (θ',λ) уравнение эллипсоида или $N(r,\theta',\lambda) = \frac{P}{2}\frac{T(r,\theta',\lambda)}{\gamma(r,\theta',\lambda)}$ уравнение эллипсоида (θ',λ)
Вертикальный градиент силы тяжести	$\frac{r}{p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2p}\left(\frac{p}{r}\right)^{\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}}[A_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\sin\theta')\sin m\lambda]\,,\quad p > p$
Компонент ξ	$\lambda) = \gamma(r,\theta',\lambda)\ \theta' \quad \frac{1}{T}\frac{\xi(r,\theta',}{}$
Компонент η	$= \gamma(r,\theta',\lambda)\sin\theta'\ \lambda \quad \frac{1}{T}\frac{\eta(r,\theta',\lambda)}{}$
Нормальная гравитация на геоиде	$\gamma_{geoid}(r,\theta',\lambda) = \sum_{n=0}^{n0}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+p}\left(\frac{1+\sqrt{9+4n(n+1)}}{2}\right)\cdot P_{2n}(\sin\theta') + e^{2}(2n+1)\sin\theta'[P_{2n}(\sin\theta')\sin\theta' \quad P_{2n+1}(\sin\theta')]$.

Наряду с уравнением Лапласа можно также использовать G-модифицированное уравнение Гельмгольца. классифицируется как фундаментальное уравнение в частных производных физической геодезии.

7. Выводы

В этой работе мы представили новые альтернативные формулы для различных величин, связанных с гравитационным полем Земли.

G-модифицированное уравнение Гельмгольца представляет собой уравнение в частных производных, которое позволяет нам рассчитывать интенсивность гравитации как сериюсферических гармоник. Интенсивность гравитации играет решающую роль в широком спектре применений. Гармонический ряд интенсивности гравитации — это ряд, в котором степени радиального расстояния являются иррациональными числами. Этот ряд позволяет нам представить вертикальный градиент силы тяжести как сериюсферических гармоник. Вертикальный градиент силы тяжести очень важен для многочисленных геофизических приложений.

Гравитационное возмущение и гравитационная аномалия очень значительны. Они выражаются как серия сферических гармоник, как это предусмотрено уравнением Лапласа или G-модифицированным уравнением Гельмгольца. В первом сценарии их определение не является простым, поскольку мы

Machine Translated by Google

необходимо решить краевую задачу Неймана (задача Хотина) или Робина (задача Стокса). Во втором случае их определение происходит как решение краевых задач Дирихле, которые проще двух предыдущих случаев.

G-модифицированное уравнение Гельмгольца дает дополнительное преимущество: оно позволяет нам рассчитать возмущающий потенциал Земли, используя простое уравнение в частных производных. Решение этого уравнения включает в себя только интегрирование гармонического ряда гравитационной аномалии по радиальному расстояниюr. Более того, G-модифицированное уравнение Гельмгольца также можно использовать для нахождения компонент ξ и η отклонения вертикали и волнистости геоида.

Кроме того, на поверхности геоида возмущающий потенциал и волнистость геоида принимают изящную форму серии сферических гармоник, что показывает зависимость от разности гравитационного возмущения и гравитационной аномалии на этой поверхности. Интересный теоретический результат состоит в том, что и возмущающий потенциал, и волнистость геоида могут быть определены, если известно значение нормальной силы тяжести на поверхности геоида.

Все новые формулы, возникающие из G-модифицированного уравнения Гельмгольца, сведены в таблицу в разделе 6.

Гармонический ряд интенсивности гравитации дает нам значительное преимущество при изучении изогравитационных поверхностей Земли. Частные производные первого и второго порядка гравитационного потенциала Земли удобно выражать в декартовых системах.
Это упрощает выражения частных производных и требуемых приближений. Показано, что изогравитационные поверхности представляют собой замкнутые поверхности с неотрицательной гауссовой кривизной.

На очень больших высотах, когда значение радиального расстояния «r» велико, изогравитационные поверхности представляют собой сферы с радиусом, равным выбранному радиальному расстоянию. По мере того, как мы приближаемся к Земле, их внешний вид становится все более сложным. Каждая изогравитационная поверхность вблизи Земли имеет по крайней мере один набор точек, определяемый как особое кольцо. Это название связано с тем, что все точки, принадлежащие этому множеству, являются особыми точками. Семейство особых колец сходится к одной точке, расположенной на средней оси вращения Земли.

Будущая работа может включать разработку новых моделей глобальной гравитации для интенсивности гравитации g, гравитационного возмущения δg и гравитационной аномалии g. Модель глобальной гравитации для определения интенсивности гравитации будет представлять собой значительный прогресс в широком спектре приложений, например, в области геофизики, археологии, геодезии, определения орбиты и инерциальной навигации. Кроме того, было бы полезно разработать новые модели глобальной гравитации для гравитационных аномалий и гравитационных возмущений отдельно от глобальных геопотенциальных моделей. Эта эволюция может предоставить нам возможности улучшить существующие методы манипулирования гравитационными данными, что приведет к более глубокому пониманию гравитационного поля Земли.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Исследование не требовало этического одобрения.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: данные не использовались.

Конфликты интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Ссылки

1. Ярош, В.; Карр, Северная Каролина; Дженсен, HW. Сферические гармоники с выборкой по важности. Вычислить. Граф. Форум 2009, 28, 577–586. Доступно онлайн: http://graphics.ucsd.edu/~henrik/papers/importance_sampling_spheral_harmonics.pdf . (по состояниюна 2 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]
2. Сильвеннойнен А.; Слоан, П.П. Разложение движущегося базиса для предварительно вычисленного транспорта света. Вычислить. Граф. Форум 2021, 40, 127–137. Доступно онлайн: https://www.ppsloan.org/publications/mbd.pdf. (по состояниюна 2 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]
3. Ван Дж; Скай, К.; Чжоу, К.; Лин, С.; Ху, С.; Го, Б. Масштабирование сферических гармоник. Вис. Вычислить. 2006, 22, 713–720. Доступно онлайн: https://link.springer.com/article/10.1007/s00371-006-0057-8 (по состояниюна 2 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

4. Аннен, Т.; Каутц, Дж; Дюран, Ф.; Зейдель, HP Сферические гармонические градиенты для освещения среднего диапазона. В материалах 15-го семинара Eurographics по методам рендеринга, Норчепинг, Швеция, 21–24 июня 2004 г.; стр. 331–336. Доступно онлайн: https://diglib.eg.org/bitstream/handle/10.2312/EGWR.EGSR04.331-336/331-336.pdf?sequence=1&isAllowed=y . (по состоянию на 2 февраля 2024 г.).

5. Сансо, Ф.; Сидерис, М. Теория и методы определения геоида; Springer Science & Business Media: Берлин, Германия, 2013 г.; Глава 6; Том 262, с. 131. Доступно онлайн: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-74700-0 . (по состоянию на 2 февраля 2024 г.).

6. Шуны А.; Халил, Р.; Камель, А.; Мики, Ю Оценки последних глобальных геопотенциальных моделей, основанных на данных GPS-нивелирования и гравитации вдоль прибрежных зон Египта. Open Gosciences 2023, 15, 20220450. Доступно онлайн: https://www.degruyter.com/document/. doi/10.1515/geo-2022-0450/html (по состоянию на 2 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

7. Ву, Ю; Он, Х.; Лу о, З.; Ши, Х. Оценка недавно выпущенных моделей глобального геопотенциала высокого уровня, основанных на гетерогенных геодезических и океанических данных. Передний. Наук о Земле. 2021, 9, 749611. Доступно онлайн: https://www.frontiersin.org/. статьи/10.3389/feart.2021.749611/полный (по состоянию на 2 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

8. Исик, М.С.; Чевикальп, MR; Эрол, Б.; Эрол, С. Улучшение геопотенциальных моделей на основе GOCE для гравиметрического моделирования геоидов в Турции. Geosciences 2022, 12, 432. Доступно онлайн: https://www.mdpi.com/2076-3263/12/12/432. (по состоянию на 2 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

9. Элизондо, Н.А.; Лопес, РВГ; Карилло, XGT; Бесерра, GEV. Объединение глобальных геопотенциальных моделей, цифровых моделей рельефа и GNSS/выравнивания для точного определения локального геоида в некоторых городских районах Мексики: тематическое исследование. ISPRS Int. Дж Гео-Инф. 2021, 10, 819. Доступно онлайн: https://www.mdpi.com/2220-9964/10/12/819. (по состоянию на 2 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

10. Ройтмайр, К.М. Вклад сферических гармоник в магнитные и гравитационные поля; НАСА ТМ-2004-213007; Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства: Вашингтон, округ Колумбия, США, 2004 г. Доступно онлайн: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/2004 . 0047194/загрузки/20040047194.pdf (по состоянию на 2 февраля 2024 г.).

11. Кэмпбелл, У.Г. Приложения в области геомагнетизма; циркуляр Геологической службы США 1109; Типография правительства США: Вашингтон, округ Колумбия, США, 1995 г. Доступно в Интернете: https://pubs.usgs.gov/circ/1995/1109/report.pdf. (по состоянию на 2 февраля 2024 г.).

12. Прада, КО; Антело, МЖ; Мурильо, Северная Каролина; Козар, младший; Контрерас-де-Вильяр, Ф.; Перес, JJM Новый метод сбора морской геомагнитной информации: применение исследований в Карибском бассейне Колумбии. Дж Мар. англ. 2021, 9, 10. Доступно онлайн: https://www.mdpi.com/2077-1312/9/1/10 . (по состоянию на 2 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

13. Зиган Л. Обзор применения электрического поля в энергетике и технологических процессах. Энергии 2018, 11, 1361. Доступно онлайн: https://www.mdpi.com/1996-1073/11/6/1361 (по состоянию на 15 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

14. Тоньолатти, Л.; Понти, К.; Сантарсьеро, М.; Скеттини, Г. Эффективный метод расчета электромагнитного рассеяния вытянутыми сфероидами. Математика 2022, 10, 1761. Доступно онлайн: https://www.mdpi.com/2227-7390/10/10/1761. (по состоянию на 15 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

15. Вафеас, П.; Перруссон, Г.; Лесселье, Д. Низкочастотное рассеяние идеально проводящими сфероидальными телами в проводящей среде с магнитно-дипольным возбуждением. Межд. Дж Инж наук. 2009, 47, 372–390. Доступно онлайн: https: //www.researchgate.net/publication/222923079_Low Frequency_scattering_fro_perfectly_conducting_spheroidal_bodies_in_ a_проводящая_среда_с_магнитным_дипольным_возбуждением (по состоянию на 15 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

16. Перруссон, Г.; Вафеас, П.; Чаджигеоргиу, ИК; Лесселье, Д. Низкочастотная идентификация на месте тела с высокой проводимостью, захороненного в Земле, по модели эллипсоида. IMA J. Appl. Математика. 2015, 80, 963–980. Доступно онлайн: https://www.researchgate.net/publication/274162167_Low-Frequency_onsite_identification_of_a_highly_conductive_body_ похоронен_in_Earth_from_a_model_ellipsoid (по состоянию на 15 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

17. Мин Ю; Ню, Х.; Се, Х.; Хан, З.; Ли, К.; Сан, С. Применение гравитационных исследований при обнаружении активных городских неисправностей. На 9-й Международной конференции по экологической и инженерной геофизике 2021 г., Материалы серии конференций IOP: Науки о Земле и окружающей среде, Чанчунь, Китай, 11–14 октября 2020 г.; Издательство IOP: Бристоль, Великобритания, 2021 г.; Том 660, с. 012057. Доступно онлайн: https://www.researchgate.net/publication/349532168_Application_of_gradity_exploration_in_urban_active_ . error_detection (по состоянию на 21 февраля 2024 г.).

18. Сьоберг, Л.Э.; Багербаги, М. Инверсия и интеграция гравитации. Теория и приложения в геодезии и геофизике; Springer: Базель, Швейцария, 2017 г.; п. 251. Доступно онлайн: https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-gradity-inversion-and-integration.pdf . (по состоянию на 21 февраля 2024 г.).

19. Шайнерт, М.; Ферранч чоли, Ф.; Шваббе, Дж; Штудингер, М.; Дамаск, Дж.; Джокат, В.; Алешкова Н.; Джордан, Т.; Лейченков Г.; Бланкеншип, Д.Д.; и др. Новая сетка антарктических гравитационных гномалий для расширенных геодезических и геофизических исследований в Антарктиде. Геофиз. Рез. Летт. 2016, 43, 600–610. Доступно онлайн: https://www.researchgate.net/publication/289983658_New_. Антарктическая_гравитационная_аномальная_сетка_для_улучшенных_геодезических_и_геофизических_исследований_в_Антарктиде (по состоянию на 21 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

20. Исмаил Н.; Янис, М.; Абдулла, Ф.; Ирфансьям, А.; Атмоджо, BSW Картирование погребенных древних построек с использованием гравитационного метода: тематическое исследование из Кот-Сиди Абдуллы в Северном Ачехе. Дж Физ. 2018, 1120, 012035. Доступно онлайн: https://iopscience.iop.org/article/10.1 . 088/1742-6596/1120/1/012035/pdf (по состоянию на 21 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

21. Мануцакис Г. Сила гравитации, порождаемая невращающимся эллипсоидом вращения уровня с низким эксцентриситетом как серия сферических гармоник. Mathematics 2023, 11, 1974. Доступно онлайн: https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_. проблемы/Applications_Partial_Differential_Equations_Mathematical_Physics (по состоянию на 21 февраля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

22. Хейсканен, В.; Мориц, Х. Физическая геодезия. WH Freeman Co., 1967, 82–112. Доступно онлайн: https://archive.org/details/. heiskanen_morits_1967_physical_geodesy/page/n89/mode/2up?view=theater (по состояниюна 3 марта 2024 г.).
23. Багербанди, М.; Жуйбари, А.; Нифлорусан, Ф.; Эгрен, Дж Влияние вертикального отклонения на прямоугеографическую привязку вмобильных аэромобильных картографических системах: пример из Швеции. Фотограмма. Рек. 2022, 37, 285–305. Доступно онлайн: https://www.diva-portal.org/.разбить/получить/diva2:1684428/FULLTEXT01.pdf (по состояниюна 3 марта 2024 г.). [Перекрестная ссылка]
24. Барзаги Р.; Каррион, Д.; Пепе, М.; Прециозо, Г. Расчет отклонения вертикали для улучшения аэрофотосъемки: сравнение оценок EGM2008 и ITALGEO05. Датчики 2016, 16, 1168. Доступно онлайн: https://www.ncbi.nlm.nih. gov/pmc/articles/PMC5017334/pdf/sensors-16-01168.pdf (по состояниюна 3 марта 2024 г.). [Перекрестная ссылка] [ПабМед] 25. Шпрлак, М.; Новак, П. Интегральные формулыдля вычисления гравитационного тензора третьего порядка на основе объемной плотности массы, возмущающего гравитационного потенциала, гравитационной аномалии и гравитационного возмущения. Дж Геод. 2015, 89, 141–157. Доступно онлайн: https://www.researchgate.net/publication/271211475_Integral_formulas_for_computing_a_ Thirdorder_gravitational_.tensor_from_volumetric_mass_density_disturbing_gravitational_potential_gravity_anomaly_and_gravity_disturbance (по состояниюна 5 марта 2024 г.). [Перекрестная ссылка]
26. Горшков Г.П. Изогравитационные поверхности. Геофиз. Абстр. 1934, 82. Доступно в Интернете: https://books.google.gr/books?id=1RxUCPOWOtEC&pg=PA1738&lpg=PA1738&dq=isogravitational+surfaces+of+the+Earth&source=bl&ots=9VnOhvB6Cs&sig=ACfU3U2hlSJxufGjWTktf6yfI13mwKuylA&hl=el&sa=X&ved=2ahUKEwjx8pD85tqEAxVh9LsIHbuUA_E4ChDoAXoECAY-QAw#v=onepage&q=isogravitational%20surfaces%20of%20the%20Earth&f=false (по состояниюна 5 марта 2024 г.). [Перекрестная ссылка]
27. Куп, Р. Моделирование поля глобальной гравитации с использованием спутниковой гравитационной градиентометрии; Нидерландская комиссия по геодезии: Делфт, Нидерланды, 1993 г.; Том 38, стр. 32–183. Доступно онлайн: https://ncgeo.nl/index.php/en/publicatiesgb/publications-on-geodesy/item/2544-pog-38-r-koop-global-gradity-modelling-using-satellite-gradity-gradiometry . (по состояниюна 5 марта 2024 г.).
28. Гиблин П. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей; Департамент математических наук Ливерпульского университета: Ливерпуль, Великобритания, 1999; стр. 32–39. Доступно онлайн: https://www.liverpool.ac.uk/~pjgiblin/papers/diff-geom-book.pdf. (по состоянию на 5 марта 2024 г.).

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Электромагнитная задача трех тел 3D-Кеплера. Существование Периодические решения

Василь Георгиев Ангелов

Кафедра математики и информатики Горно-геологического университета «Св. И. Рильский», 1700 София, Болгария; angelov@mgu.bg

Аннотация: Основной целью настоящей работы является доказательство существования периодических решений задач трех тел в трехмерной постановке Кеплера. Мы решили ту же задачу в случае, когда три частицы рассматриваются во внешней инерциальной системе. Начнем с уравнений движения трех тел, которые являются подмножеством уравнений движения (ранее введенных нами) для любого числа тел. В пространстве Минковского существует 12 уравнений движения. Доказано, что три из них являются следствием остальных девяти, поэтому их число становится девятью, как и неизвестных траекторий. Формулировка Кеплера предполагает, что одна частица (ядро) находится в начале координат. Движение двух других частиц описывается нейтральной системой относительно неизвестных скоростей. Зависящие от состояния задержки возникают вследствие конечной скорости света в вакууме. Получим уравнения движения в сферических координатах и разобьем их на две группы. В первой группе все аргументы неизвестных функций являются задержками. Их решения мы принимаем в качестве начальных функций. Затем необходимо решить уравнения движения для оставшихся двух частиц справа от начальной точки. Для доказательства существования и единственности периодического решения выберем пространство, состоящее из периодических бесконечно гладких функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Затем мы используем подходящий оператор, действующий на этих пространствах и неподвижные точки которого являются периодическими решениями. Мы применяем теорему о неподвижной точке для операторов, действующих в пространствах периодических функций. Таким образом мы показываем стабильность атома Не в рамках классической электродинамики. В нашей предыдущей статье мы доказали существование спиновых функций при плоском движении. Таким образом, мы подтверждаем гипотезу Бора и Зоммерфе

Ключевые слова: классическая электродинамика; задача трех тел; периодические решения; метод фиксированной точки; нейтральная система

MSC: 78A35; 34K40; 47H10

check for updates

Образец цитирования: Ангелов В.Г. Трехчастичный 3D-электромагнит Кеплера Проблема — существование периодических Решения. Прикладная математика 2024, 4, 612–640. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020034

Академический редактор: Клод Шафе

Поступила: 25 марта 2024 г.

Пересмотрено: 19 апреля 2024 г.

Принято: 30 апреля 2024 г.

Опубликовано: 16 мая 2024 г.

Копирайт: © 2024 автора. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Основной целью настоящей статьи является исследование задачи трех тел классической электродинамики в трехмерной постановке Кеплера. В [1] мы сформулировали ту же задачу трёх тел вне-шне для инерциальной системы частиц, а в [2] доказали существование -единственность периодического решения. Задача трех тел является частным случаем общей постановки задачи N тел (см. [3]), где доказано существование -единственность траекторий убегания N заряженных частиц. Здесь мы добавляем радиационные члены для каждой из трех частиц. Мы используем релятивистски-инвариантную форму радиационного члена Дирака, введенную в [4]. Исходя из системы из [1] и переходя к сферическим координатам, сформулируем трехмерную задачу Кеплера для трех заряженных частиц. Полученные результаты позволяют расширить качественные исследования атома Не и Не-подобных атомов, таких как Li+ и других. Метод решения уравнений движения основан на выборе подходящих пространств функций, состоящих из бесконечно гладких периодических, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, и введении операторов, действующих на этих пространствах.

Их неподвижные точки являются периодическими решениями уравнений движения. Это не лишнее

Machine Translated by Google

отметим, что, используя трехмерную формулировку Кеплера, мы помещаем ядра в начало координат и ищем траектории двух движущихся частиц, вращающихся вокруг ядер. С математической точки зрения это формальная операция, но с физической точки зрения это означает, что мы переходим от релятивистского случая к квазиклассическому, поскольку задача Кеплера по сути является классической (ньютоновской) задачей. Это подтверждается и типом радиационного члена, который оказывается в форме Лоренца.

Статья состоит из семи разделов, пяти приложений и заключения. Раздел 1 – введение. Раздел 2 содержит трехмерную формулировку Кеплера для уравнений движения в декартовых координатах. Это приводит к разделению системы на две группы. Одно из них состоит из трех уравнений, содержащих неизвестные функции на начальном интервале. Мы называем их исходными уравнениями. Мы следуем подходу Р. Д. Драйвера (см. [5]) для описания запаздывающего взаимодействия между частицами, который основан на идее В. Паули [6] и Дж. Л. Синга [7]. Получены зависящие от состояния задержки. Фактически по неизвестным скоростям полученная система является нейтральным типом, а задержки зависят от неизвестных траекторий. В разделе 3 выведены основные уравнения движения в сферических координатах. Полученные уравнения снова нейтрального типа с задержками, зависящими от неизвестных траекторий. В разделе 4 мы вводим функциональные пространства, состоящие из бесконечно дифференцируемых периодических функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным Доказываются также некоторые вспомогательные предложения. В разделе 5 мы вводим операторы, неподвижные точки которых являются периодическими решениями уравнений движения, и доказываем основную лемму. В разделе 6 содержится основной результат, гарантирующий существование-единственность периодического решения уравнений движения задачи трех тел в трехмерной форме Кеплера. Доказательство основано на теореме о неподвижной точке [8]. Приведен численный пример. В разделе 7 обсуждаются гипотезы Бора и Зоммерфельда.

Отметим некоторые результаты, в которых применяются различные подходы [9–18].

Напомним некоторые обозначения и результаты из [1,2], касающиеся задачи трех тел в декартовых координатах. Рассмотрим систему 12 уравнений движения с использованием радиационных членов системы трех тел [1]:

$$\begin{aligned} \text{м1}\ \frac{d\lambda_p^{(1)}}{ds1} &= \frac{e1}{c^2}\ F\lambda_{rl}(12)(1) + \Phi\lambda(13)(1)(1)_{\text{рад}}(1) + F\lambda\, rl\, rl\, rl, \\ \text{м2}\ \frac{d\lambda_p^{(2)}}{ds2} &= \frac{e2}{c^2}\ F\lambda(21)(2)(23)(2)(3)_{\text{рад}}(2) + \Phi\lambda + F\lambda\, rl\, rl\, rl, \\ \text{м3}\ \frac{d\lambda_p^{(3)}}{ds3} &= \frac{e3}{c^2}\ F\lambda(31)(3)(32)(3)(3)_{\text{рад}}(3) + \Phi\lambda + F\lambda\, rl\, rl\, rl, \end{aligned} \tag{1}$$

где $r = 1, 2, 3, 4$; c – скорость света в вакууме; m_k – массы; e_k $(k = 1, 2, 3)$ — заряды частиц. Напомним, что при повторении l в правой руке происходит суммирование.

стороны указанной системы. Элементы электромагнитных тензоров $F_{рл}^{(kn)} = \frac{\Phi_p^{(n)}}{x_l^{(k)}} - \frac{\Phi_p^{(n)}}{x_l^{(k)}}$ можно рассчитать по запаздывающим потенциалам Лиенара–Вихерта $\Phi_p^{(n)} = \frac{e_n \lambda, в_p^{(n)}}{4,}$ то время как $\lambda(n), \xi(kn)$ члены излучения можно рассчитать как половину разности между запаздывающим и опережающим потенциалами в соответствии с предположением Дирака:

$$\Phi^{(к)рад}_{\text{минута}} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_н^{(к)рет}}{x_м^{(к)рет}} - \frac{A_м^{(n)ret}}{x_н^{(к)рет}} - \frac{A_н^{(к)адв}}{x_м^{(к)adv}} + \frac{A_м^{(n)adv}}{x_н^{(к)adv}}\right),$$

где $A_н^{(k)ret} = \frac{ek_н^{(k)ret}}{\lambda(k)ret, \xi(k)ret4,}$ $A_н^{(к)реклама} = \frac{ek_н^{(k)adv}}{\lambda(k)adv, \xi(k)adv}$

Здесь $x_3^{(к)}(т), x_4^{(k)}(k)(t), x(t) = ict$ $4., (k = 1, 2, 3)$ — пространственно-временные координаты заряженные частицы. Скалярное произведение в пространстве Минковского равно $a, b4 = anbn = \sum_{n=1}^{4} анбн,$

Machine Translated by Google

а в трехмерном подпространстве $a, b = a\alpha b\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} a\alpha b\alpha$. Элементы правильного времени равны ds_k $(k = 1, 2, 3)$, а единичные касательные векторы к мировым линиям равны

$$\lambda^{(k)} \text{ равно } \lambda^{(k)}_1, \lambda^{(k)}_2, \lambda^{(k)}_3, \lambda^{(k)}_4 = \frac{u^{(k)}_1(\tau)}{c_k}, \frac{u^{(k)}_2(\tau)}{c_k}, \frac{u^{(k)}_3(\tau)}{c_k}, \frac{ic_k}{c_k}, \quad u^{(k)}_4 = iu^{(k)}_1(\tau), u^{(k)}_2(\tau), u^{(k)}_3(\tau),$$

$$k = c_k \sqrt{2 - \left(u^{(k)}_1, u^{(k)}_2\right)}.$$

Мы доказали, что три уравнения из (1) являются следствием остальных [1].

Уравнений движения становится девять, как и неизвестные функции $u_1(k)(t), u_2(k)(t), u_3(k)(t)$, $(k = 1, 2, 3)$.

Изотропные векторы $\xi^{(km)}$ $(k = 1, 2, 3; m \neq k)$ получаются следующим образом: фиксируем любое событие на мировой линии k-й частицы и рисуем световой конус в прошлое. Этот конус пересекает мировую линию m-й частицы в любом другом (прошлом) событии. Затем,

$$\xi^{(km)}_1, \xi^{(km)}_2, \xi^{(km)}_3, \xi^{(km)}_4 = \xi^{(km)}, \xi^{(km)}_4 =$$

$$= x^{(k)}_1(t) - x^{(m)}_1(t - \tau_{km}(t)), x^{(k)}_2(t) - x^{(m)}_2(t - \tau_{km}(t)), x^{(k)}_3(t) - x^{(m)}_3(t - \tau_{km}(t)), ic(t - \tau_{km}(t)).$$

$\xi^{(km)}$ — изотропные четыре векторы $\xi^{(km)}, \xi^{(km)}_4 = 0$, откуда следует, что запаздывающий функции $\tau_{km}(t)$ должны удовлетворять следующим функциональным уравнениям:

$$\tau_{km}(t) = \frac{1}{c}\sqrt{\xi^{(km)}, \xi^{(km)}} \qquad \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} x^{(k)}_\alpha(t) - x^{(m)}_\alpha(t - \tau_{km}(t))^2}.$$

Приведенных выше уравнений шесть, потому что $(km) = (12), (13), (23), (21), (31), (32)$ и $u^{(m)}_\mu = u_\mu(m)(t - \tau_{km}(t))$, для $m \neq k$, $\tau_{km} = c^{-2}\sqrt{u^{(m)}(t - \tau_{km}), u^{(m)}(t - \tau_{km})}$,

$$\lambda^{(m)}_\mu = \lambda^{(m)}_1, \lambda^{(m)}_2, \lambda^{(m)}_3, \lambda^{(m)}_4 = \frac{u^{(m)}_1(t - \tau_{km})}{\tau_{km}}, \frac{u^{(m)}_2(t - \tau_{km})}{\tau_{km}}, \frac{u^{(m)}_3(t - \tau_{km})}{\tau_{km}}, \frac{ic}{\tau_{km}} = \frac{u^{(m)}(t - \tau_{km})}{\tau_{km}}, \frac{ic}{\tau_{km}}.$$

2. Выделение уравнений движения и вывод исходных уравнений.

Предположение (C): $u^{(k)} = u^{(k)}(\tau), u(k)(t) \quad c < \bar{c}$ $(k = 1, 2, 3; c = \text{const})$

$\sqrt{u^{(k)}, u^{(k)}} \quad c^2 - \bar{c}^2 > 0$. Это условие позволяет получить из (1) подразумевает систему с, содержащую три группы уравнений (см. [1]):

$$\dot{u}^{(1)}_1 = \frac{2 - \left(u^{(1)}_1\right)^2}{2c^2}\Gamma^{(12)}_{11} + \Gamma^{(13)}_{11} + \Gamma^{(1)}_{11} + \Gamma_1 \frac{u^{(1)}_1 u^{(1)}_2}{c^2}\Gamma^{(12)}_{22} + \Gamma^{(13)}_{22} + \Gamma^{(1)}_{22} + \Gamma_2 \frac{u^{(1)}_1 u^{(1)}_3}{c^2}\Gamma^{(12)}_{33} + \Gamma^{(13)}_{33} + \Gamma^{(1)}_{33} + \Gamma_3 \quad y_{11}$$

$$\dot{u}^{(1)}_2 = \frac{u^{(1)}_1 u^{(1)}_2}{c^2}\Gamma^{(12)}_{11} + \Gamma^{(13)}_{11} + \Gamma^{(1)}_{11} + \Gamma_1 \frac{c^2 - \left(u^{(1)}_2\right)^2}{c^2}\Gamma^{(12)}_{22} + \Gamma^{(13)}_{22} + \Gamma^{(1)}_{22} + \Gamma_2 \frac{u^{(1)}_2 u^{(1)}_3}{c^2}\Gamma^{(12)}_{33} + \Gamma^{(13)}_{33} + \Gamma^{(1)}_{33} + \Gamma_3 \quad y_{12} \tag{2}$$

$$\dot{u}^{(1)}_3 = \frac{u^{(1)}_1 u^{(1)}_3}{c^2}\Gamma^{(12)}_{11} + \Gamma^{(13)}_{11} + \Gamma^{(1)}_{11} + \Gamma_1 \frac{u^{(1)}_2 u^{(1)}_3}{c^2}\Gamma^{(12)}_{22} + \Gamma^{(13)}_{22} + \Gamma^{(1)}_{22} + \Gamma_2 \frac{c^2 - \left(u^{(1)}_3\right)^2}{c^2}\Gamma^{(12)}_{33} + \Gamma^{(13)}_{33} + \Gamma^{(1)}_{33} + \Gamma_3 \quad y_{13},$$

$$\dot{u}^{(2)}_1 = \frac{2 - \left(u^{(2)}_1\right)^2}{c^2}\Gamma^{(21)}_{11} + \Gamma^{(23)}_{11} + \Gamma^{(2)}_{11} + \Gamma_1 \frac{u^{(2)}_1 u^{(2)}_2}{c^2}\Gamma^{(21)}_{22} + \Gamma^{(23)}_{22} + \Gamma^{(2)}_{22} + \Gamma_2 \frac{u^{(2)}_1 u^{(2)}_3}{c^2}\Gamma^{(21)}_{33} + \Gamma^{(23)}_{33} + \Gamma^{(2)}_{33} + \Gamma_3 \quad y_{21}$$

$$\dot{u}^{(2)}_2 = \frac{u^{(2)}_1 u^{(2)}_2}{c^2}\Gamma^{(21)}_{11} + \Gamma^{(23)}_{11} + \Gamma^{(2)}_{11} + \Gamma_1 \frac{c^2 - \left(u^{(2)}_2\right)^2}{c^2}\Gamma^{(21)}_{22} + \Gamma^{(23)}_{22} + \Gamma^{(2)}_{22} + \Gamma_2 \frac{u^{(2)}_2 u^{(2)}_3}{c^2}\Gamma^{(21)}_{33} + \Gamma^{(23)}_{33} + \Gamma^{(2)}_{33} + \Gamma_3 \quad y_{22} \tag{3}$$

$$\dot{u}^{(2)}_3 = \frac{u^{(2)}_1 u^{(2)}_3}{c^2}\Gamma^{(21)}_{11} + \Gamma^{(23)}_{11} + \Gamma^{(2)}_{11} + \Gamma_1 \frac{u^{(2)}_2 u^{(2)}_3}{c^2}\Gamma^{(21)}_{22} + \Gamma^{(23)}_{22} + \Gamma^{(2)}_{22} + \Gamma_2 \frac{c^2 - \left(u^{(2)}_3\right)^2}{c^2}\Gamma^{(21)}_{33} + \Gamma^{(23)}_{33} + \Gamma^{(2)}_{33} + \Gamma_3 \quad y_{23},$$

Machine Translated by Google

$$\dot{ты}_1^{(3)} = \frac{2\text{-в}\ ты_1^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{11}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_1 \frac{ты_1^{(3)}\ ты_2^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{11}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_2 \frac{ты_1^{(3)}\ ты_3^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{33}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_3 \quad уз_1$$

$$\dot{ты}_2^{(3)} = \frac{ты_1^{(3)}\ ты_2^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{11}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_1 \frac{c^2(u)_2^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{22}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_2 \frac{ты_2^{(3)}\ ты_3^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{33}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_3 \quad уз_2 \qquad (4)$$

$$\dot{ты}_3^{(3)} = \frac{ты_1^{(3)}\ ты_3^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{11}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_1 \frac{ты_2^{(3)}\ ты_3^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{22}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_2 \frac{c^2(u)_3^{(3)}}{c^2}\ \Gamma_{33}^{(31)}\Gamma_{(32)}\Gamma_{(3)рад} + \Gamma_3 \quad уз_3,\ т \quad 0,$$

где

$$\Gamma_\alpha^{(12)} = \frac{e1e2}{м1}\frac{1}{3в}\ \frac{2\text{-в}\ ты^{(1)}, ты^{(2)}\ \alpha^{(12)}\ c2т12\ \xi^{(12)}\ \xi^{(12)}, ты^{(1)}\ \alpha^{(2)y}}{3} \frac{4_{12}+D12\ {}^2_{12}\xi^{(12)}, ты^{(2)} + \xi^{(12)}, ты^{(2)}\ c2т12\ и^{(2)}, ты^{(2)}}{{}^2_{12}}$$

$$\frac{Д12}{\xi^{(12)}, ты^{(2)}\ c2т122} \frac{{}^2_{12}\alpha^{(2)}\ {}^{+uu}_{\alpha}{}^{(2)}\ ты^{(2)}, ты^{(2)}\ в2т12\ \xi^{(12)}, ты^{(1)} + {}^2_{12}\ ты^{(1)}, ты^{(2)} + ты^{(1)}, ты^{(2)}\ 2\text{-с}\ ты^{(2)}, ты^{(2)}\ \xi_\alpha^{(12)}}{{}^2_{12}};$$

$$\Gamma_\alpha^{(13)} = \frac{e1e3}{м1}\frac{1}{3в}\ \frac{2\text{-в}\ ты^{(1)}, ты^{(3)}\ \alpha^{(13)}\ c2т13\ \xi^{(13)}\ \xi^{(13)}, ты^{(1)}\ \alpha^{(3)y}}{3} \frac{4_{13}+D13\ {}^2_{13}\xi^{(13)}, ты^{(3)} + \xi^{(13)}, ты^{(3)}\ c2т13\ ты^{(3)}, ты^{(3)}}{{}^2_{13}}$$

$$\frac{Д13}{\xi^{(13)}, ты^{(3)}\ c2т132} \frac{\alpha_\alpha{}^2\ {}^{\cdot(3)(3)}_{u+u13}\ ты^{(3)}, ты^{(3)}\ в2т13\ \xi^{(13)}, ты^{(1)} + {}^2_{13}\ ты^{(1)}, ты^{(3)} + ты^{(1)}, ты^{(3)}\ 2\text{-с}\ ты^{(3)}, ты^{(3)}\ \xi_\alpha^{(13)}}{{}^2_{13}};$$

$$\Gamma_\alpha^{(21)} = \frac{e2e1}{м2}\frac{2}{3в}\ \frac{2\text{-в}\ ты^{(2)}, ты^{(1)}\ \alpha^{(21)}\ c2т21\ \xi^{(21)}\ \xi^{(21)}, ты^{(2)}\ ты_\alpha^{(1)}}{3} \frac{4_{21}+D21\ {}^2_{21}\xi^{(21)}, ты^{(1)} + \xi^{(21)}, ты^{(1)}\ c2т21\ ты^{(1)}, ты^{(1)}}{2\,21}$$

$$\frac{Д23}{\xi^{(21)}, ты^{(1)}\ c2т212} \frac{\alpha_\alpha{}^2\ {}^{\cdot(1)(1)}_{u+u21}\ ты^{(1)}, ты^{(1)}\ в2т21\ \xi^{(21)}, ты^{(1)} + {}^2_{21}\ ты^{(2)}, ты^{(1)} + ты^{(2)}, ты^{(1)}\ 2\text{-с}\ ты^{(1)}, ты^{(1)}\ \xi_\alpha^{(21)}}{2\,21};$$

$$\Gamma_\alpha^{(23)} = \frac{e2e3}{м2}\frac{2}{3с}\ \frac{2\text{-в}\ ты^{(2)}, ты^{(3)}\ \alpha^{(23)}\ c2т23\ \xi^{(23)}\ \xi^{(23)}, ты^{(2)}\ ты_\alpha^{(3)}}{3} \frac{4_{23}+D23\ {}^2_{23}\xi^{(23)}, ты^{(3)} + \xi^{(23)}, ты^{(3)}\ c2т23\ ты^{(3)}, ты^{(3)}}{{}^2_{23}}$$

$$\frac{Д23}{\xi^{(23)}, ты^{(3)}\ ,\ ,c2,т232} \frac{\alpha_\alpha{}^2\ {}^{\cdot(3)(3)}_{u+u23}\ ты^{(3)}, ты^{(3)}\ в2т23\ \xi^{(23)}, ты^{(2)} + {}^2_{23}\ ты^{(2)}, ты^{(3)} + ты^{(2)}, ты^{(3)}\ 2\text{-с}\ ты^{(3)}, ты^{(3)}\ \xi_\alpha^{(23)}}{{}^2_{23}};$$

$$\Gamma_\alpha^{(31)} = \frac{e3e1}{м3}\frac{3}{3с}\ \frac{2\text{-в}\ ты^{(3)}, ты^{(1)}\ \alpha^{(31)}\ c2т31\ \xi^{(31)}\ \xi^{(31)}, ты^{(3)}\ ты_\alpha^{(1)}}{3} \frac{4_{31}+D31\ {}^2_{31}\xi^{(31)}, ты^{(1)} + \xi^{(31)}, ты^{(1)}\ c2т31\ ты^{(1)}, ты^{(1)}}{2\,31}$$

$$\frac{Д31}{\xi^{(31)}, ты^{(1)}\ c2т312} \frac{{}^2_{31}\alpha^{\cdot(1)(1)}_{ты}\ {}^{+и}_{\alpha}\ ты^{(1)}, ты^{(1)}\ в2т31\ \xi^{(31)}, ты^{(3)} + {}^2_{31}\ ты^{(3)}, ты^{(1)} + ты^{(3)}, ты^{(1)}\ 2\text{-с}\ ты^{(1)}, ты^{(1)}\ \xi_\alpha^{(31)}}{2\,31};$$

$$\Gamma_\alpha^{(32)} = \frac{e3e2}{м3}\frac{3}{3с}\ \frac{2\text{-в}\ ты^{(3)}, ты^{(2)}\ \alpha^{(32)}\ c2т32\ \xi^{(32)}\ \xi^{(32)}, ты^{(3)}\ ты_\alpha^{(2)}}{3} \frac{4_{32}+D32\ {}^2_{32}\xi^{(32)}, ты^{(2)} + \xi^{(32)}, ты^{(2)}\ c2т32\ ты^{(2)}, ты^{(2)}}{{}^2_{32}}$$

$$\frac{Д32}{\xi^{(32)}, ты^{(2)}\ c2т322} \frac{{}^2_{ты32}\alpha^{\cdot(2)(2)}_{}\ {}^{+и}_{\alpha}\ ты^{(2)}, ты^{(2)}\ в2т32\ \xi^{(32)}, ты^{(3)} + {}^2_{32}\ ты^{(3)}, ты^{(2)} + ты^{(3)}, ты^{(2)}\ 2\text{-с}\ ты^{(2)}, ты^{(2)}\ (32)\xi_\alpha^{(32)}}{{}^2_{32}};$$

$$\Gamma_\alpha^{(к)рад} = \frac{2}{2\,мк\,с}\ \frac{ты_\alpha^{(к)}(т)}{3\ к}\ ты^{(к)}(т),\ \ddot{ты}(к)(т) + \frac{\ddot{ты}_\alpha^{(к)}(t)\ k}{},(к = 1, 2, 3), \qquad (5)$$

Machine Translated by Google

где $D_{km} = \dfrac{c\sqrt{\xi^{(km)}, \xi^{(km)}}}{c\sqrt{\xi^{(km)}, \xi^{(km)}} - \xi^{(km)}, ты^{(k)}}$ для $m / = k$.

В соответствии с формулировкой Кеплера первая частица P_1 находится в начале координат $O(0,0,0)$, и, следовательно,

$$x^{(1)}(t) = 0, \; и \; \alpha(t) = 0, \quad ты^{(1)}_{\alpha}(t) = 0 \; (\alpha = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Тогда получаем $0 = G_1^{(12)} + Г_1^{(12)(13)}$, $0 = Г_2^{(12)} + Г_2^{(12)(13)}$, $0 = Г_3^{(12)} + Г_3^{(12)(13)}$.

Легко видеть, что уравнение $0 = G_1^{2(13)} + G_1^{(13)}$ становится $0 = 0$.

Замечание 1. Заметим, что в уравнении $0 = G_2^{(12)} + G_2^{(13)}$, не известные функции и (12) (13) их производные имеют запаздывающие аргументы $t - \tau 12$, а в уравнении $0 = G_3^{(12)} + G_3^{(13)}$ аргументы равны $t - \tau 13$. Это означает, что мы должны рассматривать эти уравнения на начальном интервале $[-T, 0]$. Поэтому первую группу из трех уравнений (2) мы называем исходными уравнениями. Рассмотрим вторую и третью группу уравнений (3) и (4) соответственно (шесть) на интервале $[0, \infty)$.

Чтобы упростить уравнения движения, заметим, что для первой орбиты Бора постоянная тонкой структуры Зоммерфельда равна $\beta = c/c \approx 1/137 \approx \beta \approx 0$. Следовательно, $k = 2c\sqrt{ты^{(k)}, ты^{(k)}} = c\sqrt{1 - ты^{(k)}, ты^{(k)}/c^2} \approx c$, $km = c - ты^{(м)}(t - \tau km)$, $ты^{(м)}(t - \tau km) \approx c$, и

$$c_2 \approx \frac{\sqrt{ты^{(2)}, ты^{(3)}}}{2c} \approx 2c.$$

c_1

Если ρkm — расстояние между k-й и m-й частицей через $\xi(км)$ $\rho km \approx 10^{-11}$ м (ср. с [14]), получим

$$c \approx 2\tau 23 \approx \xi^{(23)}, ты^{(2)} \approx 2\tau 23 \approx c \approx 2\tau 23, \quad D_{23} = c \approx 2\tau 23 - \frac{c\sqrt{\xi^{(23)}, ты^{(3)}}}{\xi^{(23)}, ты^{(2)}} \approx 1 \; и$$

$$H_{23} = \frac{{}^{4}\sqrt{23} + D_{23}^{2}\sqrt{\xi^{(23)}, и^{(3)}}}{{}_{23}^{2}} \approx c^{2} + \frac{\xi^{(23)} \approx \tau 23 \; и^{(3)}, ты^{(3)}}{c \approx 2\tau 23 \sqrt{\xi^{(23)}, ты^{(3)}}}.$$

Мы можем упростить приведенные выше уравнения в соответствии с последними соотношениями:

$$Г_{\alpha}^{(12)} = \frac{e_1 e_2}{м_1} \frac{1}{c^6} \frac{c^2 + \xi^{(12)}, и^{(2)}}{\tau 123} \xi_{\alpha}^{(12)} \approx 12u_{\alpha}^{(2)} \; c \approx 2\tau 12 \, 2 \, ты_{\alpha}^{(2)};$$

$$Г_{\alpha}^{(13)} = \frac{e_1}{e_3 м_1} \frac{1}{c^6} \frac{c^2 + \xi^{(13)}, и^{(3)}}{\tau 133} (13)(3) \xi_{\alpha} \approx 13u_{\alpha} \; c \approx 2\tau 13 \, 2 \, ты_{\alpha}^{(3)};$$

$$Г_{\alpha}^{(21)} = \frac{e_2 e_1}{c} \frac{2}{3 м_2} \frac{2 c \xi_{\alpha}^{(21)}}{(c \approx 2\tau 21)^3} \frac{4}{2_{21}} \quad \frac{(21)}{4\tau 213 м_2}; \; Г_{\alpha}^{(23)} \xi \; c \; \frac{e_2 e_1}{\alpha} = \frac{e_2 e_3}{3 м_2 c} \frac{\xi_{\alpha}^{(23)}}{\tau 233} \frac{\xi^{(23)}, и^{(3)}}{3 c} \frac{\cdot (3)}{ст 23} \; :$$

$$Г_{\alpha}^{(31)} = \frac{e_3 e_1}{м_3} \frac{3}{3 c} \frac{2 c \xi_{\alpha}^{(31)}}{(c \approx 2\tau 31)^3} \frac{4}{2_{31}} \quad \frac{e_3 e_1}{м_3} \frac{\xi_{\alpha}^{(31)}}{4\tau 313}; \; Г_{\alpha}^{(32)} = \frac{e_2 e_3}{3 м_3 c} \frac{\xi_{\alpha}^{(32)}}{\tau 323} \frac{\xi^{(32)}, и^{(3)}}{3 c} \frac{\cdot (2)}{ст 32} \; :$$

$$Г_{\alpha}^{(2)рад} = \frac{e^2}{2 м_2 c^2} \frac{ты_{\alpha}^{(2)} \; ты^{(2)} \; \ddot{ты}^{(2)}}{3 c} + \frac{\ddot{ты}_{\alpha}^{(2)}}{c} \qquad \alpha^{(3)рад} = \frac{e^2}{m_3 c^{3\,2}} \frac{ты_{\alpha}^{(3)} \; ты^{(3)} \; \ddot{ты}^{(3)}}{3 c} + \frac{\ddot{ты}_{\alpha}^{(3)}}{c}$$

; Г .

Machine Translated by Google

Для неподвижной частицы G = 0. Поэтому исходное (векторное) уравнение (13) (1)rad
ции, $\Gamma_1^{(12)}(1\beta)\Gamma_1^{(12)} = 0$, $\Gamma_2^{(12)} + \Gamma_2^{(12)} = 0$, $\Gamma_3^{(12)}(1\beta)G_3 = 0$, станем:

$$\frac{e1}{e2\,м1}\,2c + \xi^{(12)}{}_{,(2).\,ты}\,{}^{(12)(2)\xi\ \tau 12u\,1}_{1}\,-c\,2\tau 12\,2{}^{(2)}_{ты_1} + \frac{e3}{e1\,м1}\,2c + \xi^{(13)}{}_{,(3).\,ты}\,{}^{(13)(3)\xi\ \tau 13u\,1}_{1}\,-c\,2\tau 13\,2{}^{(3)}_{ты_1} = 0$$

$$\frac{e1}{e2\,м2}\,2+c\ \xi^{(12)}{}_{,(2).\,ты}\,{}^{(12)(2)\xi\ \tau 12u\,2}_{2}\,-c\,2\tau 12\,2{}^{(2)}_{ты_2} + \frac{e3}{e1\,м2}\,2+c\ \xi^{(13)}{}_{,(3).\,ты}\,{}^{(13)(3)\xi\ \tau 13u\,2}_{2}\,-c\,2\tau 13\,2{}^{(3)}_{ты_2} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{e1}{e2\,м3}\,2+c\ \xi^{(12)}{}_{,(2).\,ты}\,{}^{(12)(2)\xi\ \tau 12u\,3}_{3}\,-c\,2\tau 12\,2{}^{(2)}_{ты_3} + \frac{e3}{e1\,м3}\,2+c\ \xi^{(13)}{}_{,(3).\,ты}\,{}^{(13)(3)\xi\ \tau 13u\,3}_{3}\,-c\,2\tau 13\,2{}^{(3)}_{ты_3} = 0.$$

Мы предполагаем, что

$$2+c\ \xi^{(12)}{}_{,(2).\,ты}\,{}^{(12)(2)\xi\ \tau 12u\,1\,1}\,-c\,2\tau 12\,2.{}^{(2)}_{ты1} = 0,$$

$$2+c\ \xi^{(12)}{}_{,(2).\,ты}\,{}^{(12)(2)\xi\ \tau 12u\,2\,2}\,-c\,2\tau 12\,2.{}^{(2)}_{ты2} = 0, \qquad (8)$$

$$2+c\ \xi^{(12)}{}_{,(2).\,ты}\,{}^{(12)(2)\xi\ \tau 12u\,3\,3}\,-c\,2\tau 12\,2.{}^{(2)}_{ты3} = 0.$$

и

$$2+c\ \xi^{(13)}{}_{,(3).\,ты}\,{}^{(13)(3)\xi\ \tau 13u\,1}_{1}\,-c\,2\tau 13\,2.{}^{(3)}_{ты_1} = 0$$

$$2+c\ \xi^{(13)}{}_{,(3).\,ты}\,{}^{(13)(3)\xi\ \tau 13u\,2}_{2}\,-c\,2\tau 13\,2.{}^{(3)}_{ты_2} = 0, \qquad (9)$$

$$2+c\ \xi^{(13)}{}_{,(3).\,ты}\,{}^{(13)(3)\xi\ \tau 13u\,3}_{3}\,-c\,2\tau 13\,2.{}^{(3)}_{ты_3} = 0.$$

Система (8) содержит функции с аргументом $t - \tau 12(t) \in [-T, 0]$ при $t \in [0, T]$.
Система (9) содержит функции с аргументом $t - \tau 13(t) \in [-T, 0]$ при $t \in [0, T]$. Если (8) и (9) выполнены, то (7) также выполнено.

Замечание 2. Выбор $t - \tau km(t) \in [-T, 0]$ следует из следующих рассуждений: пусть T — период решения. Заметим, что все аргументы неизвестных функций равны $t - \tau km, (m)\ (t - \tau km)$. Поэтому $\tau 0 = $ ты = ты решение надо искать на начальном множестве, т.е. при $t - \tau km(t) \in [\tau 0; 0]$, где $\min\{t - \tau km(t) : t \in [0, T]\}$. Поскольку $1 - d\tau km(t)/dt > 0$, то $t - \tau km(t)$ — возрастающая функция. Мы доказали, что если траектории T-периодичны, то $\tau km(t)$ тоже T-периодична.

Отсюда следует, что $T - \tau km(-T) \le 0 - \tau km(0) \le T - \tau km(0) \le \tau km(0) - \tau km(0) \le T - \tau km(0)$, а затем $0 - \tau km(-0) \le t - \tau km(t) \le T - \tau km(T) = T - \tau km(0) = 0$. Следовательно, $T \le t - \tau km(t) \le 0$. Следовательно, функции $t - \tau km(t) : [0, T] \to [-T, 0]$, что означает, что $\tau 0 = T$, и мы полагаем $t - \tau km(t) = \theta \in [-T, 0]$. Аргументы неизвестных (2) функций (θ), После преобразований, приведенных в приложении A, из (8) и (9) $_{ты}{}^{(2)} = {}^{(3)}_{ты}(\theta)$ принадлежат $[-T, 0]$.

получаем исходные уравнения:

$$\ddot{\rho}2(t - \tau 23) = \rho 2(t - \tau 23)\cdot\varphi 2^{2}(t - \tau 23)\cos^2\lambda 2(t - \tau 23) + \rho 2(t - \tau 23)\,\dot{\lambda}2^{2}(t - \tau 23) - \frac{c^2}{\rho 2(t - \tau 23)},$$

$$\ddot{\varphi}2(t - \tau 23) = -2\,\frac{\dot{\rho}2(t - \tau 23)\cdot\varphi 2(t - \tau 23)}{\rho n(t - \tau 23)}, \qquad (10\text{-}1)$$

$$\ddot{\lambda}2(t - \tau 23) = -2\,\frac{\dot{\rho}2(t - \tau 23)\,\dot{\lambda}2(t - \tau 23) + \rho 2(t - \tau 23)\cdot\varphi 2\,\dot{\rho}2(t - \tau 23)}{\rho 2(t - \tau 23)\sin\lambda 2(t - \tau 23)\cos\lambda 2(t - \tau 23)}.$$

Machine Translated by Google

для второй частицы и

$$\ddot{\rho}_3(t-\tau_{32}) = \rho_3(t-\tau_{32})\cdot\dot{\varphi}_3^2(t-\tau_{32}) + \rho_3(t-\tau_{32})\dot{\lambda}_3^2(t-\tau_{32}) - \frac{c^2}{\rho_3(t-\tau_{32})},$$

$$\ddot{\varphi}_3(t-\tau_{32}) = -2\dot{\rho}_3(t-\tau_{32})\dot{\varphi}_3(t-\tau_{32})\dot{\lambda}_3(t-\tau_{32})\operatorname{tg}\lambda_3(t-\tau_{32}) - \frac{2\dot{\rho}_3(t-\tau_{32})\cdot\dot{\varphi}_3(t-\tau_{32})}{\rho_3(t-\tau_{32})}, \quad (10\text{-}2)$$

$$\ddot{\lambda}_3(t-\tau_{32}) = -\frac{2\dot{\rho}_3(t-\tau_{32})\dot{\lambda}_3(t-\tau_{32})+\rho_3(t-\tau_{32})\cdot\dot{\varphi}_3^2(t-\tau_{32})\sin\lambda_3(t-\tau_{32})\cos\lambda_3(t-\tau_{32})}{\rho_3(t-\tau_{32})}.$$

для третьей частицы.

Рассуждения из замечания 2 подразумевают, что мы ищем решение (10-1) и (10-2) на интервале $[-T, 0]$.

Результат о существовании–единственности для (10 n) $(n = 1, 2)$ может быть получен аналогично [19] в функциональном пространстве $M_{r2}^0 \times M_{\varphi 2}^0 \times M_{\eta 2}^0 \times M_{\varphi 3}^0 \times M_{\eta 3}^0$,

$$M_{r2}^0 = \mu(t-T_k) = r20(.) \in C[-T, 0] : r20(m)(t) = \omega_2 m R2 e^{\mu(t-T_k)}, r20(-T) = r20(0) = 0,$$

$$M_{\varphi 2}^0 = \varphi 20(.) \in C[-T, 0] : \varphi 20(m)(t) = \omega_2 m\Phi_2 e^{\mu(t-T_k)}, \varphi 20(-T) = \varphi 20(0) = 0,$$

$$M_{\eta 2}^0 = \eta 20(.) \in C[-T, 0] : \eta 2(m)(t) = \omega_2 m\Phi_2 e^{\mu(t-T_k)}, \eta 20(-T) = \eta 20(0) = 0,$$

$$M_{r3}^0 = \mu(t-T_k) = r30(.) \in C[-T, 0] : r30(m)(t) = \omega_3 m R3 e^{\mu(t-T_k)}, r30(-T) = r30(0) = 0,$$

$$M_{\varphi 3}^0 = \varphi 30 \in C[-T, 0] : \varphi 30(m)(t) = \omega_3 m\Phi 3 e^{\mu(t-T_k)}, \varphi 30(-T) = \varphi 30(0) = 0,$$

$$M_{\eta 3}^0 = \mu(t-T_k) = \eta 30 \in C[-T, 0] : \eta 30(m)(t) = \omega_3 m Y 3 e^{\mu(t-T_k)}, \eta 30(-T) = \eta 30(0) = 0.$$

как неподвижные точки операторов

$$Br2(r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3)(t) := \int_{-T}^{\tau} \Gamma_{\rho 2}(c)\,dc \int_{-T}^{\frac{\tau+T}{T}\cdot 0} Gr2(s)ds, \quad t \in [-T, 0],$$

$$Br3(r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3)(t) := \int_{-T}^{\tau} \Gamma_{\rho 3}(c)\,dc \int_{-T}^{\frac{\tau+T}{T}\cdot 0} Gr3(s)ds, \quad t \in [-T, 0],$$

$$B\varphi 2(r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3)(t) := \int_{-T}^{\tau} G\varphi 2(s)ds \int_{-T}^{\frac{\tau+T}{T}\cdot 0} G\varphi 2(s)ds, \quad t \in [-T, 0],$$

$$B\varphi 3(r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3)(t) := \int_{-T}^{\tau} \Gamma_{\rho 3}(c)\,dc \int_{-T}^{\frac{\tau+T}{T}\cdot 0} Gr3(s)ds, \quad t \in [-T, 0],$$

$$B\eta 2(r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3)(t) := \int_{-T}^{\tau} G\eta 2(s)ds \int_{-T}^{\frac{\tau+T}{T}\cdot 0} G\eta 2(s)ds, \quad t \in [-T, 0],$$

$$B\eta 3(r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3)(t) := \int_{-T}^{\tau} G\eta 3(s)ds \int_{-T}^{\frac{\tau+T}{T}\cdot 0} G\eta 3(s)ds, \quad t \in [-T, 0].$$

Легко убедиться в том, что

$$Br2(.)(-T) = \int_{-T}^{T} \Gamma_{\rho 2}(c)\,dc \int_{-T}^{\frac{T+T}{T}\cdot 0} Gr2(s)ds = 0 = \int_{-T}^{0} \Gamma_{\rho 2}(c)\,dc \int_{-T}^{\frac{T}{T}\cdot 0} Gr2(s)ds = Br2(.)(0)$$

и так далее. Затем мы принимаем решения в качестве исходных функций $r20(t)$, $\varphi 20(t)$, $\eta 20(t)$, $r30(t)$, $\varphi 30(t)$, $\eta 30(t)$ для основных уравнений, приведенных ниже.

3. Основные уравнения в сферических координатах.

Заметим, что $\varphi 23 = \varphi 2(t) - \varphi 3(t-\tau 23)$, $\varphi 32 = \varphi 3(t) - \varphi 2(t-\tau 32)$.

Из (2)–(4) в Приложении Б получаем окончательный вид уравнений движения второй и третьей частицы:

Machine Translated by Google

$$\ddot{\rho}2(t) = \frac{e2e1}{m2}\frac{}{1 c\rho2 2(t)} \frac{e2e3}{m2}\frac{\rho2(t) \quad \rho3(t \quad \tau 23)(\cos\varphi23\cos\lambda2(t)\cos\lambda3(t \quad \tau 23)+\sin\lambda2(t)\sin\lambda3(t \quad \tau 23))}{3c}\frac{\xi^{(23).\ и\ (3)}}{в3\tau 23\,3}$$

$$\frac{e2e3}{m2}\ddot{\rho}3(\cos\varphi23\cos\lambda2(t)\cos\lambda3(t \quad \tau 23)+\sin\lambda2(t)\sin\lambda3(t \quad \tau 23))+\rho3(t \quad \tau 23)\ldots\varphi3(t \quad \tau 23)\sin\varphi23\cos\lambda2(t)\cos\lambda3(t \quad \tau 23)c\,4\tau 23$$

$$\frac{}{}\ddot{\lambda}3(\sin\lambda2(t)\cos\lambda3(t \quad \tau 23) \quad \cos\varphi23\sin\lambda3(t \quad \tau 23)\cos\lambda2(t))e2e3\,\rho3\,c\,4\tau 23\,m2 \quad \frac{2}{e\ 2\ м2}\dddot{\rho}_{2\,3};$$

$$\ddot{\varphi}2(t) = \frac{e2e3}{м2}\frac{\rho3(t \quad \tau 23)\sin\varphi23\cos\lambda3(t \quad \tau 23)}{\tau 23\,3\rho2(t)\cos\lambda2(t)}\frac{\xi^{(23).\ (3)}_{ты,}}{6c}+$$

$$+\frac{\ddot{\rho}3(t \quad \tau 23)\cos\lambda3(t \quad \tau 23)\sin\varphi23+\rho3(t \quad \tau 23)\ldots\varphi3(t \quad \tau 23)\cos\lambda3(t \quad \tau 23)\cos\varphi23}{c\,4\tau 23\rho2(t)\cos\lambda2(t)}$$

$$\frac{\ddot{\rho}3(t \quad \tau 23)\lambda3(t \quad \tau 23)\sin\lambda3(t \quad \tau 23)\sin\varphi23\,c}{4\tau 23\rho2(t)\cos\lambda2(t)} \quad \dddot{\varphi}_{2\ (t)\ в^3};$$

$$\ddot{\lambda}2(t) = \frac{3\,м2}{}\frac{\rho3(t \quad \tau 23)\cos\varphi23\sin\lambda2(t)\cos\lambda3(t \quad \tau 23)e2e3\,c\,3\tau 23}{}\frac{\xi^{(23).\ (3)}_{,\ ты}}{в3\rho2}+$$

$$+\frac{e2e3}{м2}\ddot{\rho}3(\cos\varphi23\cos\lambda3(t \quad \tau 23)\sin\lambda2(t) \quad \sin\lambda3(t \quad \tau 23)\cos\lambda2(t))+\rho3\ldots\varphi3\sin\varphi23\sin\lambda2(t)\cos\lambda3(t \quad \tau 23)+в\,4\tau 23\rho2(t)$$

$$+\frac{e2e3}{m2}\frac{\ddot{\rho}3\ \lambda3(\cos\varphi23\sin\lambda2(t)\sin\lambda3(t \quad \tau 23)+\cos\lambda2(t)\cos\lambda3(t \quad \tau 23)\,c}{4\tau 23\rho2(t)} \quad \frac{2}{e\ 2\ м2}\dddot{\lambda}_{2(t)\ c^3};$$

где

$$\ddot{\rho}3(\tau) = \frac{e3e1}{м3}\frac{1}{c\rho3\,2(t)} \frac{e2e3}{м3}\frac{\rho3(t) \quad \rho2(t \quad \tau 32)(\cos\varphi32\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\cos\lambda3(t)+\sin\lambda2(t \quad \tau 32)\sin\lambda3(t))}{3c}\frac{\xi^{(32).\ и\ (2)}}{в3\tau 32\,3}$$

$$\frac{e3e2}{м3}\ddot{\rho}2(\cos\varphi32\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\cos\lambda3(t)+\sin\lambda2(t \quad \tau 32)\sin\lambda3(t))+\rho2(t \quad \tau 32)\ldots\varphi2(t \quad \tau 32)\sin\varphi32\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\cos\lambda3(t)c\,4\tau 23$$

$$\frac{e3e2}{м3}\frac{\ddot{\rho}2(t \quad \tau 32)\lambda2(t \quad \tau 32)(\sin\lambda3(t)\cos\lambda2(t \quad \tau 32) \quad \cos\varphi32\sin\lambda2(t \quad \tau 32)\cos\lambda3(t))}{в4\tau 23} \quad \frac{и_3^2}{м3}\dddot{\rho}_{3\ (\tau)\ e\ 3};$$

$$\ddot{\varphi}3 = \frac{e3e2}{м3}\frac{\rho2(t \quad \tau 32)\sin\varphi32\cos\lambda2(t \quad \tau 32)}{\tau 32\,3\rho3(t)\cos\lambda3(t)}\frac{\xi^{(32).\ и,\ (2)}}{6c}+$$

$$+\frac{\ddot{\rho}2(t \quad \tau 32)\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\sin\varphi32+\rho2(t \quad \tau 32)\ldots\varphi2(t \quad \tau 32)\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\cos\varphi32}{c\,4\tau 32\rho3\cos\lambda3(t)}$$

$$\frac{\ddot{\rho}2(t \quad \tau 32)\lambda2(t \quad \tau 32)\sin\lambda2(t \quad \tau 32)\sin\varphi32\,c}{4\tau 32\rho3\cos\lambda3(t)} \quad \dddot{\varphi}_{3\ (t)\ в^3};$$

$$\ddot{\lambda}3(t) = \frac{e3e2}{м3}\frac{\rho2(t \quad \tau 32)\cos\varphi32\sin\lambda3(t)\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\,c}{3\tau 32\,3}\frac{\xi^{(32).\ и\ (2)}}{в3\rho3(t)}+$$

$$+3\frac{e3e2}{м3c}\ddot{\rho}3(\cos\varphi32\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\sin\lambda3(t) \quad \sin\lambda2(t \quad \tau 32)\cos\lambda3(t))+\rho2(t \quad \tau 32)\ldots\varphi2(t \quad \tau 32)\sin\varphi32\sin\lambda3(t)\cos\lambda2(t \quad \tau 32)c\tau 32\rho3(t)$$

$$+3\frac{e3e2}{м3c}\frac{\rho2(t \quad \tau 32)\ddot{\lambda}2(t \quad \tau 32)(\cos\varphi23\sin\lambda2(t \quad \tau 32)\sin\lambda3(t)+\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\cos\lambda3(t)}{c\tau 32\rho3(t)} \quad \frac{2}{и\ 3\ м3}\dddot{\lambda}_{3(\tau)\ 3\ c}$$

и

Machine Translated by Google

$$\xi^{(32)}_{,(2)\,.\ \text{ты}} =$$

$$= [\rho3(t)\cos(\varphi3(t) \quad \varphi2(t \quad \tau 32)\cos\lambda3(t)\cos\lambda2(t \quad \tau 32) + \rho3(t)\sin\lambda3(t)\sin\lambda2(t \quad \tau 32) \quad \rho2(t \quad \tau 32)] \,..\, \rho2(t \quad \tau 32)+$$

$$+ \sin(\varphi3(t) \quad \varphi2(t \quad \tau 32))\cos\lambda3(t)\cos\lambda2(t \quad \tau 32)\rho2(t \quad \tau 32)\rho3(t) \,..\varphi2(t \quad \tau 32)+$$

$$+[\sin\lambda3(t)\cos\lambda2(t \quad \tau 32) \quad \cos(\varphi3(t) \quad \varphi2(t \quad \tau 32))\sin\lambda2(t \quad \tau 32)\cos\lambda3(t)]\rho2(t \quad \tau 32)\rho3(\tau)\lambda2(t \quad \tau 32).$$

После замены

$$\rho n = rn, \quad \lambda n = \eta n\ (n = 2, 3) \quad \rho n(t) = \rho n0 + \varphi n = \varphi n, \quad \int_0^t rn(s)ds, \ \varphi n = \varphi n0 + \int_0^t \varphi n(s)ds, \ \lambda n = \lambda n0 + \int_0^t \eta n(s)ds$$

систему уравнений движения второй и третьей частиц можно переписать в виде

$$\dot{r}2 = \frac{e2e1}{м2}\frac{}{1 \quad c\rho2^2} \quad \frac{e2e3}{м2}\frac{\rho2 \quad \rho3(\cos\varphi23\cos\lambda2\cos\lambda3+\sin\lambda2\sin\lambda3)}{3c} \quad \frac{\xi^{(23)}_{,\ и\ (3)}}{в3\tau 23\,3}$$

$$\frac{e2e3}{м2}\,.\,r3(\cos\varphi23\cos\lambda2\cos\lambda3+\sin\lambda2\sin\lambda3)+\rho3\,\varphi3\sin\varphi23\cos\lambda2\cos\lambda3+\rho3\,\eta3\,(\sin\lambda2\cos\lambda3 \quad \cos\varphi23\sin\lambda3\cos\lambda2)\,c\,4\tau 23 \quad \frac{2}{м2}\frac{..}{в} \quad Гр2;$$

$$\dot{\varphi}2 = \frac{e2e3}{м2}\frac{\rho3\sin\varphi23\cos\lambda3\,\tau\,23}{3\rho2\cos\lambda2} \quad \frac{\xi^{(23)}_{,\ \text{ты}\ (3)}}{6c} \quad \frac{r3\cos\lambda3\sin\varphi23+\rho3\,\varphi3\cos3\cos\varphi23 \quad \rho3\,\eta3\sin\lambda3\sin\varphi23+c}{4\tau 23\rho2\cos\lambda2} \quad \frac{\varphi2}{3c} \quad G\varphi2;$$

$$\dot{\eta}2 = \frac{3\tau 23}{3м2}\frac{\rho3\cos\varphi23\sin\lambda2\cos\lambda3\,e2e3\,c}{} \quad \frac{\xi^{(23)}_{,\ и\ (3)}}{в3\rho2} +$$

$$\frac{}{e2e3+м2}\,.\,r3(\cos\varphi23\cos\lambda3\sin\lambda2 \quad \sin\lambda3\cos\lambda2)+\rho3\,\varphi3\sin\varphi23\sin\lambda2\cos\lambda3 \quad \rho3\,\eta3\,(\cos\varphi23\sin\lambda2\sin\lambda3+\cos\lambda2\cos\lambda3\,c\,4\tau 23\rho2 \quad \frac{2}{e}\frac{\eta2}{2м2в^3} \quad Г\eta2;$$

$$\dot{r}3 = \frac{e3e1}{м3}\frac{1}{c\rho3^2} \quad \frac{e2e3}{м3}\frac{\rho3 \quad \rho2(\cos\varphi32\cos\lambda2\cos\lambda3+\sin\lambda2\sin\lambda3)}{3c} \quad \frac{\xi^{(32)}_{,\ и\ (2)}}{в3\tau 32\,3}$$

$$\frac{e3e2}{м3}\,.\,r2(\cos\varphi32\cos\lambda2\cos\lambda3+\sin\lambda2\sin\lambda3)+\rho2\,\eta2\,(\sin\lambda3\cos\lambda2 \quad \cos\varphi32\sin\lambda2\cos\lambda3)\,\varphi2\sin\varphi32\cos\lambda2\cos\lambda3+\rho2\,c\,4\tau 23 \quad \frac{2}{и\,3\,м3}\frac{\rho3}{\cdot^3} \quad Гр3;$$

$$\dot{\varphi}3 = \frac{e3e2}{м3}\frac{\rho2\sin\varphi32\cos\lambda2\,\tau\,32}{3\rho3\cos\lambda3} \quad \frac{\xi^{(32)}_{,\ и\ (2)}}{6c} \quad \frac{r2\cos\lambda2\sin\varphi32+\rho2\,\eta2\,\sin\lambda2\sin\varphi32\cos\varphi23\rho2\cos2\cos\varphi32 \quad \rho2+c}{c^3} \quad \frac{\varphi3}{} \quad G\varphi3;$$

$$\dot{\eta}3 = \frac{3\tau 32}{3м3}\frac{\rho2\cos\varphi32\sin\lambda3\cos\lambda2\,e3e2\,c}{} \quad \frac{\xi^{(32)}_{,\ \text{ты}\ (2)}}{в3\rho3} +$$

$$+3\frac{e3e2}{м3c}\,.\,r3(\cos\varphi32\cos\lambda2\sin\lambda3 \quad \sin\lambda2\cos\lambda3)+\rho2\,\eta2\,(\cos\varphi23\sin\lambda2\sin\lambda3+\cos\lambda2\cos\lambda3\,\varphi2\sin\varphi32\sin\lambda3\cos\lambda2 \quad \rho2\,c\tau 32\rho3 \quad \frac{2}{в}\frac{e}{3\,3\,м3}\frac{\eta3}{} \quad G\eta3\,.$$

В дальнейшем мы будем называть указанную выше систему (БС) – базовой системой. Это нейтральная система первого порядка по сферическим скоростям.

4. Введение функциональных пространств и некоторые вспомогательные

предложения. Доказано, что для липшицевых непрерывных Т-периодических траекторий каждое из функциональных уравнений

Machine Translated by Google

$$\tau_{23}(t) = \frac{1}{c}\sum_{\alpha=1}^{3} x_{\alpha}^{(2)}\alpha^{(3)}(t - \tau_{23}(t))2\,,\ \tau_{32}(t) = \alpha(t) \frac{1}{c}\sum_{\alpha=1}^{3} x_{\alpha}(t) \cdot \alpha(t - \tau_{32}(t))2\ (3)\ (2)$$

имеет единственное T-периодическое решение.

Через $C_T[0,\infty)$ обозначим множество всех бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $r(T) = r(0) = 0$. Введем следующие множества, где $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ — строго положительные константы, $\omega > 0$ означает m-юпроизводную от r и $r^{(0)}(t) = r(t)$. Затем введем следующие функциональные пространства:

$$M_{rn} = r_n \subset C_T[0,\infty) : r_n^{(m)}(t) \subset \omega_n^m R_n e^{\mu(t - T_k)};\ \rho_n(0)(T_k) = 0;\ r_n(c)dc = 0,\ t \in [T_k, T_{k+1}];$$

$$d(k,m)(r_n,\bar{r}_n) = \sup \frac{|r_n^{(m)}(t) - \bar{r}_n^{(m)}(t)|}{\omega_n^m} e^{\mu(t - T_k)} : t \in [T_k, T_{k+1}];$$

$$M_{\varphi_n} = \varphi_n \subset C_T[0,\infty) : \varphi_n^{(m)}(t) \subset \omega_n^m \Phi_n e^{\mu(t - T_k)},\ T_{k+1}\varphi_n(s)ds = T\varphi_{n0},\ t \in [T_k, T_{k+1}];$$

$$d(k,m)(\varphi_n, \bar{\varphi}_n) = \sup \frac{|\varphi_n^{(m)}(t) - \bar{\varphi}_n^{(m)}(t)|}{\omega_n^m} e^{\mu(t - T_k)} : t \in [T_k, T_{k+1}];$$

$$M_{\eta n} = \eta_n \subset C_T[0,\infty) : \eta_n;\ \eta_n^{(m)}(t) \subset \omega_n^m Y_n e^{\mu(t - T_k)},\ \eta_n^{(0)}(T_k) = 0;\ \int_{T_k}^{T_{k+1}} \eta_n(s)ds = 0;\ \int_{T_k}^{t} \eta(s)ds \le \frac{\pi}{2} - \delta,\ t \in [T_k, T_{k+1}];$$

$$d(k,m)(\eta_n, \bar{\eta}_n) = \sup \frac{|\eta_n^{(м)}(t) - \bar{\eta}_n^{(м)}(t)|}{\omega_n^m} e^{\mu(t - T_k)} : t \in [T_k, T_{k+1}]$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots), (m = 0, 1, 2, \ldots), (n = 2, 3)$.

Здесь ω_n, R_n, Φ_n, Y_n $(n = 2, 3)$ и μ — строго положительные константы, такие что $\mu > \omega_n$.

Рассмотрим произведение равномерных пространств $M_{r2} \times M_{\varphi 2} \times M_{\eta 2} \times M_{r3} \times M_{\varphi 3} \times M_{\eta 3}$, наделенное счетным семейством псевдометрик:

$$d(k,m)((r_2, \varphi_2, \eta_2, r_3, \varphi_3, \eta_3),(\bar{r}_2, \bar{\varphi}_2, \bar{\eta}_2, \bar{r}_3, \bar{\varphi}_3, \bar{\eta}_3)) = = d(k,m)$$
$$(r_2,\bar{r}_2) + d(k,m)(\varphi_2, \bar{\varphi}_2) + d(k,m)(\eta_2, \bar{\eta}_2) + d(k,m)(r_3,\bar{r}_3) + d(k,m)(\varphi_3, \bar{\varphi}_3) + d(k,m)(\eta_3, \bar{\eta}_3)$$

где набор индексов A состоит из всех упорядоченных пар (k, m).

Лемма 1 ([20]). Если $r_n(.) \subset C_T[0,\infty)$ и $\int_0^T r_n(t)dt = 0$, то $\rho_n(t) = \rho_{n0} + \int_0^t \rho_n(s)ds$ $(n = 2, 3)$ — T-периодическая функция. Кроме того,

$$\varphi_2(t + T) = \varphi_{20} + \int_0^{\tau+T} \varphi_2(s)ds = \varphi_{20} + \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{T} \int_{T_k} \varphi_2(s)ds + \varphi_2(s)ds = \varphi_2(t) + \varphi_{20}T = \varphi_2(t) + 2\pi$$
$$\cos\varphi_2(t + T) = \cos(\varphi_2(t) + 2\pi) = \cos\varphi_2(t)$$

$$t+T - \tau_{23}(t)\ t - \tau_{23}(t)\ t - \tau_{23}(t)+T\ \varphi_3(t + T - \tau_{23}(t + T)) = \varphi_3(t + T - \tau_{23}(t)) = \varphi_{30} + \int_0^{\cdot} \varphi_3(s)ds = \varphi_{30} + \int_0^{t-\tau_{23}(t)} \varphi_3(s)ds + \int_{t-\tau_{23}(t)}^{\cdot} \varphi_3(s)ds =$$
$$= \varphi_3(t - \tau_{23}) + \varphi_{30}T = \varphi_3(t - \tau_{23}) + 2\pi$$
$$\cos\varphi_3(t + T - \tau_{23}(t + T)) = \cos(\varphi_3(t - \tau_{23}) + 2\pi) = \cos\varphi_3(t) - \tau_{23})$$

Отсюда следует, что правые части уравнений (БС) являются T-периодическими функциями.

Лемма 2. Расстояния $\rho_n(t)$, $(n = 2, 3)$ являются ограниченными функциями.

Доказательство. При достаточно больших $\mu > 0$ и $\mu T = const. > 0$, получаем

$$\rho_n(t) - \rho_{n0} \le \int_0^t |r_\alpha(s)|ds \le \rho_{n0} - R_n \int_0^t e^{\mu s}ds = \rho_{n0} - R_n \frac{e^{\mu T} - 1}{\mu} \le \rho_{n0} - \frac{R_n(e^{\mu T} - 1)}{\mu} \le \frac{R_n e^{\mu T}}{\mu} - \rho_n > 0\ ,\ (n = 2, 3).$$

Machine Translated by Google

Аналогичным образом делаем вывод

$$\rho n(t) \quad \rho n0 + \int_0^T |rn(s)|ds \quad \rho n0 + Rn \int_0^T e^{\mu s}\, ds \quad \rho n0 + Rn \quad \frac{емкT - 1}{\mu} \quad \rho_н > 0, (n = 2, 3).$$

Наконец, $\rho\rho_н < {}_н$ поскольку $Te^{1} > 0$.

Лемма 2, таким образом, доказана.

Лемма 3. Если $\int_0^T \varphi n(t)dt = \varphi n0T$ $(\varphi n0 > 0),(n = 2, 3)$, то $\lim_{T} \varphi n(t) = .$

Доказательство. Положим $s + T = p$. Тогда мы получаем $\int_0^T \varphi n(s)ds = \int_T^{2T} \varphi n(p)dp = \cdots = \int_{Tk}^{T} {}_{k+1}\varphi n(p)dp.$

Следовательно, $\lim t \quad \varphi n(t) = \lim t \quad \varphi n0 + \int_0 \varphi n(s)ds = \varphi n0 + \sum_{k=0}^{Tk+1} \int_{Tk} \varphi n(s)ds = \varphi n0 + T\varphi n0 \sum_{k=1}^{1} = .$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Множества Mrn, $M\varphi n$, $M\eta n$ $(n = 2, 3)$ замкнуты.

Доказательство см. [19].

Следующие утверждения дают качественную оценку электронных орбит.

Лемма 5. Справедливо следующее неравенство:

$$A = |\cos\varphi 2, \text{потому что } \varphi 3, \text{потому что } \lambda 2, \text{потому что } \lambda 3 + \text{грех } \varphi 2, \text{грех } \varphi 3, \text{потому что } \lambda 2, \text{потому что } \lambda 3 + \text{грех } \lambda 2, \text{грех } \lambda 3| \quad 1.$$

Доказательство.

$$A = |\cos\lambda 2 \cos\lambda 3 \cos(\varphi 2 \quad \varphi 3) + \sin\lambda 2 \sin\lambda 3| =$$
$$= \frac{\cos(\lambda 2 \quad \lambda 3)+\cos(\lambda 2+\lambda 3)}{2} \cos(\lambda 2 \quad \lambda 3) \quad \cos(\lambda 2+\lambda 3) \cos(\varphi 2 \quad \varphi 3) + \frac{}{2} =$$
$$= \frac{\cos(\lambda 2 \quad \lambda 3)[1+\cos(\varphi 2 \quad \varphi 3)]}{2} \quad \cos(\lambda 2+\lambda 3)[1 \quad \cos(\varphi 2 \quad \varphi 3)] =$$
$$= \frac{}{12} 2\cos^2 \frac{\varphi 2 \quad \varphi 3}{2} \cos(\lambda 2 \quad \lambda 3) \quad 2\sin^2 \frac{\varphi 2 \quad \varphi 3}{2} \cos(\lambda 2 + \lambda 3) \quad \cos^2 \frac{\varphi 2 \quad \varphi 3}{2} + \sin^2 \frac{\varphi 2 \quad \varphi 3}{2} = 1.$$

Лемма 6. Справедливы следующие неравенства:

$$|\rho 20 \quad \rho 30| \quad (R2 + R3)\, e^{\mu T} \sqrt{\mu} \quad 1 \quad \rho 23(t), \rho 32(t) \quad \rho 20 + \rho 30 + (R2 + R3)\, e^{\mu T} \sqrt{\mu} \quad 1.$$

Доказательство. Поскольку $\rho 2(t) = \rho 20 + \int_0^T r2(s)ds$, $\rho 3(t) = \rho 30 + \int_0^T r3(s)ds$, то ввиду леммы 2

$$\rho 23(t) = \sqrt{(\rho 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2 \quad \rho 3\cos\varphi 3\cos\lambda 3)^2 + (\rho 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2 \quad \rho 3\sin\varphi 3\cos\lambda 3)^2 + (\rho 2\sin\lambda 2 \quad \rho 3\sin\lambda 3)^2}$$
$$\sqrt{\rho 2^2 + \rho 3^2 + 2\rho 2\rho 3A} \quad \sqrt{\rho 2^2 + \rho 3^2 + 2\rho 2\rho 3} = \rho 2(t) + \rho 3(t) \quad \rho 20 + \rho 30 + (R2 + R3)\, e^{\mu T} \sqrt{\mu} \quad 1$$

и

$$\rho 23(t) = \sqrt{(\rho 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2 \quad \rho 3\cos\varphi 3\cos\lambda 3)^2 + (\rho 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2 \quad \rho 3\sin\varphi 3\cos\lambda 3)^2 + (\rho 2\sin\lambda 2 \quad \rho 3\sin\lambda 3)^2}$$
$$\sqrt{\rho 2^2 + \rho 3^2 \quad 2\rho 2\rho 3A} \quad \sqrt{\rho 2^2 + \rho 3^2 \quad 2\rho 2\rho 3} = |\rho 2 \quad \rho 3| \quad |\rho 20 \quad \rho 30| \quad (R2 + R3)\, e^{\mu T} \sqrt{\mu} \quad 1$$

что завершает доказательство.

Лемма 7. Справедливы следующие неравенства:

Machine Translated by Google

$$\frac{|\rho 2(t) \quad \rho 3(t \quad \tau 23)|\tau 23}{c} = \frac{\rho 02 \quad \rho 03 + 0^{\tau} r2(s)ds \quad {}^{t}_{\tau} r3(s)ds \quad {}^{t \tau 23}_{r3(s)ds}}{c} \quad \frac{|\rho 02 \quad \rho 03|(R2+R3) \quad {}^{\tau}_{0} e \ \mu sds - {}^{t \tau 23}_{\tau r3(s)ds}}{c}$$

$$\rho 02 \quad \rho 03|(R2+R3) e \quad \frac{\mu T \quad 1|}{\mu} \quad R3 \quad \frac{e \mu(t \quad \tau 23) \quad e \mu t}{\mu} \quad \rho 02 \quad \rho 03|(R2+R3) e \mu \quad \frac{\mu T \quad 1 \quad \mu \tau 23 \quad 1}{\mu} \quad R3 e \mu t e |$$

$$\frac{|\rho 02 \quad \rho 03| \quad R2 \quad e^{\mu \kappa T} - 1 \quad R3 \mu \quad e^{\mu \kappa T} - 1 \quad R3 \mu \quad \frac{e^{\mu \kappa T}}{\mu}}{c} = \frac{|\rho 02 \quad \rho 03| \quad R2 \quad e^{\mu \kappa T} - 1 \quad R3 \mu \quad \frac{e^{\mu \kappa T}}{\mu}}{c} \quad \frac{|\rho 02 \quad \rho 03|(R2+R3) e \quad \frac{\mu \kappa T}{\mu}}{c} \quad \frac{}{c} > 0$$

и

$$\frac{|\rho 3(t) \quad \rho 2(t \quad \tau 32)|\tau 32}{c} = \frac{\rho 03 \quad \rho 02 + {}^{\tau}_{0} r3(s)ds \quad {}^{t}_{\tau} r2(s)ds \quad {}^{t \tau 32}_{r2(s)ds}}{c} \quad \frac{|\rho 03 \quad \rho 02|(R2+R3) \quad {}^{\tau}_{0} e \ \mu sds - {}^{t \tau 32}_{\tau r2(s)ds}}{c}$$

$$\rho 03 \quad \rho 02|(R3+R2) e \quad \frac{\mu T \quad 1|}{\mu \mu} \quad R2 \quad \frac{e \mu(t \quad \tau 32) \quad e \mu t}{\mu} \quad \rho 03 \quad \rho 02|(R3+R2) e \mu \mu \quad c \quad \frac{\mu T \quad 1 \quad \mu \tau 32 \quad 1}{R2 e \mu t e |}$$

$$\frac{|\rho 03 \quad \rho 02| \quad R3 \quad e^{\mu \kappa T} - 1 \quad R2 \mu \quad e^{\mu \kappa T} - 1 \quad R2 \mu \quad \frac{e^{\mu \kappa T}}{\mu}}{c} = \frac{|\rho 03 \quad \rho 02| \quad R3 \quad e^{\mu \kappa T} - 1 \quad R2 \mu \quad \frac{e^{\mu \kappa T}}{\mu}}{c} \quad \frac{\rho 02 \quad \rho 03|(R2+R3) e \quad \frac{\mu T|}{\mu}}{c} \quad \frac{}{c} > 0$$

для достаточно больших $\mu > 0$ и $\mu T = const. > 0$. Из приведенных выше неравенств следует, что $|\rho 2(t) \quad \rho 3(t \quad \tau 23)|$, $|\rho 3(t) \quad \rho 2(t \quad \tau 32)|$ строго положительны, что и завершает доказательство.

Замечание 3. Очевидно, $\frac{1}{\tau 23} \quad в$, $\frac{1}{\tau 32} \quad в$.

5. Введение операторов и основная лемма.

Прежде чем сформулировать и доказать основную лемму, приведем условие совместности (УК), из которого следует непрерывность решения нейтральных уравнений: исходные функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$. \ г 20(0) = \frac{e 2 e 1}{м2} \quad \frac{1}{ср 20 \ 2(0)}$$

$$\frac{\rho 20(0) \quad \rho 30(\quad \tau 23(0))(\cos \varphi 23 \cos \lambda 20(0) \cos \lambda 30(\quad \tau 23(0)) + \sin \lambda 20(0) \sin \lambda 30(\quad \tau 23(0))) e 2 e 3 \ m2}{3 c} \quad \frac{\xi^{(23)}, и^{(3)}}{в 3 \tau 23 \ 3}$$

$$\frac{e 2 e 3}{м2} \quad . \ г 30(\quad \tau 23(0))(\cos \varphi 23 \cos \lambda 20(0) \cos \lambda 30(\quad \tau 23(0)) + \sin \lambda 20(0) \sin \lambda 30(\quad \tau 23(0))) \ c \ 4 \tau 23$$

$$\frac{e 2 e 3}{м2} \quad \rho 30(\quad \tau 23(0)) \ \varphi 30(\quad \tau 23(0)) \sin \varphi 23 \cos \lambda 20(0) \cos \lambda 30(\quad \tau 23(0))$$

$$в 4 \tau 23$$

$$\frac{e 2 e 3}{м2} \quad \rho 30(\quad \tau 23(0)). \ \eta 30(\quad \tau 23(0))(\sin \lambda 20(0) \cos \lambda 30(\quad \tau 23(0)) \quad \cos \varphi 23 \sin \lambda 30(\quad \tau 23(0)) \cos \lambda 20(0)) \ c \ 4 \tau 23 \quad \frac{2}{e \ 2 \ м2} \quad \ldots \quad г 20(0) \quad Gr2(0);$$

где $\varphi 23 = \varphi 2(0) \quad \varphi 3(\quad \tau 23(0))$ и т.д.

Определим оператор B, действующий на $Mr2 \times M\varphi 2 \times M\eta 2 \times Mr3 \times M\varphi 3 \times M\eta 3$, по формулам

Machine Translated by Google

$$Б^{(k)}_{p2}(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)(t) := \int_{Tк}^{т} Гр2(с)\,дс \quad \frac{т-Тк}{T} \quad \frac{1}{2} \int_{Тк}^{Тк+1} Гр2(с)\,дс \quad \frac{1}{T} \int_{Тк}^{Тк+1} \int_{Тк}^{п} Gr2(s)dsdp, t \in [Tk, Tk+1]$$

$$r3(t) = r30(t), \varphi3(t) = \varphi30(t), \eta3(t) = \eta30(t), t \in [0, T]$$

$$Б^{(k)}_{\varphi2}(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)(t) := \varphi20 + \int_{Тк}^{т} G\varphi2(s)ds \quad \frac{т-Тк}{T} \quad \frac{1}{2} \int_{Тк}^{Тк+1} G\varphi2(s)ds \quad \frac{1}{T} \int_{Тк}^{Тк+1} \int_{Тк}^{п} G\varphi2(s)dsdp, t \in [Tk, Tk+1]$$

$$r3(t) = r30(t), \varphi3(t) = \varphi30(t), \eta3(t) = \eta30(t), t \in [0, T]$$

$$Б^{(k)}_{\eta2}(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)(t) := \int_{Тк}^{т} Гр3(с)\,дс \quad \frac{т-Тк}{T} \quad \frac{1}{2} \int_{Тк}^{Тк+1} Гр3(с)\,дс \quad \frac{1}{T} \int_{Тк}^{Тк+1} \int_{Тк}^{п} Gr3(s)dsdp, t \in [Tk, Tk+1]$$

$$r3(t) = r30(t), \varphi3(t) = \varphi30(t), \eta3(t) = \eta30(t), t \in [0, T]$$

$$Б^{(k)}_{p3}(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)(t) := \int_{Тк}^{т} Гр3(с)\,дс \quad \frac{т-Тк}{T} \quad \frac{1}{2} \int_{Тк}^{Тк+1} Гр3(с)\,дс \quad \frac{1}{T} \int_{Тк}^{Тк+1} \int_{Тк}^{п} Gr3(s)dsdp, t \in [Tk, Tk+1]$$

$$r2(t) = r20(t), \varphi2(t) = \varphi20(t), \eta2(t) = \eta20(t), t \in [0, T]$$

$$Б^{(k)}_{\varphi3}(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)(t) := \varphi30 + \int_{Тк}^{т} G\varphi3(s)ds \quad \frac{т-Тк}{T} \quad \frac{1}{2} \int_{Тк}^{Тк+1} G\varphi3(s)ds \quad \frac{1}{T} \int_{Тк}^{Тк+1} \int_{Тк}^{п} G\varphi3(s)dsdp, t \in [Tk, Tk+1]$$

$$r2(t) = r20(t), \varphi2(t) = \varphi20(t), \eta2(t) = \eta20(t), t \in [0, T]$$

$$Б^{(k)}_{\eta3}(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)(t) := \int_{Тк}^{т} G\eta3(s)ds \quad \frac{т-Тк}{T} \quad \frac{1}{2} \int_{Тк}^{Тк+1} G\eta3(s)ds \quad \frac{1}{T} \int_{Тк}^{Тк+1} \int_{Тк}^{п} G\eta3(s)dsdp, t \in [Tk, Tk+1]$$

$$r2(t) = r20(t), \varphi2(t) = \varphi20(t), \eta2(t) = \eta20(t), t \in [0, T]$$

где $t \in [Tk, Tk+1]$, $Tk = kT$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $G\varphi2 = G\varphi2(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)$, $G\eta2 = G\eta2(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)$, $Gr3 = Gr3(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)$, $G\varphi3 = G\varphi3(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)$, $G\eta3 = G\eta3(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)$ и начальные функции $rn0(t)$, $\varphi n0(t)$, $\eta n0(t)$,$(n = 2, 3)$ являются решениями системы исходных уравнений.

Замечание 4. Заметим, что ввиду периодичности $Gr2(s)$ оператор $Br2(.)(t)$ является T-периодическим на $[0, \infty)$ (ср. с [20]). Условие соответствия (СС) $r20(0) = Gr2(0)$ влечет

$$r2(t) = Gr2(t) \quad \frac{1}{T} \int_{0}^{T} Gr2(s)ds \quad r20(0) = Gr2(0) \quad \frac{1}{T} \int_{0}^{T} Гр2(с)дс \quad \int_{0}^{T} Гр2(с)дс = 0$$

и

$$r2(0) = B_{p2}(.)(0)(0) \quad r2(t) = B(.)(t)(0) = \frac{1}{2} \int_{0}^{T} Гр2(с)\,дс \quad \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \int_{0}^{п} Гр2(с)дсдп \quad \int_{0}^{T} \int_{0}^{п} Gr2(s)dsdp = 0$$

$$r2(0) = B^{(0)}_{r2}(.)(0) = \frac{1}{2} \int_{0}^{T} Гр2(с)\,дс \quad \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \int_{0}^{п} Gr2(s)dsdp = 0; \quad Б^{(0)}_{p2}(.)(T) = \frac{1}{2} \int_{0}^{T} Гр2(с)\,дс \quad \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \int_{0}^{п} Гр2(с)дсдп = 0.$$

Но $Gr2(s)$ — T-периодическая функция. Следовательно, можно распространить результат на любое $k = 1, 2, \ldots, Tk+1$ $Tk+1$ $Gr2(s)ds = $ т. е. $\int_{Тк}^{Тк} \int_{Тк}^{п} Gr2(s)dsdp = 0$.

Нам понадобятся следующие неравенства:

Machine Translated by Google

$$\xi^{(23)}_{,(3)\,.\,ты} \quad \xi^{(23)}_{,\,\xi^{(23)}_{(3)\,.\,ты,(3)\,.\,ты}} \quad \text{ст}\,23..\,\rho 3^{2}+\rho 3^{2}..-2\cos 2\lambda 3+\rho 3\,\varphi 3^{2}\,\ddot{}\,\lambda 3^{2}=$$

$$=\text{ст}\,23.\,\rho 3^{2}+\rho 3^{2}\,\dot{}\,2\cos 2\lambda 3+\rho 3\,\varphi 3^{2}.\,\eta 3^{2}\quad \text{ст}\,23\omega 3e^{\mu(t\ \ Tk)}\,R3^{2}+\rho 3\,2R3^{2}+\rho 3^{2}\,2Y3^{2}\quad \text{сст}\,23\omega 3e^{-\mu(t\ \ Tk)}$$

$$\xi^{(32)}_{,(2)\,.\,ты} \quad \xi^{(32)}_{,\,\xi^{(32)}_{(2)\,.\,ты,(2)\,.\,ты}} \quad \text{ст}\,32..\,\rho 2^{2}+\rho 2^{2}..-2\cos 2\lambda 2+\rho 2+\rho 2\,\varphi 2^{2}\,\ddot{}\,2\lambda 2=$$

$$=\text{ст}\,23.\,\rho 3^{2}+\rho 3^{2}\,\dot{}\,2\cos 2\lambda 3+\rho 3\,\varphi 3^{2}.\,\eta 3^{2}\quad \text{ст}\,32\omega 2e^{\mu(t\ \ Tk)}\,R2^{2}+\rho 2\,2R2^{2}+\rho 2^{2}\,2Y2^{2}\quad \text{сст}\,32\omega 2e^{-\mu(t\ \ Tk)}$$

Кроме того, из условия (C) следует $\rho n\,2\Phi n^{2}+{}^{(н)}_{ты},{}^{(н)}_{ты}=\rho H^{2}+\rho n\,2\varphi n^{2}\cos 2\lambda n+\rho n\,2\eta n^{2}$

$$\rho H^{2}\ \rho n\,2Yn^{2}\quad c^{-2\,2<c},(n=2,3).$$

Лемма 8. Справедливы следующие неравенства:

$$\int_{Tk}^{T}Gr2\,(s)ds\quad\int_{Tk}^{T}\frac{|e2e1|}{м2c}\frac{1}{p2^{2}}\quad\frac{-}{м2}\frac{e2e3|\ |e2e3|\ \rho 2+\rho 3\ \text{ссст}\,23\omega 3e\ e^{2}+\,+\,+6\,c\,4\tau\,23\,3\,\text{сст}\,2\eta 2\rho 3\,\rho 3+|\ .\,\eta 3\,\rho 3|\ \mu(t\ \ Tk)\,2\,|}{3\,\tau\,23}}{м2}\ \ddot{}\ r2\,ds$$

$$\frac{|e2e1|}{м2}\int_{Tk}^{T}\frac{1}{c_{p2}^{2}}\,\bar{c}\omega 3(+\rho\,2+\rho\,3+3\ )\,\omega 2^{2}R2^{2}+c\,3\ \ 2_{3\,c}\quad e e2e1|\,\mu(s\ \ Tk)ds|_{м2}\quad\frac{1}{c_{p2}^{2}}+\frac{\bar{c}\omega 3(\,\rho\,2+\rho\,3+3\ )\,\omega 2^{2}R2^{2}+c\,3\ \ 2_{3\,c}}{}\quad e^{\mu(t\ \ Tk)\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T\,k+1}Gr2\,(s)ds\quad\frac{|e2e1|}{м2}\quad\frac{1}{c_{p2}^{2}}\,\bar{c}\omega 3(+\rho\,2+\rho\,3+3\ )\,\omega 2^{2}R2^{2}+c\,2\ \ 2_{3\,c}\quad e^{\mu T\ \ 1\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T}G\varphi 2\,ds\quad\frac{|e2e3|}{м2}\int_{Tk}^{T}\frac{\rho 3\bar{c}\omega 3}{c\ 5\tau\ 23\ 2\rho 2\cos\lambda 2}+\frac{|\ .\,r3|+\rho 3\,\varphi 3+|\rho 3\ .\,\eta 3\ |\ в}{4\tau\ 23\rho 2\ \text{потому}\ \text{ч}\ \text{то}\ \lambda 2}+\frac{\varphi 2^{2}}{3\,c}\quad e^{\mu(s\ \ Tk)ds}\quad\frac{|e2e3|}{м2}\quad\frac{\bar{c}\omega 3(\,\omega 2^{2}\rho 2^{2}+)c\,3\ \ 2\cos(\pi/2\ \ \delta)}{2}\ \rho\ \frac{}{3\,c}\quad e^{\mu(t\ \ Tk)\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1}G\varphi 2\,ds\quad\frac{|e2e3|}{м2}\quad\frac{\bar{c}\omega 3(\,\omega 2^{2}\rho 2^{2}+)c\,3\ \ 2\cos(\pi/2\ \ \delta)}{p2}\quad\frac{}{3\,c}\quad e^{\mu T\ \ 1\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T}G\eta 2\,ds\quad\frac{e\,2e\,3}{м2}\int_{Tk}^{T}\frac{-\mu(s\ \ Tk)\,\omega 2^{2}Y2^{2}\,\rho 3\bar{c}\omega 3e^{+\rho 3\,\text{сст}\,23\omega 3e+c\,3e\,2\,3\tau\rho 2}}{3\,c}\quad e e2e3|\,\mu(s\ \ Tk)ds|_{м2}\quad\frac{-}{\rho\,2\ \ 2}\quad\frac{e^{\mu T+3\ \ \omega 2^{2}Y2^{2}\,c\omega 3\,\rho\,3+3\,c}}{}\quad e^{\mu(t\ \ Tk)\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{Tk+1}G\eta 2\,ds\quad m2\quad\frac{|e2e3|}{}\quad\frac{\bar{}}{+3\,c}\quad\frac{c\omega 3\ e^{\mu T+3}\ \ \rho\ 3}{\rho\ 2\ \ 2}\quad\omega 2^{2}Y2^{2}\quad e^{\mu T\ \ 1\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T}Gr3\,(s)ds\quad\frac{|e2e1|}{м3}\quad\frac{1}{c_{p3}^{2}}\quad\frac{\bar{c}\omega 2(\,\rho\,3+3\ )\,\omega 3^{2}R3^{2}\,\rho\,2+\,+\,+c\,2\ \ 2_{3\,c}}{}\quad e^{\mu(t\ \ Tk)\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T\,k+1}Gr3\,(s)ds\quad\frac{|e2e1|}{м3}\quad\frac{1}{c_{\rho\,3}^{2}}\quad\frac{\bar{c}\omega 2(\,\rho\,3+3\ )\,\omega 3^{2}R3^{2}\,\rho\,2+\,+\,+c\,2\ \ 2_{3\,c}}{}\quad e^{\mu T\ \ 1\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T}G\varphi 3\,ds\quad\frac{|e2e3|}{м3}\quad\frac{\bar{c}\omega 2(\,\omega 3^{2}\rho 3^{2}+)c\,3\ \ 2\cos(\pi/2\ \ \delta)}{\rho\ 3}\quad\frac{}{3\,c}\quad e^{\mu(t\ \ Tk)\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T\,k+1}G\varphi 3\,ds\quad\frac{|e2e3|}{м3}\quad\frac{\bar{c}\omega 2(\,\omega 3^{2}\rho 3^{2}+)c\,3\ \ 2\cos(\pi/2\ \ \delta)\,\rho}{3}\quad\frac{}{3\,c}\quad e^{\mu T\ \ 1\,;}_{\mu}\int_{Tk}^{T}Gn3\,ds\quad\frac{|e2e3|}{м3}\quad\frac{-}{\rho\,3\ \ 2}\quad\frac{e^{\mu T+3\ \ \omega 3^{2}Y3^{2}\,\rho\,2\,c\omega 2+3\,c}}{}\quad e^{\mu(t\ \ Tk)\,;}_{\mu}$$

$$\int_{Tk}^{T\,k+1}Gn3\,ds\quad\frac{|e2e3|}{м3}\quad\frac{-}{\rho\,3\ \ 2}\quad\frac{e^{\mu T+3\ \ \omega 3^{2}Y3^{2}\,\rho\,2\,c\omega 2+3\,c}}{}\quad e^{\mu T\ \ 1}_{\mu}.$$

Лемма 9 (Основная лемма). Пусть условие совместимости (СС) выполнено. Периодическая задача для системы (БС) имеет решение $(r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3) \in Mr2 \times M\varphi 2 \times M\eta 2 \times Mr3 \times M\varphi 3 \times M\eta 3$, если оператор B имеет неподвижную точку, принадлежащую $Mr2 \times M\varphi 2 \times M\eta 2 \times Mr3 \times M\varphi 3 \times M\eta 3$.

Доказательство. Пусть система (BS) имеет решение, принадлежащее $Mr2 \times M\varphi 2 \times M\eta 2 \times Mr3 \times M\varphi 3 \times M\eta 3$.

Machine Translated by Google

Покажем, что B = Br2 , Bφ2 , Bη2 , Br3 , Bφ3 , Bη3 обладает неподвижной точкой, принадлежащей Mr2 × Mφ2 × Mη2 × Mr3 × Mφ3 × Mη3 . Действительно, интегрируя первое уравнение (БС), мы

получим $r2(t) = \int_{Tk}^{t} Gr2(s)ds$, поэтому с учетом замечания 4 получаем

$$r2(t) = \int_{Tk}^{t} Gr2(s)ds - \frac{t-Tk}{T}\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} Gr2(s)ds - \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{p} Gr2(s)dsdp,$$

т. е. $r2 = Br2(k)(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)$.

Для второй компоненты $\varphi2$ имеем $\int_{Tk}^{Tk+1} G\varphi2(s)ds = 0$. Следовательно,

$$\varphi2(Tk+1) = \varphi2(Tk) + \int_{Tk}^{Tk+1} G\varphi2(s)ds \quad \varphi02 = \varphi02 + \int_{Tk}^{Tk+1} G\varphi2(s)ds \quad \int_{Tk}^{Tk+1} G\varphi2(s)ds = 0.$$

Следовательно, $\varphi2(t) = \varphi02 + \int_{Tk}^{t} G\varphi2(s)ds - \frac{\tau-Tk}{T}\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} G\varphi2(s)ds$. Таким же образом,

$$\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{p} G\varphi2(s)dsdp = \int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{c} G\varphi2(s)dpds = \int_{Tk}^{Tk+1}(Tk+1 - s)G\varphi2(s)ds = Tk+1\int_{Tk}^{Tk+1} G\varphi2(s)ds - \int_{Tk}^{Tk+1} sG\varphi2(s)ds =$$

$$= \int_{Tk}^{Tk+1} c\frac{d\varphi2(s)}{ds}ds = \int_{Tk}^{Tk+1} sd\varphi2(s) = Tk+1\varphi2(Tk+1) + Tk\,\varphi2(Tk) + \int_{Tk}^{Tk+1}\varphi2(s)ds = T\varphi02 + T\,\varphi02(Tk) + \int_{Tk}^{Tk+1}\varphi2(s)ds = T\varphi02 + T\varphi02 = 0.$$

Поэтому,

$$\varphi2(t) = \varphi02 + \int_{Tk}^{t} G\varphi2(s)ds - \frac{t-Tk}{T}\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} G\varphi2(s)ds - \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{p} G\varphi2(s)dsdp$$

что означает $\varphi2 = B\varphi2(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)$.

Повторяя те же рассуждения, получаем

$$\eta2 = B\eta2(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3),\ r3 = Br3(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3),\ \varphi3 = B\varphi3(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3),\ \eta3 = B\eta3(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3)).$$

Обратно, пусть $(r2, \varphi2, \eta2, r3, \varphi3, \eta3) \in Mr2 \times M\varphi2 \times M\eta2 \times Mr3 \times M\varphi3 \times M\eta3$ — неподвижная точка B. Тогда

$$r2(\tau) = \int_{Tk}^{t} Gr2(s)ds - \frac{t-Tk}{T}\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} Gr2(s)ds - \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{c} Gr2(\theta)d\theta ds.$$

дает для $t = Tk$

$$r2(Tk) = \int_{Tk}^{Tk} Gr2(s)ds - \frac{Tk-Tk}{T}\frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} Gr2(s)ds - \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{c} Gr2(\theta)d\theta ds \quad 0 = \frac{1}{2}\int_{Tk}^{Tk+1} Gr2(s)ds - \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{c} Gr2(\theta)d\theta ds.$$

Однако из замечания 4 следует, что $\int_{Tk}^{Tk+1} Gr2(s)ds = 0$ $\frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{c} Gr2(\theta)d\theta ds = 0.$

Следовательно, $r2(t) = \int_{Tk}^{t} Gr2(s)ds$. $r2(t) = Gr2(t)$.

С остальными компонентами B поступим аналогичным образом.

Лемма 9, таким образом, доказана.

Machine Translated by Google

6. Основной результат

Основной результат работы заключается в следующем:

Теорема 1 (Основная теорема). Пусть условие совместимости (СС) выполнено и исходные данные достаточно малы (приложение В). Если выполняются следующие неравенства:

(1) $\frac{|e2e1|}{м2}\ \frac{1}{c_{\rho 2}{}^2}\ \frac{\bar{c}\omega 3(+\rho 2+\ \rho 3+3|\ |)\,\omega 2\,2R2+}{c\,3\ \ 2}\ \frac{емкТ}{3\,c}\ \frac{}{\mu}$ R2 ($\mu > \omega 2, \omega 3$);

$\varphi 20+\ \frac{|e2e1|}{м2}\ \frac{\bar{c}\omega 3(\ \omega 2\rho 2+\rho 3+|\ c\ 3)\ 2\cos(\pi/2\ \ \delta)\rho\ 2}{3\,c}\ \frac{емкТ}{\mu}$ Ф2 ($Ф20 > 0$);

$\frac{|e2e1|}{м2}\ \frac{\bar{c}\omega 3}{c}\ \frac{\rho\,3\ e\ \mu T+3|\ |\,\omega 2\ 2Y2+}{\rho\ 2\ \ 2}\ \frac{}{3\,c}\ \frac{емкТ}{\mu}$ Y2;

$\frac{|e3e1|}{м3}\ \frac{1}{c_{\rho\,3}{}^2}\ \frac{\bar{c}\omega 2(\ \rho\ 3+3)\,\omega 3\ 2R3\ \rho\ 2+\ +\ +\ c\ 3\ \ 2}{3\,c}\ \frac{емкТ}{\mu}$ P3;

$\varphi 30+\ \frac{|e3e1|}{3\,м3c}\ \frac{\beta\omega 2\ \rho\ 2+3c}{\rho\ 3\ \ c\ \ 2}\ \frac{+\ \omega 3\ 2Ф3}{e\cos(\pi/2\ \ \delta)}\ \frac{мкТ}{\mu}$ Ф3 ($Ф30 > 0$);

$\frac{|e3e1|}{3\,м3c}\ \frac{\bar{}}{\rho\ 3\ \ 2}\ \frac{e\ \mu T+3\ \ \omega 3\ 2Y3\ c\omega 2\ \rho\ 2+3\,c}{3\,c}\ \frac{емкТ}{\mu}$ Y3;

(2) $1+\mu T\ \frac{e\ \mu T\ \ 1}{}\ \frac{|e2e1|}{м2}\ \frac{1}{c_{\rho 2}{}^2}\ \frac{\bar{c}\omega 3(+\rho\ 2+\ \rho\ 3+3|\ \ |)\,c}{3\ \ 2}+\ \frac{\omega 2\ 2R2}{3\,c}\ \frac{емкТ}{\mu}$ $\omega 2R2$;

$1+\mu T\ \frac{e\ \mu T\ \ 1}{}\ \frac{|e2e1|}{3\,м2c}\ \frac{\bar{c}\omega 3\ \ \ \rho\ 3+3|\ \ |}{c^2\rho\ 2}+\omega 2\ 2Ф2\ \ \ \omega 2Ф2;\cos(\pi/2\ \ \delta)\ \ 2$

$1+\mu T\ \frac{e\ \mu T\ \ 1}{}\ \frac{|e2e1|}{3\,м2c}\ \frac{\bar{c}\omega 3\ \ \ \rho\ 3+3|\ \ |}{c^2\rho\ 2\ \ 2}+\omega 2\ 2Y2\ \ \ \omega 2Y2;$

$1+\mu T\ \frac{e\ \mu T\ \ 1}{}\ \frac{|e3e1|}{м3c}\ \frac{1}{\rho 3^{\ 2}}+\frac{\bar{c}\omega 2\ \ \ \rho\ 2+\ \rho\ 3+3|\ \ |}{c\ 3\ \ 2}\ \frac{\omega 3\ 2R3+}{2\,c}\ \ \omega 3R3;$

$1+\mu T\ \frac{e\ \mu T\ \ 1}{}\ \frac{|e3e1|}{3\,м3c}\ \frac{\bar{c}\omega 2\ \ \ \rho\ 2+3|\ \ |}{c}+\omega 3\ 2Ф3\ \ \ \omega 3Ф3;\ 2\ \ \cos(\pi/2\ \ \delta)\ \ 2\,\rho\ 3$

$1+\mu T\ \frac{e\ \mu T\ \ 1}{}\ \frac{|e3e1|}{3\,м3c}\ \frac{\bar{c}\omega 2\ \ \ \rho\ 2+3|\ \ |}{c^2\rho\ 3\ \ 2}+\omega 3\ 2Y3\ \ \ \omega 3Y3$

тогда существует единственное T-периодическое решение $(r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3) \in Mr2 \times M\varphi 2 \times M\eta 2 \times Mr3 \times M\varphi 3 \times M\eta 3$ задачи (BS).

Принципиальное замечание. Заметим, что в теореме имеется бесконечное количество неравенств. Из приведенных неравенств следует, что оператор-функции и их первые производные принадлежат $Mr2 \times M\varphi 2 \times M\eta 2 \times Mr3 \times M\varphi 3 \times M\eta 3$. Легко проверить, что для третьих производных получаем 3 и так далее. соответственно $\omega 2$ и $\omega 2^4$

Доказательство. Сначала покажем, что B отображает множество $Mr2 \times M\varphi 2 \times M\eta 2 \times Mr3 \times M\varphi 3 \times M\eta 3$ в себя.

замечания 4 имеем $B\,r2^{(k)}(.)(Tk) = Из\ \ \frac{}{1\,2}\int_{Tk}^{Tk+1}\Gamma\rho 2\,(c)\,дс\ \frac{1}{T}\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{c}Gr2\,(\theta)d\theta ds = 0$, $(k = k+1\ 0, 1, 2, \ldots)$ И поскольку $\frac{T}{T}\ \frac{т\text{-}Tk}{}\ \frac{}{1\,2}\,dt = 0$, получаем

$$Б_{\rho 2}(k)(.)(t)\,dt = \int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{\tau}Gr2\,(s)ds\,dt\ \frac{\tau\ \ Tk}{T}\ \frac{1}{2}\ дт\int_{Tk}^{Tk+1}\Gamma\rho 2\,(c)\,дс\int_{Tk}^{Tk+1}\int_{Tk}^{\theta}Gr2\,(s)ds d\theta \text{ знак равно } 0.$$

Кроме того, ввиду $\rho\varphi\ \ с$ и неравенств из замечания 3 имеем

Machine Translated by Google

$$B^{(k)}_{(.)(t)} \le \int_{T_k}^{T_{k+1}} |Gr2(s)|ds + r2\,T_k\,\mu(t-T_k)\,|e2e1| \int_{T_k}^{T_{k+1}} e^{\frac{1}{2}} \int_{T_k}^{T_{k+1}} Gr2(s)ds + \frac{1}{T}\int_{T_k}^{T_{k+1}}\int_{T_k}^{T} Gr2(s)dsdt = \int_{T_k}^{T_{k+1}} |Gr2(s)|ds + \int_{T_k}^{T_{k+1}} Gr2(s)ds$$

$$\frac{}{\text{м2с}} \frac{1}{\rho 2^{2}} \frac{\beta\omega 3(\rho 2+3+2) \omega 2\,2R2\,\rho 2+ + + c}{2\,c} \frac{1}{\text{мкм}} + \mu \frac{e^{-\mu T}-1}{}$$

$$e^{-\text{м2с}\,\mu(t-T_k)\,|e2e1|} \frac{}{} \frac{1}{\rho 2^{2}} \frac{\beta\omega 3(+\rho 2+\rho 3+3)}{c\,2\,2} + \frac{\omega 2\,2R2}{2\,c} \frac{e^{\text{мкТ}}}{\mu} R2e^{-\mu(t-T_k)}.$$

Для второго компонента B имеем

$$\varphi^{(k)}_{(.)}(T_k) = \varphi 02 + B\,\varphi 2 \int_{T_k}^{T_{k+1}} \overline{1}_2 \int_{T_k}^{T_{k+1}} G\varphi 2(.)(s)ds \int_{T_k}^{T_{k+1}} \frac{1}{T}\int_{T_k}^{T_{k+1}}\int_{T_k}^{c} G\varphi 2(.)(\theta)d\theta ds = \varphi 02,\ (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \varphi^{(k)}_{(.)}(t)\,dt = T\varphi 02 + B\,\varphi 2 \int_{T_k}^{T_{k+1}} \int_{T_k}^{T} G\varphi 2(s)ds \int_{T_k}^{T_{k+1}} \frac{T-T_k}{T} \overline{1}_2 \int_{T_k}^{T_{k+1}} G\varphi 2(s)ds \int_{T_k}^{T_{k+1}} \int_{T_k}^{T} G\varphi 2(s)dsdt = T\varphi 02$$

и

$$B^{(k)}_{(.)(t)} \le \varphi 02 + \varphi 2 \int_{T_k}^{T} G\varphi 2(s)\,ds + \int_{T_k}^{T_{k+1}} G\varphi 2(s)ds \; e^{-\mu(t-T_k)} \varphi 02 + \frac{|e2e3|}{3\,\text{м2с}} \frac{\beta\omega 3 + 3c}{\rho 3 + \omega 2\,2\Phi 2} \cos(\pi/2 - \delta) \frac{e^{\text{мкТ}}}{\mu} \Phi 2e^{-\mu(t-T_k)}.$$

Для третьей компоненты B получаем

$$\eta^{(k)}_{(.)(t)} \le B\,\eta 2 \int_{T_k}^{T} G\eta 2(s)\,ds + \int_{T_k}^{T_{k+1}} G\eta 2(s)ds \; e^{-\mu(t-T_k)} \frac{|e2e1|}{\text{м2}} \frac{\overline{c}\omega 3}{3\,\text{в}} \frac{\rho 3\; e_{\text{цТ}+3|}}{\rho 2\;\; 2} + \frac{\omega 2\,2Y2}{3\,c} \frac{e^{\text{мкТ}}}{\mu} Y2e^{-\mu(t-T_k)}.$$

Для остальных трех компонентов B имеем

$$\eta^{(k)}_{(.)(t)} \le \mu(t-T_k)\,|e3e1| \; \varphi^{(k)}_{(.)}(t) \; e\,B\,r3 \frac{}{\text{м3с}} \frac{1}{\rho 3^{2}} \frac{\beta\omega 2(+\rho 2+\rho 3+3) \omega 3\,2R3 +}{c\,2\,2} \frac{e^{\text{мкТ}}}{\mu} R3e^{-\mu(t-T_k)};$$

$$\varphi^{(k)}_{(.)(t)} \le \mu(t-T_k)\,|e3e1| \; \mu(t-T_k)\varphi 03 + e\,\varphi 2 \frac{}{3\,\text{м3с}} \frac{\beta\omega 2\,\rho\,2+3c}{c\;\; 2\,\rho\,3} + \frac{\omega 3}{2\Phi 3\,e\cos(\pi/2-\delta)} \frac{\text{мкТ}}{\mu} \Phi 3e^{-\mu(t-T_k)};$$

$$\text{Б}^{(k)}_{\eta 3\,(.)(t)} \le \mu(t-T_k)\,|e3e1| \frac{}{3\,\text{м3с}} \frac{\overline{c}\omega 2 \quad \rho\,2+3|\;\;|}{c^{2}\rho\,3\;\; 2} + \omega 3\;2Y3\;e \frac{\text{мкТ}}{\mu} Y3e^{-\mu(t-T_k)}.$$

Для производных первого порядка компонент B получаем

$$\frac{\text{дБ}^{(k)}_{\rho 2}(.)(t)}{\text{дт}} \le |Gr2(.)(t)| + \frac{1}{T}\int_{T_k}^{T_{k+1}} e^{-\mu T}\;1\;\mu(t-T_k)\,1 + Gr2(.)(s)ds \; e^{-\mu T} \frac{}{\text{м2с}} \frac{|e2e1|}{\rho 2^{2}} \frac{1}{} + \frac{\overline{c}\omega 3 \quad \rho\,2+\rho\,3+3}{c\,3\;\; 2} \frac{\omega 2\,2R2 +}{2\,c} \omega 2R2e^{-\mu(t-T_k)};$$

$$\frac{\text{дБ}^{(k)}_{\varphi 2\,\text{дт}}(.)(t)}{} \le G\varphi 2(.)(t) + \frac{1}{T}\int_{T_k}^{T_{k+1}} (.)(s)ds \; e^{-\mu T} \mu(t-T_k)\,1 + G\varphi 2 \frac{e^{-\mu T}-1}{} \frac{|e2e3|}{3\,\text{м2с}} \frac{\overline{c}\omega 3 \quad \rho\,3+3}{2\;\; \delta)\;\; 2\,\rho\,2} + \omega 2\;2\Phi 2 \quad \omega 2\Phi 2e^{-\mu(t-T_k)}\cos(\pi/ \quad ;$$

$$\frac{\text{дБ}^{(k)}_{\eta 2}(.)(t)}{\text{дт}} \le G\eta 2(.)(t) + \frac{1}{T}\int_{T_k}^{T_{k+1}} (.)(s)ds \; e^{-\mu T} \mu(t-T_k)\,1 + G\eta 2 \frac{e^{-\mu T}-1}{} \frac{|e2e3|}{3\,\text{м2с}} \frac{\overline{c}\omega 3 \quad \rho\,3+3 \quad e^{-\mu T}}{2\,c\;\rho\,2\;\; 2} + \omega 2\;2Y2 \quad \omega 2Y2e^{-\mu(t-T_k)} \quad ;$$

$$\frac{\text{дБ}^{(k)}_{\text{г3}}(.)(t)}{\text{дт}} \le e\mu(t-T_k)\,1 + \frac{e^{-\mu T}-1}{\mu T} \frac{|e3e1|}{\text{м3с}} \frac{1}{\rho\,3^{2}} + \frac{\overline{c}\omega 2 \quad \rho\,2+\rho\,3+3 \quad c}{3\;\; 2} \frac{\omega 3\;2R3 +}{2\,c} \omega 3R3e^{-\mu(t-T_k)};$$

$$\frac{\text{дБ}^{(k)}_{(.)(t)}\varphi 3\,dt}{} \le \mu T \quad \mu(t \quad kT)\,1 + e \frac{e^{-\mu T}-1}{} \frac{|e2e3|}{3\,\text{м3с}} \frac{\overline{c}\omega 2 \quad \rho\,2+3}{2\,c\;3 \quad \cos(\pi/2 \quad \delta) \quad 2\,\rho} + \omega 3\;2\Phi 3 \quad \omega 3\Phi 3e^{-\mu(t-T_k)} \quad ;$$

$$\frac{\text{дБ}^{(k)}_{\text{г3}}(.)(t)}{\text{дт}} \le e^{-\mu(t-T_k)} \frac{|e2e3|}{3\,\text{м3с}} \frac{\overline{c}\omega 2 \quad \rho\,2+3}{2\,c\;\rho\,3\;\; 2} + \omega 3\;2Y3 \quad \omega 3Y3e^{-\mu(t-T_k)} \quad .$$

Оценки старших производных компонент B получены в приложении D.

Далее мы покажем, что оператор B является сжимающим в смысле [8].

Machine Translated by Google

С учетом замечания 2 запаздывающие функции действуют следующим образом:

$$t \quad \tau 23(t) : [Tk , Tk+1] \quad [Tk \quad 1 , Tk], t \quad \tau 32(t) : [Tk , Tk+1] \quad [Tk \quad 1 , Tk].$$

Индексный набор $Mr2 \times M\varphi 2 \times M\eta 2 \times Mr3 \times M\varphi 3 \times M\eta 3$ равен (k, m), где $k, m = 0, 1, 2, \ldots$

Введем следующие отображения индексного множества в себя: $j1(k, m) = (k, m)$, $j2(k, m) = (k \quad 1, m + 1)$, $j3(k, m) = (к, м + 2)$. $Gr2 \quad Gr2 \quad Gr2 \quad Gr2 \quad Gr2 \quad Gr2 \quad Gr2 \quad \rho 2 , \quad \varphi 2 , \quad \lambda 2 , \quad \rho 3 , \quad \varphi 3 , \quad \lambda 3 , \quad r3$

Обозначим через $Gr2 = \max$ (см. приложение Е). Затем,

$$\frac{Gr2}{\rho 2} \int_{Tк}^{\tau} Gr2 \, |\rho 2(s) \quad \rho 2 (s)|ds + \frac{}{\varphi 2} \int_{Tк}^{\tau} \lambda 2(s) \, ds + \frac{}{\lambda 2} \quad \rho 3 \quad \frac{Gr2}{} \int_{Tк}^{\tau} Gr2 \, |\varphi 2(s) \quad \varphi 2 (s)|ds + \lambda 2(s) \int_{Tк}^{\tau} |\rho 3(s \quad \tau 23(s)) \quad \rho 3 (s \quad \tau 23(s))|ds +$$

$$+ \frac{Gr2}{\varphi 3} \int_{Tк}^{\tau} Gr2 \, |\varphi 3(s \quad \tau 23(s)) \quad \varphi 3 (s \quad \tau 23(s))|ds + \frac{}{\lambda 3} \int_{Tк}^{\tau} \lambda 3(s \quad \tau 23(s)) \quad \lambda 3(s \quad \tau 23(s)) \, ds + r3 \quad \frac{Gr2}{} \int_{Tк}^{\tau} . \, r3(s \quad \tau 23(s)) \quad r3(s \quad \tau 23(s)) \, ds +$$

$$+ \frac{\Gamma \rho 2}{\varphi 3} \int_{Tк}^{\tau} \varphi \quad (s \quad \tau 23(s)) \quad \varphi 3 (s \quad \tau 23(s)) \, ds + \eta 3 \quad \frac{Gr2}{} \int_{Tк}^{\tau} \eta 3 (s \quad \tau 23(s)) \quad \eta 3 (s \quad \tau 23(s)) \, ds + r2 \quad \frac{Gr2}{} \int_{Tk}^{\tau} .. \, r2(s) \quad r2(s) \, ds$$

$$\frac{Gr2}{\rho 2} \int_{Tк}^{\tau} \int_{Tк}^{c} |r2(p) \quad r2(p)|e \quad \mu(p \quad Tk) \, e \quad Gr2 \, \mu(p \quad Tk)dpds + \frac{}{\varphi 2} \int_{Tк}^{\tau} \int_{Tк}^{c} \varphi 2(p) \quad \varphi 2 (p) \, ee \quad \mu(p \quad Tk) \quad \mu(p \quad Tk)dpds +$$

$$+ \frac{Gr2}{\lambda 2} \int_{Tк}^{\tau} \int_{Tк}^{c} |\eta 2(p) \quad \eta 2(p)|e \quad \mu(p \quad Tk) \, e \quad Gr2 \, \mu(p \quad Tk)dpds + \frac{}{\rho 3} \int_{Tк}^{\tau} \int_{Tк}^{s \quad \tau 23(s)} |r3(p) \quad r3(p)|e \quad \mu(p \quad Tk) \, e^{\mu(p \quad Tk)dpds} +$$

$$+ \frac{Gr2}{\varphi 3} \int_{Tк}^{\tau} \int_{Tк}^{s \quad \tau 23(s)} \varphi 3(p) \quad \varphi 3 (p) \, ee \quad \mu(p \quad Tk) \quad Gr2 \, \mu(p \quad Tk)dpds + \frac{}{\lambda 3} \int_{Tк}^{\tau} \int_{Tк}^{s \quad \tau 23(s)} |\eta 2(p) \quad \eta 2(p)|e \quad \mu(p \quad Tk) \, e^{\mu(p \quad Tk)dpds} +$$

$$+ \frac{Gr2}{r3} \int_{Tк}^{\tau} Tk) \, . \, r3(s \quad \tau 23(s)) \quad r3(s \quad \tau 23(s)) \, e^{\mu(s \quad \tau 23(s)} \, e^{\mu(s \quad \tau 23(s) \quad Tk)ds} + \frac{Gr2}{\varphi 3} \int_{Tк}^{\tau} \varphi \quad Tk) \, (s \quad \tau 23(s)) \quad \varphi 3 (s \quad \tau 23(s)) \, e^{\mu(s \quad \tau 23(s)} \quad e^{\mu(s \quad \tau 23(s) \quad Tk)ds} +$$

$$+ \frac{Gr2}{\eta 3} \int_{Tк}^{\tau} \tau 23(s)) \quad \eta 3 (s \quad \tau 23(s)) \, ee \quad \mu(s \quad \tau 23(s) \quad Tk) \, \eta 3 (s \quad \mu(s \quad \tau 23(s) \quad Tk)ds + r2 \quad \frac{Gr2}{} \int_{Tk}^{\tau} r2(s) \quad r2(s) \, ee^{Tk} \quad \mu(s \quad Tk) .. \quad \mu(s \quad Tk)ds$$

$$e \, \mu 2 \quad \mu(t \quad Tk) \, d(k,0) \, (r2 , r2) \quad Gr2 + \frac{d(k,0)(\varphi 2 , \varphi 2) \, \mu 2}{} + \frac{d(k,0) \, (\eta 2 , \eta 2) \, \mu 2}{} + \frac{d(k,0) \, (r3 , r3)}{\mu} + \frac{d(k,0)(\varphi 3 , \varphi 3)}{\mu} + \frac{d(k,0)(\eta 3 , \eta 3)}{\mu} \int_{Tк}^{\tau} e^{\mu(s \quad \tau 23 \quad Tk)} \quad 1 \, ds +$$

$$+ \quad \frac{\omega d(k \quad 1,1) \, (r3 , r3)}{\mu} + + \frac{\omega d(k \quad 1,1)(\varphi 3 , \varphi 3) \, \omega d(k \quad 1,1)(\eta 3 , \eta 3)}{\mu} \int_{Tк}^{\tau} e^{\mu(s \quad \tau 23(s) \quad Tk)ds} + \frac{\omega 2 d(k,2) \, (r2 , r2)}{\mu} \int_{Tк}^{\tau} e^{\mu(s \quad Tk)ds}$$

$$Gr2 \, e \, \mu(t \quad Tk) \, \frac{d(k,0) \, (r2 , r2) \, \mu 2}{} + \frac{d(k,0)(\varphi 2 , \varphi 2) \, \mu 2}{} + \frac{d(k,0) \, (\eta 2 , \eta 2) \, \mu 2}{} + \frac{d(k,0) \, (r3 , r3)}{\mu} + \frac{d(k,0)(\varphi 3 , \varphi 3)}{\mu} + \frac{d(k,0)(\eta 3 , \eta 3)}{\mu} \int_{Tк}^{\tau} e^{\mu(s \quad Tk) \, (1 \quad e \quad \mu \tau 23)ds} +$$

$$+ e \, \mu(t \quad Tk) \, \omega \frac{}{d(k \quad 1,1) \, (r3 , r3) + d(k \quad 1,1) \, \varphi 3 , \varphi 3 + d(k \quad 1, 1) \, (\eta 3 , \eta 3) + e \, \mu 2} \quad \mu(t \quad Tk) \, \omega 2 d(k,2) \, (r2 , r2) \, \mu 2$$

$$Gr2 \, e + \mu 2 \quad \frac{d(k,0) \, (r2 , r2) + d(k,0)(\varphi 2 , \varphi 2) + d(k,0) \, (\eta 2 , \eta 2) \, \mu(t \quad Tk) \, 2}{} \quad \frac{\omega d(k \quad 1,1) \, (r3 , r3) + d(k \quad 1,1)(\varphi 3 , \varphi 3) + d(k \quad 1,1)(\eta 3 , \eta 3) \, \mu 2}{} + \frac{\omega 2 d(k,2) \, (r2 , r2) \, \mu 2}{} .$$

Отсюда следует, что

$$\mu 2 \, d(k,0) \quad \frac{(к)}{\rho 2} \, (.), B \, (.)^{(к)}_{\rho 2} \, d(k,0) \, B$$

$$\frac{}{} \quad \frac{2}{} \quad (r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3), (r2, \varphi 2 , \eta 2 , r3, \varphi 3 , \eta 3) + \mu 2 \, d(k \quad 1,1) \, (r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3), (r2, \varphi 2 , \eta 2 , r3, \varphi 3 , \eta 3) + \frac{\omega}{} \quad Gr2 \, \omega 2 +$$

$$\frac{}{\mu 2} \, d(k,2) \, (r2, \varphi 2, \eta 2, r3, \varphi 3, \eta 3), (r2, \varphi 2 , \eta 2 , r3, \varphi 3 , \eta 3) \quad .$$

Аналогичным образом получают

Machine Translated by Google

(k) (k) d(k,0) B
(.), B (.) ρ3 Gr3 ρ3
2
μ2 d(k,0) (r2, φ2, η2,r3, φ3, η3),(r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3) + μ2 d(k 1,1) (r2, φ2, η2 ,r3, φ3, η3),(r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3) +
ω2
μ2 d(k,2) (r2, φ2, η2,r3, φ3, η3),(r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3) .

Далее у нас есть

Bφ2 (r2, φ2, η2,r3, φ3, η3) Bφ2 (r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3)

Gφ2 τ Gφ2 τ Gφ2 τ
ρ2 Gφ2 |ρ2(s) ρ2 (s)|ds + φ2 Gφ2 |φ2(s) φ2 (s)|ds + λ2 Gφ2 λ2(s) λ2(s) ds+ ρ3 ρ3(s τ 23(s)) ρ3 (s τ 23(s)) ds+
Tк Tк Tк Tк

Gφ2 τ Gφ2 τ Gφ2 τ
φ3 Gφ2 φ3(s τ 23(s)) φ3 (s τ 23(s)) ds + λ3 Gφ2 λ3(s τ 23(s)) λ3(s τ 23(s)) ds + r3 . r3(s τ 23(s)) r3(s τ 23(s)) ds+
Tк Tк Tк Tк

Gφ2 τ Gφ2 τ Gφ2 τ
φ3 φ Gφ2 (s τ 23(s)) φ3 (s τ 23(s)) ds + η3 Gφ2 η3 (s τ 23(s)) η3 (s τ 23(s)) ds + r2 φ2 (s) φ2 (s) ds
3 Tк Tк Tк

Gφ2 |e2e3|k c3ρ 2ω 6c cω Gφ2
ρ2 m2 cos(π/2 δ) 3 ((R3/μ)e μT) ρ2 2 + c 4 (R3/μ)e μT) ρ 2 2 + c 4 (R3/μ)e μT) ρ 2 = ρ2

и так далее.

Обозначая Br2 = Br2 (r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3), . . . , Bη3 = Bη3 (r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3), получаем

d(k,0) (Br2 , Bφ2 , Bη3 , Br3 , Bφ3 , Bη3), (Br2 , Bφ2 , Bη3 , Br3 , Bφ3 , Bη3)

2(Gr3 +...+ Gη3) ω(Gr3 +...+ Gη3) d(k,0) (r2, φ2, η2,r3, φ3, η3),(r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3) + d(k 1,1)
(r2, φ2, η2,r3, φ3, η3),(r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3) + μ2 μ2

+ ω2 (Gr3 +...+ Gη3)
d(k,2) (r2, φ2, η2,r3, φ3, η3),(r2, φ2 , η2 ,r3, φ3 , η3) . μ2

Если $\frac{2(\overline{Gr3}+\ldots+\overline{Gη3})}{\overline{μ2}} < \frac{1}{3}$; $\frac{ω(\overline{Gr3}+\ldots+\overline{Gη3})}{\overline{μ2}} < \frac{1}{3}$; $\frac{ω2(\overline{Gr3}+\ldots+\overline{Gη3})}{\overline{μ2}} < \frac{1}{3}$ не выполняются, то применим неравенства из приложения A и получим искомые неравенства для достаточно большого m N:

$$\frac{ом}{\overline{2(Gr3+\ldots+Gη3)}\,μ2\,мкм} < \frac{1}{3};\quad \frac{ом}{мкм}\,\frac{ω(\overline{Gr3}+\ldots+\overline{Gη3})}{μ2} < \frac{1}{3};\quad \frac{ом}{\overline{ω2(Gr3+\ldots+Gη3)}\,μ2\,мкм} < \frac{1}{3}.$$

Легко видеть, что пространство Mr2 × Mφ2 × Mη2 × Mr3 × Mφ3 × Mη3 (j1, j2, j3) ограничено, а отображения js : A A (s = 1, 2, 3) коммутативны. Тогда оператор (B2r , B2φ, B3r , B3φ) в силу теоремы о неподвижной точке из [8] имеет единственную неподвижную точку, которая в силу Основной леммы является T-периодическим решением уравнения (BS).

Теорема 1, таким образом, доказана.

Численные результаты

Проверяем неравенства из Основной теоремы:

$$\frac{|e2e1|}{м2}\,\frac{1}{c\,ρ2^2}\,\overline{cω3}(ρ3+2\ldots)\,ω2\,2R2\,ρ\,2+\ldots+c\,\frac{e_{мкТ}}{μ}\,e2e3|\,Я2;\,φ02+\frac{|}{м2}\,\frac{\overline{cω3}(ω2\ldots+\ldots)\,3\,2\cos(π/2-δ)\,ρ}{μT}\,\frac{e_{мкТ}}{μ}\,Ф2;$$

$$\frac{|e2e3|}{м2}\,\frac{\overline{cω3}}{3\,в}\,\frac{e\,μT+3}{ρ\,2\,2}\,ω2\,2Y2\,ρ\,3+\frac{e}{μ}\,Y2.$$

Известно (см. [21]), что
$e_n = 1{,}6\times10^{-19}$Кл; $m_n = 9{,}11\times10^{-19}$кг (n = 2, 3); в = 3×108м/сек; ω2 = ω3 = 4 × 1016 $T = \frac{2π}{ω} = \frac{6{,}28}{1{,}57\times10^{16}} = 4\times10^{-16}$. Выбирая μ = 6 , $ρ_н = 5{,}3\times10^{-11}$м; $δ = \frac{π}{6}$, φ20 < Ф0.

× 1016 > ω = 4 × 1016 и μT = 6 × 106 × 1, 0,57 × 10 16 = 9,42.

> ωT = 2π, получаем $\frac{e_{мкТ}}{μ} = \frac{1{,}2\times10^4}{6\times10^{16}} = 2\times10^{-13}$. 9.42 1,2 × 104 ,

Machine Translated by Google

Имеем (R2 + R3) e $\frac{мкТ}{\mu}$ $\frac{2\bar{c}}{\mu}$ = $\frac{2{,}2\times106}{6\times1016}$ 0 |ρ02 ρ03|;

2,81 × 10 8 $\frac{1}{\rho03|\ 4\times1016(5{,}3\times10\ \ 11+3|\rho02\ \ \rho03|)\ 16\times1032+137\times9\times1016}$ $\frac{4\times1016(2\times5{,}3\times10\ \ 11+3|\rho02\ \ \rho03|)\ 16\times1032+}{3\times108\times5{,}3\times10\ \ 11\ 27\times1024\ 137\times9\times1016|\rho02}$ R2 2 × 10 13 R2;

$\rho02\ \ \rho03|\ 2\times0{,}5\ 27\times1024$

5,62 × 10 21 $\frac{5{,}3\times10\ \ 11\times4{,}8+3|\rho02\ \ \rho03|\ 16\times1032+137\times9\times1016}{27\times1024\ 5{,}3\times10\ \ 11|\rho02\ \ \rho03|}$ Φ2 Φ2 - ϕ02;

2,81 × 10–8 $\frac{4\times1016}{2}$ Y2 2 × 10 13 Y2.

Поскольку |ρ02 ρ03| 10 11, тогда

5,62 $\frac{103}{}$ + 6 × 107R2 10 ^{1} 21 R2. + + 4,11 × 1012 × 10–22 4,11 × 1018 × 10–11 15,9

Для второго неравенства получаем

5,62 × 10 21 6,5 × 1019 + 3,7 × 1019 + 0,6 × 108Φ2 Φ2 φ02.

Наконец, 5,62 1,6 × 1020 + 1,8 × 1019 + 6,107Y2 10 21 Y2.

7. Обсуждение гипотез Бора и Зоммерфельда.

В соответствии с первой гипотезой Бора (см. [22,23]) оба электрона атома Не движутся по круговым орбитам в плоскости на противоположных сторонах. Это означает, что мы имеем задачу Кеплера с условиями λ2 = 0, λ3 = 0, φ3(t) = φ2(t) + π, что дает

φ2(t) φ2(t τ 23) φ2τ 23 ω $\frac{ρ23}{2в}$ 1016 $\frac{5{,}3\times10{-}11}{6\times108}$ 10–3 ;

φ3(t τ 32) φ3(t) φ3τ 32 ω $\frac{ρ23}{2в}$ 1016 5,3×10–11 10–3 ; а затем 6×108

cos φ23 = cos(φ2(t) φ3(t τ 23)) = cos(φ2(t) φ2(t τ 23) π) = cos(φ2(t) φ2(t τ 23)) 1;

sin φ23 = sin(φ2 φ3(t τ 23)) = sin(φ2(t) φ2(t τ 23) π) = sin(φ2(t) φ2(t τ 23)) 0 .

С $\xi^{(23)}_{,(3).\ ты}$ = ρ2[cos(φ2 φ3) 1] .. ρ3 = 2ρ2 $\ddot{ρ3}$, $\xi^{(32)}_{,(2).\ ты}$ = 2ρ3 уравнение - ρ2 ,

движения становятся

$\dot{r}2 = \frac{e2e1}{м2}\frac{1}{cρ2^{2}} + \frac{e2e3}{м2}\frac{4ρ2\,r3\,c^{2}.}{6τ\,23\,3} + c\frac{\dot{r}3}{4τ\,23}$ $\frac{e^{2}_{2}}{м2}\frac{\ddot{ρ2}}{c^{3}}$; $\dot{φ2} = \frac{e2e3}{м2}\frac{\dot{ρ3}\,φ3}{c\,4τ\,23ρ2} + \frac{\ddot{φ2}}{3\,c}$;

$\dot{r}3 = \frac{e3e1}{м3}\frac{1}{cρ3^{2}}$ $\frac{e2e3}{м3}\frac{4ρ3\,ρ2+c^{2}..}{3\,c\,4τ\,23}\frac{\dot{ρ2}}{6τ\,32}$ $\frac{м^{2}_{3}}{м3\,c}\frac{\ddot{ρ3}}{3}$; $\dot{φ3} = \frac{e3e2}{м3}\frac{c\ \ φ2\cos φ32\,ρ2}{4τ\,32ρ3}$ $\frac{\ddot{φ3}}{3\,.\,c}$

Эта система является частным случаем (БС) и имеет единственное периодическое решение.

Вторая гипотеза Бора (см. [22,23]) состоит в следующем: оба электрона движутся в двух разных плоскостях под углом 60 градусов. Это означает, что можно выбрать λ2 = 0, λ3 = π/3 η3 = 0, φ3(t) = φ2(t) +α > 0, где α будет определено ниже.

Из (BS) система уравнений движения имеет вид

$\dot{r}2 = \frac{e2e1}{м2}\frac{1}{cρ2^{2}}$ $\frac{e2e3}{м2}\frac{ρ2\ \ ρ3\cos φ23\,3\,c\,(23)\,\xi^{\cdot\,(3)}_{,ты}}{в3τ\,23\,3}$ $\frac{e2e3}{м2}\frac{\cos φ23+ρ3\,c\,4τ\,23\ \ φ3\sin φ23\,r3}{}$ $\frac{e^{2}_{2}}{м2}\frac{\ddot{ρ2}}{c^{3}}$;

$\dot{φ2} = \frac{e2e3}{м2}\frac{ρ3\sin φ23}{τ\,23\,3ρ2}\frac{\xi^{\cdot\,(3)}_{,ты}}{6\,c}$ $\frac{r3\sin φ23+ρ3\,φ3\cos φ23+c}{4τ\,23ρ2}$ $\frac{\ddot{φ2}}{в^{3}}$;

$\dot{r}3 = \frac{e3e1}{м3}\frac{1}{cρ3^{2}}$ $\frac{e2e3}{м3}\frac{ρ3\ \ ρ2\cos φ32\,3\,c}{}\frac{\xi^{(32)\cdot\,(2)}_{,ты}}{в3τ\,32\,3}$ $\frac{e3e2}{м3}\frac{\cos φ32+ρ2\,c\,4τ\,23\ \ φ2\sin φ32\,r2}{}$ $\frac{м^{2}_{3}}{м3}\frac{\ddot{ρ3}}{c^{3}}$; (11)

$\dot{φ3} = \frac{e3e2}{м3}\frac{ρ2\sin φ32}{τ\,32\,3ρ3}\frac{\xi^{(32)\cdot\,(2)}_{,ты}}{6\,c}$ $\frac{r2\sin φ32+ρ2\,φ2\cos φ32+c}{4τ\,32ρ3}$ $\frac{\ddot{φ3}}{3\,c}$;

$0 = \frac{(ρ3\cos φ32\ \ 2ρ2)\,.\,r2+\sin φ32ρ2ρ3\,φ2\sin φ32\,φ2\,r3\cos φ32+ρ2\,ρ2\cos φ32+2\,2c\,6\,4τ\,32\,c}{}$.

Machine Translated by Google

Уравнение (11) можно рассматривать как дополнительное условие существования периодического решения. Действительно,

$$\varphi_{23} = \varphi_2(t) - \varphi_3(t - \tau_{23}),\ \varphi_3(t) = \varphi_2(t) + \alpha,\ \varphi_{23} = \varphi_2(t) - \varphi_2(t - \tau_{23}) - \alpha - \alpha;$$
$$\varphi_{32} = \varphi_2(t - \tau_{32}) - \varphi_3(t),\ \varphi_3(t) = \varphi_2(t) + \alpha,\ \varphi_{32} = \varphi_2(t - \tau_{32}) - \varphi_2(t) - \alpha - \alpha;$$
$$\cos\varphi_{32} - \cos\alpha,\ \sin\varphi_{32} - \sin\alpha.$$

Тогда уравнение (11) принимает вид

$$\tau_{32}\ \frac{0 = 2\,2c\,6}{(\rho_3\ \text{потому что}\ \alpha - 2\rho_2)\,r_2 + \rho_2\rho_3\,\varphi_2\sin\alpha - \rho_2\cos\alpha} - \frac{\cdot\quad\cdot}{r_3\cos\alpha + \rho_2\,\varphi_2\sin\alpha +}.$$
$$4\,c$$

При $\rho_2 = \rho_3 = \rho = \text{const}$. получаем

$$\frac{\text{потому что}^{2}}{2\,\tau_{32}} - \alpha\,\rho + 1\,2\,2c - \frac{\cdot}{4\,c} = 0 - \sin\alpha = 0 - \alpha = 0 - \alpha = \pi,$$

что подтверждает гипотезу Бора для $\alpha = \pi$. Тогда уравнения движения примут вид

$$\cdot\quad e\,2e\,1\quad 1\qquad e\,2e\,3\quad 2в\,3\tau_{23}\rho_3)\,.\,\rho_2\,r_3\,3\qquad e\,2e\,3\quad \rho_3\qquad e_2^2\quad \rho_2\qquad \cdot\qquad \cdot\quad e\,2e\,3\quad 2\rho_3\,\varphi_3\varphi_2 + c\,4\tau_{23}\rho_2\qquad \cdot\cdot$$
$$r_2 = \frac{}{м2}\ \frac{}{ср2^{2}} - \frac{}{м2}\ \frac{}{} - \frac{}{м2}\ \frac{}{2в\,4\tau_{23}} - \frac{}{м2}\ \frac{}{c^{3}};\ \varphi_2 = \frac{}{м2}\ \frac{}{3\,c};$$
$$\cdot\quad e\,3e\,1\quad z\qquad e2e3\quad (\rho_3+2\rho_2)\,.\quad \rho_2\qquad e3e2\,r_2 + 2c\qquad 2\qquad \rho_3\qquad \cdot\qquad e\,3e\,2\qquad 2\rho_2\,\varphi_2\,\varphi_3 + c\,4\tau_{32}\rho_3\qquad \cdot\cdot$$
$$r_3 = \frac{}{м3}\ \frac{}{1\,ср3} + \frac{}{2c\,3\tau\,32\,3\,м3} - \frac{}{4\tau_{23}\,м3} - \frac{}{и\,3\,м3c^{3}};\ \varphi_3 = \frac{}{м3}\ \frac{}{3\,.\,c}$$

Позднее А. Зоммерфельд [23] сделал дополнительные предположения, но они опять оказались частным случаем наших уравнений. Заметим, что уравнение спина для плоской задачи Кеплера (исследованной в [24]) имеет решения с противоположными знаками.

8. Выводы

Получены условия существования-единственности периодического решения задачи трех тел классической электродинамики. Сюда входят атом Не и Не-подобные атомы, например атом Li без одного электрона. Мы даем новую формулировку запаздывающего действия между движущимися частицами, расщепляющую уравнения движения. Как и в предыдущих работах, мы используем операторную формулировку периодической задачи и и метод неподвижной точки доказываем существование и единственность периодического решения трехмерной задачи Кеплера. Таким образом мы показываем стабильность атома Не в рамках классической электродинамики. Тот же подход можно использовать для исследования аналогичной задачи и для атомов более сложной структуры. Как частный случай, мы получаем подтверждение гипотез, высказанных Бором и Зоммерфельдом (ср. [22,23]).

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Благодарности: Автор благодарит Такаюки Хиби за приглашение представить статью и рецензентов, чьи очень полезные предложения улучшили статью.

Конфликты интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Приложение А. Вывод исходных уравнений в сферических координатах Перейдем к

сферическим координатам, т. е. частица $P_n(n = 2, 3)$ находится в точке

$$x_1\ (n)\ (\theta) = \rho_n(\theta)\cos\varphi_n(\theta)\cos\lambda_n(\theta);\ (n)\ (\theta) = \rho_n(\theta)$$
$$x_2\ \ \sin\varphi_n(\theta)\cos\lambda_n(\theta);\ (n)\ (\theta) = \rho_n(\theta)\sin\lambda_n(\theta)$$
$$x_3$$

где $\rho_n(\theta) - 0;\ \varphi_n(\theta) - 0;\ \lambda_n(\theta) - \pi + \delta,\ \frac{}{2}\ \frac{\pi}{2}\ \delta\ ,\ 0 < \delta < \frac{\pi}{2},$ и тогда скорости

$$\text{и}1^{(\text{н})} = \cdot\ \rho_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n - \rho_n\varphi_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n - \rho_n\lambda_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n.$$
$$\text{и}2^{(\text{н})} = \cdot\ \rho_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n + \rho_n\varphi_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n - \rho_n\lambda_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n$$
$$\text{и}3^{(\text{н})} = \cdot\ \rho_n\sin\lambda_n + \rho_n\lambda_n\ \text{потому что}\ \lambda_n$$

Machine Translated by Google

где $\dot{\rho}_{(2)} = d\rho(2)/d\theta$. Для ускорений имеем

$$\begin{aligned}
\ddot{и}1_{(н)} &= \ddot{\rho}n\cos\varphi n\cos\lambda n - \dot{\rho}n\dot{\varphi}n\sin\varphi n\cos\lambda n - \dot{\rho}n\dot{\lambda}n\cos\varphi n\sin\lambda n\\
\ddot{и}2_{(н)} &= \ddot{\rho}n\sin\varphi n\cos\lambda n + \dot{\rho}n\dot{\varphi}n\cos\varphi n\cos\lambda n - \dot{\rho}n\dot{\lambda}n\sin\varphi n\sin\lambda n\\
\ddot{и}3_{(н)} &= \ddot{\rho}n\sin\lambda n + \dot{\rho}n\dot{\lambda}n\cos\lambda n.
\end{aligned}$$

Таким же образом получаем выражения для вторых производных (n = 2, 3):

$$\begin{aligned}
\ddot{ты}1_{(н)} &= \ddot{\rho}_{н\ \text{потому ч то}\ \varphi n,\ \text{потому ч то}\ \lambda n} - \dot{\varphi}_{н}\dot{\rho}n\sin\varphi n\cos\lambda n - \dot{\lambda}_{n}\dot{\rho}n\cos\varphi n\sin\lambda n\\
\ddot{ты}2_{(н)} &= \ddot{\rho}_{н}\,\text{грех}\,\varphi n\cos\lambda n + \dot{\varphi}_{н}\dot{\rho}n\cos\varphi n\cos\lambda n - \dot{\lambda}_{n}\dot{\rho}n\sin\varphi n\sin\lambda n\\
\ddot{ты}3_{(н)} &= \ddot{\rho}_{н}\,\text{грех}\,\lambda n + \dot{\lambda}_{n}\dot{\rho}n,\ \text{потому ч то}\ \lambda n
\end{aligned}$$

Из условия (C) следует

$$\ddot{ты}_{1}^{(2)}, \ddot{ты}_{1}^{(2)} = \ddot{\rho}_{2}^{2} + \rho 2^{2}\dot{\varphi}_{2}^{2}\cos^{2}\lambda 2 + \rho 2^{2}\dot{\lambda}_{2}^{2} - c^{2} < c^{2}\rho 2^{2}\left|1 - \frac{\rho 2^{2}\dot{\varphi}_{2}^{2}}{c^{2}} - \frac{\rho 2^{2}\dot{\lambda}_{2}^{2}}{c^{2}}\right| > 0;$$

$$\ddot{ты}_{1}^{(2)}, \ddot{ты}_{1}^{(2)}/c^{2} > 0;$$

$$\ddot{\rho}_{2}^{2} + \rho 2^{2}\dot{\varphi}_{2}^{2}\cos^{2}\lambda 2 + \rho 2^{2}\dot{\lambda}_{2}^{2} < \ddot{ты}_{1}^{(2)}, \ddot{ты}_{1}^{(2)} = \ddot{\rho}_{2}^{2} + \rho 2^{2}\dot{\varphi}_{2}^{2}\cos^{2}\lambda 2 + \rho 2^{2}\dot{\lambda}_{2}^{2}.$$

Далее у нас есть

$$\xi^{(12)} = (\xi_1^{(12)}, \xi_1^{(12)}, \xi_1^{(12)}) = (\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_1^{(1)}) = (x_1^{(2)}(t) - x_2^{(2)}(t - \tau 12(t)), x_2^{(2)}(t) - x_3^{(2)}(t - \tau 12(t)), x_3^{(2)}(t) - x_3^{(2)}(t - \tau 12(t)))$$

$$= x_1^{(2)}(\theta) = (\rho 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2, \rho 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2, \rho 2\sin\lambda 2);$$

$$\xi^{(13)} = (\xi_1^{(13)}, \xi_1^{(13)}, \xi_1^{(13)}) = (\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(3)}, \xi_1^{(1)}) = (x_1^{(3)}(t) - x_2^{(3)}(t - \tau 13(t)), x_2^{(3)}(t) - x_3^{(3)}(t - \tau 13(t)), x_3^{(3)}(t) - x_3^{(3)}(t - \tau 13(t)))$$

$$= x_1^{(3)}(\theta) = (\rho 3\cos\varphi 3\cos\lambda 3, \rho 3\sin\varphi 3\cos\lambda 3, \rho 3\sin\lambda 3);$$

$$\tau 12(t) = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\left(x_\alpha^{(1)}(t) - x_\alpha^{(2)}(t - \tau 12(t))\right)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\left(-x_\alpha^{(2)}(t - \tau 12(t))\right)^2} = \frac{\rho 2(t - \tau 12(t))}{c} = \frac{\rho 2(\theta)}{c};$$

$$\tau 21 = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\xi^{(21)}, \xi^{(21)}\right)} = \frac{1}{c}\sqrt{\left(x^{(2)}, x^{(2)}\right)} = \frac{\rho 2}{c};$$

$$\tau 13(t) = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\left(x_\alpha^{(1)}(t) - x_\alpha^{(3)}(t - \tau 13(t))\right)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\left(-x_\alpha^{(3)}(t - \tau 13(t))\right)^2} = \frac{\rho 3(t - \tau 13(t))}{c} = \frac{\rho 3(\theta)}{c};$$

$$= \xi_1^{(21)}, \xi_2^{(21)}, \xi_3^{(21)}(\xi_4^{(21)}) = \xi_4^{(21)}(\xi_4^{(21)}) = x_1^{(2)}(t) - x_1^{(1)}(t - \tau 21(t)), x_2^{(2)}(t) - x_2^{(1)}(t - \tau 21(t)), x_3^{(2)}(t) - x_3^{(1)}(t - \tau 21(t)), \text{ict}_1 21 =$$

$$= x_1^{(2)}(t), x_2^{(2)}(t), x_3^{(2)}(t), \text{ict}_2 21;$$

$$= \xi_1^{(23)}, \xi_2^{(23)}, \xi_3^{(23)}(\xi_4^{(23)}) = \xi_4^{(23)}(\xi_4^{(23)}) = x_1^{(2)}(t) - x_1^{(3)}(t - \tau 23), x_2^{(2)}(t) - x_2^{(3)}(t - \tau 23), x_3^{(2)}(t) - x_3^{(3)}(t - \tau 23), \text{ict}_1 23 =$$

$$= (\rho 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2 - \rho 3\cos\varphi 3\cos\lambda 3, \rho 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2 - \rho 3\sin\varphi 3\cos\lambda 3, \rho 2\sin\lambda 2 - \rho 3\sin\lambda 3); c^2\tau 23^2 = (\rho 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2 - \rho 3\cos\varphi 3\cos\lambda 3)^2 + (\rho 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2 - \rho 3\sin\varphi 3\cos\lambda 3)^2 + (\rho 2\sin\lambda 2 - \rho 3\sin\lambda 3)^2 =$$

$$= \rho 2^2 + \rho 3^2 - 2\rho 2\rho 3[\cos\lambda 2\cos\lambda 3\cos(\varphi 2 - \varphi 3) + \sin\lambda 2\sin\lambda 3];$$

$$= \xi_1^{(31)}, \xi_2^{(31)}, \xi_3^{(31)}(\xi_4^{(31)}) = \xi_4^{(31)}(\xi_4^{(31)}) = x_1^{(3)}(t) - x_1^{(1)}(t - \tau 31(t)), x_2^{(3)}(t) - x_2^{(1)}(t - \tau 31(t)), x_3^{(3)}(t) - x_3^{(1)}(t - \tau 31(t)), \text{ict}_1 31 =$$

$$= x_1^{(3)}(t), x_2^{(3)}(t), x_3^{(3)}(t), \text{ict}_2 31;$$

$$= \xi_1^{(32)}, \xi_2^{(32)}, \xi_3^{(32)}(\xi_4^{(32)}) = \xi_4^{(32)}(\xi_4^{(32)}) = x_1^{(3)}(t) - x_1^{(2)}(t - \tau 32), x_2^{(3)}(t) - x_2^{(2)}(t - \tau 32), x_3^{(3)}(t) - x_3^{(2)}(t - \tau 32), \text{ict}_1 32 =$$

$$= (\rho 3\cos\varphi 3\cos\lambda 3 - \rho 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2, \rho 3\sin\varphi 3\cos\lambda 3 - \rho 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2, \rho 3\sin\lambda 3 - \rho 2\sin\lambda 2); в 2\tau 32$$

$$^2 = (\rho 3\cos\varphi 3\cos\lambda 3 - \rho 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2)^2 + (\rho 3\sin\varphi 3\cos\lambda 3 - \rho 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2)^2 + (\rho 3\sin\lambda 3 - \rho 2\sin\lambda 2)^2 =$$

$$= \rho 2^2 + \rho 3^2 - 2\rho 2\rho 3[\cos\lambda 2\cos\lambda 3\cos(\varphi 2 - \varphi 3) + \sin\lambda 2\sin\lambda 3].$$

Machine Translated by Google

Но

$$\cos\lambda_2\cos\lambda_3\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\sin\lambda_2\sin\lambda_3=$$

$$=\frac{\cos(\lambda_2-\lambda_3)+\cos(\lambda_2+\lambda_3)}{2}\cos(\lambda_2-\lambda_3)\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\frac{2}{2}=$$

$$=\frac{\cos(\lambda_2-\lambda_3)[1+\cos(\varphi_2-\varphi_3)]}{2}\frac{[\cos(\lambda_2+\lambda_3)-\cos(\lambda_2+\lambda_3)\cos(\varphi_2-\varphi_3)]}{2}=$$

$$=\frac{\cos(\lambda_2-\lambda_3)2\cos^2\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}{2}\frac{\cos(\lambda_2+\lambda_3)2\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}{2}=\cos^2\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}+\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}=1.$$

Поэтому,

$$\tau_{23}^2=\rho_2^2+\rho_3^2-2\rho_2\rho_3[\cos\lambda_2\cos\lambda_3\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\sin\lambda_2\sin\lambda_3]\quad(\rho_2-\rho_3)^2\le\tau_{23}^2\le\left(\frac{|\rho_2(t)-\rho_3(t-\tau_{23})|}{c}\right)^2$$

и $\tau_{32}\le\frac{|\rho_3(t)-\rho_2(t-\tau_{32})|}{c}$.

Для ускорений получаем (n = 2, 3)

$$\ddot{\rho}_{n1}=\cos\lambda_n\frac{\dot{\rho}_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n-\rho_n\dot{\varphi}_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n-\rho_n\dot{\lambda}_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n-c\cos\varphi_n\cos\lambda_n=c\,\rho_n\rho_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n-c\sin\varphi_n\cos\lambda_n\varphi_n,\text{ потому ч то}}{2c-\cos\varphi_n\cos\lambda_n}Q1(n)\rho_n\sin,$$

$$\ddot{\rho}_{n2}=c\frac{\dot{\varphi}_n\rho_n}{2c-\varphi_n\cos\lambda_n}Q2(n)\rho_n,$$

$$\ddot{\rho}_{n3}=\frac{\rho_n\sin\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n\cos\lambda_n-c\sin\lambda_n=c}{\rho_n}-c\frac{2\,\text{грех}\,\lambda_n}{\rho_n}Q3(n),(n=2,3).$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$\ddot{\rho}_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n-\rho_n\ddot{\varphi}_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n-\rho_n\ddot{\lambda}_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n=$$

$$=2\dot{\varphi}_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n+2\dot{\lambda}_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n-2\rho_n\dot{\varphi}_n\dot{\lambda}_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n+\rho_n\dot{\rho}_n\rho_n\dot{\varphi}_n\varphi_n\cos^2\varphi_n\cos\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n^2\cos\varphi_n\cos\lambda_n+\frac{2c}{\rho_n}\text{потому ч то }\varphi_n,\text{потому ч то }\lambda_n$$

$$\ddot{\rho}_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n+\rho_n\ddot{\varphi}_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n-\rho_n\ddot{\lambda}_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n=\quad(A1)$$

$$=2\dot{\rho}_n\dot{\varphi}_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n+2\dot{\lambda}_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n+2\rho_n\dot{\lambda}_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n+\rho_n\dot{\rho}_n\rho_n\dot{\varphi}_n\varphi_n\sin^2\varphi_n\cos\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n^2\sin\varphi_n\cos\lambda_n+\frac{2c}{\rho_n}\text{грех }\varphi_n,\text{потому ч то}\frac{2c}{\rho_n}\text{грех }\varphi_n,\text{потому ч то }\lambda_n;$$

$$\ddot{\rho}_n\sin\lambda_n+\rho_n\ddot{\lambda}_n\cos\lambda_n=2\dot{\lambda}_n\cos\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n\rho_n\sin^2\lambda_n\cos\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n^2\sin\lambda_n\cos\lambda_n+\frac{2c}{\rho_n}\text{грех }\lambda_n.$$

Введем обозначения:

$$П1(н)=2\dot{\varphi}_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n+2\dot{\lambda}_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n-2\rho_n\dot{\lambda}_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n+\rho_n\dot{\rho}_n\rho_n\dot{\varphi}_n\varphi_n\cos^2\varphi_n\cos\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n^2\cos\varphi_n\cos\lambda_n+\frac{2c}{\rho_n}\text{потому ч то }\varphi_n,\text{потому ч то }\lambda_n;$$

$$П2(н)\quad\varphi_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n+2\dot{\lambda}_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n+2\rho_n\dot{\lambda}_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n+\rho_n=2\rho_n\dot{\rho}_n\dot{\varphi}_n\varphi_n\sin^2\varphi_n\cos\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n^2\sin\varphi_n\cos\lambda_n+\frac{2c}{\rho_n}\text{грех }\varphi_n,\text{потому ч то }\lambda_n;$$

$$П3(н)=2\dot{\lambda}_n,\text{потому ч то }\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n\rho_n\sin^2\lambda_n+\frac{2c}{\rho_n}\text{грех }\lambda_n.$$

Тогда (A1) примет следующий вид:

$$\ddot{\lambda}_n\rho_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n+\ddot{\varphi}_n\rho_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n=P2-\ddot{\lambda}_n\rho_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n=P1(n)+Q1(n)\rho_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n;$$

$$\ddot{\rho}_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n+\ddot{\varphi}_n\rho_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n-\ddot{\lambda}_n\rho_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n=P3(n)+Q3(n)\quad(n)+Q2(n)\rho_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n-\ddot{\lambda}_n\rho_n,\text{потому ч то}\lambda_n=P3(n)+Q3(n)$$

$$\ddot{\rho}_n\sin\lambda_n+\rho_n\ddot{\lambda}_n\cos\lambda_n=2\dot{\lambda}_n\cos\lambda_n+\rho_n\dot{\lambda}_n\rho_n\sin^2\lambda_n+\frac{2c}{\rho_n}\text{грех }\lambda_n.$$

Чтобы решить последнюю систему относительно $\ddot{\lambda}_n$, заметим, что ρ_n, φ_n,

$$\cos\varphi_n\cos\lambda_n-\rho_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n-\rho_n\cos\varphi_n\sin\lambda_n\sin\varphi_n\cos\lambda_n\rho_n\cos\varphi_n\cos\lambda_n-\rho_n\sin\varphi_n\sin\lambda_n\rho_n\cos\lambda_n=\rho_n^2\cos^2\varphi_n\cos^2\lambda_n+\rho_n^2\sin^2\varphi_n\cos^2\lambda_n+\rho_n^2\sin^2\lambda_n=\rho_n^2\text{потому ч то }\lambda_n>0$$

$$\text{грех }\lambda_n\qquad 0$$

и тогда получим исходные уравнения (n = 2, 3):

$$\ddot{\rho}_n-\dot{\rho}_n\dot{\lambda}_n\rho_n\cos^2\varphi_n\cos^2\lambda_n+\dot{\rho}_n\dot{\varphi}_n\rho_n-\dot{\lambda}_n^2\rho_n\cos^2\varphi_n\cos\lambda_n=\frac{2c}{\rho_n},$$

$$\ddot{\varphi}_n=2\dot{\varphi}_n\dot{\lambda}_n\text{tg}\lambda_n-\frac{2\dot{\rho}_n\dot{\varphi}_n}{\rho_n},$$

$$\ddot{\lambda}_n=\frac{2\dot{\varphi}_n\dot{\rho}_n\dot{\lambda}_n+\rho_n\dot{\varphi}_n^2\sin\lambda_n\cos\lambda_n}{\rho_n}.$$

Machine Translated by Google

Приложение Б. Окончательный вид основных уравнений (n). u

Сначала мы вычисляем (n). ты, = ρн .. 2 + ρн 2 .. 2 cos2 λn + ρn φn 2 .. λn 2 ;

(23)
ξ , (3). ты = [ρ2 cos(φ2 φ3) cos λ2 cos λ3 + ρ2 sin λ2 sin λ3 ρ3] .. ρ3+

.. ..
+ρ2ρ3 sin(φ2 φ3) cos λ2 cos λ3 φ3 + ρ2ρ3[sin λ2 cos λ3 cos(φ2 φ3) sin λ3 cos λ2] λ3;

(32)
ξ , (2). ты = [ρ3 cos(φ3 φ2) cos λ3 cos λ2 + ρ3 sin λ3 sin λ2 ρ2] .. ρ2+

.. ..
+ sin(φ3 φ2) cos λ3 cos λ2ρ2ρ3 φ2 + [sin λ3 cos λ2) cos(φ3 φ2) sin λ2 cos λ3]ρ2ρ3 λ2.

Введем обозначения

$$П_{\alpha}^{(2)(21)(23)(2)рад(3)} = Г_{\alpha}^{(31)(32)(3)рад} + G + G_{\alpha}; \quad П_{\alpha} = Г_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Тогда система уравнений движения примет вид

$$\dot{ты}_1^{(н)} = \frac{2\text{-в}\ ты_1^{(н)}}{2c} P_1^{(н)} \quad \frac{ты_1^{(н)} ты_2^{(н)}}{2c} П_2^{(н)} \quad \frac{ты_1^{(н)} ты_3^{(н)}}{c^2} П_3^{(н)} \quad У_3^{(н)} 1^{(н)} (н)$$

$$\dot{ты}_2^{(н)} = \frac{ты_1^{(н)} ты_2^{(н)}}{c^2} c2(u(n) \quad П + 1 \quad \frac{3}{2c} (н)) \quad П_2^{(н)} \quad \frac{ты_2^{(н)} ты_3^{(н)}}{c^2} П \quad У_2^{(н)} 2; 3 (n), (n =$$

$$\dot{ты}_3^{(н)} = \frac{ты_1^{(н)} ты_3^{(н)}}{c^2} П_1^{(н)} \quad \frac{ты_2^{(н)} ты_3^{(н)}}{c^2} (n) (n) c2(u(n)) \quad П + 2 \quad \frac{3}{2c} П_3^{(н)} (2, 3). \quad У_3^{(н)}$$

Но

$$\dot{и}1^{(н)} \quad .. \quad .. \quad .. \quad ρn \cos φn \cos λn \quad ρn φn \sin φn \cos λn \quad ρn λn \cos φn \sin λn$$

$$\dot{и}2^{(н)} \quad .. \quad .. \quad .. \quad ρn \sin φn \cos λn + ρn φn \cos φn \cos λn \quad ρn λn \sin φn \sin λn$$

$$\dot{и}3^{(н)} \quad .. \quad .. \quad ρn \sin λn + ρn λn \text{ потому ч то } λn$$

и поскольку ты(н), ты(н) 2 /c 0, мы делаем вывод

$$У_1^{(н)} = \frac{2\text{-в}\ ты_1^{(н)}}{2c} П_1^{(н)} \quad \frac{ты_1^{(н)} ты_2^{(н)}}{c^2} П_2^{(н)} \quad \frac{ты_1^{(н)} ты_3^{(н)}}{c^2} (н) (н) П; 3\ 1$$

$$У_2^{(н)} = \frac{ты_1^{(н)} ты}{2} (n) (n) c2(u(n)) \quad П + 1 \quad \frac{2}{2} П_2^{(н)} \quad \frac{ты_2^{(н)} ты}{2} (н) (н) П 2; 3 (n), (n$$

$$У_3^{(н)} \quad 2\,1\,c \quad \frac{2c(n)(n)}{P =} (n) uu\ 1\ 3 \quad \frac{ты_2^{(н)} ты_3^{(н)} (n) (n) c2u}{c^2} П + 2 \quad \frac{c^{(н)}}{2c} (н) 2, 3) \quad Р\ 3$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&.. \quad .. \quad .. \quad (n)\\
&ρn \cos φn \cos λn \quad ρn φn \sin φn \cos λn \quad ρn λn \cos φn \sin λn = P \quad ..\\
&.. \quad .. \quad 1\\
&(n)\ ρn \sin φn \cos λn + ρn φn \cos φn \cos λn \quad ρn λn \sin φn \sin λn = P \quad 2\\
&.. \quad .. \quad (n)\\
&ρn \sin λn + ρn λn, \text{ потому ч то } λn = P \quad 3.
\end{aligned}$$

Решая приведенную выше систему относительно λn, получаем ρn , φn ,

$$\begin{aligned}
&.. \quad (n) \quad (n)(н) \sin φn \cos λn + P \sin λn;\\
&ρn = P \cos φn \cos λn + P \quad 2 \quad 3\\
&.. \quad (н)(н)\\
&φn = \frac{P \sin φn + P \cos φn\ 1;\ 2}{ρn \text{ потому ч то } λn} \quad . \qquad (A2)\\
&.. \quad (н)(н)(н)\\
&λn = \frac{P \cos φn \sin λn \quad P \sin φn \sin λn + P \cos λn\ 1\ 2\ 3\ ρn}{} \quad (n = 2, 3)
\end{aligned}$$

Machine Translated by Google

Напомним, что φ23 = φ2(t) φ3(t τ 23) и φ32 = φ2(t τ 32) φ3(t), и ввиду

$$\Gamma_\alpha^{(23)} \frac{e2e3}{3\,м2с}\frac{\xi_\alpha^{(23)}}{\tau_{23}^3}\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,с}\frac{\cdot^{(3)}}{ты_\alpha}\frac{\cdot^{(3)}}{ст\,23} \qquad \Gamma_\alpha^{(32)} \frac{e2e3}{3\,м3с}\frac{\xi_\alpha^{(32)}}{\tau_{32}^3}\frac{\xi^{(32)}, ты}{3\,с}\frac{\cdot^{(2)}}{ты_\alpha}\frac{\cdot^{(2)}}{ст\,32},$$

$$\Pi_\alpha^{(2)} \overset{(21)}{=} \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha^{(2)рад} \frac{e2e1}{4\,м2с}\frac{\xi_\alpha^{(21)}}{\tau_{21}^3} + \frac{e2e3}{3\,м2с}\frac{\xi_\alpha^{(23)}}{\tau_{23}^3}\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,с}\frac{\cdot^{(3)}}{ты_\alpha}\frac{\cdot^{(3)}}{ст\,23} \frac{2}{3\,м2с}\frac{e^2}{e^2}\ddot{ты}_\alpha^{(2)},$$

$$\Pi_\alpha^{(3)} \overset{(31)}{=} \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha^{(3)рад} \frac{e3e1}{м3}\frac{\xi_\alpha^{(31)}}{+\,c\,4\tau\,31\,3} \frac{e2e3}{3\,м3с}\frac{\xi_\alpha^{(32)}}{\tau_{32}^3}\frac{\xi^{(32)}, ты}{3\,с}\frac{\cdot^{(2)}}{ты_\alpha}\frac{\cdot^{(2)}}{ст\,32} \frac{2}{3\,м3с}\frac{e^3}{e^3}\ddot{у}_\alpha^{(3)},$$

(α = 1, 2, 3)

преобразуем правые части уравнений (П2).

Во-первых,

$$\ddot{\rho}2 = P_1^{(2)}(2)\cos\varphi 2\cos\lambda 2 + P_2^{(2)}\sin\varphi 2\cos\lambda 2 + P_3^{(2)}\sin\lambda 2 =$$

$$= потому\ ч\ то\ \varphi 2\ потому\ ч\ то\ \lambda 2 \frac{e2e1}{4\,м2с}\frac{\xi_1^{(21)}}{\tau_{21}^3} + \frac{e2e3}{3\,м2с}\frac{\xi_1^{(23)}}{\tau_{23}^3}\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,с}\frac{\cdot^{(3)}}{ты_1}\frac{\cdot^{(3)}}{ст\,23} \frac{e_2^2}{3\,м2с}\ddot{u}_1^{(2)} +$$

$$+ грех\ \varphi 2\ , потому\ ч\ то\ \lambda 2 \frac{e2e1}{4\,м2с}\frac{\xi_2^{(21)}}{\tau_{21}^3} + \frac{e2e3}{3\,м2с}\frac{\xi_2^{(23)}}{\tau_{23}^3}\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,с}\frac{\cdot^{(3)}}{ты_2}\frac{\cdot^{(3)}}{ст\,23} \frac{e_2^2}{3\,м2с}\ddot{u}_2^{(2)} +$$

$$+ грех\ \lambda 2 \frac{e2e1}{4\,м2с}\frac{\xi_3^{(21)}}{3\,\tau\,21^3} + \frac{e2e3}{3\,м2с}\frac{\xi_3^{(23)}}{\tau_{23}^3}\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,с}\frac{\cdot^{(3)}}{u_3}\frac{\cdot^{(3)}}{ст\,23} \frac{2}{м2с}\frac{\ddot{}}{e\,2\,ю3}^{(2)} =$$

$$= \frac{e2e1}{4\,м2с}\frac{(21)(21)(21)\xi\cos\varphi 2\cos\lambda 2 + \xi\sin\varphi 2\cos\lambda 2 + \xi\sin\lambda 2}{\tau_{21}^3} + \frac{e2e3}{м2с}\xi^{(23)}(23)(23)4\,\xi\cos\varphi 2\cos\lambda 2 + \xi\sin\varphi 2\cos\lambda 2 + \frac{\xi^{(23)}, ты}{в\,2\tau\,23\,3}$$

$$\frac{e2e3}{м2с\,3\tau\,23}\frac{\cdot^{(3)}}{ты_1\cos\varphi 2\cos\lambda 2 +}\frac{\cdot^{(3)}}{ты_2\sin\varphi 2\cos\lambda 2 +}\frac{\cdot^{(3)}}{ты_3\,грех\,\lambda 2}\frac{2}{3\,м2с}\frac{e^2}{e^2}\ddot{ты}_1^{(2)}\cos\varphi 2\cos\lambda 2 + \ddot{ты}_2^{(2)}\sin\varphi 2\cos\lambda 2 + \ddot{}^{(2)}\sin\lambda 2\ u\,3$$

$$\frac{e2e1}{m2c}\frac{1}{\rho 2^2}\frac{e2e3}{м2}\frac{\rho 2\ \rho 3(\cos\varphi 23\cos\lambda 2\cos\lambda 3+\sin\lambda 2\sin\lambda 3)}{3\,с}\frac{\xi^{(23)}, ты}{в\,3\tau\,23\,3}$$

$$\frac{e2e3}{м2}\frac{\ddot{}\ \rho 3\ (\cos\varphi 23\cos\lambda 2\cos\lambda 3+\sin\lambda 2\sin\lambda 3)+\rho 3\ \ddot{}\ \lambda 3(\sin\lambda 2\cos\lambda 3\ \ \cos\varphi 23\sin\lambda.3\cos\lambda 2)\ \varphi 3\sin\varphi 23\cos\lambda 2\cos\lambda 3+\rho 3\ c\ 4\tau\ 23}{}\frac{e_2^2}{м2с}\frac{\dddot{}}{3}\frac{p\,2}{.}$$

Для второго уравнения (А2) имеем

$$\Pi_\alpha^{(2)} \overset{(21)(23)}{=} \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha + г\ \alpha_\alpha^{(2)рад} \frac{e2e1}{4\,м2с}\frac{x_\alpha^{(2)}}{3\,\tau\,21} + 3\,\frac{e2e3}{м2с}\frac{\xi_\alpha^{(23)}}{3\,\tau\,23}\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,с}\frac{\cdot^{(3)}}{ты_\alpha}\frac{\cdot^{(3)}}{ст\,23} \frac{2}{e\ 2\,ты\ 3\,a\,m2c}\ddot{}^{(2)};$$

$$\ddot{\varphi}2 = \frac{\varphi 2P\ 1\ 2}{\rho 2\ потому\ ч\ то\ \lambda 2}\frac{(2)(2)\ \sin\varphi 2P + \cos}{} = \frac{1}{\rho 2\ потому\ ч\ то\ \lambda 2}\frac{e2e1}{4\,м2с}\frac{-x\ 1^{(2)}(2)\sin\varphi 2 + x\cos\varphi 2\ 2 +}{\tau_{21}^3}$$

$$+ 4\,\frac{e2e3}{м2с}\frac{(23)(23)\sin\varphi 2 + \xi\cos\varphi 2}{1\qquad 2}\frac{\xi^{(23)}, ты}{в\,2\tau\,23\,3} + \frac{\cdot^{(3)}}{ты_1}\sin\varphi 2\ \ \tau\ 23\ \frac{\cdot^{(3)}}{ты_2\ потому\ ч\ то\ \varphi 2}\frac{2}{3\,м2с}\frac{e^2}{e^2}\ddot{}^{(2)}\alpha\sin\varphi 2\ \ u\ \ \ddot{}^{(2)}u\cos\varphi 2 = 2 \qquad (А3)$$

$$\xi$$

$$= \frac{1}{\rho 2\ потому\ ч\ то\ \lambda 2}\frac{e2e3}{3\,м2с}\frac{\rho 3\sin\varphi 23\cos\lambda 3\,\tau\,23}{3}\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,с}\frac{\ddot{}\ \ \ddot{}\ \ \ddot{}}{\rho 3\cos\lambda 3\sin\varphi 23+\rho 3\,\lambda 3\sin\lambda 3\sin\varphi 23\,\varphi 3\cos 3\cos\varphi 23\quad \rho 3 + ст\ 23}\dddot{}$$

$$\varphi 2\ \rho 2\ потому\ ч\ то\ \lambda 2\ .$$

Для третьего уравнения (А2) имеем

Machine Translated by Google

$$\ddot{\lambda}_2 = \frac{\cos\varphi_2 \sin\lambda_2}{\rho_2}\Pi_1^{(2)}(2)(2) + \frac{\sin\varphi_2 \sin\lambda_2 \cos\lambda_2}{2\,\rho_2^3(3)}\Pi + \frac{\cos\varphi_2 \sin\lambda_2 \rho_2}{4\,м_2 c}\left(\frac{x_2^{(2)}}{\tau_{21}^3}\right) + \frac{e_2 e_3}{3\,м_2 c}\left(\frac{\xi_1^{(23)}}{\tau_{23}^3}\right)\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,c}\cdot\frac{\cdot(3)}{ты_{1\,ст\,23}} - \frac{2}{3\,м_2 c}e_2\ddot{ты}_1^{(2)} +$$

$$+ \rho_2\frac{\text{грех}\,\varphi_2\,\text{грех}\,\lambda_2 + \cos\lambda_2}{4\,м_2 c}\left(\frac{x_2^{(2)}}{\tau_{21}^3}\right) + 3\frac{e_2 e_3}{3\,м_2 c}\left(\frac{\xi_2^{(23)}}{\tau_{23}^3}\right)\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,c}\cdot\frac{\cdot(3)}{и_{2\,ст\,23}} - \frac{2}{3\,м_2 c}e_2\ddot{ты}_2^{(2)} +$$

$$+ \underset{\lambda_2+\rho_2}{\overset{\text{потому что}}{}}\frac{x_3^{(2)}}{4\,м_2 c}\left(\frac{x_3^{(2)}}{3\,\tau_{21}^3}\right) + \frac{e_2 e_3}{3\,м_2 c}\left(\frac{\xi_3^{(23)}}{\tau_{23}^3}\right)\frac{\xi^{(23)}, ты}{3\,c}\cdot\frac{\cdot(3)}{ты_{3\,ст\,23}} - \frac{2}{3\,м_2 c}e_2\ddot{ты}_3^{(2)} =$$

$$= \frac{e_2 e_3}{3\,м_2 c}\frac{\rho_3\cos\varphi_{23}\sin\lambda_2\cos\lambda_3}{\tau_{23}^3}\frac{\xi^{(23)}, ты}{c}\cdot\frac{\cdot(3)}{} + \frac{e_2 e_3}{3\,м_2 c}\ddot{3}\rho_2\rho_3(\cos\varphi_{23}\cos\lambda_3\sin\lambda_2 - \sin\lambda_3\cos\lambda_2)+\rho_3\ddot{\lambda}_3(\cos\varphi_{23}\sin\lambda_2\sin\lambda_3+\cos\lambda_2\cos\lambda_3\varphi_3\sin\varphi_{23}\sin\lambda_2\cos\lambda_3 - \rho_3 ст\,23\rho_2\frac{2}{3\,м_2 c}e_2\dddot{ты}_{\text{лямбда}\,2}$$

Приложение C

r0. Поскольку в основной теореме r0 1/μ(m = 1, 2, ...), то

(m) (m = 1, 2, ...) должно быть достаточно мало, возьмем $r_0 = \frac{(м)}{}$

$$|rn(t)| = \rho_{н0} + \rho_н \int_{\tau}^{} (1)(t1)dt1 = rn0 + \int_{\rho_{н0}}^{\tau} (1) + \rho_H \int_{\tau 1}^{\tau_к} (2)(t2)dt2\,dt1 = \ldots =$$

$$= \int_{\tau_к}^{\tau} rn0\,(1)dt1 + \int_{\tau_к}^{\tau}\int_{\tau_к}^{\tau 1} rn0\,(2)dt2dt1 + \ldots + \int_{\tau_к}^{\tau}\int_{\tau_к}^{\tau 1}\ldots\int_{\tau_к}^{тм\ 1}_{\rho_н}(м)(тм)дтм\ldots dt1$$

$$\frac{|rn0\,(1)|}{\mu}e_\mu(t - Tk) + \frac{|rn0\,(2)|}{\mu 2}e_\mu(t - Tk) + \ldots + \frac{\omega_м}{м_к м}Rne\,\mu(t - Tk)$$

$$1 - e^{-\mu 2}\,1\,м_к T + e^{\overline{МК}3}\,\mu T + \ldots + \frac{\omega_м}{м_к м}Rne\,\mu(t - Tk)\ \frac{\omega_м}{м_к м}Rne\,\mu(t - Tk),$$

Это означает $|rn(t)| \frac{\omega_м}{м_к м}Rne\,\mu(t - Tk)$ $(n = 2, 3)$, поскольку $\frac{1}{\mu} 0.$

Таким образом, $\rho_н (1)(t) \frac{\omega_м}{м_к м}\omega Rne\,\mu(t - Tk)$, $р\text{-}н (2)(t) \frac{\omega_м}{м_к м}\omega 2Rne\,\mu(t - Tk)$, и так далее.

Приложение D. Оценки высших производных.

Полагая $\beta 0$, получаем

$$\frac{dr_{pq}(t)}{dt} = \frac{\xi^{(пк)}, ты^{(п)} - \xi^{(пк)}, ты^{(к)}}{c\,\xi^{(pq)}, \xi^{(пк)} - \xi^{(пк)}, ты^{(к)}} = \frac{\xi^{(пк)}, ты^{(п)} - ты^{(к)}}{c\,2\tau_{pq}\,\xi^{(пк)}, ты^{(к)}}\ \frac{2\beta}{1\ \beta} < 1\quad \beta = \frac{}{1\,137} < \frac{}{1\,3} < 1$$

$$\frac{d\xi^{(23)}}{2\,дт} = \frac{x_2(t - \tau 23)dt}{(2)(3)(t)\ u(t - \tau 23)(1 - .\tau 23)}\ 2c. = ты_2 -$$

Затем,

$$ты_{(н)}, ты_{(н)} = \cdot\rho_н^2 + \rho_н^2\cdot\varphi_п\ 2\cos2\lambda_п + \rho_п\ 2\cdot\lambda_п\ 2\,2\ c - 2 < c;\ ты^{(2)}, ты^{(2)}/c^2\ 0;$$

$$(п)\cdot ты, (п)\cdot ты = \cdot_{р.н.}^2 + \rho_н^2\ 2\cdot\cos2\lambda_п + \rho_п\varphi_п\ 2\cdot 2\,\eta_п\ \rho_п\ 2\Phi_п 2 + \rho_п 2\Upsilon_п 2)e\,2\mu(t - Tk)\ \omega_п ce\mu(t - Tk)\ \omega_п 2(Rn2 + ;$$

$$\ddot{ты}_{(н)}, \ddot{ты}_{(н)} = \ddot{}_{р.н.}^2 + \rho_н^2\ddot{\varphi}_н\ 2\cos2\lambda_п + \rho_п\ 2\ddot{}_{\eta_п}\ 2\ \omega_п\ 2\,ce\mu(t - Tk);$$

$$\dddot{ты}_{(н)}, \dddot{ты}_{(н)} \dddot{}_{р_н}^2 + \rho_н^2\dddot{\varphi}_н\ 2\cos2\lambda_п + \rho_п\ 2\dddot{}_{\eta_н}\ 2\ \omega_п\ 3\,ce\mu(t - Tk), \frac{1}{\tau 23}\ \frac{с}{;}\ \frac{1}{\tau 32}\ \frac{в}{}.$$

Более того,

Machine Translated by Google

$$\frac{\text{д 2б (к)}}{\text{r2 dt2}} = \frac{\text{dGr2}}{\text{дт}} = \frac{\overset{(2)\,(2)\,(2)\ d(P\sin\lambda 2)\cos\varphi 2\cos\lambda 2+P\sin\varphi 2\cos\lambda 2+P\ 2\ 3\ dt}{1}}{} =$$

$$= \dot{\Pi}^{(2)}_{1}\,(2)\,(2)\,1\cos\varphi 2\cos\lambda 2 \quad P\,\varphi 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2 \quad P\ 1\ \eta 2\cos\varphi 2\sin\lambda 2+\,(2)\,+$$

$$\dot{\Pi}_{2} \quad P\ 2\ \eta 2\sin\varphi 2\sin\lambda 2+ \quad (2)\,(2)\sin\varphi 2\cos\lambda 2+P\ 2\,\varphi 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2 \quad \dot{\Pi}^{(2)}_{3}\,(2)\sin\lambda 2+P\ 3\ \eta 2\cos\lambda 2 =$$

$$= \frac{\text{д}}{\text{дт}} \frac{\text{e2e1}}{\tau 21}\frac{x^{(2)}_{1}}{4\ 3\ m2c} + 3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{1}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\text{ты}^{(3)}_{1\cdot}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{\text{e}\ 2\text{ю}3}\frac{\ddot{}}{1\ \text{м2c}}(2)\quad \text{потому ч то}\ \varphi 2\ \text{потому ч то}\ \lambda 2$$

$$\frac{\text{e2e1}}{\tau 21}\frac{x^{(2)}_{1}}{4\ 3\ m2c} + 3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{1}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\text{ты}^{(3)}_{1\cdot}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{\text{e}\ 2\text{ю}3}\frac{\ddot{}}{1\ \text{м2c}}(2)\quad (\varphi 2\sin\varphi 2\cos\lambda 2+\eta 2\cos\varphi 2\sin\lambda 2)+$$

$$+\frac{\text{д}}{\text{дт}}\frac{\text{e2e1}}{\text{m2c}\ \tau 21}\frac{x^{(2)}_{2}}{4\ 3}+3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{2}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\text{ты}^{(3)}_{2\cdot}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{\text{e}\ 2\text{ю}3}\frac{\ddot{}}{2\ \text{м2c}}(2)\quad \text{где}\ \varphi 2\ \text{, потому ч то}\ \lambda 2+$$

$$+\frac{\text{e2e1}}{\tau 21}\frac{x^{(2)}_{2}}{4\ 3\ m2c} + 3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{2}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\text{ты}^{(3)}_{2\cdot}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{\text{e}\ 2\text{ю}3}\frac{\ddot{}}{2\ \text{м2c}}(2)\quad (\varphi 2\cos\varphi 2\cos\lambda 2 \quad \eta 2\sin\varphi 2\sin\lambda 2)+$$

$$+\frac{\text{д}}{\text{дт}}\frac{\text{e2e1}}{\tau 21}\frac{x^{(2)}_{3}}{4\ 3\ m2c} + 3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{3}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\text{ты}^{(3)}_{3\cdot}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{\text{e}\ 2\text{ю}3}\frac{\ddot{}}{3\ \text{м2c}}(2)\quad \text{где}\ \lambda 2+$$

$$+\frac{\text{e2e1}}{\text{m2c}\ \tau 21}\frac{x^{(2)}_{3}}{4}+3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{3}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\text{ты}^{(3)}_{3\cdot}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{\text{e}\ 2\text{ю}3}\frac{\ddot{}}{3\ \text{м2c}}(2)\quad \eta 2\sin\lambda 2$$

$$\frac{\text{e2e1}}{4\ 3\ \text{m2c}\ \tau 21}\frac{\text{ты}^{(2)}_{1}}{3}\ \frac{3\ \text{e2e1}}{(23)}\frac{4}{\text{m2c}}\frac{x^{(2)}_{1}}{\tau 21}\frac{\dot{}}{\tau 21}+4$$

$$+3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot 1}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{3\xi^{(23)}_{\tau 23}}{4\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}+3\frac{\xi^{(23)}_{1}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}+\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\ddot{}}{\text{ты}1}\frac{(3)}{\text{ст}\ 23}+\frac{\dot{u}^{(3)}_{\tau 23\ 1\ 2}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{3\ \text{м2c}}\frac{\dddot{}}{\text{e}\ 2}\frac{(2)}{\text{ты}_{1}}+$$

$$+\frac{|\text{e2e1}|}{\text{м2c}}\frac{1}{\text{p}\ 2}+\frac{\bar{c}\omega 3}{3}\frac{2+\text{c}\quad \rho\ 3+3\quad \rho}{2}\frac{\omega 2\ 2R2+}{c}2\ (\Phi 2+Y2)\text{e}\ \mu(t\quad Tk\ )+$$

$$+4\frac{\text{e2e1}}{\text{m2c}\ \tau 21}\frac{\text{ты}^{(2)}_{2}}{3}\ \frac{3\ \text{e2e1}}{(23)}\frac{4}{\text{m2c}}\frac{x^{(2)}_{2}}{\tau 21}\frac{\dot{}}{\tau 21}+$$

$$+3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot 2}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{3\xi^{(23)}_{\tau 23}}{4\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}+3\frac{\xi^{(23)}_{2}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}+\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\ddot{}}{\text{ты}2}\frac{(3)}{\text{ст}\ 23}+\frac{\dot{u}^{(3)}_{\tau 23\ 2\ 2}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{3\ \text{м2c}}\frac{\dddot{}}{\text{e}\ 2}\frac{(2)}{\text{ты}}+2$$

$$+\frac{\text{e2e1}}{4\ \text{м2c}}\frac{x^{(2)}_{2}}{3\ \tau 21}+\frac{\text{e2e3}}{3\ \text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{2}}{3\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\text{ты}^{(3)}_{2\cdot}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{\text{e}\ 2\text{ю}3}\frac{\ddot{}}{2\ \text{м2c}}(2)\quad (\Phi 2+Y2)\text{e}\ \mu(t\quad Tk\ )+$$

$$+4\frac{\text{e2e1}}{\text{m2c}\ \tau 21}\frac{\text{ты}^{(2)}_{3}}{3}\ \frac{3\ \text{e2e1}}{(23)}\frac{4}{\text{m2c}}\frac{x^{(2)}_{3}}{\tau 21}\frac{\dot{}}{\tau 21}+$$

$$+3\frac{\text{e2e3}}{\text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot 3}}{\tau\ 23\quad 3}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{3\xi^{(23)}_{\tau 23}}{4\ \tau 23}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}+\frac{\xi^{(23)}}{3\ \tau 23\quad 3}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}+\frac{\ddot{u}^{(3)}_{3}}{+\text{ст}\ 23}\frac{\dot{u}^{(3)}_{\tau 23\ 3}}{\text{ст}\ 23\quad 2}\frac{\dddot{}}{\text{e}\ 2}\frac{(2)}{\text{ты}}+3$$

$$+\frac{\text{e2e1}}{4\ \text{м2c}}\frac{x^{(2)}}{3\ \tau 21\quad 3}+\frac{\text{e2e3}}{3\ \text{м2c}}\frac{\xi^{(23)}_{3}}{\tau\ 23\quad 3}\frac{\xi^{(23)}_{\cdot},\text{ты}^{(3)}_{\cdot}}{3\ c}\frac{\dot{u}^{(3)}_{3}}{\text{ст}\ 23}\frac{2}{\text{e}\ 2\text{ю}3}\frac{\ddot{}}{3}\frac{(2)}{\text{м2c}}\quad Y2\text{e}\ \mu(t\quad Tk\ );$$

$$\frac{\text{д 2б (к)}}{\text{r2 dt2}} = \frac{\text{dGr2}}{\text{дт}} \quad \frac{|\text{e2e1}|}{\text{м2}}\frac{4\quad 2\ c\ 4}{}\frac{3\rho 2\ 8\omega 3\text{c}\ 2\omega 3\ \text{cc}+++\ \text{c}\ 4\quad 3\ c\ 4\quad 4\ c}{2}\frac{\bar{}}{}\frac{\omega 2\ 3R2+}{3\ c}\text{e}\frac{\text{e2e1}|\ \mu(t\quad Tk\ )+}{\text{м2c}}\frac{1}{\text{p}\ 2}+\frac{\bar{c}\omega 3}{3}\frac{\rho\ 2+\quad \rho\ 3+3\quad c}{2}\frac{\omega 2\ 2R2+}{c}2\ (\Phi 2+Y2)\text{e}\ \mu(t\quad Tk\ )+$$

$$+\frac{|\text{e2e1}|}{\text{м2}}\frac{\bar{c}}{}\frac{4}{4\ c\ 4\quad 2\ c\ 4}\frac{3\rho 2\ 8\omega 3\text{c}\ 2\omega 3+++\ \text{c}\ 4\quad 3\ c}{2\ c}\frac{\bar{}}{}\frac{\omega 2\ 3R2+}{3\ c}\text{e}\frac{\text{e2e1}|\ \mu(t\quad Tk\ )+}{\text{м2c}}\frac{1}{\text{p}\ 2}+\frac{\bar{c}\omega 3}{3}\frac{2+\text{c}\quad \rho\ 3+3\quad \rho}{2}\frac{\omega 2\ 2R2+}{c}2\ (\Phi 2+Y2)\text{e}\ \mu(t\quad Tk\ )+$$

$$+\frac{|\text{e2e1}|}{\text{м2}}\frac{\text{c}}{}\frac{4}{4\ c\ 4\quad 2\ c\ 4}\frac{3\rho 2\ 8\omega 3\text{c}\ 2\omega 3+++\ \text{c}\ 4\quad 3\ c}{2\ c}\frac{\bar{}}{}\frac{\omega 2\ 3R2}{3\ c}\text{e}\frac{\text{e2e1}|\ \mu(t\quad Tk\ )+}{\text{м2c}}\frac{1}{\text{p}\ 2}+\frac{\bar{c}\omega 3}{3}\frac{2+\text{c}\quad \rho\ 3+3\quad \rho}{2}\frac{\omega 2\ 2R2+}{2\ c}Y2\text{e}\ \mu(t\quad Tk\ )\quad \omega 2\ 2R2\text{e}\ \mu(t\quad Tk\ )\quad .$$

Machine Translated by Google

Приложение E. Верхние оценки для частных производных

Поскольку φ23 = φ2(t) φ3(t τ 23) и $\xi^{(23)}$, (3). ты $\bar{c}_{\text{сст}}\,23\omega_{3e}\,\mu_T$, получается

$$\frac{Gr2}{\rho 2}\;\frac{|e2e1|}{м2}\;\frac{2}{3\,c\rho 2}+\frac{1}{3\,c}\,\bar{c}_{\text{сст}}\,23\omega_{3e}\,\frac{\mu(t\quad Tk)}{в\,3t\,23\,3}\;\frac{|e2e1|}{м2}\;\frac{2}{c\quad{}_{\rho\,2\,|}\quad 3}+c_5\,\frac{\bar{c}\omega 3}{5\quad 2}\;e_{мкТ}\;\frac{\bar{\Gamma}p2}{\rho 2};$$

$$\frac{Gr2\,(r2,\varphi 2,\eta 2,r3,\varphi 3,\eta 3)\quad r2}{}=0;\quad\frac{Gr2}{\rho 3}\;\frac{\bar{e}_{2e3}\omega_{3\,c+c(\Phi 3+Y3)}}{м2}\;e_{мкТ}\;\frac{\bar{\Gamma}p2;}{в\,6\quad 2\quad\rho 3}$$

$$\frac{\Gamma p2}{r3}\;\frac{|e2e3|}{м2}\;\frac{2(\rho\,2\,3\rho\,3\,c\quad{}^{2}+\quad 2}{}\;\frac{\bar{\Gamma}p2}{r3};$$

$$\frac{Gr2}{\varphi 2}\;\frac{|e2e3|}{м2}\;\omega_{3c}\quad\frac{\rho\,3\,ec^{\mu T}}{5\quad 2}+\frac{\rho\,2+\rho\,3\,3\,в}{3\quad 3\,c\,4}\;\frac{\rho\,2\,1+c}{}\;\frac{\bar{Gr2}}{\varphi 2};$$

$$\frac{Gr2}{\varphi 3}\;\frac{|e2e1|}{м2}\;\frac{\rho\,2+\rho\,3\,c\bar{\omega}_{3e}+c}{3\,c}\;\frac{\mu T}{2\quad 2}\;\frac{\rho\,2+\rho\,3+}{3\,c}\;\frac{\rho\,2\omega_{3c}\,\bar{\omega}_{3c}+c\,3}{c\,4}\;\frac{\bar{3}}{}\;\frac{\bar{\Gamma}p2;}{\varphi 3}$$

$$\frac{Gr2\,(r2,\varphi 2,\eta 2,r3,\varphi 3,\eta 3)\quad\varphi 2}{}=0;\quad\frac{Gr2\,(r2,\varphi 2,\eta 2,r3,\varphi 3,\eta 3)\quad\varphi 3}{}=0;$$

$$\frac{Gr2}{\lambda 2}\;\frac{|e2e3|}{м2}\;e_{мкТ}\,\bar{c}\omega 3\;\frac{\rho\,2+\rho\quad 3}{3\,c}\;\frac{+\rho\,2\,1+c}{3\quad 3\,c\,4}\;\frac{}{}=\frac{\bar{Gr2}}{\lambda 2;}\;\frac{Gr2\,(r2,\varphi 2,\eta 2,r3,\varphi 3,\eta 3)\quad\eta 2}{}=0;$$

$$\frac{Gr2}{\lambda 3}\;\frac{|e2e1|}{м2}\;\frac{\bar{c}\omega 3}{в\,4}\;\frac{(\rho\,2+\rho\,3\quad)(\quad e\mu T+2\,c\quad p2}{2\quad 2}\;)\;Gr2+1\quad\bar{\lambda 3};$$

$$\frac{Gr2\,(r2,\varphi 2,\eta 2,r3,\varphi 3,\eta 3)\quad\eta 3}{}=0;\quad\frac{\Gamma p2}{r2}\;\frac{e_2^{2}}{3\,м2c}\;\frac{\bar{\Gamma}p2}{r2}.$$

Верхние оценки для $\rho 2,\ldots,\frac{Gr3}{}\quad\frac{Gr3}{r3},\ldots,\frac{}{Gr3}$ можно получить аналогичным образом.

Ссылки

1. Ангелов В.Г. Электромагнитная задача трех тел с радиационными членами. Вывод уравнений движения (I). Результаты Нелинейный анал. 2020, 3, 45–58.
2. Ангелов В.Г. Электромагнитная задача трех тел с радиационными членами — существование-единственность периодической орбиты (II). Результаты НелинейныйАнал. 2020, 3, 137–158.
3. Ангелов В.Г. Задача N тел в классической электродинамике. Физ. Очерки 1993, 6, 204–211. [Перекрестная ссылка]
4. Ангелов В.Г. Об исходных уравнениях Дирака с радиационным членом. Либ. Математика. 2011, 31, 57–86. 5.
Driver, RD Нейтральная система с задержкой, зависящей от состояния. Дж Диф. уравнение 1984, 54, 73–86. [Перекрестная ссылка]
6. Паули, В. Теория относительности. В Энциклопедии Mathematischen Wissenschaften; Группа. 5, вес 4, ст. 19; Шпрингер: Берлин/Гейдельберг, Германия, 1921 г.
7. Синг ДжЛ. Об электромагнитной задаче двух тел. Учеб. Рой. Соц. 1940, A177, 118–139.
8. Ангелов В.Г. Теоремы о неподвижных точках для (Ф, j1 , j2 ,..., jm) сжимающих отображений в равномерных пространствах. Бык. Аллахабадский математик. Соц. 2023, 2. в прессе.
9. Бауэр, Г.; Декерт, Д.-А.; Дурр, Д.; Хинрикс, Г. О необратимости и излучении в классической электродинамике точечных частиц. Дж Стат. Физ. 2014, 154, 610. [CrossRef]
10. Декерт, Д.-А.; Дурр, Д.; Вона, Н. Уравнения с запаздыванием типа Уилера-Фейнмана. Дж Математика. наук. 2014, 202, 623–636. [Перекрестная ссылка]
11. Бауэр Г.; Декерт, Д.-А.; Дурр, Д. О существовании динамики в электромагнетизме Уилера-Фейнмана. Дж Прил. Математика. Физ. 2012, 64, 1087–1124. [Перекрестная ссылка]
12. де Люка Ж Вариационная электродинамика атомов. Прог. Электромагн. Рез. Б 2013, 53, 1–11. [Перекрестная ссылка]
13. Симачу, В.С. Классическая модель электрона в стохастической электродинамике. Преподобный Мекс. Фис. 2001, 47, 392–394.
14. Абуэльмагд, Э.И.; Гарсиа Гирао, JL; Ллибре, Ж Периодические орбиты квантованной ограниченной задачи трех тел. Вселенная 2023, 9, 149. [Перекрестная ссылка]
15. Пан, С.; Хоу, Х. Анализ периодических орбит резонансного перехода в круговой ограниченной задаче трех тел. Прил. наук. 2022, 12, 8952. [CrossRef]
16. Абуэльмагд, Э.И.; Гирао, JLG; Ллибре, Ж О периодических орбитах возмущенных задач двух и трех тел. Галактики 2023, 11, 58. [CrossRef]
17. Абуэльмагд, Э.И.; Алховайти, С.; Диаб, З.; Гирао, JLG; Шехата, М.Х. О периодических решениях возмущенной пространственной задачи квантованного холма. Математика 2022, 10, 614. [CrossRef]
18. Чех Дж; Данг, П.; Силадьи, С.; Леваи, Г. Регулярность орбит экзопланет и симметрии проблемы Кеплера. Симметрия 2023, 15, 2114. [CrossRef]
19. Ангелов В.Г. Периодические, переходные и убегающие траектории для 3D-кеплеровской задачи двух тел классической электродинамики. Физ. наук. Межд. Дж 2023, 27, 31–72. [Перекрестная ссылка]
20. Ангелов В.Г. Метод анализа линий электропередач и с нелинейными нагрузками; Nova Science: НьюЙорк, США, 2014.
21. Поль, Р.В. Оптика и атомфизика; Шпрингер: Берлин/Гейдельберг, Германия, 1963.
22. Бор, Н. Атомная теория и описание природы; Издательство Кембриджского университета: Теддингтон, Великобритания, 1934 г.

Machine Translated by Google

23. Зоммерфельд, А. Атомбау и спектральная линия; Фридрих Видег и Зон, Брауншвейг: Берлин, Германия, 1951.
24. Ангелов В.Г. Спиновая задача трех тел классической электродинамики с радиационными членами (I) — Вывод спиновых уравнений. Результаты Нелинейный анализ. 2021, 4, 1–20. [Перекрестная ссылка]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Новые двумерные копулы через распределение Ломакса Генерируемые искажения

Фадал Абдулла Али Альдуфаири 1* и Джунгсиван Х. Сепански 2

1 Департамент математики, Университет короля Халида, Асир-Абха 61421, Саудовская Аравия, Саудовская
2 Аравия Департамент статистики, актуализма и наук о данных, Дополнительный Центральный Мичиганский университет, Маунт-Плезант, Мичиган 48859, США;
sepan1jh@cmich.edu * Адрес для переписки: aldhu1fa@cmich.edu

Аннотация: Мы разрабатываем основу для создания функций искажения, которые используются для построения новых двумерных копул. Это достигается путем преобразования неотрицательных случайных величин с распределениями, связанными с Ломаксом. В данной статье мы применяем искажения к базовым копулам независимости — копулам Клейтона, Фрэнка и Гамбеля. Для новых семейств искаженных копул исследованы свойства коэффициента хвостовой зависимости, хвостового порядка и конкордансного порядка. Мы провели эмпирическое исследование, используя ежедневную историю доходность акций Amazon и Google с января 2014 года по декабрь 2023 года. Мы сравнили популярные модели копулы Клейтона, Гамбеля, Фрэнка и Гаусса с соответствующими им искаженными моделями копулы, индуцированными единицей-Ломаксом и единицей измерения. -обратные искажения Парето. Новые семейства копул искажения оснащены дополнительными параметрами, присущими функции искажения, обеспечивающими большую гибкость, и продемонстрировано, что они работают лучше, чем базовые копулы. Проанализировав данные, мы обнаружили, что совместные экстремумы акций Amazon и Google более вероятны для высокой дневной чистой прибыли, чем для низкой дневной чисто

Ключевые слова: Архимед; согласование; копула Клейтона; искажение; Франковая копула; копула Гумбеля; т Кендалла; Распределение Ломакса; коэффициент хвостовой зависимости; хвостовой порядок

check for updates

Ссылка: Альдхуфаири, ФАУ; Сепански, Дж. Х. Новые двумерные связки через Распределение Lomax создано Искажения. Прикладная математика 2024, 4, 641–665. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020035

Поступила: 29 марта 2024 г.
Пересмотрено: 7 мая 2024 г.
Принято: 8 мая 2024 г.
Опубликовано: 17 мая 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Описания и измерения корреляции и зависимости между рисками и потерями важны в различных областях, таких как финансы, управление рисками и актуарные исследования. Двумерные копулы различной структуры зависимости могут моделировать хвостовую зависимость при экстремальных рисках. [1], но быть независимым от предельного распределения рисков. Ссылка. [2] численно и графически проиллюстрировали типы отношений, которые могут обнаружить различные меры ассоциации на основе копул. Ссылка. [3] рассмотрели математику функций копулы, проиллюстрированную финансовым приложением к финансовым темам в целообразовании производных финансовых инструментов и анализе кредитного риска. В основополагающей статье [4] были продемонстрированы их практические применения, такие как оценка общей смертности и многоде Экстремальные или хвостовые потери, как правило, происходят одновременно; см. [5]. Ссылка. [6] использовали копулы для изучения влияния хвостовой зависимости и хвостатости путем количественной оценки экстремальных рисков. Ссылки. [7,8] применили моделирование копулы для исследования усиливающихся гидроклиматических экстремальных явлений, связанных с потеплением климата; см. также [9] о моделях наводнений и гидрологических моделях. В целом моделирование копул оказалось эффективным инструментом анализа зависимых структур между переменными.

Теорема Склара [10] утверждает, что совместная кумулятивная функция распределения (cdf) может быть выражена как произведение маргиналов и копулы, и наоборот, копула может быть определена однозначно, если мы знаем cdf и маргиналы. Например, гауссова копула получена из двумерного распределения Гаусса и также может использоваться для создания новых двумерных распределений вероятностей с помощью (A1) в приложении; краткий обзор методов построения копул см. в [11]. Необходимые предварительные сведения о двумерных копулах, собранные в Приложении А, можно найти в [11,12].

Machine Translated by Google

Совсем недавно Реф. [13] расширили традиционные однопараметрические архимедовы копулы, интегрировав поля, генерируемые лог-гаммой. Ссылка. В [14] предложен класс двумерных преобразований копулы независимости вида C(u, v) = uv f((1 u),(1 v)), где f — дважды дифференцируемый. Пусть Π(u, v) = uv — копула независимости. Обобщая копулу FGM, заданную формулой π(u, v) + αxy(1 u)(1 v), Refs. В [15,16] построены новые копулы вида Π(u, v) + Q(u, v; α), где Q — функция возмущения, включающая тригонометрические, гиперболические, логарифмические или экспоненциальные функции. Ссылка. [7] использовало усечение лог-вогнутой полулогистической функции распределения F в качестве мультипликативного архимедова генератора до F(u)F(v) . построение копул формы F. В данной статье мы построение новых двумерных копул с [1] занимаемся

помощью функций искажения. Функция T называется функцией искажения, если она непрерывна и возрастает на единичном интервале I = [0, 1], при этом T(0) = 0 и T(1) = 1. Новое семейство копул, рожденное искажением дается

$$CT(u, v) = TCT \quad ^{1}(y), T \quad ^{1}(v) , u, v \quad [0, 1], \tag{1}$$

T называется допустимым искажением, если (1) является копулой. Если исходная связка архимедова с генератором ψ, то CT архимедова с генератором ψ T в [11] (с. 96) [1]; см. [17,18]. Теорема 3.3.3 показывает, что T допустима тогда и только тогда, когда T возрастает и выпукла; см. также [19]. Этот ключевой результат диктует требование выпуклости и открывает двери для исследования допустимых функций искажения. Ссылка. [20] показали, что T допустимо, если T exp : (, 0) [0, 1] лог-выпукло, и предложили несколько функций искажения.
Ссылка. [21] предложили применять искажение только к функции копулы, только к маргиналам или к обеим. Индуцированная копула в (1) является результатом искажений как копулы, так и маргиналов.

Ссылки. [22,23] построили новые семейства копул посредством бета-искажений CDF и Кумарасвами. Ссылка. В [24] использовалось искажение единичного Ломакса. Ссылка. В [25] изучались семейства копул, порожденных единичным искажением Вейбулла. Ссылка. [26] исследовали свойства искаженных копул единичного Гомпертца и применили их для анализа антропоцентрических данных. Искажения единицы Ломакса, единицы Вейбулла и единицы Гомпертца получаются в результате экспоненциального преобразования случайных величин Ломакса, Вейбулла и Гомпертца.

Руководствуясь тем фактом, что функция распределения непрерывной случайной величины с поддержкой единичного интервала соответствует определению функции искажения, мы предлагаем преобразование, которое преобразует неотрицательную случайную величину в случайную величину с поддержкой единичного интервала, что, следовательно, устанавливает функция искажения. Затем искажение можно использовать для создания новых семейств копул путем искажения существующих. Подобно другим конструкциям новых копул в литературе, цель состоит в том, чтобы получить новые семейства копул, которые могут учитывать более широкий диапазон значений хвостовой зависимости. Благодаря параметрам в CDF искажения искаженные копулы имеют дополнительные параметры в дополнение к параметрам существующих копул, что делает их более гибкими.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 начинается с предлагаемого механизма генерации новых функций искажения и допустимых пространств параметров искажений, подлежащих дальнейшему изучению. В разделе 3 представлены архимедовы генераторы для новых семейств искаженных копул, когда базовыми копулами являются независимость, Клейтон, Фрэнк и Гамбель. Семейство копул искаженной независимости представлено для подтверждения результатов, полученных в той статье. В разделах 4 и 5 исследуются свойства хвостовой зависимости, порядка хвоста, порядка согласования и тау Кендалла. Раздел 6 содержит численные результаты моделирования и эмпирического применения, за которыми следуют заключительные замечания. Предварительные сведения о связках , а также выводы хвостовых порядков и порядка согласования включены в Приложения A и B.

2. Предлагаемый метод. Пусть

Y — неотрицательная непрерывная случайная величина с функцией распределения функций F. Рассмотрим следующее преобразование случайной величины Y:

Machine Translated by Google

$$X = \frac{Y}{\theta + Y}, \ \theta > 0. \tag{2}$$

Случайная величина X имеет носитель единичного интервала, а ее cdf определяется выражением

$$G(x) = P(X \quad x) = PY \quad \frac{\theta x}{1 - x} = \Phi \quad \frac{\theta x}{1 - x} \quad . \tag{3}$$

CDF G и его квантиль или обратная функция могут служить функциями искажения для создания новых копул. Если переменная Y принимает любое значение на прямой числовой линии, можно рассмотреть преобразование ее абсолютного значения; то есть $|Y|/(1 + |Y|)$, функция распределения которой не так проста, как (3).

Ниже мы продемонстрируем метод, в котором F представляет собой неотрицательное распределение Ломакса и обратное распределение Ломакса, и выведем пространство параметров, в котором каждое из искажений является выпуклым. Все параметры производящей функции распределения F предполагаются положительными. Простой символ, например G или G », обозначает производную функции.

Пример 1. Искажение Unit-Lomax (UL) и его квантиль (QUL). Пусть Y — случайная величина типа Ломакса или Парето II с функцией распределения функций, заданной формулой $F(y) = 1 \quad [\beta/(\beta + y)]^{\alpha}$, где $y > 0$. В этом случае преобразование в (2) приводит к искажению данный

$$\Gamma(x) = 1 - \quad \frac{\beta(1 \quad x)}{\beta(1 \quad x) + \theta x} \quad ^{\alpha}, \tag{4}$$

где $0 < x < 1$. Заметим, что, например,

$$\frac{2(1 - x)}{2(1 - x) + 1x} \quad ^{\alpha} = \frac{4(1 - x)}{4(1 - x) + 2x} = \frac{8(1 - x)}{4(1 - x) + 4x} \quad ^{\alpha}. \tag{5}$$

Уравнение (5) показывает, что множественные значения параметров (β, θ) приводят к одному и тому же искажению (4), и, следовательно, параметры не могут быть однозначно идентифицированы. Поэтому для решения этой проблемы с перепараметризацией рассмотрим искажение GL (UL) и обратное ему QL (QUL), определяемое выражением

$$\Gamma Л(x) = 1 - \quad \frac{(1 \quad x)}{(1 \quad x) + \theta x} \quad ^{\alpha}; \ QL(x) = 1 + \frac{1}{\theta[(1 \quad x) \quad 1/\alpha \quad 1] \quad 1}.$$

Лемма 1. Искажение $GL(x) = 1 \quad (1 \quad x)^{1}(1 \quad x) + \theta x^{1}$ и $0 < \alpha \quad 1^{\alpha}$ выпукло на I, если $0 < \theta \quad 1$ 1^{α}.

Доказательство. Пусть $A(x) = (1 \quad x) + \theta x$, $B(x) = (1 \quad x)[A(x)]^{1}$. Для простоты обозначение аргумента (x) опущено. Обратите внимание, что $(B)^{1}(A) = (1 - x)^{1}$ и тогда $GL(x) = 1 \quad [B(x)]^{\alpha}$. Производные имеют вид

$$Б' \quad 2 = \theta A \quad ; \ Г'_{л} = \alpha\theta B^{\alpha} \quad 1A \quad 2$$

$$Г''_{л} = \alpha(\alpha \quad 1)\theta^{2}B^{\alpha} \quad 2A \quad 4 \quad 2\alpha\theta B^{\alpha} \quad 1A \quad 3(\theta \quad 1)(\alpha$$

$$\alpha\theta B^{\alpha} \quad 1A \quad 3 + 2(\theta \quad \frac{1)\theta}{1) \cdot 1 - x} \tag{6}$$

Если $0 < \theta \quad 1$ и $0 < \alpha \quad 1$, то $G''_{л}(x) \quad 0$ для всех $x \ I$. □

Лемма 2. Искажение $QL(x) = 1/[1 + \theta(1 \quad x)^{\alpha} \quad 1]^{1/\alpha} \quad 1$. выпукло на I, если $\theta \quad 1$ и

Доказательство. Так как QL — обратная функция к GL, а GL — возрастающая функция, то согласно (6) получить эту лемму. □

Machine Translated by Google

Пример 2. Единично-инверсное Парето (UIP) искажение и его квантиль (QUP). Рассмотрим обратную случайную величину Парето, определенную как обратную случайную величину Ломакса, с функцией распределения функций $F(y) = y/(\beta + y)$, где $y > 0$. В этом случае (3) дает

$$\Gamma(x) = \left(\frac{\theta x}{\beta(1 - x) + \theta x}\right)^{\alpha},$$

где $0 < x < 1$. По той же причине, объясненной (5), мы предлагаем искажение GP (UIP) и обратное ему QP (QUP), определяемое формулами

$$\Gamma\Pi(x) = \left(\frac{\theta x}{(1 - x) + \theta x}\right)^{\alpha}; \quad QP(x) = 1 + \frac{1}{\theta(x^{1/\alpha} - 1)}.$$

Лемма 3. Искажение $GP(x) = \left(\frac{\theta x}{(1 - x) + \theta x}\right)^{\alpha}$ выпукло на I, если $0 < \theta \leq 1$ и $0 < \alpha \leq 1$.

Доказательство. Пусть $A(x) = (1 - x) + \theta x$ и $B(x) = \theta x[A(x)]^{-1}$. Тогда $[B(x)A(x)]^{-1} = 1/(\theta x)$ и $GP(x) = [B(x)]^{\alpha}$. Для простоты обозначение аргумента (x) опущено. Соответствующие производные имеют вид

$$\begin{aligned} B' &= \theta(A) = {}^{1}\theta x A^{-2}(\theta - 1) = \theta A^{-2}; \Gamma'_{\Pi} = \alpha\theta B^{\alpha-1}A^{-2} \\ \Gamma_{\text{ff}} &\alpha(\alpha - 1)\theta^{2}B^{\alpha-2}A^{-4} - 2\alpha\theta B^{\alpha-1}A^{-3}(\theta - 1) = \\ &\alpha\theta B^{\alpha-1}A^{-3}{}_{x}{}^{1}[(\alpha - 1) - 2(\theta - 1)x]. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $0 < \theta \leq 1$ и $\alpha \leq 1$, то вторая производная $G_{\text{ff}} \leq 0$ для всех $x \in I$. □

Лемма 4. $QP(x) = [1 + \theta(x^{1/\alpha} - 1)]^{-1}$ выпукла на I, если $\theta \leq 1$ и $0 < \alpha \leq 1$.

Доказательство. Это лемма следует из того, что QP является обратной функцией GP, а GP возрастает и вогнута согласно (7), когда $\theta \leq 1$ и $0 < \alpha \leq 1$. □

Таким образом, применяя предложенное преобразование в (2) к неотрицательным случайным величинам, связанным с Ломаксом, мы получаем четыре новых допустимых искажения, представленных в таблице 1. Отображаются две функциональные формы, поскольку они могут пригодиться для расчетов. Заметим, что допустимые пространства параметров являются лишь достаточным условием для того, чтобы CT в (1) было копулой. Двойное степенное искажение является частным случаем GL с $\theta = 1$. Степенное искажение является частным случаем GP с $\theta = 1$. Когда $\theta = \alpha = 1$, важно отметить, что все искажения в Таблице 1 становятся функция идентичности. Это означает, что когда эти искажения применяются к базовой копуле, полученное семейство копул обеспечивает большую гибкость при подгонке к данным, поскольку оно включает базовую копулу как особый случай.

Замечание 1. Пусть Y — случайная величина Ломакса. Мы также рассмотрели функцию распределения $Y^{1/\tau}$, т. е. распределение Берра, заданное формулой $F(y) = 1 - (1 + y^{\tau})^{-\alpha}$, как генерирующий cdf. Однако не существует α, пространство параметров, на котором результирующее искажение является выпуклым. Другим кандидатом на генерацию cdf является возведенная в степень функция Lomax cdf формы $1 - F_Y(y)^{\alpha}$, которая является более сложной и будет исследована в будущем.

Замечание 2. Вместо (2) преобразование $X = 1/(1 + Y)$ также приводит к искажению cdf. CDF $X = 1/[1 + Y]$ определяется формулой для $0 < x < 1$,

$$G(x) = P(X \leq x) = 1 - F_Y\left(\frac{1 - X}{X}\right).$$

В этом случае, когда Y имеет распределение Ломакса в примере 1, мы получаем GP. Когда Y имеет распределение Ломакса в примере 2, мы получаем GL.

Machine Translated by Google

Таблица 1. Предлагаемые искажения и допустимые пространства параметров.

Искажение	Форма функции		Выпуклое пространство параметров
У-Ломакс (UL)	$G_L(x)$	$= 1 - \frac{1-x}{1-x+\theta x}^{\alpha}$	$0 < \theta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1$
Квантиль U-Ломакс (QL)	$K_L(x)$	$= 1 - \frac{1}{\{1+\theta[(1-x)^{-1}-1]\}^{\alpha}-1}$ $= \frac{(1-x)^{-1/\alpha}}{\theta+(1-x)^{-1/\alpha}-1}$ $= \frac{1}{1+\theta[(1-x)^{-1/\alpha}-1]-1\theta x}$	$\theta \leq 1, \alpha \leq 1$
U-обратная Парето (UIP)	$G_P(x)$	$= \frac{1}{x+\theta x}^{\alpha}$ $= \frac{1}{[1+\theta-1(x-1)]^{\alpha}1/\alpha x}$	$0 < \theta \leq 1, \alpha \leq 1.$
Квантиль U-обратная Парето (QUP)	$K_P(x)$	$= \frac{x^{-1/\alpha}}{1+\theta(x^{-1/\alpha}-1)}$	$\theta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1$

Замечание 3. Существует множество функций распределения функций, которые можно использовать в качестве порождающей функции распределения F в(3). Например, экспоненциальное распределение со средним значением β. В этом случае (3) дает потенциальное искажение, заданное выражением $1 - \exp - x/[\beta(1-x)]$. Другой пример: обобщенный Парето с PDF-файлом, заданным

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\tau)\theta^{\tau}y f(y)^{\tau-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)(y+\theta)^{\alpha+\tau}}$$

где $x > 0, \alpha > 0, \tau > 0$ и $\theta > 0$.

3. Семейства новых искаженных копул.

Общий вид копул, построенных по искажениюТ, представлен в(1). Архимедовы копулы широко используются [27] и известны своей гибкостьюпри моделировании зависимости врамках многомерных случайных величин. Мы формулируем архимедовы генераторы, возникающие врезультате искажений, вразделе 3.1 , когда базовыми копулами являются независимость, Клейтон, Франк и Гамбель; см. Таблицу A1 в Приложении А. Базовые копулы, за исключением копулы независимости, имеют один параметр, а семейства искаженных копул содержат больше параметров и менее ограничительны. Обозначим через r параметр базовой копулы.

3.1. Архимедовы генераторы

Пример 3 (Связка независимости). Архимедовы генераторы

– Генератор независимости от UL: $\log\theta(1-u)^{-1/\alpha}+1^{-1}$.

– Генератор QUL-независимости: $\log 1+\theta(1-u)^{-1}-1^{\alpha}$.

– Генератор UIP-независимости: $\log 1+\theta(u^{-1/\alpha}-1)$.

– Генератор QUP-независимости: $\log 1+\theta^{-1}(1-u^{-1})^{\alpha}$.

Пример 4 (Клейтон Копула). В этом случае мы получаем следующее:

– Генератор УЛ-Клейтона: $\theta(1-u)^{-1/\alpha}-1^{-1}+1^{-r}-1/r$.

– Генератор QUL-Клейтона: $1-1+\theta((1-u)^{-1}-1)^{-\alpha-r}-1/r$.

– Генератор UIP-Клейтона: $1+\theta u^{-1/\alpha}-1^{-r}-1/r$.

– Генератор QUP-Клейтона: $1+\theta^{-1}(1-u^{-1})^{\alpha r}-1/r$.

Пример 5 (Фрэнк Копула). Когда базовая связка Сфранковская, мы получаем следующее:

Machine Translated by Google

– Генератор UL-Франка: $\log\left(1+e^{r[\theta((1-u)^{1/\alpha}-1)^{1+1}]}-1\right)/(e^{r}-1)$.

– Генератор QUL-Франка: $\log\left(1+e^{r[1-(1+\theta((1-u)^{-1}-1))^{\alpha}]}-1\right)/(e^{r}-1)$.

– Генератор UIP-Франка: $\log\left(1+e^{r[1+\theta(u(u^{1/\alpha}-1))]}-1\right)/(e^{r}-1)$.

– Генератор QUP-Франка: $\log\left(1+e^{r[1+\theta^{-1}}\right)$

Пример 6 (копула Гумбеля). Для копулы Гумбеля получаем следующее:

– Генератор UL-Gumbel: $\log\theta((1-u)^{1/\alpha}-1)^{1+1}$.

– Генератор QUL-Gumbel: $\log\left(1-(1+\theta((1-u)^{-1}-1))^{\alpha}\right)^{p}$.

– Генератор UIP-Gumbel: $\log\left(1+\theta(u^{-1}-1)^{1/\alpha}\right)^{p}$.

– Генератор QUP-Гумбель: $\log\left(1+\theta^{1-(ты^{-1}-1)^{\alpha}}\right)^{p}$.

3.2. Искажения копулы независимости

Мы размещаем здесь семейства копул, построенные путем искажения независимой копулы, чтобы продемонстрировать универсальность искажения и подтвердить результаты, представленные в этой статье. Предложенные искажения превращают независимую копулу без параметров в различные семейства копул, украшенные двумя параметрами и большей гибкостью. Обратите внимание, что $Г_{л}^{-1} = КЛ$; см. таблицу 1. Для копулы UL-независимости $C(u, v) = uv$,

$$CGL(и, v) = 1 - \frac{1}{1+\theta^{-1}\left(ЦГ_{л}^{-1}(y), Г_{л}^{-1}(ты)\right)^{-1}-1}^{\alpha} \tag{8}$$

$$= 1 - \left(\frac{\theta+(1-и)^{1/\alpha}+(1-v)^{1/\alpha}-2}{\theta+(1-u)^{1/\alpha}(1-v)^{1/\alpha}-1}\right)^{\alpha}.$$

Когда $\alpha = \theta = 1$, $CGL(u, v) = uv$. Пусть $u^{-} = (1-u)$ и $v^{-} = (1-v)$. Когда $\theta = 1$,

$$CGL(u, v) = 1-(u^{-1/\alpha}1/\alpha\,1/\alpha\,\alpha+v^{-1/\alpha}u^{-1/\alpha}v^{-1/\alpha}, \tag{9}$$

это копула Джо или B5. Копула Джо задается формулой $C(u, v) = 1 - (1-u)^{r} + (1-v)^{r} - (1-u)^{r}(1-v)^{r}$ $0 < \alpha \le 1$, что подтверждает [11, предложение 4.2.9]. Снижение θ в $\theta(u^{-1/\alpha}v^{-1/\alpha}-1)$ копула Джо, (9) отрицательно упорядочена по α. При $\alpha = 1$ $CGL(u, v) = uv/[1-(1-\theta)u^{-}v^{-}]$, который представляет собой копулу Али–Михаила–Хака (AMH) [11] и отрицательно упорядочен по параметру θ. Семейство копул AMH имеет нулевые коэффициенты зависимости нижнего и верхнего хвоста и задается формулой $C(u, v) = uv/[1-r(1-u)(1-v)]$, $r \in [-1, 1]$.

Для копулы QUL-независимости из табл. 1:

$$CQL(u, v) = 1-\theta+\left[1+\frac{1}{CQ_{л}^{-1}(u), Q_{л}^{-1}(u)]^{-1/\alpha}-1}\right]^{\alpha}, \text{ где} \tag{10}$$

$$CQ_{л}^{-1}(y), Q_{л}^{-1}(и) = 1-\left(\frac{1-ты}{1-ты+\theta y}-\alpha 1\right)^{\alpha}\left(\frac{1-в}{1-v+\theta v}\right)^{\alpha}.$$

Когда $\theta = 1$, (10) образует копулу Джо в (9) с параметризацией, отличной от тот, что в [12]. Когда $\alpha = 1$, (10) дает

$$1-\frac{u^{-}v^{-}+\theta uv^{-}+\theta uv^{-}}{\theta u^{-}v^{-}+\theta uv^{-}+\theta uv^{-}+\theta uv}.$$

Machine Translated by Google

Для копулы UIP-независимости из таблицы 1:

$$CGP(u,v) = \frac{1}{1+\theta\ \ 1\ CG\ \ _{П}^{1}(y),\Gamma_{П}^{1}(ты)\ \ 1\ \ 1}^{\alpha} \tag{11}$$

$$= 1 + (и^{1/\alpha}\ \ 1) + (v^{1/a}\ \ 1) + \theta(u^{1/\alpha}\ \ 1)(v^{1/\alpha}\ \ 1)^{\alpha}$$

$$= uv\ 1\ \ (1\ \ \theta)(1\ \ u^{1/\alpha})(1\ \ v^{1/a})^{\alpha}, \tag{12}$$

которая представляет собой копулу BB10 [12] с $\kappa L = \kappa U = 2$. Копула BB10 задается формулой $C(u,v)$ $r2, uv[1\ \ r1(1=1/r2)(1e\ r1/r2)]1)$ и $r2 > 0$. Как показано в предложении 3, UIP-искаженные копулы имеют те же верхний и нижний хвостовые порядки, что и базовая копула.

Для копулы QUP-независимости из табл. 1:

$$CQP(u,v) = \frac{1}{1+\theta\ CG\ \ _{П}^{1}(y),\Gamma_{П}^{1}(u)\ \ ^{1/\alpha}\ \ 1} \tag{13}$$

$$\frac{(1\ \ u)(1\ \ v)+\theta u(1\ \ v)+\theta v(1\ \ u)}{= 1+\theta uv}^{1}$$

$$= uv\ 1 - (1-u)\frac{\theta - 1}{(1-v)^{\theta}}^{1},$$

это копула AMH или частный случай копулы BB10.

4. Коэффициенты хвостовой зависимости и хвостовые порядки.

В этом разделе мы исследуем коэффициенты хвостовой зависимости, хвостовые порядки и конкордансы для новых семейств копул, возникающих в результате четырех искажений в таблице 1. Длинные выводы хвостовых порядков расположены в Приложение Б.

Пусть $t(u) = dT(u)/du$ и предположим, что нижний коэффициент зависимости хвоста (ltd) λL базовой копулы C и $\lim_{\tau\ 0+} t\ C(u,u)/t(u)$ существуют. По определению (A3) и правилу Лопиталя коэффициент ltd для копулы, индуцированной T- искажением, определяется выражением

$$\lambda T,L = \lim_{и\ 0+}\frac{T\ C(T^{1}(y),T^{1}(ты))}{ты}$$

$$= \lim_{и\ 0+}\frac{T\ C(и,и)}{T(и)} = \lim_{и\ 0+}\frac{t\ C(u,u)}{t(u)}\frac{dC(u,u)}{du}. \tag{14}$$

Поскольку $\lim_{u\ 1} T(u) = 1$, с заменой $v = T$ коэффициент $^{1}(u)$, верхний хвост зависит-плотности (utd) CT определяется выражением

$$\lambda T,U = 2\ \ \lim_{и\ 1-}\frac{1\ \ T\ C(T^{1}(y),T^{1}(ты))}{1-ты}$$

$$= 2\ \ лим_{v\ 1}\frac{1\ \ T(C(v,v))}{1\ \ T(в)} = 2\ \ \lim_{v\ 1}\frac{t\ C(v,v)\ dC(v,v)}{t(v)\ dv}. \tag{15}$$

Ниже мы предполагаем, что коэффициент ltd $\lambda L = 0$, когда $\kappa L > 1$, и коэффициент utd $\lambda U = 0$, когда $\kappa U > 1$ для базовой копулы C. Кроме того, мы предполагаем, что $C(u,u)\ \ u\ \kappa L\ \ell(u)$ при $u\ \ 0+$ и $C(1\ \ u,1\ \ u)\ \ u\ \kappa U\ \ell(u)$ при $u\ \ 0+$ для некоторых медленно меняющихся функций ℓ и ℓ в точке $0+$. Пусть нижний индекс обозначает владельца свойства, например, индекс T в $\lambda T,U$ используется для обозначения коэффициента ltd T-искаженной копулы.

Предложение 1 (Единичное Ломаксное искажение). *Пусть $CGL(u,v)$ — GL-искаженная копула, определенная в (8), где $0 < \theta\ \ 1$ и $0 < \alpha\ \ 1$. Тогда*

(i) $\kappa GL,L = \kappa L$ и $\lambda GL,L = \lambda L$. (ii) $\kappa GL,U = \kappa U$, когда $\alpha = 1$, и $\kappa GL,U = 1$, когда $0 < \alpha < 1$. И $\lambda GL,U = 2\ \ (2\ \ \lambda U)^{\alpha}$.

Machine Translated by Google

Доказательство. Хвостовые порядки показаны в (A9) и (A17) в Приложении B. Коэффициент ltd согласно (14) и правилу Лопиталя определяется выражением

$$\lambda_{GL,L} = \lim_{u \to 0+} \left(1 - \frac{1 - C(u,u)}{1 - C(u,u) + \theta C(u,u)}\right)^{\alpha} \left(1 - \frac{1-u}{1-u+\theta u}\right)^{\alpha}$$
$$= \lim_{u \to 0+} \frac{[1 - C(u,u)]\,[(1-u) + \theta u]}{[1 - C(u,u) + \theta C(u,u)]\,(1-u)\,(u,} \times \frac{C'u)\,[(1-u) + \theta u]}{[1 - C(u,u) + \theta C(u,u)]2} \frac{}{1}^{\alpha-1} \frac{}{}^{2} = \lambda_L$$

поскольку $\lim_{u \to 0+} C(u,u)/u = \lim_{u \to 0+} dC(u,u)/du = \lambda_L$. Коэффициент utd, по (15) и правилу Лопиталя, получаем, что

$$\lambda_{GL,U} = 2 - \lim_{u \to 1-} \left(1 - \frac{1 - C(u,u)}{1 - C(u,u) + \theta C(u,u)}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-u}{1-u+\theta u}\right)^{\alpha}$$
$$= 2 - \lim_{u \to 1} \left(1 - \frac{1-u+\theta u}{[1 - C(u,u) + \theta C(u,u)]\alpha\,1}\right)^{\alpha} \frac{}{C(u,u)} = 2 - (2 - \lambda_U)^{\alpha}$$

поскольку $\lim_{u \to 1} [1 - C(u,u)]/(1-u) = 2 - \lambda_U$. □

Предложение 2 (Квантильная единица – Ломаксное искажение). Пусть $C_{QL}(u,v)$ — QL-искаженная копула, определенная в (10), где $\theta \geq 1$ и α

1. Тогда (i) $\kappa_{QL,L} = \kappa_L$ и $\lambda_{QL,L} = \lambda_L$. (ii)
$\kappa_{QL,U} = \kappa_U$, когда $\alpha = 1$, и $\kappa_{QL,U} = 1$, когда $\alpha > 1$. И $\lambda_{QL,U} = 2 - (2 - \lambda_U)^{1/\alpha}$.

Доказательство. Хвостовые порядки показаны в (A10) и (A18) в Приложении B. По правилу Лопиталя

$$\lambda_{QL,L} = \lim_{u \to 0+} \frac{1 - C(u,u)^{1/\alpha - 1}}{1 - C(u,u)^{1/\alpha}} \frac{(1-u)^{1/\alpha - 1}}{1 + \theta} \frac{(1-u)^{1/\alpha}}{1/\alpha}$$
$$= \lim_{u \to 0+} \frac{[(1-u)^{1/\alpha - 1} + \theta]\,1/\alpha}{[1 - C(u,u)^{1/\alpha} + \theta]^2} \frac{}{}^{2} \frac{1 - C(u,u)^{1/\alpha - 1} C'(u,u)}{(1-u)^{1/\alpha - 1}} = \lambda_L$$

поскольку $\lim_{u \to 0+} C(u,u)/u = \lim_{u \to 0+} dC(u,u)/du = \lambda_L$. Согласно (15) и правилу Лопиталя коэффициент ltd определяется выражением

$$\lambda_{QL,U} = 2 - \lim_{u \to 1-} \frac{\theta}{1 - C(u,u)^{1/\alpha} + \theta} \frac{\theta}{(1-u)^{1/\alpha} + \theta}$$
$$= 2 - \lim_{u \to 1} \left(1 - \frac{1 - C(u,u)}{1-u}\right)^{1/\alpha + 1} \frac{dC(u,u)}{du}^{1} = 2 - (2 - \lambda_U)^{1/\alpha}$$

поскольку $\lim_{u \to 1} [1 - C(u,u)]/[1-u] = 2 - \lambda_U$. □

Предложение 3 (Единичное обратное искажение Парето). Пусть $C_{GP}(u,v)$ — GP-искаженная копула, определенная в (11), где $0 < \theta \leq 1$ и $\alpha \geq 1$. Тогда (i)

$\kappa_{GP,L} = \kappa_L$ и $\lambda_{GP,L} = (\lambda_L)$ а (ii) $\kappa_{GP,U} =$.
κ_U и $\lambda_{GP,U} = \lambda_U$.

Machine Translated by Google

Доказательство. Хвостовые порядки показаны в (A11) и (A19) приложения Б. Для ООО с помощью правила Лопиталя получаем, что

$$\{u/[1 - u + \theta u]\}^{\alpha} \frac{\{C(u,u)/[1 - C(u,u) + \theta C(u,u)]\}^{\alpha} \lambda_{GP,L} = \lim_{u \to 0+}}{}$$

$$= \lim_{u \to 0+} \frac{C(u,u)}{u}^{\alpha} \frac{1 - C(u,u) + \theta C(u,u)}{1 - u + \theta u}^{\alpha} = (\lambda_L)^{\alpha}.$$

Коэффициент utd, согласно (15) и правилу Лопиталя, определяется выражением

$$\lim_{u \to 1} \{u/[1 - u + \theta u]\}^{\alpha} \frac{1 - \{C(u,u)/[1 - C(u,u) + \theta C(u,u)]\}^{\alpha} \lambda_{GP,U} = 2}{(\alpha - 1)\,1 - C(u,u) + \theta C(u,u)}$$

$$= 2 \lim_{u \to 1} \frac{C(u,u)}{u}^{\alpha} \frac{1}{1 - u + \theta u}^{\alpha - 1} \frac{dC(u,u)}{du} = \lambda_U$$

поскольку $\lim_{u \to 1} C(u,u) = 1$ и $\lim_{u \to 1} dC(u,u)/du = 2 - \lambda_U$. □

Предложение 4 (Квантильное единичное искажение Парето). Пусть $C_{QP}(u,v)$ – QP-искаженная копула, определенная в (13), где $\theta \neq 1$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда (i) $\kappa_{QP,L} = \kappa_L$ и $\lambda_{QP,L} = (\lambda_L)^{1/\alpha}$. (ii) $\kappa_{QP,U} = \kappa_U$. Если $\kappa_U = 1$, то $\lambda_{QP,U} = \lambda_U$.

Доказательство. Хвостовые порядки получены в (A13) и (A20) в Приложении В. Для коэффициента ltd

$$= \lim_{v \to 0+} 1/[1 + \theta(v^{-1/\alpha} - 1)] \frac{1/[1 + \theta\,C(u,u)^{-1/\alpha} - 1)]}{\lambda_{QP,L}} = \lim_{u \to 0+} \frac{1 + \theta(u^{-1/\alpha} - 1)}{C(u,u)^{-1/\alpha - 1}}$$

$$= \lim_{u \to 0+} \frac{C(u,u)}{u}^{1+1/\alpha} \frac{du}{dC(u,u)} = (\lambda_L)^{1/\alpha}.$$

Коэффициент utd, согласно (15) и правилу Лопиталя, определяется выражением

$$\lambda_{QP,U} = 2 \lim_{u \to 1-} \frac{\theta[C(u,u)^{-1/\alpha} - 1]\,1 + \theta[C(u,u)^{-1/\alpha} - 1]}{\theta(u^{-1/\alpha} - 1)\,1 + \theta(u^{-1/\alpha} - 1)}$$

$$= 2 \lim_{u \to 1} \frac{C(u,u)^{-1/\alpha - 1}\,1 + \theta(u^{-1/\alpha} - 1)}{\theta[C(u,u)^{-1/\alpha} - 1]\,(-u^{-1/\alpha - 1})}$$

$$= 2 \lim_{u \to 1} \frac{1 + \theta(u^{-1/\alpha} - 1)}{\theta[C(u,u)^{-1/\alpha} - 1]} \frac{[C(u,u)]^{-1/\alpha - 1}}{-\alpha^{-1}} \frac{dC(u,u)}{du} = \lambda_U$$

поскольку $\lim_{u \to 1} C(u,u)/u = 1$ и $\lim_{u \to 1} dC(u,u)/du = 2 - \lambda_U$. □

Результаты предложений сведены в табл. 2. Коэффициенты utd UL- и QUL-искаженных копул отличаются от коэффициентов базовых копул при $\alpha \neq 1$, а коэффициенты ltd остаются неизменными. Искажения UL и QUL отображают новые копулы с зависимостью от верхнего хвоста независимо от того, есть ли она в базовой копуле или нет. И наоборот, искажения UIP и QUP образуют копулы с разными коэффициентами ltd, когда $\alpha \neq 1$ от базовой копулы, в то время как коэффициенты utd остаются прежними. Копула Клейтона не имеет зависимости от верхнего хвоста. Однако, основываясь на Таблице 2, применяя искажения UL и QUL к копуле Клейтона, мы создаем новое семейство копул, которые являются более гибкими в том смысле, что они могут учитывать значения зависимости верхнего хвоста в диапазоне от 0 до 1. Тот же самый вывод можно сделать применить к копуле Франка.

Machine Translated by Google

Таблица 2. Коэффициенты хвостовой зависимости искаженных копул.

	ВЛ (0 < α 1)	КУЛ (α 1)	ОИП (α 1)	КЮП (0 < α 1)
λT,L	λL	λL	(λL) α	(λL) 1/α
λT,U	2 (2 λU) α	1/α 2 (2 λU)	λU	λU

Затем мы построим контурные графики плотности для копул, искаженных UL и UIP, на рисунках 1 и 2. Контурные графики и наблюдения для копул, искаженных QUL и QUP, показаны на рисунках A1 и A2 в Приложении B.1 соответственно. Совместная PDF копулы — это C(u, v)/ u v. Обратите внимание: если контурный график вытянут в одном направлении, это сигнализирует о сильной зависимости в этом направлении. Круглая форма контура указывает на независимость переменных. Например, у Clayton зависимость от нижнего хвоста и нет зависимости от верхнего хвоста, поэтому можно ожидать увидеть удлиненную или стянутую контурную линию в нижней левой части. Пусть r — параметр базовой копулы. Когда θ = α = 1, искажения как UL, так и UIP дают нам базовые копулы, показанные в первом столбце обоих рисунков.

В то время как копула Франка не зависит от хвоста, копулы Клейтона и Гамбеля характеризуются асимметричной зависимостью от хвоста только с utd и ltd соответственно. Как показано в Таблице 2, искажения UL могут привести к появлению новых семейств копул с зависимостью от верхнего хвоста. Копулы, построенные с использованием искажения UL, демонстрируют зависимость от верхнего хвоста и сохраняют те же закономерности поведения нижнего хвоста, что и базовая копула. Примечательно, что копулы Клейтона, искаженные UL, имеют как нижний, так и верхний хвосты.

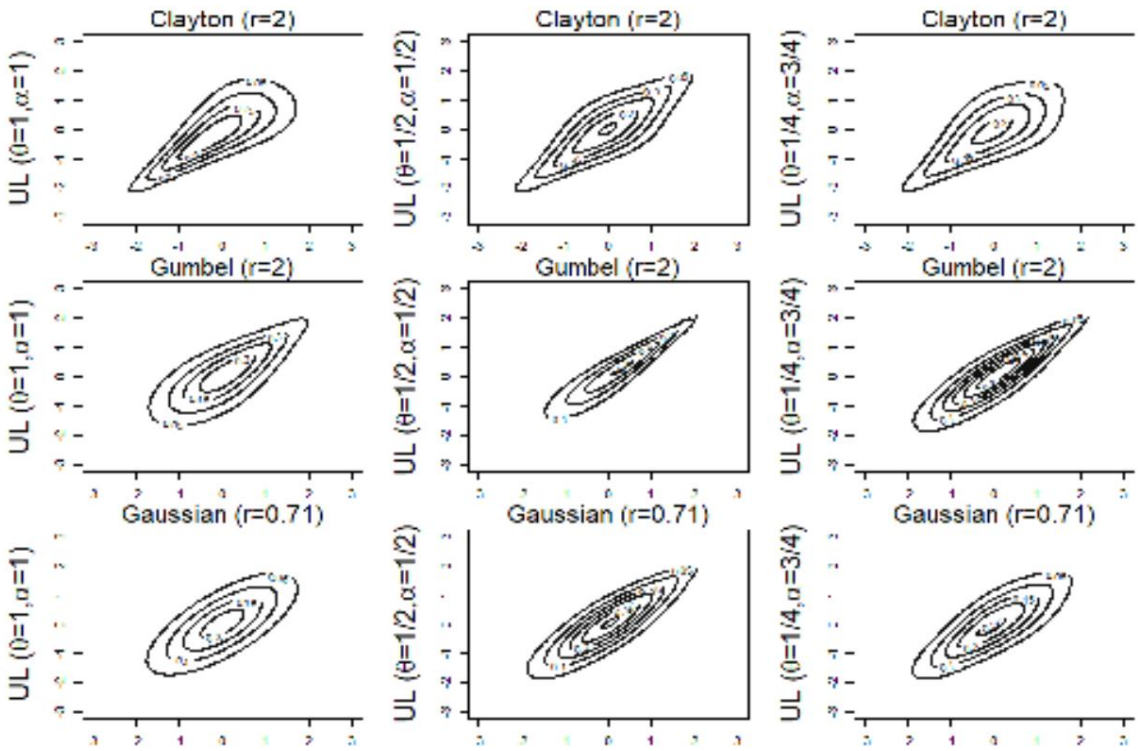


Рисунок 1. Контурные графики плотности копул UL-Clayton, UL-Gumbel и UL-Gaussian со стандартными нормальными полями и параметрами (θ, α) = (1, 1), (1/2, 1/2) и (1/4, 3/4). Для Клейтона, Гамбеля и Гаусса параметр r выбирается таким образом, чтобы значение тау Кендалла составляло 1/2.

Как показано в таблице 2 и на рисунке 2, копулы, искаженные UIP, имеют характеристики, аналогичные базовым копулам в первом столбце. Если базовая копула имеет зависимость от нижнего хвоста, семейство вводит дополнительный параметр в коэффициент ltd, но сохраняет зависимость от верхнего хвоста базовой копулы.

Machine Translated by Google

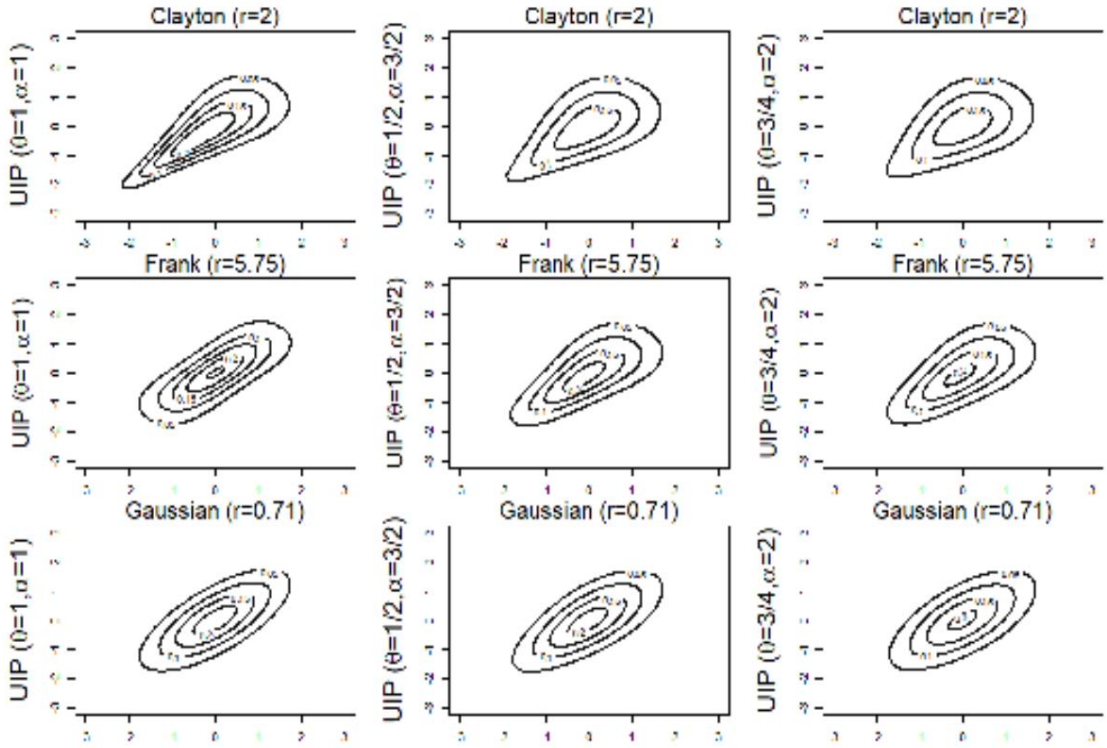


Рисунок 2. Контурные графики плотности копул UIP-Клейтона, UIP-Гумбела и UIP-Гаусса со стандартными нормальными границами и параметрами (θ, α) = (1, 1), (1/2, 1/2) и (1/4, 3/4). Для Клейтона, Франка и Гаусса параметр r выбирается таким образом, чтобы значение тау Кендалла составляло 1/2.

5. Порядок согласия и Тау Кендалла

В этом разделе мы исследуем порядок согласования и тау Кендалла. Мы предоставляем формулы для тау Кендалла копул, искаженных UL и UIP, используя формулу (16) и архимедовы генераторы, представленные в разделе 3. Формулы можно легко адаптировать для написания программ для вычисления значений тау Кендалла при различных значениях параметров.

5.1. Согласование порядка.

Семейство копул-функций Cr(u, v) = C(u, v;r) с параметром r является положительно упорядоченным, обозначается Cr1 Cr2 , если Cr1 (u, v) Crr (u, v), и является отрицательно I. Согласно упорядоченным, обозначается, если Cr1 (u, v) Crr (u, v) для всех r1 r2 и u, v определениюCr1 Cr2 меры конкордантности, если семейство копулы упорядочены по параметру, ее тау Кендалла либо не возрастает, либо не убывает по параметру; см. [11].

Можно вычислить первую производную по параметру, чтобы определить, упорядочена ли копула C по параметру положительно или отрицательно, что может оказаться непростой задачей. Если копула принадлежит к архимедову классу, в дополнение к теореме A1 из Приложения C мы можем использовать следующее следствие для изучения порядка согласования параметров; см. [11] или [28].

Теорема 1 ([11]). Пусть C1 и C2 — архимедовы копулы с образующими ψ1 и ψ2 соответственно. Тогда C1 C2 выполнено, если выполнено одно из следующих 2 1 является вогнутым; (ii) ψ1/ψ2 условий: (i) ψ1 ψ не убывает на I; и (iii) ψ1 и ψ2 непрерывно дифференцируемы на '1/ψ' 2 I и ψ неубывающие на I.

Если базовая копула C положительно упорядочена, то при r1 r2 C(T 1(y), T 1(v);r1) C(T 1(y), T 1(v);r2) для всех u, v I. Поскольку T возрастает, T C(T 1(y), T 1(v);r1) T C(T 1(y), T 1(v);r2) . Аналогичные аргументы можно применить к отрицательно упорядоченной базовой копуле. То есть семейство копул искажения, построенное по допустимым искажениям, сохраняет

Machine Translated by Google

порядок согласования по параметру базовой связки, если семейство базовых копул упорядочено по параметру; см. также [24].

Если базовая копула является архимедовой с генератором ψ, свободным от параметров θ и α, новое семейство T-искаженных копул можно записать как

$$T C(T^{-1}(y), T^{-1}(v)) = T \quad \psi^{-1} \quad \psi T^{-1}(u) + \psi T^{-1}(v),$$

с архимедом с генератором, заданным $\psi T^{-1}(u)$, непрерывная, строго убывающая, (1) = 0. выпуклая функция такая, что ψT с генератором $^{-1}$ Пусть ниже базовая копула архимедова ψ. Пусть T1 и T2 — искажение T, оцененное при значениях параметров r1 и r2, где r1 r2 соответственно.

Следствие 1. Пусть CT1 и CT2 — архимедовы копулы с образующими ψT_1^{-1} и ψT_2^{-1}, соответственно. Если выполнено одно из следующих условий: (i) $\psi T2^{-1}$ является вогнутым; (ii) $\psi T^{-1}/\psi' T^{-1}\psi$ не убывает на (0, 1); или (iii) ψ непрерывно дифференцируемо на I и $(\psi T_1^{-1}/\psi' T_2^{-1})(T_2'/T_1' T_1^{-1})$ не убывает на I, то CT1 CT2.

5.2. Тау Кендалла

Для T копул, индуцированных искажением, в (1), подставив $T^{-1}(u) = x$ и T в $^{-1}(v) = y$ определении тау Кендалла в (A5), то его тау Кендалла можно выразить как

$$\tau = 1 \quad 4 \int_0^1 \int_0^1 [t(C(x, y))]2C1|2(x|y)C2|1(y|x)dxdy,$$

где $t(v) = dT(v)/dv$, $C2|1(u, v) = C(u, v)/u$ и $C1|2(u, v) = C(u, v)/v$. Для расчета тау Кендалла потребуются методы численного интегрирования. Определим $\Psi(u) = \psi T$. Согласно (A6) $^{-1}(y)$. тау Кендалла для искаженной копулы определяется выражением

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\Psi(u)}{\Psi'} du = 1 + 4(u) \int_0^1 \frac{\psi(v)}{\psi'(v)} T^2(v)\,dv. \tag{16}$$

Далее мы представляем явные формулы тау Кендалла для искажений UL и UIP, когда базовыми копулами являются независимость, копулы Клейтона, Гамбеля и Фрэнка. Архимедовы генераторы базовых копул представлены в таблице A1 в Приложении A.

– Копула независимости от UL: $1 - 4 \int_0^1 \frac{\alpha[(1 \quad u)^{1/\alpha}] \log \theta[(1 \quad u)\theta[(1 \quad u)^{1/\alpha} \quad 1] \quad 1 \quad 1}{u)^{1/\alpha} \quad 1][\theta + (1 \quad u)^{1/\alpha} \quad 1] \quad 1 \alpha\theta u} du.$

– Копула УЛ-Клейтона: $1–4 \int_0^1 \frac{(1 \quad u\,r)[1}{r(1 - ты)^2 + \theta(\quad 1 + (1 \quad u) \quad 1)]\alpha+1} du.$

– Копула UL-Gumbel: $1–4 \int_0^1 \frac{\alpha\theta u(\quad \log u)}{r(1 - ты)^2[1 + \theta(\quad 1 + (1 \quad u) \quad 1)]\alpha+1} du.$

– Копула UL-Франка: $1–4 \int_0^1 \frac{\alpha\theta(1 \quad e\,ru)}{r(1 - ты)^2 \quad u) \quad 1)]\alpha+1 \quad 1)]\log[1 + \theta(\quad 1 + (1} \log \frac{e^{-ru} \quad 1}{e \quad r \quad 1} du.$

– Копула независимости UIP: $1 - 4 \int_0^1 \frac{\alpha[1 + \theta(u^{-1/a} \quad \theta u^{-1/\alpha} \quad 1 \quad 1)^{1/a} \quad 1)}{} du.$

– Копула UIP-Клейтона: $1–4 \int_0^1 \frac{\alpha u(1 - тыр)}{\theta \quad 1(u \quad 1 \quad 1)]\alpha+1} du. r\theta u\,2[1 + \alpha u(\quad \log u)$

– Копула UIP-Гумбель: $1–4 \int_0^1 \frac{du. r\theta u\,2[1 + \theta \quad 1(u \quad 1}{1)]\alpha+1} \alpha(1 \quad e\,ru) \log r\theta u\,2[1 +$

– Копула UIP-Франк: $1 - 4 \int_0^1 \frac{\theta \quad 1(u \quad 1 \quad 1)]\alpha+1}{} \frac{e^{-ru} \quad 1}{e\text{-}r - 1} du.$

Пример 7. Здесь мы иллюстрируем только порядок в параметре θ для UL и UIP искажений копулы независимости в Приложении C из-за ограничения на количество страниц. Хотя не все это показано математически, графики тау-поверхности Кендалла на рисунке 3 показывают, что искажения UL, QUL, UIP и QUP

Machine Translated by Google

копулы независимости приводят к появлению новых семейств, отрицательно упорядоченных по параметрам θ и α. Для семейства копул UIP-независимости в (12) копула BB10 отрицательно упорядочена по параметру θ, см. [12]. Семейство копул QUP-независимости в (13) не зависит от параметра α, а значит, и от плоских линий вдоль оси α.

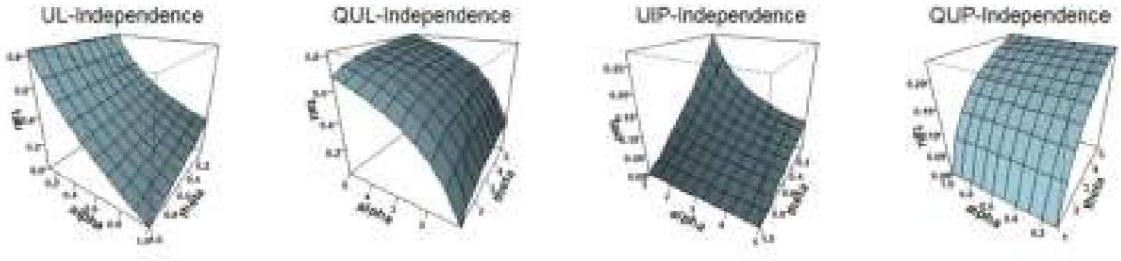


Рисунок 3. Поверхностные графики тау Кендалла для копул, независимых от UL, QL, QIP и QUP.

Не все семейства копул, генерируемых искажениями, упорядочены по согласованию. Например, искаженное UL семейство Клейтон. Когда семейство копул упорядочивается по параметру, мы ожидаем, что значения тау Кендалла будут увеличиваться или уменьшаться вместе с параметром. На рис. 4 показаны графики тау-поверхности Кендалла при внесении искажений в копулу Клейтона с параметром r. Эти графики показывают, что копулы искажения, как и базовая копула Клейтона, положительно упорядочены по параметру r. Копула UL-Клейтона с r = 15 и копула QUL-Клейтона с r = 20 не упорядочены по параметру Что касается копул UIP-Клейтона, то порядок согласования нарушается по параметру α при r = 25 и при θ = 1/10, а также по параметру θ при α = 25. Кроме того, в зависимости от значения α или r Копула QUL-Клейтона может быть положительно или отрицательно упорядочена по параметру θ, когда r = 2 и α = 3/4.

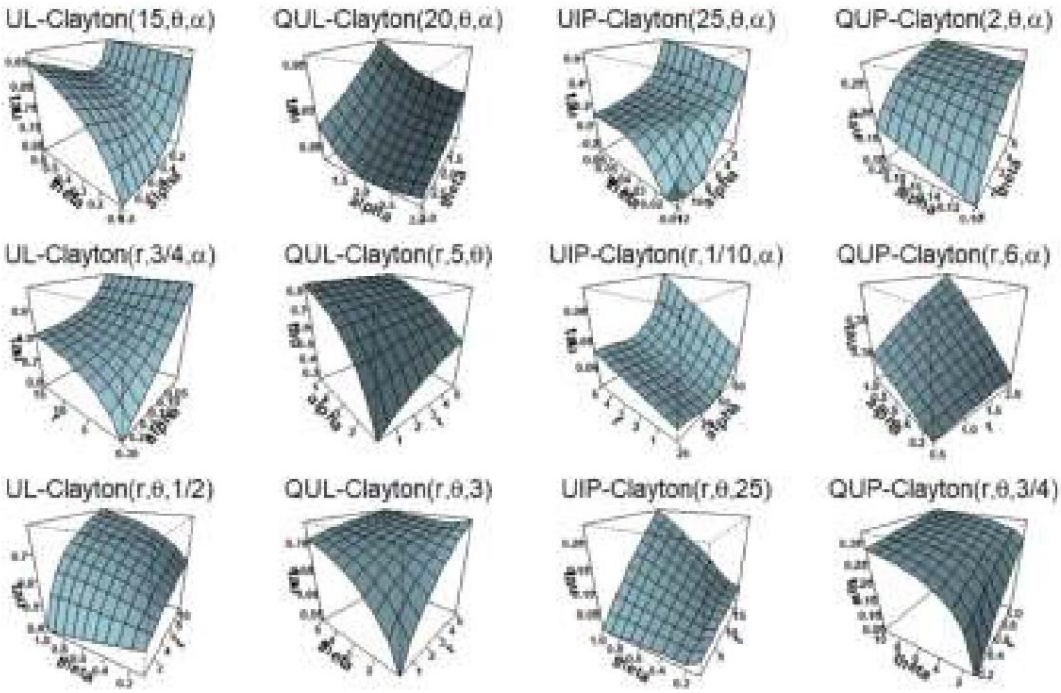


Рисунок 4. Поверхностные графики тау Кендалла, построенные при различных комбинациях значений параметров для копулы UL-Клейтона, QL-Клейтона, UIP-Клейтона и QUP-Клейтона.

6. Численные результаты

В этом разделе мы проводим симуляционное исследование, чтобы проверить, как работают недавно созданные семейства копул искажения UL, когда они соответствуют данным, полученным из любимого Клейтона,

Machine Translated by Google

Копулы Гамбеля, Гаусса и Франка, и наоборот. Кроме того, модели копулы применяются к двумерному набору данных, состоящему из ежедневных ставок возврата Amazon и Акции Google.

6.1. Симуляционное исследование

Общий алгоритм генерации розыгрышей из двумерной связки C — это условный алгоритм подход распределения, как описано в [19,24]. Он состоит из двух этапов: (i) генерирование две независимые равномерные случайные величины (u1, v) и (ii) решают C(u2|u1) v = 0 для u2, где C(u|v) = C(u, v)/ v. Искомая пара — (u1, u2). Используя этот алгоритм, мы сгенерировало 2000 двумерных псевдонаблюдений из Клейтона, Гамбеля, Гаусса и Фрэнк копулы. Мы также смоделировали такое же количество псевдонаблюдений из семейства UL-искаженных копул, где четыре копулы служили базовыми копулами. Мы не приведем цифры искажений QIP, QUL и QUP, так как выводы аналогичны те, которые вызваны искажениями UL.

Значения параметров в базовых копулах выбраны так, чтобы они имели тау Кендалла. значение 0,5. Искажение ВЛ имеет значения параметров α = 1/2 и θ = 1/2. Мы использовали метод оценки псевдоправдоподобия [12] , который максимизирует (17) для соответствия базовой копуле и искаженные копулы к данным. Затем мы вычислили эмпирические вероятности, используя оцененные модели копулы и построили графики вероятность-вероятность (PP) расчетное распределение вероятностей по сравнению с теоретическим. В первом ряду четыре основания копулы аппроксимируются своими UL-искаженными аналогами, UL-Clayton, UL-Gumbel, Копулы UL-Гаусса и UL-Франка, и наоборот во втором ряду . Сплошная черная линия это тот, который получен в результате подгонки данных к модели копулы, из которой наблюдения были созданы.

В качестве другого способа сравнения мы также рассчитали максимальное расстояние в Таблице 3. между теоретическими и эмпирическими вероятностями для каждой пары данных (u1, u2). нам пришел одномерный критерий Колмогорова-Смирнова (KC), и для размера выборки в 2000 г. Критическое значение 95%, равное 0,03, используется в качестве специального порога.

Судя по рисунку 5 и таблице 3, копула Клейтона, которая на рис. второй ряд рисунка 5 показывает большие отклонения от линии в 45 градусов при приближении к данные, полученные из копул, искаженных UL. Согласно лемме 1, UL-искаженная копула имеет коэффициент upd 2 (2 λU) α , который может быть настроен на ноль. Кроме того, это имеет нулевое значение ltd, когда базовая копула имеет нулевое значение ltd. Копула Клейтона не имеет верхней хвостовая зависимость, поэтому можно было бы ожидать, что он будет работать плохо, если соответствовать сгенерированным данным. из семейства UL-искаженных. Напротив, например, UL-Gumbel, кажется, работает хорошо, когда подходит. к данным, полученным из копул Франка и Гаусса. В целом производительность копулы зависит от характеристик ее хвостовой зависимости, и результаты показывают, что Копулы с UL-искажением более гибкие, поскольку имеют дополнительные параметры.

Таблица 3. Максимальное расстояние между теоретическим и эмпирическим распределениями копул.

Искаженная связка	аппроксимация			
	Клейтон по	Гамбель от	Фрэнк	Гауссово по
UL-Клейтон	0,014	0,021	0,035	0,026
УЛ-Гумбель	0,028	0,012	0,019	0,008
UL-Франк	0,021	0,012	0,011	0,024
UL-гауссова	0,031	0,021	0,031	0,016
Базовая копула	**аппроксимация**			
	UL-Clayton от	UL-Gumbel от	UL-Франк	UL-гауссово по
Клейтон	0,035	0,047	0,042	0,042
Гумбель	0,050	0,013	0,034	0,033
Откровенный	0,046	0,024	0,030	0,032
Гауссовский	0,021	0,019	0,017	0,022

Machine Translated by Google

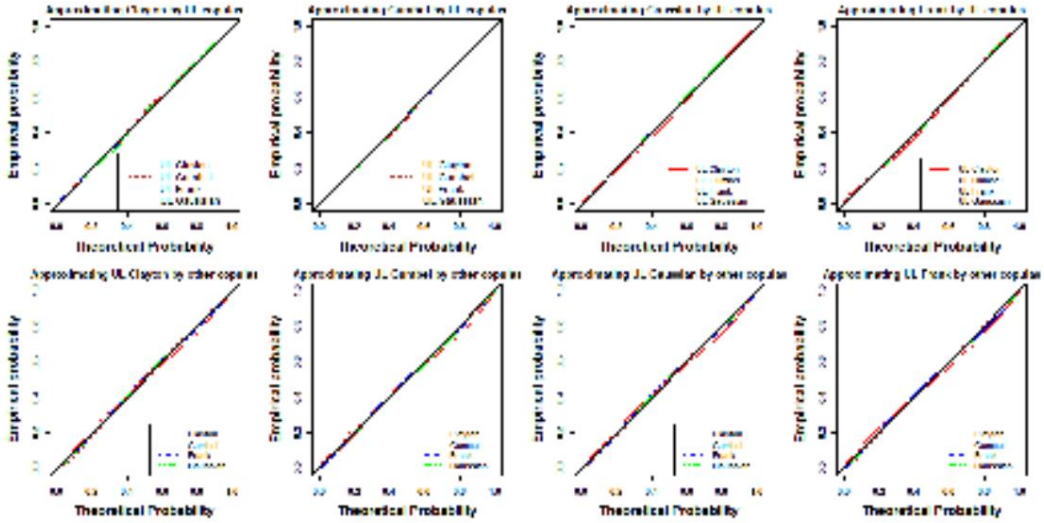


Рисунок 5. PP-графики UL и базовых копул.

6.2. Эмпирическое

применение Мы адаптируем предложенные семейства моделей копул к двумерному набору данных о дневных нормах доходности акций Amazon и Google. Исторические данные о ежедневных ценах открытия, закрытия, высоких и низких ценах, а также скорректированную цену закрытия для акций можно загрузить с Yahoo Finance. Скорректированная цена закрытия учитывает любые дробления и распределения дивидендов. Мы загрузили данные по акциям Amazon и Google за период с января 2014 года по декабрь 2023 года, что составляет размер выборки в 2516 точек ежедневных данных. Затем дневная чистая доходность в процентах рассчитывалась на основе скорректированной цены закрытия. Чтобы рассчитать доходность на сегодня, разница между сегодняшней и вчерашней ценой делится на вчерашнюю цену.

В таблице 4 показаны сводные статистические данные для обеих переменных. Выборочная корреляция Пирсона и тау Кендалла составляют 0,71 (значение $p < 0,001$) и 0,49 (значение $p < 0,001$) соответственно, оба из которых значительно отличаются от нуля. По сравнению с Google, центральные показатели плотности Amazon меньше, но существенной разницы в средних значениях нет.
Дневная доходность Amazon значительно более изменчива на основе F-теста и более асимметрична, судя по показателям асимметрии и гистограммам на рисунке 6.

Таблица 4. Описательная статистика набора данных.

	Иметь ввиду	Сд	Мин.	1-я Цкой	Медиана	3-я Цкой	Макс.	Перекос
Амазонка	0,01	1,60	8,56	0,86	0,01	0,91	8.24	0,09
Google	0,04	1,35	5,76	0,67	0,05	0,84	6,65	0,20

Пусть $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$ обозначают двумерные наблюдения. Псевдонаблюдения или масштабированные эмпирические распределения $\{u_i = v_i\}_{i=1}^{n}$, где $u_i = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} J(x_j)$, $v_i = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} J(y_j)$ определяются как $u_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} J(y_j)$ индикаторная функция. На рисунке 6 показаны диаграммы разброса зависимости y_i от x_i и v_i от u_i. Судя по гистограммам, доходность обеих акций сконцентрирована вокруг их центра, что также отражено на полученной диаграмме рассеяния. Однако псевдонаблюдения, вычисленные с использованием масштабированного эмпирического распределения, распределены равномерно. Поэтому можно было бы ожидать более равномерно распределенной диаграммы рассеяния.

Для оценки параметров используется оценка максимального псевдоправдоподобия, введенная в [18]. Он максимизирует функцию псевдологарифмического правдоподобия, т. е. логарифмическое правдоподобие с функциями копулы, оцениваемыми при псевдонаблюдениях, определяемых формулой

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \log c_T(u_i, v_i; \gamma), \tag{17}$$

Machine Translated by Google

где cT — PDF копулы в (A1) , а γ — вектор параметров.

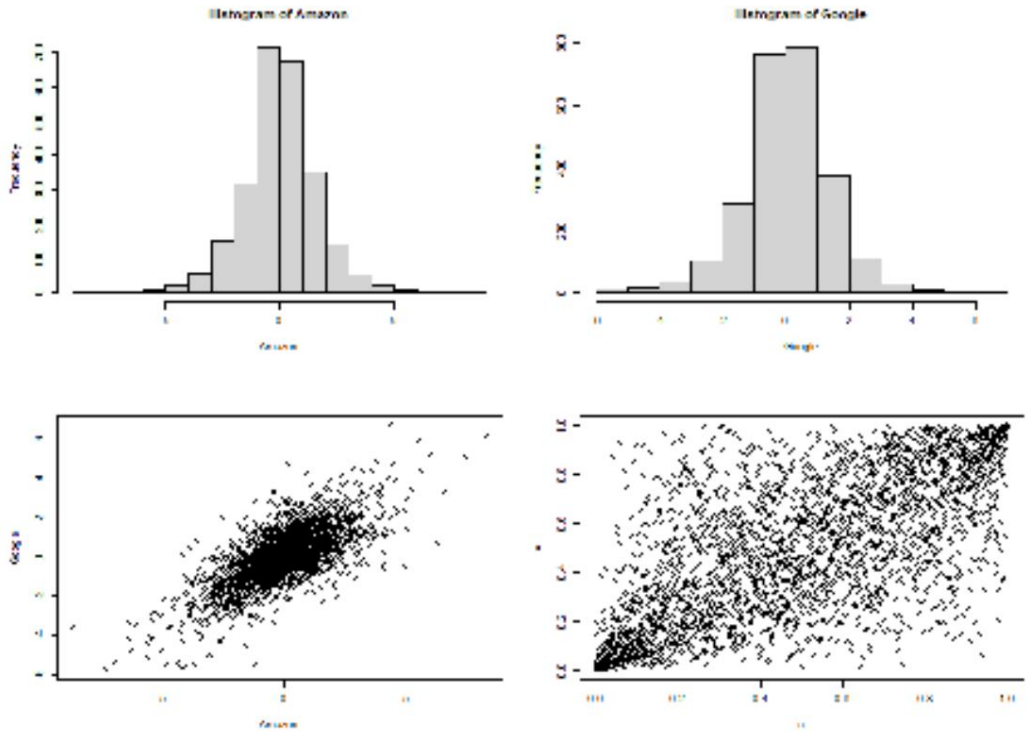


Рисунок 6. Гистограммы дневной доходности акций Amazon и Google, а также диаграммы рассеяния Amazon в зависимости от доходности акций Google и соответствующие им псевдонаблюдения.

Мы не подгоняли предельное распределение для каждой чистой прибыли. Нашей основной целью было сравнить новые семейства искаженных копул с базовыми копулами. Пусть r — параметр базовой копулы. В таблице 5 ниже представлены оценки с предполагаемой стандартной ошибкой в скобках, максимальным псевдоправдоподобием (MPL) и значениями AIC. Все оценки параметров попадают в допустимые пределы. Оценки тау Кендалла τ были рассчитаны путем включения оценок параметров либо в теоретическую формулу тау Кендалла, либо в (16).

Судя по диаграммам рассеяния, видно, что существует слабая зависимость как в нижнем, так и в верхнем хвосте между дневной чистой доходностью двух акций. В таблице 5 показано, что среди рассматриваемых базовых копул лучше всего с точки зрения MPL и AIC работает гауссова копула, за которой следует Гамбель. Расчетное тау Кендалла, рассчитанное на основе гауссовой копулы, дает наиболее близкое совпадение с выборочным тау Кендалла между Google и Amazon.

Копула Франка, которая предположительно подходит для данных со слабой хвостовой зависимостью, работает хуже всего. Обратите внимание, что копула Гамбеля со значением параметра 1 представляет собой независимую копулу, в которой тау Кендалла равно 0. Она работает лучше, чем копула Клейтона, что предполагает, что может быть более сильный upd, чем ltd. Кроме того, копула искажения, которая может учитывать более широкий диапазон зависимости верхнего хвоста, например, копулы с искажением UL, может хорошо соответствовать этому набору данных о чистой прибыли.

В таблице 5 показано, что модель копулы с искажением UL превосходит соответствующую базовую копулу . Подобранная модель копулы UL-Clayton имеет наибольшее значение AIC с расчетными коэффициентами зависимости нижнего и верхнего хвоста 0,44 и 0,50. Она менее удовлетворительна, чем другие модели копулы с искажением UL, вероятно, из-за слабой зависимости нижнего хвоста данных. И UL-искаженная копула Франка, и гауссова копула имеют расчетный коэффициент зависимости верхнего хвоста 0,39 и работают лучше, чем гауссова копула, с точки зрения MPL и AIC.

Machine Translated by Google

Копулы UIP-Клейтона и UIP-Франка не демонстрируют поведения хвостовой зависимости.
и их производительность хуже, чему их базовых копул. UL-Gumbel и UIP-Gumbel
копулы являются лучшими по эффективности, причем UL-Gumbel немного лучше, чем UIP-Gumbel.
с точки зрения MPL и AIC. Модель UIP-Gumbel дает оценку тау Кендалла.
ближе к образцу тау Кендалла. Обе модели имеют зависимость от верхнего хвоста, но не от нижнего.
зависимость хвост-хвост.

Согласно моделям копулы, используемым в этом приложении, существует умеренная
линейная корреляция между ежедневной чистой доходностью акций Amazon и Google. Кроме того,
в крайних совместных движениях появляется асимметричность; то есть совместные крайности более
более вероятен для высоких значений дневной чистой прибыли, чем для низких значений дневной чистой прибыли.

Таблица 5. MPL, AIC, τ, оценки параметров и их стандартное отклонение в скобках r, θ, α для
базовые, UL-искаженные и UIP-искаженные модели копулы.

Семья	МПЛ	τ	АИК	ρ	θ	α
Клейтон	756,0	0,488	1510,1	1,907(0,055)	–	–
Гумбель	758,7	0,461	-1515,5	1,856(0,033)	–	–
Откровенный	754,3	0,491	-1506,7	5,582(0,165)	–	–
Гауссовский	838,6	0,493	-1675,3	0,699(0,009)	–	–
UL-Клейтон	877,3	0,450	-1748,6	4,855(0,192)	0,000(0,174)	0,562(0,029)
УЛ-Гумбель	906,4	0,461	1806,9	1,256(0,043)	0,008(0,004)	0,873(0,056)
UL-Франк	900,0	0,476	1794,0	4,223(0,319)	0,084(0,023)	0,640(0,019)
UL-гауссова	901,9	0,484	1797,9	0,527(0,034)	0,028(0,012)	0,686(0,026)
UIP-Клейтон	748,3	0,353	1490,6	1,413(0,097)	0,999(0,030)	1,296(0,108)
UIP-Гумбель	906,4	0,494	1806,8	1,392(0,036)	0,010(0,006)	1,174(0,097)
UIP-Франк	748,5	0,481	1494,9	9,281(0,443)	0,999(0,060)	3,484(0,043)
UIP-Гауссова	887,1	0,472	1768,3	0,852(0,073)	0,022(0,062)	1,995(0,194)

7. Заключительные замечания

Концепция, предложенная в статье, основана на том факте, что совокупный
Функция распределения с поддержкой единичного интервала является функцией искажения. В нем используется
преобразование неотрицательной случайной величины в переменную с помощью
единичный интервал. Дополнительные параметры искажения обеспечивают большую гибкость моделирования.
Как показано в разделе 3.2, искажение связки независимости создает новое семейство.
копул, включающих в себя базовую копулу и другие существующие копулы в качестве своих членов и
учитывает более широкий диапазон поведения хвостовой зависимости, чем связка независимости
никогда бы не мечтал иметь.

Поведение хвоста модели копулы является решающим фактором, определяющим, будет ли она
может адекватно соответствовать данным. Использование искажений UL и QUL может изменить семейство
базовые копулы без зависимости от верхнего хвоста в новое семейство копул с верхним хвостом
зависимость. Коэффициент зависимости верхнего хвоста UL- и QUL-искаженных копул
включает в себя больше параметров, чем базовая копула. Искажения могут в конечном итоге
приводят к лучшему приспособлению зависимости верхнего хвоста по сравнению с базовым
копула. Поведение хвостов в семействах UIP- и QUP-искаженных копул схоже.
к тем, что находятся в базовой связке. Однако они могут лучше приспособиться к нижней части хвоста.
зависимость по сравнению с базовыми копулами.

Мы не уверены, является ли более сложная генерация ФРД или искажение, например, одно
с более чем двумя параметрами, приведет к появлению нового семейства копул с обоими верхними
и более низкая зависимость от хвоста при применении к базовой копуле без зависимости от хвоста.
Структура, предложенная в этой статье, открывает дверь в мир новых искажений. Должный
до ограничения длины страницы, дальнейшее исследование порядка согласования нового семейства
Искаженные копулы будут рассмотрены более подробно. Искажения многомерных копул
более высоких измерений также могут представлять интерес. В отличие от искажений двумерных копул,
искажения многомерных копул требуют большего внимания и будут изучены в будущем.

Machine Translated by Google

Вклад авторов: Все авторы внесли равный вклад. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Исследование не требовало этического одобрения.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: данные включены в рукопись.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Приложение A. Предварительные сведения

Пусть F(x, y) — совместное кумулятивное распределение вероятностей (cdf) непрерывных случайных величин (X,Y), а FX(x) и FY(y) — соответствующие маргинальные распределения вероятностей X и Y. По теореме Склара [10], существует единственная копула C, удовлетворяющая граничным условиям и условиям монотонности, такая, что

$$F(x, y) = P(X \quad x, Y \quad y) = C\,FX(x), FY(y)\,, x, y \quad (\quad , \quad). \tag{A1}$$

Совместная функция плотности вероятности (pdf), обозначаемая f(x, y), для (X,Y) равна

$$f(x, y) = c\,FX(x), FY(y)\,fX(x)fY(y), \tag{A2}$$

где fX и fY — соответствующие PDF-файлы X, а Y и c(u, v) — PDF-код связки такой, что c(u, v) = $\partial^2 C(u, v)/\quad u \quad v$. Уравнение (A2) подразумевает, что совместное двумерное распределение вероятностей можно разделить на одномерные маргинальные значения и структуру зависимости, где структура зависимости представлена копулой.

Копула C по определению обладает следующими свойствами: (i) C(u, 0) = C(0, v) = 0, (u, v) $\in I^2$ где $I = [0, 1]$; (ii) C(u, 1) = u и C(1, v) = v, (u, v) $\in I^2$; и (iii) C(u2, v2) $-$ C(u2, v1) $-$ C(u1, v2) + C(u1, v1) $\geq$ 0, для u1 $\leq$ u2, v1 $\leq$ v2 и (u1, u2),(v1, v2) в I^2.

Если C — архимедова копула со строгим образующим $\psi(\cdot)$ таким, что $\psi(0) = \infty$, ее можно выразить как $C(u, v) = \psi^{-1}(\psi(u) + \psi(v))$, где функция $\psi^{-1} : [0, \infty] \to [1, \infty)$ выпуклая, непрерывная и строго убывающая при $\psi(1) = 0$ и $\psi(0) = \infty$. Архимедовы копулы популярны, поскольку допускают явные формулы и могут учитывать более высокие измерения только с одним параметром. В таблице A1 показаны некоторые известные двумерные архимедовы копулы, их генераторы и поведение их хвостовой зависимости. Пусть Π — копула независимости.

Таблица A1. Важные архимедовы копулы и их образующие.

Имя	Функция связки	Генератор $\psi(t)$	κ_L или λ_L	κ_U или λ_U
Π	уф	(t r	$\kappa_L = 2$	$\kappa_U = 2$
Клейтон	(u r r+v 1), $r > 0$ (e ru	1)/r	$\lambda_L = 2 \quad 1/r$	$\kappa_U = 2$
Откровенный	$\frac{1}{p}$ 1 $\quad$ r / = 0	$\frac{1)(e \quad rv \quad 1)}{\log 1 + e \quad r}$, журнал $\frac{e^{-rt} \quad 1}{e\text{-}r - 1}$	$\kappa_L = 2$	$\kappa_U = 2$
Гумбель	e ((log(u))r+(log(v))r) $^{1/p}$, $r > 1$	журнал(т) ^{p}	$\kappa_L = 2\ 1/r$	$\lambda_U = 2 \quad 2\ 1/r$

Параметры зависимости нижнего и верхнего хвоста λ_L и λ_U определяются выражениями

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0+} P(FX(X) < u \mid FY(Y) < u) = \lim_{и \to 0+} \frac{C(и, ты)}{ты}, \tag{A3}$$

$$\lambda_U = \lim_{u \to 0+} P(FX(X) > u \mid FY(Y) > u) = \lim_{и \to 1-} \frac{\overline{C}(и, и)}{(1 - и)} = 2 \quad \lim_{u \to 1} \frac{1 \quad C(и, и)}{1 - ты},$$

Machine Translated by Google

где $\overline{C}(u, v) = P(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u, v)$. Они измеряют вероятность того, что случайная величина достигнет экстремальных значений при условии, что другая переменная достигнет экстремальных значений.

Неотрицательная функция f называется медленно меняющейся, если для $s > 0$ $\lim_{x \to 0} f(sx)/f(x) = 1$. Пусть f1 и f2 — две функции. Если $\lim_{u \to u0} f1(u)/f2(u) = 1$, то обозначим его через $f1(u) \sim f2(u)$ при $u \to u0$. Для двумерной связки, если

$$C(u, u) \sim u^{\kappa L} \ell(u), u \to 0+,$$

где $\ell(u)$ медленно меняется при 0+, то κL называется нижним хвостовым порядком C. Копула выживания задается формулой

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v). \tag{A4}$$

Верхний хвостовой порядок κU удовлетворяет условию

$$C(u, u) \sim u^{\kappa U} \ell(u), u \to 0+$$

для некоторой медленно меняющейся функции $\ell(u)$. Заметим, что $1 \le \kappa L, \kappa U \le 2$. Если $\kappa L > 1$ и $\kappa U > 1$, то $\lambda L = \lambda U = 0$. Если $\kappa L = 1$, $\lambda L = \lim_{u \to 0+} \ell(u)$; и если $\kappa U = 1$, $\lambda U = \lim_{u \to 0+} \ell(u)$. Когда $\kappa L = 2$ и $\ell(u) \to q$ при $u \to 0+$, для некоторого положительного q переменные почти не зависимы в нижнем хвосте. Если $1 < \kappa L < 2$, переменные положительно ассоциированы и имеют промежуточную хвостовую зависимость. Аналогичные выводы можно сделать и для зависимости верхнего хвоста; подробнее см. [12,29]. Тау-значение Кендалла двумерной связки можно выразить как

$$\tau = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C}{\partial u}(u, v) \, du \, dv. \tag{A5}$$

Для архимедовой связки тау Кендалла также можно рассчитать по формуле

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\psi(u)}{\psi'(u)} du. \tag{A6}$$

Приложение Б. Контурные графики и вывод хвостовых порядков

Приложение Б.1. Контурные графики

На рисунке A1 показано, что верхние хвосты зависимостей QUL-Clayton, QUL-Gumbel и QUL-Gaussian кажутся более выраженными, чем соответствующая базовая копула для выбранных значений α, аналогично таковым для UL-Clayton, UL-Gumbel, и UL-Гаусса соответственно. Копулы с искажениями UL и QUL не имеют зависимости от нижнего хвоста, когда базовые копулы не имеют зависимости от нижнего хвоста. Хотя параметры выбраны так, что $\tau = 0{,}5$, контурные графики на рисунках 1 и A1 демонстрируют различные формы и разреженность.

Из табл. 2 видно, что коэффициент зависимости верхнего хвоста UIP- и QUP- искаженных копул такой же, как и у базовой копулы. Однако нижние коэффициенты хвостовой зависимости составляют $(\lambda L)^{\alpha}$, где $\alpha > 1$, и $(\lambda L)^{\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$, соответственно. То есть искажение UIP с $\alpha = 3/2$ на рисунке 2 и искажение QUP с $\alpha = 1/2$ на рисунке A2 имеют схожие, если не одинаковые, формы в верхней правой части. Асимметрия присутствует в QUP-Frank и UIP-Frank, когда θ и α не равны 1. Контурные графики для UIP-Gaussian и QUP-Gaussian показывают небольшие изменения.

Machine Translated by Google

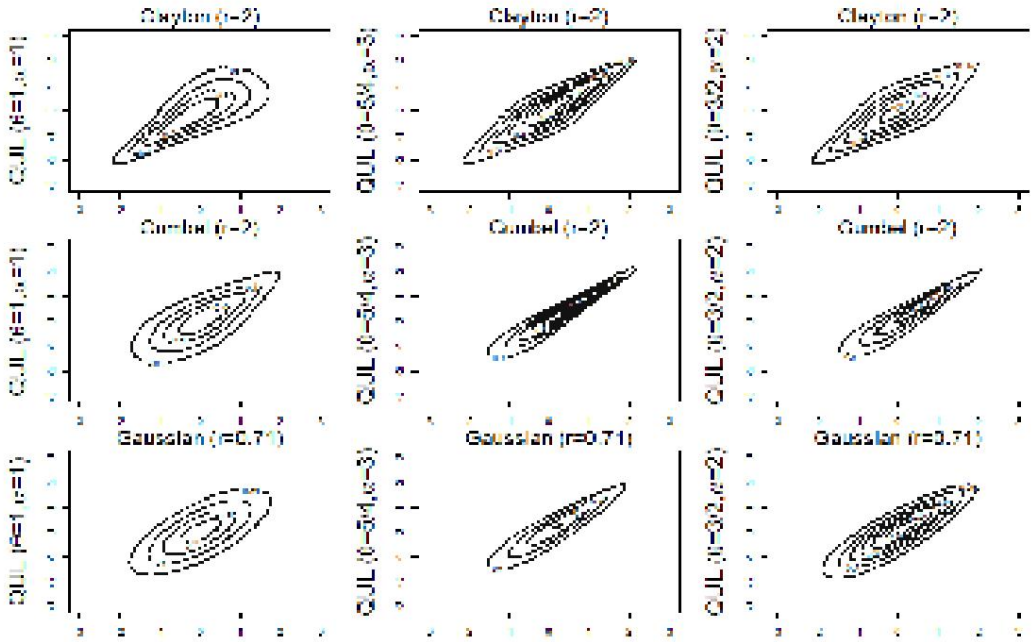


Рисунок А1. Контурные графики плотности копул QUL-Clayton, QUL-Gumbel и QUL-Gaussian со стандартными нормальными полями и параметрами (θ, α) = (1, 1), (3/2, 1/2) и (2, 3/4). Для Клейтона, Гамбеля и Гаусса параметр r выбирается таким образом, чтобы значение тау Кендалла составляло 1/2.

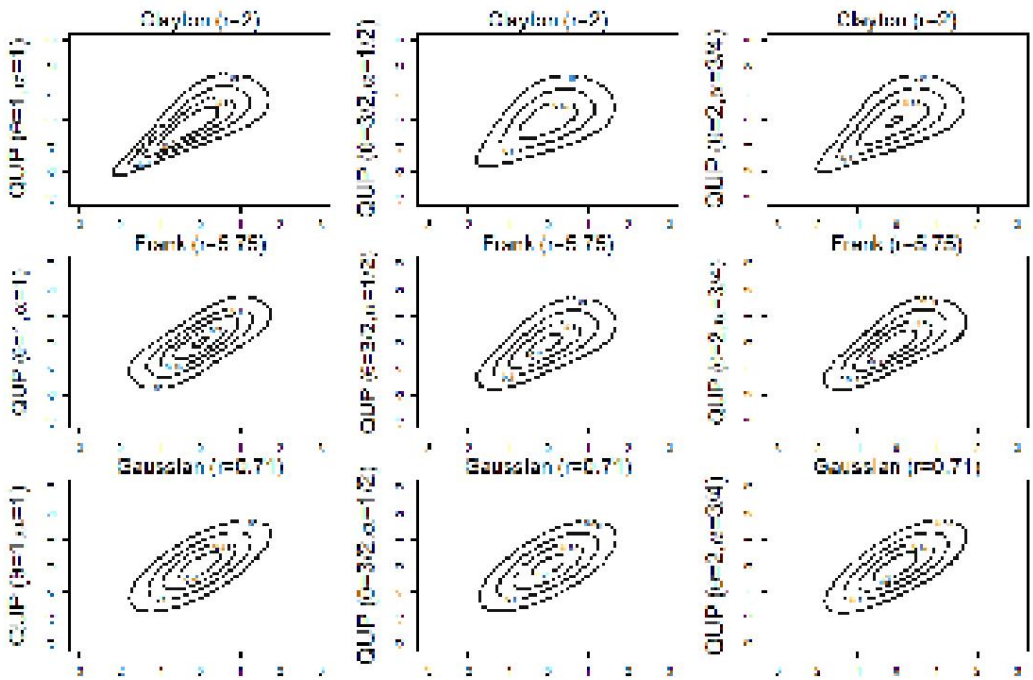


Рисунок А2. Контурные графики плотности копул QUP-Клейтона, QUP-Франка и QUP-Гаусса со стандартными нормальными границами и параметрами (θ, α) = (1, 1), (3/2, 1/2) и (2, 3/4). Для Клейтона, Франка и Гаусса параметр r выбирается таким образом, чтобы значение тау Кендалла составляло 1/2.

Приложение Б.2. Выводы хвостовых порядков

Следующие приближения ряда Талиора являются ключевыми рабочими лошадками для расчета хвостовые порядки предполагаемых искажений. Для двух констант a и b имеем это

$$(1+u)^{a} \quad 1+au, \quad 1-\frac{1}{au,\ 1+au}\ 1+au \quad \frac{ты}{} \quad и, \quad \frac{ты}{б+ау} \quad \frac{ты}{} \quad \text{при } u \quad 0.\ б \qquad (A7)$$

Machine Translated by Google

Предположим, что $C(u, u) = u - kL\,\ell(u)$ при $u \to 0+$ и $\overline{C}(1-u, 1-u) = u - kU\,\ell(u)$ при $u \to 0+$ для некоторых медленно меняющихся функций ℓ и ℓ при $0+$.

Приложение Б.3. Нижний хвост приказов

Обратите внимание, что $G_л^{-1} = QL$ и $G_П^{-1} = КП$. Из (П7) и таблицы 1 получаем, что при $u \to 0+$

$$GL(u) = 1 - \left(1 - (1-\theta)u^{-1/\alpha} - 1\right)^{-\alpha} - 1 \sim (1-\theta u)^{-\alpha} - 1 \sim \alpha\theta u;$$

$$QL(u) = \theta^{-1}\left((1-u)^{-1/\alpha} - 1\right) \sim \theta^{-1}\left(u^{-1/\alpha} - 1\right) \sim u^{-1/\alpha}/\theta;\ \theta^{-1}(1-u)^{-1/\alpha} \sim u^{-1/\alpha}/\theta.$$

$$GP(u) = \theta\alpha u^{\alpha} \quad QP(u) = u^{1/\alpha}/\theta. \tag{A8}$$

Для UL-искаженных копул, поскольку $CG_л^{-1}(y), Г_л^{-1}(u) \to 0$ при $u \to 0+$, применяя (A8) дает

$$ГЛ\ КГ_л^{-1}(y), Г_л^{-1}(и) = 1 - \frac{1 - ЦГ_л^{-1}(y), Г_л^{-1}(ты)}{1 - ЦГ_л^{-1}(y), Г_л^{-1}(и) + \theta C\,G_л^{-1}(y), Г_л^{-1}(ты)}^{\alpha}$$

$$1 - \alpha\theta C\,G_л^{-1}(y), Г_л^{-1}(u) \sim \alpha\theta[QL(u)]^{\kappa L}\,\ell\,QL(u)^{\kappa L}$$

$$ты \sim (\alpha\theta)^{1-\kappa L}\,\ell\,QL(u) \text{ при } u \to 0+. \tag{A9}$$

Согласно (A8) $\ell\,QL(u) = \ell\,u^{1/\alpha}/\theta$ и по определению $(\alpha\theta)^{1-\kappa L}\,\ell\,QL(u)$ медленно меняется.

Для QUL-искаженных копул QL по табл. 1, (П7) и (П8) имеем

$$КЛ\ КК_л^{-1}(y), Q_л^{-1}(и) = \frac{1 - КВ_л^{-1}(y), Q_л^{-1}(ты)^{1/\alpha} - 1}{\theta^{-1} + 1 - CQ_л^{-1}(y), Q_л^{-1}(ты)^{1/\alpha} - 1}$$

$$(\alpha\theta)^{-1}C\,Q_л^{-1}(u), Q_л^{-1}(и) \sim (\alpha\theta)^{-1}[GL(u)]^{\kappa L}\,\ell\,Q_л^{-1}(ты)$$

$$ты^{\kappa L}(\alpha\theta)^{\kappa L - 1}\,\ell\,GL(u) \text{ при } u \to 0+. \tag{A10}$$

Согласно (A8) $\ell\,GL(u) = \ell\,\alpha\theta u$ и по определению $(\alpha\theta)^{\kappa L - 1}\,\ell\,GL(u)$ медленно меняется.

Для копул, искаженных UIP, поскольку $CG_П^{-1}(y), Г_П^{-1}(u) \to 0$ при $u \to 0+$ и согласно (A8)

$$врач\ общей\ практики_П^{-1}(y), Г_П^{-1}(и) = \frac{1 - \theta C\,Г_Р(y), Г_П^{-1}(ты)}{1 - ЦГ_П^{-1}(y), Г_П^{-1}(и) + \theta C\,G_П^{-1}(y), Г_П^{-1}(ты)}^{\alpha}$$

$$\theta^{\alpha}\ {}_{\text{компьютерная графика}}{}_П^{-1}(y), Г_П^{-1}(ты)^{\alpha} \text{ при } \alpha\,[QP(u)]^{\kappa L}\,\ell\,QP(u)^{\theta^{\alpha}}$$

$$ты^{\kappa L}\,\theta^{\alpha(1-\kappa L)}\,\ell\,QP(u)^{\alpha} \text{ и } u \to 0+. \tag{A11}$$

Поскольку $GP(u) = \theta\alpha u^{\alpha}$ и ℓ медленно меняется при $0+$, для $s, \alpha > 0$,

$$\lim_{u \to 0+} \frac{\ell(su)}{\ell(u)} = \lim_{u \to 0+} \frac{\ell(su)}{\ell(u)}^{\alpha} = 1;$$

$$\lim_{u \to 0+} \frac{\ell(GP(su))}{\ell(GP(u))} = \lim_{u \to 0+} \frac{\ell(\theta\alpha s^{\alpha} u^{\alpha})}{\ell(\theta\alpha u^{\alpha})} = \lim_{v \to 0+} \frac{\ell(s^{\alpha} v)}{\ell(v)} = 1. \tag{A12}$$

Следовательно, $\ell\,QP(u)^{\alpha}$ медленно меняется.

Для QUP-искаженных копул $CQ_П^{-1}(y), Q_П^{-1}(u) \to 0$ и согласно (A8) получаем

Machine Translated by Google

$$QP\,CQ_{П}^{-1}(y), Q_{П}^{-1}(и) = \frac{1}{1+\theta\,CQ_{П}^{-1}(y), Q_{П}^{-1}(u)\,]^{1/\alpha} - 1}$$

$$1 - \theta\,CQ_{П}^{-1}(y), Q_{П}^{-1}(ты)^{1/\alpha} - 1 - \theta\,[GP(u)]кL\,\ell\,GP(u)^{1/\alpha}$$

$$ты\,кL\,\theta\,кL\,1\,\ell\,GP(u)^{1/\alpha} \text{ при } и \to 0+. \tag{A13}$$

По аналогичным рассуждениям в (A12), $\ell\,GP(u)$ Можно показать, что $1/\alpha$ медленно меняется.

Приложение Б.4. Верхние хвостовые порядки. Согласно аппроксимациям (A7), при $u \to 0+$,

$$GL(1-ты) = 1 - \frac{ты}{\theta + (1-\theta)u^{1/\alpha}}^{\alpha} - 1 - и/\theta^{\alpha},$$

$$QL(1-и) = \frac{1-u}{\theta + u^{1/\alpha} - 1} = 1 - \frac{\theta u^{1/\alpha}}{1-\alpha} - 1 - \theta u^{1/\alpha} 1 + (\theta,$$

$$ГП(1-и) = \frac{\theta(1-u)}{u + \theta(1-u)}^{\alpha} = 1 - \frac{ты}{\theta + (1-\theta)u}^{\alpha} - 1 - \alpha u/\theta,$$

$$QP(1-u) = \frac{(1-u)^{1/\alpha}}{\theta + (1-\theta)(1-u)^{1/\alpha} - \theta u/} \frac{1 - u/\alpha}{\theta + (1-\theta)(1-u/\alpha)}$$

$$\theta u/a \frac{\alpha - 1}{\theta u/\alpha}. \quad 1 - 1 - и/\alpha + \tag{A14}$$

Согласно (A4), если $C(u, u) \to u$ $кU\,\ell\,(u)$ при $u \to 0+$, $C(1-u, 1-u) \to 1 - 2u + u$ $кU\,\ell\,(u)$, поскольку $и \to 0+$. Следовательно, согласно (П14),

$$\text{комбинированный графика}_{л}^{-1}(1-и), Г_{л}^{-1}(1-u) \quad C\,1 - \theta u^{1/\alpha} - 1, 1 - \theta u^{1/\alpha}$$

$$2\theta u^{1/\alpha} + (\theta u^{1/\alpha}) кU^{1/\alpha}) = 1 - kGL(u),$$

$$CQ_{л}^{-1}(1-и), Q_{л}^{-1}(1-u) \quad C\,1 - (u/\theta)^{\alpha} - 1, \ell\,(\theta u\,1 - (u/\theta)^{\alpha}$$

$$2(u/\theta)^{\alpha} + (u/\theta)^{\alpha}) кU\,\ell\,((u/\theta)^{\alpha}) = 1 - kQL(u), (1-u)$$

$$\text{комбинированный графика}_{П}^{-1}(1-и), Г_{П}^{-1}\,C\,1 - \theta u/\alpha, 1 - \theta u/\alpha - 1 - 2\theta u/\alpha +$$

$$(\theta u/\alpha)\,кU\,\ell\,(\theta u/\alpha) = 1 - kGP(u), (1-u) \quad C\,1 - \alpha u/$$

$$CQ_{П}^{-1}(1-и), Q_{П}^{-1}\theta, 1 - \alpha u/\theta - 1 - 2\alpha u/\theta + (\alpha u/\theta)\,кU$$

$$\ell\,(\alpha u/\theta) = 1 - kQP(u). \tag{A15}$$

Обратите внимание, что остаточные члены $kGL(u)$, $kQL(u)$, $kGP(u)$ и $kQP(u)$ обращаются в 0 при u

Для UL-искаженных копул по (A14), а затем (A7), GL CG определяется $_{л}^{-1}0+.(1-и), Г_{л}^{-1}(1-u)$ есть выражение

$$1 - \frac{1 - ЦГ_{л}^{-1}(1-и), Г_{л}^{-1}(1-ты)}{1 - ЦГ_{л}^{-1}(1-и), Г_{л}^{-1}(1-u) + \theta C\,G_{л}^{-1}(1-и), Г_{л}^{-1}(1-ты)}^{\alpha}$$

$$1 - \frac{kGL(u)}{\theta + (1-\theta)kGL(u)}^{\alpha} - 1 - kGL(u)/\theta^{\alpha}. \tag{A16}$$

Поэтому согласно (A4) при $0 < \alpha$ 1 и $кU$ 1 при $u \to 0+$

Machine Translated by Google

$$G\hat{}_{л} \text{ компьютерная графика}_{л}{}^{1}(1 \quad и), Г \quad _{л}{}^{1}(1 - u) = 2u - 1 + GL\ CG \qquad _{л}{}^{1}(1 \quad и), Г \quad _{л}{}^{1}(1 - ты)$$

$$2u \quad kGL(u)/\theta \quad ^{\alpha} = 2y - [2y \quad ^{1/\alpha} \quad \theta\ кU \quad 1u\ кU/\alpha\ \ell \quad (\theta u^{1/\alpha})]\alpha$$

$$ты2 - 2 \quad \alpha\ [1 \quad 2 \quad ^{1}\theta\ кU \quad 1u\ (кU \quad 1)/\alpha\ \ell \quad (\theta u^{1/\alpha})]\alpha$$

$$u\ 2 \quad 2 \quad \alpha\ [1 \quad \alpha 2 \quad ^{1}\theta\ кU \quad 1u\ (кU \quad 1)/\alpha\ \ell \quad (\theta u^{1/\alpha})]$$

$$\theta\ кU \quad 1u\ кU\ \ell \quad (\theta u), \text{ если } \alpha = 1. \tag{A17}$$

Для QUL-искаженных копул по (A15) QL CQ $_{л}{}^{1}(1 \quad и), Q \quad _{л}{}^{1}(1 \quad u)$ определяется выражением

$$\frac{1 - KB \quad _{л}{}^{1}(1 \quad и), Q \quad _{л}{}^{1}(1 - ты) \quad ^{1/\alpha} \quad 1}{\theta + 1 \quad CQ \quad _{л}{}^{1}(1 \quad и), Q \quad _{л}{}^{1}(1 - ты) \quad ^{1/\alpha} \quad 1} = \frac{kQL(u)] \quad 1/\alpha \quad 1}{\theta + kQL(и) \quad ^{1/\alpha} \quad 1}$$

$$= 1 - \frac{\theta\ kQL(u)]1/\alpha}{\theta\ kQL(и) \quad ^{1/\alpha} + 1 \quad kQL(и) \quad ^{1/\alpha}} \quad 1 \quad \theta\ kQL(u)]1/\alpha .$$

Следовательно, для $\alpha \quad 1$ и $кU \quad 1$ при $u \quad 0 +$

$$Q\hat{}\ L \text{ компьютерная графика}_{л}{}^{1}(1 \quad и), Г \quad _{л}{}^{1}(1 \quad u) = 2u \quad 1 + QL\ CQ \qquad _{л}{}^{1}(1 \quad и), Q \quad _{л}{}^{1}(1 - ты)$$

$$2u \quad \theta\ kQL(u)]1/\alpha = 2u \quad \theta\ 2(u/\theta) \quad \alpha \quad (u/\theta)\ \alpha)\ кU\ \ell \quad ((u/\theta)\ \alpha)\ (u/\theta)\ \alpha(кU \quad ^{1/\alpha}$$

$$= 2u - 2\ 1/\alpha u\ 1 - 2 \quad ^{1} \quad 1)\ \ell \quad ((u/\theta)\ \alpha) \quad ^{1/\alpha}$$

$$ты2 - 2\ 1/\alpha\ 1 - 2 \quad ^{1} \quad ^{1\ \alpha} \quad (u/\theta)\ \alpha(кU \quad 1)\ \ell \quad ((u/\theta)\ \alpha)$$

$$(u/\theta)\ кU\ \ell \quad (u/\theta), \text{ если } \alpha = 1. \tag{A18}$$

Для копул, искаженных UIP, согласно (A7) и (A15), GP CG определяется $_{П}{}^{1}(1 \quad и), Г \quad _{П}{}^{1}(1 \quad u)$ есть выражение

$$\frac{1\ \theta C\ Г_{Р} \quad (1 \quad и), Г \quad _{П}{}^{1}(1 - ты) \quad ^{\alpha}}{1 \quad ЦГ \quad _{П}{}^{1}(1 \quad и), Г \quad _{П}{}^{-1}(1 \quad u) + \theta C\ G \quad _{П}{}^{1}(1 \quad и), Г \quad _{П}{}^{1}(1 - ты)} = \frac{\theta[1 \quad kGP}{(u)]\ kGP(u)] + \theta[1 \quad kGP(u)]} \quad ^{\alpha} = 1 - \frac{kGP(u)}{kGP(u)] + \theta[1 \quad kGP(u)]} \quad ^{\alpha}$$

$$1 \quad kGP(u)/\theta \quad ^{\alpha} \quad 1 \quad \alpha\theta \quad 1\ kGP(u).$$

Следовательно, для $\alpha \quad 1$ и $кU \quad 1$ при $u \quad 0 +$

$$G\hat{}П\ КГ \quad _{П}{}^{1}(1 \quad и), Г \quad _{П}{}^{1}(1 \quad u) = 2u \quad 1 + GP\ CG \quad 2u \qquad _{П}{}^{1}(1 \quad и), Г \quad _{П}{}^{1}(1 - ты)$$

$$\alpha\theta \quad 1\ kGP(u) = 2u \quad \alpha\theta \quad 1\ [2\theta u/\alpha \quad (\theta u/\alpha)\ кU\ \ell \quad (\theta u/\alpha)] \quad \alpha\theta \quad 1\ (\theta u/\alpha)\ кU$$

$$\ell \quad (\theta u/\alpha). \tag{A19}$$

Для QIP-искаженных копул по (A7) и (A15) QP $CQ_{П}{}^{1}(1 \quad и), Q \quad _{П}{}^{1} \quad u)$ определяется выражением

$$\frac{CQ \quad _{П}{}^{1}(1 \quad и), Q \quad _{П}{}^{1}(1 - ты)\ ]^{1/\alpha}}{CQ \quad _{П}{}^{1}(1 \quad и), Q \quad _{П}{}^{1}(1 - u)\ ]\ 1/\alpha + \theta\ 1 - CQ \qquad _{П}{}^{1}(1 \quad и), Q \quad _{П}{}^{1}(1 \quad u)\ ]\ 1/\alpha}$$

$$= \frac{[1 - kQP(u)]1/\alpha}{1 - kQP(u)]1/\alpha + \theta\ 1 - 1 - kQP(u)]1/\alpha\ 1 -}$$

$$= \frac{kQP(u)/\alpha\ 1 -}{kQP(u)/\ \alpha + \theta kQP(u)/\alpha\ \theta kQP} = \frac{\alpha \quad kQP(u)}{\alpha \quad kQP(u) + \theta kQP(u)}$$

$$= 1 - \frac{(u) \quad 1}{\theta kQP(u)} \quad \theta kQP(u)/\alpha.\ \alpha \quad kQP(u) +$$

Machine Translated by Google

Поэтому,

$$Q\hat{}\ P\ CQ \quad \Pi^{1}(1 \quad и),\ Q \quad \Pi^{1}(1 \quad u) = 2u \quad 1 + QP\ CQ \quad \Pi^{1}(1 \quad и),\ Q \quad \Pi^{1}(1 - ты)$$

$$2u \quad \theta kQP\ (u)/\alpha = 2u \quad \theta\alpha \quad 1\ [2\alpha u/\theta \quad (\alpha u/\theta)\ \kappa U\ \ell \quad (\alpha u/\theta)]\ \kappa U\ (\alpha/)\ \kappa U \quad 1$$

$$ты_{\ell} \quad (\alpha u/\theta). \tag{A20}$$

Применяя те же рассуждения, что и в (A12), мы можем показать, что ℓ в (A17)–(A20) медленно меняются.

Приложение C. Порядок соответствия

Функция f является субаддитивной, если $f(x + y) \quad f(x) + f(y)$ для всех x и y в ее области определения. А функция f является супераддитивной, если $f(x + y) \quad f(x) + f(y)$ для всех x и y в ее области определения.

Теорема A1 ([11]). пусть C1 и C2 — две архимедовы копулы, порожденные ψ_1 и ψ_2. Тогда $C1 \quad C2$ тогда и только тогда, когда $\psi_1 \quad \psi_{2^{1}}$ субаддитивен.

Более того, $C1 \quad C2$, если и только если $\psi_1 \quad \psi_2^{1}$ является супераддитивным.

Здесь мы покажем, используя теорему A1, что семейства UL- и UIP-независимости копулы упорядочены по параметру θ. Для копулы UL-независимости $\Psi_1 \quad \Psi_2^{1} = \psi_{T_1^{1} \quad T2} \quad \psi^{1}$, где $\psi(t) = \log(t)$ и $T(u) = GL(u) = Q_{л^{1}(y)}$. Пусть $h(u) = T_1^{1} \quad T2$. При $\theta 1 < \theta 2 \quad 1$ по таблице 1 получаем, что

$$h(u) = QL1 \quad GL2(u) = 1 + \frac{1}{\theta 1(1 \quad u)/(\theta 2u)\ (x+y)} = \frac{\theta 2u}{(\theta 2 \quad \theta 1)u + \theta 1}$$

$$\Psi 1 \quad \Psi 2^{1}(x + y) = \text{журнал} \frac{\theta e^{2}\ 2}{\theta 2\ (\theta 2 \quad \theta 1)e\ (x+y) + \theta 1\ \theta 2e} \tag{A21}$$

$$1\ \Psi 1 \quad {}_{2}\Psi\ (x) + \Psi 1 \quad \Psi_{2^{1}}(y) = \text{журнал} \frac{(\theta 2^{-x}}{\theta 1)e \quad x + \theta 1} \frac{\theta 2e \quad y}{(\theta 2 \quad \theta 1)e \quad y + \theta 1} \tag{A22}$$

Мы хотим сравнить (A21) и (A22), чтобы определить, является ли $\Psi 1 \quad \Psi\ (x+y)_{2^{1}}$ является субаддитивным или супераддитивным. Поскольку $1 e \quad e^{-x} + e \quad y$ для x, y 0, получаем, что

$$\frac{\theta 2}{x+y + e} \quad e\ \theta 2 \quad \theta 1^{-x} + e \quad y + \frac{\theta 1}{\theta 2 \quad \theta 1}$$

$$\text{и } \theta 2e\ (x+y) + \quad (\theta 2 \quad \frac{\theta 1\theta 2}{\theta 1)e\ (x+y) + \theta 1e\ \theta 2 \quad \theta 1}^{-x} + \theta 1e \quad y + (\theta 2 \frac{\theta_1^{2}}{\theta 1)}.$$

Следовательно, (A21) больше или равно (A22). То есть $\Psi 1 \quad \Psi_{2^{1}}$ является супераддитивным. Следовательно, семейство копул UL-независимости отрицательно упорядочено по параметру θ. Поскольку искажение UIP приводит к тому же h(u), семейство копул UIP-независимости также отрицательно упорядочено по параметру θ.

Ссылки

1. Дженест, К.; Гуди, К.; Ривест, Л.П. Понимание отношений с помощью копул Эдварда Фриса и Эмилиано Вальдеса. Н. Ам. Актуар. Дж. 1998, 2, 143–149. [Перекрестная ссылка]
2. Аде с, М; Провост, СБ; Занг, Ю Четыре меры ассоциации и их представления в терминах копул. Прикладная математика 2024, 4, 363–382. [Перекрестная ссылка]
3. Керубини, У.; Луччано, Э.; Веккиато, Методы В. Копулы в финансах; John Wiley & Sons: Хобокен, Нью-Джерси, США, 2004 г. [CrossRef] 4. Фрис, РЭ Б; Вальдес, Э.А. Понимание отношений с помощью копул. Н. Ам. Актуар. Дж. 1998, 2, 1–25. [Перекрестная ссылка]
5. Эмбрехтс, П.; Макнил, А.; Штраумann, Д. Корреляция и зависимость в управлении рисками: свойства и подводные камни. В управлении рисками : стоимость под риском и за его пределами; Демпстер, МАН, Ред.; Издательство Кембриджского университета: Кембридж, Великобритания, 2002 г.; стр. 176–223.
6. Джи, Л.; Тан, Канзас; Ян, Ф. Хвостовая зависимость и тяжелая хвостатость при экстремальных рисках. Страхование. Математика. Э кон. 2021, 99 282–293. [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

7. Альзаид А.А.; Альхадлак, WMA Новое семейство архимедовых копул: полулогистическое семейство копул. Математика 2024, 12, 101. [CrossRef]

8. Тутунчи, Ф.; Садег, М.; Хаертер, Дж О.; Рэти, О.; Грэбс, Т.; Тойчбейн, К. Копулы для гидроклиматического анализа: практический обзор. ПРОВОДА Вода 2022, 9, е1579. [Перекрестная ссылка]

9. Чен, Л.; Го, С. Копулас и его применение в гидрологии и водных ресурсах; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 2019 г.; 290р; ISBN 978-981-13-0573-3.

10. Склар, М. Функции перераспределения размеров и границ. Энн. ИСУП 1959, 8, 229–231.

11. Нельсен Р.Б. Введение в копулы; Спрингер: НьюЙорк, штат НьюЙорк, США, 2006 г.

12. Джо Х. Моделирование зависимостей с помощью копул; CRC Press: Бока-Ратон, Флорида, США, 2015 г.

13. Ян, Ю; Ли, С. О семействе архимедовых копул, порожденных лог-гаммой. Н. Ам. Акту ар. Дж 2022, 26, 123–142. [Перекрестная ссылка]

14. Манставич ус, М.; Багдонас, Г. Класс двумерных преобразований копулы не зависимости. Система нечетких множеств. 2022, 428, 58–79. [Перекрестная ссылка]

15. Шено К. Коллекция новых копул тригонометрического и гиперболического типа FGM. Прикладная математика 2023, 3, 147–174. [Перекрестная ссылка]

16. Шено К. Замечание о двух новых трехпараметрических логарифических и экспоненциальных копулах. Азиатско-Тихоокеанский регион. Дж Математика. 2023, 10, 8.

17. Ди Бернардино, Э.; Рульер, Д. О некоторых преобразованиях архимедовых копул: приложение к непараметрическим задачам Оценка их генераторов. Зависеть. Модель. 2013, 1, 1–36. [Перекрестная ссылка]

18. Дженест, К.; Килани, Г.; Ривест, Л.П. Полупараметрическая процедура оценки параметров зависимости в многомерных семействах распределений. Биометрика 1995, 82, 543–552. [Перекрестная ссылка]

19. Морильяс П.М. Метод получения новых копул из заданной. Метрика 2005, 61, 169–184. [Перекрестная ссылка]

20. Дуранте, Ф; Фоски, Р.; Саркочи, П. Искаженные копулы: конструкции и хвостовая зависимость. Коммун. Стат. Методы теории 2010, 39, 2288–2301. [Перекрестная ссылка]

21. Вальдес, Э.А.; Сяо, Ю Об искажении связки и ее границ. Скан. Акту ар. Дж 2011, 4, 292–317. [Перекрестная ссылка]

22. Саманти, РГМ; Сепански, Дж Двумерное расширение бета-распределения, полученного из копул. Коммун. Стат. Методы теории 2019, 48, 1043–1059. [Перекрестная ссылка]

23. Саманти, РГМ; Сепански, Дж О двумерных связках, искаженных Кумарасвами. Коммун. Стат. Методы теории 2020, 51, 2477–2495. [Перекрестная ссылка]

24. Альдхуфаири, ФАУ; Саманти, RGM; Сепанский Дж Х. Новые семейства двумерных копул посредством единичного ломакс-искажения. Риски 2020, 8, 106. [CrossRef]

25. Альдхуфаири, ФАУ; Сепански, Дж Х. Новые семейства двумерных копул с помощью единичного искажения Вейбулла. Дж Стат. Распредел. Прил. 2020, 7, 1–20. [Перекрестная ссылка]

26. Альдхуфаири, ФАУ, использующее единичную искаженную связку Гомпертца для моделирования зависимости антропометрических данных. Коммун. Стат. Прил. Методы 2023, 30, 467–483. [Перекрестная ссылка]

27. Куларатне, Т.Д.; Ли, Дж; Питт, Д. Об использовании архимедовых копул для моделирования страхования. Энн. Акту ар. наук. 2021, 15, 57–81. [Перекрестная ссылка]

28. Швейцер Б.; Склар, А. Вероятностные метрические пространства; Dover Publications: Северная Голландия, НьюЙорк, США, 1983.

29. Хуа, Л.; Джо, Х. Зависимость от промежуточного хвоста: обзор и некоторые новые результаты. Лекция «Встохастических порядках по надежности и рискам» Примечания в статистике; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 2013 г.; стр. 291–311.

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Модели эпидемии SIRS с задержками, частичными и временными Иммунитет и вакцинация

Бенито Чен-Шарпантье

Департамент математики Техасского университета в Арлингтоне, Арлингтон, Техас 76019, США; bmchen@uta.edu

Аннотация: Базовая воспроизводственность, или репродуктивное число, является полезным показателем, указывающим, произойдет ли эпидемия или нет. Однако также очень важно определить, будет ли эпидемия в конечном итоге уменьшаться и исчезать или сохранится как эндемик. Различные инфекционные заболевания имеют разное поведение, и математические модели, используемые для их моделирования, должны отражать наиболее важные процессы, однако модели также включают в себя упрощения. Эпидемии гриппа обычно кратковременны и могут быть смоделированы с помощью обычных дифференциальных уравнений без учета демографии. Задержки, такие как время заражения, могут изменить поведение решений. То же самое справедливо и в случае наличия постоянного или временного иммунитета, а также полного или частичного иммунитета. Вакцинация, изоляция и использование противовирусных препаратов также могут изменить результат. В этой статье мы представляем несколько новых моделей и используем их для выявления влияния всех вышеперечисленных факторов, уделяя особое внимание тому, может ли модель представлять собой инфекционный процесс, который со временем исчезает. Находим равновесные решения и устанавливаем устойчивость безболезненного р Мы также показываем, что многие модели гриппа или других эпидемий с небольшой продолжительностью не имеют решений при исчезающей эпидемии. Основная цель статьи — представить различные способы моделирования иммунитета в моделях эпидемии. Изучаются несколько сценариев с разным иммунитетом, поскольку человек может не заразиться повторно, потому что у него полный или частичный иммунитет или потому, что не было тесных контактов. Мы показываем, что некоторые относительно небольшие изменения, такие как уровень вакцинации, могут существенно изменить динамику; например, существование и количество безболезненных равновесий. Мы также показываем, что, хотя введение задержек делает модели более реалистичными, динамика имеет такое же качественное поведение.

Ключевые слова: грипп; эпидемические модели; дифференциальные уравнения; основной репродукционный номер; частичный иммунитет

check for updates

Образец цитирования: Чен-Шарпантье, Б. Эпидемические модели SIRS с задержками, частичный и временный иммунитет и вакцинация. Прикладная математика 2024, 4, 666–689. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020036

Академический редактор: Карло Бьянка

Поступила: 7 мая 2024 г.
Пересмотрено: 17 мая 2024 г.
Принято: 23 мая 2024 г.
Опубликовано: 28 мая 2024 г.

Копирайт: © 2024 автора. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Грипп, или грипп, — это заразное заболевание, передающееся при контакте с инфицированным человеком. Сезонным гриппом ежегодно заболевают от 3% до 11% населения США [1]. Пик гриппа приходится на декабрь-февраль каждого года. Хотя некоторые пациенты умирают от сезонного гриппа, это заболевание не является особенно смертельным: 0,2 случая смерти на 100 000 населения [2]. Другими кратковременными заразными заболеваниями являются простуда, респираторно-синцитиальная вирусная болезнь и стрептококковая инфекция горла. Существует множество работ, посвященных математическим моделям эпидемий, передаваемых как при прямом контакте, так и через вектор. Математическое моделирование эпидемий началось в начале 20 века. Одной из первых попыток является [3] , а основополагающая статья Кермака и Маккендрика [4] получила широкое признание как введение первой компартментальной модели эпидемии, основанной на обыкновенных дифференциальных у Использование ОДУ является хорошим допущением для моделирования, если различные популяции хорошо перемешаны и пространственная зависимость незначительна или отсутствует вообще. Кермак и МакКендрик представили модель SIR (susceptible-infected-emovate), которая предполагает, что популяция может находиться в одном из трех состояний: восприимчивая, инфицированная или заразная и удаленная (выздоровевшая с постоянным иммунитетом или умершая). Модель SIR и ее многочисленные вариации, включая SIS (восприимчивый-инфекционно-восприимчивый) и SIRS (восприимчивый-инфекционно-выздоровевший-восприим

Machine Translated by Google

моделиоказалибольшое влияние на понимание эпидемийи борьбыс ними. Среди модификаций, внесенных висходнуюмодель SIR Кермака и Маккендрика, - введение демографических данных (не важно для сезонного гриппа), вакцинации, различных возрастных групп, использования противовирусных препаратов и изоляции. Одним из важных изменений является добавление задержек. Задержки в эпидемиях возникают из-за времени, необходимого для возникновения определенных процессов, например, времени, которое требуется восприимчивому человеку для заражения после контакта с инфицированным человеком, или времени, которое требуется вакцинам, чтобы стать эффективными после введения. Двумя основными способами введения задержек в модель, основанную на обыкновенных дифференциальных уравнениях, являются использование дифференциальных уравнений с запаздыванием (DDE) или введение дополнительной подверженной или скрытой совокупности. Динамика DDE может отличаться от динамики ODE [5,6]. Среди возможных отличий — введение колебаний, введение разрывов в производных по времени, неединственность и различная устойчивость. Хотя существует широкий спектр литературы о моделях эпидемий или передач и болезней с использованием дифференциальных уравнений с запаздыванием, в большинстве книг по DDE мало освещено распространение инфекционных заболеваний, а в книгах по эпидемиям мало материалов по DDE. Двумя исключениями являются следующие книги [7,8].

Модели SIR предполагают, что после заражения люди вывыздоравливают и достигают постоянного и полного иммунитета от болезни. В отношении сезонного гриппа и других заразных заболеваний иммунитет является временным, что приводит к моделям SIRS, в которых вывдоровевшие люди полностьютеряют иммунитет через определенный период времени. Однако есть и другие возможности: вывдоровевшие люди теряют полный иммунитет, но навсегда сохраняют частичный иммунитет; вывдоровевшие лица теряют полный иммунитет и приобретают частичный иммунитет на определенный период времени; некоторые вывдоровевшие сохраняют полный и постоянный иммунитет, тогда как другие сохраняют лишь частичный постоянный иммунитет и так далее. Что происходит, зависит от конкретной инфекции и популяции. Вакцинытакже могут обеспечить полный постоянный иммунитет или полный иммунитет, который ослабевает до частичного иммунитета, или другие сценарии.

Одним из наиболее важных применений математических моделей инфекционных заболеваний является предсказание того, будет ли эпидемия или нет. Базовое число воспроизводства R0 , определяемое как число вторичных инфекций, вывванных вновь инфицированным человеком в начале инфекционного процесса, является полезным показателем для определения того, завершится ли эпидемия или нет. Обычно его рассчитывают с использованием матричного метода нового поколения [9,10]. Это также обеспечивает стабильность безболезненного равновесия (DFE) модели. В случае, если число инфицированных изначально растет, также очень важно определить, завершится ли эпидемия в конечном итоге или нет. В этой статье мыразработаем математические модели кратковременных инфекционных заболеваний, таких как сезонный грипп, которые включают различные предположения о полном, частичном, постоянном и временном иммунитете. Мытакже добавим прививки с различным эффектом на иммунитет, а также добавим использование противовирусных препаратов и изоляцию. Модели будут включать отложенные версии с использованием DDE, а также подверженных риску групп населения. С помощьюэтих моделей мы будем изучать, сохранится ли эпидемия или нет. Ссылка. [11] сравниваетнекоторые базовые модели гриппа, которые мыбудем использовать в качестве отправной точки. Остальная часть статьи организована следующим образом. Вразделе 2 мыпредставляем несколько новых моделей, которые являются расширением модели SIRS, с различными гипотезами о полном и частичном иммунитете и вакцинации, определяемых их равновесие и анализируем стабильность их безболезненного равновесия. Вразделе 3 представленычисленное моделирование и результаты, включая эффекты введения задержек. Мытакже показываем, что некоторые относительно небольшие изменения в моделях могут существенно изменить динамику. Наконец, вразделе 4 представлены обсуждения и вывводыо моделях и результатах.

2. Материалы и методы

В этом разделе мыпредставляем несколько новых математических моделей краткосрочных эпидемий с различными типами иммунитета. Мытакже добавляем вакцинацию, использование противовирусных препаратов и изоляциюили карантин. Чтобыопределить, развивается ли эпидемия в соответствии с используемой моделью, необходимо найти точки равновесия. Если существует точка равновесия, в которой нет инфекционных заболеваний и восприимчивых к общей численности населения, и если число инфекционных заболеваний со временем растет, то возникнет эпидемия. Равновесие с нулевыми инфекционными забол

Machine Translated by Google

известное как равновесие без болезней (DFE). Существуют разные методы определения роста числа инфекционных заболеваний: дифференциальное уравнение для инфекционных заболеваний имеет положительную правую часть; DFE локально неустойчив; использование базового числа воспроизведения R0 дает R0 > 1; подсистема уравнений инфекционных отсеков локально неустойчива; индекс R0, рассчитанный матричным методом следующего поколения, больше 1 [10,12]. В случае эпидемии очень важно установить, умрет ли она в конечном итоге. Это можно вычислить, определив, существует ли DFE для положительного времени, который локально асимптотически устойчив. Это может произойти в течение конечного времени или только тогда, когда время стремится к бесконечности. Это определение будет проводиться в следующих подразделах для различных моделей без демографических данных. Первый подраздел представляет собой обзор модели «восприимчивый-инфекционно-восприимчивый» (SIS), модели «восприимчивый-инфекционно-выздоровевший» (SIR) и модели «восприимчивый-инфекционно-выздоровевший-восприимчивый» (SIRS) с различными иммунитетами.

2.1. Модели SIS, SIR и SIRS

Очень простая модель эпидемии для общей постоянной популяции N, состоящей только из двух групп населения: восприимчивых S и инфекционных больных I, представляет собой модель SIS. Предполагается, что восприимчивый человек заражается с вероятностью β/N > 0 при контакте с возбудителем, а затем выздоравливает без иммунитета и возвращается в восприимчивый компартмент. Простуда является примером инфекционного заболевания, которое можно смоделировать с помощью системы уравн Общая численность населения обычно считается постоянной, что предполагает, что болезнь протекает быстро по сравнению с демографическими последствиями. Почти эквивалентное предположение, поскольку уровень смертности очень мал по сравнению с временными рамками заболевания, состоит в том, что число рождений равно числу смертей без миграции. Модель SIS без демографиче

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} SI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI - \gamma I, \end{aligned} \tag{1}$$

где γ > 0 – скорость восстановления, а N > 0 – общая численность населения. Поскольку популяция постоянна, S(t) = N − I(t), и мы можем исключить одно уравнение

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}(N - I)I - \gamma I. \tag{2}$$

Модель SIS имеет два состояния равновесия: I = 0 и I = (1 − физическое $\frac{\gamma}{\beta}$) N. Последний из них только для $\gamma < \beta$. Базовое репродуктивное число (также называемое базовым репродуктивным числом) R0 — это количество вторичных инфекционных агентов, генерируемых одним инфекционным агентом вначале. Для модели SIS его можно рассчитать как произведение вероятности появления нового инфекционного заболевания β/N на количество восприимчивых людей в начале инфекционного процесса N на среднюю продолжительность жизни инфекции 1/γ. Следовательно, R0 = β/γ. Если R0 > 1, число инфицированных увеличивается по мере удаления от DFE, и другое равновесие имеет биологический смысл, поскольку все состояния неотрицательны. Если R0 < 1, инфекция исчезает т. е. равновесие DFE — единственное, которое имеет биологический смысл. R0 > 1 означает, что ДФЭ локально асимптотически неустойчив, поэтому хотя бы одно собственное значение линеаризованной системы вокруг ДФЭ имеет положительную действительную часть. Чтобы определить, растет ли инфекция, достаточно посмотреть на зараженный отсек I(t). Матричный метод нового поколения [9,10] широко используется для расчета базового репродуктивного числа в более сложных моделях эпидемиологии. При применении этого метода к модели SIS имеется только один инфекционный отсек I, поэтому якобиан J этой системы представляет собой матрицу 1 × 1. Разложение этой матрицы на J = T + Σ, передачи, а Σ — матрица перехода, дает T = βS/N и Σ = γ. ^{1} где T — матрица Матрица следующего поколения — это K = TΣ — начало заражения S = N — 1, поэтому спектральный радиус K, равный R0, можно аппроксимировать как R0 = β/γ. Локальную устойчивость ДФЭ также можно установить, найдя индекс, указывающий, когда собственное значение линеаризованной

Machine Translated by Google

Болезнь, оцененная в DFE, имеет отрицательную реальную часть. Простой способ определить, растет ли количество инфицированных в начале эпидемии, состоит в том, чтобы оценить дифференциальное уравнение для I в начальном состоянии с S = N:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} NI - \gamma I = (\beta - \gamma)I,$$

что положительно при $\beta/\gamma > 1$. Обратите внимание, что, поскольку в начале эпидемии $I = 1$, $S = N - 1$. Однако при больших N S можно принять равным N. Другой способ найти устойчивость ДФЭ в начале заражения — это вычисление собственных значений матрицы Якоби, соответствующей полной системе уравнений, но формулы обычно сложны или не могут быть определены аналитически. Другой возможностью является использование характеристического полинома и критерия Рауса-Гурвица [13,15].

К модели SIS можно добавить две задержки: τ время, необходимое для развития заболевания у восприимчивого человека после заражения в результате контакта с инфицированным человеком, и время, необходимое для выздоровления вновь инфицированного человека. Эта вторая задержка обычно учитывается неявно, поскольку $1/\gamma$ — среднее время восстановления. Есть два способа ввести первую задержку. Первый способ представлен моделью задержки SIS I:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} S(t-\tau)I(t-\tau) + \gamma I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} S(t-\tau)I(t-\tau) - \gamma I(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Предполагается, что контакт в момент $t - \tau$ приводит к появлению нового инфекционного агента в момент времени t.
Второй способ представлен Моделью задержки SIS II:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} S(t)I(t-\tau) + \gamma I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} S(t)I(t-\tau) - \gamma I(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Сейчас предполагается, что восприимчивый человек после контакта с инфекционным заболеванием превращается в инфекционного, но ему требуется время τ, чтобы действительно заразиться этой болезнью и стать способным заразиться.
Обе модели имеют биологический смысл. Другой подход к изучению моделей эпидемий – рассматривать их как химические реакции, как показано, например, в [16]. Например, реакция между инфекционным агентом и восприимчивым приводит к образованию двух инфекционных агентов.
Чтобы реакция произошла, оба вида должны произойти одновременно, что является предостережением для модели задержки II. Однако, поскольку во многих статьях используются оба способа введения задержки заражения, мы включили оба, чтобы увидеть, производят ли они одинаковую динамику качественно.

Динамика может быть разной, поскольку их характеристические уравнения различны. О других моделях эпидемии, которые вводят задержку заражения, как это было сделано в модели задержки 1, см., например, [17–19]. А для других приложений, использующих задержку, как в модели задержки 2, см. [20,21].

Для модели SIS равновесные решения обеих моделей задержки такие же, как и в модели ODE. Для определения устойчивости ДФЭ для модели (3) положим $I = i$ и $S = N - s$. Тогда линеаризованное дифференциальное уравнение для i равно $\frac{di}{dt} = \beta i - \gamma i$. Полагая $i = \exp(rt)$, получаем характеристическое уравнение

$$r = \beta \exp(-r\tau) - \gamma.$$

Это уравнение трансцендентно и не имеет точного решения, но $r > 0$ только при $\beta > \gamma$. Итак, у нас тот же R_0, что и у модели ODE. Аналогичный расчет для модели (4) дает тот же результат. Этот метод был применен к другим моделям в [20,22].

Machine Translated by Google

Другой способ указать время, необходимое для развития инфекции, — добавить еще один отсек для экспонированной или латентной популяции (E). После контакта с инфекционным агентом восприимчивый человек попадает в экспонируемый отсек и проводит там время, в среднем равное времени заражения. Лица, подвергшиеся воздействию, не могут заразиться. Модель SIS с незащищенным населением

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{\beta} SI + \gamma I \, N \\ \frac{dE}{DT} &= \frac{SI}{E} \quad N \, 1 \, \frac{1}{E \, \tau} \\ \frac{DI}{dt} &= \frac{}{\tau} \gamma I. \end{aligned} \tag{5}$$

Равновесие DFE в (5) такое же, как и в (1). Его устойчивость может быть рассчитана с использованием матричного метода следующего поколения и дает $R0 = \beta/\gamma$. Таким образом, устойчивость такая же, как и в (1). Пораженные популяции использовались во многих моделях эпидемий, например, в [23,24].

Модель SIR Кермака и Маккендрика [4] предполагает, что инфицированные выздоравливающие имеют полный и постоянный иммунитет. Он добавляет восстановленный отсек (R) к модели SIS:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{DT} &= \frac{\beta}{H} СИ \\ \frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} СИ \quad \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку общая численность населения постоянна, одно уравнение можно исключить, используя $R(t) = N - S(t) - I(t)$. Новая система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dC}{DT} &= \frac{\beta}{N} SI \\ \frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} SI \quad \gamma I. \end{aligned}$$

Единственным устойчивым решением (6) является $I = 0, S + R = N$. В начале заражения $S(0) = N$. Второе уравнение (6) утверждает, что в начальный момент времени $t = 0, > 0$ при $\beta > \gamma$. $\frac{ди}{я\,дт}$
Таким образом, при $\beta/\gamma > 1$ ДФЭ неустойчив, а $I(t)$ имеет максимальное значение при $S = N\gamma/\beta$. $\gamma N \, S(\quad)$
Кроме того, решение при стремлении t к бесконечности имеет вид $S(\quad) = N \quad R(0) \quad \ln(\cdot)$ и $\beta \, S(0)$
$S(\quad) > 0$ [13]. Так что если есть эпидемия, она не исчезнет.

Задержку, связанную со временем заражения, можно ввести двумя способами, как это было сделано для модели SIS. Равновесным решением обеих моделей с задержкой является DFE с той же стабильностью, что и для модели без задержки. Тот же результат стабильности для DFE модели ODE без задержки верен и для модели SIR с подвергающейся воздействию популяцией.

Моделью распространения множества различных заболеваний в популяции является модель SIRS без демографических данных [13]. Она состоит из трех популяций: восприимчивых (S(t)), инфекционных или инфицированных (I(t)) и выздоровевших (R(t)). Восприимчивый превращается в инфекциониста с заданной вероятностью υ после контакта с инфекционным агентом. Инфицированный выздоравливает со скоростью γ. Выздоровевший теряет иммунитет со скоростью ν и превращается в восприимчивого. Общая численность населения предполагается постоянной, $S(t) + I(t) + R(t) = N$, а болезнь считается достаточно короткой, поэтому нет необходимости учитывать рождаемость и смертность. Коэффициент заражения будем обозначать β/N. Все параметры положительные. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающая модель, имеет вид [13,14]

Machine Translated by Google

$$\begin{aligned}\frac{dC}{DT} &= \frac{\beta}{H} СИ + VR\\ \frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} СИ \quad \gamma I\\ \frac{dR}{дт} &= \gamma I \quad \nu R.\end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку общая численность населения постоянна, одно уравнение можно исключить, используя R(t) = N - S(t) - I(t). Новая система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dC}{DT} &= \beta SI + \nu(N - S - I)\\ \frac{DI}{дт} &= \frac{\beta}{H} SI \quad \gamma I.\end{aligned} \tag{8}$$

Модель SIRS имеет два равновесных решения: DFE, S = N, I = 0, R = 0 и (β γ)Nν — эндемическое равновесие, S = γN/β, I = R = N — S — I. Базовое воспроизводство β(γ+ν), число R0 = β/γ.

Существует несколько различных методов задержки заражения в организме. Модель: Первая модель, которую мы назовем SIRS Model I [17–19], имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dC}{DT} &= \frac{\beta}{H} S(t \quad \tau)I(t \quad \tau) + \nu(N \quad S(t) \quad I(t))\\ \frac{DI}{дт} &= \frac{\beta}{H} S(t \quad \tau)I(t \quad \tau) \quad \gamma I(t),\end{aligned} \tag{9}$$

где гипотеза состоит в том, что инфекционный агент контактирует с восприимчивым, и требуется время τ, чтобы этот восприимчивый стал заразным. До этого времени он не считается восприимчивым. Вторая модель — это SIRS Model II [25], описываемая следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{DT} &= \frac{\beta}{H} S(t)I(t \quad \tau) + \nu(N \quad S(t) \quad I(t))\\ \frac{DI}{дт} &= \frac{\beta}{H} S(t)I(t \quad \tau) \quad \gamma I(t),\end{aligned} \tag{10}$$

где предполагается, что после контакта между восприимчивым и инфекционным вирусом проходит время τ, прежде чем восприимчивый превращается в инфекционного и затем способен заразить другого восприимчивого.

Вместо того, чтобы рассматривать выздоровевшую популяцию, где люди тратят среднее время 1/ν до потери иммунитета, инфекционные люди после прекращения заразности должны ждать время задержки 1/ν, прежде чем стать заразными. В [26] это осуществляется в дополнение к сохранению восстановленного отсека.

Две модели с задержками, представленными выше, имеют одинаковые равновесные решения, но фактические решения, зависящие от времени, будут разными. Возникает также вопрос о влиянии начальных условий, заданных на интервале истории. В случае эпидемии их всегда можно дать как равновесные решения без болезни. То есть можно использовать естественное предположение, что эпидемия начинается в момент t = 0.

Machine Translated by Google

Модель, которая учитывает зависимость в прошлом, вызванную задержкой передачи, путем включения подвергшегося воздействию населения, E, представляет собой [27,28]

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{N} CI + VR\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta}{N} CI - \sigma E\\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - \gamma I\\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \nu R.\end{aligned} \tag{11}$$

Дополнительный параметр $\sigma = 1/\tau$. Модели такого вида обычно называют моделями SEIRS. Он имеет те же DFE и R_0, что и модель без задержки.

2.2. Модели с разными иммунитетами

Три модели, приведенные в разделе 2.1, имеют разные типы иммунитета. Модель SIS не имеет иммунитета, модель SIR имеет полный и постоянный иммунитет, а модель SIRS имеет полный, но временный иммунитет. Однако для разных инфекций могут существовать разные типы иммунитета, например частичный и постоянный или частичный и временный. Некоторые работы, посвященные иммунитету к гриппу, приведены в [29–31]. Ссылка. [32] включает класс реинфицированных с различным иммунитетом. Ссылка. [33] моделирует частичный иммунитет в выздоровевшей популяции, а [34] учитывает, что выздоровевшие теряют иммунитет, но не все инфицированные выздоравливают. Ссылка. [35] добавляет эффект повторного заражения гриппом. Ссылка. [36] также учитывает с Ссылка. [37] моделируют потерю иммунитета с зависящей от времени скоростью. Мы рассмотрим несколько новых моделей с разной устойчивостью на основе модели SIRS. Первая модель предполагает, что все инфицированные люди получают частичный, но постоянный иммунитет. Подобные модели приведены в [34,38]. Восприимчивые люди заражаются, а затем переходят в восприимчивых с частичным иммунитетом S_p, которые могут быть повторно инфицированы со скоростью заражения β_p/N. Уравнения модели:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{N} CI\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta - \beta_p}{N} CI + \frac{\beta_p}{N} C_p I - \gamma I\\ \frac{dC_p}{dt} &= \frac{\beta_p}{N} C_p I + \gamma I.\end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку общая численность населения постоянна, одно уравнение можно исключить, используя $S_p(t) = N - S(t) - I(t)$. Система имеет два равновесных решения: ДФЭ $I = 0, S + S_p = N$, γN и $S = 0, S_p = I = N - S_p$. В начале заражения $S_p = 0$, поэтому уравнение для β_p, I такое же, как в системе (6), а R_0 имеет то же значение $R_0 = \beta/\gamma$. Дфе модели задержки строятся, как и раньше. Первая модель

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{N} S(t-\tau) I(t-\tau)\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta - \beta_p}{N} S(t-\tau) I(t-\tau) + \frac{\beta_p}{N} S_p(t-\tau) I(t-\tau) - \gamma I\\ \frac{dC_p}{dt} &= \frac{\beta_p}{N} S_p(t-\tau) I(t-\tau) + \gamma I,\end{aligned} \tag{13}$$

Machine Translated by Google

и второй

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N}S(t)I(t-\tau)\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta_p}{N}S(t)I(t-\tau_1) - \gamma I\\ \frac{dS_p}{dt} &= -\frac{\beta_p}{N}S_p(t)I(t-\tau) + \gamma I.\end{aligned} \tag{14}$$

Они имеют те же точки равновесия, что и модель без задержек. Модель с обученным населением строится аналогично и имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N}SI\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta}{N}SI + \frac{\beta_p}{N}S_pI - \sigma E\\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - \gamma I\\ \frac{dS_p}{dt} &= -\frac{\beta_p}{N}S_pI.\end{aligned} \tag{15}$$

Все эти три модели также имеют тот же R_0, что и (12).

Вторая модель частичного иммунитета предполагает, что все инфекционные заболевания обладают частичным иммунитетом, но он носит лишь временный характер. Восприимчивые заражаются, затем переходят к восприимчивым с частичным иммунитетом, а затем снова к восприимчивым без иммунитета. Модель задается следующей системой ОДУ

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N}SI + \nu S_p\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N}SI + \frac{\beta_p}{N}S_pI - \gamma I\\ \frac{dS_p}{dt} &= \frac{\beta_p}{N}S_pI + \gamma I - \nu S_p.\end{aligned} \tag{16}$$

Опять же, поскольку общая численность населения постоянна, одно уравнение можно исключить. Система имеет два равновесных решения: ДФЭ $I = 0, S = N, S_p = 0$ и второе равновесие с $S > 0, S_p > 0$ и $I > 0$. В начале заражения $S_p = 0$, поэтому уравнение для I такое же, как в системе (6) и $R_0 = \beta/\gamma$. Две модели задержки построены аналогично предыдущему. Они имеют те же точки равновесия, что и модель без задержки. В модель с обученной популяцией эта популяция добавлена в той же форме. Все эти три модели также имеют тот же R_0, что и (12).

Третья модель предполагает, что все инфекционные заболевания получают полный иммунитет, но только временный, а затем приобретают постоянный частичный иммунитет. Восприимчивые люди заражаются, затем выздоравливают с полным временным иммунитетом, затем получают частичный постоянный иммунитет как восприимчивые с частичным иммунитетом. Модель предоставлена

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N}SI\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N}SI + \frac{\beta_p}{N}S_pI - \gamma I\\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \nu R\\ \frac{dS_p}{dt} &= \frac{\beta_p}{N}S_pI + \nu R.\end{aligned} \tag{17}$$

Machine Translated by Google

Опять же, поскольку общая численность населения постоянна, одно уравнение можно исключить. Система имеет два равновесных решения: ДФЭ I = 0, S + Sp = N и второе равновесие (βp γ)Nv.
S = 0, Sp = и R = N $\frac{\gamma N}{\beta p}$Sp я = I. Это второе равновесное решение βp(γ+ν) имеет смысл только при βp > γ. В начале заражения Sp = 0, поэтому уравнение для I такое же, как в системе (6), и R0 = β/γ. Однако если βp < γ, эпидемия в конечном итоге исчезнет.

Четвертая модель предполагает, что все инфицированные приобретают полный иммунитет, но только временный, а затем приобретают частичный иммунитет, который также является временным. Восприимчивые люди заражаются, затем выздоравливают с полным временным иммунитетом, затем получают частичный временный иммунитет как восприимчивые с частичным иммунитетом, которые затем превращаются в восприимчивых. Модель предоставлена

$$\begin{aligned}
\frac{дС}{DT} &= \frac{\beta}{H} СИ + \nu 1 Сп \\
\frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} СИ + \frac{\beta п}{H} Сп\, I \quad \gamma I \\
\frac{dR}{дт} &= \gamma I \quad \nu R \\
\frac{дСп}{дт} &= \frac{\beta p}{H} Sp\, I + \nu R \quad \nu 1 Sp.
\end{aligned} \tag{18}$$

Опять же, поскольку общая численность населения постоянна, одно уравнение можно исключить. Система имеет два равновесных решения: ДФЭ I = 0, S + Sp = N и второе эндемическое равновесие S > 0, Sp > 0, I > 0 и R = N Sp I. В начале заражения Sp = 0, поэтому дифференциальное уравнение для I такое же, как и в системе (6), и R0 = β/γ.

2.3. Модели с потерей иммунитета и две группы.

Разные люди теряют иммунитет с разной скоростью. В этом подразделе для простоты мы включим две группы людей, но модели можно расширить и на большее количество групп. Ссылка. [34] есть модель с некоторым восстановлением утраченного иммунитета. Первая предложенная модель предполагает, что все инфицированные получают постоянный иммунитет, но две группы теряют его с разной скоростью ν и ν1. Одна группа имеет более сильную иммунную систему, среди прочего, благодаря предыдущему воздействию предыдущей разновидности гриппа или вакцинации в предыдущие сезоны [29–31].

$$\begin{aligned}
\frac{дС}{DT} &= \frac{\beta}{H} SI + \nu\, f\, R + \nu 1(1 \quad f)R \\
\frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} СИ \quad \gamma I \\
\frac{dR}{дт} &= \gamma I \quad \nu\, f\, R \quad \nu 1(1 \quad f)R.
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь 0 f 1 — доля населения в первой группе. Две модели с задержкой заражения имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{дС}{DT} &= \frac{\beta}{H} S(t \quad \tau)I(t \quad \tau) + \nu\, f\, R + \nu 1(1 \quad f)R \\
\frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} S(t \quad \tau)I(t \quad \tau) \quad \gamma I \\
\frac{dR}{дт} &= \gamma I \quad \nu\, f\, R \quad \nu 1(1 \quad f)R,
\end{aligned} \tag{20}$$

Machine Translated by Google

и

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{N} S(t)I(t-\tau) + \nu f R + \nu_1(1-f)R \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} S(t)I(t-\tau) - \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \nu f R - \nu_1(1-f)R.
\end{aligned} \tag{21}$$

Для обеих моделей задержки дифференциальное уравнение вначале процесса заражения инфекционного отсека такое же, как и для модели SIS (1), поэтому с помощью одной и той же процедуры можно определить, что $R_0 = \beta/\gamma$. Кроме того, для обеих моделей точки равновесия такие же, как и в модели ОДУ (19).

Модель с подвергающейся воздействию популяцией

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI + \nu f R + \nu_1(1-f)R \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI - \sigma E \\
\frac{dI}{dt} &= \sigma E - \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \nu f R - \nu_1(1-f)R.
\end{aligned} \tag{22}$$

Он имеет тот же DFE, что и (19). Стабильность ДФЭ вначале заражения по-прежнему определяется соотношением $R_0 = \beta/\gamma$.

Следующей модели часть f инфицированных получает полный и постоянный иммунитет, а остальные получают частичный и постоянный иммунитет. ОДУ модели:

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI + \frac{\beta_p}{N} S_p I - \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma f I \\
\frac{dS_p}{dt} &= -\frac{\beta_p}{N} S_p I + \gamma(1-f)I.
\end{aligned} \tag{23}$$

Следующая модель предполагает, что часть f получает полный и временный иммунитет, а остальные — частичный и временный иммунитет. Система уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI + \nu R + \nu_1 S_p \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI + \frac{\beta_p}{N} S_p I - \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma f I - \nu R \\
\frac{dS_p}{dt} &= -\frac{\beta_p}{N} S_p I + \gamma(1-f)I - \nu_1 S_p.
\end{aligned} \tag{24}$$

Следующей модели все инфицированные приобретают полный иммунитет на конечное время, затем теряют его с разными скоростями ν и ν_1 и получают частичный и постоянный иммунитет с разными скоростями заражения β_1 и β_2.

Machine Translated by Google

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{DT} &= \frac{\beta}{H} CИ \\
\frac{DI}{dt} &= \frac{\beta\beta1\,\beta2}{H} CИ + \frac{}{H} C1\,Я + \frac{}{H} S2\,I \quad \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I \quad \nu f R \quad \nu1(1 \quad f)R \\
\frac{dS1}{dt} &= \frac{\beta1}{\beta2} S1\,I + \nu f RN \\
\frac{dS2}{dt} &= \frac{S2}{H} I + \nu1(1 \quad f)R.
\end{aligned} \tag{25}$$

2.4. Модели с вакцинацией и потерей иммунитета

Вакцинация – очень эффективный инструмент для достижения иммунитета к сезонному гриппу. Обычно эффект вакцины со временем ослабевает. Мы считаем, что иммунитет постоянный, если он продлится до следующего сезона гриппа с новым вариантом вируса. Вакцинированное население будет обозначаться буквой V. Существуют разные способы введения уровня вакцинации. Первый способ заключается в том, что он пропорционален числу восприимчивых S [39–41]. Ссылки. [42–44] также считают снижение эффективности вакцины. Ссылка. [45] разработали базовую модель вакцинации, основанную на модели SIR. Второй способ — предположить, что только определенный процент восприимчивых людей готов пройти вакцинацию [46], что является более реалистичным предположением [47]. Это приводит к коэффициенту вакцинации вида r(prS V). Его также можно считать пропорциональным общей численности населения или просто постоянным [48,49]. Ссылка. [50] рассматривает вакцинацию, частичный Ссылки. [40,51] также включают карантин. Наша первая модель вакцинации предполагает, что инфицированные выздоравливают и приобретают общий и временный иммунитет в течение среднего периода времени 1/ν. Вакцинированные люди приобретают полный иммунитет, но со временем он ослабевает со скоростью ω. Модель

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{H} SI + \omega V + \nu R \quad rS \\
\frac{dV}{DT} &= rS \quad \omega V \\
\frac{DI}{} &= \frac{\beta}{H} CИ \quad \gamma I \\
\frac{дт\,др}{дт} &= \gamma I \quad \nu R.
\end{aligned} \tag{26}$$

В этой модели уровень вакцинации пропорционален числу восприимчивых людей. Поскольку уравнение для инфекционной популяции такое же, как и для (6), значение R0 по-прежнему равно β/γ. Если вакцинация не убывает, ω = 0, система имеет только одну точку равновесия, S = 0, I = 0, R = 0, V = N. Если ω/ = 0, то есть две точки равновесия, I = 0, R = 0, S = (ωN/(ω + r), V = rS/ω и S = γN/β, V = rS/ω, R = γI/ν и I, заданные решением I = N S V R. Первая модель задержки получается заменой S(t) и I(t) в терминах заражения на S(t τ) и I(t τ). Вторая модель производится только заменой I(). t) Оба члена имеют те же точки равновесия и R0 , что и (26). Система с незащищенной популяцией имеет те же точки равновесия DFE, поскольку I = 0 подразумевает E = 0. R0 , рассчитанный матричным методом следующего поколения, по-прежнему равен R0. = β/γ.

Вторая модель с вакцинацией предполагает, что инфицированная популяция получает полный иммунитет на определенное время, а затем получает частичный постоянный иммунитет. У привитого населения формируется полный, но временный иммунитет, а затем он снижается до частичного постоянного иммунитета Появился новый отсек Sp, представляющий восприимчивых людей с частичным иммунитетом.

Machine Translated by Google

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{H} CI \quad pC \\
\frac{dSp}{dt} &= \frac{\beta p}{H} Sp\, I + \omega V + \nu R \\
\frac{dV}{DT} &= rS \quad \omega V \\
\frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} CI + \frac{\beta p}{H} Cn\, I \quad \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I \quad \nu R.
\end{aligned} \tag{27}$$

Данная модель имеет ДФЭ I = 0, S = 0, R = 0, V = 0, Sp = N. Также существует эндемическое равновесие с S = 0, V = 0. Поскольку в начале заражения Sp = 0, используя дифференциальное уравнение для I, R0 = β/γ. Две модели задержки получаются путем модификации (27) аналогично тому, как это делалось для предыдущих моделей. Состояния равновесия и R0 такие же, как в (27). Соответствующее уравнение с облученным населением также имеет тот же R0.

Если уровень вакцинации изменить на r(prS V) вместо rS, чтобы модель согласовывалась с тем, что не желают быть вакцинированными, модифицированная модель будет

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{H} CI \quad r(prS \quad V) \\
\frac{dSp}{dt} &= \frac{\beta n}{H} Sp\, I + \omega V + \nu R \\
\frac{dV}{DT} &= r(prS \quad V) \quad \omega V \\
\frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} CI + \frac{\beta p}{H} Cn\, I \quad \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I \quad \nu R.
\end{aligned} \tag{28}$$

Эта модель не имеет устойчивого решения с I = 0 для произвольных значений параметров. Это важное отличие в динамике от других моделей.

Следующая модель предполагает, что все привитые на какое-то время получают полный иммунитет, затем часть fv сохраняет общий иммунитет, а остальные получают частичный постоянный иммунитет. После выздоровления все инфицированные приобретают полный временный иммунитет.

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{H} SI \quad r(prS \quad V) + \nu R \\
\frac{dSp}{dt} &= \frac{\beta n}{H} Sp\, I + \omega(1 \quad fv)V \\
\frac{dV}{DT} &= r(prS \quad V) \quad \omega(1 \quad fv)V \\
\frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} CI + \frac{\beta p}{H} Cn\, I \quad \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I \quad \nu R.
\end{aligned} \tag{29}$$

Если ω = 0, то ДФЭ имеет вид I = 0, R = 0, , Sp = 0, V = prS, S = N/(1 + pr). Для ω/ = 0 ДФЭ имеет вид I = 0, R = 0, V = 0, S = 0, Sp = N. Поскольку Sp(0) = 0, в обоих случаях имеем R0 = β/γ. Две модели задержки и модели подвергшегося воздействию населения выводятся из (29), как это было сделано для предыдущих моделей. Все три модели имеют одинаковые DFE и R0 , что и (29).

Machine Translated by Google

В качестве окончательной и более полной модели мы добавим использование противовирусных препаратов для снижения время заражения и изоляция для уменьшения количества активных инфекционных агентов. Есть новый компартмент, карантинное или изолированное население . Q. Инфицированные выздоравливают при тотальном и временный иммунитет, привитые получают полный и временный иммунитет, а затем частичный постоянный иммунитет. Часть зараженных получает противовирусное средство и выходит из отсека .
с большей скоростьюγa. Часть fq инфицированных помещается на карантин со скоростьюγq и покидает карантинное состояние по курсу γq1. Среднее время, которое проводит человек на карантине взараженном и карантинном отсеках такой же, как и в некарантинном человек проводит в инфекционном отделении. Следовательно, 1/γ = 1/γq + 1/γq1.
модель

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\beta}{H} SI \quad r(prS \quad V) + \nu R \\
\frac{dCp}{dt} &= \frac{\beta p}{H} Sp\, I + \omega(1 \quad fv)V \\
\frac{dB}{dt} &= r(prS \quad V) \quad \omega(1 \quad fv)V \\
\frac{DI}{dt} &= \frac{\beta}{H} CI + \frac{\beta p}{H} Cp\, я \\
&\quad fq\gamma q\, I \quad fa\gamma a\, I \quad (1 \quad fq \quad fa)\gamma I \\
\frac{dQ}{dt} &= fq\gamma q\, I \quad \gamma q1Q \\
\frac{dR}{dt} &= fa\gamma a\, I + (1 \quad fq \quad fa)\gamma I + \gamma q1Q \quad \nu R.
\end{aligned} \tag{30}$$

ДФЭ равен I = 0, R = 0, Q = 0, V = 0, S = 0, Sp = N. Поскольку Sp(0) = 0, для инфекционного отсека для роста нам нужен $R0 = \frac{\beta}{(1 \quad fq \quad fa)\gamma+fq\gamma q+fa\gamma a} > 1$. Версии с задержкой и модель с облученным населением имеет те же DFE и R0.

3. Результаты

В этом разделе мы представляем численные результаты для моделей, приведенных в предыдущем разделе. раздел. Численное моделирование, включая DDE, было выполнено с использованием программы Julia пакет DifferentialEqns.jl [52,53]. Значения параметров, используемые для большинства симуляций: приведены в таблице 1. Если для конкретного моделирования используется другое значение, это будет отмечено в подписи к соответствующему рисунку. Значения β, γ, ν и τ основаны на тех данные [54] и CDC [1] соответствуют сезонному гриппу. Все остальные оцениваются. Величина β имеет большой разброс в зависимости от условий: сельской, городской, пригородной, рабочие места с высокой плотностью и т. д. Значения β и γ, выбранные для большинства моделей, дают R0 = 1,5. Ссылка. [55] также приводят аналогичные значения параметров для гриппа.

Таблица 1. В этой таблице приведены значения параметров, использованных при моделировании.

Символ β	Описание параметра	Ценить
γ	Уровень заражения	0,5/день
	Скорость восстановления	1/3/д
ν	Скорость потери иммунитета	1/30/д
τ	Задержка во времени заражения	1,9 дня
σ	1/(время заражения)	1/τ 1/д
H	Общая численность населения	1000
βp	Уровень заражения при частичном иммунитете	β/2
ν1	Скорость утраты или частичного иммунитета	1/60/д
	Фракция, теряющая иммунитет со скоростьюν	0,75
фр β1	Уровень заражения фракции fr	0,9β/сутки
β2	Уровень заражения для фракции 1 fr	0,8β/сутки

Machine Translated by Google

Таблица 1. Продолжение.

Символ ФП	Описание параметра	Ценить
	Фракция, достигшая полного иммунитета	0,5
р	Уровень вакцинации	0,02/день
ω	Скорость потери вакцинационного иммунитета	1/60/д
βв	Уровень инфицированности привитых частичными	0,8β
пр	Доля восприимчивых людей, подлежащих вакцинации	0,2/день
фв	Доля привитых с постоянным иммунитетом	0,75

Начальные условия для всех моделей: S = 900, I = 100 и все остальные популяции. равен нулю История для моделей с задержкой равна S = 1000, а все остальные переменные с задержкой равный нулюна интервале [τ , 0]. Это соответствует эпидемии, начинающейся в момент t = 0. Все моделирование, если не указано иное, имеет R0 = 1,5.

3.1. Модели SIS, SIR и SIRS

Модели SIS, SIR и SIRS широко используются для эпидемий с прямым заражением. контакт. В модели SIS инфицированные не приобретают иммунитет, в модели SIR они получают тотальный иммунитет. и постоянный иммунитет, а в модели SIRS они получают полный, но временный иммунитет.

На рисунке 1 представлены графики модели SIS, слева для восприимчивой популяции. и в праве на инфекционное население. Поскольку R0 = β/γ > 1, решение стремится к эндемичное состояние. График заражения для модели с облученным населением имеет другой предел, поскольку существует два инфекционных класса: I и E, и на графике изображен только I. Решения имеют та же форма, но для модели ОДУ быстрее всех достигает состояния равновесия. решения двух систем задержки идентичны, поскольку единственная разница заключается в том, когда новая инфицированный перестает считаться восприимчивым. Модель с облученным населением имеет среднее время в открытом отсеке равно задержке, но не такой же задержке для каждого человека. Чтобы определить, какая модель является лучшей, необходимы реальные данные, поскольку все модели без задержки, с задержкой и с облученной популяцией имеют одинаковые качественная динамика.

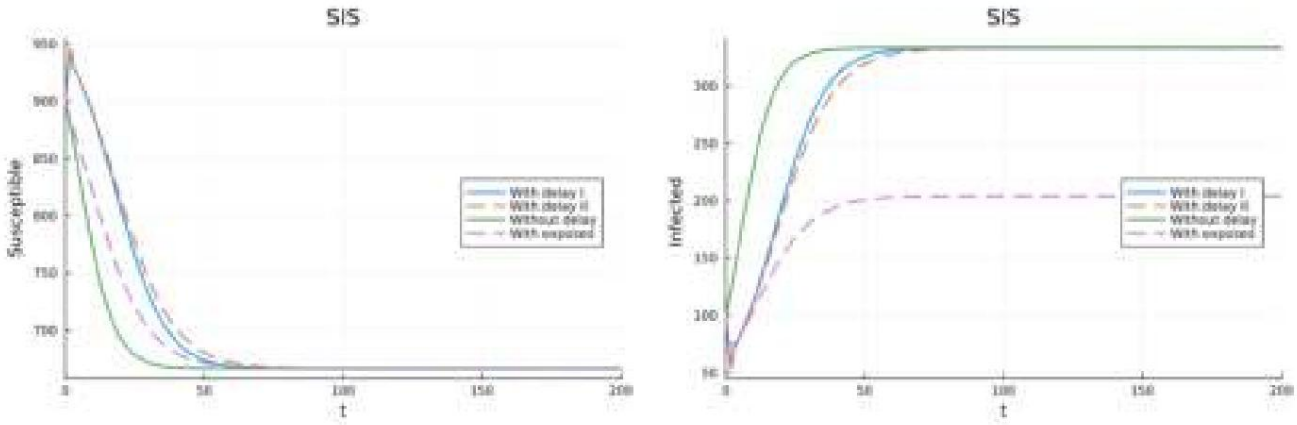


Рисунок 1. Модель SIS. (слева) Восприимчивое население. (справа) Инфицирующая популяция.

На рисунке 2 представлены графики модели SIR, слева для восприимчивой популяции. а для инфекционного - справа. Обратите внимание, что для I = 0 существует несколько решений S + R = N. Моделируемые решения зависят от начальных значений. Модель задержки, в которой я использую историю как для S , так и для I, тогда как все остальные модели используют только S(0).

Machine Translated by Google

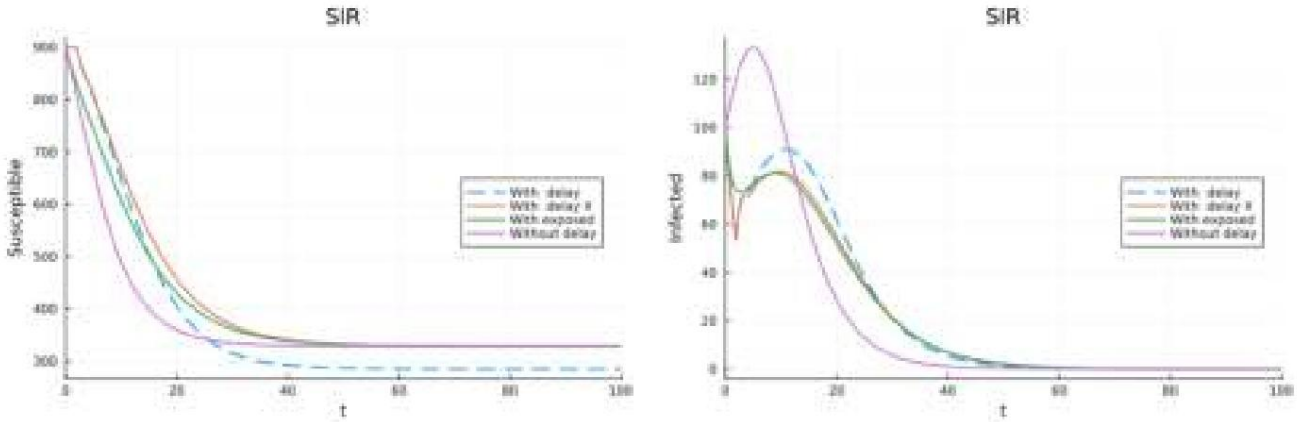


Рисунок 2. Модель SIR. (слева) Восприимчивое население. (справа) Инфицирующая популяция.

На рисунке 3 представлены графики восприимчивых (слева) и инфекционных (справа) популяций для модели SIR. Эта модель имеет полный, но временный иммунитет. Как и ожидалось, смоделированные решения стремятся к эндемическому равновесию. Модель ODE дает самый высокий пик заражения, но все модели имеют одинаковую качественную динамику.

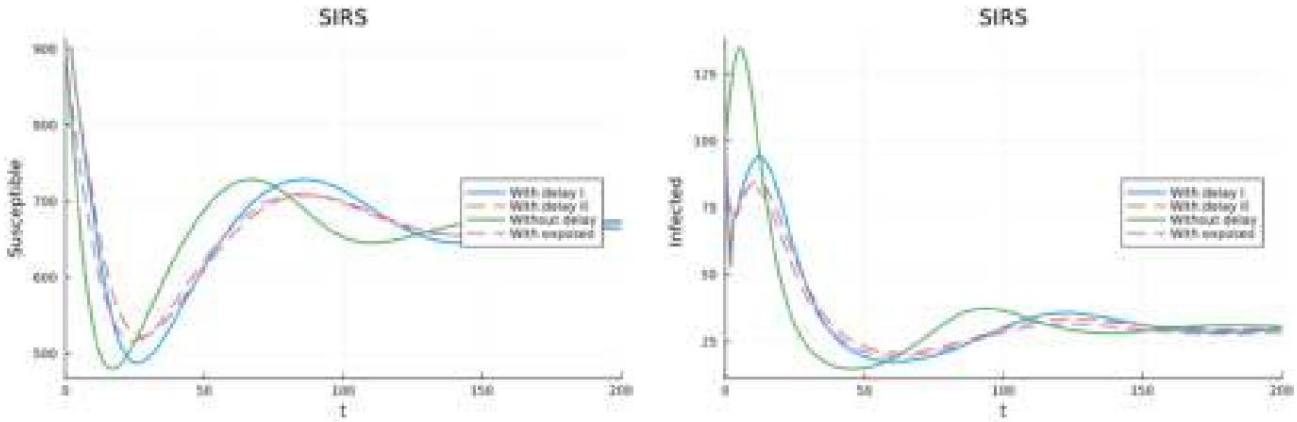


Рисунок 3. Модель SIR. (слева) Восприимчивое население. (справа) Инфицирующая популяция.

3.2. Модели с разными иммунитетами. В

этом подразделе мы рассматриваем модели с разными иммунитетами: полным, частичным, постоянным и временным в различных сочетаниях. Первая модель (12) предполагает, что все инфицированные после выздоровления приобретают частичный и постоянный иммунитет. На рисунке 4 показаны смоделированные решения для инфекционной популяции для двух различных значений уровня инфицирования для популяции с частичным иммунитетом, βp. Слева для βp = 0,25 решение стремится к I = 0, несмотря на то, что R0 > 1, а справа для βp = 0,4 решение стремится к эндемическому состоянию. Однако окончание эпидемии или нет зависит от значений Spβp + Sβ Ny , которые появляются в правой части дифференциального уравнения для инфекционной популяции. Две модели задержки вначале ведут себя по-разному, поскольку в модели с задержкой I и S , и I зависят от истории, а в модели с задержкой II от истории зависит только I.

Следующая модель (16) предполагает, что все инфицированные выздоравливают с частичным и временным иммунитетом. На рисунке 5 представлены графики для инфекционной популяции: слева для βp = 0,25, и I стремится к небольшому, но ненулевому значению, и справа для βp = 0,4, и I стремится к гораздо большему значению, демонстрируя эффект β.

Machine Translated by Google

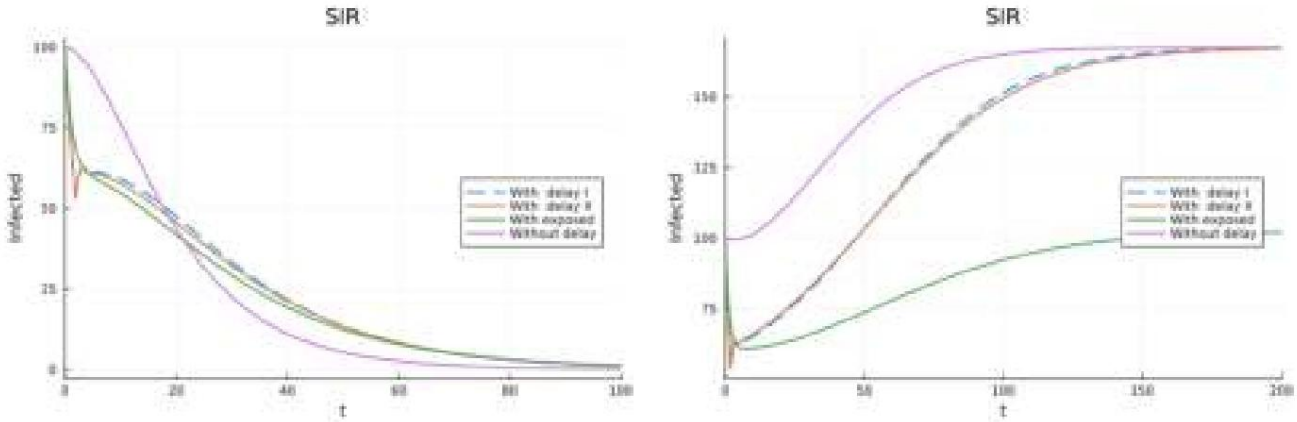


Рисунок 4. Модель с частичным постоянным иммунитетом (слева) βp = 0,25. (справа) βp = 0,4.

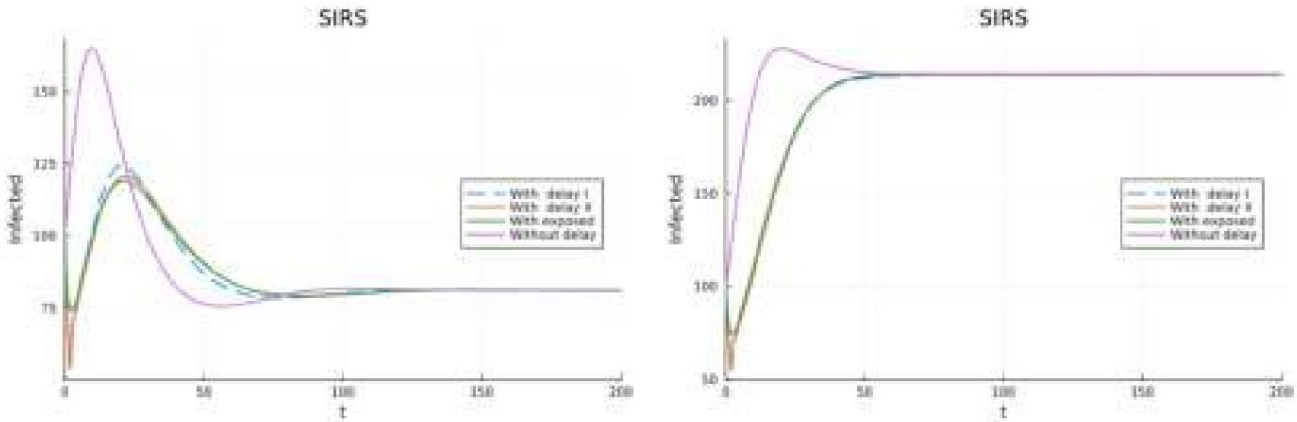


Рисунок 5. Модель с частичным временным иммунитетом (слева) βp = 0,25. (справа) βp = 0,4.

Модель (17) предназначена для инфекции с полным, но временным иммунитетом, а затем частичным и постоянным иммунитетом. На рисунке 6 представлены смоделированные графики инфекционной популяции для двух значений βp. Рисунок слева соответствует βp = 0,255 и I стремится к DFE; рисунок справа соответствует βp = 0,4, и I переходит в эндемическое равновесие. Для обеих моделей R0 > 1 , поэтому изначально количество инфицированных растет. Однако окончание эпидемии или нет зависит от значений Spβp + Sβ Nγ. Все модели имеют одинаковое равновеси

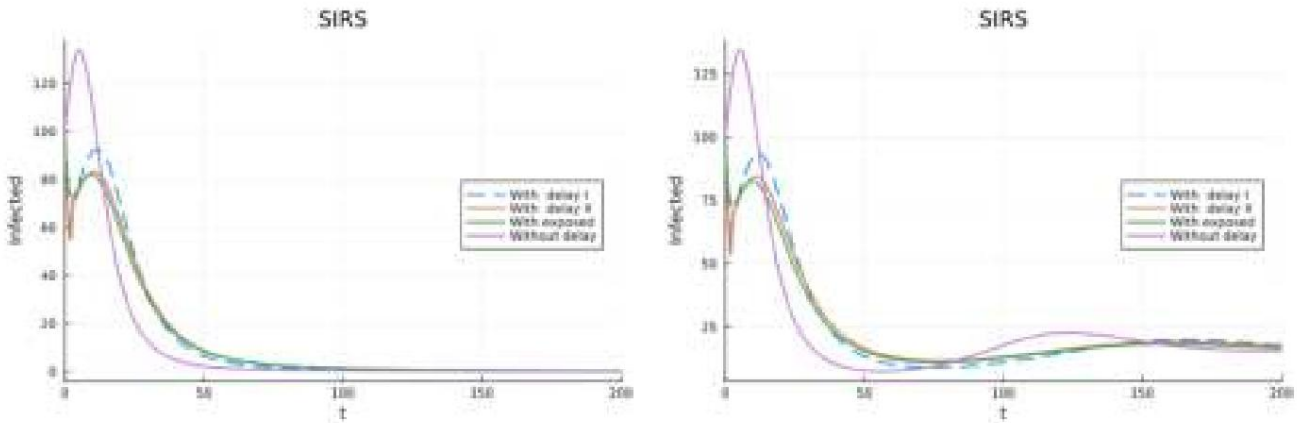


Рисунок 6. Модель с полным временным, а затем частичным постоянным иммунитетом (слева) βp = 0,25. (справа) βp = 0,4.

Следующая модель (18) предполагает, что после заражения человек приобретает полный иммунитет, который является временным, а затем частичный иммунитет, который также является временным, и, наконец, теряет все

Machine Translated by Google

иммунитет. На рисунке 7 показано временное решение инфекционной популяции. Слева для βp = β/2 и справа для βp = 0,4. В обоих случаях эпидемия сохраняется. Предельное значение для βp = 0,4 несколько больше. Поскольку все люди со временем полностью теряют иммунитет, эпидемия не заканчивается.

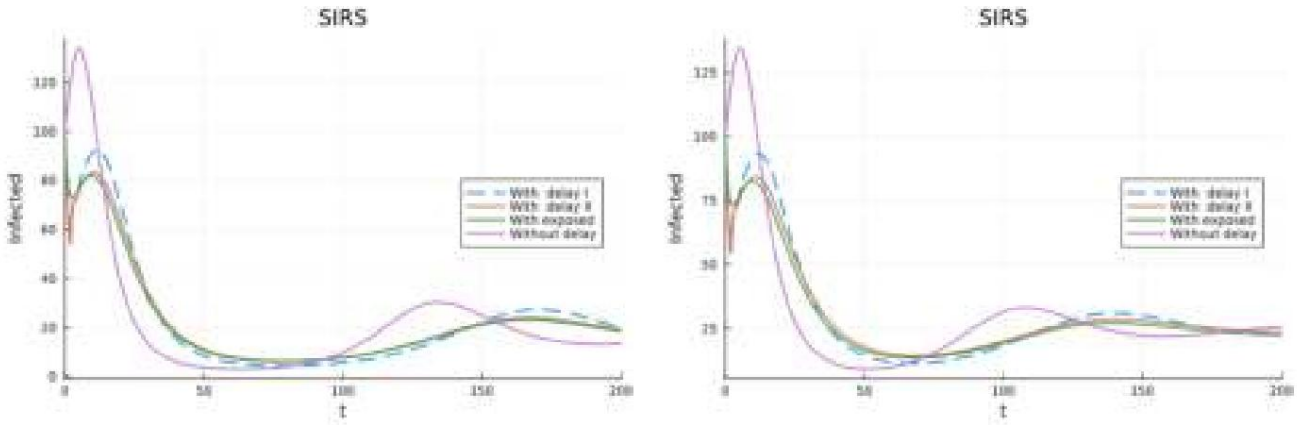


Рисунок 7. Модель с полным временным, а затем частичным временным иммунитетом (слева) βp = 0,25. (справа) βp = 0,4.

3.3. Модели с потерей иммунитета и две группы. У

разных людей разные реакции иммунной системы на инфекцию. Например, все люди могут получить полный иммунитет к инфекции после выздоровления, но могут потерять его с разной скоростью. Некоторые причины сезонного гриппа заключаются в том, что дети подвергаются воздействию меньшего количества вариантов вируса, что у пожилых людей более слабая иммунная система или что у некоторых людей могут быть другие факторы риска, такие как курение.
Для простоты мы рассматриваем только два класса индивидуумов, но модели можно расширить до произвольного числа.

Первая модель с двумя отдельными популяциями (19) предполагает, что две группы получают общий временный иммунитет после заражения (обычное предположение SIR), но теряют иммунитет с разной скоростью ν и ν1, с долями fr и (1 fr), соответственно. Моделирование показано на рисунке 8. На обоих рисунках R0 > 1, на левом — β = 0,5, а на правом — β = 0,666. Предельное значение для правого рисунка примерно вдвое больше, чем для левого, что свидетельствует о большом влиянии уровня заражения.

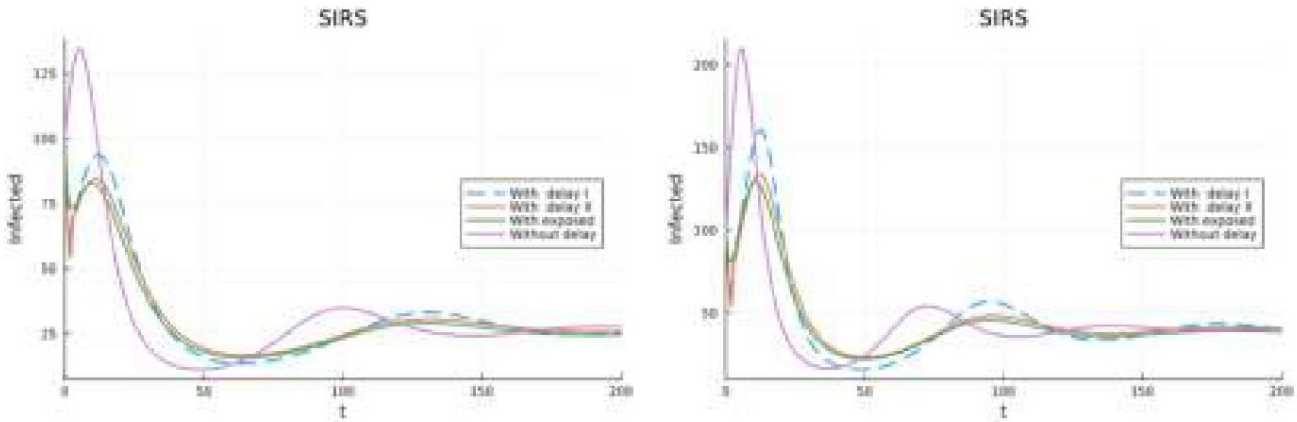


Рисунок 8. Модель с двумя популяциями с полным временным иммунитетом, покидающими отсек R с разной скоростью (слева) β = 0,5. (справа) β = 0,666

Следующая модель (23) предполагает, что один класс получает полный и постоянный иммунитет, а второй — частичный и также постоянный иммунитет. Доля особей в обоих

Machine Translated by Google

классов принимается равным fp = 0,5. Для класса с частичной помехоустойчивостьюβp = β/2. Поскольку все люди получают постоянный иммунитет, ожидается, что эпидемия не сохранится.
На рисунке 9 показаны два моделирования для разных значений β. Левый для β = 0,5 и правый для β = 1,5. Даже при достаточно большом втором значении β, соответствующем R0 = 4,5, эпидемия затухает.

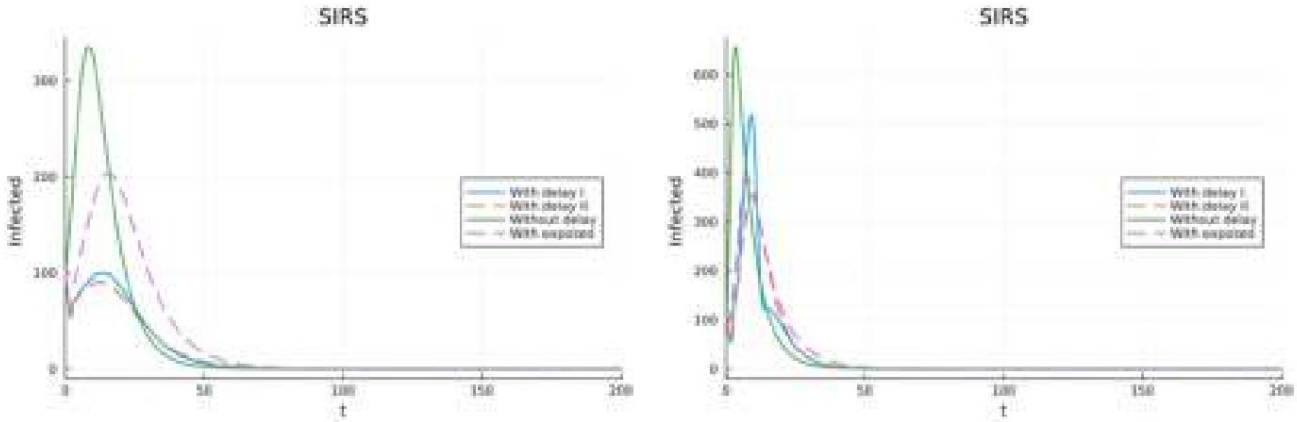


Рисунок 9. Моделирование модели с двумя классами: один с полным и постоянным иммунитетом, а другой с частичным и постоянным иммунитетом. (слева) β = 0,5. (справа) β = 4,5

Далее мы считаем, что половина инфекционных популяций имеет полный и временный иммунитет, а половина - частичный и временный иммунитет (24). Моделирование проводилось для двух значений βp, уровня инфицированности населения с частичным иммунитетом, βp = β/2 (левый график на рисунке 10) и βp = β/8 (правый график). В обоих случаях эпидемия сохраняется, а предельное значение I изменяется относительно незначительно. Причиной персистирования инфекции является тот факт, что у всех особей иммунитет сохраняется только на ограниченное время.

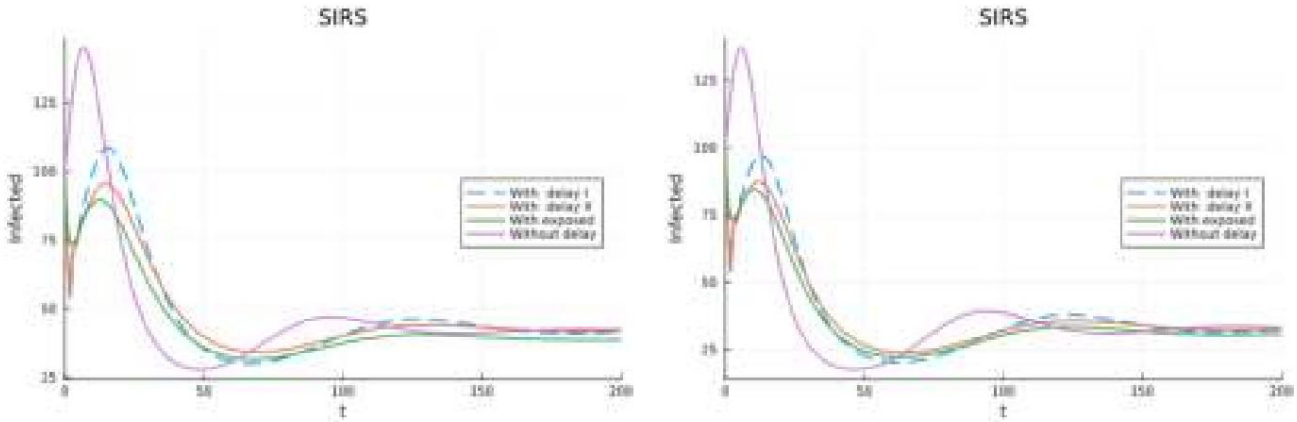


Рисунок 10. Моделирование модели с двумя классами: один с полным иммунитетом и иммунитетом, а другой с частичным иммунитетом, оба временные. (слева) βp = β/2. (справа) βp = β/8.

Модель (25) предполагает, что все инфицированные выздоравливают с полным временным иммунитетом, а затем приобретают частичный и постоянный иммунитет. Фракция fr = 0,75 имеет частичный иммунитет со степеньюзаражения β1 = 0,9β и степеньюпотери постоянного иммунитета ν = 1/30, а остальная часть имеет уровень инфицирования β2 = 0,8β и степень потери иммунитета ν1 = 1/60 (левый график рисунка). 11). Решение стремится к эндемическому равновесию. Второе моделирование было проведено с изменением уровня заражения до β1 = 0,45β и β2 = 0,4β (правая половина рисунка 11). Теперь решение склоняется к DFE. Во втором моделировании β1/γ < 1 и β2/γ < 1, поэтому, когда большинство выздоровевших людей имеют частичный постоянный иммунитет, дифференциальное уравнение для I показывает, что I уменьшается.

Machine Translated by Google

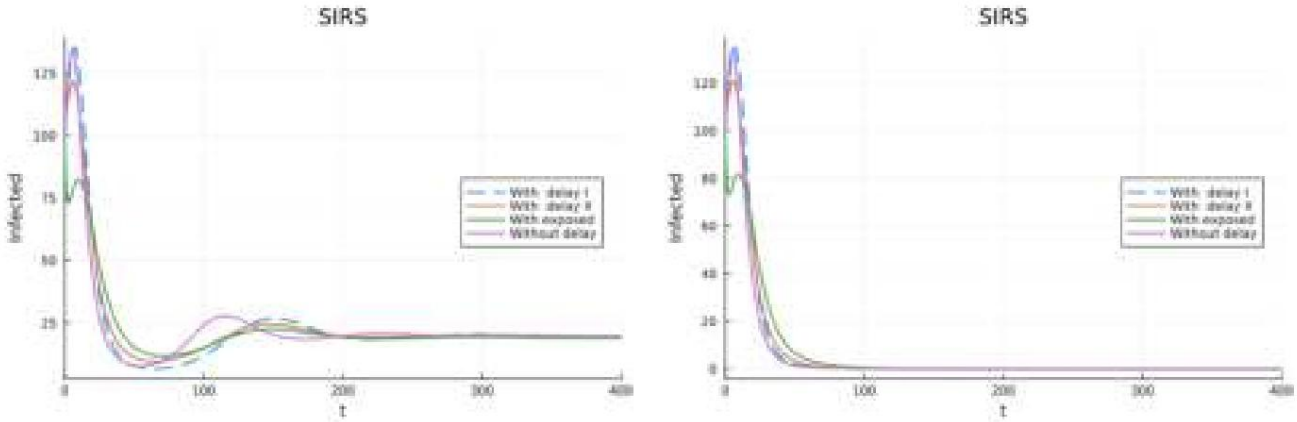


Рисунок 11. Модель с двумя классами населения. Оба получают полный иммунитет (компартмент R), а затем теряют его, получая частичный иммунитет с разной скоростью и разной степенью заражения. (слева) $\beta_1 = 0{,}9\beta$, $\beta_2 = 0{,}8\beta$. (справа) $\beta_1 = 0{,}45\beta$, $\beta_2 = 0{,}4\beta$.

3.4. Модели с вакцинацией и потерей иммунитета

Вакцины могут помочь контролировать сезонный грипп. Поскольку вирус гриппа мутирует от сезона к сезону, сложно предсказать, какова эффективность вакцины. Также трудно определить, дает ли вакцина полный или частичный иммунитет или ослабевает ли ее эффект. Вакцинированный человек может не заболеть гриппом из-за прививки или просто потому, что человек не находился в тесном контакте с инфицированным. Аналогичным образом, человек, заразившийся только один раз, может быть обусловлен приобретением полного и постоянного иммунитета или отсутствием тесных контактов с инфицированными. В этом подразделе мы представляем моделирование, проведенное для различных сценариев, все из которых включают вакцинацию.

Первый сценарий представляет людей, которые вакцинируются на уровне rS и достигают полного иммунитета. Иммунитет от заражения этой болезнью является полным и исчезает со скоростью ν (26). В левой части рисунка 12 эффект вакцины ослабевает со скоростью $\omega = 1/60$. В правой части эффект от вакцин не ослабевает, $\omega = 0$. В обоих случаях решение стремится к ДФЭ. В первом случае имеется и второй эндемик. равновесие.

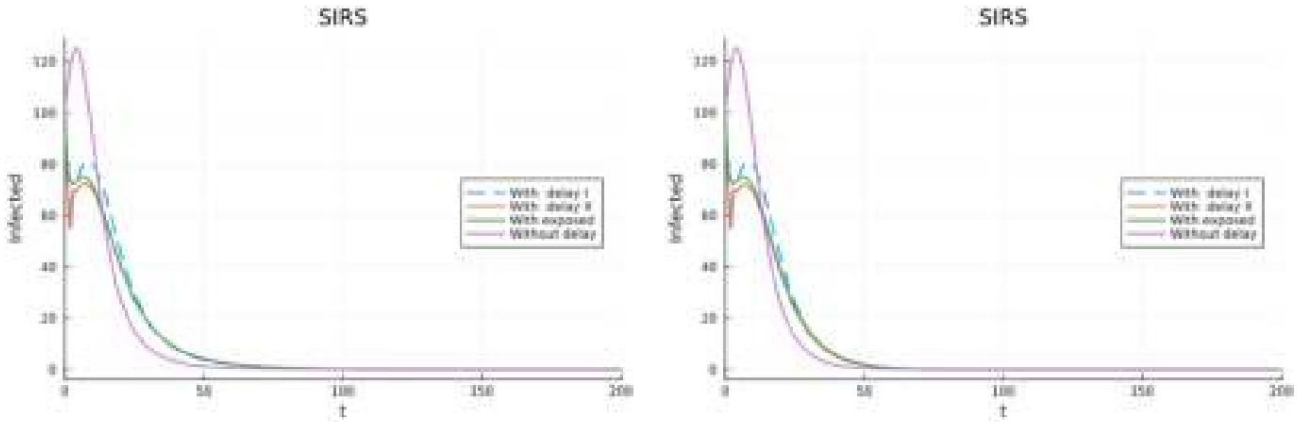


Рисунок 12. Модель с вакцинацией, дающей полный иммунитет. (слева) Иммунитет не ослабевает. (справа) Иммунитет ослабевает.

Модель в следующем сценарии аналогична модели (26), за исключением того, что когда действие вакцины ослабевает, человек все равно получает частичный постоянный иммунитет с $\beta_v = 0{,}8\beta$. На рисунке 13 слева показан случай с $\omega = 1/60$, и смоделированное решение почти доходит до ДФЭ, но затем отскакивает. Справа график соответствует $\omega = 0$ и

Machine Translated by Google

решение имеет тенденцию к DFE. На рисунке показано, какое значение имеет сокращение использования вакцины.

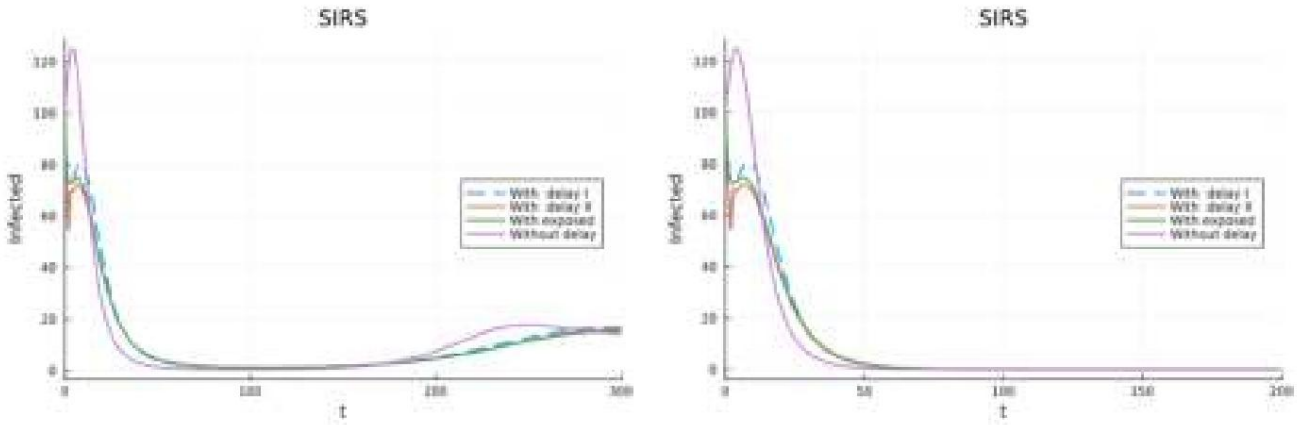


Рисунок 13. Модель с вакцинацией. Зараженные люди приобретают полный иммунитет, который переходит в частичный и постоянный иммунитет. Вакцинированные люди получают полный иммунитет, который может ослабевать или нет. (слева) Иммунитет от прививки ослабевает до частичного постоянного. (справа) Иммунитет от прививок не ослабевает.

Следующие симуляции были выполнены с использованием модели (28). Уровень вакцинации равен r(prS V). Для такого уровня вакцинации нет DFE. Зараженные выздоравливают, а затем получают частичный постоянный иммунитет. Привитые получают полный иммунитет, который в одной симуляции ослабевает до частичного постоянного, а во второй не ослабевает. Мы используем pr = 0,4, а уровень инфицированности населения с частичным иммунитетом βv = 0,8β. Левый график на Рисунке 14 предназначен для моделирования с ослаблением вакцинации, а правый – для отсутствия снижения. На обоих графиках инфекционный раствор приближается к нулю, а затем снова увеличивается.

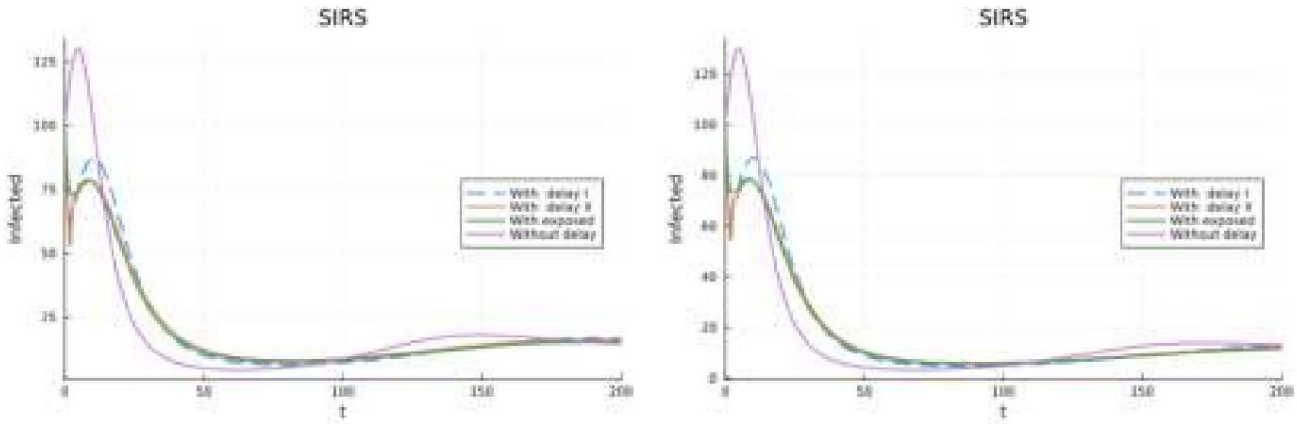


Рисунок 14. Модель с выздоровевшими, получающими частичный постоянный иммунитет, и с вакцинированными, получающими полный иммунитет, который в одном случае ослабевает, а в другом нет. (слева) Иммунитет к прививкам ослабевает. (справа) Иммунитет от прививок не ослабевает.

Следующие симуляции выполняются с использованием модели (29). Уровень вакцинации равен r(prS V) с pr = 0,6, и часть вакцинированного населения fv = 0,75 получает полный и постоянный иммунитет, а фракция 1 fr получает полный иммунитет, который ослабевает со скоростью ω до частичного и постоянного иммунитета с уровень заражения βv = 0,8β. Иммунитет от инфекции бывает полным и временным. Рассчитанное решение стремится к эндемическому равновесию. Второе моделирование было проведено без ослабления эффекта вакцины ω = 0. Решение стремится к DFE. Графики представлены на рисунке 15. Этот пример показывает важность снижения или отсутствия вакцинации.

Machine Translated by Google

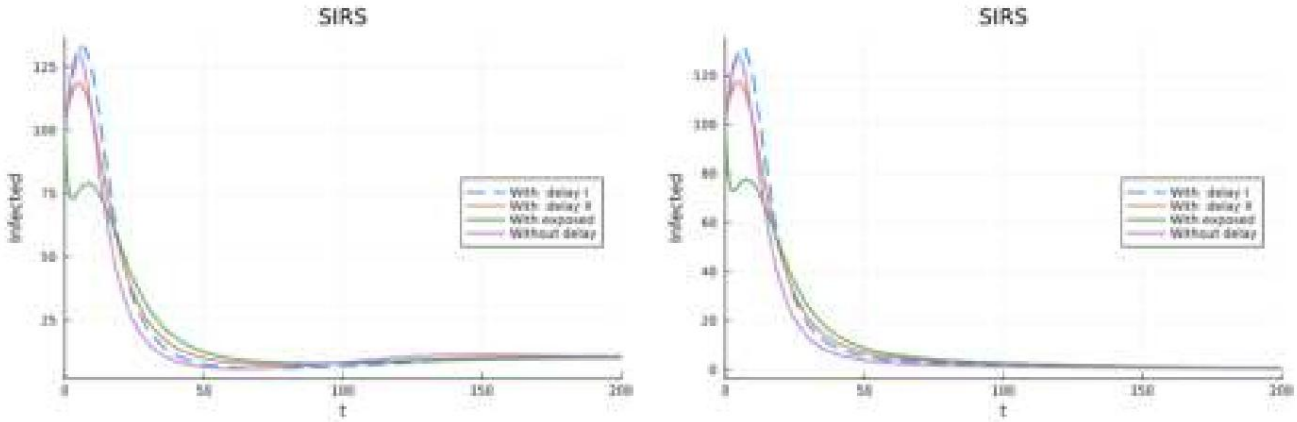


Рисунок 15. Модель с двумя классами вакцинированных лиц: один с полным и постоянным иммунитетом, а другой с полным иммунитетом, который переходит в частичный и постоянный иммунитет. (слева) Ослабление прививочного иммунитета. (справа) Постоянный прививочный иммунитет.

Последняя модель учитывает вакцинацию, использование противовирусных препаратов и изоляцию. Коэффициент вакцинации равен r(prS V), часть привитых fv = 0,75 сохраняет общий иммунитет навсегда, а остальные теряют общий иммунитет и затем приобретают постоянный частичный иммунитет со степенью заражения βv = 0,8β. Зараженные выздоравливают с полным и временным иммунитетом. Фракция fa = 0,2 получает противовирусные препараты и удаляется из инфекционного класса со скоростью γa = 2γ. Фракция fq = 0,4 удаляется из инфекционных организмов и выделяется со скоростью γq = 1. Было проведено два моделирования. Первый вариант с β = 0,5, соответствующий R0 = 1,5, показан на графике слева на рисунке 16 и имеет решение, стремящееся к DFE. Второй вариант, с β = 1, что дает R0 = 3, показан на правом графике, и решение стремится к эндемическому равновесию. На рисунке показано, что, хотя R0 предсказывает, начнется эпидемия или нет, он не указывает, исчезнет ли она в конечном итоге или нет.

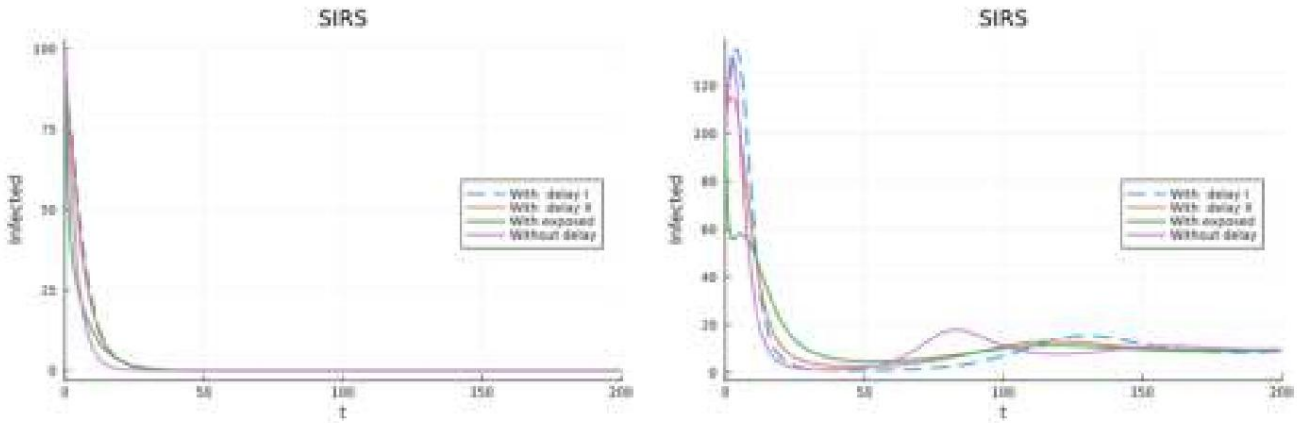


Рисунок 16. Модель с вакцинацией, противовирусными препаратами и изоляцией (30). (слева) β = 0,5. (справа) β = 1.

4. Обсуждение

Модели на основе SIR использовались для лечения многих инфекционных заболеваний, передающихся при прямом контакте. В этой статье мы использовали модели без демографических данных для кратковременных инфекций, таких как сезонный грипп. Первая причина заключается в том, что инфекция длится недолго и не очень смертельна. Поэтому число родивших ся и умерших в период заражения невелико. Вторая причина в том, что это позволяет нам сконцентрироваться на последствиях потери иммунитета. Базовое число воспроизводства R0 — очень важный показатель, дающий критерий определения того, будет ли эпидемия или нет. Обычно его рассчитывают, как мы это делали в этой статье, предполагая, что в начале заражения есть один заразный и N - 1 восприимчивый, а N - общая популяция. Для большинства наших примеров это

Machine Translated by Google

есть $R0 = \beta S(0)/(\gamma N)$ и упрощается до $R0 = \beta/\gamma$. Если также начальный момент заражения числа вакцинированных лиц $V(0) > 0$, то $R0 = \beta(N - V(0))/(\gamma N)$. И, если например без вакцинации $R0 = 1,5$, при вакцинации более 1/3 всего населения, то $R0 < 1$ и эпидемии нет. Аналогичную оценку можно провести, если изначально имеется также число особей $Sp > 0$ с частичным иммунитетом и уровнем инфицированности $\beta p < \beta$.

Представленные модели начинаются с простых SIS, SIR и SIRS, не имеющих иммунитета, полного и постоянного иммунитета, а также полного и временного иммунитета. Впервые они были расширены и теперь включают другие ситуации с сочетанием полного и частичного иммунитета, как постоянного, так и временного. В отношении таких заболеваний, как сезонный грипп, очень сложно определить, получил ли инфицированный и выздоровевший человек полный или частичный иммунитет после заражения. Или исчезнет этот иммунитет или нет. Человек может не заразиться снова из-за полного иммунитета или частичного иммунитета или просто потому, что человек не находился в тесном контакте с каким-либо инфекционным заболеванием. Различные модели позволяют запускать сценарии с разными гипотезами и сравнивать результаты. Далее были рассмотрены две группы населения с разными иммунными реакциями и проработаны разные сценарии. Наконец, была введена вакцинация, при этом разные модели имели разные предположения, а окончательная модель была более полной и включала также противовирусные препараты и изоляцию для снижения инфекции. Для различных моделей, в которых использовались DFE, было проведено моделирование того, где эпидемия закончилась, а где нет. Также был изучен эффект от задержки времени заражения. Задержка была введена двумя разными способами с использованием DDE, а также добавлением открытого отсека. Если не считать запаздывающих решений, требующих больше времени для достижения равновесных состояний, поведение очень похоже на поведение соответствующей модели ОДУ. То есть они производят решения с одинаковыми состояниями равновесия и одинаковым базовым числом воспроизводства. Однако добавление задержки делает модель более реалистичной, и ожидается, что модели с задер
данные лучше.

Параметры, связанные со временем между контактом и заражением, а также с продолжительностью заражения, хорошо известны для сезонного гриппа. Уровень заражения можно оценить по количеству заразившихся. Они варьируются от города к городу и от группы населения к группе населения. Как упоминалось выше, параметры, связанные с частичным иммунитетом и эффектом вакцинации, трудно оценить, и они не сообщаются. Численное моделирование с использованием различных моделей и сравнение с фактическими данными об эпидемии может помочь определить более реалистичные гипотезы.

Поскольку две версии каждой модели с задержкой имеют разные характеристические уравнения, их поведение при решении может отличаться друг от друга и отличаться от поведения решения модели без запаздывания. Однако для значений параметров, использованных в моделировании, этого не произошло, и качественная динамика была одинаковой. Определить, имеет ли человек полный или частичный иммунитет или не вступал в тесный контакт, задача непростая. Мы предложили разные модели с разными типами иммунитета. Сравнения с реальными данными необходимы для того, чтобы установить, какие из них более реалистичны.

Будущая работа будет учитывать различные начальные условия, введение случайности и пространственной зависимости. Использование других отсеков, таких как бессимптомные пациенты, является еще одним путем.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: В этом исследовании не было создано или проанализировано никаких новых данных. Совместное использование данных не применимо к этой статье.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Machine Translated by Google

Сокращения

В данной рукописи использованы следующие сокращения:

СИС	Восприимчивый, заразный, восприимчивый
SIR	Восприимчивый, заразный, выздоровевший
SIRS	Восприимчивый, инфекционный, выздоровевший, восприимчивый
ОДУ	Обыкновенное дифференциальное уравнение
DDE	Дифференциальное уравнение задержки
DFE	Равновесие без болезней
R_0	Базовый номер репродукции

Ссылки

1. Центры по контролю заболеваний. Грипп (Грипп). 2024 г. Доступно онлайн: https://www.cdc.gov/flu/about/keyfacts.htm#:~:text=Грипп%20%20a%20заразен%20респираторный,a%20грипп%20вакцина%20каждый%20год (по состоянию на 24 апреля 2024 г.).
2. Центры по контролю заболеваний. Грипп. 2024 г. Доступно онлайн: https://www.cdc.gov/nchs/fastats/flu.htm. (доступ 24 апрель 2024 г.).
3. Росс, Р.; Хадсон, Х.П. Применение теории вероятностей к изучению априорной патометрии - Часть III. Учеб. Р. Сок. Лонд. Сер. Содержать. Пап. Математика. Физ. Характер 1917, 93, 225–240.
4. Кермак, Вирджиния; Маккендрик, А.Г. Вклад в математическую теорию эпидемий. Учеб. Р. Сок. Лонд. Сер. Содержать. Пап. Математика. Физ. Персонаж 1927, 115, 700–721.
5. Куанг, Ю. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: с приложениями в динамике народонаселения; Академическое издательство: Кембридж, Массачусетс, США, 1993.
6. Беллен, А.; Зеннаро, М. Численные методы для дифференциальных уравнений с запаздыванием; Издательство Оксфордского университета: Оксфорд, Великобритания, 2013.
7. Ма, З. Динамическое моделирование и анализ эпидемий; World Scientific: Сингапур, 2009.
8. Рихан, Ф.А. Дифференциальные уравнения с запаздыванием и приложения к биологии; Спрингер: Сингапур, 2021.
9. Дикманн О.; Хестербек, Дж.; Робертс, М.Г. Построение матриц следующего поколения для компартментальных моделей эпидемии. JR Soc. Интерфейс 2010, 7, 873–885. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
10. Ван ден Дриссе, П. Число воспроизводства моделей инфекционных заболеваний. Заразить. Дис. Модель. 2017, 2, 288–303. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
11. Эдлунд, С.; Кауфман Дж.; Лесслер, Дж.; Дуглас, Дж.; Бромберг, М.; Кауфман З.; Бассал, Р.; Чодик, Г.; Маром, Р.; Шалев В.; и др. Сравнение трех основных моделей сезонного гриппа. Эпидемии 2011, 3, 135–142. [Перекрестная ссылка]
12. Ван ден Дриссе, П.; Уотмоу, Дж. Числа воспроизводства и подпороговое эндемическое равновесие для компартментальных моделей передача заболевания. Математика. Биология. 2002, 180, 29–48. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
13. Аллен Л. Введение в математическую биологию; Пирсон-Прентис Холл: Хобокен, Нью-Джерси, США, 2007 г.
14. Эдельштейн-Кешет, Л. Математические модели в биологии; СИАМ: Филадельфия, Пенсильвания, США, 2005 г.
15. Мюррей, Дж. Д. Математическая биология I. Введение; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 2002.
16. Фагес, Ф.; Солиман, С. О расчете и оптимизации устойчивости в BIOCHAM-4. В материалах Международной конференции по вычислительным методам в системной биологии, Брно, Чехия, 12–14 сентября 2018 г.; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 2018 г.; стр. 292–299.
17. Кук, К.Л.; Йорк, Дж. А. Некоторые уравнения, моделирующие процессы роста и эпидемии гонореи. Математика. Биология. 1973, 16, 75–101. [Перекрестная ссылка]
18. Джексон, М.; Чен-Шарпантье, Б.М. Моделирование распространения вируса растений с задержками. Дж. Компьютер. Прил. Математика. 2017, 309, 611–621. [Перекрестная ссылка]
19. Хан, QJA; Кришнан Е.В. Модель эпидемии с задержкой передачи. Прил. Математика. 2003, 48, 193–203. [Перекрестная ссылка]
20. Аль Басир, Ф.; Такеучи, Ю; Рэй, С.А. Динамика модели замедленного заболевания растений с передачей болезни Беддинг тона-ДеАнджелиса. Математика. Биология. анг л. 2021, 18, 583–599. [Перекрестная ссылка]
21. Хуанг, Г.; Ма, В.; Такеучи, Ю Г лобальный анализ модели динамики вируса задержки с функциональным ответом Беддинг тона-ДеАнджелиса. Прил. Математика. Летт. 2011, 24, 1199–1203. [Перекрестная ссылка]
22. Вэй, Х.М.; Ли, XZ; Мартчева М. Эпидемическая модель трансмиссивной болезни с прямой передачей и задержкой во времени. Дж. Математика. Анальный. Прил. 2008, 342, 895–908. [Перекрестная ссылка]
23. Чан, М.; Йоханссон, М.А. Инкубационные периоды вирусов денге. PLoS ONE 2012, 7, e50972. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
24. Джегер, М.; Мэдден, Л.; Ван Ден Бош, Ф. Эпидемиология вирусов растений: приложения и перспективы математического моделирования и анализ для улучшения понимания и борьбы с болезнями. Завод Дис. 2018, 102, 837–854. [Перекрестная ссылка]
25. Лю, Л. Модель SIR с задержкой и общей нелинейной частотой заболеваемости. Адв. Отличие. уравнение 2015, 2015, 329. [CrossRef]
26. Хеткот, Х.В. Математика инфекционных заболеваний. СИАМ Ред. 2000, 42, 599–653. [Перекрестная ссылка]
27. Ван, Н.; Фу, Ю; Чжан, Х.; Ши, Х. Оценка математических моделей вспышки COVID-19. Точность. Клин. Мед. 2020, 3, 85–93. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
28. Бьёрнстад, Онтарио; Ши, К.; Крживинский, М.; Альтман, Н. Модель SEIRS для динамики инфекционных заболеваний. Нат. Методы 2020, 17, 557–559. [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

29. Краммер Ф. Реакция человеческих антител на инфекцию вируса гриппа А и вакцинацию. Нат. Преподобный Иммунол. 2019, 19, 383–397. [Перекрестная ссылка]
30. Патель, М.М.; Йорк, Айова; Монто, А.С.; Томпсон, Миннесота; Фрай, А.М. Иммуноопосредованное ослабление заболеваемости гриппом после заражения: Возможности и вызовы. Lancet Microbe 2021, 2, e715–e725. [Перекрестная ссылка]
31. Хан, АХ; де Йонг, СП; Рассел, Калифорния Коэволюция иммунитета и вирусов сезонного гриппа. Нат. Преподобный Микробиол. 2023, 21, 805–817. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
32. Родригес-Маррото, Г.; Атьенца-Диес, И.; Арес, С.; Манрубия, С. Стратегии вакцинации структурированных групп населения в условиях частичной вакцинации. иммунитет и реинфекция. Дж. Физ. Математика. Теор. 2023, 56, 204003. [CrossRef]
33. Катриэль Г. Эпидемии с частичным иммунитетом к повторному заражению. Математика. Биология. 2010, 228, 153–159. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
34. Саха, П.; Мондаль, Б.; Гош, У. Динамическое поведение эпидемической модели с частичным иммунитетом, имеющей нелинейную заболеваемость и насыщенное лечение в детерминированной и стохастической среде. Фракталы солитонов хаоса 2023, 174, 113775. [CrossRef]
35. Тиме, HR; Ян, Дж. Эндемичная модель с переменной частотой повторного заражения и ее применение при гриппе. Математика. Биология. 2002, 180, 207–235. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
36. Карлсон, Р.М.; Чайлдс, LM; Фэн, З.; Гласснер, Дж.В.; Хеффернан, Дж. М.; Ли, Дж.; Рёст, Г. Моделирование ослабления и повышения иммунитета в результате инфекции или вакцинации. Дж. Теория. Биол. 2020, 497, 110265. [CrossRef] [ПабМед]
37. Бхаттачарья, С.; Адлер, Франция Модель времени с момента выздоровления с различной скоростью потери иммунитета. Бык. Математика. Биол. 2012, 74, 28:10–2819. [Перекрестная ссылка]
38. Вигери, А.; Карлетти, М.; Сильвестри, Г.; Венезиани, А. Математическое моделирование периодических вспышек с ослаблением иммунитета: А. Возможное долгосрочное описание COVID-19. Математика 2023, 11, 4918. [CrossRef]
39. Александр, М.Э.; Боуман, К.; Могадас, С.М.; Саммерс, Р.; Гумель, АБ; Сахай, Б.М. Модель вакцинации для предотвращения передачи инфекции динамика гриппа. СИАМ J. Appl. Дин. Сист. 2004, 3, 503–524. [Перекрестная ссылка]
40. Сан, К.; Ян, В. Глобальные результаты модели SIRS с вакцинацией и изоляцией. Нелинейный анал. Приложение реального мира. 2010, 11, 4223–4237. [Перекрестная ссылка]
41. Сахуу, врач общей практики; Дхар, Дж. Анализ эпидемической модели SVEIS с частичным временным иммунитетом и уровнем заболеваемости насыщения. Прил. Математика. Модель. 2012, 36, 908–923. [Перекрестная ссылка]
42. Могадас, С.; Гумель А. Математическое исследование модели детских болезней с непостоянным иммунитетом. Дж. Компьютер. Прил. Математика. 2003, 157, 347–363. [Перекрестная ссылка]
43. Саад-Рой, СМ; Моррис, SE; Меткалф, CJE; Мина, MJ; Бейкер, Р.Э.; Фаррар, Дж.; Холмс, Е.С.; Пибус, Оклахома; Грэм, Алабама; Левин, С.А.; и др. Эпидемиологические и эволюционные аспекты режимов дозирования вакцины против SARS-CoV-2. Наука 2021, 372, 363–370. [Перекрестная ссылка]
44. Гольдберг Ю; Мандель, М.; Бар-Он, ЮМ.; Боденхаймер, О.; Фридман, Л.; Хаас, Э.Дж.; Майло, Р.; Элрой-Прейс, С.; Эш, Н.; Юпперт, А. Ослабление иммунитета после вакцины BNT162b2 в Израиле. Н. англ. Дж. Мед. 2021, 385, e85. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
45. Туркиилмазоглу, М. Модель расширенной эпидемии с вакцинацией: Слабоиммунный СИРВИ. Физ. Стат. Мех. Это приложение. 2022, 598, 127429. [CrossRef] [ПабМед]
46. Хо, Ш; Он, Д.; Эфтими, Р. Математические модели динамики передачи и стратегии вакцинации в Гонконге во время Зимний сезон гриппа 2017–2018 гг. Дж. Теория. Биол. 2019, 476, 74–94. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
47. Релуга, ТЦ; Медлок, Дж. Механизмы сопротивления имеют значение в моделях SIR. Математика. Биология. англ. 2007, 4, 553–563. [ПабМед]
48. Шерер А.; Маклин, А. Математические модели вакцинации. Бр. Мед. Бык. 2002, 62, 187–199. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
49. Сафан, М.; Кречмар, М.; Хаделер, К.П. Контроль инфекций на основе вакцинации в моделях SIRS с реинфекцией: Специальный ссылка на коклюш. Дж. Математика. Биол. 2013, 67, 1083–1110. [Перекрестная ссылка]
50. Критика, Б.; Тамилалаган, П. Раскрытие распространения эпидемий, связанных с частичным иммунитетом и повторным заражением: выводы из математическая модель с задержкой во времени. Евро. Физ. Дж. Спец. Вершина. 2023, 232, 2657–2673. [Перекрестная ссылка]
51. Ариф, Ф.; Маджид, З.; Рахман, Ю; Икбал, Н.; Кафле, Дж. Математическое и численное моделирование вспышки COVID-19, связанной с потерей иммунитета и карантином. Вычислить. Математика. Методы Мед. 2022, 2022, 3816492. [CrossRef] [ПабМед]
52. Ракаускас, К.; Ни, К. DifferentialEquations.jl — производительная и многофункциональная экосистема для решения дифференциальных уравнений в Julia. Дж. Открытая рез. Программное обеспечение 2017, 5. Доступно онлайн: https://app.dimensions.aion2019/05/05. (по состоянию на 24 апреля 2024 г.). [Перекрестная ссылка]
53. Видманн, Д.; Ракаускас, К. DelayDiffEq: Создание решателей дифференциальных уравнений с задержкой посредством рекурсивного внедрения решателей обычных дифференциальных уравнений. arXiv 2022, arXiv:2208.12879.
54. Колизза, В.; Баррат, А.; Бартелеми, М.; Валлерон, Эй Джей; Веспиньяни, А. Моделирование мирового распространения пандемического гриппа: исходный случай и меры по сдерживанию. ПЛоС Мед. 2007, 4, e13. [Перекрестная ссылка]
55. Каньири, CW; Марк, К.; Лубуби, Л. Математический анализ динамики гриппа А в возникновении лекарственной устойчивости. Вычислить. Математика. Методы Мед. 2018, 2018, 2434560. [CrossRef]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Эффективный алгоритм определения основных элементарных матричных функций с заданной точностью и применением

Хуэйзен Цинь [1] и Юэмин Лу [2,*]

[1] Школа математики и статистики Шаньдунского технологического университета, Цзыбо 255049, Китай; qinhz@sdut.edu.cn

[2] Факультет математических и цифровых наук, Университет Блумсбурга, Блумсбург, Пенсильвания 17815, США * Адрес для переписки: ylu@bloomu.edu

Аннотация: Если матрица-функция $f(At)$ обладает свойствами $f(At) = g(f(A_1t), f(A_2t), \cdots, f(A_Nt))$ и $f(A_it) = f(A_i)f(t) = f(t)f(A_i)$, $i = 1, \cdots, N$, тогда $f(At) = f(A_1t)f(A_2t)\cdots f(A_Nt)$, где $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_N$. Рекуррентная формула $f_i = g(f_{i-1}), i = N, N-1, \cdots, 1, f(tA) = f_0$, здесь можно установить. $f_N = f(AN) = \sum_{j=0}^{m} a_j A^j$, $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|$. Это обеспечивает алгоритм вычисления матричной функции $f(At)$ с точностью ε (толстый). Задав точность расчета ε, представлен метод определения m и N таким образом, чтобы минимизировать время выполнения вышеуказанного алгоритма, обеспечивая тем самым быстрый алгоритм для $f(At)$. Важно отметить, что m зависит только от точности расчета ε и не зависит от матрицы A и t. Следовательно, $f(AN)$ имеет фиксированный формат вычислений, который легко вычисляется. С другой стороны, N зависит не только от A, но и от t. Это дает возможность выбрать t так, чтобы N было равно 0, что является важным свойством. Таким образом, алгоритм, предложенный в этой статье, позволяет пользователю установить желаемый уровень точности, а затем использовать его для выбора соответствующих значений m и N, чтобы минимизировать время вычислений. Такой подход гарантирует, что точность и эффективность решаются одновременно. Мы разрабатываем общий алгоритм, затем применяя его к экспоненциальным, тригонометрическим и логарифмическим матричным функциям и сравниваем производительность с производительностью внутренних системных функций Mathematica и аппроксимации Паде. В последнем разделе приведен пример, иллюстрирующий быстрое вычисление численных решений линейных дифференциальных

Ключевые слова: матричная функция; эффективные алгоритмы; высокая точность; линейные дифференциальные уравнения

MSC: 68W25; 68U99

check for updates

Цитирование: Цинь, Х.; Лу, Ю. Эффективный алгоритм определения основных элементарных матричных функций заданной точности и применения. Прикладная математика 2024, 4, 690–708. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020037

Поступила: 26 января 2024 г.
Пересмотрено: 4 марта 2024 г.
Принято: 19 апреля 2024 г.
Опубликовано: 5 июня 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условия и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Матричные показательные функции играют решающую роль в различных областях, включая обыкновенные дифференциальные уравнения и теорию управления. В частности, они способствуют анализу общих структурных динамических систем, представленных задачей начального значения:

$$Mx'' + Gx' + Kx = r(t), x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \quad (1)$$

где M, G и K представляют собой квадратные матрицы размера n на n, а $r(t)$ обозначает приложенную внешнюю силу. Введение двойственных переменных гамильтоновой системы,

$$p = Mx' + Gx/2, \quad (2)$$

получается следующая система:

$$U' = HU + F(t), U(0) = U_0, \quad (3)$$

где

Machine Translated by Google

$$У = \frac{}{qp}, Ч = \frac{M\ 1G/2}{GM\ 1G/4\ K\ M\ 1G/2}, \frac{M-1}{}$$
$$F(\tau) = \frac{0}{r(t), q = x, U0 = \frac{x\ 0}{Mx\ 1 + Г\ x\ 0/2}}. \quad (4)$$

Решение (3) обеспечивается следующим образом:

$$U(t) = e\ HtU0 + \int_0^{\tau} e\ H(t\ \ s)F(s)ds. \quad (5)$$

Когда проблемая вля ется колебательной, формальное решение часто включает в себя как синус, так и косинус матрицы. Известные примеры включают уравнение Шредингера в квантовой механике:

$$я\frac{d\psi}{дт} = H(t)\psi, \psi(t0) = \psi0, \quad (6)$$

где H(t) — эрмитов оператор, а ψ — комплексная волновая функция. Если H(t) = A — действительная и постоянная матрица, решение (6) будет следующим:

$$\psi(t) = e\ \ iAt\psi0 = (\cos(tA)\ \ i\sin(tA))\psi0. \quad (7)$$

Есть и другие примеры, когда вычисление синуса и косинуса матрицы может представлять интерес. Волновые уравнения, обеспечиваемые общей системой второго порядка, записываются следующим образом:

$$x'' + Kx = F(t), x(0) = x0, x'(0) = x\ 1, \quad (8)$$

где решение дается вариацией постоянного метода:

$$x(t) = \cos(tA)x0 + \sin1(tA)x1 + \int_{\tau\ 0}\sin1((t\ \ s)A)F(s)ds, \quad (9)$$

где $A = \overline{K}$, $\sin1(tA) = \int_{\tau\ 0}\cos(sA)ds$. Если A обратим, то (9) можно записать в виде следует:

$$x(t) = \cos(tA)x0 + \sin(tA)A\ \ 1x1 + A\ \ ^{1\ \tau\ 0}\ грех((\tau - s)A)F(s)ds. \quad (10)$$

Для (5) максимально точное обеспечение $U(k\tau)(k = 1, 2, \cdots)$ я вля ется задачей инженеров и математиков, где τ называется шагом. Конкретный метод решения этой проблемы заключается в следующем:

$$Uk = TUk\ \ 1 + \int_0^{\tau} e\ HsF(k\tau\ \ s)ds, k = 1, 2, \cdots, T = e^{\ H\tau}. \quad (11)$$

Аналогично для (10) обеспечение максимально точного алгоритма $x(k\tau)(k = 1, 2, \cdots)$ предполагает введение векторов x и y и следующий алгоритм:

$$\begin{aligned} xk &= \cos(\tau A)xk\ \ 1 + \sin(\tau A)A\ \ 1yk\ \ 1 + A\ \ ^{1\ \tau\ 0}\sin(sA)F(k\tau\ \ s)ds, \\ yk &= \ \ A\sin(\tau A)xk, 1 + \cos(\tau A)yk\ \ 1 + \int_0^{\tau}\cos(sA)F(k\tau\ \ s)ds, \\ x0 &= x(0), y0 = x'(0) = x\ 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Для повышения точности $U(k\tau)$ и $x(k\tau)$ необходимо разработать алгоритм, $\cos(\tau A)$ и с высокой точностью для вычисления $T = e^{H\tau}$ $\sin(\tau A)$ и интегральный консохранения этих матричных функций. В данной статье совершенствуются алгоритмы, разработанные для вычисления e^{A} и $\cos A$ в существующей литературе (см. [1–15]), а также обсуждается вычисление других тригонометрических, гиперболических, логарифмических и связанных с ними обратных треугольных и обратных гиперболических матриц.

Machine Translated by Google

2. Общая теорема быстрого алгоритма для матричных функций.

В [16] мы решили задачу быстрого вычисления элементарных функций с заданной точностью. Метод реализации включает в себя аналитическую функцию f(x), задающую свойство:

$$e(x) = f\left(\frac{x}{k}\right), \text{ где } k > 1. \tag{13}$$

Если C0 является приближением, максимально близким к $f\left(\frac{x}{kN}\right)$, где N является положительным целым числом, примеру f,

$$C0 = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(0)(x)^j}{j!}, \quad x = \frac{x}{kH}, m = 1, 2, \cdots \tag{14}$$

или C0 — аппроксимация Паде функции f: $\frac{x}{kH}$, тогда выполняются следующие расчеты:

$$\text{for}(i = 0, i < N, i++)\ Ci+1 = g(Ci). \tag{15}$$

Дополняя (14) и (15), получаем f(x) CN. Этот метод также применим для расчета матричных функций, где переменная x заменяется квадратной матрицей A размером n на n. Теперь мы имеем следующее:

$$C0 = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(0)(A)^j}{j!}, \quad A = \frac{1}{kH}A, m = 1, 2, \cdots kH \tag{16}$$

или C0 — аппроксимация Паде функции f(A). Наша цель — определить m и N, чтобы минимизировать время вычислений при условии, что ошибка усечения и точность вычислений составляют 10 p. При расчете матричной функции вычисление коэффициентов (14) можно игнорировать, сосредоточившись в основном на вычислении умножения матрицы в (16) и (15). Если количество умножений, необходимых для завершения g(A), равно K, то общее количество раз, которое нужно выполнить (16) и (15), примерно равно

$$q(m, N) = (m + KN)Mn, \tag{17}$$

где Mn — количество раз, которое необходимо выполнить одно умножение матрицы n на n. На основании вышеизложенного мы представляем следующий быстрый алгоритм для матричной функции.

Теорема 1. Пусть mp — целое число, близкое к точке минимума h(m), где

$$h(m) = m + + (m+1)\ln k \frac{pK \ln 10}{(m+1)\ln k} \ln f^{(m+1)}(0) \frac{K}{(m+1)!} \tag{18}$$

и

$$H = \frac{p \ln 10\, 1 + (m+1)\ln k}{(m+1)\ln k} \ln f^{(m+1)}(0) \frac{\ln A}{(m+1)!} + \ln k + 1. \tag{19}$$

= g(Ci) и (A) CN. $\frac{1}{C0^{(i)}(0)(A)\,kN(2)}$ для (i = 0, i < N, i++) Ci+1, где A = A или C0 — аппроксимация Паде функции f(A).

Приведенный выше алгоритм представляет собой быстрый алгоритм для общей матричной функции.

Доказательство. С ошибкой усечения 10 p, чтобы (16) выполнялось,

$$\frac{f^{(m+1)}(0)(A)^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!k^{(m+1)N}} m+1 \quad \frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!k^{(m+1)N}} A^{m+1} < 10^{p}, \tag{20}$$

где A — норма A. Итак,

$$N > + (m+1)\ln k \frac{p \ln 10}{(m+1)\ln k} \frac{1}{(m+1)!} \ln f^{(m+1)}(0) \ln \frac{A}{\ln k}. \tag{21}$$

Machine Translated by Google

Из (17) получаем следующее:

$$q(m, N) > g(m) = m + + (m+1)\ln k \frac{pK \ln 10}{(m+1)\ln k} \quad \frac{K}{\ln f \frac{(m+1)(0)}{(m+1)!}} + \frac{K \ln A}{\ln k} \text{ Мн.} \tag{22}$$

Обратите внимание, что точка минимума g(m) не имеет ничего общего с $\frac{K \ln A}{\ln k}$. Сделав q(m, N) как можно меньшим, алгоритм, полученный с помощью (1) и (2), станет быстрым алгоритмом, что завершит доказательство теоремы.

Замечание 1. В конкретном расчете A можно заменить приближенным собственным значением с максимальным в данной работе модулем.

$$\frac{f(m+1)(0)}{(m+1)!k(m+1)N} \quad A^{m+1} < 10 \quad p. \tag{23}$$

3. Быстрый алгоритм для e A, cos A, sin A, sinh A и cosh A.

Предположим, что $\lambda = A$ — норма для A. Если положить $A = \lambda A0$, то $A0$ 1. Из (19) можно получить следующее:

$$\text{Нп} = \frac{p \ln 10 +}{(m+1)\ln k} \frac{1}{(m+1)\ln k} \ln f \frac{(m+1)(0)}{(м+1)!} \quad \lambda + \frac{\ln}{\text{К лнк}} + 1. \tag{24}$$

В целях сокращения объема статьи алгоритмы для нескольких матричных функций сведены в таблицу.

Теорема 2. Для e A, cos A, sin A, ch A и sinh A мы разработали следующий быстрый алгоритм, используя теорему 1.

Замечание 2. Стоит отметить, что mp в таблице 1 зависит только от точности расчета р и матричной функции и не зависит от матрицы A.

Таблица 1. Быстрый алгоритм для e A, cos A, sin A, cosh A и sinh A.

	мп, Нп	Алгоритм	
e^A	$\text{МП} = \frac{9p \text{ вп } 10}{8 \ln 2}$, Np = [Ne] + 1	(1) Б = $\frac{C}{\text{Знак равно}} \frac{\text{mp B j A}}{\text{Np , j=1 j! (2) f or(i = 0, i < N, i + +)}}$ $C = C (3) e = C^A$	2
грех A Синь A	$\text{МП} = \frac{p \ln 10}{2 \ln 3}$, Np = [Nsin] + 1	$\frac{\text{mp (1) B = C =}}{i + +) C = 3C \quad 4C \sin A (3) \sinh A} \quad 3 \text{ Np , j=1 } \frac{A}{3 H} \frac{(2j+1)! (2) f or(i = 0, i < N,}{3 H} \quad \frac{(\quad B) j 2 A}{}$ $= C$	3
(Я) с оз A с ош A	$\text{МП} = \frac{\text{п пер } 10}{2 \text{ пер } 3} + 1$, Нп = [Нс ин]	(1) B = C = I + $\frac{A^2}{3 2 \text{Np}}$ $\frac{\text{mp}}{\text{j=1 (2j)! (2) f или}} \frac{(\quad B) j}{(i = 0, i < N, i + +) C = 4C \cos A \text{ ch } A}$ (3) $= C$	3 3C
(я я) с оз A с ош A	$\text{МП} = \frac{\text{п пер } 10}{2 \text{ пер } 3} + 1$, Нп = [Нс ин]	(1) Б = $\frac{A^2}{(2j)!} \frac{\text{C = I +}}{\text{3 2Np , j=1 (2) f or(i = 0, i < N, i + +) C = C (3)}} \frac{\text{mp}}{\text{потому что A}} \frac{(\quad B) j}{\text{шш A}}$ $= C$	2 я

$$\text{Ne} = + (mp+1)\ln 2 \frac{p \ln 10 \ln \lambda}{\ln 2} \quad \frac{\ln(mp+1)!}{(mp+1)\ln 2}, \text{ Ncos} = \frac{p \ln 10 \ln \lambda + (2mp+1)\ln 2}{\ln 2 \ln(2mp+2)! (2mp+2)\ln} \quad \frac{\ln(2mp+1)!}{(2mp+1)\ln 2},$$

$$\text{Нс ин} = + (2mp+2)\ln 3 \frac{\text{п дн } 10}{\ln 3} \quad \frac{\ln \lambda}{\ln 3} \quad \frac{}{3.}$$

Machine Translated by Google

Теперь мы используем общий быстрый алгоритм, чтобы конкретно продемонстрировать правильность алгоритмов из таблицы 1. Алгоритмы в таблице 1 просты; они включают в себя размещение конкретных функций f и g в общем алгоритме, а сложная часть заключается в выводе формул mp и Np. Формулы для mp и Np для функции e для 12 p 36 мы вычислим здесь. Фактически, график функции h(m) подтверждает наши результаты для всех значений p. Вывод mp и Np для других функций очень

A

похожий.

(1) Для функции e A имеем g(u) = u ^{2}, k = 2, K = 1 и

$$10\ h(m) = m + \frac{p \ln}{(m+1)\ln 2} \quad \frac{1}{(m+1)\ln 2} \ln(m+1)!. \tag{25}$$

Используя аппроксимационную формулу Стерлинга, получаем следующее:

$$= \ln(2\pi) + \ln(m+1) + \frac{1}{2}(m+1)\ln(m+1) \quad m \quad 1 + O(\ ). \frac{1}{2\ 2\ m+1}$$

Теперь, реализуя это в (25), получим следующее:

$$h(m) \quad m + \frac{p \ln 10}{(m+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(2\pi)}{2(m+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(m+1) + \frac{1}{2(m+}}{1)\ln 2\ \ln 2.}$$

Позволять

$$q(x) = x + (x \frac{p \ln 10}{+ 1)\ln 2} \quad \frac{\ln(2\pi)}{2(x+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(x+1)\ 1 + \ln 2.\ 2(x+}{\text{Взя в его}\quad 1)\ln 2}$$

производную по x, получим

$$д'(x) = 1 \quad + (x+1)\ 2\ \ln 2 \frac{\pi \ln 10}{} \quad \frac{\ln(2\pi) + 2(x+1)}{2\ln 2} \quad \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)\ 2\ \ln 2} \quad \frac{1}{2(x\ +1)\ 2\ \text{пер}\ 2.}$$

Чтобы определить крайние значения , мы устанавливаем его равным 0 и умножаем обе части на $(m+1)^2$:

$$(x\ +1)^2 \quad \frac{1}{\text{пер.}\ 2} + 1) + 2\ \ln \frac{\ln(x+1)\ (x}{2} \quad \frac{2p \ln 10 \quad \ln(2\pi) + 1\ 2\ \ln 2}{} = 0.$$

Используя простую алгебру, получаем следующее:

$$(x\ +1)^2 > \frac{(m+1) \quad \ln(m+1) + (m+1) \quad \ln(2\pi)\ 2p \ln 10 + 1 + 2 \ln 2\ 2\ 2 \ln 2}{} > \frac{2\pi\ \text{вп}\ 10 + 1}{2\ \text{вп}\ 2}.$$

Используя p = 12, мы получаем нижнюю оценку x:

$$x > \frac{2p \ln 10 + 1}{} 1 = 6{,}37.\ 2\ \text{в}\ 2$$

Таким образом, у нас есть нижняя оценка для m: m 6. Мы также можем решить квадратное уравнение, чтобы получить

$$\text{м} + 1 = + \text{пер}\ 2 \frac{1}{} \quad \frac{1}{4\ \ln 2\ 2} + \frac{8p \ln 10 \quad 4 \ln(2\pi) + 4\ 8 \ln 2}{}.$$

Теперь, используя наименьшее полученное значение m и p = 36, мы можем получить нашу первую верхнюю оценку:

$$\text{м} < \quad 1 + + \ln 2 \frac{1}{} \quad \frac{1}{4\ \text{лн}2\ 2} \quad \frac{\text{пер.}\ 7}{2\ \text{в}\ 2} + \frac{276 \ln 10 \quad 4 \ln(2\pi) + 4\ 8 \ln}{2} \quad 11.31.$$

Machine Translated by Google

Мы можем снова использовать значения m и p = 12 для обновления нижней границы m следующим образом:

$$м > 1 + \frac{1}{\text{пер. } 2} + \sqrt{\frac{1}{4\ln 2\ 2} + \frac{\text{пер. } 12}{2\ в\ 2} + \frac{96\ln 10 \quad 4\ln(2\pi) + 4}{8\ \text{пер } 2}} \quad 6{,}61.$$

Теперь наша новая нижняя граница для m равна 7. Учитывая этот небольшой диапазон значений m, проверив формулы для значений m, мы видим, что значение m очень близко к и $\frac{\text{плн } 10}{2}$, мы можем смело утверждать, что m= $\sqrt{\frac{9р\ вп\ 10}{8\ \text{пер } 2}}$. Наши следующие численные расчеты подтверждают это утверждение полностью.

Случай (а): p = 12. Используя формулу, полученную по квадратичной формуле и верхней оценивая m = 11, мы получаем новую нижнюю оценку: m 6,63. Используя формулу, полученную квадратичную формулу и нижнюю оценку m = 7, мы также можем получить верхнюю оценку: m 6,63. Воспользовавшись нашим утверждением $\sqrt{8\ \text{пер } 20}$, получаем m = 6,70. Это я вно соответствует нижнему и верхнему связаны довольно хорошо.

Случай (б): p = 18. Используя формулу, полученную по квадратичной формуле и верхней оценивая m = 11, мы получаем новую нижнюю оценку: m 8,05. Используя формулу, полученную квадратичную формулу и нижнюю оценку m = 7, мы также можем получить верхнюю оценку: m 8,07. Воспользовавшись нашим утверждением $\sqrt{8\ \text{пер } 20}$, получаем m = 8,20. Эти значения очень хорошо подходят для принятия ближайшее целое число.

Случай (в): p = 24. Используя формулу, полученную по квадратичной формуле и верхней оценивая m = 11, мы получаем новую нижнюю оценку: m 9,27. Используя формулу, полученную квадратичную формулу и нижнюю оценку m = 7, мы также можем получить верхнюю оценку: m 9,28. Воспользовавшись нашим утверждением $\sqrt{8\ \text{пер } 20}$, получаем m = 9,47.

Случай (г): p = 36. Используя формулу, полученную по квадратичной формуле и верхней оценки m = 11, мы получаем новую нижнюю оценку: m 11,29. Используя полученную формулу по квадратичной формуле и нижней оценке m = 7 можно получить и верхнюю оценку: м 11,37. Воспользовавшись нашим утверждением $\sqrt{8\ \text{пер } 20}$, получаем m = 11,60.

Использование мп= $\sqrt{\frac{9р\ вп\ 10}{8\ \text{пер } 2}}$, мы можем получить

$$Нп = \frac{\text{плн } 10}{(мп+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(mp+1)!}{(mp+1)\ln 2\ln 2} + \frac{\ln \lambda}{} + 1. \tag{26}$$

(2) Для $\overset{\text{грех A}}{\text{Синь A}}$, имеем g(u) = 3u 4u ^{3}, к = 3, К = 2 и

$$ч(м) = м + \frac{2р\ вп\ 10}{(2м+2)в\ 3} \quad \frac{2л\ (2м+2)!}{(2m+2)\ln k}. \tag{27}$$

В этом случае для p = 12, 16, 24 и 32 соответствующие целые точки для h(m) для достижения его минимальное значение — 3, 3, 5 и 6. Опять же, можно оценить, что

$$МП = \sqrt{\frac{3р\ вп\ 10}{5\ln 3}}, Np = \frac{\text{плн } 10}{(2mp+2)\ln 3} \quad \frac{\ln(2mp+2)!}{(2mp+2)\ln 3\ln 3} + \frac{\ln \lambda}{} + 1. \tag{28}$$

(3) Для $\overset{\text{потому что A}}{\text{шш A}}$, есть два случая:

Случай (I): g(u) = 4u ^{3} 3u, k = 3, K = 2 и выполнено (29). По сравнению с I, значения в вторая часть C = I + $\sum_{j=1}^{\text{депутат}} \frac{(\ B)\ j}{(2дж)!}$ очень малы, поэтому мы можем заменить N на N 1, и мп с мп + 1.

Случай (II): g(u) = u ^{2} 1, k = 2, K = 1 и

$$ч(м) = м + \frac{\text{плн } 10}{(2м+1)в\ 2} \quad \frac{1}{(2м+1)в\ 2} \ln(2m + 1)!. \tag{29}$$

Machine Translated by Google

Аналогично, для p = 12, 16, 24 и 32 соответствующие целые точки для h(m) для достижения своего минимальное значение — 4, 5, 6 и 7. Следовательно, мы можем определить следующее:

$$\text{МП} = \frac{\overline{3p\,вп\,10}}{5\ln 2}, Np = \frac{п\,лн\,10}{(2mp+1)\ln 2} \quad \frac{\ln(2mp+1)!}{(2mp+1)\ln 2\ln 2} + \frac{\ln\lambda}{} + 1. \tag{30}$$

Эффективность алгоритмов отображена в таблице 1 путем реализации численного вычисления в системе Mathematica. Np и mp заменены на Np,μ = μNp, mp,μ в таблице 1, определяется соответственно

$$\begin{aligned} mp,\mu &= \text{мин}_{B\,j/j!\ <10\ p} \; j, Б = \frac{A}{2\,Hn,мк} \text{ для е A,} \\ mp,\mu &= \text{мин}_{B\,j+1/2/(2j+1))!)\ <10\ p} \; j, Б = \frac{A^2}{3^{2Np,\mu}} \text{ заг рех A,} \\ (I)\ mp,\mu &= \min_{B\,j/(2j)!\ <10\ p} \; j, Б = \frac{A^2}{3^{2Np,\mu}} \text{ для cos A,} \\ (II)\ mp,\mu &= \min_{B\,j/(2j)!\ <10\ p} \; j, Б = \frac{A^2}{2^{2Np,\mu}} \text{ для cos A,} \end{aligned} \tag{31}$$

где $Np,1 = Np$ и $mp = mp,1$.

Для сравнения пусть A примет следующий вид:

$$A = УДУ\text{-}1 \quad , \tag{32}$$

где U — случайно сгенерированная матрица размера n на n, Da = Dial(d1, d2, · · · , dn) — случайно сгенерированная диагональная матрица n×n с di (a, b), i = 1, , n, поэтому f(A) = U f(D)U 1, 2, · · · f(D) = Dial(f(d1), f(d2), · · · , f(dn)) . Во всех примерах в этой статье мы согласны с тем, что относительная ошибка выглядит следующим образом

$$\text{err}(g)(A) = U\,\frac{f(A)\quad U\,f(D)U\quad 1}{f(D)U\quad 1}. \tag{33}$$

Пусть Ai(i = 1, 2, · · · , M) – M матриц, порожденных (32). Из рисунка 1 видно, что точность расчета практически одинакова для μ = 1, но μ = 1 обеспечивает $\frac{2}{3}, \frac{4}{3},$ высочайшая эффективность. Формула двойного угла заметно более эффективна и точна, чем формулу тройного угла для cos A. В дальнейшем мы будем исключать случай, когда используется формула тройного угла для cos A.

Теперь сравним алгоритмы, представленные в таблице 1, с внутренними функциями и часто используемые алгоритмы, найденные в математическом программном обеспечении. Для удобства использования пусть err(g) обозначает ошибку вычисления матричной функции f(Ai)(i = 1, 2, · · · , M), где пробел g предполагает использование алгоритмов, представленных в таблицах 1–3 настоящей статьи. Если g = Sym, Паде, · · · это означает расчет по внутренней функции, аппроксимации Паде, · · · тивно. , респект- При p = 16 mp = 7, 4, 3 для e A, cos A(cosh A), sin A(sinh A) соответственно. Мы обозначим аппроксимацию Паде sin x как r66(x) и аппроксимацию Паде e x и потому что x как r88(x). В таблице 1 аппроксимация Паде e A, cos A(cosh A), sin A(sinh A) имеет вид следует:

$$\begin{aligned} г\,88(x) &= \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{60}+\frac{x^3}{60}+\frac{x^4}{}+\frac{x^5}{624\,9360}\frac{x^6}{205920}\frac{x^7}{7207200}\quad\frac{x^8}{518918400}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{60}\quad\frac{x^3}{60}+\frac{x^4}{624\,9360}\frac{x^5}{205920}+\frac{x^6}{518918400}\frac{x^7}{7207200}\quad\frac{x^8}{}} \text{ для } e^x, \\ 1\quad r88(x) &= \frac{\frac{260735x^2}{545628}+\frac{4375409x^4}{}+\frac{7696415x^6}{}\quad\frac{80737373x^8}{}}{1\pm\frac{12079x^2}{545628}\frac{34709x^4}{141863280}\pm\frac{109247x^6}{65540835360}\frac{11321x^8}{1814976979200}} \text{ для } \overset{\text{потому что x}}{\text{Кош x}}, \\ г\,66(x) &= \frac{x\quad\frac{7x}{60\,2}+\frac{x^5}{600}}{1\pm\frac{x}{20}\frac{x^4}{600}\pm\frac{x^6}{14400}} \text{ для } \underset{\text{Синх x}}{\text{г рех x}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Для алгоритмов, представленных в таблице 1, ошибка(g)(A) случайной матрицы от порядка 1 до 800 равна следует.

Machine Translated by Google

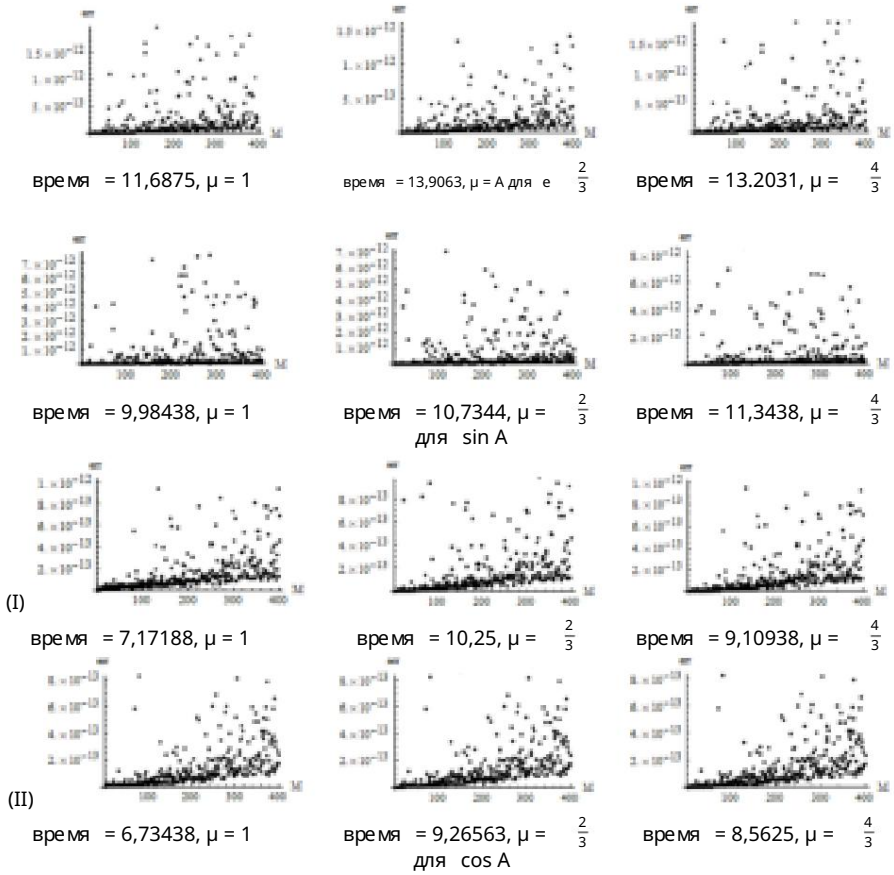


Рис. 1. Сравнение погрешностей алгоритмов табл. 1 для μ = 1, $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$.

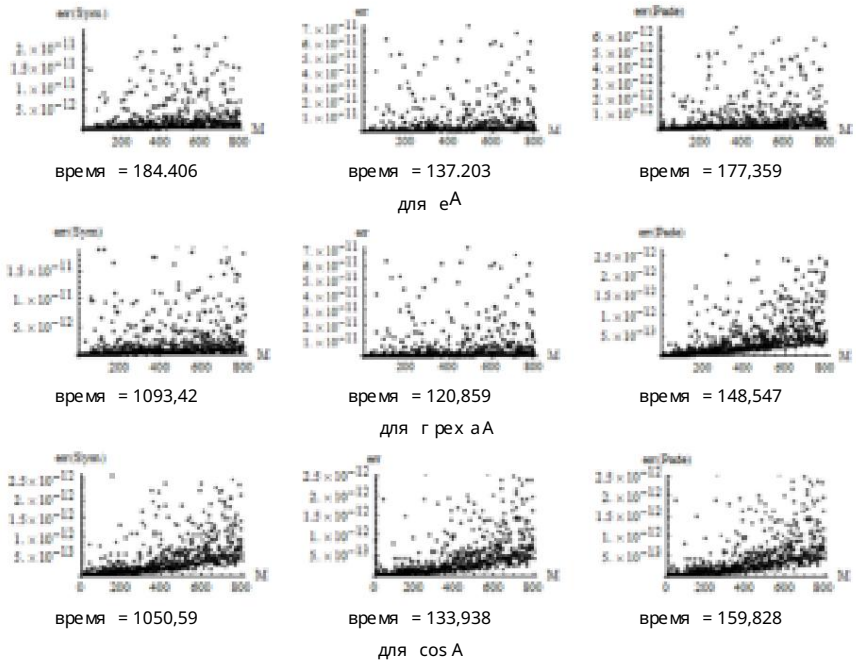
Таблица 2. Быстрые алгоритмы для tan A, sec A, tanh A и sechA.

	мп, Н	Алгоритм
Тан А Тан А	МП = $\frac{\overline{2\text{пвп}10}}{\text{вп}3}$, Н = Н1 + 1	Б = $\frac{A^2}{3\,2H,\text{м}}$ С = $\frac{2A}{3}$ (±1) jσ(j + 1) 4 j+1 1 B j N j=0 f or(i = 0, i < N, i + +) C = C(3I C tan ^{2})(I 3C^2) ^{1} A tanh A C
сек А сек г а	МП = $\frac{\overline{2\text{пвп}10}}{\text{вп}3}$, Н = Н2 + 1	Б = $\frac{A^2}{3\,2N}$, я + $^{\text{м}}$ (1) jE jB $^{\text{м}}$ j=1 f or(i = 0, i < N, i + +) C = C ^{3}(4И 3C^2) ^{1} сек А сек г а C
Н1 = $\frac{\text{п ln 10+ln(2σ(mp+2))}}{(2\text{mp+3})\ln 3}$ + $\frac{\ln\lambda}{\ln 3}$, N2 =	$\frac{\text{p ln 10+ln Emp+1 ln}\lambda +}{(2\text{mp+3})\ln 3\ln 3}$.	

Из рисунка 2 видно, что для e A, cos A и sin A точность, полученная тремя методами, по существу одинакова. Однако, когда порядок матрицы относительно высок, метод разложения Тейлора, представленный в таблице 1, превосходит другие. В частности, для cos и sin A время расчета внутренних функций примерно в восемь раз больше, чем у алгоритмов табл. 1. Численные расчеты показывают, что при скорости расчета cos A и sin A с использованием внутренних функций Re(e iA) = потому что A

Machine Translated by Google

и Im(e iA) = sin A быстрее, чему внутренних функций cos A и sin A, точность их расчета относительно низкая.



время = 184.406 время = 137.203 время = 177,359

для e^{A}

время = 1093,42 время = 120,859 время = 148,547

для грех aA

время = 1050,59 время = 133,938 время = 159,828

для cos A

Рисунок 2. Ошибкае A, cos A и sin A для трех алгоритмов.

Таблица 3. Быстрые алгоритмы для cot A, coth A, csc A и cschA.

	мп, Н	Алгоритм
детская кроватка Адетская кроватка	МП= $\overline{\frac{7\text{п вп}10}{5\text{ вп}3}}$, H = H1 + 1	Б = $\frac{A^{2}}{3\,2N}$, jσ(j)Б j C = я - 2 ^{м} j=1 for(i = 0, i < N, i + +) (C = 3(C(3B C cot ^{2})(B 3C^{2}) ^{1}; Б = 9Б) A coth A C
csc A cschA	МП= $\overline{\frac{5\text{п вп}10}{2\text{ вп}3}}$, H = H2 + 1	Б = $\frac{A}{3\,2H}$, я + 2 $^{м+1\,2}$ (±1) jσ(j) 1 $\frac{2}{4\text{Дж}}$ Б Дж j=1 for(i = 0, i < N, i + +) (C = 3C ^{3}(3C ^{2} 4Б) ^{1}; Б = 9Б) csc A cschA C
	H1 = $\frac{\text{p ln }10+\ln(2\sigma(mp+2))\ln\lambda+(2mp+3)\ln 3}{\ln 3}$, N2 = $\frac{\text{p ln }10+\ln Emp+1\ln\lambda+}{(2mp+3)\ln 3\ln 3}$ ____	

Для cosh A и sinh A внутренние функции можно рассчитать, используя следующее уравнение:

$$1\,\text{кош}\,A = 2\ -(э^{A} + e\ A),\ \sinh A = \frac{}{1\,2}(э^{A}\ e\ A). \tag{35}$$

Наш эксперимент дает следующие результаты для err(g)(A) случайных матриц порядков от 1 до 800.

Из рисунка 3 видно, что использование (35) не только удваивает время расчета, но и делает ошибку расчета существенной. Кроме того, наблюдая за рисунками 2 и 3, становится очевидным, что алгоритмы в таблице 1 превосходят алгоритм аппроксимации Паде.

Machine Translated by Google

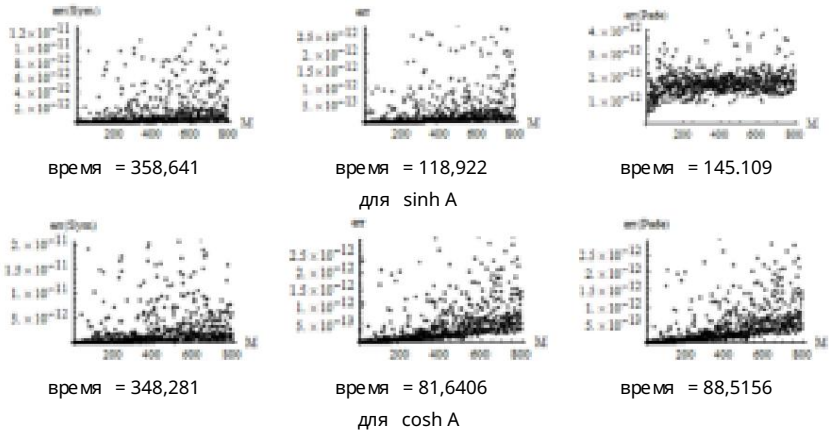


Рисунок 3. Ошибка sinh A и cosh A для трех алгоритмов.

4. Быстрый алгоритм для tan A, tanh A, sec A и sechA Теперь давайте рассмотрим быстрое вычисление tan A, tanh A, sec A и sechA.

Хотя эти матричные функции можно вычислить с использованием следующего подхода, мы стремимся вычислить их напрямую, как показано в предыдущем разделе.

$$\begin{aligned} \tan A &= \sin A(\cos A)^{-1}, \sec A = (\cos A)^{-1}, \\ &= \sinh A(\cosh A)^{-1} = e^{A} - e^{-A} + e^{A} e^{-A} + 1, \\ \operatorname{sech} A &= (\cosh A)^{-1} = 2e^{A} + e^{-A} + 1. \end{aligned} \tag{36}$$

Хотя приближение Паде вносит значительный вклад в вычисление матричной функции, численные результаты в предыдущем разделе показывают, что на основе алгоритма, представленного в этой статье, ни точность расчета, ни скорость расчета не являются доминирующими. Поэтому в этом разделе он не принимается.

Теорема 3. Для tan A, sec A, tanh A и sechA имеется следующий быстрый алгоритм, основанный на теореме 1.

В таблице 2 для σ(j) и E имеем следующую рекурсивную формулу [1]: j ,

$$\begin{aligned} \sigma(2n) &= \frac{1}{4^{4n+1}} \sum_{l=1}^{n-1} \sigma(l)\sigma(2n-l) + \frac{2^{2}}{4^{n+1}-1}\sigma(n), n = 1, 2, \cdots, \\ \sigma(2n-1) &= \frac{1}{4^{4n-1}} \sum_{l=1}^{n-1} \sigma(l)\sigma(2n-1-l), n = 2, 3, \cdots \\ E_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{E_k}{(2n-2k)!}, E0 = 1, \sigma(1) = \frac{1}{16}. \end{aligned} \tag{37}$$

Используя алгоритмы, представленные в таблице 2, в наших экспериментах были получены следующие данные для err(g)(A) случайных матриц от 1 до 200.

Здесь Sym указывает, что матричные функции tan A, tanh A, sec A и sechA, выраженные $A^{-1}A^{-1}AA$ через sin A(cos A) , (cos A) и 2 e соответственно, $e^{A} e^{A}$ функций рассчитаны через A^{-1}, скорость использования алгоритма в таблице 2 превосходит скорость вычислений внутренней функции, так как A^{-1} для тех же функций рассчитаны через A^{-1}, скорость увеличивается в 8–11 раз по постоянную точность. является последовательным. Когда порядок матрицы относительно велик, для tanh A и sechA, скорость вычисления в два раза выше, чем у внутренней функции, но точность остается такой же, как у внутренней функции.

Machine Translated by Google

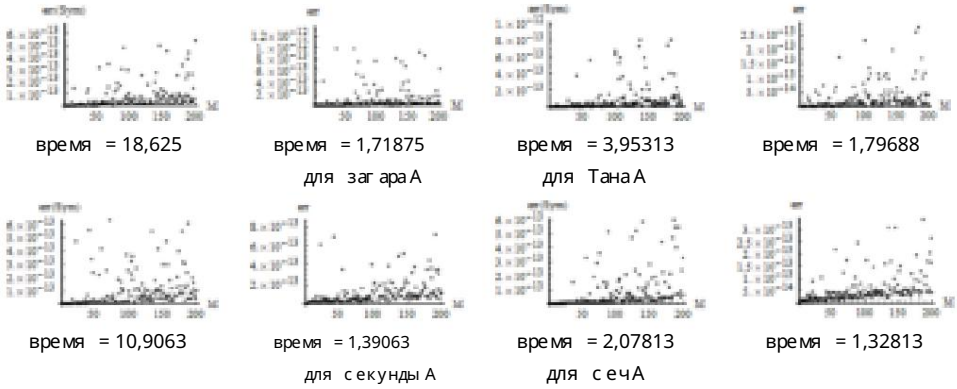


Рисунок 4. Ошибка tan A, sec A, tanh A и sechA для двух алгоритмов.

Рассмотрим реализацию наших алгоритмов вычисления функций cot A, cot A, csc A и cschA. К

$$\begin{aligned}
&\text{кроватка}(B) \quad A^{-1}\sum_{j=0}^{M}\sigma(j+1)A^{2j+1};\ (o<|A|<\pi,\ z/\ =0),\quad 2\\
&\coth(At) \quad A^{-1}+2\sum_{j=0}^{M}(-1)^{j}\sigma(j+1)A^{2j+1}\ (0<|A|<\pi),\\
&\operatorname{csc}(At) \quad A^{-1}+2\sum_{j=0}^{M}\sigma(j+1)\,1-\frac{2}{4^{jk+1}}A^{2j+1}\ (0<|A|<\pi),\\
&\operatorname{csch}(At) \quad A^{-1}-2\sum_{j=0}^{M}(-1)^{j}\sigma(j+1)\,1-\frac{2}{4^{jk+1}}A^{2j+1}\ (0<|A|<\pi),
\end{aligned} \tag{38}$$

мы видим, что когда A мало, норма обратного A будет большой, поэтому расчет с использованием (38) будет давать большие ошибки. Поэтому мы должны использовать следующий метод:

$$\begin{aligned}
&\text{детская кроватка}A=A^{-1}\cot 1A,\ \cot A=A^{-1}\cot 1A,\\
&\csc A=A^{-1}\csc 1A,\ \operatorname{cschA}=A^{-1}\operatorname{csch}1A,
\end{aligned} \tag{39}$$

где

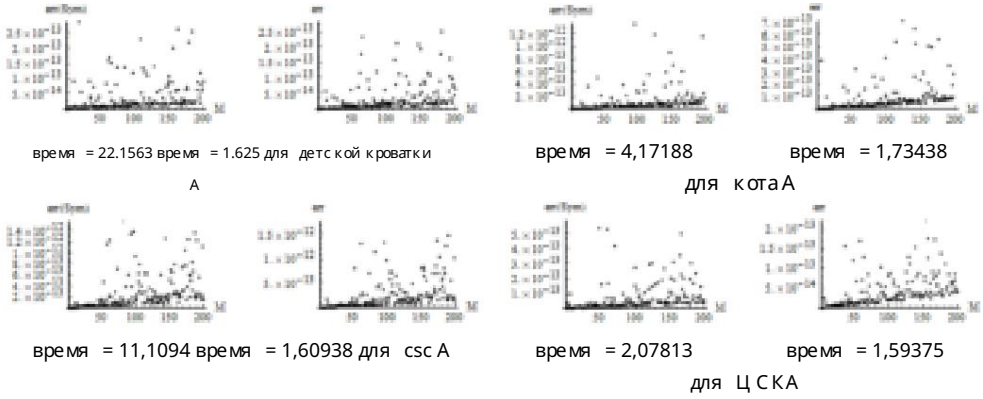
$$\begin{aligned}
&\text{койка}1A \quad I-2\sum_{j=1}^{m+1}\sigma(j)A^{2j};\ (|z|<\pi,\ z/\ =0),\\
&\coth 1A \quad I-2\sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{j}\sigma(j)A^{2j}\ (|z|<\pi,\ z/\ =0),\\
&\csc 1A \quad I+2\sum_{j=1}^{m+1}\sigma(j)\,1-\frac{2}{4^{jk}}A^{2j}\ (|z|<\pi,\ z/\ =0),\\
&\operatorname{csch}1A \quad I+2\sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{j}\sigma(j)\,1-\frac{2}{4^{jk}}A^{2j}\ (|z|<\pi,\ z/\ =0).
\end{aligned} \tag{40}$$

Теорема 4. Используя теорему 1, мы имеем следующий алгоритм для cot A, coth A, csc A и sec hA.

Реализация алгоритмов табл. 3 дает следующие результаты для матричных функций (39).

Здесь Sym означает, что матричные функции cot A, coth A, csc A и sec hA вычисляются с использованием вычисление внутренних функций по регулярным формулам $\cos A(\sin^{-1}, A+ee^{A}e^{A}e^{--A-1},$ A) $(\sin^{-1}, e$ соответственно. Результаты на рисунке 5 по существу согласуются — e
A) с соответствующими результатами на рисунке 2.

Machine Translated by Google



время = 22.1563 время = 1.625 для детской кроватки A время = 4,17188 время = 1,73438 для кота A

время = 11,1094 время = 1,60938 для csc A время = 2,07813 время = 1,59375 для ЦСКА

Рисунок 5. Ошибка cot A, cot A, csc A и cschA для одного или двух алгоритмов.

5. Быстрый алгоритм для логарифмической матричной функции ln A и некоторых связанных с ней функций.

Люди рассматривают различные алгоритмы [17–22] для логарифмической матричной функции ln A. Одним из наиболее эффективных методов, которые мы заметили, был следующий алгоритм. Стандартный способ решения этой проблемы — многократное использование оператора квадратного корня, чтобы приблизить A к тождеству:

$$\text{Ин } A = 2^{k} \ln A^{1/2^{k}}. \tag{41}$$

По мере увеличения k $A^{1/2^{k}} - I$, поэтому для достаточно большого k мы можем применить прямой метод к $A^{1/2^{k}}$. Эта процедура для логарифма была введена Кенни и Лаубом [19]. Конкретный метод состоит в том, чтобы выбрать k так, чтобы

$$\left\| A^{1/2^{k}} - I \right\| < \alpha < 1, \tag{42}$$

и обычно k выбирается из 8. Немного оптимизируем метод следующим образом:

$$\ln A = \ln \lambda \cdot I + 2^{k} \ln A^{1/2^{k}}, \quad A_0 = \frac{1}{\lambda} A, \tag{43}$$

и

$$\left\| A^{1/2^{k}} - I \right\| < \alpha < 1, \tag{44}$$

где k обычно выбирается из 4.

Для $\ln x$ алгоритм, который сходится быстрее:

$$\ln x = \ln \frac{1-y}{1+y} - 2 \sum_{j=1}^{m} \frac{y^{2j+1}}{2j+1}, \tag{45}$$

где $y = \frac{1-x}{1+x}$. Для $\text{Ин } A^{k}$ у нас есть

$$2^{j} \ln A^{k} = \ln(I - B) - \ln(I + B) - 2 \sum_{j=1}^{m} \frac{B^{2j+1}}{2j+1}, \tag{46}$$

где $B = (I - A^{k})(I + A^{k})^{-1}$. Применяя преобразование Эйлера–Абеля [21], получаем следующий ускоренный ряд:

$$\ln A^{k} = -2(I + F) \sum_{j=1}^{m} \frac{B^{2j}}{(2j+3)(4j^{2}-1)}, \tag{47}$$

где $F = 2B(I - B^{2})^{-2}$. Мы можем использовать следующую аппроксимацию Паде $\ln A^{k}$ [20].

$$\ln A^{k} \approx (B + 2B^{2} + \frac{47}{36}B^{3} + \frac{11}{36}B^{4} + \frac{137}{7560}B^{5})F,$$
$$F = (I + \frac{5}{2}B + \frac{202}{567}B^{2} + \frac{52}{189}B^{3} + \frac{5}{42}B^{4} + \frac{1}{252}B^{5})^{-1}, \tag{48}$$

Machine Translated by Google

где B = Ak I. Мы также приводим некоторые численные результаты для матричной функции ln A.

На основании (41)–(44) мы также приводим некоторые численные результаты ln A с использованием (46)–(48). Из рисунка 6 видно, что за счет оптимизации (43) точность расчета (46)–(48) значительно улучшается, а скорость расчета (46)–(48) более чем в два раза быстрее внутренней функции. Преимущество приближения Паде в скорости вычислений очевидно.



время = 11,9844 время = 5,71875 время = 6,04688 время = 5,625

На основании (41), (42)



время = 12.1875 время = 5,64063 время = 6,01563 На основании (43), (44) время = 5,3125

Рисунок 6. Ошибка ln A для нескольких алгоритмов.

Для реализации нашего общего алгоритма вычислений обратных тригонометрических и гиперболических функций мы использовали следующие тождества. Чтобы контролировать длину статьи, мы не будем отображать здесь результаты.

$$\begin{aligned} &\text{арксин } x = 2\,\text{арксин}\,\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}},\\ &\text{арктанс } x = 2\,\text{арктанс}\,\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}},\\ &\arcsin x = x+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!(2l+1)}\,x^{2l+1}, \qquad \arctan x = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)}\,x^{2l+1}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &\text{дуг синх } x = 2\,\text{арсинх}\,\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{arctanh} x = 2\operatorname{arctanh}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}},\\ &\operatorname{arcsinh} x = x+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l-1)!!}{(2l)!!(2l+1)}\,x^{2l+1}, \quad \operatorname{arctanh} x = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)}\,x^{2l+1}, \end{aligned} \tag{50}$$

Для arcsin A, arctan A, arcsinhA и arctanhA при определенных условия x можно использовать следующее тождество.

$$\begin{aligned} &\arcsin A = -i\ln\left(iI + \sqrt{I - A^2}\right), \quad \operatorname{arcsinh} A = \ln\left(I + \sqrt{I + A^2}\right),\\ &\text{арктан } A = \frac{\pi}{2}\ln(iI + A)(iI - A)^{-1},\\ &\operatorname{arctanh} A = \frac{1}{2}\ln(I + A)(I - A)^{-1}. \end{aligned} \tag{51}$$

6. Улучшенная формула расчета для задач начального значения (3) и (8).

Теперь рассмотрим вычисление интеграла в (11), т.е.

$$\Phi_k = \int_0^{\tau} e^{H_s F(k\tau - s)}\,ds. \tag{52}$$

Если для расчета этого интеграла используется численное интегрирование, то оно занимает достаточно много времени, и точность расчета не может быть гарантирована. Здесь мы применяем следующий метод. соотношение: $n_l \le 46$, существует следующее

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \sum_{j=0}^{n_n-1}\int_{j\frac{\tau}{n_n}}^{(j+1)\frac{\tau}{n_n}} e^{H_s F(k\tau - s)}\,ds = \sum_{j=0}^{n_n-1} e^{T_{нн,j}}\int_0^{\frac{\tau}{n_n}} e^{H_s F(k\tau - j\frac{\tau}{n_n} - c)}\,dc\\ &\approx \sum_{j=0}^{n_n-1} e^{T_{нн,j}}\sum_{l=0}^{M}\frac{X_{л,}}{л!}\int_0^{\frac{\tau}{n_n}} s^{l} F(k\tau - j\frac{\tau}{n_n} - c)\,dc, \end{aligned} \tag{53}$$

Machine Translated by Google

где

$$Tnn,0 = I,\ Tnn = e^{час\frac{\tau}{nn}},\ Tnn,j = e^{час\frac{j\tau}{nn}} nn = TnnTnn,j\ \ 1\ ,\ j = 1, 2, \cdots, nn - 1. \tag{54}$$

Tnn можно рас с читать с леду ю щим методом:

$$\begin{aligned} &Tнн = I,\ zz = I;\\ &for(i = 1,\ i\ \ \ m,\ i + +)\ (zz = \overline{\overline{\frac{\tau\ nn}{я}}} H \times zz;\ Tнн = Tнн + zz). \end{aligned} \tag{55}$$

Итак, (53) можно запис ать с леду ю щим образом:

$$Fк \sum_{j=0}^{nn\ \ 1} Tnn,jHj\ ,\ Hj = \sum_{л=0}^{м} \frac{X_{л,}}{я!} \int_0^{\frac{\tau}{nn}} s\ lFH(k\tau\ \ \frac{j\tau}{nn}\ \ \ с)дс, \tag{56}$$

поэтому мы можем преобразовать интег рал от произведения матричной экс поненц иальной функ ц ии и векторной функ ц ии в интег рал чис той векторной функ ц ии.

Ус овершенс твованная формула рас чета для (3) выг ля дит с леду ю щим образом:

$$\begin{aligned} &(55),\ (56),\\ &Uk = TUk\ \ 1 + \sum_{j=0}^{nn\ \ 1} Tнн,jHj\ ,\ к = 1, 2, \cdots\ \ \ , \end{aligned} \tag{57}$$

где $T = e^{Нт}$ (55) и (56). рас с читывается по алг оритму, приведенному в таблиц е 1, а Tnn,j и Hj рас с читываю тс я по формулам

Для

$$\int_0^{\frac{\tau}{nn}} s\ lFH(k\tau\ \ \frac{j\tau}{nn}\ \ \ с)дс, \tag{58}$$

можно ис пользовать с леду ю щие два алг оритма.

(1) Метод интег рируемых функ ц ий. Е с ли $F(t) = (f1(t), f2(t), \cdots, fv(t), \cdots\ , fn(t))T\ , fv(t\ )$ алг ебраичес кая с умма функ ц ий с леду ю щих типов:

$$т^{\alpha},\ \ l\ \ \omega tte,\ _{л\ т}\ г рех\ \omega t,\ t^{л}\ потому\ что\ \omega t, \tag{59}$$

тог да (58) можно выразить в аналитичес кой форме, поэтому Hj так же можно выразить в аналитичес кой форме. На этом выч ис ление (57) можно завершить.

(2) Формула трех точечног о интег рала Г аус с а.

Обратите внимание, что при точнос ти рас чета 16 бит

$$\frac{\tau}{nn} < \frac{0{,}0376434}{|\lambda H|} < 0{,}0376434, \tag{60}$$

а алг ебраичес кая точнос ть трех точечной интег ральной формулы Г аус с а равна 5. Ис пользуя трех точечную интег ральную формулу Г аус с а,

$$\overline{\overline{\frac{\tau}{2}}}\ \overline{\overline{\frac{\tau}{nn}}} \sum_{я=1}^{л+1} c(2\ \ \frac{1+би}{2}\ lFH(k\tau\ \ \ \frac{(j+1/2)\tau\ )}{nn}\ \ \ \frac{бит}{2nn}), \tag{61}$$

Итак, (52) можно заменить с леду ю щим алг оритмом. $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{\sqrt{15}}{9}$, г де $w1 = w3 = 9,\ b1 = \sqrt{\frac{15}{5}},\ b2 = 0,\ b3 = 5$, точнос ть. аппрок с имировать (58) с выс оким

Алг оритм 1. Алг оритм чис ленног о решения начальной задачи (3): при $nn = 1, 2, \cdots$

$$Uk = TUk\ \ 1 + \overline{\overline{\frac{\tau}{2nn}}} \sum_{j=0}^{nn\ \ 1} Tnn,j \sum_{i=1}^{3} wi\ e^{\frac{(2j+1+bi)\tau}{2нн}} H_{2nn}^{(1+b\ i)\tau} FH\ k\tau\ \ \ \

Machine Translated by Google

В частности, если мы позволим

$$nn = \begin{matrix} [2\,npλHτ\,] + 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 2npλHτ > 1 \\ 2npλHτ \quad 1 \end{matrix}, \tag{64}$$

тогда Np = 0, m = mp = $\frac{9p\,вп\,10}{8\,вп\,2}$,

$$Wi,H \quad \frac{c\,τ}{2nn} \quad я + \overset{депутат}{Л}!\,л=\overline{1} \quad \frac{(1+би\,)τ}{2нн} \quad \overset{л}{Х}\,л \quad . \tag{65}$$

В настоящее время теоретическая точность расчета (62) составляет p.

Замечание 3. Обратите внимание, что Wi,H(i = 1, 2, 3) в (63) и (65) требует вычисления только один раз и не зависит от F(t), что не только эффективно, но и легко программировать.

Теперь рассмотрим численное решение начальной задачи (8). Если ее преобразовать к задаче начального значения (3), то

$$\begin{matrix} x\,(т) \\ ′x\,(т) \end{matrix} = У, Ч = \begin{matrix} 0\;I3×3 \\ K\;0 \end{matrix}, FH(t) = \begin{matrix} 0 \\ F(t)\,, U0 = \end{matrix} \begin{matrix} x\,0 \\ x\,1 \end{matrix} . \tag{66}$$

K

$$Wi,H = e^{\,τ\,H} \begin{matrix} cosp(τ\,A)\,τ\;\; sin1,p(τ\,A) \\ Kτ\;\; sin1,p(τ\,A)\;\; cosp(τ\,A)\,, \end{matrix} \quad A = \overline{K,} \tag{67}$$

где

$$sin1\,A = \frac{(\quad 1)}{(2j+1)!}\,j\,A\,2j = \frac{(\quad 1)}{(2j+1)!}\,j\,Kj\,, \tag{68}$$

и (68) получаем следующий алгоритм.

Алгоритм 2.

$$\begin{matrix} t = τ\,/3N;\; Ta = I;\; zz = я\;;\; A2 = (A \quad t) × (A \quad t);\; × зз;\; Ta \\ A2\;\; for(i = 1,\; i \quad m,\; i + +)\;(zz = \frac{}{(2i)(2i+1)} = Ta + zz), \end{matrix} \tag{69}$$

и

$$\begin{matrix} for(i = 0,\; i < N,\; i + +)\;4\;(zz = Tα × Tα,\; zz \\ = zz × A2,\; A2 = 9A2,\; Tα = Tα \quad 3 \end{matrix} \quad - Tα × zz)\;, \tag{70}$$

где mp и Np определяются с использованием (31).

Алгоритм 3. Алгоритм численного решения начальной задачи (8):

$$\begin{matrix} xk = (cos(τ\,A)xk \quad 1 + τ\;\; sin1(τ\,A)yk \quad 1)\;wi\;(2j+1+bi\,)τ \\ + \frac{τ}{2нн} \quad \begin{matrix} nn \quad 1 \\ j=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ я\;=1 \end{matrix} \quad \frac{(2j+1+bi\,)τ\;\;(2j+1+bi\,)τ}{} \quad A\,F(kτ \quad)\;sin1\;\frac{}{2nn\;2nn\;2nn} \\ yk = \quad A\,sin(τ\,A)xk \quad 1 + cos(τ\,A)yk \quad 1\;(2j+1+bi\,)τ\;\;(2j+1+bi\,)τ \\ + \frac{τ}{2нн} \quad \begin{matrix} nn \quad 1 \\ j=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ я\;= 1,\text{ потому что} \end{matrix} \quad \frac{}{} \quad A\,F(kτ \quad)\;2nn\;\frac{}{2nn} \end{matrix} \tag{71}$$

Machine Translated by Google

для nn = 1, 2, · · · , где A = K. В частности, если nn определяется по (64), теоретическая точность этого алгоритма равна

$$\begin{aligned} xk &= \cos(\tau A)xk\ \ 1 + \tau\ \sin1(\tau A)yk\ \ 1 + \frac{}{\tau\ 2nn}\ \sum_{j=0}^{nn\ \ 1}\ \sum_{я\ =1}^{3} wiTWsin\ \ F(k\tau\ \ ), j,i\ \frac{(2j+1+bi)\tau}{2нн} \\ yk &= \cos(\tau A)yk\ \ 1\ \ A\sin(\tau A)xk\ \ 1 + \frac{}{\tau\ 2nn}\ \sum_{j=0}^{nn\ \ 1}\ \sum_{i\ =1}^{3} F(k\tau\ \ ), wiTWcos\ j,i\ \frac{(2j+1+bi)\tau}{2нн} \\ x\ 0 &= x\ (0), y0 = x\ \ '(0), \end{aligned} \tag{72}$$

где

$$\begin{aligned} TWsin\ j,i\ \ &= \frac{(1+би)\tau}{2нн}\ \ потому\ что\ \ \frac{j\tau}{nn}\ A\sin1,mp\ \ \frac{(1+би)\tau}{2нн}\ A \\ &+ \frac{j\tau}{nn}\ грех\ 1\ \ \frac{j\tau}{nn}\ Кос\ мос\ \ \frac{(1+bi)\tau}{2нн}\ A\ \ , \\ TWcos\ j,i\ \ &= потому\ что\ \ \frac{j\tau}{nn}\ Кос\ мос\ \ \frac{(1+би)\tau}{2нн} \\ &\quad грех\ \frac{j\tau}{nn}\ Синмп\ \ \frac{(1+би)\tau}{2нн}\ \ , \end{aligned} \tag{73}$$

и

$$\begin{aligned} sinmp\ (sA) &= A\ \ ^{делитат}\ \ \ ^{n}с\ 2л+1К\ л \\ &\quad l=0\ \ (\ \ 1)\ (2l+1)!\ , \\ sin1,mp\ (с\ A) &= \ \ ^{мп} \\ &\quad л=0\ \ \frac{(\ \ 1)\ \ ^{n}с\ 2лк\ л}{(2l+1)!\ , } \\ cosmp\ (sA) &= I + \ \ (2l)!\ \ л=1\ \ ^{mp+1}\ (\ \ 1)\ \ \ \ л\ с\ 2лк\ л\ . \end{aligned} \tag{74}$$

Если A обратимо, то

$$\begin{aligned} xk &= \cos(\tau A)xk\ \ 1 + A\ \ \ ^{1}\sin(\tau A)yk\ \ 1 \\ &+ \frac{\tau}{2нн}\ A\ \ \ ^{1}\ ^{nn\ \ 1}\ \ \ ^{3}_{i=1\ с\ грех\ ом}\ \frac{(2j+1+bi)\tau\ \ (2j+1+bi)\tau}{A\ F(k\tau\ \ )\ 2nn\ 2nn} \\ yk &= \ \ A\sin(\tau A)xk\ \ 1 + \cos(\tau A)yk\ \ 1\ (2j+1+bi)\tau\ \ (2j+1+bi)\tau\ \ A\ F(k\tau \\ &+ \frac{\tau}{2нн}\ \ ^{nn\ \ 1}\ \ \ ^{3}_{я\ \ =1,\ потому\ что}\ \ \frac{}{).\ 2нн\ 2нн} \end{aligned} \tag{75}$$

Поэтому (75) можно записать в виде комплексной функции следующим образом:

$$zk = e\ \ i\tau\ Azk\ \ 1 + \frac{i\tau}{2нн}\ \ ^{1}\ \ \ ^{nn\ \ 1}\ \ e\ \ \frac{j\tau\ i}{nn}\ A\ \ \ ^{3}_{l=1}\ wl\ e\ \ \frac{(1+b\ l)\tau\ i}{2нн}\ \ (2j+1+bl)\tau\ \ 2nn\ AF\ k\tau\ \ , \tag{76}$$

или

$$Zk = e\ \ i\tau\ AZk\ \ 1 + \frac{\tau}{2нн}\ \ ^{nn\ \ 1}\ \ e\ \ \frac{j\tau\ i}{nn}\ A\ \ \ ^{3}_{l=1}\ wl\ e\ \ \frac{(1+b\ l)\tau\ i}{2нн}\ \ (2j+1+bl)\tau\ \ 2nn\ AF\ k\tau\ \ \ \ 2nn\ \ , \tag{77}$$

где $я = \sqrt{1}$,

$$\begin{aligned} zk &= xk + iA\ \ 1yk\ , xk = Rezk\ , yk = AImzk\ , \\ Zk &= yk\ \ \ iAxk\ , yk = ReZk\ , xk = \ \ A\ \ \ ^{1}\ Имзк\ . \end{aligned} \tag{78}$$

Сначала мы приводим примеры, иллюстрирующие эффективность алгоритмов 1. Хотя мы опускаем примеры алгоритма 2, мы затем включаем пример эффективности алгоритма 3.

Пример 1. Пусть в (8)

$$K = \begin{matrix} 1 & 1\ 5\ 2 \\ 1 & _ \\ & 1\ 4 \end{matrix}\ \ , \quad F(т) = \begin{matrix} грех\ т \\ 1\ грех\ т\ 2 \\ \frac{}{2t}\ \ cos\ \ 3t + грех\ т\ cos\ 2 \end{matrix}\ \ , \tag{79}$$

$$x\ 0 = \begin{matrix} 5 \\ \frac{}{2} \end{matrix}\ \ 0\ \ 2\ \ \ ^{T}\ , x1 = 1\ 1\ 2\ \ \ ^{T}\ .$$

Machine Translated by Google

Аналитическое решение начальной задачи (8) имеет вид

$$x(\tau) = \frac{\cos\left(\sqrt{3}t + \operatorname{arctg} t\right)}{\sqrt{t^2+1}\sqrt{2t^2+1}\cos\left(\sqrt{3}t + \operatorname{arctg} t\right)} \cdot \frac{\sqrt{3}t + \operatorname{arctg} t}{\operatorname{arctg}(2\tau) - 2\tau}. \quad (80)$$

Пусть $err_{i,k} = x(k\tau) - x_{i,k}$, $i = 1, 2$, где $x_{1,k}$, $x_{2,k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, N)$ – численные решения начального значения задача (8), определяемая алгоритмом 1 и алгоритмом 3 соответственно. $err_{sym,k} = x(k\tau) - x_{sym}(k\tau)$, где $x_{sym}(t)$ — численное решение, полученное вызовом функции NDSolve в системе Mathematica. Численные результаты $err_{1,k}$, $err_{2,k}$, $err_{sym,k}$ $[0, T]$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, N\tau = T)$ заключаются в следующем.

Из рисунка 7 видно, что точность вычислений Алгоритма 1 выше, чему Алгоритма 3, но скорость вычислений Алгоритма 3 в три раза выше, чему Алгоритма 1. Однако погрешность численных результатов внутренних функций Mathematica намного больше. чем ошибка алгоритмов 1 и 3. В частности, коллапс рассчитывается при $t = 667{,}787$. После этого момента ошибка увеличивается экспоненциально с временем t. Однако алгоритмы 1 и 3 вполне устойчивы. Например, ошибка расчета в $[0, 8000]$ все еще очень мала.

В алгоритмах 1 и 3 пусть $nn = \mu nnA$, $\mu = 0{,}5, 0{,}25, 0{,}125$, где nnA рассчитывается согласно (64). Численные результаты следующие.

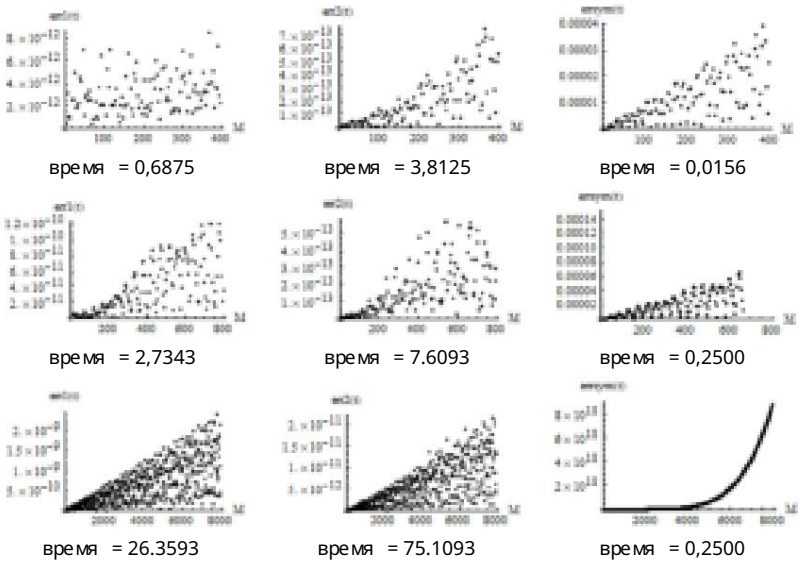


Рис. 7. Погрешность численного решения (8) для нескольких алгоритмов (нм рассчитывается по (64)).

По сравнению с рисунками 7 и 8, при $\mu = 0{,}5$ точность расчета снижается ненамного, а скорость расчета увеличивается почти в два раза. Для $\mu = 0{,}125$ алгоритмы 1 и 3 точность расчета по-прежнему высока, а скорость расчета в 10 раз выше, чем на рис. 8.

Пример 2. Пусть в (8) $K = (k_{i,j})_{n\times n}$ – трёхдиагональная матрица. $f_n(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^T$, $f_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, случайным образом $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^T$, $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n})^T$ и $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots, x_{1,n})^T$, $T = 1$.

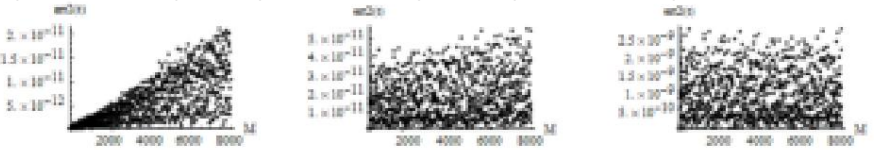
$$k_{i,i+1} = \frac{3}{2}, \quad k_{i,i} = -2, \quad k_{i+1,i} = \frac{3}{2}, \quad A_i = \frac{3}{2}, \quad \varphi_i = 0, \quad x_{1,i} = \frac{5}{2}, \quad \omega_i = 2, \quad x_{0,i} = \frac{\pi}{2},$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n).$$

Machine Translated by Google

Для n = 50, 100, 200 и 400 алгоритмы 1 и 3 дают следующие численные результаты .



время = 6,4687, μ = 0,5 время = 3,4062, μ = 0,25 время = 2,0625, μ = 0,125



время = 39,2500, μ = 0,5 время = 20,0312, μ = 0,25 время = 2,9375, μ = 0,125

Рис . 8. Погрешность численного решения (8) для нескольких алгоритмов.

На рисунке 9, (1)–(4) слева — первые две компоненты численного решения , а справа — разница между численными решениями, полученными двумя алгоритмами. Отмечается , что иногда ωi (i = 1, 2, · · · , n) близка к частоте решения , и может возникнуть флаттер или резонанс . Однако значения , полученные двумя алгоритмами, по-прежнему очень близки.



(1) n = 50, время 6,1 = 31,6250, время 6,4 = 11,2500 (2) n = 100, время 6,1 = 60,5625, время 6,4 = 27,8125



(3) n = 200, время 6,1 = 137,5625, время 6,4 = 57,6875 (4) n = 100, время 6,1 = 281,3125, время 6,4 = 151,2187

Рисунок 9. Численные решения и ошибки двух алгоритмов.

7. Выводы

В данной статье мы установили алгоритмы вычисления матричных показательных функций, матричных тригонометрических функций и матричных гиперболических функций. Наши численные результаты показывают, что эти алгоритмы работают быстрее и имеют более высокую точность по сравнению с существующими алгоритмами и системными алгоритмами в системе Mathematica. При разложении матричной функции в ряд количество разлагаемых элементов mp связано только с требованием точности вычислений и не имеет ничего общего с самой матрицей. Однако количество раз в итерационном процессе Np связано не только с самой матрицей, но и тесно связа Когда |3 npλAt| 1(|2 npλAt| 1), Np = 0, вычисление матричной функции становится алгебраической операцией, поэтому интеграл в (9)–(12) становится легковычисляемым интегралом. Короче говоря , наш алгоритм позволяет пользователя мустановить необходимый уровень точности, а затем использовать его для выбора подходящих значений параметров m и N, чтобы минимизировать время вычислений. Таким образом , одновременно решаются вопросы точности и эффективности.

Вклад автора: концепция , штаб-квартира и YL; методология , штаб и юл; программное обеспечение, штаб-квартира; проверка, HQ и YL; формальный анализ, HQ и YL; расследование, штаб и юридическая служба; визуализация , HQ; надзор, штаб; администрация проекта, ЮЛ. Все авторы прочитали и согласились с публикационной версией рукописи.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования .

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Machine Translated by Google

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: данные содержатся в статье.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Ссылки

1. Руис, П.; Састре, Дж.; Ибаньес, Дж.; Дефез, Э. Высокопроизводительные вычисления матричной экспоненты. Дж. Компьютер. Прикладная математика. 2015, 291, 370–379. [Перекрестная ссылка]
2. Молерт, К.; Кредиты, резюме Девятнадцать сомнительных способов вычисления экспоненты матрицы. SIAM Rev. Soc. Индиана Прикладная математика. 1978, 20, 801–836.
3. Хайэм, Н. Дж. Функции матриц: теория и вычисления; СИАМ: Филадельфия, Пенсильвания, США, 2008 г.
4. Аль-Мохи, Ах; Хайэм, Нью-Джерси. Вычисление действия матричной экспоненты с применением к экспоненциальным интеграторам. СИАМ J. Sci. Вычислить. 2011, 33, 488–511. [Перекрестная ссылка]
5. Хайэм, Нью-Джерси. Метод масштабирования и возведения в квадрат для матричной экспоненты. СИАМ Дж. Матричный анал. Прил. 2005, 26, 1179–1193. [Перекрестная ссылка]
6. Бадер П.; Бланес, С.; Касас, Ф. Вычисление матричной экспоненты с помощью аппроксимации оптимизированным полиномом Тейлора. Математика 2019, 7, 1174. [CrossRef]
7. Сейдаоглу, К.М.; Бадер, П.; Бланес, С.; Касас, Ф. Одновременное вычисление матричного синуса и косинуса с уменьшенным количеством продукты. arXiv 2020, arXiv:2010.00465v1.
8. Харгривз, Дж.; Хайэм, Нью-Джерси. Эффективные алгоритмы для матричного косинуса и синуса. Число. Алг оритмы 2005, 40, 383–400. [Перекрестная ссылка]
9. Алонсо, П.; Ибаньес, Дж.; Састре, Дж.; Пейнадо, Дж.; Дебез, Э. Эффективные и точные алгоритмы вычисления тригонометрических матриц. функции. Дж. Компьютер. Прил. Математика. 2017, 309, 325–332. [Перекрестная ссылка]
10. Алонсо, П.; Пейнадо, Дж.; Ибаньес, Дж.; Састре, Дж.; Дефез, Э. Вычисление матричных тригонометрических функций с помощью графических процессоров с помощью Matlab. Дж. Суперкомпьютер. 2019, 75, 1227–1240. [Перекрестная ссылка]
11. Аль-Мохи, Ах; Хайэм, Нью-Джерси; Релтон, С.Д. Новые алгоритмы для вычисления матричного синуса и косинуса по отдельности или одновременно. СИАМ J. Sci. Вычислить. 2015, 37, A456–A487. [Перекрестная ссылка]
12. Сербин С.М.; Блэлок, С.А. Алгоритм вычисления матричного косинуса. СИАМ J. Sci. Статист. Вычислить. 1980, 1, 198–204. [Перекрестная ссылка]
13. Купер, Б.Л.; Бингулак, С. Улучшение вычислений при вычислении натурального логарифма квадратной матрицы. Электрон. Летт. 1990, 26, 861–862. [Перекрестная ссылка]
14. Ву, Ф.; Чжу, Л.; Ши, К. Эффективный метод вычисления матричных функций в динамических задачах. Акта Мех. Грех. 2023, 39, 522451. [Перекрестная ссылка]
15. Кардосо-младший; Садеги, А. Метод улучшения вычисления функций треугольных матриц. Межд. Дж. Компьютер. Математика. 2022, 99, 2449–2465. [Перекрестная ссылка]
16. Цзянь Ю; Он, К.; Цинь, Х. Ускоренный алгоритм для высокой точности и быстрого расчета основных элементарных функций. Математика. Практика. Теория 2017, 47, 238–246.
17. Фаси, М.; Хайэм, Нью-Джерси. Алгоритм многоточности для вычисления матричного логарифма. СИАМ Дж. Матрикс анал. Прил. 2018, 39, 472–491. [Перекрестная ссылка]
18. Ибаньес, Х.; Састре, Дж.; Руис, П.; Алонсо, Дж. М.; Дефез, Э. Улучшенный алгоритм Тейлора для вычисления матричного логарифма. Математика 2021, 9, 2018. [CrossRef]
19. Ченг, С.Х.; Хайэм, Нью-Джерси; Кенни, CS; Лауб, А.Дж. Приближение логарифма матрицы до заданной точности. СИАМ Дж. Матрица Анал. Прил. 2001, 22, 1112–1125. [Перекрестная ссылка]
20. Кенни, К.; Лауб, А.Дж. Оценки состояния для матричных функций. СИАМ Дж. Матричный анал. Прил. 1989, 10, 191–209. [Перекрестная ссылка]
21. Кенни, К.; Лауб, А. Дж. Паде. Оценки ошибок логарифма матрицы. Интерн. Дж. Контроль. 1989, 50, 707–730. [Перекрестная ссылка]
22. Милованович Г.В.; Ранчич, С.Л. Некоторые улучшения в вычислении натурального логарифма квадратной матрицы. В материалах Третьей международной конференции по функциональному анализу и теории приближений, Aquafredda di Maratea, Потенца, Италия, 23–28 сентября 1996 г.; Выпуск 52, Том II.

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Некоторые комментарии о p-обобщенном отрицательном биноме (NBp) Модель

Дэниел А. Гриффит

Школа экономических, политических и политических наук Техасского университета в Далласе, Ричардсон, Техас 75080, США; dagriffith@utdallas.edu

Аннотация: В этой статье описываются различные избранные свойства и особенности отрицательных биномиальных (NB) случайных величин, с особым упором на NB2 (т. е. p = 2) и некоторые обобщения спецификаций NBp (т. е. p 2). В нем представлены новые результаты (например, функция, генерирующая момент NBp) в отношении взаимосвязи между выборочным средним значением и сопровождающей его дисперсией, а также пространственные статистические/эконометрические численные и эмпирические примеры, чьими оценщиками параметров являются метод максимального правдоподобия или метод момента. те. Наконец, в нем освещается методология пространственной фильтрации собственных векторов Морана в контексте обобщенного линейного моделирования, демонстрируя ее с точки зрения пространственной отрицательной биномиальной регрессии. Его общий вывод является подкреплением важных выводов, о которых уже сообщается в литературе, недавно признанным эмпирическим примером феномена NB3.

Ключевые слова: пространственный фильтр собственных векторов; моментообразующая функция; отрицательный бином; плотность населения; Пуэрто-Рико

1. Введение

Многие современные случайные величины (СВ) измеряют количество (с поддержкой от нуля до бесконечности), подразумевая, что они являются переменными Пуассона, но без эквидисперсии (т. е. нарушения $\mu = \sigma^2$), что также означает, что их лучшее описание распределения переменная Пуассона с усредненным гамма-распределением (т. е. смесью гамма-Пуассона), которая прекрасно преобразуется в отрицательный бином (NB) свойство, наш, все это такое — что p = 2

PB. Однако стандартный NB не всегда успешно учитывает это несоответствие среднего значения и дисперсии в таких обстоятельствах. Кэмерон и Триведи [1] представляют обобщенную версию вероятностной модели NB, теперь известную как модель NBp, где p — положительное целое число, целью которой — лучше улавливать недостаточную/чрезмерную дисперсию; эта переменная отличается от модели отрицательного биномиального процесса (NBP) (например, [2]). В литературе мало обсуждается эта бывшая обобщенная модель, за исключением первоначальной трактовки ее Кэмероном и Триведи и статей Грина [3] и Ди и др. [4]. Следует отметить, что для реализации этой модели существует пакет R (версия 3.00) [4]. Целью данной статьи является устранение этого пробела в литературе путем (1) уточнения/исправления некоторых вводящих в заблуждение технических деталей в части статьи Грина; (2) представление новых результатов; (3) освещение выбранных свойств малых и больших образцов на моделях NB; и (4) представление новых примеров эмпирической пространственной статистики/эконометрики, включающих пространственную автокорреляцию

Концептуализация параметрической смеси, аналогичная предшествующей формулировке байесовского опряжения, является контекстом этого обсуждения: спецификация NB описывает переменную счетчика Y, которая распределена по Пуассону, причем ее среднее значение μ является гамма-распределенным, а не постоянным. Соответственно, гамма-СВ имеет параметры $\alpha = \mu^{2-p}$ и $p = 1/\alpha$, где μ обозначает его среднее значение, а $1/\alpha$ обозначает его параметр дисперсии, что дает глобальную модель NBp с параметрами $r = \alpha\mu^{2-p}$ и вероятностью $p = 1/(1 + \mu^{p-1}/\alpha)$ для некоторого неотрицательного целого числа $p > 0$; p = 1, 2 — стандартные спецификации NB, причем первая представляет собой Poisson RV, а вторая — популярный вариант NB2.

check for updates

Цитирование: Гриффит, Д.А. Некоторые Комментарии к модели p-обобщенного отрицательного бинома (NBp). Прикладная математика 2024, 4, 731–742. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020039

Академический редактор: Томми Соттинен

Поступила: 24 марта 2024 г.
Пересмотрено: 3 июня 2024 г.
Принято: 6 июня 2024 г.
Опубликовано: 11 июня 2024 г.

Копирайт: © 2024 автора. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условиях Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Machine Translated by Google

2. Материалы и методы: разъяснение презентации Грина.

Сбивающие с толку уравнения, встречающиеся у Грина [1], включают (2-13) и (2-14), особенно если сравнивать их с его уравнением в приложении (A-2) относительно показателя p. . Кроме того, в этом последнем уравнении отсутствует индекс i у переменной λ, появляющийся в числителе его третьего члена в правой части. Обсуждение уравнений (2-4) и (2-5) было бы более ясным, если бы предполагаемое гамма-распределение было сформулировано в его стандартной символике как Γ(θ, 1/θ). Уравнения Грина (2–13) – в которых он неправильно утверждает q = 1/1(1 + θ), а не q = 1/(1 + 1/θ) – и (2-14) – в которых он утверждает s = λ/(λ + θλ2–p) вместо 1/(1 + μ p–2/α) — дает для независимых и одинаково распределенных (iid) NBps следующую массовую функцию вероятности:

$$\frac{\Gamma(y+\alpha\mu^{3-p})}{\Gamma(1+y)\,\Gamma(\alpha\mu^{3-p})}\left(\frac{1}{1+\mu^{p-2}/\alpha}\right)^{\alpha\mu^{3-p}}\left(\frac{\mu^{p-2}/\alpha}{1+\mu^{p-2}/\alpha}\right)^{y},\quad y=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

где, приняв в этой статье более типичные литературные обозначения (особенно для спецификаций гамма-пуассона), μ (обозначающий среднее значение) эквивалентно λ, а α такое же, как θ в статье Грина, индексы i в этой статье не используются. Версия, потому что она представляет собой глобальное уравнение, а отношение членов гамма-функций также можно переписать с использованием комбинаторных биномиальных коэффициентов. Разница в том, что уравнение Грина (2-14) имеет показатель степени (2–p), а не (p–2). Уравнение (1) отображает пересмотренные

$$E(Y)=\mu \text{ и } E[(Y-\mu)^{2}]=\mu(1+\mu^{p-1}/\alpha). \tag{2}$$

Спецификация уравнения Грина (2-14) отображает

$$\frac{\Gamma(y+\alpha\mu^{2-p})}{\Gamma(1+y)\,\Gamma(\alpha\mu^{2-p})}\left(\frac{1}{1+\alpha\mu^{1-p}}\right)^{\alpha\mu^{2-p}}\left(\frac{\alpha\mu^{1-p}}{1+\alpha\mu^{1-p}}\right)^{y},\quad y=0,1,2,\ldots,$$

что не является его уравнением (2-15), даже для конкретного стандартного случая p = 2. Его функция массы вероятности должна быть уравнением (1), а не уравнением (1).

$$\frac{\Gamma(y+\alpha\mu^{2-p})}{\Gamma(1+y)\,\Gamma(\alpha\mu^{2-p})}\left(\frac{1}{1+\alpha\mu^{1-p}}\right)^{\alpha\mu^{2-p}}\left(\frac{\alpha\mu^{1-p}}{1+\alpha\mu^{1-p}}\right)^{y},\quad y=0,1,2,\ldots,$$

что не является ни результатом для вероятности параметрической смеси Пуассона, определяемой формулой Prob(y) = e $^{-\mu}\mu^{y}/(y!)$ с $\mu \sim \Gamma(\alpha\mu^{2-p}, \mu^{p-1}/\alpha)$, ни результатом замены Грина α с $\alpha\mu^{2-p}$ в этой смеси, что делает $E(Y)=\mu$ и $E[(Y-\mu)^{2}]=\mu(1+\mu^{p-3}/\alpha)$.

3. Результаты: формулирование вариантов NBp

Как аналитические результаты математической статистики, так и результаты экспериментов моделирования помогают понять обобщение NB1 и NB2 на NBp. В этом разделе представлены некоторые из них.

3.1. Производящая момент NBp функция и асимптотическая нормальность

В частности, поскольку метод моментов является полезным методом оценки параметра α [5], желательно знать моменты спецификации NBp. Отсутствие оценок максимального правдоподобия в замкнутой форме (MLE, например, см. [6–10]) делает это изобретение еще более привлекательным.

3.1.1. Функция создания момента NBp (mgf)

МГФ НБп

$$\left(\frac{1}{1+\mu^{p-1}/\alpha\,(1-e^{t})}\right)^{\alpha\mu^{2-p}},$$

Machine Translated by Google

с первым моментом происхождении

$$\frac{\alpha\mu 2\ p}{\tau - \alpha\mu 2\ p + \mu 1\ e^{\tau\delta\alpha}} = \mu,$$

и, следовательно, моменты о том, что среднее мгс

$$e^{\mu t\tilde{n}\frac{\alpha\mu 2\ p}{\alpha\mu 2\ p + \mu 1\ e^{\tau\hat{o}\alpha}}} \cdot \mu^{1+p} \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{p-2} \alpha^{1+\mu p\ 1\alpha} \quad (3)$$

p 1 Второй момент относительно среднего — это μ(1 + μ p–1/α).

виден в предыдущем первом выражении. Здесь

3.1.2. Асимптотическая нормальность и RV NBp

Согласование моментов является одним из способов установления эквивалентности между

распределениями [11]. Другими характеристиками, асимптотически нормальность распределения NBp RV. Баг и Мехра [12] предлагают способы доказательства этой асимптотической особенности, один из которых

$$\text{асимметрия} = \frac{1 + 2\mu p\ 1/\alpha}{\mu \cdot 1 + \mu p\ 1/\alpha}, \text{ и эксцесс} = 3 + + \frac{6\mu p^{2}}{\alpha} \frac{1}{\mu 1 + \mu p\ 1/\alpha}.$$

); Рисунок 1a]. На рисунке 1 показаны диаграммы рассеяния члена асимметрии Пуассона, 1/ μ, который виден в предыдущем первом выражении. Здесь асимметрия необязательно сходится к нулю, а эксцесс необязательно сходится к 3, если только параметр сверхдисперсии 1/α, а также р не демонстрирует определенное поведение и/или свойства. Другими словами, асимптотическая нормальность распределения NBp не очевидна. Баг и Мехра [12] предлагают способы доказательства этой асимптотической особенности, один из которых касается ее мгф.

Между тем, классическая теорема утверждает, что если случайные выборки взяты из одного и того же нормального распределения (т. е. iid), то их выборочное среднее и статистика дисперсии независимы [поскольку s2 является функцией (yi y); Рисунок 1a]. На рисунке 1 показаны диаграммы рассеяния отношений между выборками s2 и s2 , полученные из результатов симуляционного эксперимента для 10 000 повторений выборок размера n = 100 (хорошо известный подходящий размер, гарантирующий, что классическая центральная предельная теорема работает). В этом эксперименте 0,014 (рис. линейная корреляция у и s2 для стандартного нормального правого желудочка (т. е. iid) равна – 1a), тогда как для и NBp RV с p = 2, μ = 1000 и α = 1000 (т. е. iid) составляет 0,027 (рис. 1б). Расширение этой традиционной, хорошо известной теоремы выглядит следующим образом:

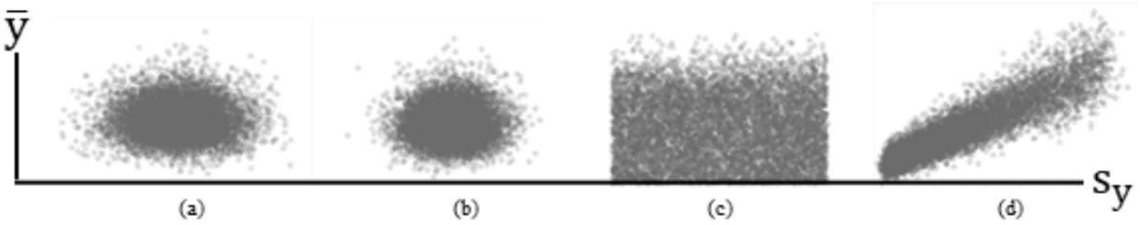


Рисунок 1. Избранные смоделированные (10 000 повторений, n = 100) отношения между у и s2 . Слева (а): iid нормальными RV. Слева посередине (б): автодома iid NB2. Справа посередине (в): это нормальные RV. Справа (d): i~id NBp RV.

Теорема 1. Линейная корреляция между у и s2 для смеси независимых и неодинаково распределенными (i~id) нормальными СВ равна нулю .

Доказательство теоремы 1. Для нормального СВ μ может быть любым действительным значением, а σ – любым положительным действительным числом. Поскольку эти два набора значений могут быть объединены в пары любым из бесконечного числа существующих способов, каждое значение μ сочетается с относительно большими, промежуточными и

Machine Translated by Google

малые значения σ^2, и каждое значение σ^2 сочетается с относительно большими, промежуточными и малыми значениями μ. Следовательно, линейная корреляция между этими двумя переменными равна нулю.

Этот результат (см. рисунок 1c; r = 0,001) отличается от результата для NBp RV, для которого μ появляется в формуле дисперсии, что вводит линейную корреляцию между ними (рис. 1d; r = 0,905). Формальное расширение постулата здесь следующее:

Теорема 2. Линейная корреляция между $\bar{y}$ и s^2 для смеси i~id NBp RV > 0, $\frac{\sqrt{3(2p+1)}}{p+2}$ 1.

Доказательство теоремы 2. Коэффициент корреляции моментов линейного произведения равен

$$\rho_c = \frac{\int c(\mu)\left(\mu + \mu^p\right)^{1/\alpha} f(\mu)\, d\mu \int c(\mu)\left(\mu + \mu^p\right)^{1/\alpha} \mu f(\mu)\, d\mu \int c(\mu)\mu^2 f(\mu)\, d\mu}{\sqrt{\int c(\mu)\left(\mu + \mu^p\right)^{1/\alpha} f(\mu)\, d\mu \int c(\mu)\left(\mu + \mu^p\right)^{1/\alpha} \mu^2 f(\mu)\, d\mu - \left(\int c(\mu)\left(\mu + \mu^p\right)^{1/\alpha} \mu f(\mu)\, d\mu\right)^2}}.$$

$$\lim_{p \to \infty} \rho_c = \frac{\sqrt{3(2p+1)}}{p+2}, \text{ поскольку } p > 0.$$

Эта новая теорема показывает, что если p = 1 (т. е. пуассоновская СВ), то ρ = 1, а для стандартного случая NB2 p = 2 ρ 0,968. Параметр p должен быть равен 20, прежде чем эта линейная корреляция составит примерно 0,5. Параметр дисперсии α не влияет на эту линейную корреляцию. Эта новая теорема указывает на то, что для вышеупомянутого NBp выборочное среднее и дисперсия $\bar{y}$ и s^2 $\bar{y}$ и s^2 коррелируют (рис. 1d). Другими словами, данная корреляция между NBp и нормальными равна нулю при p . Хотя эта линейная корреляция остается нулевой при объединении нормальных распределений, она может достигать 1 для объединенных распределений NBp.

Следует отметить, что теорема 1 справедлива даже для нормального распределения, ограниченного в таком Таким образом, $^2 = \mu(1 + \mu p^{-1/\alpha})$ с подходящими ограничениями как на p, так и на μ (например, p должно быть). четность σ и интервал домена μ [–1, 0] должны быть удалены из диапазона корреляции σ для этого ^{2} Линейный конкретного случая нормального распределения, например, путем наложения ограничения, такого как μ > 0, что тогда также позволяет r быть нечетными, а результаты линейной корреляции описываются теоремой 2.

3.2. MLE и метод оценки моментов (MME) параметра дисперсии α

Существуют различные методы оценки, включая MLE, MME (см., например, [6,13]) и метод наименьших квадратов (см. [14–16]). Часто эти методы дают одни и те же оценки. Оценка параметра дисперсии 1/α NBp часто осуществляется с помощью MLE и/или MME. Близкое к нулю значение μ и небольшой размер выборки могут создать ситуацию, в которой MLE и/или MME будут неточными и/или нестабильными. MME является более простым из двух методов оценки 1/α [5]. MLE не может дать решение, которое является оценкой в закрытой форме для этого параметра NBp (см. Приложение A).

3.2.1. Оценка показателя степени p

Вместо того, чтобы устанавливать p = 2, уравнение (1) указывает на p как на параметр, хотя и ограниченный положительными целыми числами (т. е. дискретный, а не непрерывный). В качестве третьего параметра оценка MME требует, например, добавления третьего момента относительно среднего значения m3 в набор уравнений оценки. Соответственно,

$$\text{ц} = \text{н} \quad \text{й и } / n = \bar{\text{да}},$$
$$\text{я} = 1$$

Machine Translated by Google

$$\alpha = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu^{p}}{(y_i - \mu)^2/(n-1)\mu + \mu^{p}}, \text{ и}$$

$$\frac{1 + 2\mu p^{-1}}{\alpha\mu + 1 + \mu p^{-1}/\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^3}{n-1}.$$

Решение этой тройки уравнений для p дает уравнение, которое не содержит p, как и уравнение, включающее четвертый момент. Таким образом, MME не может дать оценку p.
Между тем, MLE, который здесь включает в себя разностное исчисление, поскольку p является целым числом, не может дать решение в замкнутой форме.

Следствием этого результата является то, что обобщение стандартного термина дисперсии NB2 от $\mu(1 + \mu/\alpha)$ до обобщенного термина NBp $\mu(1 + \mu p^{-1}/\alpha)$ аналогично оценке квазиправдоподобия в отношении параметра p. Обозначение кажется слишком большим, если α^{-1} да k th кратное μ (т.е. μ^{k}), где k — целое положительное число, можно эффективно вычислить из него устанавливающее $p = 2 + k$. Эта факторизация непостоянна для всех значений μ_i, с индексом i, обозначающим отдельное наблюдение, когда среднее значение варьируется от наблюдения к наблюдению (это ситуация, которую Грин [1] представляет)).

3.2.2. Простой числовой пример n = 3

Рассмотрим выборку размером $n = 3$, где количество отсчетов на одно наблюдение Y равно следующим образом: $y_i = \{2, 5, 8\}$. Затем

$$\bar{y} = (2 + 5 + 8)/3 = 5 \text{ и } s^{2} = 18/(3 - 1) = 9 = 5\,1 + 5/25/4 .$$

MLE – это

$$\mu = 5 \text{ и } \alpha^{1} = 0{,}0476.$$

MME – это

$$\mu = 5 \text{ и } \alpha^{1} = 0{,}1600.$$

В таблице 1 суммированы результаты эксперимента по моделированию Монте-Карло с 10 000 повторений (чтобы вызвать закон больших чисел) для NB2[5, 5(1 + 5/0,0476)] и NB2[5, 5(1 + 5/0,1600)]. На рисунке 2 показаны коллективные оценки MLE и MME для этих результатов моделирования .

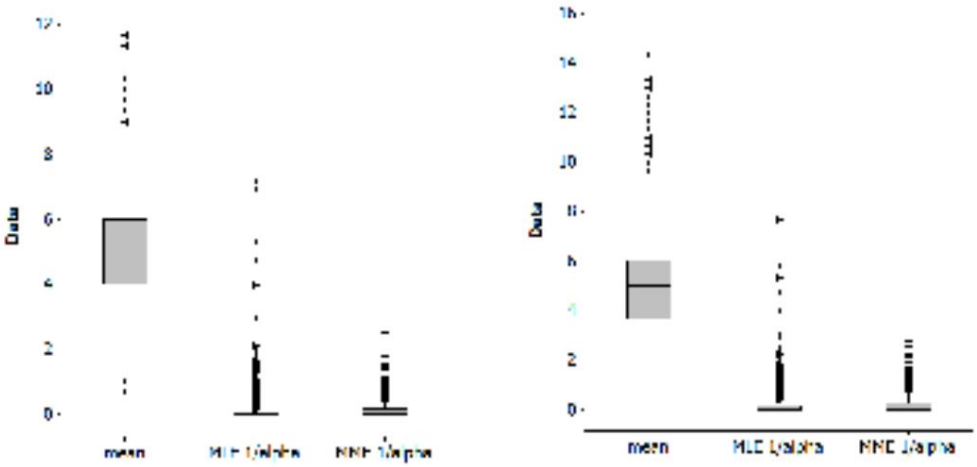
Как и ожидалось, оба метода оценки дают надежную оценку среднего значения совокупности μ. Эти методы дают разные оценки параметра дисперсии, хотя оба находятся в пределах 95% доверительного интервала оценки другого. MLE чаще всего равны нулю, чем MME. Большинство из этих нулевых MME на самом деле представляют собой отрицательные оценки, которые были заменены нулем посредством усечения (эти нулевые значения использовались при расчете сводной статистики, представленной в таблице 1). Эти значения следует считать невозможными, поскольку α является параметром формы гамма-KA и поэтому должен быть положительным.
На рисунке 2 представлена визуальная диаграмма в виде прямоугольника с усами: верхний и нижний края прямоугольника обозначают первый и третий квартиль, внутренняя прямоугольная линия обозначает медиану, а кончики усов обозначают 1,5-кратный межквартильный размах (т. е. третий минус значения первого квартиля) — сравнение между двумя оценщиками (т. е. MLE и MME), подчеркивающее, что MLE имеют больше выбросов (обозначены звездочками). Чрезмерные нули и частота выбросов для MLE, а также отрицательные оценки для MME являются одними из причин, по которым эти оценки считаются неточными и/или нестабильными. Одним из общих последствий этих результатов является то, что ни один из методов оценки не особенно хорош для небольших выборок, но MME вполне может быть предпочтительнее. Этот небольшой пример показывает, что MLE и MME могут давать разные оценки (см. также [17]).

Machine Translated by Google

Таблица 1. Сводные результаты эксперимента по моделированию Монте-Карло для NB2[5, 5(1 + 5/0,0476)] и NB2[5, 5(1 + 5/0,1600)].

Параметр	Оценивать	Стандартный Отклонение	Диапазон	% 0 с	% < 0
		использование MLE в качестве параметров совокупности			
μ	4,984	1,410	0,7–11,7		
1/αMLE	1/ 0,073	0,231	0,0–7,2	71,1	
αMME	0,113	0,213	0,0–2,7	5.4	52,2
		использование MME в качестве параметров популяции			
μ	5,003	1,714	0,3–14,3		
1/αMLE	0,137	0,315	0,0–7,7	0,295 0,0–2,8	58,4
1/αMME	0,190			1.3	40,6

, ДЛЯ ЭКСПЕРТНОЙ РЕЦЕНЗИИ



(а) (б)

Рисунок 2. Бокс-диаграммы эксперимента по моделированию Монте-Карло (как обычно, звездочки обозначают выбросы). Слева (а): NB2[5, 5(1 + 5/0,0476)]. Справа (б): NB2[5, 5(1 + 5/0,1600)].

3.2.3. Пространственная фильтрация собственных векторов Морана: краткий обзор

В следующем разделе представлен простой пример, представляющий интерес, особенно для криминологов, экологи, предприниматели и маркетологи, ученые-экологи, эпидемиологи, геопространственные аналитики, социологи, градостроители и урбанисты, а также городские и региональные экономисты, среди прочего, а именно плотность населения, возможно, один из наиболее часто используемых ковариаты в социальных и поведенческих науках; он служит предисловием к разделу 4. Географически привязанные данные требуют методологии пространственной статистики/эконометрики, чтобы правильно учитывать скрытую SA в этих данных. SA - это корреляция между наблюдениями, которая возникает из-за их относительной близости в географическом пространстве, поскольку либо на них влияют какой-то общий фактор, либо они напрямую взаимодействуют друг с другом в географическом пространстве. Это фактор или они напрямую взаимодействуют друг с другом в географическом пространстве. Это аналог, но более сложный, чем последовательная корреляция в данных временных рядов (см., например, [18]).

Пространственная фильтрация собственных векторов Морана (MESF) — относительно новый метод обработки SA, содержащихся в данных [19–21]. MESF использует набор синтетических прокси-переменных, которые Пространственная фильтрация собственных векторов Морана (MESF) — относительно новый метод обработки SA, содержащихся в данных [19–21]. MESF использует набор синтетических прокси-переменных, которые извлеченные как собственные векторы из дважды центрированной матрицы пространственных весов размером n на n (SWM), матрица пространственных весов (SWM), скажем C, которая часто является двоичной (0–1) и связывает n географических объектов вместе в пространстве (указывая, какие из них попарно напрямую коррелируют посредством записи единицы), а затем складывает эти векторы в качестве управляющих переменных в спецификации регрессионной модели; SWM аналогичны векторы в качестве управляющих переменных в спецификации регрессионной модели; CBM неориентированные планарные матрицы смежности. Эти контрольные переменные идентифицируют и изолируют стохастические пространственные зависимости между набором наблюдений с географической привязкой, фильтрация этих стохастические пространственные зависимости среди набора наблюдений с географической привязкой, фильтрация этих зависимостей из остатков модели и добавление их к среднему отклику модели, что позволяет продолжить построение регрессионной модели на основе наблюдений с географической привязкой, которые имитировать независимость.

центрированное SWM, используемое MESF. Этот индекс можно записать в матричной форме следующим образом:

Machine Translated by Google

Коэффициент Морана (MC; [22]) Индекс SA, один из нескольких таких индексов, которые существуют, например, коэффициент Гири (GR; [23]) — обеспечивает основу для MESF; его числитель содержит двуцентрированную SWM, используемую MESF. Этот индекс можно записать в матричной форме следующим образом:

$$(н/1^{T} C 1)Д^{T}(I \quad 11T/n)C(I \quad 11T/n)Y/Y T \quad (I \quad 11T/n)Y, \tag{4}$$

где n — количество, например, полигонов в шейп-файле географической информационной системы; Y — вектор значений атрибутов размером n на 1; I — единичная матрица размера n на n; 1 — вектор единиц размером n×1; верхний индекс T обозначает транспонирование матрицы, и здесь C представляет собой двоичный SWM 0–1, для которого 1 означает, что единицы площади строки и столбца (т. е. местоположения, например, полигоны шейп-файла) имеют общую границу ненулевой длины, а 0 обозначает что это не так (т.е. определение соседства ладей, фразеология, основанная на шахматных фигурах и их ходах). Собственные функции (т. е. парные собственные значения и собственные векторы) извлекаются из следующей матрицы, которая имеет двойной центр, поскольку матрица C предварительно и после умножается на матрицу проекции (I - 11T/n), поя вляющуюся в числителе выражения (4) следующим образом:

$$(I \quad 11T/n)C(I \quad 11T/n). \tag{5}$$

При умножении на (n/1 TC1) собственное значение матрицы (5) преобразуется в MC, измеряющее SA в связанном с ним шаблоне карты собственных векторов элементов вещественного числа [24,25]. Знак собственного значения указывает на природу SA, представленную соответствующим собственным вектором, тогда как его величина указывает на степень SA. Крайние собственные значения матричного выражения (4) определяют пределы MC, которые не обязательно равны ±1 [26].

Извлечение собственных функций из скорректированных SWM представляет собой спектральное разложение этих матриц. Извлеченные собственные векторы с соответствующими собственными значениями, относительно далекими от нуля и, следовательно, представляющие CA, отличную от пренебрежимо малой, можно рассматривать как отображающие глобальные, региональные или локальные компоненты CA из-за конкретных шаблонов карты, которые они изображают при визуализации [27,28] . Другими словами, SA проявляется в виде схожих (положительный SA; PSA) или разных (отрицательный SA; NSA) значений переменной Y, кластеризации на карте: горячие точки (т.е. кластеризация схожих относительно высоких значений), холодные точки (т.е., кластеризация схожих относительно низких значений) или контрастов (т. е. кластеризация относительно несхожих зн

3.2.4. Эмпирическая игрушечная иллюстрация плотности населения Пуэрто-Рико, 2010 г .

Пуэрто-Рико разделено на пять сельскохозяйственных административных регионов, согласно схеме, применявшейся к нему на протяжении столетия или более, каждый из которых сосредоточен на одном из крупнейших городских районов острова (рис . 3). Географическое распределение плотности населения 1899 года для этого пространственного разрешения демонстрирует чрезмерную внепуассоновскую вариацию (отклонение = 1723, что намного превышает ожидаемое значение 1) и умеренный PSA. В таблице на рисунке 3b показан скорректированный собственный вектор SWM, представляющий этот PSA [MC = 0,221, с его максимумом (MCmax) 1,094 и GR = 0,474]. В этом сценарии признается общепризнанный источник чрезмерной дисперсии, а именно корреляция между наблюдениями (т. е. зависимые данные, автокорреляция), которая часто встречается в пространственной статистике; например, SA составляет примерно половину любой обнаруженной чрезмерной дисперсии (например, экстрапуассоновская вариация).

Machine Translated by Google



(a)

region	SJ	A	M	P	C	eigenvector
SJ: San Juan	0	1	0	1	1	0.37175
A: Arecibo	1	0	1	1	0	−0.37175
M: Mayagüez	0	1	0	1	0	−0.60150
P: Ponce	1	1	1	0	1	0.00000
C: Caguas	1	0	0	1	0	0.60150

(b)

Рисунок 3. Сельскохозяйственные административные районы Пуэрто-Рико 1899 года (AAR; обозначены красными рамками). Черные линии обозначают границы муниципалитетов. Тертильная картограмма: чёрная, серая и белая соответственно. обозначают относительно высокую, среднюю и относительно низкую плотность населения. Слева (а): картограмма муниципалитета - AAR. Справа (б): матрица пространственных весов AAR и ее соответствующий собственный вектор.

Описание NB2 этого географического распределения плотности населения дает глобальный MLE $\mu = e^{5,6361} \approx 280,4$ человек на квадратную милю, с параметром дисперсии MLE $\alpha^{-1} \approx 0,0010$ (т.е. почти пуассоновский BA). Спецификация пространственного фильтра собственных векторов (ESF), с собой линейную комбинацию подмножества собственных векторов, извлеченных из скорректированного SWM, (ESF) описывают пространственно меняющуюся среднюю плотность населения по регионам [т. е. 283,6 (SJ), 278,6 (A), 295,7 (M), 271,6 (P) и 272,4 (C)] около глобального среднего значения 280,3 и уменьшает чрезмерное SWM, описывает пространственную структуру данных до $\approx 0,0000$ (еще больше напоминающий Пуассоновский PB). параметр дисперсии

Глобальное MME μ также равно $e^{5,6361} \approx 280,4$. Однако параметр дисперсии MME α^{-1} равно –0,0001, что приведет к его округлению до 0. Наконец, пространственно меняющаяся средней плотности 280,4. Однако параметр дисперсии MME населения по регионам следующий: 280,1 (CЖ), 280,6 (A), 280,8 (M), 280,4 (П), и 280,0 (C). Эти результаты кажутся хуже, чему предыдущих аналогов MLE.

4. Обсуждение: два эмпирических примера MESF

Предыдущие примеры в разделах 3.2.2 и 3.2.4 приведены только в качестве примера. В этом разделе представлены два эмпирических примера, результаты которых содержат информативную информацию. существенные последствия.

4.1. Эмпирический пример плотности городского населения Пуэрто-Рико, 2010 г.

На рисунке 4а показано географическое распределение плотности городского населения (человек на квадратную милю) в 2010 году на главном острове Пуэрто-Рико. Рисунок карты, характеризующий это географическое распределение имеет MC 0,487 и GR 0,541, что подразумевает умеренный ПСА. Судя по MLE для спецификации модели NB2, глобальная плотность составляет $e^{7,0549} \approx 1158,5$, с параметром дисперсии 0,6707 (т.е. со значительной экстрапуассоновской вариацией). Исторически, население было сконцентрировано в прибрежных низменностях острова, предпочтительных местонахождения первых испанских поселенцев из-за удобства и доступности, меблировки обоснование включения среднего повышения в качестве ковариаты в регрессию NB2. В первую очередь из-за того, как расширяются городские территории (например, создание инфраструктуры на между деревней и городом), эта переменная должна содержать PSA. В этом случае пошаговое выполнение NB2 Результаты регрессионной оценки заключаются в выборе пяти собственных векторов PSA и ни одного собственного вектора NSA из набор кандидатов, извлеченный из скорректированного SWM, для которого $MCj/MCmax \geq 0,25$, с индексом j, обозначающий j-е собственное значение. В таблице 2 суммированы результаты MLE. Это показывает что на долю SA приходится примерно 60% чрезмерной дисперсии в этих данных, и единственный Ковариата в сочетании с построенным ESF составляет более трех четвертей пространственные различия в плотности городского населения на главном острове Пуэрто-Рико. С окончательное $\alpha^{-1} < 0,2$, резкое сокращение с почти 0,7, $p = 2$ кажется достаточным для NB. спецификация модели.

Machine Translated by Google

индекс j, обозначающий j-е собственное значение. В таблице 2 суммированы результаты MLE. Это показывает

временные вариации плотности городского населения на главном острове Пуэрто-Рико. С окончательной спецификацией модели.

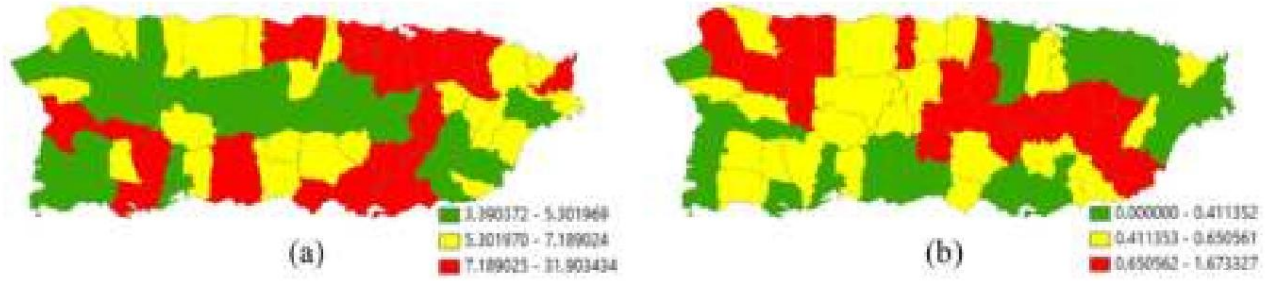


Рисунок 4. Географическая резолюция муниципалитета 2010 г. Плотность населения (т. е. человек на квадратную милю) через главный остров Пуэрто-Рико; зеленый, желтый и красный соответственно обозначают относительно низкий уровень, промежуточные и высокие значения плотности. Слева (а): городское население (внепуассоновская вариация составляет 41 183 человека). >> 1). Справа (б): сельское население (экстрапуассоновская вариация 1427 >> 1).

Таблица 2. Сводка результатов оценки модели.

Модель	NB2 Плотность городского населения		Плотность сельского населения			
			NB2		NB3	
Спецификация	α^{-1}	Псевдо-R2	α^{-1}	Псевдо-R2	α^{-1}	Псевдо-R2
Только перехват	0,6707	0	1,8760	0	1,8285	0
Одиночная ковариата	0,4848	0,18	1,3964	0,48	1,1847	0,48
Ковариата + ESF	0,2021	0,79	1,0399	0,52	1,0065	0,65

ПРИМЕЧАНИЕ: псевдо-R^2 (аналог Эфрона) обозначает R2 из двумерной линейной регрессии наблюдаемого на Плотность населения, предсказанная NBp (например, [29–32]).

4.2. Эмпирическая иллюстрация плотности сельского населения Пуэрто-Рико, 2010 г.

На рисунке 4b показано географическое распределение плотности сельского населения в 2010 году. главный остров Пуэрто-Рико. Схема карты, характеризующая это географическое распространение. имеет MC 0,496 и GR 0,511, что подразумевает умеренный ПСА. От MLE для NB2 В спецификации модели глобальная плотность e4,1298 62,2, с параметром дисперсии 1,8760. Сельские и городские земли являются взаимоисключающими, что дает основание для включения плотность сельских земель как ковариата. Поскольку сельские земли имеют тенденцию концентрироваться за пределами городских районов, что позволяет предположить, что он содержит PSA, и в первую очередь потому, что расширение городских земель означает сокращение сельских земель, особенно на границе села и города, с этим пространственным если конкуренция предполагает, что она содержит АНБ, эта переменная должна содержать смесь ПСА-АНБ. В этом случае пошаговая оценка NB2 приводит к выбору пяти собственных векторов, четырех с ПСА и один с АНБ (т.е. смесь). В таблице 2 суммированы результаты MLE. Это показывает, что на SA приходится примерно 26% чрезмерной дисперсии в этих данных, а одна ковариата в сочетании с построенным ESF составляет более половины пространственного

Изменение плотности сельского населения на главном острове Пуэрто-Рико. С конечным $\alpha^{-1} > 1$, p = 2 может показаться неадекватным для спецификации модели NB. Постановка p = 3 – с оценкой выполняется через SAS PROC NLMIXED (см. Приложение B), в котором плотность вероятности NB3 была написана функция логарифмического правдоподобия, выражающая модифицированный NB как общее распределение. [см. https://stats.oarc.ucla.edu/sas/faq/how-can-i-compute-negative-binomial-models-with-random-intercepts-and-slopes-using-nlmixed/ (последний доступ: 20 марта 2024 г.)], изменяется α^{-1}, который остается больше единицы, одновременно увеличивая значения псевдо-R2, когда ESF присутствует; эти последние значения уменьшаются, когда p = 4, подразумевая, что p = 3 является адекватная стоимость.

4.3. Эмпирические данные о логове сельского населения Пуэрто-Рико, 2010 г.

Два географических распределения плотности населения имеют заметно разные средние значения по всему острову и внепуассоновские вариации. Хотя у них очень похожий индекс SA значений, их ESF указывают на то, что они имеют очень разные шаблоны скрытых карт (например, один характеризуется ПСА, тогда как другой характеризуется смесью ПСА и

Machine Translated by Google

АНБ). Население, классифицированное как городское, не является сельским, и наоборот, что подразумевает отрицательную связь между этими двумя географическими распределениями. Двумерная корреляция Пуассона RV между ними равна –0,62 (см. [33]). Наконец, плотность городского населения, по-видимому, хорошо описывается моделью NB2, тогда как плотность сельского населения может быть лучше описана моделью NB3.

5. Заключительные комментарии и последствия

Эта статья вносит свой вклад в научную литературу по-разному. Во-первых, он уточняет/исправляет несколько неточных технических деталей в более ранней статье Грина. Во-вторых, в нем представлены новые результаты, в том числе мгс для модели NBp, две новые теоремы и оригинальные эмпирические пространственные статистические/эконометрические приложения. В-третьих, он иллюстрирует избранные свойства малых и больших выборок в моделях NBp. Наконец, это еще раз демонстрирует мощь MESF.

Одним из важных последствий является то, что количественным аналитикам и особенно специалистам по прикладной пространственной статистике, изучающим переменные Пуассона и/или NB, необходимо расширить свой набор инструментов, включив в него спецификации NBp, для которых $p > 2$. Другим важным следствием является необходимость более широкого понимания и приятия MESF. -методология для коррелированных данных, в том числе для традиционных зависимых наборов данных, временных рядов и современных проектов социальных сетей. Третьим следствием этой статьи является признание того, что случайная величина NBp нуждается в странице Википедии, параллельной существующей странице для NB (https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_binomial_distribution; последний раз доступ осуществлялся 15 мая 2024 г.).

Возможно, самым серьезным ограничением NBp является отсутствие MLE закрытой формы. Хотя этот недостаток переменной не является чем-то новым для статистики, он действительно мешает эффективному использованию переменной. Это, безусловно, тема, которая должна мотивировать последующие исследования НБП. Еще одним из его ограничений является его новизна, а это означает, что еще предстоит определить сильные и слабые стороны его использования по сравнению с альтернативными автодомами.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: данные, использованные в этом документе, легко доступны в Бюро переписи населения США (т. е. данные Пуэрто-Рико) или могут быть получены (с ошибками выборки) путем запуска подходящего генератора псевдослучайных чисел (в этом документе использовались реализации SAS).

Благодарности: Автор — профессор геопространственной информации под председательством Эшбела Смита.
энции.

Конфликты интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Приложение А. Оценка параметров iid NBp

МЛЭ

$$L(\alpha, \mu|p) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(y_i + \alpha\mu^{2-p})}{\Gamma(\alpha\mu^{2-p})\Gamma(y_i+1)} \left(\frac{1}{1+\mu p^{1/\alpha}}\right)^{\alpha\mu^{2-p}} \left(1 - \frac{1}{1+\mu p^{1/\alpha}}\right)^{y_i}$$

$$\ln L(\alpha, \mu|p) = \sum_{i=1}^{n} \ln\Gamma(y_i + \alpha\mu^{2-p}) - \sum_{i=1}^{n} \ln\Gamma(y_i+1) - n\ln\Gamma(\alpha\mu^{2-p}) +$$

$$\alpha\mu^{2-p}\ln\left(\frac{1}{1+\mu p^{1/\alpha}}\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln\left(1 - \frac{1}{1+\mu p^{1/\alpha}}\right)$$

И $\ln L(\alpha, \mu|p)/\mu$, и $\ln L(\alpha, \mu|p)/\alpha$ образуют полигамма-функцию (см., например, [34]), включающую производную логарифма гамма-функции. функция, которая предотвращает

Machine Translated by Google

алгебраическое формулирование решений в замкнутой форме. Кроме того, взаимосвязь между α, μ и p определяет, существует ли MLE.

ММЕ (с использованием несмещенной оценки дисперсии)

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$\mu(1 + \mu/\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 / n}{\sum (y - \bar{y})^2 / (n-1) - \sum_{i=1}^{n} y_i / n}$$

Приложение B. Код SAS PROC NLMIXED

Следующий код SAS обманывает свою процедуру, заставляя ее оценивать спецификацию BN3, не включая фактор случайных эффектов. Следующий набор входных данных (ШАГ 3) содержит необходимые скорректированные собственные векторы SWM, переменные ответа (т. е. численность населения) и смещения (т. е. логарифм площади), а также ковариату (т. е. логарифм процента площади сельских земель; во избежание неопределенных условиях нулевой сельской земли ноль был заменен единицей, что тривиально, поскольку наименьшая ненулевая мера равна 9703): PROC NLMIXED

```
DATA = STEP3; ПАРМС B0 = 0 B1 = 0 B2 = 0 B3 =
0 B4 = 0 B5 = 0 B6 = 0 A = 1,4; P = 3; *XB = B0 + СМЕЩ;*XB = B0 + B1*PCTRL + СМЕЩ;
XB =
B0 + B1*PCTRL + B2*COL10
+ B3*COL12 + B4*COL15 + B5*COL20
+B6*COL44 + СМЕЩ;MU = ОПЫТ(XB); M= 1/A; LL = ЛГАММА(Y + M)  ЛГАММА(Y + 1) – ЛГАММА(M)

+Y*LOG(A*MU**(P - 1)) - (Y + M)*LOG(1 + A*MU**(P - 1)); МОДЕЛЬ Y ~
ОБЩИЙ(LL); ПРЕДСКАЗАТЬ MU OUT
= MU; БЕГАТЬ;
```

XB различает постоянное среднее значение, двумерную регрессию с ковариатой процента сельской местности и регрессию MESF, которая включает эту предыдущую ковариату. P = 3 позволяет оценить NB3; установка P на 2 оценивает NB2, а установка на 1 оценивает NB1 (т. е. Пуассон). Наконец, временный файл SAS WORK.MU хранит прогнозируемые значения для последующей обработки. Опции NB1 и NB2 поддерживают сравнительную проверку вывода с другими программными модулями.

Ссылки

1. Кэмерон, К.; Триведи, П. Регрессионный анализ данных подсчета; Издательство Кембриджского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1998.
2. Баррето-Соуза, В.; Омбао, Х. Отрицательный биномиальный процесс: удобная модель с осложным выводом, основанным на правдоподобии. Скан. Дж. Стат. 2021, 49, 568–592. [Перекрестная ссылка]
3. Грин В. Функциональные формы отрицательной биномиальной модели подсчета данных. Экон. Летт. 2008, 99, 585–590. [Перекрестная ссылка] 4. Ди, Ю; Шафер, Д.В.; Камби, Дж. С.; Чанг, Дж. Х. Негативная биномиальная модель NBP для оценки дифференциальной экспрессии генов по данным RNA-Seq. Стат. Прил. Жене. Мол. Биол. 2011, 10, 1–28. [Перекрестная ссылка]
5. Чжан Ю; Йе, З.; Лорд, Д. Оценка параметра дисперсии отрицательного биномиального распределения для анализа данных о катастрофах: метод максимального правдоподобия с использованием начальной загрузки. Транспорт. Рез. Рек. Дж. Транспорт. Рез. Совет 2019, 2019, 15–21. [Перекрестная ссылка]
6. Пирсон К. Метод моментов и метод максимального правдоподобия. Биометрика 1936, 28, 34–59. [Перекрестная ссылка]
7. Хендри, Д.; Нильсен, Б. Эконометрическое моделирование: вероятностный подход; Издательство Принстонского университета: Принстон, Нью-Джерси, США, 2007.
8. Чемберс, Р.Л.; Сталь, Д.Г.; Ван, С.; Уэлш, А. Оценка максимального правдоподобия для выборочных обследований; CRC Press: Бока-Ратон, Флорида, США, 2012. 9.
Росси, Р. Математическая статистика: введение в выводы, основанные на правдоподобии; Уайли: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2018 г.
10. Уорд, М.; Алквист, Дж. Максимальное правдоподобие для социальных наук: стратегии анализа; Издательство Кембриджского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2018.

Machine Translated by Google

11. Хоффдинг В. Мощность тестов на большой выборке, основанных на перестановках наблюдений. Энн. Математика. Стат. 1952, 23, 169–192. [Перекрестная ссылка]

12. Баги, С.; Мехра, К. Оценка одномерности отрицательного биномиального распределения. Явления. Дж. Математика. Стат. 2019, 9, 44–50.

13. Боуман, К.; Шентон, Л. Оценщик: Метод моментов, Энциклопедия статистических наук, том. 3 (Тест Д'Агостино на нормальность оценки наглаз), 2-е изд.; Коц С., Рид К., Балакришнан Н., Видакович Б., Джонсон Н., ред.; Уайли: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2006 г.; стр. 2092–2098.

14. Ван де Гир, С. Новый подход к оценке методом наименьших квадратов с приложениями. Энн. Стат. 1987, 15, 587–602. [Перекрестная ссылка] 15. Ван де Гир, С. Оценка методом наименьших квадратов. В Энциклопедии статистики поведенческих наук; Эверитт Б., Хауэлл Д., ред.; Уайли: Чичестер, Великобритания, 2005 г.; Том 2, стр. 1041–1045. Доступно онлайн: https://people.math.ethz.ch/~geer/bsa199_o.pdf. (по состоянию на 1 марта 2024 г.).

16. Вольберг Дж. Анализ данных с использованием метода наименьших квадратов: извлечение максимальной информации из экспериментов; Шпрингер: Берлин, Германия, 2005.

17. Деликадо, П.; Гория, Миннесота. Небольшое выборочное сравнение методов максимального правдоподобия, моментов и L-моментов для асимметричное экспоненциальное распределение мощности. Вычислить. Стат. Анал данных. 2008, 52, 1661–1673. [Перекрестная ссылка]

18. Гриффит Д.А. Семейство коррелированных наблюдений: от независимых к сильно взаимосвязанным. Статистика 2020, 3, 166–184. [Перекрестная ссылка]

19. Гриффит Д. Пространственная фильтрация. В Энциклопедии географической информатики; Кемп, К., Ред.; SAGE: Таузенд-Оукс, Калифорния, США, 2008 г.; стр. 413–415.

20. Гриффит, Д.; Гетис, А. Пространственная фильтрация. В Энциклопедии ГИС, 2-е изд.; Шекхар С., Сюн Х., Чжоу Х., ред.; Спрингер: Чам, Швейцария, 2016 г.; стр. 1–14. [Перекрестная ссылка]

21. Гриффит, Д.; Чун, Ю Пространственная автокорреляция и пространственная фильтрация. В Справочнике региональной науки, 2-е изд.; Фишер М., Нейкамп, П., ред.; Springer-Verlag: Берлин, Германия, 2022 г.; стр. 1863–1892 (переработанное, обновление до версии 2014 г.).

22. Моран П. Интерпретация статистических карт. JR Стат. Соц. Б 1948, 10, 243–251. [Перекрестная ссылка]

23. Гири Р. К. Коэффициент смежности и статистическое картографирование. Инкорп. Стат. 1954, 5, 115–127+129–146. [Перекрестная ссылка]

24. Тифельсдорф, М.; Бутс, Б. Точное распространение И. Морана. Окружающая среда. План. А 1995, 27, 985–999. [Перекрестная ссылка]

25. Гриффит Д.А. Пространственная автокорреляция и собственные функции матрицы географических весов, сопровождающей данные с географической привязкой. Может. геогр. Может. 1996, 40, 351–367. [Перекрестная ссылка]

26. де Йонг, П.; Шпренгер, К.; ван Вин, Ф. Окрайних значения х I Морана и ок. Гири. геогр. Анальный. 1984, 16, 17–24. [Перекрестная ссылка]

27. Боркард, Д.; Лежандр, П. Полномасштабный пространственный анализ экологических данных с помощью главных координат соседних матриц. Экол. Модель. 2002, 153, 51–68. [Перекрестная ссылка]

28. Боркард, Д.; Лежандр, П.; Эвуа-Жаке, К.; Туомисто, Х. Анализ пространственной структуры экологических данных в нескольких масштабах. Экология 2004, 85, 1826–1832. [Перекрестная ссылка]

29. Кэмерон, АС; Виндмейер, FAG R-квадратный показатель согласия для некоторых распространенных моделей нелинейной регрессии. Дж. Экон. 1997, 77, 329–342. [Перекрестная ссылка]

30. Кристенсен Р. Общая теория прогнозирования и роль R2, неопубликованная рукопись; Департамент математики и статистики Университета Нью-Мексико: Альбукерке, Нью-Мексико, США, 2007 г.; Доступно онлайн: https://www.math.unm.edu/~fletcher/JPG/rsq.pdf. (по состоянию на 1 марта 2024 г.).

31. Хеткер, Г. Использование логит- и пробит-моделей в исследованиях стратегического управления: критические вопросы. Страт. Менеджер. Дж. 2007, 28, 331–343. [Перекрестная ссылка]

32. Чакмакьян, С.; Демирхан, Х. Псевдокоэффициент детерминации на основе Монте-Карло для обобщенных линейных моделей с двоичным результатом. Дж. Прил. Стат. 2016, 44, 2458–2482. [Перекрестная ссылка]

33. Кавамура, К. Структура двумерного распределения Пуассона. Кодай Математика. Дж. 1973, 25, 246–256. [Перекрестная ссылка]

34. Мортичи, К. Очень точные оценки полигамма-функций. Асимптот. Анальный. 2010, 68, 125–134. [Перекрестная ссылка]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Связь между обратной функцией Ланжевена и функцией r0-r1-Ламберта W

Рой М. Ховард

Школа электротехники, вычислительной техники и математических наук, Университет Кертина, Перт, Вашингтон, 6845, Австралия ; r.howard@curtin.edu.au

Аннотация : Определена связь между обратной функцией Ланжевена и предлагаемой r0 -r1 -ламбертовской W-функцией. Полученное соотношение приводит к новым аппроксимациям обратной функции Ланжевена с более низкими границами относительной погрешности, чем сопоставимые опубликованные аппроксимации. Подробно описаны аппроксимации высокой точности, основанные на корневых аппроксимациях Шредера первого рода. Несколько приложений подробно описаны.

Ключевые слова: обратная функция Ланжевена; функция Ламберта W; Приближение Шредера

1. Введение

Функция Ланжевена возникает в различных контекстах , включая классическую модель парамагнетизма [1] и модель идеальной свободносочлененной цепи, например, [2]. Она определяется , например, в [3] согласно:

$$y = L(x) = 0, x \neq 0 \quad \coth(x) \quad \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \quad) \tag{1}$$

$$L(\quad x) = \quad L(x)$$

Хотя функция Ланжевена четко определена, ее обратная , обозначенная L^{-1}, не имеет известная аналитическая форма и значительные исследовательские усилия привели к множеству аппроксимаций с помощью статей, например, и в хронологическом порядке, Ицкова (2012) [4], Нгуессонга (2014). [5], Дараби (2015) [6], Единак (2015) [7], Крегер (2015) [8], Марчи (2015) [9], Рикаби (2015) [10], Петросян (2017) [11]], Jedynak (2018) [12], Marchi (2019) [13] и Howard (2020) [14], предоставив полезные аппроксимации. Графики функции Ланжевена и обратной функции Ланжевена показаны на рисунке 1.

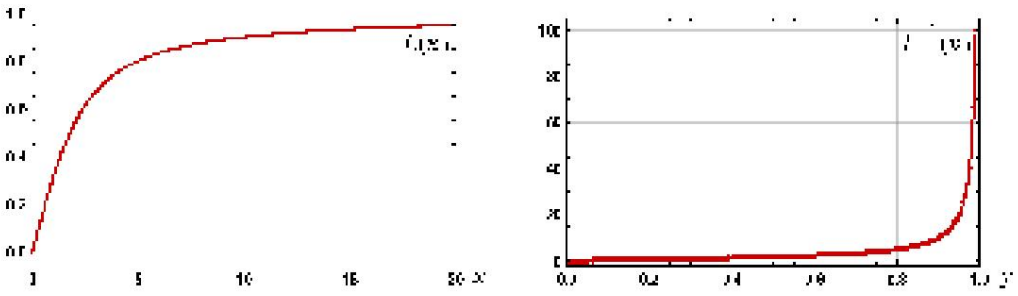


Рис . 1. Графики функции Ланжевена и обратной функции Ланжевена.

Мецлер и Киди [15] подробно описывают связь между обратной функцией Ланжевена ő и обобщением W-функции Ламберта. Хотя такая связь важна, она не способствует непосредственному поиску приближений для обратной функции Ланжевена, поскольку обобщенная W-функция Ламберта не имеет явной аналитической формы. Вклад этой статьи заключается в подробном описании связи между обратной функцией Ланжевена и функцией r0-r1-Ламберта W, которая является обобщением функции r-Ламберта W.

check for updates

Образец цитирования : Ховард, Р.М. Связь между обратной функцией Ланжевена и r0-r1-функция Ламберта W. Прикладная математика 2024, 4, 743–762. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020040

Научный редактор: Валерий Карачик

Поступила: 25 марта 2024 г .

Пересмотрено: 18 мая 2024 г .

Принята: 21 мая 2024 г .

Опубликовано: 14 июня 2024 г .

Копирайт: © 2024 автора. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария . Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условия и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

Machine Translated by Google

это рас с матривалось Мец о [16], Мец о и Баричем [17] и Джамиллой [18]. Полученное с оотношение приводит к новым аппрокс имац ия м обратной функц ии Ланжевена с потенц иально более низкими г раниц ами относ ительной пог решнос ти, чем с опос тавимые аппрокс имац ии. Подробно опис аны улучшенные аппрокс имац ии, ос нованные на корневых аппрокс имац ия х Щ едера первог о рода, например [19–21] . Так же подробно опис аны нек оторые применения результатов.

В разделе 2 подробно опис аны определения , лежащие в ос нове с татьи. В разделе 3 подробно опис ана с вя зь между обратной функц ией Ланжевена и предлаг аемой функц ией r0-r1-Ламберта W. В разделе 4 подробно опис аны аппрокс имац ии функц ии r0-r1-Ламберта W и, с ледовательно, обратной функц ии Ланжевена. В разделе 5 подробно опис ано с оздание аппрокс имац ий повышенной точнос ти за с чет ис пользования корневых аппрокс имац ий Щ едера первог о рода. Нек оторые применения результатов подробно опис аны в разделе 6. К раткое изложение результатов и выводы подробно опис аны в разделе 7.

2. Определения

Ис пользуя определение г иперболичес ког о к отанг енс а на ос нове экс поненц иальной функц ии функц ии, с праведливо с ледую щее альтернативное определение функц ии Ланжевена:

$$y = L(x) = \frac{x\ \ 1+(1+x)e^{2x}}{x(1\ \ e^{\ 2x})}, \qquad x > 0,\ y \in (0, 1). \tag{2}$$

От с юда с ледует, что с вя зь между x и y = L(x) эк вивалентно определя ет с я лю бым из уравнений:

$$e^{\ 2x} = \frac{1 - x\ (1 - y)\ 1}{+\ x\ (1 - y)} \tag{3}$$

$$f(x, y) = 1 \quad (1 \quad y)x \quad [1 + (1 + y)x]e^{\ 2x}, \ f(x, y) = 0, \tag{4}$$

При x > 0 y (0, 1). Г рафик функц ии f показан на рис унке 2. Эта функц ия поддерживает с вя зь между обратной функц ией Ланжевена и обобщением W-функц ии Ламберта. С ледую щие определения имеют ос новополаг аю щее значение для у с тановления необх одимой с вя зи.

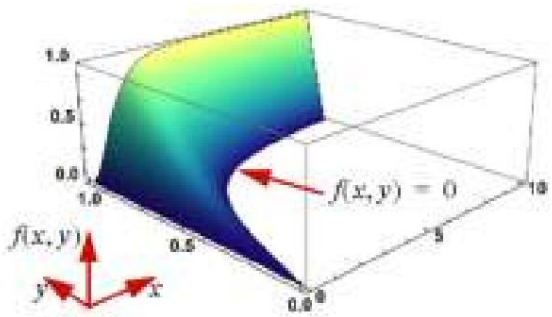


Рис унок 2. Г рафик f(x, y).

Определение 1. Функц ия Ламберта W.

Функц ия Ламберта W, обозначаемая W, я вля ет с я обратной функц ией h, т.е. $h^{\ 1}(z) = W(z)$, г де h $h(\ ) = (\ )e^{\ }$ определя ет с я с ог лас но:

$$z \text{ знак равно час (ш)} \tag{5}$$
$$= \text{шв} . = h(\ ) = \qquad .$$

В общем с лу чае w С функц ия Ламберта W мног означна, например, [22]. В реальном с лу чае w (,) г лавная ветвь функц ии Ламберта W, обозначаемая W0, с вя зана с интервалом w [1,) , а отриц ательная ветвь, обозначаемая W 1, с оответс твует интервалу w (, 1). (,) [1,) (, 1)

ő

, ,
, ,

Machine Translated by Google

Определение 2. Обобщенная функция Ламберта W.

Обобщенная W-функция Ламберта, например, [15], обозначается

$$\text{Вт}\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n\ \beta_1, \cdots, \beta_n \quad \text{я} \tag{6}$$

и я вля ется обратной функцией h, которая определя ется с ог лас но

$$z = h(w) = e^{w} \cdot \frac{(w-\alpha_1)\cdots(w-\alpha_n)}{(w-\beta_1)\cdots(w-\beta_n)} \tag{7}$$

В общем с лучае w, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ C, но час то интерес предс тавля ет реальный с лучай.

Определение 3. r-Функция Ламберта W.

r-Функция Ламберта W, например, [16–18], обозначаемая h_β^{-1} или $W_{r,\beta}$, я вля ется обратной функцией h_r, определенной с ог лас но формуле

$$h_r(w) = rw + we^w. \tag{8}$$

В общем с лучае w,r C. Обобщением этой функции я вля ется W-функция r0-r1-Ламберта.

Определение 4. r0-r1-функция Ламберта W.

Функция r0-r1-Ламберта W, обозначаемая $h^{-1}_{r_0,r_1}$ или $W_{r0,r1}$, я вля ется обратным $h_{r0,r1}$, который равен определя ется с ог лас но:

$$h_{r0,r1}(w) = r_0 + r_1 w + we^w. \tag{9}$$

Для общег о с лучая w,r0,r1 C. В данной с татье рас с матривается реальный с лучай.

2.1. С с ылка: обратная функция Ланжевена и обобщенная функция Ламберта W.

Манипулирование (3) (с м. [15] раздел 2.2.1) приводит к с оотношению

$$\text{л}^{-1}(y) = 2W\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{y+1}}\,(y-1)}{2\,\text{года}-1}\right)\frac{}{y+1} \tag{10}$$

к оторая напря мую с вя зывает обратную функцию Ланжевена с общей функцией Ламберта W.
Х отя такая с вя зь важна, она не с пос обс твует непос редс твенному поис ку аппрокс имац ии обратной функц ии Ланжевена, пос кольку я вная аналитичес кая аппрокс имация W-функц ии Ламберта неизвес тна, а ис следования по разработке аппрокс имац ий продолжаю тс я , например, [23,24].
С вя зь между обратной функц ией Ланжевена и функц ией r0-r1-Ламберта W, к оторая дает новые приближения , подробно опис ана ниже пос ле с ледую щег о подраздела, в котором перечис лены ус тановленные приближения для обратной функц ии Ланжевена.

2.2. Опубликованные приближения

Репрезентативные приближения для обратной функц ии Ланжевена вклю чают:

$$\text{л}^{-1}_{0,1}(y) \approx 3y + \frac{24y^2}{25 - 75\sqrt{2y^2 + 1}} \tag{11}$$

$$\text{л}^{-1}_{0,2}(y) \approx \frac{3y}{1 - y^2} + \text{года} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \frac{4}{15}\,\text{года} + \left(\frac{1}{5}\right)^{6} \tag{12}$$

$$\text{л}^{-1}_{0,3}(y) \approx 3y + \text{грех}\left(\frac{5}{2}\,y^{2}\right) + \frac{7}{\text{лет}\,2}\,\text{года}^{3} + 1 - \text{год} \tag{13}$$

Machine Translated by Google

$$л^{1}_{0,4}(y) = \frac{y\,3 - y(y) = 2}{1 - y^{2}} \quad \frac{10/3}{\text{года}} + 3\,\text{года}^{5}\; y - \frac{76}{100}\;(y - 1) \tag{14}$$

$$л^{1}_{0,5}(y) = \frac{3r + a2y\,2 + a3y\,3 + a4y^{4}}{1\quad y + b2(y\quad y\,2) + b3(y\,2\quad y\,3) + b4(y\,3\quad y\,4)}, \text{ [4/4] прибл.} \tag{15}$$

a2 = -6,98408968, a3 = 5,69026957, a4 = -1,35415696, b2 = -1,33411915, b3 = 0,03919556, b4 = 0,64694651,

которые соответственно опубликованы в [5,8,11,13,14]. Границы относительной погрешности (см. определение ниже), связанные с этими аппроксимациями в интервале [0, 1), соответственно, составляют: $9{,}69 \times 10^{-3}$ 3 $1{,}79 \times 10^{-3}$, $2{,}75 \times 10^{-3}$, $7{,}22 \times 10^{-4}$ и $1{,}80 \times 10^{-4}$.

2.2.1. Относительная граница ошибки

Для произвольной функции f, определенной на интервале [α, β], аппроксимирующая функция fA имеет относительную ошибку в точке x1, определяемую согласно соотношению re(x1) = 1 fA(x1)/ f(x1). Относительная граница погрешности аппроксимирующей функции на интервале [α, β] определяется согласно:

$$reB = \max\{|re(x1)| : x1 \quad [\alpha, \beta]\} \tag{16}$$

В этой статье система Mathematica использовалась для облегчения анализа и получения численных результатов. В общем, результаты относительной ошибки, связанные с аппроксимациями, были получены путем равномерной выборки интервала [0, 1] по 1000 точек.

3. Связь между обратной функцией Ланжевена и функцией r0-r1-Ламберта W.

Если функция f определена согласно (4), то это тот случай, когда f(x, y) = 0, когда (y). Тогда $1\,x = L$ справедлив следующий результат:

Теорема 1. Связь: r0-r1-функция Ламберта W и обратная функция Ланжевена

Учитывая, что hr0,r1 и f определены соответственно (9) и (4), общий результат

$$hr0(y),r1\,(y)\,(w) = r0(y) + r1(y)w + wew = k\,f(y)f \quad \frac{1}{1+y} \quad \frac{ш}{2}, y, y/ = 1, \tag{17}$$

справедливо для случая x, y R, когда

$$2/(1+y)\,r0(y) = 2, r1(y) = 1+y\,\frac{(1+y)\,4e}{(1+y)}\,\frac{(1\quad y)e\quad 2/}{}, \quad (1+y)\,k\,f(y) = \frac{2e\quad 2/}{1+y}, y/ = 1. \tag{18}$$

Отсюда следует, что

$$hr0(y),r1\,(y)\,(w) = \frac{4e\quad 2/(1+y)}{(1+y)^{2}} + \frac{w(1\quad y)e\quad 2/}{(1+y) + wew, y/ = 1, 1+y} \tag{19}$$

а обратную функцию Ланжевена можно определить согласно формуле

$$л^{\quad 1}(y) = \frac{1}{1+y}\,\frac{h^{1}_{(0)\,r0\,(y),r1\,(y)\,2}}{}, \quad 0 \quad y < 1. \tag{20}$$

Доказательство теоремы 1. Подробное доказательство приведено в Приложении А.

3.1. Определение корня из h

В соответствии с (20), обратная функция Ланжевена может быть определена, если известен соответствующий корень из hr0(y),r1 (y). Легко можно показать, что

$$час\,0(y),r1\,(y) \quad \frac{2}{1+y} = 0, y/ = 1, \tag{21}$$

Machine Translated by Google

с праведливостью соотношения , . Однако этот результат связан с ветвью , из которой следует h заданного (20). Требуемую ветвь h 1 можно легко увидеть , рассматривая природу h для случая 0 <1 0 <y 1. h.

3.1.1. Графики

В случае 0 y < 1 это тот случай, когда 1/e < r0(y) 4/e ( ) 1 < ( ) 4 <0 < r1(y) 1/e 1 < ( ) 4 . графики r0(y) и r1(y) для случая y [0,1] показаны на рисунке 3. График ( ) ( ) [0,1] [0,1]

hr0 (y),r1 (y) (w) показана на рисунке 4 для двух заданных значений y , чтобы проиллюстрировать характер изменения hr0(y),r1 (y) (w) для заданных значений y. Изменение с y корня ( ) ( ) слева от 2/(1 + y), показано на рисунке 5. 2 (1 +) 2 (1 +) ,

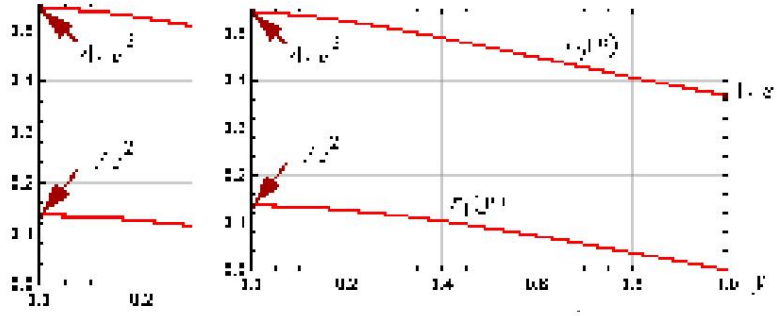


Рис . 3. Графики r0(y) и r1(y) для случая y (0,1). 1 ( )

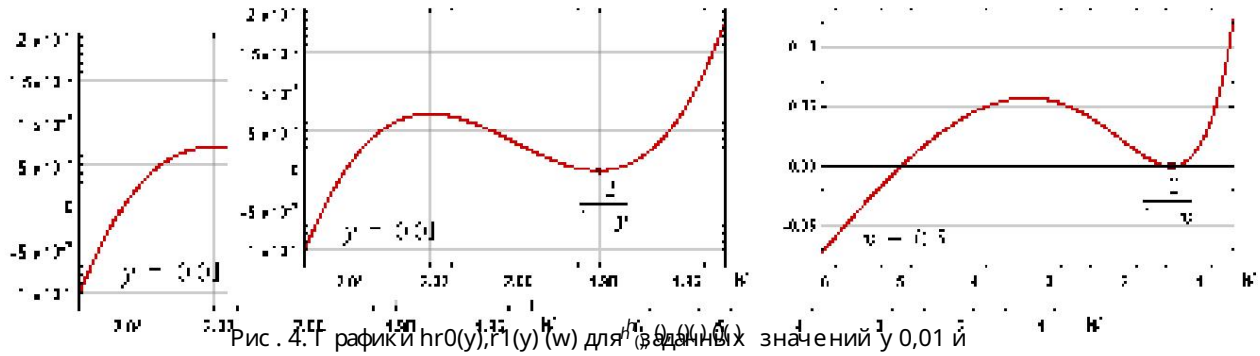


Рис . 4. Графики hr0(y),r1(y) (w) для заданных значений y 0,01 и h 0,5. (), ()( )

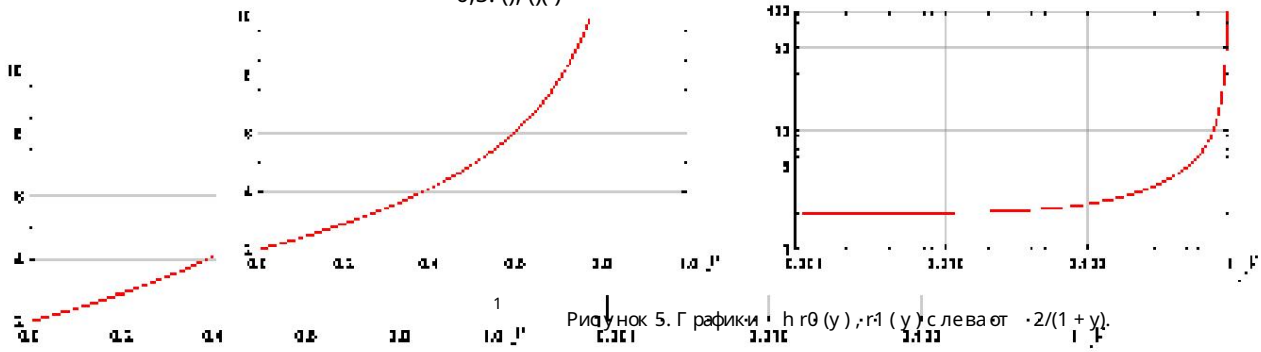


Рисунок 5. Графики h r0 (y) , r1 (y) слева от 2/(1 + y).

3.1.2. Требуемая ветвь для корня h.

Изменение hr0(y),r1 (y) (w) в зависимости от w показано на рисунке 4 вместе с первым отрицательным корнем w = 2/(1 + y) , как определено формулой (21). Искомый корень находится левее локального максимума hr0(y),r1 (y) (w) , расположенного левее первого отрицательного корня . Чтобы установить , где возникает этот локальный максимум, рассмотрим производную hr0(y),r1 (y) (w):

(22)

Machine Translated by Google

Корень этой функции, обозначаемый wm, возникает, когда $(1+w_m)e^{w_m} = -1/e$, поскольку $0 < r1(y) < 1/e$, что случай, когда $= 0$, $( ) = 1/$ заменяется на $0 < r1(y) < 1/e$, где $w_1 < 0$ и $w_m < -1$ для $0 < y < 1$ (см. рисунок 3), это

$$= \frac{2}{ш1\ ш1e^{=}} \qquad (23)$$

с решениями, согласующимися с природой W-функции Ламберта, например, [22], определенной согласно

$$= \begin{cases} w_1 = -1, & y = 0 \\ W_0[-er1(y)] \text{ или } W_{-1}[-er1(y)], & 0 < y < 1 \end{cases} \qquad (24)$$

— решение главной ветви, а $W_{-1}[( )]$ — $( )$, где W_0

отрицательная ветвь. Именно отрицательная ветвь обеспечивает требуемое решение и, таким образом:

$$= w_m = \begin{cases} -2, & y = 0 \\ -1 + W_{-1}[-er1(y)], & 0 < y < 1 \end{cases} \qquad (25)$$

Следовательно, цель состоит в том, чтобы установить корень из $hr0(y),r1(y)(w)$ для случая $w \quad w_m$. Характер $hr0(y),r1(y)(w)$ и обратного ему $w = h$ случай $w = h( )( )$ $r0(y),r1(y)(z)$ показан на рисунке 6 для фиксированного значения y.

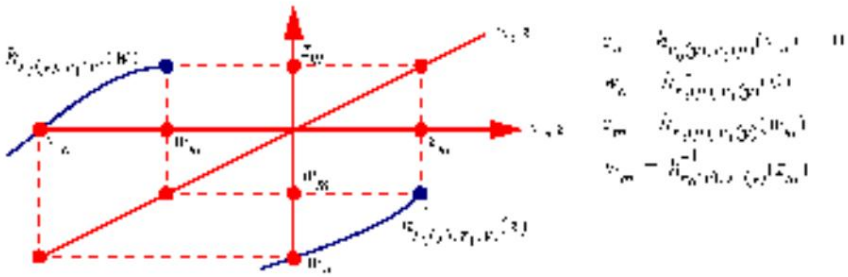


Рис. 6. Иллюстрация функций $z = hr0(y),r1(y)(w)$ и $w = h( )( )$ $w \quad w_m$. $= h( )( )^{-1}_{r0(y),r1(y)}(z)$ при фиксированном y

4. Приближения обратной функции Ланжевена.

Теорема 1 аппроксимация $h^{-1}_{r0(y),r1(y)}(w)$ $0 < 1$ к аппроксимации обратного ланжевена $^{-1}(0)$ при $0 < y < 1$ приводит в соответствии для $^{-1}(0)$, сначала рассмотрим следующие две аппроксимации ограниченной области, которые $h^{-1}_{r0(y),r1(y)}$ возникают в результате анализа, подробно описанного в Приложении B:

$$h^{-1}_{r0(y),r1(y)}(w) \quad \begin{cases} -2 - 4y, & 0 < y \quad 1, \\ \dfrac{2}{1-y}, & y = 1 \quad , \end{cases} \quad 0 < \quad 1. \qquad (26)$$

Эти приближения согласуются с приближением первого порядка:

$$^{-1}(0) = h^{-1}_{r0(y),r1(y)} \quad \frac{2}{2y = 1 \quad y} \quad \frac{2}{1+y \quad y} \quad 1 \quad y \quad ^{2}, \quad 0 \quad y < 1, \qquad (27)$$

Согласованность возникает, во-первых, если отметить $-2/(1-y) \quad -2(1+y)$, $0 < y \quad 1$, и, таким образом, приближение для $y \quad 0$ равно $-2 - 4y$, как и требуется. Во-вторых, для случая $y = 1 \quad , 0 < \quad 1$ аппроксимация приближается к $2/(1 \quad y)$, как и требуется. Мера ошибки в этом приближении показана на рисунке 7, а относительная граница ошибки, связанная с интервалом $(0, 1)$, равна $4{,}45 \times 10^{-2}$.

Machine Translated by Google

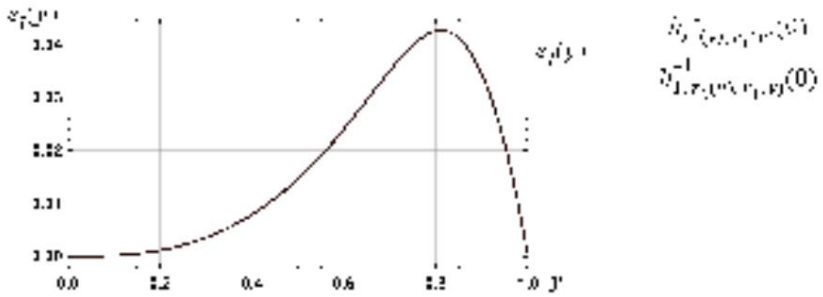


Рис . 7. Г рафик на интервале $y_{(0,1)}$(0, 1) меры относ ительной ошибк и eI в приближении $r0(y),r1(y)$ $h_1^{(0)}$, как определено (27), до h (0). *h*, (), () (0)

Аппрокс имация , определя емая (27), и мера относ ительной ошибк и eI , показанная на рис унке 7 *h*, (), () (0) = [1+], 0 < 1, с от лас уются с

$$h_1^{(0)} = h\,(0)\cdot[1 \quad eI(y)],\ r0\,(y),r1\,(y)\ 1,r0(y),r1\,(y) \tag{28}$$

h (), () (0)

и эта с вя зь обес печивает полезную ос нову для ус тановления лучших приближений. У лучшенные аппрокс имации вклю чают: *h*,(),() (0) = 1 1 *h*,(), () (0) = h 2,r0(y),r1 (y) 1

$$(0) = \frac{[1+\ ]+/}{2} = \frac{2}{2}\ \frac{[1+\ ]}{2}\ \frac{1+\ 1}{2}\ +\ \frac{/}{2}\ \frac{/}{2} \quad (29)$$

2 знак равно1 c22sin πy , 0 < 1, · 1 + c21sin (πy) + y

$$c21 = \frac{1}{281\,1000}, c22 = \frac{65}{1000}$$

$$() (0) = h(),() (0) = h,(),() (0) \quad [1+\ ]\ 1\ 2 \quad [1\ (\ )],\ 2\ 1\ 7/2 \quad (0) = h\ -1 + y\ -y + y\ 3,r0(y),r1\,(y)\ 1 - y \quad 1 + -\ -\ 2 \quad 7/2\ 9/2\ г\ г\ +$$

$$= \frac{2}{1-y} \cdot 1 + y - y \quad \frac{2}{2}\ \frac{2}{2} \quad (30)$$

$$(0) = h\ 4,r0(y),r1\,(y)\ h,(),() \quad \frac{2}{[1+\ \cdot 1 + y \quad y\ 1 \quad y/}\ \cdot 1\ \frac{(1-y)}{2} \quad (31)$$

$$+ \sin(\ )]\ 2\ 2 \quad 1 + y \quad y\ (1 \quad)(\ )\ () + 1 \quad y\ 2\ 2\ 2\ 1\ и$$

$$h_1^{(0)} = 5,r0(y),r1\,(y) \quad \frac{2}{c51 = \ 1 + y \quad y\ 1 = y\ 200}, \quad = \frac{65}{3125}\ 2 + c51y^5\ (1 - y)(y - yo)e^{-3(y-yo)^2} \quad (32)$$

$$h,(),() (0) = \frac{1}{y) +}\ \frac{2}{\cdot 1 + y \quad y + y\ 1 \quad y\ 1 + (1}\ \frac{2}{)+1 + (1}\ \frac{1+}{2}\ \frac{4}{6}\ \frac{7}{2}\ +\ \frac{2}{+ + + + 3,7}$$

6,r0(y),r1 (y)

$$1 + \alpha 0y \quad \alpha 3y + \alpha 4y\ 3349 \quad 23467\ 2 \quad 5813 + \alpha 2y \quad + \alpha 5y + \alpha 7y \quad 23467 \quad + \alpha 8y = \quad (33)$$

$$\alpha 0 = \frac{5813}{000}, \alpha 2 = 1\ 000, \alpha 3 = \frac{3349}{7920}, = \frac{}{10}, \alpha 4 = 6526, 1\ 000\ 10 \quad , \quad 6526,$$

$$\alpha 8 = \quad 4799. \quad 8222, \alpha 5 = \quad 7920, \alpha 7 = 8222, \quad = \quad 4799.$$

Г рафики величины относ ительных ошибок в этих аппрокс имация х показаны на рис унке 8. С оответс твующие г раницы относ ительной ошибки, с вя занные с этими аппрокс имация ми и 4,58 × для интервала (0, 1), с ос тавля ют $y_{(0,1)}$ $4{,}66 \times 10$ $3{,}71 \times 10$ $2{,}13 \times 10$ $2{,}33 \times 10$ $2{,}13 \times 10^{-3}$ $4{,}66 \times 10^{-4}$, $3{,}71 \times 10^{-3}$, $4{,}58 \times 10^{-5}$.

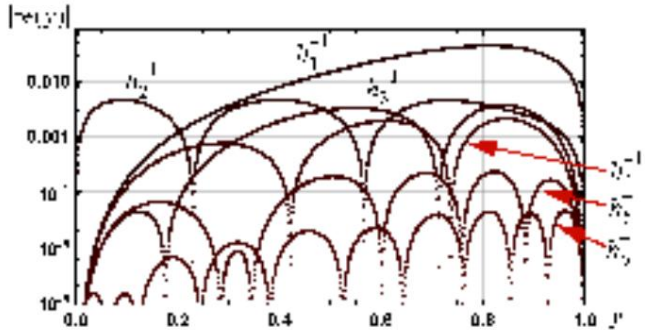


Рис унок 8. Г рафики величины относ ительной ошибки аппрокс имации h (0), определенной $r0(y),r1(y)$ $h_1^{(0)}$ по (27), (29) по (33).

h, (), () (0) = 1 $2 = \frac{2}{1}\ [1+\ ], 0 \quad < 1,$

Machine Translated by Google

4.1. Соответствующие приближения Ланжевена.

Учитывая отношения $L_1^{-1}(y) = \frac{1}{1+y}$ $\frac{h_{(0)}^{1}}{r0(y),r1(y)2}$, как указано в теореме 1, приведенные выше приближения для $h_1(0)$, заданные (27) и (28) – (33), приводя т соответственно к r0(y),r1 (y) следующим приближения м для обратного Функция Ланжевена:

$$L_1^{-1}(y) = \cdot 1 - 2\frac{3\,года}{3}\,1 - y^{2} \tag{34}$$

$$L_2^{-1}(y) = 1 + y\,d21 = \frac{301}{1000},\ d22 = \frac{92}{1000}.\ \frac{d21\sin(\pi y) + d22\sin(\pi y\,2)}{2}\,y \tag{35}$$

$$L_3^{-1}(y) = /1 - y^{\frac{3y}{года}} \cdot 1 - 2/3 + \frac{2}{года\,6}\,(1\,6)(\,)\,() \tag{36}$$

$$(\,) = 1 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \quad 6 \quad 7$$

$$L_4^{-1}(y) \text{ знак равно } \frac{3y}{1 - 2\,1 - y^{3}} \cdot \frac{}{лет\ 6}\ \frac{}{да\,6}\ y\ \frac{}{+3}\ \frac{}{+6}\ \frac{}{года}\ \frac{}{да\,6} \tag{37}$$

$$L_5^{-1}(y) \text{ знак равно } \frac{3y}{2\,3\,1 - y^{()}} \cdot 1 \frac{2}{3}\,года\,1 - \frac{5/2\ 9/2\ г\ г}{3\ 6\ 6\ 6\ 6}\,(1 -)\ +\ \frac{5}{3\,с\,51 + y} + \frac{}{(1 - y)(y - yo)\,6\,6\,2\,3\ \ 1 - + - 4\,7}\cdot e^{3(г\text{-}йо)^{2}} \tag{38}$$

$$L_6^{-1}(y) = 1 \frac{3y}{-y^{2}} \cdot \frac{1 - \frac{2}{года\,3}\ \frac{3}{3}\ \frac{}{лет + 3}\ \frac{6}{лет + 6 +}\ \frac{}{+2}\ \frac{}{+}}{[1 + \alpha 0y(1\ y\,2)}\ \frac{3 + \frac{2}{2}\ \frac{2}{+}}{3}\cdot 1 - y^{\frac{}{года\,6\,2 +}}\ +\ \text{й}\ \frac{3}{2}\ \frac{4}{года}\ \frac{5}{+3}\ \frac{}{+2}\ \frac{6}{y}\ \frac{}{+}\ .}{2\quad 3 + \alpha 3y \quad 4 + \alpha 4y \quad 5 + \alpha 5y \quad 7 + \alpha 7y^{2} \quad 8 + \alpha 8y} \tag{39}$$

Графики величины относительных ошибок этих аппроксимаций показаны на рисунке 9. (0,1) 4,94 × 10 1,83×10 4,37×10 2,44×10 2,58×10

Границы относительных ошибок, связанные с этими аппроксимациями и для интервала (0, 1), соответственно, составляют: 4,94 ×10-2 , 1,83 × 10-2 , 2,44 × 10-3 , 2,58 × 10-4 и 4,85 × 10-5 .

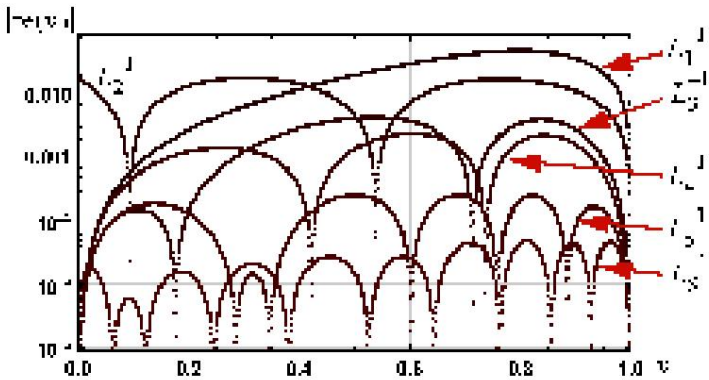


Рис . 9. Графики величины относительной ошибки аппроксимации L (34) – (39). $(\,)^{1}(y)$ как определено

Примечания

$$(\,) \text{ знак равно } \frac{3}{1\ 1\ 1 - 3 - 1}$$

Коэффициенты, используемые в приближения х h и L , различны и 2,r0(y),r1 (y) 2 были выбраны для минимизации соответствующих границ относительной ошибки в интервале [0, 1).

Четвертое приближение, заданное формулой (37), имеет относительную границу погрешности 2,44 × 10 3 и по форме аналогичен предложенному Крёгером [8] и сформулированному в 1 (12). Предлагаемое приближение включает полином 301 седьмого (а не шестого) порядка и обеспечивает несколько более низкую границу относительной ошибки. 1000 Пятое (38) и шестое (39) приближения

достигают более низких границ относительной погрешности соответственно, чем опубликованные приближения , предложенные Нгуессонгом [5] и Марчи [13] и которые указаны в (14) и (15). 3

$$(\,) = 1 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad + \quad 6$$

$$(\,) = 1 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 6 \quad + \quad 3 \quad + \quad 6 \quad 6$$

Machine Translated by Google

Предложенные аппроксимации дополняют список опубликованных аппроксимаций обратной функции Ланжевена и имеют границы относительной погрешности, соответствующие сопоставимым опубликованным аппроксимациям или ниже их. Дополнительные приближения еще предстоит предложить.

5. Приближения высшего порядка на основе

Шредера Следующие общие приближения для обратной функции возникают из корневого приближения Шредера первого рода, например, [25] (уравнение (21)), [19] (уравнение (17)), [
(раздел 3) и [21]:

Теорема 2. Приближения обратной функции на основе Шредера.

Рассмотрим действительную функцию f, которая дифференцируема по крайней мере до порядка n, а также строго монотонна в интервале вокруг точки x0, включающем корень xo из g(x) = f. (x) yo, близкое к x0. Ряд Тейлора n-го порядка для g, основанный на точке (y0, x0), y0 = f(x0) yo, дает приближение Шредера n-го порядка для xo = f, 1 (йо), обозначаемый xn, и определенное согласно формуле

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k [f(x_0) - y_o]^k}{k!} \cdot D(k)\, \phi^{-1}[f(x_0)],\ n \in \{1, 2, \cdots\}, \tag{40}$$

где D(k) — оператор, обозначающий дифференцирование k-го порядка. Явная форма – это

$$\begin{aligned} x_n = x_0 &- \frac{f(x_0) - y_o}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0) - y_o]^2 f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} - \frac{[f(x_0) - y_o]^3}{6[f'(x_0)]^4}\left(f'''(x_0) \cdot f'(x_0) + 3[f''(x_0)]^2\right) \\ &- \frac{[f(x_0) - y_o]^4}{24[f'(x_0)]^5}\left(f^{(4)}(x_0) f'(x_0) + 10 f''(x_0) f'''(x_0) \cdot [f'(x_0)]^2 + 15[f''(x_0)]^3\right) \\ &- \frac{[f(x_0) - y_o]^5}{120[f'(x_0)]^6}\left(f^{(5)}(x_0) [f'(x_0)]^3 + 10 f'''(x_0) f''(x_0) \cdot [f'(x_0)]^2 + 105[f''(x_0)]^4\right) \\ &- \frac{[f(x_0) - y_o]^6}{720[f'(x_0)]^7}\left(f^{(6)}(x_0) [f'(x_0)]^4 + 21 f^{(5)}(x_0) f'(x_0) f''(x_0) + 35 f'''(x_0) f'''(x_0) [f'(x_0)]^2 + 210 f''(x_0)^2 [f'(x_0)]^3 + 105[f''(x_0)]^4\right) \\ &- \cdots + \frac{(-1)^n [f(x_0) - y_o]^n}{n!} \cdot D(n)\, f^{-1}[f(x_0)] \end{aligned} \tag{41}$$

Доказательство теоремы 2. Этот результат вытекает из аппроксимации ряда 1 в Тейлора для точки g (y0, x0) и теоремы об обратной функции. См., например, [21].

5.1. Приближения первого, второго и третьего порядков для h 1 (0)

Рассмотрим hr0(y),r1 (y) (w) = r0(y) + r1(y)w + wew, где r0 и r1 определены в (18) и (0), где аргумент равен начальное приближение для h (0) обозначается нея вно h 1 r0(y),r1 0 1 (y) и предполагается, что оно находится на интервале [0, 1). Отсюда следует, что первое, второе и h аппроксимации третьего порядка на основе Шредера для h 1 r0(y),r1 (y) (0), обозначаемые соответственно 1 (0), h 2 1 (0) и ч 3 1 (0) являются:

$$ч_1^{-1}(0) \text{ знак равно } \frac{4 + (1 + y)\, 2w\, 2 \exp w + 1 + y}{2\, 1 - y + (1 + y)^2 (1 + w) \exp w + 1 + y\, w = h_0^{-1}(0)} \tag{42}$$

Machine Translated by Google

$$ч_2^1(0) = \frac{4+(1+y)2w\,2\exp w+\sqrt{1+y}\,\frac{2}{(1+w)}}{1\quad y\,2+(1+y)^2\exp w+\frac{}{2\,1+r}} \qquad (43)$$
$$\frac{4+(1\quad y\,2)w+(1+y)\,2w\qquad опыт\ w+\sqrt{1+y}\,\frac{2}{}\qquad^2(2+w)\exp w+\sqrt{1+y}\,\frac{2}{}}{2(1+y)\,1\quad y+(1+y)(1+w)\exp w+\frac{}{2\,1+r}\qquad^3}$$
$$ш=ч\,0\qquad^1(0)$$

$$час_3^1(0) = ч_2^1(0)- \qquad (44)$$
$$\frac{4+1\quad y\qquad^2 w+(1+y)\,2w\exp w+\sqrt{1+y}\,\frac{2}{}\qquad^3\exp w+\sqrt{1+y}\,\frac{2}{}\ .}{6(1+y)^2\,1\quad y+(1+y)(1+w)\exp w+\sqrt{1+y}\,\frac{2}{}\qquad^{(1+y\,5}}$$
$$ш=ч\,0\qquad^1(0)$$

Доказательства этих результатов подробно описаны в Приложении С.

Результаты

Границы относительной погрешности, связанные с приведенными выше приближениями и $_0^1(0)$ основанные на h, как указано в (27) и (29)–(33), подробно описаны в таблице 1. Конкретные случаи подробно описаны ниже.

5.2. Приближения первого порядка: частные случаи

Общая форма аппроксимации первого порядка, заданная (42), приводит к подробно описанным ниже приближениям, которые справедливы для $y \in [0, 1)$. Тогда соответствующие приближения для обратной функции Ланжевена можно определить в соответствии с теоремой 1.

5.2.1. Случай 1

При начальном приближении $h_{1,r0(y),r1(y)}^{\quad 1}(0)$, заданное (27), отсюда следует, что

$$ч_1^1(0) = \frac{4(1\quad y)^2+4\,1+2y\quad y\exp^{3\,2}\qquad\frac{6\,лет}{1-y^2}\,г\,ода\cdot 1\qquad^{\frac{2}{3}}}{(1+y)(1-y)^3\quad(1\quad y\,2)\,1+4y+y^2\quad{}_{2\,г\,ода}{}^3\quad опыт\ \frac{6\,лет}{1-y^2}\,г\,ода\cdot 1\qquad^{\frac{2}{3}}} \qquad (45)$$

который имеет относительную границу ошибки $2{,}69 \times 10^{-4}$. Относительная ошибка соответствующего приближения для обратной функции Ланжевена составляет $3{,}36 \times 10^{-4}$.

5.2.2. Случай 2

Учитывая аппроксимацию $h_{1,r0(y),r1(y)}^{\quad 1}(0)$, определенную формулой (30), отсюда следует, что

$$час_1^1(0) = \frac{4(1\quad y)\,2+(1+y)\,2\,[\quad 2\quad 2y+2y^2+y\,7/2\quad y\,9/2]\,[1+3y\quad 2y\,2\quad y\,7/2+y\,9/\qquad^2\exp[pE(y)]}{(1-y)^3\,(1+y)\quad(1\quad y)(1+y)^{2\qquad}\,2]\exp[pE(y)]} \qquad (46)$$
$$6y\,pE(y) = \sqrt{1-y^2}\cdot 1\qquad{}_{г\,ода\,3}\qquad{}_{г\,ода\,6}^{5/2}\qquad{}_{г\,ода+6}^{9/2}$$

который имеет относительную границу ошибки $8{,}52 \times 10^{-6}$. Относительная ошибка соответствующего приближения для обратной функции Ланжевена составляет $1{,}17 \times 10^{-5}$.

5.2.3. Случай 3

С приближением $h_{1,r0(y),r1(y)}^{\quad 1}(0)$ определяется (31), то отсюда следует, что

$$час_1^1(0) = \frac{4(1\quad y)\,2+4(1+y)\,2\,1+y\quad y\qquad^{+y\,2\,\frac{}{}\quad 4\,7\,2\quad y\,6\quad y\,2\,\frac{}{}}\qquad^2\exp[pE(y)]}{(1-y)^3\,(1+y)\quad(1\quad y)(1+y)^{2\qquad}\,[1+3y\quad 2y\,2\quad y\,4+2y\,6\quad y\,7\,]\exp[pE(y)]} \qquad (47)$$
$$6y\,pE(y) = \sqrt{1-y^2}\cdot 1\qquad{}_{г\,ода\,3}\qquad{}_{6\,лет}^{г\,ода}\qquad{}_{6\,лет}^{г\,ода}\qquad{}_{+3}^{лет}\qquad{}_{+6}^{лет}\qquad{}_{и\,6}^{7}$$

который имеет относительную границу ошибки $1{,}92 \times 10^{-6}$. Относительная ошибка соответствующего приближения для обратной функции Ланжевена составляет $2{,}66 \times 10^{-6}$.

Machine Translated by Google

5.2.4. Случай 4

С приближением h 6,r0(y),r1 (y) 1 (0) определяется (33), то отсюда следует, что

$$\text{час}_1^{\ 1}(0) = \frac{2+4(1+y)\,2\quad y\,6\quad y\,1+y\quad y\,2+y\,2 \qquad \overline{\quad}^{\,4\,7}\quad 4(1\quad y)\quad \overline{\quad}^{\,2}\quad p^{\,2}(y)\exp[pE(y)]}{(1\quad y)^{\,3}(1+y)+(1\quad y)(1+y)^{\,2}\ 1\quad y\quad 2\,1+y\quad y\quad {}^{+y\,2}\overline{\quad}^{\,4\,7\,2}\quad y\,6\quad \overline{y\,2}\quad p(y)\exp[pE(y)]} \tag{48}$$

где

$$p(y) = 1 + \alpha 0y\quad {}^{2}(1 - y)^{\,2}\ 1 + \alpha 2y\quad {}^{2} + \alpha 3y\quad {}^{3} + \alpha 4y\quad {}^{4} + \alpha 5y\quad {}^{5} + \alpha 7y\quad {}^{7} + \alpha 8y\quad {}^{8} \tag{49}$$

$$pE(y) = {}_{1}\ \frac{6\ \text{лет}}{y^{\,2}}\cdot \frac{\alpha 0y(1\quad y2\,)}{3}\cdot 1 - y^{\,2}\ {}_{3+y}\ \frac{{}^{2}}{3}\ \frac{{}^{3}}{\text{года}}\ \frac{{}^{4}}{\text{лет}}\ {}_{+3}\ \frac{{}^{5}}{\text{лет}}\ {}_{+6}\ \frac{{}^{6}}{\text{и}}\ {}_{6}\ \frac{{}^{7}}{2}+ \tag{50}$$

$$1 + \alpha 2y\quad {}^{2} + \alpha 3y\quad {}^{3} + \alpha 4y\quad {}^{4} + \alpha 5y\quad {}^{5} + \alpha 7y\quad {}^{2\,7} + \alpha 8y\quad {}^{8}$$

Это приближение имеет относительную границу погрешности 4,07 × 10–10. Относительная ошибка соответствующего приближения для обратной функции Ланжевена составляет 6,27 × 10 10 .

5.3. Приближения второго порядка

С приближением h 4,r0(y),r1 (y) 1 (0) определяется (31), то из (43) следует, что:

$$\text{ч}_{\ 2}^{\ 1}(0) = \text{ч}\quad {}_{1}^{\ 1}(0)+ \tag{51}$$

$$\frac{(1\quad y)^{\,3}\ 1 - y\quad {}^{2\,3\text{-й}}\quad {}^{4}\ \overline{\text{года}}\ {}^{5}\ \text{лет}\ {}_{+2\,5}\ {}^{6}\ \text{лет}\ {}_{+2\,6}\ + \qquad {}^{2}}{(1 + y)^{\,3}\ 1 - y\quad {}^{2} + \text{й}\quad {}^{3}\ {}^{2\,4}\ \overline{2}\ {}^{3\ \text{года}}\ \text{года}+\ \overline{2}\quad \overline{\text{лет}\ 2}\ \exp[pE(y)]}$$

$$\frac{1- y\ {}^{2}\ \overline{2}\quad {}^{3}\ \text{и}\ {}_{4\ \text{лет}+2}\ {}^{5}\ \overline{\quad}\quad \exp[pE(y)]}{(1+y)[(1\quad y)\,2\quad (1+y)[1+3y\quad 2y\,2\quad y\,4+2y\,6\quad y\,7\,]\exp[pE(y)]]^{\,3}}$$

1 , где h 1 (0) и pE(y) определяются формулой (47). Относительная погрешность этого приближения составляет 9,12 × 10 9 . Относительная погрешность соответствующего приближения для обратной функции Ланжевена составляет 1,16 × 10 8 .

5.4. Прямое приближение Шредера первого порядка к обратной функции Ланжевена

Рассмотрим приближение Шредера первого порядка обратной функции Ланжевена: на основе начального приближения , обозначенного $L_{0,}^{\ 1}$ и определяется

$$\text{Л}_{\ 1}^{\ 1}(y) = x\ -\quad \frac{L(x) - y}{\text{Л}\,(1)\,(x)}\quad {}_{1\ x\ =L\ 0}(y) \tag{52}$$

Природа $\text{Л}_{\ 1}^{\ 1}$ зависит от вида, принятого для функции Ланжевена. Для случая L определяется согласно L(x) = coth(x) 1/x, отсюда следует, что:

$$\text{Л}_{\ 1}^{\ 1}(y) = \frac{3\ x\quad x\sinh(x)\quad 2\sinh(x\,)\quad x\cosh(x) + xy\sinh(x)\quad \sinh(x)}{2\ x\qquad\qquad 2}\quad {}_{1\ x\ =L\ 0}(y) \tag{53}$$

Для случая L, определенного согласно (3), следует, что:

$$\text{Л}_{\ 1}^{\ 1}(y) = \frac{x[2\quad x + xy]\quad 2x\,2 + 2x\quad {}^{2} + x\,y\,e\quad {}^{2x} + x\,[2 + x\ + x\,y\,]e\quad {}^{4x}}{1\quad 2[1 + 2x\,2\,]e\quad 2x + e\quad 4x}\quad {}_{1\ x\ =L\ 0}(y) \tag{54}$$

Machine Translated by Google

Сравнение

Аппроксимации, определяемые (53) и (54), можно противопоставить аппроксимации обратную функцию Ланжевена согласно соотношению, установленному в теореме 1, т.е.

$$L^{-1}(y) \approx \frac{1}{1+y} - \frac{h_1^{-1}(0)}{2} \tag{55}$$

где $h_1^{-1}(0)$ — приближение первого порядка, определенное согласно (42). Чтобы сравнить аппроксимации, определяемые (54) и (55), рассмотрим начальные приближения

$$L_0^{-1}(y) = \frac{3y}{1-y} - \text{года} \cdot \frac{2}{25} + \frac{6}{15} + \frac{42\,\text{года}}{15} \tag{56}$$

$$\text{час}_0^{-1}(0) = \cdot 1 + \frac{2}{y-y\,1-y} \quad \frac{y}{2}^{4} \quad 6+y \quad \frac{y}{2}^{7} \tag{57}$$

Первый был предложен Крегером [8] (указан выше в (12)) и имеет относительную границу погрешности $2{,}75 \times 10^{-3}$. Второе приближение указано в (31) и имеет относительную границу погрешности $2{,}13 \times 10^{-3}$. Использование (56) в (54) дает приближение

$$L_1^{-1}(y) = \frac{pE(y)}{(1-y)^2\,1+\frac{y}{2}} \quad \frac{2}{\text{года}} \quad \frac{3}{+533} \quad \frac{3}{\text{года}+5} + \frac{5}{\text{лет}} + \frac{6\,7\,\text{г}\,\text{г}+}{10\,5\,6\,7\,\text{г}\,\text{г}} \quad \frac{8}{+10\,5} +$$
$$(1+y)^2\,1-\frac{y}{2} \quad \frac{\text{года}}{2} \quad \frac{\text{года}}{5} \quad \frac{4}{\text{года}+5} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{10}{5} \quad \frac{\text{лет}}{5} \quad \frac{\text{лет}}{8} e^{2pE(y)-}$$
$$\text{лет}\,2\,1+\frac{2\,17}{2} \quad \frac{83y}{10}^{4} \quad +50 \quad \frac{\text{года}\,26}{37\,\text{лет}} \quad +50 \quad \frac{8}{159\,\text{лет}} \quad \frac{\text{лет}}{10\,10} \quad \frac{12}{28} \quad \frac{\text{лет}}{4} \quad \frac{5\,14}{\text{года}\,25}^{4} \quad \frac{\text{лет}}{\text{года}+25} e^{\text{ГПЭ}(y)} \tag{58}$$
$$\frac{(1\quad y\,2)^2}{1+e\,2pE\,(y)} \quad \frac{}{2\,1+16y} \quad \frac{67\,\text{лет}}{5} \quad \frac{\text{лет}\,25}{+} \quad \frac{6\,4\,12\,\text{лет}}{25} \quad \frac{144\,\text{г}\,\text{года}+}{25}^{8} \quad \frac{46\,\text{лет}}{25}^{10} \quad \frac{8\,\text{лет}}{25}^{12} + \frac{8\,\text{лет}+}{25}^{14} e^{2pE\,(y)}$$
$$\text{пE}\,(y) = \frac{6\,\text{лет}}{1-y\,2} \quad \text{года} \cdot 1 \quad \frac{2\,2}{5} \quad \frac{4}{\text{года}\,15\,\text{лет}} + \frac{6}{\text{года}\,15}$$

с относительной границей ошибки $7{,}34 \times 10^{-6}$. Напротив, использование (57) в (42), а затем (55) приводит к приближению, указанному в (47), т.е.

$$\text{ч}_1^{-1}(0) = \frac{4(1\quad y)\,2+4(1+y)\,2\,1+y\quad y \qquad +y\,2 \quad \frac{4\,7\,2}{}\quad \frac{y\,6}{}\quad \frac{y\,2}{}^{2} \exp[pE(y)]}{(1-y)^3\,(1+y)\quad (1\quad y)(1+y)^2\,[1+3y\quad 2y\,2\quad y\,4+2y\,6\quad y\,7\,]\exp[pE(y)]} \tag{59}$$
$$6y\,pE(y) = \frac{}{1-y^2} \cdot 1 \quad \frac{}{\text{года}\,3} \quad \frac{\text{года}}{6\,\text{лет}} \quad \frac{\text{года}}{6\,\text{лет}} \quad \text{лет}+3 \quad \text{лет}+6 \quad \frac{7}{\text{и}\,6}$$

который имеет относительную границу ошибки $1{,}92 \times 10^{-6}$. Соответствующее приближение для $L^{-1}(y)$ есть

$$L_1^{-1}(y) = \frac{1}{1+y} - \frac{\text{час}_1^{-1}(0)}{2} \tag{60}$$

и имеет относительную границу ошибки $2{,}66 \times 10^{-6}$.

Очевидно, что (59) и (60) имеют более простой вид, чем (58), и дают аппроксимацию для $L^{-1}(y)$ с нижней границей относительной погрешности. Частично это является основанием для использования связи между обратной функцией Ланжевена и функцией r0-r1-Ламберта W.

6. Приложения 6.1.

Предельные аппроксимации.

Аппроксимации, детализированные в (26), приводят к следующим приближениям для обратная функция Ланжевена после использования соотношения, определенного в теореме 1:

$$L^{-1}(y) \approx \begin{cases} \frac{3y}{1+y}\,,\ 2y\,1-\frac{2y(y)}{y} \cdot 1+\frac{}{}, & 0 < y \quad 1,\ y = \\ \frac{}{2}, & 1 \quad , 0 < \quad 1. \end{cases} \tag{61}$$

Machine Translated by Google

9 ( ) 3 + 297 + 1539 + 5 175 875 +

=1 Δ 0 < 1 Эти ( )

(прибл)ижения можно противопоставить установленным приближения м. Во-первых , приближение ряда Тейлора/1 обратной функции Ланжевена, например, [4], имеет вид

$$л^{1}(y) \quad 3y + 5\,\frac{9y^{3}}{1+}\,\frac{297й^{5}}{175}\,\frac{1539й^{7}}{875}\,\frac{++}{3.2}\,\frac{+\cdots}{1+} \tag{62}$$

Во-вторых , приближение первого порядка для случая $y = 1$, $0 < 1$, это $L^{1}(y)$ 1/ (1 у) (см. приложение B в [8]). Графики относительных ошибок, связанных с этими аппроксимациями, показаны на рисунке 10. Из этих графиков видно, что аппроксимации, определенные в (61), уступают установленным аппроксимациям для аргументов, близких к нулю или близок единице. Однако они служат полезной основой для установления аппроксимаций с низкими границами относительной погрешности в интервале (0, 1) для h 1 1 и, следовательно, L

(0,1) , вкратце в таблице 2.

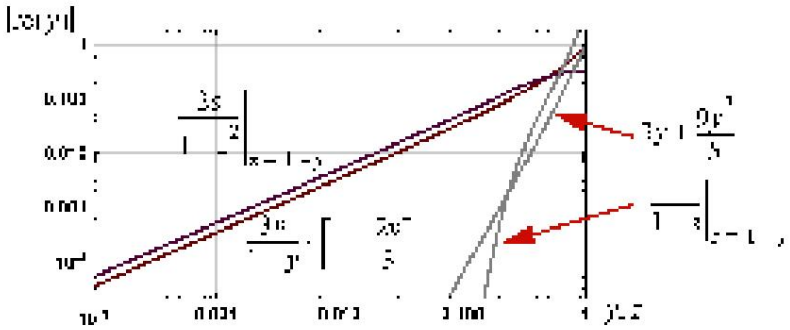


Рис . 10. График относительных погрешностей аппроксимации обратной функции Ланжевена для случаев 0 < у 1 и у = 1 , 0 < 1. 0< 1 = 1 , 0 < 1.

6.2. Интегральные результаты

Как $\int_{0}^{x} L(\lambda)d\lambda = \ln[\sinh(x)] \quad \ln(x)$, общий интегральный результат ( ) = ln[sinh( )] ln( )

$$\int ( ) = (\lambda)d\lambda = yff \quad ( )^{1}(y) \quad y1\,f^{1}(y1) \quad f(\lambda)d\lambda( ) \quad ( )\,f \quad 1(y1) \tag{63}$$

предполагая , что f^{1} и f корректно определены, дает

$$\int_{0}^{y} л (\lambda)d\lambda = yL \quad 1(y) + \ln L^{1}(y) \quad \ln\sinh L^{1}(y), \; y \quad (0, 1). \tag{64}$$

Предложенные приближения могут быть использованы для установления аппроксимаций интеграла от обратной функции Ланжевена. Например, использование аппроксимаций, заданных (36) и (37), в (64) дает аппроксимации для обратной функции Ланжевена с соответствующими границами относительной погрешности 1,40 × 10–5 и 3,91 × 10–6 . Последнее приближение:

$$\int_{0}^{y} л (\lambda)d\lambda \quad 1 \quad y\,\frac{3y^{2}}{\ln 3y^{2}}\,\frac{\text{года}\cdot 1}{3}\,\frac{2}{\frac{\text{год}}{6\text{лет}}}\,\frac{3}{\frac{\text{год}}{6\text{лет}}}\,\frac{4}{\text{лет}+3}\,\frac{5}{\text{лет}+6}\,\frac{6}{\text{и}6}\,\frac{7}{+}$$

$$\frac{}{1\text{-}y^{2}}\,\frac{\text{года}\cdot 1}{3}\,\frac{2}{}\,\frac{3}{\frac{\text{год}}{6\,3}}\,\frac{4}{\text{лет}+34}\,\frac{5}{\text{лет}+6}\,\frac{6}{}\,\frac{7}{} \tag{65}$$

$$\ln\sinh 3y\,\frac{}{1\text{-}y^{2}}\,\frac{\text{года}6\,2}{\text{года}\cdot 1}\,\frac{}{3}\,\frac{}{\frac{\text{год}}{6\text{лет}}}\,\frac{}{\text{года}6}\,\frac{5}{\text{лет}+3}\,\frac{6}{\text{лет}+6}\,\frac{\text{лет}}{6}\,\frac{7}{\text{и}6}, \; y \quad (0, 1).$$

6.3. Корни α + βw + wew B

соответствии с (21) и теоремой 1 корни $hr0(y),r1(y)(w) = r0(y) + r1(y)w + wew, (y)$. $0 < y < 1$ являются $\frac{2}{1+y}$ и $1+y \quad 2л^{1}$ Желательным расширением этих результатов было бы спецификация корней

$$h\alpha,\beta(w) = \alpha + \beta w + wew \tag{66}$$

Machine Translated by Google

для произвольных значений α и β. Учитывая определения r0 и r1, это, вообще говоря, невозможно. Однако для конкретных случаев корни можно установить. Например, корни

$$\frac{(1+k)^2}{e^{1+k}} + \frac{k\text{Вт}}{e^{1+k}} + \text{wew}, \quad 0 < k < 1, \tag{67}$$

равны $1 \quad k$ и $1 \quad k \quad 2L\,1+k$, $\frac{1\,1\,k}{}$ и возникают в случае $y = \frac{1\,k}{}$ $0 < k < 1$. Как $1+k$, например, корни

$$\frac{16}{9e\,4/3} + \frac{\text{ш}}{3e\,4/3} + \text{wew} \tag{68}$$

равны $4/3$ и $4/3 \quad 2L \quad {}^{1}(1/2)$ 4,927 и возникают в случае $y = 1/2$, $k = 1/3$.

Импульсная характеристика линейной

$= \quad$ с соответствующими $0 < 1 = \beta w + \text{wew}()$, т. е. корни $\alpha + \beta w + \text{wew} =$ являются отрицательными корнями $\alpha + \beta v \quad ve \quad v = 0$.

$^{-\text{во}=}$ $^{\text{г ope}}$ $_{0}$

В соответствии с (67) рассмотрим линейную систему с импульсной характеристикой, определяемой выражением

$$h(t) = 1 \quad k1t \quad k2te \quad t, ( ) \quad \tau 1 \quad 0, \tag{69}$$
$$= (1 +) 0$$

где $k1 = 2$, $k2 = \frac{k}{(1+k)(1+k)}$ согласно $\frac{e^{1+k}}{2}$, $< k < 1$. Передаточная функция такой системы определяется

$$\text{Ч(ы)} = \frac{1}{c} \quad \frac{\text{к1}}{2\,c} \quad \frac{2}{\text{лиц}\ (1 + c)^2} \tag{70}$$

^{2} и соответствует системе, содержащей интегратор, каскад из двух интеграторов и систему второго порядка. Корни $1 + k$ и $1 + k + 2L\,1\,10/,1\,4/,1\,2/$ $\frac{1\,1\,k}{1+k}$. Импульсная характеристика показана на рисунке 11 для случаев $k \quad \{1/10, 1/4, 1/2\}$.

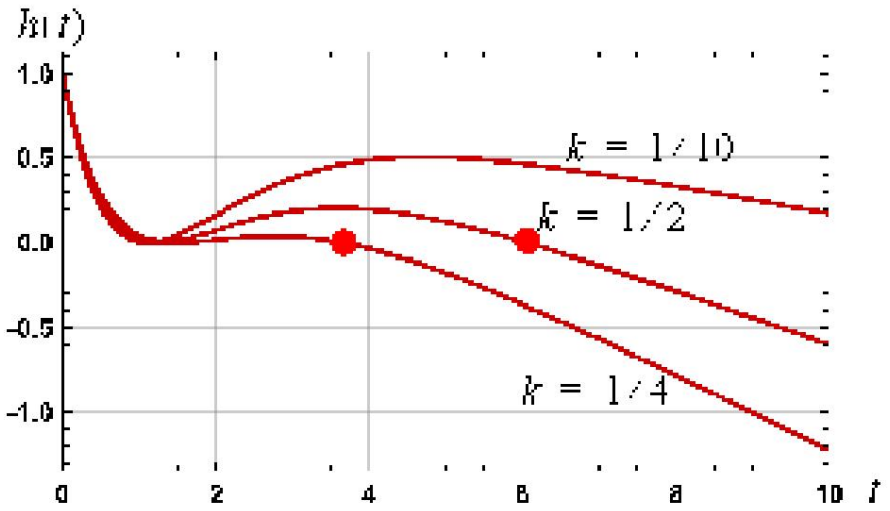


Рис. 11. График импульсной характеристики передаточной функции, определяемой (69), для значений $k \quad \{1/10, 1/4, 1/2\}$.

7. Краткое изложение результатов и заключение

7.1. Сводка результатов $h( )$

$=1$ Аппроксимации $h(0)$, а также связанные с ними границы $'$ относительной погрешности $r0(y), r1(y)$ подробно описаны в таблице 1. Соответствующие аппроксимации для обратной функции Ланжевена: подробно описано в Таблице 2. $1\,10/,1\,4/,1\,2/$

$h(),() (0)$

Machine Translated by Google

Таблица 1. Сводка аппроксимаций для $h_1^{(0)}(y), r0(y), r1(y)$, определенных формулами (27) и (29)–(33), и их относительные границы погрешности $r0(y), r1(y)$ для интервала $[0, 1)$.

Приближение	Определение	Относительная граница ошибки	Относительная ошибка Привязка: 1-я Заказ—(42)	Относительная ошибка Привязка: 2-я Заказ—(43)	Относительная ошибка Граница: 3-я Приказ—(44)
$h_{1,r0(y),r1(y)}^{(0)}$	$\frac{2}{1-y}\cdot 1+y-y^2$	$4{,}45\times10^{-2}$	$2{,}69\times10^{-4}$	$1{,}87\times10^{-5}$	$1{,}32\times10^{-6}$
$h_{2,r0(y),r1(y)}^{(0)}$	$\frac{2}{1-y}\cdot 1+c21\sin(\pi y)+c22\sin^2\pi y$	$4{,}66\times10^{-3}$	$2{,}20\times10^{-4}$	$2{,}42\times10^{-5}$	$3{,}68\times10^{-6}$	
$h_{3,r0(y),r1(y)}^{(0)}$	$\frac{2}{1-y}\cdot 1+y\quad y\,1\quad y^2\quad \frac{7/2}{r_{0}(y)^2}\quad \frac{9/2}{r_{0}(y)+2}$	$3{,}71\times10^{-3}$	$8{,}52\times10^{-6}$	$7{,}58\times10^{-8}$	$7{,}74\times10^{-10}$	
$h_{4,r0(y),r1(y)}^{(0)}$	$\frac{2}{1-y}\cdot 1+y\quad y\,1\quad y^2\quad \frac{4}{r_{0}(y)^2}+й^6\quad \frac{7}{лет\,2}$	$2{,}13\times10^{-3}$	$1{,}92\times10^{-6}$	$9{,}12\times10^{-9}$	$4{,}59\times10^{-11}$	
$h_{5,r0(y),r1(y)}^{(0)}$	$\frac{2}{1-y}\cdot 1+y\quad y\,1\quad y^2\quad \frac{7/2}{r_{0}(y)^2}\quad \frac{9/2}{r_{0}(y)+2}+$ $c51y^5(1-y)(y-yo)e^{-3(y-yo)^2}$	$2{,}33\times10^{-4}$	$3{,}15\times10^{-8}$	$1{,}68\times10^{-11}$	$1{,}04\times10^{-14}$	
$h_{6,r0(y),r1(y)}^{(0)}$	$\frac{2}{1-y}\cdot 1+y-y^2\quad \frac{4}{r_{0}(y)^2}+й^6\quad \frac{7}{лет\,2}\cdot$ $1+\alpha0y^2(1-y)^2$ $1+\alpha2y^2+\alpha3y^5+\alpha4y^4+$ $\alpha5y+\alpha7y^7+\alpha8y$	$4{,}58\times10^{-5}$	$4{,}07\times10^{-10}$	$2{,}43\times10^{-14}$	$1{,}92\times10^{-18}$	

Таблица 2. Сводка аппроксимаций, основанных на аппроксимациях $h_1^{(0)}(y)$, подробно описанных в таблице 1, $r0(y), r1(y)$ для обратной функции Ланжевена, а также связанных с ними относительных границ для интервала $[0, 1)$. Оценки относительной погрешности для приближений Шредера первого, второго и третьего порядков возникают в результате непосредственного использования аппроксимаций в общей форме аппроксимации, определенной в теореме 2.

Прибл.	Определение	Относительная граница ошибки	Относительная ошибка Связанный: Первый Орден	Относительная граница ошибки: Второй Орден	Относительная граница ошибки: Третий Орден
$Л_1^{(1)}(y)$	$\frac{3\,r_{0}(y)}{1-y^2}\,r_{0}(y)\cdot 1\quad \frac{2}{3}$	$4{,}94\times10^{-2}$	$2{,}40\times10^{-3}$	$1{,}20\times10^{-4}$	$5{,}87\times10^{-6}$
$Л_2^{(1)}(y)$	$\frac{3\,r_{0}(y)}{1-y^2}\quad d21\sin(\pi y)+d22\sin(\pi y+1\quad y^2)$	$1{,}83\times10^{-2}$	$2{,}94\times10^{-4}$	$5{,}29\times10^{-6}$	$9{,}23\times10^{-8}$
$Л_3^{(1)}(y)$	$\frac{3y}{\ldots+1}\quad 2\,1\quad y\quad \frac{2}{r_{0}(y)^3}\quad \frac{5/2}{\frac{r_{0}(y)}{6}}+\frac{9/2}{\frac{r_{0}(y)}{6}}$	$4{,}37\times10^{-3}$	$1{,}62\times10^{-5}$	$6{,}59\times10^{-8}$	$2{,}64\times10^{-10}$
$Л_4^{(1)}(y)$	$\frac{3\,r_{0}(y)}{1-y^2}\,r_{0}(y)\cdot 1\quad \frac{2}{3}\quad \frac{\ldots}{\ldots}\quad \frac{\ldots}{\ldots}\quad лет+3\quad \frac{5}{лет+6}\quad \frac{6}{и}\quad \frac{7}{6}$	$2{,}44\times10^{-3}$	$5{,}32\times10^{-6}$	$1{,}24\times10^{-8}$	$2{,}84\times10^{-11}$
$Л_5^{(1)}(y)$	$\frac{3\,r_{0}(y)}{1\quad y^2}\,r_{0}(y)\cdot 1\quad \frac{2}{3}\quad \frac{5/2}{r_{0}(y)\,6}+\frac{9/2}{r.6}$ $\frac{c51y\,5(1\quad y)(y\quad yo)^2}{\frac{3y}{1\quad y^2}}\cdot e^{2\text{-}3\,(r\text{-}йo)}$	$2{,}58\times10^{-4}$	$6{,}47\times10^{-8}$	$1{,}67\times10^{-11}$	$4{,}22\times10^{-15}$
$Л_6^{(1)}(y)$	$r_{0}(y)1\quad \frac{2}{3}\quad \frac{\ldots}{\ldots}\quad \frac{\ldots}{\ldots}\quad \frac{5\,6\,r\,r\,+\,+3}{6}\quad лет+6\quad \frac{7}{}$ $\frac{\alpha0\,y(1\quad y^2)^2}{3}\cdot\quad 1-y^2\quad 3+y\quad \frac{4}{\frac{3}{2}r_{0}(y)+}$ $\frac{5}{\frac{3}{r_{0}(y)2}}\quad \frac{6}{лет\,2}$ $1+\alpha2y\,\alpha5y^2\quad 3+\alpha3y+\alpha7y+\alpha4y\,4+\alpha8y^8$	$4{,}85\times10^{-5}$	$2{,}32\times10^{-9}$	$1{,}14\times10^{-13}$	$5{,}48\times10^{-18}$

7.2. Выводы

Определена связь между обратной функцией Ланжевена и функцией r0-r1-Ламберта W. Полученное соотношение приводит к новым аппроксимациям обратной функции Ланжевена с потенциально более низкими границами относительной погрешности, чем сопоставимые опубликованные аппрок

Было показано, что улучшенные аппроксимации функции r0-r1-Ламберта W с значительно более низкими границами относительной погрешности могут быть определены с использованием корневых аппроксимаций Шредера первого рода. Затем можно определить аппроксимации обратной функции Ланжевена, используя установленную связь между двумя функциями. Альтернативный подход состоит в том, чтобы напрямую использовать установленную аппроксимацию обратной функции Ланжевена в общей форме аппроксимации Шредера. Были приведены примеры, иллюстрирующие

Machine Translated by Google

что первый подход, вероятно, приведет к более простому аналитическому выражению для заданной границы относительной ошибки.

Было показано, как определенные аппроксимации обратной функции Ланжевена можно использовать для установления аппроксимаций интеграла обратной функции Ланжевена, вообще говоря, с низкими границами относительной погрешности.

Связь между обратной функцией Ланжевена и функцией r0-r1-Ламберта W была использована для установления корней импульсной характеристики индивидуальной линейной системы, состоящей из интегратора, каскада из двух интеграторов и системы второго порядка.

Что касается будущих исследований, отмечается, что итерационные подходы могут быть использованы для установления аппроксимаций с нижними границами относительной погрешности, а некоторые результаты для обратной функции Ланжевена были подробно описаны, например, [14,21]. Беринда [26] и Гавец [27], например, предоставляют обзор итерационных подходов, которые можно использовать для решения задач с фиксированной точкой. В общем, итерационные подходы приводят к аналитическим аппроксимациям высокой степени сложности и полагаются на начальное приближение. Для достижения результатов с умеренной сложностью требуется итерация низкого порядка, а также начальное приближение с низкой границей относительной ошибки и низкой сложностью. Таким образом, новые приближения представляют интерес и требуют постоянных исследований.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: данные содержатся в статье.

Благодарности: Автор рад выразить благодарность А. Зубиру, SPG, Технический университет Дармштадта, Дармштадт, Германия, который организовал визит, в ходе которого были установлены фундаментальные результаты, лежащие в основе этой статьи.

Конфликты интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Приложение А. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим функцию $f(x, y) = 1 - (1 - y)x - [1 + (1 + y)x]e^{-2x}$ для общего случая $x, y \in \mathbb{R}, y \neq -1$ и преобразования

$$z = 1 + (1 + y)x, \; x = \frac{z - 1}{1 + y}, \tag{A1}$$

$$w = \frac{2z}{1 + y}, \quad z = \frac{(1 + y)w}{2}. \tag{A2}$$

Определения f_2 и f_1 согласно $f_2(w, y) = f_1(z, y) = f(x, y)$ тогда приводят к

$$f_1(z, y) = f\left(\frac{z - 1}{1 + y}, y\right) = 1 + \frac{(1 - y)z}{1 + y} - z \exp\left(-\frac{2z}{1 + y}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2}{1 + y}\right) \tag{A3}$$

$$f_2(w, y) = f_1\left(\frac{(1 + y)w}{2}, y\right) = \frac{2}{1 + y}\left(\frac{(1 - y)w}{2} + \frac{(1 + y)w}{2}\right) \cdot \exp(-w) \cdot \exp\left(\frac{2}{1 + y}\right) \tag{A4}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{2e^{2/(1+y)}}{1+y} \cdot f_2(w, y) = \frac{4e^{2/(1+y)}}{(1+y)^2} + we^{w} + \frac{(1 - y)e^{-2/(1+y)w}}{1+y} = r_0(y) + r_1(y)w + we^{w} = h_{r_0(y), r_1(y)}(w) \tag{A5}$$

когда

$$(1+y)\, r_0(y) = -2, \; r_1(y) = (1+y)\left(1 + \frac{(1 - y)e^{-2/(1+y)}}{4e^{2/(1+y)}}\right). \tag{A6}$$

Machine Translated by Google

Из (A1) и (A2) следует, что x = f2(w, y) = $\frac{1}{1+y}$ $\frac{ш}{2}$ и тогда следует из соотношения f(x, y), что

$$к_{f(y)f2(w,\,y) = k\,f(y)f\left(\frac{1}{1+y}\right.}\ \left.\frac{ш}{2}, y = hr0(y),r1\,(y)\,(w)\right) \tag{A7}$$

когда к $\frac{2e\quad 2/}{(1+y)\,f\,(y) = 1+y,}$ что является первым требуемым результатом.

Чтобы установить последний сформулированный результат, рассмотрим конкретный случай f(x, y) = 0, 0 < y < 1, который определяется путь

$$(x\ ,\ y) : x\ = L\qquad ^{1}(y),\ y \in (0,\ 1)\ . \tag{A8}$$

По пути, определенному формулой f(x, y) = 0, 0 < y < 1, и с x = $\frac{1}{1+y}$ $\frac{ш}{2,}$ это тот случай, что

$$к\ f(y)f\quad \left(\frac{1}{1+y}\right.\ \left.\frac{ш}{2}, y = r0(y) + r1(y)w + wew = hr0(y),r1\,(y)\,(w) = 0\right) \tag{A9}$$

Следовательно, при w = $\frac{1}{2L\ r0(y),r1\,(y)\,1+y\quad 1\ h\,(0)\ r0\,(y),r1\,(y)\ 2}$ $\frac{2\quad 1}{}$, т. е. w = h (0). (w), то L $^{1}(y) = \frac{1}{1+y}$ ———————, что является последним завершенным результатом. Этот результат справедлив и для случая y = 0.

Приложение B. Аппроксимации в ограниченной области для hr0(y),r1 (y) (w)

Приложение Б.1. Случай 1: 0 < y << 1

В случае 0 < y 1 и в соответствии с левым графиком, показанным на рисунке 4, представляющий интерес корень hr0(y),r1 (y) близок, но левее известного корня — 2/(1 + y) (см. (21)). Рассмотрим hr0(y),r1 (y) (w), определенный формулой (19), и случай hr0(y),r1 (y) (w) = 0, т.е.

$$\frac{4e\quad 2/(1+y)}{(1+y)^{2}} + \frac{w(1\quad y)e\quad 2/}{+\ y}(1+y) + wew = 0,1 \tag{A10}$$

Из формы w w = 2/(1 + y) + ε(y) следует, что:

$$\frac{4}{(1+y)}\quad \frac{1-y+2}{1+y}\cdot\ \frac{2}{y} + \varepsilon(y) + 1 + \quad \frac{2}{} + \varepsilon(y)\,e = 0,1+y^{\varepsilon(y)} \tag{A11}$$

Упрощение и разложение в ряд Тейлора показательной функции вокруг нулевой точки приводя т к:

$$2 + (1\quad y)\varepsilon(y) + [\quad 2 + (1+y)\varepsilon(y)]\ 1 + \varepsilon(y) + \quad \frac{e^{2}\ (y)}{} + \cdots = 0,2 \tag{A12}$$

Разложения экспоненциальной функции первого, второго и третьего порядков приводя т к приближения м:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{2}\\ &(y)[1+y] = 0,\ \text{первый порядок}\ (1+y)\varepsilon(y)\ (y)\ 1 + 2\\ &e^{2}\quad \frac{}{} = 0,\ \text{второй порядок}\ (1+3y)\varepsilon(y)\\ &e^{2}\quad \frac{(1+y)\varepsilon\ (y)\ y + + 6\ 6}{}\ \frac{}{^{2}(y)} = 0,\ \text{третий порядок} \end{aligned} \tag{A13}$$

с решениями:

$$\begin{aligned} &\varepsilon(y) = 0,\quad \text{первого}\\ &\varepsilon(y) = 0,\varepsilon(y) = \frac{}{}\quad \text{второй порядок}\\ &\frac{\text{порядка}\quad 2y\ 1+y,}{^{2}},\quad \text{третий порядок}\\ &1\quad 3y\pm\quad 1\quad 18y\quad 15y\ \varepsilon(y) = 0,\varepsilon(y) = 2(1+y) \end{aligned} \tag{A14}$$

Machine Translated by Google

Рассмотрим первое ненулевое решение для ε(y), которое является решением второго порядка для ε(y) = 2y/(1 + y). В случае y 0 из этого решения следует w = 2, что соответствует корню 2/(1 + y).

Решение третьего порядка, соответствующее ε(y) 0 при y 0, равно 1 3y+ 1 18y 15y ε(y) = 2(1+y). $\frac{}{}$ $\frac{6y \quad 24y^2}{1+y}$ и приводит к приближению:

$$\text{час } 0(y),r1\,(y) \quad \frac{2 \quad 6y \quad 24y^2}{1+y} \qquad 0,\ 0 < y \quad 1. \tag{A15}$$

Следовательно:

$$h\ r0(y),r1\,(y)\ 1 + y \quad \frac{2 \quad 6y \quad 24y \quad 1\ (0)}{} \quad ^2 \qquad 2 \quad 4y \quad 20y^{\ 2} \tag{A16}$$

после использования приближения $(1 + y)^{\ 1} \quad 1 - y + y^{\ 2}$.

Приложение Б.2. Случай 2: y

-> 1. Для y 1 разложение в ряд Тейлора вокруг первой точки дает приближения:

$$\begin{aligned} &r\ 0(y) = \frac{4e \quad 2/(1+y)}{(1+y)^{\ 2}} \quad \frac{}{e} \quad \frac{1 \quad y\,(1 \quad y)\,1 + +}{2e} \quad \frac{}{8e} \quad ^2 + \cdots \\ &(1+y)\ r1(y) = \frac{(1 \quad y)e \quad 2/}{1+y} \quad \frac{1-y}{2e} \quad \frac{(1-y)}{16e} \quad ^3 \ \ldots \end{aligned} \tag{A17}$$

Подстановка этих приближений в

$$hr0(y),r1\,(y)\,(w) = r \quad _0\,(y) + r1(y)w + wew = 0 \tag{A18}$$

урожайность

$$\frac{1}{e}\,\frac{1}{2e}\,\frac{y + +}{} \quad \frac{(1 - y)}{8e} \quad ^2 + \cdots + \quad \frac{1 - y}{2e} \quad \frac{(1 - y)}{16e} \quad ^3 \quad \cdots w + wew = 0. \tag{A19}$$

При y 1 снизу требуемый корень из (A18) становится все более отрицательным (это видно из сравнения левого и правого графиков, показанных на рисунке 4). Для случая |w| 1 и w отрицательный, член wew становится малым, что приводит к

$$\text{ш} = - \quad \frac{\frac{}{e}\ 7e\ 8e\ \frac{1 \quad y\,(1 \quad y)\,1 + +}{16e}}{\frac{1 \quad y}{2e}} \quad ^2 \qquad \frac{2}{1 \quad y},\ y = 1 \qquad ,\ 0 < \qquad 1, \tag{A20}$$

и требуемый результат

$$\begin{matrix} 1 \\ ,\ 0 < \end{matrix} \quad \begin{matrix} (0) \\ h\ 1 \end{matrix}\ {}_{1.\ r0(y),r1\,(y)}\ {}_{y,\ y\ =\ 1}\ \frac{2}{} \tag{A21}$$

Приложение С. Доказательство приближений Шредера первого, второго и третьего порядков

При z = hr0(y),r1 (y) (w) = r h(w) = $_0$ (y) + r1(y)w + wew, отсюда следует, используя обозначения hr0(y),r1 (y) (w), то

$$\begin{aligned} &h\ (1)\ (w) = r1(y) + (1 + w)e\ w, \qquad h\ (2)\ (w) = (2 + w)e\ w, \cdots \\ &h\ (3)\ (w) = (3 + w)e\ w, \qquad h\ (k)\ (w) = (k + w)e\ w. \end{aligned} \tag{A22}$$

Тогда из теоремы 2 следует, что приближение Шредера первого порядка есть

$$\text{ч}_{\ 1}\ ^1\ (z) = w \quad h\ \frac{h(w) \quad z}{(1)\ (w)} \quad {}_{\text{ш=ч}\ 0}\ {}^{1}{}_{(з)} = \frac{r0(y) + w^{\ 2\ \text{мы е}} + \text{я}}{r1(y) + (1 + w)e\ w} \quad {}_{\text{ш=ч}\ 0}\ {}^{1}{}_{(з)} \tag{A23}$$

Machine Translated by Google

предполагая, что начальная аппроксимирующая функция $_0{}^1$ для часа-1. Приближение для случая hz = 0 равна

$$^{час}{}_1{}^1(0) = \frac{r0(y) + w^{2}e^{ш}}{r1(y) + (1 + w)e^{w}}\ {}_{1\ ш=ч\ 0}(0) \tag{A24}$$

Замена r0 и r1, как указано в (18), дает:

$$ч_1{}^1(0) \text{ знак равно} \frac{4 + (1 + y)2w^2 2\exp w + 1+y^{\frac{2}{}}}{2\,1 - y^{2} + (1 + y)^{2}\,(1 + w)\exp w + 1+y^{\frac{2}{}}\ w=h}\ {}_{0\ 1}(0) \tag{A25}$$

Приложение C.1. Второй Орден

Приближение Шредера второго порядка как h, определенное в теореме 2, есть

$$ч_2{}^1(г) = ч_1{}^1(z) - \frac{[h(w) - z]^{2}\,ч\,(2)\,(ж)}{2[ч\,(1)\,(ж)]^{3}}\ {}_{1\ ш=ч\ 0}(z)$$
$$= \frac{r0(y)+w^{2}e^{ш+з}}{r1(y)+(1+w)e^{w}} - \frac{[r0(y)+r1(y)w+wew - z]^{2}\,(2+ш)e^{ш}}{2[r1(y)+(1+w)e^{w}]^{3}}\ {}_{1\ ш=ч\ 0}(з) \tag{A26}$$

а аппроксимация для случая z = 0 равна

$$ч_2{}^1(0) = \frac{r0(y)+w^{2\,мы\,е}}{r1(y)+(1+w)e^{w}} - \frac{[r0(y)+r1(y)w+wew]^{2}\,(2+ш)e^{ш}}{2[r1(y)+(1+w)e^{w}]^{3}}\ {}_{1\ ш=ч\ 0}(0) \tag{A27}$$

Замена r0 и r1 дает:

$$ч_2{}^1(0) = \frac{4+(1+y)2w\,2\ опыта ж+\ 1+y^{\frac{2}{}}}{1\quad y\,2+(1+y)^{2}\,(1+w)\exp w+\ \overline{2\,1+r}^{2}} - \frac{4+(1\quad y\,2)w+(1+y)\,2w\quad опыт\ w+\ \overline{1+y}^{2}\quad (2+w)\exp w+\ 1+y^{\frac{2}{}}}{2(1+y)\,1\quad y+(1+y)(1+w)\exp w+\ \overline{2\,1+r}^{3}}\ {}_{1\ ш=ч\ 0}(0) \tag{A28}$$

Приложение C.2. Третий Орден

Приближение Шредера третьего порядка как h, определенное в теореме 2, есть

$$^{час}{}_3{}^1(г) = ч_2{}^1(z) - \frac{[h(w) - z]^{3}\,ч\,(3)\,(ж)}{6\,ч\,(1)\,(ж)^{4}} \cdot \frac{3\,ч\,(2)\,(ж)^{2}}{ч\,(1)\,(ж)ч\,(3)\,(ж)}\ {}_{1\ ш=ч\ 0}(з) \tag{A29}$$

а аппроксимация для случая z = 0 равна

$$^{час}{}_3{}^1(0) = ч_2{}^1 - \frac{[r0(y)+r1(y)w+wew]\,(0)^{2}\,(3+ш)e^{ш}}{6[r1(y)+(1+w)e^{w}]^{4}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3(2+w)^{2\,2we}}{[r1(y)+(1+w)e^{w}](3+w)e^{w}}}\ {}_{1\ ш=ч\ 0}(0) \tag{A30}$$

Замена r0 и r1 дает требуемый результат:

$$ч_3{}^1(0) = ч_2{}^1(0) - \frac{4 + 1 - y^{2}\ w + (1 + y)\,2w\exp w + 1+y^{\frac{2}{}}\quad ^{3}\exp w + 1+y^{\frac{2}{}}}{(1\quad y)(3+w)+(1+y)(9+8w+2w\,2)\exp w+\ \overline{1+y\ 5}^{\frac{2}{}}\quad 6(1+y)^{2}\ 1\quad y+(1+y)(1+w)\exp w+\ 1+y^{\frac{2}{}}}\ {}_{1\ ш=ч\ 0}(0) \tag{A31}$$

Machine Translated by Google

Ссылки

1. Ланжевен П. О теории магнетизма. Дж. Физ. Теор. Прил. 1905, 4, 678–693. [Перекрестная ссылка]
2. Фиасконаро, А.; Фало, Ф. Аналитические результаты модели расширяемой свободносочлененной цепи. Физ. Стат. Мех. Прил. 2019, 532, 121929. [Перекрестная ссылка]
3. Илиафар, С.; Везенов Д.; Яготa, А. Растяжение свободносочлененной цепи в двух измерениях. arXiv 2013, arXiv:1305.5951.
4. Ицков, М.; Даргазаны, Р.; Хорнс, К. Тейлор. Разложение обратной функции с применением к функции Ланжевена. Математика. Мех. Solids 2012, 17, 693–701. [Перекрестная ссылка]
5. Нгуессонг, Ан; Беда, Т.; Пейро, Ф. Новый подход к аппроксимации обратной функции Ланжевена, основанный на ошибках. Реол. Acta 2014, 53, 585–591. [Перекрестная ссылка]
6. Дараби Э.; Ицков М. Простая и точная аппроксимация обратной функции Ланжевена. Реол. Acta 2015, 54, 455–459. [Перекрестная ссылка]
7. Единак Р. Еще раз об аппроксимации обратной функции Ланжевена. Реол. Акта 2015, 54, 29–39. [Перекрестная ссылка]
8. Крёгер М. Простые, допустимые и точные аппроксимации обратных функций Ланжевена и Бриллюэна, актуальные для сильных деформации и течения полимеров. Дж. Нон-Ньютон. Жидкостная мех аника. 2015, 223, 77–87. [Перекрестная ссылка]
9. Марки, Британская Колумбия; Арруда, Э.М. Минимизирующий ошибки подход к обратным приближениям Ланжевена. Реол. Acta 2015, 54, 887–902. [Перекрестная ссылка]
10. Рикаби, СР; Скотт, Нью-Хэмпшир. Сравнение моделей эластичности резины с ограниченным растяжением. Межд. Дж. Нелинейный мех анизм. 2015, 68, 71–86. [Перекрестная ссылка]
11. Петросян Р. Улучшенные аппроксимации некоторых моделей расширения полимеров. Реол. Акта 2017, 56, 21–26. [Перекрестная ссылка]
12. Единак Р. Комплексное исследование математических методов, используемых для аппроксимации обратной функции Ланжевена. Математика. Мех. Solids 2018, 24, 1992–2016. [Перекрестная ссылка]
13. Марки, Британская Колумбия; Арруда, Е.М. Обобщенные минимизирующие погрешность рациональные обратные аппроксимации Ланжевена. Математика. Мех. Твердые тела 2019, 24, 1630–1647. [Перекрестная ссылка]
14. Ховард, Р.М. Аналитические аппроксимации обратной функции Ланжевена посредством линеаризации, аппроксимации ошибок и итерации. Реол. Acta 2020, 59, 521–544. [Перекрестная ссылка]
15. Мецо И.; Киди, Г. Некоторые физические приложения обобщенных функций Ламберта. Евро. Дж. Физ. 2016, 37, 065802. [CrossRef]
16. Мецо И. О структуре множества решений обобщенного уравнения Эйлера–Ламберта. Дж. Математика. Анальный. Прил. 2017, 455, 538–553. [Перекрестная ссылка]
17. Мецо И.; Барич, А. Об обобщении W-функции Ламберта. Пер. Явл. ю. сь. Математика. Соц. 2017, 369, 7917–7934. [Перекрестная ссылка]
18. Джамилла, К.; Мендоса, Р.; Мецо, И. Решения нейтральных дифференциальных уравнений с запаздыванием с использованием обобщенной W-функции Ламберта. Прил. Математика. Вычислить. 2020, 382, 125334. [CrossRef]
19. Петкович, М.С.; Петкович, Л.Д.; Герцег, Р. О семействах методов поиска корней Шредера. Дж. Компьютер. Прил. Математика. 2010, 233, 1755–1762. [Перекрестная ссылка]
20. Дюбо Ф. Полиномиальные и рациональные аппроксимации и и связь между процессами Шредера первого и второго рода. Абстр. Прил. Анальный. 2014, 2014, 719846. [CrossRef]
21. Ховард Р.М. Шредер на основе аппроксимации обратной функции. Аксиомы 2023, 12, 1042. [CrossRef]
22. Корлесс, Р.М.; Гонне, GH; Зая ц, ДЭГ; Джеффри, диджей; Кнут, Д.Е. О W-функции Ламберта. Адв. Вычислить. Математика. 1996, 5, 329–359. [Перекрестная ссылка]
23. Ховард Р.М. Аналитические аппроксимации для главной ветви W-функции Ламберта. Евро. Дж. Математика. Анальный. 2022, 2, 14. [Перекрестная ссылка]
24. Лоци, Л. Гарантированно-высокоточная оценка W-функции Ламберта. Прил. Математика. Вычислить. 2022, 433, 127406.
25. Шредер, Э. Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Математика. Энн. 1870, 2, 317–365. [Перекрестная ссылка]
26. Беринде, В.; Такенс, Ф. Итеративная аппроксимация фиксированных точек; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 2007.
27. Гавец, К.; Котарский, В.; Лисовска, А. Полиномиография, основанная на нестандартных методах поиска корней типа Ньютона. Абстр. Прил. Анальный. 2015, 2015, 797594. [CrossRef]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Приложения дифференциальной геометрии, связывающие топологические Бифуркации хаотических полей течения

Питер Д. Нилсон 1* и Меган Д. Нилсон 2

1 Школа электротехники и телекоммуникаций, Университет Нового Южного Уэльса, Сидней, Новый Южный Уэльс, 2052, Австралия
2 Независимый исследователь, Высшая школа электротехники и телекоммуникаций, Университет Нового Южного Уэльса, Сидней, Новый Южный Уэльс, 2052, Австралия;
megan.neilson@gmail.com * Адрес для переписки: p.neilson@unsw.edu.au

Аннотация: В каждой точке r гладкого n-многообразия M существует (n + 1) косо симметричных тензорных пространств, охватывающих дифференциальные r-формы ω с r = 0,,1, · · · n. Поскольку d d всегда равно нулю, где d — внешний дифференциал, отсюда следует, что каждая точная r-форма (т. е. ω = dλ, где λ — (r 1)-форма) замкнута (т. е. dω = 0), но не каждая замкнутая r-форма точна. Это подразумевает существование третьего типа дифференциальной r-формы, замкнутой, но не точной. Такие формы называются гармоническими формами. Каждое гладкое n-многообразие имеет базовую топологическую структуру. Существует множество различных возможных топологических структур. Что отличает одну топологическую структуру от другой, так это количество имеющихся в ней дырок различных размерностей. Теория дифференциальных форм Де Рама связывает наличие r-мерных дыр в базовой топологии гладкого n-многообразия M с наличием гармонических полей r-формы на гладком многообразии. Чтобы понять теорему де Рама, требуется большой объем теории. В этой статье мы суммируем дифференциальную геометрию, которая связывает дыры в базовой топологии гладкого многообразия с гармоническими полями на этом многообразии. Мы исследуем применение теории де Рама к (i) визуальным, (ii) механическим, (iii) электрическим и (iv) системам потока жидкости. В частности, мы рассматриваем поля гармонического потока во внутриклеточном водном растворе биологических клеток и на математических основаниях предполагаем возможную роль полей гармонического потока в сворачивании белковых полипептидных цепей.

Ключевые слова: симплициальные комплексы; сингулярные группы гомологии; особые группы когомологий; сингулярные цепные комплексы; алгебра Грассмана; Лапласовы и гармонические формы; группы когомологий де Рама; теорема де Рама; сворачивание белка

MSC: 53Z10; 53Z30

check for updates

Ссылка: Нилсон, П.Д.; Нилсон, доктор медицинских наук Приложения дифференциальной геометрии, связывающие топологические бифуркации с хаотическими полями течения. Прикладная математика 2024, 4, 763–790. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020041

Академический редактор: Массимо Ферри

Поступила: 23 апреля 2024 г.
Пересмотрено: 11 июня 2024 г.
Принято: 11 июня 2024 г.
Опубликовано: 15 июня 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов.
Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария.
Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условия Creative Commons
Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

В известной цитате Эйнштейна говорится, что, поскольку законы математики относятся к реальности, они не являются достоверными, а поскольку они надежны, они не относятся к реальности. Хотя это может показаться спорным, математические теории физических процессов, безусловно, требуют интерпретации с точки зрения экспериментальных наблюдений. Дифференциальная геометрия — это логическая структура доказуемых утверждений, теорем и лемм, истинность которых вытекает из аксиом, определений и элементарных связок формальной логики. Чтобы применить дифференциальную геометрию к физическим системам, необходимо построить мосты между событиями и переменными в физическом мире (желательно, но не обязательно, измеримыми) и четко определенные понятия в дедуктивно-логической структуре дифференц Эти мосты представляют собой интуитивные гипотезы, связывающие реальность с математикой, и их ценность зависит от качества интуиции практикующего специалиста. Если гипотеза верна, то определенные законы математики можно применить к реальной системе. Но даже если экспериментально будет продемонстрировано, что математические законы действительно описывают поведение реального мира, это не докажет гипотезу. Другие гипотезы могут оказаться столь же успешными

Machine Translated by Google

Действительно, невозможно доказать гипотезы «если-то», хотя их ложность легко доказать. В прикладной математике мосты «если-то» между реальностью и математикой навсегда остаются интуитивными. Что касается достоверности, то первична математика.

Тем не менее, есть смысл показать, что одну и ту же математику можно с пользой применить к целому ряду систем реального мира.

Теорема Де Рама о когомологиях дифференциальных форм — замечательная часть математики, которая связывает воедино области математики, которые раньше считались не связанными друг с другом. Мы считаем, что математические факты, предоставляемые теоремой де Рама, имеют большое значение для нелинейного поведения и наличия критических точек и особенностей в пространствах состояний многих различных систем реального мира. В данной работе рассматривается интерпретация теоремы с точки зрения экспериментальных наблюдений динамики течения жидкости. По сути, теория когомологий де Рама связывает существование дыр различных размерностей в базовой топологии гладких и римановых многообразий с третьим типом поля потока дифференциальной формы на многообразии, замкнутым, но не точным. Такое поле течения называется гармоническим полем. Другими словами, наша цель — продемонстрировать связи между гармоническими полями математики и физическими потоками реальных нелинейных систем с особенностями и критическими точками, наблюдаемыми в природе.

Чтобы проиллюстрировать тип нелинейных динамических процессов в мире, которые можно понять с помощью этой математической связи, рассмотрим пузырьки и потоки жидкости, связанные с наливанием бокала шампанского, или образование и поток пены, связанные с разбиванием океанской волны. пляжи лиотичное бурное течение горного ручья вокруг скал. Даже превращение гусеницы в мотылька может находиться в рамках теории. Определенные особенности нелинейной динамики визуальных, механических, электрических и жидкостных систем могут быть связаны с гармоническими полями. В частности, мы рассмотрим возможную роль вихрей и водоворотов в полях гармонических потоков, индуцированных присутствием органелл и других молекул, погруженных во внутриклеточный водный раствор биологических клеток, на кинетику сворачивания белков.

Наш поиск этой связи был вдохновлен двумя, казалось бы, не связанными друг с другом событиями. Во-первых, в нашем анализе геометрии трехмерного бинокулярного зрительного пространства [1–3] мы пришли к пониманию того, что необходимо учитывать три различные трехмерные геометрии. Конечно, существует трехмерная евклидова геометрия внешнего мира. Но геометрия трехмерного зрительного пространства, кодируемого сенсорными рецепторами, искажается (или искривляется) из-за того, что размеры изображений на сетчатке глаза изменяются обратно пропорционально евклидову расстоянию между объектом окружающей среды и узловой точкой глаза [4]. Это внутреннее трехмерное пространство соответствует искривленному риманову многообразию с метрикой, пропорциональной обратной величине квадрата евклидова расстояния [1]. Это приводит к возникновению сингулярности в начале координат, где метрика стремится к бесконечности. Сознательно воспринимаемое трехмерное визуальное пространство снова отличается, поскольку в игру задействовано множество различных когнитивных механизмов восприятия глу
Сингулярность в начале координат компенсируется существованием дыры вокруг эгоцентра в зрительном пространстве. Существование такой дыры подтверждается тем, что невозможно увидеть собственную голову, не говоря уже о собственном эгоцентре. Возникает вопрос, какое влияние оказывает такая дыра в зрительном пространстве на воспринимаемый поток зрительных образов?

Второе событие касалось необычной группы диагнозов рака молочной железы, которые возникли у женщин, работающих вместе на австралийской телестудии [5,6]. Было высказано предположение, что рак мог быть вызван утечкой электромагнитного излучения из телевизионного передатчика. Для проверки этой гипотезы были привлечены эксперты. Они не обнаружили никаких свидетельств каких-либо проблемных уровней радиации на женских рабочих местах. В физических теориях электромагнетизма существует как минимум два типа электрического поля. Один определяется градиентами напряжения, а ротор другого определяется изменением магнитных полей. Эти два типа поля независимы, поскольку ротор градиента всегда равен нулю. Возникает вопрос: существует ли загадочный третий тип электрического поля, который остался бы незамеченным стандартными методами измерения? Дифференциальная геометрия предполагает, что есть. Согласно теореме де Рама, ротор электрического поля может быть равен нулю, но при этом он не является градиентом.

Machine Translated by Google

напряжения . Возникает вопрос, существует ли такой третий тип поля в природе, и если да, то какими свойствами он обладает?

Применение дифференциальной геометрии к физическим системам требует досконального знания математической теории, поскольку последовательность ее применения не обязательно соответствует красивой логической последовательности, в которой были разработаны и доказаны теоремы. Применение часто требует перехода от одной точки математической теории к отдаленной точке с большим объемом математических вычислений, связывающих эти две точки. Более того, понимание теоремы де Рама не является тривиальным. Это требует знания большого количества дифференциальной геометрии. Следовательно, в Приложении А мы подробно описываем все шаги предлагаемой нами математической связи между появлением и исчезновением дыр в базовой топологии гладких и римановых многообразий и появлением и исчезновением гармонических полей потока на многообразии. Между тем, в следующем разделе мы предлагаем читателю более концептуальное введение в дифференциальную геометрию, используемую для связи топологических бифуркаций с хаотическими полями потоков в природе.

2. Краткое изложение соответствующих понятий дифференциальной геометрии 2.1.

Топологическая структура Важным свойством топологических пространств является то, что они не снабжены метрикой. У них нет меры размера. Размер и топологию можно рассматривать как независимые свойства. Топологическое пространство, как и совокупность всех точек двумерной сферы, можно расширить до размеров планеты или сжать до размеров атома без изменения его топологической структуры. Пока он не разрезан, не порван, не проколот и не склеен, его можно деформировать любым способом на любую величину без изменения его топологической структуры. Например, 2-сферу можно растянуть в длинную тонкую веревку и завязать в узел, не меняя при этом ее топологию.

Все различные формы, в которые топологическое пространство может быть деформировано без разрезания, разрыва, прокалывания или склеивания, могут быть отображены друг на друга непрерывным, взаимно однозначным и непрерывно обратимым образом. Это особый тип отображения, называемый гомеоморфизмом. Любые два гомеоморфных пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами. Действительно, топологическое свойство можно определить как свойство, сохраняемое гомеоморфными. Преобразования, оставляющие неизменной топологическую структуру, называются гомотопиями; широко известным примером является превращение кофейной кружки с ручкой в пончик и наоборот [7]. Математическое отображение ([8], с. 348)) показано на рисунке 1.

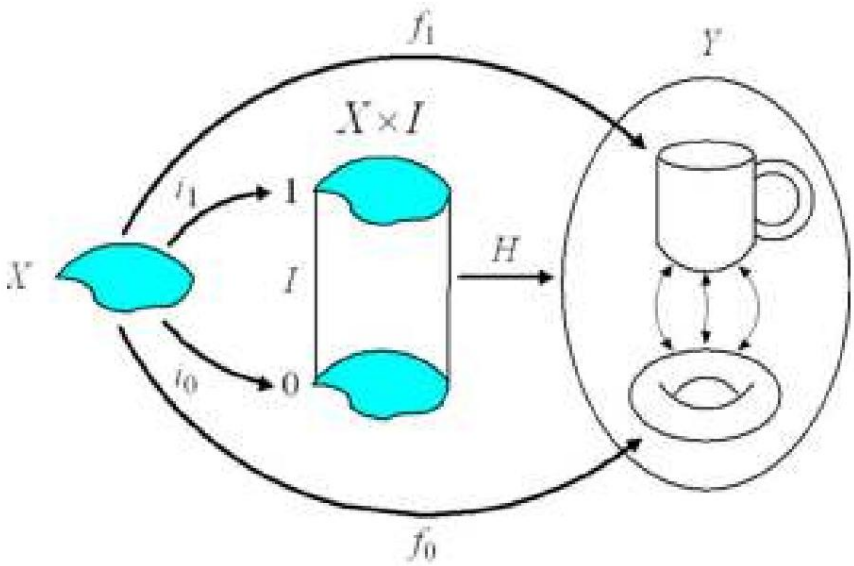


Рисунок 1. Диаграмма, иллюстрирующая гомотопию. 2-тор (поверхность пончика) в топологическом пространстве Y и кофейная кружка с ручкой в топологическом пространстве Y являются эквивалентными топологическими структурами. Они не только гомеоморфно связаны (т. е. непрерывны, взаимно однозначны, на и обратимы), но и обратимы.

Machine Translated by Google

существуют непрерывные гомотопические отображения $f0, f1 : X \to Y$, которые отображают топологическое пространство X как в 2-тор, так и в кружку. Тот факт, что пончик можно непрерывно трансформировать в кружку, предполагает существование всех промежуточных форм при трансформации. Отверстие в бублике превращается в отверстие между кружкой и ручкой. На диаграмме это иллюстрируется частным случаем, когда $Y = X \times I$, $f0 = i0$, $f1 = i1$, где интервал I изменяется от 0 до 1. Для каждой точки $x \in X$ отображение $f0(x) = i0(x) = (x, 0)$ соответствует 2-тору, отображение $f1(x) = i1(x) = (x, 1)$ соответствует кружке, а все остальные точки на интервале I соответствуют промежуточные формы. На диаграмме это представлено гомотопией H. В более общем смысле, хотя топологические пространства X и Y могут включать дырки разных размерностей, они должны иметь одинаковую топологическую структуру, чтобы гомотопия H существовала. Другими словами, для того, чтобы $f0, f1 : X \to Y$ были гомотопическими отображениями, индуцированные гомоморфизмы $(f0)_*, (f1)_* : Hr(X) \to Hr(Y)$ для всех $r \geq 0$ между группами гомологий для X и Y должны быть равны, т.е. $(f0)_* = (f1)_*$.

Однако невозможно преобразовать 2-сферу в 2-тор, не проделав в сфере дыры. 2-сфера и 2-тор не имеют одинаковой топологической структуры. В 1958 г. А. А. Марковым было показано (см. [8]), что не существует алгоритма, который мог бы определить все различные топологические структуры, которые может иметь топологическое пространство размерности 4 и выше. Лучшее, что мы можем сказать, это то, что такие пространства имеют большое количество возможных различных топологических структур. По сути, то, что делает топологическое структуры разные, это разное количество отверстий разных размеров, которые существуют в топологическое пространство (например, разница между топологией сферы и топологией тора связана с отверстием(ями) в торе).

2.2. Топологические

бифуркации. На основе Смейла [9], Абрахамса и Марсдена [10] дано описание бифуркаций в базовой топологии гладкого многообразия. Гладкое отображе

$y0 \in N$ такой, что $f^{-1}(M)$

для каждого $y \in U$ из N существуют диффеоморфные отображения $h : f^{-1}(y) \to f^{-1}(y)$ каждый $y \in U$ (т. е. h проецирует близлежащие множества $f^{-1}(y)$ в M диффеоморфно на уровень $f^{-1}(y0)$ в M).

уровня $f \in set f$. Бифуркационное множество $f : M \to N$ равно $\Sigma f := \{y0 \in N | f$ не может быть локально тривиальным в Другими словами, когда y проходит через Σf, f^{-1} точке $y0$. (y) изменяется его топологическая структура. Пусть $\sigma($ обозначает замкнутое множество критических точек функции f в M, т.е.

$$\sigma(f) = \{x \in M | dx f : TxM \to Tf(x)N \text{ не является сюръективным.}\}$$

По теореме Сарда сингулярные значения $f(\sigma(f))$ в N имеют нулевую меру (т. е. являются изолированными точками с пустой внутренностью и их объединение нигде не плотно в N). Сингулярные значения $f(\sigma(f))$ — это значения бифуркации f в N [10]. Другими словами, множества уровня в M сингулярных значений бифуркации в N имеют топологическую структуру, отличную от топологических структур соседних множеств уровня в M. Число дыр в множестве уровня в M бифуркационного значения в N отличается от количества дырок в соседних наборах уровней. Это может быть связано с подгруппами изотропии, теоремой о срезе, теоремой о трубке, подмногообразием типа (H)-орбиты, подмногообразием типа (H)-изотропии и подмногообразием типа (H)-неподвижной точки, описанными Ортегой и Ратиу [11]], расширяющие понятие критических точек в подмногообразия x.

2.3. Теория Де Рама. Мы

приведем здесь лишь краткое описание. Более расширенное описание дифференциала геометрия, связывающая бифуркации с гармоническими полями течения, приведена в Приложении A.

Machine Translated by Google

Любая точная дифференциальная r-форма ω с r = 0, 1, , n на гладком n-мерном · · · многообразием M или n-мерным римановым многообразием (M, g) замкнута (т. е. dω = 0), поскольку d d всегда равно нулю. Но замкнутая дифференциальная r-форма не обязательно точна. Дифференциальные г-формы, которые являются замкнутыми, но не точными, порождают третий тип дифференциальных г-форм. Таким образом, существует три типа дифференциальных r-форм: (i) r-формы ω, внешняя производная которых не равна нулю (т. е. dω/ = 0), (ii) замкнутые r-формы, которые являются точными дифференциалами (т. е. ω = dλ где λ — (r 1)-форма) и (iii) r-формы ω, замкнутые, но не точные. Этот третий тип r-формы называется гармонической r-формой и содержится в r-м гармоническом пространстве Hr (M) многообразия с r = 0, 1, · · · n. Это также элемент r-й группы когомологий де Рама Hr dR(M) с r = 0, 1, · · · n. Hr dR(M) изоморфен Hr (M). И Hr (M) , и Hr dR(M) являются не только группами, но и векторными подпространствами.

Если ω — замкнутая r-форма (т. е. dω = 0) на гладком многообразии M, а zr — r-мерный цикл в базовой топологии X многообразия , то интеграл от ω по zr называется периодом ω (термин период происходит от периодов эллиптических интегралов). По теореме Стокса, если r-цикл zr является границей br (r + 1)-цепи cr +1 (т. е. br = cr+1), то период обращается в нуль, поскольку

$$\omega = \omega = \omega = d\omega = 0 \text{ (поскольку } d\omega = 0\text{).}$$
$$z_r \qquad \partial b_r \qquad c_{r+1} \qquad C_{R+1}$$

(Определения цепочек, циклов и границ см. в Приложении A.1).

Отсюда получаем первую теорему де Рама: замкнутая форма глобально точна тогда и только тогда, когда все ее периоды равны нулю [12]. Знание того, какие формы глобально точны, а какие нет, имеет важные последствия . Например, (i) гладкая 1-форма консервативна (т. е. ее линейный интеграл не зависит от пути) тогда и только тогда, когда она точна, (ii) интеграл каждой глобально точной формы по компактному ориентированному гладкому многообразию без края равен нулю , (iii) интеграл от глобально замкнутых форм по границам равен нулю и (iv) если интеграл от замкнутой r-формы по r-мерному подмногообразию без края не равен нулю , то r-форма не является точной и подмногообразие не является границей компактного ориентированного подмногообразия с краем.

Замечательным свойством гармонических пространств и групп когомологий де Рама является то, что они гомотопически и топологически инвариантны. Они изоморфны группам особых когомологий Hr (M), а они, в свою очередь, изоморфны сингулярным группам гомологий Hr(M) на базовой топологической структуре гладкого многообразия M (см. Приложение A.12). Это изображено на рисунке 2.

Это действительно замечательное свойство, поскольку не сразу очевидно, что близость и точность дифференциальных форм на гладком многообразии должны иметь какое-либо отношение к базовой топологической структуре многообразия . Но теория де Рама математически показывает, что это так! R-я группа гомологий Hr(M) изоморфна r-й группе когомологий де Рама Hr dR(M) с r = 0, 1, · · · n. Hr(M) обнаруживает наличие r-мерных дыр в базовой топологии гладкого многообразия M. Размерность Hr (M) равна количеству r-мерных дыр в топологии, и это известно как r-я Число Бетти br многообразия . Таким образом, теория дифференциальных форм де Рама обеспечивает искомую связь между дырами в топологической структуре гладкого или риманова многообразия и гармоническими полями потоков на многообразии.

Machine Translated by Google

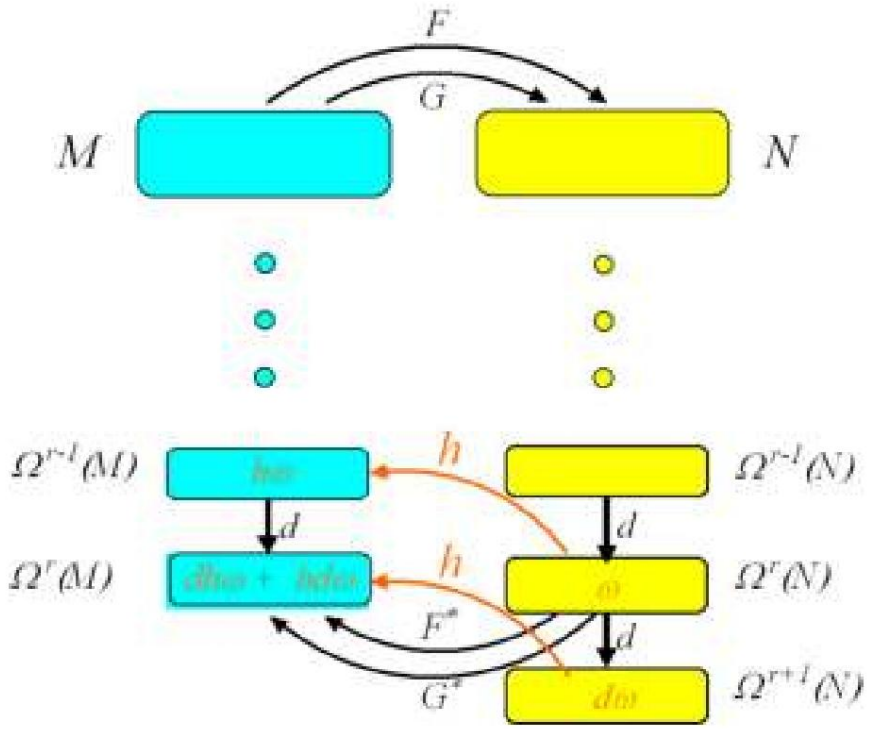


Рис . 2. Диаграмма, иллюстрирующая тот факт, что если F, G : M N — диффеоморфные отображения между : многообразиями M и N, то отображения обратного образа F де , Г Hr dR(N) Hr dR(M) между гладкими Рама группы когомологий Hr dR(N) и Hr dR(M) для всех значений r равны, т. е. F другими = Г . В словами, если отображения F и G диффеоморфны, они имеют одинаковую гомеоморфную топологическую структуру и, следовательно, гомотопически инвариантны. . Это означает, что гомотопически эквивалентные многообразия имеют изоморфные группы де Рама. Метки Ωr 1 (M), Ωr (M) представляют косо симметрические тензорные пространства степени (r 1) и степени (r) для дифференциальных форм в каждой точке гладкого многообразия M. Метки Ωr 1 (N), Ωr (N), Ωr+1 (N) представляют собой косо симметрические тензорные пространства степени (r 1), степени (r) и степени (r + 1) для дифференциальных форм в каждой точке гладкого многообразия N. Ωr+1 (N) Ωr (M) для всех значений r называются гомотопическими операторами. Исследование отображений h : диаграмма показывает, что если r-форма ω замкнута, т. е. dω = 0, то d(h ω) = G ω F ω. Другими словами, G ω и F ω ∗ Г : Hr dR(N) Hr dR(M) отличаются точным дифференциалом d(h ω). Отображения F называются когомологическими. Именно так определяются равные группы когомологий. Следовательно, когомологичные группы имеют изоморфные группы ког

2.4. Оператор Ходжа Лапласа

По определению , оператор Лапласа Ходжа на римановом многообразии равен : dd + d d, где d — внешняя производная d : Ωr Ωr+1 d , д* де= (1) оператор звезды Ходжа : Ωr Ωn r и Ωr — косо симметричное тензорное пространство r-форм для r = 0, 1, · · · n в каждой точке p на n-мерном гладком многообразии M или римановом многообразии (M, g). Оператор Лапласа играет важную роль в теории дифференциальных форм де Рама, поскольку это единственный оператор, который можно использовать для вычисления гармонических форм на римановом многообразии. Гармоническое пространство Hr (M) = ker(Ωr) при r = 0, 1, · · · n. (Имейте в виду, что гармонические r -формы для всех значений r на гладком или римановом многообразии связаны с наличием r-мерных дыр в базовой топологии многообразия).

2.5. Гармонические 0-формы и 1-формы

Гармонические 0-формы задаются уравнением φ = d d φ = div grad φ, где φ — гладкая вещественная функция на гладком многообразии M или римановом многообразии (M, g).

Потенциальные поля в жидкости представляют собой безвихревые и несжимаемые (т. е. бездивергентные) гармонические 0-формы. Здесь мы сосредоточимся на вычислении гармонических 1-форм на римановых многообразиях , поскольку

Machine Translated by Google

об их важности в нелинейной динамике физических систем речь пойдет ниже.

Пусть λ — дифференциальная 1-форма в Ω1 = T p M в каждой точке p (M, g). Сначала мы вычисляем лапласиан Ходжа 1-формы λ на римановом многообразии (M , g) , т.е. Лапласиан λ = 0.

Тензор кривизны Риччи можно описать геометрически следующим образом. Пусть (M, g) — риманово многообразие, а p — точка, принадлежащая (M, g) (т. е. p (M, g)). Для каждого единичного вектора ξ TpM Ric(ξ, ξ) представляет собой сумму секционных кривизн 2-плоскостей в TpM , натянутых на(ξ, ξ2), · · · ,(ξ, ξn), где (ξ1, · · · , ξn) — любой g-ортонормированный базис для TpM такой, что ξ1 = ξ. Для любого единичного вектора ξ TpM выберите g-ортонормированный базис (ξ1, · · · , ξn) для TpM такой, что ξ1 = ξ. Тогда Ric(ξ, ξ) задается формулой

$$P11 = Ри11 \quad ^{я} = \quad ^{н}_{я=1} Rm(\xi i, \xi 1, \xi 1, \xi i) = \quad ^{н}_{я=1} (\quad \xi i \quad \xi \quad \xi \quad \xi i)\xi, \xi i \ .$$

Следуя Ланг у [13] (стр. 423–424), скалярное произведение тензора кривизны Риччи на вектор ξ (т. е. Ric(λ), ξ) определяется как скалярная форма такая , что при относительно ортонормированного о репера ξ1, · · · , ξn и любого единичного векторного поля ξ такого, что ξ1 = ξ, имеем

$$Ric(\lambda), \xi \quad = \quad \text{где} \quad ^{н}_{я=1} (\quad \xi \quad \xi i \quad \xi i \quad \xi)\lambda, \xi i$$

через λ, ξ обозначено значение 1-формы λ на векторном поле ξ. Как оператор 2 на 1-формах лапласиан :) Записанное в терминах переменных ξi, это означает Ω1, Ω определяется формулой ((– $^{н}_{я=1}$ Ric).

$$^{н}_{я=1} \quad \xi i \quad \xi i \lambda, \xi \quad ^{н}_{i=1} (\quad \xi \quad \xi i \quad \xi i \quad \xi)\lambda, \xi i \ .$$

Чтобы вычислить скалярное произведение Ходжа Лапласа λ, ξ = (dd + d d)λ, ξ , мы вычисляем (i) dd λ, ξ и (ii) d dλ, ξ отдельно, а затем добавить: (i) Имеем d λ = divλ = tr(λ) = поле $^{н}_{я=1}$ ξi λ, ξi , где λ является двойником 1-формы λ и ξi для i = 1, · · · n является g-ортонормированным рамка векторных полей. Эти ортонормированные векторы должны быть вычислены с использованием алгоритма ортогонализации римановой метрики Грама – Шмидта в каждой точке. Мы видим, что d λ — вещественная функция, f = $^{н}_{1}$ ξi λ, ξi на (M, g). Для каждой точки p (M, g) имеем ξ f = ξ f = df , ξ . Таким образом, мы можем написать

$$\xi (\quad ^{н}_{1} \quad \xi i \lambda, \xi i \ ) = d(\quad ^{н}_{я=1} \quad \xi i \lambda, \xi i \ ), \xi \quad = dd \quad \lambda, \xi \quad = \quad ^{н}_{я=1} \quad \xi \quad \xi i \lambda, \xi i \ . (1)$$

(ii) Чтобы получить d dλ, сначала заметим, что если ω является r-формой, мы можем использовать предложение dω(ξ0, ξ1, · · · , ξr) = $^{р}_{я=0}$ (1) i ξiω(ξ1, · · · , ξi 1, ξ0, ξi+1, · · · , ξr) для получения

$$d\lambda(\xi, \eta) = \quad \xi\lambda, \eta \quad \eta\lambda, \xi \quad (2)$$

где λ — 1-форма, а ξ и η — векторы. Используя тот факт, что для любой r-формы ω

$$d\omega = \quad ^{р}_{я=0} (\lambda i \quad \xi i\omega) \text{ и } d(\quad \omega) = \quad ^{н}_{я=1} (\lambda i \quad \xi i (\quad \omega))$$

где ξi для i = 1, · · · , n — ортонормированный репер и λi для i = 1, · · · , n - это ортонормированный кофрейм, отсюда следует, что

$$d \quad \omega = \quad d \quad \omega = \quad ^{н}_{я=1} (\quad \xi i\omega \quad \xi i) \quad (3)$$

где (ξiω ξi) — обозначение ξiω, сжимаемое ξi [13].
Из уравнений (3) и (2) с η = ξi получаем [13] (стр. 424)

$$д \ d\lambda, \xi \quad = \quad ^{н}_{я=1} \quad \xi i \quad \xi\lambda, \xi i \quad - \quad ^{н}_{я=1} \quad \xi i \quad \xi i \lambda, \xi \quad (4)$$

Наконец , мы добавляем уравнения (1) и (4), чтобы получить

$$\lambda, \xi \quad = \quad (dd \quad + d \ г)\lambda, \xi \quad = \quad ^{н}_{я=1} \quad \xi i \quad \xi i \lambda, \xi \quad ^{н}_{я=1} (\quad \xi \quad \xi i \quad \xi i \quad \xi)\lambda, \xi i \ . \quad (5)$$

Machine Translated by Google

Таким образом, для 1-формы на n-мерном римановом многообразии (M, g) функция Ходжа 2 ξi
Оператор Лапласа имеет вид = ( ) Ric, где Ric — оператор кривизны Риччи. Гармоническая 1-форма тогда
получается, если положить лапласиан λ равным нулю.

3. Физические примеры. В

природе нелинейных динамических систем существует бесконечное разнообразие вариантов поведения, связанных с различными особенностями, критическими точками и вырождениями в их дифференциальных уравнениях. Большинство из этих поведений еще не были описаны, не говоря уже о том, чтобы решить их. Одно семейство такого поведения, рассматриваемое в этой статье, связано с существованием дыр различных размерностей в базовой топологии пространства состояний системы. Такой
дыры создают дифференциальные формы и векторные поля, которые являются замкнутыми, но не точными и создают «запретные» пространства в динамическом состоянии системы. Такие дыры могут кардинально изменить динамическое поведение системы. Например, подгруппы изотропии при действии группы Ли на динамическую систему создают динамические состояния, в которые векторное поле (или подмножество векторных полей) может втекать, но не выходить из них; типа ловушки динамического состояния в точке равновесия. Но нелинейные динамические системы могут перейти в соседние векторные поля и обтекать ловушку, создавая новое нелинейное поведение [11]. Далее мы рассмотрим последствия для динамического поведения особенностей дифференциальных уравнений, приводящих к замкнутым, но не точным дифференциальным формам в визуальных, механических, электрических и жидкостных физических системах.

3.1. Зрительная система человека

Бинокулярное трехмерное визуальное пространство человека, кодируемое зрительными, проприоцептивными и вестибулярными сенсорными рецепторами, искривлено (или искривлено), поскольку размер двумерных изображений на сетчатке каждого глаза изменяется обратно пропорционально евклидову расстоянию между узловой точкой глаза и объектом. в окружающей среде. С геометрической точки зрения трехмерное визуальное пространство соответствует эгоцентрическому римановому многообразию отрицательной кривизны с трехмерным шаром точек, отсутствующих примерно в начале координат (т. е. эгоцентре) [1,2]. Эта внутренняя дыра соответствует тому факту, что невозможно увидеть собственную голову. Какое влияние оказывает такая дыра о происхождении в искривленном трехмерном визуальном пространстве на воспринимаемый поток визуальных образов?
Дифференциальная геометрия и теорема де Рама дают возможный ответ на этот вопрос.
(Обратите внимание, что из-за нервной патологии возможны и другие дыры в трехмерном визуальном пространстве. Известные как скотомы, они здесь не рассматриваются.)

Учитывая двумерную дыру вокруг начала координат (т. е. недостающий трехмерный шар точек вокруг начала координат, заключенный в 2-цикл), теорема де Рама подразумевает, что замкнутые дифференциальные r-формы для r = 0, 1, 2, 3 не являются глобально точными. Форма единичного объема Ω= dx1 dx2 dx3 представляет собой замкнутую 3-форму в искривленном трехмерном визуальном пространстве, и поэтому дыра вокруг начала координат не позволяет этой 3-форме объема быть глобально точной. Это также хорошо, потому что если бы в начале координат не было дыры и замкнутая форма объема Ωбыла глобально точной, то все периоды Ω, равные форме объема,
проинтегрировались по всем 3-цепям (т. е. объемам), заключенным в 2-цепи. циклы исчезнут. Базовая топология искривленного трехмерного визуального пространства будет такой, что воспринимаемый объем Ωлюбого замкнутого трехмерного пространства будет равен нулю. Другими словами, было бы невозможно определить размер (т. е. объем) замкнутых трехмерных пространств.
Из повседневного опыта мы знаем, что можем визуально ощутить размер комнаты, в которой находимся. Это и предсказывает теорема де Рама.

3.2. Механические системы

В отсутствие всех внешних сил гамильтонова механика действует на 2n-мерном кокасательном расслоении T Q = P (или фазовом пространстве импульса) n-мерного конфигурационного многообразия Q. Используя положение (конфигурацию) q и импульс p в качестве канонических координат каноническая 1-форма θ = pidqi и каноническая замкнутая 2-форма ω = dqi dpi существуют в каждой точке (q, p) на T Q = P (т. е. на фазовом пространстве импульса гамильтониана система). Симплектическая структура 2-формы ω = dqi dpi определяет симплектическую геометрию системы. Сжатие поля симплектической 2-формы ω векторным полем ξ

Machine Translated by Google

дает поле 1-формы $\lambda = C\xi\omega$ на $T \quad Q = P$. Однако существует замечательное открытие, применимое ко всем гамильтоновым механическим системам (и ко всем системам, динамика которых может быть описана дифференциальными уравнениями 2-го порядка). Существует специальное векторное поле ξh, для которого поле 1-формы $\lambda = C\xi h$ оказывается точным полем 1-формы, равным dh, где h — гладкая вещественная функция на импульсном фазовом пространстве $T \quad Q = P$. вещественная функция h называется функцией Гамильтона, а векторное поле ξh называется векторным полем Гамильтона гамильтоновой механической системы. Если действительная функция h равна полной энергии механической системы (т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергии системы, выраженной как функция положения и импульса), то интегральный поток Гамильтоново векторное поле ξh в фазовом пространстве импульсов $T \quad Q = P$ равно свободному движению механической системы. Поскольку по определению не существует внешней силы, вносящей или рассеивающей энергию, интегральный поток гамильтонова векторного поля ξh сохраняет полную энергию h системы. Интегральный поток ограничен $(2n \quad 1)$-мерной контурной оболочкой с постоянной энергией (т. е. с постоянным h) в $T \quad Q = P$. Различные уровни энергии соответствуют потокам в различных контурных оболочках с постоянной энергией в импульсном фазовом пространстве система.

Однако если в фазовом пространстве импульса существует одномерная дыра, то по теореме де Рама 1-форма $\lambda = C\xi\omega$ не может быть глобально точной, и, следовательно, ни функция Гамильтона h, ни векторное поле Гамильтона ξh не могут быть глобально определено!

Точное поле 1-формы $\lambda = dh$ заменяется гармоническим полем 1-формы

$$\lambda \quad H1 (P) \quad = H \, dR(P)^{1}$$

это закрыто, но не точно.

3.3. Электродинамические системы

В электродинамике в четырех мерном пространстве-времени Минковского уравнения Максвелла могут быть записаны в терминах дифференциальных форм как

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = F\mu\nu,\rho + F\nu\rho,\mu + F\rho\mu,\nu = 0 \text{ (без источника)}$$
$$\Phi^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} J\mu \text{ (источник связан)},$$

где F — косо симметричная электромагнитная 2-форма в каждой точке четырёх мерного пространства-времени Минковского, J — текущий 4-вектор в каждой точке, c — скорость света в вакууме и $*$ — оператор звезды Ходжа (все в гауссовском формате). единицы).

Уравнения без источников верны тогда и только тогда, когда существует 4-ковекторное поле A (т. е. поле 1-формы), называемое электромагнитным потенциальным полем, такое, что $F = dA$ (т. е. F — замкнутое, глобально точное 2-поле). поле формы в четырех мерном плоском пространстве-времени Минковского).

Такое поле 1-формы A можно изменить добавлением внешнего дифференциала $d\psi$ гладкой вещественнозначной функции ψ на 4D-многообразии Минковского (т. е. $A = A + d\psi$) без изменения замкнутого электромагнитного поля 2-формы F. . F не изменяется, поскольку $d \quad d = dd$ всегда равно нулю, и F можно записать как

$$F = dA = dA + dd\psi = dA$$

Любое такое преобразование электромагнитного потенциала A, не оказывающее влияния на электромагнитное поле F, называется калибровочным преобразованием. Любой выбор ψ, удовлетворяющий неоднородному волновому уравнению, называется калибровкой Лоренца; то есть,

$$\psi = A\mu \quad ,\mu \text{ так что}$$
$$A_{\mu,\mu} = A\mu,\mu \quad + \quad \psi = A\mu \quad ,\mu \quad A\mu,\mu = 0$$

где оператор — волновой оператор или даламбериан

$$\psi = \quad 2\psi \quad \frac{1}{2c} \frac{2\psi}{t2}$$

Machine Translated by Google

Это показывает, что электромагнитный потенциал A в лоренцевой калибровке может переносить в вакууме электромагнитную волну ψ, распространяющуюся со скоростью света c, без изменения электромагнитного поля F. Электромагнитное поле F — это среда, в которой волна распространяется без необходимости эфира. Важно отметить, что

$$\psi = A^{\mu}{}_{,\mu} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \nabla^2 \psi = \Box \psi,$$

т.е. волновой оператор Даламбера в четырехмерном плоском пространстве-времени Минковского равен лапласиану в плоском четырехмерном пространстве-времени.

Однако если в четырехмерном пространственно-временном многообразии существует одномерная дыра, то, согласно теореме де Рама, электромагнитный потенциал A не может быть глобально точным, и, следовательно, калибровка Лоренца не может быть определена. Поле A 1-формы глобального электромагнитного потенциала заменяется гармоническим полем 1-формы. Это оставляет нерешенным вопрос о существовании эфира.

3.4. Поток жидкости

Принципы механики жидкости уже давно стали стандартом преподавания физики [14–16]. Рассмотрим медленно текущий поток воды. Частицы воды, находящиеся вблизи границы, прилипают к границе и поэтому имеют нулевую скорость вниз по потоку. Молекулы воды в этом пограничном слое образуют друг с другом водородные связи, которые увеличивают поверхностное натяжение и изменяют дипольное распределение электрического заряда. Точки, расположенные вдали от границы к центру потока, имеют более высокие средние скорости потока вниз по течению. Такая картина течения известна как ламинарное течение. Беспорядочное движение частиц воды из-за тепловой энергии и электрических полей вызывает обмен частицами воды между различными пластинками, при этом частицы с более высокой скоростью ускоряют более медленные и наоборот. Это приводит к возникновению напряжений сдвига и передаче кинетической энергии и импульса между различными слоями, создавая свойство воды, известное как ее динамическая вязкость μ. Вязкость варьируется в зависимости от различных жидкостей и является показателем легкости течения. Мед, например, имеет более высокую вязкость, чем вода, и течет хуже.

Теперь представьте себе быстрый горный ручей, обтекающий скалы. Частицы воды не могут течь сквозь камни, поэтому им приходится обтекать их. Камни образуют в пространстве воды двумерные отверстия разного размера (т.е. двумерная поверхность каждой породы представляет собой 2-цикл, образующий границу вокруг отверстия в пространстве потока воды). Если поток течет достаточно быстро (из-за обильного запаса кинетической энергии, обеспечиваемой гравитацией), обтекание камней вызывает в потоке большие завихрения и вихри. Эти большие вихри распространяются наружу, передавая кинетическую энергию более мелким вихрям и вихрям. Это, в свою очередь, создает еще меньшие водовороты. Этот каскад кинетической энергии от больших вихрей к меньшим зависит от скорости потока (т. е. доступной кинетической энергии) и скорости диссипации энергии в воде из-за вязкости. Водовороты различных размеров появляются и исчезают непредсказуемым образом, в результате чего локальные тангенциальные скорости и давления изменяются от точки к точке хаотичным и непредсказуемым образом. Это увеличивает количество смешивания. Увеличение локальной скорости потока снижает локальное давление, позволяя газам в воде испаряться и образовывать пузырьки. Образование и лопание пузырьков рассеивают энергию и издают «булькающий» звук. Хаотичный характер течения, связанный с таким каскадом энергии от больших вихрей к мелким с минимальной диссипацией энергии, называется турбулентным потоком. Турбулентное течение наблюдается во многих потоках жидкостей в природе, таких как океанские волны, грозовые облака, дым, пузырьки в шампанском и многое другое.

3.4.1. Уравнения Навье – Стокса.

Уравнения Навье – Стокса представляют собой нелинейные уравнения в частных производных, описывающие движение вязких жидкостей в трехмерном евклидовом пространстве. Они разрабатывались в течение многих лет в первой половине 1800-х годов Навье и Стоксом. По сути, они являются выражением второго закона движения Ньютона; то есть сила равна массе, умноженной на ускорение.

Machine Translated by Google

несжимаемые уравнения Навье – Стокса могут быть получены из конвективной формы
Уравнение импульса Коши имеет вид

$$\cdot u = 0 \tag{6}$$

$$u/\ t + (u\cdot\ )u = \quad \rho^{-1} \quad p + \mu \quad 2u + F. \tag{7}$$

Уравнение (6) представляет собой уравнение неразрывности, выражающее сохранение импульса и применимое к несжимаемым жидкостям. Решение уравнений дает скорость потока u как векторное поле в трехмерном пространстве жидкости. Вектор u определяет направление и величину скорости жидкости в каждой точке трехмерного пространства жидкости в каждый момент времени. u/ t – ускорение времени. (u·)u или u·(u) — пространственное или конвективное ускорение (например, вихри и вихри). Конвективное ускорение нелинейно и описывает изменение скорости u в зависимости от положения . Это затрудняет решение уравнений и является основной причиной турбулентности.
u — градиент скорости. Это матрица Якоби или тензор второго порядка. Его симметричная компонента 1/2(u + (u) ^{T}) описывает растяжение и сдвиг, а его кососимметричная составляющая 1/2(u (u) — ^{T}) описывает скорость вращения . ρ плотность жидкости, а p — градиент давления . μ 2u — диффузионная дивергенция напряжения сдвига, обусловленная вязкостью, а μ — динамическая вязкость жидкости. симметричный тензор сдвиговых напряжений τ равен μ(u + (^{T}),а)дивергенция τ определяется выражением

$$2\mu \cdot\tau = 2\mu \cdot(1/2(u + (u) \quad ^{T})) = \mu \quad 2u = \mu \quad u \tag{8}$$

где u = 2u — лапласиан функции u в евклидовом пространстве. F представляет все внешние силы, действующие на жидкость, включая гравитацию и электромагнитные силы.

Уравнения Навье – Стокса сложно, если вообще возможно, решить аналитически. Однако исследования компьютерного моделирования с использованием упрощающих предположений, таких как временное и пространственное усреднение или полосовая фильтрация , хорошо справляются с сопоставлением смоделированных потоков жидкости с потоками, измеренными экспериментально [16].

3.4.2. Число Рейнольдса

Число Рейнольдса – это безразмерное число, определенное Осборном Рейнольдсом (1842–1917) как

$$\mathrm{Re} = \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы вязкости}} = \frac{\rho uL}{\mu}$$

где ρ = плотность, u = скорость, L = характерная длина (например, размер камней в горном потоке) и μ = динамическая вязкость.

Число Рейнольдса играет важную роль в интерпретации уравнений Навье-Стокса и теоремы де Рама, потому что по мере экспериментального увеличения Re от небольшого числа до большого числа наблюдается переход потока жидкости от пластинчатого течения к турбулентному потоку. Переход можно разделить на этапы в зависимости от величины числа Рейнольдса. Когда силы вязкости, возникающие из-за напряжений сдвига в жидкости, доминируют над силами инерции, число Рейнольдса мало (например, Re для меда 0,001). Когда Re мало, в потоке жидкости преобладает диссипация энергии из-за вязких сдвиговых напряжений, и, следовательно, вихри и вихри сильно затухают. Результатом является стабильный поток пластинок. По мере увеличения Re между слоями пластинки наблюдаются текущие наружу трехмерные волны давления . Это увеличивает перемешивание и увеличивает передачу энергии-импульса между слоями.
При больших числах Рейнольдса преобладают силы инерции, а вязкое демпфирование минимально. Турбулентный поток возникает из-за относительно низкого уровня диссипации и затухания энергии. Когда впрыск кинетической энергии превышает диссипацию энергии, нестабильности в нелинейных конвективных взаимодействиях создают каскад передачи энергии от больших вихрей к малым и вихри.

При очень больших числах Рейнольдса диффузионную дивергенцию напряжения сдвига, обусловленную вязкостью μ 2u в уравнении Навье–Стокса, можно эффективно игнорировать. Экстремальный турбулентный

Machine Translated by Google

В результате получается поток, и каскад энергии создает хаотические вращательные потоки в небольших масштабах отдельных молекул. Игнорирование μ 2u эквивалентно тому, что лапласиан векторного поля скорости в евклидовом пространстве принимается равным нулю (т.е. u = 2u = 0), где 2u равен лапласиану u в евклидовом пространстве, где кривизна Риччи равна нулю . . Согласно теории когомологий де Рама, такое векторное поле скорости представляет собой глобальное гармоническое поле потока, связанное с существованием дыр в базовой топологии трехмерного евклидова жидкостного пространства. При наличии достаточного запаса кинетической энергии существование дыр (таких как частицы, камни и пузырьки) в пространстве потока жидкости связано с крайней турбулентностью из-за отсутствия диссипации энергии в жидкости и наличия хаотичной вращательной кинетики. энергия на молекулярном уровне.

4. Теоретическое предложение

4.1. Биологические

клетки Биологические процессы регулируют температуру тела человека до 37 С. Таким образом, имеется достаточный запас тепловой кинетической энергии для движения водного раствора внутри биологических клеток. Биологические клетки плотно упакованы органеллами и другими молекулами. Внутриклеточная жидкость не может течь через эти органеллы, поэтому ей приходится обтекать их . Другими словами, трехмерное пространство внутриклеточного водного раствора содержит большое количество отверстий различной формы и размера. Как описано выше, теорема де Рама показывает, что наличие таких дыр в базовой топологии трехмерного пространства жидкости оказывает существенное влияние на векторные и 1-формные поля потока. Основываясь на математической теории, мы предполагаем, что тепловое движение внутриклеточной жидкости вокруг органелл создает передачу кинетической энергии с минимальной диссипацией энергии от больших к очень маленьким вихрям и вихрям на молекулярном уровне, и что эти вращения соответствующим образом масштабируются , чтобы играть р

4.2. Сворачивание

белка Изучение сворачивания белка началось около 60 лет назад. Многое известно, но многое еще предстоит узнать [17–19]. Белки представляют собой полипептидные цепи аминокислот, собранные рибосомами внутри биологических клеток. В длинные пептидные цепи могут входить сотни тысяч атомов . Порядок боковых цепей аминокислот в каждой пептидной цепи определяется кодонами внутри молекул мРНК. Последовательность аминокислот определяет трехмерную структуру, в которую спонтанно складывается пептидная цепь. Складывание происходит в течение миллисекунд и происходит даже во время сборки пептидной цепи рибосомой.
Нативная трехмерная конформация пептидной цепи имеет решающее значение. Он определяет функцию белка. Различные функции тысяч различных белков обеспечивают молекулярный механизм живых систем. Если белки свернуты неправильно, они не функционируют должным образом, вызывая множество заболеваний, таких как боковой амиотрофический склероз, серповидно-клеточная анемия , болезнь Альцгеймера и синдром коровьего бешенства, и это лишь некоторые из них . Но каковы механизмы, контролирующие сворачивание белков, и что заставляет его идти не так?

Учитывая чрезвычайно большое количество возможных углов связи между атомами и молекулами внутри пептидной цепи, тот факт, что правильное сворачивание происходит очень быстро, указывает на то, что это не случайный процесс проб и ошибок. Должен существовать физический процесс , направляющий путь сворачивания . Существует также парадокс . Большое количество возможных конфигураций развернутой пептидной цепи складывается в уникальную трехмерную структуру функционирующего белка. Это нарушает второй закон термодинамики. Конформационная энтропия белка уменьшается по мере того, как его складчатая структура становится более упорядоченной!

Парадокс можно разрешить, рассмотрев внутриклеточный водный раствор, в который погружены пептидные цепи. Известно, что это играет решающую роль в сворачивании белка. Если свернутый белок погрузить в мочевину (которая действует как детергент), он разворачивается и правильно сворачивается при возвращении во внутриклеточную жидкость. Концентрации ионов, pH и температура внутриклеточной жидкости должны тщательно регулироваться до соответствующих уровней с помощью биологических процессов. Если регуляция не срабатывает, пептидные цепи, собранные на рибосомах , складываются неправильно. Преобладающая термодинамическая теория сворачивания белков предполагает роль внутриклеточного водного раствора следующим образом. Он предполагает, что отсутстви

Machine Translated by Google

Боковые цепи гидрофобных аминокислот, распределенные вдоль пептидной цепи, заставляют молекулы воды, окружающие эти боковые цепи, структурироваться под действием их электрических диполей и водородных связей между молекулами воды. Термодинамические градиенты свободной энергии заставляют пептидную цепь сворачиваться, заключая ее гидрофобные боковые цепи внутрия дра, тем самым скрывая их от окружающих молекул воды. Это освобождает молекулы воды от упорядоченной структуры, созданной гидрофобными боковыми цепями, тем самым увеличивая энтропию воды. Увеличение энтропии воды превышает уменьшение конфигурационной энтропии, связанной со сворачиванием белка, поэтому спонтанное сворачивание термодинамически осуществимо.

Помимо термодинамических градиентов свободной энергии во внутриклеточной жидкости, существует множество других химических и электрических полей потенциальной энергии, окружающих пептидную цепь, которые могут влиять на ее укладку, включая ковалентные, ионные и водородные связи, градиенты напряжения и силы Ван-дер-Ваальса. между атомами белка. Различные конфигурации пептидной цепи приводят к выравниванию привлекательных участков вдоль цепи. Эти выравнивания позволяют образовывать водородные связи, дисульфидные связи, солевые мостики и другие. Связанные поля потенциальной энергии приводят к сворачиванию белка в направлении минимальной энергетической конфигурации, определяемой последовательностью аминокислот в пептидной цепи. Однако нет никакой гарантии, что определенный набор молекулярных связей и солевых мостиков будет соответствовать функциональной конфигурации с минимальной энергией. Если это все лишь локальная конфигурация с минимальной энергией, то над молекулой необходимо совершить работу, чтобы вытолкнуть ее конфигурацию из локальной энергетической ловушки в более глубокую

4.3. Предположение.

Кажется вполне разумным предположить, что покачивание (броуновское движение) атомов и молекул в пептидных цепях, вызванное движением внутриклеточного водного раствора, играет важную роль в кинематике сворачивания белка. Теорема Де Рама показывает, что дыры в базовой топологии внутриклеточной жидкости связаны с глобальными гармоническими полями потока в трехмерном пространстве жидкости. Экспериментальное исследование потока жидкости вместе с числом Рейнольдса, уравнениями Навье-Стокса и теоремой де Рама обеспечивает связь (согласованную с экспериментальными наблюдениями) между дырами, экстремальным турбулентным потоком и полями гармонического потока. Член $\mu \Delta u = \mu \nabla u$ в уравнении Навье–Стокса описывает диффузионную дивергенцию сдвигового напряжения, обусловленную динамической вязкостью μ жидкости. Экспериментальные исследования показывают, что большие отношения силинерции к силам вязкости (т.е. большое число Рейнольдса) связаны с экстремальным турбулентным потоком, и член $\mu \Delta u = \mu \nabla u$ в уравнении Навье-Стокса можно эффективно игнорировать. Это эквивалентно тому, что лапласиан поля скорости u приравнивается к нулю. В дифференциальной геометрии именно так определяются гармонические векторные поля и поля 1-формы (т. е. в евклидовом пространстве $\Delta u = \nabla \nabla u = 0$). Другими словами, экспериментальные наблюдения за потоком жидкости подразумевают, что гармонические поля потока, связанные с обтеканием органелл и других молекул (включая молекулы белка), соответствуют экстремально турбулентному потоку. Существование дыр в трехмерном пространстве жидкости предотвращает глобальную точность замкнутых 1-форм и векторных полей потока и заменяет их гармоническими полями потока 1-формы. Другими словами, при наличии достаточного запаса кинетической энергии теория де Рама дает формальное описание потока внутриклеточной жидкости, ответственного за броуновское движение молекул в белках и других структурах внутри биологических клеток.

Как описано в разделе 3.4, математически говоря, гармонические поля потока, связанные с дырами в базовой топологии жидкостного пространства, могут быть вычислены путем приравнивания лапласиана поля потока нулю (т. е. $\lambda := d\delta \lambda + \delta d\lambda = 0$). Но в евклидовом пространстве лапласиан поля векторного потока равен $\Delta u = \nabla \nabla u$, и согласно уравнениям Навье–Стокса (6) и (7), установка $\Delta u = \nabla \nabla u = 0$ эквивалентна отсутствию вязкого напряжения сдвига и отсутствия диссипации энергии в жидкости. Результаты экстремально турбулентного потока. Обильный запас тепловой кинетической энергии при незначительной диссипации энергии в жидкости вызывает каскад передачи кинетической энергии от больших вихрей к все меньшим и меньшим, пока, наконец, большое количество кинетической энергии не станет доступным в жидкости.

Machine Translated by Google

формах аотического трехмерного вращения отдельных молекул воды. Помня, что молекулы воды образуют водородные связи друг с другом вблизи боковых цепей гидрофобных аминокислот и прикрепляются к боковым цепям гидрофильных аминокислот, кажется разумным предположить, что эта кинетическая энергия доступна для совершения работы (т. е. передачи энергии) на атомы и молекулы белковых полипептидных цепей.

Вращательные моменты, приложенные к молекулам белка, находятся на правильном энергетическом уровне и в нужном масштабе, чтобы влиять на углы связи между атомами и молекулами внутри пептидной цепи. Более того, они действуют одновременно на все части пептидной цепи и в сочетании с термодинамическими, химическими и электрическими градиентами потенциальной энергии, окружающими пептидную цепь, могут играть важную роль в сворачивании белка. Они не только поставляют энергию, необходимую для вырывания из локальных энергетических ловушек, но также могут ускорить сворачивание в сторону конфигураций с минимальной энергией. Подобно «отжигу» в алгоритмах поиска минимальной дисперсии для нейронных сетей, хаотические гармонические поля потока во внутриклеточных жидкостях позволяют сворачиванию найти уникальную абсолютную минимальную энергетическую конфигурацию белка. Конечно, для этого необходим соответствующий биологически регулируемый уровень доступной энергии. Если температура тела слишком низкая, внутриклеточному потоку жидкости не хватает энергии, чтобы вырвать пептидные цепи из локальных энергетических ловушек, а если температура тела слишком высока, это может разорвать связи и денатурировать белки.

Хорошей аналогией броуновскому движению белковых молекул и боковых цепей, вызванному турбулентным потоком внутриклеточной жидкости вокруг плотно упакованных органелл внутри клетки, является хаотическое движение листьев и ветвей дерева, вызванное потоком ветра через дерево.

5. Обсуждение

Напомним, что теорема де Рама показывает, что дыры в базовой топологии гладкого многообразия связаны с полями замкнутых дифференциальных форм на многообразии, которые не являются точными. Известные как поля гармонических форм, они могут быть вычислены на римановом многообразии, установив лапласиан Ходжа := dd + d d равным нулю, а также на евклидовом пространстве, установив лапласиан = 2 равным нулю. Вопрос в том, существуют ли в природе такие поля гармонических форм и если да, то какими свойствами они обладают?

Математика говорит нам, что, например, интегральные поля потока на сфере будут сильно отличаться от полей потока на торе, причем эта разница связана с отверстием в торе. Аналогично, для физических систем, описанных в разделе 3, также самая математика с уверенностью предсказывает, что поведение полей векторных и дифференциальных форм на их гладких многообразиях должно быть глубоко изменено при появлении какой-либо дыры или дыр в базовой топологии многообразия. Есть ли у нас экспериментальные доказательства того, что это так? И каковы последствия моделирования этих систем?

5.1. Механические системы

В разделе 3.2 мы математически показали, что, согласно теореме де Рама, наличие дыр в фазовом пространстве импульсам механической системы препятствует глобальному определению функции Гамильтона h и векторного поля Гамильтона ξh в фазовом пространстве. Однако, несмотря на то, что это окончательное математическое предсказание, до тех пор, пока не станут доступны соответствующие экспериментальные данные, остается неясным, как именно может вести себя физико-механическая система с дырами в фазовом пространстве импульса. Какой тип поля потока заменит глобально точное поле 1-формы λ = Cξh ω в гамильтоновой системе, еще предстоит выяснить. Другими словами, теорема де Рама подразумевает, что изменения в топологии пространства состояний механической системы требуют математической модели, отличной от модели гамильтоновой механики.

Эта проблема применима аналогично лагранжевой механике. В то время как гамильтонова механика действует на кокасательном расслоении (T Q) над конфигурационным многообразием (Q), лагранжева механика действует на касательном расслоении (TQ) над конфигурационным многообразием (Q). Преобразование Лежандра FL = TQ T Q отображает точки из TQ в точки из T Q. Лагранжева и гамильтонова механика часто описываются как двойственные друг другу.

Machine Translated by Google

во-вторых, потому что, если уравнения всюду регулярны, оба получают одну и ту же траекторию движения в конфигурационном многообразии Q. Однако двойственность между лагранжевой и гамильтоновой системами требует, чтобы преобразование Лежандра FL(. pi было q гладким взаимно однозначным диффеоморфизм, где L(q, . q) — лагранжиан, равный разности i между кинетической энергией и потенциальной энергией, q

. — i-я компонента скорости q, а pi — i-я вектор компонента вектора импульс а p. Двойственность также требует, чтобы как симплектическая лагранжева вторая дифференциальная форма на TQ, так и гамильтонова симплектическая вторая дифференциальная форма на T Q были невырожденными. Однако многие реальные механические системы не удовлетворяют этим требованиям. Действительно, именно этот факт лежит в основе важности теоремы Эмми Нтре; а именно, если лагранжиан L(q, .q) вырожден и не меняется вдоль координаты q, то соответствующая компонента импульс а pi сохраняется. Удаление вырождений и особенностей из многообразий приводит к появлению дыр, а они, как показывает теория де Рама, меняют поведение механической системы по сравнению с тем, которое предсказывает классическая лагранжева и гамильтонова механика. Насколько нам известно, моделирование реальных механических систем для учета дыр в многообразии еще впереди. Надеемся, что такое изложение теоретической основы поможет стимулировать сбор необходимых экспериментальных данных.

5.2. Электродинамические системы

В разделе 3.3 мы показали математически, что наличие дыр в четырехмерном пространстве-времени Минковского не позволяет уравнениям Максвелла без источников быть истинными. Замкнутое электромагнитное поле F 2-формы не может быть глобально точным, а электромагнитное потенциальное поле 1-формы не может быть определено глобально. Следовательно, глобальные калибровочные преобразования потенциального поля, включая калибровку Лоренца, не могут существовать. Будет ли электромагнитное поле 1-й формы заменено гармоническим полем 1-й формы, и если да, то какими свойствами оно будет обладать? Опять же, чтобы ответить на эти вопросы, необходимы соответствующие экспериментальные наблюдения за физическими электродинамическими системами.

Действительно, последствия касаются самой природы электромагнитного излучения. Вихревое движение заряженных частиц на Солнце создает изменяющиеся электрические токи J и изменяющуюся плотность заряда ρ. Но, как показывают уравнения электромагнетизма Максвелла, J и ρ являются именно источниками энергии для магнитных полей B и электрических полей E. В космическом вакууме между Солнцем и Землей J и ρ оба равны нулю. Тем не менее, используя соотношение ротора и соотношения div и ротор между E и B в уравнениях Максвелла, даже если J и ρ равны нулю, связанные поля E и B удовлетворяют волновым уравнениям 2E 1/c 2 Другими словами, E и B образуют связанные электромагнитные волны, которые могут распространяться со скоростью света через вакуум, несмотря на то, что J и ρ равны нулю..

Но в физике остаются нерешенные вопросы. По аналогии с волнами в воде и звуковыми волнами в воздухе можно увидеть, что волнам требуется среда, в которой они могут распространяться. Но что представляет собой среда, в которой распространяется электромагнитная волна в вакууме? В конце 1800-х годов Лоренц предположил, что нечто, называемое эфиром, заполняет все пространство и что электромагнитные волны распространяются в эфире со скоростью света. Однако интерферометрический эксперимент Майкельсона и Морли 1887 года показал, что не было никакой разницы в скорости света, исходящего от звезды, когда Земля двигалась к звезде, по сравнению с тем, когда Земля удалялась от звезды. Это бросило вызов идее о том, что и свет, и земля движутся в пространстве относительно неподвижного эфира. Совсем недавно математический подход к физике элементарных частиц, известный как калибровочная теория, предлагает альтернативное объяснение, а именно, что сами электрические и магнитные поля обеспечивают среду, в которой распространяется свет. Однако, как описано в разделе 3.3, теория дифференциальных форм де Рама показывает, что сама калибровочная теория не справедлива вблизи дыр в многообразии. И это именно то, что присутствие звезд и планет создает в ткани

Жизнь на Земле фундаментально зависит от способности электромагнитных волн переносить энергию через пустое пространство. Максвелл сразу же заявил, что свет — это электромагнитное явление.

Machine Translated by Google

волна. Посредством фотосинтеза растения поглощают энергию падающего на них света, преобразуя ее в химическую энергию, запасаемую в молекулах сахара. Эта запасенная химическая энергия, в свою очередь, обеспечивает большую часть биологической энергии, необходимой для поддержания жизни на Земле. Поэтому понимание электромагнитных полей и последствий возникновения в них дырок является важной задачей.

5.3. Зрительная система человека

Как для механических, так и для электродинамических систем последствия теоремы де Рама еще предстоит изучить экспериментально. Однако для зрительной системы человека, рассмотренной в разделе 3.1, ситуация несколько иная. В этом случае у нас есть дополнительная релевантная информация, полученная из нашего собственного осознания. Мы знаем, например, что в нашем воспринимаемом бинокулярном трехмерном визуальном пространстве есть дыра в эгоцентре, потому что мы не можем видеть собственную голову. Мы также знаем, что размер воспринимаемого зрительного образа увеличивается по мере уменьшения евклидова расстояния между эгоцентром и объектом окружающей среды. Это согласуется с экспериментальными данными, показывающими, что размер изображения на сетчатке изменяется обратно пропорционально евклидову расстоянию между узловой точкой глаза и объектом окружающей среды [4]. Это создает сингулярность в эгоцентре трехмерного визуального пространства, где размер изображения на сетчатке становится бесконечным. Но эта сингулярность не является проблемой, поскольку она содержится внутри дыры вокруг эгоцентра. Теорема Де Рама показывает, что такая дыра должна присутствовать тому, чтобы воспринимаемые поля потока изображений были глобально точными, заменяя их гармоническими полями потока.

На вопрос, существуют ли такие гармонические поля потоков в зрительной системе человека и какими свойствами они обладают, можно в некоторой степени ответить на основе личного опыта. Поскольку объект внешнего мира приближается к эгоцентру, мы можем удерживать его в бинокулярном поле зрения, сближая глаза. Воспринимаемый размер изображения становится все больше и больше и начинает превышать размер воспринимаемого визуального пространства. В конце концов, мы достигаем предела косоглазия. Воспринимаемый зрительный образ расфокусируется и хаотично распадается. Его уже нельзя воспринимать как целостный единый образ. Становится физически невозможно приблизить объект к эгоцентру. Он достиг края дыры в воспринимаемом трехмерном бинокулярном в Таким образом, личный опыт показывает, что гармонические поля зрительно-образных потоков в трехмерном зрительном пространстве распадаются непредсказуемым хаотичным образом в области, близкой к границе дыры вокруг эгоцентра; другими словами, это явление пограничного слоя.

Здесь важно отметить, что эксперименты в области человеческой визуальной науки говорят нам, что визуальное пространство может иметь несколько отображений. Мы утверждаем, что фундаментальное отображение основано на удивительном факте: есть люди, которые в результате повреждения головного мозга слепы по зрению, но, тем не менее, могут передвигаться в трехмерной среде и выполнять движения под визуальным контролем с точностью, как если бы они могли это сделать. видеть. Это явление получило название слепого зрения [20]. Это демонстрирует, что в мозгу есть система, способная формировать подсознательное эгоцентрическое трехмерное визуальное пространство, которое имеет однозначное отображение с евклидовым внешним миром. Эта подсознательная зрительная система должна учитывать деформацию этого трехмерного визуального пространства, деформацию, которая возникает из-за того, что сетчатка обнаруживает изображение на двухмерной поверхности. Точнее, искажение происходит из-за того, что размер изображения на 2D-сетчатке меняется пропорционально углу, образуемому в узловой точке глаза соответствующим объектом в 3D-евклидовом внешнем мире [4]. В результате этого искажения изменения места головы в среде и изменения позы тела меняют не только расчетные размеры и положение закодированных зрительных образов объектов среды и тела в этой среде, но они также меняют очертания, окклюзии, форму, кривизну, относительные скорости и относительные ускорения того, что видно.

Другими словами, существует конформное отображение между евклидовым внешним миром и искаженным трехмерным визуальным пространством подсознания. Конформное отображение сохраняет бесконечно малую форму объектов и углы между координатами, но не сохраняются размеры закодированных изображений. Изображения объектов уменьшаются в размерах по мере увеличения относительного расстояния между эгоцентром и объектом в евклидовом пространстве. Тем не менее, несмотря

Machine Translated by Google

деформация, конформное отображение с внешним миром является однозначным, односторонним и гладким, и то же самое деформирование применимо к визуальным образам окружающей среды и визуальным изображениям тела или частей тела в этой среде. Таким образом, это искаженное, подсознательное, эгоцентрическое трехмерное визуальное пространство можно использовать для планирования и выполнения визуально управляемых движений.

Тем не менее, существует множество свидетельств того, что подсознательное и сознательное восприятие визуального мира не одно и то же. Последнее может быть опосредовано нисходящей когнитивной обработкой визуальных изображений, которая, как считается, основана на байесовских статистических гипотезах, полученных на основе опыта с течением времени. Это вносит в сознательно воспринимаемый зрительный мир всевозможные иллюзии. Фаворитом является иллюзия вогнутой маски для лица. Из-за того, что человек всю жизнь смотрел на лица, имеющие выпуклую форму, когда человек смотрит на внутреннюю вогнутую поверхность маски для лица, он сознательно видит ее выпуклой. Более того, иллюзорное выпуклое лицо, кажется, поворачивается и следует за ними во время их движения. Сознательно воспринимаемое зрительное пространство, содержащее иллюзии, — это не то, что необходимо для планирования и контроля точных зрительно управляемых движений. Подсознательное трехмерное визуальное пространство, полученное непосредственно из афферентных сигналов и свободное от статистического когнитивного вмешательства, более подходит для визуально управляемого движения [1–3].

Экспериментальное подтверждение такого описания зрительной системы человека получено в эксперименте, впервые проведенном Тейлором в 1941 году, но с тех пор повторявшемся много раз (см. [3]). В темноте человек держит руку перед лицом. Затем короткая вспышка яркого света выжигает (или обесцвечивает) изображение руки на сетчатке. Это приводит к возникновению остаточного изображения руки, которое может сохраняться в течение нескольких десятков секунд. Если в темноте человек подносит руку к лицу или подносит лицо к руке, происходит удивительная вещь. Остаточное изображение руки, кажется, уменьшается в размерах, хотя изображение, обесцвеченное на сетчатке, остается неизменным. Это противоположно тому, что обычно происходит, потому что, когда рука приближается к лицу на свету, кажется, что она увеличивается в размерах. Наше объяснение состоит в том, что нервная система способна трансформировать проприоцептивно воспринимаемые движения тела в ожидаемые изменения его зрительного образа [3]. Если ожидаемый зрительный образ вычитается из фактического зрительного образа, воспринимаемый образ тела не меняет своего размера, а только свое положение в пространстве (так называемое постоянство размера). Во время эксперимента с остаточным изображением движение руки вызывает ожидаемое изменение изображения руки на сетчатке, но фактическое изображение на сетчатке запечатлевается на сетчатке и поэтому не меняется. Вычитание ожидаемого размера изображения из фактического изображения на сетчатке приводит к иллюзорному увеличению размера остаточного изображения.

Мы построили риманову геометрию, описывающую вычисления, необходимые для преобразования проприоцептивных движений тела в ожидаемые изменения в трехмерных визуальных изображениях тела [1–3]. Это не простой расчет, поскольку зависимость является нелинейной с множеством переменных. Для задания конфигурации тела, движущегося в локальной трехмерной среде, требуется 116 переменных. Для каждого места и положения тела существует искаженное трехмерное визуальное пространство, и в каждой точке этого визуального пространства существует закодированный визуальный образ окружающей среды. Эти зрительные образы меняются от одного места и позы к другому. С геометрической точки зрения каждое трехмерное визуальное пространство соответствует эгоцентрическому римановому многообразию отрицательной кривизны.

Эта связь между движением и зрением осложняется тем, что в зрительном пространстве отсутствует трехмерный шар точек примерно от эгоцентра [1,2]. Именно эта внутренняя дыра вдохновила нас в первую очередь задуматься о том, как дифференциальная геометрия и, в частности, теорема де Рама могут пролить свет на влияние этой дыры на воспринимаемый поток визуальных образов. Хаотическое разрушение зрительных образов вблизи границы дыры было описано выше.

5.4. Поток жидкости

Обращаясь к разделу 3.4, наша лучшая на сегодняшний день интерпретация свойств реальных полей гармонического потока основана на экспериментальных исследованиях потока жидкости. Как указано в этом разделе, уравнения Навье – Стокса описывают поток жидкости в трехмерном евклидовом пространстве, где лапласиан векторного поля потока u определяется выражением $\Delta u = \nabla^2 u$. Гармонический вектор

Machine Translated by Google

поле, связанное с наличием дырок (например, частиц, камней, пузырей и т. д.) в евклидовом пространстве жидкости, получается установкой лапласиана равным нулю (т. е. u = 2u = 0). Когда это подставляется в уравнение Навье-Стокса, получается экстремальная турбулентность, согласующаяся с экспериментальными наблюдениями экстремальной турбулентности, связанной с большими числами Рейнольдса. Силы инерции ρuL, скорости, давления, температуры и кинетическая энергия хаотически изменяются во времени и от точки к точке пространства. Поскольку число Рейнольдса жидкости увеличивается экспериментально, вязкие силы, рассеивающие энергию внутри жидкости, становятся незначительными, и поведение потока жидкости приближается к поведению теоретического гармонического поля потока. Из-за отсутствия вязкого демпфирования внутри жидкости происходит каскадный перенос кинетической энергии от больших вихрей к малым, в результате чего возникает хаотическое поле течения. Вращательные вихри и энергия вращения становятся доступными на мелком уровне отдельных молекул жидкости. Присутствие таких мелкомасштабных завихрений в экстремально турбулентном потоке жидкости, создаваемом наличием отверстий в пространстве жидкости, предполагает роль сворачивания белка в экстремальной турбулентности во внутриклеточной жидкости биологических клеток из-за дыр в жидкости, создаваемых плотно упакованные органеллы внутри жидкости.

Силы инерции, изменяющиеся от точки к точке в жидкости, приводят к возникновению симметричной матрицы массы-инерции, соответствующей римановому метрическому тензору кинетической энергии [21]. Это дает возможность улучшить уравнения Навье – Стокса. Метрика римановой кинетической энергии позволяет описывать поток жидкости векторными полями на трехмерном искривленном римановом многообразии, а не в плоском трехмерном евклидовом пространстве уравнений Навье – Стокса. Как показано в разделе 3.4, поле гармонического потока 1-формы λ на римановом многообразии получается путем присвоения нулю лапласиана 1-формы λ на римановом многообразии 2 (т. е. λ = ( )λ Ric (λ) = 0). Кривизна Риччи в каждой точке ξi риманова многообразия учитывает нелинейную динамику, обусловленную силами инерции, изменяющимися от точки к точке в жидкости. Это нелинейные силы внутри жидкости, которые в основном ответственны за турбулентный поток. Таким образом, описание течения жидкости на римановом многообразии, снабженном соответствующей римановой метрикой, дает более детальное описание течения жидкости, чем это дает уравнения Навье – Стокса.

Однако из-за хаотической природы турбулентного потока для получения оценок соответствующей римановой метрики кинетической энергии как функции положения в многообразии необходимы стохастические методы. Представляется необходимой стохастическая модель временных рядов изменяющейся римановой метрики.

Нейронные сети глубокого обучения использовались для моделирования турбулентного потока жидкости [16]. Однако, в отличие от решения «черного ящика», дифференциальная геометрия предлагает более общее математическое описание турбулентного потока, которое может обеспечить понимание основных физических явлений.

5.5. Сворачивание белка

Существует множество экспериментальных данных, показывающих, что внутриклеточный водный раствор играет важную роль в сворачивании белка. Однако доступность данных, которые можно использовать для проверки или опровержения рабочих гипотез о точной природе водно-белковых взаимодействий, ограничена связанными с этим экспериментальными трудностями. Тем не менее, имеющиеся результаты не подтверждают популярную гидрофобную теорию сворачивания белков. Вместо этого данные подтверждают, что вода образует водородные связи между точками пептидной цепи, а затем притягивает эти точки друг к другу. Работа по измерению роли воды в сворачивании белка путем измерения нейтронограмм является многообещающей, но этот метод непрост и требует стохастического анализа измеренных данных и использования компьютерного моделирования для поиска модели, которая лучше всего соответствует данным. Между тем общий вывод о том, что движение воды действительно играет роль в сворачивании белка, кажется несомненным [19,22,23].

Наше предложение относительно броуновского движения валентных углов внутри пептидных цепей, связанного с турбулентным вращением молекул воды, обтекающих органеллы внутри клетки, является новой гипотезой. Он основан исключительно на математике потока жидкости (т. е. уравнения х Навье – Стокса) в сочетании с теоремой де Рама о влиянии дыр на поля потока. Он ожидает экспериментальных испытаний, которые выходят за рамки ресурсов

Machine Translated by Google

настоящие авторы. Между тем мы убеждены в следующем. Логический формализм и определенность в математической формулировке, изложенной здесь, делают весьма вероятным, что экспериментально наблюдаемое броуновское движение во внутриклеточном водном растворе во время сворачивания белка вносит фундаментальный вклад в процесс сворачивания. Мы надеемся, что это может послужить руководством для будущих исследований.

6. Выводы

Целью данной статьи было продемонстрировать ценность применения дифференциальной геометрии для понимания любой физической системы, в которой дыры могут возникать в окружающем поле потока. Согласно теории де Рама, дыры изменяют характер окружающих полей, превращая их в замкнутые, но не точные гармонические поля. В результате последующее течение жидкости становится хаотичным. Мы обсуждали этот феномен применительно к трехмерному бинокулярному зрению, которое нарушается из-за дыры в поле зрительного потока около эго центра. Сейчас отметим, что наличие электромагнитного экранирования вокруг источника электромагнитного излучения, например телевизионного передатчика, создает дыру в окружающем трехмерном пространстве электромагнитных полей. Мы предполагаем, что именно создание хаотических полей потока, лежащих в основе проблемы телевизионной студии [5,6], отчасти побудило нас к рассмотрению этой теории в первую очередь. В ходе проведенных расследований причина возникновения раковой опухоли не была выявлена, но в конечном итоге студию закрыли [24].

Мы надеемся, что для механических и электродинамических систем, где данные о потоке явно отсутствуют, представленные здесь идеи будут интересны тем, кто работает непосредственно в этих областях. В частности, мы надеемся, что наше предложение о сворачивании белка может стимулировать желание узнать больше о дифференциальной геометрии и де Раме, используя учебную информацию, написанную здесь. Подводя итог, мы надеемся, что наша демонстрация применимости теоремы де Рама о когомологиях в различных системах реального мира может помочь сосредоточить будущее внимание в целом на этой выдающейся части математики. В конце концов, идея о том, что одна и та же математика может применяться к целому ряду систем, лежит в основе множества моделей и симуляций, будь то с механическими, электрическими, химическими, экономическими, физиологическими, социологическими или космологическими переменными и т. д. Дифференциальная геометрия нашел ключевое место в физике для тех, кто стремится понять природу. Для тех, кто в других местах имеет математические наклонности и закрепился в соответствующей области, работа по пониманию и применению дифференциальной геометрии обещает в конечном итоге быть очень полезно

Вклад автора: Концептуализация, PDN; методология, ПДН; письменное оформление — подготовка оригинального проекта, ПДН и МДН; написание — рецензирование и редактирование, MDN и PDN. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: В этом исследовании не было создано или проанализировано никаких новых данных. Совместное использование данных не применимо к этой статье.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Приложение А

Как указано во введении, необходимы глубокие знания геометрической теории, чтобы точно понять, как теорема де Рама связывает дыры в топологии гладких многообразий с хаотичным поведением интегральных полей потоков на многообразии.
Полное понимание связи зависит от знакомства с (i) симплициальными комплексами, (ii) сингулярными группами гомологий, (iii) сингулярными цепными комплексами, (iv) цепными отображениями, (v) вычислением сингулярных групп гомологий, (vi) Теорема Майера–Виеториса, (vii) гомотопическая инвариантность, (viii) сингулярные когомологии и кограничный оператор, (ix) косо симметрические тензоры, (x) алгебра Грассмана и (xi) группы когомологий де Рама и опера- торы звезды

Machine Translated by Google

атор, а также знание оператора Лапласа и гармонических полей потока. Некоторые из них затронуты в тексте. В этом Приложении А мы даем более подробный обзор рассматриваемой дифференциальной геометрии. Доказательства имеются в различных текстах [7,11,12,25–30].

Приложение А.1. Симплициальные

комплексы В трех мерных евклидовых пространствах (P0), (P0, P1), (P0, P1, P2), (P0, P1, P2, P3), где Pi — точки в R3 , являются симплициальными строительными блоками, которые можно построить. склеенные вдоль своих граничных граней с образованием 0-, 1-, 2- и 3-мерных ориентированных связных компактных подпространств в R3. Эти склеенные структуры называются симплициальными комплексами, на которых могут быть дифференциальные формы 0, 1, 2 и 3-й степени соответственно. быть интегрированным. Стандартный 3-симплекс 3 = (e0,e1,e2,e3) в R3 определяется такой, что e0 = (0, 0, 0), e1 = (1, 0, 0), e2 = (0, 1, 0) и e3 = (0, Этот стандартный 3-симплекс 3 определяет декартову систему координат на R3 , где e0 определяет начало координат, а e1,e2,e3 определяют векторы единичной длины вдоль взаимно ортогональной декартовой трехмерной 1 , 2 x , 3 x системы соответственно. 2-симплекс (P0, P1, P2) в R3 определяет треугольник в пространстве координат x , который включает в себя все точки вдоль его ориентированных граничных граней (P1, P2), (P0, P2), (P0, P3) , а также как и все внутренние точки. Учитывая векторы (v0, v1, v2) от начала координат e0 до каждой из точек P0, P1 и P2 соответственно, если векторы v1 v0 и v2 v0 линейно независимы, мы говорим, что точки P0, P1 и P2 аффинно независимы (в отличие от векторного пространства, аффинное пространство не охватывает начало координат). При перемещении вектора v0 в R3 аффинно независимый 2-симплекс (P0, P1, P2) можно переместить в любое место в R3 . Склеивая вместе набор 2-симплексов вдоль общих граничных граней, двумерную компактную ориентированную поверхность, известную как симплициальный комплекс , можно построить в R3 в виде 2- . Такая поверхность называется цепи, обозначаемой c2. В R3 можно построить множество различных 2-цепей . В R3 можно построить множество различных 0-цепей (дискретных точек), 1-цепей (каркасных моделей), 2-цепей (2-мерных поверхностей) и 3-цепей (3-мерных подпространств) . В общем, симплициальные комплексы замкнутые и ограниченные многогранники.

Учитывая гладкое трехмерное многообразие M, 2-симплекс (P0, P1, P2) в R3 может быть отображен гладким отображением σ2 в M. Такое гладкое отображение является нелинейным отображением, порождающим особый 2-симплекс в M. Из-за нелинейного отображения такой особый 2-симплекс может больше не выглядеть как треугольник. Он может потерять ранг и даже появиться как одна точка. По этой причине его называют сингулярным симплексом. То же самое относится к одному, двум и трем сингулярным симплексам в трехмерных многообразиях .

Из всех возможных 2-цепей c2 , которые можно построить в R3 , существуют 2-цепи , которые замыкаются сами на себя (например, 2-сферы) и имеют пустые границы (т. е. c2 = 0). Такие 2-цепи с пустыми границами называются 2-циклами и обозначаются обозначением z2. Аналогичное свойство применимо к 0-, 1-, 2- и 3-цепям в R3 , давая 0-, 1-, 2- и 3-циклы с нулевыми границами.

Приложение А.2. Группы сингулярной гомологии

Особые 2-циклы в базовой топологии X группы M можно использовать для обнаружения существования 2-мерных дыр в M. Сингулярная группа 2-гомологий в базовой топологии M определяется как все 2-циклы (представленные свободной абелевой группой Z2(M)) на базовой топологии M , не являющейся границами 3-цепей c3. Такие 2-циклы заключают в себе 2-мерные дыры в базовой топологии. Определим B2(M) как все 2-циклы из Z2(M) , являющиеся границами 3-цепей c3. Тогда особая группа 2-гомологий определяется фактором H2(M) = Z2(M)/B2(M) (т. е. группой всех 2-циклов, не являющихся границами 3-цепей). Размерность свободной абелевой группы H2(M) равна числу двумерных дыр в базовой топологии X группы M. Это можно обобщить на группы гомологий r-й степени Hr(M) = Zr(M)/Br(M) с r = 0, 1, ··· n в базовой топологии X n -мерного гладкого многообразия M. Это интуитивное описание сингулярных групп гомологий можно формализовать путем определения последовательности сингулярных групп гомологий, прикрепленных к базовой топологии. гладких многообразий. ,

Machine Translated by Google

Приложение А.3. Сингулярные цепные

комплексы. Длинная последовательность абелевых групп, соединенных гомоморфизмами.

$$\alpha_{r+1} \cdots \quad G_{r+1} \quad G_r \overset{\alpha_r}{} \quad Г_р \quad 1 \quad \cdots$$

называется точным, если $\operatorname{im} \alpha_{r+1} = \ker \alpha_r$ для всех r.

Первая теорема об изоморфизме групп подразумевает, что короткая 5-членная последовательность

$$0 \quad A_\alpha \quad B_\beta \quad C \quad 0$$

точен тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\alpha : A \quad B$ инъективен, а гомоморфизм $\beta : B \quad C$ сюръективен. Это означает, что для короткой 4-членной последовательности

$$0 \quad A_\alpha \quad Б \quad 0$$

точнее, гомоморфизм $\alpha : A \quad B$ должен быть одновременно инъективным и сюръективным. Этот факт полезен при вычислении сингулярных групп гомологии топологических пространств более высокой размерности (например, многомерных сфер, описанных ниже).

Длинная последовательность свободных абелевых групп (цепей) вместе с гомоморфизмами.

$$\cdots \quad C_{r+1} \quad C_r \overset{r+1}{} \quad C_r \quad 1 \quad \cdots$$

называется сингулярным цепным комплексом и обозначается C, если композиция любых двух последовательных гомоморфизмов $r \quad r+1$ равна нулю. Это то же самое, что требовать $\operatorname{im} \quad r+1 = \ker \quad r$.

r-я особая группа гомологий сингулярного цепного комплекса C — это

$$H_r(C) = \ker \quad r / \operatorname{im} \quad r+1 = Z_r(X)/B_r(X)$$

где $Z_r(X)$ — пространство всех r-циклов в X, а $B_r(X)$ — пространство всех r-циклов в X, являющихся границами $(r+1)$-цепей C_{r+1} в X. Отсюда следует что сингулярный цепной комплекс C точен тогда и только тогда, когда $H_r(C)$ равен нулю для всех значений r. Другими словами, группы сингулярных гомологий $H_r(C)$ обеспечивают точную меру несостоятельности цепного комплекса C, если быть точным. Это происходит, когда в любой из r-цепей есть r-мерная дырка(я м).

Приложение А.4. Цепные карты $F_\#$

Цепное отображение $F_\# : C \quad (X) \quad D \quad (Y)$ между сингулярными цепными комплексами, связанными с топологическими пространствами X и Y соответственно, представляет собой совокупность гомоморфизмов $F_\# : C_r \quad D_r$ для всех r таких, что $F_\# \quad r = r \quad F_\#$, как показано ниже:

$$\begin{array}{ccccccccc} X & C & (X) & \cdots & F & \overset{r+1}{K_p(X)} & \overset{p}{} & C_r & 1(X) \quad \cdots \\ & F_\# & & & & F_\# & & F_\# & r+1 \quad r \\ Y & D & (Y) & \cdots & & D_r(Y) & & D_r & 1(Y) \quad \cdots \end{array} .$$

Непрерывное отображение $F : X \quad Y$ между топологическими пространствами X и Y индуцирует сингулярное цепное отображение $F_\# : C \quad (X) \quad D \quad (Y)$ между сингулярным цепным комплексом $C \quad (X)$ и сингулярным цепным комплексом $D \quad (Ю)$. Это отображение определяется гомоморфизмами $F_\# : C_r(X) \quad D_r(Y)$ для всех значений r, как показано. Поскольку $F_\#$ отображает $\ker \quad r$ в $\ker \quad r$ и $\operatorname{im} \quad r+1$ в $\operatorname{im} \quad r+1$, отсюда следует, что непрерывное отображение $F : X \quad Y$ между топологическими пространствами X и Y индуцирует сингулярный гомоморфизм группы гомологии $F \quad : H_r(C \quad (X)) \quad H_r(D \quad (Y))$ для всех значений r.

Поскольку образ любого сингулярного симплекса связен, он должен целиком лежать в одной компоненте линейной связности топологического пространства X. Отсюда следует, что r-я сингулярная группа гомологии $H_r(X)$ для X равна прямой сумме r-я сингулярная группа гомологии $H_r(X_\alpha)$ для каждой из компонент линейной связности X_α (т. е. $\alpha : H_r(X_\alpha) \quad H_r(X)$).

Machine Translated by Google

Приложение А.5. Вычисление групп сингулярных гомологий

Приведенное выше определение групп сингулярных гомологий включает понятие комплексов r-цепей, состоящих из всех возможных r-цепей, которые могут быть построены в топологическом пространстве. Это очень большое количество r-цепей, поэтому оно не очень помогает нам понять, как мы можем на самом деле вычислять сингулярные группы гомологии. Однако мощные инструменты, основанные на так называемой точной последовательности Майера – Виеториса и лемме о зигзаге, были разработаны для вычисления групп гомологий для большинства, если не для всех топологических пространств. Некоторые сингулярные группы гомологий можно вывести непосредственно из определения, в частности (i) сингулярные группы гомологий нулевой степени H0(X) для любого топологического пространства X и (ii) все сингулярные группы гомологий Hr(X) для всех значений r на дискретное топологическое пространство X.

Приложение А.5.1. Группы гомологии сингулярной степени нулевой степени

Для любого топологического пространства X граница C0 нульмерного цепного комплекса C0 равна нулю, поскольку не существует цепи C 1. Отсюда следует, что каждая особая 0-цепь является 0-циклом (т. е. C0(X) = Z0(X)). С другой стороны, особая 0-цепь представляет собой формальную линейную комбинацию точек xi из X с целыми коэффициентами (т. е. c0 = i aixi). Предполагая, что X линейно связно, мы можем определить сюръективное отображение ϵ : C0(X) Z по формуле ϵ : i aixi i ai Z, где Z — группа всех целых чисел. Ядру этого отображения соответствуют все точки B0(X) из X, являющиеся граничными точками 1-цепи, и, следовательно, из первой теоремы об изоморфизме групп

$$Z0(X)/\ker \epsilon = Z0(X)/B0(X) = H0(X).$$

Таким образом, для любого топологического пространства X нулевое сингулярное пространство гомологии H0(X) изоморфно группе целых чисел Z, а размерность H0(X) равна числу компонент линейной связности в X. Это размерность — число Бетти b0.

Приложение А.5.2. Группы гомологии дискретных топологических пространств.

В дискретном пространстве X каждая изолированная точка соответствует компоненте связности X, поэтому H0(X) — свободная абелева группа, изоморфная группе целых чисел Z с размерностью b0, равной числу дискретных точек. в X. X отя каждая компонента связности X представляет собой одну изолированную точку, граница σr для особого r-симплекса σr задается формулой (1) rσr 1, где σr знакопеременная сумма σr = $\sum_{i=0}^{r}$ (1) rσr Fi,r = $\sum_{i=0}^{r}$ Fi,r представляет собой особая i-я граничная грань. Для одноточечных пространств все особые грани σr Fi,r равны σr 1. Таким образом, : Cr Cr 1 является изоморфизмом, когда r четно, и нулем, когда r нечетно.
Следовательно, мы получаем сингулярный цепной комплекс

$$\cdots \quad C3 \quad C2 \quad C1 \quad C0 \quad 0$$

где граничные отображения : Cr Cr 1 являются 0-отображениями для нечетных значений r и изоморфизмами для четных значений r. Отсюда следует, что последовательность точна во всех абелевых группах Cr, кроме C0. Но мы уже имели дело с H0(X) для C0. Поскольку группы сингулярных гомологий Hr(X) обеспечивают меру отклонения от точности, отсюда следует, что группа сингулярных гомологий Hr(X) для каждой изолированной точки дискретного топологического пространства X равна нулю для всех r > 0..

Приложение А.6. Теорема Майера – Вьеториса

Теорема Майера–Виеториса — важный инструмент для вычисления сингулярных групп гомологии топологических пространств. Если X — топологическое пространство и U, V — открытые подмножества X, объединение которых есть X, то для каждого r существует гомоморфизм, называемый гомоморфизмом связности : Hr(X) Hr 1(U V), такой, что следующая длинная последовательность групп гомологии точна:

$$\cdots \quad Hr(U \quad V) \quad \overset{я*}{} \quad {}^{j}Hr(U) \quad Hr(V)\ k \quad l\ Hr(X) \quad Hr \quad 1(U \quad V) \quad \cdots$$

Machine Translated by Google

где i j : Hr(U V) Hr(U) Hr(V) с (i k l : Hr(U) j)[c] = (i [c], j [c]) и] где [c] и Hr(V) Hr(X) с (k l)([c], [c [c '])) = k [c] l [c ']] представляют сингулярные классы гомологий [8].

Чтобы проиллюстрировать, как теорему Майера-Виеториса можно объединить с другими свойствами топологических пространств для вычисления сингулярных групп гомологий, рассмотрим вычисление сингулярных групп гомологий для всех значений r и для всех измерений n единичной сферы. Рассмотрим единичную n-сферу Sn с открытым подмножеством U, равным Sn с удаленным южным полюсом, и открытым подмножеством V, равным Sn с удаленным северным полюсом. Часть точной последовательности Майера – Виеториса равна

$$\text{Час (У)} \quad Hr(V) \quad Hr(Sn) \quad Hr\ 1(U \quad V) \quad Hr\ 1(U) \quad Hr\ 1(V)$$

где связующий гомоморфизм равен : Hr(Sn) Hr 1(U V). Все точки U можно стянуть к северному полюсу, а все точки V — к южному полюсу. Это означает, что и U, и V сжимаемы и, следовательно, односвязны (т. е. не содержат дырок). Отсюда следует, что

$$\text{Час (У)} \quad Hr(V) = 0 \text{ и } Hr\ 1(U) \quad Hr\ 1(V) = 0$$

Следовательно, когда r > 1 и n 1, точную последовательность можно переписать как

$$0 \quad Hr(Sn) \quad Hr\ 1(U \quad V) \quad 0.$$

Это точная 4-членная последовательность, описанная выше, и, следовательно, связующий гомоморфизм : Hr(S n) Hr 1(U V) является биективным отображением (т. е. изоморфизмом). Так же, как экватор единичной 2-сферы S, экваториальная сфера (U, V) единичной сферы Sn сфера Sn 1. Это означает, что Hr(S n) = Hr 1(U V) = Hr 1(S Hr(S n) = 0, если топологически эквивалентна единичной окружности (n 0 < r < n. Мы уже знаем, что H0(S n) = Z и Hr(S n) = 0, если r > n, n 1)-) при r > 1 и n 1 и поэтому у нас есть все особые группы гомологий для сфер более высокой размерности.

Приложение A.7. Гомотопическая инвариантность

2-тор T 2 имеет два одномерных отверстия и одно двумерное отверстие. В прочем) и один- Другими словами, он имеет двумерную сингулярную группу гомологий первой степени H1(T, размерную группу сингулярных гомологий второй степени H2(T 2-тора 2). Геометрия резинового листа позволяет ей деформироваться во множество различных размеров и форм. разрезанные, порванные, проколотые или склеенные, все различные размеры и формы T будут гомеоморфно отображены друг на друга, а топологическая 2 может структура останется неизменной (т. е. количество дырок и, следовательно, сингулярные группы гомологий H1(T и H2(T) дырки различных размерностей и, следовательно, их сингулярные группы гомологии гомотопически и 2) топологически остаются неизменными). Аналогичное свойство справедливо для всех топологических пространств. инвариантны. Пусть f0, f1 : X Y — непрерывные гомотопические отображения (т. е. f0(X) в Y и f1(X) в Y могут быть преобразованы в. друг друга, не изменяя своей топологической структуры), то f0(X) и f1(X) (вместе со всеми промежуточными формами на пути гомотопического преобразования между f0(X) и f1(X)) имеют одни и те же сингулярные группы гомологии In. другими словами, непрерывные гомотопические отображения f0, f1 : X Y индуцируют сингулярные гомоморфизмы группы гомологии (f0) ,(f1) : Hr(X) Hr(Y) для всех значений r. Непрерывное отображение F: X Y между топологическими пространствами X и Y называется гомотопической эквивалентностью, если существует непрерывное отображение обратного образа G: Y X такое, что композиция F G гомотопна тождественному отображению IY на Y и композиция G F гомотопна тождественному отображению IX на X. Если F: X Y — гомотопическая эквивалентность топологических пространств X и Y, то для каждого r 0 отображение F : Hr(X) Hr(Y) — изоморфизм.

Machine Translated by Google

Приложение А.8. Сингулярные

когомологии Сингулярные группы гомологий представляют собой ковариантные функторы из категории топологических пространств в категорию свободных абелевых групп. Для многих приложений, включая теорию дифференциальных форм де Рама, полезнее иметь контравариантные функторы. Сингулярные когомологии — это обратная версия сингулярных гомологий. Он не дает никакой новой информации, а просто представляет ту же информацию в другом виде.

Преобразование от ковариантного функтора к контравариантному основано на следующем факте. Если A и B — абелевы группы при поточечном сложении, то множество Hom(A, B) групповых гомоморфизмов из A в B само является абелевой группой при поточечном сложении. Для любой фиксированной абелевой группы G каждый гомоморфизм f# : A B дает Hom(B, G)) = φ A. Это отображение обратного образа можно индуцированный гомоморфизм обратного # : Hom(B, G) Hom(A, G). Если φ Б использовать образа A Hom(A, G), то f # (φ Б для того, чтобы связать свободный f и φ абелевой группы всех особых r-цепей Cr(X) на топологическом пространстве X в свободную абелеву группу всех особых r-коцепей C r (X; G) = Hom(Cr(X)), G) в одном и том же топологическом пространстве X. Для свободных абелевых групп группа G равна группе целых чисел Z. Непрерывное отображение f : X Y между топологическими пространствами X и Y индуцирует гомоморфизм f# : Cr(X) Cr(Y) между свободными абелевыми группами всех возможных r-цепей на X и Y (т. е. где мы Да Икс р используйте обозначение с Y р для представления одной r-цепи в Y). Это также индуцирует гомоморфизм обратного образа f : C # r (Y; G) C r (X; G) или, что то же самое, f : Hom(Cr(Y), G) # Hom(Cr(X), G) : φ Y(f#c X r) (f #φ Y)(c X r), (т.е. f # где φ Hom(Cr(Y), G)). Да

Кограничный оператор

Граничный оператор : Cr+1(X) Cr(X) между свободными абелевыми группами всех возможных (r + 1)-цепей и всех возможных r-цепей на X индуцирует кограничный оператор обратного образа δ : C г (X; G) C r+1 (X; G) между всеми возможными г -коцепями и всеми возможными (г + 1)-коцепи на X (обратите внимание на возрастающие значения r). Для когранцы одной r-цепи с # δφY) X р f просто, это # : (δφY)(f#c X получаем (c X r), где δφ)(c X r) = (φ X)(cX) (f на X, мы р). Более . показывает, что f (δδφX)(c X r) # δ = δ f r) # Отсюда также следует, что δ δ = δδ = 0, поскольку = (φ X)(Xкомплекс и = 0. Поскольку δδ = 0, существует точная длинная коцепь отображение коцепи f # между топологическими пространствами X и Y (обратите внимание на уменьшение r).

$$\cdots \quad C^{r-1}(X;G) \xrightarrow{\delta} C^{r}(X;G) \xrightarrow{\delta} C^{r+1}(X;G) \quad \cdots$$
$$\downarrow f^{\#} \qquad\qquad \downarrow f^{\#} \qquad\qquad \downarrow f^{\#}$$
$$\cdots \quad D^{r-1}(Y;G) \xrightarrow{\delta} D^{r}(Y;G) \xrightarrow{\delta} D^{r+1}(Y;G) \quad \cdots$$

r-коцепь φ X C r (X; G) — r-коцикл φ Икс € Z r (X; G), если δφX = 0 (т. е. он имеет r (X; (пустая когранича) и является ограничивающим коциклом φ X (G) G), если существует коцикл B (X; X C r 1 такой, что δψX = 0 (т. е. он является границей (r) 1)-коцепь). Как ψ r-коциклы Z r (X; G), так и r-ограничивающие коциклы B r (X; G) сохраняются коцепными отображениями f, поэтому мы можем # определить r-ю сингулярную группу когомологий. X с коэффициентами из G быть фактором Hr (X; G) = Зг (X ; G)/B r (X; G).

Можно заключить, что непрерывное отображение f : X Y между топологическими пространствами X и Y индуцирует гомоморфизм обратного образа f r (Y; G) C r (X; G) между r-ми сингулярными : C коцепями на Y и r-сингулярные коцепи на X. Это, в свою очередь, индуцирует гомоморф обратного образа : Hr (Y; G) Hr (X; G) когомологиимежду r-й сингулярной группой когомологий Hr (Y; G) физизмом f на Y и r-я особая группа Hr (X; G) на X. Как сингулярные группы гомологий гомотопически и топологически инвариантны, так и сингулярные группы когомологий.

Другими словами, сингулярные группы когомологий изоморфны соответствующим сингулярным группам гомологий.

Приложение А.9. Кососимметричные тензоры на гладком n-многообразии

М. В каждой точке р гладкого n-многообразия М существует n-мерное касательное пространство ТрМ и n-мерное кокасательное пространство Т. п М. Ковектор или 1-форма λ в Т р М

Machine Translated by Google

действует на вектор v в TpM и преобразует его в действительное число (т. е. λ(v) = λ, v R).
Кососимметричный тензор T(X, Y) типа (0, 2), действующий на два вектора X и Y в TpM и дающий действительное число, меняет знак, если порядок двух векторов меняется на противоположный (т. е. T(X, Y) = T(Y, X)). Если (e1, · · · ,en) являются единичными базисными векторами, охватывающими касательный вектор n), являются пространство TpM в точке p M и (ε 1 , · · · ,ε единичными базисными векторами, двойственными к (e1, · · · ,en), кокасательное векторное пространство Tn охватывающими M, то мы можем написать тип (0, 2) skew -симметричный тензор T(X, Y) в виде T = Tj1 j2 εj1 j2 , где

$$\varepsilon^{j1\,j2} = (\varepsilon\, j1 \quad \varepsilon_{j2} \quad \varepsilon\, j2 \quad \varepsilon_{j1}) = \varepsilon\, j1 \quad \varepsilon\, j2 \text{ с } j1 < j2$$

Это определяет тензорное пространство εj1 j2 быть базисом кососимметрического типа (0, 2). ε Ω2 в точке p M, а Tj1 j2 — это компонента кососимметричного тензора (вектора) типа (0, 2) j1 ε j2 , проецируемая на базисный вектор ε симметризации . Это можно обобщить на косо- и (или знакопеременной) оператор A для типа (0, s), s = 0, 1, · · · тензор T по формуле , кососимметричный

$$AT(X1, \cdots, Xs) = (\quad 1)^{к} \overline{T}(Xa1 , \quad s! \ (a1 \cdots as) \qquad \cdots \qquad , X\, ac\ )$$

где s! — количество перестановок P(n,r) = , когда порядок имеет $\frac{н!}{это}$ n объектов, взятых r за раз (n r)! значение и при n = s и r = s в этом случае (a1 ···as) перестановок s векторов (X1, · · · , сумма по всем s!
Xs) , а к — четность каждой перестановки (т. е. к = 0, если количество перестановок двух векторов четное, и к = 1, если количество перестановок нечетное).

Если Ф— r1-форма и П — r2-форма, то Ф П = A(ФП) — (r1 + r2)-форма.
Клин-произведение

является (i) ассоциативным Ф (П Ψ) = (Ф П)
Ψ, (ii) (анти)-коммутативным (Ф П = (1) r1 r2П Ф) и (iii)
дистрибутив (Ф+ Ψ) П = Ф П + Ψ П, где Ф и Ψ здесь являются r1-формами.

Базисные векторы (кососимметричные тензоры), охватывающие r-й кососимметричный тензор j1 ···jr пространства Ωr (M), равны ε = ε
j1 · · · ε jr : j1 < . . . < jr .

Приложение А.10. Алгебра Грассмана.

Для каждого p M на гладком n-многообразии M существует семейство кососимметричных тензорных пространств Ом1 Ом2 . Кососимметричные тензоры в этих кососимметричных тензорных пространствах называются дифференциальными формами. r -форма в Ωr действует на r векторов v1, · · · , vr в TpM и преобразует их в действительное число для всех значений r = 0, · · · n. Размерность каждого кососимметричного тензорного пространства Ωr равна $\frac{н!}{r!(n \quad r)!}$. Согласно этой формуле, кососимметричные тензорные пространства Ω0 и Ωn являются одномерными. Размерность увеличивается линейно с r от Ω0 до Ω Размерность Ωr равна $\frac{н}{2}$, а затем линейно убывает до Ωn . Это подразумевает, что размерности Ωn r . Действительно, кососимметричное тензорное пространство Ωr изоморфно кососимметричному тензорному пространству Ωn r. Изоморфный оператор , известный как оператор звезды Ходжа, преобразует r-формы в Ωr в (n r)-формы в Ωn r для всех значения p. При r < 0 и r > n кососимметричные тензорные пространства Ωr являются пустыми пространствами, а дифференциальные формы равны нулю . Оператор d, известный как внешняя производная , преобразует r-форму в (r + 1)-форму. Важно отметить, что композиция d d = dd всегда равна нулю . Отсюда следует, что существует последовательность кососимметричных тензорных пространств, связанных внешним дифференциальным оператором

$$0 \quad \overset{д}{\to} \quad Ом0 \quad \overset{д}{\to} \quad \cdots \quad \overset{д}{\to} \quad Омп \quad 0$$

где каждая стрелка соответствует внешнему дифференциалу d. Оператор d переводит r-форму в (r 1)-форму. В более общем смысле d = (1) номер+n+1 d , где — индекс Ходжа

Machine Translated by Google

звездный оператор, то есть изоморфизм между Ωr и Ωn r . Операторы d и d не являются обратными друг другу, они являются сопряженными. Прямая сумма косоимметричных тензорных пространств образует градуированную алгебру Ω= Ω0 ⋯ Ωn , известную как внешняя алгебра или алгебра Грассмана. Любая r-форма ω, для которой dω = 0, называется замкнутой r-формой, а любая r-форма ω, равная dλ , где λ — (r 1)-форма, называется точной r-формой.

Приложение А.11. Группы когомологий Де Рама

Из алгебры Грассмана и того факта, что d d = dd = 0, следует, что каждая точная дифференциальная форма замкнута. Однако из этого не следует, что каждая замкнутая дифференциальная форма точна. Теория дифференциальных форм Де Рама проясняет, что точность замкнутой дифференциальной формы зависит однозначно от базовой топологической структуры многообразия . В частности, это зависит от наличия или отсутствия дыр различной размерности в базовой топологии. Как показывает объем теории, изложенной в этом приложении, для понимания этого замечательного факта необходим значительный объем знаний в области дифференциальной геометрии . Поскольку внешний дифференциал d : Ωr Ωr+1 линеен, его ядро ker(dr) = Z r (M) = замкнутые r-формы и его образ im(dr 1) = B r (M) = точные r-формы. формы представляют собой линейные векторные пространства. Поскольку вся кая точная форма замкнута, то точные r-формы суть r (M) Z r (M)). Таким образом, r-я замкнутых r-форм (группу B можно когомологий Де Рама представляет собой подпространство определить как фактор-векторное пространство

$$^{\text{ЧАС}}r\,dR(M) = \quad ^{3}p\,(M)/B\,p\,(M)$$

(т.е. пространство всех неточных замкнутых форм).

Хотя Hr dR(M) является действительным векторным пространством, оно также является сложенной группой Ли. Поскольку Ωr (M) = 0 при r < 0 и r > n, то Hr dR(M) равен нулю для этих значений r. Отсюда также следует, что Hr dR(M) = 0 для 0 r n тогда и только тогда, когда каждая глобально замкнутая r-форма на M глобально точна.

Векторное факторпространство ^{3}r (M)/B r (M) разбивает пространство замкнутых r-форм на классы эквивалентности. Для любой замкнутой r-формы ω на M , которая не является точной, обозначим через [ω] класс эквивалентности ω. Если ω и ω′ принадлежат одному и тому же классу эквивалентности [ω] , то они отличаются точной r-формой (т. е. ω ω′ = dη), и мы говорим, что ω и ω′ когомологичны. Это легко визуализировать в терминах групп гомологии, где это просто означает, что может существовать несколько r-циклов, содержащих одну и ту же r-мерную дыру. Точно так же, как непрерывное отображение f : X Y между топологическими пространствами X и Y индуцирует гомоморфизм обратного образа f : Hr (Y; G) Hr (X; G) между r-й сингулярной группой когомологий Hr (Y; G) между r-й сингулярной группой когомологий Hr (Y; G) на Y и r-й группе сингулярных когомологий Hr (X; G) на X гладкое отображение F : M N между гладкими многообразиями M и N индуцирует обратный образ F : Hr dR(N) Hr dR (M) между r-ми когомологиями де Рама N и M соответственно. Это соответствует контравариантному функтору между категорией гладких отображений гладких многообразий и категорией групп когомологий де Рама.

Мы можем составить интересную картину связи между группами когомологий де Рама первой степени H1 dR(M) на связном гладком многообразии и базовой топологией X многообразия , измеряемой фундаментальной группой П1(X, q). Все 1-циклы во всех возможных 2-цепях базовой топологии гладкого многообразия M , содержащие 1-мерную дырку, соответствуют не только H1 dR(M) , но и фундаментальной группе П1(X, q). Фундаментальная группа состоит из всех петель, связанных с точкой q в базовой топологии X из M , которые не могут быть свернуты в точку. Множество групповых гомоморфизмов Hom (П1(X, q), R) фундаментальной группы П1(X, q) в аддитивную группу действительных чисел R представляет собой векторное пространство относительно сложения и умножения на константы. Мы можем определить линейное отображение Φ: H1 dR(M) Hom(П1(X, q), R) следующим образом: для данного класса когомологий [ω] H1 dR(M) определим Φ[ω] : П1(X, q) R по Φ[ω] = ω = вещественному числу, где [γ] — любой гомотопический класс пути в П1(X, q) , а γ — любая кусочно-гладкая кривая , представляющая тот же класс петлевых путей [γ]. Отображение Φ: H1 dR(M) Hom(П1(X, q), R) является корректно определенным гомоморфизмом между группами. Отсюда следует, что H1 dR(M) = 0, когда тополь-

Machine Translated by Google

Теория X, лежащая в основе гладкого многообразия M, односвязна (т. е. не имеет одномерных дыр и петель, которые нельзя стянуть в точку).

Приложение A.12. Теорема Де Рама

Теорема Де Рама основана на том факте, что, подобно сингулярным гомологиям и группам сингулярных когомологий, группы когомологий де Рама $H^r_{dR}(M)$ для всех значений r гомотопически и топологически инвариантны. Предположим, что гладкие отображения $F : M \to N$ и $G : M \to N$ между гладкими многообразиями M и N гомотопны (т. е. F(M) в N можно преобразовать в G(M) в N и наоборот). Определим гомотопический оператор $h : \Omega^r(N) \to \Omega^{r-1}(M)$ для всех значений r. Предположим, что $\omega \in \Omega^r(N)$ и $\eta = h\omega \in \Omega^{r-1}(M)$, так что $d(h\omega) + h(d\omega) = G^*\omega - F^*\omega$, где G^* и F^* являются гладкими отображениями обратного образа из $\Omega^r(N)$ в $\Omega^r(M)$ для всех значений r. Если мы позволим ω замкнутой r-форме на N (т. е. $d\omega = 0$), мы найдем $d(h\omega) = G^*\omega - F^*\omega$. Следовательно, $G^*\omega$ и $F^*\omega$ отличаются точной формой $d(h\omega)$ в M, откуда F^* и G^* индуцированное когомользначений r логичны и индуцированное F^*, G^* следует, что $G^* : H^r_{dR}(N) \to H^r_{dR}(M)$ для всех притяжение -обратные отображения F изоморфны. Группы когомологий Де Рама для всех значений r гомотопически и топологически инвариантны. Можно заключить, что если M и N — гомотопически эквивалентные гладкие многообразия с краем или без него, то $H^r_{dR}(N) = H^r_{dR}(M)$ для каждого значения r. Гладкая гомотопическая эквивалентность $F : M \to N$ между гладкими многообразиями индуцирует изоморфизмы между группами когомологий де Рама.

Из теоремы Стокса и определения периода $\int_{zr} \omega$, где zr — r-цикл, а ω — r-форма, мы можем определить скобку $\langle , \rangle : C^r(M) \times C_r(M) \to \mathbb{R}$, где $C^r(M)$ — свободная абелева группа всех возможных r-цепей $c^r \in C^r(M)$ в M, а $C_r(M)$ — свободная абелева группа r(M) в M, полагая $\langle c^r, \omega \rangle :=$ всех возможных r-каждой r-формы ω отображение $c^r \to \langle c^r, \omega \rangle$ линейно на $C^r(M)$, где (r-цепей (r-кобразующей формы) $C_r(M)$ отображение $\omega \to \int_{zp} \langle c^r, \omega \rangle$ линейно на $C_p(M)$. Это индуцирует скобку на сингулярной группе r-гомологий $H_r(M)$ и r-й группе когомологий де Рама $H^r_{dR}(M)$, полагая

$$[zr], [\omega] = \langle zr, \omega \rangle = \int_{zp} \omega$$

где $[zr] \in H_r(M)$ — класс r-гомологий, $[\omega] \in H^r_{dR}(M)$ — r-й класс когомологий де Рама, zr — любой представитель $[zr]$ и ω — любой представитель $[\omega]$. Период равен нулю только в том случае, если замкнутая r-форма ω точна, $\int_{zp} \omega$ в противном случае это действительное ненулевое число.

Для любого фиксированного r-го класса когомологий де Рама $[\omega]$ отображение $f_{[\omega]} : H_r(M) \to \mathbb{R}$, заданный формулой $f_{[\omega]}([zr]) = \langle [zr], [\omega] \rangle_p = \omega$, является корректно определенным линейным функционалом на $H_r(M)$. Теорема де Рама утверждает, что это соответствие между линейными функционалами на $H_r(M)$ и классами когомологий де Рама $[\omega] \in H^r_{dR}(M)$ взаимно однозначно. Билинейное отображение $\langle , \rangle : H_r(M) \times H^r_{dR}(M) \to \mathbb{R}$ невырождено по обоим аргументам [27]. По сути, теорема де Рама утверждает, что r-я группа когомологий де Рама изоморфна двойственному пространству r-й группы гомологий (т. е. пространству сингулярной группы когомологий). Отсюда следует, что r-форма ω глобально точна тогда и только тогда, когда все ее периоды равны нулю. Это может произойти только в том случае, если в базовой топологии гладкого многообразия нет r-мерных дыр.

Ссылки

1. Нилсон, П.Д.; Нилсон, доктор медицины; Пока, RT Теория римановой геометрии трехмерного бинокулярного зрительного восприятия. Зрение 2018, 2, 43. [CrossRef] [PubMed]
2. Нилсон, доктор медицинских наук; Нилсон, доктор медицины; Пока, RT. Теория римановой геометрии синергетического выбора для визуально управляемого движения. Видение 2021, 5, 26. [CrossRef] [PubMed]
3. Нилсон, П.Д.; Нилсон, доктор медицины; Пока, RT. Теория римановой геометрии зрительно управляемого движения объектостаточное изображение. иллюзии и постоянство размеров. Видение 2022, 6, 37. [CrossRef] [PubMed]
4. Кац, М.; Крюгер, П.Б. Человеческий глаз как оптическая система, Глава 33. В Клиническая офтальмология Дуэйна; Тасман В., Джагер Е.А., ред.; Липпинкотт, Уильямс и Уилкинс: Филадельфия, Пенсильвания, США, 2006 г.; Том 1.

Machine Translated by Google

5. Армстронг, Б.; Эйткен, Дж.; Сим, М.; Свон, Н. Заключительный отчет Независимой комиссии по обзору и научным исследованиям; Австралийская радиовещательная корпорация: Сидней, Новый Южный Уэльс, Австралия, 2007 г.
6. Ситас, Ф.; О'Коннелл, DL; ван Кеменаде, Швейцария; Короткий, МВт; Чжао, К. Риск рака молочной железы среди сотрудниц Австралийской радиовещательной корпорации в Австралии. Мед. Дж. Ауст. 2010, 192, 651–654. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
7. Виейра, Л. Торус и анимация морфинг акружек. 2007. Доступно в Интернете: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mug_and_. Торус _морф.gif (по состоянию на 7 июня 2024 г.).
8. Ли Дж. Введение в топологические многообразия, 2-е изд.; Тексты для аспирантов по математике; Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2011 г.; ISBN 978-1-4419-7939-1.
9. Смейл С. Топология и механика. I. Математика изобретений. 1970, 10, 305–331. [Перекрестная ссылка]
10. Авраам Р.; Марсден, Дж. Э. Основы механики, 2-е изд.; Паб AMS Chelsea/Американское математическое общество: Провиденс, Род-Айленд, США, 2008; ISBN 978-0-8218-4438-0.
11. Ортега, Ж.-П.; Ратиу, Т. Карты импульса и гамильтонианова редукция; Прогресс в математике; Биркхойзер: Базель, Швейцария, 2004 г.; ISBN 978-0-8176-4307-2.
12. Фландерс Х. Дифференциальные формы с приложениями к физическим наукам; Пересмотренное изд.; Публикации Дувра: Минеола, Нью-Йорк, США, 1989 г.; ISBN 978-0-486-66169-8.
13. Ланг С. Основы дифференциальной геометрии; Тексты для аспирантов по математике; Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1999 г.; Том 191, ISBN 978-1-4612-6810-9.
14. Фейнман, Р.П.; Лейтон, РБ; Сэндс, М. Фейнмановские лекции по физике Vol. II гл. 41: Поток влажной воды. 1963/2013. Доступно онлайн: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_41.html. (по состоянию на 21 апреля 2024 г.).
15. Смитс, А.Дж. Лекции по механике жидкости: вязкие потоки и турбулентность; Смитс, Эй.Дж., Ред.; Кафедра машиностроения, Принстонский университет: Принстон, штат Нью-Джерси, США, 2009 г.
16. Брантон, С.Л; Ноак, БР; Кумуцакос, П. Машинное обучение в механике жидкостей. Анну. Преподобный Fluid Mech. 2020, 52, 477–508. [Перекрестная ссылка]
17. Добсон В.М. Сворачивание и неправильное сворачивание белков. Природа 2003, 426, 884–890. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
18. Дилл, К.А.; МакКаллум, Дж.Л. Проблема сворачивания белков, 50 лет спустя. Наука 2012, 338, 1042–1046. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
19. Королевское учреждение. Физика жизни: как вода сворачивает белки – с Сильвией Маклейн; Видео на YouTube, 45:07. 2017. В наличии онлайн: https://www.youtube.com/watch?v=SaSntOkK-Vk (по состоянию на 7 июня 2024 г.).
20. Гудейл, Массачусетс; Милнер, Д. Невидимое зрение: исследование сознательного и бессознательного видения; Издательство Оксфордского университета: Оксфорд, Великобритания, 2013 г.; ISBN 978-0-19-175300-8.
21. Булло, Ф.; Лью ис, А.Д. Геометрическое управление механическими системами: моделирование, анализ и проектирование простых механических систем управления; Тексты по прикладной математике; Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2005 г.; ISBN 978-0-387-22195-3.
22. Королевское учреждение. Сворачивание белков и усорители частиц: новое решение — с Сильвией Маклейн и Аланом Сопером; Видео на YouTube, 7:21. 2016. Доступно онлайн: https://www.youtube.com/watch?v=uSErKi_HWg8. (по состоянию на 7 июня 2024 г.).
23. Рис, Нью-Хэмпшир; Сопер, АК; Дуган, Л. Способность аминокислоты глютамина образовывать водородные связи, выявленная с помощью нейтронографии. эксперименты. Дж. Физ. хим. Б 2012, 116, 13308–13319. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
24. Стюарт, Б.В. «Больше не будет!»: Наследие кластера рака молочной железы Тувонг. Мед. Дж. Ауст. 2007, 187, 178–180. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
25. Ли, Дж. М. Римановы многообразия: введение в кривизну; Тексты для аспирантов по математике; Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1997 г.; ISBN 978-0-387-98271-7.
26. Морита С. Геометрия дифференциальных форм; Американское математическое общество: Провиденс, Род-Айленд, США, 2001; ISBN 978-0-8218-1045-3.
27. Секерес П. Курс современной математической физики: группы, гильбертово пространство и дифференциальная геометрия; Издательство Кембриджского университета: Кембридж, Великобритания, 2004 г.; ISBN 978-0-511-26329-3.
28. Ли, Дж. М. Введение в гладкие многообразия, 2-е изд.; Тексты для аспирантов по математике; Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2013 г.; ISBN 978-1-4419-9981-8.
29. Ту Л.В. Дифференциальная геометрия: связность, кривизна и характеристические классы; Тексты для аспирантов по математике; Спрингер Международное издательство: Чам, Швейцария, 2017 г.; ISBN 978-3-319-55082-4.
30. Ли, Дж. М. Введение в римановы многообразия, 2-е изд.; Тексты для аспирантов по математике; Springer International Publishing: Чам, Швейцария, 2018 г.; ISBN 978-3-319-91754-2.

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Инновационные способы разработки и использования конкретного назначения Альтернативы решению задач сложной комбинаторной сетевой маршрутизации и упорядоченной оптимизации

Сантош Кумар 1* и Элиас Мунапо 2

1 Департамент математических и геопространственных наук, Школа наук, Университет RMIT, Мельбурн, VIC 3000, Австралийская
2 школа экономики и наук о принятии решений, Северо-Западный университет, кампус Мафикенг, Мафикенг 2735, Южная Африка; emunao@gmail.com
* Переписка: santosh.kumarau@gmail.com

Аннотация: В этой статье рассматриваются некоторые недавние достижения авторов и их коллег и освещаются несколько инновационных идей, которые привели их к решению некоторых сложных комбинаторных сетевых задач маршрутизации и упорядоченной оптимизации. Коммивояжер, относящийся к сложной категории NP, был рассмотрен и решен как кратчайший связный граф с ограничением по индексу, и, следовательно, возникает вопрос о его категории «NP-сложный». Задача маршрутизации через заданные «K» узлы и упорядоченные оптимальные решения сложны в вычислительном отношении, но стали вычислительно выполнимыми. Все эти подходы основаны на стратегическом создании и использовании альтернативного решения в данной ситуации. Эффективность этих методов требует дальнейшего изучения.

Ключевые слова: кратчайшая связная сеть; минимальный тур коммивояжера; Н.П. Сложные задачи; путь через К указанных узлов; теорема о балансировке индексов; подключенная сеть с ограниченным индексом; создание альтернативного решения; заказал оптимальные решения

check for updates

Цитирование: Кумар, С.; Мунапо, Э. Инновационные способы разработки и использования целевых альтернатив для решения сложных задач комбинаторной сетевой маршрутизации и упорядоченной оптимизации. Прикладная математика 2024, 4, 791–805. https://doi.org/10.3390/appliedmath4020042

Академический редактор: Карло Бьянка

Поступила: 18 апреля 2024 г.
Пересмотрено: 6 июня 2024 г.
Принято: 6 июня 2024 г.
Опубликовано: 18 июня 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Математика ИЛИ оказала поддержку во многих реальных процессах принятия решений в промышленности, бизнесе и правительстве. Изменение технологий всегда было источником новых проблем, и, соответственно, были разработаны новые математические методы и инструменты для обеспечения необходимой поддержки принятия решений для более эффективных и обоснованных решений. Проблемы маршрутизации и их варианты в теории графов привлекли большое внимание исследователей благодаря различным промышленным приложениям. Кратчайший маршрут, кратчайший связный граф и коммивояжер — вот лишь некоторые из них. Время от времени выявлялись варианты этих проблем. Упорядоченная оптимизация — еще одна область, в которой получение упорядоченного оптимума, т. е. k-го наилучшего решения, k 2, может оказаться весьма сложной задачей. В этой статье мы рассматриваем несколько конкретных инновационных идей для разработки альтернативы в данной ситуации и используем это альтернативное решение для решения некоторых сложных комбинаторных ситуаций жесткой оптимизации; например, мы нашли следующее: (1) Решен минимальный тур коммивояжера, который относится к категории «NP Hard».

как минимально связный граф с ограничением по индексу;

(2) Путь, проходящий через набор заданных узлов, который требует больших вычислительных ресурсов из-за того, что путь ограничен прохождением через набор заданных узлов, также рассматривается как минимально связный граф с ограничением по индексу;

(3) Второе лучшее оптимальное решение для кратчайшего маршрута и задачи о назначениях.

Все эти подходы разрабатывают альтернативное решение и используют это решение стратегическим образом для решения рассматриваемой проблемы. Эти новые подходы требуют дальнейшего изучения для установления их эффективности, если таковая имеется. В настоящее время эта работа ведется. К числу вышеперечисленных проблем отнесен минимальный тур коммивояжера (M

Machine Translated by Google

как «NP Hard»; см. [1]. Аналогично, определение кратчайшего маршрута через заданные «K» узлы и поиск упорядоченного оптимального решения были классифицированы как трудоемкие вычисления; см. [2,3]. Подход, основанный на ограниченном по индексу кратчайшем связном графе для задачи коммивояжера, поднимает вопрос: «Действительно ли TSP является «NP-сложной» задачей?» Аналогичный вопрос возникает снова для пути через K заданных узлов. Вопрос в том, «требует ли путь через указанные узлы вычислительных ресурсов?» Разработка ограниченного минимального остовного дерева основана на идее разработки альтернативы и использования этой альтернативы для поиска минимального остовного дерева, ограниченного индексом

Мы расширяем идею разработки альтернативного решения для кратчайшего маршрута и задачи о назначениях и нахождение второго лучшего оптимального решения для этих задач без чрезмерного увеличения объема вычислений. Этот подход нахо дится на начальной стадии, и необходимы дополнительные вычислительные работы, чтобы установить его вычислительную эффективность для различны

Многие ситуации из реальной жизни можно представить в виде сети, состоящей из узлов и связей. Эти ссылки формируются путем соединения узлов, а веса, связанные с этими ссылками, обеспечивают своего рода меру отношений между узлами. Сеть, представляющая физическую ситуацию, может быть направленной или ненаправленной сетью. Анализ неориентированной сети обычно более сложен по сравнению с анализом ориентированного графа просто потому, что направления в ориентированном графе предоставляют дополнительную информацию, которая отсутствует в неориентированной сети. Многие производственные ситуации были смоделированы как направленные сети и проанализированы с использованием методов динамического программирования; см. [4–6]. Эти проблемы, однажды преобразованные в сетевую модель, были проанализированы с использованием теории и инструментов, связанных с сетями. Результаты анализа можно интерпретировать с точки зрения реальной ситуации, которая была смоделирована в виде сети. О последних событиях см. [7,8].

В общем, сеть может быть представлена как G(N, L), где N представляет собой набор некоторых объектов, представленных узлами N = {1, 2, . . . , n} и L — набор связей, соединяющих различные узлы, представляющие свойства, связанные с парами этих узлов. Эти ссылки обозначаются (i, j), где i и j — узлы 1, 2, . . . , n и i/ = j. В взвешенных сетях мы связываем число с каждым звеном, обеспечивая количественную меру связи между этими двумя узлами. Например, это может быть просто расстояние между двумя узлами или время путешествия между парой узлов i и j.

Этот вес, связанный с ссылкой (i, j), обозначается cij, который может быть положительной или отрицательной величиной, в зависимости от ситуации.

Некоторые идеи, использованные в этой статье, были рассмотрены в разделе 2, а их применения в виде задач коммивояжера и маршрутизации представлены в разделе 3. Задача упорядоченного оптимума обсуждалась в разделе 4. Наконец, заключительные замечания представлены в разделе 5.

2. Модификация классической задачи о кратчайшей связной сети и ее приложения. Кратчайшая

связная сеть (CKC) любой заданной ненаправленной связной сети G(N, L) является классической сетевой задачей. Он состоит из (n 1) каналов, где n представляет количество узлов в данной сети G(N, L). Поскольку данная сеть связна, должен быть уникальный путь от каждого узла к каждому другому узлу, и этот путь не будет иметь петель. В таком связном графе, если какая-либо связь будет удалена, граф станет отключенным. Такой CKC можно получить жадным подходом согласно [9–11]. Модификация задачи о кратчайшем связном графе обсуждалась в [12] и кратко изложена ниже.

2.1. Модификация сети Shortest Connect (SCN)

2.1.1. Заявление об модифицированной кратчайшей связной сети

Для сети G(N, L) CKC можно получить любым известным методом. В SCN можно найти индекс узла для каждого узла. Индекс узла — это количество ссылок, исходящих из этого узла в SCN. Пусть ni представляет индекс узла i, где 1 ni (n 1). В обсуждаемой в [12] модификации, в которой ограничена SCN,

Machine Translated by Google

индекс узла ni удовлетворяет условию 1 ni 2 для каждого узла. Это означает, что если исходная СКС не удовлетворяет ограничению на значение индекса на каком-либо узле, то СКС, полученную с помощью классического подхода, необходимо модифицировать так, чтобы она удовлетворяла условию 1 ni 2, i. В данной сети с ограничением индекса два узла будут иметь значение индекса 1, а другие узлы будут иметь значение индекса 2; таким образом, они образуют путь, соединяющий два узла и проходящий через все остальные оставшиеся узлы сети. Можно предположить, что в данной связной сети все узлы таковы, что от каждого узла исходят не менее двух связ

2.1.2. Некоторые основные термины и теорема для модификации SCN, полученной с помощью жадного подхода к SCN с индексным ограничением (IRSCN)

Необходимые условия следующие: T1.

Индекс узла: поскольку каждая выбранная ссылка генерирует два индекса, общее количество индексов выбранных (n - 1) ссылок, образующих SCN, будет равно 2 (n - 1). Для пути, проходящего через все узлы, два из этих узлов будут иметь только одно значение индекса (от места начала пути до места его окончания), а остальные (n - 2) узлов будут иметь индекс 2. Ограниченный по индексу узел SCN или IRSCN образуют путь, соединяющий два узла, который проходит через все остальные оставшиеся узлы сети.

T2. Базовые и небазовые ссылки: ссылка, соединяющая два узла i и j, называется базовой, если xij = 1, т. е. эта ссылка принадлежит SCN, и если xij/ = 1, то это небазовая ссылка.

T3. Узлы с высоким и низким индексом. После того, как SCN был идентифицирован с помощью любого известного метода, мы знаем значения индексов узлов для всех узлов. Эти значения задаются формулой 1 ni (n 1). Их необходимо изменить так, чтобы удовлетворялось условие 1 ni 2 i, т.е. для исходного и конечного узлов индекс ni = 1, а для всех остальных (n 2) узлов ni = 2. - а узлы с низким индексом можно легко идентифицировать по их текущему значению относительно желаемого значения индекса узла для этого узла.

T4. Соседние узлы и связи. Узел i называется соседним узлом по отношению к узлу j, если узлы i и j соединены одной ссылкой. В полностью связной сети все узлы являются соседними узлами, поскольку все узлы соединены прямой связью. Соседняя ссылка определяется как ссылка, исходящая от соседнего узла.

Теорема 1. Теорема о балансировке индексов: добавление одной и той же константы ко всем ссылкам, исходящим из одного и того же узла, не меняет относительную ценность любой выбранной ссылки в SCN, полученную с помощью жадного подхода. Однако теорема о балансировке индексов может создать альтернативы. Из SCN, полученного жадным подходом, мы знаем индекс каждого узла; следовательно, узлы с низким и высоким индексом могут быть легко идентифицированы. Теорема о балансировке индексов начинает свою работу с добавления констант ко всем ссылкам, исходящим из одного и того же узла, который был классифицирован как узел с высоким индексом. Идея состоит в том, чтобы создать альтернативы для выбора ссылки и, таким образом, уменьшить индекс узла с высоким индексом и увеличить индекс узла с низким индексом; когда ссылка с узла с высоким индексом удаляется и помещается на узел с низким значением индекса, дисбаланс уменьшается . Этот процесс повторяется до тех пор, пока все узлы не достигнут требуемого индекса и не удовлетворят всем ограничен

Теорема 2. Для любого данного решения СКС базовую ссылку можно изменить, добавив константу ко всем исходящим из этого узла ссылкам, т. е. изменив статус ссылки с базового на небазовый, а состояния какой-либо другой ссылки с небазового. от базового к базовому. Повторяющиеся приложения могут генерировать путь SCN, соединяющий два узла, проходящий через все остальные узлы в сети, т. е. он будет удовлетворять условию индексации на каждом узле.

2.1.3. Числовая иллюстрация

Рассмотрим простой, но интересный тривиальный пример: значения cij , приведенные в таблице 1.

Machine Translated by Google

Таблица 1. Полностью связная сеть из 6 узлов с взвешенными ссылками.

я \j	1	2	3	4	5	6
1	-	1	1	1	1	1
2	1	-	2	2	2	2
3	1	2	-	3	3	3
4	1	2	3	-	4	4
5	1	2	3	4	-	5
6	1	2	3	4	5	-

SCN можно получить с помощью жадного подхода, который показан на рисунке 1. Можно начать с любого узла, скажем узла 6, и выбрать ссылку (6,1) в качестве первой ссылки; следующий выбранные ссылки могут иметь вид (1,2), (1,3) и т. д. SCN будет таким, как показано на рисунке 1.

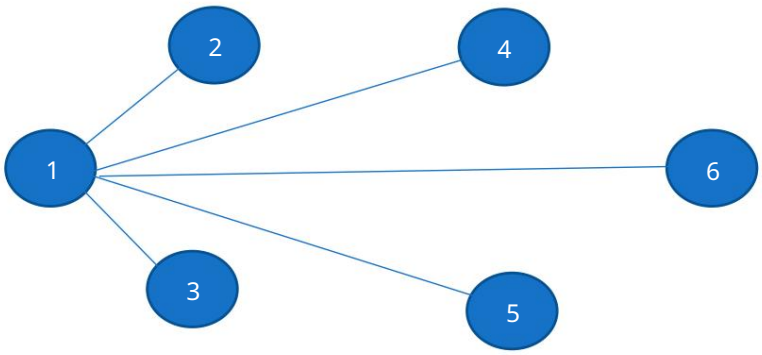


Рисунок 1. Кратчайший связный граф сети из таблицы 1.

Матрица заболеваемости CX Я на рисунке 1 представлена в таблице 2.

Таблица 2. Матрица заболеваемости SCN на рисунке 1.

Узлы	1	2	3	4	5	6
Заболеваемость	5	1	1	1	1	1

Это означает, что если нам нужен путь, скажем, между узлами 5 и 6, узлы 5 и 6 будут сбалансированы с значением индекса узла, равным 1, а все остальные узлы несбалансированы. Узел 1 представляет собой узел с высоким индексом, а узлы 2, 3 и 4 — узлы с низким индексом. В качестве применения теоремы о балансировке индексов добавьте постоянное значение 1 ко всем ссылкам, исходящим от сети с высоким индексом. узел, который является узлом 1; относительные достоинства связей (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) и (1,6) будут остаются неизменными. Однако была разработана альтернатива путем добавления 1 ко всем ссылкам. исходящий из узла 1. Альтернативой является ссылка, начинающаяся с узла 2, вместо ссылки начиная с узла 1. Поэтому ссылку (1,4) можно удалить и заменить ссылкой (2,4). Это изменение возможно, поскольку была создана альтернатива, начинающаяся с узла 2. Обратите внимание, что оно снизит индекс узла с высоким индексом 1 на 1 и увеличит значение индекса узел с низким индексом 2 на 1. Это показано на рисунке 2. Аналогично, если 1 добавляется ко всем ссылки, исходящие из узлов 1 и 2, ссылку (1,5) можно удалить и заменить ссылкой (3,5). Еще одно применение теоремы о балансировке индексов приведет к SCN, как показано. на рисунке 3.

Однако узлы 3 и 4 по-прежнему являются узлами с низким индексом, а узел 1 — узлом с высоким индексом. Другое приложение предоставляет SCN с ограничением по индексу, как показано на рисунке 3.

Machine Translated by Google

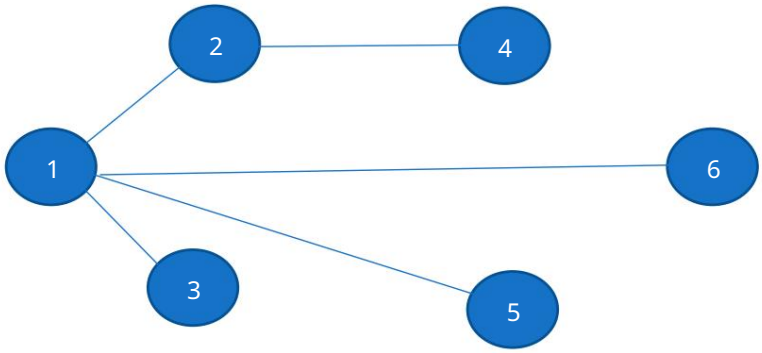


Рисунок 2. Улучшенный SCN.

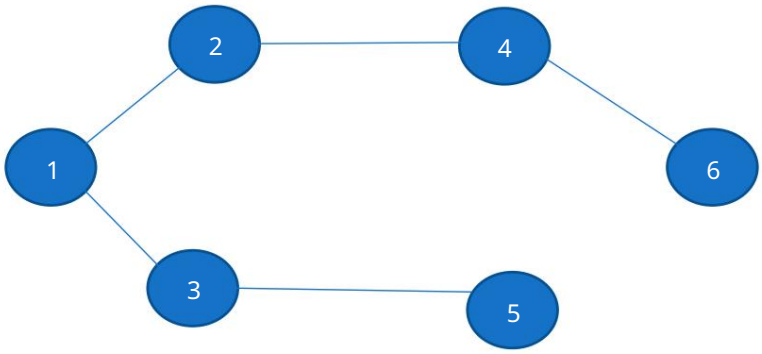


Рисунок 3. SCN сети с ограничением по индексу в таблице 1.

Предположим, что нас интересовал поиск кратчайшего связного графа с ограничением индекса. 2 на всех узлах, кроме начального и конечного узлов, где индекс ограничен значением 1. Общая частота выбранных ССН составит 2(n - 1) = 10, (как (1) в этом примере n = 6. В другими словами, IRSCN будет путем между двумя узлами и пройдет через (n - 2) количество узлов. Подключенная сеть на рисунке 3 является обязательной IRSCN, и ее нельзя быть уникальным.

(2)

(1)

3. SCN с ограниченным индексом и его приложения

(2)

3.1. Задача коммивояжера

Минимальный тур коммивояжера — хорошо известная проблема теории графов. Он занимается определением тура с минимальной стоимостью, проходящего через все узлы и возвращение в родной город. В этой классической задаче о коммивояжере много промышленных задач. приложений, и эта задача была классифицирована как NP Hard; см. [1,13–15]. Другой Решение проблемы: все узлы в теории графов — это кратчайший связный граф, который было получено жадным подходом; см. [11]. В более ранней работе [12] авторы разработал подход для преобразования кратчайшей связной сети (SCN) в кратчайший связный граф с ограничением по индексу, как описано в разделе 2. SCN с ограничением по индексу может быть использован для определения минимального тура коммивояжера. SCN с ограничением по индексу разработан с использованием теоремы о балансировке индексов [12]. Таким образом, возникает вопрос: является ли Проблема с коммивояжером на самом деле Н.П. Трудно? ССН в модифицированной форме использован. найти тур коммивояжера разными способами, [16,17] и, наконец, минимальный остовное дерево при индексном ограничении установлено равным путешествующему тур продавца [18]. Мы кратко объясняем эти подходы в разделах 3.1.1–3.1.3.

ффф

3.1.1. Подход на основе минимального остовного дерева для поиска минимального перемещения Тур продавца (MTST) сети G(N, L): подход 1 (сложность rC2)

Мы предлагаем начать минимальный тур коммивояжера с узла с минимальное значение индекса узла, т. е. узел, из которого происходит минимальное количество ссылок. исходящий. Верно также и то, что каждый узел будет иметь две связи, которые образуют часть

Machine Translated by Google

минимального тура коммивояжера. Если узел минимального индекса обозначается
узел r и значение его индекса равно r, т. е. r связей исходят из r, два из них
ссылки станут частью минимального тура продавца. Мы рассматриваем все такие возможности.
Обозначим эти r звеньев, исходящих из узла r, через pr . Минимальная поездка
Тур продавца можно определить путем оценки числа rC2 кратчайших маршрутов, ограниченных индексом.
связные деревья из модифицированной сети G((N 1),(L pr)). Этот символ указывает
что модифицированная сеть получается после удаления узла r и всех связей, которые
исходящий из узла r. Следовательно, модифицированная сеть будет иметь (N 1) узлов и
количество ссылок будет задано как (L pr). Каждое дерево, ограниченное индексом, становится путешествующим.
тур продавца, когда первые два произвольно выбранных ребра соединяются с тем или иным путем
IRSCN. Требуемый минимальный тур продавца становится туром с минимальной стоимостью.
из этих туров коммивояжера rC2 .

Выше мы предложили начать тур коммивояжера с узла с
минимальное значение индекса узла. Чтобы объяснить этот момент, можно обратиться к сети на рисунке 4.
и обратите внимание, что значение индекса узла 1 равно 3; узлы 2, 3 и 4 имеют значение индекса 5; и
аноды 5 и 6 имеют значение индекса 4. Эти значения индекса представляют собой количество излучаемых
ссылки с этого узла. Чтобы минимизировать вычислительную работу, мы можем предпочесть запустить
тур продавца с узла 1, где потребуется всего 3с2 оценок; более
потребовалось бы, если бы мы начали с любого другого узла.

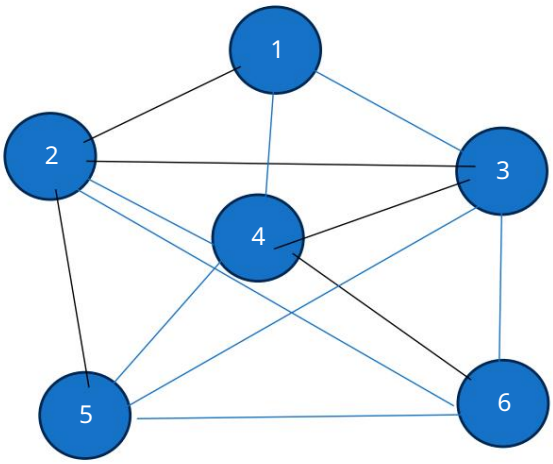


Рис унок 4. Дана сеть G(6, 13) .

Этот подход обсуждался в [17].

3.1.2. Подход на основе минимального остовного дерева для поиска минимального перемещения
Тур продавца (MTST) G(N, L): Подход 2 (Сложность пр)

Как обсуждалось выше, мы можем еще раз использовать кратчайшую связность с ограничением по индексу.
график, чтобы найти минимальный тур коммивояжера. Рассмотрим немного другую
ция данной сети. На этот раз мы рассмотрим модификацию и обозначим эту модифицированную
сеть посредством G(N,(L 1)). Это означает, что количество узлов не меняется, а только
одно звено, соединяющее узел r с каким-либо другим узлом, скажем, с узлом q, было удалено. Позволять
обозначим {(p, q1), (p, q2), . . ., (p, qr)}. В этом подходе предлагается
найти r количество кратчайших связных деревьев, соединяющих узлы (p, q 1), (p, q 2), (p, q p), после
удаление только одной ссылки за раз. Например, удалим ссылку (p, q 1) и найди
IRSCN, соединяющая узлы r и q1. После перехода по ссылке (p, q 1), ограниченный индексом
путь станет туром коммивояжера. Аналогичным образом мы находим кратчайшее с ограничением по индексу
связные сети, соединяющие узлы r и qr , r = 1, 2, . . ., p. После присоединения ссылка (p, qr)
и минимальный кратчайший связный граф, он образует тур продавца и минимальный
из этих r туров будет требуемый минимальный тур коммивояжера. Таким образом, сложность сводится
к r кратчайших связных деревьев, ограниченных по индексу, по сравнению со сложностью
rC2 , как это было в предыдущем подходе.

Machine Translated by Google

Этот подход обсуждался в [16].

3.1.3. Подход на основе минимального остовного дерева для установления того, что минимальный тур продавца эквивалентен минимальному остовному дереву, ограниченному индексом: подход 3 (сложность 1)

Еще раз пусть выбранный узел будет r. Данную сеть G(N, L) можно модифицировать, а добавление узла r', ссылки, исходящие из узла r, также добавляются как ссылки, из узла r' исходящие; данная сеть преобразуется в G{(N + 1),(L + pr)}. Это должно быть отметило, что на этот раз вместо удаления некоторых узлов или связей мы добавляем узел r и все ссылки, исходящие из этого узла, в модифицированную сеть. Для сохранения различия выбранного узла, его дубликата, а также связей, исходящих из дублирующего узла, мы использовали обозначения r и r' были продублированы, их использование возможно только один раз по мере r'. Поскольку узел r и все исходящие из него связи существования дубликата. ссылки виртуальные. Узел r нар, мы говорим об одном узле r, который является реальным. Далее мы объ такими, как r' образующий одно, хотим мы виртуальными объектами, т. е. с узлом r. Поскольку узлы r и r

' и связанные виртуальные каналы от узла r по r'.

' существу одинаковы, путь с ограниченным индексом от узла r будет Если r' образовывать тур продавца. Таким образом, в данном случае, с помощью некоторого творческого подумать об узле r, мы обнаружим, что кратчайшее связное дерево с ограничением по индексу, подхода и соединяющее узлы r и r, дает нам необходимый минимальный тур продавца.

В приведенной выше модификации данной сети обычный жадный подход не применим напрямую для поиска минимального остовного дерева. Количество дополнительных ссылок не соответствует части добавленного к r' действительности; только один из них существует, если выбран в качестве узлу r минимального остовного дерева, а другое звено должно исчезнуть. Это значит, что как только одно из этих звеньев станет основным, другое должно исчезнуть. Другими словами, если связь r, qj является базовой, r', то ссылка r, будет иметь бесконечную длину. Аналогично, если дублирующая ссылка является базовой, исходная ссылка изменяется на бесконечное значение. Однако, если эти ссылки неосновные, они могут сосуществовать как неосновные ссылки, поскольку они не имеют значимого существования в туре коммивояжера.

Модифицированная сеть и шаги для получения минимального остовного дерева G {(N + 1), (L + pr)}

Шаг 1: Для данной сети G(N, L) разработайте сеть G{(N + 1),(L + pr)} и расположите ссылки в порядке возрастания. Изначально все ссылки небазовые, поэтому все повторяющиеся ссылки будут такими же, как в G(N, L) . Ссылки, которые были продублированы, называются ссылками типа 2, а те, которые не дублировались, называются ссылками типа 1. Число связей типа 1 равно (L pr) , а типа 2 — 2 pr . Ссылки типа 2 таковы, что по крайней мере две ссылки изначально имеют одинаковое значение длины.

Шаг 2: Установите счетчик K = 1. Выберите ссылку минимальной длины, включите ее в минимальное связующее дерево и перейдите к шагу 3.

Шаг 3. Если выбранная ссылка имеет тип 1 и K < n, установите K = K + 1 и выберите следующую минимальную длину. Если K = n, перейдите к шагу 7.

Шаг 4: Если выбранное ребро было типа 2 и K < n, сначала установите длину дублирующейся ссылки равной , а затем переставьте длины в порядке возрастания . Установите K = K + 1 и выберите следующий минимум. Если K = n, перейдите к шагу 7.

Шаг 5: Если выбранная ссылка образует цикл с сформированным на данный момент связующим деревом, отбросьте ее или включите. Если последняя ссылка была типа 1, вернитесь к шагу 3. Если выбранная ссылка была типа 2, перейдите к шагу 6.

Шаг 6: Для выбранного края проверьте следующее:

6.1: Если включение ребра не приводит к изолированному узлу в сети, отбросьте его.

6.2: Если существуют альтернативы, выбирайте ребро, которое обеспечивает лучший баланс между индексами узлов, образующих минимальное связующее дерево.

Вернитесь к шагу 4, поскольку выбранная ссылка имеет тип 2.

Machine Translated by Google

Шаг 7: Остановитесь, поскольку минимальное связующее дерево получено.

Числовая иллюстрация

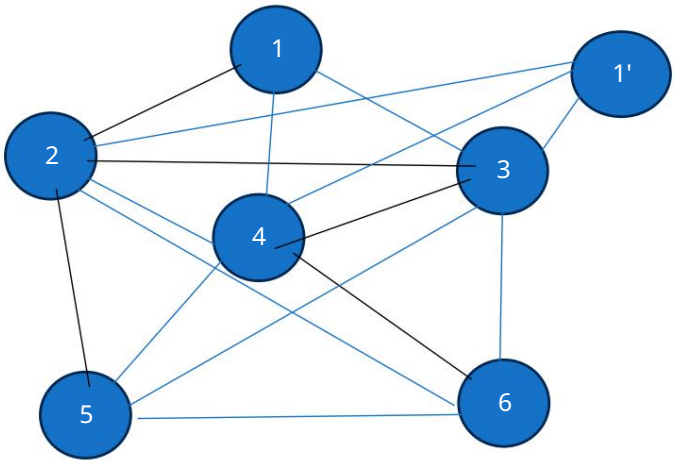
Рассмотрим следующую сеть G(6, 13), показанную на рисунке 4, веса каналов заданы. в таблице 3.

(6,13)

Таблица 3. Расстояния каналов для сети на рисунке 4.

Ф\Т	1	2	3	4	5	6
1	-	12	10	10	-	-
2	12	-	15	11	11	16
3	10	15	-	7	14	12
4	10	11	7	-	10	11
5	-	11	14	10	-	9
6	-	16	12	11	9	-

Теперь рассмотрим модифицированную сеть, которая будет G((6 + 1), (13 + 3)) или G(7, 16) как показано на рисунке 5, где узел 1 продублирован как 1'.



(7,16)

Рисунок 5. Модифицированная сеть G(7, 16).

Ссылки типа 1: (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5).), (4,6) и (5,6).

Ссылки типа 2 — это (1,2), (1,3), (1,4), (1',2), (1',3) и (1',4).

Располагая звенья в порядке возрастания, имеем 7 (3,4)T1, 9(5,6)T1, 10(4,5)T1, 10(1,3)T2, 10(1,4)T2, 10(1',3)T2, 10(1',4)T2, 11(2,4)T1, 11(2,5)T1, 11(4,6)T1, 11(4,6)T1, 12 (3,6)T1, 12(1,2)T2, 12(1',2)T2, 15 (2,3)T1 и 16(2,6)T1.

Определение MST: Звено 7(3,4) T1 включено, звено 9(5,6) T1 включено, 10(4,5) T1 включительно, 10(1,3) T2 включительно; однако теперь ссылка (1',3) изменена на бесконечность, поэтому список порядка возрастания изменяется, как указано ниже:

10(1,4) T2, 10(1',4) T2, 11(2,4) T1, 11(2,5) T1, 11(4,6) T1, 11(4,6) T1, 12 (3,6) T1, 12(1,2) T2, 12(1',2) T2, 15 (2,3) T1 и 16(2,6) T1, (1',3) T2.

Обратите внимание, что жадный подход идентифицирует следующую ссылку (1,4) длины 10, но это делает цепь, и если мы выберем (1',4), это также образует цепь 1-3-4-1', поскольку узлы 1 и 1' одинаковый. Это также исключено. Следующее звено (2,4) исключается, а звено (2,5) включается. Ссылка (4,6) исключена. Наконец, у нас есть рисунок 6.

Machine Translated by Google

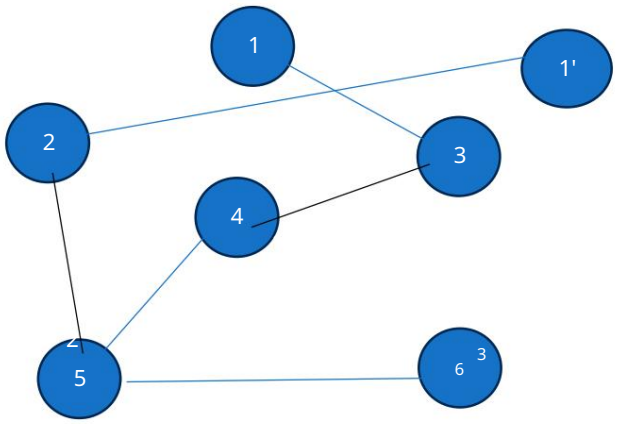


Рисунок 6. Охватывающее дерево жадным подходом.

Глядя на рисунок 6, мы обнаруживаем, что узлы 5 и 6 несбалансированы, так как индекс узла в узел 5 равен 3, а индекс узла в узле 6 равен 1. Если 1 добавляется ко всем узлам, исходящим из узел 5, вес, связанный с ссылкой (4,5), станет равным весу ссылки (4,6); следовательно, это приведет к альтернативе. Это создает возможность удаления ссылки (4,5) и заменив его связью (4,6). Это показано на рисунке 7.

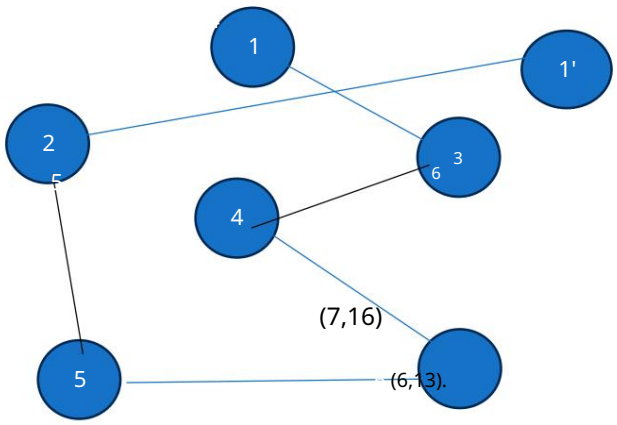


Рисунок 7. Путь 1 -> 3 -> 4 -> 6 -> 5 -> 2 -> 1'.

(7,16)

Этот путь в сети G(7, 16) имеет интерпретацию ограниченного по индексу минимума связующее дерево, соединяющее узлы 1 и 1' при ограничении индекса узла и туре продавца интерпретация для сети G(6, 13). Она представлена на рисунке 8. Стоимость данного тура составит 12(1,2) + 11(2,5) +9(5,6) + 11(6,4) + 7(4,3) + 10((3,1) = 60 (1->2 - > 5 -> 6 -> 4 -> 3 -> 1).

(6,13)

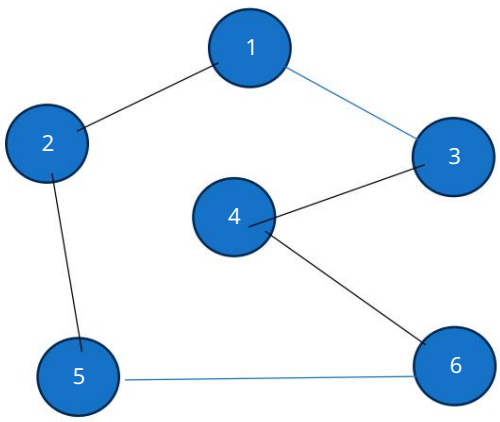


Рисунок 8. Связующее дерево и минимальный тур коммивояжера.

Machine Translated by Google

3.2. Кратчайший путь в ненаправленной сети при условии прохождения через K заданных

узлов Калаба [19] предложил задачу маршрутизации с ограничениями, которая находит путь от исходного узла до узла назначения, проходящий через K заданных узлов. С использованием техники динамического программирования эта задача была предпринята в [20]. Когда указанный набор пуст, задача сводится к обычной задаче маршрутизации, а когда набор указанных узлов содержит все узлы и возвращается к узлу, с которого мы начали, это становится задачей обхода продавца. Ввиду комбинаторного характера задачи ее решение методом динамического программирования затруднительно; однако, когда эта проблема решается с использованием кратчайшего связующего дерева при ограничении индекса узла, вычислительная нагрузка становится управляемой. Все узлы включены в SCN, и комбинаторный аспект, который делает задачу вычислительно сложной для подхода динамического программирования, изменяется. Для указанных узлов мы просто применяем ограничение индекса, гарантируя, что указанный узел посещается по маршруту. Это достигается путем введения ограничения индекса, равного 2 или более, и проверки
См., например, [21], где авторы рассматривали промышленное применение сервисных вызовов, а задача была сформулирована в математической форме как путь через K заданных ссылок.

Все эти проблемы маршрутизации, когда путь ограничен прохождением через набор заданных узлов или ссылок, требуют больших вычислительных ресурсов, но когда эти проблемы решаются как SCN с ограниченным индексом, вычислительная сложность снижается. Фактически, легко найти SCN с ограничением по индексу при любых условиях, например

$$1 \quad ni \quad ki, \text{ где } ki \text{ — заданное число в диапазоне } 1 \quad ki \quad (n \quad 1).$$

4. Упорядоченный оптимум

Лучшее решение $K^{й}$ $(K \quad 2)$ в общем случае является упорядоченной задачей оптимизации. Наилучшее $(K \quad 2)$ определяется как лучшее решение после исключения $(K \quad 1)$ упорядоченных оптимальных решений. Не существует четко определенной теории определения упорядоченных оптимальных решений задач оптимизации, за исключением работы [22], где авторы разработали характеристическое уравнение, определяющее упорядоченные оптимальные решения для чистолинейной задачи целочисленного программирования. Здесь мы рассмотрим математику задач ИЛИ, чтобы найти второе лучшее решение, используя концепцию альтернативного оптимального решения. В прошлом было предложено множество предложений, но они могут потребовать больших вычислительных ресурсов. Эти проблемы возникают в различных ситуациях реальной жизни, и в целом лучшее или оптимальное решение можно определить, поскольку все существующие методы определили условия оптимальности решения, и когда эти условия удовлетворяются, можно легко заключить, что оптимальное решение ^{й} решение получено. Однако, не определен; скорее, $K^{й}$ оптимальное определяется как лучшее, за исключением того, что существование условий оптимальности для $K^{й}$ лучшее решение возникает во многих различных наилучших решениях, $K \quad 2 \ (K \quad 1)$ числа лучших ^{й} решений. Необходимость в ситуациях K (см. пример в [2]), где $K^{й}$ best требуется для линейной программы для анализа задачи математического программирования экстремальной точки. лучшее решение требуется по разным причинам в разных ситуациях. В этом разделе мы подходим к проблеме упорядоченного оптимума, которая может потребовать вычислительных затрат, опять же, путем разработки альтернативного решения и использования этого решения для определения второго лучшего решения. Для иллюстрации определения второго лучшего решения были использованы две задачи: (1) второй по кратчайшему маршруту для задачи о кратчайшем маршруте и (2) задача о назначениях. Для задачи о назначениях Мерти [3] предложил метод ранжирования всех назначений в порядке возрастания стоимости. В задаче о назначениях nXn Мерти [3] получил второе лучшее решение, решив n задач о назначениях, назначая высокую стоимость одному из оптимальных назначений за раз, и лучшим из всех этих n решений было второе лучшее решение для этой проблемы. Его идея состоит в том, что второй лучший будет отличаться от лучшего хотя бы в одно

В этой статье идея состоит в том, чтобы увеличить длину текущего оптимального решения на определенную величину, чтобы установить два или более альтернативных оптимальных решения. Один из этих

Machine Translated by Google

фф

Альтернативные решения – это существующее оптимальное решение, а другое – вновь созданное.
альтернативное оптимальное решение. Поскольку значение оптимального решения увеличивается с
контролируемым образом, эти два альтернативных оптимальных решения имеют интересную интерпретацию.
лучших и 2-х лучших решений по отношению к их одной информации о стоимости. Мы
проиллюстрируйте эту идею, взяв в задачу о кратчайшем маршруте в сети и задание
Задача найти лучшее и второе лучшее решение.

4.1. Второй лучший маршрут для решения задачи традиционной маршрутизации в направленной сети
Численная иллюстрация для поиска второго лучшего кратчайшего маршрута

Давайте применим идею разработки альтернативных решений к сетевой маршрутизации.
проблема, рассмотренная на рисунке 9, которая была преобразована в рисунок 10 для поиска оптимального
решения .

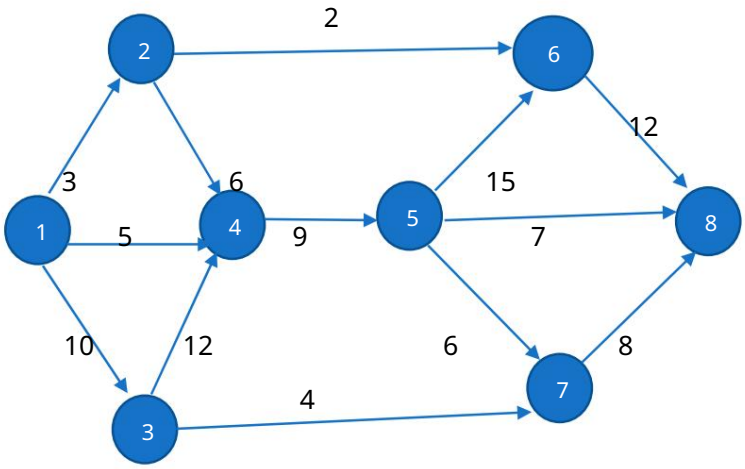


Рисунок 9. Направленная сеть.

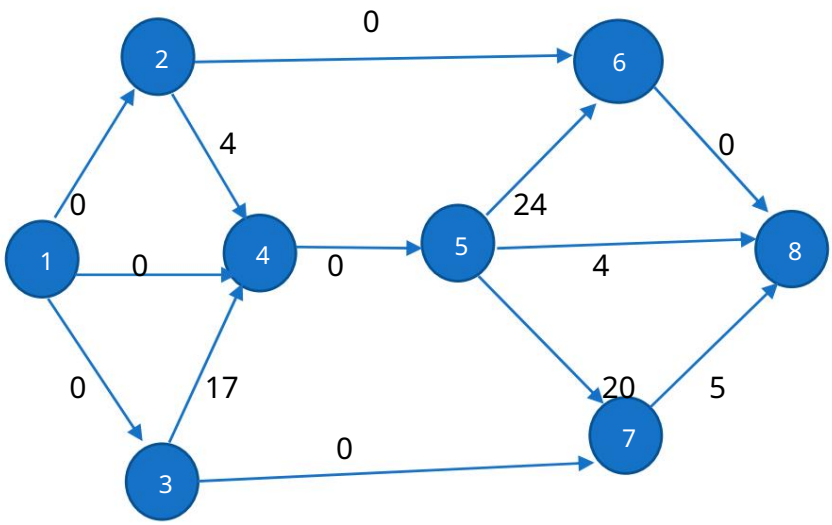


Рисунок 10. Окончательно реконструированная сеть после 7 итераций.

Оптимальное решение для сети на рисунке 9 было определено как 17 единиц, а
путь был 1 -> 2 -> 6 -> 8.

Мы используем подход разметки минимального веса, разработанный в [23]. Преобразованный
Сеть после семи итераций метода меток с минимальным весом показана на рисунке 10.

Этикетки, созданные при применении подхода маркировки минимального веса,
обобщены в таблице 4.

Machine Translated by Google

Таблица 4. Этикетки, полученные методом этикетки минимального веса.

Узел	1	2	3	4	5	6	7	8
Этикетка	(1,0)	(1,3)	(1,10)	(1,5)	(4,14)	(2,5)	(3,14)	(6,17)

Мы приходим в узел 8 из узла 6, приходим в узел 6 из узла 2 и приходим в узел 2. от узла 1, в результате чего оптимальный путь равен 1 -> 2 -> 6 -> 8, а минимальная стоимость мне 17.

Минимальная ненулевая стоимость равна 4 на рисунке 10 для двух ссылок. Изменение веса связанный с ссылкой (2,4) не генерирует второй путь, а меняет вес связанный с ссылкой (5,8), создаст второй путь. Мы можем создать две альтернативы пути при увеличении ссылки (6,8) на 4 единицы. Когда проблема снова будет решена, мы есть два пути, которые дают лучший и второй лучший.

Лучший путь, как было указано выше, имеет стоимость 17, а маршрут — 1 к 2, к 6 к 8.

Второй лучший путь будет иметь стоимость 21, а маршрут будет от 1 до 4, от 5 до 8.

Увеличение веса звена (2,6) или (6,8) на 4 единицы приведет к появлению двух альтернативных вариантов. решения .

Основная идея состоит в том, чтобы увеличить длину текущего оптимального решения на 4 единицы, и если мы можем установить два альтернативных оптимальных пути общей длиной 21 единицу после увеличения длина текущего оптимального пути на 4 единицы, предыдущий путь оптимален, а другой — это новый путь, длина которого равна 21. Предыдущий путь будет лучшим решением и другой путь будет вторым лучшим решением. Следовательно, из этих двух альтернативных путей, мы находим оптимальные и вторые лучшие решения задачи о кратчайшем маршруте.

Эту идею можно легко распространить на ненаправленную сеть, используя разметку подход, обсуждавшийся в [24].

4.2. Численная иллюстрация второго лучшего решения задачи о назначениях

Мы вновь рассмотрим проблему назначения , рассмотренную Мёрти [3]. Задание задача представлена в таблице 5.

Таблица 5. Значения стоимости задания для иллюстрации Мурти.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9 В 1	10
1	7	51	52	87	38	60	74	66	0	20
2	50	12	0	64	8	53	0	46	76	42
3	27	77	0	18	22	48	44	13	0	57
4	62	0	3	8	5	6	14	0	26	39
5	0	97	0	5	13	0	41	31	62	48
6	79	68	0	0	15	12	17	47	35	43
7	76	99	48	27	34	0	0	0	28	0
8	0	20	9	27	46	15	84	19	3	24
9	56	10	45	39	0	93	67	79	19	24
10	27	0	39	53	46	24	69	46	23	1

и обозначают одну горизонтальную и одну вертикальную линию.

Оптимальное решение с общей стоимостью 0 дается следующими заданиями, которые обозначается буквой A (1), приведенной ниже:

$$A(1) = \{(1,9), (2,7), (3,3), (4,8), (5,6), (6,4), (7,10), (8,1), (9,5), (10,2)\}.$$

Эти распределения в Таблице 5 показаны красным цветом. Вертикальные линии рисуются , чтобы покрыть нуль. записи в столбцах 9, 3, 4, 1, 5, 2 и 7. Строки закрываются тремя горизонтальными линиями 4, 5 и

Machine Translated by Google

7. Для второго лучшего задания Мурти решил 9 задач, ставя по одному заданию из оптимального решения за время , равное . Например, если установить связь (1,9) = , задачу можно решить снова. Аналогичным образом Мёрти решил 9 задач о назначения х , которые были резюмированы Мёрти в [3] следующим образом:

$$M1 = \{\overline{(1, 9)}\} = 10,$$
$$M2 = \{(1, 9), \overline{(2, 7)}\} = 14$$

M3 = {(1, 9), (2, 7), (3, 3)} = Стоимость 14

M4 = {(1, 9), (2, 7), (3, 3), (4, 8)} = Стоимость 1

M5 = {(1, 9), (2, 7), (3, 3), (4, 8), (5, 6)} = Стоимость 12

M6 = {(1, 9), (2, 7), (3, 3), (4, 8), (5, 6), (6, 4)} = Стоимость 53

M7 = {(1, 9), (2, 7), (3, 3), (4, 8), (5, 6), (6, 4), (7, 10)} = Стоимость 45

M8 = {(1, 9), (2, 7), (3, 3), (4, 8), (5, 6), (6, 4), (7, 10), (8, 1) } = Стоимость 47

M9 = {(1, 9), (2, 7), (3, 3), (4, 8), (5, 6), (6, 4), (7, 10), (8, 1) (9, 5)} = Стоимость 56

Из вышесказанного он пришел к выводу, что второе лучшее решение соответствует строке M4. Эта строка присвоений задается

A(2) = {(1,9), (2,7), (3,3), (4,2), (5,6), (6,4), (7,8), (8 ,1), (9,5), (10,10)} с общей стоимостью 1.

Теперь мы применим концепцию создания альтернативы. Из таблицы 5 минимальный ненулевой элемент равен 1 в ячейке (10,10). В столбце 10 и строке 10 мы имеем распределение оптимального решения , обозначенное строкой A (1). Эти распределения находятся в ячейках (7,10) и (10,2). Чтобы создать альтернативу, стоимость, связанная с элементом (7,10), увеличивается на одну единицу или стоимость, связанная с элементом (10,2), увеличивается на одну единицу. Следовательно, либо столбец 10, либо строка 10 будут без нулевого числа, и вычитая минимум, мы создадим два нулевых элемента в ячейках (10,2) и (10,10) в строке 10, что приведет к двум нулевым элементам. альтернативные решения . Аналогичный случай возникнет и при увеличении стоимости в ячейке
Два альтернативных оптимальных решения приведут к лучшему и второму лучшему решению.

Первое решение: {(1,9), (2,7), (3,3), (4,2), (5,6), (6,4), (7,8), (8,1), (9.5), (10,10)}.

Второе решение: {(1,9), (2,7), (3,3), (4,8), (5,6), (6,4), (7,10), (8,1), (9,5), (10,2)}.

По данным таблицы 5 первое решение является вторым лучшим по общей стоимости из 1. Второе решение является оптимальным решением с общей стоимостью 0, полученным в [3].

Остаётся задача найти K. Лучше всего, когда K > 2.

5. Заключительные

замечания В этой статье мы рассмотрели несколько задач комбинаторной сетевой оптимизации, которые были преобразованы в форму, ставшую вычислительно управляемой. Центральная идея этих преобразований — разработка альтернативы, и, используя эту альтернативу, мы получили желаемое решение. В данной статье рассматриваются следующие проблемы : (1) Задача коммивояжера; (2) Путь через K заданных узлов; (3)

Упорядоченное оптимальное решение, т. е. второе
лучшее решение для кратчайшего маршрута и
задачи назначения .

Все подходы используют альтернативное решение, которое создается в каждой ситуации по-разному и используется для снижения вычислительной нагрузки. Комбинаторный аспект коммивояжера и пути через указанные узлы был сведен к управляемой форме благодаря разработке минимального остовного дерева, ограниченного индексом.

Второе лучшее решение для кратчайшего маршрута и задачи назначения было получено путем увеличения оптимального решения до контролируемой и стратегической позиции для получения двух оптимальных решений, одно из которых было оптимальным, а другое — вторым лучшим решением.

Наш подход также поднял несколько вопросов, которые заслуживают дальнейшего изучения .

1. Действительно ли задача о минимальном туре коммивояжера NP Hard?
2. Является ли проблема ограниченной маршрутизации сложной с точки зрения вычислений?

Machine Translated by Google

3. Упорядоченная оптимизация требует дальнейшего исследования, чтобы найти $K^{й}$ лучше всего, когда K 3 для двух случаев, обсуждаемых в этой статье, и для других ситуаций.

Эта статья была ограничена некоторыми классическими проблемами из-за длительного сотрудничества авторов с ними; однако было бы желательно исследовать применение этих идей к задачам маршрутизации, рассмотренным в [25–27].

Подходы, рассмотренные в этой статье, требуют дальнейшего исследования, чтобы установить вычислительную эффективность различных ситуаций, обсуждаемых в этой статье. Это находится в стадии расследования и будет сообщено, когда будет готово.

Вклад автора: концептуализация, SK и EM; Программное обеспечение, СК и ЭМ; Формальный анализ, ЭМ; Расследование, СК; Курирование данных, EM; Написание — первоначальный вариант, С.К. и Э.М. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: оригинальные материалы, представленные в исследовании, включены в статью.

Благодарности: Авторы выражают искреннюю благодарность всем анонимным рецензентам за конструктивные предложения и комментарии.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Ссылки

1. Немхаузер Г.; Уолси, Л. А. Целочисленная и комбинаторная оптимизация; John Wiley & Sons: Хобокен, Нью-Джерси, США, 1988 г. [CrossRef]
2. Кумар, С.; Вагнер, Д. Некоторые алгоритмы решения задачи математического программирования крайних точек. Новая Зеландия Опер. Рез. Дж. 1979, 7, 128–149.
3. Мурти, К.Г. Алгоритм ранжирования всех заданий в порядке возрастания стоимости. Опер. Рез. 1968, 16, 682–687. [Перекрестная ссылка]
4. Беллман Р.; Дрейфус, С. Прикладное динамическое программирование; Издательство Принстонского университета: Принстон, Нью-Джерси, США, 1962.
5. Гастинг с, Нью-Джерси Динамическое программирование с помощью приложений управления; ИЛИ Серия; Американское математическое общество: Баттерворт, Малайзия; Лондон, Великобритания, 1973 год.
6. Саксена, Дж. П. Динамическое программирование; Публикации Сиддарта: Дели, Индия, 2006 г.
7. Голден, Б.; Рагхаван, С.; Василь, Э. Проблема выбора маршрута транспортных средств: последние достижения и новые проблемы; Спрингер Наука+Бизнес СМИ: Берлин/Гейдельберг, Германия, 2008 г.; ISBN 978-0-087-77777-1. [Перекрестная ссылка]
8. Маррекчи, Э.; Бесбес, В.; Дуиб, Д.; Демир, Э. Обзор последних достижений в литературе по исследованию операций по проблемам зеленой маршрутизации и ее вариациям. Энн. Опер. Рез. 2021, 304, 529–574. [Перекрестная ссылка]
9. Анупам, Г. Детерминистический MST, Расширенные алгоритмы, CMU. Доступно онлайн: http://www.cs.cmu.edu/~anupamg/advalgos15/lection/lection01.pdf (по состоянию на 1 апреля 2024 г.).
10. Краскал Дж. Б. Ократчайшем остовном поддереве графа и задаче коммивояжера. Учеб. Являюсь. Математика. Соц. 1956, 7, 48–50. [Перекрестная ссылка]
11. Прим Р. Кратчайшая связная сеть и некоторые обобщения. Белл Сист. Тех. Дж. 1957, 36, 1389–1401.
12. Мунапо, Э.; Кумар, С.; Лесаоана, М.; Ньямугуре, П. Минимальное остовное дерево с индексом <= 2. Аустр. Соц. Опер. Рез. Бык. 2016, 34, 1–14.
13. Хоффман, К.Л.; Педберг, М.; Ринальди, Дж. Проблема коммивояжера; Издательство Kluer Academic: Амстердам, The Nertherземли, 2001. [CrossRef]
14. Корте, Б.; Виген, Дж. Комбинаторная оптимизация: теория и приложения; Глава 21; Springer: Берлин/Гейдельберг, Германия, 2006 г.; стр. 501–535.
15. Лапорт Г. Задача коммивояжера: обзор точных и приближенных алгоритмов. Евро. Дж. Опер. Рез. 1992, 59, 231–247. [Перекрестная ссылка]
16. Кумар, С.; Мунапо, Э.; Лесаоана, М.; Ньямугуре, П. Действительно ли задача коммивояжера NP сложна? Глава 3 «Техника и технологии: последние инновации и исследования»; Матани, А., Ред.; Международный исследовательский издательский дом: Дели, Индия, 2017 г.; стр. 37–58, ISBN 978-93-86138-06-4.
17. Кумар, С.; Мунапо, Э.; Лесаоана, М.; Ньямугуре, П. Подход на основе минимального связующего дерева к задаче коммивояжера. Опсерч 2018, 55, 150–164.

Machine Translated by Google

18. Кумар, С.; Мунапо, Э.; Сигуаке, К.; Аль-Рабиа, М. Минимальное остовное дерево с индексом узла <= 2 эквивалентно минимальному туру коммивояжера. Математика в инженерных науках: новые теории, технологии и приложения; Глава 8; Серия «Математическая инженерия, производство и менеджмент»; Рам, М., Ред.; CRC Press: Бока-Ратон, Флорида, США, 2020. Доступно онлайн: https://www.crcpress.com/Mathematical-Engineering-Manufacturing-and-Management-Sciences/книжная серия/CRCMEMMS (по состоянию на 1 апреля 2024 г.).

19. Калаба Р. О некоторых коммуникационных комбинаторных сетевых анализах. Учеб. Симп. Прил. Математика. 1960, 10. [CrossRef]
20. Саксена, Дж. П.; Кумар, С. Проблема маршрутизации с Куказанными узлами. Опер. Рез. 1966, 14, 909–913. [Перекрестная ссылка]
21. Кумар, С.; Мунапо, Э.; Нья муре, П.; Таванда, Т. Путь через Куказанных ссылок: эвристика с использованием минимального охвата древесный подход. Граф. Эра Унив. Дж. 2023, 11, 221–238.
22. Кумар, С.; Мунапо, Э.; Джонс, Британская Колумбия. Целочисленное уравнение контролирует нисходящий путь к чистоцелочисленной программе. Индийская Дж. Математика. 2007, 49, 211–237.
23. Мунапо, Э.; Джонс, Британская Колумбия; Кумар, С. Метод этикетки с минимальным весом и его применение в сети CPM. ОРИОН С. Афр. Дж. Опер. Рез. 2008, 24, 37–48. [Перекрестная ссылка]
24. Кумар, С.; Мунапо, Э.; Нкубе, О.; Сигауке, К. Метод маркировки минимального веса для определения кратчайшего пути в ненаправленная сеть. Межд. Дж. Сист. Ассур. англ. Менеджер. 2013, 4, 13–18.
25. Карими-Манагам, М.; Мохаммади, М.; Мейер, АМ; Карими-Манхам, Э.; Талби, Г. Машинное обучение на службе метаэвристики для решения задач комбинаторной оптимизации: современное состояние. Евро. Дж. Опер. Рез. 2022, 296, 393–422. [Перекрестная ссылка]
26. Лабиди, Х.; Аззуна, Н.; Хассин, К.; Гудир, М.С. Улучшенный генетический алгоритм для решения многокритериальной маршрутизации транспортных средств проблема с экологическими соображениями. Процессия Компьютер. наук. 2023, 225, 3866–3875. [Перекрестная ссылка]
27. Сабиня н, РС; Кумар, В.; Рави, Г.; Пудасаини, А. Приложение для распределения нагрузки в грузовиках. Межд. Дж. Недавние технологии. англ. (ИДЖРТЭ) 2019, 8, 3203–3207. [Перекрестная ссылка]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Механика, лежащая в основе недетерминированных вычислений в корковых нейронных сетях

Элизабет А. Столл

Западный институт перспективных исследований, Денвер, Колорадо 80202, США; stoll@westerninstitute.org

Аннотация: Кортикальные нейроны интегрируют восходящие сигналы и случайный электрический шум для получения результатов сигнализации, что приводит к статистически случайным моделям активности. Однако классически нейрон моделируется как двоичная вычислительная единица, кодирующая энтропию Шеннона. Здесь мембранный потенциал нейрона моделируется как функция вероятностного поведения ионов. В этой новой модели каждый нейрон вычисляет вероятность перехода из выключенного состояния во включенное, тем самым кодируя энтропию фон Неймана. Чистые состояния компонентов интегрируются в физическое количество информации, а производная этого многомерного распределения вероятностей дает собственные значения во всей многомасштабной квантовой системе. В соответствии с теоремой Хеллмана-Фейнмана разрешение состояния системы сочетается со сопутствующим сдвигом в распределении заряда, поэтому это определенное состояние системы мгновенно становится прошлым, когда появляется новое распределение вероятностей. Эта механистическая модель дает проверяемые предсказания относительно длины волны свободной энергии, высвобождаемой при сжатии информации, и временной связи этих событий с физиологическими последствиями. В целом, эта модель демонстрирует, как кортикальные нейроны могут достигать недетерминированных результатов передачи сигналов посредством вычислительного процесса обнаружения шумных совпа

Ключевые слова: кортикальный нейрон; нейронные вычисления; термодинамические расчеты; вероятностное кодирование; квантовые системы с двумя состояниями; квантовая информация; энтропия фон Неймана

check for updates

Цитирование: Столл, Э.А. Механика Основа недетерминированных вычислений в корковых нейронных сетях. Прикладная математика 2024, 4, 806–827. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030043

Академические редакторы: Томас Вулли и Гейдж Ван

Поступила: 25 ноября 2023 г.
Пересмотрено: 25 мая 2024 г.
Принята: 30 мая 2024 г.
Опубликована: 26 июня 2024 г.

Копирайт: © 2024 автора. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условиях Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Кортикальные нейроны имеют крайне непредсказуемые результаты передачи сигналов [1], в отличие от спинальных нейронов, результаты передачи сигналов которых легко предсказать путем анализа восходящих входных сигналов [2]. Кортикальные нейроны позволяют случайному электрическому шуму контролировать результаты передачи сигналов, при этом спонтанные подпороговые колебания мембранного потенциала значительно повышают вероятность возникновения потенциала действия [3,4]. Действительно, эти клетки активно поддерживают «активное корковое состояние», колебляясь вблизи порога потенциала действия и позволяя случайным событиям управлять результатами передачи сигналов [5]. Этот процесс обнаружения зашумленных совпадений приводит к вероятностным схемам срабатывания, которые можно смоделировать с помощью байесовской статистики [6], моделей случайной связности [7], фанофакторного анализа изменчивости между спайками [8] или путем модификации уравнений Ходжкина-Хаксли для учитывать электрический шум [9–11]. Примечательно, что наиболее надежные модели корковых нейронов состоят из стохастических дифференциальных уравнений, которые обеспечивают аналоговый мембранный потенциал, основанный на вероятности открытия ионных каналов, и приводят к пиковому поведению при пороговой активации [12]. Этот метод моделирует «шум» в синапсе как процесс Орнштейна-Уленбека [13] или путем применения уравнений Фоккера-План

Учитывая успех этих по своей сути вероятностных вычислительных моделей, стоит пересмотреть вопрос о том, следует ли моделировать переходы состояний в корковых нейронах на основе классических предположений. Действительно, случайное движение всего лишь нескольких ионов может подтолкнуть кортикальный нейрон к превышению порога потенциала действия [15,16], интервалы между спайками на уровне единичных единиц статистически случайны [3,4], а популяционное кодирование на уровне нейронной сети является статистически случайным [6–8]. События квантового масштаба существенно влияют на макромасштабные результаты на уровне вычислительной единицы [9–11], а вероятностные модели эффективно воспроизводят активность кортикальных нейронных сетей [12–14]. Кроме того, классические подходы не могут объяс

Machine Translated by Google

необычайную энергоэффективность мозга, в то время как модель квантовых вычислений может [17]. Чтобы понять механику, лежащую в основе вычислительного процесса, в котором квантовая неопределенность сохраняется in situ, будет полезно разработать математическую основу для многомасштабной квантовой системы.

Классически импульсный нейрон рассматривается как бинарная единица, всегда находящаяся во включенном или выключенном состоянии. Здесь нейрон моделируется как квантовая система с двумя состояниями и некоторой вероятностью переключения из выключенного состояния во включенное. Это состояние нейрона зависит от вероятностного положения и импульса каждого иона поблизости. В этой многомасштабной квантовой модели напряжение кортикального нейрона является функцией чистых состояний всех компонентов, а оптимальное состояние системы в данном контексте выбирается из распределения вероятностей в процессе генерации и сжатия квантовой информации. Этот вычислительный процесс дает собственные значения для всех векторов состояния и немедленно восстанавливает неопределенность во всей системе, вызывая следующий вычислительный цикл. Эта теоретическая модель предлагает механизм, с помощью которого кортикальные нейроны могут достигать недетерминированных результатов передачи сигналов посредством процесса квантовых вычислений при температуре окружающей среды, и дает конкретные предсказания, которые можно проверить в лаборатории.

2. Методы

2.1. Моделирование кортикального нейрона как квантовой системы с двумя состояниями.

Во время активного состояния корковые нейроны задерживаются на пороге своего потенциала действия, позволяя как восходящим сигналам, так и случайному электрическому шуму подсказывать результат передачи сигнала. Таким образом, хотя нейрон классически интерпретируется как двоичный логический элемент в состоянии «включено» или «выключено», кодируемом как 1 или 0, его также можно описать как имеющий некоторую вероятность перейти в состояние «включено» или остаться в этом состоянии. состояние «выключено».

В этом новом подходе кортикальный нейрон объединяет восходящие сигналы со случайным электрическим шумом, определяя свое состояние напряжения как функцию времени по мере возмущения системы. Нейрон начинает работу в выключенном состоянии φ, не запуская потенциала действия, и через время t достигает другого состояния χ. Итак, за некоторый промежуток времени от t0 до t состояние нейрона меняется от φ до χ. Путь времени, пройденный из одного состояния в другое, определяется выражением:

$$\chi \, |U(t, t0)| \varphi \quad . \tag{1}$$

Вероятность изменения состояния может быть представлена в некотором базисе:

$$\chi \, |k \quad k|U(t, t0)|j \quad j|\varphi \quad , \tag{2}$$

такой, что U полностью описывается базовыми состояниями k и j, которые представляют начальное выключенное состояние нейрона и состояние нейрона после временного шага соответственно:

$$k|U(t, t0)|j \quad , \tag{3}$$

Временной интервал можно понимать как t = t0 + t, поэтому определение состояния нейрон χ в момент времени t можно понимать как проходящий путь из одного состояния в другое:

$$\chi \, |\psi(t0 + \quad t) \quad = \quad \chi \, |U(t0 + \quad t, t0)|\psi(t0) \quad . \tag{4}$$

Если t = 0, изменения состояния быть не может. В этом случае:

$$|\psi(t0 + \quad t) \quad = |\psi(t0) \quad . \tag{5}$$

В любом другом случае состояние нейрона в момент времени t задается ортонормированной базой состояния k и j с амплитудами вероятности:

$$Ck \, (t0 + \quad t) = \quad k|\psi(t0) \tag{6}$$

Machine Translated by Google

И:

$$Cj(t0 + t) = j|\psi(t0) . \quad (7)$$

Таким образом, состояние нейрона $|\psi$ в момент времени t можно описать как нормированный вектор состояния ψ в суперпозиции двух ортонормированных базовых состояний k и j с амплитудами вероятности Ck и Cj . Сумма квадратов модулей всех амплитуд вероятности равна 1:

$$|C K|^2 + |C дж|^2 = 1. \quad (8)$$

Поскольку нейрон начинает эволюцию во времени в состоянии $|\psi(t0) = j$, его вероятное состояние в момент времени t определяется выражением:

$$k|\psi(t0 + t) = k|U(t0 + t, t0)|\psi(t0) . \quad (9)$$

Это уравнение также можно записать в развернутом виде как сумму всех вероятностей перехода:

$$k|\psi(t) = j k|U(t0 + t, t0)|j j|\psi(t0) . \quad (10)$$

Для вектора состояния $\psi(t)$ вероятность изменения состояния в момент времени t описывается выражением U-матрица, Ukj(t):

$$Ukj(t) = k|U(t0 + t, t0)|j . \quad (11)$$

Итак, все амплитуды вероятности зависят от прошедшего времени t:

$$Ck (t0 + t) = j Ukj(t)Cj(t0) . \quad (12)$$

Нейрон испытывает возмущения за время t. Если t = 0, изменения состояния быть не может и k = j. Если t > 0, существует некоторая вероятность изменения состояния , где k/ = j. Таким образом, квантовая система с двумя состояниями описывается дельтой Кронекера δkj:

$$\delta kj = k|j = \begin{cases} 1, \text{если } k = j \\ 0, \text{если } k/ = j \end{cases} \quad (13)$$

Каждый из коэффициентов U-матрицы Ukj отличается от δkj на некоторую величину, пропорциональную t , такую , что:

$$Ukj(t) = \delta kj + Wkj t . \text{ где} \quad (14)$$

Wkj = (i/ħ)Ĥ kj(t), где гамильтонов операторный член Ĥ kj(t) представляет производные по времени каждого из коэффициентов Ukj:

$$Ukj(t) = \delta kj \frac{я}{час} Ĥ kj(t) t . \quad (15)$$

Таким образом, амплитуда вероятности Ck (t) в момент времени t определяется выражением:

$$Ck (t0 + t) = [\delta kj \frac{я}{час} Ĥ kj(t) t]Cj(t0) . \quad (16)$$

Поскольку сумма δkjCj(t0) = ψ(t0), последнее уравнение упрощается до:

$$Ck (t0 + t) Ck (t0) = \frac{я}{час} [Ĥ kj(t) t]\psi(t0) . \quad (17)$$

При разделении обеих частей уравнения на t становится очевидным, что любое изменение состояния представляет собой сумму всех возможных возмущений, влияющих на исследуемую систему, начиная с ее начального состояния в момент времени t0, включая случайные события . Опять же, Ck (t) — это вероятность

Machine Translated by Google

амплитуда i|ψ(t0) нахождения вектора состояния ψ в одном из базовых состояний k = j или k/ = j в момент времени t. Итак, производная по времени этой функции вероятности дает выбранный путь:

$$\frac{Ck(t0 + t) \quad Ck(t0)}{t} = \frac{я}{час} \quad H\hat{}\, kj(t)\psi(t0). \tag{18}$$

Таким образом, система описывается зависящим от времени уравнением Шредингера с любое изменение состояния, связанное с изменением распределения энергии:

$$\text{знаю} \quad \frac{d\psi}{\text{знак равно ЧАС}} \quad \psi. \text{я не} \tag{19}$$

где i — мнимая единица, $h^{-} = h/2\pi$ — приведенная постоянная Планка, $H\hat{}$ — оператор Гамильтона, соответствующий полной энергии системы, а ψ — собственный вектор, описывающий квантовую систему после времени t. Это уравнение описывает собственное состояние системы как функцию прошедшего времени t и количества энергии, доступной для перераспределения по системе, определяемой гамильтонианом $H\hat{}$. Это уравнение позволяет определить состояние системы как распределение вероятностей, представляющее возможные пути, пройденные с момента последнего определения состояния системы. Объединив уравнения (18) и (19), мы находим, что вероятность изменения состояния равна сумме всех производных по времени нормированного вектора состояния:

$$\frac{Ck(t0 + t) \quad Ck(t0) \quad t}{} = \quad dt \frac{d\psi}{}. \tag{20}$$

2.2. Моделирование мембранного потенциала корковых нейронов как функции чистых состояний компонентов

Динамический мембранный потенциал кортикального нейрона ранее моделировался с помощью уравнения Фоккера-Планка [14], при этом собственные функции φi и коэффициенты αi образуют полный набор, по которому можно разложить распределение мембранного потенциала P(V, t):

$$P(V, t) = \quad \alpha i \varphi i(V) e \quad \lambda i \, t/\tau m \quad . \tag{21}$$

Я

Крайне важно, что все собственные значения действительны и строго отрицательны, а собственные функции подчиняются $L(\varphi i) = \lambda i \varphi i$ и $\lambda i > 0$. Ключевым компонентом этой модели является τ m, постоянная времени мембраны нейрона, определяемая формулой:

$$\tau \, м = \frac{г \, л}{с \, м} + \text{веа} + \text{виай}, \tag{22}$$

где ve и vi — возбуждающий и тормозной синаптические входы соответственно; ае и ai — возбуждающая и тормозная синаптическая сила соответственно; с м – емкость мембраны ; gL — проводимость мембраны в контексте тока утечки, определяемая по формуле:

$$г \, Л = \frac{\text{Изменить}}{\text{В - ВЛ}}. \tag{23}$$

Тогда общий ток классически определяется суммой:

$$In = gL(t)(V \quad VL) + ge(t)(V \quad Ee) + gi(t)(V \quad Ei), \tag{24}$$

где Ee и Ei — реверсивные потенциалы возбуждающих и тормозных синапсов соответственно. В спинномозговых нейронах возбуждающие и тормозные синаптические входы доминируют над любыми изменениями мембранного потенциала, а ток утечки не оказывает существенного влияния на результаты передачи сигналов. Между тем в корковых нейронах возбуждающие и тормозные входы уравновешены.

Machine Translated by Google

так что токи утечки преобладают. Чтобы смоделировать вклад отдельных ионов в ток утечки, мы можем смоделировать плотность тока вероятностно:

$$ИЛ = \frac{}{кв\ 2м}(\psi \quad), s\psi \quad \psi s\psi \tag{25}$$

где m — масса каждого точечного заряда q. В этой модели состояние нейрона $|\psi n$ развивается с течением времени, при этом результат передачи сигнала в момент времени t является функцией всех состояний ионов. Примечательно, что состояние каждого иона в системе $|\psi i$ также меняется со временем. Зависящее от времени уравнение Шредингера для положения каждого иона:

$$я - \frac{д}{dt}|\psi(r, t) \quad = H\hat{} \ |\psi(r, t) \quad . \tag{26}$$

А зависящее от времени уравнение Шредингера для импульса каждого иона имеет вид:

$$я - \frac{д}{dt}|\psi(s, t) \quad = H\hat{} \ |\psi(s, t) \quad . \tag{27}$$

Положение каждого иона задается распределением амплитуд вероятности вдоль осей x, y и z. Итак, импульс каждого иона s обеспечивается производной волновой функции по его положению r:

$$ih^{-}\frac{d\psi}{dp} + z \quad x \quad y\frac{}{z} \quad = ih^{-} \quad x + \quad y \quad \text{знак равно я } h^{-} \ . \tag{28}$$

Поскольку масса, энергия и электрический заряд сохраняются, мы можем использовать уравнение непрерывности:

$$\frac{}{\rho} = \quad r \cdot IL, \quad t \tag{29}$$

где $\rho = |\psi(r, t)|^2$. Поэтому:

$$\frac{|\psi(r, t)|^2}{т} = \quad r \cdot [\frac{}{кв\ 2м}(\psi \quad s\psi \quad \psi s\psi \quad)] . \tag{30}$$

Поскольку $r = s/ih^{-}$:

$$\frac{|\psi(r, t)|^2}{т} = \psi \quad \frac{qs2}{2mih^{-}}\psi \quad \psi\psi\frac{qs2}{2mih^{-}} \quad . \tag{31}$$

Зависящее от времени уравнение Шредингера для описания гамильтониана системы: по импульсу это:

$$ih^{-}\frac{\psi}{t} \quad = (2м\frac{2\ c}{}\ )\psi . \tag{32}$$

И его комплексное сопряжение:

$$ih^{-}\frac{\psi}{t} \quad = (\frac{c^2}{2м})\psi \quad . \tag{33}$$

Поэтому:

$$\frac{\rho}{t} \quad = \quad \frac{|\psi(r, t)|^2}{т} + \psi \quad t\ ^{*}q \quad \psi q \quad \psi \quad = \psi \quad . \tag{34}$$

Итак, сумма всех синаптических токов утечки для данного нейрона в момент времени t равна:

$$ИЛ = \quad \frac{q \quad \rho/ \ t}{\psi/ \ r} \ . \tag{35}$$

Machine Translated by Google

когда возбуждающий и тормозной входы сбалансированы, во время активного состояния коры плотность тока нейрона эффективно описывается суммой всех токов утечки:

$$B = \frac{q\ \rho/\ t}{\psi/\ r}. \tag{36}$$

Следовательно, вероятность пересечения нейроном порога потенциала действия (Vth) определяется соотношением между током и напряжением, при этом любые отрицательные собственные значения для ψ(r, t) побуждают нейрон вернуться к своему потенциалу покоя:

$$V - Vth = \frac{1}{гл}\ \frac{q\ \rho/\ t}{\psi/\ r}, \tag{37}$$

2.3. Моделирование информации, закодированной системой с несколькими состояниями, с точки зрения энтропии фон

Неймана. Во время кортикальных повышенных состояний нейроны активно поддерживают потенциал покоя прямо вблизи порога напряжения для запуска потенциала действия [5], что позволяет стохастической утечке ионов для открытия аорты. изменение состояния вычислительного блока [3,4]. В момент времени t нейрон либо достиг порога напряжения, либо нет; существует некоторая вероятность любого исхода. Нейрон представляет собой квантовую систему с двумя состояниями, зависящую от вероятностного положения и импульса каждого иона, находящегося поблизости. Для моделирования системы либо на уровне нейронов, либо на уровне ионов ρx определяется как вероятность перехода объекта из одного в другое чистое состояние:

$$\rho x := |\psi x\ \ \psi x|. \tag{38}$$

Матрица плотности ρ состоит из ансамбля взаимно ортогональных чистых состояний ρx, каждое из которых имеет некоторую вероятность возникновения px:

$$\rho = \ \ px\rho x = \ \ px|\psi x\ \ \psi x|, \tag{39}$$

Поскольку кортикальный нейрон чувствителен к событиям квантового уровня, он остается в состоянии неопределенности, физически кодируя «информацию» (энтропию фон Неймана системы или смешанную сумму всех чистых состояний компонентов). Количество информации, закодированной нейроном, рассчитывается путем отслеживания объема амплитуд вероятности по матрице плотности высокой размерности:

$$S(\rho) = \ \ Tr(\rho\ ln\ \rho). \tag{40}$$

Здесь макросостояние системы представляет собой смешанную сумму всех составляющих чистых микросостояний или смешанную сумму всех внешних продуктов, умноженную на вероятности их перехода. Внутреннее произведение ау ψ обеспечивает вероятность того, что вектор состояния |ψx присваивает собственному вектору ау. Таким образом, вероятность измерения определенного собственного значения равна:

$$п(ай) знак равно ай\ \rho\ ай. \tag{41}$$

Объект находится в каком-то состоянии в момент времени t0 и имеет некоторую вероятность оказаться в другом состоянии в момент времени t после того, как он был временно определен как распределение возможных состояний. Вероятность нахождения системы в любом одном собственном состоянии можно рассчитать, применив правило Борна, которое приравнивает скалярное произведение вектора состояния и его математическое ожидание к вероятности перехода в определенное фактическое состояние [18]. Это правило гласит, что любое измерение наблюдаемой имеет вероятность того, что p(ψa) будет равно точному значению a в момент времени t для вектора состояния ψ:

$$p\ (\psi a(t)) = |\ \ a|\psi(t)\ \ |^{2}. \tag{42}$$

Квадрат абсолютного значения этой волновой функции является действительным числом, но сама волновая функция представляет собой комплексную амплитуду вероятности, которая существует вдоль оси

Machine Translated by Google

ортогонально всем действительным собственным значениям. Каждое собственное значение a, определенное вдоль этой оси, зависит от прошедшего времени. Если присутствуют достаточные ограничения, чистое состояние каждого компонента может быть определено путем разрешения гамильтониана в момент времени t. Если достаточные ограничения отсутствуют, некоторые чистые состояния компонентов не будут разрешены, и некоторое чистое количество энтропии будет произведено системой во время этого вычислительного цикла.

2.4. Генерация распределения возможных состояний системы на основе квантовой неопределенности

Чтобы понять механику, лежащую в основе этого процесса, можно концептуализировать расчет возможных состояний системы в нейронной сети путем моделирования пуассоновского распределения плотности тока для каждого иона в системе по отношению к каждой области нервной мембраны, тем самым создавая распределение возможные пути. Но поскольку эти события не происходят с равной вероятностью или независимо от предыдущего состояния системы, более уместно моделировать распределение вероятностей векторов положения и импульса как r(x) и s(x) соответственно, каждый из которых определяется по трем пространственным состояния м. оси с весовой функцией w(x) > 0:

$$(r,c) = \int_{p}^{\prime} (x)s(x)w(x)dx . \tag{43}$$

В этой системе Штурма – Лиувилля весовая функция w(x) математически представляет собой квантовый гармонический осциллятор. w(x) воплощает квантовую неопределенность состояния иона и естественным образом генерирует гильбертово пространство для каждого собственного вектора положения и импульса. Если эта операция симметрична или эрмитова, так что:

$$\begin{aligned}(r, Ls) &= \int L(r'(x))s(x)w(x)dx \\ &= \int_{p}^{\prime} (x)L(s(x))w(x)dx \\ &= (Lr,s),\end{aligned} \tag{44}$$

тогда все полиномы будут образовывать полные множества в гильбертовом пространстве с действительными собственными значениями и ортонормированными собственными функциями, обеспечивая решения уравнения линейного дифференцирования второго порядка, определяемого формулой:

$$Лу = \lambda u , \tag{45}$$

В котором λ — константа, a L — эрмитов оператор, определяемый действительными функциями x, α, β и γ:

$$\text{равно } \alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) \cdot \frac{d}{dx} \frac{d^2}{dx^2} \text{ L знак} \tag{46}$$

Распределение результатов для r(x) и s(x) определяется как ρ, смешанной суммы взаимно ортогональных состояний ρx, каждое из которых происходит с некоторой вероятностью px:

$$\rho(r,s) = \sum (pr(x)\,\rho r(x))(ps(x)\,\rho s(x)) . \tag{47}$$

Эволюция состояния системы ρ во времени t определяется уравнением Лиувилля –фона. Уравнение Неймана:

$$ih^{-}\frac{d}{dt}\rho = ih^{-}\sum px(|\psi x\rangle\langle\psi x| + |\psi x\rangle\langle\psi x|) , \tag{48}$$

с собственными состояниями, предоставляемыми гамильтоновым оператором:

$$я^{-}\frac{Д}{dt}|\psi x\rangle = \hat{H}|\psi x\rangle . \tag{49}$$

и его эрмитово сопряженное:

$$ih^{-}\frac{Д}{дт}\langle\psi x| \text{ знак равно } \langle\psi x|\hat{H} . \tag{50}$$

Machine Translated by Google

Подстановка оператора и сопряженного в уравнение Лиувилля – фон Неймана дает:

$$\text{я не знаю}\frac{\text{Д}}{\text{dt}}\rho \text{ знак равно ih}^{-}(\hat{H}\rho x - \rho x\hat{H}) = [\hat{H}, \rho x]. \quad (51)$$

Поскольку время само по себе неопределённо, эволюция состояния системы во времени обеспечивается оператором сдвига во времени U:

$$U = e^{-i\hat{H}t}. \quad (52)$$

Унитарное преобразование, управляемое этим оператором сдвига во времени, позволяет матрице плотности эволюционировать от ρx(t0) до ρx(t):

$$\rho x(t0) \quad \rho x(t) = U\rho x(t0)U^{\dagger}. \quad (53)$$

Прохождение этого унитарного преобразования дает собственные значения для каждого компонента в чистом состоянии, определяя положение и импульс каждого иона, а также состояние напряжения каждого нейрона. Эти собственные значения разрешаются только при разрешении гамильтониана, при уменьшении размерности матрицы плотности, при коллапсе волновой функции, при извлечении линейных корреляций или при выборе одного состояния системы из распределения возможных состояний системы. Все это эквивалентные процессы, представляющие собой сжатие «информации» или энтропии фон Неймана. И что важно, эта многомасштабная система имеет единый момент времени t, в который разрешаются как состояния ионов, так и состояния нейронов (хотя некоторая неопределенность или энтропия могут оставаться после завершения каждого вычислительного ци

2.5. Приведение распределения вероятностей к единому наблюдаемому состоянию системы

Поскольку положение и импульс любого иона в момент времени t зависят от того, взаимодействовал ли он с другими ионами или электрическими полями в ходе временной эволюции, необходимо учитывать взаимозависимость собственных векторов. Путем расчета положений и импульсов всех ионов внутри системы, определяемой температурой, по отношению друг к другу, этот подход гарантирует, что ионы не займут одно и то же положение, спин и энергетическое состояние, что сделало бы их идентичными. Этот результат привел бы к потере массы Вселенной и поэтому запрещен принципом Паули [19]. Этот принцип сохранения можно применить к любой термодинамической системе, поэтому общее количество энергии, доступной системе, не превышает количества энергии, запасенной в системе, плюс чистое количество энергии, поступившей в систему за время t. В центральной нервной системе, которая улавливает тепловую энергию для выполнения вычислительной работы, распределение состояний системы представлено оператором Гамильтона:

$$\text{я}^{-}\frac{\text{Д}}{\text{dt}}|\rho(t)\rangle = \hat{H}|\rho(t)\rangle. \quad (54)$$

В далекой от равновесия системе, которая термодинамически связана с окружающей средой, нельзя предполагать, что броуновское движение ионов происходит в классическом пределе, и поэтому необходимо применить квантовомеханическую формулировку уравнений Фоккера-Планка, известную как уравнение Фоккера-Планка. Модель Кальдейры–Леггетта [20–22]. Здесь оператор Гамильтона учитывает положение r и импульс s каждого иона с массой m и зарядом q, движущегося в потенциале V(r), где ω — квантовый гармонический осциллятор, а c — константа связи

$$\hat{H}(r,s) = \frac{2c}{2} + B(r) + 2\text{м}^{-1}\frac{(\text{ст} \quad \text{крт})^2}{\text{м}} + \text{m}\omega r t^{22}. \quad (55)$$

Поскольку состояние каждого иона зависит (частично) от состояния всех других ионов, всю многомасштабную систему необходимо рассматривать вместе, при этом положения ионов зависят от напряжения на мембране и наоборот. Эта комбинированная волновая функция связывает каждый вектор состояния ψ с течением времени t и гамильтоновым оператором $\hat{H}$. Спектр оператора Гамильтона — это набор возможных результатов в момент времени t. Гамильтонов оператор $\hat{H}$

Machine Translated by Google

функция Лагранжа положения r, ее производная по времени r˙ и времени t. Он рассчитывается с помощью преобразования Лежандра, чтобы минимизировать действие, необходимое для изменения :

$$H\hat{}(ri, si, t) = \sum_{i=1}^{n} si\,r\dot{}\,i - L(ri, r\dot{}\,i, t). \quad (56)$$

Векторные пространства, представленные r˙ и s˙, генерируются суммой всех возмущений и квантовых колебаний, которые математически представлены весовой функцией в уравнении Штурма–Лиувилля . В результате производная оператора Гамильтона связана с любыми изменениями положения , импульса и времени и, следовательно, может быть рассчитана, взяв частные производные этих собственных векторов:

$$+ dt. \quad ри \quad \frac{H\hat{}}{си} \quad H\hat{} \quad H\hat{}\,dH\hat{}\ \text{знак равно}\ dri + dsi \quad \frac{}{т} \quad (57)$$

Распределение фазового пространства ρ(r,s) описывает вероятность выбора конкретного состояния системы из общего объема фазового пространства d n r dns . Чтобы описать этот объем фазового пространства, уравнение Лиувилля дает эволюцию ρ(r,s) во времени t:

$$\frac{\rho}{t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho}{ri}\,\rho\,r\dot{}\,i + s\dot{}\,i\,\frac{}{si} = \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (58)$$

В результате этого геометрического ограничения векторы состояния (ρ, ρr˙, ρs˙) сохраняются во всей системе, а векторное поле (r˙,s˙) имеет нулевую дивергенцию. Это также позволяет сохранять температуру и энергию во всей системе. Уравнение непрерывности имеет

$$\frac{\rho}{t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\rho\,r\dot{}\,i)}{ri} + \frac{(\rho\,s\dot{}\,i)}{si} = 0. \quad (59)$$

Поскольку ρ / t равно нулю, непрерывность плотности вероятности можно обозначить как:

$$\rho \sum_{i=1}^{n} \frac{r\dot{}_i}{ри} + \frac{s\dot{}_i}{си} = 0. \quad (60)$$

И поскольку векторные пространства r˙ и s˙ определяются как:

$$р\dot{}_i = \frac{H\hat{}}{си}, \quad (61)$$

и:

$$я = \frac{H\hat{}}{ри}, \quad (62)$$

законы непрерывности сохраняются при взятии второй производной оператора Гамильтона. Этот процесс определяет наблюдаемую границу общего объема возможных состояний системы:

$$\rho \sum_{i=1}^{n} \frac{2H\hat{}}{ri\ si} \quad \frac{2H\hat{}}{si\ ri} = 0. \quad (63)$$

В этом уравнении становится очевидной связь между матрицей плотности ρ и оператором Гамильтона, описывающим распределение энергии по системе, а также связь между векторами положения и импульса и оператором Гамильтона.

После того как пройден след по матрицам плотности, представляющим r(x) и s(x), весовая функция w(x), лежащая в основе распределения вероятностей, может быть решена относительно других параметров. Итак, во время общесистемных вычислений выбираются собственные значения и временно разрешаются собственные состояния ψr(x) и ψs(x) . Следует отметить, что в этой формулировке происходящих во времени событий операторы управляют вычислительным циклом,

Machine Translated by Google

а не векторные состояния. То есть оператор Гамильтона может развиваться со временем (позволяя изменять положение и импульс), в то время как сами векторные состояния остаются независимыми от времени. Таким образом, любые события, происходящие во времени, могут повлиять на результат вычислений. Сюда входят любые квантовые колебания и любые классические входные токи, возникающие во время этой временной эволюции.

2.6. Восстановление неопределенности после временного определения состояния системы

Связывая любые вероятностные изменения положения и импульса каждого иона с распределением энергии по системе, оператор Гамильтона эффективно отображает все наблюдаемые результаты. Унитарная замена базиса, управляющая этим вычислительным процессом, определяется фазовым фактором $\exp(iHt/\hbar)$. Следовательно, любое изменение направления времени приводит к тому, что положительные энергии становятся отрицательными — результат, который запрещен первым законом термодинамики, если только спин также не меняется на противоположный с введением электрического дипольного момента [23]. Электрический дипольный момент — это спонтанный сдвиг энергетического состояния электрона под действием внешнего электрического поля; здесь ожидается, что это событие произойдет, поскольку распределение вероятностей сокращается и вычисляются собственные значения.

Первоначально, когда система была возмущена внешней средой, все чистые состояния компонентов (и гамильтонов оператор) были интегрированы для создания объема вероятности.
Теперь мы можем взять производную этого объема вероятности (и оператор Гамильтона), чтобы определить собственные значения в граничной области этого многомерного распределения вероятностей. Это сводит распределение состояний системы к единому актуализированному состоянию системы с недетерминированным результатом:

$$\frac{dЭ}{d\lambda} = \langle\psi_\lambda| \left|\psi_\lambda\right\rangle \cdot d\lambda \qquad (64)$$

Это уравнение представляет собой теорему Хеллмана-Фейнмана и лежит в основе квантовой электродинамики [24,25]. Здесь любое изменение положения или импульса иона пропорционально изменению гамильтониана, поскольку гамильтониан соответствует всем потенциальным и кинетическим энергиям в системе. Полезно отметить, что неопределенным является не общее количество энергии в системе, а то, как эта энергия распределяется.

Мера возможных состояний системы, или энергетических конфигураций, напрямую связана с полной энтропией, кодируемой системой в начале вычислительного цикла [26]. Состояние системы после завершения вычислительного цикла связано с любым параметром λ, который вносит вклад в оператор Гамильтона, например, с любым сдвигом положения атома, импульса, орбитали или напряженности электрического поля. Итак, производная полной энергии в системе E связана с скалярным произведением векторов состояния ψ и производной гамильтониана $\hat{H}$ по параметру λ.

Разрабатывая это решение уравнения Шредингера, Ричард Фейнман обнаружил, что любой коллапс волновой функции оказывает дискретное воздействие на составляющие его атомы. Это событие сопровождается сдвигом распределения заряда по каждому атому системы по отношению к их вновь определенному расстоянию друг от друга [24,25]. Для двух атомов, взаимодействующих на расстоянии D, индуцированный дипольный момент для каждого атома равен 1/D7. Чем меньше расстояние между атомами, тем больше дипольный момент и тем больше прирост углового момента. В результате любое возмущение системы — например, открытие ионного канала или сдвиг локального электрического поля — меняет состояние системы аналогично исходному невозмущенному состоянию и производной гамильтониана. Назначение атомных положений относительно других атомов в системе сочетается с изменением организации электронов вокруг ядра. Это событие вызывает появление сил Ван-дер-Ваальса между соседними атомами [27,28].

Вкратце: интегрируя комплексные амплитуды вероятности, система генерирует определенное количество квантовой информации. Взяв производную этого объема, система идентифицирует собственные значения в наблюдаемой граничной области этого многомерного векторного пространства. При выборе собственных значений все остальные собственные состояния исключаются. В этот момент волновая функция коллапсирует, и информация, хранящаяся в системе, резко сжимается.

Machine Translated by Google

В соответствии с принципом Ландауэра любое сжатие информации сопровождается высвобождением свободной энергии [29–32]. Эта свободная энергия может быть использована для выполнения работы в системе, например, для восстановления мембранного потенциала покоя, поскольку неопределенность в рецептивном поле нейрона уменьшается. Крайне важно, что этот двунаправленный обмен свободной энергией и энтропией гарантирует сохранение полной энергии системы в ходе вычислений при соблюдении первого и второго законов термодинамики [26].

Переходя от предшествующего состояния к апостериорному, система реализует решение вычислительной проблемы: каково оптимальное состояние системы для кодирования окружающей среды? Однако это определенное состояние системы является временным, поскольку оно сопровождается немедленным восстановлением неопределенности за счет изменения распределения заряда вокруг каждого атома. Дипольный момент, вызванный коллапсом волновой функции, затем вызывает новые атомные взаимодействия - и для последовательных измерений с дискретными результатами, которые не разрушают запутанность системы частиц, каждое измерение с означением а устанавливает основу для нового состояния, которое затем подвергается последующему времени. эволюции в соответствии с постулатом проекции фон Неймана [33]. Итак, сразу после разрешения волновой функции система снова начинает развиваться во времени, формируя новое вероятностное состояние системы и проходя еще один вычислительный цикл.

2.7. Преобразование вероятностных состояний системы во временно необратимые результаты сигнализации

Взятие производной гамильтониана включает в себя взятие производной всех компонентов чистых состояний относительно всех возмущений с момента последнего события обнаружения. Этот процесс сжимает информацию, давая собственные значения в граничной области многомерного распределения вероятностей. В ходе этого вычислительного процесса комплексное распределение возможных состояний системы уменьшается, а чистые состояния компонентов во всей системе (например, положение и импульс иона) определяются временно. Но это определенное состояние многомасштабной системы немедленно уходит в прошлое, поскольку распределение заряда по каждому атому изменяется и возникает новое вероятностное состояние системы.

Поскольку математическое ожидание энергии данного атома $\langle a_i | \rho | a_i \rangle$ пропорционально математическому ожиданию его оспина $\langle \psi | k | \psi \rangle$, сдвиг энергии из-за индуцированного дипольного момента вызывает изменение знака как в значения, и временная симметрия нарушается. По сути, поскольку основные состояния теряют вырождение, возникающие дипольные моменты должны изменить притяжение между ионами натрия вне нейрона и атомами, составляющими липидный бислой нервной мембраны. Ожидается, что возникающие в результате силы Ван-дер-Ваальса вызовут допустимое нарушение симметрии обращения времени, тем самым влияя на причинно-следственную связь внутри системы, поскольку информация сжимается, идентифицируются собственные значения и наблюдаются токи утечки.

Однако система будет демонстрировать нарушения симметрии обращения времени только в том случае, если квантовая неопределенность способствует динамике тепловых флуктуаций-диссипации. Только если совпадающие входящие сигнальные события и случайные колебания вызывают изменение сопротивления мембраны, в пределах временных параметров диссипации ионов и кинетики выпрямления ионной помпы, по своей сути вероятностные события будут способствовать изменению состояния нейронов.

2.8. Условия, при которых квантовые флуктуации вносят вклад в динамику диссипации

Физическая структура, которая активно генерирует электрохимический потенциал покоя, будет генерировать энтропию и тепло. Нервная мембрана обеспечивает сопротивление, и поэтому некоторое количество свободной энергии будет рассеиваться в энтропию при возникновении электрических взаимодействий. Однако в системе улавливания тепла эта энергия не обязательно теряется безвозвратно; его можно использовать для совершения работы [34]. Теорема Каллена-Велтона о флуктуации-диссипации утверждает, что тепловые флуктуации вызывают функцию отклика, влияющую на импеданс конструкции, определяемый выражением $\chi(t)$:

$$\chi(t) = \int \beta \, dt \, \frac{A(t)\theta(t)}{\quad} \cdot \tag{65}$$

где $\beta = kBT$, $\theta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, а $A(t)$ — математическое ожидание $Ok(t)$, наблюдаемой величины, которая подвержена тепловым флуктуациям в динамической системе. Если время декогеренции внутри системы больше, чем время диссипации ионов

Machine Translated by Google

и динамике ионизации, квантовая неопределенность может существенно влиять на поведение ионов на мембране нейрона [35]. То есть, если зависящее от времени изменение напряжения нейрона зависит от каких-либо квантовых флуктуаций положения или импульса близлежащих ионов, то среднее по ансамблю каждой наблюдаемой величины (мера флуктуации, определяемая эрмитовым оператором [Ok (t), Oj(t0)]) будет связана с функцией отклика (мерой диссипации, определяемой χ(t t0) как функцией времени. Эта связь определяется формулой Кубо для флуктуации-диссипации [36] ,37]:

$$\chi(t - t0) = i\theta(t - t0) \quad [\, Ok(t), Oj(t0)\,] \quad . \tag{66}$$

Эту функцию отклика χ(t) можно записать как функцию колебательных событий:

$$\chi(t) = \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}\chi(\omega) . \tag{67}$$

Если t < 0, то iωt будет отрицательным, а e iωt будет нулевым, поэтому вся функция отклика. χ(t) будет нулевым. Таким образом, квантовые состояния , лежащие в основе этой спектральной функции, могут лишь причинно способствовать динамике диссипации по мере движения времени в прямом направлении. Преобразование Фурье функции отклика обеспечивает динамику диссипации и флуктуаций в частотной области, определяемую χ(ω):

$$\chi(\omega) = i \int_0 Tp(e^{\beta \hat{H}} [\, Ok(t), Oj(t0)\,]) e^{i\omega t} dt . \tag{68}$$

Эта зависящая от времени функция определяет плотность возможных состояний системы частиц , возникающих при наличии возмущения или изменения электрического поля . Итак, [Ok (t), Oj(t0)] — это просто описание того, как матрица плотности, волновая функция или оператор Гамильтона изменяются с течением некоторой временной эволюции, по сравнению с вероятностью того, что все энергетические состояния будут перестраиваться таким же образом. при обращении времени. Таким образом, функцию отклика χ(ω) можно записать в развернутом виде:

$$\chi(\omega) = i \int_0 e^{i\omega t} e \sum_{Em\beta} [\, \langle m|Ok|n\rangle \langle n|Oj|m\rangle e^{i(Em - En)t} dt \quad \langle m|Oj|n\rangle \langle n|Ok|m\rangle e^{i(En - Em)t}\,] \cdot \tag{69}$$

Если неопределенность положения и импульса иона поддерживается в присутствии постоянно меняющегося электрического поля , то квантовые флуктуации могут способствовать поведению иона, влияя на состояние ионов, взаимодействующих с электрохимическим потенциалом нервной мембраны. В этом случае квантовые флуктуации могут способствовать вероятности изменения состояния вычислительного блока макромасштаба из выключенного состояния во включенное.
Однако состояние каждого нейрона в момент разрешения оператора Гамильтона будет определять его реакцию. Нейроны в корковом активном состоянии, которые позволяют случайным событиям контролировать сигнальный результат, могут быть поддвинуты к порогу потенциала действия или от него, поскольку неопределенность резко снижается . Действительно, только нейроны в кортикальном активном состоянии, позволяющие случайному шуму контролировать результат передачи сигнала, будут подталкиваться . Между тем, нейроны, получающие надпороговую стимуляцию из состояния покоя , будут демонстрировать детерминированные паттерны возбуж

2.9. Предположения модели 2.9.1.

Нейроны функционально изолированы, но остаются чувствительными к внешним возмущениям

Эта модель предполагает, что нейроны функционально изолированы, но остаются чувствительными к внешним возмущениям. Архитектура глубокоуровневой нейронной сети допускает возмущения извне самой системы, в то время как физиология отдельных вычислительных блоков внутри более глубоких слоев допускает изолированные вычисления .

Что касается сетевой архитектуры: Нейроны таламуса, которые получают сигналы с периферии, демонстрируют детерминированные паттерны активации, которые точно представляют отображения в их рецептивных полях [38,39]. Эти нейроны образуют синапсы на более глубокие слои.

Machine Translated by Google

нейронной сети, при этом сигналы каскадно поступают на первичные сенсорные нейроны и кортикальные нейроны более высокого порядка, которые все чаще интегрируют множественные входные данные с шумом для получения вероятностных результатов [40,41]. Нейроны моторной коры и базальных ганглиев интегрируют различные входные сигналы, чтобы инициировать произвольные движения и подавлять другие движения [42,43]. Эти нейроны образуют синапсы с нижестоящими двигательными областями таламуса, ретикулярной формации и спинного мозга, при этом эти сигналы сходятся на периферических нейронах с детерминированными результатами, которые инструктируют разгибание и сгибание определенных групп мышц [44,45]. По сути, нейроны более высокого порядка в самых глубоких слоях коры головного мозга получают сообщения изнутри самой системы, причем эти возмущения представляют внешний мир.

Что касается физиологии нейронов: в корковых нейронах возбуждающие и тормозные входы активно сбалансированы, так что тепловые флуктуации доминируют при любом выходе из равновесного потенциала [5]. Хотя надпороговый стимул, безусловно, может привести к импульсному поведению в нейронах первичной сенсорной коры [46,47], случайный электрический шум вызывает импульсное поведение в корковых нейронах более высокого порядка [3,4]. В этих областях результаты передачи сигналов более вероятностны [48,49]. По этой причине моделирование вклада шума в результаты передачи сигналов является действенным подходом. Примечательно, что в периферических нейронах и поверхностных слоях кортикальной схемы случайный шум недостаточен, чтобы повлиять на результаты передачи сигналов, а сами вычислительные единицы очень устойчивы к шуму, поэтому тепловые флуктуации не оказывают существенного влияния на результаты нейронов, и эти условия снижаются. из уравнения. Однако нейрон в кортикальном активном состоянии, колеблющийся вблизи порога потенциала действия и позволяющий случайному электрическому шуму контролировать результаты передачи сигналов, очень чувствителен к шуму. В этом случае шум необходимо учитывать механически, чтобы эффективно моделировать вероятность перехода нейрона из выключенного состояния во включенное.

2.9.2. Неопределенность состояния отдельных ионов влияет на напряжение состояния нейрона

Эта модель предполагает, что изменение состояния очень небольшого числа ионов может повлиять на вероятность того, что нейрон активирует потенциал действия. Когда нейроны находятся в кортикальном активном состоянии, увеличение мембранного потенциала на 1 мВ может легко подтолкнуть нейрон к превышению порога [15]. Это изменение напряжения соответствует току силой 1 пА, или всего 10 ионам натрия, перемещающимся по каналу в течение микросекунды [16]. Поскольку случайное движение всего нескольких ионов натрия может подтолкнуть кортикальный нейрон к превышению порога потенциала действия, а эти клетки имеют значительные токи утечки [50], события квантового масштаба, по-видимому, влияют на макромасштабные результаты на уровне вычислительной единицы.

Ожидается, что нейроны в кортикальном активном состоянии будут кодировать максимальное количество информации с высокими амплитудами вероятности для каждого результата $k = j$ и $k/ = j$. Однако для ионов амплитуды вероятности как в пространстве положений, так и в пространстве импульсов почти везде будут равны нулю. Для ионов, находящихся вне мозга, вероятность того, что ион окажется внутри корковой нейрона в следующий момент, ничтожно мала. А для ионов, уже находящихся в мозге, амплитуды вероятности в основном сосредоточены вокруг самых последних значений положения и импульса, за исключением контекста открытия близлежащего ионного канала или сдвига локального электрического поля. Маловероятным результатом для иона может быть изменение положения, соответствующее утечке через нервную мембрану, причем это событие влияет на состояние напряжения нейрона.

Здесь каждый ион описывается волновой функцией или распределением собственных состояний. Во время унитарного преобразования любые неразличимые состояния (например, линейные корреляции между чистыми состояниями) устраняются, тем самым сжимая энтропию фон Неймана Поскольку каждому иону присваиваются собственные значения, определяется напряжение мембраны нейрона, и клетка либо достигает порога потенциала действия, либо нет. Если во время вычислений уменьшить неопределенность и присвоить собственные значения, то информация сжимается, освобождается свободная энергия и нейрон восстанавливает свой потенциал покоя. Если информация не может быть сжата и не могут быть присвоены собственные значения, то свободная энергия не высвобождается, и нейрон запускает потенциал действия, тем самым кодируя «неопределенность» в своем рецепт

Machine Translated by Google

2.9.3. Предполагаемые времена декогеренции соответствуют критерия м квантовой системы

Модель декогеренции в нейронных системах, ориентированная на взаимодействие между ионами натрия и мембранным потенциалом нейронов, была первоначально предложена Максом Тегмарком [35]. Эта модель была пересчитана с использованием новейших данных кулоновского рассеяния, которые представлены в родственной статье, а также формулировки матричной алгебры генерации и сжатия квантовой информации [51]. Эти оценки показывают, что время декогеренции на мембране нейрона действительно больше, чем скорость дисципации ионов, и, следовательно, соответствует критерия м квантовой системы, но только для корковых нейронов в активном состоянии.

Кортикальный нейрон в активном состоянии эффективно изолирован, поскольку возбуждающие и тормозные входы сбалансированы, поэтому случайные тепловые колебания определяют результаты передачи сигналов. Несмотря на наличие восходящих входных сигналов, они не влияют на результаты передачи сигналов в кортикальных нейронах — в отличие от тепловых флуктуаций. По этой причине каждая вычислительная единица моделируется как квантовая система с двумя состояниями, с некоторой вероятностью перехода из выключенного состояния во включенное. Конечно, нейрон не изолирован по-настоящему; он существует внутри цепи, и поэтому надпороговый стимул все равно может вывести его за пределы порога потенциала действия и вызвать его срабатывание. Концепция моделирования вклада шума квантового уровня в состояние вычислительного блока всегда справедлива; однако во многих схемах временные рамки декогеренции слишком коротки, или случайный шум недостаточен, чтобы повлиять на результаты передачи сигналов, или сами вычислительные блоки устойчивы к шуму, поэтому тепловые флуктуации не оказывают существенного влияния на результаты работы нейронов, и эти условия естественным образом уменьшаются. поскольку нейроны подчиняются класси чес

Ожидается, что только в активном состоянии коры неопределенность как в нейрональном мембранном потенциале, так и в положении внеклеточных ионов будет поддерживаться в течение достаточно длительного периода времени, чтобы линейные корреляции были уменьшены - для коллапса волновой функции, для сжатия информации, для уменьшения свободной энергии. быть освобожден, чтобы изменить импульс атома и чтобы изменения напряжения в вычислительном блоке наблюдались по завершении вычислений.

3. Результаты

3.1. Ожидаемая длина волны спонтанного высвобождения свободной энергии при сжатии информации. Если

кортикальные нейронные сети участвуют в квантовых вычислениях при температуре окружающей среды, то эти далекие от равновесия термодинамические системы должны двунаправленно обменивать свободную энергию на информацию, при этом любая свободная энергия расходуется на генерацию информации во время сжатия информации. начальный этап термодинамического вычислительного цикла частично восстанавливается на этапе сжатия информации. Таким образом, должны высвобождаться дискретные количества свободной энергии, локально при любом уменьшении неопределенности, поскольку оптимальное состояние системы выбирается из некоторого распределения вероятностей. Любые тепловые колебания должны соответствовать сдвигу дипольного момента атома, увеличивающему угловой момент отдельных ионов. Поэтому эти события должны быть наблюдаемыми. Чтобы оценить эту гипотезу, мы можем рассчитать ожидаемые эффекты динамики квантовых флуктуаций-дисципации в центральной нервной системе м

Если возмущение состояния иона в течение некоторого времени эволюции зависит от любых случайных изменений спина или энергетического состояния составного электрона, то среднее по ансамблю каждой наблюдаемой величины (мера флуктуации, определяемая $\hat{x}(t), \hat{x}(0)$) будет связана с функцией отклика (мерой дисципации, определяемой $\chi(t)$) в частотной области [36].

Это соотношение по существу моделирует, как колебательное поведение квантовой системы вдоль мнимой оси влияет на тепловую динамику наблюдаемой системы:

$$\chi(t) = i\theta(t \quad t0) \quad \hat{x}(t), \hat{x}(0) \quad , \tag{70}$$

Machine Translated by Google

где θ(t) — ступенчатая функция Хевисайда, а отклик χ(t) обеспечивает математическое ожидание для x(t), которое является зависящей от времени «наблюдаемой величиной», подверженной тепловым флуктуациям в динамической системе. Уравнение, зависящее от времени, имеет вид:

$$e(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} f(\omega), \tag{71}$$

и его преобразование Фурье определяется выражением:

$$f(\omega) = \int f(t)\, e^{i\omega t}\, dt. \tag{72}$$

Если собственные значения должны быть действительными, сумма действительной части и мнимой части функции отклика за некоторую временную эволюцию χ(t t0) также должна быть действительной. Полная функция ответа определяется выражением:

$$\chi(\omega) = \mathrm{Re}\chi(\omega) + \mathrm{Im}\chi(\omega). \tag{73}$$

Действительная часть функции отклика определяется выражением:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\chi(\omega) &= \frac{1}{2}\left[\chi(\omega) \quad \chi^{\dagger}(\omega)\right] \\ &= \frac{1}{2}\int dt\, e^{i\omega t}\left[\chi(t) \quad \chi(t)\right]. \end{aligned} \tag{74}$$

А мнимая часть функции отклика определяется выражением:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\chi(\omega) &= \frac{i}{2}\left[\chi(\omega) \quad \chi^{\dagger}(\omega)\right] \\ &= \frac{i}{2}\int dt\, e^{i\omega t}\left[\chi(t) \quad \chi(t)\right]. \end{aligned} \tag{75}$$

Энергия квантовых флуктуаций E(ω) связана с частотой ω:

$$E(\omega) = \frac{1}{2}\hbar\omega\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}, \tag{76}$$

где β = 1/kBT. Классический спектр мощности связан с комплексной квантовой спектральной плотностью таким образом, что квантовый шум может вносить вклад в локальную тепловую плотность при определенных условиях:

$$\int \hat{x}(t) \quad \hat{x}(t0)\, e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{\beta E(\omega)} \int \hat{x}(t) \quad \hat{x}(t0)\, e^{i\omega t}\, dt. \tag{77}$$

Если E > kBT, с высокой температурой, широким распределением электронов по энергетическим состояниям и низкой заполненностью энергетических состояний, то квантовый вклад в поведение ионов пренебрежимо мал, и поведение ионов ведется к статистике Больцмана – Максвелла. Если E < kBT, когда электроны на низких частотах подчиняются закону Рэлея -Джинса, то квантовый вклад в поведение ионов также незначителен, и поведение ионов снова сводится к классической статистике Больцмана-Максвелла. Только в случаях высокой плотности частиц, когда энергия, удерживаемая ионом, превышает его химический потенциал и E > kBT, квантовые флуктуации будут способствовать поведению иона. Предполагается, что это происходит в мозге млекопитающих.

Если квантовые флуктуации действительно способствуют поведению ионов в биологических системах, тогда E должно быть больше kBT. С:

$$kBT = (1{,}38 \times 10{-}23\ \text{Дж/K})(310\ \text{K}) = 4{,}28 \times 10{-}21\ \text{Дж}, \tag{78}$$

Machine Translated by Google

и:

$$e = \frac{Э}{час} = \frac{4{,}28 \times 10{-}21 \text{ кг м2/с 2}}{6{,}63 \times 10{-}34 \text{ кг м2/с}} = 6{,}46 \times 1012 \text{ Г ц}, \quad (79)$$

ожидается, что частицы высоких энергий E > kBT будут наблюдаться в центральной нервной системе при 37 C (310K). В частности, эти частицы высокой энергии должны иметь частоту f > 6,46 x 1012 Г ц, длину волны λ < 46 микрон или энергию E > 0,0267 эВ в пределах спектра инфракрасного света. Спонтанное излучение фотонов в этом диапазоне действительно наблюдалось в тканях мозга млекопитающих [52–55], и было показано, что инфракрасная стимуляция мозга оказывает функциональное влияние на нервную активность [56–58]. Необходимы дальнейшие исследования для измерения точных длин волн этих фотонных излучений и временной корреляции этих событий с результатами передачи сигналов нейронами.

Таким образом, прогнозируется, что фотоны, особенно в инфракрасном диапазоне электромагнитного спектра, должны высвобождаться при сжатии информации в мозгу млекопитающих. Поскольку первый закон термодинамики гласит, что энергия не может быть ни создана, ни уничтожена, любая система, способная уменьшать энтропию для достижения недетерминированных вычислений, должна высвободить свободную энергию при сжатии информации. Если квантовые вычисления действительно происходят в кортикальных нейронных сетях, то должны наблюдаться спонтанные тепловые флуктуации, локально при любом уменьшении неопределенности. Ожидается, что эти тепловые флуктуации будут стимулировать синхронное срабатывание статистически случайного ансамбля нейронов в

Следовательно, в этом подходе уменьшение термодинамической энтропии сочетается как с выбором оптимального состояния системы из большого распределения вероятностей (того, которому термодинамически выгодно коррелировать с окружающей средой), так и с высвобождением тепловой свободной энергии (которая используется для физической реализации решения этой вычислительной задачи).

3.2. Конкретные предсказания этой

модели Если кортикальные нейронные сети действительно являются квантовыми вычислительными системами, а не классическими вычислительными системами, то доказательства генерации и сжатия квантовой информации должны наблюдаться в неокортексе. По сути, эта теория делает конкретные предсказания относительно энергетической эффективности мозга [17]; относительно временных масштабов кулоновского рассеяния и декогеренции на мембране нейрона [51]; и относительно ожидаемых эффектов электромагнитной стимуляции и фармакологического вмешательства в кортикальные нейронные сети [59]. Некоторые дополнительные конкретные предсказания теоретической основы, основанные на настоящей модели, включают следующее.

3.2.1. Свободная тепловая энергия спонтанно высвобождается во время вычислений по мере сжатия

информации. Инфракрасные частицы с длиной волны λ < 46 микрон или f > 6,46 × 1012 Г ц должны спонтанно появляться на нервной мембране во время корковой обработки информации. Это предсказание должно быть проверено с помощью чувствительных инфракрасных детекторов, а не классических электродов или систем визуализации; спонтанное высвобождение частиц инфракрасного диапазона должно наблюдаться в мозге, поскольку неопределенность разрешается в результате передачи сигналов. Количественное увеличение этих частиц должно наблюдаться, например, при перцептивном распознавании весьма неопределенного зрительного или слухового стимула, с сильным временным соответствием потенциалам, связанным с событием P300, в коре головного мозга. Напротив, это спонтанное выделение тепловой свободной энергии не должно происходить в случае эпилептического припадка, когда активация конститутивных ионных каналов, а не обработка информации, приводит к высокосинхронизированной нейронной активности в коре головного мозга. Конечно, спонтанное излучение фотонов в этом диапазоне наблюдалось в тканях мозга млекопитающих [52–55], и было показано, что инфракрасная стимуляция мозга оказывает функциональное влияние на нервную активность [56–58], но дальнейшие исследования невозможны. необходимо измерить точные длины волн этих фотонных излучений и оценить, коррелируют ли эти события Если мозг действительно циклически генерирует и сжимает энтропию, система должна демонстрировать гораздо более высокую энергоэффективность, чем ожидалось в классических условиях (табл. 1).

Machine Translated by Google

Таблица 1. Сравнение объяснительной мощности: энергоэффективность нейронной сети.

Классические модели		
Предлагаемый механизм	Прогнозируемое наблюдение	Доказательства/против.
Энергетическая эффективность системы является результатом оптимального синаптического взвешивания, оптимального распределения ионных каналов и других молекулярных механизмов.	Чистое производство физической энтропии в человеческом мозге совместимо с классическими предположениями: оборот АТФ производит некоторое количество энтропии.	Вычислительные затраты на каждый импульс составляют ошеломляющие 0,1 Вт: в контексте известного потребления калорий эта потребность в энергии «занижается в 108 раз». [60]
Текущая модель		
Предлагаемый механизм	Прогнозируемое наблюдение	Доказательства/против:
Энергоэффективность системы является результатом сжатия информации, при этом нейронные результаты определяются извлечением корреляций, согласованностей или «прогностической ценности».	Чистое производство физической энтропии в человеческом мозге слишком мало, чтобы сохранить предположения классической системы, при этом количество работы, выполняемой на калорию, показывает почти идеальное использование.	«Энергоэффективность человеческого мозга согласуется с этой моделью недетерминированных вычислений». [17] «Этот вычислительный процесс максимизирует доступность свободной энергии». [26]

3.2.2. Спонтанное высвобождение свободной тепловой энергии во время сжатия информации приводит к синхронному срабатыванию нейронной сети

Эта модель описывает как вычислительный процесс, так и термодинамический процесс, поскольку сжатие информации — это и выбор оптимального состояния системы из большого распределения вероятностей, и уменьшение энтропии. По прогнозам, это общесистемное термовычислительное событие, разрешающее неопределенность в чистых состояниях компонентов, приведет к спонтанному высвобождению свободной энергии. Поэтому нейроны, которые уменьшают неопределенность во время вычислений, должны восстанавливать свободную энергию и восстанавливать свой потенциал покоя; Нейроны, которые сохраняют неопределенность в своем рецептивном поле, должны распределять свободную энергию в энтропию и пос Таким образом, эти общесистемные вычисления должны привести к синхронному срабатыванию статистически случайного ансамбля нейронов по всей сети. Синхронная нейронная активность действительно наблюдается в определенном диапазоне частот в корковых нейронных сетях и считается корреляцией когнитивных процессов более высокого порядка [61,62]. Крайне важно, что высокочастотные колебания, которые наблюдаются во время задач восприятия, не могут быть смоделированы путем связывания и рекрутирования в соответствии с классическими предположениями и временными рамками [63,64]. Здесь прогнозируется, что события сжатия информации вызовут спонтанную синхронизированную активность среди редко распределенных нейрон Предполагается, что эта скоординированная активность будет происходить в клетках, которые позволяют случайному шуму контролировать результаты передачи сигналов (например, кортикальные нейронные цепи), но не в клетках, которые действуют полностью детерминировано (например, спинномозговые рефлекторные цепи). Хотя эта колебательная активность, происходящая в диапазоне частот, наблюдалась в мозге млекопитающих, дополнительные исследования могли бы изучить потенциальную корреляцию между вероятностным кодированием и активностью сетевого уровня у птиц и головоногих видов. Если синхронная активность вызвана классическими методами распространения сигнала, а не является результатом общесистемных недетерминированных вычислений, то как классическое моделирование корковых нейронных сетей, так и спинномозговых рефлекторных цепей должно легко демонстрировать быстрые и медленные колебания. Если вместо этого синхронная активность в сети вызвана сжатием информации в сочетании с высвобождением свободной энергии, то синхронное срабатывание должно быть устранено за счет поглощения прогнозируемых длин волн и должно быть вызвано введением этих длин волн. Короче говоря, если классическая модель верна, то классические механизмы должны легко генерировать колебания в диапазоне вложенных частот, а если настоящая модель верна, то циклическое генерирование и сжатие информации должно легко генерировать эти колебания (таблица 2).

Machine Translated by Google

Таблица 2. Сравнение объяснительной силы: синхронное срабатывание разреженных ансамблей нейронов.

Классические модели		
Предлагаемый механизм	Прогнозируемое наблюдение	Доказательства за/против Эти
Наблюдаемая синхронная активация в диапазоне вложенных частотявляется результатом кодирования информации, при этом результаты нейронной передачи сигналов вызываются общим стимулом.	Сочетание щелевых контактов, химических синапсов, эфаптической связи, изменений концентрации ионов и оптимизации нейронных связей с течением времени приводит к синхронному срабатыванию.	события нелегкосмоделировать: «Однако трудно определить точный вклад каждогомеханизма в определенный тип колебаний». [65] Проблема «нетривиальная». [66]
Текущая модель		
Предлагаемый механизм	Прогнозируемое наблюдение	Доказательства за/против.
Наблюдаемая синхронная активация в диапазоне вложенных частотявляется результатом сжатия информации, при этом результаты передачи нейронных сигналов обусловлены извлечением корреляций.	Инфракрасный фотонный импульс снижает мембранный потенциал некоторых нейронов, в то время как другие нейроны находятся в кортикальном повышенном состоянии, что приводит к синхронному срабатыванию, но не к иктальной активности во всей сети.	Предсказания этой модели должны быть проверены: в частности, ожидается, что спонтанное высвобождение инфракрасных фотонов будет коррелировать во времени с нейронными колебаниями, но не с иктальной активностью.

4. Обсуждение

Нейрон классически рассматривается как транзистор, всегда находящийся либо во включенном, либо в выключенном состоянии. Здесь кортикальный нейрон моделируется как кубит с некоторой вероятностью перехода из выключенного состояния во включенное в течение некоторого времени. В этом новом подходе изменение состояния вычислительного блока зависит от вероятностных событий на уровне ионо

Шум играет решающую роль в корковых нейронных сетях и других сложных динамических системах, облегчая передачу информации посредством механизма стохастического резонанса [67,68]. Случайный электрический шум вызывает фазовые переходы в отдельных вычислительных единицах, что приводит к сильно варьирующим межспайковым интервалам, которые наблюдаются в корковых нейронах [69]. Случайный электрический шум также приводит к синхронизированной активности и крупномасштабным колебаниям на системном уровне [70]. Вызванная шумом резонансная активация и повышенная засчет шума стабильность наблюдаются как в нейронных сетях [71], так и в мемристических архитектурах [72].

Результатом зашумленного вычислительного процесса на сетевом уровне является «разреженное популяционное кодирование» — синхронное срабатывание статистически случайного ансамбля редко распределенных нейронов по сети [73,74]. Эта нейрональная активность соответствует реализации мультисенсорного восприятия [62,63,75,76]. Примечательно, что разреженное популяционное кодирование и реализация восприятия наблюдаются в нейронных сетях, которые сохраняют чувствительность к случайным электрическим шумам (например, в неокортексе млекопитающих), но не в нейронных сетях, устойчивых к случайным электрическим шумам (например, в спинномозговых рефлекторных цепях).

Многие предыдущие модели использовали классические методы для описания интервала между спайками или синхронного возбуждения статистически случайных ансамблей нейронов на сетевом уровне [9–14,67–72], однако ни один из этих методов не дает механистического понимания того, как отдельные кортикальные результаты передачи сигналов в нейронах, позволяя термоэлектрическому шуму влиять на результаты передачи сигналов в нейронах. Настоящий подход демонстрирует, как шумное кодирование в синапсе механически связано с вероятностными результатами передачи сигналов. Этот метод делает конкретные прогнозы, которые можно проверить в лаборатории, чтобы оценить, является ли мозг классической системой (как обычно предполагается) или многомасштабной квантовой системой (как представлено здесь).

Хамерофф и Пенроуз также предположили, что мозг представляет собой квантовую систему с организованной объективной редукцией состояния системы, соответствующей сознательному опыту [77]. Действительно, коллапс альтернативных собственных состояний является ключевым свойством корковых нейронных сетей как в теории OrchOR, так и в настоящей модели. Однако теория OrchOR фокусируется на роли квантовой декогеренции в динамике микротрубочек, в то время как настоящий отчет моделирует вклад случайного электронного шума в мембранный потенциал кортикальных нейронов. Первый подход не связан с установленными механизмами обработки нейрональной информации, тогда как второй подход хорошо совместим с известным вкладом броуновского движения в результаты передачи сигналов кортикальными нейронами.

Machine Translated by Google

Хотя идея мозга как квантовой системы часто считается весьма спорной, исследователи в области вычислительной нейробиологии недавно приняли эту концепцию, чтобы добиться значительных успехов в моделировании нейронных сетей и машинном обучении [78–80], основывая сь на предыдущих попытках включить шум в модель Ходжкина и Хаксли [
Однако эти подходы, реализованные в классической вычислительной архитектуре, не допускают физического сжатия информации и высвобождения свободной энергии. Чтобы реализовать этот вычислительный процесс в инженерной архитектуре нейронной сети, необходимо построить сеть вычислительных блоков с вероятностным поведением стробирования и временными масштабами декогеренции, аналогичными мозгу млекопитающих .

В этой модели состояния вероятностных компонентов интегрируются для заполнения гамильтонова оператора. Затем оператор Гамильтона дифференцируется по всем возмущения м системы. Перераспределение энергии, возникающее в результате этого вычислительного процесса, присваивает собственные значения положению и импульсу каждого иона в системе в определенный момент времени. Этот процесс определяет состояние напряжения каждого нейрона, поскольку события квантового уровня влияют на результаты на уровне вычислительного блока. Это исследование демонстрирует, как нейроны в кортикальном активном состоянии сохраняют состояние неопределенности, физически генерируя и сжимая информацию для достижения недетерминированных результатов передачи сигналов. Эта модель вноя вляется формой квантовых вычислений при температуре окружающей среды. Есть три дополнительных способа описания этого вычислительного процесса, представленные в

родственных отчетах : В соответствии с законами термодинамики, свободная энергия должна быть затрачена на создание информации, и эта свободная энергия частично восстанавливается при сжатии информации В этой модели чистые состояния вероятностных компонент могут быть алгебраически представлены матрицей плотности [51]. Матрица плотности претерпевает унитарное изменение базиса, поскольку состояние системы возмущается окружающей ее средой в течение некоторого времени эволюции. Диагонализация матрицы плотности дает нулевой определитель, что приводит к наблюдаемым в граничной области этого многомерного распределения вероятностей.

В соответствии с законами голографии эти вероятностные составляющие чистые состояния могут быть также представлены геометрически как комплексные волны или волновые функции [59]. Эти комплексные амплитуды вероятности конструктивно и деструктивно влияют на чувствительную, определяющую заряд полимерную поверхность нервной мембраны. В результате этой физической интерференции между амплитудами вероятностей волновая функция коллапсирует и собственные значения реализуются на граничной области многомерного распределения вероятностей. Этот процесс физического кодирования информации на поверхности полимерной нейронной мембраны создает голографическую проекцию закодированного содержимого.

В соответствии с законами термодинамики энтропия всегда должна возрастать, а полная энергия системы сохраняться . Согласно классическим предположения м, большая часть свободной энергии в коре головного мозга должна рассеиваться в сторону энтропии, поскольку оптимальное состояние системы выбирается из большого распределения вероятностей, а все другие возможные состояния системы теряются . Однако наблюдаемая энергоэффективность мозга предполагает, что это не так. Моделируя систему как циклически генерирующую и сжимающую квантовую информацию, можно объяснить исключительную энергоэффективность мозга, не нарушая первый или второй закон термодинамики [17]. Этот новый подход также устанавливает глубокую связь между прогностической обработкой и термодинамическими ограничения ми квантовых вычислений [26]. Достижение разреженного популяционного кодирования посредством процесса вероятностных вычислений может привести к созданию более интеллектуальных и энергоэффективных нейронных сетей.

Таким образом, настоящая модель гамильтоновой механики дополняется этими моделями матричной механики, волновой механики и термодинамических вычислений, запускаемых программным обеспечением, которые демонстрируют один и тот же процесс генерации и сжатия информации . Действительно, кортикальные нейроны лучше описать как кубиты, кодирующие энтропию фон Неймана, а не как классические биты, кодирующие энтропию Шеннона. Эта теоретическая основа квантовых вычислений при температуре окружающей среды может не только дать полезную информацию о работе биологических систем, но и способствовать развитию инженери

Machine Translated by Google

Финансирование: Автор получил поддержку для этой работы от Западного института перспективных исследований, а также щедрые пожертвования от Джейсона Палмера, Балы Партасарати и Дэйва Паркера.

Заявление о доступности данных: все методы, материалы и данные, необходимые для воспроизведения этого исследования, включены в рукопись.

Конфликты интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов. Спонсоры не играли никакой роли в разработке исследования; при сборе, анализе или интерпретации данных; в написании рукописи; или в решении опубликовать результаты.

Ссылки

1. Софтки, WR; Кох, К. Крайне регулярная активация корковых клеток несовместима с временной интеграцией случайных ВПСП. Дж. Нейроски. 1993, 13, 334–350. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
2. Пауэрс, РК; Биндер, доктор медицинских наук. Эффективный синаптический ток и модуляция скорости срабатывания мотонейронов. Дж. Нейрофизиология. 1995, 74, 793–801. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
3. Стерн, Э.А.; Кинкейд, А.Е.; Уилсон, К.Дж. Спонтанные подпороговые колебания мембранного потенциала и вариабельность потенциала действия кортикостриатальных и стриарных нейронов крыс in vivo. Дж. Нейрофизиология. 1997, 77, 1697–1715. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
4. Дорваль А.Д.; Уайт, Дж. А. Канальный шум важен для перипороговых колебаний в энторинальных звездчатых нейронах. Дж. Нейроски. 2005, 25, 10025–10028. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
5. Хайдер Б.; Дуке, А.; Хазенстауб, Арканзас; Маккормик, Д.А. Активность неокортикальной сети in vivo генерируется посредством динамического баланс возбуждения и торможения. Дж. Нейроски. 2006, 26, 4535–4545. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
6. Бек, Дж. М.; Ма, У.Дж.; Киани, Р.; Хэнкс, Т.; Черчленд, АК; Ройтман Дж.; Шадлен, Миннесота; Лэтэм, ЧП; Пуже, А. Вероятностный коды населения для байесовского принятия решений. Нейрон 2008, 60, 1142–1152. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
7. Маоз, О.; Ткачик, Г.; Эстеки, М.С.; Киани, Р.; Шнайдман, Э. Обучение вероятностным нейронным представления мслучайным образом. подключенные цепи. Учеб. Натл. акад. наук. США 2020, 117, 25066–25073. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
8. Фаяз С.; Фахарян, Массачусетс; Газизаде, А. Представление стимула может усилить нерегулярность импульсов в подкорковых и кортикальных слоях. регионы. ПЛОС Компьютер. Биол. 2022, 18, e1010256. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
9. Ринзель, Дж.; Миллер Р.Н. Численный расчет устойчивых и неустойчивых периодических решений уравнений Ходжкина-Хаксли. Математика. Биология. 1980, 49, 27–59. [Перекрестная ссылка]
10. Роват, П. Статистика интервалов между спайками в стохастической модели Ходжкина-Хаксли: сосуществование гамма-всплесков и крайне регулярная стрельба. Нейронный компьютер. 2007, 19, 12:15–12:50. [Перекрестная ссылка]
11. Остин, Т.Д. Появление детерминистических уравнений Ходжкина-Хаксли как предела лежащего в основе механизма стохастического ионного канала. Энн. Прил. Проб. 2008, 18, 1279–1325. [Перекрестная ссылка]
12. Монтбрио, Э.; Пазо, Д. Точная теория среднего поля объясняет двойную роль электрических синапсов в коллективной синхронизации. Физ. Преподобный Летт. 2020, 125, 248101. [CrossRef] [ПабМед]
13. Голдман, Дж.С.; Куш, Л.; Аквилью, Д.; Ялчинкая, Б.Х.; Депаннемакер, Д.; Анкур, К.; Нгием, Т.-АЭ; Йирса, В.; Дестеше, А. Комплексная нейронная симуляция медленноволнового сна и высокочувствительная динамика бодрствования. Передний. Вычислить. Неврологии. 2021, 16, 1058957. [CrossRef] [ПабМед]
14. Остоич, С. Дж. Межпайковое интервальное распределение спайковых нейронов, управляемых колебательными их одними сигналами. Дж. Нейрофизиология. 2011, 106, 361–373. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
15. Армстронг, КМ; Хилле, Б. Потенциал-управляемые ионные каналы и электрическая возбудимость. Нейрон 1998, 20, 371–380. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
16. Чунг, С.-Х.; Хойлс, М.; Аллен, Т.; Куюкас, С. Исследование ионных токов через модельный мембранный канал с использованием броуновского метода. динамика. Биофиз. Дж. 1998, 75, 793–809. [Перекрестная ссылка]
17. Столл Е.А. Термодинамическая модель недетерминированных вычислений в корковых нейронных сетях. Физ. Биол. 2024, 21, 016003. [Перекрестная ссылка]
18. Борн М. Статистическая интерпретация квантовой механики. Наука 1955, 122, 675–679. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
19. Паули, В. Уберден Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. З. Физ. 1925, 31, 765–783. [Перекрестная ссылка]
20. Калдейра, АО; Легготт, А. Дж. Интегральный подход к квантовому броуновскому движению. Физ. А 1983, 121, 587–616. [Перекрестная ссылка]
21. Кальдейра, АО; Легготт, А.Дж. Квантовое туннелирование в диссипативной системе. Энн. Физ. 1983, 149, 374–456. [Перекрестная ссылка]
22. Чанг, Л.-Д.; Вакс ман, Д. Квантовое уравнение Фоккера-Планка. Дж. Физ. С 1985, 18, 5873–5879. [Перекрестная ссылка]
23. Хриплович, И.Б.; Ламоро, С.К. Нарушение СР без странности: электрические дипольные моменты частиц, атомов и молекул; Springer: Берлин, Германия, 2012 24.

Фейнман Р.П. Силы в молекулах. Физ. Ред. 1939, 56, 340. [CrossRef]

25. Эстев, Дж.Г.; Фальчето, Ф.; Гарсия Канал, К. Обобщение теоремы Хеллмана-Фейнмана. Физ. Летт. А 2010, 374, 819–822. [Перекрестная ссылка]
26. Столл, Е.А. Энергоэффективный процесс недетерминированных вычислений приводит к появлению прогнозирующих моделей и исследовательского поведения. Передний. Когнит. 2024, 2, 1171273 [CrossRef]
27. Бете Х.А. Электромагнитный сдвиг энергетических уровней. Физ. Ред. 1947, 72, 339. [CrossRef]
28. Гольштейн Б.А. Ван-дер-ваальсово взаимодействие. Являюсь. Дж. Физ. 2001, 69, 441–449. [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

29. Ландауэр Р. Необратимость и тепловыделение в вычислительном процессе. IBM J. Res. Dev. 1961, 5, 183–191. [Перекрестная ссылка]

30. Берут А.; Аракелян А.; Петросян А.; Силиберто, С.; Дилленшнайдер, Р.; Лутц, Э. Экспериментальная проверка теории Ландауэра. принцип, связывающий информацию и термодинамику. Природа 2012, 483, 187–189. [Перекрестная ссылка]

31. Джун, Ю; Гаврилов М.; Бекхёфер, Дж. Высокоточная проверка принципа Ландауэра в ловушке обратной связи. Физ. Преподобный Летт. 2014, 113, 190601. [CrossRef]

32. Ян, LL; Сюн, ТП; Рехан, К.; Чжоу, Ф.; Лян, Д.Ф.; Чен, Л.; Чжан, JQ; Ян, В.Л.; Ма, Ж; Фэн, М. Одноатомная демонстрация квантового принципа Ландауэра. Физ. Преподобный Летт. 2018, 120, 210601. [CrossRef] [ПабМед]

33. Фон Нейман Дж. Математические основы квантовой механики; Шпрингер: Берлин, Германия, 1932 г.; Том 205, с. 116277.

34. Каллен, Х.Б.; Велтон, Т.А. Необратимость и обобщенный шум. Физ. Ред. 1951, 83, 34. [CrossRef]

35. Тегмарк, М. Почему мозг, вероятно, не является квантовым компьютером. Инф. наук. 2000, 128, 155–179. [Перекрестная ссылка]

36. Кубо Р. Теорема о флуктуационно-диссипационной теории. Реп. прог. Физ. 1966, 29, 255–284. [Перекрестная ссылка]

37. Мартюшев, Л.М.; Назарова А.С.; Селезнев В.Д. К проблеме минимума производства энтропии в неравновесном стационарном состоянии. Дж. Физ. А 1966, 40, 371–380. [Перекрестная ссылка]

38. Таубе, Дж. С. Интервальный анализ Interspike выявляет нерегулярные модели импульсов с короткими, но не длинными интервалами в клетках направления головы крысы. Дж. Нейрофизиология. 2010, 104, 1635–1648. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

39. Найто, Т.; Садакане, О.; Окамото, М.; Сато, Х. Настройка ориентации подавления объемного озвучания в латеральном коленчатом теле и первичной зрительной коре кошки. Нейронаука 2007, 149, 962–975. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

40. Авербек, Б.Б.; Лэтэм, ЧП; Пуже, А. Нейронные корреляции, популяционное кодирование и вычисления. Нат. Преподобный Нейроски. 2006, 7, 358–366. [Перекрестная ссылка]

41. Шадлен, Миннесота; Ньюсом, У.Т. Переменная разрядка корковых нейронов: значение для связности, вычислений и кодирование информации. Дж. Нейроски. 1998, 18, 3870–3896. [Перекрестная ссылка]

42. Ли, Д.; Порт, Нидерланды; Крузе, В.; Георгопулос А.П. Вариабельность и коррелированные шумы в разряде нейронов двигательных и теменных областей коры приматов. Дж. Нейроски. 1998, 18, 1161–1170. [Перекрестная ссылка]

43. Кюи, Х.; Андерсон, Р.А. Различные представления потенциальных и выбранных двигательных планов в отдельных теменных областях. Дж. Нейроски. 2011, 31, 18130–18136. [Перекрестная ссылка]

44. Джексон, А.; Мавури, Дж.; Фетц, Э.Э. Взаимосвязь между одними и теми же клетками моторной коры и мышцами рук во время тренировочного задания, бесплатно поведение и естественный сон макак. Дж. Нейрофизиология. 2007, 97, 360–374. [Перекрестная ссылка]

45. Руссо А.А.; Биттнер, СР; Перкинс, С.М.; Сили, Дж. С.; Лондон, БМ; Лара, АХ; Мири, А.; Маршалл, Нью-Джерси; Кон, А.; Джесселл, ТМ; и др. Моторная кора головного мозга вставляет мышечные команды в запутанную реакцию населения. Нейрон 2018, 97, 953–966. [Перекрестная ссылка]

46. Хьюбель, Д.Х.; Визель Т. Н. Рецептивные поля одиночных нейронов в триарной коре кошки. Дж. Физиол. 1959, 148, 574–591. [Перекрестная ссылка]

47. Мендонса, PR; Варгас-Кабальеро, М.; Эрдели, Ф.; Сабо, Г.; Полсен, О.; Робинсон, НР. Стохастическая и детерминированная динамика нерегулярных импульсов в корковых тормозных интернейронах. eLife 2016, 5, e16475. [Перекрестная ссылка]

48. Виммер, К.; Компте, А.; Роксин, А.; Пейшото, Д.; Ренарт, А.; де ла Роша, Ж. Динамика сенсорной интеграции в иерархической сети объясняет вероятностные выборы в кортикальной области МТ. Нат. Коммун. 2015, 6, 6177 [CrossRef] [ПабМед]

49. Меллони, Л.; Швиджик, СМ; Мюллер, Н.; Родригес, Э.; Сингер, В. Ожидания меняют характеристики и время электрофизиологических корреляторов перцептивного осознания. Дж. Нейроски. 2011, 31, 1386–1396. [Перекрестная ссылка]

50. Хуанг, С.; Хонг, С.; Де Шуттер, Э. Нелинейные токи утечки влияют на физиологию нейронов млекопитающих. Передний. Клетка. Неврологии. 2015, 9, 432.

51. Столл, Е.А. Случайный электрический шум управляет недетерминированными вычислениями в кортикальных нейронных сетях. bioRxiv 2022. [CrossRef]

52. Исодзима, Ю; Исошима, Т.; Нагай, К.; Кикучи, К.; Накагава, Х. Сверхслабая биохимическая люминесценция, обнаруженная в гиппокампе крысы. ломтики. Нейроотчет 1995, 6, 658–660. [Перекрестная ссылка]

53. Кобаяши, М.; Такеда, М.; Сато, Т.; Ямадзаки, Ю; Канеко, К.; Ито, К.; Като, Х.; Инаба, Х. Визуализация in vivo спонтанного излучения сверхслабых фотонов из мозга крысы коррелирует с энергетическим метаболизмом головного мозга. Неврологии. Рез. 1999, 34, 103–113. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

54. Катаока, Ю; Цуи, Ю; Ямагата, А.; Ниигаки, М.; Хирохата, Т.; Оиси, Н.; Ватанабэ, Ю Зависимое от активности окисление нервной ткани испускает собственные сверхслабые фотоны. Биохим. Биофиз. Рез. Коммун. 2001, 285, 1007–1011. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

55. Тан, Р.; Дай, Дж. Пространственно-временная визуализация индуцированной глутаматом биофотонной активности и передачи в нейронных цепях. PLoS ONE 2014, 9, e85643. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

56. Амароли, А.; Марколи, М.; Венturини, А.; Пассалакква, М.; Агнати, Л.Ф.; Синьор, А.; Раффетто, М.; Маура, Г.; Бенедиченти, С.; Черветто, К. Лазерные фотоны ближнего инфракрасного диапазона вызывают высвобождение глутамата из нервных окончаний коры головного мозга. Журнал Биофотоника 2018, 11, e201800102. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

57. Насер, Массачусетс; Хо, доктор медицины; Мартин, частный детектив; Хэмблин, MR; Ку, Б.Б. Увеличение функциональной связи внутривнутренних нейронных сетей при хроническом инсульте после лечения транскраниальной фотобиомодуляцией красного/ближнего инфракрасного диапазона. Фотобиомодуль. Фотомед. Лазерная хирургия. 2020, 38, 115–131. [ПабМед]

58. Тан, Х.; Раджгуру, С.; Янг, Х.; Ся, Н.; Сток, СР; Сяо, Х.; Рихтер, К.П. Лучистая энергия, необходимая для инфракрасной нейронной стимуляции. наук. Отчет 2015, 5, 13273. [CrossRef] [ПабМед]

59. Столл, Е.А. Моделирование электронной интерференции на мембране нейрона дает голографическую проекцию репрезентативной информации. содержание. bioRxiv 2022. [CrossRef]

Machine Translated by Google

60. Леви, ВБ; Калверт, В.Г. Коммуникация потребляет в 35 раз больше энергии, чем вычисления в коре головного мозга человека, но обе затраты необходимо предсказать количество синапсов. Учеб. Натл. акад. наук. США 2021, 118, e2008173118. [Перекрестная ссылка]

61. Бузсаки, Г.; Драгун, А. Нейрональные колебания в корковых сетях. Наука 2004, 304, 1926–1929. [Перекрестная ссылка]

62. Энгель, А.К.; Сингер, В. Временная привязка и нейронные корреляты сенсорного осознания. Тенденции Ког н. наук. 2001, 5, 16–25. [Перекрестная ссылка]

63. Стейси, туалет; Криг ер, А.; Литт, Б. Привлечение сети к когерентным колебаниям в компьютерной модели гиппокампа. Дж. Нейрофизиология. 2011, 105, 1464–1481. [Перекрестная ссылка]

64. Уиттингтон, Массачусетс; Каннингем, Миссури; ЛеБо, FEN; Ракка, К.; Трауб Р.Д. Множественное происхождение корковой гамма-ритма. Дев. Нейробиол. 2010, 71, 92–106. [Перекрестная ссылка]

65. Тимофеев И.; Баженов М.; Сеньор, Дж.; Сейновский, Т. Нейрональная синхронизация и таламокортикальные ритмы во сне, бодрствовании и эпилепсии. В «Основных механизмах эпилепсии» Джаспера, 4-е изд.; Издательство Оксфордского университета: Оксфорд, Великобритания, 2012.

66. Ганзель, К.С. Нейронная синхронность в корковых сетях: Механизмы и последствия для нейронной обработки и кодирования информации. Передний. Интегр. Неврологии. 2022, 16, 900715. [CrossRef]

67. Астумян Р.Д.; Мосс, Ф. Конструктивная роль шума в переносе, вызванном флуктуациями, и стохастическом резонансе. Хаос 1998, 8, 533–538. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

68. Лукарини, В. Стохастический резонанс в неравновесных системах. Физ. Ред. Е 2019, 100, 062124. [CrossRef]

69. Линднер, Б.; Шиманский-Гейер, Л. Аналитический подход к стохастической системе Фитца-Хью-Нагумо и когерентного резонанса. Физ. Ред. Е 1999, 60, 7270–7276. [Перекрестная ссылка]

70. Линднер, Б.; Гарсия-Охалво, Ж.; Нейман, А.; Шиманский-Гейер, Л. Эффекты шума в возбудимых системах. Физ. Республика 2004 г., 392, 321–424. [Перекрестная ссылка]

71. Валенти, Д.; Орелло, Г.; Спаньоло, Б. Динамика системы Фитц Хью-Нагумо, подверженной автокоррелированному шуму. Евро. Физ. Дж. Б. 2008, 65, 443–451. [Перекрестная ссылка]

72. Суражевский И.А.; Демим, Вирджиния; Ильясов А.И.; Емельянов А.В.; Никируй, К.Э.; Рыльков В.В.; Щаников С.А.; Борданов И.А.; Герасимова С.А.; Гусейнов Д.В.; и др. Сохранение и восстановление состояния памяти с помощью шума в мемристивной нейроморфной сети. Хаос 2021, 146, 110890.

73. Гейслер, К.; Брюнель, Н.; Ван, ХЖ. Вклад внутренней мембранной динамики в быстрые колебания сети с нерегулярной нейрональные разряды. Дж. Физиол. 2005, 94, 4344–4361.

74. Брюнель Н. Динамика разреженно связанных сетей возбуждающих и тормозных импульсных нейронов. Дж. Компьютер. Неврологии. 2000, 8, 183–208. [Перекрестная ссылка]

75. Чибра, Г.; Дэвис, Г.; Спратлинг, МВт; Джонсон, М.Х. Гамма-колебания и обработка объектов в мозгу младенца. Наука 2000, 290, 1582–1585. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

76. Херрманн, CS; Найт Р.Т. Механизмы человеческого внимания: Событийные потенциалы и колебания. Неврологии. Биоповедение. Преподобный. 2001, 25, 465–476. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

77. Хамерофф, СР; Пенроуз, Р. Сознание во Вселенной: обзор теории «OrchOR». Физ. Жизнь Преп. 2014, 11, 39–78. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

78. Халид, М.; Ву, Дж.; Али, ТМ; Амин, Т.; Альтахер, А.С.; Мустафа, А.А.; Чжу, К.; Сюн, Р. Вычислительное моделирование кортико-гиппокампа с использованием квантовых нейронных сетей. Передний. Вычислить. Неврологии. 2020, 14, 80. [CrossRef] [ПабМед]

79. Ван, З.; Сюй, М.; Чжан, Ю. Квантовая импульсно-связанная нейронная сеть. Нейронная сеть. 2022, 152, 105–117. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

80. Джесвал, СК; Чаквертри, С. Последние разработки и приложения в квантовых нейронных сетях: обзор. Арх. Вычислить. Методы англ. 2019, 26, 793–807. [Перекрестная ссылка]

81. Адэр Р.К. Шум и стохастический резонанс в потенциал-управляемых ионных каналах. Учеб. Натл. акад. наук. США 2003, 100, 12099–12104. [Перекрестная ссылка]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Предложения по расчету сетевой добротности

Марина Бершадская 1,†, Божидар Иванкович 2,* ,† и Марко Пушич 2,†

1 Факультет компьютерных наук, Инженерный колледж Шамун (SCE), Бялик, 56, Беэр-Шева 8410802, Израиль; marinab@ac.sce.ac.il
Hrvatsko Zagorje Университет
2 прикладных наук Крапины, Šetalište Hrvatskog Narodnog Preporoda 6, 49000 Крапина, Хорватия ; marko.pusic@vhzk.hr

* Переписка: bozidar.ivankovic@vhzk.hr; Тел.: +385-98-407-189
† Эти авторы внесли равный вклад в эту работу.

Аннотация : Мы используем термин «хорошее качество сети» для значения , которое мы определяем для сети, встроенной в данную среду, как метрику, описывающую пригодность этой сети для удовлетворения спроса. Предложены три формулы для расчета метрики по трем значениям переменных . Первая переменная учитывает части окружающей среды, на которые влияет сеть. Для этих частей среды мы определяем значение, которое измеряет затраты пользователей, отказывая им в использовании сети. И последнее, но не менее важное: учитываются затраты на обслуживание сети. Результаты получены после сосредоточения внимания на инфраструктуре и транспортных сетях , но могут быть использованы и для других типов сетей.

Ключевые слова: оценка сети; сетевое добро; центр спроса; инерция сети

1. Введение

Сеть проектируется с учетом требований конкретной среды. Есть три
Важные факторы, которые следует учитывать при оценке сети в любой среде: - Диапазон
покрытия сети внутри среды; - доступность сети для пользователей, что
отражается на расходах , понесенных пользователем; - Затраты на техническое обслуживание, связанные с сетью.

Если спрос превышает пропускную способность сети, некоторые области могут не обслуживаться , обслуживание может стать более дорогим или могут увеличиться расходы на техническое обслуживание. Кроме того, несколько сетей могут быть встроены в одну и ту же среду для удовлетворения потребностей среды.

Чтобы оценить функцию сети, в этой статье мы определили функцию «качественности сети» и предложили формулы для расчета значений качества и сравнения двух или более инфраструктурных сетей, встроенных в одну и ту же среду. Мы также тор-
достаточно доказать все теоремы, предложения , леммы и следствия , поскольку в доступной литературе подобный подход до сих пор не применялся .

В настоящее время преобладающим термином, используемым для оценки функций сети, является «качество обслуживания » (QoS), и за прошедшие годы по этой теме были опубликованы многие миллионы статей . Недавно опубликованная работа Канеллопулоса и др. в [1] представлен обширный обзор сетевых архитектур и протоколов. Однако авторы представляют только качественное сравнение сетевых требований для некоторых приложений «умного города» (SCA) и не присваивают общий балл, который позволил бы ранжировать их среди альтернатив. Каракус и Дуррес и написали исчерпывающий обзор [2] для всестороннего изучения QoS в сетях программно-определяемых сетей (SDN)/OpenFlow. Авторы дают подробный обзор архитектуры SDN и разделяют 43 различных метода по двум подходам для поддержания способности сети предоставлять необходимые услуги для выбранного сценария трафика. Хотя очевидно, что мягкая система качества и результатов (QoF) превосходит жесткий подход QoF, количественные показатели не определены.

check for updates

Цитирование: Бершадский, М.; Иванкович, Б.; Пушич, М. Сетевое добро Предложения по исчислению. Прикладная математика 2024, 4, 828–842. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030044

Академический редактор: Такаоки Хиби

Поступила: 12 января 2024 г.
Пересмотрена: 10 июня 2024 г.
Принята: 20 июня 2024 г.
Опубликована: 2 июля 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария . Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Machine Translated by Google

В других работах встраивание сетей обсуждается с точки зрения решения сложных проблем после определения сети. В [3] анализ социальных сетей (SNA) представлен как мощный метод построения и поддержания социальных отношений внутри сети.
В социальных сетях пользователи взаимодействуют и общаются друг с другом, а также публикуют персонализированный контент. В [4] экспериментально изучается новое встраивание динамических атрибутированных сетей (DANE) для решения задач обучения, таких как классификация узлов, кластеризация сетей и прогнозирование связей. Встраивание сети использует близость узлов для изучения низкоразмерного векторного представления узлов для каждого узла в существующей социальной сети и, следовательно, изучает, как устанавливаются и развиваются социальные отношения. Однако значения СНС также приводятся только качественно, поскольку оценивается DANE. В [5] Салхи и др. рассматривайте сети как средство оценки структурной изоляции и интеграции узлов, оценки их доступности и возможности навигации в графе, а также прогнозирования потенциальных структурных изменений, которые могут повлиять на эволюцию сети. Однако, опять же, не предоставлено никаких количественных значений для измерения изоляции или интеграции в данном сценарии.

Областью применения, которую мы выбрали для демонстрации нашего подхода, являются сети общественного транспорта. Обычно сети транспортной инфраструктуры возникают естественным образом по мере увеличения спроса в окружающей среде. Однако существующая сеть не может вовремя удовлетворить потребности окружающей среды. В последнем разделе мы представили несколько альтернативных маршрутов общественного транспорта, которые могли бы обеспечить вид транспорта с достаточным объемом и скоростью, чтобы сделать общественный транспорт максимально привлекательным. Несмотря на поиск в доступной литературе, нам не удалось найти инструмент количественного отбора эвристически нарисованных вариантов.

Богданова и др. исследовали транспортные возможности комфортной городской среды в [6], где «сетевой комфорт» измеряется количеством пользователей, имеющих расстояние менее 500 (или 800) метров пробег а среди всего населения. Рейтинг безопасности сети общественного транспорта рассчитывается путем деления количества граждан, пострадавших в общественном транспорте, на общее количество пассажиров, пользующихся им. Транспортные системы становятся все более важными для современной экономики, как отмечает Колон и др. описано в [7]. В [8]. Гулио предлагает инструмент принятия решений, который предлагает несколько альтернативных сценариев реконфигурации транзитных услуг. Каждый сценарий включает в себя набор существующих линий, которые необходимо закрыть, и соответствующий профиль задержки, вызванный закрытием каждой линии. Другое исследование, проведенное Wang et al. [9] решает проблему несбалансированного городского развития путем повышения эффективности транспорта, снижения заторов и аварийности, а также координации транспортных перевозок. Куо и др. в [10] подчеркивают важность легкодоступного общественного транспорта, который обеспечивает спрос в режиме реального времени, предлагает удобные и высококачественные
В [11] Нес и др. представить модель оптимизации для выбора маршрутов, назначения частот и определения количества пассажиров в существующей сети путем создания набора возможных маршрутов.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 мы представляем нашу терминологию и обрисовываем методологию, включая леммы и теоремы, а также их доказательства, которые подчеркивают наш подход. В разделе 3 мы представляем результаты и обсуждаем их. В следующем разделе мы предлагаем пример предлагаемого нами подхода (раздел 4), а в заключительном разделе мы предлагаем выводы (раздел 5).

2. Терминология и основная теория. В этом

разделе мы определяем термины, которые затем используем в теоремах и леммах. Мы черпаем терминологию из области теории множеств, теории графов и аналитического геометрического исчисления.
Во-первых, мы предполагаем, что любая среда находится в пределах некоторой «основания»: государства, континента или Земли в целом. Земля представляет собой двумерную плоскость.

Определение 1 (Сетевая среда и размер). Сетевая среда U — это часть территории, однозначно определяемая своими административными границами или любым другим уникальным способом, который определяет, какие местоположения находятся внутри, а какие за пределами территории. Площадь U обозначается μ(U) и измеряется в квадратах.

Machine Translated by Google

Сетевая среда разделена на зоны, состоящие из точек спроса, где концентрируется спрос. Разные зоны не имеют одних и тех же точек спроса: математически они не пересекаются.

Определение 2 (Зона спроса и точка спроса). Зона спроса Ti , i = 1, . . . , n является частью сетевое окружение : Ti U. Далее, для всех i, j, U = $\bigcup_{i=1}^{n}$ Ti и Ti Tj = для i≠ j.

Точка спроса Pij Ti , j = 1, . . . , m(i) — точка с положительным ассоциированным значением Q(Pij), которая спрос сконцентрирован в Pij.

Количество точек спроса равно m(i) и варьируется от зоны к зоне . Формальное определение дано ниже .

Определение 3. Предположим, что для каждого Ti существует m(i) N и конечное множество N^{-} = {1, 2, . . . , m(i)} с инъективной функцией $p_i : N^{-}$ Ti , обозначаемой pi(j) = Pij, и pi(j)≠ pi(k), когда j≠ k. Тогда Qi : $p_i(N^{-})$ R+ — это объем спроса, заданный в точке спроса Pij, обозначаемый Qi(Pij) = Qij.

Чтобы вычислить качество сети, нам нужны координаты — пара чисел, которые однозначно определяет положение точки на плоскости.

Определение 4 (Скоординированная сетевая среда). Среда называется согласованной, если любая точка может быть однозначно определена парой действительных чисел (x, y).

Координаты необходимы для алгебраических вычислений, и мы гарантируем это доказывая следующую лемму .

Лемма 1. Любое сетевое окружение можно скоординировать.

Доказательство леммы 1. Зададим известное место в среде парой (0, 0). Мы установили направление запад-восток через (0, 0) как абсциссу и направление юг-север как ось ординат. Тогда любая точка P U однозначно определяется парой P (x, y). Обычно это Pij = (xij, yij).

□

Наша цель — оценить сеть, и для этого нам нужно алгебраически определить «отрезок» между двумя точками.

Определение 5. Отрезок между двумя точками A и B с координатами (xA, yA) и (xB, yB) соответственно представляет собой множество, состоящее из всех точек на прямой, соединяющей две точки.

$$\overline{AB} = \{P : P = (1 \quad t)A + tB, t \quad [0, 1]\}. \tag{1}$$

В терминологии графов [12] граф — это пара G = (N, E) , определенная заданным набором узлов N и набором ребер E , заданными в виде отношения E N × N. Это означает, что E — это множество пар, взятое из множества всех возможных пар всех узлов, заданных в N. В нашей статье сетью называется связный граф G = (N, E), где E — множество отрезков, а N — множество их конечных точек. Поскольку E N × N, сеть определена корректно, и мы формально докажем это в следующей теореме, где E = N × N.

Теорема 1. Любой набор отрезков определяет граф.

Доказательство теоремы 4. Для заданного набора отрезков $\{\overline{AiBi}, i = 1, 2, \ldots s\}$, мы обозначаем каждый отрезок $\overline{AiBi}$ = (Ai , Bi) как элемент множества ребер E = {(Ai , Bi) i = 1, 2, . . .s}}, с |E| = c. Далее каждый отрезок AiBi дает две точки в наборе узлов N = {Ai , Bi i = 1, 2, . . .s}} с |N| 2s элементов, так как разные сегменты могут иметь одну конечную точку в

Machine Translated by Google

общий. Тогда данный набор отрезков порождает $G = (N, E)$ с $E = N \times N \setminus N \times N$ в хорошо известном смысле определения графа. □

Путь — это последовательность связанных сегментов. Сегменты пути $\{\overline{A_iB_i}, i = 1, \ldots, p\}$ считаются связанными, если конечная точка одного сегмента совпадает с начальной точкой следующего сегмента или конечной точкой пути: $B_i = A_{i+1}, i = 1, \ldots, p-1$. На рисунке 3 показан путь. Нам понадобится термин пути для следующего определения.

Определение 6 (Связный граф). Граф связен, если любая пара узлов имеет путь, начинающийся в одном и заканчивается в другом узле.

Концепция связного графа необходима для определения сети в нашей статье, поскольку не каждый граф является сетью. Определение 6 подводит нас к определению сети, которую мы оцениваем в нашей статье, которая приведена ниже.

Определение 7 (Сеть). Сеть — это связный граф, состоящий из множества сегментов.

В следующей теореме мы доказываем, что каждый сегмент, определенный уравнением (1), соответствует/отвечает уникальному уравнению, полученному из граничных точек сегмента.

Теорема 2. Пусть $A = (x_A, y_A)$ и $B = (x_B, y_B)$ — точки, заданные в среде, покрытой координатной сеткой. Тогда отрезок $\overline{AB}$ определяется как множество

$$\overline{AB} = \{(x, y) \in [x_A, x_B] \times [y_A, y_B] : (y_B - y_A)x + (x_A - x_B)y + x_By_A - x_Ay_B = 0\}. \quad (2)$$

Доказательство теоремы 2. Из леммы 1 и уравнения (1) получаем $x - x_A = t(x_B - x_A)$, $y - y_A = t(y_B - y_A)$ и $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t$. Поскольку $t \in [0, 1]$, имеем $(x, y) \in [x_A, x_B] \times [y_A, y_B]$. Теперь $(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$ дает уравнение (2).

Далее, из уравнения (2) следует, что $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$. Если $(x, y) \in [x_A, x_B] \times [y_A, y_B]$, тогда $t \in [0, 1]$, и уравнение (1) приводит к немедленному результату. □

Рисунок 1 иллюстрирует положение различных точек вне отрезка относительно него. Доказав уравнение (2), теорема 2 позволяет нам вычислить квадрат расстояния между точкой и отрезком. В следующей теореме мы выводим формулы квадрата расстояния для положения каждой точки, изображенной на рисунке 1.

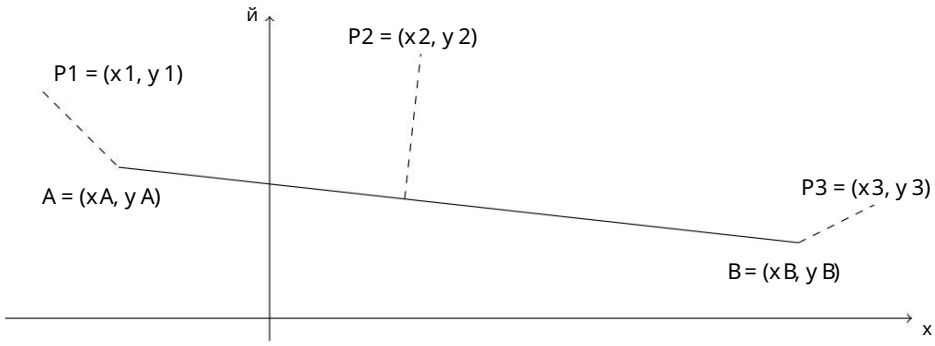


Рисунок 1. Расстояния от сегмента, связанные с расположением зон спроса.

Теорема 3. Квадрат расстояния между точкой $P = (x, y) \in \{P1, P2, P3\}$ и отрезком $\overline{AB}$ определяется выражением

$$d^2_{\text{дня}}(P, \overline{AB}) = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2, \text{ если } (x - x_A)(x_B - x_A) + (y - y_A)(y_B - y_A) < 0 \quad (3)$$

$$d^2_{\text{дня}}(P, \overline{AB}) = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2, \text{ если } (x - x_B)(x_A - x_B) + (y - y_B)(y_A - y_B) < 0 \quad (4)$$

Machine Translated by Google

или

$$\text{дня}^2(P, AB) = + \frac{[(yB - yA)x + (xA - xB)y + xByA - xAyB]^2}{(yB - yA)^2 + (xA - xB)^2} \quad (5)$$

в любом другом случае.

Уравнение (5) получается после того, как мы определим AB как линейная комбинация векторов $i = (1, 0) - (0, 0)$ и $j = (0, 1) - (0, 0)$, представляющие единичные шаги в восточном и северном направлениях соответственно. Тогда вектор AB

$$\text{задается формулой } AB = (xB \quad (6)$$

$xA)\ i + (yB - yA)\ j$, где $A = (xA, yA)$ и $B = (xB, yB)$ уже определены. Косинус угла (PAB) с вершиной A определяется формулой

$$\text{потому что}(PAB) = \frac{AP \cdot AB}{AP2 \cdot AB2}. \quad (7)$$

Здесь отметим, что $i \cdot j = 0$ и $i^2 = j^2 = 1$. Кроме того, $\cos(PAB) < 0$ для $90 < PAB \leq 180$, и $\cos(PAB) > 0$ для $0 \leq PAB < 90$.

Кроме того, мы берем векторное произведение $i \times j$ с $i \times j = -j \times i$ и площадью $|i \times j| = 1$. А именно, $i \times j$ — вектор, перпендикулярный i и j, поэтому он не принадлежит фону среды. Далее следует доказательство теоремы 3. Более подробную информацию о векторных произведениях можно найти в [13].

Доказательство теоремы 3. В случае $P = P1$ имеем $AP \cdot AB < 0$, и тогда уравнение (3) справедливо. Если $P = P3$, то $BP \cdot BA < 0$ и уравнение (4) справедливо.

В остальных случаях приравниваем площади треугольника (PAB), рассчитанные двумя подходами:

$$\frac{1}{2} \cdot d(P, AB) \cdot |AB| = \frac{1}{2} |AP \times BP|, \quad (8)$$

где векторное произведение вычисляется в трехмерном пространстве после вложения среды U в смысле $P = (x, y, 0)$. Абсолютное значение в правой части уравнения (8) равно

$$\begin{aligned} &|[(x - xA)\ i + (y - yA)\ j] \times [(x - xB)\ i + (y - yB)\ j]| = \\ &|x(yA - yB) + y(xB - xA) + xAyB - xByA| \cdot |i \times j| = |(yB - yA)x \\ &+ (xA - xB)y + xByA - xAyB|, \end{aligned} \quad (9)$$

потому что площадь $|i \times j| = 1$. В левой части уравнения (8) имеем

$$d(P, AB) \cdot \sqrt{(xA - xB)^2 + (yA - yB)^2}. \quad (10)$$

Подставив уравнения (9) и (10) в уравнение (8), после приведения в порядок получим (5). □

В определении 2 мы определяем точку спроса как точку с присвоенным ей положительным номером, которая представляет спрос в этой точке. Важно отметить, что не каждый балл имеет значение спроса. Согласно определению 2, зона спроса содержит только конечное число точек спроса. Если в точке в зоне спроса нет спроса, это не точка спро

3. Результаты и обсуждение.

В этом разделе мы объясняем основы нашей теории, начиная с зонального центра спроса. Каждая зона спроса имеет уникальную точку центра спроса. Эта точка рассчитывается аналогично расчету центра тяжести в физике. Здесь расчет дан в виде следующей теоремы.

Machine Translated by Google

Теорема 4 (Зона центра спроса). Каждая зона спроса Ti имеет уникальную точку центра спроса Pi с координатами Pi = (xTi , yTi), рассчитанную по формуле

$$xTi = \frac{Qi1 \cdot xi1 + Qi2 \cdot xi2 + \cdots + Qim(i) \cdot xim(i)}{Q(Ti)}$$
$$yTi = \frac{Qi1 \cdot yi1 + Qi2 \cdot yi2 + \cdots + Qim(i) \cdot yim(i)}{Q(Ti)}, \quad (11)$$

где $Q(Ti) = Qi1 + Qi2 + \cdots + Qim(i)$ – общий спрос зоны, сосредоточенный в Pi .

Количество точек спроса внутри Ti зависит от Ti и поэтому обозначается m(i).

Доказательство теоремы 4. Докажем вычисление координат x по уравнению (11), взяв точки P1 := Pi1 и P3 := Pi3 с рисунка 1. Если предположить, что масса Qi1 > Qi3 , то xi1 и их центр тяжести xi13 расположены по оси абсцисс, как показано на рисунке 2. xi3 ,



Рисунок 2. Расчет центра спроса с двумя точками спроса.

Центр xi13 «качалок» на рисунке 2 должен удовлетворять следующему закону «баланса»:

$$Q(Pi1) \cdot (xi13 \quad xi1) = Q(Pi3) \cdot (xi3 \quad xi13). \quad (12)$$

Согласно уравнению (12), положение абсцисс центра тяжести равно

$$xi13 = \frac{Ци1xi1 + Ци1xi1}{Ци1 + Ци1}. \quad (13)$$

Далее мы расширяем расчет, включив вне его P2 := Pi2 . Предполагая, что Q(Pi2) Qi1 + Qi3 , мы получим центр тяжести между (13) с Qi1 + Qi3 и P2 := Pi2 с Q(Pi2):

$$= \frac{Qi1xi1 + Qi3xi3 + Qi2xi2 \; xi132}{Ци1 + Ци3 + Ци2}. \quad (14)$$

Продолжая, получаем предпоследний центр тяжести:

$$xi1...[m(i) \quad 1] = \frac{\sum_{j=1}^{м(i) \quad 1} Кийксидж}{\sum_{j=1}^{м(i) \quad 1} Кидж}. \quad (15)$$

Вместе с последней точкой спроса мы достигаем уравнения (11) (эту процедуру обычно называют «обдумывающим средним»).□

Квадратное расстояние между зоной спроса и сетью — это минимальное квадратное расстояние между центром зоны спроса и сегментом сети. Следующая теорема гарантирует существование и единственность.

Теорема 5. Для данной сети $\sum_{j=1}^{c} \overline{AjBj}$, и для каждого Pi , где i = 1, . . . , n, существует

$$я^{2\,2\,d = d}(Pi) = \min_{дж}\{d^{2}(Pi , \overline{AjBj})\} \text{ для каждого } i = 1, \ldots, \quad н. \quad (16)$$

Machine Translated by Google

В приведенном ниже доказательстве мы показываем индукцию как предложение для программных приложений. В разделе «Пример» мы используем только инструмент Excel для расчета минимального расстояния, хотя количество сегментов и зон велико.

Доказательство теоремы 5. Поскольку сеть конечна, минимальное расстояние всегда существует. Далее проводим индукцию по индексу j, 1 j s.

Для базовой индукции j = 1 имеем $d_2(Pi, A1B1) = \min\{d_2(Pi, A1B1)\}$. Для j = 2, берем $d = \min\{d_2(Pi, A2B2), \min\{d_2(Pi, AjBj)\}\} = \min\{d_2(Пи, AjBj)\}$.

Для шага j = s 1 полагаем, что для графа AjBj существует $j=1$

$$д_я^2 = \min_{j\ s\ 1}\{d^2(Пи, AjBj)\}.$$

Если j = s, мы отделяем $AjBj = AjBj\ AsBs$, и тогда у нас есть $j=1\ j=1$

$$д_я^2 = \min\{\min_{j\ s\ 1}\{d^2(Pi, AjBj)\}, d_я^2(Пи, АсБс)\}$$

$$= \min_{j\ s}\{д^2(Пи, AjBj)\},$$

для каждого i = 1, . . . , н. Доказано, что для каждой зоны Fi существует квадрат расстояния с центром спроса в точке Pi . Оно уникально, поскольку если минимум существует, то это всегда только одно значение. □

Далее мы вводим «инерцию» зоны спроса. Напоминаем, что в общей концепции качества сети более высокий балл указывает на лучшее сетевое обслуживание в среде.

Чтобы определить добротность сети, мы вычисляем инерцию зоны спроса, которая «тяготеет» к сети. Инерция зоны спроса определяется путем умножения спроса зоны на минимальное квадратное расстояние между центром зоны спроса и сегментом сети. Сформулируем инерцию зоны спроса, используя следующее определение.

Определение 8 (Инерция зоны спроса). Инерция i-й зоны спроса равна продукту

$$Mi = Q(Ti) \cdot d_я^2, \quad я = 1, \ldots, н, \tag{17}$$

где d_2 рассчитывается по уравнению (16), а Q(Ti) рассчитывается по теореме 4. i

Следует отметить, что при расчете инерционности системы учитываются не все зоны, где есть спрос на сетевую услугу. Чтобы использовать сетевой сервис, их пользователи должны подключиться к сети самостоятельно.

В инфраструктурной сети два типа расстояния влияют на выбор пользователем сети для оказания услуги. Небольшое расстояние привлекает пользователя к выбору предлагаемой сети среди других вариантов. Например, если автобусная остановка находится рядом с чьей-то квартирой, он будет использовать только автобус вместо своего автомобиля. И наоборот, большее расстояние — это предел, за которым пользователь будет косвенно использовать данную сеть. В следующем определении мы формально определяем оба типа расстояний: гравитирующие и притягивающие расстояния и зоны.

Определение 9 (Притягивающие и притягивающие зоны и расстояния). Зона спроса Ti , где i = 1, . . . , n, тяготеет к сети тогда и только тогда, когда di < D на расстоянии тяготения D, которое является величиной, определенной заранее.

Зона спроса Tj , при j = 1, . . . , n, притягивается сетью тогда и только тогда, когда dj < d на расстоянии притяжения d, которое также является значением, определенным заранее.

Machine Translated by Google

Дальнейшее обсуждение d и D, связанных с сетями общественного транспорта, можно найти в [14].
Значение D представляет собой приемлемое расстояние до двух километров, которое можно пройти, чтобы добраться до сети. В то же время d — это расстояние в несколько сотен метров, которое пользователь готов пройти вместо того, чтобы использовать какой-либо другой вид транспорта.

Общая инерция сети представляет собой сумму инерции всех тяготеющих зон спроса. Качество сети определяется тем, насколько низка ее сетевая инерция. Простой пример показан на рисунке 3.

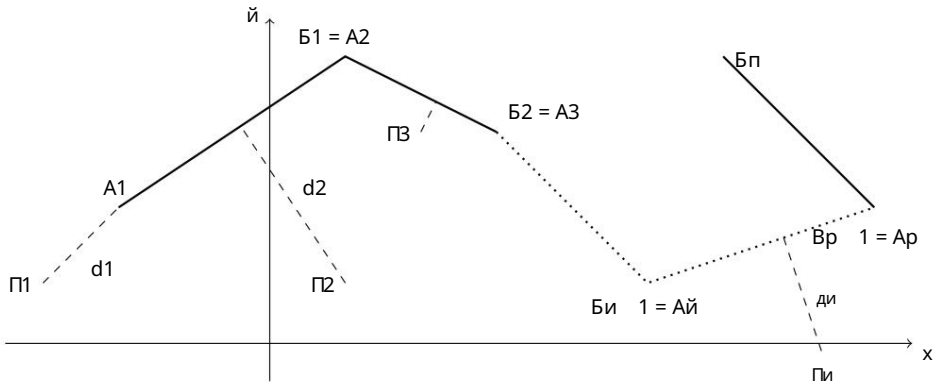


Рисунок 3. Расчет момента инерции зоны вдоль пути в сети.

Определение 10 (Инерция сети и количество гравитирующих зон). Инерция сети рассчитывается путем сложения инерции всех гравитирующих зон сети.

$$M = \sum_{i=1}^{k} Mi = \sum_{i=1}^{k} Q(Ti)d_i^2, \tag{18}$$

Существует k зон спроса, которые тяготеют к сети, каждая из которых представлена Ti.

Общая длина сети равна сумме длин ее сегментов.

Определение 11 (Длина сети). Для данной сети длина равна $\sum_{j=1}^{c} AjBj$, j=1.

$$l = \sum_{j=1}^{c} |AiBj| = \sum_{j=1}^{c} \sqrt{(xBj - xAj)^2 + (yBj - yAj)^2}. \tag{19}$$

При расчете добротности сети мы учитываем три существенных фактора: количество гравитирующих зон (k), инерцию (M) и длину (l). Сеть считается хорошей, если в ней подключено как можно больше зон, а ее инерция и длина как можно меньше.

Далее мы даем слабое определение формулы функции качества сети, необходимой для доказательства утверждений, являющихся нашими основными результатами.

Определение 12. Функция качества сети трех переменных правильно определяется формулой g(k, M, l), если она возрастает с увеличением k и уменьшается с уменьшением l и M.

При правильном определении в соответствии с определением 12 значение функции качества сети обеспечивает количественную оценку сети в том смысле, что две или более сети, встроенные в одну и ту же среду, ранжируются так, что сеть с более высоким значением качества является «лучшей».

Мы предлагаем три формулы, которые возрастают с увеличением числа гравитирующих зон и уменьшаются с увеличением длины и инерции сети. Они представлены в том порядке, в котором они

Machine Translated by Google

были разработаны и имеют одно и то же доказательство, поскольку увеличение и уменьшение определяются положительными и отрицательными частными производными соответственно.

Предложение 1. *Если к сети притягиваются k зон, а сеть имеет инерцию M при длине l, то функция добротности сети определяется формулой*

$$g1(k, M, l) = l^2 \frac{k^2 + k^3}{+ M}. \tag{20}$$

В предложении 1 показано, как уравнение (20) количественно определяет качество сети согласно определению 12. Далее мы обсудим степени, приписываемые l и k в (20). Заметим, что размерность l^2 в знаменателе такая же, как у M, т. е. km^2. В знаменателе выделяется количество гравитирующих зон, сравнивая его со градусами значения знаменателя. А именно, l^2 находится во второй степени, а M из (18) в целом находится в третьей степени, поскольку получается умножение спроса на квадрат расстояния. В соответствии с определением 12 уравнение (20) определяет правильную функцию качества от трех пе

Частные производные уравнения (20) определяются выражением

$$\frac{g1(k, M, l)}{k} = \frac{2к + 3к л^2}{2 + Mк} = \frac{2 + 3k}{3} g1(k, M, l), k + k \tag{21}$$

$$\frac{g1(k, M, l)}{M} = \frac{2 + к 3}{2 + M)^2} = \frac{1}{+ M} g1(k, M, l), l^2 \tag{22}$$

$$\frac{g1(k, M, l)}{l} = 2l (l \frac{(лк 2 + к 3}{2 + M)^2} = \frac{2л}{2 + M} g1(k, M, l). л \tag{23}$$

Поскольку длина сети обычно превышает полкилометра, из уравнений (21)–(23) справедливо следующее неравенство:

$$\frac{g1(k, M, l)}{k} \; 0 > \; M \; \frac{g1(k, M, l) >}{} > \frac{g1(k, M, l)}{l}. \tag{24}$$

Предложение 2. *Учитывая k, M и l из предложения 1, функцию качества сети можно выразить с помощью следующего уравнения:*

$$g2(k, M, l) = + l^2 \frac{k^2 k^3}{M}. \tag{25}$$

Далее мы предлагаем частные производные функции из (25):

$$\frac{g2(k, M, l)}{} = \frac{2 2к 3к +}{л^2} \frac{}{M}$$

$$\frac{k \quad g2(k, M,}{l)} = \frac{к}{3}$$

$$\frac{M \quad g2(k,}{M, l) \quad l} = \frac{M2}{2к 2 л 3}.$$

Это приводит к следующим неравенствам:

$$\frac{g}{} \; g \; 0 \; \frac{k}{л}, \frac{г}{M}. \tag{26}$$

Предложение 3. *Пусть k, M и l заданы так же, как в предыдущих предложениях. Пусть d и D — положительные значения из определения 9, а Q(Ti) вычисляется, как в теореме 4.*

В данной среде n представляет собой общее количество зон спроса, которые сеть призвана обслуживать. Тогда функция качества сети определяется уравнением

Machine Translated by Google

$$g(k, M, l) = 2\,2 \cdot n \quad \frac{k\,2 \cdot \mu(U) +}{\cdot Д \cdot л} \quad \frac{к\,3 \cdot д\,2 \cdot \overset{к}{\underset{я=1}{}} Q(Ти)}{3\,2 \cdot п \cdot М}. \tag{27}$$

Уравнение (27) безразмерно. Это особенно ценно, когда все зоны спроса привлекательно тяготеют к сети в смысле определения 9. Принимая во внимание значения n, d, D и значение общего спроса $\overset{н}{\underset{я\,=\,1}{}} Q(Ti)$, следующий результат подтверждает использование уравнения (25) в функции качества сети.

Следствие 1. Если n = k, μ(U) = D · l и di = d для каждого Ti U, то значение, рассчитанное по уравнению(27), равно единице, т. е. 1 = 100%.

Доказательство следствия 1. Если расстояния всех зон до сети di = d и если все зоны тяготеют к сети с k = n, то (18) предлагает $M = d\,2 \cdot \overset{н}{\underset{я\,=\,1}{}} Q(Ти)$. Если ди d, Уравнение (27) дает результат, превышающий 100%, а сеть слишком хороша или перегружена. □

Если условия следствия 1 выполнены, то мы говорим, что сеть доступна с на расстоянии D и притягивающая на расстоянии d. Далее докажем все предложения.

Доказательства предложений 1–3. В смысле определения 12 доказательства всех предложений одни и те же, поскольку требования базиса удовлетворены. Следуя (26), все значения g1, g2 и g увеличиваются с увеличением k и уменьшаются с увеличением l и M, как и требуется. □

В уравнении (27) — степень n, $\mu(U)^2$ используется, потому что в нашем разделе примеров n^2 когда n $\mu(U)$. Куб н n^3 используется, потому что в нашем примере $\overset{н}{\underset{я=1}{}} Q(Ti)$, когда n $\overset{н}{\underset{я\,=\,1}{}} Q(Ти)$.

Чтобы избежать путаницы, которая может возникнуть из-за появления квадратных и кубических показателей в уравнениях от (20) до (27), мы добавляем следующую теорему, которая использует функцию потолка x фактического числа для определения наименьшего целого числа, большего или равен x.

Теорема 6. Пусть значения k, l, M такие же, как в предложении 1 , а n, d, D и Q(Ti) такие же, как в предложении 3. Определим α и β следующим образом:

$$\alpha = \log n\,\mu(U) \quad \text{и} \quad \beta = \log n \overset{н}{\underset{я\,=\,1}{}} Q(Ti). \tag{28}$$

Если α, β > 0, то значение функции

$$G(k, M, l) = \frac{k\,\alpha \cdot \mu(U)\,2}{\cdot n \quad \alpha \cdot Д \cdot л} + \frac{к\,\beta \cdot д\,2 \cdot \overset{н}{\underset{я\,=\,1}{}} Q(Ти)}{\cdot n \quad \beta \cdot М\,2} \tag{29}$$

в большей степени зависит от k и в меньшую- от l и M. В зависимости от произвольных значений d и D G может быть меньше или больше 100%.

Доказательство. И снова частные производные $\frac{G}{k} > 0 > \frac{G}{л}, \frac{Г}{M}$. □

Замечание 1. Формула (27) является частным случаем (29) при α = 2 и β = 3.

Machine Translated by Google

В следующем разделе мы предлагаем сеть коридоров общественного городского транспорта (РСТ). Метод сочетает в себе физику окружающей среды и социальные наблюдения, статистику поведения и эвристику и применяет предложенную теорию для оценки нескольких вариантов сети.

4. Пример

Городской транспорт является важнейшим элементом поддержки мобильности граждан в городах, где наблюдается рост населения и территориальное расширение. Частный транспорт, как правило, перегружает городское движение до тех пор, пока не может соединять точки внутри городской территории.

Необходимо инвестировать в новые виды общественного транспорта, чтобы привлечь жителей к его использованию благодаря его доступности, скорости и вместимости. Новым режимам нужны новые коридоры. Ниже приведен пример предлагаемой процедуры эвристического проектирования и оценки предложений по сетям коридоров общественного городского транспорта. Далее мы демонстрируем процесс шаг за шагом.

Первоначальной целью было предложить сеть общественного транспорта с большой пропускной способностью и скоростью. Обычно сети встраиваются с помощью остовного дерева или метода наименьших квадратов, но мы предложили сеть после нескольких эвристически нарисованных вариантов и выбрали лучший. В предыдущем разделе мы предложили несколько функций для расчета качества сети, встроенной в среду обслуживания потребностей пользователей в трафике. В этом разделе мы применили их для сравнения нескольких вариантов сети, полученных эвристически в результате исчерпывающих статистических исследований.

Главной предпосылкой было рассмотрение естественных препятствий в окружающей среде. На рисунке 4 изображены четыре красных барьера в городе Загреб, с севера на юг: гора, железная дорога, река и шоссе.



Рисунок 4. Природная среда округа Загреб.

Зональное разделение было заимствовано из прежнего административного деления местных сообществ и показано на рисунке 5. Точками спроса являются здания, школы, супермаркеты и другие места, где могут появляться люди. Спрос – это количество жителей или пользователей, взятое из различных отчетов. Центры спроса вычисляются по (11) после установления системы координат согласно лемме 1. Также необходимо рассчитать момент инерции.

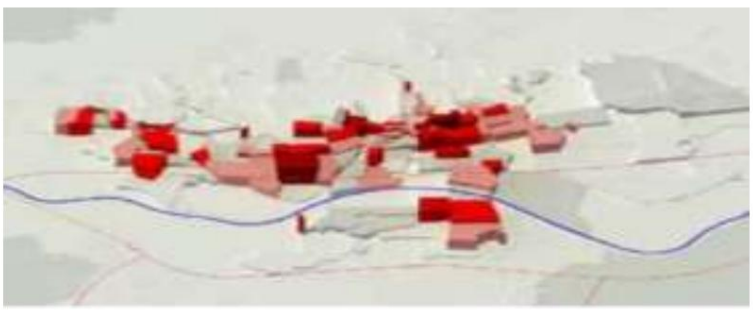


Рисунок 5. Местные населенные пункты города Загреб. Чем темнее красный цвет, тем больше население в этом месте. Источник: ЗагребПлан [15].

Machine Translated by Google

После разделения среды (см. рисунок 5) и с учетом барьеров, показанных на рисунке 4, мы нарисовали коридоры, состоящие из сегментов (см. уравнение (1)). Сегменты были встроены по основным направлениям транспортных потоков. Направления потоков были получены после статистического мониторинга и представлены на рисунке 6.



Рисунок 6. Пассажиропотоки города Загреб.

В процессе эвристического проектирования применялись девять вариантов сети коридоров, представленных на рисунках 7–9. Инерция сети для каждого из них рассчитывалась по уравнениям (17) и (18).



Рисунок 7. Первые предложенные варианты сети коридоров.



Рисунок 8. Второй предложенный вариант сети коридоров.

Machine Translated by Google

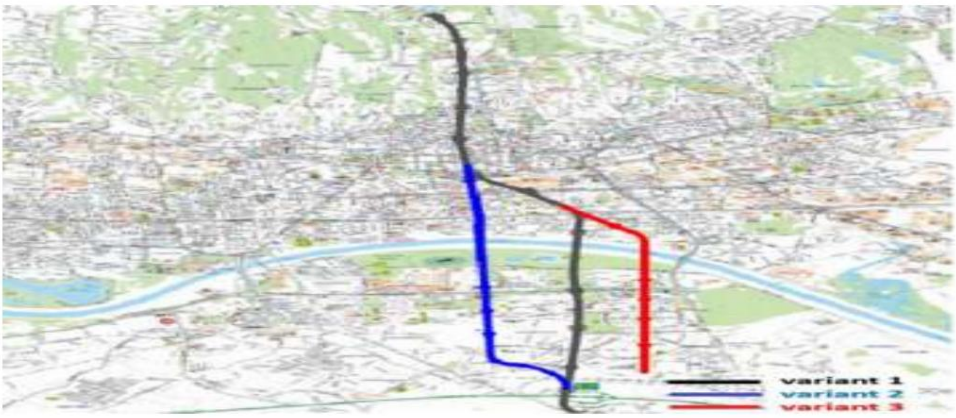


Рисунок 9. Третья предлагаемая сеть коридоров.

Варианты сети коридоров на рисунке 7 нарисованы по кругу с учетом
следует из рис. 6. В качестве гравитирующих зон для
расчет инерции.

Варианты на рисунке 9 нарисованы в соответствии с направлениями сев-юг на рисунке 6.
Новые модифицированные коридоры подразумевают рассмотрение рисунка 5.

Коридоры на рисунке 8 тянутся в направлении запад-восток, следуя за потоками из
Рисунок 6. Затем эти направления соединяются линиями в направлении сев-юг.
процесс продолжается, рассматривая направление запад-юг на рисунке 6. Хороший общественный транспорт
сеть привлекает граждан к использованию сети общественного транспорта, а не частного транспорта
устройства, если они созданы для уменьшения необходимого количества прогулок, что выражается в сети
инерция (см. уравнение (18)).

Формулы, предложенные в предложениях 1–3, использовались для количественного сравнения
различных сетей коридоров с учетом доступности сети через количество тяготеющих коридоров.
зоны спроса и сетевые затраты примерно пропорциональны длине сети.

В городе Загребе площадь окружающей среды составляет μ(U) = 250 км2., спрос на трафик
н
Q(Ti) = 680 000, а общее количество частей окружающей среды n = 160. Значения d = 200 м.
я = 1
и D = 4 км приняты согласно рекомендациям работы [14].

На рисунках 7–9 предложены три вида вариантов в зависимости от пассажиропотока.
направления на рисунке 6. В таблице 1 приведены значения качества для каждого варианта и лучшие
учитываются значения добротности варианта. Затем собираем итоговую сеть на рисунке 10.
взяв первые варианты с рисунков 7 и 8, а третий вариант с рисунка 9.

Таблица 1. Качество сетей с использованием уравнений (20), (25) и (27).

Фигура	Вариант	M(км2)	л (км)	к	г1/км2	г2/км2	г/%
Рисунок 7	1	27 000	22,3	47	3,86	8.29	13,33%
	2	17 000	27,5	36	2,70	4,46	6,65%
	3	9 000	16,4	21	1.05	2,67	3,61%
Рисунок 8	1	17 000	19,6	36	1.05	6.12	8,95%
	2	13 000	19.2	33	2,76	5,72	7,82%
	3	11 000	18,7	28	2.00	4.24	5,76%
Рисунок 9	1	13 000	11,8	21	2,77	3,88	4,78%
	2	4 000	13,7	18	2.00	3.18	3,36%
	3	10 000	9,8	20	0,83	4,96	5,23%
Рисунок 10	финальный	58 000	53,7	213	159	182	81,52%
Рисунок 11	трамвай	25 000	116	93	21	107	19,80%

Для сравнения мы рассчитали значения для временного Загребского трамвая-электрика.
сеть, представленная на рисунке 11.

Machine Translated by Google

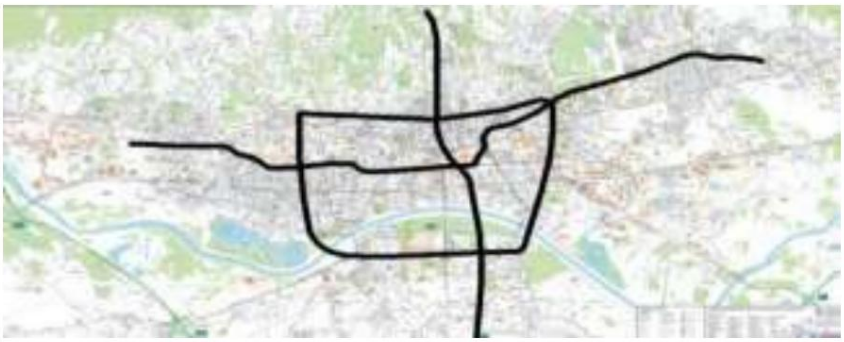


Рисунок 10. Окончательный предлагаемый вариант сети коридоров.

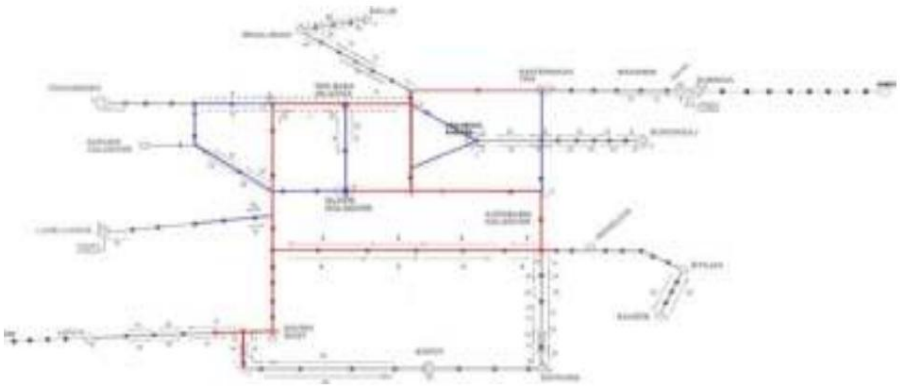


Рисунок 11. Существующая сеть ZET. Источник: Расписание филиала ЗЭТ (2020).

5. Выводы

Мы предлагаем математические выражения, которые количественно определяют качество различных сетей на основе (i) покрытия, (ii) доступности и (iii) затрат на обслуживание. Хотя модель разработана эвристически, мы показываем, что она может быть надежным инструментом для оценки различных сетей, предлагаемых для встраивания в среду.

Продолжающаяся дискуссия об использовании эвристики для создания математических формул предполагает использование эмпирических правил, интуиции и здравого смысла для поиска достаточно хорошего и быстрого решения. Эвристика, основанная на опыте и интуиции, иногда лучше, чем точные методы или исчерпывающие процедуры моделирования. Более того, если в доступной литературе нет ничего подобного для количественной оценки сети с уникальным значением, то эвристический подход предлагает хорошее решение.

Однако крайне важно оценить результаты эвристики. Первая задача, которую мы решаем, — это выбор наилучшего варианта сети среди вариантов, полученных эвристически. Мы предлагаем несколько вариантов решения задачи, изложенной в разделе 4, и обосновываем свой подход к выбору наилучшего варианта.

Наконец, мы планируем развивать эту работу и дальше в будущем.

Вклад автора: Концептуализация и валидация, МБ; методология и формальный анализ, ВІ; исследование, ресурсы и подготовка оригинального проекта, М.П. Все авторы прочитали и опубликованную версию рукописи и согласились с ней.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление о доступности данных: обмен данными не применяется.

Благодарности: Мы благодарим Университет прикладных наук Крапины и Инженерный колледж Сами Шаму на за моральную поддержку.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Machine Translated by Google

Ссылки

1. Канеллопулос, Д.; Шарма, В.К.; Панагиотакопулос, Т.; Камеас, А. Сетевые архитектуры и протоколы для приложений Интернета вещей в умных городах: последние разработки и перспективы. Электроника 2022, 12, 2490. [CrossRef]
2. Караку с, М.; Дурресси, А. Качество обслуживания (QoS) в программно-определяемых сетях (SDN). Surv. Дж Сеть. Вычислить. Прил. 2017, 80, 200–218. [Перекрестная ссылка]
3. Смит, Л.К.; Дикке н, Дж; Шурманс, МЈ; де Вит, НьюДжерси; Блейенберг, Н. Значение анализа социальных сетей для разработки и оценки комплексных медицинских вмешательств: обзорный обзор. BMJ Open 2020, 10, e039681. [Перекрестная ссылка] [ПабМед] [ПабМед Центральный]
4. Ли, Дж; Харш, Д.; Ху, Х.; Тан, Дж; Йи, К.; Лю, Х. Встраивание атрибутивной сети для обучения в динамической среде. В материалах CIKM'17, Сингапур, 6–10 ноября 2017 г.; Сессия 2D: Встраивание сети 2. [CrossRef]
5. Салхи Хасраги, Г.; Волченков Д.; Нежат, А.; Эрнандес, Р. Университетский кампус как сложная пешеходная динамическая сеть: Тематическое исследование моделей пешеходной доступности в Техасском технологическом университете. Математика 2023, 12, 140. [CrossRef]
6. Богданова, Т.В.; Евдокимов К.А. Транспортная составляющая комфортной городской среды. Инов. Инвестиции 2021, 2021, 163–170.
7. Колон, К.; Халлегатт, С.; Розенберг, Дж Анализ критичности транспортной сети страны через агентскую цепочку поставок. модель. Нат. Поддерживать. 2021, 4, 209–215. [Перекрестная ссылка]
8. Гийо, М.; Фурно, А.; Агеззаф, Э.; Эль Фаузи, Н. Сокращение размеров транспортной сети на основе оптимальной подсети. Коммун. Трансп. Рез. 2022, 2, 100079. [CrossRef]
9. Ван, С.; Ван З. Стратегия совместного развития и регулирования объемов перевозок в городской агломерации. Устойчивое развитие 2022, 15, 14742. [CrossRef]
10. Куо, Ю; Люнг, Дж М.; Ян, Ю Общественный транспорт для умных городов: последние инновации и будущие проблемы. Европ. Дж Опер. Рез. 2023, 306, 1001–1026. [Перекрестная ссылка]
11. Нес, В.Р.; Хамерслаг, Р.; Иммерс, Р. Проектирование сетей общественного транспорта. Трансп. Рез. Рек. 1988, 1202, 74–83.
12. Уилсон Р.Дж Введение в теорию графов, 4-е изд.; Longman Group Ltd.: Харлоу, Великобритания, 1996 г. Доступно в Интернете: https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wilsongraph.pdf (по состоянию на 20 февраля 2023 г.).
13. Ланг С. Введение в линейную алгебру. В книгах Springer по элементарной математике; Шпрингер: Берлин/Гейдельберг, Германия, 1986 г.; ISBN 978–1-4612-7002-7. Доступно онлайн: https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~richard/teaching/f2014/Lin_alg_Lang.pdf. (по состоянию на 15 апреля 2024 г.). 14. Шимунович, Л.Ю; Косич, М. Особитости Пьешацкога Промета. В Неторизирани Промет; Хрвое Голд; Факультет дорожного движения и транспортных наук: Загреб, Хорватия, 2015 г.; стр. 3–9.
15. Доступно онлайн: https://www.zagreb.hr/UserDocsImages/arhiva/zagrebplan-ciljeviiprioritetirazvojado2020.pdf. (доступ на 12 декабря 2020 г.).

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Долгосрочные и среднесрочные финансовые стратегии по акциям с использованием Динамические байесовские сети

Карл Льюис †, Марк Энтони Каруана † и Дэвид Пол Суда *,†

Департамент статистики и исследования операций, факультет естественных наук, Мальтийский университет, 2080 Мсида, Мальта; karl.lewis.17@um.edu.mt (KL); mark.caruana@um.edu.mt (MAC)

* Переписка: david.suda@um.edu.mt; Тел.: +356-9986-9884 Эти авторы

† внесли равный вклад в эту работу.

Аннотация: Разработка финансовой торговой стратегии, позволяющей получить долгосрочную прибыль, является очень распространенной проблемой в сфере финансов. Цель данной статьи – сформулировать математически строгую основу для решения проблемы, а также сравнить и сопоставить полученные результаты. Основной рассматриваемый подход основан на динамических байесовских сетях (DBN). В рамках DBN рассматривается как долгосрочная, так и краткосрочная торговая стратегия, которая применяется к двенадцати акциям, полученным на развитых и развивающихся рынках. Сделан вывод, что как долгосрочная, так и среднесрочная стратегии, предложенные в этой статье, превосходят стандартную торговую стратегию «купи и держи» (B&H). Несмотря на явные преимущества прежних торговых стратегий, обсуждаются ограничения этой модели, а также возможные улучшения.

Ключевые слова: финансы; динамические байесовские сети; торговые стратегии; акции

1. Введение

В этой статье динамические байесовские сети (DBN) используются для изучения проблемы получения и тестирования финансовой стратегии, доходность которой выше, чем стратегия «купи и держи» для данного капитала. Байесовская сеть (BN) — это графическое и компактное представление совместной функции плотности вероятности (PDF), которая использует условную независимость и может использоваться для моделирования системы в одном моменте времени. DBN расширяют BN более чем на один период времени, то есть DBN являются временным расширением BN.

Некоторые преимущества использования DBN по сравнению с другими моделями, такими как модели базовых временных рядов, заключаются в следующем. Во-первых, DBN способны включать в себя так называемые скрытые (или латентные) переменные, которые либо управляют, либо предположительно управляют наблюдениями за наблюдаемой случайной величиной. Эти скрытые переменные представляют собой случайные величины, истинное значение которых не может быть измерено напрямую, иногда из-за неадекватности инструментов, а иногда просто потому, что существование этих переменных предполагается. Примерами таких скрытых переменных являются интеллект человека (который невозможно точно измерить с помощью какого-либо инструмента) или состояние (бычье или медвежье) финансового рынка (само существование которого является гипотетическим). Во-вторых, поскольку они являются ответвлением BN, DBN позволяют компактно представлять возможно громоздкое совместное распределение. Рассел и Норвиг [1] утверждают, что благодаря условной независимости представление совместного распределения в виде DBN может исключить любые избыточные члены, что, в свою очередь, также упрощает оценку параметров. Мерфи [2] утверждает, что еще одним преимуществом DBN является легкость, с которой могут быть внесены изменения в рассматриваемую модель. DBN можно использовать для альтернативного представления как базовых скрытых марковских моделей (HMM), так и HMM с вариациями, таких как HMM со смесью гауссовых выходных данных, авторегрессионные HMM, HMM ввода-вывода и иерархические HMM. DBN также можно использовать для представления моделей фильтра Калмана, где, в отличие от HMM, скрытое состояние является непрерывным, а не дискретным. Наконец, DBN также способны отвечать на вопросы о различных типах рассуждений или выводов, например

check for updates

Цитирование: Льюис, К.; Каруана, Массачусетс; Суда Д. Долгосрочные и среднесрочные финансовые стратегии по акциям с использованием динамических байесовских сетей. Прикладная математика 2024, 4, 843–855. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030045

Академический редактор: Томми Соттинен

Поступила: 28 апреля 2024 г.

Пересмотрено: 21 июня 2024 г.

Принято: 24 июня 2024 г.

Опубликовано: 3 июля 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Machine Translated by Google

как диагностический вывод (от следствий к причинам), причинный вывод (от причин к следствиям), интеркаузальный вывод (между причинами одного и того же следствия) и смешанный вывод (смесь любых двух из вышеперечисленных типов вывода).

В данной исследовательской работе мы используем соотношение цены и прибыли (PE) в обсуждаемых моделях. В литературе можно найти различные статьи, в которых указанный коэффициент PE применяется для изучения инвестиционных стратегий. В частности, можно упомянуть Басу [3]. Это соотношение также использовалось в обширной литературе, в том числе в литературе Ллео [4] и Анджелини [5]. Чанг и Тиан [6] также используют BN для моделирования качественных и количественных взаимосвязей между несколькими переменными, влияющими на динамику фондового индекса S&P 500, с целью оптимизации торговых решений, а именно, когда открывать короткую позицию и когда инвестировать в нее. длинная позиция. Дамиано и др. [7] основывают свою работу на предыдущем исследовании Тайала [8], в котором ННММ используются для анализа финансовых данных. Результаты, полученные Таялом, воспроизведены в статье Дамиано и др., и дается дальнейшее понимание. Дамиано и др. [7] пришли к выводу, что вероятностный вывод позволяет идентифицировать два различных состояния в высокочастотных данных, которые в основном характеризуются давлением покупателей и продавцов.

Исторически считается, что Пол Дагум положил начало разработке DBN в начале 1990-х годов, а именно в работе Дагума и др. [9] в 1992 г. и Dagum et al. [10] в 1995 году. С тех пор ДБН используются в различных областях, в частности, в финансах и экономике.
Однако другие области включают (но не ограничиваются ими) распознавание речи (Мерфи [2], Цвейг, Рассел [11] и Нефиан и др. [12]), биологию (Яо и др. [13], Раваль и др. [14], Мерфи и Миан [15]), робототехника (Прембида и др. [16], Патель и др. [17]), обработка изображений (Делажи др. [18]) и обнаружение неисправностей (Козар и др.) . др. [19]). Методы оценки параметров DBN обсуждаются Benhamou et al. [20], тогда как Мерфи [21] работает над теоретическими основами ДБН.

Остальная часть статьи построена следующим образом. В разделе 2 представлены теоретические основы DBN. В разделе 3 DBN применяются к двенадцати акциям как развитых, так и развивающихся рынков, и представлена доходность инвестиций. Причиной рассмотрения как развитых, так и развивающихся рынков является проверка устойчивости модели в различных экономических условиях и моделях роста. Наконец, в заключительном разделе выделены ключевые моменты и полученные результаты.

2. Теоретическая основа

Эта модель основана на работе Ванга [22] и использует два феномена поведенческих финансов — поведенческую волатильность и возврат к среднему значению. Поведенческая волатильность относится к явлению, при котором связанные с рынком события, такие как иррациональные сделки, совершаемые неопытными трейдерами, приводят к отклонению торговой цены акции от ее «истинной» стоимости.
Подобные события постоянно влияют на рыночную цену либо до тех пор, пока вызванные ими эффекты не компенсируют друг друга, либо до тех пор, пока рациональные инвесторы не уравновесят эти эффекты своими рациональными сделками. Это явление известно как возвращение к среднему. Теория возврата к среднему применима не только к цене акции, но и к любому связанному с ценой показателю, например, к коэффициенту цена-прибыль (PE) (цена акции, деленная на прибыль на акцию). В результате можно принять решение о покупке (или продаже) акций только тогда, когда какой-либо показатель, соответствующий теории возврата к среднему, далек от среднего, зная, что «истинное» значение показателя будет возвращено в какой-то момент . будущее.

Направленная графическая модель (DGM) — это представление вероятностной модели, которая использует предположения условной независимости посредством ориентированного графа, вершины которого (обратите внимание, что термины «состояние», «случайная величина», «узел» и «вершина» могут быть используются взаимозаменяемо) графика представляют собой случайные величины, а дуги представляют собой условную зависимость между парами случайных величин. Дуга от вершины A к вершине B представляет утверждение «A вызывает B» (Мерфи [2]). DGM удобны из-за их компактности при демонстрации некоторого совместного распределения вероятностей - для N двоичных случайных величин общая замкнутая форма совместного распределения вероятностей этих случайных величин может потребовать параметров O (2 N) , тогда как графическая модель может дать то же самое информация с использованием меньшего количества параметров из-за отсутствия терминов в заявлениях об условной независи

Machine Translated by Google

Байесовская сеть — это DGM, которая представляет набор случайных величин X1, ..., Xn и их условных зависимостей через ориентированный ациклический граф(DAG), обозначаемый G = (V, E). Каждая вершина в V представляет собой случайную величину Xi , а каждое направленное ребро в E представляет собой условную зависимость одной случайной величины от другой. Каждому узлу Xi сопоставлено условное распределение вероятностей, а совместное распределение вероятностей на множестве вершин V определяется выражение $\prod_{i=1}^{n} P[V] = P[Xi \mid родители(Си)]$. Обобщение BN на несколько временных интервалов приводит к определениюDBN. Динамическая байесовская сеть определяется как пара (B0, B), где B0 — это BN, представляющий априорную вероятность (или вероятность начального состояния), то есть распределение вероятностей случайных величин в момент времени 0, а B представляет собой временную BN с двумя срезами, которая описывает вероятности перехода от момента времени t - 1 ко времени t для любого узла X в множестве вершин V группы DAG. Совместное распределение вероятностей набора вершин V по всем временным интервалам определяется выражением:

$$P[V] = P[V0]\,P[V1:T] = \prod_{Xi \in V} P[Xi0 \mid родители(Xi0)] \prod_{t=1}^{T} \prod_{Xi \in V} P[Выйти \mid родители(Xit)],$$

где Vt1 :t2 относится к набору всех вершин, проиндексированных с момента времени t1 до момента времени t2. ДБН может быть параметризована матрицей переходов At = P[Xt = j | Xt 1 = i] и его априорное распределение π(i) = P[X1 = i]. Если предполагается, что вероятности перехода постоянны для всех временных интервалов (At = A), то они называются однородными и имеют гораздо более компактную совместную функцию распределения. При графическом представлении DBN обычно показываются два или три временных интервала — начальный временной интервал и последующие один или два — поскольку предполагается, что его структура повторяется во времени.

Важным свойством DAG является то, что «узлы можно упорядочить так, что родители предшествуют детям. Это называется топологическим упорядочением, и его можно построить из любого DAG». (Мерфи [23]). При таком упорядочении свойство упорядоченной марковости (или свойство локальной марковости) определяется как «предположение, что узел зависит только от своих родителей, а не от всех своих предшественников в упорядочении» (Мерфи [23]). Это предположение фактически является обобщением марковости цепей Маркова.

2.1. Вывод для DBN

Цель вывода - сделать вывод о значении скрытых состояний с учетом наблюдений наблюдаемых состояний, то есть сделать вывод о маргинальных значениях P[Xt = i | y1:τ]. Если τ = t, этот процесс известен как фильтрация (или «приведение текущей ситуации»); если τ > t, то это сглаживание ; и если τ < t, то можно было бы выполнять предсказание (или прогнозирование). Обычно используемый алгоритм вывода для DBN - это алгоритм вперед-назад. В этом алгоритме динамическое программирование реализуется посредством двух шагов, известных как проходы, которые выполняются в противоположном направлении : один выполняется вперед во времени, а другой — назад. Обратите внимание , что предполагается, что матрица вероятности перехода, матрица вероятности выбросов и априорные вероятности известны. При прямом проходе значение αt(i) := P[Xt = i | y1:t] находится рекурсивным способом. При обратном проходе значение βt(i) := P[yt+1:T | Xt = i] также находится рекурсивно, но в обратном хронологическом порядке (от момента времени T до момента 2). После завершения прямого и обратного проходов значение γt(i) := P[Xt = i | y1:T] наконец можно получить:

$$P[Xt = i \mid y1:T] = \frac{P[yt+1:T \mid Xt = я]P[Xt = я \mid y1:t\,]\,\gamma t(i)}{П[y1:T]}$$

где $P[y1:T] = \prod_{t=1}^{T} карат.$

2.2. Обучение DBN.

В этом контексте обучение относится к процессу оценки параметров. При оценке параметров обучение может осуществляться либо с помощьюподхода максимального правдоподобия (ML), либо с помощьюподхода максимального апостериори (MAP). При использовании ML данные используются для получения оценок параметров посредством решения задач и оптимизации

Machine Translated by Google

$\theta_{МЛ} = \arg\max_\theta P[Y \mid \theta] = \arg\max_\theta \log P[Y \mid \theta]$, где θ — набор оцениваемых параметров. Обычно θ содержит матрицу перехода и параметры, относящиеся к распределению вероятностей, используемому в матрице выбросов. С другой стороны, при использовании метода MAP описанная выше задача оптимизации немного корректируется и становится $\theta_{КАРТА} = \arg\max_\theta \log P[Y \mid \theta] + \log P[\theta]$, где $P[\theta]$ — априорное распределение параметра. Подход к решению описанных выше задач оптимизации заключается в адаптации алгоритма ожидания-максимизации (EM), известного как алгоритм Баума-Уэлча, который, как доказано, дает локальный оптимум для решения вышеописанных задач оптимизации (Baum et al. [24], Dempster и др. [25]). В качестве подпрограммы он использует алгоритм вперед-назад. Следовательно, в случаях, когда параметры модели неизвестны, алгоритм Баума–Уэлча сначала используется для оценки (или изучения) параметров модели. Затем алгоритм вперед-назад используется для определения задних краев.

2.3. Применение теории

Основная гипотеза модели заключается в том, что цена акций фирмы не всегда равна «истинной» внутренней стоимости фирмы. Используя явления поведенческой волатильности и возврата к среднему, временные эффекты, которые приводят к отклонению показателей акций от их «истинного» значения, подразделяются на два: краткосрочные эффекты (продолжительностью в несколько дней) и среднесрочные эффекты (продолжительностью в несколько недель).).

Предполагается, что фундаментальная стоимость компании i в момент времени t, обозначаемая $P_{это,}$ прямо пропорциональна его годовому доходу в момент времени t, обозначенному $E_{i,t}$, с фундаментальным Коэффициент PE, обозначаемый $PE_{i,t}$, действует как константа пропорциональности:

$$Яма = (PE_{i,t})(E_{i,t}).$$

С другой стороны, наблюдаемый коэффициент PE (открытого доступный в открытом доступе), $P_{i,t}$, где обозначенной $PE_{i,t}$, определяется как $PE_{i,t} = P_{i,t}$ обозначает фактическую торговую цену компании, $E_{i,t}$ компании i во время t.

Обратите внимание, что с этого момента индекс i опускается, поскольку анализ акций выполняется одновариантно. Уравнение модели, полученное в результате вышеизложенного, имеет вид:

$$\begin{aligned} Пт = П \quad & t(1 + Zt)(1 + \varepsilon t) = \quad yt = \ln PE \quad (1 + Zt) + \ln 1 + \varepsilon t \\ & = \quad yt = \ln PE \quad (1 + Zt) + \varepsilon t \end{aligned} \tag{1}$$

где $yt = \ln Pt$ шумовые εt, $\{Zt\}_t$ N — цепь Маркова с дискретным временем, моделирующая среднесрочную перспективу) эффекты и εt $N(0, \sigma)$. Ввиду ^{2} — случайная величина, моделирующая краткосрочные шумовые эффекты. приведенного выше уравнения модели используемая модель применима только для фирм, которые имеют положительную прибыль в течение исследуемого периода. Кроме того, следует отметить, что yt представляет собой наблюдаемая величина (поскольку и Pt, и Et являются таковыми), а PE и Zt — нет. Предполагается, что и Zt, и PE являются дискретно значными; $\{b1, \ldots, bN\}$, где M и N представляют собой количество возможных скрытых состояний Zt и PE соответственно.

Допущения условной независимости, использованные в этой модели, представлены следующим образом:

$$t \quad 1, \quad i, j \quad 1,$$

$$Zt \quad PE \quad | \quad . \tag{2}$$

$$З и \quad З дж | Zk \quad k \quad \{i + 1, \ldots, j \quad 1\} yi \tag{3}$$

$$Zj \mid Zk, PE \quad k \quad \{i, \ldots, j \quad 1\} или k \quad \{j + 1, \ldots, я\}. йи \tag{4}$$

$$yj \mid Zk, PE \quad k \quad \{i, \ldots, j\}. \tag{5}$$

Machine Translated by Google

Для $t \geq 2$ и $r,s \in \{1, \ldots, M\}$ матрица $W := [w_{rs}]_{M\times M}$ определяется как матрица вероятностей перехода, где

$$w_{rs} := P[Z_t = a_s \mid Z_{t-1} = a_r].$$

Заметим, что $w_{rs} \in [0, 1]$ и $\sum_{s=1}^{M} w_{rs} = 1$. При $t \geq 1$ $m \in \{1, \ldots, M\}$ и $n \in \{1, \ldots, N\}$ матрица $D_t := [d_{mn}(y_t)]_{M\times N}$ определяется как матрица вероятности выбросов в момент времени t, где

$$d_{mn}(y_t) := P[y_t \mid Z_t = a_m, PE = b_n].$$

где $d_{mn}(y_t) \sim N(\ln[b_n(1 + a_m)], \sigma^2)$. Для $m \in \{1, \ldots, M\}$ и $n \in \{1, \ldots, N\}$, $\sigma_u := (u_m)_{m\in M}$ и $v := (v_n)_{n\in N}$ определяются как начальные векторы вероятностей, содержащие начальные распределения вероятностей, где

$$u_m := P[Z_1 = a_m]; \qquad v_n := P[PE = b_n].$$

Обратите внимание, что $u_m, v_n \in [0, 1]$, $\sum_{m=1}^{M} u_m = 1$ и $\sum_{n=1}^{H} v_n = 1$. Эти априорные распределения служат для включения любых экспертных знаний, которыми может располагать исследователь. Графическое представление описанной выше модели можно найти на рисунке 1.

Изложив принципы, необходимые для вывода, цель анализа теперь становится яснее — вывести значение PE^*, чтобы оценить фундаментальную ценность акции и сформулировать торговую стратегию, основанную на этих знаниях. Кроме того, определение значения Z_t также полезно, поскольку его можно использовать для проверки альтернативной торговой стратегии. В этом контексте используемые данные будут разделены на обучающий и тестовый наборы. Набор параметров модели задается формулой $\theta = \{W, u, v, \sigma^2\}$. Пространство возможных параметров задаётся множеством

$$\Theta = \theta : u_m, v_n, w_{rs} \in [0, 1], \sum_{m=1}^{M} u_m = 1, \sum_{n=1}^{H} v_n = 1, \sum_{s=1}^{M} w_{rs} = 1, \sigma > 0. \qquad (6)$$

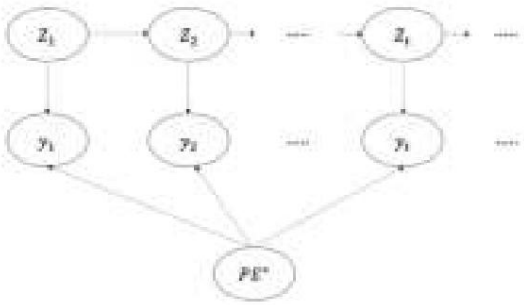


Рисунок 1. Представление описанной выше модели с использованием DBN, где y_t – наблюдаемая, а PE и Z_t – скрытые дискретные переменные.

Затем следуют обучение и умозаключение. Поскольку параметры θ неизвестны, их сначала необходимо оценить (процедура обучения). Как уже упоминалось, алгоритм, используемый для получения оценок MAP, представляет собой алгоритм Баума – Уэлча. После оценки неизвестных параметров модели для оценок параметров используется алгоритм прямого и обратного действия, чтобы вывести постоянное значение PE^* для обучающего набора и тестового набора, а также вывести значение Z_t посредством сглаживания для обучающего набора, и через фильтрацию для тестового набора:

- Вероятности фильтрации: $P[Z_T, PE \mid y_{1:T}, \theta]$;
- Вероятности сглаживания: $P[Z_t, PE \mid y_{1:T}, \theta]$, где $t \in \{1, \ldots, T-1\}$.

2.4. Вывод с известными параметрами.

В соответствии с прямым проходом алгоритма вперед-назад сделаны следующие определения и выведены уравнения для вероятностей фильтрации:

$$t \in \{1, \ldots, T\}, m \in \{1, \ldots, M\}, n \in \{1, \ldots, H\},$$

Machine Translated by Google

$$\alpha tmn := P[Zt = am, PE = bn \mid y1:t, \theta];$$

$$\alpha 1mn = \frac{dmn(y1)umvn}{\sum_{m'=1}^{M}\sum_{n'=1}^{H} dm'n'(y1)um'vn'};$$

$$\alpha tmn = \frac{dmn(yt)\sum_{i=1}^{M} P[Zt-1 = ai, PE^* = bn \mid y1:t-1]wmi}{KT};$$

$$KT := \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{H} [\text{черт возьми}(yt)\sum_{i=1}^{M} P[Zt-1 = ai, PE = bn \mid y1:t-1]wmi.$$

После определения вероятностей фильтрации вероятности сглаживания задаются через оценка, обозначаемая γtmn:

$$t \in \{1, \ldots, T-1\}, m \in \{1, \ldots, M\}, n \in \{1, \ldots, H\},$$

$$\gamma tmn := P[Zt = am, PE = bn \mid y1:T].$$

Далее, согласно обратному проходу алгоритма вперед-назад, необходимо дать определение βtmn, чтобы иметь возможность получить значения для γtmn:

$$\frac{P[yt+1:T \mid Zt = am, PE = bn]\,\beta tmn :=}{P[yt+1:T \mid y1:t]} = \frac{P[yt+1:T \mid Zt = am, PE = bn]}{\sum_{t'=t+1}^{T} ct'}$$

Таким образом, по алгоритму вперед-назад имеем:

$$\gamma tmn = \alpha tmn \beta tmn.$$

Осталось вывести выражения для βtmn $t \in \{1, \ldots, T-1\}$:

$$\beta(T-1)mn = \frac{\beta'_{(T-1)mn}}{KT} = \frac{\sum_{i=1}^{M} дин(yT)вим}{\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{H} cT}.$$

Для βtmn $t \in \{1, \ldots, T-2\}$, $m \in \{1, \ldots, M\}$, $n \in \{1, \ldots, H\}$:

$$\beta'_{tmn} = \sum_{i=1}^{M} \beta'_{(t+1)}индин(yt+1)wim; \qquad \beta tmn = \frac{\sum_{i=1}^{M} \beta(t+1)индин(yt+1)wim}{KT+1}.$$

Найдя выражения как для вероятностей сглаживания, так и для вероятностей фильтрации, наиболее вероятные значения скрытых переменных PE и Zt находятся путем маргинализации:

$$PE^* = \arg\max_{bn} \sum_{m=1}^{M} P[Zt = am, PE = bn \mid y1:T] = \text{аргумент макс.}_{\text{метка}} \sum_{m=1}^{M} \gamma tmn$$

Чтобы найти оценку Zt для скрытого состояния Zt, используется сглаживание обучающего набора при применении фильтрации к тестовому набору:

$$Zt = \text{аргумент макс.}_{\text{метка}} \sum_{n=1}^{H} \gamma tmn \quad t \in \{t : yt \in Xtrain\};$$

$$Zt = \text{аргумент макс.}_{\text{метка}} \sum_{n=1}^{H} \alpha tmn \quad t \in \{t : yt \in Xtest\}.$$

где $Xtrain$ и $Xtest$ обозначают обучающий набор и тестовый набор соответственно.

Machine Translated by Google

2.5. Изучение неизвестных параметров

Задача оптимизации в обучении определяется формулой $\theta_{MAP} = \arg\max_{\theta \in \Theta} \pi(\theta) \prod_{t=1}^{T}$ и есть решено с использованием алгоритма Баума–Уэлча (обратите внимание, что в следующих выражениях θ технически следует писать со шляпкой ($\hat{}$), поскольку это набор оценок параметров): 1.

Установите $j = 1$.

2. Положить $\theta^{(1)} \leftarrow \theta^{(0)} > \delta$

3. При этом $\theta^{(j)} \leftarrow \theta^{(j-1)} > \delta$ сделать

Вычислить вероятности $P(Z_t = a_m, P_E = b_n \mid y_{1:T}, \theta^{(j)})$ t, m, n

(и) (ii) Решите задачу ограниченной максимизации

$$\arg\max_{\theta \in \Theta} \{Q(\theta; \theta^{(j)}) + \ln P[\theta]\} \to \theta^{(j+1)} =$$

где $Q(\theta; \theta^{(j)}) = E_{Z_{1:T}, P_E \mid y_{1:T}, \theta^{(j)}} [\ln P(y_{1:T}, Z_{1:T}, P_E \mid \theta)]$.

(iii) Приращение j

Для $Q(\theta; \theta^{(j)})$ можно получить выражение в замкнутой форме с использованием вероятностей сглаживания:

$$\begin{aligned} Q(\theta; \theta^{(j)}) = {} & \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \alpha_{tmn}^{(j-1)} \beta_{tmn}^{(j-1)} \ln[d_{mn}(y_t)] + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \alpha_{Tmn}^{(j-1)} \ln[d_{mn}(y_T)] \\ & + \sum_{t=2}^{T} \sum_{i,m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \beta_{tmn}^{(j-1)} \frac{d_{mn}(y_t)^{(j-1)}}{c_t} w_{mi}^{(j-1)} \alpha_{(t-1)i}^{(j-1)} \ln[w_{mi}] \\ & + \sum_{i,m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \frac{d_{mn}(y_T)^{(j-1)}}{c_T} c_{mi}^{(j-1)} \alpha_{T-1,i}^{(j-1)} \ln[w_{mi}] \\ & + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \alpha_{1m}^{(j-1)} \beta_{1m}^{(j-1)} (\ln[u_m] + \ln[v_n]). \end{aligned}$$

В приведенной выше аргументации задачи максимизации $\ln P[\theta]$ является предполагается априорное распределение $P[\theta]$, где $P[\theta] = {}^{2}$логарифмом], поскольку независимость $P[u]P[v]P[W]P[\sigma_r]\sigma_s$. В это априорное распределение можно включить два типа экспертных знаний — априорные знания о приблизительном значении P_E* и априорные знания о устойчивости среднесрочных шумовых эффектов, которые кодируются через априорные $P[v]$ и предшествующий $P[W]$ соответственно.

Априор вектора v представлен распределением Дирихле:

$$f(v) = \frac{\Gamma(k_1 + k_2 + \ldots + k_N)}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_N)} \prod_{n=1}^{N} v_n^{k_n - 1}. \tag{7}$$

Значения k_n для $n \in \{1, \ldots, N\}$ интуитивно соответствуют степени уверенности эксперта в том, что b_n является «истинным» значением P_E. Для этого анализа $k_n = 1$ $\forall n$. Априор для матрицы W также получается из распределения Дирихле $f(W) = \prod_{m=1}^{M} f(w_m)$, где $w_m = (w_{im})_{i=1,\ldots,M}$ и

$$f(w_m) = \frac{\Gamma(k_{1m} + k_{2m} + \ldots + k_{Mm})}{\Gamma(k_{1m})\Gamma(k_{2m})\ldots\Gamma(k_{Mm})} \prod_{m=1}^{M} w_{im}^{k_{im}-1}.$$

Поскольку W — матрица перехода для скрытой цепи Маркова $\{Z_t\}_{t \in N}$, то диагональные элементы W представляют вероятность того, что определенное состояние сохранится (останется таким, какое оно есть в следующий момент времени). Чем больше значение Z_t (или, соответственно, a_m), тем больше

Machine Translated by Google

настойчивость государства. В этом анализе недиагональные элементы(читателюпредлагается обратиться к Вангу [22] за дополнительной информациейо значениях недиагональных значений) устанавливаются равными 0.

Принимая во внимание все вышесказанное, логарифм априорного P[θ] становится

$$\ln P[\theta] = \ln P[W] + \ln P[v] = \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}(\text{ким} \quad 1)\ln[wim] + \sum_{n=1}^{H}(kn \quad 1)\ln[vn] + s1,$$

где $s1 = \ln \Gamma(k1+k2+\ldots+kN) + \ln \Gamma(k1m+k2m+\ldots+kMm)$
$\Gamma(k1)\Gamma(k2)\ldots\Gamma(kN) \quad \Gamma(k1m)\Gamma(k2m)\ldots\Gamma(kMn)$.

Константа s1 включена только для полноты картины— она становится неактуальной, когда максимизация валгоритме Баума–Уэлча.

Когда априорыустановлены, задача ограниченной оптимизации теперь полностьюопределена. Обратите внимание, что будут учитываться только ограничения равенства в(6), поскольку ограничения неравенства вконечном итоге все равно будут удовлетворены. Поэтому для решения данной оптимизационной задачи можно использовать метод множителей Лагранжа. Ниже приведены выражения для оценок четырех рассматриваемых переменных:

$$\text{и (дж)} = \frac{\text{(j 1) (j 1) } \beta \alpha}{\text{1mn ; 1 минута}} \tag{8}$$

$$v(j) = \frac{\sum_{m=1}^{M} q_{\text{ммн}}^{(j\ 1)(j\ 1)} + (kn \quad 1)\beta_{\text{1 минута}}}{1 + \sum_{n'=1}^{H}(kn' \quad 1)}; \tag{9}$$

$$\text{ш (дж)} = \frac{\sum_{\text{т}'=2}^{T}\sum_{n=1}^{H} q_{\text{т}'}^{(\text{к})}{}_{,m,i,n}(3\text{т}', Zt' \quad 1, PE) + (\text{км} \quad 1)}{\sum_{\text{т}'=2}^{T}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{H} q_{\text{т}'}^{(j)}{}_{,\text{м,я,н}}(3\text{т}', Zt' \quad 1, PE) + \sum_{\text{м}'=1}^{M}(\text{км}'\text{я} - 1)} = \frac{\omega_{t',m,i,n}^{(\text{к})}}{\sum_{\text{т}',\text{м},\text{т},\text{н}}^{M}(\text{ит}'\text{м}'\text{т}'\text{н})}, \tag{10}$$

где

$$\omega_{t',m,i,n}^{(\text{к})} = \sum_{\text{т}'=2}^{T-1}\sum_{n=1}^{H}\beta_{t'mn}^{(j\ 1)}\frac{d_{mn}(yt')}{c_{\text{т}'}^{(j\ 1)}}c_{\text{ми}}^{(j\ 1)}{}_{t',(j\ 1)\alpha_{1,i,n}} + \sum_{n=1}^{H}\frac{d_{mn}^{(j\ 1)}(yT)}{c_{\text{т}}^{(j\ 1)}}c_{\text{ми}}^{(j\ 1)}\alpha_{(T-1)\text{в}}^{(j\ 1)} + (\text{км} \quad 1)$$

$$\sigma 2^{(j\ 1)} = \frac{\sum_{\text{т}=1}^{T-1}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{H}\alpha_{\text{тмн}}^{(j\ 1)(j\ 1)}\beta_{\text{ТМН}}(yt \quad \ln[bn(1+am)])2}{\sum_{\text{т}=1}^{T-1}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\alpha_{\text{тмн}}^{(j\ 1)(j\ 1)}\beta_{\text{ТМН}} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{H}\alpha_{\text{тмн}}^{(j\ 1)}} + \frac{\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{H}\alpha_{\text{Tmn}}^{(j\ 1)}(yT \quad \ln[bn(1+am)])2}{\sum_{\text{т}=1}^{T-1}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{H}\alpha_{\text{тмн}}^{(j\ 1)(j\ 1)}\beta_{\text{ТМН}} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{H}\alpha_{\text{тмн}}^{(j\ 1)}}. \tag{11}$$

3. Методология анализа и результаты

Для анализа в данной статье были выбраныдвенадцать акций (см. Таблицу 1) — девять из развитых рынков (США) и три из развивающихся рынков (Бразилия и Китай). Обучающий набор содержит данные с 1 января 2011 г. по 31 декабря 2019 г., тогда как тестовый набор содержит данные с 1 января 2020 г. по 30 сентября 2020 г. Используя в качестве отправной точки 12-месячный скользящий коэффициент Шарпа, все акции продемонстрировали среднююили выше среднейдоходность (по отношениюк эталонному индексу S&P) в течение тестового периода, за исключением двух неэффективных бразильских акций [26]. По каждой акции за вышеупомянутый период были собраныдва набора данных — ежедневные данные о ценах и квартальные данные о прибыли на акцию

Machine Translated by Google

Таблица 1. Таблица результатов, показывающая доходность инвестиций в процентах от вложенной суммы.
Значения в скобках отрицательны.

Запас	Пороги для стратегии LT 0,10 0,20 0,05		0,15		Пороги для стратегии MT 0,05 0,10 0,03	0,07			Прибыль от B&H
ААПЛ (США)	55,30%	55,30%	55,30%	55,30%	69,51%	57,82%	48,06%	76,02%	55,30%
АДБЕ (США)	25,46%	37,86%	44,45% 0%		46,65%	46,65%	46,65%	46,65%	46,65%
БЛК (США)	12,98%	12,98%	12,98%	12,98%	33,92%	34,66%	20,85%	20,85%	12,98%
СТОИМОСТЬ (США)	22,59%	22,59%	22,59%	22,59%	50,12%	42,85%	28,21% 0%		22,59%
HD (США)	28,71%	28,71%	28,71%	28,71%	57,76%	51,31%	37,99%	47,35%	28,71%
ИТКБ (БЗ)	(39,86%)	(29,36%)	(29,36%)	(27,57%)	9,10%	27,17%	29,34%	61,09%	7,07% 7,07% (9,59%) (55,85%)
Массачусетс (США)	60,41%	47,70%							32,57% 24,66% 34,39% 11,93%
МЦД (США)	11,38%	11,38%	11,38%	11,38%	18,94%	18,94%	30,63%	30,63%	11,38%
NTES (Китай)	47,89%	NVDA	50,84%	57,35%	39,54%	39,54%	39,54%	39,54%	39,54%
(США)	125,90%	125,90%	125,90%	125,90%	149,00%	156,79%	125,90%	125,90%	125,90%
САН (БЗ)	(14,35 %)	(17,78%)	(17,78 %)	(57,17 %)	(57,17 %)	(57,17 %)	(57,17 %)	(57,17 %)	(57,17 %)
ООНГ (США)	7,95%	19,88%		15,90%	72,41%	21,83%	38,58%	2,87%	7,95%
Средний	26,12%	25,07%	32,38%	27,61%	44,79%	37,74%	32,60%	29,79%	20,83%
Ш/Д/Л Итоги	4/7/1	4/7/1	5/6/1	17/27/4	4/7/1	9/3/0	3.09.0	4.7.1	31.14.3 6/4/2

После этапа предварительной очистки и подготовки данных исходные значения векторов
Следующими устанавливаются a = (am) и b = (bn) . Приоритеты вектора v и матрицы W устанавливаются, как обсуждалось.
ранее; априорным значением для и считается дискретное равномерное распределение, а начальным значением
σ^2 установлено значение 5. Затем выполняется обучение параметров перед выводом скрытых состояний.
PE и Zt . Далее следует моделирование торговых стратегий. Предлагаемые торговые стратегии
Wang [22] и используемый в этой статье будет сравниваться с эталонной стратегией B&H.
Для обеих предложенных торговых стратегий пусть It обозначает количество денежных средств, доступных в данный момент.
т; пусть Nt обозначает единицы ценных бумаг, удерживаемые в момент t; пусть Ttrain представляет размер
обучающий набор; и пусть T представляет размер набора данных (сумма размеров обучающего и тестового
наборы). Как долгосрочную, так и среднесрочную торговую стратегию можно описать тремя
возможные варианты действий (обозначенные (i), (ii) и (iii) ниже) в момент времени t; то есть порядок действий
(i)–(ii) являются общими для обеих торговых стратегий:

(i) Если PEt At(1 Tr) и It > 0, то купить ценную бумагу, используя все доступные денежные средства It .
Следовательно, $Nt+1 = \frac{\text{это}}{\text{Пт}}$ и It+1 = 0.

(ii) Если PEt At(1 + Tr) и It = 0, то продать все принадлежащие Nt паи . Следовательно, Nt+1 = 0
и It+1 = PtNt .

(iii) Если ни один из пунктов (i) или (ii) не удовлетворен, не совершайте никаких сделок. Следовательно, Nt+1 = Nt и
Оно+1 = Оно .

Обратите внимание, что At считается базовой линией и зависит от торговой стратегии.
пороговое значение Tr (0, 1) действует как индикатор чувствительности, определяющий, насколько инвестор
хочет разрешить $PEt = \frac{\text{Пт}}{\text{Эт}}$ отклоняться от базовой линии At перед запуском определенного
порядок действий в торговых стратегиях. Это ясно из того, как строятся действия.
определенный. Общая прибыль в конце торгового периода равна IT + PTNT ITtrain+1.

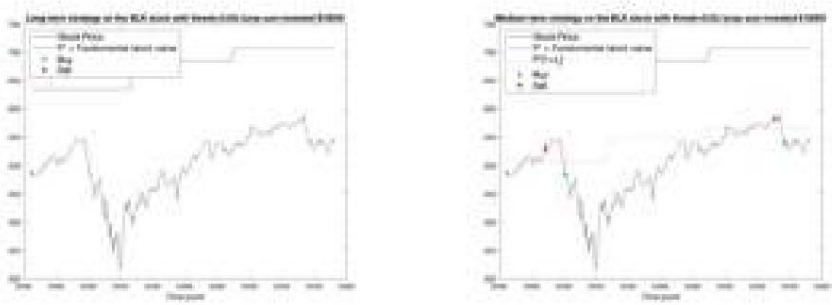
Первая торговая стратегия – это так называемая «долгосрочная стратегия», при которой торговля ведется
при постоянном значении PE , то есть At = PE . Альтернативная стратегия
является «среднесрочной стратегией», где торговля ведется с учетом динамического
значения PE (1 + Zt), где каждый Zt оценивается динамически посредством фильтрации. Поэтому,
для среднесрочной стратегии At = PE (1 + Zt).

Результаты по акциям BLK и ITUB подробно представлены в этой статье .
Во-первых, долгосрочная стратегия на основе данных по акциям BLK предполагает, что инвестор покупает
запас на момент времени 2265 = Ttrain + 1 и удерживает запас до конца периода. Четко,
эта стратегия совпадает со стратегией B&H, и в результате прибыль от долгосрочной стратегии будет равна
прибыли от стратегии B&H, которая равна 1298,04 доллара США,
что соответствует доходности 12,98% от первоначальных инвестиций в размере 10 000 долларов США. С другой стороны,

Machine Translated by Google

Среднесрочная стратегия предполагает, что инвестор покупает акции в моменты времени 2265, 2301 и 2437, продает их в моменты времени 2289 и 2431 и держит их в оставшееся время. Это принесет прибыль в размере 3391,85 долларов США; что соответствует доходности 33,92% от первоначальных инвестиций в размере 10 000 долларов США за девятимесячный период, охватываемый тестовым набором. Это означает, что среднесрочная стратегия превосходит стратегию БиГ на 20,94%. Рисунок 2 иллюстрирует долгосрочную стратегию и среднесрочную стратегию.

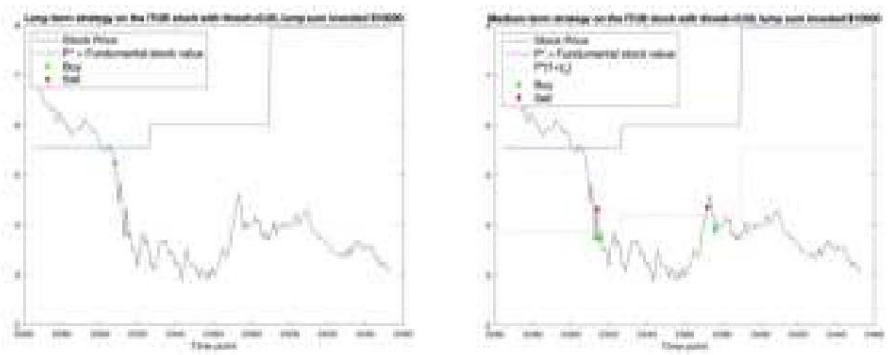
Далее мы обсудим данные по акциям ITUB. Долгосрочная стратегия предполагает, что инвестор покупает акции в момент времени 2308 и держит их до конца периода. Реализация этой стратегии приведет к убытку в размере 3986,16 долларов США, что соответствует убытку в 39,86% от первоначальных инвестиций в размере 10 000 долларов США. Однако стратегия «купи и держи» приведет к большим потерям в размере 5584,67 долларов США. Напротив, среднесрочная стратегия предполагает, что инвестор покупает акции в моменты времени 2313, 2315 и 2376, продает их в моменты времени 2314 и 2372 и держит их в оставшееся время. Фактически это принесет прибыль в размере 909,81 долларов США. Хотя это все, лишь 9,1% прибыли от первоначальных инвестиций в размере 10 000 долларов США, среднесрочная стратегия предоставляет инвестору стратегию, посредством которой он или она может получить прибыль в период, когда акции фактически падают. Рисунок 3 иллюстрирует долгосрочную стратегию и среднесрочную стратегию соответственно.



а) Долгосрочная стратегия (б) Среднесрочная стратегия

Рисунок 2. Смоделированные стратегии для акций BLK.

В более общем плане мы видим в Таблице 1, что средняя стратегия последовательно превосходила (для различных пороговых значений) для BLK, COST, HD, ITUB, MA, MCD, NVDA и UNH. Для ITUB при всех пороговых значениях, кроме одного, стратегия приносит небольшую прибыль, хотя по другим стратегиям зарегистрирован убыток. Долгосрочная стратегия неизменно оказывалась более эффективной для NTES и SAN. Ни одна из стратегий не дала никаких преимуществ для ADBE, тогда как для AAPL успех среднесрочной стратегии зависит от выбора порогового значения. В заключении будет дан дополнительный анализ этих результатов.



а) Долгосрочная стратегия (б) Среднесрочная стратегия

Рисунок 3. Смоделированные стратегии для акций IUTB.

Machine Translated by Google

4. Выводы

Благодаря использованию DBN модель движения акций Ванга [22] построена для нашего существующего набора данных по акциям. Эта модель включает в себя два скрытых состояния: одно моделирует среднесрочные шумовые эффекты, а другое моделирует истинное фундаментальное соотношение PE компании, причем последнее предполагается постоянным на протяжении всего исследуемого периода. Алгоритм вперед-назад и алгоритм Баума-Уэлча (вариант алгоритма EM) используются для обучения параметров и вывода. На основе этой подобранной модели долгосрочные и среднесрочные стратегии применяются к двенадцати изученным здесь акциям, причем девять из этих акций торгуются на развитом рынке, а остальные — на развивающемся. В целом, как долгосрочная, так и среднесрочная стратегии превосходят эталонную торговую стратегию B&H в 17 и 31 раз соответственно из 48 экспериментов для каждой стратегии (по четыре для каждой из двенадцати акций). Стратегии, предложенные Ванем, проигрывают БиГ лишь четыре и три раза соответственно. Более того, эффективность этих торговых стратегий значительна. В то время как средняя прибыль по всем акциям при использовании B&H составляет 20,83%, средняя прибыль по всем акциям и по всем пороговым значениям для долгосрочной стратегии составляет 27,78%, а для среднесрочной стратегии — 36,23%. Наконец, эти торговые стратегии предоставляют инвестору торговые предложения, которые в некоторых случаях могут даже превратить убыток по стратегии B&H в прибыль, как это было показано в случае с акциями ITUB. Эта акция падала, но среднесрочная стратегия все равно приносила прибыль на вложенную сумму. Все эти результаты представлены в таблице 1.

Как и любая статистическая модель, модель, реализованная в этой работе, имеет возможности для совершенствования. Первым и наиболее существенным ограничением является тот факт, что с помощью модели можно моделировать только те акции, которые имели положительную прибыль на акцию в течение исследуемого периода. Это связано с левой частью уравнения модели, то есть уравнением (1). В определенные периоды времени, например, во время пандемий или рецессий, может быть значительно трудно найти фирму, которая не зарегистрировала бы убыток хотя бы в одном квартале за исследуемый период. Вторым ограничением является отсутствие использования экспертных знаний. В реальном инвестировании опыт в этой области считается оченьценным, и активно торговать рекомендуется только опытным инвесторам. Поскольку модель в этой статье допускает включение экспертных знаний, то, что такие знания не используются, действительно является ограничением. Еще одним ограничением, связанным с экспертными знаниями, является ограничение, заключающееся в том, что в этом анализе не учитываются торговые сборы или комиссии. Хотя предложенная модель позволяет учитывать комиссии в торговых стратегиях, на момент написания не было никакой информации о фактических значениях взимаемых сборов или комиссий, и, следовательно, такие расходы не могли быть прин Хорошо известно, что некоторые торговые комиссии могут иногда суммироваться при совершении многочисленных сделок таким образом, что прибыль может превратиться в убыток, когда эти комиссии выдвинуты на первый план, что сделает стратегию «купи и держи» более прибыльной.

Улучшения вышеупомянутых ограничений могут повысить ценность модели и должны быть рассмотрены в будущих работах. Кроме того, еще одним улучшением, которое делает представленную здесь модель более применимой в реальных сценариях, является включение некоторой переменной, измеряющей ликвидность акций. Это связано с тем, что рекомендации торговых стратегий о том, когда покупать и продавать акции, становятся бесполезными, если сами акции не ликвидны. Цены могут измениться к тому времени, когда акции станут достаточно ликвидными для возникновения реальной торговой возможности, и если цена значительно изменится, это, очевидно, сделает само предложение бесполезным. В этом исследовании не предполагалось, что ликвидность будет вызывать беспокойство, поскольку все 12 рассматриваемых акций относятся к акциям с большой капитализацией.

Выбор используемых исторических данных всегда является важным решением, поскольку длина временного ряда играет важную роль. В принципе, более длинные временные ряды предпочтительнее более коротких, но если исторические данные содержат изменения в режиме, это может помешать модели прогнозировать результаты. Кроме того, будущие изменения режима, которые могут произойти в период тестирования, также могут повлиять на эффективность прогнозирования модели.

Наконец, другие улучшения, которые могут быть реализованы в будущих исследованиях, — это дальнейшие и более глубокие эксперименты и испытания, а также возможность коротких продажакций. Начнем с того, что эксперименты на уровне портфеля можно провести с акциями, изучаемыми здесь.

Machine Translated by Google

чтобы понять, как изменяется прибыль, когда группа акций рассматривается вместе — например, образцы девяти акций из двенадцати, изученных здесь, можно взять для формирования портфелей и можно определить «оптимальный» портфель. Помимо этого, в будущих исследованиях можно будет потратить больше времени на перекрестную проверку для дальнейшего улучшения предложений, представленных в торговых стратегиях в этой работе. Кроме того, свойства всех используемых оценок можно будет получить в будущих работах, чтобы лучше понять их поведение. Наконец, эта стратегия не допускает коротких продажакций; могут быть предложены расширения модели, которые позволяют это сделать.

Вклад авторов: Все три автора одинаково усердно работали над написанием этой статьи. KL позаботился о кодировании в MATLAB и разделе результатов, MAC и DPS позаботились о методологии и теоретическом содержании статьи. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление о доступности данных: все данные находятся в открытом доступе на Yahoo Finance по адресу https://.Finance.yahoo.com/.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Сокращения

В данной рукописи использованы следующие сокращения:

Б.Н.	Байесовская сеть
Ациклический граф, ориентированный на	DAG
Динамическая байесовская сеть	DBN
Графическая модель, управляемая	DGM
Ожидания на развивающихся рынках – максимизация	
HNN	Скрытая марковская модель
PDF-функция плотности вероятности	
Максимум MAP апостериори	
Максимальное правдоподобие	ML

Ссылки

1. Рассел, С.; Норвиг, П. Искусственный интеллект: современный подход, 2-е изд.; Прентис-Холл: Аппер-Сэддл-Ривер, НьюДжерси, США, 1995 г.
2. Мерфи, К. Динамические байесовские сети: представление, вывод и обучение. доктор философии Диссертация, Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США, 2002 г.
3. Басу, С. Инвестиционная эффективность обыкновенных акций по отношению их соотношению цена/прибыль: тест эффективного рынка. гипотеза. Дж Финанс. 1977, 23, 3. 663–673. 4.
Ллео, С.; Зиемба, WT. История двух индексов: прогнозирование спадов на фондовом рынке в Китае. 2020. [Перекрестная ссылка]
5. Анджелини, Н.; Борметти, Г.; Марми, С.; Нардини, Ф. Значение имеет значение: предсказуемость доходности фондовых индексов. ССРН 2012. [CrossRef]
6. Чанг, К.К.; Тиан, З. Анализ рынка и торговые стратегии с использованием байесовских сетей. В материалах XVIII Интернационала Конференция по информационному синтезу, FUSION 2015, Вашингтон, округ Колумбия, США, 6–9 июля 2015 г.; стр. 1922–1929.
7. Дамиано, Л.; Петерсон, Б.; Вейландт, М. Переключение режимов и техническая торговля с использованием динамических байесовских сетей в высокопроизводительных системах. Частотные фондовые рынки, 2017.
8. Тайял, А. Переключение режимов и техническая торговля с использованием динамических байесовских сетей на высокочастотных фондовых рынках; Университет Ватерлоо: Ватерлоо, Онтарио, Канада, 2009 г.
9. Дагум, П.; Гальпер, А.; Хорвиц, Э. Динамические сетевые модели для прогнозирования. В материалах восьмой конференции по Неопределенность в искусственном интеллекте, Стэнфорд, Калифорния, США, 17–19 июля 1992 г.; стр. 41–48.
10. Дагум, П.; Гальпер, А.; Хорвиц Э. Неопределенное рассуждение и прогнозирование. Межд. Дж Прогноз. 1995, 11, 73–87. [Перекрестная ссылка]
11. Цвейг З.; Рассел С. Распознавание речи с помощью динамических байесовских сетей. 1998. Доступно в Интернете: http://www.cse.msu.edu/. ~cse841/papers/zweig.pdf (по состоянию на 28 апреля 2024 г.).
12. Нефиан А.; Лян, Л.; Пи, Х.; Лю Х.; Мерфи, К. Динамические байесовские сети для аудиовизуального распознавания речи. Е ВРАСИП Дж Адв. Сигнальный процесс. 2002, 11, 783042. [CrossRef]
13. Яо, XQ; Чжу, Х.; Она, З. Динамический байесовский сетевой подход к предсказанию вторичной структуры белка. БМЦ Биоинформ. 2008, 9, 49. [CrossRef] [ПабМед]
14. Равальд, А.; Гахрамани, З.; Уайлд, ДЛ. Байесовская сетевая модель для сворачивания белка и распознавания удаленных гомологов. Биоинформатика 2002, 18, 788–801. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

Machine Translated by Google

15. Мерфи, К.; Миан, С. Моделирование данных об экспрессии генов с использованием динамических байесовских сетей. 1996. Доступно онлайн: https://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Papers/ismb99.pdf (по состояниюна 28 апреля 2024 г.).
16. Прембида, К.; Соуза, ФАУ; Фариа, Д.Р. Динамическая байесовская сеть для семантической классификации местмобильной робототехнике. Автон. Робот. 2016, 5, 1161–1172. [Перекрестная ссылка]
17. Пателль, М.; Миро, СП; Диссанаяке, Г. Динамические байесовские сети для обучения взаимодействиюмежду ассистивными роботами-ходоходами и людьми. 2010. Доступно онлайн: https://opus.lib.uts.edu.au/bitstream/10453/16294/1/2010000382.pdf. (по состояниюна 28 апреля 2024 г.).
18. Делаж, Э.; Ли, ХЭЙ. Динамическая байесовская сетевая модель для автономной трехмерной реконструкции по одному изображениюв помещении. В материалах конференции IEEE Computer Society 2006 г. по компьютерному зрениюи распознаванию образов (CVPR'06), НьюЙорк, штат НьюЙорк, США, 17–22 июня 2006 г.; Том 2, стр. 2418–2428. [Перекрестная ссылка]
19. Козар, Дж; Пуэрта Дж; Гамес Дж А. Применение динамических байесовских сетей для мониторинга состояния и прогнозирования неисправностей в Сенсорная система: практический пример. Межд. Дж Компьютер. Интел. Сист. 2017, 10 , 176. [Перекрестная ссылка]
20. Бенаму, Э.; Атиф, Дж; Лараки, Р. Новый подход к обучениюдинамических байесовских сетях (DBN). ССРН Электрон. Дж 2018. [Перекрестная ссылка]
21. Мерфи, К. Введение в графические модели. 2001. Доступно онлайн: https://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Bayes/bnintro.HTML (по состояниюна 28 апреля 2024 г.).
22. Ван, Х. Байесовский вероятностный вывод о динамике цен на акции на уровне фирм. доктор философии Диссертация, Университет Суранари Технологии, Накхонратчасима, Таиланд, 2016 г.
23. Мерфи, К. Машинное обучение: вероятностная перспектива; MIT Press: Кембридж, Массачусетс, США, 2012.
24. Баум, Л.Э.; Петрис, Т.; Соулз, Г.; Вайс, Н. Техника максимизации, используемая встатистическом анализе вероятностных функции цепей Маркова. Энн. Математика. Стат. 1970, 41, 1, 167–171. [Перекрестная ссылка]
25. Демпстер, АР; Лэрд, НьюМексико; Рубин, Б. Максимальное правдоподобие на основе неполных данных с помощьюалгоритма EM. JR Стат. Соц. Сер. Б 1977, 39, 1–22. [Перекрестная ссылка]
26. Портфолиолаборатория. Доступно онлайн: https://portfolioslab.com/. (по состояниюна 28 апреля 2024 г.).

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

От алгебро-геометрического решения уравнения Тодык Формулы Сато

Пьер Гайяр

Факультет наук Миранды, Бургундский университет Франш-Конте, 2100 Дижон, Франция; pierre.gaillard@u-bourgogne.fr

Аннотация: Мы знаем, что вырождение решений УЧП, заданное через тэта-функции на римановых поверхностях, дает важные результаты о частных решениях, как и в случае уравнения НУШ. Здесь мы вырождаем так называемые конечнозонные решения уравнения решетки Тодыиз общей формулировки в терминах абелевых функций, когда лакуны стремятся к точкам. Это вырождение позволяет нам восстановить формулы Сато без использования теории обратной задачи рассеяния, геометрических методов или методов теории представлений.

Ключевые слова: римановы поверхности; тета-функции; абелевы интегралы; Функции Бейкера Ахиезера; Формулы Сато

MSC: 35C99, 35Q35, 35Q53

1. Введение

Для представления уравнения Тодыможно выбрать различные формулировки. В оригинальной работе 1967 года [1] изучались колебания однородной цепочки частиц с нелинейным взаимодействием, и Тода рассматривал следующее уравнение для n-й частицы

$$\text{В цепочке: } m \quad 2x(un) = \quad r(\varphi)(un \quad un \quad 1) + \quad r(\varphi)(un+1 \quad un), \quad (1)$$

где m — масса частиц, а φ(r) — энергия взаимодействия между соседними частицами. Некоторые решения были построеныдля конкретных взаимодействий φ.

Тоже уравнение с m = 1 рассматривалось Дейтом и Танакой в 1976 году [2], и они построили некоторые общие решения, но в терминах интегралов, которые трудно использовать.

В приложении к статье Дубровина [3], опубликованной в 1981 г., Кричевер рассмотрел неабелеву версиюэтого уравнения и дал решения в терминах тэта-функции на римановых поверхностях.

В 1995 г. Матвеев и Шталь хоффен [4] рассмотрели следующую версиюуравнения Тоды:

$$2x(un) = \exp(un \quad 1 \quad un) \quad \exp(un \quad un+1). \quad (2)$$

Они использовали преобразование Дарбу, чтобыпостроить решения этого уравнения в терминах из Казоратиса.

В 2014 году Чжан и Чжоу [5] использовали следующее представление уравнения Тоды

$$x \quad t(un) = (\quad t(un) + \alpha(t))(un \quad 1 \quad 2un + un+1). \quad (3)$$

Они использовали обобщение exp-функции для построения многоволновых решений этого уравнения.

Совсем недавно Сан, Ма и Ю[5] исследовали следующее представление уравнения Тоды:

$$(un) = 4(\exp(un \quad 1 \quad un) \quad \exp(un \quad un+1)). \quad (4)$$

check for updates

Цитирование: Гайяр, П. Из книги «Алгебро». Геометрические решения Тоды

Уравнение к формулам Сато.

Прикладная математика 2024, 4, 856–

867. https://doi.org/10.3390/

appliedmath4030046

Академический редактор: Карло Бьянка

Поступила: 26 апреля 2024 г.

Пересмотрено: 2 июля 2024 г.

Принято: 2 июля 2024 г.

Опубликовано: 9 июля 2024 г.

Копирайт: © 2024 автора.

Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария.

Эта статья находится в открытом доступе.

распространяется на условиях и

условия Creative Commons

Лицензия с указанием авторства (CC BY)

(https://creativecommons.org/licenses/by/

4.0/).

Machine Translated by Google

Они использовали логарифмическое преобразование для получения некоторых частных решений в виде логарифмов.

В 2020 году Дуарте [6] рассмотрел следующее представление уравнения Тоды:

$$\alpha \quad 2\,x\,(u(x,y,n)) + \beta \quad {}^{2}_{и}(u(x,y,n)) =$$
$$\exp(u(x,y,n \quad 1) \quad u(x,y,n))) \quad \exp(u(x,y,n) \quad u(x,y,n+1)).$$

Он использовал особый анзац в соответствии со свойствами уравнения Лапласа, чтобы построить некоторые решения в терминах тригонометрических функций.

Также в 2020 году Шибольд и Нильсон [7] изучили еще один вариант уравнения Тоды в виде

$$_{2\,xy}(\log(1+u_n)) = u_{n+1} \quad 2u_n + u_{n+1}. \tag{5}$$

Они строили решения в рамках линейной алгебры с помощью определителей.

Здесь мы рассматриваем уравнение Тоды в следующем представлении [8–11]:

$$\frac{p\text{-}н}{r_{n+1}} \quad \overline{c_n}\psi_{n+1} + v_n\psi_n + \frac{p\text{-}н}{r_{H-1}} \quad \overline{c_n \quad 1}\psi_n \quad 1 = \lambda\psi_n$$
$$t\psi_n = \quad \overline{c_n}\psi_{n+1} + \overline{t\,(\ln r_n)\psi_n} \quad c_n \quad 1\psi_n \quad 1, \quad \overline{2r_{n+1}\,2r_n} \quad 1 \tag{6}$$

с

$$c_n = \frac{e^{2I0}\,\theta^{2}(tV'' + nD + Z)}{\theta(tV'' + (n+1)D + Z)\theta(tV'' + (n \quad 1)D + Z)\;\theta(tV'' + (n} \tag{7}$$

$$t\ln\theta(tV'' + nD + \frac{1)\,D + Z)\,v_n = \quad R0 +}{Z)}, \tag{8}$$

где θ — классическая тэта-функция Римана.

Мы знаем, что вырождение решений УЧП, заданных через тэта-функции Римана, дает некоторые важные частные решения. В случае уравнения НУШ нам удалось построить квазирациональное решение, включающее определитель порядка N для каждого натурального числа N в зависимости от 2N - 2 действительных параметров [12]. В случае уравнения КдФ мы строили решения в терминах определителей Фредгольма и вронскианов [13] из функций Бейкера–Ахиезера.

В данной работе с помощью этого метода мы восстановили формулы Сато для уравнения Тоды.

Из решений с конечной щелью, заданных в терминах тэта-функций Римана, мы построили некоторые квазирациональные решения и восстановили формулы Сато, используя вырождение, заданное в рамках уравнения НУШ [14].

А именно, мы получили многосолитонные решения из конечнозонных решений путем предельного перехода, т. е. путем стремления лакунк точкам некоторой римановой поверхности. Это было выполнено в духе [14] или совсем недавно [13]. Одной из сильных сторон этого подхода является то, что он не опирается на теорию обратной задачи рассеяния или геометрические методы и методы теории представлений, что предлагает новый взгляд на проблему.

Рассмотрим риманову поверхность Г, представленную - $\prod_{к=1}^{г}$ акбк $a_к^{1}$ $^{1\,6}_{к}$ алгебраического кривой, определенной в [8,9]

$$_{ом}{}^{2} = \prod_{j=1}^{2г+2} (z \quad E_j),$$

причем $E_j \neq E_k$, $j \neq k$.

Рассмотрим Ω'' и Ω'_{1} $_{0}$ [11] абелевы интегралы, подтверждающие

$$_{АК}\,дОм''_1(П) = \quad _{АК}\,дОм'_0(П) = 0 \qquad к = 1, \ldots, г, \tag{9}$$

со следующей асимптотикой при $P = (\omega, z) \quad Г$ [11]:

Machine Translated by Google

$$\Omega_1''(P) = \pm\left(\frac{1}{2}(z + R0 + O(z^{-1})\right), \qquad P \to P^{\pm} \tag{10}$$

$$\Omega_0'(P) = \pm(\ln z + I0 + O(z^{-1})), \qquad P \to P^{\pm}, \tag{11}$$

$$\omega = \pm(z^{g+1} + O(z^{g})), \qquad P \to P^{\pm}. \tag{12}$$

Векторы V_{jk}, D, X и Z определяются формулами

$$V_{jk} = \frac{1}{b_j}\int_{B_k} d\Omega_1'' \tag{13}$$

$$D = U(P^{+}) - U(P^{-}), \tag{14}$$

$$X = K + \sum_{j=1}^{g} u_j(P_{jk}), \qquad Z = U(P^{+}) + X, \tag{15}$$

где K — вектор констант Римана.

U(P) — классический абелев интеграл $\int^{P} dU$.

P0 Решения системы (6) можно записать [10,11] в виде

$$\psi_n(P, t) = \tilde{r}_n(t)e^{\Omega_0'(P)+t\Omega_1''(P)}\frac{\theta(U(P) + tV'' + nD - X)}{\theta(U(P) - X)}, \tag{16}$$

с

$$\tilde{r}_n(t) = r_n(t)\left(\frac{\theta(Z)\theta(Z - D)}{\theta(tV'' + nD + Z)\theta(tV'' + (n-1)D + Z)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

2. Вырождение решений.

Предположим, что E_j вещественны, $E_m < E_j$, если $m < j$, и попытаемся оценить пределы всех объектов в формуле (16), когда E_{2m}, E_{2m-1} стремится к α_m, $\alpha_m = \kappa_m^2$, $\kappa_m > 0$, при $1 \le m \le g$.

Как и в предыдущем разделе, θ строится из матрицы B-периодов поверхности Г коэффициенты c_{jk} связаны с абелевыми дифференциалами dU_j соотношением

$$dU_j = \frac{dz}{2\sqrt{\prod_{k=1}^{2g+2}(z - E_k)}}\sum_{k=1}^{g} c_{jk}z^{k-1} \tag{18}$$

а коэффициенты c_{jk} можно получить, решив систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{g} c_{jk}A_{ki} = \delta_{ji}, \quad 1 \le j \le g, \quad 1 \le i \le g.$$

В оставшейся части статьи мы будем использовать следующие обозначения:

$$\kappa_{mj} = (\alpha_m + E_{2g+1})(\alpha_j + E_{2g+2}), \quad \kappa_{jm} = (\alpha_j + E_{2g+1})(\alpha_m + E_{2g+2}), \quad C_k(z) = (z - E_{2g+1})(\alpha_k - E_{2g+2}), \quad D_k(z) = (z - E_{2g+2})(\alpha_k - E_{2g+1}), \quad L_k = \alpha_k + E_{2g+1}, \quad M_k = \alpha_k + E_{2g+2}, \quad F(z) = \sqrt{z - E_{2g+1}}, \quad G(z) = \sqrt{z - E_{2g+2}}. \tag{19}$$

2.1. Предел $P(z) = \prod_{j=1}^{2g+2}(z - E_j)$

Теперь мы изучаем предел $P(z) = \prod_{j=1}^{2g+2}(z - E_j)$.

Machine Translated by Google

Предел $P(z) = \prod_{j=1}^{2г+2} (z - Ej)$, очевидно, равен $P^{\sim}(z) = \prod_{j=1}^{г} (г + αj)^2 (г - E2g+1)(z - E2g+2)$ или, учитывая (19),

$$P^{\sim}(z) = \prod_{j=1}^{г} ((z + αj)F(z)G(z))2 . \quad (20)$$

2.2. Предел $dUm = \frac{\sum_{k=1}^{г} cmk \, g_k}{\prod_{k=1}^{2g+2} (z - Ek)} dz$

Теперь изучаем предел $dUm = \frac{dz. \sum_{k=1}^{g} g_k \, k=1 cmkz}{dz, \prod_{k=1}^{2g+2} (z - Ek) \; k=1 \varphi m(z)}$

Предел dUm равен $dUm = g \prod_{j=1}^{E2g+1} (z + αj) (z - E2g+2)$

$\varphi m(z) = \sum_{к=1}^{г} c^{\sim}mkz \, g_k$. Условие нормировки в пределе принимает вид

$$dUj_{AK} = δkj, \quad m≠k \frac{2πiφj(αk)}{(αm - αk)(αk + E2g+1)(αk + E2g+2)} \quad (21)$$

что доказывает, что числа $αm$, $m ≠ k$ являются нулями многочленов $φk(z)$; следовательно, $φk(z)$ можно записать как $φk(z) = c^{\sim}k1 \prod_{m≠k} (z + αm)$.

В силу (21) получаем в пределе

$$c^{\sim}k1 = \frac{\sqrt{(αk + E2g+1)(αk + E2g+2)}}{2πi}.$$

Так,

$$φk(z) = \frac{\sqrt{(αk + E2g+1)(αk + E2g+2)}}{2πi} \prod_{m≠k} (z + αm).$$

Более того,

$$dU^{\sim}k(z) = \frac{φk(z)dz}{\sqrt{(z - E2g+1)(z - E2g+2)} \prod_{м=1}^{г} (г + αм)};$$

другими словами,

$$dU^{\sim}k(z) = dz, \frac{\sqrt{(αk + E2g+1)(αk + E2g+2)}}{2πi \sqrt{(z - E2g+1)(z - E2g+2)}(z + αk)}$$

и с учетом (19)

$$dU^{\sim}k(z) = dz. \frac{LkMk}{2πiF(z)G(z)(z + αk)} \quad (22)$$

2.3. Предел Bmk

Предметом данного подраздела является исследование предела Bmk.

У нас есть

$$Я = \int_{αм}^{E2g+2} \frac{1 дУк}{2} Бмк.$$

Интеграл Ілегко вычислить вдоль действительной оси на верхнем листе поверхности Г, и мы получим

Machine Translated by Google

$$B\tilde{}mk = \frac{я}{\pi}\ Ин\ \frac{\sqrt{(\alpha m + E2g+1)(\alpha k + E2g+2)} + \sqrt{(\alpha k + E2g+1)(\alpha m + E2g+2)}}{\sqrt{(\alpha m + E2g+1)(\alpha k + E2g+2)}\quad \sqrt{(\alpha k + E2g+1)(\alpha m + E2g+2)}},$$

или с предыдущими обозначениями (19),

$$B\tilde{}mk = \frac{я}{\pi}\ \frac{\kappa mk + \kappa km}{\kappa\kappa m}\ ln\ \frac{\kappa mk + \kappa km}{\kappa\kappa m}. \tag{23}$$

Итак, iBkk стремится к .

Более того, у нас есть

$$\int_{E2g+2}^{П} dU\tilde{}_k = \frac{i}{2\pi} ln\ \frac{\sqrt{(z\quad E2g+1)(\alpha k + E2g+2)} + \sqrt{(z\quad E2g+2)(\alpha k + E2g+1)}}{\sqrt{(z\quad E2g+1)(\alpha k + E2g+2)}\quad \sqrt{(z\quad E2g+2)(\alpha k + E2g+1)}},$$

или с предыдущими обозначениями (19),

$$\int_{E2g+2}^{П} dU\tilde{}_к = \frac{i}{2\pi} ln\ \frac{Ск\,(з) + Дк\,(з)}{Ck\,(z)\quad Dk\,(z)}. \tag{24}$$

2.4. Предел Ом «1

В этом подразделе мы изучаем предел ΩΩ1 «1.

«есть абелев интеграл второго рода, удовлетворяющий условиям

$$\int_{AK} дОм\ «1\,(P) = 0,\ 1 \quad k \quad g,$$

такой, что

$$1\ Ом''_{(P) = ± (z + R0 + O(z\ 1\ 2} \quad ^{1}_{)),} \qquad П \quad П \quad ±$$

Предел dΩ′ (P) равен $d\tilde{Ω} » \sum_{j=1}^{1\ (П) = 1\ г} \frac{\varphi(z)}{dz,\ (z + \alpha j)\ (z\quad E2g+1)(z\quad E2g+2)}$

g+1 , где $\varphi(z) = \sum_{к=0} c\tilde{}kz\ g+1\quad k$.

Ω′ 2 . Более того, для Ω(P), удовлетворяющего условию z + O(1) при z ± имеем

$$c\tilde{}0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{AK} дОм''_{1}\,(P) = 0,\ 1 \quad k \quad g$$

докажите, что α1, . . . , αg – нули функции φ; таким образом, $\varphi(z) = \frac{г}{м=1}\ (z + \alpha m)(z\quad \beta)$.

Имеем $P(z) = \sum (z + \alpha m)$, и $\frac{2г+2}{к=1}\ (z\quad Ek\,)$ стремится к $P\tilde{}(z) = (z\quad E2g+1)(z\quad E2g+2)$ $\frac{г}{м=1}$

получаем

$$d\tilde{Ω}''(z) = dz;\ 1\ 2\ (z\quad \frac{я}{E2g+1)(z\quad E2g+2)}$$

Ом''(P) стремится к 1

$$Ом\tilde{}''_{(П) = 1} \int_{E2g+2}^{я} \frac{ты}{2\ (u\quad E2g+1)(u\quad E2g+2)}\ ду.$$

Machine Translated by Google

Это можно оценить, и это дает

$$\text{Ом}_1^{\sim}(\Pi) = \frac{\sqrt{E2g+1} + \sqrt{E2g+2}}{4} \ln \frac{\sqrt{z - E2g+1} + \sqrt{z - E2g+2}}{\sqrt{E2g+1} - \sqrt{E2g+2}} + \frac{1}{2}\sqrt{(z - E2g+1)(z - E2g+2)}.$$

С учетом обозначений, определенных в (19), его можно переписать в виде

$$\Omega_1(\Pi) = \ln \frac{\sqrt{E2g+1} + \sqrt{E2g+2}}{4} \left| \frac{F(z) + G(z)}{F(z) - G(z)} \right|_{\Omega^{\sim}}'' + \frac{1}{2} F(z)G(z). \tag{25}$$

2.5. Предел $\text{Ом}_0'$

Рассмотрим Ω_0', и мы изучаем его предел.

$\text{Ом}_0'$ есть абелев интеграл третьего рода, удовлетворяющий условиям

$$\text{дОм}_0'(P) = 0, \quad 1 \le k \le g,$$
$$A_k$$

такой, что

$$\text{Ом}_0'(P) = \pm(\ln z - I_0 + O(z^{-1})), \quad \Pi \to \Pi^{\pm}.$$

Предел $d\Omega_0'(P)$ равен

$$d\Omega_0'(P) = \sum_{j=1}^{g} \frac{\sum_{k=0}^{r} c_k z^k}{(z+\alpha_j)\sqrt{(z - E2g+1)(z - E2g+2)}} dz.$$

$\text{Ом}_0'(P)$ удовлетворяет условию $\Omega_0'(P) = \pm \ln(z) + O(1)$, и при $z \to \pm\infty$ имеем $c_0 = 1$.

Более того, условия

$$\text{дОм}_0'(P) = 0, \quad 1 \le k \le g$$
$$A_k$$

докажите, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ – нули функции φ; таким образом, $\varphi(z)$, определяемый формулой $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{r} c_k z^k$, может $= \prod_{m=1}^{r} (z+\alpha_m)$, можно записать как $\varphi(z) = \prod_{m=1}^{r} (z+\alpha_m)$.

Поскольку $P(z) = \prod_{k=1}^{2r+2} (z - E_k)$ стремится к $\tilde{P}(z) = \sqrt{(z - E2g+1)(z - E2g+2)} \prod_{m=1}^{r} (z+\alpha_m)$, мы получаем

$$d\Omega_0'(z) = \frac{1}{\sqrt{(z - E2g+1)(z - E2g+2)}} dz,$$

и $\Omega_0'(P)$ стремится к $\Omega_1'(P) = \int_{E2g+2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(u - E2g+1)(u - E2g+2)}} du$.

Это можно вычислить, и это дает

$$\Omega_0'(\Pi) = \ln \frac{\sqrt{z - E2g+1} + \sqrt{z - E2g+2}}{\sqrt{E2g+1} - \sqrt{E2g+2}}.$$

С помощью (19) это можно записать как

$$\Omega_0'(\Pi) = \ln \frac{\Phi(r) + \Gamma(r)}{F(z) - G(z)}. \tag{26}$$

2.6. Предел X

Выводим предел X.

Из предыдущих разделов,

$$B_{mk}^{\sim} = \int_{\kappa_{mk}}^{\infty} \pi \frac{\kappa_{mk} + \kappa_{km}}{\kappa_{km}} \ln,$$

Machine Translated by Google

$$\tilde{U}_k(P) = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{C_k(z) + D_k(z))}{C_k(z) \quad D_k(z)}.$$

Поскольку K_m определяется формулой $K_m = \sum_{j=1}^{m/2} B_{jm}$ и $X = K + \sum_{j=1}^{g} U(P_j)$, мы можем написать

$$X_m \quad \tilde{X}_m = \frac{i}{\pi} \sum_{j=m}^{g} \ln \frac{\kappa_{mj} + \kappa_{jm}}{\kappa_{jm}} \sum_{j=1,}^{m/2} + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \sum_{per} \frac{C_m(z_j) + D_m(z_j)}{C_m(z_j) \quad D_m(z_j)} + i. \tag{27}$$

2.7. Предел $U(P_\infty)$, $U(P_{\infty^+})$, $D_\infty Z$. В этом подразделе мы изучаем предел $U(P_\infty)$, $U(P_{\infty^+})$, $D_\infty Z$.

Из предыдущих разделов легко получить пределы $\tilde{U}_k$ как

$$\lim_{P \to P_\infty^+} \tilde{U}_k(P) = \ln \frac{-i}{2\pi} \frac{\sqrt{\alpha_k + E_{2g+2}} + \sqrt{\alpha_k + E_{2g+1}} \sqrt{\alpha_k +}}{\sqrt{E_{2g+2}} \quad \sqrt{\alpha_k + E_{2g+1}}},$$

или

$$\lim_{P \to P_\infty^+} \tilde{U}_k(P) = \ln \frac{-i}{2\pi} \frac{M_k + L_k}{M_k + L_k}. \tag{28}$$

$$D_k = U_k(P_{\infty^+}) \quad U_k(P_\infty) \quad \tilde{D}_k = \frac{i}{2\pi} \frac{M_k + iL_k \ln}{M_k \quad iL_k}. \tag{29}$$

Таким образом,

$$\lim_{P \to P_\infty^-} \tilde{U}_k(P) = \ln \frac{-i}{2\pi} \frac{\sqrt{\alpha_k + E_{2g+2}} + \sqrt{\alpha_k + E_{2g+1}} \sqrt{\alpha_k +}}{\sqrt{E_{2g+2}} \quad \sqrt{\alpha_k + E_{2g+1}}} D_k,$$

или

$$\lim_{P \to P_\infty^-} \tilde{U}_k(P) = \ln \frac{-i}{2\pi} \frac{M_k + L_k}{M_k + L_k} \frac{i}{2} \frac{M_k + iL_k \ln +}{M_k + iL_k 2\pi}. \tag{30}$$

Следовательно, предел $Z = U(P_{\infty^+})$ X определяется формулой

$$Z_k \quad \tilde{Z}_k = \frac{i}{\pi} \sum_{j=1,\, j \neq k}^{g} \ln \frac{\kappa_{kj} + \kappa_{jk}}{\kappa_{kj} \quad \kappa_{jk}} + \frac{k}{2} \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1,}^{g} \text{Ин} \frac{C_k(z_j) + D_k(z_j)}{C_k(z_j) \quad D_k(z_j)} \quad i \ln 2\pi \frac{i}{2} \frac{M_k + L_k}{M_k \quad L_k} \tag{31}$$

2.8. Предел V'' В этом параграфе предел $V\,d\Omega'$ V определен в (13). k «изучается.

$$\text{«} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k} 1$$

У нас есть $\text{я} = \sum_{E_{2g+2}} d\Omega 1$ «$_{\alpha_k}$ $\frac{1}{2} \oint_{b_k} 1 . d\tilde{\Omega}$ «

Как и при определении предела Ω «$_1$, у нас есть

$$\text{ДОм}\tilde{}_{(\Pi)}'' = \sum_{\alpha_k}^{E_{2g+2}} 1 \frac{E_{2g+1} + E_{2g+2}}{4} \text{Ин} \frac{\sqrt{\alpha_k + E_{2g+1}} + \sqrt{\alpha_k + E_{2g+2}} \sqrt{\alpha_k +}}{\sqrt{E_{2g+1}} \quad \sqrt{\alpha_k + E_{2g+2}}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_k + E_{2g+1})(\alpha_k + E_{2g+2})}.$$

Так,

$$B_k \text{«} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k} d\Omega' \, 1 \quad \tilde{V}'' = \frac{E_{2g+1} + E_{2g+2}}{4\pi i} \text{Ин} \frac{\sqrt{\alpha_k + E_{2g+1}} + \sqrt{\alpha_k + E_{2g+2}} \sqrt{\alpha_k +}}{\sqrt{E_{2g+1}} \quad \sqrt{\alpha_k + E_{2g+2}}}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sqrt{(\alpha_k + E_{2g+1})(\alpha_k + E_{2g+2})},$$

$$B\tilde{}_k'' = \frac{E_{2g+1} + E_{2g+2}}{4\pi i} \frac{L_k \quad M_k \ln}{L_k + M_k} \frac{1}{2\pi i} L_k M_k. \tag{32}$$

Machine Translated by Google

2.9. Предел θ(p)

Определим предел θ(p).

Обозначим A как аргумент функции θ(p) = kεZg exp{πi(Bk|k) + 2πi(k|p)}.
A можно переписать в виде

$$A = \pi i \sum_{j=1}^{r} Bjjkj(kj \quad 1) + 2\pi i \sum_{j>m} Бмйкмкж + \sum_{j=1}^{r} \pi i(2pj + Bjj)kj .$$

Используя неравенство kj(kj 1) 0 для всех k Z g и тот факт, что iBkk стремится к , так что мы можем свести предел ~θ функции θ(p) к конечной сумме, взятой по векторам k Z , каждый g kj должно быть равно 0 или 1.

В этом разделе мы вычисляем предел всех членов в выражении решения ψ(P, t) в θ. Мы обозначаем числом i как аргументы этих различных выражений.

Сначала изучим члены ~n , соответствующие аргументам p1 = Z = U(P) X , p2 = Z D, p3 = tV′′ + nD Z, p4 = tV′′ + (n 1)Д З .

Затем изучаем остальные члены ψn, соответствующие аргументам p5 = U(P) X, p6 = U(P) + tV′′ + nD X.

С этими обозначениями решение ψ(n, , t, z) можно записать в виде

$$\psi n(P, z) = rn(t) \quad \frac{\theta(p1)\theta(p2)}{\theta(p3)\theta(p4)} \quad \frac{1}{2}\frac{\theta(p6)}{\theta(p5)} e^{\text{НОм}'_0(P)+t\Omega'_1(П)} .$$

2.10. Предел θ(p1)

Обозначим p1 как терм Z = U(P) X.

Изучаемого предела .

Тогда θ(p1) ~θ1:

$$\sim\theta 1 = \exp \sum_{1\ j>l} k\varepsilon Zg,\ kj = 0 \text{ или } 2 \ln \frac{кlj \quad кjl}{kjkl + клj + кjl} \sum_{j=1}^{r} kj \ln \frac{Mj + Lj}{Мдж \quad Лдж}$$

$$2 \ln кjl \frac{кjl + клj +}{клj \not= j} + j\pi i + \sum_{л=1}^{r} \ln \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl) \quad Dj(zl)} .$$

2.11. Предел θ(p2)

Рассмотрим p2 = Z D. Изучим его предел .

Тогда θ(p2) ~θ2. При Dj D~ легко видеть, что j ,

$$\sim\theta 2 = \exp \sum_{\text{или } 1\ j>l} k\varepsilon Zg,\ kj = 0 \ 2 \ln \frac{кlj \quad кjl}{kjkl + клj + кjl} \sum_{j=1}^{r} kj \ln \frac{Mj + Lj}{Мдж \quad Лдж}$$

$$2 \ln кjl \frac{кjl + клj +}{клj \not= j} + j\pi i + \sum_{л=1}^{r} \ln \frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl) \quad Dj(zl)} + \sum_{j=1}^{r} \ln \frac{Mj + iLj}{Mj \quad iLj} .$$

2.12. Предел θ(p3)

Пусть p3 равно tV′′ + nD + Z. Изучим его предел .

Тогда θ(p3) ~θ3:

$$\sim\theta 3 = \sum_{k\varepsilon Zg,\ kj = 0 \text{ или } 1} \text{опыт} \sum_{j>l} 2 \ln \frac{кlj \quad кjl}{kjkl + клj + кjl} \sum_{j=1}^{r} kj \ln \frac{Lj + Mj}{Лдж \quad Мдж}$$

$$+т \frac{\text{Например}+1 + E2g+2}{2} \text{Ин} \frac{Лдж \quad Мдж}{Лж + Мдж} LjMj + n \ln \frac{Mj + iLj}{Mj \quad iLj}$$

Machine Translated by Google

$$+ \sum_{l\neq j} \ln + \frac{\kappa_{jl} + \kappa_{lj}}{2} \frac{2}{j\pi i + \kappa_{jl} - \kappa_{lj}} \prod_{l=1}^{r} \text{Ин} \frac{C_j(z_l) + D_j(z_l)}{C_j(z_l) - D_j(z_l)} .$$

2.13. Предел $\theta(p_4)$

Рассмотрим $p_4 = tV'' + (n-1)D + Z$; $\theta(p_4) \to \tilde{\theta}_4$. Определяемого предел.

При $D_j \to \tilde{D}$ легко проверить, что

$$\tilde{\theta}_4 = \exp \sum_{k\in Z,\, k_j=0 \text{ или } 1} \kappa_{lj} \kappa_{jl} \prod_{j>l} \kappa_{jkl} + 2 \ln \prod_{j=1}^{r} k_j \ln \frac{L_j + M_j}{L_j - M_j}$$

$$+ \tau \frac{\text{Например}+1 + Д2г+2}{2} \text{Ин} \frac{L_j - M_j}{L_j + M_j} + L_j M_j + (n-1) \ln \frac{M_j + iL_j}{M_j - iL_j}$$

$$+ \sum_{l\neq j} \kappa_{lj} \frac{\kappa_{jl} + \kappa_{lj}}{2} \ln + j\pi i + \kappa_{jl} \prod_{l=1}^{r} \text{Ин} \frac{C_j(z_l) + D_j(z_l)}{C_j(z_l) - D_j(z_l)} .$$

2.14. Предел $\theta(p_5)$

Член $p_5 = U(P) \to X$ стремится к $\tilde{p}_5 = \tilde{U}(P) \to \tilde{X}$.
Определяемого предел.

Тогда $\theta(p_5) \to \tilde{\theta}_5$:

$$\tilde{\theta}_5 = \text{опыт} \prod_{k\in Z,\, k_j=0 \text{ или } 1} {}^{2\,\text{пер.}} \kappa_{lj} \kappa_{jl} \prod_{j>l} \kappa_{jkl} + \kappa_{lj} \kappa_{jl} \prod_{j=1}^{r} k_j \ln \frac{C_j(z) - D_j(z)}{C_j(z) + D_j(z)}$$

$$+ \sum_{l\neq j} \kappa_{lj} \frac{\kappa_{jl} + \kappa_{lj}}{2} \ln + j\pi i + \kappa_{jl} \prod_{l=1}^{r} \text{Ин} \frac{C_j(z_l + D_j(z_l}{C_j(z_l - D_j(z_l} .$$

2.15. Предел $\theta(p_6)$

Член $p_6 = U(P) + tV'' + nD \to X$ стремится к $\tilde{p}_6 = \tilde{U}(P) + t\tilde{V}'' + n\tilde{D} \to \tilde{X} + n\tilde{D}$.

Затем определяемого предел. $\theta(p_6) \to \tilde{\theta}_6$:

$$\tilde{\theta}_6 = \exp \sum_{k\in Z,\, k_j=0 \text{ или } 1} {}^{2 \ln} \frac{\kappa_{lj} \kappa_{jl}}{\kappa_{jkl} + \kappa_{lj} + \kappa_{jl}} \prod_{j>l} \prod_{j=1}^{r} k_j \ln \frac{L_j + M_j}{L_j - M_j}$$

$$+ \tau \frac{\text{Например}+1 + Д2г+2}{2} \text{Ин} \frac{L_j - M_j}{L_j + M_j} \; L_j M_j + n \ln \frac{M_j + iL_j}{M_j - iL_j}$$

$$+ \sum_{l\neq j} \ln \frac{\kappa_{jl} + \kappa_{lj}}{\kappa_{jl} - \kappa_{lj}} 2 + j\pi i \prod_{l=1}^{r} \text{Ин} \frac{C_j(z_l) + D_j(z_l)}{C_j(z_l) - D_j(z_l)} + \text{пер} \frac{C_j(z) - D_j(z)}{C_j(z) + D_j(z)} .$$

2.16. Предел решений Ψ

Из предыдущего раздела мы можем указать предел $\tilde{\psi}$ для ψ. Он принимает следующую форму:

$$\tilde{\theta}_2\, \tilde{\psi}(z, n, t)) \frac{rn(t) \tilde{\theta}_1}{= \tilde{\theta}_5} \overline{\tau_2} \times \frac{e^{n \ln \frac{F(z)+G(z)}{F(z) - G(z)} + \tau \frac{E2g+1+E2g+2}{4} \ln \frac{F(z)+G(z)}{F(z) - G(z)} \overline{\tau_2} + \tilde{\Phi}(r)\Gamma(з)}}{\tilde{\theta}_3 \tilde{\theta}_4 \overline{\tau_2}} \tilde{\theta}_6 .$$

В предыдущем выражении $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\theta}_2$ и $\tilde{\theta}_5$ не зависят от n и t.

Только $\tilde{\theta}_3$, $\tilde{\theta}_4$ и $\tilde{\theta}_6$ зависят от n и t.

Мы выберем частный случай, когда t = 0.

Заменяем n на x.

Обозначим c как коэффициент, определяемый формулой

Machine Translated by Google

$$c = \frac{rn(0)\,\tilde{}\theta 1\,\tilde{}\theta 2^{\,\tau+2}}{\tilde{}\theta 5}.$$

Обозначим H как функцию, определяемую формулой

$$H(r) = \frac{F(z)\quad G(z)}{\Phi(r) + \Gamma(r)}.$$

В различных суммах, включающих θ, остаются только члены с kj = 1. Итак, суммы можно сводить только на подмножествах J из [1; g] целого числа N. Обозначим aj как терм $a_j = 2^{1}_\frac{Mj+iLj}{Mj\quad iLj}$. Тогда член $\tilde{}\theta 6$ можно записать как

$$\tilde{}\theta 6 = \sum_{J\ \{1,\ldots,g\}\ j,l\ \ J,\ j<l} \ln\frac{\kappa lj\quad \kappa jl}{\kappa lj + \kappa jl}^{2} \prod_{j\varepsilon J}\frac{Lj + Mj}{Л\,дж\quad Мдж}$$

$$\kappa jl\ \frac{\kappa jl + \kappa lj}{\kappa lj\ l\quad Jl\not=j}\ln^{2}\prod_{j\varepsilon J}\frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl) + Dj(zl)}\ \frac{Cj(z)\quad Dj(z)}{Cj(z) + Dj(z)}\ e^{\ j\varepsilon J\,j\pi i\,e^{\,2x\ \ j\varepsilon J\,aj}}.$$

Обозначим τ как функцию, определяемую формулой

$$\tau(x) = \tilde{}\theta 3(x) = \ln\kappa lj + \kappa jl\ J\ \{1,\ldots,g\}\ j,l\ \ J,\ \prod_{j<l}\frac{\kappa lj\quad \kappa jl}{}^{2}\prod_{j\varepsilon J}\frac{Lj + Mj}{Л\,дж\quad Мдж}$$

$$\kappa jl\ \frac{\kappa jl + \kappa lj}{\kappa lj\ l\quad Jl\not=j}\ln^{2}\prod_{j\varepsilon J}\frac{Cj(zl) + Dj(zl)}{Cj(zl)\quad Dj(zl)}\ e^{\ j\varepsilon J\,j\pi i\,e^{\,2x\ \ j\varepsilon J\,aj}}.$$

Таким образом, решение $\Psi\tilde{}$ можно записать в виде

$$\Psi\tilde{}\,(x,z) = \frac{\exp(xH(z))\chi(x,z)}{c\,\tau(x)\overline{\tau(x\quad 1)}}. \tag{33}$$

Здесь мы возвращаемся к формулировке решения Сато, приведенной в [15].

Это выражение очень похоже на решение, представленное на странице 5830, и выражения Решение определяется выражением

$$\Psi\tilde{}\,(x,z)\ \frac{\exp(xz)\chi(x,z)}{= \tau(x)\overline{\tau(x\quad 1)}}. \tag{34}$$

Разница между этими двумя утверждениями заключается в том, что эти два уравнения рассматриваются по-разному:

Ван Диен рассматривает уравнение

$$a(x)e(x+1) + б(x)e^{\ '}x) + a(x-1)f(x-1) = \lambda f(x);$$

здесь мы рассматриваем (1)

$$\frac{p\text{-}н}{}\ \overline{cn}\psi n+1 + vn\psi n + rn+1\frac{p\text{-}н}{pH\text{-}1}\ \overline{cn}\ 1\psi n\quad 1 = \lambda\psi n.$$

2.17. Предел связанных потенциалов

В этом подразделе мы определяем предел связанных потенциалов.

Потенциалы un = cn и $\overline{vn}$ описываются в (6) и (7) как

$$cn = \frac{e2I0\,\theta^{2}(tV'' + nD + Z)}{\theta(tV'' + (n+1)D + Z)\theta(tV'' + (n\quad 1)D + Z)}$$

Machine Translated by Google

$$vn = R0 + t \frac{\theta(tV'' + (n\ \ 1)D + Z)}{\ln \theta(tV'' + nD + Z)}.$$

Итак, предел un равен

$$u\tilde{}n = k1 \frac{\tau(x)}{\tau(x+1)\tau(x\ \ 1)},$$

что то же самое, что и в [15] (стр. 5830), с точностью до константы k1.

Обозначая $\sigma(x) = t\theta(tV\tilde{}'' + xD\tilde{} + Z\tilde{})t=0$, предел vn равен $\sigma(x$

$$k2 + \tau(x \frac{1)\, v\tilde{}n =}{1)} \frac{\sigma(x)}{\tau(x)},$$

что аналогично написанному в [15] (стр. 5830) с точностью до константы k2.

3. Выводы

Мы использовали вырождение решений некоторых УЧП, заданных через тэта-функции Римана, чтобы получить некоторые важные решения. В частности, в случае уравнения НУШ нам удалось построить квазирациональное решение, включающее определитель порядка N для каждого натурального числа N в зависимости от 2N 2 вещественных параметров [12]. В случае уравнения КдФ из абелевых функций строились решения в терминах определителей Фредгольма и вронскианов [13].

В данном исследовании нам удалось восстановить формулы Сато с помощью этого метода для уравнения Тоды. Из решений, заданных через функции Бейкера–Акизера, удалось построить методом вырождения, заданным в рамках уравнения НУШ [14], некоторые квазирациональные решения и восстановить формулы Сато для уравнения Тоды.

А именно, мы получили многосолитонные решения из конечнозонных решений путем предельного перехода, т. е. путем стремления лакун к точкам на некоторой римановой поверхности. Одной из сильных сторон этого подхода является то, что он не опирается на теорию обратной задачи и рассеяния или геометрические методы и методы теории представлений, что предлагает другой взгляд на проблему.

Вырождение решений уравнения НУШ позволило построить новые квазирациональные решения порядка N в зависимости от 2N 2 вещественных параметров и построить их до порядка 23, которые ранее были неизвестны. В случае уравнения КдВ вырождение решений позволило найти решения, данные методом Дарбу, который представляет собой мост между подходом геометрической алгебры и структурой преобразований Дарбу. В данной статье это отчасти та же ситуация, что и для уравнения КдВ, где мы связали алгебро-геометрический подход с рамками метода обратной задачи и рассеяния.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление о доступности данных: данные, подтверждающие выводы этого исследования, доступны в статье.

Конфликты интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Ссылки

1. Тода М. Колебания цепи с нелинейным взаимодействием. Дж Физ. Соц. Яп. 1967, 6, 22–431. [Перекрестная ссылка]
2. Дата, Э.; Танака, С. Периодические многосолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза и решетки Тоды. Доп. Прог. Теор. Физ. 1976, 59, 107–125. [Перекрестная ссылка]
3. Дубровин Б.А. Тэта-функции и нелинейные уравнения. Расс. Математика. Вых 1981, 36, 11. [CrossRef]
4. Штальхофен А.А.; Матвеев В.Б. Позиции цепочки Тоды и родственные спектральные задачи. Физ. Математика. Генерал 1995 г., 28 лет, 1957–1965 гг. [Перекрестная ссылка]
5. Чжан С.; Чжоу Ю Ю Многоволновые решения уравнения решетки Тоды с помощью обобщения метода экспоненциальных функций. Межд. Дж Прил. Математика. 2014, 44, 1–6.
6. Дуарте В.Н. Один класс решений двумерного уравнения на решетке Тоды. Физ. Летт. 2021, 385, 126979. [CrossRef]
7. Нильсон Т.; Шибольд, К. Формулы решения двумерной решетки Тоды и частице подобных солитонов с неожиданными асимптотическое поведение. Дж Нелайнер. Математика. Физ. 2020, 27, 57–94. [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

8. Белоколос, Э.Д.; Бобенко А.И.; Енольский В.З.; Это, АР; Матвеев, В.Б. Алгебро-геометрический подход к решениюнелинейных интегрируемых уравнений; Серия по нелинейной динамике; Springer-Verlag: Берлин/Гейдельберг, Германия, 1996.
9. Дубровин Б.А.; Матвеев В.Б.; Новиков С. П. Интегрируемые системы нелинейные уравнения типа Кортевега-Де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевымногообразия; Серия конспектов лекций; Лондонское математическое общество: Лондон, Великобритания, 1976; Том 60, стр. 53–140.
10. Кричевер И. Периодическая неабелева цепочка Тодыи двумерное обобщение. Успехи математики наук 1981, 36, 72–77.
11. Смирнов А.О. Эллиптические солитоныинтегрируемых нелинейных уравнений; Санкт-Петербургский государственный университет: Санкт-Петербург, Россия, 2002; стр. 1–170.
12. Гайяр П. Семейства квазирациональных решений уравнения НУ Ши волнынубийцы. Дж Физ. Мет. Теор. 2011, 44, 435204. [Перекрестная ссылка]
13. Гайяр П. Вырожденные тэта-функции Римана, фредгольмовыи вронскианские представления решений уравнения КдФ. и вырожденный рациональный случай. Дж Геом. Физ. 2021, 161, 104059. [CrossRef]
14. Его, А.Р.; Рыбин А.В.; Саллe, М.А. Точное интегрирование уравнения NLS. Теор. Математика. Физ. 1988, 74, 29–32. [Перекрестная ссылка]
15. Диен Ж.Ф.Ф. Формула Сато для безотражательных конечно-разностных операторов. Дж Математика. Физ. 1999, 40, 5822–5834. [Перекрестная ссылка]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Базовая модель схемы преобразователей источника напряжения: Методология и моделирование

Кристиан Бипонго Ндеке *, Марко Адонис и Али Алмактуф

Факультет электротехники, электроники и вычислительной техники, Технологический университет Кейп-Полуострова, Кейптаун 7535, Южная Африка; adonisma@cput.ac.za (Массачусетс); almaktoofa@cput.ac.za (AA)
* Переписка: ndekechristian@gmail.com или 219385017@mycput.ac.za; Тел.: +27-62-836-2466

Аннотация: Преобразователи источников напряжения (VSC) стали ключевыми компонентами современных энергосистем, обеспечивающими эффективное преобразование энергии и гибкое управление потоками энергии. Понимание фундаментальной модели схемы VSC необходимо для их точного моделирования и анализа при исследованиях энергосистем. Базовая модель схемы преобразователя источника напряжения, подключенного к LC-фильтру, имеет важное значение, поскольку она снижает гармонические искажения и повышает общее качество электроэнергии микросети. Это гарантирует чистое и стабильное электроснабжение, необходимое для интеграции нескольких возобновляемых источников энергии и чувствительных нагрузок. В этой статье представлена комплексная методология разработки базовой модели схемы VSC с упором на ключевые компоненты и принципы. Методика включает моделирование пространственно-векторной широтно-импульсной модуляции (SVPWM), а также прямого квадратурного нулевого синхронного кадра. Различные элементы управления проектированием, включая проектирование контура управления током в S-домене, проектирование контура управления напряжением шины постоянного тока (DC) в S-домене и проектирование контура управления напряжением переменного тока (AC) в S-домене. S-домен исследуется для точного определения динамического поведения и стратегий управления VSC.

Предлагаемая методология обеспечивает систематическую основу для моделирования VSC, позволяя инженерам и исследователям анализировать их производительность и оценивать их влияние на стабильность и работу энергосистемы. Будущие исследования могут быть проведены с использованием математических исследований и сценариев моделирования, чтобы показать эффективность и применимость разработанных моделей при анализе приложений силовой электроники на основе VSC, включая системы передачи высокого напряжения постоянного тока (HVDC) и гибкие системы передачи переменного тока (FACTS).). Значимость этой работы заключается в ее потенциале для продвижения понимания и применения VSC, способствуя созданию более устойчивых и эффективных энергосистем. Обеспечивая прочную основу для будущих исследований и разработок, это исследование поддерживает продолжающуюся интеграцию возобновляемых источников энергии и развитие современной электрической инфраструктуры.

Ключевые слова: преобразователь источника напряжения; LC-фильтр; текущий контроль; контроль напряжения постоянного тока; Контроль напряжения переменного тока

check for updates

Цитирование: Ндеке, СВ; Адонис, М; Алмактуф, А. Базовая модель схемы преобразователей источников напряжения: методология и моделирование. Прикладная математика 2024, 4, 889–907. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030048

Академический редактор: Джун-Джу Ян

Поступила: 21 мая 2024 г.
Пересмотрено: 16 июля 2024 г.
Принято: 18 июля 2024 г.
Опубликовано: 29 июля 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Преобразователи источников напряжения (VSC) стали неотъемлемыми компонентами современных энергосистем, играя решающую роль в обеспечении эффективного преобразования энергии и обеспечении гибкого управления потоками энергии [1]. Поскольку требования к интеграции возобновляемых источников энергии, стабилизации сети и повышению надежности сети продолжают расти, точное моделирование и анализ VSC стали иметь первостепенное значение [2,3]. Основным силовым интерфейсом, соединяющим распределенные генерации (РГ) с микросетями, является преобразователь переменного тока в постоянный. Преобразователь источника напряжения работает в двух различных режимах: работает как активный выпрямитель для управления шиной постоянного тока (DC) и, как показано на рисунке 1, действует как инвертор во время операций питания и формирования сети с использованием отдельных контуров управления [4].]. Понимание базовой модели схемы VSC, а также методологий их управления и моделирования необходимо инженерам и исследователям для эффективного проектирования, анализа и оптимизации приложений силовой электроники на основе VSC [5]. Цель,

Machine Translated by Google

обзор методологии, стратегии управления и методы моделирования, связанные с базовой моделью схемы VSC. В этой статье рассматриваются фундаментальные принципы, лежащие в основе работы VSC, с акцентом на ключевые компоненты и их взаимодействие внутри схемы. Особое внимание уделяется объяснению различных методологий, таких как пространственно-векторная широтно-импульсная модуляция (SVPWM), прямая квадратурная нулевая синхронная система координат и их интеграция в схемы VSC.

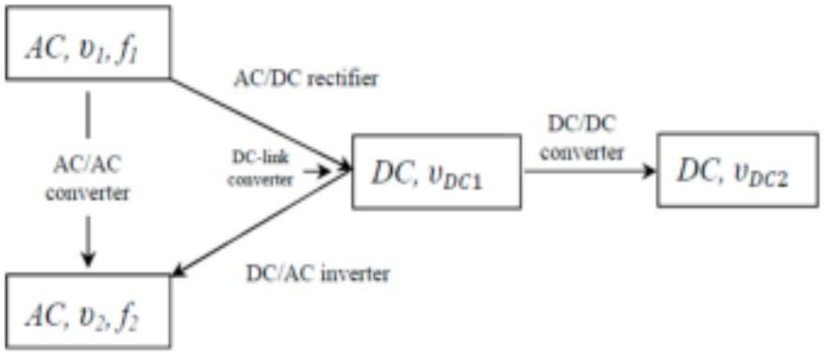


Рис. 1. Группы твердотельных силовых преобразователей в зависимости от их рабочего преобразования [6].

Модель схемы преобразователя основного напряжения, подключенного к LC-фильтру, имеет решающее значение, поскольку помогает уменьшить гармонические искажения и улучшить общее качество электроэнергии в микросети. Это обеспечивает стабильное и чистое электроснабжение, что важно для чувствительных нагрузок и интеграции различных возобновляемых источников энергии. Он также играет ключевую роль в преобразовании энергии постоянного тока из возобновляемых источников, таких как солнечные панели или батареи, в мощность переменного тока, которая необходима для большинства нагрузок и для синхронизации с основной сетью. LC-фильтр помогает сгладить выходной сигнал, делая процесс преобразования более эффективным. Понимание модели схемы VSC и ее взаимодействия с LC-фильтром необходимо для проектирования систем, которые могут легко интегрироваться с основной сетью или работать в изолированном режиме. Это гарантирует, что микросеть сможет справиться с колебаниями спроса и предложения без ущерба для стабильности. По сути, важность внедрения фундаментальной модели схемы VSC, подключенной к LC-фильтру, заключается в ее способности решать ключевые проблемы преобразования энергии, стабильности, интеграции и управления гибридными возобновляемыми микросетями.

Кроме того, в этой статье исследуются различные стратегии управления, используемые в VSC для регулирования напряжения, тока и потока мощности как в сетевых, так и в автономных приложениях. Обсуждаются различные методы управления с использованием широтно-импульсной модуляции (ШИМ) и пропорционально-интегрального (ПИ) управления. Кроме того, также представлены аспекты моделирования проектирования и управления VSC для разработки точных и динамических моделей, которые отражают переходное и установившееся поведение этих устройств. Чтобы гарантировать актуальность и применимость представленных моделей в реальных сценариях, необходимо учитывать практические соображения, такие как оценка параметров, проверка и проблемы реализации. Рекомендуется провести тематические исследования и моделирование, чтобы продемонстрировать эффективность и точность представленных методологий и стратегий управления при анализе приложений силовой электроники на основе VSC, таких как гибкие системы передач и переменного тока (FACTS), возобновляемые источники энергии, подключенные к сети. системы и системы передач и высокого напряжения постоянного тока (HVDC).

В следующих разделах описаны оставшиеся части статьи: В разделе 2 представлено двухуровневое моделирование VSC с подключением к сети с LC-фильтром. Проектирование контура регулирования тока в S-домене представлено в разделе 3. В разделе 4 представлена конструкция контура регулирования напряжения шины постоянного тока в S-домене. В разделе 5 представлена конструкция контура управления переменным напряжением в S-домене. В разделе 6 дается краткое обсуждение, а в разделе 7 завершается статья.

Machine Translated by Google

2. Моделирование двухуровневого VSC с подключением к сети с LC-

фильтром Типичная модель схемы двухуровневого инвертора с LC-фильтром, подключенным к трехфазной нагрузке, представлена на рисунке 2. Сигнал, подаваемый на клеммы a`, b, b, c и c регулируют мощность шести переключателей, формирующих выход, обозначенных как от S1 до S6. Предполагается, что переключатели S1–S6 дополняют друг друга [7]. Обычно преобразователь напряжения с LCL-фильтром регулируется обычным линейным регулятором, дополненным демпфирующим контуром для обеспечения стабильности системы [8]. Более того, как трехфазная система переменного тока, так и источник напряжения на стороне постоянного тока могут напрямую получать питание от VSC. Следовательно, существуют два различных режима работы VSC: режим инвертора (DC/AC) или выпрямителя (AC/DC).

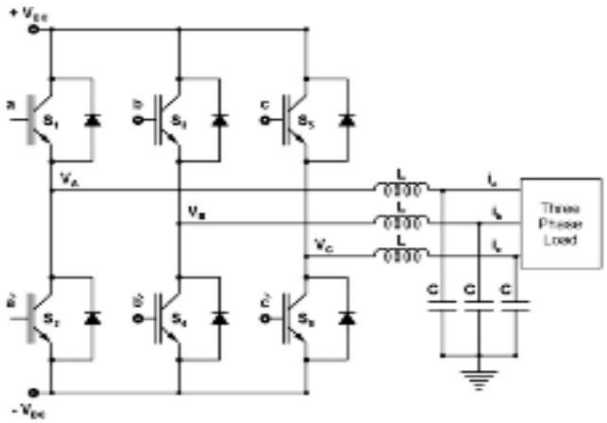


Рис. 2. Преобразователь напряжения с тремя уровнями фазы 2 [7].

Для подключения систем распределенной генерации к сети обычно используются трехфазные преобразователи напряжения с широтно-импульсной модуляцией (PWM-VSC) из-за их превосходной управляемости и более высокого КПД по сравнению с другими преобразователями [9]. Для обеспечения управления напряжением на стороне постоянного тока и коэффициентом мощности в точке общей связи (PCC) используется двухуровневая топология PWM-VSC. Однако реализация ШИМ приводит к появлению в спектре гармоник переменного напряжения модулирующих и боковых гармоник, что приводит к необходимости использования фильтров для уменьшения гармоник сетевого тока [10].

2.1. Методика пространственной векторной широтно-импульсной модуляции

(SVPWM). Использование стратегии сравнения треугольников упрощает выполнение этой процедуры. По сравнению с ШИМ сравнения треугольников, он обеспечивает увеличение напряжения переменного тока на 15% и снижает общие гармонические искажения (THD) напряжения и тока. Стандартная пространственная векторная диаграмма двухуровневого инвертора напряжения (ИПН) с состояниями переключения в шести секторах представлена на рисунке 3 [11]. В таблице 1 показано, что типичный трехфазный двухуровневый инвертор напряжения имеет восемь состояний переключения, из которых шесть активных состояний создают векторы напряжения +Vdc или -Vdc, а два нулевых состояния генерируют векторы напряжения с нулевой амплитудой. На рисунке 3 состояния переключателя 000 и 111 представляют собой нулевые состояния, а плоскость пространственного вектора разделена на шесть равных секторов активными состояниями. В этой методологии используется вращающийся опорный вектор, как показано на рисунке 3, выборка которого производится один раз в течение каждого подцикла, Ts [12]. Основная цель — оценить вектор опорного напряжения Vref с использованием восьми моделей переключения.

На рисунке 3 показано, что два вектора потенциального выходного напряжения (V1 и нулевые V7) являются или нулевые векторы представлены равными значениями во всех трех фазах (000 или 111).

остальные шесть векторов (V1, ..., V6) ненулевые и все пространственно разделены на 60 .

Для подхода SVPWM время нулевого вектора напряжения было произвольно разделено поровну между t0 и t7, что означает, что T0 = T7.

Machine Translated by Google

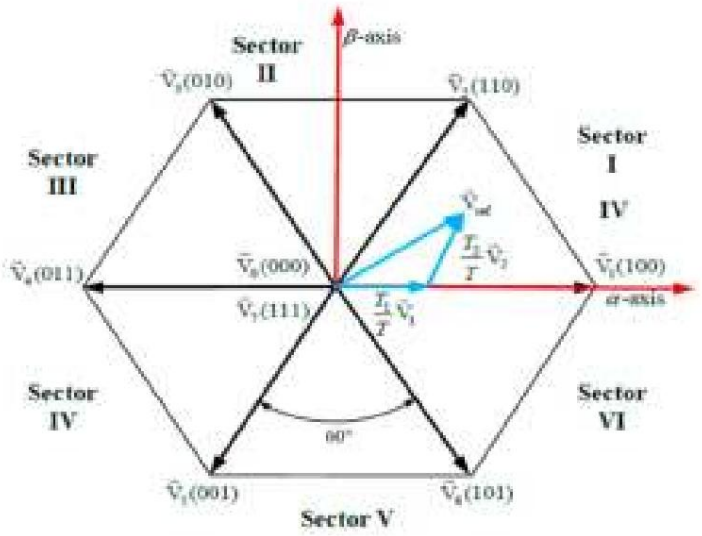


Рисунок 3. Типичная диаграмма SVPWM для инвертора источника напряжения с двумя уровнями.

Таблица 1. Фазные напряжения, выходные линейные напряжения и векторы переключения.

Векторы напряжения	Переключение векторов			Линейное напряжение			Линейное напряжение		
	C1	C2	S3	Ван	Вбн	ВКН	Ваб	ВБК	ВЦА
B0	0	0	0	0	0	= + + 0	0	0	0
V1	1	0	0	2 / 3 Впостоянного тока	1 / 3 Впостоянного тока	1 / 3 В	Впостоянного тока	0	Впостоянного тока
V2	1	1	0	1 / 3 Впостоянного тока	1 / 3 Впостоянного тока	постоянного тока = + 2 / 3 Впостоянного тока	0	Впостоянного тока	Впостоянного тока
V3	0	1	0	1 / 3 Впостоянного тока	2 / 3 Впостоянного тока	1 / 3 В	Впостоянного тока	Впостоянного тока	0
V4	0	1	1	2 / 3 Впостоянного тока	1 / 3 Впостоянного тока	постоянного тока = + 1 / 3 Впостоянного тока	Впостоянного тока	0	Впостоянного тока
V5	0	0	1	1 / 3 Впостоянного тока	1 / 3 Впостоянного тока	2 / 3 Впостоянного тока	0	Впостоянного тока	Впостоянного тока
V6	1	0	1	1 / 3 Впостоянного тока	2 / 3 Впостоянного тока	1 / 3 Впостоянного тока	Впостоянного тока	Впостоянного тока	0
V7	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Для расчета интервала выборки используется следующее:

$$Ц = T0 + T1 + T2 \quad (1)$$

или

$$TC = T0 + Tмод \quad (2)$$

с

$$Tмод = T1 + T2 \quad (3)$$

где Tmod – время модуляции; T0, T1 и T2 — временные интервалы, и Tc - это интервал выборки. При исследовании первого сектора вектор опорного напряжения Vref мая быть представлены в виде векторов функций:

$$Вре\ ф = \frac{T1}{TC} B1 + \frac{T2}{TC} V2 \quad (4)$$

$$Вре\ ф \overset{\text{потому что } \alpha}{\text{грех } \alpha} = \frac{T1}{TC} V1 \overset{\text{потому что (0)}}{\text{грех (0)}} + \frac{T2}{TC} V2 \overset{\text{потому что (π/3)}}{\text{грех (π/3)}} \quad (5)$$

Machine Translated by Google

Уравнение (5) можно разделить на две части и выразить следующим образом:

$$TC_{Вре\,ф} = T1 \sin(\quad) V1\ грех(0) + T2 \quad V2 \sin(\pi/3) \sin\alpha \tag{7}$$

Уравнения интервала выборки получаются путем решения T2 с использованием уравнения (7) и sin ( ) 3 затем подставим результаты в уравнение (6).

$$T1 = мТс \frac{грех\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{грех\frac{\pi}{3}} \tag{8}$$

$$T2 = мТс \frac{грех(\alpha)}{грех\frac{\pi}{3}} \tag{9}$$

$$T0 = TC \quad T1 \quad T2 \qquad 0 \quad 60° \tag{10}$$

Индекс модуляции m = представлен как 0 α 60 . , и TS — полупериод переключения несущих. Следующие формулы представляют периоды пребывания для каждого сектора:

$$T1 = мТСсин\frac{3нп}{3} \alpha \tag{11}$$

$$T2 = мЦсин\alpha \frac{(\quad 1)}{3} \frac{\pi(n \quad 1)}{3} \tag{12}$$

На рис. 4 показана последовательность переключения выхода SVPWM в первом секторе.

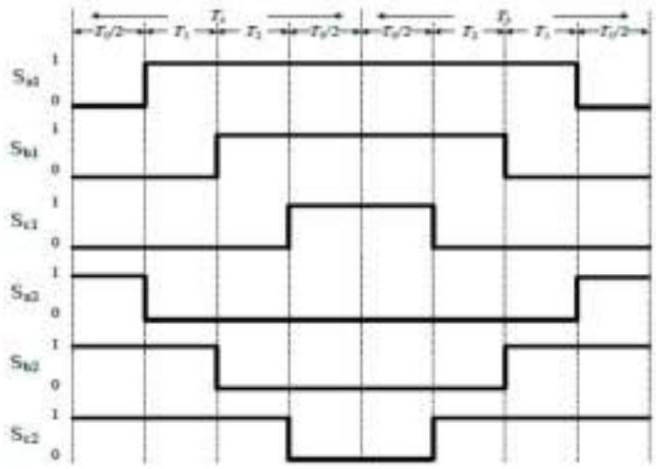


Рисунок 4. Последовательность переключения выходов в первом секторе.

Периоды переключения верхних и нижних переключателей для каждого сектора сведены в таблицу 2 [13].

Таблица 2. Расчет времени переключения для каждого сектора.

Секторы	Верхние переключатели (C1,C3,C5)	Нижние переключатели (C4, C6, C2)
Сектор 1	S1 = T1 + T2 + T0/2 S3 = T2 + T0/2 S5 = T0/2	S4 = T0/2 S6 = T1 + T0/2 S2 = T1 + T2 + T0/2
Сектор 2	S1 = T1 + T0/2 S3 = T1 + T2 + T0/2 S5 = T0/2	S4 = T2 + T0/2 S6 = T0/2 S2 = T1 + T2 + T0/2

Machine Translated by Google

Таблица 2. Продолжение.

Секторы	Верхние переключатели (C1,C3,C5)	Нижние переключатели (C4, C6, C2)
Сектор 3	S1 = T0/2 S3 = T1 + T2 + T0/2 S5 = T2 + T0/2	S4 = T1 + T2 + T0/2 S6 = T0/2 S2 = T1 + T0/2
Сектор 4	S1 = T0/2 S3 = T1 + T0/2 S5 = T1 + T2 + T0/2	S4 = T1 + T2 + T0/2 S6 = T2 + T0/2 S2 = T0/2
Сектор 5	S1 = T2 + T0/2 S3 = T0/2 S5 = T1 + T2 + T0/2	S4 = T1 + T0/2 S6 = T1 + T2 + T0/2 S2 = T0/2
Сектор 6	S1 = T1 + T2 + T0/2 S3 = T0/2 S5 = T1 + T0/2	S4 = T0/2 S6 = T1 + T2 + T0/2 S2 = T2 + T0/2

2.2. Методика прямой квадратурной нулевой синхронной системы отсчета

Методика синхронной системы координат Direct Quadrature Zero (DQZ) — это метод управления, широко используемый в силовой электронике, особенно в VSI, для достижения точного и эффективного управления трехфазными системами переменного тока [14]. Эта методология широко применяется в подключенных к сети системах возобновляемой энергии (таких как ветряные и солнечные инверторы), приводах с регулируемой скоростью для двигателей, фильтрах активной мощности для подавления гармоник и других приложениях, требующих точного контроля напряжения переменного тока и формы волны тока. Методика синхронной системы отсчета DQZ включает преобразование трехфазных сигналов переменного тока (обычно напряжения или тока) во вращающуюся систему отсчета, согласованную с частотой переменного тока системы. Это преобразование упрощает управление VSI, отделяя интересующие компоненты (такие как активная мощность, реактивная мощность и гармонические составляющие) друг от друга.

Трехфазные сигналы переменного тока преобразуются из временной области (кадр отсчета a, b, c) во вращающийся кадр отсчета DQZ с использованием преобразований Кларка и Парка [16]. Преобразование Парка поворачивает компоненты αβ к стационарному кадру отсчета DQZ (d, q, 0), где компоненты d и q представляют прямую и квадратурную компоненты сигналов соответственно, а 0 представляет компонент нулевой последовательности [17]. Преобразование Кларка преобразует трехфазные величины (a, b, c) в двухфазные величины (α, β), представляющие симметричные компоненты сигналов переменного тока. В системе отсчета DQZ для регулирования компонентов d и q опорных сигналов применяются стратегии управления, такие как контроллеры пропорционального интеграла (ПИ) или более совершенные алгоритмы. Эти контроллеры регулируют схемы переключения полупроводниковых устройств VSI, обычно биполярных транзисторов с изолированным затвором (IGBT), для генерации желаемой формы выходного напряжения переменного тока, обеспечивая точный контроль величины напряжения, частоты и качества формы сигнала [18]. На рисунке 5 показан пространственный вектор с системой отсчета αβ0.

Пересмотренные значения трехфазного тока (ia, ib , ic) показаны на рисунке 5 в виде проекций на новую опорную ось (iα, iβ). Когда трехфазная трехпроводная система сбалансирована и нулевая ось представляет синфазную составляющую, общий фазный ток обнуляется. Таким образом, переменные α и β могут полностью характеризовать систему, определенную в системе отсчета ABC.

Выходные переменные ABC описаны в уравнении (13) ниже:

$$ia = IMcos(\omega t);\ ib = IMcos\ \omega t - \frac{2\pi}{3}\quad ic = IMcos\ \omega t + \frac{2\pi}{3}; \tag{13}$$

где t — время, необходимое для достижения устойчивого состояния, а ω — постоянная синхронная частота. Уравнение (14) выражает преобразование αβ0 в комплексной форме, а уравнение (15) — в матричной форме.

Machine Translated by Google

$$Is = i\alpha + ji\beta = \frac{2}{3}\left(ia + ib\,e^{\frac{j2\pi}{3}} + ic\,e^{\frac{j2\pi 3}{3}}\right) \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} i\alpha \\ i\beta \\ i0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ia \\ ib \\ ic \end{pmatrix} \quad (15)$$

Токи опорной оси — это iα, iβ и i0, а трехфазные токи — ia, ib и ic.

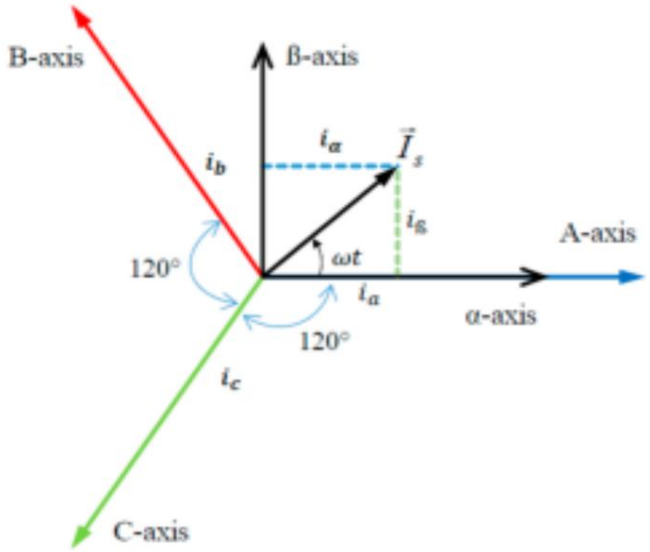


Рисунок 5. Пространственный вектор αβ система отсчета αβ0 .

Используя преобразование Парка со сдвигом на -90 , система отсчета вращается вокруг оси 0 с той же частотой, что и синусоиды, определяющие векторы, в то время как система находится в системе отсчета αβ0 .

Как видно на рисунке 6, компонент преобразуется в ось Q, которая расположена

= грех ( ) потому что ( ) 0 0 90 под квадратурным углом к прямому компоненту, а компонент -β преобразуется α β в ось

d, потому что ( ) грех ( ) 0 0 1 которая соответствует вектору вращения.

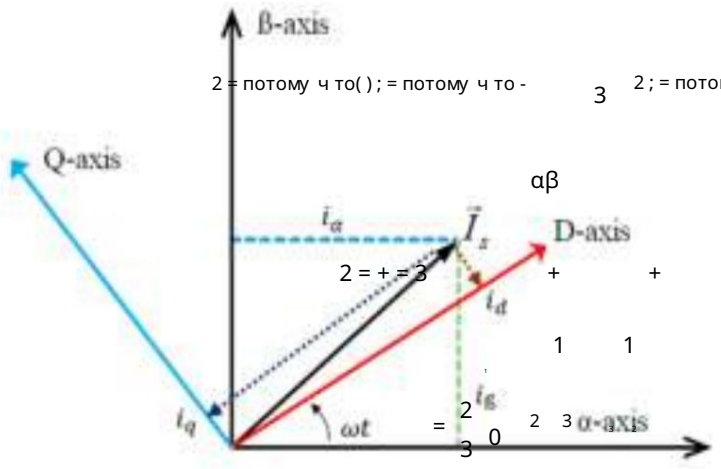


Рисунок 6. Пространственный вектор и система отсчета DQ0.

2 = потому что( ) ; = потому что - 3 2 ; = потому что + 3

ω

αβ

2 = + = 3 + +

1 1

2 0 2 3

3

1 2 1 2 1

2 2 2

Уравнения (16) и (17) выражают преобразование DQ0 в комплексном и матричном представлениях соответственно.

$$ic = 1 = 0 \; j(\omega t) = 0 \qquad \alpha\beta \quad (16)$$

$$= id + jiq \; e^{\frac{2}{2}}$$

$$ia + jib\,e$$

$$\beta \quad 2$$

$$\sin(\,)\sin\left(+\frac{3}{2}\right) \text{ потому что } (\,) \text{ потому что } (\omega t \quad)$$

$$= \qquad \qquad 3 \quad 2) \text{ потому что } (+) \; 3^{3}$$

Machine Translated by Google

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\omega t) & -\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (17)$$

Следовательно, вращение генерирует значения постоянного тока из периодических сигналов. Поскольку вращающаяся система отстает от оси a на 90 градусов, при t = 0 оси Q и A совпадают. Когда Is точно выровнен с опорным углом ωt, id = 1, iq = 0 и i0 = 0 являются компонентами DQ0 . Полные преобразования из DQ0 в ABC и соответствующие им обратные представлены следующим образом:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega t) & \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\omega t) & -\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (19)$$

3. Проектирование контура управления током в S-домене. Конструкция

контура регулирования тока в S-домене для трехфазного двухуровневого преобразователя частоты VSI является важнейшим аспектом обеспечения точной и стабильной работы инвертора. Эта методология проектирования использует классическую теорию управления в S-домене для достижения эффективного регулирования выходных токов инвертора. Согласно Венконгу и др., этот контур управления изменяет выходное напряжение инвертора, чтобы обеспечить подачу необходимого тока в электросеть [19]. Трехфазный VSI обычно моделируется с использованием набора дифференциальных уравнений, которые описывают взаимосвязь между входным постоянным напряжением, состояниями переключения инвертора и выходными переменными токами. Эти уравнения преобразуются в синхронную систему отсчета (dq-кадр), чтобы разделить трехфазные переменные токи на две ортогональные составляющие (ось d и ось q), упрощая схему управления. Динамика системы представлена передаточными функциями в S-области, которые связывают управляющие входы (опорные напряжения) с выходами (действительные токи). Для VSI передаточная функция обычно включает в себя динамику LC-фильтра инвертора и влияние импеданса нагрузки. На рисунке 7 показано схематическое изображение трехфазного двухуровневого VSC с L-фильтром. Rf и Lf представляют собой сопротивление и индуктивность соответственно между переключателями преобразователя и PCC.

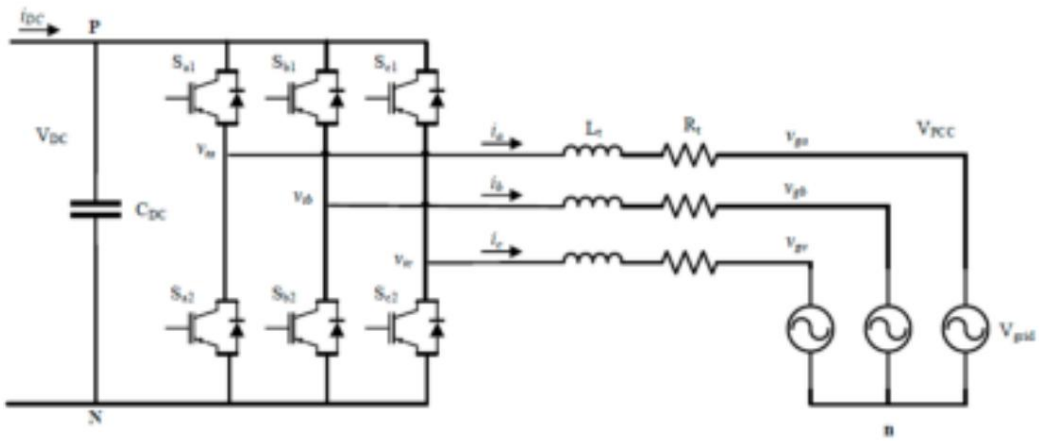
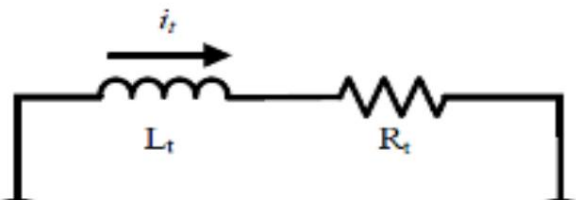


Рисунок 7. Принципиальная схема двухуровневого VSC с включенным L-фильтром.

Уменьшенную эквивалентную однофазную цепь можно получить, применив закон напряжения Кирхгофа к схеме, показанной выше, как показано на рисунке 8.



Machine Translated by Google

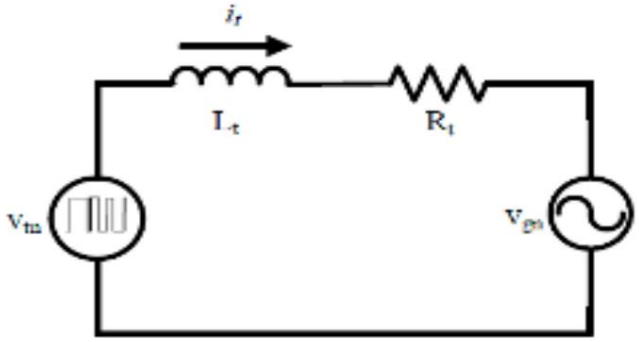


Рисунок 8. L-фильтр в упрощенной однофазной схеме VSC.

Напряжение сети vgn показано на рисунке 8 как относительно фиксированная составляющая, которую можно считать разрушительной. В результате ток itn можно регулировать, изменяя выходное напряжение инвертора vtn. Следовательно, VSC функционирует как источник энергии, который подает электроэнергию в сеть. Закон напряжения Кирхгофа, примененный к трем цепям на фазу, дает следующее:

$$\begin{aligned} vtan &= Lf \frac{dia}{dt} + Rf\,ia + vgan \\ vtbn &= Lf \frac{dib}{dt} + Rf\,ib + vgbn \\ vtcn &= Lf \frac{dic}{dt} + Rf\,ic + vgcn \end{aligned} \tag{20}$$

Переменные vtan, vtbn и vtcn представляют три выходных напряжения инвертора для каждой фазы; Lf и Rf обозначают индуктивность и сопротивление между ключами преобразователя и точкой общей связи (PCC); vgan, vgbn и vgcn обозначают три напряжения сети на каждую фазу; и ia, ib и ic представляют три тока инвертора на фазу. Объединив все три уравнения из (20) в одно, получим следующее:

$$vt,abc = Lf \frac{dia,bc}{dt} + Rf\,iabc + vg,abc \tag{21}$$

Уравнение (15) используется для перевода уравнения (21) в систему отсчета αβ0, что приводит к

$$vt,\alpha\beta = Lf \frac{di\alpha\beta}{dt} + Rf\,i\alpha\beta + vg,\alpha\beta \tag{22}$$

Используя систему отсчета dq0 в (16) и повторяя процесс для уравнения (22), результат:

$$\begin{aligned} vt,dq &= vt,\alpha\beta e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \\ vt,dq &= Lf \frac{Didq}{dt} + Rf\,idq + vg,dq \end{aligned} \tag{23}$$

Кадра, b, c можно разделить на два компонента d и q, как указано в разделе 2.1.

$$Lf \frac{did}{dt} = vtd + Lf\,\omega iq - Rf\,id - vgd \tag{24}$$

$$Lf \frac{diq}{dt} = vtq + Lf\,\omega id - Rf\,iq - vgq \tag{25}$$

с $vtd = \frac{B}{DC}\,3\,md$ и $vtq = \frac{B}{DC}\,3\,mq$, где mdq — индекс модуляции, а $\frac{B}{DC}$ это преобразователь усиления SVPWM.

Динамика id и iq связана из-за члена Lfω, найденного в уравнениях (24) и (25). Чтобы разделить подсистемы d и q и учесть входные сигналы нарушения сети vgd и vgq, индекс модуляции для каждой должен быть указан следующим образом:

$$mkp = \frac{2}{Vdc}\left(-ud - Lf\,\omega iq + vgd\right) \tag{26}$$

Machine Translated by Google

$$\text{Зквм} = \frac{}{\text{Блостоянного тока}} \quad uq \quad Lf\omega id + vgq \tag{27}$$

Для подсистемы d упреждающий член равен $Lf\omega iq + vgd$, а для подсистемы q — $Lf\omega id + vgq$. Уравнение (26) можно подставить в (24), получив

$$Lf = \frac{\text{делал}}{\text{дт}} \quad Rf id \tag{28}$$

Уравнение (27) можно подставить в (25) таким же образом, чтобы получить

$$Lf = \frac{\text{дик}}{uq} \quad Rf iq\,dt \tag{29}$$

с uq в качестве выхода ПИ-компенсатора.

Системы управления контуров регулирования тока одинаковы по осям d и q, как видно из (28) и (29). Следовательно, связанные компенсаторы могут быть одинаковыми. В результате будут определены только коэффициенты усиления компенсатора регулирования по оси d. При преобразовании уравнения (29) с использованием метода Лапласа получаются следующие результаты:

$$Lf\,sId(s) = ud(s) \quad Rf\,Id(s)\,ud \tag{30}$$

$$\text{Идентификаторы} = \frac{(s)}{\text{Лф+Рф}}$$

Таким образом, объект управления можно выразить следующим образом:

$$\text{Врач (и)} = \frac{1}{\text{Лфс + Rф}} \tag{31}$$

Следующее уравнение (32) показывает, что компенсатор является ПИ-регулятором:

$$Gc(s) = \frac{+}{\frac{\text{кпс + ки}}{\text{с}}} \tag{32}$$

Рисунок 9 иллюстрирует передаточную функцию замкнутого контура по оси d:

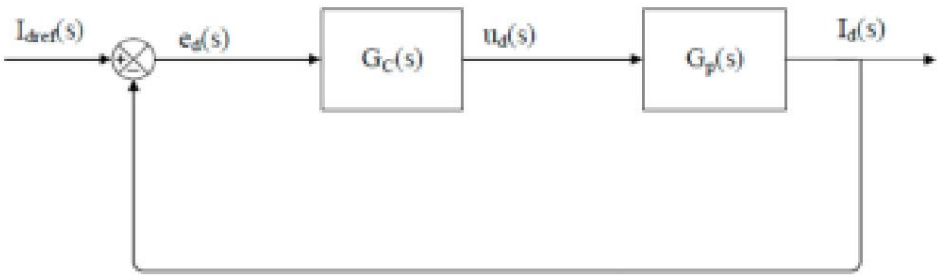


Рисунок 9. Структурная схема системы VSC с управлением по току в упрощенном виде.

Уравнение (33) дает следующий коэффициент усиления разомкнутого контура:

$$\text{Гоя (ы)}(=) \text{GC(s)GP(s)} \tag{33}$$

Если заменить уравнения компенсатора и установки управления их членами, уравнение (33) будет иметь вид:

$$\text{Гол(ы)} = + = \frac{\text{кпс + ки}}{\text{с}} \times \frac{1\,1}{\text{Лфс +Rф}} = \frac{\text{кпс + ки}}{\text{2}} = \frac{\text{КП+}}{\text{Лфс}} \frac{\text{ки с}}{\text{+кп}} \tag{34}$$

Как только члены $\frac{ки}{kp} = \frac{Rf}{Лф}$ выравниваются путем применения метода компенсации полюсов, коэффициент усиления разомкнутого контура (34) уменьшаются от передаточной функции второго порядка до первого, следующим образом:

$$( ) =$$

Machine Translated by Google

$$Гол(ы) = \frac{КП}{Лфс} \quad (35)$$

Уравнение (36) представляет коэффициент усиления регулирования тока в замкнутом контуре по оси d:

$$Gi(s) = Gcl(s) = \frac{Гол(ы)}{1 + Гол(ы)} \quad (36)$$

Уравнение (35) можно подставить в (36), чтобы получить следующее выражение для коэффициента усиления замкнутого анализа:

$$\frac{\text{Идентификаторы кп}}{\text{Idre f(s) kp + Lf s}} = Ги(ы) = \quad (37)$$

Заменив $kp = и\ ki = \frac{Лф}{\tau i}$ $\frac{РФ}{\tau i}$, выигрыш по закрытому виду станет

$$Gi(s) = \frac{1}{\tau i\, s + 1} \quad (38)$$

Результирующая постоянная времени регулирования замкнутого контура записывается как τi. Таким образом, следующая формула дает время установления первого порядка в замкнутой системе:

$$\text{ti, оседание} = 4{,}6\tau i \quad (39)$$

4. Проектирование контура управления напряжением шины постоянного тока в S-домене.

Для поддержания сбалансированного потока мощности необходим метод управления напряжением шины постоянного тока. Реализация этого управления является обязательной, поскольку она позволяет преобразователю-источнику напряжения работать как выпрямитель, преобразуя мощность переменного тока в мощность постоянного тока и облегчая управление напряжением конденсатора звена постоянного тока для питания выходной нагрузки. Более того, для прерывистых источников питания постоянного тока, таких как фотоэлектрические системы, этот метод управления помогает регулировать опорное значение контура управления током для эффективного регулирования входной мощности постоянного тока [20]. Схема с рисунка 7 показана на рисунке 10 с добавлением резистора сброса RB и дополнительных сигналов обратной связи (iDC и iL) для упрощения моделирования управления постоянным током.

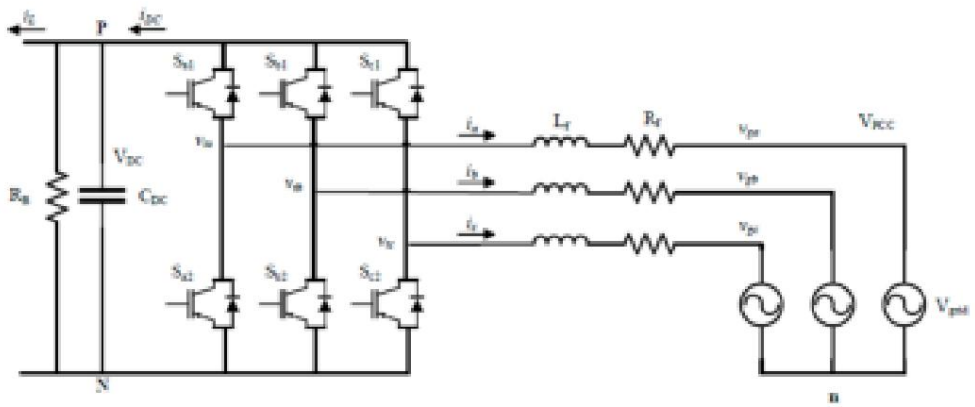
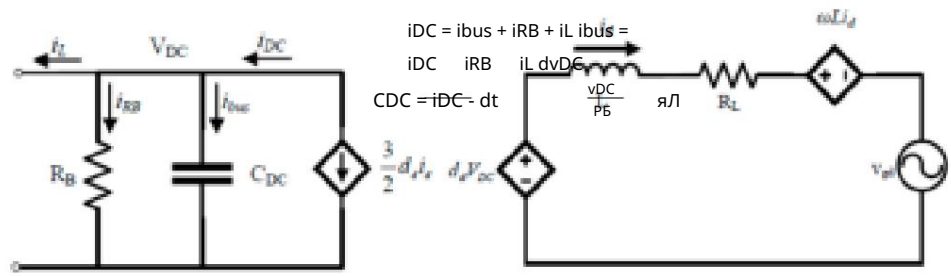


Рисунок 10. Двухуровневый VSC с L-фильтром и резистором сброса цепи постоянного тока.

Сопротивление и индуктивность между PCC и выходом инвертора равны Rf и Lf. Поскольку передача активной мощности позволяет заряжать и разряжать конденсатор звена постоянного тока, схема, показанная в конфигурации синхронной системы отсчета DQ, может быть смоделирована только для компонента оси d. В результате для этой процедуры не требуется ни мгновенный реактивный ток, ни составляющая оси q, как показано на рисунке 11.

Следующие уравнения иллюстрируют уравнение динамики напряжения конденсатора звена постоянного тока:



$$\begin{aligned} iDC &= ibus + iRB + iL \quad ibus = \\ iDC &\quad iRB \quad iL \quad dvDC \\ CDC &= \overline{iDC} - dt \end{aligned} \quad (40)$$

Machine Translated by Google

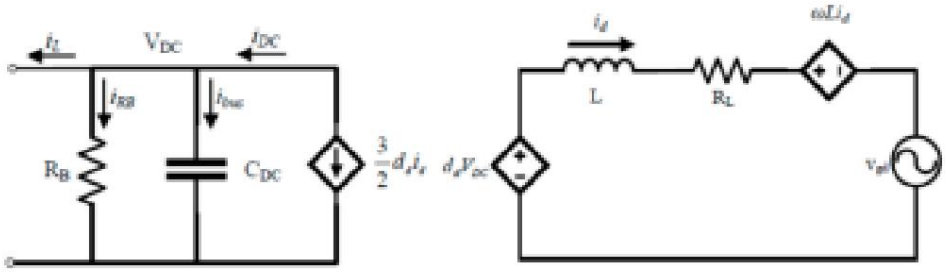


Рис. 11. Конфигурация компонента VSC по оси d с резистором сброса и L-фильтром.

Уравнение (40) можно преобразовать с помощью преобразования Лапласа, чтобы получить

$$\text{1 СКДЦ} + \frac{}{\text{РБ}} \quad \text{VDC(s)} = \text{IDC(S)} \qquad \text{IL(s)} = + +$$

$$\text{Впостоянного тока(ов)} = \frac{}{\text{sCDC} + \frac{1}{\text{РБ}}} \quad \text{1 sCDCУВД(ы)} = \frac{\text{РБ}}{} \text{ у д(а)} \tag{41}$$

Формула для расчета выходного сигнала ПИ-компенсатора, ud(s), выглядит так: ud(s) = IDC(s) IL(s), где IL(s) — это член обратной связи. Это позволяет контроллеру избежать корректировки измеренного значения. С учетом этого система управления записывается следующим образом:

$$\text{GPI} = \frac{\text{РБ}}{} \tag{42}$$

$$+ \quad \text{( ) = ( )} \quad \text{( ) sCDCRB + 1}$$

Зависимость между этими токами представляется следующим образом в предположении что iDC может управляться преобразователем без потерь, то факта мощности из сети:

$$\frac{1}{+} \quad \text{преобразователем без потерь, то факта} \quad \frac{1}{+}$$

$$\text{РЗ} = \text{ПДК} \tag{43}$$

Активная мощность определяется как

$$\text{РЗ} = \frac{3}{2} \text{ вгдид + вгкик} \tag{44}$$

Мощность шины постоянного тока получается путем замены уравнения (44) на (43), что дает следующее:

$$\frac{3}{2} \text{vgdid} = \text{iDCVDC} \tag{45}$$

Следующее уравнение описывает взаимосвязь между постоянной времени τ DC контура управления напряжением шины постоянного тока и постоянной времени τ i контура управления током:

$$\tau \text{ i} \quad \tau \text{ DC} \tag{46}$$

Взаимосвязь между этими двумя контурами управления может быть выражена следующим уравнением (47), если условие в уравнении (46) удовлетворено, id = Idre f и два контура управления разделены.

$$\text{Идре ф} = \frac{2}{3} \frac{\text{Впостоянного тока}}{\text{вгд}} \text{ИДЦ} \tag{47}$$

Внутренний коэффициент усиления получается из соотношения между Idre f и IDC и говорится следующее:

$$\text{Кинне р} = \frac{\text{ИДЦ}}{\text{Идре ф}} = \frac{3}{2} \frac{\text{вгд}}{\text{Впостоянного тока}} \tag{48}$$

На основании ниже изложенного предполагается, что компенсатор представляет собой ПИ-регулятор, выражаемый как

$$\text{GC(ы)} = \frac{\text{кпс + ки}}{\text{с}} \tag{49}$$

Выбранный метод управления напряжением постоянного тока использует каскадный подход, включающий внешний контур для управления напряжением шины постоянного тока и внутренний контур для управления током. Эта тактика гарантирует, что временная реакция регулятора тока будет быстрее, чем для

Machine Translated by Google

контроллер напряжения постоянного тока в соответствии с Уравнением (46). Контур напряжения постоянного тока рассматривает токовую петлю как постоянный коэффициент усиления, который допускает постепенное смещение опорного тока и, следовательно, безошибочный отклик регулятора тока. Следовательно, (+) ( ) = динамика двух схем, изображенных на рисунке 11 , фактически не связаны. На рисунке 12 × + 1 контура напряжения звена постоянного тока системы VSC в упрощенном виде. + = показана блок-схема + x

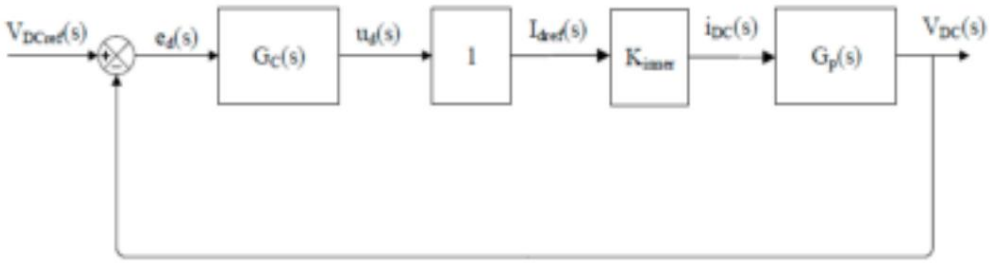


Рисунок 12. Упрощенная модель петли напряжения звена постоянного тока системы VSC.

Уравнение (50) обеспечивает коэффициент усиления в разомкнутом контуре на основе рисунка 12.

$$Гол(ы) = GC(S)GP(S)Кинне р \quad (50)$$

( ) = ( ) = ( )

Уравнения (42) и (49) можно подставить в (50) и получить следующее:

$$Гол(ы) = \frac{кпс + ки}{с} \times \frac{RB}{2CDCRB + s} \times Кинне р = (+)/ s \quad \frac{КиннерРБ\,кпс + ки}{sCDCRB + 1 ( ) = + 1} \quad (51)$$

Что касается текущего управления по оси d, коэффициент усиления замкнутого контура выражается в Уравнение (52):

$$GDC(S) = Gcl(s) = \frac{Гол(ы)}{1 + Гол(ы)} \quad (52)$$

Уравнение (51), подставленное в (52), даст ,

$$КОД(ы) = \frac{( ) = Кинне р\,kps + ki\,/CDC\,,( )}{C\,2 + \frac{КинерРБкп+1}{CDCRB}\,c + \frac{Киннерки}{CDC}} \quad (53)$$

Поскольку уравнение (53) имеет числитель первого порядка, будет установлен предварительный фильтр для устранения этого члена, что позволит привести уравнение (53) в соответствие со стандартной передаточной функцией второго порядка, которая имеет вид: ( ) =

$$ГПФ(ы) = \frac{GDC,\,желаемый(ые)}{GDC,\,старые(ые)} = \frac{+ 1}{ки\,кпс + ки} \quad (54)$$

Коэффициент усиления в замкнутом контуре регулирования тока по оси d можно получить путем перемножения уравнений (53) и (54). Результат следующий:

$$КОД(ы) = \frac{\frac{Киннерки}{CDC}}{2 + c\,\frac{КинерРБкп+1}{CDCRB}\,C + \frac{Киннерки}{CDC}} \quad (55)$$

Коэффициент усиления в замкнутом контуре регулирования тока по оси d можно получить путем перемножения уравнений (53) и (54). Результат следующий:

$$= \frac{2\xi\,\omega nCDCRB \quad 1\,кп}{KinnerRB = 4{,}6 \times} \quad (56)$$

$$ki = \frac{\omega n\,2CDC}{Кинне р} \quad (57)$$

Machine Translated by Google

Таким образом, следующее время установления второго замкнутого контура системы:

$$\tau DC = \frac{1}{\xi \omega n}$$
$$tDC, настройка = 4,6 \times \tau DC \quad (58)$$

5. Проектирование контура управления переменным напряжением в S-домене .

Если неисправность или сбой в подаче электроэнергии не позволяет основной сети подавать электроэнергию, VSC система в режиме формирования сетки создает привязку к сетке и облегчает передачу активных или реактивной мощности при работе микросети в изолированном режиме. Это позволяет микросети продолжать работу [21]. Трехфазный VSI моделируется с использованием дифференциальных уравнений, которые описывают взаимосвязь между входным напряжением постоянного тока, состояниями переключения инвертор и выходные напряжения переменного тока. Динамика системы VSI, включая LC Фильтр (который обычно используется для сглаживания выходного сигнала инвертора), как показано на рисунке 13, представляют собой представлены в S-области передаточными функциями [22].

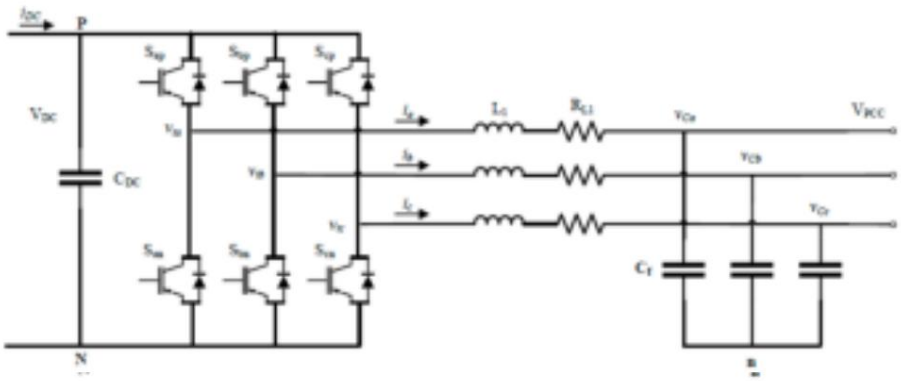


Рисунок 13. Двухуровневый VSC с LC-фильтром.

Сопротивления между преобразователем и конденсатором фильтра представлены как RL1. и Л1. Сжатая пофазная эквивалентная схема, созданная с использованием закона напряжения Кирхгофа показано на рисунке 14.

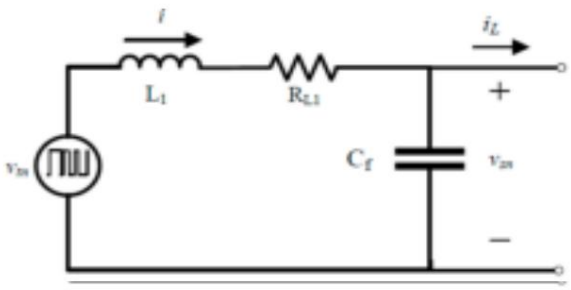


Рисунок 14. ВАХ с пофазной LC-фильтром в упрощенном виде .

Фазные токи для каждой из трех фазных цепей можно получить, используя Действующий закон Кирхгофа выглядит следующим образом:

$$ia = iC_fa + ILa$$
$$ib = iC_fb + iLb$$
$$ic = iC_fc + iLc \quad (59)$$

Объединение трех уравнений из (59) приводит к следующему:

$$iabc = iC_f,abc + iL,abc \quad (60)$$

Используя преобразование ABC-αβ0 в уравнении (60), получаем следующий результат:

$$iC_f,\alpha\beta = i\alpha\beta + iL,\alpha\beta \quad (61)$$

Machine Translated by Google

Используя уравнение (16), преобразование αβ0-dq0 можно преобразовать в

$$iC\,f,dq = iC\,f,\alpha\beta e^{\,j(\omega t \;\; \frac{\pi}{2})} \tag{62}$$

$$iC,dq = idq \quad iL,dq \tag{63}$$

Следовательно, как описано в разделе 2.1, ссылка кадра a, b, c может быть разделена на компоненты d и q и каскадно передана через контуры управления током по осям d и q, в результате чего

$$См.\frac{DVD}{} = Cf\,\omega vsq + id \quad iLd\,dt \tag{64}$$

$$См.\frac{dvsq}{дт} = \quad Cf\,\omega vsd + iq \quad iLq \tag{65}$$

Существование членов Cf ω в уравнениях (64) и (65) приводит к тому, что динамика vsd и vsq становится связанной. Члены прямой связи Cf ωvsq + iLd для компонента оси d и Cf ωvsd + iLq для компонента оси q вводятся для того, чтобы разделить их и учесть входные возмущения нагрузки iLd и iLq. Кроме того, блоки управления компонентами оси d и q являются одинаковыми, как показано в уравнениях (64) и (65); таким образом,

$$\frac{ДВСД}{ДТ} = \frac{1}{См.}[у\,д] \tag{66}$$

ud — выходной сигнал ПИ-компенсатора. Уравнение (66) решается применением уравнения Лапласа преобразование, которое дает следующее:

$$Vsd(s) = \frac{у\,д(а)}{sCf} \tag{67}$$

В результате получается следующая установка управления:

$$GP(s) = \frac{1}{sCf} \tag{68}$$

Кроме того, предполагается, что постоянная времени контура управления переменным напряжением τv будет в пять раз больше, чем постоянная времени контура управления током τi. Если это предположение выполняется, два контура управления будут разделены. Обстоятельство следующее:

$$\tau i \quad \tau v \tag{69}$$

Следовательно, входы контуров регулирования тока представлены в уравнениях (70) и (71):
и Idq(s) = Idqre f(s) для контура управления переменным напряжением.

$$Idre\,f(s) = ud(s) \quad Cf\,\omega Vsq(s) + ILd(s) \tag{70}$$

$$Iqre\,f(s) = uq(s) + Cf\,\omega Vsd(s) + ILq(s) \tag{71}$$

Уравнение (72) дает коэффициент усиления ПИ-регулятора.

$$GC(ы) = \frac{кпс + ки}{с} \tag{72}$$

Поскольку объекты управления уравнения (68) для компонентов d и q одинаковы, соответствующие компенсаторы также могут быть одинаковыми. Что касается рисунка 15, единственная информация, которую необходимо собрать дальше, — это коэффициенты усиления компенсаторов регулирования напряжения по оси d. Ниже приведен коэффициент усиления разомкнутого контура:

$$Гол(ы) = GC(ы)GP(ы) \tag{73}$$

Machine Translated by Google

( ) =
+ +

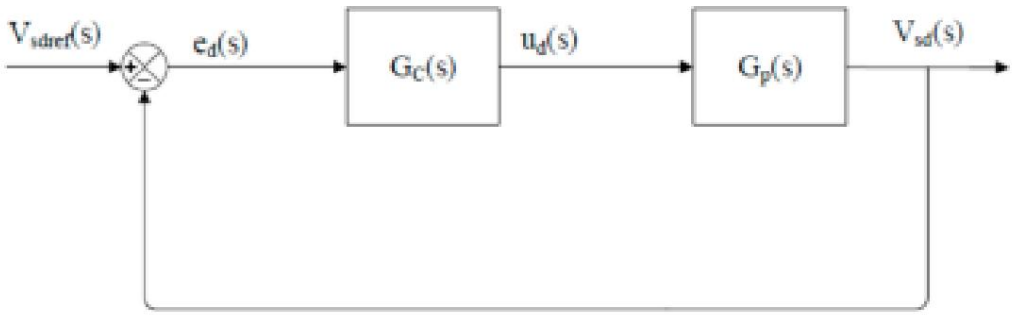


Рисунок 15. Блок-схема контура переменного напряжения системы VSC в упрощенном виде.

GC(s) и GP(s) можно заменить соответствующими значениями, чтобы получить следующий результат:

$$\text{Гол(ы)} = \frac{\text{кпс + ки}}{\text{с}} \times \frac{1}{\text{с 2Cf}} = \frac{\text{кпс + ки}}{\text{с 2Cf}} \quad (74)$$

Коэффициент усиления текущего управления по оси d в замкнутом контуре можно представить следующим образом: ( ) = cK ϕ, ( ) = +

$$Gv(s) = Gcl(s) = \frac{\text{Гол(ы)}}{1 + \text{Гол(ы)}} \quad (75)$$

( ) = ϕ

Когда уравнение (74) подставляется в (75), это приводит к

$$\text{Гв(с)} = \frac{\frac{\text{ффи (кпс+ки)}}{\text{См.}}}{\text{с}^2 + 2\frac{\text{кп}}{\text{См.}}\text{ки с} + \frac{}{\text{См.}}} \quad (76)$$

Блок-схема контура переменного напряжения системы VSC в упрощенном виде показана на рисунке 15.

Учитывая, что числитель первого порядка уравнения (76) должен быть исключен, необходимо разработать предварительный фильтр 1 , чтобы позволить уравнению (76) соответствовать обычной передаточной функции второго порядка. Как указано ниже, требуется предварительный фильтр.

$$\text{ГПФ(ы)} = \frac{\text{GDC, желаемый(ые)}}{\text{GDC, старый(а)}} = \frac{\text{тт}}{\text{ки кпс + ки}} \quad \text{тт} \quad (77)$$

Результатом перемножения уравнений (76) и (77) является следующий результат:
, = = 4,6 × 5 × =5× ki Gv(s) = s 2Cf ,

$$\text{kps + ki} \quad \frac{+}{} \quad (78)$$

Путем разрешения результатов коэффициентов знаменателя уравнения (78) коэффициенты усиления пропорционального и интегрального регуляторов определяются для
фф

$$\text{кп} = 2\xi\omega\text{nCf} \quad (79)$$

$$\text{ki} = \omega\text{n } 2\text{Cf} \quad (80)$$

В результате постоянная времени контура регулирования переменного напряжения определяется как

$$\tau v = \frac{1}{\xi\omega\text{n}} \quad (81)$$

Чтобы разделить два контура управления, время установления системы для этого второго порядка в замкнутом контуре считается в пять раз дольше, чем время установления существующего контура управления. Другими словами,

Machine Translated by Google

$$\text{стабилизация } \frac{4.6}{=\xi\omega n} = 4{,}6 \times 5 \times \tau i = 5 \times ti, \text{ стабилизация } tv, \quad (82)$$

6. Обсуждение

В этом разделе обсуждения рассматриваются ключевые аспекты базовой модели схемы VSC. Различные методологии и стратегии управления, используемые в VSC, включая методологию SVPWM, методологию синхронной системы отсчета DQZ, расчет тока, напряжения шины постоянного тока и контуров управления напряжением переменного тока в S-домене, представлены в таблице 3. .

Таблица 3. Краткое описание базовой модели преобразователей напряжения.

Методика SVPWM	SVPWM — это широко используемый метод управления VSC, поскольку он позволяет создавать выходные сигналы превосходной формы с меньшими гармоническими искажениями. Эффективно синтезируя желаемый вектор выходного напряжения, SVPWM обеспечивает точное управление выходным напряжением VSC. Однако для обеспечения оптимальной производительности необходимо тщательно решать такие проблемы, как сложность вычислений и ограничения частоты переключения.
Методология синхронной системы отсчета DQZ	Методология синхронной системы отсчета DQ0 представляет собой мощный инструмент для анализа и управления VSC, особенно в приложениях, подключенных к сети. Преобразуя трехфазную систему в двумерное пространство с прямой (d) и квадратурной (q) осями, данная методика упрощает процессы управления и моделирования. Он обеспечивает точное представление динамики системы и облегчает разработку алгоритмов управления, повышая общую производительность и стабильность систем на базе VSC.
Проектирование контура регулирования тока в S-домене	Эффективное управление током имеет решающее значение для обеспечения точного и динамичного реагирования КВН, особенно в приложениях, требующих точного регулирования тока. Разрабатывая контуры управления током в S-домене, инженеры могут использовать передовые методы управления для достижения желаемых показателей производительности, таких как быстрый отклик, низкое перерегулирование и надежная стабильность. Внедрение сложных алгоритмов управления, таких как пропорциональные интегральные контроллеры или управление с прогнозированием модели (MPC), может еще больше повысить эффективность контуров управления током в VSC.
Проектирование контура управления для Напряжение шины постоянного тока в S-домене	Контур управления напряжением шины постоянного тока играет решающую роль в поддержании стабильной работы и обеспечении надежной работы VSC. Регулируя напряжение шины постоянного тока, этот контур управления обеспечивает эффективное преобразование энергии и плавную передачу мощности между VSC и сетью или нагрузкой. Проектирование контура управления напряжением шины постоянного тока в S-домене позволяет точно настраивать параметры контроллера и характеристики динамического отклика, обеспечивая оптимальную производительность при различных условиях эксплуатации и профилях нагрузки.
Проектирование контура управления для Переменное напряжение в S-домене	В приложениях VSC, подключенных к сети, контур управления переменным напряжением необходим для регулирования выходного напряжения в соответствии с требованиями сети, такими как величина и частота напряжения. Разработав контур управления переменным напряжением в S-домене, инженеры могут разработать надежные стратегии управления для поддержания стабильности сети, снижения гармоник напряжения и обеспечения плавной интеграции возобновляемых источников энергии. Усовершенствованные методы управления, такие как прогнозирующее управление и адаптивное управление, могут использоваться для повышения эффективности и гибкости контура управления напряжением переменного тока в VSC.

7. Выводы

В данной статье представлена базовая модель схемы VSC с выходным LC-фильтром. Основным силовым интерфейсом между распределенными генераторами и микросетью является преобразователь переменного тока в постоянный. Наблюдались две формы работы преобразователя источника напряжения. Он действует как активный выпрямитель при использовании в качестве управления шиной постоянного тока. Он использует различные контуры управления для работы в качестве инвертора в режимах питания и формирования сет Также было представлено подробное руководство, охватывающее различные методы, включая SVPWM, синхронный кадр DQZ и петлю фазовой автоподстройки частоты. Кроме того, эта статья служит исчерпывающим руководством по пониманию базовой модели схемы VSC, методологий их управления и методов их точного моделирования. Предоставляя понимание фундаментальных принципов и практических соображений, связанных с VSC, этот документ призван внести вклад в развитие приложений силовой электроники на основе VSC и их интеграцию в современные энергосистемы для повышения эффективности.

Machine Translated by Google

надежность и устойчивость. Необходимо провести тематические исследования и моделирование, чтобы проиллюстрировать эффективность и точность представленных методологий и стратегий управления при анализе приложений силовой электроники на основе VSC.

Вклад автора: Концептуализация; методология; формальный анализ; письмо — подготовка оригинального проекта, CBN; написание — просмотр и редактирование; надзор.; администрирование проекта, MA и AA
Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Это исследование финансировалось за счет гранта Национального исследовательского фонда (NRF) номер PMDS22052313773, а APC финансировался Технологическим университетом Кейп-Пенинсула.

Заявление Институционального наблюдательного совета: В этом исследовании не участвовали люди или животные; следовательно, согласие участника не требовалось для сбора данных для этого проекта.

Заявление о доступности данных: Запросы на доступ к наборам данных можно направлять соответствующему автору.

Благодарности: Как автор, ответственный за переписку, я признаю, что эта статья была завершена в рамках докторского исследования под руководством и при поддержке Марко Адониса, а Али Алмактуф руководил, редактировал и проверял рукопись перед публикацией.

Конфликты интересов: Конфликты интересов, относящиеся к данной публикации, не раскрыты.

Ссылки

1. Цзин, Т.; Маклаков А.С. Обзор преобразователей напряжения для применения в энергетике. В материалах Международной Уральской конференции по зеленой энергетике (Урал Кон) 2018 г., Челябинск, Российская Федерация, 4–6 октября 2018 г.; стр. 275–281.
2. Бродзицкий М.; Ключник, Дж; Чапп, С. Оценка влияния VSC на энергосистему с использованием адекватной кривой возможностей PQ. Электроника 2023, 12, 2462. [CrossRef]
3. Ндеке, СВ; Адонис, М.; Алмактуф, А. Стратегия управления энергопотреблением для гибридной микросетевой системы, использующей возобновляемые источники энергии. Дисков. Энергия 2024, 4, 1. [CrossRef]
4. Монтейро, В.; Монтейро, LF; Франко, Флорида; Мандриоли, Р.; Риккo, М.; Гранди, Дж; Афонсо, ДжЛ. Роль входных преобразователей переменного/постоянного тока в гибридных умных домах переменного/постоянного тока: анализ и экспериментальная проверка. Электроника 2021, 10, 2601. [CrossRef]
5. Сюн, Л.; Лю Х.; Лю Ю; Чжо, Ф. Моделирование и проблемы стабильности энергосистем с преобладанием преобразователей напряжения: обзор. CSEE J. Power Energy Syst. 2022, 8, 15:30–1549.
6. Алмактуф, Многоуровневые инверторы AMA, использующие прогнозируемое управление током с помощью модели конечного множества для систем возобновляемой энергетики. Приложения. доктор философии Диссертация, Университет Кейпского полуострова, Кейп, Южная Африка, март 2015 г.
7. Габалла, М.; Эль-Бардини, М. Недорогая генерация цифровых сигналов для управления инвертором ШИМ с пространственным вектором. Айн Шамс англ. Дж 2013, 4, 763–774. [Перекрестная ссылка]
8. Чон, М.; Гфрёрер, Т.; Биела, Дж. Расширение стабильного диапазона параметров LCL-фильтров для преобразователей, подключенных к сети, за счет внутреннего демпфирования управления с прогнозированием модели (MPC). В материалах 23-го семинара IEEE по управлению и моделированию силовой электроники (COMPEL) 2022 г., Тель-Авив, Израиль, 20–23 июня 2022 г.
9. Бернет, Д.; Хиллер, М. Сетевые преобразователи среднего напряжения с активными фильтрами параллельного источника напряжения. ИЭТ Электр. Мощность приложения. 2019, 13, 1507–1513. [Перекрестная ссылка]
10. Кучаки А.; Найманд, М. Аналитический расчет пассивного LCL-фильтра для трехфазных двухуровневых выпрямителей с коррекцией коэффициента мощности. IEEE Транс. Силовой электрон. 2018, 33, 3012–3022. [Перекрестная ссылка]
11. Кумар Педдапелли, С. 2. Техника пространственно-векторной широтно-импульсной модуляции. В широтно-импульсной модуляции: анализ и характеристики многоуровневых инверторов; Де Груйтер Ольденбург: Берлин, Германия; Бостон, Массачусетс, США, 2017 г.; стр. 13–22. [Перекрестная ссылка]
12. Левицкий А.; Оде, CI; Кондратенко Д.; Моравец, М. Гибридизированная пространственно-векторная широтно-импульсная модуляция для многофазного двухуровневого инвертора источника напряжения. IEEE Транс. Силовой электрон. 2022, 37, 7663–7674. [Перекрестная ссылка]
13. Доан, Н.С.; Цветков А.Н.; Нгуен, Т.Х. Исследование и реализация инвертора широтно-импульсной модуляции пространственного вектора на Ардуино. Веб-конференция E3S. 2021, 288, 4–9. [Перекрестная ссылка]
14. Вакас, М.; Ахмед, Т.; Элаварасан, РМ; Вакар, А.; Леонг, К.; Пугаженди, Р.; Дас, Н.; Джилани, MW DQ Управление однофазным сетевым инвертором на основе преобразования. В материалах 31-й энергетической конференции австралийских университетов (AUPEC) 2021 г., виртуально, 26–30 сентября 2021 г.
15. Венкатраманан, Д.; Сингх, МК; Аджала, О.; Доминго-Гарсия, А.; Допл, С. Модели интегрированных систем для сетей с генераторами и инверторами. arXiv 2022, arXiv:2203.08253.
16. Альтахир, А.А.Р. Преобразования Парка и Кларка: краткий обзор. Апрель 2020 г., стр. 2–5. Доступно онлайн: https://www.researchga.net/profile/Ali-Altahir/publication/340681625_Park_and_Clark_Transformations_Park_and_Clark_Transformations_A_Short_Review/links/5e98bb8a4585150839e3768b/Park-and-Clark-Transformations-Park-and-Clark-Transformations-A-Short-Обзор.pdf (по состоянию на 27 мая 2024 г.).

Machine Translated by Google

17. Касадо-Мачадо, Ф.; Мартинес-Рамос, JL; Барраган-Вильярехо, М.; Маза-Ортега, Дж М.; Розендо-Масиас, Дж А. Преобразование сокращенной системы координат: деконструкция трехфазных четырехпроводных систем. IEEE Access 2020, 8, 143021–143032. [Перекрестная ссылка]
18. О'Рурк, CJ; Касим, ММ; Оверлин, MR; Киртли, ДжЛ. Геометрическая интерпретация систем отсчета и преобразований: Dq0, Кларк и Парк. IEEE Транс. Конверторы энергии. 2019, 34, 2070–2083. [Перекрестная ссылка]
19. Хольвег, Г.В.; Хан, ЮА.; Чатуведи, С.; Фан, Ю; Ван, М.; Су, В. Преобразователи, подключенные к сети: краткий обзор топологий, выходных фильтров, управления током и работы слабых сетей. Энергии 2023, 16, 3611. [CrossRef]
20. Али, М.; Якуб, М.; Цао, Л.; Лоо, К.Х. Совершенствование регулирования напряжения на шине постоянного тока в каскадной преобразовательной системе с помощью нового Схема бездатчикового упреждающего управления током нагрузки. ИЭ ПП Power Electron. 2021, 14, 1457–1467. [Перекрестная ссылка]
21. Ву, Х.; Ван, Х. Управление VSC, образующими сетку: перспектива адаптивного быстрого/медленного внутреннего источника напряжения. IEEE Транс. Силовой электрон. 2023, 38, 10151–10169. [Перекрестная ссылка]
22. Садек, Ф.; Фатех, Ф. О схемах управления сетевыми инверторами. В материалах Канзасской конференции по энергетике и энергетике IEEE 2022 г. (KPEC), Манхэттен, Канзас, США, 25–26 апреля 2022 г.

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Решение сложных задач оптимизации с помощью машинного обучения †

Стивен Прествич

Школа компьютерных наук и информационных технологий, Университетский колледж Корка, T12 XF62 Корк, Ирландия; s.prestwich@cs.ucc.ie; Тел.: +353-36-21-420-5911

† Эта статья представляет собой расширенную версию нашей статьи, опубликованной на 9-й Международной конференции по машинному обучению, оптимизации и науке о данных, LOD 2023 (Грасмир, Лейк-Дистрикт, Великобритания, 22–26 сентября 2023 г.).

Аннотация: Большинство исследований по оптимизации фокусируются на относительно простых случаях: один человек, принимающий решения, одна цель и, возможно, набор ограничений. Однако реальные проблемы оптимизации часто сопряжены с осложнениями: они могут быть многокритериальными, многоагентными, многоэтапными или многоуровневыми, а также могут иметь неопределенность, частичное знание или нелинейные цели. Каждая из них привела к областям исследований со специальными методами решения. Однако, когда возникают новые гибридные проблемы, решения обычно не существует. Мы определяем широкий класс задач дискретной оптимизации, называемый программой влияния, и описываем облегченный алгоритм, основанный на многоагентном многоцелевом обучении с подкреплением с выборкой. Мы показываем, что его можно использовать для решения задач из широкого спектра литературы: программирование в ограничениях, байесовские сети, стохастическое программирование, диаграммы влияния (стандартные, с ограниченной памятью и многокритериальные) и теория игр (многоуровневое программирование, байесовские игры). и рассуждения уровня k). Мы ожидаем, что он будет полезен для быстрого прототипирования методов решения новых гибридных задач.

Ключевые слова: многокритериальный; мультиагентный; обучение с подкреплением; оптимизация

1. Введение

Проблемы оптимизации повсеместно встречаются в искусственном интеллекте, исследовании операций и широком спектре областей применения. В своей простейшей форме они требуют от нас принятия ряда решений для оптимизации целевой функции, возможно, при удовлетворении некоторых ограничений. Решение обычно представляется присвоением значения домена переменной решения, где домен может представлять собой набор действительных чисел, целых чисел, категорий или структур данных. Различные области, ограничения и цели поддерживаются разными методами. К таким задачам можно применить смешанное целочисленное линейное программирование (MILP) и, в более общем смысле, математическое программирование, программирование с ограничениями (CP), динамическое программирование и метаэвристику (например, локальный поиск и генетические алгоритмы).

Однако многие задачи оптимизации являются более сложными. В частности, они могут включать неопределенность, которую можно моделировать случайными переменными, не контролируемыми лицом, принимающим решения. Вместо этого они принимают значения в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Стохастическое программирование — это расширение MILP, которое моделирует такие проблемы. В многоэтапных стохастических программах переменные решения и случайные переменные могут чередоваться, так что нам придется принимать решения, не зная значений некоторых случайных переменных. Приняв решения, мы можем затем наблюдать некоторые случайные переменные, но затем должны принять решения на следующем этапе и так далее. Решение многоэтапной проблемы — это не простой набор решений, а политика, имеющая форму дерева, позволяющая реагировать на случайные события. Обычно предполагается, что решения не влияют на распределения вероятностей (экзогенная неопределенность), но в некоторых приложениях распределения зависят от решений (эндогенная неопределенность). В последнем случае часто используется стохастическое динамическое программирование.

Другая возможная сложность заключается в том, что лицо, принимающее решения, или агент, может иметь несколько целей: например, максимизировать прибыль при минимизации ущерба окружающей среде. Для решения таких проблем необходимо найти некую форму компромисса. Еще одна сложность заключается в том, что

check for updates

Образец цитирования: Прествич, С. Решение сложных задач оптимизации с помощью машинного обучения. Прикладная математика 2024, 4, 908–926. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030049

Академические редакторы: Либор Пекари и Цзиньюнь Юань

Поступила: 8 мая 2024 г.
Пересмотрено: 24 июля 2024 г.
Принято: 29 июля 2024 г.
Опубликовано: 31 июля 2024 г.

Копирайт: © 2024 автора. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons

Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Machine Translated by Google

проблема может включать в себя несколько агентов. В многоуровневом программировании агент должен принять решение, зная, как отреагирует другой агент, которому, в свою очередь, может потребоваться принять во внимание других агентов. Знания могут быть частичными: агент может не знать точно, как противник будет действовать или действовал, и должен принимать решение на основе предположений.

Диаграммы влияния (ИД) представляют собой особенно выразительный формализм, который может моделировать многоэтапные проблемы принятия решений с эндогенной неопределенностью. Случайные переменные могут быть независимыми или связаны таблицами условной вероятности, образуя байесовскую сеть. Наблюдения или наблюдаемые значения случайных переменных также допускаются, и байесовский вывод может использоваться для вывода о распределениях ненаблюдаемых случайных переменных на основе этих наблюдений. Для решения ID доступно несколько точных и приближенных методов.

Подходом машинного обучения к сложным задачам оптимизации является обучение с подкреплением (RL) [1], которое можно использовать для решения многоэтапных задач принятия решений в стохастических средах. Мультиагентное RL, как известно, использовалось для обучения игре в такие игры, как го и шахматы, до сверхчеловеческого уровня посредством самостоятельной игры [2]. Также были разработаны многоцелевые алгоритмы RL, и эти расширения были объединены в область многоцелевого многоагентного RL. Подобные разработки произошли и в литературе по эволюционным вычислениям.

Таким образом, у нас есть широкий спектр доступных технологий, каждая из которых способна эффективно решать определенные типы проблем. Однако, столкнувшись с новой проблемой оптимизации с гибридными функциями, доступного решателя может не оказаться. Были исследованы некоторые гибриды, например, многокритериальное обучение с подкреплением с ограничениями [3] и двухуровневое многокритериальное стохастическое целочисленное линейное программирование [4]. Идентификаторы были расширены для работы с нелинейными полезностями [5], несколькими агентами [6–10], несколькими целями [11,12], жесткими ограничениями [13] и частично наблюдаемыми переменными [14] — хотя и не все в одной системе. Но для сложных гибридов вообще не существует метода. Возьмем гипотетический пример: не существует очевидного способа моделирования и решения дискретной двухуровневой задачи оптимизации, лидером которой является нелинейная стохастическая программа с случайными ограничениями, а последователями которой являются задача удовлетворения двухцелевых ограничений и взвешенный Макс. -Проблема со САТом. Исследователь, столкнувшийся с такой проблемой, должен изобрести новый подход или сделать упрощающие предположения, чтобы вписать его в существующую структуру. Универсальный метод, способный справиться со всеми этими осложнениями, был бы очень полезен, по крайней мере, для предварительного расследования, хотя в конечном итоге может потребоваться более эффективный специализированный метод.

Еще одним недостатком фрагментации технологий является сложность сравнения разных подходов. Предположим, мы столкнулись с новым приложением с двумя лицами, принимающими решения, но мы не уверены, как лучше всего его смоделировать. Должны ли мы рассматривать ее как двухуровневую программу (см. раздел 3.8), байесовскую игру (см. раздел 3.9), использовать мышление уровня k (см. раздел 3.10), моделировать одного лица, принимающего решения, как случайную величину и реализовывать стохастическую программу (см. раздел 3.6) или взять ожидаемое значение одного агента и свести его к программе с ограничениями (см. раздел 3.1)? Некоторые упрощения могут мало повлиять на достижение цели, в то время как другие могут сделать осуществимость невозможной. Каждый подход требует отдельной технологии, освоение которой требует значительного времени и, возможно, финансовых затрат. Метод, который является достаточно общим для решения всех этих моделей, будет очень полезен для быстрого прототипирования и изучения последствий выбора конструкции модели.

В этой статье мы описываем очень общий класс задач дискретной оптимизации, который мы называем программой влияния (IP), которая обобщает широкий спектр проблем из исследования операций, искусственного интеллекта и теории игр (название вдохновлено гибкостью идентификаторов). Мы также представляем простой решатель для IP, основанный на сочетании многоагентного многокритериального обучения с подкреплением и выборки Монте-Карло с помощью цепи Маркова. RL был предложен как объединяющий подход к последовательному принятию решений в условиях неопределенности [15] и помог решить сложные состязательные игры, что делает его естественным кандидатом на роль решателя общего н

Данная статья расширяет нашу предыдущую работу. Ранняя версия, использующая логическое программирование, была описана в [16], а более поздняя версия на основе С появилась в [17], где наш класс задач назывался «диаграммой смешанного влияния». Эта статья расширяет [17] путем формализации проблемы, предоставления дополнительных работ, замены простой выборки отбраковки выборкой Гиббса и решения более широкого круга проблем. Раздел 2 формализует задачу.

Machine Translated by Google

и описывает алгоритм. В разделе 3 он применяется к множеству задач из различной литературы по оптимизации, чтобы продемонстрировать его гибкость и простоту использования. Наконец, в разделе 4 подводятся итоги и обсуждается будущая работа.

2. Структура программирования влияния

Теперь мы представляем нашу структуру и алгоритм интеллектуальной собственности после обсуждения соответствующей работы.

2.1. Связанные работы

Значительная работа была проделана по многокритериальному RL (MORL). Литература по MORL слишком велика, чтобы ее можно было здесь рассмотреть, но недавний обзор алгоритмов MORL с обсуждением этих вопросов представлен в [18]. Некоторые методы используют скаляризацию для преобразования MORL в RL, что делает его методом единой политики, как и некоторые другие. Скаляризацию критиковали, потому что она приводит только к одной политике, а некоторые алгоритмы MORL аппроксимируют фронты Парето и изучают политики для диапазона весов. Скаляризация также подвергалась критике на том основании, что может быть сложно выбрать подходящие веса и что этот выбор передает право принятия решений в руки инженеров, использующих алгоритм. Большинство таких методов использует линейную скаляризацию. Несмотря на недостатки скаляризации, мы покажем, что она может дать хорошие результаты в ряде задач. Его также легко реализовать, и он требует небольших затрат времени выполнения, что важно для нашего упрощенного подхода. Результаты с использованием взвешенных показателей также менее чувствительны к выбору весов [19].

Большая работа также была выполнена по мультиагентному RL (MARL), а недавний опрос MARL можно найти в [20]. Меньше работ выполнено на пересечении MARL и MORL: многоцелевой многоагентный RL (MOMARL). Обзор MOMARL и связанных с ним алгоритмов представлен в [21]. Из-за сложности проблем MOMARL не существует даже единого согласованного определения того, что представляет собой решение. MO-MIX [22] — это алгоритм MOMARL, использующий линейную скаляризацию и глубокое RL, в котором искусственная нейронная сеть используется для агрегации состояний.

2.2. Проблемный класс

Мы определяем (дискретную) программу влияния (IP) как кортеж V, D, A, U, L, O, P где:

- $V = v_1, \ldots, v_n$ — упорядоченный список переменных v_i;
- $D = D_1, \ldots, D_n$ — это список соответствующих им конечных областей D_i возможных значений, обычно диапазонов целых чисел или наборов символических имен;
- $A = A_1, \ldots, A_n$ — список соответствующих им агентов (лиц, принимающих решения) A_i, имеющих символические имена (выделены жирным шрифтом);
- U — функция, отображающая общее назначение переменной в вектор полезности для каждого агента;
- L – множество направленных связей $v_i \to v_j$ $(i < j)$ между переменными;
- O — набор наблюдений, где наблюдение — это присвоение $v_i = d_j$ значения $d_j \in D_i$ к случайной переменной x_i;
- P — это функция, присваивающая вероятность каждому назначению случайной переменной v_j при задании для каждой переменной v_i, такой что $v_i \to v_j \in L$: обычно она представляется (условной) таблицей вероятностей.

Каждая переменная связана ровно с одним агентом, и мы допускаем возможность случайных переменных, агент которых имеет имя шанс. Ссылки L определяют, какие переменные видны для последующих решений и распределения случайных переменных. Утилита — это функция, отображающая общее назначение переменной (одно значение на переменную) в реальное значение: мы позволяем утилитам быть программируемыми, требуя от пользователя написать небольшую функцию для вычисления полезностей на основе общего назначения переменных. У каждого агента есть хотя бы одна полезность, помимо случайности. Цель IP — найти политику для каждого агента, которая оптимизирует по Парето его полезности в контексте наблюдений и видимости между переменными.

Machine Translated by Google

2.3. Алгоритм Теперь

мы опишем алгоритм INFPROG , показанный в алгоритме 1. Это облегченный исследовательский прототип, использующий известные методы, используемый только для демонстрации гибкости нашего подхода, и потенциально возможны многие другие комбинации методов.

INFPROG основан на простом алгоритме RL: табличном SARSA с бесконечным шагом с жадным выбором действий и скоростью обучения α [1]. Бесконечный шаг означает, что вознаграждение одинаково поддерживается для всех значений в эпизоде, что более надежно, чем Q-обучение, при наличии ненаблюдаемых переменных [1]. Табличный означает, что пары состояние-действие имеют значения в таблице. Коэффициент дисконтирования γ установлен равным 1, поскольку наша проблема RL является эпизодической. Если у агента есть несколько утилит, они скаляризируются так, что на каждого агента приходится одн Скаляризованные цели используются в качестве вознаграждений, вычисляемых в конце каждого эпизода, когда всем переменным были присвоены обновленные значения, и сохраняются их предыдущие состояния для этих агентов (a[v] обозначает агента, соответствующего переменной v): пользователь не обходимо предоставить код для этого шага. Однако пользователя, вероятно, не интересует значение скаляризованной цели, поэтому распечатываются сглаженные версии исходных целей: это и будут значения, которые мы сообщаем.

Алгоритм 1. Алгоритм INFPROG для решения IP. Требуются:

целые числа H, E и служебный гиперпараметр Y инициализируют
ϵ = 1, α = 1, qH,v,i = 0 для эпизода e =
1 E делают для v = v1 : : : не
делай
если v это шанс, то
выборка xv из его распределения,
иначе, если U[0, 1] < ϵ, то
случайная выборка xv Dv,
иначе
xv = argminiεDv (qH,v,i) end if
end
для
каждого агента a
вычислите скаляризованную цель fa(v),
используя Y end for
для v = v1 . . . vn do qH,v,xv = α fa[v] (v) + (1 α)qH,v,xv
конец
обновления ϵ и α
конец для

Полезность вычисляется в конце эпизода: с точки зрения RL, это скудное вознаграждение, которое может затруднить обучение. В будущей работе мы могли бы разрешить использование нескольких узлов значений, как в идентификаторах, или компенсировать редкое вознаграждение, добавив методы RL, такие как воспроизведение ретроспективного опыта [23]. Этот метод был разработан для алгоритмов RL вне политики, но SARSA соответствует политике, поэтому потребуется некоторая модификация алгоритма: например, замена SARSA на Q-learning или более новый алгоритм глубокого RL. Есть много возможностей, и это область созрела для исследования.

Параметры ϵ и α начинаются с 1 и затухают до 0. В RL было предложено множество схем затухания, и мы произвольно выбираем α = ϵ = ((E e)/E) [3]. В нашем использовании RL состояние — это присвоение переменным v1 . . . vi для некоторого i = 1 . . . n, действие — это присвоение значения переменной решения vi+1, эпизод присваивает все переменные, а награда — это полезность (значение целевой функции), вычисленная в конце эпизода. qH ,v,xv — это значения состояния-действия, используемые для определения политики, которая должна оптимизировать ожидаемое вознаграждение.

Обратите внимание, что вполне вероятно, что для некоторых задач было бы лучше использовать SARSA со следом приемлемости и 0 < λ < 1 (λ — гиперпараметр, используемый со следами приемлемости [1]), и мы будем исследовать это в будущей работе. Однако для нашего исследования прототип мы

Machine Translated by Google

эффективно установить λ = 1, выбрав SARSA с бесконечным шагом, тем самым упростив алгоритм за счет удаления гиперпараметра, требующего настройки.

2.4. Агрегация состояний

Каждое решение может зависеть от всех предыдущих решений и случайных событий (но см. раздел 3.5), поэтому политика может включать огромное количество различных состояний. Чтобы решить эту проблему, алгоритмы RL группируют состояния с помощью методов агрегирования состояний. Мы выбираем простую форму, называемую случайным тайловым кодированием [1], а именно хеширование Зобриста [24] с Н записей хэш-таблицы для некоторого большого целого числа Н. Это работает следующим образом. Каждой паре переменная-значение (решение или шанс) v, x мы присваиваем случайное целое число rvx, которое остается фиксированным. В любой момент эпизода у нас есть некоторый набор S назначений v, x , и мы берем исключающее -или значений rvx (то есть их битовых комбинаций), связанных с назначениями XS = v,x S r Наконец, мы используем XS для индексации массива V с элементами H : значение qH,v,xv сохраняется в V[XS mod H] (во всех наших экспериментах мы фиксируем H = 2 × 108).

Алгоритм INFPROG принимает два числовых гиперпараметра: целое число H , используемое для агрегирования состояний, и целое число E , которое представляет собой количество итераций, используемых решателем. Если H достаточно велико, коллизии хэшей маловероятны, и у нас будет уникальный элемент массива для каждого встреченного состояния. Можно было бы ожидать, что хеширование Зобриста будет работать плохо, когда количество состояний приближается к размеру хеш-таблицы или превышает его, поскольку коллизии хешей будут путать значения разных пар состояние-действие. Удивительно, но он может хорошо работать даже при частых коллизиях хэшей и использовался в шахматном программировании [25].

2.5. Выборка

INFPROG производит выборку случайных переменных с использованием алгоритма Монте-Карло цепи Маркова (MCMC), как и в вероятностном программировании. Таким образом, каждый эпизод SARSA также представляет собой проверку случайных переменных. В нашей более ранней работе [16,17] использовалась выборка отклонения: в конце эпизода SARSA, если случайные переменные не соответствовали наблюдениям, эпизод отклонялся в том смысле, что вознаграждения не были подтверждены предыдущими состояниями. Это помогло решить некоторые проблемы, но непрактично, когда вероятность очень мала, и использование алгоритма MCMC было предложено в качестве будущей работы. INFPROG использует выборку Гиббса и может справиться с такими случаями.

В ходе экспериментов мы обнаружили, что некоторые значения таблицы условной вероятности, для которых были установлены значения 0 или 1, требуют корректировки: это известный способ сбоя выборки Гиббса. Фактически, для задач оптимизации без наблюдений (что верно для большинства задач) мы заменяем Гиббса простой выборкой обратного преобразования.

2.6. Множественные цели

Многие реальные приложения преследуют несколько целей, и нам необходимо найти компромисс. Цели в RL можно комбинировать несколькими способами, а простым и популярным подходом является линейная скаляризация: возьмите линейную комбинацию целей, давая одну цель, которую можно использовать в качестве награды RL. Это имеет тот недостаток, что оно не может генерировать какие-либо решения в невыпуклой области фронта Парето. Также может быть сложно выбрать подходящие веса, особенно если для целей используются разные единицы измерения.

Другой подход заключается в ранжировании целей по важности, а затем поиске лексикографически наилучшего результата. Это та же проблема, что и линейная скаляризация (хотя в недавней работе она рассматривается [26]), которую можно решить путем порогового определения всех целей, кроме наименее важной, — метода, называемого пороговым лексикографическим упорядочением [27]. Однако у него есть недостаток, заключающийся в использовании специального алгоритма RL. Более того, в некоторых наших приложениях наиболее важной целью является минимизация нарушений ограничений, и это не должно быть пороговым.

Machine Translated by Google

Метод, который мы выбираем, заключается в сведении нескольких целей к одной посредством взвешенной метрической скаляризации [19], при которой минимизируется расстояние между вектором значений fo для целей o и утопической точкой u в многокритериальном пространстве:

$$\min_{x} \; o \in o \left| f_o(x) - u \right|^{o \mid n} \Big|^{1/n}$$

для некоторого p 1 и весов wo, выбранных пользователем. Необходимость выбирать веса является недостатком с точки зрения удобства использования, но преимуществом является то, что мы можем настроить их для поиска различных точек на фронте Парето. Особый случай скаляризации Чебышева (p =) теоретически гарантированно делает достижимым весь фронт Парето, но Lp-нормы (p = 1, 2) могут работать лучше на практике [28]. В экспериментах мы получили лучшие результаты с L1, чем с L2 или L , несмотря на теоретические преимущества Чебышева, поэ тому мы будем использовать L1. Однако в дальнейшей работе, возможно, было бы лучше использовать Чебышева и найти пути улучшения его результатов.

Утопическая точка часто корректируется во время поиска так, чтобы она находилась чуть дальше лучшей точки, найденной на данный момент, но INFPROG использует фиксированное значение u, указанное пользователем. В зависимости от того, должна ли каждая цель быть максимизирована или минимизирована, мы выбираем значение, которое является оптимальным или достаточно высоким/низким, чтобы быть недостижимым.

Таким образом, чтобы применить INFPROG к задаче оптимизации, мы также должны предоставить гиперпараметр Y для управления скаляризацией: список подсписков пар. Каждая пара представляет собой утопическое значение, выражающее желаемую полезность плюс вес, а каждый подсписок соответствует агенту и содержит пару для каждой полезности агента. Мы всегда будем выбирать веса, сумма которых равна 1 для каждого агента, хотя это не является строго необходимым. Использование Y будет проиллюстрировано ниже на примерах.

2.7. Интуитивное объяснение.

Чтобы помочь читателю, мы даем интуитивное объяснение того, как работает алгоритм. Внешний цикл алгоритма выполняет E эпизодов (термин, взятый из RL), где E — целочисленный гиперпараметр, выбранный пользователем. В каждом эпизоде переменные просматриваются в порядке, указанном в списке v1, . . . , vn , присваивая каждому значение.

Переменной решения присваивается значение, как и в алгоритме SARSA: на ранних этапах назначение в значительной степени случайное, но на более поздних эпизодах значения присваиваются более жадно, чтобы максимизировать предполагаемое ожидаемое вознаграждение (еще один термин RL, соответствующий полезности). в диаграммах влияния и значению целевой функции при общей оптимизации).
Степень жадности контролируется параметром ϵ, который уменьшается от 1 (полностью случайный) в первом эпизоде до 0 (полностью жадный) в последнем эпизоде. В алгоритмах RL эта стратегия теоретически приводит к оптимальной политике.

Случайной переменной присваивается значение посредством выборки, таким образом, эпизод чередует SARSA с выборкой. С точки зрения RL, назначение случайной переменной — это просто часть среды, в которой действует агент. В особом случае, когда все переменные являются случайными переменными, IP представляет собой байесовскую сеть, и эпизод сводится к перебору переменных MCMC.

В конце эпизода вознаграждение вычисляется для каждого агента и копируется во все предыдущие состояния, как в SARSA, с небольшим усложнением, заключающимся в том, что в нашей многоагентной версии каждое вознаграждение должно быть резервировано для соответствующего агента.

Выбор табличного SARSA с бесконечным шагом был во многом произвольным и имел как преимущества, так и недостатки. Алгоритм, соответствующий политике, такой как SARSA, считается более последовательным и стабильным, чем алгоритм вне политики, такой как Q-learning, но также более медленный и менее эффективный. Выбор табличного алгоритма был сделан из-за его простоты реализации. Выбор с бесконечным шагом соответствует установке λ = 1 в трассе приемлемости RL, что делает его методом Монте-Карло, а не методом временной разницы. Первые считаются более надежными при наличии ненаблюдаемых переменных, поскольку они не основаны на марковском свойстве.

Machine Translated by Google

Ограничение на награды, которые происходят только в конце эпизода, было разработано для упрощения реализации и пользовательского интерфейса. В некоторых случаях было бы предпочтительнее разрешить промежуточные вознаграждения, если они естественным образом возникают в задаче. Однако для этого пользователю потребуется написать несколько фрагментов кода и указать, когда каждый из них должен выполняться. Для нашего исследовательского прототипа мы выбрали более простой путь.

Что касается необходимости предоставления пользователю программируемых служебных функций: хотя это может показаться менее удобным для пользователя, чем некоторая форма языка спецификации, он чрезвычайно гибок. Отметим, что аналогичный подход применяется в области вероятностного программирования [29,30].

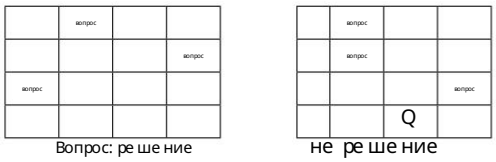
3. Приложения B

В этом разделе мы берем небольшие проблемы из ряда исследований в литературе, моделируемых как IP и решаемых с помощью INFPROG. Мы не будем сравнивать наш метод с другими по эффективности, так как это не является целью статьи. По той же причине мы сообщаем о небольшом времени выполнения, хотя оно довольно короткое — обычно несколько секунд и максимум несколько минут. Фактически, мы не ожидаем, что он будет конкурентоспособным в каком-либо конкретном классе задач, хотя, как метод, основанный на RL, он должен достаточно хорошо работать с приложениями из литературы по RL. Наша цель здесь — только продемонстрировать, что один решатель может решить широкий спектр задач оптимизации, заполняя тем самым пробел в технологии оптимизации. В будущей работе мы намерены внедрить более быстрые, масштабируемые и удобные для пользователя IP-решатели и надеемся, что другие исследователи также найдут лучшие алгоритмы.

3.1. Программирование ограничений

Сначала мы рассмотрим «простую» задачу оптимизации: один агент и одна цель. Мы возьмем хорошо известную задачу удовлетворения ограничений (CSP), известную как восемь ферзей: разместите восемь шахматных ферзей на стандартной шахматной доске 8 × 8 таким образом, чтобы никакие два ферзя не атаковали друг друга (находясь в одной строке, столбце или диагонали). Это популярная задача в программировании ограничениях [31], а меньшая задача а о четырех ферзях проиллюстрирована на рисунке 1. Первый пример является решением, поскольку никакие два ферзя не находятся в одной строке, столбце или диагонали. Второй пример не является решением, поскольку нарушает три ограничения: ферзи в первых двух строках находятся в одном столбце, ферзи в последних двух строках лежат на одной диагонали, а ферзи в первой и третьей строках лежат на другой диагонали.

Мы рассматриваем восемь ферзей как задачу Max-CSP, целью которой является максимизация количества удовлетворяемых ограничений (в данном случае минимизация количества нарушений ограничений до 0). Мы рассмотрим две возможные модели ИП.



Вопрос: решение не решение

Рисунок 1. Задача четырех ферзей.

3.1.1. Разреженная модель.

Задачу можно смоделировать следующим образом: V = v1, . . . , v8 , каждый Di = {1, . . . , 8}, A = a, . . . , a (все переменные принадлежат одному и тому же агенту a), U = viol , где viol считается нарушения ограничений:

$$\text{viol} = \sum_{i=2}^{8} \sum_{j=1}^{i-1} [|i - j| = |v_i - v_j|]$$

[·] — скобка Айверсона, которая принимает значение 1, если ее аргумент истинен, и 0, если он ложен. P — пустая функция (таблиц вероятностей нет, поскольку нет случайных переменных) и L = O = . Гиперпараметр полезности равен Y = 0, 1 : один агент с одной полезностью, утопическая точка которого равна 0, а соответствующий вес равен 1.

Machine Translated by Google

Хотя мы не будем сообщать о времени выполнения в целом, читателю может быть интересно увидеть один пример. Наш решатель реализован на языке C и выполняется на процессоре Intel(R) Core(TM) i5-6500 с тактовой частотой 3,20 ГГц и 8 ГБ системной оперативной памяти (Intel, Санта-Клара, Калифорния, США). При 107 эпизодах решателю требуется 10,3 с на прогон, и за 100 прогонов он нашел правильное решение 70 раз. Остальные 30 раз решение содержало одно нарушение ограничений, что показывает, что INFPROG может попасть в ловушку локальных оптимумов. Также весьма успешно, используя всего 106 эпизодов, находя 61 правильное решение.

Этот результат не может конкурировать с такими методами, как программирование в ограничениях, целочисленное программирование или локальный поиск, которые могут решить проблему быстрее и надежнее. Но, как говорилось ранее, нашей целью является гибкость в решении широкого круга проблем, а не эффективность в решении какого-либо конкретного класса проблем.

3.1.2. Плотная модель

Мы назвали предыдущую модель разреженной, поскольку в ней было мало связей (0). В качестве альтернативной плотной модели мы можем добавить ссылки на IP от каждой переменной решения к каждой предыдущей: $L = \{v_i \to v_j \mid i < j\}$. Они не являются логически необходимыми, но предоставляют больше информации о переменных решения. При плотном IP мы обнаружили 100% успех у восьми маток, используя всего 105 эпизодов, и даже при всего лишь 30 000 эпизодов мы достигли 69% успеха. Это говорит о том, что принятие решений, видимых для всех последующих решений, повысит производительность. Однако добавление этих ссылок создает ряд состояний, число переменных которых экспоненциально, что приводит к множеству коллизий хеш-функций в INFPROG, что, в свою очередь, может снизить производительность.

Это явление хорошо известно в РЛ. В качестве примера рассмотрим задачу диспетчеризации лифтов, в которой мы должны управлять набором лифтов, чтобы минимизировать ожидаемое время ожидания. Даже если мы ограничим задачу дискретным временем, она имеет огромное количество состояний из-за множества возможных комбинаций положений лифта, направления движения и того, какие кнопки были нажаты. В принципе, было бы лучше рассматривать каждое состояние отдельно, и превосходная производительность нашей плотной модели подтверждает эту точку зрения, но комбинаторный взрыв делает ее непрактичной для решения больших задач.

Один из способов избежать взрыва — рассматривать каждый лифт независимо в рамках подхода распределенного RL — см., например, [32]. У каждого лифта есть агент, принимающий решения, и они не общаются, но у них есть общая цель, и они косвенно учатся сотрудничать. Недавний обзор распределенного RL с приложениями приведен в [33]. Наш разреженный IP-адресатор работает таким же образом, хотя мы использовали только один агент: вместо этого мы могли бы использовать отдельный агент для каждой переменной, но это не имеет значения, поскольку они преследуют одну и ту же цель.

Управление связями между переменными позволяет INFPROG легко эмулировать методы RL, которые являются полностью, частично и нераспределенными. Для последующих задач мы будем использовать смесь разреженных и плотных моделей.

3.2. Байесовские сети От

проблемы со всеми переменными решения мы переходим к проблеме со всеми случайными переменными: пример тревоги Перла [34]. Это пример вероятностного вывода, выполняемого в области вероятностного программирования: вывод условной вероятности из вероятностной программы.

В этой небольшой задаче в доме есть сигнализация, которая может сработать в случае землетрясения или кражи со взломом, каждое из которых имеет априорную вероятность. Также у нас есть условные вероятности срабатывания тревоги при разных обстоятельствах: когда есть/нет ограбления и есть/нет землетрясения. Учитывая, что сигнализация сработала, какова вероятность того, что произошла кража со взломом? Ответ влияет на наши действия.

Machine Translated by Google

Мы можем смоделировать это как IP. Переменные: V = {кража со взломом, землетрясение, тревога}, все домены D {да, нет}, все агенты A случайны, ссылки L = {кража со взломом тревога, землетрясение тревога}, как в байесовской сети., вероятности P равны:

$$\Pr[\text{кража со взломом} = \text{да}] = 0{,}7$$
$$\Pr[\text{землетрясение} = \text{да}] = 0{,}2$$
$$\Pr[\text{тревога} = \text{да} \mid \text{кража со взломом} = \text{да}, \text{землетрясение} = \text{да}] = 0{,}9$$
$$\Pr[\text{тревога} = \text{да} \mid \text{кража со взломом} = \text{да}, \text{землетрясение} = \text{нет}] = 0{,}8$$
$$\Pr[\text{тревога} = \text{да} \mid \text{кража со взломом} = \text{нет}, \text{землетрясение} = \text{да}] = 0{,}1$$
$$\Pr[\text{тревога} = \text{да} \mid \text{кража со взломом} = \text{нет}, \text{землетрясение} = \text{нет}] = 0{,}2$$

есть одно наблюдение O = {alarm = yes} и вектор полезности равен

$$U = \text{землетрясение} = \text{да}$$

Следовательно, задача состоит в том, чтобы вычислить условную вероятность Pr[землетрясение = да | тревога = да]. Мы можем относиться к этому как к полезности, хотя единственным фактором является случай, поэтому мы не пытаемся оптимизировать его, принимая решения. Агентов, принимающих решения, нет, поэтому гиперпараметр полезности равен Y = . INFPROG применяет выборку Гиббса и находит ожидаемую «полезность» примерно 0,23, что является правильной вероятностью.

Мы не будем использовать наблюдения в последующих примерах, поскольку они не являются особенностью большинства оптимизационных задач. Однако их можно использовать для расчета ценности информации, чтобы определить, какие переменные с наибольшей вероятностью уменьшат неопределенность интересующей переменной.

3.3. Диаграммы влияния

Теперь мы переходим к задачам, содержащим как переменные решения, так и случайные переменные. ID [35] являются популярными графическими моделями анализе решений и могут моделировать важные взаимосвязи между неопределенностями, решениями и значениями. Первоначально они были задуманы как инструменты для формулирования задач, но также стали эффективными вычислительными инструментами. Они имеют множество применений, включая медицинскую диагностику [36], кибербезопасность [37] и управление рисками [38].

ID представляет собой ориентированный ациклический граф с тремя типами узлов: узлы решений соответствуют переменным решения и изображаются в виде прямоугольников; случайные (или неопределенные) узлы соответствуют случайным переменным и изображаются овалами; узлы значений соответствуют предпочтениям или целям и изображаются в виде скругленных прямоугольников или многоугольников, таких как ромбы.

Каждая случайная переменная связана с таблицей условной вероятности, которая определяет ее распределение для каждой комбинации значений ее родительских переменных на графике. Каждая переменная решения также имеет набор родительских переменных на графике, и ее значение зависит только от их значений. Переменные решения обычно считаются упорядоченными во времени, а случайные переменные наблюдаются в разных точках упорядочения. Стандартное предположение об идентификаторе не забывается, что означает, что родительскими элементами любой переменной решения являются все ее предки в графе: таким образом, решение может зависеть от всего, что произошло раньше. Все переменные дискретны.

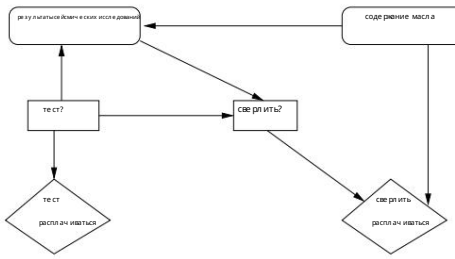
Каждый узел значений связан с таблицей, показывающей полезность (действительное число) каждой комбинации значений родительских переменных. Политика принятия решений — это правило для каждой переменной решения, указывающее, как выбрать ее значение из значений ее родительских значений. Любая политика имеет общую ожидаемую полезность (это ожидание из-за случайных переменных), и решение идентификатора означает вычисление оптимальной политики, которая имеет максимальную ожидаемую полезность.

Существует несколько методов решения идентификаторов. Некоторые из них точны и основаны на исключении переменных [39–43], тогда как другие приблизительны [44–48]. Однако, помимо нашей работы ([16,17] и этой статьи), мы не знаем никаких других применений RL для решения ID, что кажется удивительным, поскольку и ID, и RL могут использоваться для моделирования и решения задач последовательного решения. Основная связь между ними заключается в том, что идентификаторы могут моделировать проблемы, которые могут быть решены с помощью RL, например, причинные идентификаторы использовались для моделирования систем безопасности общего искусственного интеллекта, которые часто используют RL [49]. Наш подход на основе RL где-то заложен

Machine Translated by Google

между точными и приближенными методами: при наличии достаточной памяти и времени обучения возможность найти оптимальное решение, но это не гарантируется. Мы не ожидаем он будет столь же эффективен, как и специализированные алгоритмы, но может обрабатывать идентификаторы с такими расширениями, как ограниченная память (см. раздел 3.5), несколько агентов и несколько целей. Более того, Недавние успехи глубокого RL делают его применение к большим идентификаторам многообещающим направлением исследований. Однако в этой статье мы ограничимся показом того, что RL действительно может решать идентификаторы.

Мы используем идентификатор Oil Wildcatter, показанный на рисунке 2, — хорошо известную опубликованную проблему. в [50]. Охотник за нефтью должен принять решение: бурить или не бурить нефть на конкретном участке. Перед бурением они могут провести сейсмические испытания, которые помогут определить геологические условия. структура сайта. Результат теста может быть закрытым (с указанием значительного содержания масла), открытым (с указанием немного масла) или диффузный (вероятно, без масла). Специальное примечание означает, что результаты испытаний недоступно, если не проведены сейсмические испытания. Решение теста не зависит ни от чего. другая переменная, но решение о тренировках зависит от того, проводилось ли испытание, и если да, то от его результат. Нефтяная переменная не наблюдаема, поэтому от нее не зависит никакое решение (это отличается от забывая его значение, о котором говорится в разделе 3.5).



содержание	Пр[O]		
	сухое	влажное	замачивание
	0,5	0,3	0,2

тестовый выигрыш U1(T)	
тест	
да	10
нет	0

Тестирование содержания		Пр[S|O, T]			
результатов сейсмических исследований		закрытое	открытое	диффузное	примечание
сухой	да	0,1	0,3	0,6	0
сухой	нет	0	0	0	1
влажный	да	0,3	0,4	0,3	0
мокрое	нет	0	0	0	1
	да	0,5	0,4	0,1	0
замачивание	нет	0	0	0	1

Упражнение по		U2(O, D)
содержанию выигрыша		
сухой	да	70
сухой	нет	0
влажный	да	50
мокрое	нет	0
	да	200
замачивание	нет	0

Рисунок 2. Диаграмма влияния нефтяных месторождений.

Модель ИП заключается в следующем. Переменные: V = oil,test,seismic, бурение , домены являются

D = {сухой, влажный, промокший}, {да, нет}, {закрытый, открытый, рассеянный, нота}, {да, нет}

агенты: A = шанс, компания, шанс, компания , ссылки: L = {тренировка

сейсмика, бурение испытание} (идентификаторы ссылок на инженерные сети не являются частью ИП), наблюдений нет (O =), вектор полезности равен U = t + d , где t — выигрыш теста, а d — упражнение. выигрыш, а вероятности показаны на рисунке 2. Гиперпараметр полезности равен Y = 1000, 1 : один агент с одной целью, которую необходимо максимизировать.

Известная оптимальная политика с учетом вышеуказанных полезностей и вероятностей выглядит следующим образом: примените сейсмическое испытание и пробурите, если результат испытания будет открытым или закрытым. ИНФПРОГ находит это решение и сообщает о близком приближении к правильной ожидаемой полезности: 22.5.

3.4. Диаграммы многоцелевого влияния

В качестве первого примера многокритериальной оптимизации мы используем двухцелевой метод нефтяного анализа. ID из [12]. Помимо максимизации выгоды, цель состоит в том, чтобы свести к минимуму воздействие на окружающую среду. повреждать. ИП такой же, как в разделе 3.3, за исключением дополнительных выплат: полезность тестирования равна теперь (-10, 10), а полезность бурения равна (-70, 18), (50, 12) и (200, 8) для сухого, влажного,

Machine Translated by Google

и впитывание соответственно: в каждом случае первое значение представляет собой исходную полезность, а второе значение относится к новой полезности. Вместо одного оптимального решения есть четыре оптимальных по Парето решения, каждое из которых имеет два значения полезности: (1) проверить, затем детализировать, является ли результат закрытым или открытым, с полезностью(22,5, 17,56); (2) не тестировать, а тренировать с помощью утилиты(20, 14.2); (3) протестировать, а затем проверить, если результат закрытый, с полезностью(11, 12,78); (4) не тестировать и не сверлить с полезностью(0,

Коммунальные услуги теперь равны U = p, d , где p — это выигрыш, как и раньше, а d — ущерб окружающей среде. С гиперпараметром полезности Y = 1000, 0,55 , -1000, 0,45 при нескольких запусках INFPROG обнаружил политики (1), (2) и (4), но не (3).

3.5. Диаграммы влияния ограниченной памяти

Стандартные идентификаторы предназначены для обработки ситуаций, в которых участвует один незабывчивый агент. Диаграммы влияния ограниченной памяти (LIMID) [14] представляют собой обобщения идентификаторов, которые позволяют принимать решения с ограниченной информацией и одновременными решениями и могут иметь гораздо меньшие политики. Они ослабляют регулярность (полный порядок переменных) и не забывают предположения об идентификаторах. Считается, что LIMID сложнее решить оптимально, чем ID. Мы обрабатываем функцию ограниченной памяти простым способом: во время хеширования Zobrist набор S содержит только назначения, которые видны переменной решения (как указано IP-ссылками L).

Например, мы используем задачу о свиноводстве из [14]. Свиновод выращивает свинью четыре месяца, а затем продает их. В этот период у свиньи может развиться заболевание, а может и не развиться. Если у него есть болезнь, когда его нужно продать, то его следует продать на убой, и его ожидаемая рыночная цена составит 300. Если он не болен, то его ожидаемая рыночная цена составит 1000 Раз в месяц ветеринарный врач проверяет свинью на наличие заболевания. Если он болен, то тест указывает на это с вероятностью0,80, а если он здоров, то тест указывает на это с вероятностью0,90. При каждом ежемесячном посещении хирург может лечить или не лечить свинью, стоимость лечения составляет 100. Свинья заболевает в первый месяц с вероятностью0,10. У здоровой свиньи заболевание развивается в следующем месяце с вероятностью0,20 без лечения и 0,10 с вероятностью лечения. Нездоровая свинья останется нездоровой в следующем месяце с вероятностью0,90 без лечения и 0,50 с лечением. Идентификатор показан на рисунке 3.

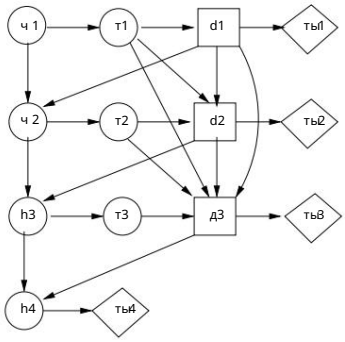


Рисунок 3. Диаграмма влияния свиноводства.

IP для моделирования этой проблемы заключается в следующем. Переменные: V = hi , ti , di , . . . , h4 (i = 1, 2, 3), домены D {здоровы, нездоровы} для hi , {pos, neg} для ti и {treat, Leave} для di , в A есть один агент мы называем разможителем, ссылки L = {hi hi+1 , hi tj(i < j), ti dj(i j), di hi+1}, P содержит показанные вероятности, U = u1 + u2 + u3 + u4 и O = .

Используя гиперпараметр полезности Y = 1000, 1 , INFPROG почти всегда находит оптимальную политику с ожидаемой полезностью примерно 727: игнорировать первый тест и не лечить, затем следовать результатам двух других тестов (лечить в случае положительного результата). Как отмечено в [16], в [14] представлена другая политика : лечение на 3-м месяце, если тесты 1, 2 или 3 положительны. Мы находим, что их политика имеет ожидаемую полезность 725,884, тогда как наша оптимальна. Они сообщают о той же ожидаемой полезности, что и мы, поэтому мы считаем, что это просто опечатк

Machine Translated by Google

3.6. Многоэтапное стохастическое программирование

Стохастическое программирование [51] моделирует и решает проблемы, включающие переменные решения и случайные переменные с известными распределениями последних. Проблемы могут иметь одну или несколько стадий: на каждой стадии принимаются решения, затем наблюдаются случайные переменные. Решение — это не простое присвоение переменных, а политика, которая говорит нам, как принимать решения с учетом присвоений переменным на более ранних этапах. Стохастическое программирование зародилось в 1950-х годах и в настоящее время является основной областьюисследований в области математического программирования и исследования операций.

Теперь мы покажем, что дискретные стохастические программы можно моделировать и решать как IP. Мы используем двухэтапную стохастическую программу из [52]:

max z = 1,5x1 + 4x2 + E[Q(x1, x2)], где
Q(x1, x2) — значение max 16y1 +
19y2 + 23y3 + 28y4 такое, что 2y1 + 3y2 + 4y3 +
5y4 ξ1 x1 6y1 + y2 + 3y3 + 2y4
ξ2 x2 , где 0 x1, x2 5, yi
{0, 1} (i = 1, 2, 3, 4) ξ1, ξ2 равномерно распределены
на {5, 5.5, . . . , 15}

Решение этой проблемы состоит в фиксированных назначениях x1, x2 и назначениях yi , которые зависят от случайных значений ξ . Оптимальная политика имеет цель 61,32.

Мы моделируем проблему как IP следующим образом. Переменные :

$$V = x1, x2, \xi 1, \xi 2, y1, y2, y3, y4$$

агенты

$$A = opt, opt, шанс, шанс, opt, opt, opt, opt$$

(мы выбираем имя для неслучайного агента), домены

$$Д = Д1, Д1, Д2, Д2, Д3, Д3, Д3, Д3$$

где D1 = {0, . . . , 5}, D2 = {5, 5,5, . . . , 15} и D3 = {0, 1}, P присваивает равные вероятности значениям области ξi , а O = .

Как и в разделе 3.1, мы моделируем ограничения, минимизируя их нарушения в качестве дополнительной цели, выбирая большой вес для определения приоритета осуществимости. Однако в этой задаче у нас также есть цель, поэтому мы будем использовать две утилиты: первую, чтобы минимизировать количество нарушений ограничений до 0, а вторую, чтобы максимизировать z. Следовательно, U = виол , z . Гиперпараметр полезности равен Y = 10, 0,99 , 100, 0,01 .

3.6.1. Разреженная

модель. В этом IP связи L = {ξi yj | i, j}. В ходе нескольких прогонов, включающих до 107 эпизодов, INFPROG нашел политику с ожидаемой полезностьюпримерно 55. Это неплохо, но ниже известного оптимума 61,32. Увеличение количества серий до 109 не имело никакого значения.

3.6.2. Плотная модель

В попытке улучшить результаты мы добавили к разреженному IP-адресу следующие ссылки: x1 x2, xi yj (i, j} и yi yj (i < j). При нескольких прогонах 108 эпизодов INFPROG обнаружил политики с ожидаемым вознаграждением около 60, что близко к оптимуму .

3.7. Программирование, ограниченное шансами

Случайное (или вероятностное) ограничение — это ограничение, которое должно удовлетворяться некоторым порогом вероятности: Pr[C(x,r)] θ для ограничения C на переменные решения x и случайные переменные r. Программирование с ограничениями на случайность [53] представляет собой метод оптимизации в условиях неопределенности и имеет множество приложений, поскольку является естественным способом моделирования неопределенности. Случайные ограничения обычно представляют собой неравенства, но мы допускаем любую форму ограничений.

Machine Translated by Google

также использовались в области безопасного (или ограниченного) RL с использованием различных подходов [54,55], и наш подход связан с подходом [3]. Кажется, они не были добавлены в идентификаторы.

Мы моделируем ограничения шансов, добавляя для каждого нового узла с вознаграждением 1 за удовлетворение и 0 за нарушение, а также устанавливая утопическое значение для этой цели на желаемый порог вероятности. Вес, придаваемый цели, должен быть высоким.

Например, мы модифицируем стохастическую программу из раздела 3.6 , добавляя вероятности двум жестким ограничениям:

$$\Pr[2y1 + 3y2 + 4y3 + 5y4 \quad \xi 1 \quad x1] = 0{,}7 \text{ (a)}$$

$$\Pr[6y1 + y2 + 3y3 + 2y4 \quad \xi 2 \quad x2] = 0{,}9 \text{ (б)}$$

Обратите внимание, что случайные ограничения имеют вид $\Pr[\cdot] = p$ вместо обычного $\Pr[\cdot] \quad p$. INFPROG не гарантирует соответствия пороговым значениям вероятности из-за своего многокритериального подхода: вместо того, чтобы принудить удовлетворение случайного ограничения превысить пороговую вероятность, он пытается согласовать пороговое значение в компромиссе с другими целями. Однако его можно использовать в качестве исследовательского инструмента для поиска политики с желаемыми характеристиками, а пользователь может итеративно увеличивать пороговые значения.

Чтобы смоделировать эту проблему, мы модифицируем плотную модель из раздела 3.6, добавляя новую цель для каждого случайного ограничения. Вектор полезности теперь равен $U = \text{viola, violb}, z$. Гиперпараметр утилиты

$$Y = \quad 0{,}7,\ 0{,}496 \quad , \quad 0{,}9,\ 0{,}496 \quad , \quad 100,\ 0{,}008$$

Чтобы решить эту тройную ЦИП, мы экспериментировали с разными весами и нашли множество стратегий с разными компромиссами между случайными ограничениями и исходной целью. Не все решения оказались полезными, но, используя веса (0,496, 0,496, 0,008), мы нашли политику с целями (0,74, 0,95, 71) , которая удовлетворяет требованиям. Ослабление жестких ограничений на случайные ограничения позволило нам увеличить цель z с 60 до 71.

3.8. Многоуровневое программирование

Многие проблемы в экономике, дипломатии, войне, политике, промышленности, играх и других областях связаны с множеством агентов, которые являются частью среды друг друга. Для решения этих задач можно применить мультиагентное RL, а также несколько форм ID: двухагентные ID [7], мультиагентные ID [8], ID на основе теории игр [10], сети ID [6], и интерактивные динамические идентификаторы LIMID могут моделировать несколько агентов, но только в случае сотрудничества, в котором все они преследуют одну и ту же цель.

Самый распространенный случай — двухуровневая программа или игра Штакельберга. Обычно они включают непрерывные переменные, а над дискретными двухуровневыми программами было выполнено относительно мало работ [56], поэтому новые методы представляют интерес. Однако в качестве еще более сложного случая мы используем дискретную трехуровневую программу, изученную как минимум в двух публикациях [57,58] и показанную на рисунке

$$\max x1\ z1 = (x1 + x2 + 2x3 + 4)(\quad x1 \quad x2 + x3 + 2x4 + 1)$$

где $x2$ решает

$$\max x2\ z2 = 2x2 + x3 + 3x4$$

где $x3, x3, x3, x3, x3, x3$ решает, для дано $x1, x2$

$$\max x3 \ldots x8\ z3 = \frac{2x1+3x2+2x3 \quad 3x4}{5x1+11x2+x5+29} \text{ при}$$

условии

$$3x1 + 7x2 + x3 + x5 = 10\ 14x1 + 4x2 + x6 = 6\ x1 + x2 + x3 \quad x4 +$$

$$x7 = 5\ 2x1 + x2 + 2x4 + x8 = 8\ 5 < x3 < 20\ 4 < x4 < 30\ 0 < x1 < 5\ 0 < x2 < 2$$

$$< x8 < 20 \qquad 1 < x5 < 20\ 0 < x6 < 30\ 0 < x7 < 15\ 0$$

Рисунок 4. Трехуровневая нелинейная программа.

Трехуровневые программы использовались для моделирования проблем в управлении цепочками поставок, сетевой защите, планировании, логистике и экономике. В них участвуют три агента: первый — лидер верхнего уровня, второй — ведомый среднего уровня и третий — ведомый (нижнего уровня) . Они организованы иерархически: лидер принимает решения первым,

Machine Translated by Google

Реагирует последователь среднего уровня, затем реагирует последователь нижнего уровня. Обзор многоуровневого программирования представлен в [59], включая раздел, посвященный трехуровневому случаю Задач и децентрализованного принятия решений в иерархической системе управления часто содержат более двух уровней. В качестве другого приложения мы упомянем [60] , в котором используется трехуровневое программирование для моделирования задач и защитник-нападающий-защитник при защите электроэнергетической сети

Эта задача представляет интерес еще и потому, что ее цели квадратичны для лидера, линейны для последователя среднего уровня и дробны для последователя нижнего уровня. Нелинейные цели были добавлены к идентификаторам в [5] с использованием нелинейных аппроксимаций оптимального управления.

Мы моделируем проблему, используя следующий IP. Переменные : V = x1, . . . , x8 , а их области определения представляют собой диапазоны целочисленных значений D = 0 - 5, 0 - 2, 5 - 20, 4 - 30, 1 - 20, 0 - 30, 0 - 15, 0 - 20 . Агенты: A = лидер, средний, нижний, . . . , внизу : v1 — ведущая переменная верхнего уровня, v2 — ведущая переменная среднего уровня, а v3–v8 — ведомые переменные .

Связи — L = {xi xj |i < j} (плотная модель в смысле раздела 3.1), полезности —

U = виолы, z1 , виолы, z2 , виолы, z3

и O = . Первой целью, используемой всеми агентами, является количество нарушений ограничений, которое должно быть равно 0: ограничения гарантируют, что любое решение является осуществимым на трех уровнях , поэтому все агенты должны быть наказаны за нарушения (в этой задаче ни одному агенту не разрешено совершать решение , которое приводит к нарушению ограничения). Второстепенные цели — z1, z2, z3. Использование служебного гиперпараметра

Y = 0, 0,999999, 1000, 0,00001 , 0, 0,999 , 100, 0,001 , 0, 0,99 , 1, 0,01)

Это самое сложное значение Y , которое мы использовали, поэтому дадим некоторые пояснения. Трехуровневая задача была смоделирована с использованием трех агентов, каждый из которых имеет две цели (одну для достижения целей задачи и одну для максимального удовлетворения ограничений). Мы используем взвешенную метрическую скуюскаляризацию, чтобы свести это число к трем агентам с одной целью каждый, поэтому мы должны указать три утопические точки (по одной на каждого агента). Каждая утопическая точка имеет два идеальных объективных значения и соответствующий вес для каждого значения. Так, например, у агента 1 есть утопическая точка 0, 0,99999 с соответствующими весами 1000, 0,00001 .

При повторных запусках со 107 эпизодами INFPROG надежно находит правильную политику (0, 0, 9, 4, 1, 6, 0, 0) с целями ((0, 396), (0, 21), (0, 0,2).). Как указано в [17], в [58] первая цель обозначена как 612 , но можно проверить, что решение дает z1 = 396. Субоптимальные решения, которые оно иногда находит, можно распознать по их меньшим значениям

3.9. Байесовские игры.

Предположения классической теории игр требуют полной информации, что часто нереально. Байесовские игры представляли собой разработку , которая позволяла получать неполную(частную или секретную) информацию, избегая при этом бесконечных вычислений [61]. Важной особенностью является то, что у игрока может быть «тип», неизвестный другим игрокам, отражающий его душевное состояние .

В качестве простого примера возьмем известную задачу под названием « дилемма шерифа». В игре участвуют два игрока: шериф и вооруженный подозреваемый. У подозреваемого есть два возможных типа: преступник или гражданский, и только он знает, к какому типу он принадлежит. Шериф должен знать, стоит ли стрелять, не зная типа подозреваемого, а подозреваемому разрешено использовать эту информацию. Матрицы выигрышей для различных возможностей показаны на рисунке 5, где в каждом случае первая цифра представляет собой выигрыш подозреваемого, а вторая — выигрыша шерифа.

Мы можем смоделировать это как IP следующим образом. Переменные : V = тип,подозреваемый,шериф . с доменами

D = {преступник, гражданский}, {стрелять, нет}, {стрелять, нет}

агенты A = случай, подозреваемый, шериф . Ссылки: L = {тип подозреваемый}, позволяющие подозреваемому, но не шерифу , знать тип подозреваемого. Типовые вероятности P равны p для Pr[преступника] и 1 p для Pr[гражданского лица], полезность равна U = подозреваемый , шериф и O = .

Machine Translated by Google

Используя гиперпараметр утилиты Y = 100, 1 , 100, 1 и 1000 эпизодов, INF-PROG надежно находит правильную политику: подозреваемый стреляет тогда и только тогда, когда он преступник, а шериф стреляет тогда и только тогда, когда pc > то для уменьшения ошибки выборки необходимо больше эпизодов. Где-то между 1 3,

	Тип действия	
шерифа: криминальная стрельба,		нет
подозреваемая, стреляющая	0,0 2, 2 не 1,1	2, 1

	Тип действия	
шерифа: стрельба по гражданскому		нет
лицу, действия по подозреваемому, стрельба -3,-1	-1,-2, а не -2,-1	0,0

Рисунок 5. Выплаты за дилемму шерифа.

3.10. Рассуждение уровня

k. Байесовские игры также подвергались критике за то, что они делают нереалистичные предположения, которые не всегда предсказывают поведение в реальном мире. Другой подход теории игр к неполной информации — это рассуждение уровня k [62,63], которое предполагает, что игроки играют стратегически, но с ограниченной рациональностью. Недавно он использовался в состязательном анализе рисков для моделирования проблем в борьбе с терроризмом [64] и других областях.

Мы рассматриваем простую задачу уровня k: кейнсианский конкурс красоты. Участникам конкурса предлагается выбрать число, которое, как они надеются, будет как можно ближе к некоторой доле от среднего значения выбора всех участников. Классическая теория игр предсказывает, что все игроки выберут 0, что является равновесием Нэша. Причина в том, что если все игро случайным образом лучше всего выбрать p, умноженное на среднее значение: 50p или примерно 33, $\frac{2}{3}$ когда p = (это популярное значение). Но все игроки это знают, поэтому вместо этого им следует выбирать p, умноженное на значение примерно 25. Но все игроки это знают, поэтому логический вывод состоит в том, что 0 — единственный разумный выбор, однако в экспериментах мало кто выбирает 0.

В рассуждениях уровня k мы делаем предположения о других игроках. Мы могли бы предположить, что все остальные игроки — это мыслители нулевого уровня, которые не мыслят стратегически. Они просто равномерно случайным образом выбирают число: c0 U[0, 100] (мы ограничим наши числа целыми числами, поскольку наш метод дискретен). Согласно этому предположению, мы должны использовать мышление уровня 1 и выбрать p раз больше ожидаемого выбора уровня 0: 33. Если вместо этого мы предположим, что все остальные игроки имеют уровень 1, мы должны использовать мышление уровня 2 и выбрать 22. Аналогично, если мы предположим, что все остальные относятся к уровню 2, нам следует использовать мышление уровня 3 и выбрать 15.

Мы можем моделировать и решать эти проблемы как IP, как мы сейчас показываем на конкурсе красоты. Переменные представляют выбор гипотетических игроков уровня k (k = 0, 1, 2) и реального игрока уровня 3: V = c0, c1, c2, c3 . Все домены D — это {0, 1, 2, . . . , 100}.
Агентами являются A = случай, P1, P2, P3 . Все случайные вероятности равны $\frac{1}{101}$. Связей нет, поскольку все выборы делаются одновременно, без знания других вариантов: L = .
Наблюдений нет, поэтому O = . Игрок уровня i должен угадать значение, как можно более близкое к значению, умноженному на p, которое он ожидает от игрока уровня (i 1), т. е. |ci pci 1 | должно быть сведено к минимуму, поэтому утилиты: |c1 pc0| , |c2 pc1| , |c3 pc2| . Применяя INFPROG со 106 эпизодами и гиперпараметром полезности Y = 0, 1 , 0, 1 , 0, 1 для минимизации всех полезностей, мы находим c1, принимая значения примерно 29–37, c2 19–25 и c3 13–15. Использование большего количества эпизодов уменьшает разницу в этих цифрах.

3.11. Практические

последствия Мы продемонстрировали, что широкий спектр проблем из различных областей литературы можно смоделировать как IP и что они могут быть решены с помощью нашего решателя INFPROG . Конечно, мы не утверждаем, что с помощью нашего подхода можно решить любую проблему из исследования операций, теории игр и т. д., тем более что в настоящее время он может обрабатывать только дискре Однако мы считаем, что это имеет интересные практические последствия.

Во-первых, наш подход полезен для быстрого прототипирования. Лишь немногие исследователи являются мастерами стохастического программирования, динамического программирования, теории игр, машинного обучения и многих других областей. Когда мы сталкиваемся с новой сложной задачей оптимизации, не всегда понятно, как ее моделировать, и на практике мы часто делаем упрощающие предположения, исходя из нашего опыта. Стохастический программист может упростить многоагентную задачу

Machine Translated by Google

моделируя противника с использованием случайных величин, или делать вид, что решения не могут повлиять на распределение случайных переменных, или аппроксимировать многоэтапную задачу двухэтапной. Программист ограничений или целочисленный программист может аппроксимировать случайную переменную математическим ожиданием. Теоретик игр может предположить игру с нулевой суммой или полное знание, даже если это нереально. В общем, трудно понять, разумен ли наш выбор дизайна. Мы считаем, что такой инструмент, как INFPROG, полезен на ранних этапах моделирования, поскольку позволяет нам исследовать последствия различных упрощений без необходимости освоения нескольких областей исследований: мы можем просто изменить формулировку задачи и наблюдать результат. . Некоторые упрощения могут незначительно изменить качество решения, тогда как другие могут значительно снизить качество или даже сделать задачу невыполнимой. В качестве примеров можно рассматривать модели восьми ферзей и стохастические программные модели: в обоих случаях мы реализовали разные модели и сравнили полученные объективные значения, что привело к выводу, что плотные модели дают лучшие результаты.

Во-вторых, мы надеемся, что наш подход будет полезен сам по себе. Он основан на многоагентном многоцелевом RL, очень общей парадигме с широким применением. Мы не ожидаем, что INFPROG сможет конкурировать со специализированными алгоритмами для решения конкретных задач, но для задач, которые по своей сути сложны, он может быть полезным инструментом, поскольку существует мало доступного программного обеспечения, способного решать проблемы, включающие множество агентов, несколько целей, случайные события. и частичное знание.

Следует отметить, что INFPROG — это всего лишь исследовательский прототип, и мы, конечно, не считаем его готовым продуктом. Мы надеемся, что в будущем появятся более конкурентоспособные IP-алгоритмы, особенно на основе глубокого RL и реализованные на высокопараллельном оборудовании. Это должно значительно повысить масштабируемость IP-подхода к сложным задачам оптимизации, поскольку RL уже показала свою способность решать большие многоагентные задачи, такие как обучение игре в го.

3.12. Небольшой

практический пример Чтобы проиллюстрировать наш подход более подробно, мы покажем программируемую утилиту для проблемы нефтяного дикого выброса из раздела 3.3 на рисунке 6. Пользователь должен предоставить функцию C, называемую утилитой, с двумя аргументами: одномерным массивом v целых чисел. переменные шанса и решения, а также двумерный массив u полезностей. Эта функция вызывается в конце эпизода, поэтому мы можем предположить, что всем переменным в v были присвоены значения. (Знаки * и ** — это обозначения C, обозначающие размерность массива).

```
void Utility(int* v, float** u) {

    int Oil=v[0], test=v[1], seismic=v[2], бурение=v[3], нет=0, да=1,
        сухое=0, влажное=1, впитывание=2, компания=1; плавающее
    Drill_payoff, test_payoff;

    if (test==да) test_payoff= –10.0; иначе test_payoff=0.0;

    if (oil==сухой && бур==да) Drill_payoff= –70.0; else if (oil==мокрый &&
    дрель==да) Drill_payoff= 50.0; иначе, если (масло==замочить &&
    дрель==да) Drill_payoff= 200.0; еще
                                        Drill_payoff = 0,0;

    u[компания][0]=drill_payoff+test_payoff;
}
```

Рисунок 6. Программируемая утилита для примера добычи нефти.

Для удобства чтения мы создали целочисленные переменные для именования переменных IP (например, Oil=v[0]), их возможных значений (например, Yes=0) и единственного агента (компании — обратите внимание, что случайным переменным присвоен номер агента 0).). Общий выигрыш представляет собой сумму выигрышей от тренировки и теста, и эта сумма присваивается единственной полезности u[1][0] в задаче Второй индекс равен 0, поскольку утилиты агента нумеруются с 0: для задачи с двумя целями, такой как описанная в разделе 3.4, нам также нужно будет присвоить значение u[company][1].

Machine Translated by Google

Пользователь также должен предоставить небольшой текстовый файл с описанием параметров задачи (количество агентов, переменные, размеры доменов и т. д.). Мы не приводим пример, поскольку INFPROG в настоящее время является исследовательским прототипом и не имеет удобного для пользователя языка спецификации.

4. Выводы

Эта статья вносит два вклада. Во-первых, он определяет новый класс задач оптимизации, называемый программой влияния (IP), который является достаточно общим, чтобы охватить широкий спектр проблем из исследования операций, искусственного интеллекта, теории игр и анализа состязательных рисков. Во-вторых, он предлагает алгоритм под названием INFPROG, основанный на обучении с подкреплением и выборке. INFPROG — это легкий решатель, не требующий графического процессора или другого специализированного оборудования. Мы продемонстрировали гибкость IP, используя примеры, взятые из различной литературы; насколько нам известно, ни один другой решатель не может решить этот диапазон задач оптимизации. Наша работа также показывает, что многие существующие проблемы из другой литературы могут служить эталонными задачами для многокритериальных и/или многоагентных алгоритмов обучения с подкреплением, которых не хватает [18].

Мы ожидаем, что IP будут полезны для задач гибридной оптимизации, которые не вписываются ни в один конкретный класс и не имеют доступных решателей. Плодотворным источником приложений может стать безопасное обучение с подкреплением, в котором ограничения используются для обеспечения надежных и безопасных политик. Это также может быть полезно для быстрого прототипирования различных моделей, для изучения того, как смоделировать новую проблему, для проверки эффектов сокрытия информации или принятия упрощающих предположений. Наконец, его можно использовать в качестве учебного пособия для понимания различных моделей задач оптимизации.

В будущей работе мы изучим применение нашего метода к сложным реальным задачам. Текущая реализация INFPROG представляет собой лишь исследовательский прототип, призванный продемонстрировать потенциал единого подхода к широкому спектру сложных задач оптимизации. Он может обрабатывать только дискретные переменные, использует простую и довольно слабую форму агрегирования состояний (случайное тайловое кодирование) и не имеет четкого пользовательского интерфейса. Мы надеемся разработать более удобную для пользователя версию, которая также будет включать непрерывные переменные и использовать более мощную агрегацию состояний: последних двух улучшений можно достичь путем перехода от SARSA к алгоритму «актёр-критик», такому как оптимизация проксимальной политики [65].

Финансирование: Этот материал основан на работах, поддержанных Научным фондом Ирландии в рамках гранта № 12/RC/2289-P2, который совместно финансируется Европейским фондом регионального развития. Мы также хотели бы выразить признательность за поддержку Центру интеллектуального производства Научного фонда Ирландии CONFIRM, код исследования 16/RC/3918, а также проекту ЕС H2020 ICT48 TAILOR по контракту № 952215.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: В этом исследовании не было создано или проанализировано никаких новых данных. Совместное использование данных не применимо к этой статье.

Конфликты интересов: Спонсоры не играли никакой роли в разработке исследования; при сборе, анализе или интерпретации данных; в написании рукописи; или в решении опубликовать результаты.

Ссылки

1. Саттон, Р.С.; Барто, А.Г. Обучение с подкреплением: Введение; MIT Press: Кембридж, Массачусетс, США, 1998. 2. Силвер, Д.; Хьюберт, Т.; Шриттвизер, Дж; Антоноглу, И.; Лай, М.; Гез, А.; Ланкто, М.; Сифре, Л.; Кумаран, Д.; Грепель, Т.; Лилликрап, Т.; Симонян, К.; Хассабис, Д. Общий алгоритм обучения с подкреплением, позволяющий освоить шахматы, сёги и самостоятельную игру. Наука 2018, 362, 1140–1144. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

3. Хуанг, С.Х.; Абдолмалеки, А.; Веццани, Г.; Бракель, П.; Манкович, диджей; Нойнерт, М.; Боэз, С.; Тасса, Ю; Хесс, Н.; Ридмиллер, Массачусетс; Хадселл, Р. Ограниченная многоцелевая система обучения с подкреплением. В материалах 5-й конференции по обучению роботов, Лондон, Великобритания, 8–11 ноября 2021 г.; стр. 883–893.

4. Эльшафей, ММК; Эль-Шербери, М.С. Интерактивная двухуровневая многокритериальная задача стохастического целочисленного линейного программирования. Тенденции Appl. наук. Рез. 2008, 3, 154–164.

5. Краточвил, В.; Вомель Дж. Диаграммы влияния для оптимизации профиля скорости. Между. Дж. Прибл. Прич ина. 2017, 88, 567–586. [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

6. Гал, Ю; Пфеффер, А. Сети диаграмм влияния: формализм для представления убеждений агентов и процессов принятия решений. Дж Артиф. Интел. Рез. 2008, 33, 109–147. [Перекрестная ссылка]
7. Гонсалес-Ортега, Х.; Инсуа, ДР; Кано, Дж Анализ состязательного риска для диаграмм влияния двух агентов: алгоритмический подход. Евро. Дж Опер. Рез. 2019, 273, 1085–1096. [Перекрестная ссылка]
8. Коллер, Д.; Мильч, Б. Диаграммы многоагентного влияния для представления и решения игр. ИгрыЭкон. Поведение. 2001, 45, 181–221. [Перекрестная ссылка]
9. Полич, К.; Гмытрасевич, Г. Интерактивные диаграммы динамического влияния. В материалах 6-й Международной совместной конференции по автономным агентам и мультиагентным системам, Коммуникации в компьютерных и информационных науках, Гонолулу, Гавайи, США, 14–18 мая 2007 г.; Том 288, стр. 623–630.
10. Чжоу, Л.Х.; Кевин, Л.; Лю, Вайоминг. Диаграммы влияния, основанные на теории игр. Экспертная система. 2013, 30, 341–351. [Перекрестная ссылка]
11. Дильс, М.; Хеймс, Ю Диаграммы влияния с множеством целей и анализ компромиссов. IEEE Транс. Сист. Человек Кибернет. Часть А 2004, 34, 293–304. [Перекрестная ссылка]
12. Маринеску, Р.; Разак, А.; Уилсон, Н. Многокритериальные диаграммы влияния. В материалах 28-й конференции по неопределенности в искусственном интеллекте, остров Каталина, Калифорния, США, 5–17 августа 2012 г.; стр. 574–583.
13. Дженсарли А. Диаграммы влияния информации/релевантности. В материалах 11-й конференции по неопределенности в искусственных Разведка (UAI), Монреаль, Квебек, Канада, 18–20 августа 1995 г.; стр. 329–337.
14. Лауритцен, С.Л.; Нильссон, Д. Представление и решение проблем принятия решений с ограниченной информацией. Менеджер. наук. 2001, 47, 1238–1251. [Перекрестная ссылка]
15. Пауэлл, ВБ. Обучение с подкреплением и стохастическая оптимизация: унифицированная основа для последовательных решений; Уайли: Хобокен, НьюДжерси, США, 2022 год.
16. Прествич, С.Д.; Тоффано, Ф; Уилсон, Н. Вероятностный язык программирования для диаграмм влияния. В материалах 11-я Международная конференция по масштабируемому управлению неопределенностью, Гранада, Испания, 4–6 октября 2017 г.
17. Прествич, С.Д. Решение смешанных диаграмм влияния с помощью обучения с подкреплением. В материалах 9-й Международной конференции по машинному обучению, оптимизации и науке о данных, Грасмер, Великобритания, 22–26 сентября 2023 г.
18. Хейс, К.Ф.; Радулеску, Р.; Барджакки, Э.; Келлстрем, Дж; Макфарлейн, М.; Реймонд, М.; Верстратен, Т.; Зинтграф, Л.М.; Дэйзли, Р.; Хайнц, Ф.; и др. Практическое руководство по многоцелевому обучению и планированию с подкреплением. Автон. Агент. Мультиагентная система. 2022, 36, 26. [CrossRef]
19. ван Моффорт, К.; Друган, ММ; Нове, А. Скаляризованное многоцелевое обучение с подкреплением: новые методы проектирования. В материалах симпозиума IEEE по адаптивному динамическому программированию и обучению с подкреплением, Сингапур, 16–19 апреля 2013 г.; стр. 191–199.
20. Чжан К.; Ян, З.; Басар, Т. Многоагентное обучение с подкреплением: выборочный обзор теорий и алгоритмов. В Справочнике по обучению и контролю с подкреплением; Вамвоудакис К.Г., Ван Ю, Лькис Флорида, Кансевер Д., ред.; Исследования в области систем, принятия решений и контроля; Шпрингер: Чам, Швейцария, 2021 г.; Том 325.
21. Радулеску, Р.; Мэннион, П.; Ройерс, DM; Нове, А. Многоцелевое многоагентное принятие решений: анализ на основе полезности и Опрос. Автон. Агенты Мультиагентная система. 2020, 34, 10. [CrossRef]
22. Ху, Т.; Лу, Б.; Ян, К.; Хуанг, Т. MO-MIX: Многоцелевое многоагентное совместное принятие решений с глубоким подкреплением. обучение. IEEE Транс. Паттерн Анал. Мах. Интел. 2023, 45, 12098–12112. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
23. Андрыкович, М.; Вольски, Ф.; Рэй, А.; Шнайдер, Дж; Фонг, Р.; Велиндер, П.; МакГрю, Б.; Тобин, Дж; Аббель, П.; Заремба, В. Повторретроспективного опыта. В материалах 31-й Международной конференции по нейронным системам обработки информации, Лонг-Бич, Калифорния, США, 4–9 декабря 2017 г.; стр. 5055–5065.
24. Зобрист А.Л. Новый метод хеширования с применением для игр. ICGA J. 1990, 13, 69–73.
25. Хаятт, РМ; Коззи, А. Эффект коллизий хэш-подписей в шахматной программе. ICGA J. 2005, 28, 131–139. [Перекрестная ссылка]
26. Скалсе, Дж; Хаммонд, Л.; Гриффин, К.; Абате, А. Лексикографическое многоцелевое обучение с подкреплением. В материалах 31-го числа Международная совместная конференция по искусственному интеллекту, Вена, Австрия, 23–29 июля 2022 г.; стр. 3430–3436.
27. Габор З.; Кальмар, З.; Сепешвари, К. Многокритериальное обучение с подкреплением. В материалах 15-й Международной конференции по машинному обучению, Мэдисон, Вашингтон, США, 24–27 июля 1998 г.; стр. 197–205.
28. Гиагкиозис И.; Флеминг, П.Дж Методы многоцелевой оптимизации: анализ. Инф. наук. 2015, 293, 338–350. [Перекрестная ссылка]
29. Гордон, А.Д.; Хензингер, штат Техас; Нори, А.В.; Раджамани, С.К. Вероятностное программирование. В трудах Международного Конференция по программной инженерии, Хайдарабад, Индия, 31 мая – 7 июня 2014 г.
30. Пфеффер А. Практическое вероятностное программирование; Публикации Мэннинга: Шелтер-Айленд, НьюЙорк, США, 2016 г.
31. Росси, Ф.; ван Бик, П.; Уолш Т. (ред.) Справочник по программированию с ограничениями; Elsevier: Амстердам, Нидерланды, 2006 г.
32. Критьи, РХ; Барто, А.Г. Управление группой лифтов с использованием нескольких агентов обучения с подкреплением. Мах. Учиться. 1998, 33, 235–262. [Перекрестная ссылка]
33. Усенг, М.; Авдулрахман, С. Обзор распределенного обучения с подкреплением. Месопотамский Дж Большие данные 2022, 2022, 44–50. [Перекрестная ссылка]
34. Перл Дж Вероятностное рассуждение в интеллектуальных системах: сети правдоподобного вывода; Серия «Представление и рассуждение»; Морган Издательство Kaufman: Берлингтон, Массачусетс, США, 1988.
35. Ховард, РА; Мэтисон, Дж Э. Диаграммы влияния. В чтениях по анализу решений; Группа стратегических решений: Менло-Парк, Калифорния, США, 1981 г.; Глава 38, стр. 763–771.

Machine Translated by Google

36. Низ, РФ; младший; Оуэнс, Д.К. Использование диаграмм влияния для структурирования медицинских решений. Мед. Рецис. Мак. 1997, 17, 263–275. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]

37. Чокалингам, С.; Маатуис, К. Диаграммы влияния в кибербезопасности: концептуализация и потенциальные приложения. В материалах 22-й Европейской конференции по кибервойне и безопасности, Пирей, Греция, 22–23 июня 2023 г.; Том 22.

38. Кэрриге р, Дж.Ф.; Нькоман, М.С. Диаграммы влияния как инструменты принятия решений для управления рисками, связанными с пестицидами. Интегр. Окружающая среда. Оценивать. Менеджер. 2011, 8, 339–350. [Перекрестная ссылка]

39. Дектер Р. Новый взгляд на алгоритмы оптимизации политики в условиях неопределенности. В системах планирования искусственного интеллекта; Ассоциация по развитию искусственного интеллекта: Вашингтон, округ Колумбия, США, 2000 г.; стр. 72–81.

40. Дженсен, Ф.; Дженсен, В.; Диттмер, С. От диаграмм влияния к деревьям соединений. В неопределенности в искусственном интеллекте; Морган Кауфманн: Берлингтон, Массачусетс, США, 1994 г.; стр. 367–373.

41. Шахтер Р.Д. Оценка диаграмм влияния. Опер. Рез. 1986, 34, 871–882. [Перекрестная ссылка]

42. Шеной, П. Системы оценки для байесовского анализа решений. Опер. Рез. 1992, 40, 463–484. [Перекрестная ссылка]

43. Тэтман, Дж.А.; Шахтер, Р.Д. Динамическое программирование и диаграммы влияния. IEEE Транс. Сист. Человек Кибер н. 1990, 20, 365–379. [Перекрестная ссылка]

44. Кано, А.; Гомес, М.; Морал, С. Метод Монте-Карло вперед-назад для решения диаграмм влияния. Между. Дж. Прибл. Прич ина. 2006, 42, 119–135. [Перекрестная ссылка]

45. Чарнс, Дж.М.; Шеной, П.П. Многоэтапный метод Монте-Карло для решения диаграмм влияния с использованием локальных вычислений. Менеджер. наук. 2004, 50, 405–418. [Перекрестная ссылка]

46. Маринеску, Р.; Ли, Дж; Дектер, Р. Новая граничная схема для диаграмм влияния. В материалах 35-й конференции по искусственному интеллекту, Ванкувер, Британская Колумбия, Канада, 2–9 февраля 2021 г.; Ассоциация по развитию искусственного интеллекта: Вашингтон, округ Колумбия, США, 2021 г.; стр. 12158–12165.

47. Ваттаю, В. Представление и решение диаграммы влияния при принятии многокритериальных решений: циклический метод распространения убеждений. В материалах Международного симпозиума по информатике и ее приложениям, Хобарт, TAS, Австралия, 13–15 октября 2008 г.; стр. 118–125.

48. Юань, К.; Ву, Х. Решение диаграмм влияния с использованием эвристического поиска. В материалах Международного симпозиума по искусственным Интеллектуальная математика, Санья, Китай, 23–24 октября 2010 г.

49. Эверитт, Т.; Кумар, Р.; Краковна, В.; Легг, С. Моделирование систем безопасности AGI с помощью диаграмм причинного влияния. В материалах семинара по безопасности искусственного интеллекта, семинар CEUR, Гонолулу, Гавайи, США, 27 января 2019 г.; Том 2419.

50. Райффа, Х. Анализ решений; Аддисон-Уэсли: Ридинг, Массачусетс, США, 1968 г.

51. Биргье, младший; Луво, Ф.В. Введение в стохастическое программирование; Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2011 г.

52. Ахмед, С.; Тавармалани, М.; Сахинидис, Н.В. Конечный алгоритм ветвей и границ для двухэтапных стохастических целочисленных программ. Математика. Программа. 2004, 100, 355–377. [Перекрестная ссылка]

53. Чарнс, А.; Купер, В.В. Программирование с ограниченными шансами. Менеджер. наук. 1959, 6, 73–79. [Перекрестная ссылка]

54. Гарсиа, Х.; Фернандес, Ф. Комплексное исследование безопасного обучения с подкреплением. Дж. Мах. Учиться. Рез. 2015, 16, 1437–1480.

55. Гу, С.; Ян, Л.; Ду, Ю; Чен, Г.; Уолтер; Ван, Дж; Ян, Ю; Нолл, АС Обзор безопасного обучения с подкреплением: методы, теория и приложения. arXiv 2022, arXiv:2205.10330.

56. Ковач А.; Кис, Т. Подход к программированию с ограничениями для решения задач и двухуровневого планирования. Ограничения 2011, 16, 317–340. [Перекрестная ссылка]

57. Арора, Р.; Арора, С.Р. Алгоритм для решения задач нелинейного многоуровневого целочисленного программирования. Между. Дж. Компьютер. наук. Математика. 2010, 3, 211–225. [Перекрестная ссылка]

58. Мишра, С.; Верма, А.Б. Недифференциальный подход к решению задач трехуровневого программирования. Являюсь. Между. Дж. Рез. наук. Технол. Математика. 2015.

59. Лу, Дж; Хан, Дж; Ху, Ю; Чжан Г. Многоуровневое принятие решений: обзор. Инф. наук. 2016, 346–347, 463–487. [Перекрестная ссылка]

60. Альгуасил, Н.; Дельгадильо, А.; Арройо, Дж.М. Трехуровневый подход к планированию защиты электросетей. Вычислить. Опер. Рез. 2014, 41, 282–290. [Перекрестная ссылка]

61. Харсаньи, Д.К. Игры с неполной информацией, в которых играют «байесовские» игроки, I–III: Часть I. Базовая модель. Менеджер. наук. 2004, 50, 1804–1817. [Перекрестная ссылка]

62. Нагель, Р. Распутывание игр-угадателей: экспериментальное исследование. Являюсь. Эк он. Ред. 1995, 85, 1313–1326.

63. Шталь, Д.О.; Уилсон, П.В. О моделях других игроков: теория и экспериментальные данные. Игры Эк он. Поведение. 1995, 10, 218–254. [Перекрестная ссылка]

64. Ротшильд, К.; Альберт, Л.; Гикема, С. Состязательный анализ рисков с неполной информацией: подход уровня k. Рисковый анал. 2011, 32, 1219–1231. [Перекрестная ссылка]

65. Шульман Дж; Вольски, Ф; Дхаривал, П.; Рэдфорд, А.; Климов О. Алгоритмы оптимизации проксимальной политики. arXiv 2017, arXiv: 1707.06347.

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Многомерный анализ данных глубокого языка в JRR Толкин и К.С. Льюис раскрывают тесные математические связи

Эмилио Матричиани

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria (DEIB), Миланский политехнический университет, 20133 Милан, Италия; emilio.matricciani@polimi.it

Аннотация: Английские литературоведы единогласно утверждают, что Дж. Р. Р. Толкин оказал влияние на творчество К. С. Льюиса. Впервые мы исследовали этот вопрос математически, используя оригинальный многомерный анализ лингвистических параметров, основанный на поверхностных глубоких языковых переменных и лингвистических каналах. Чтобы поместить наше исследование в рамки английской литературы, мы рассмотрели некоторые романы, написанные более ранними авторами, такими как Ч. Диккенс, Г. Макдональд и другие. Глубокие языковые переменные и лингвистические каналы, обсуждаемые в статье, вероятно, обусловлены бессознательным замыслом писателей и выявляют связи между текстами, находящиеся далеко за пределами их осознания. Таким образом, емкость расширенной кратковременной памяти, необходимая читателям, универсальный индекс читаемости текстов, геометрическое представление текстов и тонкая настройка лингвистических каналов в текстах — все инструменты, широко обсуждаемые в статье, — выявили прочную связь между «Властелин колец» (Толкин), «Хроники Нарнии», «Космическая трилогия» (Льюис) и романы Макдональда, поэтому соглашаясь с тем, что говорят исследователи английской литературы

Ключевые слова: алфавитные языки; расширенная кратковременная память; человеческое общение; человеческий разум; предложения: математическое моделирование; универсальный индекс читабельности

check for updates

Цитирование: Матричиани, Э. Многомерный анализ данных глубокого языка у Дж. Р. Р. Толкина и К. С. Льюиса выявляет тесные математические связи. Прикладная математика 2024, 4, 927–949. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030050

Научный редактор: Либор Пекар

Поступила: 17 июня 2024 г.
Пересмотрено: 29 июля 2024 г.
Принято: 31 июля 2024 г.
Опубликовано: 1 августа 2024 г.

Копирайт: © 2024 автора. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

1. Введение

Исследователи английской литературы в большом количестве статей (некоторые из которых приведены здесь [1–8] из обширной литературы по этой теме) единогласно утверждают, что Дж. Р. Р. Толкин повлиял на произведения К. С. Льюиса. Целью настоящей статьи является не обзор большого количества литературы, основанный на типичном подходе, используемом учеными-литературоведами (что не является нашей специальностью), а математическое и статистическое исследование этого вопроса — исследование, которое никогда раньше не проводилось — используя новейшие методы, разработанные в результате исследования влияния поверхностных глубоких языковых переменных [9,10] и лингвистических каналов [11] в литературных текстах. Поскольку ученые отмечают влияние Джорджа Макдональда на обоих, мы рассмотрим некоторые романы, написанные этим более ранним автором. Чтобы поместить все эти романы в рамки английской литературы, мы рассмотрим некоторые романы, написанные другими более ранними авторами, такими как Ч. Диккенс и другие.

После этого введения, в разделе 2, мы представляем рассматриваемые литературные тексты (романы). В разделе 3 мы сообщаем о сериях слов, предложений и вставок в сравнении с главами для некоторых романов и определяем индекс, полезный для синтетического описания регулярности, обусловленной, по нашему мнению, сознательным замыслом авторов. В разделе 4 мы начинаем изучать четыре глубокие языковые переменные; во избежание недопонимания эти переменные и производные от них лингвистические каналы относятся к «поверхностной» структуре текстов, а не к «глубинной» структуре, упомянутой в когнитивной теории. В разделе 5 мы сообщаем результаты, касающиеся расширенной кратковременной памяти и индекса универсальной читаемости; обе темы посвящены буферам кратковременной памяти человека. В разделе 6 мы представляем литературные тексты геометрически в декартовой плоскости, определяя линейные комбинации глубоких языковых переменных и вычисляя вероятность того, что один текст можно спутать с другим. В разделе 7 мы показываем линейные связи, существующие между лингвистическими переменными в рассматриваемых романах. В разделе 8

Machine Translated by Google

мы сообщаем о теории языковых каналов. В разделе 9 мы применяем это к романам, которые в настоящее время учился. Наконец, в разделе 10 мы суммируем основные выводы и делаем выводы. Несколько В приложениях приведены числовые данные.

2. База данных литературных текстов (романов)

Сначала представим базу данных художественных текстов, использованную в настоящей статье. Таблица 1 перечисляет некоторые основные статистические данные по романам Толкина, Льюиса и Макдональда. Чтобы установить эти тексты в рамках ранней английской литературы мы рассматриваем романы Чарльза Диккенса (табл. 2) и других авторов (табл. 3).

Таблица 1. Романы Толкина, Льюиса и Макдональда с указанием года публикации. Количество главы (т. е. количество выборок, учитываемых при расчете линий регрессии, указанных ниже), общее количество символов, содержащихся в словах (C), общее количество слов W и предложений (S). Заголовки, сноски и другой посторонний материал, присутствующий в цифровых текстах, удалены.

Джон Р.Р. Толкин (1892–1973)	Главы (M)	Персонажи (C)	Слова (W)	Предложения (S)
Хоббит (1937)	19	394 154	95 914	5890
Властелин колец (1954–1955)	62	1 906 531	472 173	34 601
Сильмариллион (посмертно, 1977)	24	429 639	101 627	3346
Клайв С. Льюис (1898–1963)				
Письма-болваны (1942)	31	135 204	31 040	13:30
Космическая трилогия (1938–1945)	123	1 243 141	295 240	20 124
Хроники Нарнии (1950–1956)	110	1 318 482	322 544	23 515
Джордж Макдональд (1824–1905)				
Фантастес: Феерический роман для мужчин и женщин (1858)	25	283 676	67 551	3274
За северным ветром (1871)	38	349 041	90 697	5017
Принцесса и гоблин (1872)	32	208 325	51 090	3205
Лилит: Романтика (1895)	47	386 522	94 127	6271

Таблица 2. Романы Чарльза Диккенса с указанием года публикации. Количество глав (M, т.е. количество образцов, учитываемых при расчете линий регрессии, указанных ниже), общее количество символы, содержащиеся в словах (C), общее количество слов W и предложений (S).

Роман (год издания)	Главы (M)	Персонажи (C)	Слова (W)	Предложения (S)
Приключения Оливера Твиста (1837–1839)	53	679 008	160 604	9121
Дэвид Копперфильд (1849–1850)	64	1 469 251	363 284	19 610
Холодный дом (1852–1853)	64	1 480 523	350 020	20 967
Повесть о двух городах (1859)	45	607 424	142 762	8098
Наш общий друг (1864–1865)	67	1 394 753	330 593	17 409

Мы использовали цифровой текст романа (файл WinWord) и подсчитали для каждой главы количество символов, слов, предложений и вставок (знаков препинания). До при этом мы удалили заголовки, сноски и другой посторонний материал, присутствующий в цифровые тексты, обременительная работа. Подсчет очень простой, хотя и трудоемкий. Winword напрямую предоставляет количество символов и слов. Количество предложений был рассчитан с помощью WinWord для замены каждой точки на точку: конечно, это действие не меняет текст, но дает количество этих замен и следовательно, количество точек. Та же процедура была повторена для вопросительных знаков. и восклицательные знаки. Сумма трех сумм дает общее количество предложений. в анализируемом тексте. Та же процедура дает общее количество запятых, двоеточий и точки с запятой. Сумма этих последних значений с общим количеством предложений дает общее количество интерпунктов.

Machine Translated by Google

Таблица 3. Романы авторов английской литературы с указанием года публикации. Количество глав (M, т. е. количество выборок, учитываемых при расчете линий регрессии, указанных ниже), всего количество символов, содержащихся в словах (C), общее количество слов W и предложений (S).

Роман (Автор, Год)	Главы (M)	Персонажи (C)	Слова (W)	Предложения (S)
Гордость и предубеждение (Дж Остин, 1813)	61	537 005	121 934	6013
Ярмарка тщеславия (В. Теккерей, 1847–1848)	66	1 285 688	277 716	13 007
Моби Дик (Х. Мелвилл, 1851)	132	92,2351	203 983	9582
Мельница на Флоссе (Дж Элиот, 1860)	57	888 867	207 358	9018
Приключения Алисы в стране чудес (Л. Кэрролл, 1865)	12	107 452	27 170	1629 г.
Приключения Гекльберри Финна (М. Твен, 1884)	42	427 473	110 997	5887
Книга джунглей (Р. Киплинг, 1894)	9	209 935	51 090	3214
Война миров (Герберт Уэллс, 1897 г.)	27	265 499	60 556	3306
Чудесный волшебник страны Оз (Л. Ф. Баум, 1900)	22	156 973	39 074	2219
Собака Баскервилей (Э. Э. Дойл, 1901–1902)	15	245 327	59 132	4080
Питер Пэн (Дж М. Барри, 1902)	17	194 105	47 097	31,77
Мартин Иден (Дж Лондон, 1908–1909)	45	601 672	139 281	9173

Некоторую неоднородность можно отметить в романах одного и того же автора. Истории в «Космической трилогии» и «Хроники Нарнии» Льюиса рассказаны примерно с одинаковым количеством главы, слова и предложения, как и в нескольких романах Макдональда, таких как «В Спина Северного Ветра и Лилит: Романтика. Некоторую неоднородность можно найти у Давида. Коппер филд, «Холодный дом и наш общий друг» (Диккенса) и «Приключения Оливера» Твист и Повесть о двух городах. Мы думаем, что эти числовые значения обусловлены не случайностью, а сознательно управляется авторами, и эту тему мы подробнее рассмотрим в следующем разделе.

3. Сознательное проектирование текстов: слова, предложения и вставки в сравнении с главами

Во-первых, мы изучаем лингвистические переменные, которые, по нашему мнению, авторы намеренно разработали. В конкретике показываем ряды слов, предложений и межпунктов.
против главы.

Рассмотрим литературное произведение (роман) и его подразделение на разрозненные блоки.
текста, достаточно длинного, чтобы дать надежные средние значения. Пусть nS — количество предложений содержится в текстовом блоке, nW количество слов, содержащихся в nS предложениях, nC
количество символов, содержащихся в словах nW и количество знаков препинания (вставки), содержащиеся в предложениях nS.

10/110 = 0,09 На рис. 1 показана зависимость серии nW от нормализованного номера главы «Владыки мира». Кольца, Хроники Нарнии, Космическая трилогия.

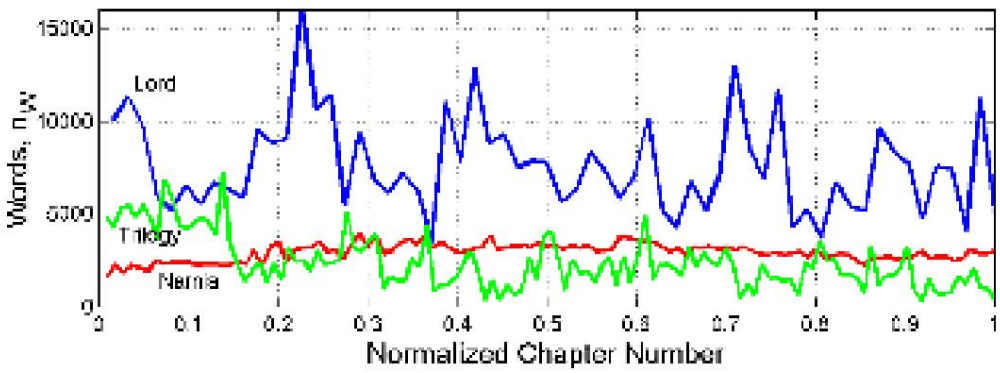


Рисунок 1. Серия слов в зависимости от нормализованного номера главы. Синяя линия: «Властелин колец». (Господин); красная линия: Хроники Нарнии (Нарния); зеленая линия: Космическая трилогия (Трилогия).

Machine Translated by Google

Например, нормализованное значение главы 10 «Хроник Нарнии» составляет 10/110 = 0,09. в масштабе х рисунка 1. Эта нормализация позволяет синоптически отображать романы с разное количество глав.

В «Хрониках Нарнии» (далее для краткости — «Нарния») мы можем заметить практически постоянное значение nW по сравнению с «Властелином колец» (Властелин) и «Космосом» Трилогия (Трилогия).

Определим синтетический индекс для описания ряда, изображенного на рисунке 1, а именно: коэффициент вариации δ, определяемый стандартным отклонением σnW, деленным на среднее значение значение < нВт >

$$\delta = \frac{\sigma nW}{< нЗ >} \quad (1)$$

В таблицах 4 и 5 указаны значения δ для nW, nS и nI. Поскольку nS и nI очень хорошо коррелируют с nS, три коэффициента дисперсии примерно одинаковы.

Таблица 4. Коэффициент дисперсии в рядах слов, предложений и межпунктов в указаны романы Толкиена, Льюиса и Макдональда.

Роман	Слова	Предложения	Взаимосвязь	Средний
Хоббит	0,49	0,48	0,50	0,49
Властелин колец	0,34	0,36	0,34	0,35
Сильмариллион	0,73	0,86	0,80	0,80
Письма-болваны	0,07	0,17	0,14	0,13
Космическая трилогия	0,60	0,61	0,58	0,59
Хроники Нарнии	0,16	0,20	0,20	0,19
За спиной северного ветра	0,54	0,61	0,56	0,57
Фантастес: сказочный роман для мужчин и женщин	0,66	0,73	0,63	0,67
Лилит: Романтика	0,43	0,53	0,46	0,47
Принцесса и гоблин	0,53	0,75	0,62	0,64

Таблица 5. Коэффициент дисперсии в рядах слов, предложений и межпунктов в указанные романы.

Роман	Слова	Предложения	Взаимосвязь	Средний
Приключения Оливера Твиста	0,31	0,33	0,32	0,32
Дэвид Копперфилд	0,37	0,38	0,37	0,37
Холодный дом	0,28	0,31	0,30	0,30
Повесть о двух городах	0,52	0,57	0,52	0,54
Наш общий друг	0,26	0,29	0,27	0,27
Мартин Иден	0,29	0,33	0,29	0,31
Собака Баскервилей	0,26	0,29	0,25	0,27
Питер Пэн	0,29	0,41	0,33	0,34

В Нарнии δ = 0,16, в Лорде δ = 0,34 и в Трилогии δ = 0,60. Обратим также внимание на минимальное значение δ = 0,07 в The Screwtape Letters (Screwtape).

Общее среднее значение (слова, предложения и интерпункты, смешанные вместе) равно < δ >= 0,44 и стандартное отклонение σδ = 0,18. Таким образом, Screwtape практически больше чем 2 × σδ от среднего значения, как и Сильмариллион с другой стороны, а Нарния находится примерно на расстоянии 1,5 × σδ. Напротив, «Трилогия», «Лорд» и «Хоббит» (Хоббит) находятся в пределах 1 × σδ.

Судя по этим результатам, кажется, что Льюис разработал главы «Нарнии» и «Безумной ленты». с почти равномерным распределением слов, предложений и взаимопунктов, весьма вероятно

Machine Translated by Google

из-за целевой аудитории в Нарнии (т.е. детей) и художественного инструмента «письма», используемого в «Винтапе». В «Трилогии» дизайн кажется совсем другим (δ = 0,60, в пределах 1 × σδ), вероятно, из-за развития повествуемой научно-фантастической истории.

Толкин действовал иначе, чем Льюис, потому что он, кажется, проектировал главы более хаотично и в пределах 1 × σδ, как показывают «Хоббит» и «Лорд». Исключение составляет опубликованный посмертно «Сильмариллион», представляющий собой текст далеко не «роман».

Наконец, обратите внимание, что романы Макдональда демонстрируют более однородные ценности, очень похожие на «Хоббит» и «Трилогию», а также на другие романы, перечисленные в таблице 5.

В заключение, анализ ряда слов, предложений и вставок в каждой главе не указывает на вероятные связи между Толкином, Льюисом и Макдональдом. Каждый автор структурировал использование слов, предложений и знаков препинания по разным планам, которые различались не только у разных авторов, но и в разных романах одного и того же автора.

Однако существуют лингвистические переменные, которые — как мы сообщали для современных и древних литературных текстов — не разрабатываются и не управляются авторами сознательно; следовательно, эти переменные являются лучшими кандидатами для выявления скрытых математических/статистических связей между текстами. В следующем разделе мы начнем иметь дело с этими переменными с конкретной целью сравнения Толкина и Льюиса, хотя это сравнение проводится в более общей схеме авторов, упомянутых в разделе 2.

4. Поверхностные переменные глубокого языка

Мы начинаем исследовать четыре стохастические переменные, которые мы назвали глубокими языковыми переменными, следуя нашей общей статистической теории алфавитных языков [9–11]. Во избежание возможных недоразумений эти переменные и производные от них лингвистические каналы относятся к «поверхностной» структуре текстов, а не к «глубинной» структуре, упомянутой в когнитивной теории.

В отличие от переменных, изученных в разделе 3, глубокие языковые переменные, скорее всего, возникли в результате бессознательного замысла. Как показано в [9–11], они выявляют связи между текстами, находящиеся далеко за пределами сознания авторов; поэтому геометрическое представление текстов [10] и тонкая настройка лингвистических каналов [11] являются инструментами, лучше подходящими для выявления связей. Они также могут указывать на влияние одного автора на другого.

Мы определили количество символов на главу nC и количество IP на главу, а четырьмя глубокими языковыми переменными являются [9] количество символов CP: nIP,

$$КП = \frac{НК}{\text{северо-запад}} \tag{2}$$

количество слов в предложении PF:

$$ПФ = \frac{\text{северо-запад}}{НС} \tag{3}$$

количество вставок на слово, называемое интервалом слова, IP:

$$ИП = \frac{\text{ня}}{\text{северо-запад}} \tag{4}$$

количество межсловных интервалов в предложении MF:

$$МФ = \frac{НПВ}{НС} \tag{5}$$

Уравнение (5) можно записать также как MF = PF/IP.

В таблицах 6–9 представлены средние значения и стандартное отклонение этих переменных. Обратите внимание, что эти значения были рассчитаны путем взвешивания каждой главы по количеству слов, чтобы короткие главы не имели такого же веса, как и длинные. Например, в первой главе книги «Лорд» 10097 слов; следовательно, его статистический вес составляет 10097/472173 0,021, а не 1/62 0,016. Обратите также внимание, что коэффициент дисперсии, использованный в разделе 2, был рассчитан путем взвешивания каждой главы 1/62, а не 10097/472173, чтобы визуально соответствовать ряду, изображенному на рисунке 1.

Machine Translated by Google

Таблица 6. Джон Р.Р. Толкин. Среднее значение и стандартное отклонение (в скобках) <CP>, <PF>, <ИП>, <МФ> в указанных романах. Среднее и стандартное отклонение были рассчитаны по формуле взвешивая каждую главу по количеству слов.

Роман	Сп	Пф	ИП	Мф
Хоббит	4,11 (0,06)	16,54 (2,03)	7,93 (0,98)	2,09 (0,12)
Властелин колец	4,04 (0,08)	13,92 (1,98)	6,68 (0,51)	2,08 (0,20)
Сильмариллион	4,23 (0,08)	31,21 (5,32)	8,58 (0,58)	3,62 (0,42)

Таблица 7. Клайв С. Льюис. Среднее значение и стандартное отклонение (в скобках) <CP>, <PF>, <ИП>, <МФ> в указанных романах. Среднее и стандартное отклонение были рассчитаны по формуле взвешивая каждую главу по количеству слов.

Роман	Сп	Пф	ИП	Мф
Письма-болваны	4,36 (0,12)	23,95 (3,82)	9,72 (1,00)	2,47 (032)
Космическая трилогия	4,21 (0,16)	15,25 (3,05)	7,47 (0,98)	2,03 (0,22)
Хроники Нарнии	4,09 (0,09)	13,97 (1,94)	7,10 (0,89)	1,97 (0,15)

Таблица 8. Джордж Макдональд. Среднее значение и стандартное отклонение (в скобках) <CP>, <PF>, <ИП>, <МФ> в указанных романах. Среднее и стандартное отклонение были рассчитаны по формуле взвешивая каждую главу по количеству слов.

За спиной северного ветра	3,85 (0,11)	15,52 (3,34)	6,76 (0,77)	2,29 (0,35)
Фантастес: сказочный роман для мужчин и женщин	4,20 (0,12)	21,15 (3,58)	6,43 (0,49)	3,28 (0,45)
Лилит: Романтика	4,11 (0,25)	15,87 (3,89)	6,43 (0,57)	2,45 (0,42)
Принцесса и гоблин	4,08 (0,14)	17,81 (4,05)	7,09 (1,22)	2,46 (0,53)

Таблица 9. Другие авторы. Среднее значение и стандартное отклонение (в скобках) <CP>, <PF>, <ИП>, <МФ> в указанных романах. Среднее и стандартное отклонение были рассчитаны по формуле взвешивая каждую главу по количеству слов.

Роман	<КП>	<ПФ>	<IP>	<ПФ>
Приключения Оливера Твиста	4,23 (0,09)	18.04 (3,13)	5,70 (0,52)	3,16 (0,34)
Дэвид Копперфилд	4,04 (0,12)	18,83 (2,50)	5,61 (0,30)	3,35 (0,33)
Холодный дом	4,23 (0,14)	16,95 (2,21)	6,59 (0,49)	2,57 (0,21)
Повесть о двух городах	4,26 (0,12)	18,27 (4,24)	6,19 (0,46)	2,93 (0,46)
Наш общий друг	4,22 (0,12)	16,46 (2,01)	6,03 (0,37)	2,73 (0,27)
Гордость и предубеждение	4,40 (0,14)	21,31 (5,02)	7,16 (0,46)	2,95 (0,46)
Ярмарка тщеславия	4,63 (0,08)	21,95 (3,67)	6,73 (0,63)	3,25 (0,39)
Моби Дик	4,52 (0,16)	23,82 (7,44)	6,45 (0,99)	3,64 (0,80)
Мельница на Флоссе	4,29 (0,13)	23,84 (4,99)	7,09 (0,69)	3,35 (0,48)
Приключения Алисы в стране чудес	3,96 (0,08)	17,19 (3,20)	5,79 (0,55)	2,95 (0,28)
Приключения Гекльберри Финна	3,85 (0,10)	19,39 (3,12)	6,63 (0,67)	2,94 (0,48)
Книга джунглей	4,11 (0,09)	16,46 (3,09)	7,14 (0,53)	2,29 (0,30)
Война миров	4,38 (0,18)	19,22 (4,13)	7,67 (0,92)	2,48 (0,31)
Чудесный волшебник страны Оз	4,02 (0,10)	17,90 (2,23)	7,63 (0,64)	2,34 (0,15)
Собака Баскервилей	4,15 (0,12)	15,07 (3,16)	7,83 (0,94)	1,91 (0,22)
Питер Пэн	4,12 (0,09)	15,65 (3,98)	6,35 (0,92)	2,44 (0,37)
Мартин Иден	4,32 (0,13)	15,61 (2,71)	6,76 (0,64)	2,30 (0,26)

Machine Translated by Google

В частности, пусть M — количество образцов (т. е. глав), тогда среднее значение <PF> определяется выражением

$$<\text{ПФ}>= \sum_{k=1}^{M} \text{ПФ},k \times \text{нВт},k/\sum_{k=1}^{M} \text{нВ},k \quad (6)$$

Поэтому заметим, чтобы не ввести вас в заблуждение, что $<PF>\neq \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} PF,k/\sum_{k=1}^{M} \text{нВ},k/\sum_{k=1}^{M} \text{нС},k=B/C.$

Другими словами, <PF> не определяется путем деления общего количества слов W на общее количество предложений S или присвоения веса 1/M каждой главе. Три значения совпадают только в том случае, если все текстовые блоки содержат одинаковое количество слов и одинаковое количество предложений, чего не было. Те же наблюдения применимы ко всем остальным переменным.

Следующие характеристики можно наблюдать из таблиц 6–9. Лорд и Нарния имеют один и тот же <PF>. Сильмариллион заметно отличается от Лорда и Хоббита, что согласуется с разным коэффициентом дисперсии. Screwtape заметно отличается от Нарнии и Трилогии. Существует большая однородность в романах Дикке на и большая однородность в <CP> во всех романах.

В следующих разделах мы используем <PF>, <IP> и <MF> для расчета интересных показателей, связанных с кратковременной памятью читателей.

5. Расширенная кратковременная память писателей/читателей и индекс универсальной читаемости.

В этом разделе мы имеем дело с лингвистическими переменными, которыми, скорее всего, не управляют сознательно писатели, которые, конечно же, действуют также и как читатели своего собственного текста. Сначала мы сообщаем о результатах, касающихся расширенной кратковременной памяти, а затем о результатах, касающихся универсального индекса читаемости. Обе темы посвящены буферам кратковременной памяти человека.

5.1. Расширенная кратковременная память и фактор

множественности. В [12,13] мы предположили, что кратковременная память человека чувствительна к двум независимым переменным, которые, очевидно, последовательно задействуют два буфера кратковременной памяти, составляющие то, что мы назвали расширенная кратковременная память (E–STM). Первый буфер моделируется в соответствии с количеством слов между двумя последовательными вставками, т.е. переменной IP, интервалом слов, который соответствует закону Миллера 7 ± 2 [14]; второй буфер моделируется в соответствии с количеством интервалов слов IP, содержащихся в предложении, т. е. переменной MF, в диапазоне примерно от 1 до 7.

В [13] мы исследовали закономерности (зависящие от размера двух буферов), определяющие количество предложений, которые теоретически можно записать в E–STM заданной емкости. Затем эти закономерности сравнивались с количеством предложений, действительно встречающихся в романах итальянской и английской литературы. Мы обнаружили, что большинство авторов пишут для читателей с короткими буферами памяти и, следовательно, вынуждены повторно использовать шаблоны предложений для передачи нескольких значений. Это поведение количественно определяется коэффициентом множественности α, определяемым как соотношение между количеством предложений в романе и количеством предложений, теоретически разрешенных двумя буферами, в зависимости от IP и MF.

Мы обнаружили, что $\alpha > 1$ более вероятно, чем $\alpha < 1$ и часто $\alpha \gg 1$. В последнем случае писатели многократно используют один и тот же шаблон количества слов. В немногих романах показано $\alpha < 1$; в этом случае писатели не используют некоторые или большинство из них. Значения α, обнаруженные в изучаемых в настоящее время романах, представлены в таблицах 10 и 11.

Таблица 10. Коэффициент множественности α, индекс универсальной читабельности <GU> и количество учебных лет Y в указанных романах Толкина, Льюиса, Макдональда.

Роман	α	<ГУ>	Да
Хоббит	39,4	52,4	9,9
Властелин колец	368,1	64,2	7.4
Сильмариллион	0,2	38,7	>13

Machine Translated by Google

Таблица 10. Продолжение.

Роман	α	<ГУ>	Да
Письма-болваны	1,4	33,5	>13
Космическая трилогия	186,3	56,2	9,0
Хроники Нарнии	297,7	61,1	7,9
За спиной северного ветра	26,3	63,9	7,5
Фантастес: сказочный роман для мужчин и женщин	24,3	56,6	8,9
Лилит: Романтика	1,4	63,0	7,5
Принцесса и гоблин	8,5	58,2	8.4

Таблица 11. Коэффициент кратности α, индекс универсальной читабельности < ГУ > и количество учебных лет в указанные романы английской литературы.

Роман	α	<ГУ>	Да
Приключения Оливера Твиста	9.46	63,19	7,5
Дэвид Копперфилд	12.63	64,78	7.2
Холодный дом	56,98	58,74	8.3
Повесть о двух городах	11.89	59,91	8.0
Наш общий друг	43,41	62,68	7,6
Гордость и предубеждение	5.20	50,33	10.4
Ярмарка тщеславия	5.26	49,74	10,5
Моби Дик	1,56	52,63	9,9
Мельница на Флоссе	2.17	50,22	10,5
Приключения Алисы в стране чудес	2,90	59,27	8.1
Приключения Гекльберри Финна	7.05	60,42	8.0
Книга джунглей	14.10	57,59	8,6
Война миров	6,72	49.05	10,8
Чудесный волшебник страны Оз	7.02	53,83	9,5
Собака Баскервилей	43,87	54,87	9.2
Питер Пэн	13.07	63,60	7,5
Мартин Иден	46,33	58,53	8.2

5.2. Универсальный индекс читаемости

В ссылке [14] мы предложили универсальный индекс читаемости, определяемый формулой

$$ГУ = 89–10кКП + 300/ПФ-6(ИП–6) \quad (7)$$

$$k = < CP,ITA >/< CP,Eng > \quad (8)$$

В уравнении (8) < Ср,ITA >= 4,48, < Ср,ENG >= 4,24. Используя уравнения (7) и (8), среднее значение <kCP> любого языка должно быть равно значению в итальянском языке, а именно 4,48. Обоснование этого выбора является то, что СР — это типичный параметр языка. что, если бы его не масштабировать, привело бы к смещению ГУ без реальной количественной оценки сложности чтения для читатели, которые на своем языке в среднем привыкли читать более короткие или длинные слова чем в итальянском. Таким образом, такое масштабирование позволяет избежать изменения ГУ по той единственной причине, что В языке в среднем слова короче (как в английском) или длиннее, чем в итальянском. В любом случае, Ср влияет на уравнение (7) гораздо меньше, чем PF или IP.

Значения <GU> — рассчитываются как остальные лингвистические переменные, т. е. путем взвешивания главы (образцы) по количеству слов – приведены в таблицах 10 и 11.

Machine Translated by Google

У читателя может возникнуть соблазн вычислить уравнение (7), введя средние значения, представленные в таблицах 6–9. Это, конечно, можно сделать, но следует отметить, что полученные таким образом значения всегда меньше или равны (следовательно, являются нижними границами) средним значениям, рассчитанным по выборкам (см. Приложение А). Например, для Лорда вместо 64,9 мы получим 61,9.

Интересно «расшифровать» эти средние значения в минимальное количество учебных лет Y, необходимое для того, чтобы сделать роман «легким» для чтения, в соответствии с итальянской школьной системой, которая считается эталонной, см. рисунок 1 из [15].]. Результаты также приведены в таблицах 10 и 11.

5.3. Обсуждение

Из результатов, представленных в предыдущих подразделах, можно сделать несколько интригующих

наблюдений. (а). Сильмариллион с α = 0,2 весьма отличается от других произведений Толкина.

Математически это связано с его большими <MF> = 3,62 и < IP >= 8,58. На практике количество теоретических предложений, разрешенных E-STM для чтения этого текста, всего в 1/α = 5 раз превышает количество шаблонов предложений, фактически используемых в тексте. Читателю необходим мощный E–STM и способность к чтению, поскольку GU = 38,7 и Y > 13. Этого не происходит у Хоббита (α = 39,4, GU = 52,4, Y =9,9) и Лорда (α = 368,1, GU = 64,2) . , Y = 7,4), в котором Толкин много раз использует шаблоны, особенно в «Лорде». (б). Лорд

и Нарния демонстрируют очень большие значения, α = 368,1 и α = 297,7, и очень похожие GU и школьные годы: GU = 64,2, Y = 7,4 и GU = 61,1, Y = 7,9 соответственно.

Шаблоны предложений многократно используются Льюисом в этом романе, но не в «Винтапе» (α = 1,4), который труднее читать (GU = 33,5) и требует большего количества лет обучения, Y > 13.

Более того, у Лорда и Нарнии есть практически то же < PF > 14. (в). В целом Нарния ближе к Лорду, чем к Трилогии, хотя количество слов и предложений в Трилогии и Нарнии весьма схоже (табл. 1). Эта разница между Трилогией (GU = 56,2, Y = 9) и Нарнией (GU = 61,1, Y = 7,9) может зависеть от разных читателей: детей для Нарнии и взрослых для Трилогии, с разными способностями к чтению, как указывает GU . (д). В романах Макдональда значения α и GU очень похожи на значения других

Английские романы.

(е). Обратите внимание на однородность романов Диккенса, которые требуют примерно Y = 7 ~ 8 лет работы.

индекс школы и читабельности < ГУ >= 59 ~ 65.

В заключение, «Лорд» и «Нарния» — это романы, которые адресованы читателям с очень похожими буферами E-STM, повторно используют шаблоны предложений аналогичным образом, содержат одинаковое количество слов в предложении и требуют таких же навыков чтения и школьных лет по сравнению с другими романами автора. Толкин и Льюис. Математические связи между Лордом и Нарнией будут рассмотрены в следующем разделе, где четыре параметра глубокого языка используются для геометрического представления текстов.

6. Геометрическое представление текстов

Средние значения таблиц 6–9 можно использовать для оценки того, насколько тексты «близки» или математически похожи в декартовой координатной плоскости, путем определения линейных комбинаций переменных глубокого языка. Затем тексты моделируются как векторы; представление подробно обсуждается в [9,10] и кратко напомина- ется здесь. Расширение этого геометрического представления текстов позволяет вычислить вероятность того, что один текст можно спутать с другим, что является двумерным расширением проблемы, обсуждаемой в [16]. Значения условной вероятности между двумя текстами (авторами) можно считать индексом, указывающим, кто на кого повлиял.

Machine Translated by Google

6.1. Векторное представление текстов

Рассмотрим следующие шесть векторов указанных компонентов глубокого языка. переменные: R1 = (< ЦП >, < ПФ>), R2 = (< МФ>, < ПФ>), R3 = (< ИП >, < ПФ>), R4 = (<CP> , <MF>) , R5 = (< ИП >, < МФ>), R6 = (<IP> , <CP>) и их результирующая векторная сумма:

$$p = \sum_{k=1}^{6} Pk = x \; я + й \; _{дк} \quad (9)$$

Выбор того, какой параметр (x или y) представляет компоненту по осям абсцисс и ординат, не важен, поскольку после того, как выбор сделан, от него будут зависеть численные результаты, а не относительные сравнения и общие выводы.

В первом квадранте декартовой координатной плоскости два текста, вероятно, математически связаны — они показывают близкие конечные точки вектора (9) — если их относительное пифагорово расстояние мало. Небольшое расстояние означает, что тексты имеют схожую математическую структуру в соответствии с четырьмя глубокими языковыми переменными.

Учитывая компоненты вектора x и y уравнения (9), мы получаем диаграмму рассеяния, показанную на рисунке 2, где X и Y — нормированные координаты, рассчитанные путем установки Лорда в начале координат (X = 0, Y = 0) и Сильмариллиона в (X = 1, Y = 1), согласно линейным преобразованиям:

$$X = \frac{x - xЛорд}{xСильма - xЛорд} \quad (10)$$

$$X = \frac{й - йЛорд}{уСильма - уЛорд} \quad (11)$$

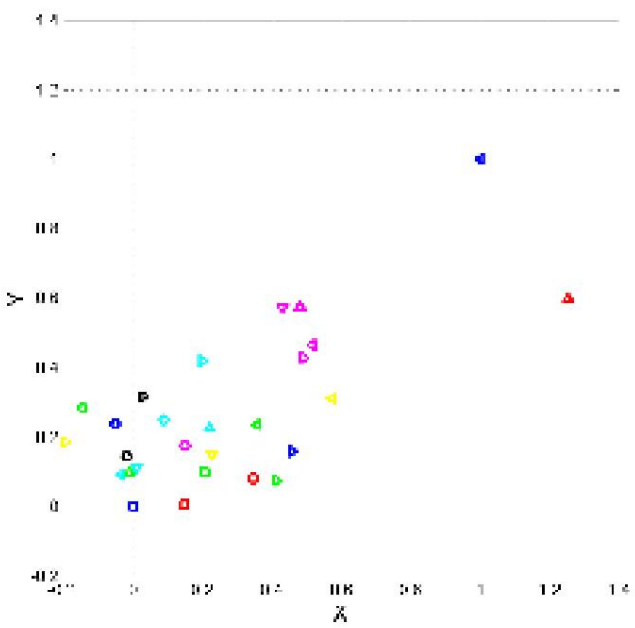


Рисунок 2. Нормализованные координаты X и Y конечной точки вектора (5), такие, что Лорд, синий квадрат, находится в точке (0,0), а Сильмариллион, синий треугольник, направленный влево, находится в точке (1,1). Нарния: Красная площадь; Трилогия: красный круг; Хоббит: синий треугольник, направленный вправо; Винтовая лента: красный треугольник, направленный вверх; Сзади: голубой треугольник, направленный влево; Лилит: голубой треугольник, направленный вниз; Сзади: голубой треугольник, направленный влево; Фантастес: голубой треугольник, направленный вправо; Принцесса: голубой треугольник, направленный вверх; Оливер: синий круг; Дэвид: зеленый круг; Сказка: голубой круг; Укулейка: пурпурный круг; Взаимное: черный круг; Гордость: пурпурный треугольник, направленный вправо; Vanity: пурпурный треугольник, направленный влево; Моби: пурпурный треугольник, направленный вниз; Мельница: пурпурный треугольник, направленный вверх; Алиса: желтый треугольник, направленный вправо; Джунгли: желтый треугольник, направленный вниз; Война: желтый треугольник, направленный вправо; Оз: зеленый треугольник, направленный влево; Баск: зеленый треугольник, направленный вправо; Питер: зеленый треугольник, направленный вверх; Мартин: зеленый квадрат; Финн: черный треугольник, направленный вправо.

< 0,2

Machine Translated by Google

Из рисунка 2 мы можем заметить, что «Сильмариллион» и «Винтапи» явно очень далеки от всех других рассмотренных текстов, что отмечает их поразительное разнообразие, как уже отмечалось; поэтому в последующих анализах мы ими пренебрегаем. Более того, Прайд, Вэнити, Моби и Флосс сгруппированы вместе и далеки от Трилогии, Нарнии и Лорда; поэтому в дальнейшем анализе мы не будем их далее рассматривать.

Полный набор пифагорейских расстояний d между парами текстов приведен в Приложении Б. Эти данные синтетически описывают близость текстов и могут указать литературоведам на связи между текстами, которые ранее не рассматривались.

На рисунке 3 показан пример этих расстояний относительно Лорда, Нарнии и Трилогии. Обращаясь к случаям, когда d < 0,2, можно заметить следующее: (а). Ближайшие к Лорду тексты — «Нарния», «Бэк», «Лилит», «Взаимный» и «Питер». (б). Наиболее близкие к Нарнии тексты — Лорд, Лилит, Блик, Мартин и Питер. (с). Наиболее близкие к Трилогии тексты — «Хоббит», «Мартин» и «Питер».

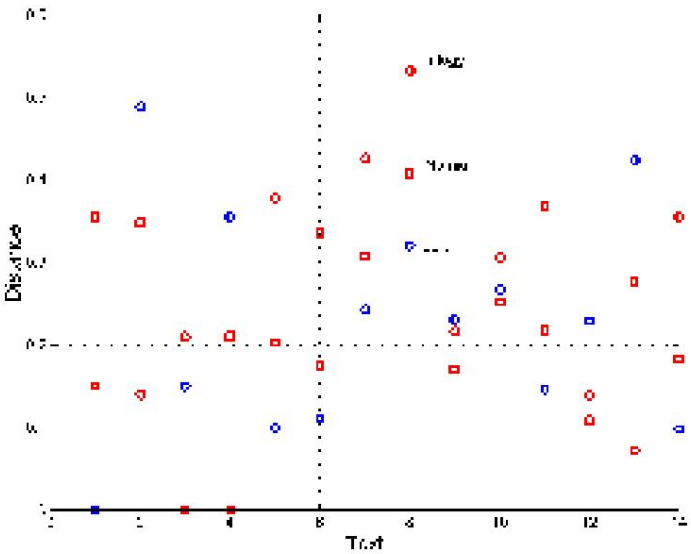


Рисунок 3. Пифагорейское расстояние d между парами текстов, посвященных Господу (расстояния, относящиеся к этому случаю, отмечены синими кружками), Нарнии (красные квадраты) и Трилогии (красные кружки). Ключи: Лорд 1, Хоббит 2, Нарния 3, Трилогия 4, Назад 5, Лилит 6, Оливер 7, Дэвид 8, Блек 9, Сказка 10, Взаимный 11, Мартин 12, Баск 13, Питер 14.

Помимо близости с более ранними романами, Лорд и Нарния демонстрируют близость друг к другу и к двум романам Макдональда.

Однако эти замечания относятся к «среднему» отображению векторов, конечная точка которых зависит только от средних значений. Стандартное отклонение четырех переменных глубокого языка, представленное в таблицах 6–9, действительно приводит к разбросу данных; поэтому в следующем подразделе мы изучаем и обсуждаем этот вопрос, вычисляя вероятность (называемую вероятностью «ошибки») того, что один текст математически можно перепутать с другим.

6.2. Вероятность ошибки: индекс для оценки того, кто на кого повлиял

Помимо вектора R уравнения (9) — благодаря средним значениям — мы можем рассмотреть другой вектор из-за стандартного отклонения четырех переменных глубокого языка, которое добавляется к R. ρ , + В этом случае окончательный случайный вектор, описывающий текст, определяется выражением

$$T = P + \rho \quad (12)$$

Теперь, чтобы получить некоторое представление об этом новом описании, мы рассмотрим площадь круга. с центром в конечной точке R.

$$= 0,5 \times (+)$$

$$=$$

–

Machine Translated by Google

Фиксируем величину (радиус) ρ следующим образом. Сначала мы добавляем дисперсию глубокого языковые переменные, определяющие компонентных и у R, пусть это σи, $\sigma^2_{x,}$ σ^2_y. Затем, вычисляем среднее значение $\sigma^{2\,2\,2 = 0{,}5 \times \sigma + \sigma y}_{\rho}$ x наконец, положим

$$\rho = \sigma\rho \tag{13}$$

Теперь, поскольку при вычислении координат x и y Если переменная глубокого языка может суммироваться дважды или более, мы добавляем ее стандартное отклонение (называемое сигмой) дважды или более раз перед возведением в квадрат. Например, в компоненте x IP появляется три раза; следовательно, его вклад в общую дисперсию по оси x в 9 раз превышает дисперсию, рассчитанную по формуле стандартное отклонение указано в таблицах 6–9. Например, для Лорда это 9 × 0,512 . После этих расчетов значения 1-сигма-окружности преобразуются в нормированные координаты X, Y согласно уравнениям (10) и (11).

На рисунке 4 показан важный пример с участием Лорда, Нарнии, Трилогии, Бэк и Питера. Мы видим, что Лорда почти полностью можно спутать с Нарнией, частично с Трилогией, но не наоборот. Лорда также можно спутать с Питером и Бэком, что указывает на сильную связь с этими более ранними романами.

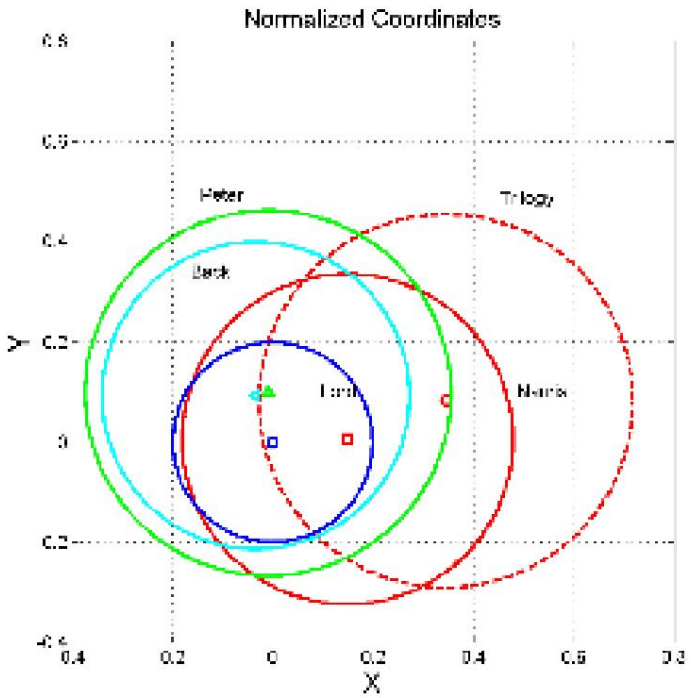


Рисунок 4. Нормализованные координаты X и Y конечной точки вектора (5) и кругов с 1 сигмой, таких, что Лорд, синий квадрат, находится в точке (0,0), а Сильмариллион, синий треугольник, направленный влево, равен (1,1).). Лорд: синий квадрат (синий круг 1–сигма); Нарния: красный квадрат (красный круг 1–сигма); Трилогия: красный кружок (красный пунктирный кружок 1–сигма); Сзади: голубой треугольник, направленный влево (голубой круг 1–сигма); Питер: зеленый треугольник, направленный вверх (зеленый круг 1–сигма).

Теперь мы можем оценить (условную) вероятность того, что один текст перепутается с другим, рассчитав соотношение площадей. Эта процедура корректна, если предположить, что двумерная плотность нормированных координат ρX, ρY с центром в R является однородной. Приняв эту гипотезу, мы можем рассчитать вероятности как отношение площадей [17,18].

Гипотезу о существенной однородности вокруг ( ) R следует обосновать, отметив, что = (/) координаты распределены в соответствии с логарифмически нормальной двумерной плотностью, поскольку логарифм четырех переменных глубокого языка, которые объединяются в уравнении (9) (/) ( ) линейно, может быть как гауссиан. Для центральной предельной теоремы следует ожидать = (/) ( ) приблизительно гауссовой линейным значениям, но со значительно большей

Machine Translated by Google

стандартное отклонение, что и у одиночных переменных. Поэтому в районе, близком к P, двумерная функция плотности не должна иметь пика, следовательно, моделирование однородной плотности.

Теперь мы можем вычислить следующие вероятности. Пусть A — общая площадь двух кругов 1–сигма (т. е. площадь, пропорциональная совместной вероятности двух текстов), пусть A1 будет площадь 1–сигмового круга текста 1 и A2 — площадь 1–сигмового круга текста 2. Теперь, поскольку вероятности пропорциональны площадям, получаем следующие соотношения:

$$\frac{A}{A1} = \frac{P(A1, A2)}{П(A1)} = \frac{П(A2/A1)П(A1)}{П(A1)} = P(A2/A1) \quad (14)$$

$$\frac{A}{A2} = \frac{P(A1, A2)}{P(A2)} = \frac{П(A1/A2)П(A2)}{P(A2)} = P(A1/A2) \quad (15)$$

Другими словами, A/A1 дает условную вероятность P(A2/A1) того, что часть текста 2 можно спутать (или «содержать») с текстом 1; A/A2 дает условную вероятность P(A1/A2), что часть текста 1 можно спутать с текстом 2. Обратите внимание, что эти условные вероятности зависят от расстояния между двумя текстами и от радиусов 1–сигма (Приложение C).

Конечно, эти совместные вероятности можно распространить на три и более текстов, например, в По рисунку 4 мы могли бы рассчитать площадь, разделяемую Лордом, Нарнией и Трилогией, и соответствующую совместную вероятность, что не проводится в настоящей статье.

Мы считаем, что условные вероятности и визуальное отображение кругов 1–сигма дать полезные подсказки для установления возможных скрытых связей между текстами и, может быть, даже между авторами, поскольку задействованные переменные ими сознательно не управляются.

В Таблице 12 условная вероятность P(A2/A1) указана в столбцах; поэтому, A1 относится к тексту, указанному в верхнем ряду. P(A1/A2) указывается в строках; поэтому, A2 относится к тексту, указанному в левом столбце.

Таблица 12. Условная вероятность между указанными романами. P(A2/A1) указывается в столбцах; следовательно, A1 относится к тексту, указанному в верхнем ряду. P(A1/A2) указывается в строках; поэтому, A2 относится к тексту, указанному в левом столбце. Например, если считать Лорда текстом 1 (столбец 1 Таблица 12) и Нарния в виде текста 2 (строка 3), мы находим P(A2/A1) = 0,974 и наоборот. Если предположить, что Нарния в качестве текста 1 (столбец 3) и Лорда в качестве текста 2 (строка 1), мы находим P(A2/A1) = 0,356.

	Роман Лорд Хоббит Нарния Трилогия Назад Лилит Оливер Дэвид Bleak Tale Mutual Мартин Баск Питер													
1	Лорд 1 Хоббит	0,031	0,356	0,142	0,423	0,511	0,277	0,041	0,307	0,231	0,619	0,301	0,078	0,299
2	0,099 Нарния 0,974		0,421	0,731	0,171	0,225	0,074	0	0,592	0,376	0,060	0,665	0,833	0,227
3	Трилогия 0,498	1 0,354		0,550	0,647	0,781	0,489	0,166	0,927	0,625	0,886	0,949	0,462	0,602
4	Назад Лилит	0,786	1 0,704		0,400	0,510	0,297	0	0,921	0,608	0,473	0,978	0,908	0,421
5		0,124	0,559	1 0,270		0,997	0,866	0,796	0,763	0,692		0,566	0,179	0,707
6	Оливер 1 0,891	0,121	0,498	0,254	1 0,735		0,741	0,559	0,762	0,661		0,546	0,169	0,521
7	0,352 Дэвид 0,024	0,029	0,227	0,108	0,466	1 0,540		0,913	0,444	0,579	1 1	0,239	0,043	0,378
8	Блеклый 0,307	0	0,035	0	0,195	0,186	1 0,416		0,029	0,173	0,917	0,001	0	0,168
9	Сказка 0,330	0,182	0,339	0,264	0,323	0,437	0,350	1 0,051		0,598	0,262	0,558	0,208	0,296
10	Взаимный 0,390	0,165	0,327	0,248	0,417	0,541	0,650	0,427	1 0,852		0,526	0,484	0,176	0,385
11	Мартин 0,490 Баск	0,012	0,204	0,085	0,266	0,361	0,454	0,285	0,331	1 0,342		0,205	0,031	0,188
12	0,250 Питер 1	0,333	0,565	0,455	0,389	0,509	0,307	0,004	0,906	0,551	0,774		0,396	0,384
13		0,826	0,545	0,838	0,244 1	0,312 1	0,110	0	0,669	0,397	1 0,529	1 0,785		0,289
14		0,234	0,736	0,403			0,996	0,968	0,988	0,904	0,160 1	0,790	1 0,300	1

Обратите внимание, что P(A2/A1) = 1 означает A = A1; поэтому текст 1 можно полностью спутать с текст 2. P(A1/A2) = 1 означает A = A2; поэтому текст 2 можно полностью спутать с текстом 1.

Например, если предположить, что Лорд — это текст 1 (столбец 1 Таблицы 12), а Нарния — это текст 2 (строка 3), находим P(A2/A1) = 0,974 и наоборот. Если мы примем Нарнию как текст 1 (столбец 3) и Господи, как текст 2 (строка 1), мы находим P(A2/A1) = 0,356. Эти данные указывают на то, что Лорд может быть путают с Нарнией с вероятностью, близкой к 1, но не наоборот. Другими словами, в банк данных, рассматриваемый в этой статье, если машина случайным образом извлекает главу из Лорда, другая машина, не подозревая об этом выборе, могла бы приписать его Лорду, но тоже с уменьшением вероятность Бэ ку, Питеру, Нарнии и Лилит.

Machine Translated by Google

Напротив, если текст извлечен из Нарнии, то его скорее приписывают Питер или Трилогия , чем Лорд или другие тексты.

Мы думаем, что эти условные вероятности указывают на то, кто на кого больше повлиял . Другими словами, Толкин больше повлиял на Льюиса, чем наоборот.

Теперь мы можем определить синтетический параметр, который показывает, насколько в среднем два текста могут быть ошибочно перепутаны друг с другом. Параметром является средняя = (/) ( ) + (/) ( ) условная вероятность (аналогично тому, что используется в [16]):

$$= ( ) = ( ) = 0,5$$

$$pe = P(A2/A1)P(A1) + P(A1/A2)P(A2) = 0,5 \times [(/) + (/)] \quad (16)$$

Теперь, = 0 поскольку при сравнении двух текстов можно предположить P(A1) = P(A2) = 0,5, получаем

$$pe = 0,5 \times [P(A2/A1) + P(A1/A2)] \quad (17)$$

$$= 1$$

Если pe = 0, между двумя кругами 1–сигма нет пересечения. Эти два текста нельзя перепутать; следовательно, нет никакой математической связи с глубинными параметрами языка (это происходит с Болтапом и Сильмариллионом, которые можно спутать друг с другом, но не с другими текстами). Если pe = $= 0,5$ 1, два текста могут быть полностью перепутаны, и два круга 1–сигма совпадают. В приложении D приведены значения pe для всех парромано $> 0,5$ 0,5 .

Теперь, просто для грубого анализа, разумно принять pe = 0,5 в качестве эталонного порога, т. е . вероятности выпадения орла или решки при подбрасывании честной монеты. Если pe > 0,5, то не случайно два текста можно спутать; если pe $> 0,5$ 0,5, то два текста вряд ли можно перепутать.

Чтобы визуализировать pe , на рисунке 5 изображен pe , когда текст 1 — Lord (столбец 1 таблицы 12), Нарния. (столбец 3) или Трилогия (столбец 4). Заметим, что pe > 0,5 в следующих случаях: (a). Лорд как текст 1: Нарния, Назад, Лилит, Взаимный, Питер. (б). Нарния как текст 1: Лорд, Трилогия, Назад, Лилит, Унылый, Взаимный, Мартин, Питер. (c). Трилогия как текст 1: Хоббит, Нарния, Блик, Мартин, Баск.

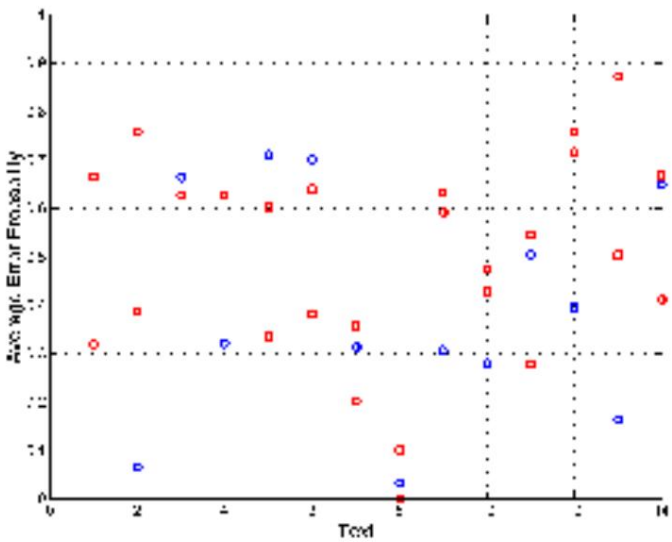


Рисунок 5. Вероятность ошибки pe в сравнении с текстом 2. Лорд (вероятности, относящиеся к этому случаю, отмечены синими кружками), Нарния (красные квадраты) и Трилогия (красные кружки). Текстовый ключ : Лорд 1, Хоббит 2, Нарния 3, Трилогия 4, Назад 5, Лилит 6, Оливер 7, Дэвид 8, Блек 9, Сказка 10, Взаимный 11, Мартин 12, Баск 13, Питер 14.

Мы можем повторить, что Толкин (Лорд) кажется в значительной степени связанным с Льюисом (Нарния), Макдональдом (Бэк, Лилит) и Барри (Питер), но не с романами Дикке на, где , наоборот , Льюис кажется связанным.

Machine Translated by Google

В следующем разделе будут выделены четыре глубокие языковые переменные, которые следует рассмотреть. языковые каналы, существующие в текстах. Этот анализ мы назвали «тонкой настройкой» тексты[11].

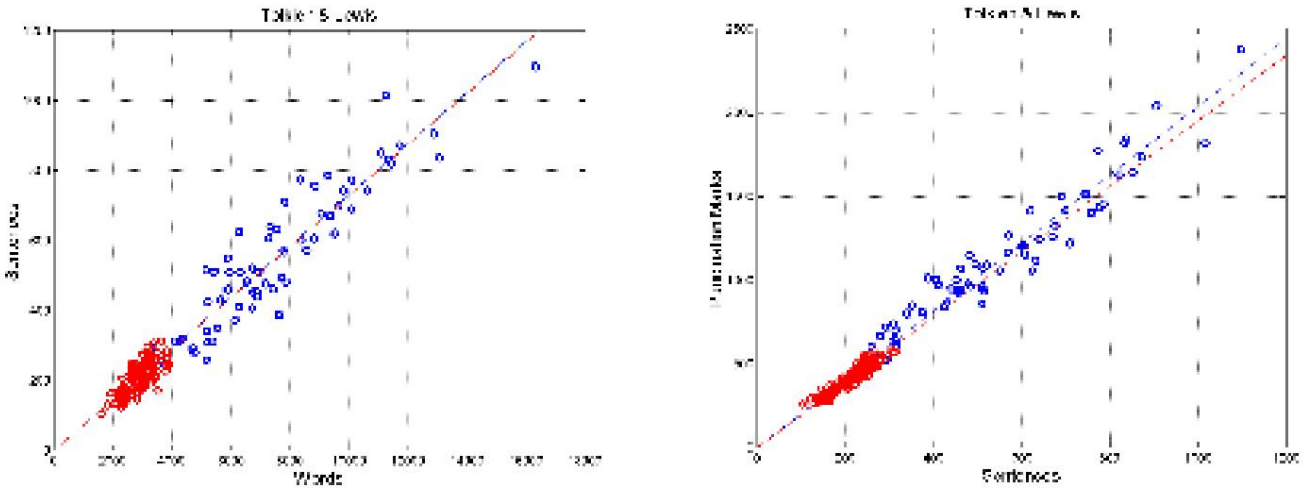
7. Линейные связи в художественных текстах

Теория лингвистических каналов, к которой мы вернемся в следующем разделе, на основе линии регрессии между лингвистическими переменными:

$$y = mx = 0{,}0729 = 0{,}7610. \quad (18)$$

Поэтому мы показываем примеры этих линейных отношений, встречающихся в Лорде и Нарнии.

На рисунке 6a показана диаграмма рассеяния nS и nW Лорда и Нарнии. В Нарнии, наклон линии регрессии m = 0,0729, коэффициент корреляции r = 0,7610. В Лорд, m = 0,0731 и r = 0,9199. Поскольку средние соотношения, т. е. уравнение (18), практически идентичны (см. также значения <PF> в таблицах 6 и 7), а корреляция коэффициентов — т. е. разброса данных — нет, этот факт повлияет на предложение канал, обсуждаемый в разделе 9.



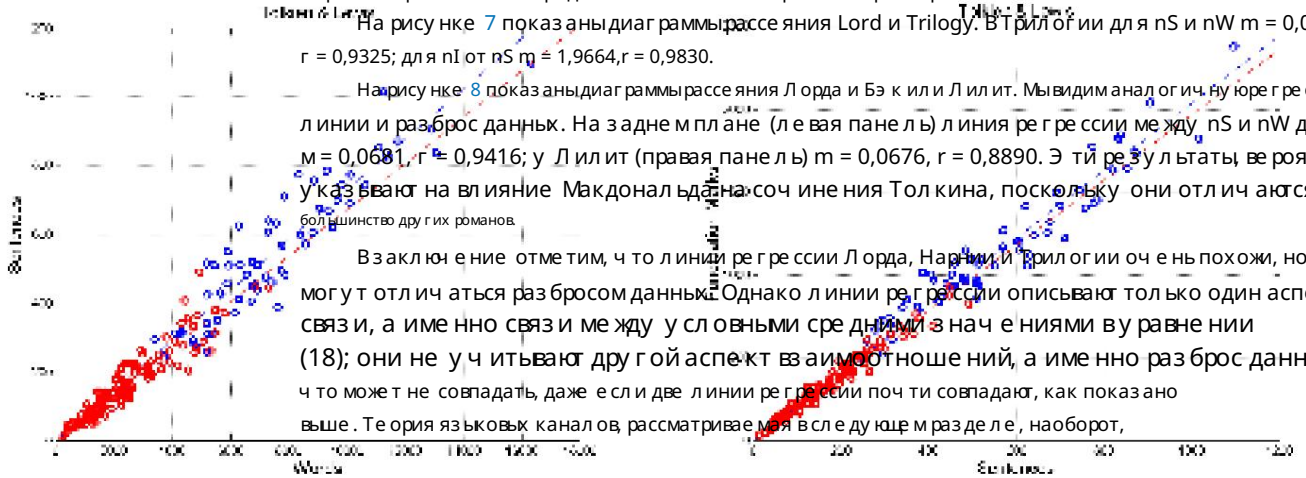
(а) (б)

Рис. 6. (а) Диаграмма рассеяния nS и nW в Лорде (синий) и Нарнии (красный); (б) сравнение nI и nS в Lord (синий) и Нарния (красный).

Аналогичные наблюдения можно провести для рисунка 6b, на котором показано сравнение nI и nS в Лорд и Нарния. Находим m = 2,0372, r = 0,9609 в Lord и m = 1,9520 и r = 0,9384 в Нарния. В Приложении E представлен полный набор этих параметров.

На рисунке 7 показаны диаграммы рассеяния Lord и Trilogy. В Трилогии для nS и nW m = 0,0672, r = 0,9325; для nI от nS m = 1,9664, r = 0,9830.

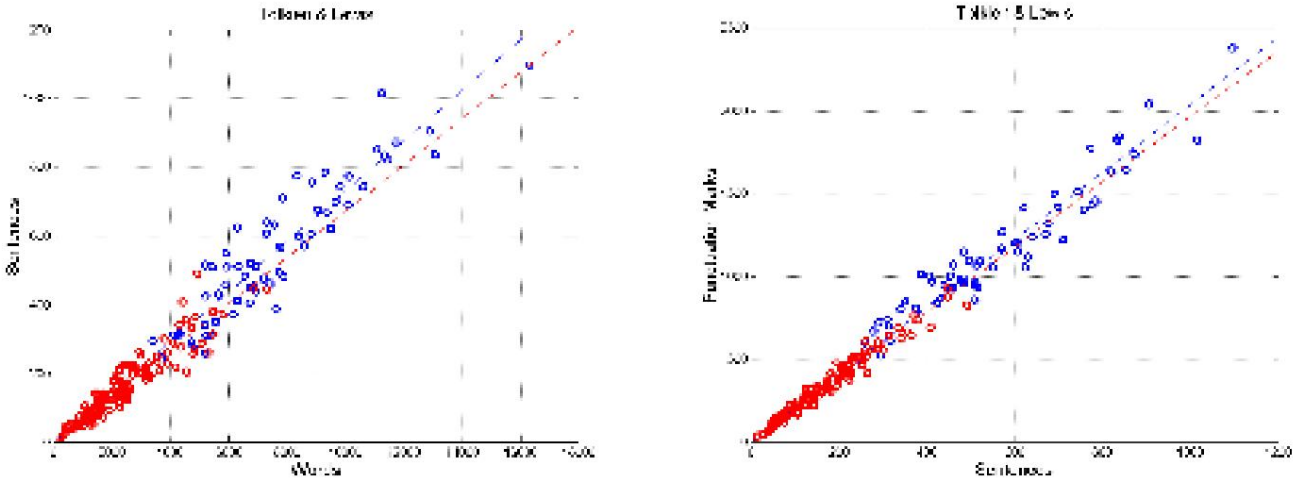
На рисунке 8 показаны диаграммы рассеяния Лорда и Бэкили Лилит. Мы видим аналогичную регрессию линии и разброс данных. На заднем плане (левая панель) линия регрессии между nS и nW дает m = 0,0681, r = 0,9416; у Лилит (правая панель) m = 0,0676, r = 0,8890. Эти результаты, вероятно, указывают на влияние Макдональда на сочинения Толкина, поскольку они отличаются от большинство других романов.



В заключение отметим, что линии регрессии Лорда, Нарнии и Трилогии очень похожи, но они могут отличаться разбросом данных. Однако линии регрессии описывают только один аспект. связи, а именно связи между условными средними значениями в уравнении (18); они не учитывают другой аспект взаимоотношений, а именно разброс данных, что может не совпадать, даже если две линии регрессии почти совпадают, как показано выше. Теория языковых каналов, рассматриваемая в следующем разделе, наоборот,

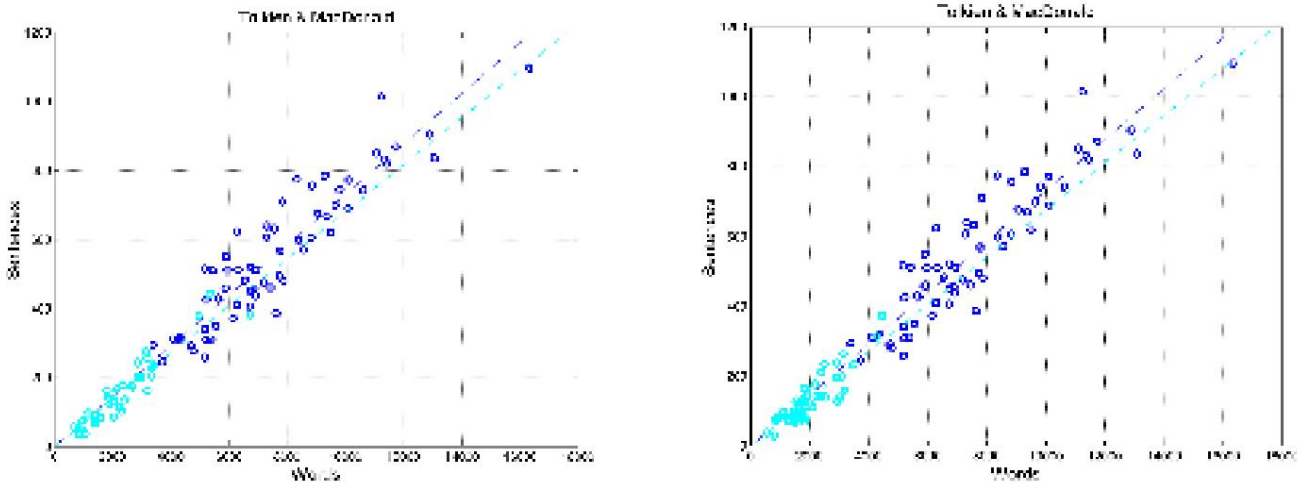
Machine Translated by Google

учитывает наклоны и коэффициенты корреляции и предоставляет инструмент «тонкой настройки» для
сравнения, двух наборов данных путем выделения каждого из четырех параметров глубокого языка.



(а) (б)

Рис. 7. (а) Диаграмма рассеяния nS и nW в Lord (синий) и Trilogy (красный); (б) nI против nS в Лорде (синий) и Трилогии (красный).



(а) (б)

Рис. 8. Диаграмма рассеяния количества предложений nS в зависимости от количества слов nW: (а) Lord (синий) и Back (голубой); (б) Лорд (синий) и Лилит (голубой).

8. Теория языковых каналов. В этом

разделе мы напомним общую теорию языковых каналов [11]. В литературном произведении независимая (эталонная) переменная x (например, nW) и зависимая переменная y (например, nS) могут быть связаны линией регрессии, определяемой уравнением (18).

Рассмотрим два разных текстовых блока Yk и Yj , например главы работы k и работы j. Уравнение (18) не дает полной связи между двумя переменными, поскольку оно связывает только условные средние значения. Мы можем записать более общие линейные зависимости, которые учитывают разброс данных, измеряемый коэффициентами корреляции rk и rj соответственно, вокруг средних значений (измеренных наклонами mk и mj):

$$y_k = m_k x + n_k \quad (19)$$

$$y_j = m_j x + n_j \quad (20)$$

Machine Translated by Google

Линейные модели. Уравнения (19) и (20) вносят аддитивный «шум» через стохастические переменные nk и nj с нулевым средним значением [9,11,15]. Шум обусловлен коэффициентом корреляции |r| /= 1.

Мы можем сравнить два литературных произведения, исключив их; поэтому мы сравниваем выходную переменную с тем же номером, что и входную переменную. Например, мы можем сравнить количество предложений в двух романах — для одинакового количества слов — рассматривая не только среднее соотношение (уравнение (18), но и разброс данных, измеряемый коэффициентом корреляции (уравнения (18)). 19) и (20). Мы называем этот канал связи и «каналом предложений», S-каналом, а эту обработку — «тонкой настройкой», поскольку она углубляет анализ данных и может обеспечить более глубокое понимание взаимосвязи между двумя литературными произведениями или любыми другими текстами. .

Исключив из уравнений (19) и (20), мы получаем линейную зависимость между входным количеством предложений в работе Yk (теперь ссылка, входной текст) и количеством предложений в тексте Yj (теперь выходной текст):

$$mk\ mk\frac{mj}{}\ mj\ nk + \frac{}{}nj\ yj = yk- \tag{21}$$

По сравнению с новой справочной работой Yk , наклон mjk определяется как

$$mjk = mj/mk. \tag{22}$$

Источник шума, который создает коэффициент корреляции между Yk и Yj, определяется выражением

$$\frac{mj}{}nk + nj = -mjknk + nj\ njk = -\ mk \tag{23}$$

«Отношение регрессионного шума к сигналу», Rm, из-за mjk /= 1, нового канала определяется выражением

$$Rm = mjk-12 \tag{24}$$

Неизвестный коэффициент корреляции rjk между yj и yk определяется выражением

$$rjk = потому\ что \arcos rj - \arccos(rk) \tag{25}$$

«Отношение корреляционного шума к сигналу», Rr text , из-за rjk < 1 нового канала из Yk к text Yj , определяется выражением

$$Pp = \frac{1-r\,jk^{2}}{м2\ jk\ 2\ r} \tag{26}$$

дж

Поскольку два источника шума не пересекаются и не суммируются, общее отношение шума к сигналу канала, соединяющего текст Yk с текстом Yj, определяется выражением

$$P = Pм + Pp \tag{27}$$

Обратите внимание, что уравнение (27) можно представить графически [10]. Наконец, общая сумма и частичные отношения сигнал/шум определяются выражением

$$Г\,дБ = -10 \times \log10R \tag{28}$$

$$Г\,m,дБ = -10 \times \log10Rm\ Г\,r,дБ \tag{29}$$

$$= -10 \times \log10Rr \tag{30}$$

Конечно, мы ожидаем, что ни один канал не может дать rjk = 1 и mjk = 1; следовательно, Г dB = , случай, называемый идеальным каналом, если только текст не сравнивается сам с собой. На практике мы всегда находим rjk < 1 и mjk /= 1. Наклон mjk измеряет мультипликативную «смещенность» зависимой переменной по сравнению с независимой переменной; коэффициент корреляции rjk измеряет, насколько «точным» является линейное наилучшее соответствие .

В заключение следует отметить, что наклон mjk является источником регрессионного шума Rm, а корреляция Коэффициент rjk в основном является источником корреляционного шума канала Rr .

Machine Translated by Google

9. Лингвистические каналы

В длинных текстах (таких как романы, эссе и т. д.) мы можем определить как минимум четыре лингвистических линейных текста. каналы [11], а именно:

(а). Канал предложения (S-канал)

(б). Канал взаимопунктов (I-канал)

(с). Слово интервальный канал, WI–канал

(д). Канал символов (C-канал).

В S-каналах количество предложений двух текстов сравнивается с таким же количеством предложений. слова. Эти каналы описывают, сколько предложений пишет автор текста j, по сравнению автору текста k (текст ссылки), используя такое же количество слов. Следовательно, эти каналы больше связаны с PF, чем с другими параметрами. Очень вероятно, что они отражают стиль писателя.

В I-каналах сравнивается количество словесных интервалов двух текстов для одного и того же. количество предложений. Эти каналы описывают, сколько коротких текстов между двумя смежными знаками препинания (длиной IP) используют два автора; следовательно, эти каналы более связано с MF, чем с другими параметрами. Поскольку МФ, скорее всего, связана с E–STM, И-каналы больше связаны со вторым буфером читательского Э -СТМ, чем со стилем писатель.

В WI-каналах сравнивается количество слов, содержащихся в словесном интервале (т. е. IP). для того же количества вставок. Эти каналы больше связаны с IP, чем с другими параметры. Поскольку IP, скорее всего, связан с E–STM, WI–каналы более относится к первому буферу читательского Э –СТМ, чем к стилю писателя.

В С-каналах количество символов двух текстов сравнивается с одним и тем же числом. слов. Они больше связаны с используемым языком, например английским, чем с другим языком. параметры, за исключением случаев, когда рассматриваются эссе или научные/академические тексты, поскольку последние в текстах в среднем используются более длинные слова [9].

В качестве примера в таблице 13 приведены общее и частичное отношение сигнал/шум Г dB, Г m,dB, Г r,dB в четырех каналах, рассматривая Lord как эталонный (входной) текст. В другом слов, текст j сравнивается с текстом k (текстом ссылки, т. е. Лордом).

Таблица 13. Суммарные и парциальные отношения сигнал/шум Г dB, Г m,dB, Г r,dB в четырех каналах с учетом Lord как эталонного (входного) текста.

	S – канал			Я – Канал			WI-канал			С – канал		
Роман	Г дБ	Гм, дБ	Г г, дБ	Г дБ	Гм, дБ	Г г, дБ	Г дБ	Гм, дБ	Г г, дБ	Г дБ	Гм, дБ	Г г, дБ
Хоббит	14.60	15.48	21.94	15.04	30.08	15.18	15.61	15,77	30.19	28.87	35,90	29.83
Нарния	10.12	51,26	10.12	21.83	27.57	23.18	7,94	27.08	7,99	23.14	37,47	23.30
Трилогия	21.27	21.86	30.24	20.07	29.18	20.64	18.74	19.21	28.63	27.61	27.85	40.30
Назад	21.10	23.30	25.11	20.96	24.12	23.82	21.96	57,42	21.96	26.52	26,68	41.05
Лилилт	19.92	22.47	23.44	18.47	19.15	26.87	20.86	26.28	22.33	19.17	33,98	19.31
Оливер	12.87	12.93	31.51	5,72	5,74	29.30	16.54	16.56	40,83	26.50	26,63	41,73
Дэвид	11.43	11.52	28.37	4.18	4.19	30,77	14.43	16.10	19.37	32,88	51,53	32,94
	14.91	14.93	38.01	12.10	12.29	25.80	29.00	36.33	29,88	21.76	26.69	23.45
Холодная история		13,31	21.25	8.26	8,56	19,99	16,13	22,76	17.20	25,88	25.89	55.01
12.66 Взаимная 16.13		16,22	33.05	9,97	10,00	31,20	19,40	20,33	26,55	23,24	26,87	25.70
Мартин 16.00 Баск		20,01	18.20	18,04	20,74	21,38	29,30	40,14	29,68	21,11	23,16	25.34
10.92 Питер 18.10		23,84	11.14	18,77	20,81	23,03	11,77	15,70	14,02	26,34	32,54	27.53
		24,41	19.25	17,31	17,53	30,45	16,67	22,23	18,09	31,19	34,62	33,81

В приложении F указаны Г dB для всех романов, рассматриваемых в статье.

Сделаем несколько фундаментальных замечаний к Таблице 13, применимых к любому из них. справочный текст. Отношения сигнал/шум С-каналов практически самые большие, в диапазоне от 19,17 дБ (Лилит) до 31,19 дБ (Сзади). Эти результаты просто говорят о том, что все авторы используют один и тот же язык и пишут однотипные тексты – романы, а не эссе

Machine Translated by Google

или научные/академические статьи. Эти каналы не способны различать или оценивать большие различия между текстами или авторами.

В трех других каналах мы можем заметить, что Trilogy, Back и Lilith имеют самые большие отношения сигнал/шум, примерно от 19 до 22 дБ; поэтому эти романы очень похожи на Лорда. Другими словами, эти каналы, похоже, подтверждают вероятное влияние Макдональда как на Лорда, так и на Трилогию, а также на связь между Лордом и Трилогией.

Напротив, Нарния показывает плохие значения в S-Channel (10,12 дБ) и WI-Channel (7,94 дБ). Эти низкие значения определяются корреляционным шумом, поскольку R = Rm + Rr Rr.

Если мы рассмотрим только Γm,dB, т.е. только линию регрессии, то мы заметим сильную связь с Lord, поскольку Γm,dB = 51,26 дБ. Как мы уже заметили на рисунке 6, линии регрессии практически идентичны, но разброс данных нет.

Льюис в «Нарнии» менее «регуляren», чем в «Трилогии» или Толкин в «Лорде», в формировании (бессознательно) этих двух языковых каналов.

10. Резюме и выводы

Исследователи английской литературы единодушно утверждают, что Дж. Р. Р. Толкин оказал влияние на CS. Сочинения Льюиса. Впервые мы исследовали этот вопрос математически, используя оригинальный многомерный анализ лингвистических параметров, основанный на поверхностных глубоких языковых переменных и лингвистических каналах.

Чтобы поместить наше исследование в рамки английской литературы, мы также рассмотрели некоторые романы, написанные более ранними авторами, такими как Чарльз Диккенс и другие, включая Джорджа Макдональда, поскольку ученые отмечают его вероятное влияние на Толкина и Льюиса.

В нашем многоплановом анализе только ряды слов, предложений и интерпунктов на главу, по нашему мнению, были сознательно запланированы авторами и, в частности, не указывают на прочные связи между Толкином, Льюисом и Макдональдом. Каждый автор по-разному распределял слова, предложения и вставки по-разному от автора к автору, а иногда даже от романа к роману одного и того же автора.

Напротив, глубинные языковые переменные и лингвистические каналы, обсуждаемые в статье, вероятно, обусловлены бессознательным замыслом и могут выявить связи между текстами, находящиеся далеко за пределами сознания авторов.

Таким образом, буферы расширенной кратковременной памяти, необходимые читателям, универсальный индекс читаемости текстов, геометрическое представление текстов и тонкая настройка языковых каналов — все инструменты, широко обсуждаемые в статье, — выявили прочную связь между «Властелин колец» (Толкин), «Хроники Нарнии» и «Космическая трилогия» (Льюис), с одной стороны, и сильная связь с некоторыми романами Макдональда, с другой стороны, что, таким образом, в значительной степени согласуется с тем, что говорят исследователи английской литературы.

Финансирование: Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Заявление Институционального наблюдательного совета: Неприменимо.

Заявление об информированном согласии: Неприменимо.

Заявление о доступности данных: данные содержатся в статье.

Благодарности: Автор желает поблагодарить многих ученых, которые с большой заботой и любовью поддерживают цифровые тексты доступными для читателей и ученых различных академических дисциплин, таких как Цифровая библиотека Персея и Проект Гутенберг.

Конфликты интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Приложение А. Нижняя граница среднего показателя универсальной читаемости

Среднее значение GU определяется выражением

$$<ГУ>= 89–10к<КП>+300<1/ПФ>–6(<ИП>–6) \quad (A1)$$

Machine Translated by Google

Значение, рассчитанное путем введения среднего значения переменных, определяется выражением

$$GU,mean = 89–10k< CP > +300/< PF >–6(< IP > –6) \quad (A2)$$

Поэтому

$$< GU > –GU,среднее = 300 \times \frac{1}{< ПФ >} – < \frac{1}{ПФ} > \quad (A3)$$

Теперь с помощью неравенства Коши – Шварца можно доказать, что $1/< x > < 1/x >$; следовательно, $<GU> –GU, mean 0$; следовательно, $< GU > GU,среднее$.

Приложение Б. Пифагорово расстояние d между парами текстов

Таблица А1. Пифагорово расстояние d между парами текстов.

Роман Лорд Хоббит Нарния Трилогия Назад Лилит Оливер Дэвид Блик									Tale Mutual Мартин Баск Питер			
Лорд 0												
Хоббит 0,488 Нарния	0											
0,150 Трилогия	0,348	0										
0,355 Назад 0,099	0,140	0,211	0									
Лилилт 0,112	0,499	0,203	0,379	0								
Оливер 0,244 Дэвид	0,453	0,174	0,336	0,048	0							
0,320 Унылый 0,231	0,518	0,307	0,426	0,146	0,141	0						
Сказка 0,267	0,620	0,407	0,532	0,222	0,234	0,106	0					
Взаимный 0,146	0,312	0,170	0,217	0,201	0,153	0,211	0,316	0				
Мартин 0,230 Баск	0,381	0,252	0,305	0,201	0,161	0,143	0,239	0,096	0			
0,424 Питер 0,098	0,479	0,218	0,369	0,055	0,044	0,099	0,190	0,170	0,151	0		
	0,2612	0,109	0,139	0,241	0,197	0,294	0,400	0,096	0,192	0,230	0	
	0,0964	0,277	0,072	0,451	0,408	0,496	0,602	0,286	0,371	0,441	0,211	0
	0,4744	0,183	0,355	0,025	0,024	0,146	0,232	0,177	0,182	0,048	0,217	0,427 0

Приложение С. Общая площадь между кругами

Приведем код Matlab для расчета общей площади текста, загруженного с сайта https://it.mathworks.com/matlabcentral/answers/273066%E2%80%93overlapping%E2%80%93площадь%E2%80%93между%E2%80%93двумя%E2%80%93кругами (доступ на 15 июня 2024 г.).

Пусть расстояние между центрами двух окружностей равно d, а их два радиуса равны r1 и r2. Затем площадь A области перекрытия двух кругов можно рассчитать следующим образом, используя Функция Matlab a'tan2':

```
t = sqrt((d+r1+r2)*(d+r1-r2)*(d-r1+r2)*(-d+r1+r2));

A = r1^2*atan2(t,d^2+r1^2-r2^2)+r2^2*atan2(t,d^2-r1^2+r2^2)-t/2;
```

Приложение D. Условная вероятность ошибки

Таблица А2. Вероятность ошибки между указанными текстами.

	Господин	Хоббит, трилогия Нарния, назад	Лилит	Оливер Дэвид	мрачный	Сказка	Взаимный Мартин Баск	Питер
Лорд	---							
Хоббит 0,065 Нарния	---							
0,665 Трилогия	0,387 —-							
0,320 0,711 0,701	0,759 0,627 —-							
Назад	0,314	0,148 0,603 0,335 —-						
Лилилт	Дэвид	0,173 0,639 0,382 0,866 —-						
Оливер	0,033	0,051 0,358 0,203 0,666 0 0,101 0 0,496 0,387	0,641	---				
Унылый 0,307 Сказка		0,633 0,593 0,543 0,270 0,475 0,428 0,554	0,372	0,664	---			
0,280 Взаимный		0,036 0,545 0,279 0,633 0,499 0,75 7 0,716	0,560	0,397	0,040	---		
0,505 Мартин 0,395		0,478 0,830 0,504 0,873 0,211 0,231 0,669 0,412	0,601	0,615	0,300	0,725	---	
Баск 0,164 Питер		0,853	0,681	0,686	0,273	0,428	0,558 ---	
0,649			0,528	0,273	0,003	0,732	0,517	0,367 —-
			0,241	0,077	0	0,439	0,286	0,095 0,591 ---
			0,761	0,687	0,568	0,642	0,644	0,594 0,587 0,294 ---

Machine Translated by Google

Приложение E. Наклон и коэффициент корреляции линий регрессии

Таблица A3. Наклон/коэффициент корреляции линии регрессии y = mx, уравнение (18), моделирующее указанные переменные (зависимые/независимые). Мы оставляем четыре цифры, потому что некоторые романы отличаются только на третьей и четвертой цифре.

Роман	Предложения/Слова	Вставки/предложения	Слова/Вставки	Персонажи/Слова
Господин	0,0731/0,9199	2,0372/0,9609	6,6134/0,9609	4,0367/0,9982
Хоббит	0,0608/0,9532	2,1010/0,9936	7,6902/0,9532	4,1014/0,9996
Нарния	0,0729/0,7610	1,9520/0,9384	6,9062/0,7991	4,0907/0,9919
Трилогия	0,0672/0,9325	1,9664/0,9830	7,3380/0,9696	4.2002/0.9976
Назад	0,0681/0,9416	2,1640/0,9759	6,6045/0,9799	3,8496/0,9976
Лилилт	0,0676/0,8890	2,2619/0,9488	6,2926/0,9800	4,1174/0,9863
Оливер	0,0566/0,9059	3,0893/0,9544	5,6302/0,9638	4,2248/0,9977
Дэйвид	0,0537/0,9390	3,2949/0,9657	5,5775/0,9882	4,0474/0,9966
мрачный	0,0600/0,9258	2,5324/0,9715	6.51250.9694	4,2235/0,9923
Сказка	0,0573/0,9574	2,7972/0,9785	6,1323/0,9912	4,2417/0,9983
Взаимный	0,0618/0,9299	2,6814/0,9549	5,9766/0,9740	4,2197/0,9940
Мартин	0,0658/0,8583	2,2243/0,9364	6,6785/0,9514	4,3171/0,9939
Греться	0,0684/0,7706	1,8517/0,9366	7,6984/0,9005	4,1320/0,9949
Питер	0,0687/0,8686	2,3080/0,9679	6,1018/0,9152	4,1117/0,9968

Приложение F. Суммарное отношение сигнал/шум ГдБ в четырех лингвистических каналах

В таблицах A4–A7 указано соотношение сигнал/шум ГдБ в каналах между входным текстом. k (ссылка) указывается в первой строке, а выходной текст j указывается в левом столбце. Для Например, в таблице A4, если входной текст — «Лорд», а выходной — «Трилогия», тогда ГдБ = 21,27. дБ; наоборот, ГдБ = 20,44. Небольшая асимметрия характерна для языковых каналов [12,15].

Таблица A4. Суммарные отношения сигнал/шум ГдБ, S-каналы.

| Роман | Лорд | Хоббит | Трилогия | Нарнии | Назад | Лилит | Оливер | Дэвид | Блек | Лорд | | |

Machine Translated by Google

Таблица A5. Продолжение

| | | |

Machine Translated by Google

7. Хупер, В. Инклинги. В К. С. Льюис и его круг. Очерки и мемуары Оксфордского общества К.С. Льюиса; Уайт Р., Вульф Дж, Вульф Б.Н., ред.; Издательство Оксфордского университета: НьюЙорк, штат НьюЙорк, США; Оксфорд, Великобритания, 2015 г.; стр. 197–213.
8. Гокулаприя, Т.Р.Р. Литературные произведения Толкина: обзор. Межд. Преподобный Лит. Стад. 2022, 4, 31–39.
9. Матрич иани, Э. Глубокая языковая статистика итальянского языка на протяжении семи веков литературы и эмпирические связи с Закон Миллера 7 2 и кратковременная память. Открыть J. Stat. 2019, 9, 373–406. [Перекрестная ссылка]
10. Матрич иани Э. Статистическая теория языкового перевода, основанная на теории коммуникации. Открыть J. Stat. 2020, 10, 936–997. [Перекрестная ссылка]
11. Матрич иани, Э. Множественные каналы коммуникации в художественных текстах. Открыть J. Stat. 2022, 12, 486–520. [Перекрестная ссылка]
12. Матрич иани, Э. Состоит ли кратковременная память из двух процессоров? Подсказки из итальянской и английской литературы ниже. Столетия. Информация 2024, 15, 6. [CrossRef]
13. Матрич иани Э. Математическая структура, лежащая в основе предложений, и ее связь с кратковременной памятью. Прил. Математика 2024, 4, 120–142. [Перекрестная ссылка]
14. Миллер Г.А. Магическое число семь, плюс-минус два. Некоторые ограничения нашей способности обрабатывать информацию. Психол. 1956 , 63, 81–97. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
15. Матрич иани, Э. Индексы читаемости не говорят все о читаемости текста. Аналитика 2023, 2, 296–314. [Перекрестная ссылка]
16. Матрич иани, Э. Лингво-математические отношения, сохраняемые или утрачиваемые при переводе текстов: расширение статистической теории Перевод и его применение к Новому Завету. Информация 2022, 13, 20. [CrossRef]
17. Папулис Папулис, А. Вероятность и статистика; Прентис Холл: Хобокен, НьюДжерси, США, 1990 г.
18. Линдгрен, Статистическая теория Б.В., 2-е изд.; Компания MacMillan: НьюЙорк, штат НьюЙорк, США, 1968 г.

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору (ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору (ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.

Machine Translated by Google

AppliedMath

MDPI

Статья

Псевдоспектральный метод Чебышева для дробного дифференциала Уравнения в непересекающихся разбитых областях

Шина Даниэль Олонию [1,*], Нэнси Мукевхо [1,2], Юсуф Олатунджи Тиджани [1] и Олумуива Отегбейе [3]

[1] Факультет математики, Университет Родса, Маханда, почтовый ящик 94, Грэмстаун 6140, Южная Африка; nancy.mukwevho@univen.ac.za (Нью-Мексико); yusuf.tijani@ru.ac.za (YOT)

[2] Факультет математических и вычислительных наук, Университет Венды, Private Bag X5050, Тохоянду 0950, Южная Африка 3

Школа компьютерных наук и прикладной математики, Университет Витватерсранда, Private Bag 3, Браамфонтейн, Йоханнесбург 2050, Южная Африка; olumuyiwa.otegbeye@wits.ac.za

* Для переписки: s.oloniiju@ru.ac.za

Аннотация: Операторы дробного дифференциала по своей сути нелокальны, поэтому глобальные методы, такие как спектральные методы, хорошо подходят для работы с этими нелокальными операторами. Длительная интеграция дифференциальных моделей, таких как хаотические динамические системы, создает определенные проблемы и соображения, которые делают многодоменные численные методы выгодными при решении таких проблем. В этом исследовании предлагается новый многодоменный псевдоспектральный метод, основанный на полиномах Чебышева первого рода и квадратуре Гаусса–Лобатто для задач с дробным начальным значением. Предлагаемый метод включает в себя разбиение области задач и на непересекающиеся подобласти и вычисление дробного дифференциала. оператор в каждой подобласти как сумму «локальной» части и «памяти» и получение соответствующих матриц дифференцирования для разработки численных схем. Анализ линейной устойчивости показывает, что численная схема абсолютно устойчива для одних значений произвольного нецелого порядка и условно устойчива для других. Численные примеры, от одиночных линейных уравнений до систем нелинейных уравнений, демонстрируют, что многодоменный подход более уместен, эффективен и точен, чем однодоменная схема, особенно для задач с долгосрочной динамикой.

Ключевые слова: мультидоменность; псевдоспектральный метод; дробные дифференциальные уравнения; полиномы Чебышева; квадратура Гаусса–Лобатто; анализ стабильности

check for updates

Цитирование: Олонию, С.Д.; Мукевхо, Н.; Тиджани, Йо; Отегбайе, О. Псевдоспектральный метод Чебышева для дифференциальных уравнений дробного порядка в непересекающихся разбитых областях. Прикладная математика 2024, 4, 950–974. https://doi.org/10.3390/appliedmath4030051

Академические редакторы: Ренхай Ван и Джунсанг Чой.

Поступила: 26 июня 2024 г.

Пересмотрено: 29 июля 2024 г.

Принято: 30 июля 2024 г.

Опубликовано: 2 августа 2024 г.

Копирайт: © 2024 авторов. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе. распространяется на условиях и условия Creative Commons Лицензия с указанием авторства (CC BY) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Введение

Дробные дифференциальные уравнения (ДДУ) привлекают значительное внимание в технике, науке, финансах и других областях. В отличие от классических дифференциальных уравнений, которые ограничены производными целого порядка, FDE привносят более высокую степень сложности в дифференциальные уравнения за счет включения производных произвольных производных нецелого порядка. Дробные дифференциальные операторы могут быть определены различными способами, причем наиболее распространенными являются определения, включающие сингулярные ядра, такие как дробные дифференциальные операторы Римана–Лиувилля и Капуто [1,2]. Эти определения основаны на интегралах со степенным ядром, которые иногда могут приводить к сингулярностям и усложнять числовые аппроксимации. Однако эти дифференциальные операторы со степенными ядрами выгодны для разработки спектральных методов с использованием базисных функций, таких как полиномы Чебышева и Лежандра, поскольку эти полиномы могут быть выражены в форме степенного ряда. Поэтому производная Капуто будет использоваться в численном методе, предложенном в данной работе. Однако в последние годы наблюдается значительный интерес к неособым ядрам, которые обеспечивают альтернативную основу для определения дробных операторов. Примеры включают дробные операторы Капуто-Фабрицио и Атангана-Балеану, которые используют в качестве ядер экспоненциальную функцию и функцию Миттаг-Леффлера соответственно [3,4]. Эти неособые ядра были введены, чтобы расширить сферу применения и применимость д

Machine Translated by Google

Эта дополнительная сложность позволяет операторам дробного дифференциала улавливать эффекты памяти системы или описывать явления, присущие памяти. В результате FDE предлагают более надежную основу для моделирования сложной динамики сложных систем в различных научных дисциплинах [5,6]. Поиск аналитических решений дробных дифференциальных уравнений (ДДУ) особенно сложен; однако в нескольких исследованиях были предложены аналитические решения и методы для FDE, например, Ахмадиан и Дарвиши [7] получили солитоны и решения бегущей волны, используя методы разложения tanh-coth, tan-cot, sech-csch и sec-csc для (1 + 1)-мерное дробное уравнение Бисваса–Миловича [8]. Кумар и др. [9] предложили модифицированный метод разложения Лапласа, который объединяет методы преобразования Лапласа и разложения Адомиана для анализа дробного уравнения Навье–Стокса, моделирующего нестационарное течение ньютоновской жидкости в трубе. Дробно-симметричное регуляризованное длинноволновое уравнение решено аналитически с использованием таких методов, как метод разложения G'/G [10], метод разложения G'/G^2 [11], расширенный комплексный метод [11], прямой алгебраический метод метод [12] и метод эллиптических функций Якоби [13]. Другие аналитические методы, которые использовались для FDE, включают преобразование Сумуду [14], метод Кудряшова [15] и различные полуаналитические методы, такие как метод расширения [16,17] и метод синус-косинус [18].], среди других. Численные методы также играют важную роль в получении точных решений для ФДУ и дают ценную информацию о динамике систем, описываемых ФДУ [19,20].

Было предложено множество численных методов аппроксимации решений ФДУ. Например, Хаттафи др. [21] представил новый численный подход для аппроксимации обобщенной дробной производной Хаттафа (GHF), который включает в себя дробный дифференциальный оператор с неособым ядром. Разработанный численный метод был апробирован на ФДУ с аналитическими решениями для проверки его точности путем сравнения приближенных решений с точными. Также были решены нелинейные FDE, описывающие динамику ВИЧ -инфекции, чтобы продемонстрировать применимость метода к реальным проблемам. Методы предиктора -корректора (PCM) для FDE были предложены Kumar et al. [22], Джинга и Дафтардар-Геджи [23] и Ли и др. [24]. Эти исследования показали, что PCM решают FDE быстрее и значительно сокращают время вычислений. Кумар и др. [25] представили два эффективных в вычислительном отношении численных метода, основанных на методе средней точки и методе Хойна для линейных и нелинейных дробных задач начального значения (IVP). В результате исследования был сделан вывод, что предложенные методы обладают значительными преимуществами по сравнению с традиционными и усовершенствованными методами Эйлера.

Нелокальная природа дробных дифференциальных операторов иногда делает анализ и поиск решений ФДУ геркулесовыми задачами [26]. Спектральные методы стали мощным численным методом аппроксимации решений ФДУ [27–29]. В отличие от других традиционных численных методов, спектральные методы являются глобальными и высокоточными, что делает их эффективными для решения дифференциальных уравнений [30]. Многочисленные исследования использовали глобальный характер спектральных методов для дискретизации дробных дифференциальных операторов и получения численных решений ФДУ [31]. Заернури и Карниадакис [32] и Чжао и др. В [33] предложен экспоненциально сходящийся спектральный метод Галеркина для ФДУ. Заернури и Карниадакис [32] сравнили производительность разработанного спектрального метода и общепринятого метода конечных разностей (FDM) и пришли к выводу, что предлагаемый метод работает лучше, чем FDM, с точки зрения скорости сходимости. Хадери и Свейлам [34] использовали псевдоспектральный метод Лежандра для решения дробного уравнения адвекции-дисперсии с дробным дифференциальным оператором Капуто. В исследовании анализировалась точность нового дискретного дробно-дифференциального оператора путем изучения скорости его сходимости и оценки максимально возможной ошибки, и результаты согласовывались с существующими результатами из литературы. Стохастические дробные дифференциальные уравнения были решены Кардоне и др. [35] с использованием метода спектральной коллокации. Метод предполагает получение полностью дискретной версии исходного непрерывного оператора и решение системы нелинейных алгебраических уравнений. Тесты на нескольких задачах показали, что предложенный метод эффективен для выбранных базисных фу

Machine Translated by Google

Спектральные методы демонстрируют экспоненциальную сходимость для дифференциальных уравнений с достаточно гладкими решениями. Такой высокий уровень точности сделал спектральные методы, особенно псевдоспектральный метод Чебышева, популярным выбором для решения множества дробных дифференциальных уравнений. Например, Доха [36] использовал псевдоспектральный метод Чебышева для аппроксимации решений дробных многочленных дифференциальных уравнений. Аналогичным образом Свейлам [37] применил этот метод для численного решения дробных интегро-дифференциальных уравнений. Другие исследования, в которых псевдоспектральный метод Чебышева использовался для аппроксимации решения дробных дифференциальных уравнений, включают работы Дабири [38], Олониюи др. [39,40,41] и другие. Однако это желательное свойство спектральной сходимости может ухудшаться при использовании больших временных интервалов или негладких решений [42]. Многодоменный подход решает эти проблемы, предлагая точный и эффективный вычислительном отношении способ управления потенциально негладкими решениями. Это также может улучшить численную стабильность и точность за счет разбиения области задачи, особенно задач, зависящих от времени, на более мелкие подобласти [43]. Сэмюэл и Моца [44] описали многодоменный метод спектральной коллокации для решения гиперболических уравнений в частных производных (УЧП) с большой временной областью. Исследование показало, что разделение расчетной области на более мелкие подобласти дает точные результаты и сокращает время вычислений. Бирем и Кляйн [45] представили многодоменный спектральный метод для уравнения Шрёдингера. Юнг и Олмос-Лицага [46] представили несогласованный и неперекрывающийся многодоменный спектральный метод для моделирования решений бегущей волны в уравнениях реакции-диффузии. Метод имеет три ключевые особенности: высокий порядок точности и скорости сходимости, адаптивную сетку и многодоменный метод. Цинь и др. В [47] предложен многодоменный метод наименьших квадратов Лежандра–Галеркина для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Исследование установило два ключевых свойства метода: непрерывность, обеспечивающая согласованность и гладкость на конечных точках каждой подобласти, и принудительный характер, обеспечивающий стабильность и сходимость. Кроме того, исследование установило оптимальную оценку ошибки в норме H1 .

В этом исследовании исследуется псевдоспектральный метод Чебышева в многодоменных условиях как новый подход к решению ФДУ. Здесь область задачи разделена на конечное число непересекающихся подобластей. Многодоменный подход к FDE применялся к проблемам биологии [48] и финансов [49,50]. Малеки и Каджани [48] использовали многодоменный псевдоспектральный метод Лежандра-Гаусса для аппроксимации решений дробной модели роста населения Вольтерра. Исследование продемонстрировало эффективность предложенного метода при решении широкого круга интегро-дифференциальных уравнений, в том числе целого и дробного порядков. Бамбе Моутсинга и др. [49] разработали спектральный метод для дробных дифференциальных уравнений, который моделирует оценку в рамках структуры аффинного скачка-диффузии, хаотических и гиперхаотических систем и моделей дробного ценообразования для криптовалют. В результате исследования установлено, что разработанный спектральный метод превосходит по производительности численные пакеты MATLAB, основанные на методе Эйлера.

Харазми [50] исследовал управляемый данными подход к решению стохастических дробных дифференциальных уравнений в частных производных (SFPDE) с использованием многодоменных спектральных методов. Чжао и др. [51] предложили метод многодоменной спектральной коллокации (MDSCM) для решения нелинейных FDE. MDSCM продемонстрировал значительное преимущество перед однодоменными спектральными методами в достижении высокой точности для дифференциальных уравнений с малоре
Кляйн и Стоилов [52] предложили численный метод для дробного лапласиана, основанный на дробных операторах Рисса, определенных на R. Подынтегральные выражения преобразуются с использованием базовой кривой Zq , чтобы гарантировать точность вычислений внутри каждого подинтервала. Преобразованные интегралы внутри каждого подинтервала затем решаются с использованием алгоритма Кленшоу – Кертиса. Тавассоли и Каджани [53] предложил модифицированный метод коллокации Мюнца-Лежандра в водной области и в многодоменной обстановке для уравнения дробного пантографа. Сюй и Хестхавен [54] предложили высокоточный и стабильный многодоменный спектральный метод с методом штрафов для уравнений дробной частичной адвекции и диффузии . Исследование пришло к выводу, что высокая точность предложенной схемы делает ее хорошо подходящей.

Machine Translated by Google

для долгосрочной интеграции FDE. Было также отмечено, что скорость сходимости соответствует теоретическому анализу схемы.

Цель настоящего исследования — представить новый численный метод — неперекрывающийся многодоменный псевдоспектральный метод Чебышева, основанный на полиномах Чебышева первого рода и квадратуре Гаусса–Лобатто для дифференциальных уравнений дробного порядка. Выбор полиномов Чебышева обусловлен их свойством ортогональности по отношению к их весовой функции, что упрощает проецирование приближенного решения на полиномиальное пространство. Кроме того, вычисление квадратурных весов и узлов Чебышева-Гаусса-Лобатто довольно просто, и это снижает вычислительные затраты по сравнению с другими ортогональными полиномами. Предлагаемый метод работает путем разложения области дробного дифференциального уравнения на более мелк
Новизна работы заключается в подходе к разбиению области дробной начальной задачи и на неперекрывающиеся подинтервалы и проектировании решения задач и на пространство ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Этот метод включает разделение оператора дробного дифференциала на сумму «локальных» компонентов и компонентов «памяти» в каждой подобласти. Для демонстрации универсальности и эффективности предлагаемого метода проведен анализ устойчивости и численные эксперименты на различных типах дробных дифференциальных уравнений. Численный анализ ошибок проводится для демонстрации преимуществ метода декомпозиции доменов перед однодоменным псевдоспектральным методом Чебышева.

Остальная часть статьи организована следующим образом: в разделе 2 приведены некоторые предварительные определения, необходимые для разработки численных схем; Раздел 3 посвящен разработке и анализу численной схемы ФДУ с использованием полиномов Чебышева на квадратуре Гаусса–Лобатто в неперекрывающихся разбитых областях; Раздел 4 демонстрирует точность и эффективность численного метода, представляя некоторые примеры, начиная от линейных одиночных уравнений и заканчивая системами нелинейных уравнений, требующих долговременного интегрирования; и Раздел 5 завершает исследование.

2. Предварительные сведения

В этом разделе представлены и определены основные понятия и дробные операторы, необходимые для разработки числовой схемы.

Определение 1. Предположим, что u : [a, b] R — непрерывная функция, γ > 0 и интеграл дробного порядка Римана–Лиувилля от u(t) определяется как [55]

$$ {}^{RL}_{a}I^{\gamma}_{t}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\gamma-1}u(\tau)d\tau, \; t>0,\gamma>0, \qquad u(t),\gamma=0, \tag{1} $$

где Γ — гамма-функция Эйлера, а t γ 1 u(t) — произведение свертки степенной функции, tγ 1 , и функция u(t).

Определение 2 (Дробный интеграл от (t a) j). Для степенной функции (t a) j интеграл дробный определяется как [56]

$$ {}^{RL}_{a}I^{\gamma}_{t}(t-a)^{j} = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\gamma+1)}(t-a)^{j+\gamma}\Gamma(j+. \tag{2} $$

Определение 3. Левосторонний дробный дифференциальный оператор Капуто определяется как [55]

$$ {}^{C}_{a}D^{\gamma}_{t}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma\gamma)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\gamma\gamma-1}u^{\gamma}(\tau)d\tau, \qquad 1<\gamma, \tag{3} $$

Machine Translated by Google

где γ — потолок γ, γ γ и t γ γ 1 * ты γ (t) — продукт свертки степенная функция, t γ ,γи 1 γ -я производная целого порядка функции u(t).

Определение 4 (Дробная производная от (t a) j). Дробная производная от (t a) j определяется как [56]

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\gamma}(t-a)^{j} = \begin{cases} 0, & j \in \mathbb{N}_0,\ j < \gamma, \\ \dfrac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\gamma)}(t-a)^{j-\gamma}, & j \in \mathbb{N}_0,\ j \geq \gamma. \end{cases} \tag{4} $$

Определение 5. В данной работе используется множество точек коллокации, состоящее из точек Чебышева–Гаусса–Лобатто, определяемых как $t_r = \cos\frac{r\pi}{N};\ r = 0(1)N$ [57].

3. Численная дискретизация и анализ псевдоспектральным методом.

В этом разделе представлена численная дискретизация дробной задачи с начальным значением с использованием полиномов Чебышева первого рода и квадратуры Гаусса – Лобатто. Он охватывает аппроксимации дробной производной произвольной функции как в одной области, так и в разделенных неперекрывающихся областях. Во-первых, полиномиальная аппроксимация произвольной функции u(t), непрерывной на интервале [0, h], представляется в терминах сдвинутых полиномов Чебышёва первого рода. Эти полиномы получаются по следующей рекуррентной формуле:

$$ \Pi_{h,0}(t) = 1,\ \Pi_{h,1}(t) = \frac{2t}{h} - 1,\ \Pi_{h,j+1}(t) = 2\Pi_{h,1}(t)\cdot\Pi_{h,j}(t) - \Pi_{h,j-1}(t),\ j \geq 1. \tag{5} $$

Функция u(t) представляется следующим образом:

$$ u(t) \approx U_h(t) = \sum_{j=0}^{} \hat{u}_j \Pi_{h,j}(t),\ t \in [0, h], \tag{6} $$

где коэффициенты $\hat{u}_j$ в уравнении (6) удовлетворяют условию ℓ_2 ортогональности сдвинутых полиномов Чебышева первого рода, которые определены относительно скалярного произведения

$$ \hat{u}_j = \langle U_h(t), \Pi_{h,j}(t) \rangle_{\nu_j} = \frac{1}{\nu_j}\int_0^{h} \frac{U_h(t)\Pi_{h,j}(t)\,dt}{\sqrt{ht - t^2}} \approx \frac{1}{\nu_j}\sum_{i=0}^{} U_h(t_i)\Pi_{h,j}(t_i)\varrho_i, \tag{7} $$

где

$$ \nu_j = \begin{cases} \pi, & j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{8} $$

Если рассматривать усеченную аппроксимацию функции N-го порядка и разместить ее в N + 1 различных точках Чебышева–Гаусса–Лобатто (CGL), при этом $t_r \in [0, h];\ r = 0(1)N$, то

$$ u(t_r) \approx \sum_{i=0}^{N} U_h(t_i)\varrho_i \nu_j \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{\nu_j}\Pi_{h,j}(t_i)\Pi_{h,j}(t_r), \qquad r = 0(1)N, \tag{9} $$

где ϱ_i — число Кристоффеля, связанное с квадратурой Чебышева–Гаусса–Лобатто, и определяется следующим образом:

$$ \varrho_i = \begin{cases} \frac{\pi}{2N}, & i = 0, N \\ \frac{\pi}{N}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{10} $$

Используя следующие матричные представления

Machine Translated by Google

$$\rho = \begin{matrix} \rho_0 & & \\ & \rho_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \rho_N \end{matrix}, \quad \vartheta = \begin{matrix} \frac{1}{\nu_0} & & \\ & \frac{1}{\nu_1} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\nu_N} \end{matrix}, \quad \Pi_h = \begin{matrix} \Pi_{h,0}(t_0) & \Pi_{h,0}(t_1) & \dots & \Pi_{h,0}(t_N) \\ \Pi_{h,1}(t_0) & \Pi_{h,1}(t_1) & \dots & \Pi_{h,1}(t_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{h,N}(t_0) & \Pi_{h,N}(t_1) & \cdots & \Pi_{h,N}(t_N) \end{matrix}, \tag{11}$$

Уравнение (9) можно выразить как

$$u(t) \approx \sum_{i=0}^{N} U_h(t_i) E_i(t) = E^T U_h, \tag{12}$$

где $E = \rho \Pi \vartheta \Pi_h$ и $U_h = [U_h(t_0)\ U_h(t_1)\ \dots\ U_h(t_N)]^T$.

3.1. Дискретизация дробного дифференциального оператора в водной области

Теперь аппроксимируем произвольный нецелый порядок функции $u(t)$. Полагая, что $u(t) \in C^p([0, h])$, где $p = N + \gamma + 1$, представляющее пространство непрерывно дифференцируемых функций, $t > 0$ и $\gamma > 0$, то аппроксимация для произвольных не-целая производная $u(t)$ определяется выражением

$${}_0^C D_t^\gamma u(t) \approx \sum_{i=0}^{N} U_h(t_i) \rho_i \sum_{j=0}^{N} \Pi_{h,j}(t_i) \frac{1}{\nu_j} {}_0^C D_t^\gamma \Pi_{h,j}(t). \tag{13}$$

Производная дробного порядка полинома Чебышева ${}_0^C D_t^\gamma \Pi_{h,j}(t)$ получается используя форму полинома в виде ряда [56] следующим образом:

$${}_0^C D_t^\gamma \Pi_{h,j}(t) = j \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^{j-k}(j+k-1)!2^{2k}}{(j-k)!(2k)!} {}_0^C D_t^\gamma t^k = j \sum_{k=\lceil \gamma \rceil}^{j} \frac{(-1)^{j-k}(j+k-1)!2^{2k}\Gamma(k+1)}{(j-k)!(2k)!\Gamma(k-\gamma+1)} t^{k-\gamma}. \tag{14}$$

Приступая к аппроксимации $t^{k-\gamma}$ как линейной комбинации сдвинутых полиномов Чебышева первого рода в точках CGL, уравнение (14) теперь можно выразить как [39]:

$${}_0^C D_t^\gamma \Pi_{h,j}(t) \approx h^{-\gamma} D_\gamma \Pi_h, \tag{15}$$

где $h^{-\gamma} D_\gamma = \Omega \Phi \Omega^T \vartheta$ и Ω и Φ — матрицы, элементы которых определены следующее:

$$\Omega_{j,k} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-k}(j+k-1)!2^{2k}}{(j-k)!(2k)!h^\gamma}, & j = 0, k = 0 \\ j, & j = 1(1)N, k = 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \Omega_{k,k} = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\gamma+1)}, & k < \lceil \gamma \rceil \\ 1, & k = \lceil \gamma \rceil (1) N \end{cases},$$

$$\Phi_{p,k} = \frac{\sqrt{\pi}\, h^{k-\gamma+p} \Gamma(k-\gamma+p+\frac{1}{2})}{\Gamma(k-\gamma+p+1)}, \quad k < \lceil \gamma \rceil, \quad k = \lceil \gamma \rceil (1) N,\ p = 0(1)s,\ s = 0(1)N. \tag{16}$$

Следовательно, ${}_0^C D_t^\gamma u(t)$ теперь аппроксимируется как

$${}_0^C D_t^\gamma u(t) \approx (0, h D_\gamma)^T \text{ элементы}, \tag{17}$$

где $0, hD_\gamma = \rho \Pi$ матрица $\vartheta\, hD(\gamma) \Pi_h$. Мы имеем в виду $(0, hD_\gamma)^T$ как дробное дифференцирование в области $[0, h]$.

Machine Translated by Google

3.2. Дискретизация дробного дифференциального оператора в неперекрывающихся разделенных областях. Предположим, что u(t) определено в t [0, T], разбито на q неперекрывающихся подинтервалов, таких что 0 = t0 < t1 < . . . < tq = T и hl = tl tl 1 , l = 1(1)q. Предположим, что t [tl , tl+1] и γ 1 < γ γ ; затем,

$$
\begin{aligned}
{}_{0}^{C}D_{t}^{\gamma}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma-\gamma)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\gamma-\gamma-1}u^{\gamma}(\tau)d\tau \\
&= \sum_{e=1}^{l}{}_{te-1}^{C}D_{t}^{\gamma}u(t) + {}_{tl}^{C}D_{t}^{\gamma}u(t) \\
&= \sum_{e=1}^{l}\frac{1}{\Gamma(\gamma-\gamma)}\int_{te-1}^{te}(t-\tau)^{\gamma-\gamma-1}u^{\gamma}(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\gamma-\gamma)}\int_{tl}^{t}(t-\tau)^{\gamma-\gamma-1}u^{\gamma}(\tau)d\tau .
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Первый член в уравнении (18) — это «память», а последний член уравнения — это локальная производная u(t) произвольного порядка по t [tl , tl+1]. Производная произвольного порядка в первой подобласти является локальной и вычисляется без использования памяти. Два члена в уравнении (18) аппроксимируются отдельно. Если длина hl каждой подобласти [tl , tl+1] эквивалентна h (в результате дискретизации в одной области) в разделе 3.1, и мы размещаем в N + 1 различных точках CGL t , то второй член в уравнении (18) аппроксимируется следующим образом, где t

$$
{}_{tl}^{C}D_{t}^{\gamma}u(t) \quad (tl,hlD^{\gamma})^{T}\,Ульь,л, \qquad t \in [tl, tl+1].
\tag{19}
$$

Первый член в уравнении (18), «память», которая представляет собой произвольную производную нецелого порядка ${}_{te-1}^{C}D_{t}^{\gamma}u(t)$, аппроксимируется как

$$
{}_{te-1}^{C}D_{t}^{\gamma}u(t) \quad \sum_{я=0}^{H}Uh(te)_{я}i\sum_{j=0}^{H}Пhl,j(te)\,te_{я}^{C}{}_{te-1}D_{te}^{\gamma}Пhl,j(t), \qquad t_{я} \in [te-1, te].
\tag{20}
$$

Производная ${}_{te-1}^{C}D_{te}^{\gamma}Пhl,j(t)$ в точках КГЛ t аппроксимируется как ${}_{te-1}^{C}D_{te}^{\gamma}Пhl,j(tr)$ Θ, где элементы Θ определяются как

$$
Θj,r = \frac{0}{дж!\,\Gamma(\gamma-\gamma)(j-\gamma)!}\int_{te-1}^{te}(tp-\tau)^{\gamma-1}\gamma(\tau-te-1)^{j-\gamma}d\tau, \qquad \begin{matrix} j < \gamma \\ r\varepsilon[tl,tl+1] \\ j=\gamma(1)N,\ r=0(1)N. \end{matrix}
\tag{21}
$$

Интеграл в уравнении (21) можно вычислить с использованием любой квадратурной формулы, такой как квадратурные формулы Ньютона–Котеса или Гаусса. Следовательно, первый член уравнения (18) затем рассчитывается как

$$
\sum_{te=1}^{l}{}_{te-1}^{C}D_{te}^{\gamma}u(t) \quad \sum_{e=1}^{l}{}_{(te-1,te}Д^{\gamma})^{T}\,Ульь,е,
\tag{22}
$$

где Uhl ,e [te 1, = [Uhl (te 0) Uhl (te) = Уль(те Н)]T, т е точки CGL отображаются на te] и te 1 ,teD ρ ПТ гл Θ.

3.3. Псевдоспектральная дискретизация FIVP в неперекрывающейся разбитой области

Рассмотрим задачу дробного начального значения (FIVP).

$$
\begin{aligned}
&{}_{0}^{C}D_{t}^{\gamma}u(t) = ku(t) + f(t), \qquad t \in (0, T], \\
&u(0) = u0,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где k C и γ (0, 1). Предположим, что область [0, T] разбита на q неперекрывающихся областей, таких, что 0 = t0 < t1 < t2 < . . . < tq = T, и, как и раньше, определим hl = tl tl 1 ,

Machine Translated by Google

l = 1(1)q. Чтобы получить решение уравнения (23) в произвольной области [tl , tl+1], перепишем уравнение в виде

$$\sum_{e=1}^{л} {}_{te}^{C} D_{te-1}^{\gamma} и(т) + {}_{тл}^{C} D_{т}^{\gamma} u(t) = ku(t) + f(t), \quad t \in [tl , tl+1], \quad л = 1(1)q \quad 1, \tag{24}$$

$$и(0) = и0.$$

Предположим, что решение u(t) уравнения (24) можно аппроксимировать как линейную комбинацию функций, находящихся в пространстве сдвинутых полиномов Чебышева не более степени N на квадратуре CGL. Тогда, используя дискретизацию дифференциального оператора, приведенную в разделах 3.1 и 3.2, FIVP (24) теперь эквивалентна следующим алгебраическим системам:

$$(0,hlD_{1}^{\gamma}) TУл ,1 = E \, ж^{T1}$$
$$Уль(т_{0}^{1}) = u0, \quad t \in [t0, t1 \quad t0 + hl], \tag{25}$$

и

$$\sum_{e=1}^{л} (te_{1} ,teD_{д}^{\gamma}) TUhl ,e + (tl ,hlD_{л}^{\gamma}) TУл ,л = кE^{T}_{л} Уль,л + E^{T}_{л} ж$$
$$Уль(т_{0}^{л}) = Уль(t_{H}^{л-1}), \quad t \in [tl , tl+1 \quad tl + hl], \quad л = 2(1)q \quad 1, \tag{26}$$

где $f = [f(t_{0}^{л}), f(t_{1}^{л}), \ldots , f(t_{H}^{л}))]^{T}$ и l = 1(1)q.

3.4. Численная устойчивость схемы.

Устойчивость предлагаемого численного метода демонстрируется путем рассмотрения следующей дробно-линейной задачи с начальными значениями

$${}_{0}^{C} D_{т}^{\gamma} u(t) = ku(t), \quad к \in Cst \, Re (к) < 0, \quad \gamma \in (0, 1), \quad t \in [0, h], \quad h \in R+, \tag{27}$$

точное решение которой есть $u(t) = u0E_{\gamma,1}(кt^{\gamma})$, где $E_{\gamma,1}(\cdot)$ – двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера. Если рассматривать разбиение области [0, h] на q = h равные подобласти, то дискретизация модельного уравнения (27) предложенным численным методом в произвольной подобласти [tl , tl+1] [tl , tl + hl] получается как

$$\frac{1}{h^{\gamma}_{л}} (0,hlD_{л}^{\gamma})^{T} - кE^{T}_{л} Уль,л = \sum_{e=1}^{л} (te_{1} ,teD_{д}^{\gamma}) TУл ,e . \tag{28}$$

Здесь $(te_{1} ,teD_{e}^{\gamma})^{T}$ — матрица дифференцирования памяти, как в уравнении (22), $(0,hlD_{л}^{\gamma})^{T}$ — матрица дробного дифференцирования в одной области [0, hl] и $(tl ,hlD_{л}^{\gamma})^{T}$ это $\frac{1}{час^{\gamma}} (0,hlD_{л}^{\gamma}) T$.

Для исследования устойчивости предложенной псевдоспектральной численной схемы определим матрицу устойчивости

$$S(w) = [P \quad wQ] \quad 1R, \tag{29}$$

где $w = kh^{\gamma}$, а P, Q и R — матрицы, определяемые соответственно как l

Machine Translated by Google

$$
\Pi = \begin{pmatrix} (0,hlD\ \gamma_2)^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (0,hlD\ \gamma_3)^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (0,hlD\ \gamma_д)^T \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} E\ 0 \dots 0\ 2^T\ 0\ E\ 3^T \\ \dots\ 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0\ 0 \dots \quad э_q^T \end{pmatrix},
$$

$$
P = \begin{pmatrix} h\gamma_{(t0,t1D\ l} & \gamma & T \\ h\gamma_л\ (t0,t1D\ \gamma_1)^T & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h\gamma_{(t0,t1D\ l} & \gamma_{)q\ 1}^T & h\gamma_{(t1,t2D\ l} & \gamma_{)q\ 1}^T & \dots & h\gamma_l{}_{(tq\ 2,tq\ 1D} & \gamma_{)q\ 1}^T \end{pmatrix}. \tag{30}
$$

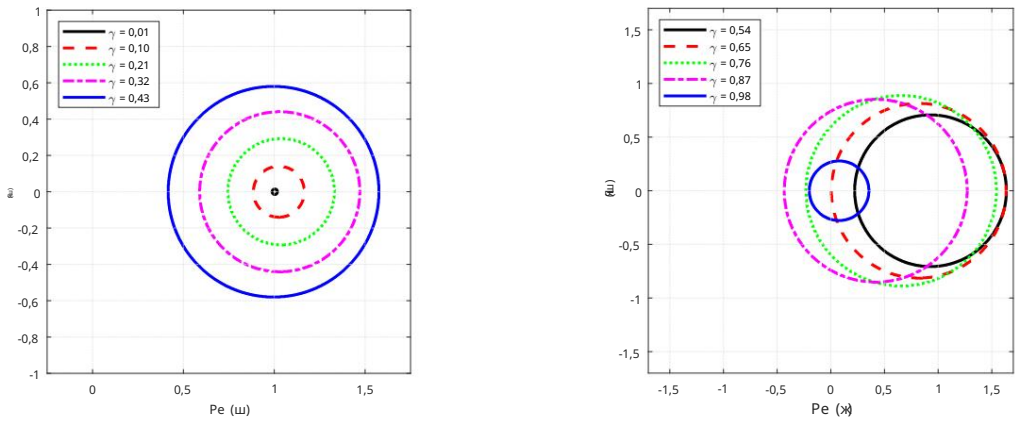
Устойчивость численной схемы определяется собственными значениями S(w). Область устойчивости численной схемы (28) обычно определяется набором точек на С-плоскости, для которых спектральный радиус или модуль доминирующего собственного значения меньше или равен 1. Если имеется более одного не-нулевое собственное значение с потенциалом пересечения порога устойчивости, равного 1, затем область устойчивости определяется путем рассмотрения этих собственных значений и областей, в которых эти собственные значения имеют величину меньше или равную1. Тогда общая область устойчивости численной схемы будет равна пересечение этих регионов. Если область устойчивости включает Re(w) 0 (вся левая половина С-плоскости), то численную схему называют абсолютно устойчивой (А-устойчивой) [58]. Если, помимо А-стабильности, предел доминирующего собственного значения стремится к нулю при стремлении w к , то численная схема называется Лкбич-устойчивой (L-стабильной) [59]. Свойство L-стабильности означает, что любые компоненты, которые могут вызвать нестабильность в числовой схеме, затухают по мере увеличения длины подобласти hl , что особенно важно при долгосрочном интегрировании жестких дифференциальных уравнений. Для иллюстрации в таблице 1 показаны доминирующее собственное значение, область устойчивости и свойство устойчивости для линейной дискретизации (N = 1) уравнения (28) с двумя подобластями (q = 2) для некоторых выбранных зна Как показано в таблице , областью устойчивости численной схемы является внешняя часть некоторых замкнутых дисков в С; границы этих дисков показаны на рис . 1. Как видно из рисунка, области устойчивости при = 0,01, 0,10, 0,21, 0,32, 0,43, 0,54, 0,65 удовлетворяют условиям абсолютной и Лкбичской устойчивости, поэтому численная схема при этих значениях абсолютно и Лкбич-стабильна. Однако численные схемы для = 0,76, 0,87, 0,98 не являются абсолютно устойчивыми и, как следствие, не L-стабильными.

На рисунке 2 представлены области устойчивости квадратичного приближения с q = 3 и q = 5 для = 0,21, 0,54, 0,98. Областью устойчивости на рисунке является область вне эллиптических дисков, из чего видно, что области устойчивости для подобластей q = 3 и q = 5 одинаковы. Однако в обоих случаях получается различное количество собственных значений, потенциально способных пересечь порог устойчивости. Для q = 3 существует одно ненулевое доминирующее собственное значение для = 0,21 и 0,54, и есть четыре ненулевых собственных значения для = 0,98 с потенциалом пересечения порога устойчивости 1. Для q = 5 = 0,21, 0,54, 0,98 имеют восемь ненулевых собственных значений, которые могут пересечь порог устойчивости. Однако, когда берется пересечение результирующих областей устойчивости этих собственных значений, для каждого проиллюстрированного значения получается одна и та же область устойчивости с q = 3, как показано на рисунке 2. На рисунке видно , что численные схемы для = 0,21 и = 0,54 абсолютно устойчивы, а схема при = 0,98 не абсолютно устойчива (условная устойчивость). Хотя общий вывод об устойчивости численной схемы сделать нельзя, из этого анализа можно сделать вывод, что абсолютно или условно устойчива численная схема зависит от значения произвольного нецелого порядка дробного дифференциального уравнения.

Machine Translated by Google

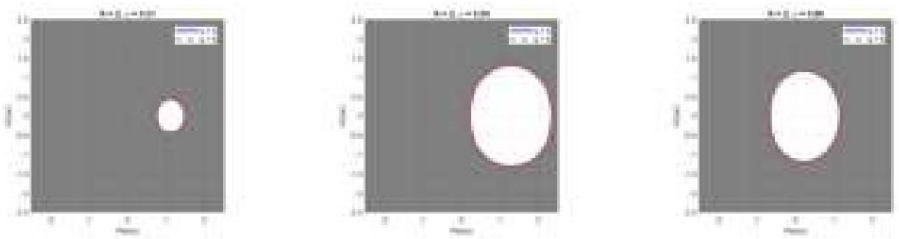
Таблица 1. Доминирующее собственное значение, область устойчивости и свойство устойчивости для некоторых выбранных значений произвольного порядка γ для линейного приближения (N = 1) с q = 2.

γ	Доминирующее собственное значение	Область стабильности	Свойство стабильности
0,01	$\frac{124958025860977}{9007199254740992w} \quad \frac{9034579827725136}{9007199254740992}$	$w - \frac{124958025860977}{9007199254740992}$	A – стабильный L – стабильный
0,10	$\frac{1254334826011059}{9007199254740992w} \quad \frac{9235870117935490}{9007199254740992}$	$w - \frac{1254334826011059}{9007199254740992}$	A – стабильный L – стабильный
0,21	$\frac{2627472107360489}{9007199254740992w} \quad \frac{9350065552559051}{9007199254740992}$	$w - \frac{2627472107360489}{9007199254740992}$	A – стабильный L – стабильный
0,32	$\frac{3959902260456486}{9007199254740992w} \quad \frac{9279409270142741}{9007199254740992}$	$w - \frac{3959902260456486}{9007199254740992}$	A – стабильный L – стабильный
0,43	$\frac{10428492653806604}{18014398509481984w} \quad \frac{17946001659717557}{18014398509481984}$	$w - \frac{10428492653806604}{18014398509481984}$	A – стабильный L – стабильный
0,54	$\frac{12700697864360454}{18014398509481984w} \quad \frac{16735571476860095}{18014398509481984}$	$w - \frac{12700697864360454}{18014398509481984}$	A – стабильный L – стабильный
0,65	$\frac{7316166143825643}{9007199254740992w} \quad \frac{7382436898791357}{9007199254740992}$	$w - \frac{7316166143825643}{9007199254740992}$	A – стабильный L – стабильный
0,76	$\frac{15952263845377693}{18014398509481984w} \quad \frac{11810807580156978}{18014398509481984}$	$w - \frac{15952263845377693}{18014398509481984}$	
0,87	$\frac{30618033637964479}{36028797018963968w} \quad \frac{15079171789616800}{36028797018963968}$	$w - \frac{30618033637964479}{36028797018963968}$	
0,98	$\frac{9934148207590571}{36028797018963968w} \quad \frac{2781302084999484}{36028797018963968}$	$w - \frac{9934148207590571}{36028797018963968}$	



(а) (б)

Рис. 1. Границы замкнутых дисков в таблице 1. Область устойчивости линейной дискретизации с двумя подобластями для указанных значений произвольного нецелого порядка, (а) γ = 0,01, 0,10, 0,21, 0,32, 0,43 и (б) γ = 0,54, 0,65, 0,76, 0,87, 0,98 лежит вне этих кругов.



(а) (б) (с)

Рис. 2. Области устойчивости квадратичных приближений с q = 3 и q = 5 для γ = 0,21 (а), γ = 0,54 (б) и γ = 0,98 (в). Области устойчивости — это заштрихованные области, расположенные за пределами эллиптических дисков.

Machine Translated by Google

4. Численные эксперименты и результаты.

В этом разделе представлена серия численных примеров, от одиночных линейных уравнений до систем нелинейных уравнений, а также результаты. Подробный анализ результаты для каждого примера представлены для иллюстрации основных наблюдений. Для всестороннего понимание численных методов, используемых в этих примерах, см. в описании предусмотрено в разделе 3.

Пример 1. Рассмотрим дробно-линейное дифференциальное уравнение [60]

$$ {}_{0}^{C}Д_{т}^{\gamma}\, u(t) + u(t) = \frac{2t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} - \frac{т^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} + т^{2}, \quad t,\ 0 < \gamma \le 1,\ t \in [0, T], \tag{31} $$

с начальным условием u(0) = 0 и точным решением u(t) = t 2 т.

В табл. 2 представлена абсолютная ошибка между приближенным и точным решением с использованием не пересекающийся многодоменный псевдоспектральный метод с квадратурой CGL и полиномы Чебышева как базисные функции. В таблице также приведены числовые результаты. получается без декомпозиции области. Этот сравнительный анализ подчеркивает точность и эффективность многодоменного подхода в уменьшении ошибок и улучшении точность численного решения. Из таблицы видно, что для дробного числа порядка γ = 0,5, хотя максимальная абсолютная ошибка в многодоменной установке не не уменьшается в терминах значащих нулей, а уменьшается с увеличением q . Это указывает на то, хотя и минимальное, но есть преимущество в использовании большего количества поддоменов. Сравнивая погрешности однодоменного результата, в ошибке однодоменного результата присутствует дополнительный значащий ноль. многодоменный подход, что указывает на то, что многодоменный подход более эффективен для этой проблемы.

Таблица 2. Максимальная абсолютная ошибка для примера 1 в однодоменных и многодоменных установках.

	N = 10, γ = 0,5			H = 10, T = 6,0		
д	T = 1,0	T = 3,0	T = 6,0	γ = 0,2	γ = 0,6	γ = 0,8
5	7,7426 × 10–5	6,2253 × 10–4	2,7903 × 10–3	1,3625 × 10–3	3,6161 × 10–3	5,2468 × 10 3
10	4,0800 × 10–5	5,2107 × 10–4	2,2192 × 10–3	6,7562 × 10–4	1,9440 × 10–3	2,8829 × 10 3
20	2,3538 × 10–5	4,4940 × 10–4	1,8850 × 10–3	4,4076 × 10–4	1,5245 × 10–3	2,1135 × 10 3
50	2,0489 × 10–5	4,1298 × 10–4	1,6596 × 10–3	3,8984 × 10–4	1,2966 × 10–3	1,5794 × 10 3
100	2,0286 × 10–5	4,0279 × 10–4	1,6132 × 10–3	3,8131 × 10–4	1,2746 × 10–3	1,4322 × 10 3
200	2,0374 × 10–5	4,0190 × 10–4	1,6047 × 10–3	3,8224 × 10–4	1,2946 × 10–3	1,3898 × 10 3
			Один домен			
	3,3518 × 10 4	1,0362 × 10 3	2,1415 × 10–3	9,0794 × 10–4	2,5580 × 10 3	2,9839 × 10 3

Из таблицы 2 можно сделать вывод об эффективности предлагаемого численного метода при получении точное приближенное решение линейного ФДУ очевидно, поэтому в следующих примерах мы рассмотрим нелинейные FDE для дальнейшей проверки численного метода.

Пример 2. Рассмотрим нелинейное дробное дифференциальное уравнение [60]

$$ {}_{0}^{C}Д_{т}^{\gamma}\, и(т) - ты^{2}(т) = \frac{2}{(т+1)^{2}}, \quad 0 < \gamma \le 1,\ t \in [0, T], \tag{32} $$

где начальным условием является u(0) = 2, а точное решение при γ = 1 определяется выражением u(t) = $\frac{2}{(т+1)}$.

Machine Translated by Google

В таблице 3 показано приближенное решение, полученное с использованием двух разных подобластей, в предлагаемом способе. Решения в этих подобластях соответствуют числовым значениям сообщили Одибат и Момани [60]. Следует отметить, что решения закрытой формы для $\gamma = 0,2$ и $\gamma = 0,4$ недоступны. Однако при $\gamma = 1$ точность предложенного метод не подлежит сомнению. Чтобы еще больше убедиться в точности предлагаемого метода, Таблица 4 показывает, что остаточная ошибка стабильно близка к нулю для различных значений. γ. Это говорит о том, что предлагаемый метод эффективно решает проблему примера 2.

Таблица 3. Приблизительное решение примера 2 с использованием двух разных подобластей q и численного значения, указанные в Одибате и Момани [60].

τ	$\gamma = 0,2$			$\gamma = 0,4$			$\gamma = 1,0$		
	$q = 10$	$q = 20$	Сообщено [60]	$q = 10$	$q = 20$	Сообщено [60]	$q = 10$	$q = 20$	Точный
0,0	-2,0000	-2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000
0,2	-1,4454	-1,4455	1,4864	1,4874	1,4874	-1,4899	1,6666	1,6666	1,6666
0,4	-1,3295	-1,3296	1,3665	1,3506	1,3506	1,3525	1,4285	1,4285	1,4285
0,6	-1,2477	-1,2478	1,2822	1,2525	1,2526	1,2541	1,2500	1,2500	1,2500
0,8	–1,1867	–1,1868	1,2192	1,1774	1,1774	1,1787	1,1111	1,1111	1,1111
1,0	-1,1396	-1,1397	1,1704	1,1177	1,1178	1,1189	0,9999	1,0000	1,0000

Таблица 4. Остаточные ошибки примера 2 в выбранных точках с использованием двух разных подобластей q для различные значения дробного порядка γ.

τ	$\gamma = 0,2$		$\gamma = 0,4$		$\gamma = 0,6$	
	$q = 10$	$q = 20$	$q = 10$	$q = 20$	$q = 10$	$q = 20$
0,2	$4,4230 \times 10^{-9}$	$4,8561 \times 10^{-13}$	$9,7841 \times 10^{-11}$	$9,2539 \times 10^{-12}$	$3,2469 \times 10^{-10}$	$5,2865 \times 10^{-11}$
0,4	$9,3414 \times 10^{-13}$	$2,1760 \times 10^{-13}$	$1,6637 \times 10^{-11}$	$3,8897 \times 10^{-12}$	$9,3717 \times 10^{-11}$	$2,0417 \times 10^{-11}$
0,6	$4,9305 \times 10^{-13}$	$1,2423 \times 10^{-13}$	$8,9744 \times 10^{-12}$	$2,1446 \times 10^{-12}$	$4,9785 \times 10^{-11}$	$1,1396 \times 10^{-11}$
0,8	$2,8477 \times 10^{-13}$	$7,1831 \times 10^{-14}$	$5,4355 \times 10^{-12}$	$1,3228 \times 10^{-12}$	$3,0330 \times 10^{-11}$	$7,1187 \times 10^{-12}$
1.0	$1,7807 \times 10^{-13}$	$4,6629 \times 10^{-14}$	$3,5078 \times 10^{-12}$	$8,6397 \times 10^{-13}$	$1,9900 \times 10^{-11}$	$4,6949 \times 10^{-12}$

Пример 3. Далее рассмотрим нелинейное дробное дифференциальное уравнение [61]

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\gamma} u(t) + u(t)^{2} = \frac{2t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} - \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} + (t^{2} - t + 1)^{2}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad t \in [0, T], \tag{33} $$

с начальным условием $u(0) = 1$ и точным решением которого является $u(t) = t^{2} - t + 1$.

В табл. 5 представлена максимальная абсолютная ошибка разности между точным и приближенные решения, полученные с помощью нашего многодоменных и однодоменных методов. Это Из таблицы видно, что имеется соответствие тенденции, наблюдаемой в таблице 2. Поскольку область определения ФДУ становится больше, ошибка в однодоменной схеме ухудшается; однако, по сравнению с этим, величина ошибок лучше для многодоменной схемы. Заметим, что величина ошибки увеличивается с ростом γ, аналогично тенденции наблюдается в таблице 2.

Machine Translated by Google

Таблица 5. Максимальная абсолютная ошибка разности точного и приближенного решений примера 3 для различного количества поддоменов, q.

	N = 10, γ = 0,5			H = 10, T = 6,0		
д	T = 1,0	T = 3,0	T = 6,0	γ = 0,2	γ = 0,6	γ = 0,8
5	6,5833 × 10–5	4,5300 × 10–4	7,7010 × 10–4	1,6897 × 10–4	9,9126 × 10–4	1,0256 × 10 3
10	3,6216 × 10–5	2,6020 × 10–4	4,7125 × 10–4	1,0248 × 10–4	6,3577 × 10–4	7,4647 × 10 4
20	1,9347 × 10–5	1,3492 × 10–4	2,8073 × 10–4	5,5876 × 10–5	3,9608 × 10–4	5,1975 × 10 4
50	1,6865 × 10–5	8,2634 × 10–5	1,3621 × 10–4	2,3143 × 10–5	2,0636 × 10–4	3,2248 × 10 4
100	1,6547 × 10–5	6,7163 × 10–5	8,2558 × 10–5	1,0361 × 10–5	1,1932 × 10–4	2,1211 × 10 4
200	1,6576 × 10–5	5,9548 × 10–5	6,7326 × 10–5	7,5375 × 10–6	7,6523 × 10–5	1,3480 × 10 4
			Один домен			
	3,1847 × 10 4	9,0415 × 10 4	1,7639 × 10–3 6,1773 × 10–4		1,9684 × 10 3	2,2669 × 10 3

Пример 4. Рассмотрим начальное дробно-однородное дифференциальное уравнение Бэгли–Торвика

$$C_0 Д^{\gamma} u(t) + u''(t) + u(t) = 0, \text{ для } t \in (0, T] \text{ и } \gamma \in (1, 2), \quad (34)$$

при начальных условиях u(0) = 1,0 и u′ (0) = 0.

Если мы заменим правую часть уравнения (34) на $2 + 4\frac{\sqrt{\tau}}{\pi^2} + \tau$ и положим $t \in (0, 1]$, при стартовых условиях u(0) = 0,0 и $u'(0) = 0$, решение в замкнутой форме имеет вид задано как $u(t) = t^2$ когда γ = 1,5. В табл. 6 представлены ошибки, полученные при принятии абсолютных значение разницы между численными решениями, полученными с помощью многодоменного технику и точные решения, и они сравниваются с ошибками, полученными с помощью метод эволюционных искусственных нейронных сетей в исследовании Раджи и др. [62].

Таблица 6. Абсолютные погрешности разности точного и численного решений примера 4 при разных значениях t с использованием N = 12 и q = 400 по сравнению с ошибками, указанными в работе Раджа и др. [62].

т	Точное решение	Текущий результат	Текущая ошибка	Сообщенная ошибка [62]
0,1	0,01	0,01000	1,83183 × 10–7	5,48 × 10 5
0,3	0,09	0,09005	1,26966 × 10–6	2,66 × 10–3
0,5	0,25	0,25014	6,69388 × 10–6	1,67 × 10 2
0,7	0,49	0,49026	3,40281 × 10–5	5,80 × 10 2
0,9	0,81	0,81040	1,25968 × 10–4	1,50 × 10–1
1,0	1,00	1,00048	2,12565 × 10–4	2,25 × 10–1

В таблице 6 сравниваются точные и приближенные решения, полученные с помощью многодоменного метода при различных значениях t, и связанные с ними ошибки при каждом t. Ошибки по сравнению с полученными Raja et al. [62]. Из таблицы видно, что приближенные решения лучше соответствуют точным решениям, чем результаты Raja et al. [62], и это подтверждает эффективность предлагаемого метода, поскольку он превосходит нейронную сеть подход, известный как эффективный и надежный.

Для дальнейшей проверки точности предлагаемого многодоменного метода бесконечность представлена норма остатка для различного количества поддоменов. В таблице 7 приведены бесконечность нормы остаточных ошибок для примера 4. Остаточная ошибка получается через дискретный эквивалент уравнения (34), определяемый формулой

$$\text{Остаток} = \sum_{e=1}^{л} (te\ 1, teD_{д})^{\gamma} TUhl, e + (tl, hlD_{л})^{\gamma} TUhl, l + (tl, hlD2\ l) TUhl, l + E_{л}^{T} Уль, л. \quad (35)$$

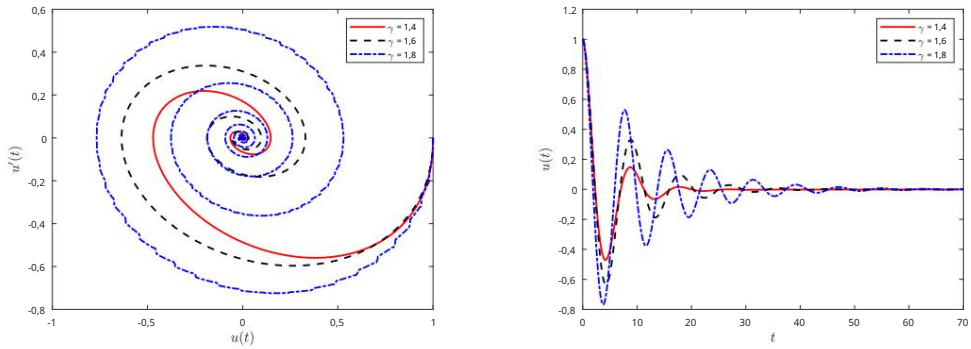
Machine Translated by Google

Из табл. 7 видно, что метод эффективен при решении дифференциалов дробного порядка.
уравнения изменяющихся значений произвольного нецелого порядка, поскольку остаточная ошибка остается
очень мал для различных дробных порядков, что демонстрирует эффективность многодоменного метода.

Таблица 7. Максимальные остаточные погрешности для примера 4 для различных значений T, дробных порядков и различное количество мультидоменов, q.

	N = 10, γ = 1,5			H = 10, T = 6,0		
д	T = 1,0	T = 3,0	T = 6,0	γ = 1,2	γ = 1,6	γ = 1,8
10	1,115 × 10–10	1,158 × 10–11	1,933 × 10–12	1,031 × 10–12	1,870 × 10–12	3,445 × 10 12
20	7,346 × 10–10	6,618 × 10–11	1,158 × 10–11	1,078 × 10–11	2,104 × 10–11	2,765 × 10 11

Для дальнейшей проверки полученных результатов воспроизведем полученные профили решений.
Зафари др. [63] и наблюдали превосходное согласие результатов, как показано на рисунке 3.



(а) (б)

Рис. 3. Динамика уравнения Бэгли–Торвика (34) для различных значений γ с T = 70,
N = 10 и q = 400: (а) фазовый портрет для u u ' плоскость и (б) профиль u(t).

В остальных примерах этого раздела мы рассматриваем системы связанных дробных чисел.
задачи начального значения, описывающие хаотические системы. Эти уравнения часто демонстрируют
долгосрочную динамику и неизменно требуют долгосрочного интегрирования, чтобы полностью понять
задействована основная динамика. Поэтому численный метод, такой как многодоменный
Псевдоспектральный метод Чебышева, способный обеспечить долговременное интегрирование, идеально подходит
для решения таких систем, что подтверждается результатами следующих четырех примеров.

Пример 5. Рассмотрим дробную хаотическую систему дифференциальных уравнений, описывающую
электрическая система с памятью [64]

$$
\begin{aligned}
{}_{0}^{C}Д_{\tau}^{\gamma}\ и1(\tau) &= \frac{и2(\tau)}{с}, \\
{}_{0}^{C}Д_{\tau}^{\gamma}\ и2(\tau) &= \frac{1}{л}\ u1(t) + \beta u2(t)(u3(t))2 \quad \beta u2(t), \\
{}_{0}^{C}Д_{\tau}^{\gamma}\ u3(t) &= u2(t) \quad \alpha u3(t) + u2(t)u3(t), \qquad t \in (0, T], \gamma \in (0, 1],
\end{aligned}
\tag{36}
$$

при условии следующего начального состояния (0,1, 0,0, 0,1). Здесь с = 0,70, L = 3,00, β = 1,10 и
α = 0,60. Напряжение на конденсаторе представлено переменной u1(t), а ток
через индуктор L представлен переменной u2(t), а внутреннее состояние мемристива
система обозначается переменной u3(t).

Средняя максимальная остаточная ошибка для системы (36) приведена в табл. 8. Заметим
при этом максимальные остаточные погрешности, представленные в таблице 8 и последующих таблицах настоящего документа,

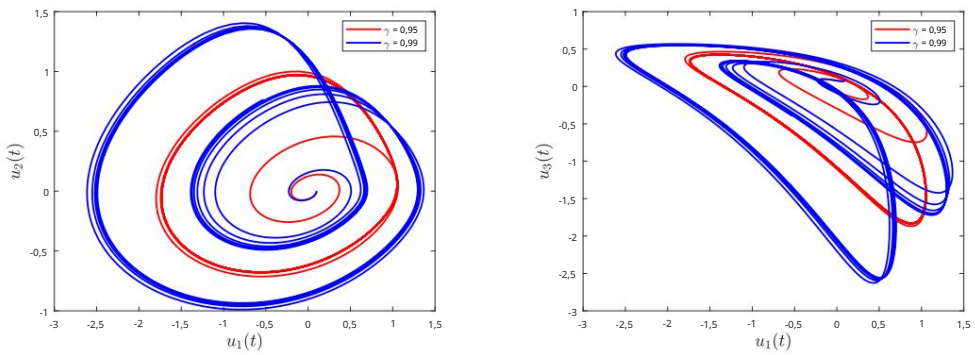
Machine Translated by Google

секции получаются как среднее максимальных невязок уравнений системы.
Остатки рассчитываются аналогично уравнению(35). Из таблицы8 видно, что для
различных дробных порядков и, казалось бы, больших областей [0, T], высокий уровень точности
получен ный при использовании многодоменного псевдоспектрального метода Чебышева. Из-за
по своей сути хаотичный характер проблемы, динамика системы обычно требует
большой физической области для полной разработки и эффективного захвата этих сложных долгосрочных
поведения, физический домен разделен на большое количество более мелких поддоменов.
Из таблицы видно, что среднее значение максимальных остаточных ошибок уменьшается незначительно.
по мере увеличения количества поддоменов. Эта обратная зависимость между числом
поддоменов, а остаточная ошибка подчеркивает применимость многодоменного подхода.
метод при работе такого рода системами, требующими долгосрочной интеграции. Этот
особенно очевидно, когда ошибку сравнивают с ошибкой, связанной с однодоменным методом. Как уже
наблюдалось в предыдущих примерах и теперь подтверждается
по табл. 8 ошибка, связанная с однодоменным методом, больше, чем ошибка
получается при использовании многодоменного подхода.

Таблица 8. Остаточные ошибки для примера 5 для двух значений T при N = 10 и для разных чисел подобластей q с c = 0,70, L = 3,00, β = 1,10 и α = 0,60.

	T = 20,0			T = 50,0		
д	γ = 0,7	γ = 0,8	γ = 0,9	γ = 0,7	γ = 0,8	γ = 0,9
100	2,515 × 10–11	7,810 × 10–12	8,503 × 10–12	8,781 × 10–11	3,336 × 10–11	8,054 × 10 10
200	9,780 × 10–12	2,590 × 10–12	2,144 × 10–12	3,434 × 10–11	1,113 × 10–11	1,935 × 10 10
300	5,544 × 10–12	1,365 × 10–12	9,795 × 10–13	1,973 × 10–11	5,817 × 10–12	8,468 × 10 11
400	3,717 × 10–12	8,632 × 10–13	5,718 × 10–13	1,319 × 10–11	3,701 × 10–12	4,723 × 10 11
500	2,720 × 10–12	6,125 × 10–13	4,095 × 10–13	9,769 × 10–12	2,592 × 10–12	3,004 × 10 11
			Один домен			
	2,397 × 10 9	2,439 × 10 9	1,920 × 10–7 3,101 × 10–8		4,108 × 10 7	5,427 × 10 7

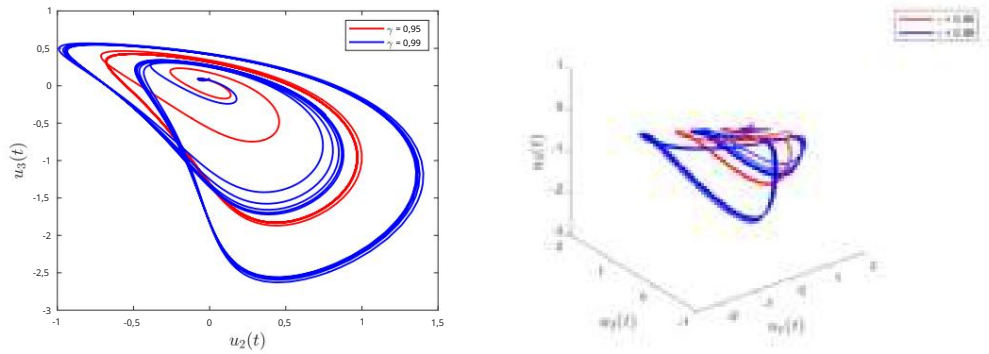
Чтобы придать дополнительную достоверность численным результатам этого примера, мы воспроизводим
динамика в виде фазовых портретов мемристивной хаотической электрической системы как
сообщается в работе Сене [64]. Как показано на рисунке 4, существует отличное согласие
между этими фазовыми портретами и портретами работы Сена [64].



(а) (б)

Рисунок 4. Продолжение.

Machine Translated by Google



(в) (г)

Рис. 4. Фазовые портреты хаотических систем (36) для плоскости u1 u2 (а), плоскости u1 u3 (б), плоскости u2 u3 (в) и поверхности u1 u2 u3 с γ = 0,95 и 0,99, T = 250, N = 13 и q = 850.

Пример 6. Рассмотрим дробные модифицированные дифференциальные уравнения растяжения-скручивания [65]

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^{\gamma} u1(t) &= \Omega 1 u3(t) \quad 8u1(t)u2(t), \; t \quad (0, T], \; \gamma \quad (0, 1], \\ {}_0^C Д\gamma_т \; u2(t) &= 11(u1(t))2 + 3(u2(t))2 + (u3(t))2 + \Omega 2 u1(t)u3(t) \quad 3\Omega 2 \quad 3, \\ {}_0^C D_t^{\gamma} u3(t) &= 2\,1 \quad \Omega 4\, u2(t)u3(t) \quad \Omega 1 u1(t) \quad \Omega 2 u1(t)u2(t), \end{aligned} \tag{37}$$

в начальном состоянии (0,2, 0,2, 0,2) с γ = 1,00, Ω1 = 0,2, Ω2 = 2,0, Ω3 = 1,0 и Ω4 = 0,1.

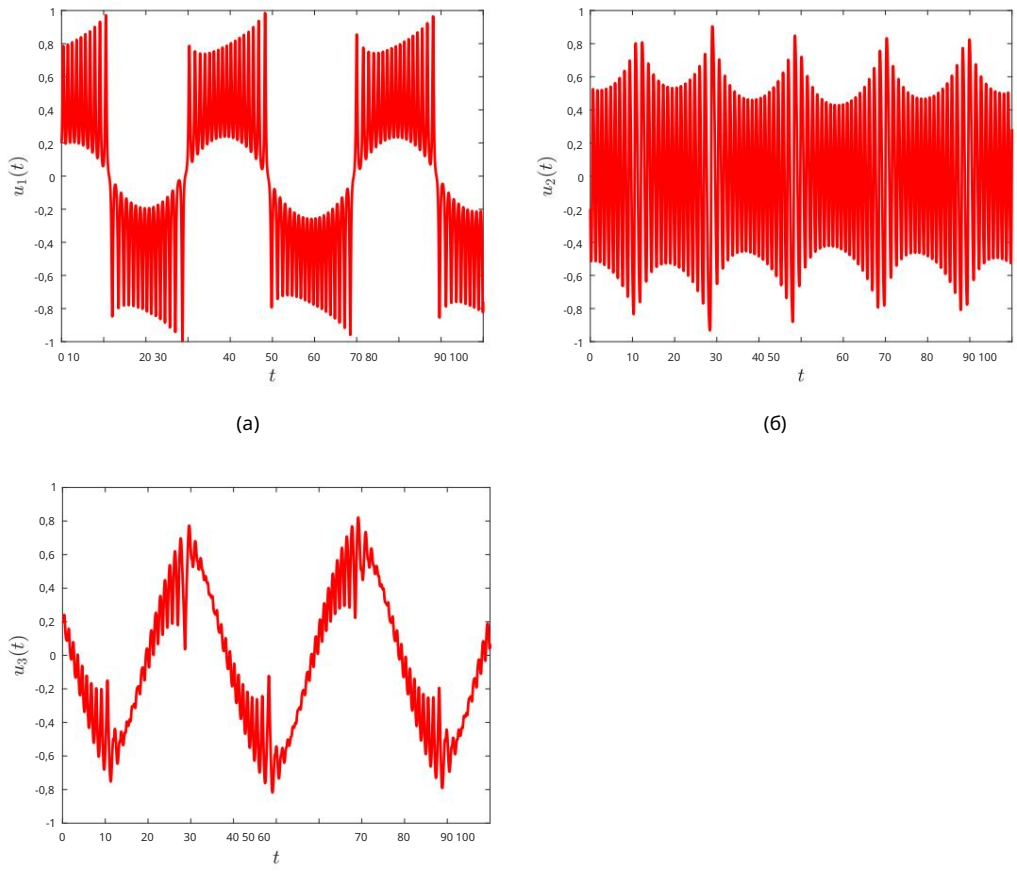
Как и в предыдущем примере, для полной стабилизации и развития этой системы обычно требуется большая физическая область, а при решении в одной области численное решение нестабильно, о чем свидетельствуют средние остаточные ошибки в одной области, представленные в таблице 9. Мы представляем средние максимальные остаточные ошибки для различных дробных порядков и относительно больших областей [0, T] для различного относительно большого числа подобластей в Таблице 9. Существует согласие между уровнем точности, наблюдаемым для результатов в Таблице 9. 9 и полученные в предыдущих примерах. Показано, что ошибка, полученная для различных используемых номеров подобластей, невелика, что указывает на то, что предлагаемый многодоменный псевдоспектральный метод Чебышева эффективно решает эту систему ФДУ. По мере увеличения q наблюдается улучшение средней невязки, что приводит к повышению точности. Превосходная эффективность многодоменного подхода по сравнению с однодоменной численной схемой становится в этом примере немного более очевидной. В этом случае наблюдается, что однодоменная численная схема дает довольно большие численные ошибки, тогда как многодоменный метод может достичь более высокого уровня точности. Такое несоответствие в уровне производительности подчеркивает ограничение возможностей однодоменной схемы, в то время как многодоменный подход демонстрирует надежность и универсальность, особенно для сложных систем, подобных той, которая рассматривается в этом примере.

На рис. 5 показано поведение профилей решения при изменении t. Результаты соответствуют ожиданиям и полностью согласуются с результатами Azam et al. [65]. На рисунке 6 также видно, что хаотическая система проходит через различные состояния, поворачиваясь и скручиваясь вокруг квадрантов. Эта динамика также была зафиксирована Азамом и др. [65] и подтверждает численные результаты, представленные в этом исследовании.

Machine Translated by Google

Таблица 9. Средние максимальные остаточные ошибки для примера 6 для двух значений T и разных количества подобластей q с использованием N = 10. Используются следующие значения параметров: Ω1 = 0,2, Ом2 = 2,0, Ом3 = 1,0 и Ом4 = 0,1.

	T = 20,0			T = 50,0		
д	γ = 0,7	γ = 0,8	γ = 0,9	γ = 0,7	γ = 0,8	γ = 0,9
100	1,292 × 10–8	4,793 × 10–8	2,171 × 10–8	1,364 × 10–10	1,059 × 10–8	4,952 × 10 8
200	1,883 × 10–8	1,192 × 10–8	6,393 × 10–9	1,060 × 10–8	2,928 × 10–8	4,607 × 10 8
300	8,108 × 10–9	5,539 × 10–9	3,267 × 10–9	1,826 × 10–8	3,502 × 10–8	1,144 × 10 8
400	4,546 × 10–9	3,223 × 10–9	1,790 × 10–9	2,750 × 10–8	1,284 × 10–8	1,065 × 10 8
500	3,082 × 10–9	2,098 × 10–9	1,182 × 10–9	1,883 × 10–8	1,194 × 10–8	6,393 × 10 9
			Один домен			
	1,730 × 101	1,999 × 101	2,419 × 101	8,388 × 101	2,195 × 10–1	4,131 × 101



(а) (б)

(в)

Рис. 5. Временная эволюция u1(t), u2(t), u3(t) хаотической системы (37) с γ = 1,00, Ω1 = 0,2, T = 100, N = 13 и q = 350.

Machine Translated by Google

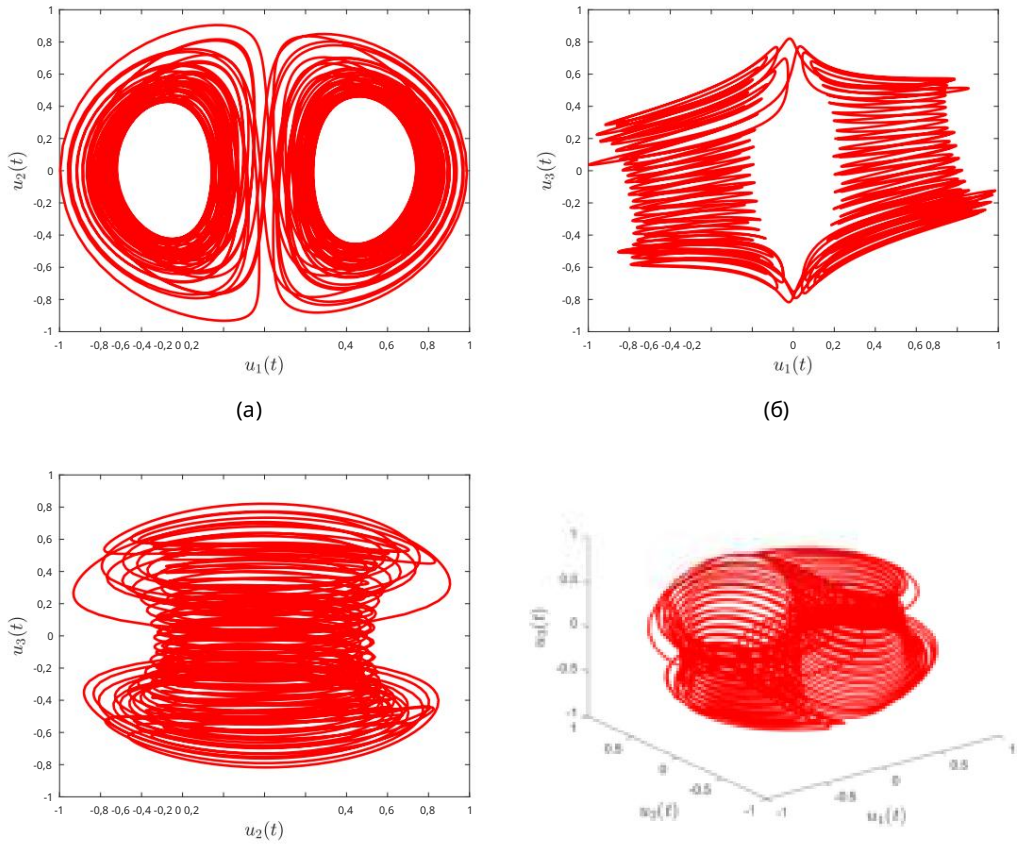


Рис. 6. Фазовые портреты хаотической системы (37) для плоскости u1 u2 (а), плоскости u1 u3 (б), (в) плоскость u2 u3 и (г) поверхность u1 u2 u3 с γ = 1,00, Ω1 = 0,2, T = 100, N = 13 и q = 350.

Пример 7. Рассмотрим дробные дифференциальные уравнения Рёсслера [66]

$$\begin{aligned} {}_0^C D_\tau^\gamma u1(t) &= u2(t) \quad u3(t), \; t \in (0, T], \; \gamma \in (0, 1], \\ {}_0^C D_\tau^\gamma u2(t) &= u1(t) + \Psi 1 u2(t), \\ {}_0^C D_\tau^\gamma u3(t) &= 0{,}2 + u1(t)u3(t) \quad 10u3(t), \end{aligned} \tag{38}$$

со следующими начальными условиями: (1, 1, 1), с Ψ1 = 0,4 и γ = 0,9.

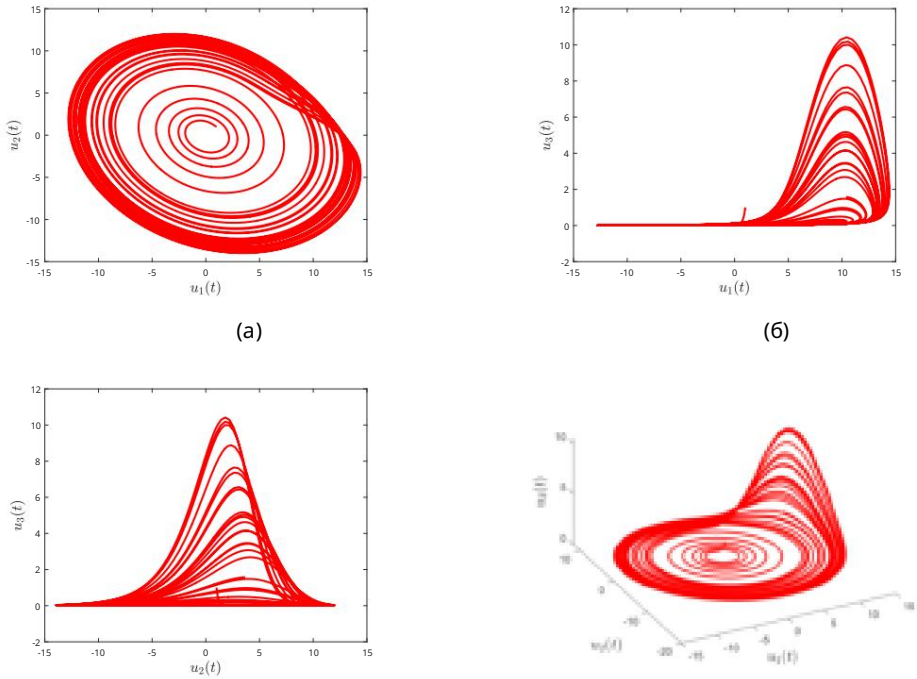
В таблице 10 показаны средние максимальные остаточные ошибки для уравнения (38) для выбранных значения произвольного нецелого порядка γ и для двух областей (0, T]. Результаты представлены для разного числа разложений доменов. Из таблицы 10 мы видим, что остаточные ошибки малы, что указывает на точность приближенных решений. Как и было подтверждено несколько раз в этом исследовании, увеличение количества используемых поддоменов приводит к более точным решениям. Также показано, что использование однодоменного подхода приводит к меньшей точности получаемых приближенных решений.

Machine Translated by Google

Таблица 10. Остаточные ошибки для примера 7 в два последних момента времени T с использованием количества точек сетки N = 10 для различного числа подобластей q и Ψ1 = 0,40.

	T = 20,0			T = 50,0		
д	γ = 0,7	γ = 0,8	γ = 0,9	γ = 0,7	γ = 0,8	γ = 0,9
100	1,073 × 10–7	4,973 × 10–8	1,171 × 10–8	1,469 × 10–7	1,469 × 10–7	1,893 × 10 7
200	5,544 × 10–8	1,857 × 10–8	3,569 × 10–9	1,269 × 10–7	6,666 × 10–8	4,696 × 10 8
300	3,479 × 10–8	1,015 × 10–8	1,740 × 10–9	9,241 × 10–8	3,853 × 10–8	3,299 × 10 8
400	2,459 × 10–8	6,520 × 10–9	1,042 × 10–9	6,979 × 10–8	2,574 × 10–8	1,933 × 10 8
500	1,859 × 10–8	4,653 × 10–9	7,023 × 10–10	5,544 × 10–8	1,857 × 10–8	1,189 × 10 8
			Один домен			
	1,594 × 10 4	2,218 × 10 4	6,733 × 10–5 1,725 × 10–4		2,518 × 10 4	3,726 × 10 4

На рис. 7 показаны фазовые портреты хаотической системы, и результат согласуется с результаты, полученные Li et al. [66], тем самым подтверждая настоящие численные решения.



(а) (б)

(в) (г)

Рис. 7. Фазовые портреты хаотических систем (38) для плоскости u1 -u2 (а), плоскости u1 - u3 (б), (в) плоскость u2 u3 и (г) поверхность u1 u2 u3 с γ = 0,90, Ψ1 = 0,4, T = 200, N = 10 и q = 900.

Пример 8. Рассмотрим следующую юнелинейную дробно-хаотическую юсистему [67]

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^{\gamma} u1(t) &= \Psi 1 u1(t) + u2(t) + u2(t)u3(t), \quad t \in (0, T], \gamma \in (0, 1], \\ {}_0^C D_t^{\gamma} u2(t) &= -u1(t)u3(t) + u2(t)u3(t), \\ {}_0^C D_t^{\gamma} u3(t) &= -\Psi 2 u3(t) - \Psi 3 u1(t)u2(t) - m1, \end{aligned} \tag{39}$$

с начальным состоянием, заданным как (0,2, 0,2, 0,2), Ψ1 = Ψ2 = Ψ3 = 1,0, m1 = 0,0 и γ = 0,9.

В таблице 11 средние максимальные остаточные ошибки, полученные для уравнения (39), равны представлено. Из таблицы видно, что увеличение количества разделенных доменов приводит к более высокой точности получаемых приближенных решений для выбранных дробных порядков и домены. Средние максимальные остаточные ошибки невелики, что подтверждает тот факт, что

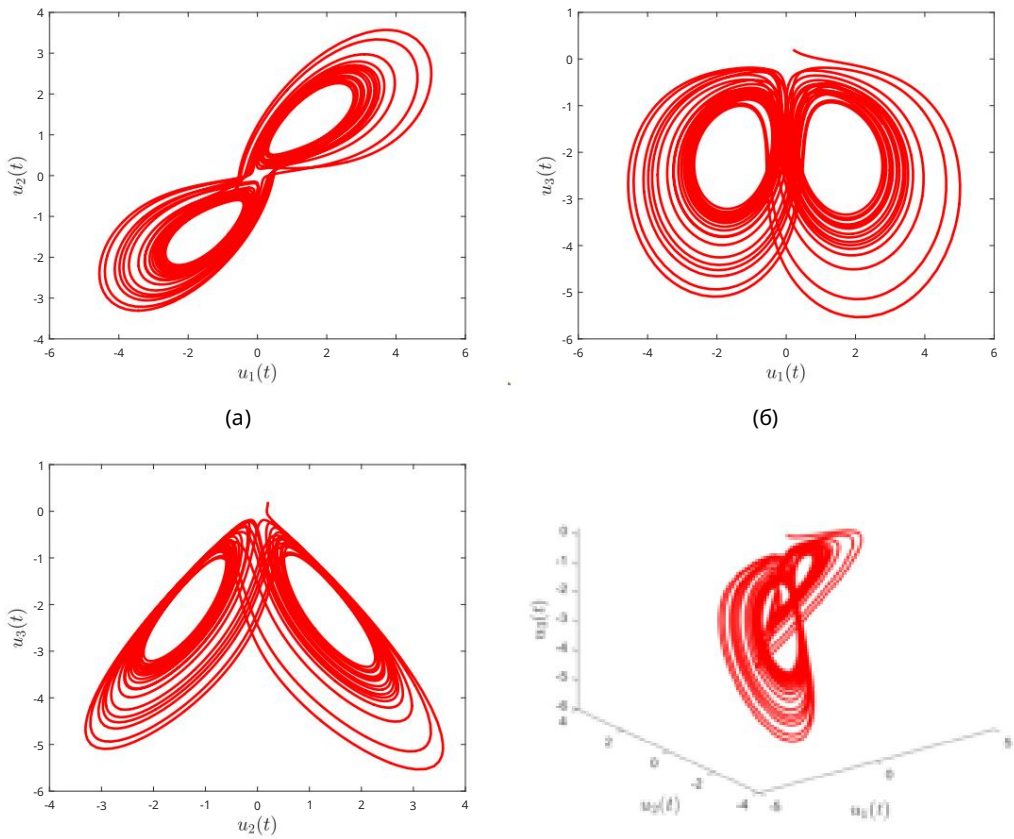
Machine Translated by Google

предлагаемый многодоменный метод очень эффективен для этой дробной дифференциальной модели, в отличие от однодоменного подхода, который не так точен.

Таблица 11. Средние максимальные остаточные ошибки для примера 8 в двух разных областях (0, T] с N = 10 для различного числа подобластей q, Ψ1 = Ψ2 = Ψ3 = 1,0 и m1 = 0,0.

	T = 20,0			T = 50,0		
д	γ = 0,7	γ = 0,8	γ = 0,9	γ = 0,7	γ = 0,8	γ = 0,9
100	4,114 × 10–8	6,012 × 10–8	5,802 × 10–8	2,142 × 10–7	1,226 × 10–7	2,711 × 10 7
200	1,305 × 10–8	1,673 × 10–8	1,559 × 10–8	5,335 × 10–8	6,845 × 10–8	7,236 × 10 8
300	6,155 × 10–9	7,361 × 10–9	7,034 × 10–9	3,422 × 10–8	4,357 × 10–8	4,049 × 10 8
400	3,398 × 10–9	4,196 × 10–9	3,935 × 10–9	2,050 × 10–8	2,575 × 10–8	2,436 × 10–8
500	2,195 × 10–9	2,720 × 10–9	2,540 × 10–9	1,304 × 10–8	1,676 × 10–8	1,559 × 10 8
			Один домен			
	3,055 × 10 2	1,225 × 10 2	9,667 × 10–1 2,279 × 10–2		6,453 × 101	4,708 × 101

Фазовые портреты хаотической системы представлены на рисунке 8. Рисунок подтверждает динамика, о которой сообщает Сене [67] и находится в превосходном согласии с ранее полученными опубликованный результат. Согласие представленных здесь фазовых портретов с теми, которые документально подтвержденный в исследовании Сене [67], служит дальнейшим подтверждением точности и надежность текущего численного метода.



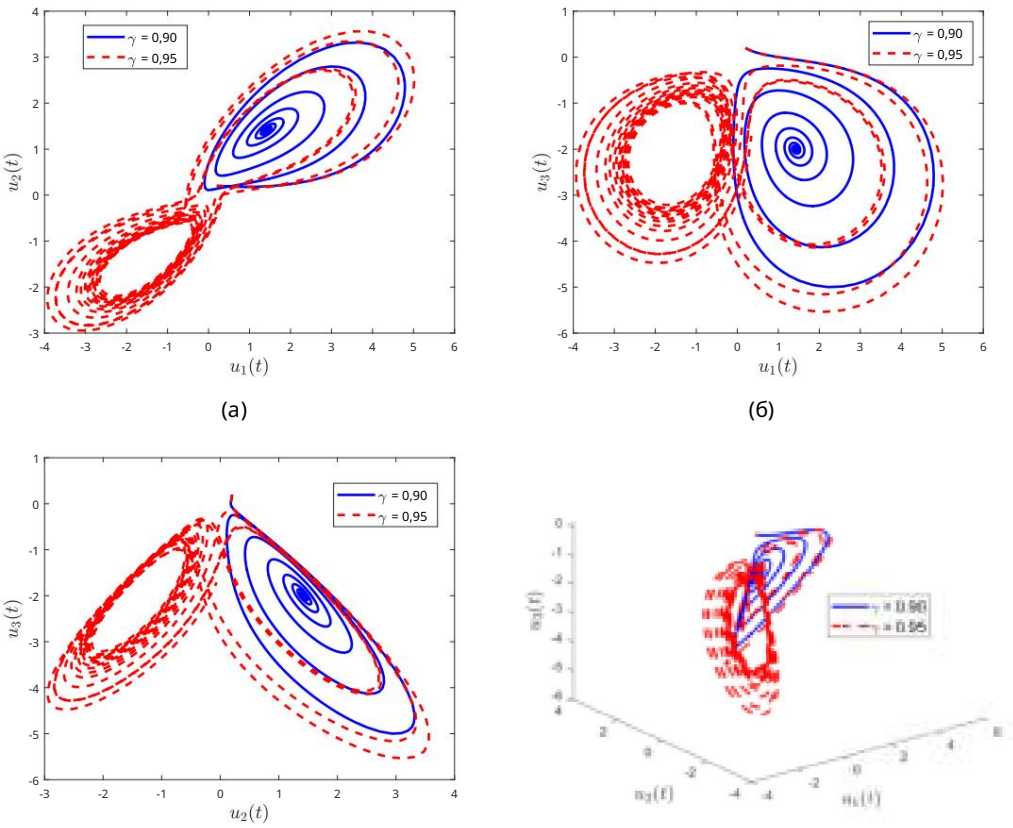
(а) (б)

(в) (г)

Рис. 8. Фазовые портреты хаотических систем (39) для плоскости u1 u2 (а), плоскости u1 u3 (б), (в) плоскость u2 u3 и (г) поверхность u1 u2 u3 с γ = 0,95, T = 150, N = 10 и q = 800.

Machine Translated by Google

На рис. 9 показаны фазовые портреты хаотической системы в уравнении (39) с использованием двух разные значения γ. Рисунок подтверждает, что динамика хаотической системы зависит от произвольный реальный порядок.



(а) (б)

(в) (г)

Рис. 9. Фазовые портреты хаотических систем (39) для плоскости u1 u2 (а), плоскости u1 u3 (б), (в) плоскость u2 u3 и (г) поверхность u1 u2 u3 с γ = 0,90 и 0,95, T = 80, N = 10 и q = 350.

На рисунке 10 показана точность численных результатов (максимальная абсолютная невязка в каждой подобласти) каждого уравнения в хаотических системах, представленных на рис. Уравнения (36)–(39). Из рисунков видно, что точность решений, полученных путем многодоменный псевдоспектральный метод Чебышева высок и иногда достигает погрешностей, меньших, чем те, которые указаны в таблицах. Как можно ясно заметить, поскольку количество подобластей в расчетной области увеличивается, остаточная ошибка соответственно уменьшается. В некоторых случаях остаточная погрешность снижается до порядка 10 16. Однако остаточные ошибки при небольшом количестве поддоменов уже показывают хорошая точность, тем самым показывая, что использование многодоменного подхода, предложенного в этом исследование очень эффективно при решении дробных дифференциальных уравнений, которые обычно требуют долгосрочная интеграция.

Machine Translated by Google

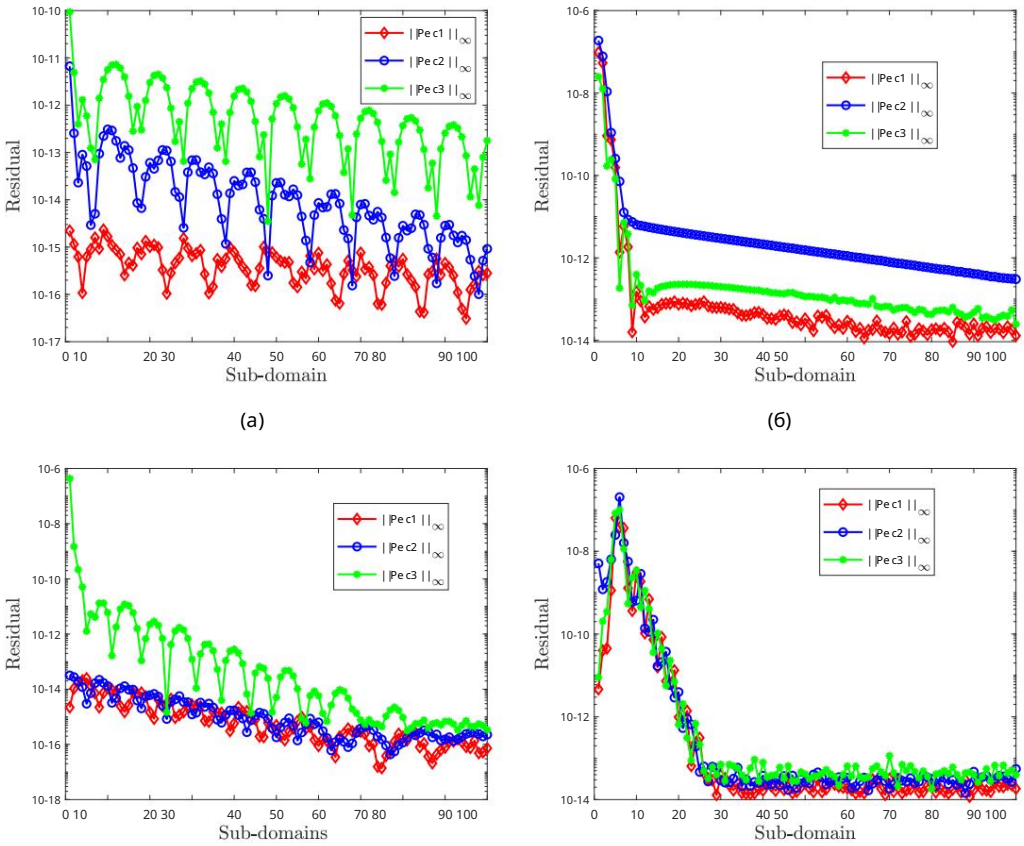


Рисунок 10. Максимальная остаточная ошибка в каждой области для (а) уравнения (36) (b) уравнения (37) (c) уравнения (38) и (d) уравнения (39) с использованием μ = 0,8, T = 50, N = 10 и q = 100.

5. Выводы

В этом исследовании был представлен новый подход - многодоменный псевдоспектральный метод Чебышева для решения дробных дифференциальных уравнений. Новизна метода связана с использованием неперекрывающихся мультиобластей, полиномов Чебышева первого рода и точек коллокации Гаусса – Лобатто при разработке схемы, которая была специально адаптирована для работы с дробными дифференциальными уравнениями. В методе используются глобальные свойства спектральных методов дискретизации нелокальных операторов, таких как дробные дифференциальные операторы, экспоненциальная сходимость псевдоспектрального метода на основе полинома Чебышева и способность многодоменного подхода поддерживать точность решения задач с долгосрочная динамика. Область устойчивости многодоменной схемы была установлена посредством линейного анализа устойчивости. Анализ устойчивости показал, что получение абсолютной и устойчивой по Любиху численной схемы для некоторых значений произвольного нецелого порядка возможно. Было проведено несколько численных экспериментов с использованием линейных и нелинейных одиночных ФДУ и систем нелинейных ФДУ. Примеры были тщательно выбраны, чтобы охватить различные уровни сложности, включая задач и дробного начального значения с долгосрочной динамикой, такие как хаотические системы, которые, как было показано, значительно выигрывают от многодоменной числовой схемы. На этих примерах установлено, что предложенный многодоменный численный метод дает высокоточные результаты. Для проверки метода было проведено сравнение численных результатов, полученных в этом исследовании, с аналитическими решениями, если таковые имеются, и приближенными решениями из литературы. Было обнаружено, что предложенный метод дает более точные решения, чем приближенные решения из литературы. Там, где точное решение было недоступно, проводился анализ остаточных ошибок, чтобы установить точность предложенного метода. Во всех рассмотренных примерах было обнаружено, что этот метод дает

Machine Translated by Google

В будущих исследованиях мы будем изучать применимость псевдоспектрального метода Чебышева в непересекающихся или перекрывающихся разделенных областях для дробных краевых задач с нелинейной динамикой.

Вклад автора: SDO: концептуализация, исследование, методология, программное обеспечение, написание — первоначальный проект, рецензирование и редактирование, контроль. HM: Исследование, методология, написание — первоначальный проект, рецензирование и редактирование. YOT: Исследование, методология, написание — первоначальный проект, рецензирование и редактирование. OO: концептуализация, методология, написание оригинального проекта, рецензирование и редактирование, контроль. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Эта работа основана на исследовании, частично поддержанном Национальным исследовательским фондом Южной Африки (номер ссылки TTK2204163593). APC финансировался Университетом Витватерсран

Заявление Институционального наблюдательного совета: Не применимо.

Заявление об информированном согласии: Не применимо.

Заявление о доступности данных: сгенерированные данные содержатся в статье.

Благодарности: КоуфОлатунджи Тиджани благодарит Университет Родоса за поддержку.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Сокращения

В данной рукописи использованы следующие сокращения:

CGL Чебышев-Гаусс–Лобатто
Дробные дифференциальные уравнения
MSCM Метод многодоменной спектральной коллокации

Ссылки

1. Подлубный И. Дробные дифференциальные уравнения: введение в дробные производные, дробные дифференциальные уравнения, в методы Их решение и некоторые из их приложений; Elsevier: Амстердам, Нидерланды, 1998 г.
2. Олдэм, К.; Спанье, Дж. Теория дробного исчисления и применение дифференцирования и интегрирования в произвольном порядке; Elsevier: Амстердам, Нидерланды, 1974 г.
3. Капуто, М.; Фабрицио, М. Новое определение дробной производной без сингулярного ядра. Прог. Фракт. Отличие. Прил. 2015, 1, 73–85.
4. Атангана А.; Балеану, Д. Новые дробные производные с нелокальным и неособым ядром: теория и применение к теплу. Трансферная модель. arXiv 2016, arXiv:1602.03408.
5. Джавади, Р.; Месгарани, Х.; Никан, О.; Аваззаде, З. Решение дифференциальных уравнений дробного порядка с использованием нейронной сети дробной радиальной базисной функции. Симметрия 2023, 15, 1275. [CrossRef]
6. Бенчоура, М.; Карапинар, Э.; Лазрег, Дж Э.; Салим, А. Дробные дифференциальные уравнения: новые достижения в области обобщенных дробных уравнений Производные; Шпрингер: Чам, Швейцария, 2023 г.
7. Ахмадиан С.; Дарвиши, М. Дробная версия (1+1)-мерного уравнения Бисваса–Милович а и его решения. Оптик 2016, 127, 10135–10147. [Перекрестная ссылка]
8. Манафиан Дж; Лакестани, М. Новый аналитический подход к решениюне которых уравнений в частных производных дробного порядка. Индиан Дж. Физ. 2017, 91, 243–258. [Перекрестная ссылка]
9. Кумар, С.; Кумар, Д.; Аббасбанди, С.; Рашиди, М. Аналитическое решение дробного уравнения Навье – Стокса с использованием модифицированного Метод разложения Лапласа. Айн Шамс англ. Дж 2014, 5, 569–574. [Перекрестная ссылка]
10. Шакил, М.; Мохьюд-Дин, С.Т. Новый метод (G'/G)-разложения и его применение к дробно-симметричному пространству-времени. регуляризованное длинноволновое уравнение (SRLW). Адв. Тенденции Математика. 2015, 2, 1–16. [Перекрестная ссылка]
11. Чжу, К.; Ци, Дж Точные решения нелинейных дробно-частичных дифференциальных симметричных регуляризованных длинных волн в пространстве-времени (SRLW) Уравнение с использованием двух методов. Адв. Математика. Физ. 2022, 2022, 8062119. [CrossRef]
12. Сенол, М. Новые аналитические решения дробно-симметричного регуляризованного длинноволнового уравнения. Преподобный Мекс. De Física 2020, 66, 297–307. [Перекрестная ссылка]
13. Юнал, С.Ч.; Дашчио Глу, А.; Байрам, Д.В. Решения эллиптических функций Якоби дробно-симметричного регуляризованного длинного пространства-времени волновое уравнение. Математика. наук. Прил. Электронные заметки 2021, 9, 53–63. [Перекрестная ссылка]
14. Тулкс Демирей, С.; Булут, Х.; Бельгасем, FBM Метод преобразования Сумуду для аналитических решений дробного типа обыкновенного дифференциальные уравнения. Математика. Пробл. англ. 2015, 2015, 131690. [CrossRef]
15. Кумар, Д.; Дарвиши, М.; Жвардар, А. Модифицированный метод Кудряшова и его применение к дробной версии многообразия Уравнения типа Буссинеска на мелкой воде. Опция Квантовый электрон. 2018, 50, 128. [CrossRef]

Machine Translated by Google

16. Хе, Дж Х. Метод Exp-функций для дробных дифференциальных уравнений. Межд. Дж Нелинейная наука. Число. Симул. 2013, 14, 363–366. [Перекрестная ссылка]
17. Ахмадиан С.; Дарвиши, М. Новая дробная модель Бисваса – Милович а с периодическими солитонными решениями. Оптик 2016, 127, 7694–7703. [Перекрестная ссылка]
18. Туран Д.А. Сину с-косину с-вейвлет-метод аппроксимации решения дробного уравнения Бэгли-Торвика. Сигма Дж Инж Нат. наук. Вер Фен Билим. Дерг. 2022, 40, 150–154.
19. Хан, А.; Шах, К.; Лу о, Д. Численные решения некоторых семейств дифференциальных уравнений дробного порядка с помощью полиномов Лагерра. В нелинейных системно-теоретических аспектах и последних приложениях; IntechOpen: Лондон, Великобритания, 2020 г.
20. Вс, ЗЗ; Гао, Г.Х. Дробные дифференциальные уравнения: методы конечных разностей; Walter de Gruyter GmbH & Co KG: Берлин, Германия, 2020.
21. Хаттаф, К.; Хаджоджи, З.; Айт Ич оу, М; Юсфи, Н. Численный метод решения дробных дифференциальных уравнений с новыми обобщенными Дробная производная Хаттафа. Математика. Пробл. англ. 2022, 2022, 3358071. [CrossRef]
22. Кумар, М.; Джинга, А.; Дафтардар-Геджи, В. Численные методы высшего порядка для дифференциальных уравнений с дробным запаздыванием. Индиан Дж Чистое приложение. Математика. 2024, 1–22. [Перекрестная ссылка]
23. Джинга, А.; Дафтардар-Геджи, В. Новый численный метод решения дифференциальных уравнений с дробным запаздыванием. Вычислить. Прил. Математика. 2019, 38, 166. [CrossRef]
24. Ли, С.; Ким, Х.; Джанг, Б. Новый численный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка и его Приложения. Фрактальный фрактал. 2024, 8, 65. [CrossRef]
25. Кумар, С.; Шфу, ПК; Абдель-Аты, АХ; Махмуд, Э.Э. Численное исследование дробного дифференциального уравнения с моделью роста населения. Число. Методы Частичное Различие. Уравнения 2024, 40, e22684. [Перекрестная ссылка]
26. Бхрави, А.Х.; Таха, ТМ; Мачадо, JAT Обзор операционных матриц и спектральных методов дробного исчисления. Нелинейная Дин. 2015, 81, 1023–1052. [Перекрестная ссылка]
27. Баляну, Д.; Бхрави, А.; Таха, Т. Модифицированный обобщенный спектральный метод Лагерра для дробных дифференциальных уравнений на полупрямой. В трудах абстрактного и прикладного анализа; Интернет-библиотека Wiley: Хобокен, Нью-Джерси, США, 2013 г.; Том 2013, с. 413529.
28. Делхош, М.; Паранд, К. Новый вычислительный метод, основанный на дробных функциях Лагранжа для решения многочленных дробных уравнений. дифференциальные уравнения. Число. Алгоритмы 2021, 88, 729–766. [Перекрестная ссылка]
29. Сюй, К.; Чжэн, З. Спектральный метод коллокации для дробных дифференциальных/интегральных уравнений с обобщенным дробным оператором. Межд. Дж Дифференц. Уравнения 2019, 2019, 3734617. [CrossRef]
30. Расслан, КР; Абд Эль Салам, Массачусетс; Али, К.К.; Мохамед, Э.М. Спектральный метод Тау для решения дифференциала общего дробного порядка уравнения с линейным функциональным аргументом. Дж Египет. Математика. Соц. 2019, 27, 33. [CrossRef]
31. Шен Дж; Шэн, К. Спектральные методы для дробных дифференциальных уравнений с использованием обобщенных функций Якоби. Handb. Фракт. Расчет Прил. Число. Методы 2019, 3, 127–155.
32. Заернури, М.; Карниадакис, Г.Е. Экспоненциально точные спектральные методы и методы спектральных элементов для дробных ОДУ. Дж Компьютер. Физ. 2014, 257, 460–480. [Перекрестная ссылка]
33. Чжао Дж; Чжан, Ю; Сюй, Ю Неявные методы Рунге – Кутты и спектральные методы Галеркина для пространства Рисса дробного/распределенного порядка. уравнение диффузии. Вычислить. Прил. Математика. 2020, 39, 47. [CrossRef]
34. Хадер, М.; Свейлам, Н. Приближенные решения дробного уравнения адвекции-дисперсии с использованием псевдоспектрального лежандра. метод. Вычислить. Прил. Математика. 2014, 33, 739–750. [Перекрестная ссылка]
35. Кардоне, А.; Д'Амброзио, Р.; Патерностер, Б. Спектральный метод для стохастических дробных дифференциальных уравнений. Прил. Число. Математика. 2019, 139, 115–119. [Перекрестная ссылка]
36. Доха, Э Г; Бхрави, АХ; Эззз-Элдиен, С.С. Эффективные спектральные методы Чебышева для решения многочленных дробных порядков дифференциальные уравнения. Прил. Математика. Модель. 2011, 35, 5662–5672. [Перекрестная ссылка]
37. Свейлам, Нью-Хэмпшир; Хадер М.М. Псевдоспектральный метод Чебышева решения интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка. АНЗИАМ Дж 2010, 51, 464–475. [Перекрестная ссылка]
38. Дабири А.; Карими, Л. Псевдоспектральный метод Чебышева для решения задач оптимального управления дробного порядка. В материалах Американской конференции по контролю 2019 г., Филадельфия, Пенсильвания, США, 10–12 июля 2019 г.
39. Олонию, СД; Гоко, СП; Сибанда, П. Геометрически сходящийся псевдоспектральный метод для многомерных двусторонних пространственных дробных дифференциальных уравнений в частных производных. Дж Прил. Аналитический. Вычислить. 2021, 11, 1699–1717. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
40. Олонию, СД; Гоко, СП; Сибанда, П. Псевдоспектральный метод Чебышева для численного решения распределенных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Прил. Математика. Электронные заметки 2022, 22, 132–141.
41. Олонию, СД; Гоко, СП; Сибанда, П. Псевдоспектральный метод для двусторонних дробных дифференциальных уравнений распределенного по времени порядка. Тайвань. Дж Математика. 2021, 25, 959–979. [Перекрестная ссылка]
42. Адель, М.; Хадер, ММ; Ассири, штат Техас; Калель, В. Численное моделирование модели COVID-19 с использованием метода многодоменной спектральной релаксации. Симметрия 2023, 15, 931. [CrossRef]
43. Мхатшва, М.; Хумало, М.; Дламини, П. Многодоменный многомерный спектральный метод коллокации для (2+1)-мерной нелинейной системы уравнения в частных производных. Частичная разница. Уравнения Прикл. Математика. 2022, 6, 100440. [CrossRef]
44. Сэмкоэл, Ф.; Моца, С. Решение гиперболических уравнений в частных производных с использованием высокоточного многодоменного двумерного спектрального метода коллокации. Волновое движение 2019, 88, 57–72. [Перекрестная ссылка]
45. Бирем, М.; Кляйн, К. Многодоменный спектральный метод для уравнений Шредингера. Адв. Вычислить. Математика. 2016, 42, 395–423. [Перекрестная ссылка]

Machine Translated by Google

46. Юнг, Дж Х.; Олмос-Лицага, Д. А. Многодоменный адаптивный сеточный метод Чебышева для уравнений реакции-диффузии. Прил. Число. Математика. 2023, 190, 283–302. [Перекрестная ссылка]
47. Цинь Ю; Чен, Ю; Хуанг, Ю; Ма, Х. Многодоменный метод наименьших квадратов Лежандра-Галеркина для линейных дифференциальных уравнений с переменные коэффициенты. Число. Математика. Теория Методы Прикл. 2020, 13, 665–688.
48. Малеки, М.; Кадхани, М.Т. Численные аппроксимации модели роста населения Вольтерры с дробным порядком с помощью мульти-доменный псевдоспектральный метод. Прил. Математика. Модель. 2015, 39, 4300–4308. [Перекрестная ссылка]
49. Бамбе Мутсинга, К.Р. Робастные временные спектральные методы для решения дробных дифференциальных уравнений в финансах. доктор философии Диссертация, Университет Претории, Претория, ЮАР, 2021 г.
50. Харазми, Э. Одно-/многодоменные спектральные методы, управляемые данными, для стохастических дробных уравнений в уравнениях. доктор философии Диссертация, штат Мичиган Университет, Ист-Лансинг, Мичиган, США, 2018 г.
51. Чжао, Т.; Мао, З.; Карниадакис, Г.Е. Многодоменный спектральный метод коллокации для нелинейного дробного дифференциала переменного порядка уравнения. Вычислить. Методы Прикл. Мех. англ. 2019, 348, 377–395. [Перекрестная ссылка]
52. Кляйн, К.; Стоилов Н. Многодоменный спектральный подход к дробным производным рационального порядка. Стад. Прил. Математика. 2024, 152, 1110–1132. [Перекрестная ссылка]
53. Тавассоли Каяни, М. Численное решение уравнений дробного пантографа с помощью полиномов Мюнца – Лежандра. Математика. наук. 2023, 18, 387–395. [Перекрестная ссылка]
54. Сюй, К.; Хестхавен, Дж С. Устойчивые многодоменные спектральные методы штрафов для уравнений в частных производных дробного типа. Дж Компьютер. Физ. 2014, 257, 241–258. [Перекрестная ссылка]
55. Хаят, У.; Камран, А.; Амбрин, Б.; Йылдирим, А.; Мохьюд-дин, С.Т. О системе дробно-временных дифференциальных уравнений в частных производных. Вал айлак Дж Наук. Технол. (WJST) 2013, 10, 437–448.
56. Олониюо, С.; Нкомо, Н.; Гоко, С.; Сибанда, П. Сдвинутый спектральный метод Чебышева для двумерного дробного пространства-времени уравнения в частных производных. Препринты 2022, 2022050138. [CrossRef]
57. Трефетен Л.Н. Конечно-разностные и спектральные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных; Корнеллский университет: НьюЙорк, США, 1996 год.
58. Далквист Г.Г. Специальная задача устойчивости линейных многошаговых методов. БИТ Число. Математика. 1963, 3, 27–43. [Перекрестная ссылка]
59. Эле Б.Л. Об аппроксимациях Паде экспоненциальной функции и А-устойчивых методах численного решения начальных задач. доктор философии Диссертация, Университет Ватерлоо, Ватерлоо, Онтарио, США, 1969 г.
60. Одибат З.М.; Момани, С. Алгоритм численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка. Дж Прил. Математика. Информатика 2008, 26, 15–27.
61. Ли, К.; Йи, К.; Чен, А. Методы конечных разностей с неравномерными сетками для нелинейных дробных дифференциальных уравнений. Дж Вычислить. Физ. 2016, 316, 614–631. [Перекрестная ссылка]
62. Раджа, МАЗ; Хан, ДжА.; Куреши И.М. Решение системы дробного порядка уравнения Бэгли-Торвика с использованием эволюционных методов вычислительный интеллект. Математика. Пробл. англ. 2011, 2011. [CrossRef]
63. Зафар А.А.; Кудра, Г.; Аврейцевич, Дж Исследование дробного уравнения Бэгли – Торвика. Энтропия 2019, 22, 28. [CrossRef] [ПабМед]
64. Сене, Н. Введение в хаотическую систему дробного порядка под действием дробного оператора в смысле Капуто. Алекс. англ. Дж 2021, 60, 3997–4014. [Перекрестная ссылка]
65. Азам А.; Акил, М.; Ахмад, С.; Ахмад, Ф. Хаотическое поведение модифицированного потока растяжения-скручивания (STF) с фрактальными свойствами. Нелинейная Дин. 2017, 90, 1–12. [Перекрестная ссылка]
66. Ли, К.; Ляо, Х.; Ю Дж Синхронизация хаотических систем дробного порядка. Физ. Ред. Е 2003, 68, 067203. [CrossRef]
67. Сене Н. Исследование хаотической системы дробного порядка, представленной оператором Капуто. Сложность 2021, 2021, 5534872. [Перекрестная ссылка]

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.